Subject: Date: / /

معادلات دیفرانسیل و کاربردهای آن:

تعریف معادله دیفرانسیل: هر معادله‌ای که شامل یک تابع، یک متغیر و تعدادی متناهی مشتقات تابع باشد معادله دیفرانسیل نامیده می‌شود و با علامت $F(\underset{\text{متغیر}}{x}, \underset{\text{تابع}}{y}, \underset{\text{مشتق مرتبه اول}}{y'}, \dots, \underset{\text{مشتق مرتبه n ام}}{y^{(n)}}) = 0$ نمایش می‌دهیم.

مثال:

1) $xy' - y = 0$ مرتبه اول

2) $y''' = 0$ مرتبه سوم

3) $y'' - 3xy' + y = 0$ مرتبه دوم

4) $y^{(4)} + 4y'' = 0$ مرتبه چهارم

5) $y^{(6)} - 9y'' + y = x$ مرتبه ششم

6) $y''' - 9y'' = 0$ مرتبه سوم

بالاترین مرتبه مشتق موجود در معادله دیفرانسیل را مرتبه آن معادله می‌نامیم.

جواب معادله دیفرانسیل: منظور از جواب یک معادله دیفرانسیل تابعی مانند $y = F(x)$ یا $F(x, y) = 0$ که در معادله دیفرانسیل صدق کند.

جواب:
- ۱- جواب عمومی: حالت کلی جواب معادله را جواب عمومی گویند.
- ۲- جواب خصوصی: اگر جواب تحت شرایط خاصی بدست آمده باشد آنرا جواب خصوصی گویند.

مثال: $y'-y=0$ مطرح است جواب عمومی و خصوصی چیست؟

جواب خصوصی
$$\begin{cases} y=e^x \longrightarrow y'=e^x \\ y=2e^x \longrightarrow y'=2e^x \\ y=3e^x \longrightarrow y'=3e^x \end{cases}$$

$\vdots$

جواب عمومی $y=ce^x \longrightarrow y'=ce^x$

مثال: طبق مثال بالا برای $y(0)=10$ یک جواب خصوصی بیابید؟

$$10=ce^0 \longrightarrow c=10 \Rightarrow y=10e^x$$

معادله مرتبه اول: صورت کلی این معادله به شکل: $F(x,y,y')=0$ می باشد.

① معادله جدایی پذیر:

$$F(x,y,y')=0$$

$$y'=F(x,y)$$

$$y'=p(x)q(y)$$

$$\frac{dy}{dx}=p(x)q(y)$$

$$\int\frac{dy}{dx}=\int p(x)\,dx$$

Subject: Date: / /

مثال:

$$xy' - y = 0$$

$$y' = \frac{y}{x}$$

$$y' = \left(\frac{1}{x}\right)(y)$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{1}{x}\right)(y)$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\cancel{\ln} y = \ln x + \ln c = \cancel{\ln} cx$$

$$y = cx$$

مثال ۱: طبق مثال بالا، با شرط $y(1) = 10$ یک جواب خصوصی بیابید؟

$$10 = c(1) \Longrightarrow c = 10 \rightarrow \boxed{y = 10x}$$

برای امتحان درستی جواب معادله:

$$y = cx \rightarrow y' = c$$

$$x(c) - cx = 0 \rightarrow cx - cx = 0$$

مثال: معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید:

1) $y' = xy$

2) $y' = xy + y$

3) $y' = xy^2$

4) $y' = \sin x \cos y$

5) $y' = \frac{xy + y}{xy + x}$

6) $y' = (1 + x^2)(1 + y^2)$

7) $y' = xy + y + x + 1$ ترم پیش سؤال بود

Subject: Date: / /

۱) $\frac{dy}{x} = xy \Rightarrow \frac{dy}{y} = x\,dx \Rightarrow \ln y = \frac{x^2}{2} + C$

۲) $\frac{dy}{dx} = y(x+1) \Rightarrow \frac{dy}{y} = dx\,(x+1) \Rightarrow \ln y = \frac{x^2}{2} + x + C$

۳) $\frac{dy}{dx} = y^2 x \Rightarrow \frac{dy}{y^2} = x\,dx \Rightarrow \frac{-1}{y} = \frac{x^2}{2} + C$

۴) $\frac{dy}{dx} = \sin x \cos y \Rightarrow \frac{dy}{\cos y} = \sin x\,dx \Rightarrow \ln(\sec y + \tan y) = -\cos x + C$

۵) $\frac{dy}{dx} = \frac{y(x+1)}{x(y+1)} \Rightarrow dy\left(\frac{y+1}{y}\right) = dx\left(\frac{x+1}{x}\right) \Rightarrow dy\left(1+\frac{1}{y}\right) = dx\left(1+\frac{1}{x}\right) \Rightarrow$

$y + \ln y = x + \ln x + C$

۶) $\frac{dy}{dx} = (1+x^2)(1+y^2) \Rightarrow \frac{dy}{1+y^2} = dx\,(1+x^2) \Rightarrow \int \frac{dy}{1+y^2} = x + \frac{x^3}{3} + C \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{Arctan} y = x + \frac{x^3}{3} + C$

تمرین: ص ۴۹ مسائل یک و دو حل شود.

۷) $\frac{dy}{dx} = xy + y + x + 1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y(x+1) + (x+1) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = (x+1)(y+1)$

$\Rightarrow \frac{dy}{y+1} \Rightarrow dx\,(x+1) \Rightarrow \ln y+1 = \frac{x^2}{2} + x + C$

Subject: Date: / /

جواب تمرین ۱

1) $y' = xy + x$

$$\frac{dy}{dx} = x(y+1) \Rightarrow \frac{dy}{(y+1)} = x\,dx \Rightarrow \ln(y+1) = \frac{x^2}{2} + c$$

۲) $y' = e^{x+y-1}$

$$\frac{dy}{dx} = e^{x} e^{y} e^{-1} \Rightarrow \int e^{x-1}\,dx \Rightarrow -e^{-y} = e^{x-1} + c$$

۳) $y' = \dfrac{(xy+y^2)}{(x^2+xy)}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \rightarrow \ln y = \ln x + \ln c \rightarrow \boxed{y = cx}$$

جواب تمرین ۲

1) $\sqrt{1+x^2}\,\dfrac{dy}{dx} = xe^{-y}$, $y(0) = 0$

$$\sqrt{1+x^2}\,\frac{dy}{dx} = xe^{-y} \Rightarrow \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{dy}{e^{-y}} \Rightarrow \sqrt{1+x^2} = e^{y} + c \Rightarrow 1 = 1 + c \Rightarrow c = 0$$

۲) $(1-y^2)x\dfrac{dy}{dx} + (1+x^2)y = 0$, $y(\frac{1}{2}) = 2$

$$\frac{(1-y^2)\,dy}{y} + \frac{(1+x^2)\,dx}{x} = 0$$

$$\int \frac{dy}{y} - \int y\,dy + \int \frac{dx}{x} + x\,dx = C$$

$$\ln y - \frac{y^2}{2} + \ln x + \frac{x^2}{2} = C \rightarrow \ln 2 - 2 + \ln\frac{1}{2} + \frac{1}{8} = C \Rightarrow C = -\frac{15}{8}$$

تابع همگن: تابع $F(x,y)=0$ را همگن نامیم در صورتیکه $F(\lambda x,\lambda y)=\lambda^n F(x,y)$

n را درجه همگنی تابع نامیم. مثال: $F(x,y)=xy-y^2$

همگن از درجه ۲ است $F(\lambda x,\lambda y)=(\lambda x)(\lambda y)-(\lambda y)^2=\lambda^2 xy-\lambda^2 y^2=\lambda^2(xy-y^2)$

معادله همگن: معادله $p(x,y)\,dx+q(x,y)\,dy=0$ را همگن نامیم در صورتیکه p و q هر دو تابع همگن و دارای یک درجه همگنی باشند. مثال:

$1)\ 2xy\,dx+(x^2+y^2)\,dy=0$ ✓

$2)\ (x+y)\,dx+(x-y)\,dy=0$ ✓

$3)\ (x-2y+3)\,dy+(2x-y)\,dy=0$ ✗

$4)\ (x^2+y^2)\,dx+(x^3+y^3)\,dy=0$ ✗

$5)\ (x^2+xy)\,dx+(y^2-2xy)\,dy=0$ ✓

$6)\ \sqrt{xy}\,dx+y\,dy=0$ ✓

حل معادله همگن: اگر معادله $p(x,y)\,dx+q(x,y)\,dy=0$ همگن باشد با تغییر متغیر $y=xv$ تبدیل به یک معادله جدایی پذیر می‌شود.

$$y=xv \Rightarrow dy=v\,dx+x\,dv$$

$$v=\frac{y}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$$

$$\Rightarrow y'=v+xv'$$

مثال:

$$2xy\,dx+(x^2+y^2)\,dx=0$$

$$y=xv \Rightarrow dy=v\,dx+x\,dv$$

$$2x(xv)\,dx+(x^2+x^2v^2)(v\,dx+x\,dv)=0$$

$$\div x^2 \Rightarrow 2v\,dx+(1+v^2)(v\,dx+x\,dv)=0$$

$$(2v+v+v^3)\,dx+x(1+v^2)\,dv=0$$

$$(3v+v^3)\,dx+x(1+v^2)\,dv=0$$

$$\div(3v+v^3)x \Rightarrow \frac{dx}{x}+\frac{(1+v^2)\,dv}{3v+v^3}=0$$

$$\int\frac{dx}{x}+\int\frac{(1+v^2)\,dv}{3v+v^3}=0$$

Subject: Date: / /

حل:

① $(x+y)\,dx + (x-y)\,dy = 0$

$y = xv \Rightarrow dy = x\,dv + v\,dx$

$(x + xv)\,dx + (x - xv)(x\,dv + v\,dx) = 0$

$x(1+v)\,dx + x(1-v)(x\,dv + v\,dx) = 0$

$\Rightarrow (1+v)\,dx + (1-v)\,x\,dv + (1-v)\,v\,dx = 0$

$(1 + v - v - v^2)\,dx + (x(1-v))\,dv = 0$

$(1 + 2v - v^2)\,dx + x(1-v)\,dv = 0$

$\Rightarrow \dfrac{dx}{x} + \dfrac{1-v}{1+2v-v^2}\,dv = 0$

$\displaystyle\int \frac{dx}{x} + \frac{1}{2}\int \frac{2-2v}{1+2v-v^2}\,dv = 0$

$\Rightarrow \ln x + \frac{1}{2}\ln(1+2v-v^2) = \ln c$

$\Rightarrow x(1+2v-v^2)^{\frac{1}{2}} = c$

$\Rightarrow x\left(\left(1+2\left(\frac{y}{x}\right)\right)-\left(\frac{y}{x}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} = C$

② $\sqrt{xy}\,dx + y\,dy = 0$

$y = xv \Rightarrow dy = x\,dv + v\,dx$

$\sqrt{x(xv)}\,dx + (xv)(v\,dx + x\,dx) = 0 \qquad \Rightarrow x\sqrt{v}\,dx + x(v^2\,dx + vx\,dx) = 0$

$\Rightarrow \sqrt{v}\,dx + (v^2\,dx + v\,x\,dv) = 0 \qquad \Rightarrow (\sqrt{v} + v^2)\,dx + v\,x\,dv = 0$

$\Rightarrow \dfrac{dx}{x} + \dfrac{v}{v^2+\sqrt{v}}\,dv = 0 \qquad \Rightarrow \dfrac{dx}{x} + \dfrac{\sqrt{v}}{v\sqrt{v}+1}\,dv = 0 \Rightarrow \ln x + \frac{2}{3}\ln(v\sqrt{v}+1) = \ln c$

$\Rightarrow x(v\sqrt{v}+1)^{\frac{2}{3}} = c \xrightarrow{v=\frac{y}{x}} x\left(\left(\frac{y}{x}\times\sqrt{\frac{y}{x}}\right)+1\right)^{\frac{2}{3}} = C$

(۹)

Subject: Date: / /

تمرین ص ۴۹ شماره ۳، ۴:

(۳) (۱) $y' = \dfrac{2x^2+y^2}{-2xy+3y^2}$ $\quad y = xv \rightarrow dy = xdv + vdx$

$v + xv' = \dfrac{2x^2 + x^2v^2}{-2x^2v + 3x^2v^2} = \dfrac{2+v^2}{-2v+3v^2} \Rightarrow xv' = \dfrac{2+v^2}{-2v+3v^2} - v = ?$

$xv' = \dfrac{2+v^2+2v^2-3v^3}{(-2v+3v^2)} = \dfrac{2+3v^2-3v^3}{(-2v+3v^2)} \Rightarrow$

$x\dfrac{dv}{dx} = \dfrac{2+3v^2-3v^3}{-2v+3v^2} \Rightarrow \int\dfrac{dx}{x} = \int\dfrac{dv(-2v+3v^2)}{2+3v^2-3v^3} \Rightarrow \ln x + \ln C = -\dfrac{1}{3}\ln 2+3v^2-3v^3$

(۲) $xdy - ydx = \sqrt{xy}\,dx$ $\quad y = xv \Rightarrow dy = xdv + vdx$

$x(xdv + vdx) - xvdx = \sqrt{x^2v}\,dx$

$(x^2dv + \cancel{xvdx}) - \cancel{xvdx} = x\sqrt{v}\,dx \Rightarrow x^2dv = x\sqrt{v}\,dx \Rightarrow xdv = \sqrt{v}\,dx$

$\int\dfrac{dx}{x} = \int\dfrac{dv}{\sqrt{v}} \Rightarrow \ln x + \ln c = 2\sqrt{v}$

(۳) $(y^2-2xy)dx + (2xy-x^2)dy = 0$ $\quad y = xv \Rightarrow dy = xdv + vdx$

$(x^2v^2 - 2x^2v)dx + (2x^2v - x^2)(xdv + vdx) = 0$

$(v^2-2v)dx + (2v-1)(xdv+vdx) = 0$

$(v^2-2v+2v^2-v)dx + (2v-1)xdv = 0$

$(3v^2-3v)dx + x(2v-1)dv = 0$

$\dfrac{dx}{x} + \dfrac{(2v-1)dv}{(3v^2-3v)} \Rightarrow \ln x + \dfrac{1}{3}\ln 3v^2-3v = \ln c$

Subject:

Date: / /

ۿ $xy' - y = \sqrt{x^۲ - y^۲}$

$x(v + xv') - xv = \sqrt{x^۲ - x^۲v^۲}$

۷) $y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$ $\quad y = xv \Rightarrow dy = xdv + vdx$

$(v + xv') = v + \frac{1}{v}$

$xv' = \frac{1}{v} \longrightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{1}{v} \longrightarrow \int v\,dv = \int \frac{dx}{x} \longrightarrow$

$\frac{v^۲}{۲} = \ln x + c$

Subject: Date: / /

معادلاتی که قابل تبدیل به معادلات همگن می‌باشند:

معادله با ضرایب خطی:

$$y'=\frac{\overbrace{ax+by+c}^{u}}{a'x+b'y+c'}$$

الف) دو خط موازی باشند: $(ab'-ba'=0)$ و داریم: $a'x+b'y=\lambda(ax+by)$

با انتخاب $ax+by=u$ داریم: $\Rightarrow a+by'=u' \Rightarrow y'=\frac{u'-a}{b}$

در نهایت با جایگذاری در معادله اصلی داریم:

$$\frac{u'-a}{b}=\frac{u+c}{\lambda u+c'}$$

$$u'=b\frac{u+c}{\lambda u+c'}+a$$

$$u'=F(u)$$

$$\frac{du}{dx}=F(u)$$

$$\int\frac{du}{F(u)}=\int dx$$

مثال: $y'=\frac{x-y+1}{2x-2y+5}$

حل: $(1)(-2)-(-1)(2)=0$

$$x-y=u \Rightarrow 1-y'=u' \Rightarrow y'=u'-1$$

$$\xrightarrow{\text{جایگذاری}} u'-1=\frac{u+1}{2u+5}$$

$$u'=1+\frac{u+1}{2u+5}=\frac{2u+5+u+1}{2u+5}\Longrightarrow u'=\frac{3u+6}{2u+5}$$

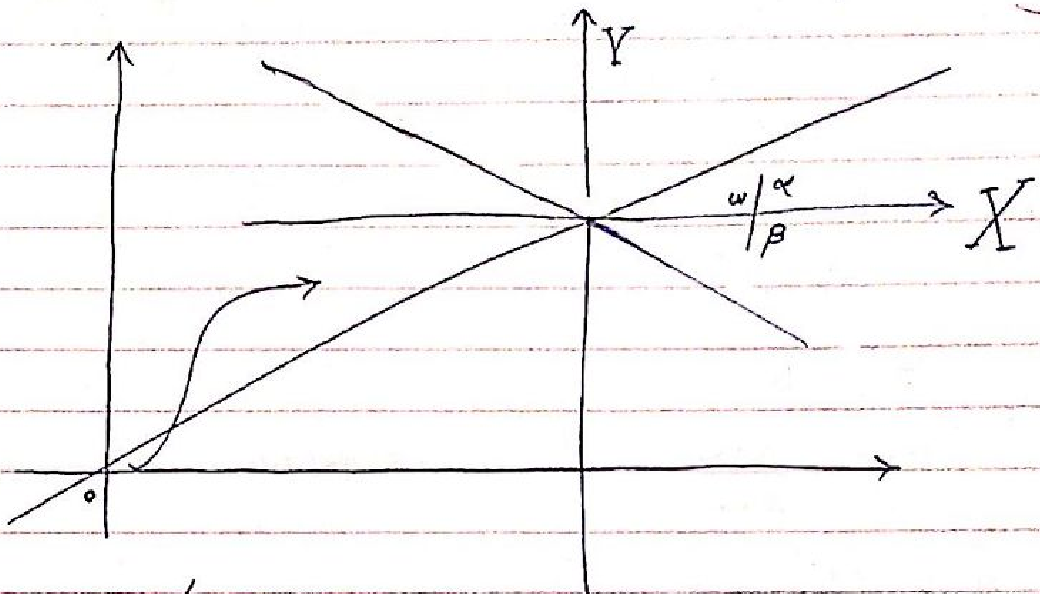
$$\frac{du}{dx}=\frac{3u+6}{2u+5}\Longrightarrow\int\frac{2u+5}{3u+6}\,du=\int dx$$

$$\int\frac{2}{3}\,du+\int\frac{1}{3u+6}\,du=x+c\Longrightarrow\frac{2}{3}u+\frac{1}{3}\ln|3u+6|=x+c$$

$$\frac{2}{3}(x-y)+\frac{1}{3}\ln|3(x-y)+6|=x+C$$

Subject: Date: / /

ب) دو خط موازی نباشند: $(ab'-ba'\neq 0)$



$$\begin{cases} x = X+\alpha \\ y = Y+\beta \\ dx = dX \\ dy = dY \end{cases}$$

$$Y' = \frac{aX+bY}{a'X+b'Y}$$

مثال: $y' = \dfrac{x+y+3}{x-y+1}$

حل: $(1)(-1)-(1)(1) = -1-1 = -2 \neq 0$ دو خط متقاطعند

$$\begin{cases} x+y+3=0 \\ x-\cancel{y}+1=0 \end{cases}$$
$$2x+4=0 \longrightarrow \begin{matrix} x = \boxed{-2} = \alpha \\ y = \boxed{-1} = \beta \end{matrix}$$

$$x = X-2, \quad y = Y-1 \Rightarrow$$

$$Y' = \frac{X-\cancel{2}+Y-\cancel{1}+\cancel{3}}{X-\cancel{2}-Y+\cancel{1}+\cancel{1}} \Rightarrow Y' = \frac{X+Y}{X-Y}$$ یک معادله همگن است.

مثال: $y' = \dfrac{2x+y-3}{x+2y-1}$

حل: $2(2)-(1)(1) = 3 \neq 0$ موازی نیستند

$$\begin{cases} 4x+\cancel{2y}-6=0 \\ x+\cancel{2y}+1=0 \end{cases}$$
$$3x-7=0 \Rightarrow x = \frac{7}{3} \quad \alpha$$

$$\frac{7}{3}+2y-1=0 \Rightarrow 2y = 1-\frac{7}{3} \Rightarrow y = \frac{-5}{3} \quad \beta$$

Subject: Date: / /

$$\begin{cases} x = X + \frac{7}{3} \\ y = Y - \frac{5}{3} \end{cases} \qquad y' = \frac{2(X+\frac{7}{3}) + (Y-\frac{5}{3}) - 3}{(X+\frac{7}{3}) + 2(Y-\frac{5}{3}) + 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = \frac{2X + \frac{7}{3} + Y - \frac{5}{3} - 3}{X + \frac{7}{3} + 2Y - \frac{10}{3} + 1} \Rightarrow y' = \frac{2X+Y}{X+2Y}$$ معادله همگن

معادله کامل: تعریف: معادله $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ را کامل نامیم در صورتیکه تابعی مانند $u(x,y)$ یافت شود به طوری $\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y)$, $\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y)$

قضیه: معادله دیفرانسیل $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ کامل است اگر و فقط اگر $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

مثال: $(e^x + y^2)dx + 2xy\,dy = 0$ کامل است $\Leftarrow$ $\frac{\partial P}{\partial y} = 2y = \frac{\partial Q}{\partial x} = 2y$

روش حل معادله کامل: اگر معادله $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ کامل باشد $\left(\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}\right)$

بنابر تعریف $u(x,y) = C$ هست که: $\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y)$, $\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y)$

$$\int \frac{\partial u}{\partial x} dx = \int P(x,y)\,dx + g(y)$$

$$u(x,y) = \int P(x,y)\,dx + g(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)\,dx + g'(y)$$

$$Q(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)\,dx$$

$$g'(y) = Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)\,dx$$

$$g(y) = \int\left(Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)\,dx\right)dy$$

Subject: Date: / /

$(e^x + y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0$: حل

$u(x,y) = \int (e^x + y^2)\,dx + g(y)$

$u(x,y) = e^x + y^2x + g(y)$

$\frac{\partial u}{\partial y} = 2xy + g'(y)$

$2x\cancel{y} = 2x\cancel{y} + g'(y)$

$g'(y) = 0 \Longrightarrow g(y) = C$

$u = e^x + y^2x + C$

Subject: تمرینهای حل شده معادلات Date: / /

ج ۵: معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید.

① $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+xy+y^2}{x^2}$ همگن از درجه ۲ است.

$$x\,dv + v\,dx = \frac{(x^2+x^2v+v^2x^2)\,dx}{x^2} \Rightarrow (1+v+v^2)\,dx - v\,dx = x\,dv \Rightarrow$$

$$(v^2+1)\,dx = x\,dv \Rightarrow v^2x + x = xv \Rightarrow \frac{y^2}{x} + x + c = y$$

② $y' = \frac{2x-y}{x-2y}$ همگن از درجه یک است.

$$x\,dv + v\,dx = \frac{(2x - vx)\,dx}{x - 2vx} \Rightarrow x\,dv = \frac{2-v}{1-2v}dx - v\,dx = \frac{2v^2-2v+2}{1-2v}dx \Rightarrow$$

$$xv = \frac{2v^2-2v+2}{1-2v}x + c \Rightarrow y = \frac{\frac{2y^2}{x^2} - \frac{2y}{x} + 2}{1 - \frac{2y}{x}}x + c$$

③ $\frac{dx}{dy} = \frac{5x-y}{2x+2y} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2x+2y}{5x-y} \Rightarrow x\,dv + v\,dx = \frac{2x+2vx}{5x-vx}dx \Rightarrow$

$$x\,dv = \frac{2+2v}{5-v}dx - v\,dx \Rightarrow xv = \frac{v^2-3v+2}{5-v}x + c \Rightarrow y = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 3\left(\frac{y}{x}\right) + 2}{5 - \frac{y}{x}}x + c$$

④ $\frac{dy}{dx} = \frac{x-y+5}{x+y-1} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{x+y}$ همگن از درجه یک $\Rightarrow x\,dv + v\,dx = \frac{x-vx}{x+vx}dx$

$$\Rightarrow x\,dv = \frac{1-v}{1+v}dx - v\,dx \Rightarrow xv = \frac{v^2-2v+1}{1+v}x + c \Rightarrow$$

$$y-3 = \frac{\frac{(y-3)^2}{(x+2)^2} - 2\left(\frac{y-3}{x+2}\right) + 1}{1 + \frac{y-3}{x+2}}(x+2) + c$$

Subject: Date: / /

ع ۷: در تمرین ها زیر بعضی از معادله ها کامل هستند و بعضی نیستند برای معادله ها کامل جواب عمومی را بدست آورید

① $\underbrace{(3x^2+4xy)}_{M}dx+\underbrace{(2x^2+2y)}_{N}dy=0$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial M}{\partial y}=4x\\[2mm] \dfrac{\partial N}{\partial x}=4x\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}=4x \longrightarrow$$ معادله کامل است پس:

$$F=\int M\,dx+g(y)\to F=\int(3x^2+4xy)\,dx+g(y)\to F=x^3+4y\frac{x^2}{2}+g(y)\to$$

$$\Rightarrow \frac{df}{dy}=2x^2+g'(y)=2x^2+2y\longrightarrow \int 2y\,dy=\frac{y^2}{2}\times 2=y^2\longrightarrow F=x^3+2x^2y+y^2$$

② $\underbrace{(x-y)}_{M}dx+\underbrace{(-x+y+2)}_{N}dy=0\longrightarrow \dfrac{\partial M}{\partial y}=-1 \quad \dfrac{\partial N}{\partial x}=-1 \longrightarrow$ معادله کامل است پس:

$$F=\int(x-y)\,dx+g(y)=\frac{x^2}{2}-yx+g(y)\longrightarrow \frac{df}{dy}=\cancel{-x}+g'(y)=\cancel{-x}+y+2$$

$$\Rightarrow\int(y+2)\,dy=\frac{y^2}{2}+2y\longrightarrow F=\frac{x^2}{2}-yx+\frac{y^2}{2}+2y+C$$

③ $\underbrace{(2xy-\tan y)}_{M}dx+\underbrace{(x^2-x\sec^2 y)}_{N}dy=0\Rightarrow \dfrac{\partial M}{\partial y}=2x-(1+\tan^2 y)$

$\dfrac{\partial N}{\partial x}=2x-\sec^2 y=2x-(1+\tan^2 y)\longrightarrow$ معادله کامل است پس:

$$F=\int(2xy-\tan y)\,dx+g(y)=x^2y-x\tan y+g(y)\longrightarrow$$

$$\longrightarrow\frac{df}{dy}=\cancel{x^2}-\cancel{x(1+\tan^2 y)}+g'(y)=\cancel{x^2}-\cancel{x\sec^2 y}\longrightarrow g'(y)=0\longrightarrow$$

$$\longrightarrow F=x^2y-x\tan y+C$$

۴) $ye^{xy}\,dx + (xe^{xy} + 1)\,dy = 0 \rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = e^{xy} + xe^{xy}$

$\frac{\partial N}{\partial x} = e^{xy} + ye^{xy} \rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x} \rightarrow$ پس معادله کامل نیست!

۵) $\cos y\,dx + \sin x\,dy = 0 \rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = -\sin y \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \cos x \rightarrow$

$\rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x} \rightarrow$ پس معادله کامل نیست!

۶) $(\sin x \sin y - xe^{y})\,dy = (e^{y} + \cos x \cos y)\,dy$. اینو نتوانستم حل کنم!

!! فکر کنم صورت سئوال اشتباه است!!

۷) $(6x^5y^4 + 4x^3y^5)\,dx + (3x^6y^2 + 5x^4y^4)\,dy = 0$

$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial M}{\partial y} = 24x^5y^3 + 20x^3y^4 \\ \frac{\partial N}{\partial x} = 18x^5y^2 + 20x^3y^4 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x} \rightarrow$ معادله کامل نیست!

۸) $(\sin y + y\sin x + \frac{1}{x})\,dx + (x\cos y - \cos x + \frac{1}{y})\,dy = 0$

$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial M}{\partial y} = \cos y + \sin x \\ \frac{\partial N}{\partial x} = \cos y + \sin x \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \rightarrow$ پس معادله کامل است

$F = \int (\sin y + y\sin x + \frac{1}{x})\,dx + g(y) \rightarrow$

$\rightarrow F = x\sin y - y\cos x + \ln|x| + C + g(y) \rightarrow$

$\frac{\partial F}{\partial y} = \cancel{x\cos y} - \cancel{\cos x} + g'(y) = \cancel{x\cos y} - \cancel{\cos x} + \frac{1}{y} \rightarrow$

$$\rightarrow g'(y)=\frac{1}{y} \rightarrow g(y)=\int g'(y)\,dy=\int \frac{1}{y}\,dy=\ln|y|$$

$$\rightarrow F=x\sin y-y\cos x+\ln|x|+\ln|y|+C$$

ج ۷: در هر یک از معادلات زیر مقدار b را طوری تعیین کنید که معادله کامل باشد و سپس به ازای این مقدار b معادله را حل کنید.

① $(xy^2+bx^2y)\,dx+(x+y)\,x^2\,dy=0$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x} \rightarrow 2xy+bx^2=3x^2+2xy \Longrightarrow b=3$$

$$F=\int (xy^2+3x^2y)\,dx+g(y) \rightarrow F=\frac{x^2}{2}y^2+x^3y+g(y) \rightarrow$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=x^2y+x^3+g'(y)=x^3+x^2y \rightarrow F=\frac{x^2}{2}y^2+x^3y+C$$

② $(ye^{2xy}+x)\,dx+bxe^{2xy}\,dy=0$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x} \rightarrow e^{2xy}+2xye^{2xy}=be^{2xy}+bx.2ye^{2xy} \rightarrow b=1$$

$$F=\int (ye^{2xy}+x)\,dx+g(y) \rightarrow \frac{y}{2y}\cdot e^{2xy}+\frac{x^2}{2}+g(y) \Longrightarrow$$

$$\frac{2xe^{2xy}}{2}+g'(y) \rightarrow g'(y)=0 \rightarrow F=\frac{1}{2}e^{2xy}+\frac{x^2}{2}+C$$

Subject: Date:

فاکتورهای انتگرال (عوامل انتگرال ساز): اگر $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$ کامل نباشد

$\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \neq 0\right)$ و تابعی مانند $F(x,y)$ یافت شود به طوری که

$F(x,y)\,P(x,y)\,dx + F(x,y)\,Q(x,y)\,dy = 0$ کامل باشد، تابع $F(x,y)$ را یک فاکتور انتگرال نامیم.

مثال: نشان دهید $F(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$ یک فاکتور انتگرال معادله $(x^2+y^2-x)\,dx - y\,dy = 0$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y \neq \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$ کامل نیست

$$\frac{1}{x^2+y^2} \times (\text{معادله اصلی}) \Rightarrow \left(1 - \frac{x}{x^2+y^2}\right)dx - \frac{y}{x^2+y^2}\,dy = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$ کامل است.

روش پیدا کردن فاکتورهای انتگرال: اگر $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ کامل نباشد $\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \neq 0\right)$

① $$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = f(x) \Longrightarrow F(x,y) = e^{\int f(x)\,dx}$$

② $$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{P} = f(y) \Longrightarrow F(x,y) = e^{-\int f(y)\,dy}$$

③ $$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{yQ - xP} = f(x,y) \Rightarrow F(x,y) = e^{\int f(z)\,dz} \Rightarrow z = xy$$

مثال: $(x^2+y^2-1)\,dx + xy\,dy = 0$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = y$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 2y - y = y$$

$$\frac{y}{xy} = \frac{1}{x} = f(x)$$

$$F(x,y) = e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{\ln x} = x$$

(۲) تمرین ۱۱ و ۱۲ و ۱۳ و ۱۴ و ۱۵ حل گردد.

Subject: Date: / /

$$(x^3 + xy^2 - x)\,dx + (x^2 y)\,dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \Rightarrow 2xy = 2xy \rightarrow$$ کامل است.

$$F = \int (x^3 - xy^2 - x)\,dx + g(y) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} - \frac{x^2}{2} + g(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \cancel{x^2y} + g'(y) \Rightarrow g'(y) = 0$$

$$= \cancel{x^2y} \qquad g(y) = C$$

$$\boxed{\frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} - \frac{x^2}{2} + C}$$

(۴) فرض می‌کنیم معادله غیرکامل $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$ دارای فاکتور انتگرالی به صورت $F(x,y) = x^\alpha y^\beta$ باشد. در معادله در رعایت شرط کامل بودن اگر برای α و β مقادیر حقیقی بدست آید

این روش کاربرد دارد.

مثال: $(3y + 4xy^2)\,dx + (2x + 3x^2y)\,dy = 0$

$$\times x^\alpha y^\beta \Rightarrow (3x^\alpha y^{\beta+1} + 4x^{\alpha+1}y^{\beta+2})\,dx + (2x^{\alpha+1}y^\beta + 3x^{\alpha+2}y^{\beta+1})\,dy = 0$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial y} = 3(\beta+1)x^\alpha y^\beta + 4(\beta+2)x^{\alpha+1}y^{\beta+1} \\[2ex] \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 2(\alpha+1)x^\alpha y^\beta + 3(\alpha+2)x^{\alpha+1}y^{\beta+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3(\beta+1) = 2(\alpha+1) \\ 4(\beta+2) = 3(\alpha+2) \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{r} \times 3 \\ \times -2 \end{array}\begin{cases} 3\beta - 2\alpha = -1 \\ 4\beta - 3\alpha = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9\beta - 6\alpha = -3 \\ -8\beta + 6\alpha = 4 \end{cases} \Rightarrow \beta = 1, \quad \alpha = 2$$

$$6 = 2\alpha + 2$$

$$2\alpha = 4 \qquad \Rightarrow F(x,y) = x^2 y$$

$$\alpha = \boxed{2}$$

مثال:

$$(x^2+y^2-1)\,dx - y\,dy = 0$$

$2y \neq 0$

$$\frac{1}{Q}(2y) = \frac{2y}{-y} = -2 \Rightarrow F(x,y) = e^{-\int 2\,dx} = e^{-2x}$$

$$(x^2 e^{-2x} + y^2 e^{-2x} - e^{-2x})\,dx - (y e^{-2x}).\,dy = 0$$

$2y e^{-2x} = -(-2y e^{-2x})$ کامل است.

تمرین ۷ ①

① $\underbrace{(xy^2 + bx^2y)}_{M}\,dx + \underbrace{(x+y)}_{N}\,x^2\,dy = 0 \qquad (x^3 + x^2y)$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \Rightarrow 2yx + bx^2 = 3x^2 + 2xy \Rightarrow b = 3$$

تمرین ۷ ②

② $\underbrace{(ye^{2xy} + x)}_{M}\,dx + \underbrace{bxe^{2xy}}_{N}\,dy = 0$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \Rightarrow e^{2xy} + 2xye^{2xy} = be^{2xy} + 2bxye^{2xy} \Rightarrow b = 1$$

تمرین ۱۱ ①

① $\underbrace{(3x^2 - y^2)}_{N}\,dy \underbrace{- 2xy}_{M}\,dx = 0$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -2x,\ \frac{\partial N}{\partial x} = 6x \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = -8x$$

$$\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{-1}{2xy}(-8x) = -\frac{4}{y}$$

$$e^{-\int \frac{4}{y}dy} \Rightarrow e^{-4\int \frac{dy}{y}} = e^{-4\ln y} = y^{-4}$$

تمرین ۱۱ ②

② $\left[e^y + xe^y + \tan(e^x)\right]dx + xe^y\,dy = 0$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = e^y + xe^y,\ \frac{\partial N}{\partial x} = e^y \Rightarrow xe^y$$

$$\frac{1}{N}(xe^y) = \frac{1}{\cancel{xe^y}}(\cancel{xe^y}) = 1 \Rightarrow e^{\int f(x)dx} = e^{\int dx} = e^x$$

تمرین ۱۱ ③

$$x\,dy + y\,dx + 3x^3y^4\,dy = 0 \Rightarrow \underbrace{y}_{M}\,dx + \underbrace{(x + 3x^3y^4)}_{N}\,dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1,\quad \frac{\partial N}{\partial x} = 1 + 9x^2y^4 \Rightarrow -9x^2y^4$$

$z = xy$

$$\frac{1}{yN - xM}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{1}{(\cancel{xy} + 3x^3y^5) - (\cancel{xy})}(-9x^2y^4) = -\frac{3}{xy} = -\frac{3}{z} \Rightarrow$$

Subject: Date: / /

$$e^{\int f(z)dz} = e^{\int -\frac{3}{z}dz} = e^{-3\int \frac{dz}{z}} = e^{-3\ln z} = z^{-3} \Rightarrow (xy)^{-3}$$

④ $$(\underbrace{x\cos y - y\sin y}_{N})dy + (\underbrace{x\sin y + y\cos y}_{M})dx = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = x\cos y + \cos y - y\sin y \quad , \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \cos y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = x\cos y - y\sin y$$

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{1}{x\cos y - y\sin y}(x\cos y - y\sin y) = 1 \Rightarrow \mu = e^{\int f(x)dx} = e^{x}$$

⑤ $$(\underbrace{x^4y^2 - y}_{M})dx + (\underbrace{x^2y^4 - x}_{N})dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x^4y - 1 \quad , \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2xy^4 - 1 \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 2x^4y - 2xy^4 = \boxed{2xy(x^3 - y^3)}$$

$$\frac{1}{yN - xM}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{1}{\underbrace{x^2y^5 - xy - x^5y^2 + xy}_{x^2y^2(y^3 - x^3)}}\left(2xy(x^3 - y^3)\right) = \frac{-2}{xy} \Rightarrow$$

$$y = e^{\int f(z)dz} = e^{-2\int \frac{dz}{z}} = e^{-2\ln z} = z^{-2} \rightarrow z = xy \rightarrow (xy)^{-2}$$ جواب آخر

⑦ $$y(2x + y^3)dx - x(2x - y^3)dy = 0$$

$$\rightarrow (2xy + y^4)dx - (2x^2 - xy^3)dy = 0$$

$$\times x^{\alpha}y^{\beta} \Rightarrow (2x^{\alpha+1}y^{\beta+1} + x^{\alpha}y^{\beta+4})dx - (2x^{\alpha+2}y^{\beta} - x^{\alpha+1}y^{\beta+3})dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2(\beta+1)(x^{\alpha+1})y^{\beta} + (\beta+4)x^{\alpha}y^{\beta+3}$$

Subject: Date: / /

$$\frac{dN}{dx} = -2(\alpha+2)(x^{\alpha+1})\,y^{\beta} + (\alpha+1)(x^{\alpha})(y^{\beta+3})$$

$$\begin{cases} 2\beta+2 = -2\alpha-4 \\ \beta+4 = \alpha+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\beta+2 = -2\alpha-4 \\ \times 2\quad \beta-\alpha = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\beta+2\alpha = -6 \\ 2\beta-2\alpha = -6 \end{cases}$$

$$\beta = -3 \qquad \alpha = 0$$

$$\mu = x^{0}y^{-3} = y^{-3}$$

معادله خطی مرتبه اول ، صورت کلی : $A(x)y' + B(x)y + C(x) = 0 \quad (A(x) \neq 0)$

$$\Rightarrow \div A(x) \Rightarrow y' + \frac{B(x)}{A(x)}y = \frac{-C(x)}{A(x)}$$

معادله خطی مرتبه اول استاندارد $y' + P(x)\,y = q(x)$

$$y = e^{-\int P(x)\,dx}\int e^{\int P(x)\,dx}\,q(x)\,dx$$

روش حل معادله که استاندارد است

مثال : $y' + 2y = e^{3x} \Rightarrow P(x) = 2 \quad q(x) = e^{3x}$

$$y = e^{-\int 2dx}\int e^{\int 2dx}\,e^{3x}\,dx$$

$$y = e^{-2x}\int e^{2x}e^{3x}\,dx$$

$$y = e^{-2x}\int e^{5x}\,dx$$

$$y = e^{-2x}\left(\frac{1}{5}e^{5x} + C\right)$$

$$y = \frac{1}{5}e^{3x} + Ce^{-2x}$$

Subject: ۴ Date: / /

مثال: معادله خطی مرتبه اول $y' + xy = x$ را حل کنید!

$p(x)=x \quad , \quad q(x)=x \qquad y = e^{-\int x\,dx}\int e^{\int x\,dx}\, x\,dx$

$$y = e^{-\frac{x^2}{2}}\int e^{\frac{x^2}{2}}\, x\,dx$$

$$y = e^{-\frac{x^2}{2}}\left(e^{\frac{x^2}{2}}+c\right)$$

$$y = 1+ce^{-\frac{x^2}{2}}$$

معادلاتی که قابل تبدیل به معادله خطی مرتبه اول می‌باشند:

۱- معادله برنولی: صورت کلی: $y'+p(x)y=q(x)y^{n} \qquad (n\neq 0,1)$

$$\div y^n \Rightarrow y'y^{-n}+p(x)\underbrace{y^{1-n}}_{u}=q(x)$$

$$y^{1-n}=u \Longrightarrow (1-n)y'y^{-n}=u'$$

$$\Rightarrow y'y^{-n}=\frac{u'}{1-n}$$

با جایگذاری در معادله داریم: $\frac{u'}{1-n}+p(x)u=q(x)$

خطی مرتبه اول برحسب u است: $u'+(1-n)p(x)u=(1-n)q(x)$

مثال: $y'+xy=xy^2$

$$\div y^2 \Rightarrow y'y^{-2}+x\underbrace{y^{-1}}_{u}=x$$

$$y^{-1}=u \Rightarrow -y'y^{-2}=u'$$

$$y'u^{-2}=-u'$$

Subject: ن

Date: / /

$$-u' + xu = x$$

$$u' - xu = -x$$

$$y^{-1} = u = e^{\int x\,dx}\int e^{-\int x\,dx}(-x)\,dx$$

$$y^{-1} = u = e^{\frac{x^2}{2}}\int e^{-\frac{x^2}{2}}(-x)\,dx$$

$$y^{-1} = u = e^{\frac{x^2}{2}}\left(e^{-\frac{x^2}{2}} + c\right)$$

$$u = y^{-1} = 1 + c\,e^{\frac{x^2}{2}}$$

۲ـ معادله ریکاتی: (بعنوان تمرین از متن کتاب مطالعه شود.)!

۳ـ معادله لاگرانژ: $y = xf(y') + g(y')$

$$y' = p \Rightarrow \frac{dy}{dx} = p \Rightarrow \boxed{dy = p\,dx}$$

$$y = xf(p) + g(p)$$

$$\xrightarrow{d} dy = f(p)\,dx + xf'(p)\,dp + g'(p)\,dp$$

$$\big(p - f(p)\big)dx = \big(xf'(p) + g'(p)\big)dp$$

$$\div\big(p - f(p)\big)dp \Rightarrow \frac{dx}{dp} - \frac{xf'(p)}{p - f(p)} = \frac{g'(p)}{p - f(p)}$$

$$x' - xF(p) = G(p)$$ معادله خطی مرتبه اول برحسب x

جواب پارامتری

$$\begin{cases} x = ? \\ y = xf(p) + g(p) \end{cases}$$

مثال: $y = xy'^2 + \cancel{x}y'^3$

حل: $y' = p \Rightarrow dy = p\,dx$

$$y = xp^2 + p^3$$

$$\xrightarrow{d} dy = p^2dx + 2px\,dp + 3p^2dp$$

$$(p - p^2)\,dx = (2px + 3p^2)\,dp$$

$$\div (p - p^2)\,dp$$

۱

Subject: معادلات مرتبه دوم و بالاتر Date: / /

تعریف: هر معادله‌ای به فرم $y^{(n)}+f_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+f_n(x)y=Q(x)$ یک معادله مرتبه n نامیده می‌شود.

ـ اگر $Q(x)=0$ معادله را مرتبه n همگن نامیم.

ـ اگر $Q(x)=0$ و f_i ها اعداد حقیقی باشند معادله را مرتبه n همگن با ضرایب ثابت نامیم.

معادله (۱)

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_ny=0$$

استقلال خطی: اگر y_1 و ... و y_n، n جواب معادله (۱) باشند گوئیم مستقل خطی هستند هرگاه:

$$\forall\, i\neq j \quad \frac{y_i}{y_j}\neq f(x)$$

در غیر اینصورت آنها را وابسته خطی گوئیم.

رونسکی جواب‌ها: اگر y_1 و ... و y_n، n جواب معادله (۱) باشند رونسکی آنها به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$w(y_1,\dots,y_n)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & & & \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

(رونسکی را با w نشان می‌دهند)

قضیه: اگر y_1 و ... و y_n، n جواب معادله (۱) باشند مستقل خطی هستند اگر و تنها اگر:

$$w(y_1,\dots,y_n)\neq 0$$

مثال ۱: آیا جواب‌های $y_1=e^{2x}$، $y_2=x$ و $y_3=2x$ مستقل خطی هستند چرا؟

روش اول:

$$\frac{y_1}{y_2}=\frac{e^{2x}}{x}$$

$$\frac{y_1}{y_3}=\frac{e^{2x}}{2x}$$

$$\frac{y_2}{y_3}=\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}$$

$\Longrightarrow$ وابسته خطی هستند

چون این معادله بر حسب $f(x)$ نشد پس ...

Subject: بررسی درس دوم
Date: / /

$$W(e^{2x}, x, 2x) = \begin{vmatrix} e^{2x} & x & 2x \\ 2e^{2x} & 1 & 2 \\ 4e^{2x} & 0 & 0 \end{vmatrix} = 4e^{2x}(2x-2x)=0$$

بنابر قضیه فوق این جواب ها وابسته هستند.

جواب عمومی معادله (۱): اگر $y_1, \dots, y_n$ ، n جواب مستقل خطی معادله (۱) باشند آنگاه،

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n$$

را جواب عمومی نامیم.

روش حل معادله (۱): $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0$

فرض کنیم $y = e^{rx}$ جواب این معادله باشد.

$$y = e^{rx}, \quad y' = re^{rx}, \quad y'' = r^2 e^{rx}, \quad \dots, \quad y^{(n)} = r^{(n)} e^{rx}$$

جایگذاری می کنیم در $\Rightarrow r^n e^{rx} + a_1 r^{n-1} e^{rx} + \dots + a_{(n)}\, r\, e^{rx} = 0$

$$\Rightarrow e^{rx}(r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_n) = 0$$

معادله مشخصه (شاخصی) معادله دیفرانسیل نامیم

(۳۰۱) ۳

Subject: Date: / /

$$r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

۱) n ریشه حقیقی متمایز داشته باشد

$r_1 \neq r_2 \neq \dots \neq r_n$

$y_1 = e^{r_1 x},\ y_2 = e^{r_2 x},\ \dots\ y_n = e^{r_n x} \Rightarrow y = c_1 e^{r_1 x} + \dots + c_n e^{r_n x}$

۲) $r_1 = r_2 = \dots = r_m \neq r_{m+1} \neq \dots \neq r_n$

$y_1 = e^{r_1 x},\ y_2 = x e^{r_1 x},\ y_3 = x e^{r_2 x},\ \dots\ y_m = x^{m-1} e^{r_1 x},\ y_{m+1} = e^{r_{m+1} x},\ \dots,\ y_n = e^{r_n x} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ از حل شماره ۲ نتیجه می‌گیریم $\Rightarrow y = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n$

۳) ریشه مختلط نیز داشته باشد

با رعایت بند ۱ و ۲ جواب‌های مثبت حقیقی و مختلط را جداگانه حساب می‌کنیم. ترکیب خطی همه آنها جواب عمومی است.

$r_1 = p + iq \quad y_1 = e^{(p+iq)x} \quad y_1 = e^{px} \cos qx$

$r_2 = p - iq \quad y_2 = e^{(p-iq)x} \quad y_2 = e^{px} \sin qx$

مثال: معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید؟

۱) $y'' - 3y' + 2y = 0 \Rightarrow r^2 - 3r + 2 = 0$

$(r-1)(r-2) = 0$

$r = 1,\ r = 2 \Rightarrow y_1 = e^{x},\ y_2 = e^{2x}$

$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x}$

۲) $y'' - 2y' + y = 0 \Rightarrow r^2 - 2r + 1 = 0$

$(r-1)^2 = 0$: $r_1 = 1 \to y_1 = e^{x}$, $r_2 = 1 \to y_2 = x e^{x}$ $\Rightarrow y = c_1 e^{x} + c_2 x e^{x}$

۳) $y'' - 2y' + 4y = 0$

$r^2 - 2r + 4 = 0$

$\Delta = -12 = 12 i^2$

$r_1, r_2 = \dfrac{2 + \sqrt{12 i^2}}{2} = \dfrac{2 \pm 2\sqrt{3}\, i}{2}$

$r_1 = 1 + \sqrt{3}\, i \longrightarrow y_1 = e^{x} \cos \sqrt{3}\, x$

$r_2 = 1 - \sqrt{3}\, i \longrightarrow y_2 = e^{x} \sin \sqrt{3}\, x$

$\Longrightarrow$

ادامه مثال ۳ مثال قبل $\Rightarrow y = e^{x}\left(C_1 \cos\sqrt{3}\,x + C_2 \sin\sqrt{3}\,x\right)$

مثال:

۱) $y''' - 4y'' + 3y' = 0 \Rightarrow r^3 - 4r^2 + 3r = 0$

$r(r^2 - 4r + 3) = 0$

$r(r-3)(r-1) = 0$

$r = 0 \;,\; r-3=0 \rightarrow r = 3 \;,\; r-1=0 \rightarrow r = 1$

$y = C_1 + C_2 e^{x} + C_3 e^{3x}$

۲) $y''' - 4y' = 0 \Rightarrow r^3 - 4r = 0 \Rightarrow r(r^2 - 4) = 0$

$r = 0 \;,\; r-2=0 \rightarrow r = 2 \;,\; r+2=0 \rightarrow r = -2$

$y = C_1 + C_2 e^{-2x} + C_3 e^{2x}$

۳) $y''' + 4y' = 0 \Rightarrow r^3 + 4r = 0 \Rightarrow r(r^2 + 4) = 0$

$r = 0 \;,\; r = 2i \;,\; r = -2i$

$y = C_1 + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x$

Subject: ۲

Date: / /

۵) $y''+2y'+y=0$ $\qquad r^2+2r+1 \Rightarrow (r+1)^2 \to r=-1,\ r=-1$

$$y=C_1e^{-x}+C_2xe^{-x}$$

۶) $y'''-5y''+8y'-4y=0$ $\qquad r^3-5r^2+8r-4=0$

$$\begin{array}{r|l} r^3-5r^2+8r-4 & r-1 \\ -\ r^3+r^2 & r^2-4r+4 \\ \hline -4r^2+8r-4 & \\ 4r^2-4r & \\ \hline 4r-4 & \end{array}$$

$$(r-1)(r-2)^2=0 \to \begin{cases} r_1=1 \\ r_2=2 \\ r_3=2 \end{cases}$$

$$y=C_1e^{x}+C_2e^{2x}+C_3xe^{2x}$$

۷) $y^{(4)}-2y''+y=0$ $\qquad r^4-2r^2+1=0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow (r^2-1)^2=0 \Rightarrow (r-1)^2\cdot(r+1)^2=0 \Rightarrow \begin{cases} r_1=1 \\ r_2=-1 \\ r_3=1 \\ r_4=-1 \end{cases}$$

$$y=C_1e^{x}+C_2e^{-x}+C_3e^{x}+C_4e^{-x}$$

۸) $y^{(4)}-5y''+4y=0$ $\qquad r^4-5r^2+4=0 \Rightarrow (r^2-1)(r^2-4)=0$

$(r-1)(r+1)$ $\qquad (r-2)(r+2)=0$

$r=+1,\ r=-1$ $\qquad r=2,\ r=-2$

$$y=C_1e^{x}+C_2e^{-x}+C_3e^{2x}+C_4e^{-2x}$$

$\boxed{9x}$ ۱۰) $y^{(4)}-y''=0$ $\qquad r^4-r^2=0 \Rightarrow r^2(r^4-1)=0 \Rightarrow r^2(r^2-1)(r^2+1) \Rightarrow$

$$y=C_1+C_2x+C_3e^{x}+C_4e^{-x}+C_5\cos x+C_6\sin x$$

$r_1=0$

$r_2=0$

$r_3=1$

$r_4=-1$

$r_5=i$

$r_6=-i$

۱) $9y'' - 6y' + y = 0$

$9r^2 - 6r + 1 = 0 \Rightarrow (3r-1)^2 = 0$, $r_1 = \frac{1}{3}$, $r_2 = \frac{1}{3}$

$y_1 = e^{\frac{1}{2}x}$

$y_2 = xe^{\frac{1}{3}x}$ $\Rightarrow y = C_1 e^{\frac{1}{3}x} + C_2 x e^{\frac{1}{3}x}$

۲) $y'' + 5y' + 4y = 0$

$r^2 + 5r + 4 \Rightarrow (r+1)\times(r+4) = 0$, $r = -1$, $r = -4$

$y = c_1 e^{-x} + C_2 e^{-4x}$

۳) $y'' + y = 0$ $\quad r^2 + 1 = 0 \Rightarrow r^2 = -1 \quad , r = \pm 1$

$y_1 = \cos x \quad y_2 = \sin x \quad y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

۴) $2y'' - 4y' + 8y = 0$

$2r^2 - 4r + 8 \Rightarrow r^2 - 2r + 4 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow 4 - 16 = -12$

$= \frac{b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ → $\frac{2 + \sqrt{12i^2}}{2} \Rightarrow \frac{2 + 2\sqrt{3}\,i}{2}$

→ $\frac{2 - \sqrt{12i^2}}{2} \Rightarrow \frac{2 - 2\sqrt{3}\,i}{2}$

$r_1 = 1 + \sqrt{3}\,i \quad r_2 = 1 - \sqrt{3}\,i \quad y_1 = e^x \cos\sqrt{3}\,x \quad y_2 = e^x \sin\sqrt{3}\,x$

$y = C_1 e^x \cos\sqrt{3}\,x + C_2 e^x \sin\sqrt{3}\,x$

مثال ۱:

$$y'' - 2y' = x$$

$$y'' - 2y' = 0$$

$$r^2 - 2r = 0$$

$$r(r-2) = 0 \quad r_1 = 0, \quad r_2 = 2$$

$$y_h = C_1 + C_2 e^{2x}$$

$$y_p = x^1(A\cancel{x}+B) = Ax^2 + Bx$$

$$\left.\begin{array}{l} y_h = C_1 + C_2 e^{2x} \\ y_p = Ax^2 + Bx \end{array}\right\} y = y_h + y_p$$

$$y'_p = 2Ax + B \xrightarrow{\text{جایگزاری}} 2A - 4Ax - 2B = x$$

$$y''_p = 2A$$

$$-4A = 1 \Rightarrow A = \frac{-1}{4}$$

$$2A - 2B = 0 \Rightarrow A = B \rightarrow B = -\frac{1}{4}$$

$$y_p = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x$$

$$y_h = C_1 + C_2 e^{2x}$$

$$y = C_1 + C_2 e^{2x} - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x$$

مثال ۲: فرم جواب خصوصی معادله مقابل را بنویسید!

$$y'' - 2y' = e^{2x}(x+1)$$

$$y'' - 2y' = 0$$

$$r^2 - 2r = 0$$

$$r(r-2) = 0 \quad r_1 = 0, \quad r_2 = 2$$

$$y_h = C_1 + C_2 e^{2x}$$

$$y_p = x e^{2x}(Ax + B)$$

$$y = y_h + y_p$$

$$y = C_1 + C_2 e^{2x} + \left(x e^{2x}(Ax + B)\right)$$

مثال ۳: فرم کلی جواب خصوصی معادله زیر را بدست آورید:

$$y'' + 4y = x\cos 2x + x^2 \sin 2x$$

$$r^2 + 4 = 0 \rightarrow r = \pm 2i$$

$$y_h = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$$

$$y_p = \times\, x\left[(Ax^2 + Bx + C)\cos 2x + (A_1x^2 + B_1x + C_1)\sin 2x\right]$$

۱۱) $y^{(4)} - 4y''' - 4y'' = 0 \qquad r^4 - 4r^3 - 4r^2 = 0 \Rightarrow r^2(r^2 - 4r - 4) = 0 \to r_1 = 0,\ r_2 = 0$

$\Delta = 16 + 16 = 32$

$$\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \begin{cases} \dfrac{4+\sqrt{32}}{2} \rightsquigarrow \dfrac{4+4\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 2+2\sqrt{2} \\[2ex] \dfrac{4-\sqrt{32}}{2} \rightsquigarrow \dfrac{4-4\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 2-2\sqrt{2} \end{cases}$$

$$y = c_1 + c_2 x + c_3 e^{(2+2\sqrt{2})x} + c_4 e^{(2-2\sqrt{2})x}$$

★ ادامه‌ی درس ★

(۲)

حل معادله $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = Q(x)$

جواب عمومی معادله ② بنویسم $y = y_h + y_p$ است که در آن y_h جواب قسمت همگن متناظر است.

و y_p یک جواب خصوصی است که در حالات زیر به روش ضرایب نامعین قابل محاسبه است.

① $Q(x) = ($چند جمله‌ای درجه $n) \Rightarrow y_p = x^k ($چند جمله‌ای کامل درجه n با ضرایب نامعین$)$

k تعداد ریشه‌های برابر صفر معادله مفسر همگن است.

② $Q(x) = e^{px}($چند جمله‌ای درجه $n) \Rightarrow y_p = x^k e^{px} ($چند جمله‌ای کامل درجه n با ضرایب نامعین$)$

k تعداد ریشه‌های برابر p معادله مفسر همگن است.

③ $Q(x) = m(x)\cos qx + N(x)\sin qx \Rightarrow y_p = x^k\left(R(x)\cos qx + S(x)\sin qx\right)$

$m(x)$ و $N(x)$ دو چند جمله‌ای از درجات m و n هستند.

$R(x)$ و $S(x)$ دو چند جمله‌ای کامل از درجه $\max\{m,n\}$ با ضرایب نامعین و k تعداد ریشه‌های $iq+$ معادله مفسر همگن است.

④ $Q(x) = e^{px}\left(m(x)\cos qx + N(x)\sin qx\right) \Rightarrow y_p = x^k e^{px}\left(R(x)\cos qx + S(x)\sin qx\right)$

" "

k تعداد ریشه‌های $p+iq$ معادله مفسر همگن است.

تمرین ۳ ص ۹۳ : شکل فرم جواب خصوصی معادلات زیر را بنویسید :

① $y'' - 8y' - 16y = (1-x)e^{4x}$

$r^2 - 8r - 16 = 0 \rightarrow (r-4)^2 = 0 \rightarrow r_1 = 4,\ r_2 = 4$

$y_h = C_1 e^{4x} + C_2 x e^{4x}$ $\qquad y_p = x^2(ax+b)e^{4x}$

② $y'' + 16y = \sin(4x+\beta) = \sin(4x)\cos\beta + \cos(4x)\sin\beta$

$r^2 + 16 = 0 \rightarrow r^2 = -16 \rightarrow r = \pm 4i$

$y_h = C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x$ $\qquad y_p = x(a\cos 4x + b\sin 4x)$

③ $y'' - 4y' = 2\cos^2 4x \Rightarrow (2)\dfrac{1+\cos 8x}{2}$

$r^2 - 4r = 0 \rightarrow r(r-4) = 0 \rightarrow r_1 = 0,\ r_2 = 4$

$y_{p_1} = ax$

$y_{p_2} = a_1 \cos 8x + b_1 \sin 8x \longrightarrow y_p = y_{p_1} + y_{p_2} =$

$ax + a_1 \cos 8x + b_1 \sin 8x$

④ $y'' - 4y' = xe^{4x}$

$r^2 - 4r = 0 \rightarrow r(r-4) = 0 \rightarrow r = 0,\ r = 4$

$y_h = C_1 + C_2 e^{4x}$ $\qquad y_p = (ax+b)(e^{4x})x$

5) $y''-7y'=(x-1)^2$

$r^2-7r=0 \longrightarrow r(r-7)=0$, $r_1=1$, $r_2=7$

$y_h=c_1+c_2e^{7x}$ $\qquad$ $y_p=(ax^2+bx+c)x$

6) $y''+2y'+5y=e^{x}[(x+1)\cos 2x+3\sin 2x]$

$r^2+2r+5=0$ $\qquad$ $\Delta=4-20=-16$

$r_1,r_2=\frac{-2\pm 4i}{2}=-1\pm 2i$

$y_h=e^{-x}(c_1\cos 2x+c_2\sin 2x)$ $\qquad$ $y_p=e^{x}((ax+b)\cos 2x+(cx+d)\sin 2x)$

7) $y''-4y'+13y=e^{2x}(x^2\cos 3x-x\sin 3x)$

$r^2-4r+13=0$ $\qquad$ $\Delta=16-(4)(1)(13)=16-52=-36$

$r_1,r_2=\frac{4\pm 6i}{2}=2\pm 3i$

$y_h=e^{2x}(c_1\cos 3x+c_2\sin 3x)$

$y_p=x(e^{2x})[ax^2+bx+c(\cos 3x)+(a_1x^2+b_1x+c_1)(\sin 3x)]$

Subject: ۳ Date: / /

① $D(D^2+9)(D^2-8D+25)^2 y = x + x^2 \sin 3x + x^2 e^{4x} \cos 3x$

$D_1 = 0$

$D_2, D_3 = \pm 3i$

$D^2 - 8D + 25 = 0 \qquad \Delta = 64 - (4)(1)(25) = -36$

$D_4, D_5 = \frac{8 \pm 6i}{2} = 4 \pm 3i \qquad D_6, D_7 = 4 \pm 3i$

$y_{p_1} = x(ax+b) \qquad y_{p_2} = (ax^2+bx+c)\sin 3x + (a_1 x^2 + b_1 x + c_1)\cos 3x$

$y_{p_3} = (x)(e^{4x})(a_2 x^2 + b_2 x + c_2)\cos 3x + (a_3 x^2 + b_3 x + c_3)\sin 3x$

$y_p =$

حل معادله $y'' + p(x)y' + q(x)y = Q(x)$ (به روش تغییر پارامتر)

اگر y_1 و y_2 دو جواب مستقل خطی معادله باشند:

$y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2$ و $y_p = v_1(x) y_1 + v_2(x) y_2$

$v_1 = -\int \frac{y_2 Q(x)\,dx}{W(y_1, y_2)} \qquad v_2 = \int \frac{y_1 Q(x)\,dx}{W(y_1, y_2)} \qquad y = y_h + y_p$

$y'' + y = tg\,x$

$y'' + y = 0 \longrightarrow r^2 + 1 = 0 \Rightarrow r = \pm i \quad y_1 = \cos x, \quad y_2 = \sin x$

$y_h = c_1 \cos x + c_2 \sin x \qquad y_p = v_1(x)\cos x + v_2(x)\sin x$

$W(\cos x, \sin x) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$$v_1 = -\int \frac{\sin x \tan x}{1}\,dx = -\int \frac{\sin^2 x}{\cos x}\,dx.$$

$$v_2 = \int \frac{\cos x \tan x}{1}\,dx = \int \sin x\,dx = -\cos x$$

$$y_p = \left(-\int \frac{\sin^2 x}{\cos x}\,dx\right)\cos x + (-\cos x)\sin x$$

$$y_h = c_1 \cos x + c_2 \sin x \longrightarrow y = y_h + y_p$$

مثال: $y'' + y = \sec x$

$$y'' + y = 0 \Rightarrow r^2 + r = 0 \qquad r = \pm i \quad \begin{cases} y_1 = \cos x \\ y_2 = \sin x \end{cases}$$

$$y_h = c_1 \cos x + c_2 \sin x \qquad y_p = v_1(x)\cos x + v_2(x)\sin x$$

$$w(\cos x, \sin x) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$v_1 = -\int \frac{\sin x \sec x}{1}\,dx = -\int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = \ln|\cos x|$$

$$v_2 = \int \frac{\cos x \sec x}{1}\,dx = \int dx = x \qquad y_p = \ln(\cos x)\cos x + x \sin x$$

حل معادله $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ (روش کاهش مرتبه)

اگر y_1 یکی از جوابهای این معادله باشد $y_2 = v(x)\,y_1$ که در آن $v(x) = \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x)dx}\,dx$

مثال: اگر $y_1 = e^x$ یکی از جوابهای معادله $y'' - 2y' + y = 0$ باشد جواب دوم و سپس جواب عمومی را بیابید.

$$y_1 = e^x \Rightarrow y_2 = v(x)\,e^x$$

$$v(x) = \int \frac{1}{e^{2x}} e^{-\int -2dx}\,dx = \int \frac{1}{\cancel{e^{2x}}}\cancel{e^{2x}}\,dx = \int dx = x$$

Subject: (۵) Date: / /

$y_2 = xe^{x} \qquad y = c_1 e^{x} + c_2 x e^{x}$

مثال: اگر $y_1 = \cos x$ یکی از جواب‌های معادله $y'' + y' = 0$ باشد جواب دوم و سپس جواب عمومی را بیابید.

$y_1 = \cos x \qquad y_2 = v(x)\cos x$

$$v(x) = \int \frac{1}{\cos^2 x} e^{\int 0\, dx} dx = \int (1+\tan^2 x)\,dx = \tan x$$

$y_2 = \tan x \times \cos x = \sin x \qquad y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

معادله کوشی اویلر: $a_1 x^2 y'' + a_2 x y' + a_3 y = 0$ با تغییر $x = e^t$ داریم: $t = \ln x$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$xy' = x\frac{dy}{dx} = x\left(\frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx}\right) = \cancel{x}\left(\frac{1}{\cancel{x}} \cdot \frac{dy}{dt}\right) = y'_t$$

$$x^2 y'' = x^2\left(\frac{1}{x} \cdot \frac{dy}{dt}\right)' = x^2\left(-\frac{1}{x^2} \cdot \frac{dy}{dt} + y''_t \times \frac{dt}{dx} \times \frac{1}{x}\right) =$$

$$= x^2\left(\frac{-1}{\cancel{x^2}} y'_t + y''_t \times \frac{1}{\cancel{x^2}}\right) = y''_t - y'_t$$

$$a_1(y''_t - y'_t) + a_2 y'_t + a_3 = 0$$

مثال: $x^2 y'' - xy' + y = 0$

$y''_t - y'_t - y'_t + y = 0$

$y''_t - 2y'_t + y = 0$

$r^2 - 2r + 1 = 0 \longrightarrow (r-1)^2 = 0 \longrightarrow r_1 = 1,\ r_2 = 1$

$y_1 = e^{t} \qquad y_2 = te^{t} \longrightarrow y = C_1 y_1 + C_2 y_2$

$y_1 = x \qquad y_2 = x\ln x$

$$\boxed{y = C_1 x + C_2 x\ln x}$$

حل ۲) $x^{2}y'' + xy' - y = 0$

$y''_t - \cancel{y'_t} + \cancel{y'_t} - y = 0$

$y''_t - y = 0 \longrightarrow r^2 - 1 = 0 \longrightarrow r_1 = 1, \quad r_2 = -1$

$y_1 = e^{t} \qquad y_2 = e^{-t}$

$y = C_1 x + \dfrac{C_2}{x}$

$y_1 = x \qquad y_2 = \dfrac{1}{x}$

1

Subject: تبدیل لاپلاس Date: / /

اگر $f(t)$ تابعی باشد که بر بازه‌ی $[0, +\infty)$ تعریف شده باشد در این صورت منظور از لاپلاس f عبارت است از:

$$L(f(t)) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt = F(s)$$

$$L(f(t)) = F(s) \Longleftrightarrow L^{-1}(F(s)) = f(t)$$

1) $L(f_1 \pm f_2) = L(f_1) \pm L(f_2)$, $L^{-1}(F_1 \pm F_2) = L^{-1}(F_1) \pm L^{-1}(F_2)$

2) $L(\lambda F) = \lambda L(f)$, $L^{-1}(\lambda F) = \lambda L^{-1}(F)$ $(\lambda \in R)$

مثال ۱: $f(t) = a$

$$L(a) = \int_0^{+\infty} e^{-st} a\, dt = a\int_0^{+\infty} e^{-st} dt =$$

$$= a\left(-\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^{+\infty}\right) = a\left(0 + \frac{1}{s}\right) = \frac{a}{s}$$

ex: 1

$L(10) = \frac{10}{s}$, $L^{-1}\left(\frac{5}{s}\right) = 5$

ex: 2

$L(\pi) = \frac{\pi}{s}$, $L^{-1}\left(\frac{\pi}{s}\right) = \pi$

مثال ۲: $f(t) = at^n$

$$L(at^n) = \frac{a(n!)}{s^{n+1}}$$

$L(3t^5) = \frac{3 \times 5!}{s^{5+1}}$ $L(t^7) = \frac{7!}{s^8}$ $L^{-1}\left(\frac{3!}{s^4}\right) = t^3$

$$\frac{1}{6!} L^{-1}\left(\frac{2 \times 6!}{s^7}\right) = \frac{2}{6!} L^{-1}\left(\frac{6!}{s^7}\right) = \frac{2}{6!} t^6$$

مثال ۳: $f(t) = e^{at}$

$L(e^{at}) = \frac{1}{s-a}$ $L^{-1}\left(\frac{1}{s+2}\right) = e^{-2t}$

$L(e^{3t}) = \frac{1}{s-3}$ $L^{-1}\left(\frac{3}{s^2-1}\right) = L^{-1}\left(\frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+1}\right) = Ae^{t} + Be^{-t}$

مثال ۴:

$$L(\sinh at) = \frac{a}{s^2 - a^2} \qquad L(\cosh at) = \frac{s}{s^2 - a^2}$$

$$L(\sin at) = \frac{a}{s^2 + a^2} \qquad L(\cos at) = \frac{s}{s^2 + a^2}$$

$$L(\sin 2t) = \frac{2}{s^2 + 4} \qquad L(\cos 3t) = \frac{s}{s^2 + 9}$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) = \sin t \qquad L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+4}\right) = \cos 2t$$

$$L^{-1}\left(\frac{s}{s^2-4}\right) = \cosh 2t$$

تبدیل لاپلاس: اولین قضیه انتقال: اگر $L(f(t)) = F(s)$ باشد آنگاه

$$L(e^{bt} f(t)) = F(s-b)$$

مثال:

$$L(e^{3t} t^2) = \frac{2}{(s-3)^3} \qquad L(e^{3t} \sin 4t) = \frac{4}{(s-3)^2 + 16}$$

$$L^{-1}\left(\frac{s-2}{(s-2)^2+4}\right) = e^{2t} \cos 2t$$

تبدیل لاپلاس مشتق: اگر $y = f(t)$ باشد آنگاه:

$$L(y^{(n)}) = s^n L(y) - s^{n-1} y(0) - s^{n-2} y'(0) - \cdots - y^{(n-1)}(0)$$

$$L(y') = sL(y) - y(0)$$

$$L(y'') = s^2 L(y) - sy(0) - y'(0)$$

$$L(y''') = s^3 L(y) - s^2 y(0) - sy'(0) - y''(0)$$

$$\vdots$$

تبدیل لاپلاس انتگرال: اگر $L(f(t)) = F(s)$ آنگاه

$$L\left(\int_0^t f(x)dx\right) = \frac{F(s)}{s}$$

$$L(\sin t) = \frac{1}{s^2+1} \qquad L\left(\int_0^t \sin x\, dx\right) = \frac{1}{s(s^2+1)}$$

$$L(t^2) = \frac{2}{s^3} \qquad L\left(\int_0^t x^2 dx\right) = \frac{2}{s^4}$$

مشتق تبدیل لاپلاس: اگر $L(f(t)) = F(s)$ آنگاه

$$L(t^n f(t)) = (-1)^n F^{(n)}(s)$$

$$L(e^{2t}) = \frac{1}{s-2} \qquad L(te^{2t}) = (-1)^1\left(\frac{1}{s-2}\right)'$$

$$L(t^2 e^{2t}) = (-1)^2\left(\frac{1}{s-2}\right)''$$

$$L(\sin t) = \frac{1}{s^2+1} \qquad L(t^3 \sin t) = (-1)^3\left(\frac{1}{s^2+1}\right)'''$$

انتگرال تبدیل لاپلاس: اگر $L(f(t)) = F(s)$ ، $\lim_{t\to 0} \frac{f(t)}{t}$ موجود باشد آنگاه:

$$L\left(\frac{f(t)}{t}\right) = \int_s^{+\infty} F(x)\,dx$$

مثال: $L(\sin t) = \frac{1}{s^2+1}$

$$L\left(\frac{\sin t}{t}\right) = \int_s^{+\infty}\left(\frac{1}{x^2+1}\right)dx = \arctan x\Big|_s^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \arctan s$$

مثال: $L\left(\frac{1-\cos t}{t}\right)$

$$L(1-\cos t) = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1} \Rightarrow L\left(\frac{1-\cos t}{t}\right) = \int_s^{+\infty}\left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\right)dx$$

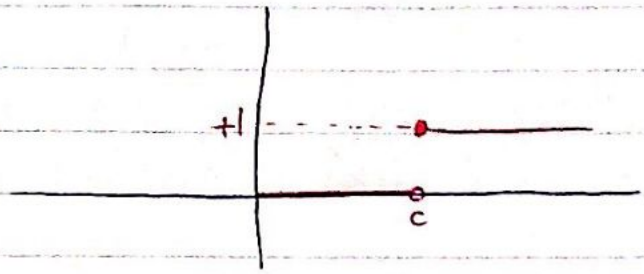
$$= \ln x - \frac{1}{2}\ln x(x^2+1)\Big|_s^{+\infty}$$

$$= \ln\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\Big|_s^{+\infty} = 0 - \ln\frac{s}{\sqrt{s^2-1}} = \ln\frac{\sqrt{x^2+1}}{s}$$

Subject: Date:

تبدیل لاپلاس: تابع پله‌ای واحد

$$u_c(t) = \begin{cases} 1 & t \geq c \\ 0 & t < c \end{cases}$$



$$L(u_c(t)) = \int_0^{+\infty} e^{-st} u_c(t)\,dt = \int_c^{+\infty} e^{-st}\,dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_c^{+\infty} = \frac{1}{s} e^{-cs}$$

$$L(u_2(t)) = \frac{1}{s} e^{-2s}$$

$$L(u_\pi(t)) = \frac{1}{s} e^{-\pi s}$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s} e^{-3s}\right) = u_3(t)$$

دومین قضیه انتقال: اگر $L(f(t)) = F(s)$ باشد آنگاه:

$$L(u_c(t) f(t-c)) = e^{-cs} L(f(t)) = e^{-cs} F(s)$$

مثال: $L(u_2(t)(t^2 - 4t + 4)) = ?$ حل: $L(u_2(t)(t-2)^2)$

$$= e^{-2s} L(t^2) = e^{-2s} \frac{2}{s^3} = \frac{2e^{-2s}}{s^3}$$

مثال: $y'' - 4y = 1$ ، $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$

$$L(y'') - 4L(y) = L(1)$$

$$s^2 L(y) - \cancel{s y(0)}^{\,0} - y'(0)^{\,2} - 4L(y) = \frac{1}{s}$$

$$L(y)(s^2-4)=\frac{1}{s}+2$$

$$L(y)=\frac{\frac{1}{s}+2}{s^2-4} \Rightarrow y=L^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2-4)}+\frac{2}{s^2-4}\right)$$

$$L^{-1}\left(\frac{A}{s}+\frac{B}{s-2}+\frac{C}{s+2}+\frac{2}{s^2-4}\right)=A+Be^{2t}+Ce^{-2t}+\sinh 2t$$

مثال: $y''+4y=t \qquad y(0)=0 \ , \ y'(0)=0$

$$L(y'')+4L(y)=L(t)$$

$$s^2L(y)+sy(0)+y'(0)+4L(y)=\frac{1}{s^2}$$

$$L(y)(s^2+4)=\frac{1}{s^2}$$

$$L(y)=\frac{\frac{1}{s^2}}{(s^2+4)} \Rightarrow y=L^{-1}\left(\frac{1}{s^2(s^2+4)}\right)=L^{-1}\left(\frac{A}{s^2}+\frac{B}{s}+\frac{Cs+D}{s^2+4}\right)$$

$$=At+B+C\cos 2t+\frac{1}{2}D\sin 2t$$

مثال: $y''=4y'+4y=t^2 \qquad y(0)=0 \ , \ y'(0)=0$

$$L(y'')=4L(y')+4L(y)=L(t^2)$$

$$s^2L(y)$$

کانولوشن (پیچش تابع):

اگر f و g دو تابع باشند منظور از پیچش f و g عبارت است از:

$$(f\star g)(x)=\int_0^x f(t)\,g(x-t)\,dt$$

① $f\star g=g\star f$

② $(f\star g)\star h=f\star(g\star h)$

③ $f\star(g\pm h)=(f\star g)\pm(f\star h)$

④ $f\star 1\neq f$

قضیه: اگر f و g دو تابع باشند:

$$L(f\star g)=L(f)\times L(g)$$

مثال یک ۱:

$$x\star\sin x=\int_0^x t\sin(x-t)\,dt$$

$$t=u \rightsquigarrow dt=du$$

$$\sin(x-t)\,dt=dv \rightsquigarrow \cos(x-t)=v$$

$$x\star\sin x=t\cos(x-t)\Big|_0^x-\int_0^x\cos(x-t)\,dt$$

$$=(x-0)+\sin(x-t)\Big|_0^x$$

$$x\star\sin x=x-\sin x$$

مثال دو ۲:

$$L(x\star\sin x)\xrightarrow{\text{قضیه}}L(x)\times L(\sin x)$$

Year. Month. Date. Subject:

$$= \frac{1}{s^2} \times \frac{1}{s^2+1} = \frac{1}{s^2(s^2+1)}$$

$$L(x * \sin x) \xrightarrow{\text{تعریف}} L(x - \sin x)$$

$$= L(x) - L(\sin x) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1} = \frac{\cancel{s^2} + 1 - \cancel{s^2}}{s^2(s^2+1)}$$

تعریف: معادله انتگرالی: به هر معادله‌ای که در آن تابع جواب زیر علامت انتگرال باشد معادله انتگرالی نامیده می‌شود و چنانچه این معادله شامل مشتق نیز باشد معادله دیفرانسیل انتگرالی نامیده می‌شود. مثال: (سوال امتحانی).

$$y(x) = 1 + \int_0^x y(t)\sin(x-t)\,dt$$

$$L(y) = L(1) + L\left(\int_0^x y(t)\sin(x-t)\,dt\right)$$

$$L(y) = \frac{1}{s} + L(y * \sin x)$$

$$L(y) = \frac{1}{s} + L(y)\,L(\sin x) = \frac{1}{s} + L(y)\left(\frac{1}{s^2+1}\right)$$

$$L(y)\left(1 - \frac{1}{s^2+1}\right) = \frac{1}{s}$$

$$\frac{s^2}{s^2+1}$$

$$L(y) = \frac{\frac{1}{s}}{\frac{s^2}{s^2+1}} = \frac{s^2+1}{s^3} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^3} \Rightarrow$$

$$y = L^{-1}\left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s^3}\right) = 1 + \frac{1}{2}x^2$$

1)

(۳)

Year. Month. Date. Subject:

مثال:

$$y(x) = x + \int_0^x y(t)e^{x-t}\,dt$$

$$L(y) = L(x) + L\left(\int_0^x y(t)\,e^{x-t}\,dt\right)$$

$$L(y) = \frac{1}{s^2} + L(y) \times L(e^x) \Rightarrow L(y) = \frac{1}{s^2} + L(y)\frac{1}{s-1}$$

$$L(y)\left(1 - \frac{1}{s-1}\right) = \frac{1}{s^2} \Rightarrow L(y) = \frac{\frac{1}{s^2}}{\frac{s-2}{s-1}} = \frac{s-1}{s^2(s-2)}$$

$$L(y) = \frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{C}{s-2} \Rightarrow y = L^{-1}\left(\frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{C}{s-2}\right) = Ax + B + Ce^{2x}$$

مثال:

$$y(x) = \sin x + \int_0^x y(t)\cos(x-t)\,dt$$

$$L(y) = \frac{1}{s^2+1} + L\left(\int_0^x y(t)\cos(x-t)\,dt\right)$$

$$L(y) = \frac{1}{s^2+1} + L(y) \times L(\cos x) \rightsquigarrow L(y) = \frac{1}{s^2+1} + L(y)\frac{s}{s^2+1}$$

$$L(y)\underbrace{\left[1 - \frac{s}{s^2+1}\right]}_{\frac{s^2+1-s}{s^2+1}} = \frac{1}{s^2+1} \rightsquigarrow L(y) = \frac{\cancel{\frac{1}{s^2+1}}}{\frac{s^2-s+1}{\cancel{s^2+1}}} = \frac{1}{s^2-s+1} = \frac{1}{s^2-s+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}}$$

$$= \frac{1}{(s-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} \Rightarrow y = L^{-1}\left(\frac{1}{(s-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}\right) = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} L^{-1}\left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{(s-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}\right) =$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\, e^{\frac{1}{2}x} \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$$

دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی: دستگاهی که شامل دو یا چند معادله دیفرانسیل باشد دستگاه معادلات دیفرانسیل نامیده می‌شود. برای حل چنین دستگاهی از طرفین هر یک از معادلات تبدیل لاپلاس می‌گیریم، دستگاه را برحسب تبدیل لاپلاس حل می‌کنیم سپس تبدیل معکوس لاپلاس می‌گیریم.

مثال:

$$\begin{cases} x' = x - 3y & x(0) = 0 \\ y' = 3x + y & y(0) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} L(x') = L(x) - 3L(y) \\ L(y') = 3L(x) + L(y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} sL(x) - \cancel{x(0)}^{\,0} = L(x) - 3L(y) \\ sL(y) - \cancel{y(0)}^{\,1} = 3L(x) + L(y) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (s-1)L(x) + 3L(y) = 0 \rightsquigarrow L(y) = -\frac{1}{3}(s-1)L(x) \\ -3L(x) + (s-1)L(y) = 1 \end{cases}$$

$$-3L(x) + (s-1)\left(-\frac{1}{3}(s-1)L(x)\right) = 1$$

$$L(x)\left(-3 - \frac{1}{3}(s-1)^2\right) = 1 \rightsquigarrow L(x)\left(\frac{-9-(s-1)^2}{3}\right) = 1$$

$$\Rightarrow L(x) = \frac{-3}{(s-1)^2+9} \Rightarrow x = L^{-1}\left(\frac{-3}{(s-1)^2+9}\right) = -e^{t}\sin 3t$$

$$L(y) = -\frac{1}{3}(s-1)\left(\frac{-3}{(s-1)^2+9}\right) \Rightarrow L(y) = \frac{s-1}{(s-1)^2+9}$$

$$\Rightarrow y = L^{-1}\left(\frac{s-1}{(s-1)^2+9}\right) = e^{t}\cos 3t$$

مثال:

$$\begin{cases} x' = 3x - y & x(0)=1 \\ y' = 4x - y & y(0)=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} L(x') = 3L(x) - L(y) \\ L(y') = 4L(x) - L(y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} sL(x) - x(0) = 3L(x) - L(y) \\ sL(y) - y(0) = 4L(x) - L(y) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (s-3)L(x) + L(y) = 1 \\ (s+1)L(y) - 4L(x) = 0 \end{cases} \rightsquigarrow L(x) = \frac{1}{4}(s+1)L(y)$$

$$\Rightarrow (s-3)\frac{1}{4}(s+1)L(y) = 1$$

$$L(y) = \frac{1}{4(s-3)(s+1)} \Rightarrow L(y) = \frac{a}{(s-3)} + \frac{b}{(s+1)}$$

$$y = L^{-1}\frac{a}{(s-3)} + \frac{b}{(s+1)} \Rightarrow y = ae^{3t} + be^{-t}$$

حل معادله $\Leftarrow$ $f_1(x)y'' + f_2(x)y' + f_3(x)y = 0$ (*) به یک سری های توانی:

تعریف: نقطه $x=0$ را یک نقطه معمولی (عادی) معادله (*) می‌نامیم در صورتیکه $f_1(0) \neq 0$ در غیر اینصورت آنرا نقطه غیرعادی نامیم.

قضیه: اگر $x=0$ یک نقطه عادی معادله (*) باشد آنگاه معادله جوابی به فرم یک سری توانی حول صفر دارد

یعنی $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$

مثال: $y'' - xy' + y = 0$

$f_1(x) = 1 \Rightarrow f_1(0) = 1 \neq 0 \Rightarrow$ صفر یک نقطه عادی است.

بنابر قضیه فوق معادله دارای جوابی به فرم $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ است.

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \ , \quad y' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} \ , \quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}$$

جایگذاری $\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$

$$n \to n+2$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) c_{n+2} x^n - \,'' + \,'' = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left((n+2)(n-1) c_{n+2} - n c_n + c_n \right) x^n = 0$$

$$(n+2)(n+1) c_{n+2} - n c_n + c_n = 0$$

فرمول بازگشتی: $c_{n+2} = \dfrac{(n-1) c_n}{(n+2)(n+1)}$

$n = 0 \Rightarrow c_2 = \dfrac{-c_0}{2}$

$n = 1 \Rightarrow c_3 = 0$

$n = 2 \Rightarrow c_4 = \dfrac{c_2}{12} = \dfrac{-c_0}{24}$

$n = 3 \Rightarrow c_5 = \dfrac{2 c_3}{?} = 0$

$c_5 = c_7 = \cdots = c_{2k+1} = 0 \ - - -$

Subject: Date:

$$y=\sum_{n=۰}^{\infty} C_n x^n = C_۰ + C_۱ x + C_۲ x^{۲} + C_۳ x^{۳} + \cdots + C_n x^n + \cdots$$

$$y = C_۰ + C_۱ x - \frac{C_۰}{۲} x^{۲} + ۰ - \frac{C_۰}{۲۴} x^{۴} + ۰ + \cdots$$

$$y = C_۰ \left(۱ - \frac{۱}{۲} x^{۲} - \frac{۱}{۲۴} x^{۴} + \cdots \right) + C_۱ x$$