به نام خدا

فصل دوم: احتمال

① آزمایش تصادفی:

② رویداد (رخداد، پیامد):

③ فضای نمونه‌ای:

④ پیشامد

⑤ روشهای آنالیز ترکیبی:
- اصل شمارشی
- ترکیب n شیء متمایز بدون تکرار در دسته‌های r تایی ($r \leq n$)
- ترتیب " " " " " " " " " (" ")
- ترکیب n شیء متمایز با تکرار در دسته‌های r تایی
- ترتیب n شیء متمایز با تکرار " " "

سه- جبر: (الف) (سیگما - جبر)

دیدگاه‌های مختلف در محاسبه احتمال
① دیدگاه کلاسیک
② دیدگاه فراوانی نسبی
③ احتمال ذهنی

(ب) قوانین موضوعه
- اصل اول موضوعه.
- اصل دوم موضوعه
- اصل سوم موضوعه

(ج) نتایج حاصل از اصل موضوعه احتمال
- محاسبه احتمال اجتماع ۲ پیشامد و تعمیم آن به ۳ و بیشتر
- محاسبه احتمال پیشامد ϕ، محاسبه احتمال متمم یک پیشامد.

---

① آزمایش‌های تصادفی: پدیده‌هایی که در زندگی ما رخ می‌دهند و در عالم اتفاق می‌افتند از دو دسته کلی پیروی می‌کنند.

① پدیده‌هایی که نتایج آنها، قبل از وقوع، نتایج آنها برای ما کاملاً مشخص است که این دسته بسیار کم هستند.

② پدیده‌هایی که حتی اگر بارها و بارها در شرایط تقریباً یکسان رخ دهند، نتایجشان از قبل از وقوع، برما مشخص نیست. این دسته از پدیده‌ها که تقریباً تمام امور جهان را شامل می‌شوند، آزمایش‌های تصادفی نام دارند.

نتایج این پدیده‌ها قبل از وقوع، برما مشخص نیست و هربار با دفعات قبل و بعد، این نتیجه می‌تواند نامطابق باشد.

② هر یک از نتایج متمایز یک آزمایش تصادفی را، رویداد، رخداد یا پیامد می‌گویند و با e (event)، نشان می‌دهیم.

③: مجموعه تمام رویدادهای ممکن یک آزمایش تصادفی را، فضای نمونه آن آزمایش تصادفی می‌گویند.

* نکته بسیار مهم: در بحث احتمال، شناسایی آزمایش تصادفی و از روی آن، معرفی رویدادهای فضای نمونه آزمایش است. تعداد رویدادهای متمایز فضای نمونه، در محاسبه احتمال وقوع آن‌ها، حتماً باید مورد توجه قرار گیرد. به عنوان مثال در یک کلاس از دانشجویان 25 دانشجو حضور داشتند، 16 نفر آقا، 9 نفر خانم، برای نمایش فضای نمونه انتخاب یک دانشجو به طور تصادفی از این کلاس می‌توانیم، صورت زیر را در نظر بگیریم:

$$\underset{\text{sample space}}{S} = \{\underset{e_1}{m_1}, \underset{e_2}{m_2}, \dots, m_{16}, w_1, w_2, \dots, \underset{e_{25}}{w_9}\} = \{m, w\} \quad a_1 = \frac{16}{25} \quad a_2 = \frac{9}{25}$$

ممکن است در بسیاری از آزمایش‌های تصادفی، شمارش تعداد اعضای فضای نمونه به سادگی انجام پذیر نباشد و مجبور شویم از روشهای آنالیز ترکیبی برای شمارش تعداد اعضای فضای نمونه استفاده کنیم، به همین دلیل با این روشها در زیر آشنا می‌شویم که شامل:
اصل شمارش، ترکیب و ترتیب.

④ : پیشامد: بنابه تعریف، هر پیشامد، زیرمجموعه‌ای از فضای نمونه آزمایش تصادفی است ولی لزوماً هر زیرمجموعه آزمایش تصادفی، یک پیشامد نیست، با این تعریف، بعداً مشخص می‌کنیم که پیشامدها، احتمال وقوعشان قابل محاسبه‌اند.

⑤ روشهای آنالیز ترکیبی:

(الف) اصل شمارش: اصل شمارش: اگر عملی مانند عمل A، در m مرحله تکمیل شود و هریک از m مرحله بتوانند به k_i روش انجام شوند، دراین صورت، تعداد حالتهایی که می‌توان عمل A را تکمیل کرد، برابر است با حاصل ضرب $\prod_{i=1}^{m} k_i = k_1 \cdot k_2 \cdots k_m$ ← حاصل ضرب (پای)

هربار برای انجام عمل A، یکی از این راهها، انتخاب می‌شود. مثال: شخصی برای رسیدن از منزلش به محل کارش، در نقاط B و C می‌تواند، تغییر مسیر دهد. از A به B به 3 طریق، از B به C به 2 طریق و از C به D به 4 طریق، این کار انجام‌پذیر است.

24 حالت برای رسیدن از منزل به محل کارش، در هرروز، انتخاب وجود دارد، بدیهی است که هرروز به یکی از این طریق‌ها یعنی $\frac{1}{24}$ از منزل به محل کار می‌رسد.

$$\underset{\text{منزل}}{A} \xrightarrow{\text{3 طریق}} B \xrightarrow{\text{2 طریق}} C \xrightarrow{\text{4 طریق}} \underset{\text{محل کارش}}{D}$$

$$3 \times 2 \times 4 = 24$$

از اصل شمارش در مسائل احتمال بسیار استفاده می‌کنیم و این زمانی است که هریک از رویدادهای فضای نمونه، حداقل بصورت زوج مرتب باشند. توجه کنید که رویدادهای فضای نمونه می‌توانند به صورت‌های زیر باشند.

$S = \{e_1, e_2, \dots, e_k, \dots\}$

$S = \{\underbrace{(a_1, a_2, \dots, a_m)}_{e_1}, \underbrace{(a_1, a_3, \dots, a_m)}_{e_2}, \dots, \dots\}$ e_i ها تک عضوی نیستند بلکه بصورت m تایی مرتبند.

مثال: در بخش مالی یک سازمان فرض کنید 10 نفر کارمند وجود دارد، 4 نفرشان سنشان بالای 30 سال، 6 نفر کمتر، مساوی با 30 سال است. می‌خواهیم 3 کارمند را از بین این کارکنان برای تربیت در یک دوره آموزشی انتخاب کنیم. فضای نمونه انتخاب این سه نفر، و تعداد این فضا به صورت زیر است.

حل:

$n = 10$

$m_1 = 4$ افراد بالای 30 سال

$m_2 = 6$ افراد کمتر مساوی 30 سال

$k = 3$ تایی

$$\Longrightarrow C_3^{10} = \frac{10!}{3! \times 7!} = \frac{10 \times \cancel{9}^{3} \times \cancel{8}^{4} \times \cancel{7!}}{\cancel{3} \times \cancel{2} \times 1 \times \cancel{7!}} = 120$$

گروه 3 تایی از این افراد می‌توان (بدون تکرار) تشکیل داد.

انتخاب یک نفر از 10 نفر (برحسب سن) ← $S_1 = \{\underbrace{e_1, e_2, e_3, e_4}_{\text{افراد با سن بالای 30}}, \underbrace{e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}}_{\text{افراد با سن کمتر یا مساوی 30 سال}}\}$

$S_2 = \{\underbrace{(e_1, e_2, e_3), (e_1, e_2, e_4), (e_1, e_2, e_5), \dots}\}$ تا 120

* نکته بسیار مهم: درحل مسائل احتمال، تشخیص فضای نمونه، از نظر اینکه اعضای آن، تک عضوی هستند یا بصورت m تایی‌های مرتب، مانند مثال بخش مالی که در حالت S_2، 3 تایی‌های مرتب بودند و دیگر اینکه تعداد اعضای فضای نمونه، 10 تا (S_1)، 120 تا (S_2) است باید مشخص شوند.

ب) ترکیب n شیء متمایز بدون تکرار در دسته‌های r تایی $(r \leq n)$: فرض کنید n شیء متمایز (انسان یا غیرانسان، زنده یا غیرزنده) داشته باشیم و بخواهیم از این n شیء، زیرمجموعه‌های r تایی تولید کنیم به شرطی که هیچ عضو تکراری در آنها نباشد و در ضمن ترتیب داخل هر زیرمجموعه، اهمیتی نداشته باشد. در این حالت، تعداد این زیرمجموعه‌ها از فرمول زیر محاسبه می‌شود.

$$C_r^n = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

مانند مثال فوق

ترتیب: اگر در حالت ترکیب فوق، آرایش اعضاء داخل زیرمجموعه r تایی مهم باشد، در این صورت تعداد زیرمجموعه‌ها بیشتر می‌شود و از رابطه زیر بدست می‌آید. (تکرار مجاز نیست)

$$P_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال: فرض کنید از بین 3 خانم و 5 آقا می‌خواهیم یک گروه 2 نفره انتخاب کنیم به طوری که اولین نفر، برای شرکت در یک کنفرانس داخلی و نفر دوم برای بازدید از نمایشگاه‌های داخلی اعزام شود. به چند طریق این کار امکان‌پذیر است (آرایش و ترتیب داخل گروه مهم است).

$n = 8$ (3+5)
$r = 2$
$\Longrightarrow P_{8,2} = \frac{8!}{6!} = 56$

56 گروه 2 تایی از این افراد می‌توان برای این کار انتخاب نمود

ترتیب n شیء متمایز: (یعنی آرایش داخل گروه) مهم است و نیز با تکرار مجاز، دیگر بصورت فرمول فوق حساب نمی‌شود بلکه به شکل n^r، تعداد دسته‌های r تایی مرتب، با تکرار از بین n شیء، خواهد بود.

مثال: با ارقام 1 و 2 و 9 و 6، چند عدد 3 رقمی الف) بدون تکرار ارقام ب) با تکرار ارقام می‌توان ساخت

الف) $4 \times 3 \times 2 = 24$ $\qquad P_{4,3} = \frac{4!}{1!} = 24$

$4 \times 4 \times 4 = 64$ $\qquad 4^3 = 64$ $\qquad n^r$ (3 تایی) 4 رقم داریم

ترکیب n شیء متمایز، r به r (هر گروه‌های r تایی) وقتی تکرار مجاز باشد، از فرمول زیر بدست می‌آید.

$$\binom{n+r-1}{r}$$

* نکته بسیار مهم: در این حالت، تشخیص r، در مسئله است.

مثال: یک مربی فوتبال می‌خواهد از بین 10 بازیکن تیمش (یک نفر به دلایلی از تیم جدا شده) یک دروازه‌بان را طوری انتخاب کند که او کاپیتان هم باشد، به چند طریق این کار امکان‌پذیر است.

$n = 10$
$r = 2$

$$\binom{10+2-1}{2} = \binom{11}{2} = \frac{11!}{2!\,9!} = \frac{11 \times 10 \times \cancel{9!}}{2! \times \cancel{9!}} = 55$$

مثال: یک خانواده 10 نفره به چند صورت می‌توان روزهای تولد آنان را در 7 روز هفته جایگزین کرد؟

$n = 7$
$r = 10$

$$\binom{7+10-1}{10} = \binom{16}{10} = \frac{16!}{10! \times 6!}$$

σ - جبر:

σ-جبر، مجموعه‌ای از مجموعه‌هاست یعنی هر عضو σ-جبر، خودش یک مجموعه است و هر σ-جبر نسبت به دو عمل اجتماع و متمم‌گیری بسته است در نتیجه نسبت به اشتراک هم بسته خواهد بود، با این تعریف بعبارت دیگر در یک σ-جبر، هر دو یا چند مجموعه‌ای که انتخاب کنیم، اجتماعشان و اشتراکشان متعلق به σ-جبر است و همچنین متمم آنها نیز در σ-جبر است، اعضایی که در σ-جبر باشند، پیشامد نام دارند یعنی احتمال وقوع آنها، قابل محاسبه است. بطور کلی، تابع احتمال بصورت زیر تعریف می‌شود.

$\overset{\text{تابع احتمال}}{P} : \overset{\text{دامنه}}{\text{σ-جبر}} \longrightarrow \overset{\text{برد}}{[0,1]} \Longrightarrow$ این یعنی - برای هر A متعلق به σ-جبر داریم:

$\forall \underset{\text{یک پیشامد}}{A} \in$ σ-جبر $\Longrightarrow 0 \leq P(A) \leq 1$

برای ساختن σ-جبر کافیست یک کلاس بنام "C" از زیرمجموعه های یک مجموعه مرجع مانند فضای نمونه، تشکیل دهیم و برآن اساس، σ-جبر را بسازیم. مثال های زیر را دراین زمینه معرفی می‌کنیم:

مثال:

$S=\{a,b,c\}$ ، $A=\{b,c\}$

$C=\{A\}=\{\{b,c\}\}$

مولد σ-جبر

$\sigma\text{-جبر}=\{A, A', A\cup A', A\cap A'\}$

$\sigma\text{-جبر}=\{\{b,c\}, \{a\}, S, \phi\}$

تمرین: فرض کنید.

$S=\{a,b,c,d\}$ ، $A=\{b,c\}$ ، $B=\{a,c\}$ ، $C=\{A,B\}$

مطلوب است σ-جبر تولیدشده از روی C.

مولد σ-جبر

$C=\{A,B\}=\{\{b,c\},\{a,c\}\}$

$\sigma\text{-جبر}=\{A, A', B, B', A\cup A', A\cap A', B\cup B', B\cap B', A'\cup B, A\cap B, A\cup B', A'\cup B, A'\cap B, A\cap B'\}$

$\{a,b,c\}$ ، $\{b,c,d\}$ ، $\{c\}$ ، $\{a,c,d\}$

$B\cup B'$, $A\cup A'$ ، $B\cap B'$, $A\cap A'$

$A'\cap B=\{a\}$

$A\cap B'=\{b\}$

$\Rightarrow \sigma\text{-جبر}=\{\{b,c\},\{a,d\},\{a,c\},\{b,d\},\{a,b,c,d\},\phi,\{a,b,c\},\{c\},\{b,c,d\},\{a,c,d\},\{a\},\{b\}\}$

$\{a,b,c,d\}=S$

احتمال از دیدگاه کلاسیک اگر بخواهیم احتمال را تعریف کنیم، چون با هر عبارتی که آنرا شروع کنیم، از کلمات احتمال، شانس، شانس وقوع و... استفاده می‌شود، دراین صورت باهیچ عبارتی، احتمال قابل تعریف نیست و دریک دور باطل قرار می‌گیریم. به جای آن، دیدگاه‌های مختلف در محاسبه احتمال وقوع یک پیشامد را معرفی می‌کنیم. اولین دیدگاه، دیدگاه کلاسیک، طبق این دیدگاه اگر فضای نمونه‌ای آزمایش تصادفی، متناهی باشد، به صورت $S=\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ که دراین حالت، این فضای نمونه، متناهی و شمارا است. براساس دیدگاه کلاسیک، با یک اطلاع اضافی، احتمال وقوع هریک از e_i ها برابر با:

$$P(e_i)=\frac{1}{k}=\frac{1}{\text{تعداد حالات فضای نمونه‌ای}} \qquad \forall i: 1,2,3,\dots,k$$

بعنوان مثال، اگر گفته شود، تاسی سالم است، دراین صورت $S=\{1,2,\dots,6\} \Rightarrow P(e_i)=\frac{1}{6};\ i=1,2,\dots,6$

نقطه ضعف دیدگاه کلاسیک برای فضای نمونه شمارا و نامتناهی دراین است که (مثل اعداد طبیعی) $S=\{e_1, e_2, \dots\}$ دراین صورت احتمال e_i ($P(e_i)$)، $P(e_i)=\frac{1}{\infty}\cong 0$ پس دراین موقع کاربرد ندارد. همچنین زمانیکه فضای نمونه به صورت ناشمارا و نامتناهی باشد، مانند فضای نمونه‌ای $S=\{x; a\leq x\leq b,\ x\in R\}$ (یک پاره خط) دراین حالت، برای هر پیشامد، طبق احتمال کلاسیک، محاسبه به صورت زیر است،

$$A\subseteq S \Longrightarrow P(A)=\frac{\text{طول }A}{\text{طول }S}$$

مثال:

$$A=\{x;\ x\in R,\ C_1\leq x\leq C_2\} \longmapsto P(A)=\frac{C_2-C_1}{b-a}$$

اگر در حالت نامتناهی و ناشمارا، به جای یک خط، با یک مساحت سروکار داشته باشیم، یعنی فضای نمونه (S)، یک فضای دوبعدی زیرمجموعه $\mathbb{R}^2$ باشد، در این صورت، احتمال وقوع هر پیشامد مانند $A \subseteq S$، $S \subseteq \mathbb{R}^2$ در این صورت طبق دیدگاه کلاسیک:

$$P(A) = \frac{A \text{ مساحت}}{S \text{ مساحت}} \Longleftarrow \begin{cases} A \subseteq S \\ S \subseteq \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

به همین ترتیب اگر $A \subseteq S$, $S \subseteq \mathbb{R}^3$

$$\begin{matrix} A \subseteq S \\ S \subseteq \mathbb{R}^3 \end{matrix} \Longrightarrow P(A) = \frac{A \text{ حجم}}{S \text{ حجم}}$$

نکته: اگر در احتمال کلاسیک، فضای نمونه، شمارا و متناهی باشد $S = \underbrace{\{e_1, e_2, \ldots, e_k\}}_{n(S)=k}$ در این صورت برای هر پیشامد مربوط به S مانند A، احتمال A برابر است با $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$ که در آن $n(S) = k$ می باشد پس:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{n(A)}{K}$$

بعنوان مثال در همین مورد اگر گفته شود تاس سالمی پرتاب شده احتمال اینکه نتیجه پرتاب، کوچکتر مساوی با 2 باشد، چون شرایط احتمال کلاسیک بدلیل سالم بودن تاس برقرار است؛ پس:

$$S = \underbrace{\{1, 2, \ldots, 6\}}_{K = n(S) = 6}$$

$$\left.\begin{matrix} P(e_i) = \frac{1}{6} & \forall i: 1, 2, \ldots, 6 \\ A = \{1, 2\} & n(A) = 2 \end{matrix}\right| \Longrightarrow \boxed{P(A) = \frac{2}{6}}$$

دیدگاه فراوانی نسبی: از این دیدگاه، احتمال وقوع هر پیشامد براساس تکرار آزمایش تصادفی مورد نظر، به دفعات بسیار زیاد (مثلاً 1000 بار، 10000 بار و ...) و براین اساس محاسبه فراوانی نسبی هر یک از رویدادهای فضای نمونه آزمایش و محاسبه اینکه این فراوانی نسبی، تقریباً برابر با چه عددی است. این عدد برابر با احتمال وقوع آن رویداد، درنظر گرفته می شود. این دیدگاه هم مبنای عقلانی دارد و هم بر تکرار پذیر استوار است. از این نظر بسیار مورد قبول است.

احتمال از دیدگاه ذهنی: که مبنای محاسباتی ندارد. طبق نظر و اطلاعات افراد مختلف بیان می شود و در صفت برای رخدادهایی است که تکرار پذیر نباشند به همین دلیل جایگاهی در محاسبات احتمالی ما ندارند. (مثل احتمال امتداد جنگ سوریه که هرکسی نظر متفاوتی دارد.)

قوانین موضوعه در احتمال

این قوانین که با سه اصل مطرح می شوند که در زیر به شرح آنها می پردازیم، تمام مسائل احتمال، بر مبنای این سه اصل و نتایج آنها پایه ریزی شده است و از این طریق حل می شوند. این سه اصل، به اصول کلموگروف مشهورند.

فرض کنید فضای نمونه S مربوط به یک آزمایش تصادفی را درنظر گرفته ایم و A، پیشامدی در این فضای نمونه باشد. طبق اصل اول موضوعه داریم:

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1$$

طبق اصل دوم موضوعه:

$$P(S) = 1$$

طبق اصل سوم موضوعه: اگر $A_1, A_2, \ldots$ پیشامدهای مجزا (disjoint) (ناسازگار) (بدون هیچ اشتراک) در یک فضای نمونه باشند یعنی $A_1, A_2, \ldots \subseteq S$ آنگاه:

$$① \; B = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots$$

$$② \; \text{آنگاه} \Longrightarrow P(B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

① اولین نتیجه از اصل سوم موضوعه احتمال :

فرض کنید $A_1, A_2, \ldots, A_n$، زیرمجموعه های S و دو به دو ناسازگار باشند دراین صورت

$A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq S$

$A_i \cap A_j = \phi \quad \forall i,j : 1,2,\ldots,n \,,\, i \neq j \implies B = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \implies P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

اثبات: نتیجه فوق به این صورت از اصل سوم موضوعه بدست آمده که دراین اصل، از $A_{n+1}, A_{n+2}, \ldots = \phi$

مثال: فرض کنید آزمایش تصادفی مورد نظر، نتیجه پرتاب یک سکه سالم، همراه با یک تاس سالم باشد (یک بار آنها را پرتاب کرده باشیم). دراین صورت احتمال اینکه نتیجه پرتاب تاس، زوج و نتیجه پرتاب سکه، شیر باشد، چقدر است؟

حل:

$S = \left\{ \begin{matrix} (H,1) , (T,1) \\ (H,2) , (T,1) \\ \vdots \quad ; \quad \vdots \\ (H,6) ; (T,6) \end{matrix} \right\}$, $A = \left\{ \begin{matrix} (H,2) \xrightarrow{} A_1 \\ (H,4) \xrightarrow{} A_2 \end{matrix} \right\}$ $\to B$

$n = 12$

که یکی از ۹

چون سالمند، هم احتمالند

$B = A_1 \cup A_2 \Rightarrow P(B) = \underbrace{P(A_1)}_{\frac{1}{12}} + \underbrace{P(A_2)}_{\frac{1}{12}} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

$P(B) = \frac{1}{6}$

② نتیجه: $\forall A \subseteq S \implies P(A') = 1 - P(A)$

$S = A \cup A'$, $n = 2$, $A \cap A' = \phi \implies \overset{\text{اصل دوم}}{P(S)} = 1 = P(A) + P(A') \implies P(A') = 1 - P(A)$ و $P(A) = 1 - P(A')$

③ نتیجه $P(\phi) = 0 \implies$

طبق اصل سوم، $A_1, A_2, \ldots = \phi$، پس داریم

$A_1, A_2, \ldots = \phi \implies B = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \phi$

$P(\phi) = 0 \impliedby P(B) = P(\phi) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots = P(\phi) + P(\phi) + \ldots$

چاسبه احتمال اجتماع ۲ پیشامد :

" " " " ۳ پیشامد و بیشتر :

درحالت کلی فرض کنید A_1, A_2، دو پیشامد دلخواه در فضای نمونه S باشند، دراین صورت $B = A_1 \cup A_2 \implies P(B) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$

$B = A_1 \cup A_2 \implies P(B) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$

براساس این احتمال اگر A_1, A_2, A_3، سه پیشامد دلخواه در یک فضای نمونه S باشند و $B = A_1 \cup A_2 \cup A_3$، آنگاه:

$B = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \implies P(B) = \sum_{i=1}^{3} P(A_i) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$

امتحان‌های قدیم

*مثال: یک تاس شش وجهی را با شماره ها ۱ تا ۶، یک بار پرتاب کرده، با این تفاوت که احتمال مشاهده هر خال از این تاس، متناسب با آن خال است. مطلوب است احتمال اینکه نتیجه پرتاب، زوج باشد (منظور از تناسب، در این سؤال این است که احتمال وقوع هر خال تاس، با معکوس آن متناسب باشد).

$1 \to P(\{1\}) = w$

$2 \to P(\{2\}) = \frac{w}{2}$

$3 \to P(\{3\}) = \frac{w}{3}$

نتیجه پرتاب 1 بار این تاس	P (هر نتیجه)	
1	$w = \frac{60}{147}$	$\frac{60}{147}$
2	$\frac{w}{2}$	$\frac{30}{147}$
3	$\frac{w}{3}$	$\frac{20}{147}$
4	$\frac{w}{4}$	$\frac{15}{147}$
5	$\frac{w}{5}$	$\frac{12}{147}$
6	$\frac{w}{6}$	$\frac{10}{147}$

$S = \{1, 2, \ldots, 6\}$

طبق اصل دوم

$P(S) = 1$

$w + \frac{w}{2} + \ldots + \frac{w}{6} = 1$

$\left(\frac{60+30+20+15+12+10}{60}\right) w = 1 \implies w = \frac{60}{147}$ ①   (6)

$A = \{2, 4, 6\}$, B; A_1, A_2, A_3

$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)$

$\implies P(A) = \frac{30+15+10}{147} = \frac{55}{147}$

$\implies \boxed{P(A) = \frac{55}{147}}$

احتمال شرطی: فرض کنید در فضای نمونه‌ای S، مربوط به یک آزمایش تصادفی، دو پیشامد A و B را در نظر گرفته‌ایم. اگر بدانیم پیشامد A رخ داده است، آنگاه، احتمال اینکه پیشامد B به شرط وقوع A رخ بدهد، اولاً با نماد $P(B|A)$ نمایش می‌دهیم و این احتمال برابر است با $\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$.

$$A,B \quad P(A)>0 \;\Big|\Longrightarrow P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

شرط یا احتمالی که قبلاً رخ داده است

* نکته بسیار مهم: برای محاسبه $P(A\cap B)$ و $P(A)$، حتماً باید احتمال آنها را از فضای نمونه اصلی S، بدست آوریم.

نتیجه ① از این رابطه:

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)} \Longrightarrow \boxed{P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B|A)}$$

قانون ضرب احتمال ۲ پیشامد

(قانون ضرب احتمال ۲ پیشامد، بسیار کاربرد دارد و برای مواقعی است که می‌خواهیم ۲ پیشامد B و A، با هم رخ بدهند.)

مثال: سه سکه وجود دارد، که سکه اول سالم است، سکه دوم دو شیر (هر دو طرف شیر) و در سکه سوم، شانس شیر آمدن، سه برابر خط است. یکی از این سکه ها را بطور تصادفی انتخاب می‌کنیم. (این سه سکه از نظر ظاهری کاملاً شبیه‌اند). احتمال اینکه در پرتاب یک سکه، نتیجه شیر باشد

سکه اول: $\frac{1}{2}\; P(H)$ ، $\frac{1}{2}\; P(T)$

سکه دوم $\longrightarrow P(H)=1$

سکه سوم $\longrightarrow P(H)=3P(T) \;\Big|\Longrightarrow S=\{H,T\}$

$P(S)=1 \Longrightarrow P(T)+3P(T)=1 \Longrightarrow P(T)=\frac{1}{4} \Longrightarrow P(H)=\frac{3}{4}$

$P(T)=\frac{1}{4}$ ، $P(H)=\frac{3}{4}$

یا سکه اول، یا سکه دوم یا سکه سوم:

$$P(H)=\frac{1}{3}\times\underbrace{P(H)}_{\text{سکه اول}}+\frac{1}{3}\times\underbrace{P(H)}_{\text{سکه دوم}}+\frac{1}{3}\times\underbrace{P(H)}_{\text{سکه سوم}}$$

احتمال رو آمدن

$$\Longrightarrow P(H)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times1+\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{2+4+3}{12}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}\Longrightarrow\boxed{P(H)=\frac{3}{4}}$$

مثال: یک تاس اُریب را یکبار پرتاب کرده‌ایم، در این تاس، احتمال آمدن خال های زوج، سه برابر خال های فرد است. اگر بدانیم، نتیجه پرتاب، کوچکتر از 5 بوده است، احتمال اینکه، نتیجه زوج باشد را محاسبه کنید

$S=\{1,2,3,4,5,6\}$

$P(\{2\})=P(\{4\})=P(\{6\})=3P(\{1\})$

$P(\{1\})=P(\{3\})=P(\{5\})=q$

$P(S)=1 \Rightarrow q+3q+q+3q+q+3q=1$

$\Longrightarrow 12q=1 \Longrightarrow q=\frac{1}{12}\,,\; 3q=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$

رخ داده است $A=\{1,2,3,4\}$

رخ بدهد $B=\{2,4\}$

$\Big|\Longrightarrow A\cap B=B$

$$P(B|A)=\frac{\overset{P(AB)}{P(A\cap B)}}{P(A)}=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

$\Longrightarrow P(AB)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$ از روی 2 نوشتیم.

از روی 3 نوشتیم. $\longleftarrow P(A)=\frac{1}{12}+\frac{1}{4}+\frac{1}{12}+\frac{1}{4}=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$

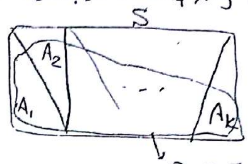
$$\Longrightarrow P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{4}\Longrightarrow\boxed{P(B|A)=\frac{3}{4}}$$

افراز یک مجموعه :

فرض کنید فضای نمونه S ، مربوط به یک آزمایش تصادفی را در نظر گرفته ایم و $A_1, A_2, \dots, A_k$ ، پیشامدهایی مربوط به S باشند. اگر دو شرط زیر برای این پیشامدها برقرار باشد، می گوییم ، $A_1, A_2, \dots, A_k$ ، یک افراز از S را تشکیل می دهند، بدیهی است که افرازهای یک مجموعه ، منحصر بفرد نیستند یعنی برای S، انواع افرازها (طبق دو شرط زیر) قابل تعریف اند.

شرط اول : $A_i A_j = \phi \quad \forall i,j : 1,2,\dots,k \quad i \neq j$ $\Longrightarrow$ یعنی A_i، A_jها، دو به دو، ناسازگارند.

$A_i A_j$ همان اشتراک است



$B \subseteq S$ یک پیشامد دلخواه

شرط دوم : $\bigcup_{i=1}^{K} A_i = S \quad (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k = S)$ ①

$(A_i \cap B)$

$$\text{①} \Longrightarrow B = \bigcup_{i=1}^{K} A_i B = A_1 B \cup A_2 B \cup \dots \cup A_k B$$

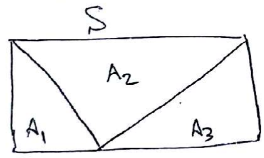
قانون احتمال کل

$$P(B) = \sum_{i=1}^{K} P(A_i B) = P(A_1 B) + P(A_2 B) + \dots + P(A_k B) \Longrightarrow \boxed{P(B) = P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2) + \dots + P(A_k) P(B|A_k)}$$

$P(A_1 B) = P(A_1) P(B|A_1)$

قانون احتمال کل : فرض کنید در یک فضای نمونه، پیشامدهای $A_1, A_2, \dots$ و A_k ، افرازی از S را تشکیل دهند (دو شرط بالا را دارند) . و پیشامد دلخواه B را در این فضای نمونه ، در نظر بگیریم ، آنگاه ، طبق خواص افراز بودن A_iها و همچنین طبق قانون ضرب احتمال دو پیشامد ، می توانیم احتمال B را بصورت (بالا) ② محاسبه کنیم که به این محاسبه نهایی، قانون احتمال کل می گویند . این قانون در مسائل احتمال شرطی ، بسیار کاربرد دارد .

مثال : کیسه ای حاوی یک سکه ۵ ریالی که تقلبی است ، هردو طرف شیر. یک سکه ۱۰ ریالی و یک سکه ۲۰ ریالی که هردو سالمند ، است . یکی از این سکه ها را ، که همگی هم شکلند ، از این کیسه ، به طور تصادفی انتخاب می کنیم و ۴ بار آنرا پرتاب می کنیم ، اگر نتیجه ۴ پرتاب ، یکسان و همگی شیر باشند ، احتمال اینکه سکه پرتاب شده ، همان سکه ۵ ریالی باشد چقدر است .



A_1 : پیشامد انتخاب سکه اول (۵ ریالی تقلبی از داخل کیسه)

A_2 : " " " " " (سکه ۱۰ ریالی سالم)

A_3 : " " " " ۲۰ ریالی سالم .

B : پیشامد اینکه در ۴ بار پرتاب ، سکه ، شیر آمده باشد

$\Rightarrow B = \bigcup_{i=1}^{K} A_i B$

$P(B) = \sum_{i=1}^{3} P(A_i B)$ ①

۴ بار پرتاب کرده ایم

$$\text{①}: P(B) = \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}\right) = \frac{18}{48} = \frac{3}{8}$$

سکه ای که برداشته ایم سکه تقلبی باشد

$$\Longrightarrow P(A_1 | B) = \frac{P(A_1 B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{3} \times 1}{\frac{3}{8}} = \frac{8}{9}$$

می دانیم که شیر است

قضیه بیز :

فرض کنید $A_1, A_2, \dots, A_k$ افرازی از فضای نمونه S باشند (پیشامدهایی که دو شرط گفته شده در بالا (بخش افراز) برای افراز را دارند) و B پیشامد دلخواهی در این فضای نمونه باشد آنگاه اگر B رخ داده باشد، احتمال اینکه هریک از A_iها در این رخ داد، موثر باشند، طبق فرمول زیر که آن را فرمول بیز می خوانیم، بدست می آید :

$$\boxed{P(A_i|B) = \frac{P(A_i B)}{P(B)} = \frac{P(A_i)\cdot P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^{k} P(A_i)\cdot P(B|A_i)}} \quad i:1,2,\dots,k \quad \text{قانون بیز}$$

$P(A_i \cap B)$

$$P(B) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i B) = P(A_1)\cdot P(B|A_1) + P(A_2)\cdot P(B|A_2) + \dots + P(A_k)\cdot P(B|A_k)$$

طبق قانون احتمال کل

$P(A_1), P(A_2), \dots, P(A_k)$: اصطلاحاً در قضیه بیز، به نام احتمال پیشین A_i ها، نامیده می شوند. (غیر شرطی) . و $P(A_1|B), P(A_2|B), \dots, P(A_k|B)$ در همین قضیه، احتمال های پسین A_i ها (یعنی احتمال های شرطی به شرط B ، نامیده می شوند.

* نکته: در مسائل بیز باید با تشخیص پیشامد B ، از قانون احتمال کل، احتمال پیشامد B را محاسبه کنیم و یکی از احتمال های پسین ($P(A_i|B)$) که مورد نظر است را محاسبه کنیم.

مثال: فرض کنید یک موسسه بیمه، افراد جامعه را به سه گروه با ریسک بالا، ریسک متوسط و ریسک پایین تقسیم نموده است که به ترتیب 20 ٪ ، 50 ٪ و 30 ٪ جامعه را تشکیل می دهند. اطلاعات این مؤسسه نشان می دهد، احتمال تصادف کردن این گروه ها در طول سال، به ترتیب، 30٪، 15٪ و 5 ٪ است. مطلوب است :

(استقلال پیشامدها را از سبک و سیاق مسأله تشخیص می دهیم (در اینجا)) .

الف) اگر از هر یک (از این گروه ها)، یک نفر به تصادف انتخاب کنیم، احتمال اینکه هیچکدام در طول سال، تصادفی نداشته باشند، چقدر است؟

ب) اگر از افراد بیمه شده یک نفر را انتخاب کنیم، احتمال اینکه در طول سال تصادفی داشته باشد، چقدر است؟

ج) اگر از افراد بیمه شده، یک نفر در طول سال، تصادفی نداشته باشد، انتخاب شده باشد، احتمال اینکه این فرد از گروه با ریسک متوسط باشد، چقدر است؟

A_1: پیشامد اینکه فرد با ریسک بالا باشد.

A_2: " " " " متوسط "

A_3: " " " " کم "

C= پیشامد تصادف کردن فرد.

و احتمال پیشین انتخاب یک فرد از این سه گروه

($P(A_1)=0.20$, $P(A_2)=0.50$, $P(A_3)=0.30$)

$P(C|A_1)=0.30$, $P(C|A_2)=0.15$, $P(C|A_3)=0.05$

B_1 : پیشامد انتخاب یک فرد از گروه با ریسک بالا که تصادف نداشته باشد.

B_2 : فرد از گروه ریسک متوسط با ریسک متوسط بدون تصادف

B_3 : فرد از گروه ریسک پایین بدون تصادف

$B_1 = P(B_1) = 0.30$

$B_1' \Rightarrow P(B_1') = 1-P(B_1) = 0.70$

حل الف

$B_i, i = 1,2,3$

$P(B_i) = P(C'|A_i) = 1 - P(C|A_i)$

$P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = P(B_1)\cdot P(B_2)\cdot P(B_3) = 0.70 \times 0.85 \times 0.95 = 0.56525$

به دلیل استقلال پیشامدهای B_1, B_2, B_3 از هم

حل ب

ب: با استفاده از فرمول تفکیک احتمال (احتمال کل) داریم:

$P(C) = P(A_1 \cap C) + P(A_2 \cap C) + P(A_3 \cap C)$

$= P(A_1)\cdot P(C|A_1) + P(A_2)\cdot P(C|A_2) + P(A_3)\cdot P(C|A_3)$

استقلال دو پیشامد و تعمیم آن به n پیشامد:

فرض کنید، A_1 ، A_2 ، دو پیشامد در فضای نمونه‌ای باشند. اگر رابطه‌ی زیر که یک گزاره‌ی دوطرفه است، برقرار باشد، آنگاه گفته می‌شود، A_1, A_2 ، از هم مستقلند.

$$P(A_1A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) \Longleftrightarrow$$ دو پیشامد A_1, A_2 مستقلند.

$A_1A_2 \equiv A_1 \cap A_2$

در حالت کلی اگر $A_1, A_2, \dots, A_n$ ، n پیشامد در فضای نمونه‌ای باشند، آنگاه زمانی می‌توانیم بگوییم n پیشامد فوق از هم مستقلند که تمام ترکیبات دوتایی، سه‌تایی و... ، n تایی آنها از هم مستقل باشند. بعنوان مثال، اگر سه پیشامد A_1, A_2, A_3 داشته باشیم ($n=3$)، زمانی می‌توانیم بگوییم A_1, A_2, A_3 مستقلند که این روابط برقرار باشد:

$$\begin{cases} P(A_1A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) \\ P(A_1A_3) = P(A_1) \cdot P(A_3) \\ P(A_2A_3) = P(A_2) \cdot P(A_3) \\ P(A_1A_2A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \end{cases} \Longleftrightarrow$$ سه پیشامد A_1 و A_2 و A_3 از هم مستقلند.

* یکی از این مسائل، در امتحان می‌آید.

مسئله ① دو جعبه وجود دارد. جعبه‌ی اول، سه مهره‌ی سفید، دو مهره‌ی سیاه. جعبه‌ی دوم دارای دو مهره‌ی سفید، سه مهره‌ی سیاه. از جعبه‌ی اول، دو مهره بطور تصادفی بدون جایگذاری انتخاب کرده و در جعبه‌ی دوم می‌گذاریم. سپس از جعبه‌ی دوم، سه مهره بطور تصادفی، بدون جایگذاری انتخاب می‌کنیم.

الف) احتمال اینکه سه مهره‌ی خارج شده از جعبه‌ی دوم، دوتا سفید یک سیاه باشد چقدر است؟

ب) اگر هر سه مهره خارج شده از جعبه‌ی دوم، سیاه باشند، احتمال اینکه دو مهره‌ی خارج شده از جعبه‌ی اول سیاه باشد چقدر است.

Box 1: 3w, 2b

Box 2: 2w, 3b

$C =$ پیشامد 3 مهره خارج شدن از جعبه‌ی دوم که 1 سیاه و 2 سفید باشد. $\Longrightarrow P(C) = ?$

B: 2 مهره خارج شدن از جعبه‌ی اول:
- B_1 هر دو سفید
- B_2 هر دو سیاه
- B_3 یکی سفید دیگری سیاه

افراز

$$C = \bigcup_{i=1}^{3} B_iC = B_1C \cup B_2C \cup B_3C$$

$$P(B_1) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$$

احتمال اینکه هر دو مهره خارج شده از ظرف اول بدون جایگذاری

هر دو سیاه $P(B_2) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$

یکی سیاه یکی سفید $P(B_3) = 2 \times \left(\frac{3}{5} \times \frac{2}{4}\right) = \frac{3}{5}$

قانون احتمال

$$P(C) = \sum_{i=1}^{3} P(B_iC) = P(B_1C) + P(B_2C) + P(B_3C)$$

$$P(B_1) \cdot P(C|B_1) + P(B_2) \cdot P(C|B_2) + P(B_3) \cdot P(C|B_3)$$

$$\Rightarrow \frac{27}{175} + \frac{1}{70} + \frac{36}{175}$$

می‌تواند بچرخد

$$P(B_1) \cdot P(C|B_1) = P(B_1C) = \frac{3}{10} \times \left[\left(\frac{4}{7} \times \frac{3}{6} \times \frac{3}{5}\right) \times 3\right] = \frac{27}{175}$$

$$P(B_2) \cdot P(C|B_2) = P(B_2C) = \frac{1}{10}\left[\left(\frac{2}{7} \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{5}\right) \times 3\right] = \frac{1}{70}$$

$$P(B_3) \cdot P(C|B_3) = P(B_3C) = \frac{3}{5} \times \left[\left(\frac{3}{7} \times \frac{2}{6} \times \frac{4}{5}\right) \times \underset{(8)}{3}\right] = \frac{36}{175}$$

مسئله ۲: یک دستگاه حقیقت سنج به متهمین وصل می شود. اگر شخص گناهکار باشد، با احتمال ۹۰٪ ادعا را رد می کند و اگر بی گناه باشد، با احتمال ۹۹٪ ادعا را تایید می کند. اگر یک متهم از گروه متهمین که فقط ۵٪ آنها گناهکارند انتخاب کنیم و دستگاه نشان دهد او گناهکار است، احتمال اینکه او بیگناه باشد چقدر است.

وضعیت متهم \ تشخیص دستگاه	B_1 نزد متهم گناهکار	B_2 نزد متهم بیگناه	P
A_1 گناهکار	$\%90 \times \%5$	$\%10 \times \%5$	$\%5$
A_2 بیگناه	$\%1 \times \%95$	$\%99 \times \%95$	$\%95$
P احتمال	0.0545	0.9455	1

$$P(B_1) = P(A_1B_1) + P(A_2B_1) = \%90 \times \%5 + \%1 \times \%95$$

$$B_1 = \bigcup_{i=1}^{2} A_iB_i = A_1B_1 \cup A_2B_1$$

افراز و احتمال کل

۱: وضعیت واقعی متهم

$$P(A_2 | B_1) = \frac{P(A_2B_1)}{P(B_1)} = \frac{\%1 \times \%95}{0.0545} \simeq \boxed{0.17}$$

$1 - 0.17 = 0.83 \Longrightarrow$ احتمال اینکه وقتی دستگاه فرد را گناهکار نشان می دهد و آن فرد واقعاً گناهکار باشد.

مسئله ۳: شخصی در یک مسابقه شرکت می کند. اگر امتیاز حداکثر بیاورد، برنده می شود و در مسابقه بعدی دیگر شرکت نمی کند. اگر امتیاز حداقل بیاورد، از بازی حذف شده و از دور مسابقات خارج می شود. در غیر این دو حالت، آنقدر مسابقه می دهد تا برنده یا اخراج شود. در صورتیکه در هر مسابقه، احتمال برنده شدن $\frac{1}{6}$، احتمال اخراج $\frac{1}{3}$ باشد، با کدام احتمال، حداکثر در ۴ مسابقه متوالی برنده می شود.

حل

e_1 برنده، e_2 اخراج، e_3 به بازی ادامه می دهد

$$= S = \{e_1, e_2, e_3\}$$

$$\left.\begin{array}{l} P(e_1) = \frac{1}{6} \\ P(e_2) = \frac{1}{3} \\ P(e_3) = ? \end{array}\right\} \Longrightarrow P(S) = 1 \Rightarrow \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + P(e_3) = 1 \longrightarrow P(e_3) = \frac{1}{2}$$

حداکثر تا 4 بازی برنده شود:

۱: بار دوم برنده شود.

$$\frac{1}{6} + \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{6}\right) + \underbrace{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{6}}_{\text{بار سوم}} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} \longrightarrow \text{بار چهارم}$$

بار اول برنده شود

$$= \frac{1}{6}\left[\underbrace{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}}_{\frac{8+4+2+1}{8}}\right] = \frac{1}{\cancel{6}_{2}} \times \frac{\cancel{15}^{5}}{8} = \boxed{\frac{5}{16}}$$

۱: پس بار اول باید نه برنده و نه بازنده گردد. پس یک $P(e_3)$ باید در آن ضرب گردد.

* حل این مسأله با این شرط انجام شده است که احتمال برد و باخت و ادامه در بازی های مکرر، تغییر نکند. * شرط کلی حل مسأله

---

* در همین مسأله اگر گفته می شد، این فرد حداقل تا 4 بار به بازی ادامه دهد تا برنده شود، این احتمال بصورت زیر بدست می آمد.

ب) $P(\text{حداقل 4 بار بازی تا برنده شود}) = 1 - P(\text{تا قبل از 4 بار برنده شود}) = 1 - \left[\underbrace{\frac{1}{6} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{6}}_{\frac{4+2+1}{24} \to \frac{7}{24}}\right] = \boxed{\frac{17}{24}}$

برای حل مسأله ۱ قسمت ب: $P(B_2|C)$ را می خواهد. $\times 3$ ندارد چون همه یک رنگند.

پیشامد اینکه سه مهره بیرون آمده سیاه باشند: C

$$P(B_1) \cdot P(C|B_1) = P(B_1C) = \frac{3}{10} \times \left[\left(\frac{3}{7} \times \frac{2}{6} \times \frac{1}{5}\right)\right] = \frac{3}{350}$$

$$P(B_2) \cdot P(C|B_2) = P(B_2C) = \frac{1}{10} \times \left[\frac{5}{7} \times \frac{4}{6} \times \frac{3}{5}\right] = \frac{1}{35}$$

$$P(B_3) \cdot P(C|B_3) = P(B_3C) = \frac{3}{5} \times \left[\frac{4}{7} \times \frac{\cancel{3}}{\cancel{6}} \times \frac{\cancel{2}}{5}\right] = \frac{12}{175}$$

B ها تغییر نمی کنند:

$$\xrightarrow{+} \frac{3}{350} + \frac{1}{35} + \frac{12}{175} = \frac{3 + 10 + 24}{350} = \frac{37}{350}$$

$$A: P\left(\underbrace{\text{دو مهره بیرون آمده از ظرف اول هر دو سیاه باشند}}_{B_2} \middle| \underbrace{\text{اگر سه مهره بیرون آمده از ظرف دوم سیاه باشند}}_{C}\right)$$

$$*: P(B_2|C) = \frac{P(B_2C)}{P(C)} = \frac{P(B_2) \cdot P(C|B_2)}{P(C)} = \frac{\frac{1}{35}}{\frac{37}{350}} = \frac{10}{37}$$

متغیرهای تصادفی: فرض کنید آزمایش تصادفی با فضای نمونه S مورد نظر باشد اگر بتوانیم تابعی به نام X که S به $\mathbb{R}$ تعریف کنیم به طوری که $X^{-1}(A)=B$ در $\forall A\subseteq \mathbb{R}$ و $B\in \mathcal{F}$ (جبر) یعنی B یک پیشامد از فضای نمونه باشد آنگاه می‌گوییم X یک متغیر تصادفی روی فضای نمونه‌ای است. به عنوان مثال فضای نمونه پرتاب یک سکه را سه بار در نظر بگیرید

$$S=\{(HHH)(TTT)(HHT)(TTH)(HTH)(THT)(THH)(HTT)\}$$

$X^{-1}\{0\}=\{(TTT)\}$

$X^{-1}\{2\}=\{(HHT)(HTH)(THH)\}$

$X=0,1,2,3$ ← تعداد شیرها

متغیرهای تصادفی می‌توانند به صورت گسسته و پیوسته باشند

متغیر تصادفی گسسته: بین دو مقدار متوالی‌اش هیچ مقدار دیگری وجود ندارد (مثال تعداد شیرها)

متغیر تصادفی پیوسته: بین دو مقدار متوالی‌اش بی‌شمار مقدار وجود دارد (مثال قد افراد)

تابع احتمال و تابع توزیع (تجمعی) احتمال یک متغیر تصادفی گسسته:

x	$P(X=x)$
a_1	$P(X=a_1)$
a_2	$P(X=a_2)$
$\vdots$	$\vdots$
a_k	$P(X=a_k)$

برای یک متغیر تصادفی گسسته به نام X باید تابع احتمال آن را به

$$\sum_{x=a_1}^{a_k} P(X=x)=1$$

جدولی به صورت روبرو درست معرفی و باید به سمت آن بریم برای می‌سنجیم

احتمال $X=x$ ($P(X=x)\geq 0$) همیشه باید از فضای نمونه‌ای که برای متغیر تصادفی روی آن تعریف شده استفاده کنیم

Year: Month: Date:

البته با این شرط که $\sum_{x=a_1}^{a_k} P(X=x) = 1$

مثال ۸: یک سکه‌ی ناسالم (یعنی دارای اریبی) را ۳ بار پرتاب می‌کنیم در این سکه احتمال شیر آمدن ۴ برابر خط آمدن است. تعریف می‌کنیم متغیر تصادفی X را تعداد دفعات آمدن خط در این ۳ بار پرتاب سکه تابع احتمال X را مشخص کنید

$S = \{(HHH)(TTT)(HHT)(TTH)(HTH)(THT)(HTT)(THH)\}$

$x = 0, 1, 2, 3$

تعداد دفعات خط آمدن ۳ بار

$P(\{H\}) = 4P(\{T\}) = 4q$

$4q + q = 1 \Rightarrow q = \frac{1}{5} \Rightarrow 4q = \frac{4}{5}$

$P(\{HHH\}) = \left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{64}{125}$

$P\left(\begin{Bmatrix} HHT \\ THH \\ HTH \end{Bmatrix}\right) = P(\{HHT\}) + P(\{THH\}) + P(\{HTH\}) =$

$\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right) + \left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right) = 3 \times \frac{16}{125} = \frac{48}{125}$

$P(\{TTT\}) = \left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{125}$

$P(\{TTH, THT, HTT\}) = 3 \times \left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{12}{125}$

x	$P(X=x)$
0	$\frac{64}{125}$
1	$\frac{48}{125}$
2	$\frac{12}{125}$
3	$\frac{1}{125}$

تابع احتمال $\frac{125}{125} = 1$

FARHANG

Subject:
Year: Month: Date:

تابع توزیع • تجمعی احتمال یک متغیر تصادفی گسسته: فرض کنید متغیر تصادفی x از نوع گسسته با تابع احتمال $P(x=x)$

معرفی شده باشد بنابه تعریف $F(c)$ تابع توزیع تجمعی x در نقطه c است اگر در رابطه زیر صدق کند

$$F(c) = P(x \leq c) = \sum_{x=a_1}^{c} P(x=x) = P(x=a_1) + P(x=a_2) + \dots + P(x=c)$$

اگر $c_1 \leq c_2 \Rightarrow F(c_1) \leq F(c_2)$
(دو عدد حقیقی)

$0 \leq F(c) \leq 1 \quad \forall c \in R$

تابع توزیع دارای خواص زیر است:

الف) این تابع غیر نزولی است یعنی اگر c_1 و c_2 دو عدد حقیقی باشند به طوری که $c_1 \leq c_2$ آنگاه $F(c_1) \leq F(c_2)$

ب) $F(c)$ به ازای همه ی اعداد حقیقی در فاصله ی صفر تا یک است

ج) F یک تابع پیوسته به راست است یعنی: $\lim_{h \to 0} F(x+h) = F(x)$

د) $F(-\infty) = P(x < a_1^-) = 0$ ، $F(+\infty) = P(x < a_k^+) = 1$

با این خواص تابع توزیع تجمعی یک متغیر تصادفی گسسته یک تابع پله ای است

اگر x_1 و x_2 دو مقدار متوالی متغیر تصادفی گسسته x باشند داریم: $F(x_2) - F(x_1) = P(x = x_2)$

تمام ویژگی های فوق برای مثال قبل نشان داده می شود

x	$P(X=x)$	$F(c)$
۰	۶۴/۱۲۵	۶۴/۱۲۵
۱	۴۸/۱۲۵	۱۱۲/۱۲۵
۲	۱۲/۱۲۵	۱۲۴/۱۲۵
۳	۱/۱۲۵	۱۲۵/۱۲۵ = ۱
	مجموع احتمال = ۱	

$F(0) = P(x \le 0) = P(x=0) = \frac{64}{125}$

$F(1) = P(x \le 1) = P(x=0) + P(x=1) = \frac{112}{125}$

$F(2) = P(x \le 2) = P(x=0) + P(x=1) + P(x \le 2) = \frac{124}{125}$

$F(3) = P(x \le 3) = \frac{125}{125} = 1$

$F(0{,}25) = P(x \le 0{,}25) = P(x=0) = \frac{64}{125}$

برای قسمت ج $F(2{,}5)$ برابر است با: $F(2{,}5) = F(2 + 0{,}5) = F(2) = \frac{124}{125}$

برای قسمت د $F(-\infty)$: $F(-1/2) = P(x \le -\frac{1}{2}) = 0$

$F(+\infty)$: $F(6) = P(x \le 6) = 1$

ه

$x_1 = 2$, $x_2 = 3$ $\Rightarrow F(3) - F(2) = P(x=3)$

نکته: از ویژگی (ه) در حل مسائل بسیار استفاده می‌کنیم زمانی که تابع توزیع متغیر تصادفی گسسته x را داریم و تابع احتمال را ندارم و بخواهیم تابع احتمال را بدست آوریم

مثال: تابع زیر را در نظر بگیرید

$P(x=x) = k\left(\frac{1}{4}\right)^{y}$, $y = 1, 2, 3, \ldots$

الف) مقدار k را چنان تعیین کنید که این تابع یک تابع احتمال برای متغیر تصادفی Y باشد

ب) احتمال های زیر را بررسی کنید

$P(y \le 5/2)$, $P(y \ge \frac{11}{4})$

Subject:

Year: Month: Date:

حل الف) می‌دانیم طبق تعریف تابع احتمال داریم:
$$\begin{cases} 0 \le P(x=x) \le 1 \\ \sum_{x=a_1} P(x=x) = 1 \end{cases}$$

$$\sum_{y=0}^{\infty} k\left(\frac{1}{6}\right)^y = 1 \Rightarrow k\sum_{y=0}^{\infty}\left(\frac{1}{6}\right)^y = 1 \Rightarrow \sum_{y=0}^{\infty}\left(\frac{1}{6}\right)^y = \frac{1}{k}$$

دنباله هندسی نزولی با $q=\frac{1}{6}$

$$\frac{6}{5} = \frac{1}{k} \Rightarrow k = \frac{5}{6}$$

$$\text{مجموع} = \frac{\overset{\text{جمله اول}}{a_1}}{1-q} = \frac{1\left(\frac{1}{6}\right)^0}{1-\frac{1}{6}} = \frac{1}{\frac{5}{6}} = \frac{6}{5}$$

حل ب) $F\left(y \le \frac{5}{2}\right) = F\left(\frac{5}{2}\right) = \sum_{y=0}^{5/2} P(y=y) = \frac{5}{6}\left[\left(\frac{1}{6}\right)^0 + \left(\frac{1}{6}\right)^1 + \left(\frac{1}{6}\right)^2\right]$

$$= \left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{43}{36}\right) = \frac{215}{216} = F(2)$$

$1 - P(x < 3.66)$

$$P\left(y \ge \frac{11}{3}\right) = 1 - P\left(y < \frac{11}{3}\right) = 1 - P(y \le 3) = 1 - P(y \le 3) = \cancel{\dots}$$

۳ و ۲

توزیع های ۲ متغیره گسسته: فرض کنید زوج تصادفی (x,y) را در نظر بگیرید که هر دو از نوع گسسته باشند

جدولی به صورت زیر به نام جدول توزیع توأم (x,y) می‌نامیم

توزیع حاشیه‌ای "x"

$x \backslash y$	b_1	b_2	....	b_l	$P(x=x)$
a_1	P_{11}	P_{12}	...	P_{1l}	$P(x=a_1) = P_{11}+P_{12}+\dots+P_{1k}$
a_2	P_{21}	P_{22}	...	P_{2l}	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$				
a_k	P_{k1}	P_{k2}	----	P_{kl}	$P(x=a_k) = P_{k1}+P_{k2}+\dots+P_{kl}$
$P(y=y)$	$P(y=b_1)$	$P(y=b_2)$	...	$P(y=b_l)$	

توزیع حاشیه‌ای "y"

در این جدول: $P_{ij} = P(x=x_i, y=y_j)$

$P_{21} = P(x=a_2, y=b_1)$

$P(y=b_1) = P_{11} + P_{21} + \dots + P_{k1}$

FARHANG

Subject:
Year: Month: Date:

تابع توزیع دو متغیره (x و y): یا به تعریف تابع توزیع (تجمعی) دو متغیر تصادفی x و y به صورت زیر تعریف می‌شود

$$F_{xy}(c,d) = P(x \leqslant c, y \leqslant d) = \sum_{x=a_1}^{c} \sum_{y=b_1}^{d} P(x=x, y=y)$$

$$= P(x=a_1, y=b_1) + P(x=a_2, y=b_2) + \dots P(x=c, y=d)$$

گشتاورهای متغیر تصادفی گسسته:
① گشتاور غیر مرکزی (اولیه) مرتبه r ام
② گشتاور مرکزی مرتبه r ام (به مرکز میانگین)

گشتاورها: تعریف گشتاورها برای یک متغیر تصادفی گسسته کمیت‌هایی هستند که از روی آن‌ها می‌توانیم معیارهای یا شاخص‌های آماری را برای جامعه محاسبه کنیم. گشتاورها به دو دسته غیر مرکزی و مرکزی تقسیم می‌شوند

فرمول گشتاور غیر مرکزی مرتبه r ام به صورت زیر است

$$\mu'_r = E(x^r) = \sum_{x=a_1} x^r \cdot P(x=x) = a_1^r \cdot P(x=a) + \dots$$

یادآوری: متغیر تصادفی گسسته "x" دارای تابع احتمال $P(x=x)$ است

بیشترین مقدار

اگر $r=1 \Rightarrow \mu'_1 = E(x) = \sum_{x=a_1} x \cdot P(x=x)$

امید ریاضی "x" (مقدار متوسط x در جامعه)

نکته: وقتی گشتاور با مرتبه (r) نشان داده می‌شود، چه مرکزی باشد چه غیر مرکزی

FARHANG

Scanned by CamScanner

Subject:
Year: Month: Date:

$\mu = E(x) = \mu'_1$

گشتاور مرکزی مرتبه r ام : این نوع گشتاور را با فرمول کلی زیر معرفی می شود

(میانگین) μ در اینجا به جای a مقدار μ قرار می گیرد

$$\mu_r = E[(x-a)^r] = \sum_{x=a_1}^{\text{بیشترین مقدار}} (x-\mu)^r . P(x=x) = (a_1-\mu)^r . P(x=a_1) + \dots$$

اگر در این مسئله لازم باشد به جای μ عدد دلخواه "c" را قرار دهیم گشتاور مرکزی مرتبه r ام بر مبنا "c" بدست می آید که در حالت بسیار کلی این فرمول است

اگر $r=1 \Rightarrow \mu_1 = E[(x-\mu)] = 0$

اگر $r=2 \Rightarrow \mu_2 = E[(x-\mu)^2] = E(x^2) - \mu^2 = \mu'_2 - {\mu'_1}^2 = Var(x) = \sigma^2$

خواص امید ریاضی :

۱_ خاصیت خطی بودن امید ریاضی : $E(\sum_{i=1}^{K} c_i x_i) = \sum_{i=1}^{K} E(c_i x_i) = E(c_1 x_1) + \dots + E(c_k x_k)$
$= c_1 E(x_1) + \dots + c_k E(x_k)$

۲_ امید ریاضی عدد ثابت برابر با همان عدد است ← $E(c) = c$

۳_ امید ریاضی $E(cx) = c E(x) = c . \mu'_1$

مثال : متغیر تصادفی x با تابع احتمال زیر داده شده است مطلوب است محاسبه امید ریاضی و واریانس آن

x	$P(x=x)$
0	$\frac{1}{10}$
1	$\frac{2}{10}$
2	$\frac{3}{10}$
3	$\frac{4}{10}$

و بر اساس آن C.V را محاسبه و تفسیر کنید

$$\mu'_1 = E(x) = \sum_{x=0}^{3} x \cdot P(X=x) = 0\times 0.1 + 1\times 0.2 + 2\times 0.3 + 3\times 0.4 = 2$$

$$\sigma^2 = Var(x) = E(x^2) - [E(x)]^2 = \mu'_2 - (\mu'_1)^2 = 5 - (2)^2 = 1$$

$$\mu'_2 = E(x^2) = \sum_{x=0}^{3} x^2 \cdot P(X=x) = 0^2\times 0.1 + 1^2\times 0.2 + 2^2\times 0.3 + 3^2\times 0.4 = 5$$

$$\sigma^2 = 1 \Rightarrow \sigma = 1 \Rightarrow C.V = \frac{1}{2} = 0.5 \qquad \leftarrow \frac{\text{انحراف معیار}}{\text{میانگین}}$$

در همین مسئله مطلوب است محاسبه‌ی $E(2^x)$, $E\left(\frac{1}{x}\right) = ?$

$$E(2^x) = \sum_{x=0}^{3} 2^x \cdot P(X=x) = 2^0\times 0.1 + 2^1\times 0.2 + 2^2\times 0.3 + 2^3\times 0.4 = 4.9$$

$$E\left(\frac{1}{x}\right) = \sum_{x=0}^{3} \frac{1}{x} \cdot P(X=x) = \infty$$

امید $\frac{1}{x}$ وجود ندارد زیرا یک مقدار نامتناهی است

$$\frac{1}{0}\times 0 \to \infty$$

مثال: متغیرهای تصادفی x و y با توابع احتمال زیر داده شده‌اند مطلوب است محاسبه‌ی $E(4x-2y) = ?$

x	$P(X=x)$
1	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{3}$
3	$\frac{1}{3}$

y	$P(Y=y)$
2	$\frac{1}{3}$
3	$\frac{2}{3}$

$$E(4x-2y) = E(4x) - E(2y) = 4E(x) - 2E(y) = \text{I}$$

$$E(x) = \sum_{x=0}^{3} x\, P(X=x) = 1\times\frac{1}{3} + 2\times\frac{1}{3} + 3\times\frac{1}{3} = 2$$

$$E(y) = \sum_{y=0}^{3} y\, P(Y=y) = 2\times\frac{1}{3} + 3\times\frac{2}{3} = \frac{8}{3}$$

$$\text{I} = 4(2) - 2\left(\frac{8}{3}\right) = \frac{8}{3}$$

کوواریانس ۲ متغیر تصادفی گسسته یا پیوسته در همبستگی از رابطه زیر محاسبه می‌شود

$$Cov(x,y) = E(x.y) - [E(x) . E(y)]$$

برای محاسبه کوواریانس x و y وقتی x و y دو زوج تصادفی گسسته با تابع احتمال توام زیر باشند به صورت زیر عمل می‌کنیم

$$Cov(x,y) = E(x,y) - [E(x) . E(y)]$$

$$E(x.y) = \sum_{x=a_1}^{a_k} \sum_{y=b_1}^{b_l} x.y.P_{xy} = a_1 b_1 P_{11} + a_1 b_2 P_{12} + \dots + a_1 b_l P_{1l} +$$
$$a_2 b_1 P_{21} + a_2 b_2 P_{22} + \dots + a_2 b_l P_{2l} +$$
$$\vdots$$
$$a_k b_1 P_{k1} + a_k b_2 P_{k2} + \dots + a_k b_l P_{kl}$$

$$E(x) = \sum_{x=a_1}^{a_k} x.P(x=x) = a_1 . P(x=a_1) + a_2 . P(x=a_2) + \dots + a_k . P(x=a_k)$$

$$E(y) = \sum_{y=b_1}^{b_l} y.P(y=y) = b_1 . P(y=b_1) + b_2 . P(y=b_2) + \dots + b_l . P(y=b_l)$$

مثال: عدد x را به تصادف از بین اعداد ۵ ,۴ ,۳ ,۲ ,۱ انتخاب می‌کنیم و سپس عددی را به تصادف به عنوان y از بین اعداد $1, 2, \dots, x$ انتخاب می‌کنیم مطلوب است تابع احتمال توام زوج تصادفی x و y

$x \backslash y$	1	2	3	4	5	$P(x=x)$
1	1/5	0	0	0	0	$P(x=1) = 1/5$
2	1/10	1/10	0	0	0	$P(x=2) = 1/5$
3	1/15	1/15	1/15	0	0	$P(x=3) = 1/5$
4	1/20	1/20	1/20	1/20	0	$P(x=4) = 1/5$
5	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$P(x=5) = 1/5$
$P(y=y)$	$\frac{137}{300}$	$\frac{77}{300}$	$\frac{47}{300}$	$\frac{9}{100}$	$\frac{1}{25}$	

FARHANG

و محاسبه بستگی همبستگی یا کوواریانس x,y

$$= \sum_{x=1}^{5} \sum_{y=1}^{5} x.y.P_{x.y} =$$
$$1\times1\times\frac{1}{5} + 0 +$$
$$2\times1\times\frac{1}{10} + 2\times2\times\frac{1}{10} + 0 +$$
$$3\times1\times\frac{1}{15} + 3\times2\times\frac{1}{15} + 3\times3\times\frac{1}{15} + 0 +$$
$$4\times1\times\frac{1}{20} + 4\times2\times\frac{1}{20} + 4\times3\times\frac{1}{20} + 4\times4\times\frac{1}{20} + 0 +$$
$$5\times1\times\frac{1}{25} + 5\times2\times\frac{1}{25} + 5\times3\times\frac{1}{25} + 5\times4\times\frac{1}{25} + 5\times5\times\frac{1}{25} =$$

Scanned by CamScanner

$$E(x) = \sum_{x=1}^{5} x P(X=x) = 1\times\frac{1}{5} + 2\times\frac{1}{5} + 3\times\frac{1}{5} + 4\times\frac{1}{5} + 5\times\frac{1}{5} = 3$$

$$E(y) = \sum_{y=1}^{5} y\, P(Y=y) = 1\times\frac{37}{300} + 2\times\frac{77}{300} + 3\times\frac{47}{300} + 4\times\frac{9}{100} + 5\times\frac{1}{25} = 2$$

$$Cov(x,y) = E(x.y) - [E(x)\cdot E(y)] = 7 - [3\times 2] = 1$$

ضریب همبستگی خطی ۲ متغیر تصادفی: از معیار کوواریانس به عنوان سنجش و وضعیت رابطه خطی بین دو متغیر تصادفی

استفاده می‌کنیم به طوری که اگر کوواریانس ⇐ اگر $Cov(x,y) > 0$

بین x و y یک رابطه خطی مستقیم (افزایشی) وجود دارد

اگر $Cov(x,y) = 0$ بین x و y رابطه خطی وجود ندارد ولی ممکن است غیرخطی برقرار باشد

اگر $Cov(x,y) < 0$ بین x و y یک رابطه خطی معکوس (کاهشی) وجود دارد

با این کار وجود یا عدم وجود رابطه خطی بین x,y مشخص می‌شود ولی اگر رابطه خطی بین x و y برقرار

باشد (چه از نوع مستقیم چه معکوس) از نظر قدرت یا میزان آن رابطه با معیاری به نام ضریب همبستگی خطی

(x,y) مشخص می‌شود فرمول آن ضریب همبستگی به صورت زیر است

$$\rho_{(x,y)} = \frac{Cov(x,y)}{\sigma_x \cdot \sigma_y} \qquad -1 \le \rho_{(x,y)} \le 1$$

هر چه ρ به ۱ یا ۱- نزدیک‌تر باشد قدرت یا همان میزان رابطه خطی x,y بالاتر است برعکس

است که ρ نزدیک صفر باشد یعنی رابطه خطی بسیار ضعیف بین x و y برقرار است و $\rho = 0$

یعنی x و y ارتباط خطی با هم ندارند ولی ممکن است غیرخطی داشته باشند

Year: Month: Date:

۱- تابع چگالی متغیرهای تصادفی پیوسته: یک متغیر تصادفی پیوسته باشد x بین دو مقدار متوالی اش بینهایت مقدار را می پذیرد و برای یک متغیر تصادفی پیوسته تابعی به نام تابع چگالی (احتمال) را تعریف می کنیم بطوری که این تابع به نام $f(x)$ حتما در دو شرط زیر صدق می کند

$$\text{الف)}\ \forall\ a \leq x \leq b \Rightarrow f(x) \geq 0 \qquad \text{ب)}\ \int_a^b f(x)\,dx = 1$$

نکته: اگر متغیرهای تصادفی پیوسته با یک تابع نامشخص معرفی شوند در صورتی که آن تابع بخواهد تابع چگالی باشد حتما دو شرط الف و ب در بالا باید برای آن ها برقرار شود ولی اگر در این مسئله گفته شود تابعی تابع چگالی است نیازی به بررسی این دو شرط نیست چون حتما این دو شرط روی کل مقادیر x دارا می باشد

هم چنین برای یک متغیر تصادفی پیوسته تابع توزیع تجمعی $F(c)$ به صورت زیر محاسبه می شود:

$$F(c) = P(x \leq c) = \int_a^c f(x)\,dx \qquad f(x): \text{تابع چگالی } "x"$$

a ← کم ترین مقدار x

به این ترتیب تابع چگالی مشتق تابع توزیع برای متغیرهای تصادفی پیوسته است

* جدولی در زیر ارائه می کنیم بر اساس این جدول شباهت ها و تفاوت های توابع چگالی احتمال و تابع توزیع مشخص می شود

هم چنان که قبلا یادآوری شد متغیرهای تصادفی پیوسته به موضوعات زمان، حجم، طول، مساحت مربوط می شد

مسئله های احتمالی:

برای متغیرهای پیوسته "x" تابع چگالی زیر داده شده:

$$f_{(x)} = \begin{cases} \frac{c_1}{x^2} & 1 \leq x \leq 10 \\ 0 & O.W \to \text{other where} \end{cases}$$

سایر جاها

مطلوب است محاسبه c_1 . محاسبه تابع توزیع متغیر تصادفی "x" . محاسبه احتمالات زیر:

1) $P(x > 2)$ 2) $P(1 \leq x < 5)$ 3) $P([x] = 3)$

الف) محاسبه c_1: با توجه به اینکه در مسئله گفته شده $f_{(x)}$ تابع چگالی می باشد پس دو شرط گفته شده در مورد تابع چگالی را دارد
از این رو برای محاسبه c_1 از این دو شرط استفاده می کنیم

$$\frac{c_1}{x^2} = f_{(x)} \geq 0 \quad \forall \; \overset{a}{1} < x < \overset{b}{10}$$

$$\int_1^{10} \frac{c_1}{x^2}\, dx = 1 \Rightarrow \int_1^{10} c_1 x^{-2}\, dx = 1 \Rightarrow \frac{c_1 x^{-1}}{-1}\Big|_1^{10} = 1$$

$$\frac{-c_1}{10} + \frac{c_1}{1} = 1 \Rightarrow 1 - \frac{1}{10} = \frac{1}{c_1} \Rightarrow \frac{9}{10} = \frac{1}{c_1} \Rightarrow \boxed{c_1 = \frac{10}{9}}$$

ب) $$f_{(x)} = \begin{cases} \frac{10}{9x^2} & 1 < x < 10 \\ 0 \end{cases}$$

$$F_{(c)} = P(x < c) = \int_1^c \frac{10}{9x^2}\, dx = \frac{10}{9}\left(\frac{x^{-1}}{-1}\right)\Big|_1^c = \frac{10}{9}\left[\frac{-1}{c} + 1\right]$$

$$= \frac{10}{9}\left[1 - \frac{1}{c}\right]$$

ج) ۱: $P(x>2) = 1-\underbrace{P(x<2)}_{F(2)} = 1-F(2) = 1-\frac{10}{9}\left[1-\frac{1}{2}\right]$

$= 1-\frac{5}{9} = \frac{4}{9}$

۲: $P(1\leq x<5) = \int_1^5 \underbrace{f(x)}_{\frac{10}{9x^2}}\,dx = \frac{10}{9}\left(\frac{x^{-1}}{-1}\right)\Big|_1^5 = \frac{10}{9}\left[\frac{-1}{5}+1\right] = \frac{8}{9}$

۳: $P([x]=3) = P(3\leq x<4) = \int_3^4 f(x)\,dx = \frac{10}{9}\left(\frac{x^{-1}}{-1}\right)\Big|_3^4$

$= \frac{10}{9}\left[\frac{-1}{4}+\frac{1}{3}\right] = \frac{5}{54}$

تمام مفاهیمی که در مورد گشتاورهای غیرمرکزی مرتبه r ام و مرکزی (به مبدا میانگین) مرتبه r ام درباره‌ی متغیر تصادفی گسسته قبلاً بحث شد عیناً برای پیوسته‌ها این مفاهیم و کاربردها برقرارند با این تفاوت که در متغیرهای تصادفی پیوسته با انتگرال‌گیری از تابع چگالی محاسبات فوق با فرمول مربوطه انجام می‌شود این مفاهیم در جدول زیر برای انواع متغیرهای تصادفی گسسته ارائه می‌شوند

جدول در صفحه بعد.

Subject:

Year: Month: Date:

* مرور *

متغیرهای تصادفی گسسته	متغیرهای تصادفی پیوسته
$x: a_1, a_2, \dots, a_k$	$a < x < b$
$a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_k$	$a \quad b$
تابع احتمال $P(x=x) \geq 0 \quad \forall x: a_1, a_2, \dots, a_k$, $\sum_{x=a_1}^{a_k} P(x=x) = 1$	تابع چگالی: $f(x) \geq 0 \quad \forall a < x < b$, $\int_a^b f(x)\,dx = 1$
تابع توزیع تجمعی $F(c) = P(x \leq c) = \sum_{x=a}^{c} P(x=x) = P(x=a_1) + P(x=a_2) + \dots + P(x=c)$	$F(c) = P(x \leq c) = \int_a^c f(x)\,dx$
$M'_r = E(x^r) = \sum_{x=a_1}^{a_k} x^r P(x=x)$	$M'_r = E(x^r) = \int_a^b x^r \cdot f(x)\,dx$
$M'_1 = E(x) = \sum_{x=a_1}^{a_k} x \cdot P(x=x)$	$M'_1 = E(x) = \int_a^b x \cdot f(x)\,dx$
$\sigma^2 = Var(x) = E(x^2) - (M'_1)^2$, $E(x^2) = \sum_{x=a_1}^{a_k} x^2 \cdot P(x=x)$	$\sigma^2 = Var(x) = E(x^2) - (M'_1)^2$, $E(x^2) = \int_a^b x^2 \cdot f(x)\,dx$
$0 \leq P(x=x) \leq 1 \quad \forall x: a_1, \dots, a_k$	$P(x=x) = 0 \quad \forall a < x < b$ ، احتمال دقیق برای یک x وجود ندارد
	$F'(x) = f(x)$ ، تابع چگالی = مشتق تابع توزیع

Subject: مسائل امتحانی نیمسال های قبل

Year: Month: Date:

۱ نمره (۳, ۵) ۹۴/۱۰/۲۴

ظرفی شامل ۴ توپ قرمز و ۶ توپ سبز است. یک توپ به تصادف انتخاب و رنگ آن را می بینیم. همین توپ را همراه با ۳ توپ هم رنگ دوباره به ظرف برمی گردانیم. اینبار دو توپ بدون جایگذاری انتخاب می کنیم. الف) احتمال اینکه دو توپ خارج شده (مرحله آخر) هم رنگ باشند را محاسبه کنید. ب) اگر این دو توپ انتخاب شده هم رنگ باشند، احتمال اینکه اولین توپ انتخابی سبز بوده باشد چقدر است؟

۱ نمره (۲, ۵) ۹۵/۳/۲۲

۳ جعبه را در نظر بگیرید بطوری که جعبه اول شامل ۴ مهره سفید و ۲ مهره قرمز، جعبه دوم ۴ مهره سفید ۳ تا قرمز و جعبه سوم ۳ تا سفید ۲ تا قرمز باشد. الف) اگر از هر جعبه یک مهره انتخاب کنیم احتمال اینکه مهره ها سفید باشند چقدر است. ب) جعبه ای را به تصادف انتخاب می کنیم ۲ مهره یکی یکی بدون جایگذاری بیرون می آوریم. اگر مهره های انتخاب شده سفید باشند، احتمال اینکه جعبه سوم انتخاب شده باشد چقدر است.

(۵ نمره ۲/۵) ۹۴/۱۰/۲۴

تابع احتمال توام x و y به صورت زیر است: $P(x=x, y=y) = f_{xy}(x,y) = \begin{cases} k(x+y) & ; x=1,2,3 \quad y=1,2,3 \\ 0 & o.w \end{cases}$

گسسته

الف) تعیین مقدار k ب) تعیین ضریب همبستگی ج) تعیین احتمال اینکه $P(x=2 \mid y=2)$

حل: چون که بردار تصادفی گسسته (x,y) سروکار داریم می دانیم: الف) $\sum_{x=1}^{3}\sum_{y=1}^{3} P(x=x, y=y) = 1$

پس با استفاده از همین رابطه k را می سنجیم که در مورد توزیع های گسسته توام با رسم جدول کار خیلی محاسبات بسیار آسان می شود

x \ y	۱	۲	۳	$P(x=x)$
۱	۲k	۳k	۴k	$P(x=1) = 9k$
۲	۳k	۴k	۵k	$P(x=2) = 12k$
۳	۴k	۵k	۶k	$P(x=3) = 15k$
$P(y=y)$	$P(y=1)$ ۹k	$P(y=2)$ ۱۲k	$P(y=3)$ ۱۵k	

$\Rightarrow 36k = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{36}$

$P(1,1) = (1+1)k = 2k$

$P(1,2) = (1+2)k = 3k$

$\sum_x \sum_y P(x,y) = 1$

توزیع های ۲ متغیره پیوسته :

فرض کنید دو متغیر تصادفی (x,y) از نوع پیوسته با تابع چگالی توأم $f(x,y)$ را در نظر بگیریم این تابع چگالی توأم دارای ویژگی های زیر است :

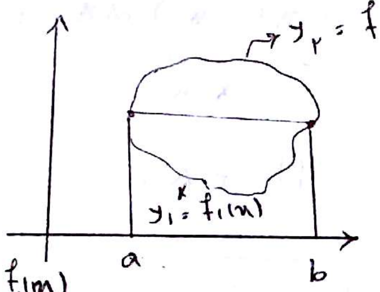
1) $f(x,y) \geq 0 \qquad \forall (x,y)$

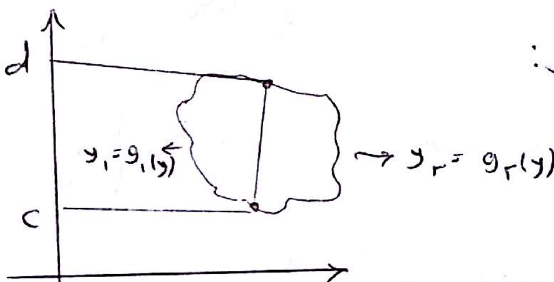
2) $\int_x \int_y f(x,y)\, dy\, dx = \int_y \int_x f(x,y)\, dx\, dy = 1$ → انتگرال روی کل مقادیر x و y برابر با یک است

با استفاده از این دو ویژگی برای هر تابع $f(x,y)$ که بخواهد تابع چگالی توأم باشد باید در دو شرط فوق صدق کند و اگر در مسئله ای گفته شود $f(x,y)$ تابع چگالی توأم (x,y) است پس حتما در دو شرط فوق صدق کرده است

اینک برای انتگرال گیری روی ناحیه ای باشد که زیر مجموعه $\mathbb{R}^2$ باشد فرض ناحیه ای در انتگرال که اگر آن ناحیه متعارف باشد

از رابطه زیر برقرار است :





$$\int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)\, dy\, dx = \underbrace{\int_c^d \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)\, dx\, dy}_{*}$$

* نکته : انتگرال داخلی اصلاً نباید به حدود داخلی بستگی داشته باشد

ناحیه متعارف : ناحیه ای است که اگر از هر نقطه از نقاط درونش خطی رسم کنیم آن خط بیرون نزند

از روی تابع چگالی توأم (x,y) می توانیم با روابط زیر تابع چگالی حاشیه ای x و نیز تابع چگالی (حاشیه ای) y را به دست آوریم :

1) $\int_x f(x,y)\, dx = h(y) \qquad \forall (x,y)$

2) $\int_y f(x,y)\, dy = g(x)$

نکته: در حل مسائل توزیع‌های پیوسته دو متغیره اگر در $f(x,y)$ که تابع چگالی توأم (x,y) است پارامتر مجهولی (مانند k و ...) وجود داشته باشد برای پیدا کردن آن پارامتر مجهول باید از شرط (ویژگی) دوم تابع چگالی توأم استفاده کنیم:

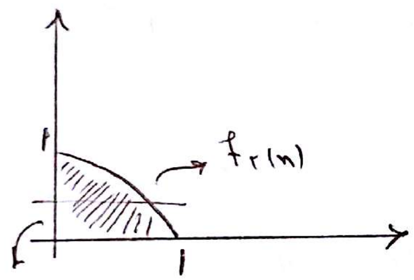
$$\int_x\int_y f(x,y)\,dy\,dx = 1$$

مثال: اگر تابع چگالی احتمال توأم (x,y) به صورت زیر باشد:

$$f(x,y) = \begin{cases} kxy & , x>0, y>0, x^2+y^2\leq 1 \\ 0 & \text{سایر جاها}, \ ow \end{cases}$$

الف) محاسبه k ب) احتمال x هایی که کوچکتر مساوی y باشد $P(x\leq y)$

الف) $\int_x\int_y kxy\,dy\,dx = 1 \Rightarrow \int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}} kxy\,dy\,dx = 1$



$f_1(x) = 0$

$$\int_0^1 \left(kx\frac{y^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{1-x^2}}\right)dx = \frac{k}{2}\int_0^1 \underbrace{x(1-x^2)}_{x-x^3}\,dx = 1$$

$$\Rightarrow \frac{k}{2}\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right] = 1 \Rightarrow \boxed{k=8}$$

$$f_2(x) = x^2+y^2=1 \Rightarrow y^2 = 1-x^2 \Rightarrow y = \sqrt{1-x^2}$$

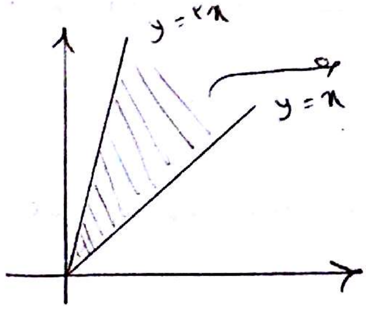
$$f_2(x) = \sqrt{1-x^2}$$

حل قسمت ب در صفحه بعد

تابع چگالی احتمال توأم (x,y) به صورت زیر است:

$$f(x,y) = \begin{cases} 4xy\,e^{-(x^2+y^2)} & , x>0, y>0 \\ 0 & , ow \end{cases}$$

مطلوب است محاسبه‌ی احتمال زیر: $P(x<y<2x)$



$x<y<2x$

تلاقی ۲ خط

$$\int_0^\infty\int_x^{2x} \left(4xy\,e^{-(x^2+y^2)}\right)dy\,dx$$

$$\int_0^\infty 4x\left[\frac{e^{-(x^2+y^2)}}{2}\right]_x^{2x} dx$$

$$= 4\int_0^\infty x\left(\frac{e^{-5x^2}-e^{-2x^2}}{-2}\right)dx = (-2)\left[\frac{e^{-5x^2}}{-10}-\frac{e^{-2x^2}}{-4}\right]_0^\infty = 0 + \left(\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{10}$$

Scanned by CamScanner

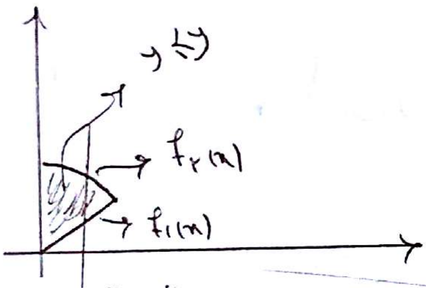
حل تست با شکل صفحه قبل:

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\int_x^{\sqrt{1-x^2}} 8xy\,dy\,dx = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(8x\frac{y^2}{2}\Big|_x^{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$$

$$= 4\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left[x(1-x^2)-x^3\right]dx = 4\left(\frac{x^2}{2}-\frac{2x^4}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$2x^2-2x^4\Big|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{(2)(2)}{4}-\frac{(2)(4)}{16}$$

$$= 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$



$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2&=1\\ x&=y\end{aligned}\right\} \Rightarrow 2y^2=1 \Rightarrow y^2=\frac{1}{2} \Rightarrow y=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$f_1(x)=x\ ,\ f_2(x)=\sqrt{1-x^2}$ | $2x^2=1 \Rightarrow x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

توزیع های شرطی گسسته و پیوسته :

گسسته : فرض کنید زوج تصادفی گسسته (x,y) با تابع احتمال توأم $p(x=y, y=y) = P_{xy} = P_{ij}$ معرفی شده باشند سپس به تعریف

توزیع شرطی $x|_{y=y}$ که آن را با $p(x|_{y=y})$ نشان می‌دهیم به صورت زیر است :

$$p(x|_{y=y}) = \frac{P_{xy}}{p(y=y)} = \frac{p(x=y, y=y)}{p(y=y)} \quad \forall x: a_1,\dots,a_k$$

$p(y=y)$ ← توزیع حاشیه‌ای در نقطه $y=y$

به طریق مشابه توزیع شرطی $y|_{x=y}$ با $p(y|_{x=y})$ نشان می‌دهیم برابر است با

$$p(y|_{x=y}) = \frac{P_{xy}}{p(x=x)} = \frac{p(x=x, y=y)}{p(x=x)} \quad \forall y=b_1,\dots,b_k$$

پیوسته : فرض کنید زوج تصادفی پیوسته (x,y) با تابع چگالی $f(x,y)$ را در نظر بگیرید مشابه تعریف توزیع شرطی $x|_{y=y}$ با $f(x|_{y=y})$ نشان داده می‌شود که به صورت زیر است

$$f(x|_{y=y}) = \frac{f(x,y)}{h(y)} \quad \forall x$$

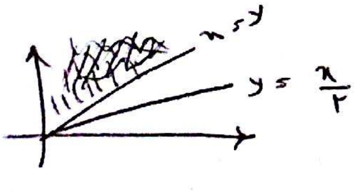
در این رابطه $h(y)$ تابع چگالی حاشیه‌ای y است

مثال : متغیرهای تصادفی (x,y) دارای تابع چگالی احتمال توأم زیر می‌باشند. مطلوب است محاسبه مقدار احتمال زیر :

$$P(\underbrace{x<y}_{B} \mid \underbrace{x<2y}_{A}) = ? \qquad f(x,y) = \begin{cases} e^{-(x+y)}, & x,y \geq 0 \\ 0, & ow \end{cases}$$

* زیرا $x<y$ زیر مجموعه $x<2y$ است *

$$= \frac{P_{AB}}{P(A)} = \frac{P(x<y, x<2y)}{P(x<2y)} \overset{*}{=} \frac{P(x<y)}{P(x<2y)}$$



$$P(x<y) = \int_0^\infty \int_0^y e^{-(x+y)}\,dx\,dy = ?$$

$$P(x<2y) = \int_0^\infty \int_0^{2y} e^{-(x+y)}\,dx\,dy = ?$$

مدل های احتمالی گسسته بسیار کاربردی :

۱) مدل برنولی (مدل شکست یا پیروزی یا دو حالتی) :

فرض کنید یک آزمایش تصادفی به صورت واقعی یا ساختگی فقط به دو حالت رخ دهد یعنی فضای نمونه آزمایش $S=\{e_1,e_2\}$ باشد در این صورت اگر e_1 رویداد حالت مورد نظر یا شده آن را بنامید ۱ و e_2 را بنامید ۰ یعنی حالت غیر مورد نظر نشان می دهیم اگر احتمال وقوع e_1 را با P نشان دهیم بدیهی است احتمال وقوع e_2 برابر با $q=1-P$ است برای چنین آزمایش تصادفی وقتی یک بار انجام شود تابع احتمال به صورت زیر است

x	$P(x=x)$
0	$1-P=q$
1	P
جمع	$=1$

$S=\{\overset{x=1}{e_1},\overset{0}{e_2}\}$ $\rightarrow 1-P=q$

احتمال حالت مورد نظر P

مثال : $S=\{$افراد غیر مبتلا و افراد مبتلا به ایدز$\}$, $S=\{$زوج نباشد و تاس زوج باشد$\}$, ...

مدل برنولی را که دو حالتی یا شکست و پیروزی یا در دسته مدل های احتمالی زیر است معرفی می کنیم :

۲) توزیع دو جمله ای : اگر یک آزمایش تصادفی با مدل برنولی را n بار مستقلاً انجام دهیم و بدانیم احتمال وقوع حالت مورد نظر در هر بار انجام آزمایش "P" است در این صورت

۲   ۳۰ + ۱۷ ، ۱۹ + ۳۵

Subject:
Year: Month: Date:

تعداد موفقیت ها (تعداد دفعاتی که حالت مورد نظر در n بار آزمایش حوادث داده است) از مدل

(مدل احتمالی) دو جمله ای (Binomial) با پارامتر n,p پیروی می کند. مدل دو جمله ای به صورت

زیر است: $P(x=x) = \binom{n}{x} p^{x} q^{n-x} \; ; \; x = 0, 1, \dots, n$

مثال: یک تولید کننده قطعات برقی اجناس خود را در بسته های ۲۰ تایی برای مصرف کنندگان می فرستد

هر قطعه یا معیوب است یا سالم و احتمال معیوب بودن 0.05 می باشد. مطلوب است الف)

احتمال اینکه در یک بسته ی دلخواه که به یک مصرف کننده دریافت می کند هیچ قطعه ی معیوبی نباشد (صفر) داشته ب)

دو قطعه ی معیوب باشد ج) اگر شرط پذیرش بسته از سوی مصرف کننده وجود حداکثر ۲ قطعه ی معیوب

در آن بسته باشد احتمال پس فرستادن بسته از سوی مصرف کننده چقدر است؟

$S = \{ e_1 , e_2 \}$ e_1: سالم = 0 $e_2 \to$ خراب $x=1$ $P(x=1) = 0.05 = p$

آزمایش قطعه موجود — ۱۰۰ هر قطعه

$P(\underbrace{x=0}_{\text{سالم}}) = 1 - 0.05 = 0.95 = q$

$n = 20 \; , \; x: 0, 1, 2, \dots, 20 \Rightarrow P(x=x) = \binom{20}{x} (0.05)^{x} (0.95)^{20-x}$

تعداد دفعات خراب در هر بسته ۲۰ تایی

الف) $P(x=0)$ ← سالم $= \binom{20}{0} (0.05)^{0} (0.95)^{20} = 0.358$

ب) $P(x \le 2) = P(x=0) + P(x=1) + P(x=2) = ?$

0.02

$P(x=1) = \binom{20}{1} (0.05)^{1} (0.95)^{19} = \dots$

FARHANG

$P(x=2) = \binom{20}{2} (0.05)^{2} (0.95)^{18} = \dots$

احتمال عدم پذیرش یعنی بازگرداندن

Subject: تعداد دفعات مشتری برای ... توزیع نقطه
Year: Month: Date:

c) $P(x \geq 2) = 1 - P(x < 2) =$

نکته: برای حل مسئله های مربوط به توزیع دو جمله ای جدول احتمالی مشخص بود که P یعنی همان احتمال وقوع حالت مورد نظر یا همان احتمال به اصطلاح موفقیت است ممکن است در بعضی از مسئله ها P را از ابتدا به طور مشخص نداده باشد و ما مجبور باشیم P را ابتدا حساب کنیم و سپس مسئله توزیع دو جمله ای را حل کنیم

نکته: در کتاب های آمار جدولی به نام جدول توزیع دو جمله ای وجود دارد که از این جدول می توانیم به صورت یکی از دو حالت زیر بر حسب اینکه این جدول چطور تنظیم شده است استفاده کنیم با داشتن این جدول دیگر لازم نیست محاسبات توزیع دو جمله ای را مستقیما انجام دهیم اگر مقادیر P و n در جدول دو جمله ای وجود داشته باشد آن را پیدا می کنیم و بر حسب n مورد نظر احتمال دو جمله ای بدست می آید

۳) جدول پواسن: یکی از جدول های احتمالی نسبتاً بسیار مهم و کاربردی در آمار و احتمال است که برای آزمایش های تصادفی با شرایط زیر به کار می رود:

۱) در توزیع دو جمله ای اگر داشته باشیم $n \geq 30$ و $n.P < 5$ در این صورت به جای فرمول توزیع دو جمله ای باید از توزیع پواسن با فرمولی که در زیر می آید استفاده کنیم

Subject:
Year: Month: Date:

$$\begin{cases} P(x=x) = \dfrac{e^{-\lambda}\cdot \lambda^{x}}{x!} \quad ; \quad x = 0, 1, 2, \dots \\ \lambda = n.2 \quad ; \quad \text{در این حالت} \end{cases}$$

۲) اگر در یک آزمایش تصادفی به متغیر x گسسته شمارشی است اولاً در فواصل زمانی یا مکانی مختلف وقوع رویدادها از هم مستقل باشند ثانیاً هر قدر طول زمانی یا مکانی کوچکتر شود احتمال عدم وقوع رویداد (یعنی احتمال اینکه رویدادی نداشته باشیم) افزایش یابد در این صورت باز هم از مدل احتمالی پواسن

برای وقوع پیشامد $x=x$ به صورت زیر استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} P(x=x) = \dfrac{e^{-\lambda}\cdot \lambda^{x}}{x!} \\ \lambda \Rightarrow \end{cases}$$

(در این حالت (۲) باید λ را از روی اطلاعات مسئله دریافت کنیم
λ متوسط رویداد در واحد زمانی یا مکانی اندازه‌گیری شده است)

مثال هایی از توزیع پواسن: (تعداد تصادف‌های رانندگی، تعداد غلط‌های چاپی یک کتاب، تعداد تشعشعات رادیواکتیو، ...)

مثال: اگر هر دو دقیقه یک نفر وارد یک کتابخانه شود مطلوب است احتمال اینکه الف) حداقل یک نفر بین ساعت ۱۲:۰۰ تا ۱۲:۰۵ وارد کتابخانه شود ب) از یک نفر تا ۴ نفر بین ساعت ۱۲:۰۰ تا ۱۲:۰۵ وارد کتابخانه شوند

طول زمان ۲ — تعداد ورود به کتابخانه ۱

$5 \quad \lambda = \dfrac{5\times 1}{2} = 2.5$

الف) $P(x\geq 1) = 1 - P(x<1) = 1 - P(x=0) = 1 - \dfrac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^{0}}{0!} = e^{-2.5}$

$= 1 - \dfrac{1}{e^{2.5}} = 0.9179$

ب) $P(1 \leqslant x \leqslant 4) = P(x=1) + P(x=2) + P(x=3) + P(x=4)$

$1,2,3,4$

$P(x=1) = \frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^{1}}{1!}$, $P(x=2) = \frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^{2}}{2!}$, $P(x=3) = \frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^{3}}{3!}$, ...

۴) مدل فوق هندسی: فرض کنید در یک جامعه ی محدود کوچک به تعداد اعضای جامعه N است افراد به دو گروه تقسیم شده باشند

به طوری که در گروه مورد نظر k تا عضو و در گروه سایرین $N-k$ عضو از جامعه حضور داشته باشند اگر

نمونه تصادفی به تعداد n بدون جایگذاری انتخاب کنیم و تعریف کنیم متغیر تصادفی x تعداد

اعضای طبقه مورد نظر در نمونه n تایی باشد آنگاه x از توزیع (یا مدل احتمالی) فوق هندسی با فرمول زیر

پیروی می کند

$$P(x=x) = \frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

$x; 0, 1, \dots, \min(n, k)$

N
طبقه مورد نظر k — سایرین $N-k$
n
x — $n-x$

مثال: ظرفی محتوی ۴۰ مهره است که از یک تا ۴۰ شماره گذاری شده. الف) دو مهره بدون جایگذاری از این

ظرف خارج می کنیم احتمال اینکه این مهره ها بین شماره های یک تا ۱۰ باشد چقدر است ب) اگر

با جایگذاری ۵ مهره را انتخاب کنیم احتمال اینکه هر ۵ مهره بین ۱ تا ۱۰ باشند چقدر است

حل: چون بدون جایگذاری از یک جامعه محدود کوچک (ظرف حاوی ۴۰ مهره) نمونه گیری انجام شده

الف)

$N = 40$
مهره های شماره ۱ تا ۱۰ $k = 10$ — سایرین $N - k = 30$
$n = 2$
x — $n-x$

$$P(x=x) = \frac{\binom{10}{x}\binom{30}{2-x}}{\binom{40}{2}} \; ; \; x = 0, 1, 2$$

$$P(x=2) = \frac{\binom{10}{2}\binom{30}{0}}{\binom{40}{2}} = \dots = \frac{3}{52}$$

FARHANG

پس x تعداد مهره های طبقه ی مورد نظر در نمونه از مدل فوق هندسی طبق فرمول فوق پیروی می کند

ب) چون اینبار با جایگذاری نمونه تصادفی n تایی را انتخاب می‌کنیم و جامعه از ابتدا دوحالتی بوده است پس با مدل

دوجمله‌ای به جای فوق هندسی سروکار داریم: در این حالت $n=5$ و x متغیر تصادفی تعداد مهره‌های از ایتا . ایران

$$P=\frac{10}{40}$$

$$q=1-P=\frac{3}{4}$$

نمونه n تایی از مدل دوجمله‌ای زیر پیروی می‌کند

$$P(x=x)=\binom{n}{x}P^{x}q^{n-x}\ ;\ x=0,1,2,\dots,n$$

$$P(x=x)=\binom{5}{x}\left(\frac{1}{4}\right)^{x}\left(\frac{3}{4}\right)^{5-x}\ ;\ x=0,1,\dots,5$$

$$P(x=5)=\binom{5}{5}\left(\frac{1}{4}\right)^{5}\left(\frac{3}{4}\right)^{0}=\left(\frac{1}{4}\right)^{5}=\frac{1}{256}$$

ه) مدل هندسی و دوجمله‌ای منفی: مدل هندسی: برای توزیع مدل هندسی باید یک آزمایش دوحالتی به

شانس پیروزی (حالت مورد نظر) در آن p است را آنقدر انجام دهیم تا به اولین پیروزی برسیم

آنگاه آزمایش متوقف می‌شود. برای این آزمایش تعریف می‌کنیم x متغیر تصادفی "تعداد دفعات انجام آزمایش

تا رسیدن به اولین موفقیت" باشد. با این تعریف x از مدل هندسی با پارامتر p به فرمول این توزیع

چون برای رخداد یکبار پیروزی باید یکبار آزمایش انجام شود

به صورت زیر است پیروی می‌کند $P(x=x)=q^{x-1}.P\ ;\ x=1,2,3,\dots$

مثال: در مثال قبل اگر ده موش به تصادف و با جایگذاری انتخاب شوند احتمال اینکه یکی از موش های ۱ تا ۱۰

برای اولین بار در انتخاب پنجم بدست آید چقدر است

چون در این حالت نمونه گیری با جایگذاری است پس احتمال موفقیت (موش های ۱ تا ۱۰) برابر ← $P = \frac{10}{40}$

است و چون به دنبال اولین پیروزی (موش ۱ تا ۱۰) در انتخاب پنجم هستیم پس X تعداد آزمایش های

لازم برای رسیدن به اولین پیروزی با شرایط $P = \frac{1}{4}$ از توزیع هندسی به صورت زیر پیروی می کند

$$P(X=x) = \left(\frac{3}{4}\right)^{x-1} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)$$

$$P(X=5) = \left(\frac{3}{4}\right)^{4}\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{81}{256} \times \frac{1}{4}$$

مدل دو جمله ای منفی: توسعه یافته ی مدل هندسی است به طوری که به جای تعداد آزمایش تا رسیدن

به اولین پیروزی به دنبال آن هستیم که آزمایش را تا آنجا ادامه دهیم که r پیروزی داشته باشیم

در این صورت فرمول توزیع دو جمله ای منفی برای متغیر تصادفی X که بیانگر تعداد آزمایش های لازم

برای رسیدن به r پیروزی با شانس موفقیت P در هر آزمایش است با فرمول زیر بدست می آید

$$P(X=x) = \binom{x-1}{r-1} q^{x-r} \cdot p^{r} \;;\; x = r, r+1, \dots$$

مثال: فرض کنید ۴۰٪ از ماهی های یک دریاچه از نوع آلودگی زیست محیطی رنج می برند

هر بار یک ماهی بگیریم و نوع آن را مشخص کنیم (که آلوده است یا خیر) و دوباره به دریاچه برگردانیم

Subject:
Year: Month: Date:

مطلوب است احتمال اینکه در ۱۰ امین بار ۴ امین ماهی مشاهده شده از نوع آلوده دیده شود

$$P(x=10) = \binom{10-1}{4-1} \left(\frac{3}{4}\right)^6 \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \ldots$$

۴) توزیع (مدل احتمالی) نرمال و زمینه های کاربردی آن:

معرفی یک مدل احتمالی پیوسته بسیار کاربردی: در بین مدل های احتمالی پیوسته توزیعی به نام مدل احتمالی نرمال از اهمیت ویژه ای برخوردار است توزیع نرمال در آمار و احتمال در موارد بسیار زیادی بویژه در تفسیرهای کمی کاربرد دارد اگر بدانیم متغیر تصادفی پیوسته x از توزیع نرمال پیروی می کند در این صورت تابع چگالی آن به فرمول زیر است

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad ; \quad -\infty < x < +\infty$$

در این فرمول μ برابر با میانگین x در جامعه و σ^2 نیز واریانس x در جامعه است زمانی که می خواهیم یک متغیر تصادفی به نام x با توزیع نرمال با مشخصات μ و σ^2 را معرفی کنیم چنین می نویسیم

$$x \sim N(\mu, \sigma^2)$$

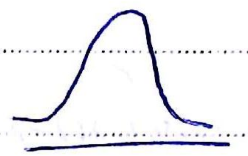
می خوانیم x از توزیع نرمال σ^2 و μ پیروی می کند

اگر در فرمول تابع چگالی توزیع نرمال قرار دهیم $\mu = 0$ و $\sigma^2 = 1$ آنگاه تابع چگالی توزیع

FARHANG

نرمال استاندارد $-\infty < x < +\infty$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ بدست می آید

تابع توزیع تجمعی (احتمال) نرمال در کتاب های آماری وجود دارد و در حل مسائل مربوط به توزیع نرمال باید از آن استفاده کنیم این جدول با انتگرال گیری از تابع چگالی استاندارد که در بالا معرفی کردیم بدست آمده است هر متغیر تصادفی با توزیع نرمال نمودار به شکل زیر برای تابع چگالی اش وجود دارد:



برای استفاده از جدول تابع توزیع تجمعی نرمال باید مراحل زیر را انجام دهیم:

۱) اگر $x \sim N(\mu, \sigma^2)$ باشد باید از روی x متغیر تصادفی u به صورت زیر را بسازیم:

$$u = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

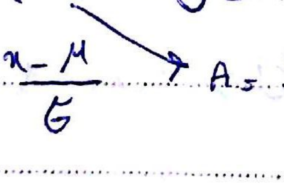
۲) $u \sim N(0,1)$ است آنگاه برای محاسبه ی احتمال $P(x<c)$ باید به صورت زیر عمل کنیم

$$u = \frac{x-\mu}{\sigma} \to A = \frac{c-\mu}{\sigma}$$

$$\Rightarrow P(x<c) \Rightarrow P(u<A)$$

۳) به سراغ جدول تابع توزیع تجمعی (احتمال) نرمال استاندارد می رویم ابتدا به نمودار بالای جدول توجه می کنیم این نمودار به یکی از دو حالت زیر است

الف



ب

اگر با شکل الف سروکار داشته باشیم $P(x\le c)=P(u\le A)$ از آن بدست می آید اگر با شکل ب

سروکار داشته باشیم $P(x\ge c)=P(u\ge A)$ بدست می آید در کتاب درسی این کلاس با شکل

الف سروکار داریم پس از درون جدول تابع توزیع نرمال در این کتاب می توانیم احتمال

$P(x\le c)=P(u\le A)$ را به راحتی به صورت تقریبی بدون هیچ گونه انتگرال گیری بدست آوریم

اگر دوم اعشار A را پیدا می کنیم

اگر اول اعشار و عدد صحیح A را پیدا می کنیم

$P(u\le A)$

اگر در مسئله احتمال $P(x\ge c)=P(u\ge A)$ را بخواهیم زمانی که با شکل الف در بالای جدول تابع توزیع نرمال

سروکار داریم $P(u\ge A)=1-P(u\le A)$

اگر احتمال $x\sim N(\mu,\sigma^2)$, $P(c\le x\le d)$

$$P(c\le x\le d)=\underbrace{P(x\le d)}_{u_1,\ A_1=\frac{d-\mu}{\sigma}}-\underbrace{P(x\le c)}_{u_2,\ A_2=\frac{c-\mu}{\sigma}}=P(u_1\le A_1)-P(u_2\le A_2)$$

موارد کاربرد توزیع نرمال:

۱) اگر به صورت صریح در مسئله گفته شود $x\sim N(\mu,\sigma^2)$ است

FARHANG

Subject:
Year: Month: Date:

۲) اگر در این مسئله متغیرهای تصادفی مستقل از هم به نام $x_1, x_2, \dots$ و x_k را داشته باشیم به

$x_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ و ... و $x_k \sim N(\mu_k, \sigma_k^2)$ و متغیر تصادفی y مجموع خطی $x_1, x_2, \dots, x_k$

به صورت زیر تعریف شده باشد $y = \sum_{i=1}^{k} a_i x_i = a_1 x_1 + \dots + a_k x_k$

آنگاه $y \sim N(\mu_y, \sigma_y^2)$ است نرمال μ_y و σ_y^2 به صورت زیر است

$$\mu_y = \sum_{i=1}^{k} a_i \mu_i = a_1 \mu_1 + \dots + a_k \mu_k$$

$$\sigma_y^2 = \sum_{i=1}^{k} a_i^2 . \sigma_i^2 = a_1^2 \sigma_1^2 + \dots + a_k^2 \sigma_k^2$$

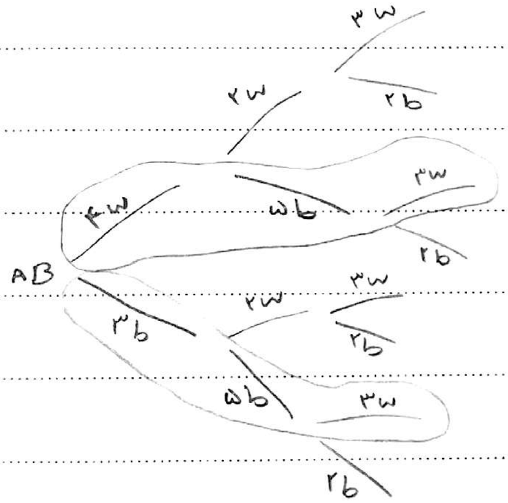
۱/ ۳ جعبه وجود دارد. جعبه ی اول ۴ مهره سفید ۳ تا سیاه. جعبه ی دوم ۲ مهره سفید ۵ سیاه. جعبه سوم ۳ سفید ۲ سیاه

از جعبه ی اول یک مهره به تصادف انتخاب می کنیم و در جعبه ی دوم می اندازیم سپس از جعبه ی دوم یک مهره به تصادف

انتخاب می کنیم و در داخل جعبه ی سوم قرار می دهیم حال از جعبه ی سوم ۱ مهره به تصادف انتخاب می کنیم

الف) احتمال اینکه مهره خارج شده از جعبه ی سوم سفید باشد ب) اگر مهره خارج شده از جعبه ی سوم سفید باشد

احتمال اینکه مهره خارج شده از جعبه ی دوم سیاه بوده باشد را به دست آورید (۳ نمره ۹۲)



الف) $\left(\frac{4}{7}\times\frac{3}{8}\times\frac{4}{6}\right)+\left(\frac{4}{7}\times\frac{5}{8}\times\frac{3}{6}\right)+\left(\frac{3}{7}\times\frac{2}{8}\times\frac{4}{6}\right)$

$+\left(\frac{3}{7}\times\frac{6}{8}\times\frac{3}{6}\right)=\underbrace{\frac{31}{56}}_{A}$

(سفید بودن مهره خارج شده از ظرف سوم)

ب) $P\left(\underbrace{\text{مهره بیرون آمده از ظرف دوم سیاه باشد}}_{B}\ \middle|\ \underbrace{\text{مهره بیرون آمده از ظرف سوم سفید است}}_{A}\right)=\frac{P(AB)}{P(A)}$

$P(AB)$ = احتمال اینکه مهره خارج شده از ظرف دوم سیاه و خارج شده از جعبه ی سوم سفید

$$=\frac{\frac{5}{28}+\frac{9}{56}}{\frac{31}{56}}=\frac{19}{31}$$

Subject:
Year: Month: Date:

۲) اگر داشته باشیم

$$f(x) = \begin{cases} c_1 x^2 & ; \ x = 1,2,3 \\ 0 & ; \ \text{سایر جاها} \end{cases}$$

$$f(y|x) = \begin{cases} \dfrac{c_2}{x} & ; \ x = 1,2,3 \quad y = 1,2,\dots,x \\ 0 & ; \ \text{سایر جاها} \end{cases}$$

الف) c_1 و c_2 را محاسبه کنید ب) $Cov(x,y)$ را محاسبه کنید ج) $E(y|x=2)$ را محاسبه کنید (۳ نمره)

(از این الف در حل مسئله زیر استفاده می‌کنیم به عنوان یک نکته هم دقت می‌کنیم که از ضرب توابع شرطی در توابع حاشیه‌ای توابع توأم بدست می‌آید (هم برای متغیرهای پیوسته هم گسسته.)

می‌دانیم : $P(B|A) = \dfrac{P(AB)}{P(A)}$

$$f(x) . f(y|x) = f(x,y)$$

$$c_1 x^2 . \frac{c_2}{x} = c_1 c_2 x \quad ; \ x = 1,2,3 \quad y = 1,2,\dots,x$$

در این مثال مقادیر "x" و "y" به صورت نقاط جدا هستند پس (x,y) هم از نوع گسسته اند بنابراین باید تابع احتمال توأم را تشکیل دهیم

x \ y	1	2	3
1	c_1c_2	-	-
2	$2c_1c_2$	$2c_1c_2$	-
3	$3c_1c_2$	$3c_1c_2$	$3c_1c_2$

$$\sum_{x=1}^{3} \sum_{y=1}^{x} f(x,y) = 1 \Rightarrow c_1c_2 + 2c_1c_2 + 2c_1c_2 + \dots + = 14c_1c_2 = 1$$

$$\Rightarrow c_1c_2 = \frac{1}{14}$$ بنابراین جدول را کامل می‌کنیم

	1	2	3	$P(x=x)$
1	$\frac{1}{14}$			$P(x=1) = \frac{1}{14}$
2	$\frac{2}{14}$	$\frac{2}{14}$		$P(x=2) = \frac{4}{14}$
3	$\frac{3}{14}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{3}{14}$	$P(x=3) = \frac{9}{14}$
$P(y=y)$	$P(y=1) = \frac{6}{14}$ $P(y=2) = \frac{5}{14}$ $P(y=3) = \frac{3}{14}$			

$$\sum_{x=1}^{3} f(x) = 1 \Rightarrow c_1(1)^2 + c_1(2)^2 + c_1(3)^2 = 1$$

زیرا f(x) تابع احتمال متغیر تصادفی "x" است

$$\Rightarrow c_1 = \frac{1}{14}$$

$$c_1c_2 = \frac{1}{14} \Rightarrow c_2 = 1$$

FARHANG

ب) $Cov(x,y) = E(x \cdot y) - \{E(x) \cdot E(y)\}$

$$E(x) = \mu_x = \sum_{x=1}^{3} x \cdot f(x) = 1 \times \frac{1}{14} + 2 \times \frac{4}{14} + 3 \times \frac{9}{14} = \frac{36}{14}$$

$$E(y) = \mu_y = \sum_{y=1}^{3} y\, f(y) = 1 \times \frac{6}{14} + 2 \times \frac{5}{14} + 3 \times \frac{3}{14} = \frac{25}{14}$$

نکته مهم در حل مسائل توزیع های دو متغیره از نوع گسسته این است که اگر در جدول تابع احتمال توأم حتی یک سلول صفر (یعنی $f(x,y)=0$) وجود داشته باشد نتیجه این است که x و y از هم مستقل نیستند بنابراین اگر در این مثال بررسی می‌کردیم x و y از هم مستقل اند یا نه پاسخ می‌دادیم خیر. اگر در یک مسئله x و y دو متغیر تصادفی باشند و از هم مستقل باشند کوواریانس آن‌ها صفر است در این مسئله چون مستقل نیستند کوواریانس‌شان صفر نیست

$$E(x \cdot y) = \sum_{x=1}^{3}\sum_{y=1}^{3} x \cdot y \cdot f(x,y) = 1 \times 1 \times \frac{1}{14} + 1 \times 2 \times 0 + 1 \times 3 \times 0 +$$
$$2 \times 1 \times \frac{2}{14} + 2 \times 2 \times \frac{2}{14} + 2 \times 3 \times 0 +$$
$$3 \times 1 \times \frac{3}{14} + 3 \times 2 \times \frac{3}{14} + 3 \times 3 \times \frac{3}{14} = \frac{67}{14}$$

$$Cov(x,y) = \frac{67}{14} - \frac{\cancel{36}}{\cancel{14}} \times \frac{25}{\cancel{14}} = \ldots$$

ج) $E(y \mid x=2) = \sum_{y=1}^{2} y \cdot f(y \mid x=2) = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$$f(y \mid x=2) = \frac{1}{2}$$

$y: 1, 2$

Subject:
Year. Month: Date:

۳) ظرفی شامل ۴ توپ قرمز ۶ سبز ! توپ به تصادف انتخاب و رنگ آن را می بینیم همین توپ
را همراه با ۳ توپ همرنگ خود به ظرف برمی گردانیم اگر دو توپ بدون جایگذاری انتخاب می کنیم
الف) احتمال اینکه ۲ توپ همرنگ باشند را محاسبه کنید ب) اگر این دو توپ همرنگ باشند احتمال اینکه
اولین توپ انتخاب شده سبز بوده باشد را محاسبه کنید (۳ نمره)

ه

Subject:

Year: Month: Date:

۴) تابع احتمال توام x و y به صورت زیر است

$$f_{(x,y)} = \begin{cases} k(x+y) & ; x = 1,2,3 \\ & \quad y = 1,2,3 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

الف) مقدار k را بیابید. ب) ضریب همبستگی (x,y) را بیابید.

ج) $P(x=2 \mid y=2)$

$$P_{(x,y)} = \frac{Cov(x,y)}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$$

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma^2} \Rightarrow \sigma^2 = Var(x)$$

$$\frac{P(x=2, y=2)}{P(y=2)}$$

۵) فرض کنید به طور متوسط در هر دقیقه ۶ تلفن به مرکز خبرات اداره ای زده می شود احتمال اینکه

تلفن چی ۳ دقیقه محل کارش را ترک کند و تلفن زده نشود چقدر است؟ (۱ نمره)

هر جا متوسط دارد مسئله احتمال توزیع پواسن است

دقیقه	تماس تلفنی با مرکز خبرات
۱	۶
۳	

$$\lambda = \frac{3 \times 6}{1} = 18 \qquad P(x=x) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!} \; ; \; x = 0,1,2,\dots$$

$$P(x=0) = \frac{e^{-18} \times (18)^0}{0!} = \frac{1}{e^{18}}$$

۶) یک آژانس مسافرتی به طور متوسط در هر ساعت ۲ بلیط هواپیما صادر می کند مطلوب است

الف) احتمال اینکه در دو ساعت کمتر از ۳ بلیط صادر کند چقدر است ب) احتمال اینکه دنیا هفته ای

خاص ۴ مین روز هفته اولین روزی باشد که در دو ساعت اول هیچ بلیطی صادر نشود (۲.۵)

ساعت	بلیط صادر شود
۱	۲
۲	

متوسط بلیط فروخته شده در هر ۲ ساعت

$$\lambda = \frac{2 \times 2}{1} = 4$$

FARHANG

الف) $P(x<3) = ?$

$$P(X=x) = \frac{e^{-\lambda}\cdot \lambda^{x}}{x!} \;;\; x = 0,1,2,\dots$$

$$P(X=x) = \frac{e^{-۴}\cdot ۴^{x}}{x!} \;;\; x = 0,1,\dots$$

$$P(\underbrace{x<۳}_{0,1,2}) = \sum_{x=0}^{۲} P(x=x) = \frac{e^{-۴}\times ۴^{0}}{0!} + \frac{e^{-۴}\times ۴^{1}}{1!} + \frac{e^{-۴}\times ۴^{۲}}{۲!} = \frac{۱۳}{e^{۴}}$$

در این مسئله چون با توزیع پواسن سروکار داشتیم احتمال فوق ($P(x<۳)$) را بر اساس این مدل احتمالی حساب می‌کنیم. نکته: اینکه از کجا بدانیم با توزیع پواسن سروکار داریم یکی از مهم ترین نکات به حساب می‌آید. این است که درباره‌ی متوسط وقوع یک متغیر تصادفی گسسته (در این مسئله تعداد بلیط فروخته شده) اطلاع داشته باشیم. این اطلاع را می‌گوییم $\lambda=4$ در بالا استفاده شده است.

$$P(Y=y) = q^{y-1}\cdot P \;;\; y = 1,2,\dots$$

$$P(Y=۳) = q^{۲}\cdot P =$$

$q = 1-P$

احتمال اینکه در دو ساعت هیچ بلیطی فروخته نشود

$$P = P(x=0) = \frac{e^{-۴}\times ۴^{0}}{0!} = \frac{1}{e^{۴}} \Rightarrow q = 1-\frac{1}{e^{۴}}$$

از قسمت الف داریم

$$P(Y=۳) = \left(1-\frac{1}{e^{۴}}\right)^{۲}\times \frac{1}{e^{۴}}$$

در این قسمت از توزیع هندسی استفاده کردیم زیرا اولین باری که اتفاق مورد نظر (اینکه در دو ساعت اول بلیطی فروخته نشود) رخ داده است سومین دو ساعت بوده است

Subject:
Year: Month: Date:

در آمار روش‌های تجزیه و تحلیل داده‌ها به دو دسته کلی توصیفی و استنباطی تقسیم می‌شوند در بحث روش‌های آمار توصیفی که مربوط به مباحث فصل اول کتاب درسی بوده است توضیحات این قسمت مفصل ارائه شده است در بحث آمار استنباطی از روی نمونه تصادفی (معرف جامعه طبق ساختار جامعه نمونه‌گیری شده باشد) می‌خواهیم درباره پارامترهای مجهول جامعه قضاوت کنیم برای این کار ۲ مبحث وجود دارد ۱) برآورد کردن

۲) آزمون فرض در این بحث می‌پردازیم به بحث برآورد کردن

بنا به تعریف پارامترها مشخصات عددی جامعه هستند (مثال: میانگین جامعه، واریانس جامعه) به طور کلی در جامعه‌های محدود بزرگ و نامحدود پارامترها مجهول‌اند باید آن‌ها را از روی نمونه‌ها تخمین بزنیم این عمل یعنی تخمین زدن پارامترهای مجهول به نام «برآورد کردن» خوانده می‌شود

برای برآورد کردن نیاز به برآوردگر داریم برآوردگرها فرمول‌هایی هستند که برای هر پارامتر از برآوردگر خاص آن پارامتر جهت تخمین زدن آن پارامتر استفاده می‌کنیم

برآوردگرها به دو قسمت تقسیم می‌شوند نقطه‌ای و فاصله‌ای (فاصله‌ی اطمینان)

برآوردگر نقطه‌ای مقدار یک پارامتر مجهول در جامعه را روی یک نقطه از اعداد حقیقی تخمین می‌زند

Subject:
Year: Month: Date:

که برابر است احتمال اینکه این تخمین با فاصله واقعی پارامتر مجهول برابر باشد ۰ یا ۱ است

ولی برآوردگرهای فاصله که نام دیگرشان فاصله‌ی اطمینان است پارامتر مجهول جامعه را در یک

فاصله از اعداد حقیقی با احتمال $(1-\alpha)\%$ تخمین می‌زنند به این ترتیب برآوردگرهای

فاصله‌ای بسیار مفیدترند ولی برآوردگرهای نقطه‌ای برای ساختن فرمول برآوردگرهای فاصله‌ای

آن پارامتر استفاده می‌شوند

۱) فرمول‌های برآوردگر نقطه‌ای و فاصله‌ی اطمینان میانگین مجهول جامعه:

فرض کنید در یک جامعه محدود یا نامحدود متغیر تصادفی x را در نظر بگیریم و $\mu = E(x)$ مجهول باشد

اولا μ را با $\bar{x}$ به صورت نقطه‌ای تخمین می‌زنیم و می‌نویسیم: $\hat{\mu} = \bar{x}$ و $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$

یعنی هرگاه میانگین جامعه مجهول باشد از روی میانگین نمونه تصادفی از آن جامعه μ را تخمین می‌زنیم

فرمول‌های فاصله‌ی اطمینان μ در شرایط مختلف مسئله به صورت جدول زیر است

صفحه‌ی بعد

Year: Month: Date:

تعداد نمونه	فرمول فاصله‌ی اطمینان
$n \geq 30$	$\bar{x} - \left(\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \cdot u_{\frac{\alpha}{2}}\right) < \mu < \bar{x} + \left(\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \cdot u_{\frac{\alpha}{2}}\right)$
	در این فرمول اگر σ^2 یعنی واریانس "x" در جامعه مجهول باشد به جای σ^2
	s^2 یعنی واریانس "x" در نمونه قرار دهیم فرمول به صورت زیر نمایش
	$\mu \in \left(\bar{x} - \sqrt{\frac{\sigma^2 \text{ یا } s^2}{n}} \cdot u_{\frac{\alpha}{2}}\right), \bar{x} + \left(\sqrt{\frac{\sigma^2 \text{ یا } s^2}{n}} \cdot u_{\frac{\alpha}{2}}\right)$ می‌دهند

اگر $n \geq 30$ باشد از این فرمول استفاده می‌کنیم ←

$$\mu \in \left(\bar{x} \mp \left(\sqrt{\frac{\sigma^2 \text{ یا } s^2}{n}} \cdot u_{\frac{\alpha}{2}}\right)\right) \quad \star$$

نکته: اگر در مسئله گفته باشد $n < 30$ (تعداد نمونه کمتر از ۳۰ باشد)

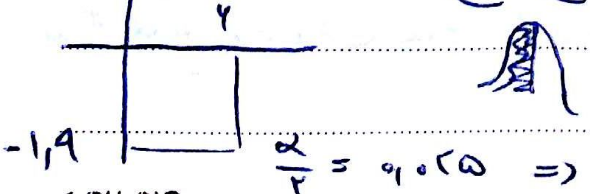
و $N \sim n$ و σ^2 معلوم باشد باز هم برای فرمول فاصله‌ی اطمینان μ از $\star$

استفاده می‌کنیم

نکته: اگر در مسئله هم $n < 30$ و $N \sim n$ و σ^2 مجهول باشد آنگاه فرمول فاصله‌ی اطمینان μ

به صورت روبرو است: $\mu \in \left(\bar{x} \mp \sqrt{\frac{s^2}{n}} \cdot t\right)$

نحوه‌ی یافتن $u_{\frac{\alpha}{2}}$ (یا همان $Z_{\frac{\alpha}{2}}$) از روی جدول تابع توزیع نرمال به صورت زیر است



مثال $\frac{\alpha}{2} = 0{,}025 \Rightarrow u_{0{,}025} = -1{,}96$

FARHANG

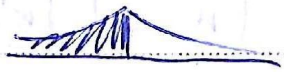
Subject:
Year: Month: Date:

برای محاسبه‌ی $\frac{\alpha}{2}$ در صورتی که باید از روی ضریب اطمینان $(1-\alpha)\%$ ابتدا α را محاسبه می‌کنیم

از روی α آنگاه $\frac{\alpha}{2}$ به دست می‌آید (۰٫۰۲۵) مثال: $1-\alpha = 0.95 \Rightarrow \alpha = 0.05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025$

برای یافتن t باید از جدول تابع توزیع t (student) استفاده می‌کنیم به صورت زیر:

درجه آزادی	$t_{1-\frac{\alpha}{2}}$
$n-1$	t



t مجهول تابع توزیع

$$t = t\left(n-1, 1-\frac{\alpha}{2}\right)$$

مثال برای یافتن t از روی جدول توزیع t student:

مثال: $1-\alpha = 0.90$

$\alpha = 0.10 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.05$

$1-\frac{\alpha}{2} = 0.95$

$n = 6$

$n-1 = 5$

$\Rightarrow t = t(5, 0.95) = 2.0$

درستی فاصله‌ی اطمینان $(1-\alpha)\%$ به ضریب اطمینان است داده می‌شود

مثال: میزان تقاضا بر حسب کیلوگرم برای محصول n دارای توزیع نرمال است تقاضا

برای ۶ روز جمع‌آوری در جدول زیر آمده مطلوب است یک فاصله‌ی اطمینان ۹۵ درصدی

برای میانگین میزان تقاضای محصول n ($\alpha = 0.05$)

n: ۳۰ ۲۶ ۳۰ ۱۹ ۲۶ ۳۱

$n = 6 < 30$

$$\Rightarrow \mu \in \left(\bar{x} \mp \sqrt{\frac{s^2}{n}} \cdot t\right)$$

FARHANG

σ^2 نا مجهول است

Subject:

Year: Month: Date:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{6} x_i}{6}$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{6} x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum x_i\right)^2\right)$$

$$\sum x_i = 30 + 26 + \dots + 31$$

$$\left(\sum x_i\right)^2 = (30 + \dots + 31)^2$$

$$\sum_{i=1}^{6} x_i^2 = 30^2 + 26^2 + \dots + 31^2$$

$$n = 6 \Rightarrow n-1 = 5$$

$$1-\alpha = 0.95 \Rightarrow \alpha = 0.05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025 \Rightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 0.975$$

$$\Rightarrow t = t(5,\ 0.975)$$

فرمول های برآورد گستره نقطه ای و فاصله ای (فاصله ی اطمینان) برای $\mu_1 - \mu_2$

(یعنی برای تفاضل میانگین های ۲ جامعه ی مستقل): فرض کنید دو جامعه ی مستقل (۱) و (۲)

(دو یا چند جامعه را از نظر آماری مستقل می گوییم اگر اعضای یکی به دیگری تعلق نداشته باشند)

متغیر تصادفی که x را در نظر بگیریم و μ_1 و μ_2 هر دو مجهول باشند (μ_1 و μ_2 میانگین x به ترتیب

در جامعه ی (۱) و (۲) است) اگر بخواهیم μ_1 و μ_2 را با هم مقایسه کنیم به تفاضل آن دو یعنی $\mu_1 - \mu_2$

FARHANG

توجه می‌کنیم چون هر دو مجهول‌اند باید ابتدا آن‌ها را به طور نقطه‌ای برآورد کنیم و سپس فرمول

فاصله‌ی اطمینان را استفاده کنیم برای این منظور می‌نویسیم

$$\widehat{\mu_1-\mu_2} = \underbrace{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}$$

تخمین زننده (برآورد کننده) نقطه‌ای $\mu_1-\mu_2$

فرمول‌های فاصله‌ی اطمینان $\mu_1-\mu_2$ در جدول زیر طبق شرایط مسئله معرفی می‌شوند

تعداد نمونه‌ها و دیگر شرایط مسئله	فرمول فاصله‌ی اطمینان $(1-\alpha)\%$ برای $\mu_1-\mu_2$
$n_1, n_2 < 30$ $x \sim N$ σ_1^2 و σ_2^2 هر دو معلوم باشند	$\mu_1-\mu_2 \in \left(\bar{x}_1-\bar{x}_2 \mp \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}} \cdot u_{\frac{\alpha}{2}}\right)$

نکته: اگر در حالت فوق $n_1, n_2 \geq 30$ و σ_1^2 و σ_2^2 معلوم باشند

بازهم فرمول فوق را برای فاصله‌ی اطمینان $\mu_1-\mu_2$ به کار ببریم البته

اگر $n_1, n_2 \geq 30$ و σ_1^2 و σ_2^2 مجهول باشند در فرمول فوق به جای

σ_1^2 باید s_1^2 (واریانس نمونه‌ی جامعه اول) و به جای

σ_2^2 باید s_2^2 (" " " " دوم) را می‌گیریم و قرار دهیم

نکته: اگر $n_1, n_2 < 30$

$x \sim N$

σ_1^2 و σ_2^2 هر دو مجهول و برابر باشند از فرمول زیر برای فاصله‌ی اطمینان $\mu_1-\mu_2$ استفاده

می‌کنیم

Subject:
Year: Month: Date:

(یادآوری می‌کنیم برای اینکه بدانیم که واریانس‌های دو جامعه با هم برابرند یا خیر باید از اطلاعات گذشته در جامعه

این موضوع روشن و مشخص باشد در مسائل امتحان این که با هم برابرند قید می‌شود)

$$\mu_1 - \mu_2 \in \left(\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \mp s_p \cdot \sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}} \cdot t^*\right)$$

$$t^* = t\left(n_1+n_2-2,\ 1-\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$s_p^2 = \frac{(n_1-1)\cdot s_1^2 + (n_2-1)\, s_2^2}{n_1+n_2-2} \Rightarrow \sqrt{s_p^2} = s_p$$

مثال: میزان تقاضا بر حسب کیلوگرم برای دو محصول x و y دارای توزیع نرمال با واریانس‌های

برابر می‌باشد میزان تقاضای ۶ روزه این دو محصول را جمع‌آوری کرده و در جدول زیر ثبت شده است

x	۳۰	۲۶	۳۰	۱۹	۲۲	۳۱
y	۴۰	۳۴	۳۰	۲۹	۳۵	۴۲

$n_x = n_y = 6$

الف) یک فاصله اطمینان ۹۰ درصدی برای تفاضل میانگین‌های دو جمعیت بیابید چه نتیجه‌ای

می‌گیرید ب) یک فاصله اطمینان ۹۵ درصدی برای میانگین میزان تقاضای محصول x بیابید

الف) $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{6}$, $\bar{y} = \frac{\sum y_i}{6}$

FARHANG

$$s_x^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum x_i\right)^2\right) \quad s_y^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum y_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum y_i\right)^2\right)$$