عصر A

به نام خدا

واحد تهران جنوب

سؤالات امتحانی پایان نیمسال دوم سال تحصیلی ۹۳-۱۳۹۲
دانشکدهٔ فنی و مهندسی واحد تهران جنوب

Eng-hvac.mihanblog

نام درس: ریاضی عمومی 2	نام استاد:گروه ریاضی کد درس: 6503 گروه آموزشی:ریاضی	بارم سؤالات
تاریخ امتحان: تیر ماه93	مدت امتحان: 120 دقیقه نحوه امتحان: جزوه باز□ جزوه بسته ☒	
استفاده از ماشین حساب معمولی :غیر مجاز☒مجاز□	به پیوست برگ فرمول ضمیمه است□ نیست☒	

1- پیوستگی تابع زیر را در مبدا بررسی کنید. (1.5)

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^3}{x^4+2y^6} & ,(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,(x,y)=(0,0)\end{cases}$$

2- مشتق سویی(جهتی) تابع $f(x,y,z)=3x-5y+2z$ را در جهت عمود بر سطح $g:\ x^2+y^2+z^2=9$ و در نقطه ای به مختصات $P_0(2,2,1)$ بدست آورید. (1.5)

حل 3- اگر z تابعی از x و y باشد و $F(z-\frac{1}{x},z+\frac{1}{y})=0$ نشان دهید: (1.5)

$$y^2 z_y - x^2 z_x = 1$$

4- انتگرال دوگانه زیر را محاسبه کنید. (2)

$$\int_0^2\int_x^2 y^2\sin(xy)\,dy\,dx$$

5- مساحت قسمتی از صفحه $z=2x$ که درون سهمی گون $z=x^2+y^2$ واقع است، را بیابید. (1.5)

حل H Sol 6- شار میدان برداری $\vec{F}=x^3\vec{i}+y^3\vec{j}+z^3\vec{k}$ گذرنده از سطح بسته $x^2+y^2+z^2=2z$ را بیابید. (2.5)

قضیه استوکس را برای $\vec{F}=y^2\vec{i}+x\vec{j}+z^2\vec{K}$ که S قسمتی از سهمیگون $z=x^2+y^2$ است که زیر صفحه‌ی $z=1$ واقع است تحقیق کنید!

واحد تهران جنوب

به نام خدا

سؤالات امتحانی پایان نیمسال دوّم سال تحصیلی ۹۳–۱۳۹۲

دانشکدهٔ فنی و مهندسی واحد تهران جنوب

2.5 — ۷- مطلوبست محاسبه $\iiint_R x e^{(x^2+y^2+z^2)^2} dv$ که R محدود به کره های $x^2+y^2+z^2=1$ و $x^2+y^2+z^2=4$ و مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ است. حل

2.5 — H 8- حاصل انتگرال $\oint_c (x^3-y^3)dx+(e^{y^2}+x^3)dy$ را که در آن c مسیر بسته متشکل از $y=x$ و $y=\sqrt{3}x$ و $y=\sqrt{1-x^2}$ است که در جهت مثلثاتی طی می شود، را به کمک قضیه گرین بیابید. Sol حل

2.5 — H 9- درستی قضیه استوکس را برای تابع برداری $\vec{F}=(x+y,z,y)$ و سطح S که قسمتی از سطح $x^2+y^2-z^2=-1$ محدود به صفحه $z=2$ است، را تحقیق کنید. Sol حل

موفق باشید

بردارهای $\vec{T}$ ، $\vec{N}$ و $\vec{B}$ را برای حرکت $\vec{R}(t)=\sinh x\vec{i}+\cosh x\vec{j}+\vec{k}$ بیابید.

1 — انتگرال زیر را بیابید.

$$\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \tan^{-1}\sqrt{x^2+y^2}\,dy\,dx$$

حجم محدود به رویه های $x^2+y^2+z^2=1$ و $x^2+y^2+z^2=4$ و قسمت بالای مخروط $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$ بیابید.

شار تابع $\vec{A}=2y\vec{i}-z\vec{j}+x^2\vec{k}$ را روی رویه S بیابید (S قسمتی از استوانه $y^2=8x$ واقع در یک هشتم اول بین صفحات $y=4$ و $z=6$ می باشد)

صبح D
به نام خدا

سؤالات امتحانی پایان نیمسال دوّم سال تحصیلی ۹۳ــ۱۳۹۲
دانشکدهٔ فنی و مهندسی واحد تهران جنوب

واحد تهران جنوب

Eng-hvac.mihanblog

بارم سؤالات		
	نام درس: ریاضی عمومی 2 — نام استاد: گروه ریاضی — کد درس: 6503 — گروه آموزشی: ریاضی	
	تاریخ امتحان: تیر ماه 93 — مدت امتحان: 120 دقیقه — نحوه امتحان: جزوه باز☐ جزوه بسته☒	
	استفاده از ماشین حساب معمولی: غیر مجاز☒ مجاز☐	به پیوست برگ فرمول ضمیمه است☐ نیست☒

1.5 — 1- پیوستگی تابع زیر را در مبدا بررسی کنید.

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4} & ,(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,(x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^4+y^4}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

1.5 — 2- با فرض $w=f(\frac{y-x}{xy},\frac{z-y}{yz})$ نشان دهید: حل

$$x^2w_x+y^2w_y+z^2w_z=0$$

1.5 — 3- نقاط بحرانی و نوع آنها را برای تابع $f(x,y)=\frac{x^3}{3}+\frac{4y^3}{3}-x^2-3x-4y-3$ تعیین کنید.

2 — 4- انتگرال دوگانه زیر را با تعویض ترتیب انتگرالگیری، محاسبه کنید. حل

$$\int_1^9\int_{\sqrt{y}}^3 \frac{e^{x^2-2x}}{x+1}\,dx\,dy$$

1.5 — 5- مساحت قسمتی از رویه $x^2+y^2+z^2=36$ که در استوانه $x^2+y^2=9$ واقع است، را بیابید.

2.5 — 6- کار انجام شده توسط میدان برداری $\vec{F}=(x-z)\vec{i}+(x^3+yz)\vec{j}-3xy^2\vec{k}$ روی منحنی محل تلاقی رویه $z=4-\sqrt{3x^2+2y^2}$ با $z=2$ را بیابید.

به نام خدا

واحد تهران جنوب

سؤالات امتحانی پایان نیمسال دوّم سال تحصیلی ۹۳—۱۳۹۲

دانشکدهٔ فنی و مهندسی واحد تهران جنوب

2.5	آ حل 7- مطلوبست محاسبه $\iiint_R x\, e^{(x^2+y^2+z^2)^2} dv$ که R محدود به کره های $x^2+y^2+z^2=1$ و $x^2+y^2+z^2=4$ و مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ است.
2.5	آ حل 8- حاصل انتگرال $\oint_c -x^2 y\, dx + x y^2 dy$ را که در آن c مرز ناحیه بسته بین دو دایره $x^2+y^2=1$ و $x^2+y^2=4$ و خطوط $y=\sqrt{3}x$ و $y=\frac{-\sqrt{3}}{3}x$ در ربع اول و دوم می باشد را به کمک قضیه گرین بیابید.
2.5	9- هرگاه $\vec{F}=x\,\vec{i}+y\,\vec{j}+z\,\vec{k}$ و s سطح بسته قسمت بالایی کره $x^2+y^2+z^2=4$ باشد، درستی قضیه دیورژانس را بررسی کنید.

موفق باشید

سئوالات امتحانی پایان نیمسال دوم سال تحصیلی ۹۱-۱۳۹۰

دانشکده فنی واحد تهران جنوب

نام درس : ریاضي عمومي ۲	نام استاد: کلیه اساتید	کد درس: ۴۵۰۳	گروه آموزشي: ریاضي
تاریخ امتحان: ۹۱/۴/۸	مدت امتحان: ۲ساعت	نحوه امتحان: جزوه باز □ جزوه بسته ■ سایر موارد	
استفاده از ماشین حساب: مجاز □ غیر مجاز ■	به پیوست: برگه فرمول ضمیمه است □ نیست ■		

بارم سئوالات

۱- انحنای منحنی $\vec{R}(t) = (t + cost)\vec{i} + (t - cost)\vec{j} + (\sqrt{2}sint)\vec{k}$ رادر لحظه دلخواه t بیابید . — 2 نمره

۲- مشتق جهتی تابع $f(x,y)$ در نقطه $P(1,2)$ در جهت بردار $\vec{i} + \vec{j}$ برابر $2\sqrt{2}$ ودر جهت بردار $-2\vec{j}$ برابر با 3- است، مشتق جهتی تابع $f(x,y)$ در نقطه فوق ودر جهت بردار $\vec{i} - 2\vec{j}$ چقدر است؟ — 2 نمره

۳- ثابت کنید $\iiint_Q (x^2 + y^2)dv = \frac{8\pi a^5}{15}$ که در آن Q ناحیه $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ می باشد. — 2 نمره

٤- شار برونسوی میدان برداری $\vec{F} = x^3\vec{i} + y^3\vec{j} + z^3\vec{k}$ گذرنده از سطح کره $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ را بیابید. — 3 نمره

۵- مساحت قسمتی از استوانه $x^2 + y^2 = 1$ که در داخل استوانه $x^2 + z^2 = 1$ واقع است را بیابید. — 2 نمره

٦- مطلوب است محاسبه $\oint_c (x\sin(y^2) - y^2)dx + (x^2y\cos(y^2) + 3x)dy$ که در آن C ذوزنقه به رئوس $(0,2),(1,-1),(1,1),(0,-2)$ می باشد . — 2 نمره

۷- قضیه استوکس را برای تابع برداری $\vec{F} = 3y\vec{i} - xz\vec{j} + yz\vec{k}$ تحقیق کنید که در آن S سطح سهمیگون $x^2 + y^2 = 2z$ و صفحه $z = 2$ و C مرز آن است. — 3 نمره

۸- اگر $z = yf\left(\frac{x}{y}\right) + g\left(\frac{x}{y}\right)$ نشان دهید : $x^2z_{xx} + 2xyz_{xy} + y^2z_{yy} = 0$ — 2نمره

✓ کار کلاسی و میان ترم جمعا ۲ نمره

موفق وپیروز باشید

گروه ریاضی

۱) پیوستگی تابع در مبدا را بررسی کنید!

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x^2y^2}{x^4+y^4}\right)=\lim_{x\to 0} 0=0$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^2y^2}{x^4+y^4}\right)=\lim_{y\to 0} 0=0$$

$$\xrightarrow{y=mx}\lim_{x\to 0}\frac{x^2(m^2x^2)}{x^4+(m^4x^4)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4m^2}{x^4(1+m^4)}=\frac{m^2}{1+m^4}$$ حد وجود ندارد پیوسته نیست

۲) با فرض $w=f\left(\frac{y-x}{xy},\frac{z-y}{yz}\right)$ آنگاه نشان دهید: $x^2w_x+y^2w_y+z^2w_z=0$ عیناً ۲۸ خرداد ۹۳ صنایع

۳) نقاط بحرانی و نوع آنها را برای تابع $f(x,y)=\frac{x^3}{3}+\frac{4y^3}{3}-x^2-3x-4y-3$ را تعیین کنید!

$\frac{\partial f}{\partial x}=x^2-2x-3=0\to x=-1,\ x=3$

$\frac{\partial f}{\partial y}=4y^2-4=0\to y=\pm1$

نقاط $(-1,-1),(-1,1),(3,-1),(3,1)$

$r=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2x-2,\quad s=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0,\quad t=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=8y$

$(-1,-1)$
$r=2(-1)-2=-4$
$s=0$
$t=8(-1)=-8$
$rt-s^2=32-0^2=32>0$
max نسبی

$(-1,1)$
$r=2(-1)-2=-4$
$s=0$
$t=8(1)=8$
$rt-s^2=-32-0^2=-32<0$
نقطه زینی

$(3,-1)$
$r=2(3)-2=4$
$s=0$
$t=8(-1)=-8$
$rt-s^2=-32<0$
زینی

$(3,1)$
$r=2(3)-2=4$
$s=0$
$t=8(1)=8$
$rt-s^2=-32<0$
زینی

۴) انتگرال دوگانه زیر را بعد از تعویض ترتیب انتگرال‌گیری حل کنید! عیناً ۲۸ خرداد ۹۳ صنایع

$$\int_1^9\int_{\sqrt{y}}^3\frac{e^{x^2-2x}}{x+1}\,dx\,dy$$

۵) مساحت قسمتی از رویه $x^2+y^2+z^2=36$ که درون استوانه $x^2+y^2=9$ واقع است را بیابید!

کره، 9، $z=2$

$z=\sqrt{36-x^2-y^2}$, $z_x=\frac{-2x}{2\sqrt{36-x^2-y^2}}$, $z_y=\frac{-2y}{2\sqrt{36-x^2-y^2}}$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^3\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dx\,dy$$

۶) کار انجام شده توسط میدان برداری $\vec{F}=(x-z)\vec{i}+(x^3+yz)\vec{j}-3xy^2\vec{k}$ روی منحنی محل تلاقی رویه $z=4-\sqrt{3x^2+2y^2}$ با $z=2$ را بیابید!

به نام خدا

سئوالات امتحاني پايان نيمسال اول سال تحصيلي 92-1391

دانشكده فني واحد تهران جنوب

بارم سئوالات	
	نام درس : رياضيات عمومي 2 نام استاد: اساتيد گروه رياضي كد درس: 6503 گروه آموزشي: رياضي
	تاريخ امتحان: 1391/10/26 مدت امتحان: 2 ساعت نحوه امتحان: جزوه باز □ جزوه بسته ■ ساير موارد -
	استفاده از ماشين حساب: مجاز □ غير مجاز ■ به پيوست: برگه فرمول ضميمه است □ نيست ■ -

2 نمره — 1- در پيوستگي تابع $f(x,y)$ در مبدا بحث كنيد. حدهای کسری صفر $\frac{\sin x}{x}=1$

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(xy)}{xy} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

2 نمره — 2- تابع ضمني $f(x^2-y^2, z-x^2)=0$ مفروض است حاصل yz_x+xz_y را به دست آوريد. حل

2 نمره — 3-تاب وانحنا منحني c حاصل از تقاطع دو رويه $z=x^2+y^2$ و $x^2+y^2-\frac{1}{4}z^2=1$ را به دست آوريد. حل

2 نمره — 4-مساحت قسمتي از عرق چين بالاي كره $x^2+y^2+z^2=4$ كه توسط مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ جدا شده را محاسبه كنيد. حل

2 نمره — 5-حاصل انتگرال سه گانه $\iiint_R \frac{dv}{\sqrt{y^2+z^2}}$ كه R محدود به سهمي گون $x=y^2+z^2$ و $x=4$ را به دست آوريد. حل ۱۵/ حل

3 نمره — 6-درستي قضيه گرين را براي تابع برداري $\vec{F}=(x-y)\vec{i}+(x+y)\vec{j}$ و بيضي $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ بررسي كنيد. حل

7-تابع برداري $\vec{F}=x\vec{i}+y\vec{j}+(z+x)\vec{k}$ و سطح سهمي گون $4-z=x^2+y^2$ و صفحه $z=2$ مفروض است. حل

2 نمره — الف) شار حاصل از عبور جريان $\vec{F}$ از سطوح فوق را به كمك قضيه ديورژانس محاسبه كنيد. حل

3 نمره — ب) درستي قضيه استوكس را براي تابع برداري $\vec{F}$ و منحني c حاصل از تلاقي سطوح فوق بررسي كنيد.

نكته : كار كلاسي 2 نمره

موفق وپيروز باشيد

دانشکده فني و مهندسي واحد تهران جنوب

نام درس: رياضيات عمومي 2 نام استاد: اساتيد گروه رياضي کد درس: 6503 گروه آموزشي: رياضي

تاريخ امتحان: 1392/03/07 مدت امتحان: 2 ساعت نحوه امتحان: جزوه باز ☐ جزوه بسته ■ ساير موارد

استفاده از ماشين حساب: مجاز ☐ غير مجاز ■ به پيوست: برگه فرمول ضميمه است ☐ نيست ■

بارم سئوالات

1- در پيوستگي تابع زير در مبدا بحث کنيد. (2 نمره)

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{4x^2y^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

2- يک مارپيچ به وسيله تابع مکان $\vec{R}(t)=(a\cos(\omega t))\vec{i}+(a\sin(\omega t))\vec{j}+(b\omega t)\vec{k}$ توصيف مي شود که در آن a و b و ω اعداد ثابت مثبت هستند انحناي اين منحني در هر نقطه دلخواه آن را بيابيد. (2 نمره)

3- اگر $f(y^2x,z^2y,x^2z)=0$ آن گاه $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ را بيابيد. (2 نمره)

4- نقاط ماکزيمم و مي نيمم و زيني تابع $z=3x^3+y^2-9x+4y$ را در صورت وجود بيابيد. (2 نمره)

5- حاصل انتگرال $\int_0^4\int_{\sqrt{x}}^2 \cos(y^3)\,dy\,dx$ را بيابيد. (2.5 نمره)

6- مطلوبست محاسبه $\iiint_R \dfrac{x}{x^2+y^2}\,dv$ که در آن R ناحيه محصور بين دو کره به مرکز مبدا و شعاعهاي 1 و 2 مي باشد را بيابيد. (2.5 نمره)

7- حجم ناحيه داخل استوانه $x^2+y^2=2y$ که توسط کره $x^2+y^2+z^2=4$ محدود شده است را بيابيد. (2.5 نمره)

8- کار انجام شده توسط ميدان $\vec{F}=(e^{\sin x}+4y^2-1)\,\vec{i}+(4x+e^{y^2})\,\vec{j}$ روي مسير $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ در جهت مثبت مثلثاتي را به دست آوريد. (2.5 نمره)

کار کلاسي 2 نمره

دانشکده فني و مهندسي واحد تهران جنوب

نام درس: رياضيات عمومي 2 نام استاد: اساتيد گروه رياضي كد درس: 6503 گروه آموزشي: رياضي

تاريخ امتحان: 1392/05/26 مدت امتحان: 2 ساعت نحوه امتحان: جزوه باز ☐ جزوه بسته ■ ساير موارد

استفاده از ماشين حساب: مجاز ☐ غير مجاز ■ به پيوست: برگه فرمول ضميمه است ☐ نيست ■

بارم سئوالات	
2 نمره	حل 1- در پيوستگي تابع زير در مبدا بحث كنيد. $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$
2 نمره	T حل 2- معادله خط مماس بر منحني $c\begin{cases}3x^2+2y^2+z^2=49\\ x^2+y^2-2z^2=10\end{cases}$ را در نقطه $(3,-3,2)$ بيابيد.
2 نمره	T حل 3- عدد حقيقي k را بيابيد بطوريكه تابع $w=f(2x+4y-6z,2y+4z-6x,kx-6y+2z)$ در معادله $w_x+w_y+w_z=0$ صدق كند.
2 نمره	حل 4- نقاط ماكزيمم و مي نيمم و زيني تابع $z=6x^2-2x^3+3y^2+6xy$ را در صورت وجود بيابيد.
2 نمره	حل 5- حاصل انتگرال $\int_0^8\int_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{dydx}{y^4+1}$ را بعد از تعويض ترتيب انتگرالگيري بيابيد.
2.5 نمره	6- فرمول محاسبه حجم بيضوي $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ را بيابيد. $V=\frac{4}{3}\pi abc$
2.5 نمره	حل 7- شار نيروي $\vec{F}=x\vec{i}-y\vec{j}+z\vec{k}$ گذرا از سطح خارجي ناحيه ايجاد شده توسط مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ و صفحه $z=1$ را بيابيد.
3 نمره	حل 8- درستي قضيه استوكس را براي تابع برداري $\vec{F}=2z\vec{i}+3xy\vec{j}+4y\vec{k}$ روي منحني c كه از تلاقي رويه $z=9-x^2-y^2$ و صفحه $z=5$ حاصل مي شود تحقيق كنيد.

نكته: كار كلاسي 2 نمره

موفق و پيروز باشيد

H

اداره امتحانات
دانشکده مهندسی صنایع
نیمسال اول ۹۳ - ۹۲

به نام خدا

سئوالات امتحاني پايان نيمسال اول سال تحصيلي 93-1392

دانشكده صنايع واحد تهران جنوب

نام درس : رياضيات عمومي 2 نام استاد: اساتيد گروه رياضي كد درس: 6503 گروه آموزشي: رياضي

تاريخ امتحان: 1392/10/18 مدت امتحان: 2 ساعت نحوه امتحان: جزوه باز ☐ جزوه بسته ■ ساير موارد

استفاده از ماشين حساب: مجاز ☐ غير مجاز ■ به پيوست: برگه فرمول ضميمه است ☐ نيست ■

بارم سئوالات	
2 نمره	حل 1- در پيوستگي تابع زير در مبدا بحث كنيد. $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{3xy^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$
2 نمره	حل 2- معادله خط مماس و صفحه قائم بر منحني $c\begin{cases}3x^2+2y^2+z^2=49\\ x^2+y^2-2z^2=10\end{cases}$ را در نقطه $(3,-3,2)$ بيابيد.
2 نمره	حل 3- نشان دهيد تابع $w=f(2x+4y-6z,2y+4z-6x,4x-6y+2z)$ در معادله $w_x+w_y+w_z=0$ صدق مي كند.
2 نمره	حل 4- نقاط ماكزيمم و مي نيمم و زيني تابع $z=3x^2+y^2-9x+4y$ را در صورت وجود بيابيد.
2 نمره	حل 5- انتگرال زير را بعد از تعويض ترتيب انتگرالگيري حل كنيد. $\int_0^4\int_{\sqrt{x}}^2 \cos(y^3)\,dy\,dx$
2.5 نمره	حل 6- شار نيروي $\vec{F}=2x\vec{i}-3y\vec{j}+4z\vec{k}$ گذرا از سطح خارجي ناحيه ايجاد شده توسط سهميگون $z=x^2+y^2$ و صفحه $z=1$ را بيابيد
2.5 نمره	7- مطلوبست محاسبه $\iiint_R \dfrac{x}{9x^2+4y^2}\,dv$ كه در آن R ناحيه ايجاد شده توسط بيضوي $\dfrac{x^2}{2^2}+\dfrac{y^2}{3^2}+z^2=1$ مي باشد.
3 نمره	حل 8- درستی قضیه گرین را برای تابع برداری $\vec{F}=(x-y)\vec{i}+(x+y)\vec{j}$ ... $x^2+y^2=4$ بررسي كنيد. P Q

موفق وپيروز باشيد

نكته : كار كلاسي 2 نمره

به نام خدا

سوالات امتحانی پایان نیمسال دوم سال تحصیلی ۹۳-۱۳۹۲

دانشکده صنایع واحد تهران جنوب

تهران جنوب

نام درس: ریاضی عمومی ۲ — نام استاد: گروه ریاضی — کد درس: ۶۵۰۲ — گروه آموزشی: ریاضی		بارم سوالات
تاریخ امتحان: ۲۸ خرداد ۹۳ — مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه — نحوه امتحان: جزوه باز ☐ جزوه بسته ☒		
استفاده از ماشین حساب معمولی: غیرمجاز ☒ مجاز ☐	به پیوست برگ فرمول ضمیمه است ☐ نیست ☒	

۱- پیوستگی تابع مقابل را در مبدا بررسی کنید.
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{2x^4+y^4} & ,(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,(x,y)=(0,0)\end{cases}$$ ۲ — حل

۲- با فرض $w=f\left(\frac{y-x}{xy},\frac{z-y}{yz}\right)$ نشان دهید: $x^2w_x+y^2w_y+z^2w_z=0$ ۲ — حل

۳- مشتق سویی (جهتی) تابع $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ را در جهت عمود بر سطح $S:\ x^2-y^2+z^2=1$ و در نقطه ای به مختصات $P_0(3,4,5)$ بدست آورید. ۲ — حل

۴- انتگرال دوگانه مقابل را پس از تعویض ترتیب انتگرالگیری، محاسبه کنید. $\int_1^9\int_{\sqrt{y}}^3 \frac{e^{x^2+2x}}{x+1}\,dx\,dy$ ۲,۵ — حل

۵- حجم داخل مخروط $z=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}}$ و بین کره های $x^2+y^2+z^2=1$ و $x^2+y^2+z^2=4$ را بدست آورید. ۲,۵ — حل

۶- کار انجام شده توسط میدان برداری $\vec F=(y^2\cos x+z^3)\vec i+(2y\sin x-4)\vec j+(3xz^2+2)\vec k$ روی منحنی $C:\vec R(t)=\sin^{-1}t\,\vec i+t^2\vec j+t^2\vec k;\ 0\le t\le 1$ را محاسبه کنید. ۲,۵ — حل

۷- به کمک قضیه گرین حاصل انتگرال $\oint_C -x^2y\,dx+xy^2\,dy$ که C مرز ناحیه بسته بین دو دایره $x^2+y^2=1$ ، $x^2+y^2=4$ و خطوط $y=\sqrt{3}x$ و $y=\frac{-\sqrt{3}}{3}x$ در نیم صفحه بالا می باشد را بیابید. ۲,۵ — حل

۸- بردارهای T و N و B و انحنای منحنی را برای تابع برداری $\vec R(t)=(2\cos t,2\sin t,-t^2)$ در لحظه $t=0$ بیابید. ۲ — حل

موفق باشید

پاسخ سوال های ریاضی
(استاد طاهری)

۹۱/۱۰/۲۶

۲

$$f(\overbrace{x^2-y^2}^{r},\ \overbrace{z-x^2}^{s})=0 \qquad f \begin{cases} r \begin{cases} x \\ y \end{cases} \\ s \begin{cases} z \\ x \end{cases} \end{cases}$$

$$z_x=-\frac{f_x}{f_z}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial z}}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial r}(2x)+\frac{\partial f}{\partial s}(-2x)}{\frac{\partial f}{\partial s}(1)}$$

$$z_y=-\frac{f_y}{f_z}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial z}}=\frac{\frac{\partial f}{\partial r}(2y)}{\frac{\partial f}{\partial s}(1)}$$

$$yz_x+xz_y=y\left(-\frac{\frac{\partial f}{\partial r}(2x)+\frac{\partial f}{\partial s}(-2x)}{\frac{\partial f}{\partial s}}\right)+x\left(\frac{\frac{\partial f}{\partial r}(2y)}{\frac{\partial f}{\partial s}}\right)$$

$$\longrightarrow \frac{-\cancel{\frac{\partial f}{\partial r}(2xy)}-\frac{\partial f}{\partial s}(2xy)+\cancel{\frac{\partial f}{\partial r}(2xy)}}{\frac{\partial f}{\partial s}}=-2xy$$

۳

$$z=x^2+y^2 \qquad x^2+y^2-\frac{1}{4}z^2=1 \Rightarrow z-\frac{1}{4}z^2-1=0 \rightarrow \frac{1}{4}z^2-z+1=0$$

$$\left(\frac{1}{2}z-1\right)^2=0 \Rightarrow z=2 \qquad r(t)=(\sqrt{2}\cos t,\sqrt{2}\sin t,2) \qquad v(t)=(-\sqrt{2}\sin t,\sqrt{2}\cos t)$$

$$\|v(t)\|=\sqrt{2\sin^2 t+2\cos^2 t}=\sqrt{2} \qquad a(t)=(-\sqrt{2}\cos t,-\sqrt{2}\sin t) \qquad v\times a=2\sin^2 t+2\cos^2 t=2$$

$$K=\frac{\|v\times a\|}{\|v\|^3}=\frac{2}{(\sqrt{2})^3}=2^{-\frac{1}{2}}$$

۴

$$x^2+y^2+z^2=4 \rightarrow z=f(x,y)=\sqrt{4-x^2-y^2} \begin{cases} \rightarrow z_x=\dfrac{-2x}{2\sqrt{4-x^2-y^2}} \\ \rightarrow z_y=\dfrac{-2y}{2\sqrt{4-x^2-y^2}} \end{cases}$$

$$A=\iint_D\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{4-x^2-y^2}}\,dx\,dy \rightarrow \iint_D\sqrt{\frac{4}{4-x^2-y^2}}\,dx\,dy \qquad \begin{cases} z^2=x^2+y^2 \\ x^2+y^2+z^2=4 \end{cases}$$

$$\longrightarrow x^2+y^2+x^2+y^2=4 \rightarrow x^2+y^2=2 \begin{cases} 0\leq r\leq\sqrt{2} \\ 0\leq\theta\leq 2\pi \end{cases} \qquad A=\left(\int_0^{2\pi}d\theta\right)\left(\int_0^{\sqrt{2}}\frac{2}{\sqrt{4-r^2}}\,r\,dr\right)$$

$$[\theta]_0^{2\pi}\left(-\frac{(4-r^2)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right|_0^{\sqrt{2}}=-2\pi\times 2\sqrt{4-r^2}\Big|_0^{\sqrt{2}}=-4\pi(\sqrt{2}-2)$$

۵)

$$x = \overbrace{y^2+z^2}^{r^2}, \quad x = 4 \ \Big\} \rightarrow y^2+z^2 = 4$$

دایره‌ای در صفحه yz و شعاع ۲

$$y^2+z^2=r^2 \rightarrow y = r\cos\theta, \quad z = r\sin\theta \qquad 0 \le r \le 2$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_{r^2}^{4} \frac{r}{r}\, dx\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{2} 4-r^2 \, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} -\frac{r^3}{3}\Big|_0^2 d\theta =$$

$$-\frac{8}{3}\theta\Big|_0^{2\pi} = \frac{-16\pi}{3}$$

۶)

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \iint_D 1-(-1)\, dA = \iint_D 2\, dA \qquad \begin{cases} x/a = r\cos\theta \\ y/b = r\sin\theta \end{cases}$$

ژاکوبین بیضی

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{1} 2abr\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{2r^2}{2} ab\Big|_0^1 d\theta = ab\theta\Big|_0^{2\pi} = 2ab\pi$$

۷) الف)

$$\text{div } F = \nabla \cdot F = \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(z+x) = 1+1+1 = 3$$

$$\iint_D F\cdot N\, ds = \iiint_R 3\, dV \rightarrow \begin{cases} 0 \le z \le 4-r^2 \\ 0 \le r \le 2 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases} \quad \int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_0^{4-r^2} 3\, dz\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{2} 12-3r^2\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} -3\frac{r^3}{3}\Big|_0^2 d\theta = -8\theta\Big|_0^{2\pi} = -16\pi$$

ب)

92/5/26

$F=(۲z, ۳xy, ۴y)$ $\quad z=۹-x^۲-y^۲ ,\; z=۵ \;\to\; x^۲+y^۲=۴ \;\to\; r(t)=(۲\cos t, ۲\sin t, ۵) ,\; r'(t)=(-۲\sin t, ۲\cos t, ۰)$ ۸

$$\int_C F\cdot dr=\int_۰^{۲\pi} F(r(t))\, r'(t)\, dt=\int_۰^{۲\pi}(۲\times ۵ ,\; ۳\times ۲\cos t\, ۲\sin t ,\; ۴\times ۲\sin t)\cdot(-۲\sin t, ۲\cos t, ۰)\,dt$$

$$=\int_۰^{۲\pi}(-۲۰\sin t+۲۴\sin t\cos^۲ t+۰)\,dt=۲۰\cos t-۲۴\,\frac{\cos^۳ t}{۳}\Big|_۰^{۲\pi}=۰$$

$$\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dA=\iint ۳y-۰\;\; dA$$

$x^۲+y^۲=۴$
$۰\leq r\leq ۲$
$۰\leq \theta\leq ۲\pi$

$$\int_۰^{۲\pi}\int_۰^{۲} ۳\times r\sin\theta\, r\, dr\, d\theta$$

$$۳\left(\int_۰^{۲\pi}\sin d\theta\right)\left(\int_۰^{۲} r^۲\, dr\right)=۰$$

①

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$\lim_{x\to0}\left(\lim_{y\to0}\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right)=\lim_{x\to0}0=0 \qquad \lim_{y\to0}\left(\lim_{x\to0}\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right)=\lim_{y\to0}0=0$$

$$y=mx \quad \lim_{x\to0}\frac{x^2mx}{x^2+m^2x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\cancel{x^2}^{\,x}m}{\cancel{x^2}(1+m^2)}=0 \qquad y=mx^2 \quad \lim_{x\to0}\frac{x^2mx^2}{x^2+m^2x^4}=\lim_{x\to0}\frac{\cancel{x^4}^{\,x^2}m}{\cancel{x^2}(1+m^2x^2)}=0$$

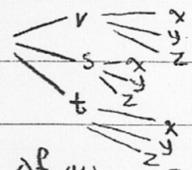
$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0;\ \forall(x,y)\in D_f\ \ \|(x,y)-(0,0)\|<\delta \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2}<\delta \quad \left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}-\overset{0}{f(0,0)}\right|<\varepsilon$$

$$\frac{|x^2||y|}{|x^2+y^2|}\leqslant|y|\leqslant\sqrt{x^2+y^2}\leqslant\delta<\varepsilon$$

$$\nabla f_1=n_1=(6x,4y,2z)=(18,-12,4) \qquad \nabla f_2=n_2=(2x,2y,-4z)=(6,-6,-8)$$ ②

$$n_1\times n_2=(120,168,-36) \qquad \frac{x-3}{120}=\frac{y+3}{168}=\frac{z-2}{-36}$$

$$w=f(\overbrace{2x+4y-6z}^{r},\overbrace{2y+4z-6x}^{s},\overbrace{kx-6y+2z}^{t})$$ ③



$$w_x=\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial r}(2)+\frac{\partial f}{\partial s}(-6)+\frac{\partial f}{\partial t}(k)$$

$$w_y=\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial r}(4)+\frac{\partial f}{\partial s}(2)+\frac{\partial f}{\partial t}(-6)$$

$$w_z=\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial r}(-6)+\frac{\partial f}{\partial s}(4)+\frac{\partial f}{\partial t}(2)$$

+

$$w_x+w_y+w_z=\underbrace{(2+4-6)}_{0}\frac{\partial f}{\partial r}+\underbrace{(-6+2+4)}_{0}\frac{\partial f}{\partial s}+\underbrace{(k-6+2)}_{0}\frac{\partial f}{\partial t}=0$$

$$k-6+2=0 \Longrightarrow k=4$$

$$z = f = 6x^2 - 2x^3 + 3y^2 + 6xy \qquad f_x = 12x - 6x^2 + 6y = 0 \qquad 12x - 6x^2 = -6y$$ (4)

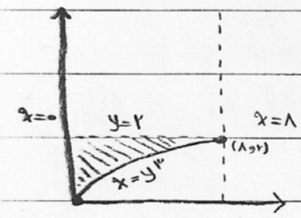
$$\overset{1}{\overbrace{y = x^2 - 2x}} \qquad f_y = 6y + 6x = 0 \qquad \overset{2}{\overbrace{y = -x}} \qquad (1),(2)\ \ -x = x^2 - 2x \Longrightarrow x^2 - x = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

نقاط بحرانی $(0,0)$ و $(1,-1)$ $\qquad f_{xx} = 12 - 12x \qquad f_{yy} = 6 \qquad f_{xy} = f_{yx} = 6$

$$\Delta = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 = (12 - 12x)6 - 36 = 36 - 72x$$

$(0,0) \longrightarrow \Delta > 0 \quad f_{xx} > 0 \quad f_{yy} > 0$ Min نسبی $\qquad (1,-1) \longrightarrow \Delta < 0$ نقطه زینی

$$\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{dy\,dx}{y^4+1} = \int_0^2 \int_0^{y^3} \frac{1}{y^4+1}\,dx\,dy = \int_0^2 \frac{1}{y^4+1}\, x \Big|_0^{y^3} dy$$ (5)



$$\rightarrow \int_0^2 \frac{y^3}{y^4+1}\,dy = \frac{1}{4}\int_0^2 \frac{4y^3}{y^4+1}\,dy = \frac{1}{4}\,\mathrm{Ln}(y^4+1)\Big|_0^2$$

$$\rightarrow \frac{1}{4}\left(\mathrm{Ln}(17) - \overset{0}{\cancel{\mathrm{Ln}(1)}}\right) = \frac{1}{4}\,\mathrm{Ln}(17)$$

---

(6)

$$\mathrm{div}\,F = \nabla \cdot F = \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(-y) + \frac{\partial}{\partial z}(z) = 1 - 1 + 1 = 1$$ (7)

$$\iint_D F\cdot N\,ds = \iiint_R 1\,dv \rightarrow \text{مختصات کروی} \begin{cases} 0 \le \varphi \le \overset{\text{مخروط}}{\pi/4} \\ 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^1 1\,dr\,d\varphi\,d\theta$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4} 1\,d\varphi\,d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{\pi}{4}\,d\theta = \frac{\pi}{4}\theta\Big|_0^{2\pi} = 2\pi^2$$

ادامه سؤال ۷

$$\underbrace{\cos^2\theta+\sin^2\theta-1=0}$$

$$\int_{-1}^{1}\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{1+\sqrt{1-x^2}}\int_{-\sqrt{4-(x^2+y^2)}}^{\sqrt{4-(x^2+y^2)}} x^2+(y-1)^2-1 \; dz\,dy\,dx \qquad \begin{cases} x = 1\cos\theta \\ y-1=\sin\theta \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{1}\int_{-\sqrt{4-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}} r \; dz\,dr\,d\theta = \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^1 rz\Big|_{-\sqrt{4-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}} dr\right) = 2\pi\int_0^1 2r\sqrt{4-r^2}\,dr$$

$$=2\pi\left(-(4-r^2)^{3/2}\times \tfrac{2}{3}\right)\Big|_0^1 = -\tfrac{4}{3}\times\left(3^{3/2}-4^{3/2}\right)$$

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \iint_D 4-4 \; dA = 0$$ ۸

1

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{4x^2y^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{4x^2y^3}{x^2+y^2}\right)=\lim_{y\to 0}0=0 \qquad \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{4x^2y^3}{x^2+y^2}\right)=\lim_{x\to 0}0=0$$

$$y=mx \quad \lim_{x\to 0}\frac{4x^2m^3x^3}{x^2+m^2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x^5}^{\,x^3}\,4m^3}{\cancel{x^2}(1+m^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{4x^3m^3}{(1+m^2)}=0$$

$$y=mx^2 \quad \lim_{x\to 0}\frac{4x^2m^3x^6}{x^2+m^2x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x^8}^{\,x^6}\,4m^3}{\cancel{x^2}(1+m^2x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^6\,4m^3}{(1+m^2x^2)}=0$$

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0;\ \forall(x,y)\in D_f\quad \|\overbrace{(x,y)-(0,0)}^{\sqrt{x^2+y^2}}\|<\delta \Rightarrow \left|\frac{4x^2y^3}{x^2+y^2}-0\right|<\varepsilon$$

$$\frac{4|x^2||y^3|}{|x^2+y^2|}\leqslant 4|y|\leqslant 4\sqrt{x^2+y^2}\leqslant 4\delta<\varepsilon \qquad \delta<\tfrac{1}{4}\varepsilon$$

2

$$\vec{R}_{(t)}=(a\cos(\omega t))\vec{i}+(a\sin(\omega t))\vec{j}+(b\omega t)\vec{k} \qquad v_{(t)}=(a\omega-\sin(\omega t),\ a\omega\cos(\omega t),\ b\omega)$$

$$\|v_{(t)}\|=\sqrt{(-a\omega\sin(\omega t))^2+(a\omega\cos(\omega t))^2+b^2\omega^2}=\sqrt{a^2\omega^2(\sin^2(\omega t)+\cos^2(\omega t))+b^2\omega^2}=\sqrt{\omega^2(a^2+b^2)}$$

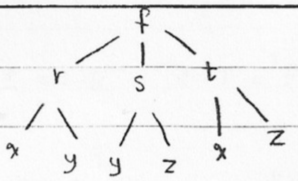
$$a_{(t)}=(-a\omega^2\cos(\omega t),\ -a\omega^2\sin(\omega t),\ 0) \qquad v\times a=(ab\omega^3\sin(\omega t),\ -ab\omega^3\cos(\omega t),\ a^2\omega^3)$$

$$\|v\times a\|=\sqrt{(ab\omega^3)^2(\sin^2(\omega t)+\cos^2(\omega t))+(a^2\omega^3)^2}=\sqrt{a^2b^2\omega^6+a^4\omega^6}=\sqrt{a^2\omega^6(a^2+b^2)}$$

$$K=\frac{\|v\times a\|}{\|v\|^3}=\frac{\sqrt{a^2\omega^6(a^2+b^2)}}{(\omega^2(a^2+b^2))^{3/2}}=\frac{(a^2\cancel{\omega^6})^{\frac12}(a^2+b^2)^{\frac12}}{\cancel{(\omega^2)^{3/2}}(a^2+b^2)^{3/2}}=a^2(a^2+b^2)^{-1}$$

3

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{f_x}{f_z} \qquad f(\overbrace{y^2x}^{r},\ \overbrace{z^2y}^{s},\ \overbrace{x^2z}^{t})=0$$



$$-\frac{f_x}{f_z}=\frac{-\left(\dfrac{\partial f}{\partial r}\dfrac{\partial r}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial t}\dfrac{\partial t}{\partial x}\right)}{\dfrac{\partial f}{\partial s}\dfrac{\partial s}{\partial z}+\dfrac{\partial f}{\partial t}\dfrac{\partial t}{\partial z}}=\frac{-\left(\dfrac{\partial f}{\partial r}(y^2)+\dfrac{\partial f}{\partial t}(2xz)\right)}{\dfrac{\partial f}{\partial s}(2zy)+\dfrac{\partial f}{\partial t}(x^2)}$$

(۴)

$z = f = 3x^3 + y^2 - 9x + 4y$ / $f_x = 9x^2 - 9 = 0$ $\quad 9(x^2-1) = 0$ $\quad x^2 = 1$ $\quad x = \pm 1$

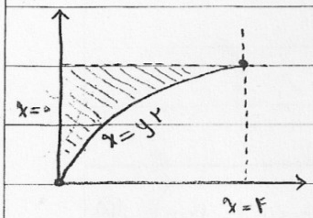
$f_y = 2y + 4 = 0$ $\quad 2y = -4$ $\quad y = -2$ نقاط بحرانی $(-1,-2)$ و $(1,-2)$ $\quad f_{xx} = 18x$

$f_{yy} = 2$ $\quad f_{xy} = 0$ $\quad \Delta = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 = 36x$ $\quad (-1,-2) \to \Delta < 0$ نقطه زینی

$(1,-2) \to \Delta > 0$ $\quad f_{xx} > 0$ $\quad f_{yy} > 0$ نقطه Min نسبی است $(1,-2)$

(۵)

$$\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \cos(y^3)\, dy\, dx = \int_0^2 \int_0^{y^2} \cos(y^3)\, dx\, dy = \int_0^2 \cos y^3\, x \Big|_0^{y^2} dy$$



$$\to \int_0^2 y^2 \cos y^3\, dy = \frac{1}{3} \int_0^2 3y^2 \cos y^3\, dy = \frac{1}{3} \sin(y^3)\Big|_0^2 = \frac{1}{3} \sin 8$$

(۶)

$R = \{(r, \theta, \varphi) \mid 1 \leq r \leq 2,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 0 \leq \varphi \leq \pi\}$

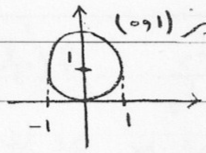
$x = r\cos\theta \sin\varphi$
$y = r\sin\theta \sin\varphi$ $\Rightarrow x^2 + y^2 = r^2 \sin^2\varphi\, \overbrace{(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}^{1}$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_1^2 \frac{r\cos\theta\, \cancel{\sin\varphi}}{\cancel{r^2}\, \cancel{\sin^2\varphi}} \overbrace{\cancel{r^2} \cancel{\sin\varphi}}^{\text{ژاکوبین}}\, dr\, d\varphi\, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \cos\theta \frac{r^2}{2}\Big|_1^2 d\varphi\, d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \cos\theta \underbrace{\left(\frac{4}{2} - \frac{1}{2}\right)}_{3/2} d\varphi\, d\theta = \frac{3}{2}\left(\int_0^{2\pi} \sin\theta\, d\theta\right)\left(\int_0^{\pi} d\varphi\right) = \frac{3}{2} \times 4 \left(\sin\theta\Big|_0^{\pi/2} \times \varphi\Big|_0^{\pi}\right) = 6\pi$$

(۷)

$z^2 = 4 - x^2 - y^2$ $\quad z = \pm\sqrt{4 - x^2 - y^2}$ $\quad x^2 + y^2 - 2y + 1 - 1 = 0 \to x^2 + (y-1)^2 = 1$ دایره به شعاع ۱ و مرکز $(0,1)$



$-1 \leq x \leq 1$ $\quad (y-1)^2 = 1 - x^2$ $\quad y - 1 = \pm\sqrt{1-x^2} \Rightarrow y = 1 \pm \sqrt{1-x^2}$

$R = \{(x, y, z) \mid -1 \leq x \leq 1,\ 1 - \sqrt{1-x^2} \leq y \leq 1 + \sqrt{1-x^2},\ -\sqrt{4-(x^2+y^2)} \leq z \leq \sqrt{4-(x^2+y^2)}\}$

$R = \{ \mid 0 \leq r \leq 1,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ -\sqrt{4-r^2} \leq z \leq \sqrt{4-r^2}\}$

پاسخ سوال های ریاضی ۲ — ۲۸ مرداد ۹۳

استاد طاهری

①

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{2x^4+y^4} & (x,y)\neq(0,0)\\[2mm] 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x^2y^2}{2x^4+y^4}\right)=\lim_{x\to 0} 0 = 0 \qquad \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^2y^2}{2x^4+y^4}\right)=\lim_{y\to 0} 0 = 0$$

$$y-0=m(x-0)\quad y=mx \qquad \lim_{x\to 0}\frac{x^2m^2x^2}{2x^4+m^4x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x^4}\,m^2}{\cancel{x^4}(2+m^4)}=\frac{m^2}{2+m^4}$$

حد ندارد چون به m بستگی دارد

②

$$w=f\Big(\overbrace{\frac{y-x}{xy}}^{r},\ \overbrace{\frac{z-y}{yz}}^{s}\Big)$$

$$f \to r \to y, x \qquad f \to s \to z, y$$

$$w_x=\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial r}\,\frac{-1}{x^2} \qquad w_z=\frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial s}\,\frac{1}{z^2}$$

$$w_y=\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial r}\left(\frac{1}{y^2}\right)+\frac{\partial f}{\partial s}\left(\frac{-1}{y^2}\right)$$

$$x^2w_x+y^2w_y+z^2w_z=\cancel{x^2}\times\frac{-1}{\cancel{x^2}}\frac{\partial f}{\partial r}+\cancel{y^2}\times\frac{1}{\cancel{y^2}}\frac{\partial f}{\partial r}+\cancel{y^2}\times\frac{-1}{\cancel{y^2}}\frac{\partial f}{\partial s}+\cancel{z^2}\times\frac{1}{\cancel{z^2}}\frac{\partial f}{\partial s}=$$

$$-\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{\partial f}{\partial r}-\frac{\partial f}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial s}=0$$

③

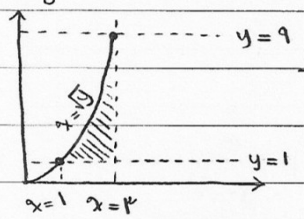
$$\nabla f=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)=\left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{2z}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$$

$$\xrightarrow{(3,4,0)}\left(\tfrac{3}{5},\tfrac{4}{5},0\right) \qquad u=\frac{\nabla g}{\|\nabla g\|}=\frac{(2x,-2y,2z)}{\sqrt{4x^2+4y^2+4z^2}}\ \xrightarrow{(3,4,0)}\ \left(\tfrac{3}{5},\tfrac{-4}{5},0\right)$$

$$D_uf=u\cdot\nabla f=\left(\tfrac{3}{5},\tfrac{4}{5},0\right)\cdot\left(\tfrac{3}{5},\tfrac{-4}{5},0\right)=\frac{9}{25}-\frac{16}{25}=\frac{-7}{25}$$

④

$$\int_1^9\int_{\sqrt{y}}^3 \frac{e^{x^2-2x}}{x+1}\,dx\,dy = \int_1^3\int_1^{x^2} \frac{e^{x^2-2x}}{x+1}\,dy\,dx = \int_1^3 \frac{e^{x^2-2x}}{x+1}\,y\Big|_1^{x^2} dx$$



$$\longrightarrow \int_1^3 \frac{e^{x^2-2x}}{\cancel{x+1}}\,\overbrace{(x^2-1)}^{(x+1)(x-1)}\,dx = \int_1^3 e^{x^2-2x}\,(x-1)\,dx$$

$$\longrightarrow \frac{1}{2}\int_1^3 e^{x^2-2x}\,(2x-2)\,dx = \frac{1}{2}\left(e^{x^2-2x}\right)\Big|_1^3 = \frac{1}{2}\left(e^{3}-e^{1}\right)$$

⑤

$$1 \le x^2+y^2+z^2 \le 4 \rightarrow \begin{cases} 1\le r\le 2 \\ 0\le\theta\le 2\pi \end{cases} \qquad z=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} \frac{\cancel{r^2}\sin^2\phi}{3} = \cancel{r^2}\cos^2\phi$$

$$\tan^2\phi = 3 \quad \tan\phi=\sqrt{3} \quad \phi=\frac{\pi}{3} \qquad \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\int_1^2 \sqrt{\frac{r^2\cos^2\theta\sin^2\phi + r^2\sin^2\theta\sin^2\phi}{3}}\; r^2\sin\phi\, dr\,d\phi\,d\theta$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\int_1^2 r\sin\phi\,\frac{\sqrt{3}}{3}\, r^2\sin\phi\, dr\,d\phi\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\int_1^2 r^3\sin^2\phi\,\frac{\sqrt{3}}{3}\,dr\,d\phi\,d\theta$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3} \frac{r^4}{4}\sin^2\phi\,\frac{\sqrt{3}}{3}\Big|_1^2 d\phi\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3} \frac{15\sqrt{3}}{12}\left(\frac{1-\cos2\phi}{2}\right)d\phi\,d\theta$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{15\sqrt{3}}{6}\left(\phi-\frac{1}{2}\sin\phi\right)\Big|_0^{\pi/3} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{15\sqrt{3}}{6}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)d\theta = \frac{5\sqrt{3}\pi}{6}\theta - \frac{15}{12}\theta\Big|_0^{2\pi}$$

$$\frac{5\sqrt{3}}{3}\pi^2 - \frac{15}{6}\pi$$

⑥

$$\operatorname{curl} F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2\cos x+z^3 & 2y\sin x-4 & 3xz^2+2 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial}{\partial y}(3xz^2+2) - \frac{\partial}{\partial z}(2y\sin x-4)\right)\vec{i} +$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}(y^2\cos x+z^3) - \frac{\partial}{\partial x}(3xz^2+2)\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial}{\partial x}(2y\sin x-4) - \frac{\partial}{\partial y}(y^2\cos x+z^3)\right)\vec{k}$$

$= (0,0,0) \Rightarrow$ پایستار است F

$$\nabla f \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = X \rightarrow f(x,y,z) = \int (y^2\cos x + z^3)\,dx = y^2\sin x + z^3 x \\ \frac{\partial f}{\partial y} = Y \rightarrow f(x,y,z) = \int (2y\sin x - 4)\,dy = y^2\sin x - 4y \\ \frac{\partial f}{\partial z} = Z \rightarrow f(x,y,z) = \int (3xz^2+2)\,dz = z^3x + 2z \end{cases}$$

$$f(x,y,z) = y^2\sin x + z^3x - 4y + 2z \qquad \rightarrow R(0) = (0,0,0) \quad \rightarrow R(1) = (\pi/2, 1, 1)$$

$$f(R(0)) = 0 \qquad f(R(1)) = 1+\pi/2-4+2 = \pi/2 - 1 \qquad \int F\cdot dr = \pi/2 - 1$$

28 خرداد 93 صالح

(۷)

(۸)

$\vec{v}_{(t)} = (-۲\sin t, ۲\cos t, -۲t) \quad \vec{v}_{(0)} = (0, ۲, 0) \quad \|\vec{v}_{(0)}\| = ۲$

$\vec{a}_{(t)} = (-۲\cos t, -۲\sin t, -۲) \quad \vec{a}_{(0)} = (-۲, 0, -۲) \quad \|\vec{a}_{(0)}\| = \sqrt{۴+۴} = ۲\sqrt{۲}$

$T = \dfrac{\vec{v}(t)}{\|\vec{v}(t)\|} = \dfrac{(0, ۲, 0)}{۲} = (0, ۱, 0) \qquad N = \dfrac{\vec{a}(t)}{\|\vec{a}(t)\|} = \dfrac{(-۲, 0, -۲)}{۲\sqrt{۲}} = \left(-\frac{\sqrt{۲}}{۲}, 0, -\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)$

$\vec{v \times a} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & ۲ & 0 \\ -۲ & 0 & -۲ \end{vmatrix} = (-۴, 0, ۴) \quad \|v \times a\| = \sqrt{۱۶+۱۶} = ۴\sqrt{۲}$

$B = T \times N = \dfrac{\vec{v \times a}}{\|\vec{v \times a}\|} = \dfrac{(-۴, 0, ۴)}{۴\sqrt{۲}} = \left(-\frac{\sqrt{۲}}{۲}, 0, \frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)$

پاسخ سؤال‌های ریاضی ۲ — ۹۲/۱۰/۱۸

استاد طاهری

1

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{3xy^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{3xy^2}{x^2+y^2}\right)=\lim_{x\to 0}0=0 \qquad \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{3xy^2}{x^2+y^2}\right)=\lim_{y\to 0}0=0$$

$$y=mx \quad \lim_{x\to 0}\frac{3x\,m^2x^2}{x^2+m^2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{3\overset{x}{\cancel{x^3}}\,m^2}{\cancel{x^2}(1+m^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{3x\,m^2}{1+m^2}=0$$

$$y=mx^2 \quad \lim_{x\to 0}\frac{3x\,m^2x^4}{x^2+m^2x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{3\overset{x^3}{\cancel{x^5}}\,m^2}{\cancel{x^2}(1+m^2x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{3x^3m^2}{(1+m^2x^2)}=0$$

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0;\ \forall(x,y)\in D_f\ \ \overbrace{\|(x,y)-(0,0)\|}^{\sqrt{x^2+y^2}}<\delta \Longrightarrow \left|\frac{3xy^2}{x^2+y^2}-0\right|<\varepsilon$$

$$\frac{3|x||y^2|}{|x^2|+|y^2|}\leq\frac{3\sqrt{x^2+y^2}\,(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)+(x^2+y^2)}\leq\frac{3\sqrt{x^2+y^2}}{2}<\frac{3}{2}\delta<\varepsilon \Longrightarrow \delta<\frac{2\varepsilon}{3}$$

2

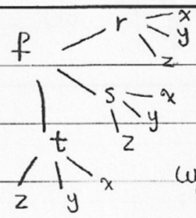
$$\nabla f_1=n_1=(6x,4y,2z) \Downarrow \quad n_1=(18,-12,4)$$

$$\nabla f_2=n_2=(2x,2y,-4z) \Downarrow \quad n_2=(6,-6,-8)$$

$$n_1\times n_2=(120,168,-36) \qquad \frac{x-3}{120}=\frac{y+3}{168}=\frac{z-2}{-36}$$

3

$$w=f(\overbrace{2x+4y-6z}^{r},\overbrace{2y+4z-6x}^{s},\overbrace{4x-6y+2z}^{t})$$



$$w_x+w_y+w_z=0$$

$$w_x=\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x}$$

$$=\frac{\partial f}{\partial r}(2)+\frac{\partial f}{\partial s}(-6)+\frac{\partial f}{\partial t}(4) \qquad w_y=\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y}$$

$$=\frac{\partial f}{\partial r}(4)+\frac{\partial f}{\partial s}(2)+\frac{\partial f}{\partial t}(-6) \qquad w_z=\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial z}$$

$$=\frac{\partial f}{\partial r}(-6)+\frac{\partial f}{\partial s}(4)+\frac{\partial f}{\partial t}(2) \qquad w_x+w_y+w_z=\underbrace{(2+4-6)}_{0}\frac{\partial f}{\partial r}+\underbrace{(-6+2+4)}_{0}\frac{\partial f}{\partial s}+\underbrace{(4-6+2)}_{0}\frac{\partial f}{\partial t}=0$$

$$=0$$

۴

$Z = 3x^3 + y^2 - 9x + 4y \qquad Z_x = 9x^2 - 9 = 0 \qquad 9(x^2-1) = 0 \qquad x^2 = 1 \qquad x = \pm 1$

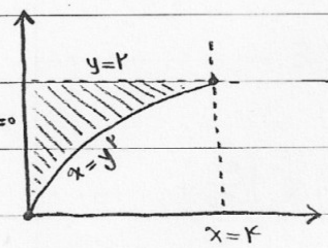
$Z_y = 2y + 4 = 0 \qquad 2y = -4 \qquad y = -2$ نقاط بحرانی $(-1,-2)$ ، $(1,-2)$ $\quad Z_{xx} = f_{xx} = 18x$

$f_{yy} = 2 \qquad f_{xy} = f_{yx} = 0 \qquad \Delta = f_{xx} \times f_{yy} - f_{xy}^2 = 36x$

$(-1,-2) \rightarrow \Delta < 0$ نقطه زینی $\qquad (1,-2) \rightarrow \Delta > 0 \quad f_{xx} > 0 \quad f_{yy} > 0$ Z است Min نسبی $(1,-2)$

۵

$$\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \cos(y^3)\, dy\, dx = \int_0^2 \int_0^{y^2} \cos(y^3)\, dx\, dy = \int_0^2 \cos y^3\, x \Big|_0^{y^2} dy$$



$$\rightarrow \int_0^2 y^2 \cos y^3\, dy = \frac{1}{3}\int_0^2 3y^2 \cos y^3\, dy = \frac{1}{3} \sin(y^3)\Big|_0^2 = \frac{1}{3}\sin 8$$

۶

$$\operatorname{div} F = \nabla \cdot F = \frac{\partial}{\partial x}(2x) + \frac{\partial}{\partial y}(-3y) + \frac{\partial}{\partial z}(4z) = 2 - 3 + 4 = 3$$

$$\iint_D F.N\, ds = \iiint_R 3\, dv \qquad \begin{cases} 0 \le z \le r^2 \\ 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases} \qquad \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{r^2} 3r\, dz\, dr\, d\theta \rightarrow$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 3r^3\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} 3\frac{r^4}{4}\Big|_0^1 d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{3}{4}\, d\theta = \frac{3}{4}(2\pi - 0) = \frac{3}{2}\pi$$

۷

۹۲/۱۰/۱۸

(۸)

$$\oint F.dr = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

اثبات طرف چپ : محاسبه $\int F.dr = \int F(r(t)).r'(t)\,dt$

$$x^2+y^2=4 \to \begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases} \to r(t) = (2\cos t, 2\sin t) \qquad 0 \leq t \leq 2\pi \to$$ دایره

$$r'(t) = (-2\sin t, 2\cos t) \qquad F(r(t)) = (2\cos t - 2\sin t, 2\cos t + 2\sin t)$$

$$\int F.dr = \int_0^{2\pi} (2\cos t - 2\sin t, 2\cos t + 2\sin t).(-2\sin t, 2\cos t)\,dt$$

$$\int_0^{2\pi} \cancel{-4\cos t\sin t} + 4\sin^2 t + 4\cos^2 t + \cancel{4\sin t\cos t}\,dt = 4t\Big|_0^{2\pi} = 8\pi$$

اثبات طرف راست :

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}(x+y) - \frac{\partial}{\partial y}(x-y) \right) dA$$

$$\iint_D 1-(-1)\,dA = \iint_D 2\,dA \quad \begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases} \quad \int_0^{2\pi}\int_0^2 2r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{2r^2}{2}\Big|_0^2 d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} 4\,d\theta = 4\theta\Big|_0^{2\pi} = 8\pi$$

پاسخ سؤال‌های ریاضی ۲   ۹۱/۴/۶

استاد طاهری

①

$$f_{(x,y)}=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{xy^2}{x^2+y^4}\right)=\lim_{x\to 0}0=0 \qquad \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{xy^2}{x^2+y^4}\right)=\lim_{y\to 0}0=0$$

$$y=mx \quad \lim_{x\to 0}\frac{x m^2 x^2}{x^2+m^4x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cancel{x^2}m^2}{\cancel{x^2}(1+x^2m^4)}=0$$

$$y=mx^2 \quad \lim_{x\to 0}\frac{x m^2 x^4}{x^2+x^8m^4}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3\cancel{x^2}m^2}{\cancel{x^2}(1+m^4x^6)}=0$$

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0\ ;\ \forall(x,y)\in D_f \quad \|(x,y)-(0,0)\|<\delta \quad \sqrt{x^2+y^2}<\delta \Longrightarrow \left|\frac{xy^2}{x^2+y^4}-0\right|<\varepsilon$$

$$\frac{|x||y^2|}{|x^2+y^4|}\leq|y|\leq\sqrt{x^2+y^2}\leq\delta<\varepsilon$$

---

②

$$z+yz_x+yz_y=\frac{1}{y}f(x-y)+y\left(\frac{1}{y}f'(x-y)\right)+y\left(\frac{-1}{y^2}f(x-y)\right)+\frac{1}{y}(-1)f'(x-y)$$

$$=\cancel{\frac{1}{y}f(x-y)}+\cancel{f'(x-y)}-\cancel{\frac{1}{y}f(x-y)}-\cancel{f'(x-y)}=0$$

---

③

$$f(x,y,z)=1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-z=0 \qquad \nabla f=\left(\frac{-2x}{a^2},\frac{-2y}{b^2}\right)\xrightarrow{\left(\frac{a}{\sqrt2},\frac{b}{\sqrt2}\right)}\left(\frac{-2}{a\sqrt2},\frac{-2}{b\sqrt2}\right)$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \begin{cases}x=a\cos t\\ y=b\sin t\end{cases} \qquad r(t)=(a\cos t,b\sin t)\xrightarrow{\left(\frac{a}{\sqrt2},\frac{b}{\sqrt2}\right)} t=\frac{\pi}{4}$$

$$T=\frac{r'(t)}{\|r'(t)\|}=\frac{(-a\sin t,b\cos t)}{\sqrt{a^2\sin^2t+b^2\cos^2t}}=\frac{\left(\frac{-a}{\sqrt2},\frac{b}{\sqrt2}\right)}{\sqrt{\frac{1}{2}(a^2+b^2)}} \qquad D_uf=\left(\frac{-2}{a\sqrt2},\frac{-2}{b\sqrt2}\right)\cdot\frac{\left(\frac{-a}{\sqrt2},\frac{b}{\sqrt2}\right)}{\sqrt{\frac{1}{2}(a^2+b^2)}}=\frac{2\sqrt2}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

---

④

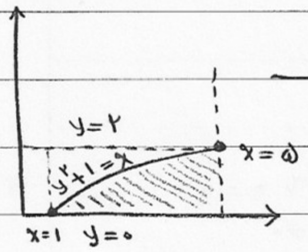
$$f=x^2+2xy+3y^3 \quad f_x=2x+2y=0\Rightarrow y=-x \qquad f_y=2x+9y^2=0\Longrightarrow -2y+9y^2=0$$

$y=0\to x=0 \quad y=\frac{2}{9}\to x=-\frac{2}{9}$ نقاط بحرانی $(0,0),\left(-\frac{2}{9},\frac{2}{9}\right),\left(0,\frac{2}{9}\right),\left(-\frac{2}{9},0\right)$

$f_{xx}=2 \quad f_{yy}=18y \quad f_{xy}=2 \qquad (0,0),\left(-\frac{2}{9},0\right)\to\Delta<0$ نقطه زینی

$\left(0,\frac{2}{9}\right)\ \Delta>0\ f_{xx}>0\ f_{yy}>0\to$ نسبی Min $\left(-\frac{2}{9},\frac{2}{9}\right)\ \Delta>0\ f_{xx}>0\ f_{yy}>0$ نسبی Min

$$\int_0^2\int_{1+y^2}^{5} y e^{(x-1)^2}\,dx\,dy = \int_1^5\int_0^{\sqrt{x-1}} y e^{(x-1)^2}\,dy\,dx = \int_1^5 e^{(x-1)^2}\,\frac{y^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{x-1}}\,dx$$ (5)



$$\longrightarrow \int_1^5 e^{(x-1)^2}\,\frac{x-1}{2}\,dx = \frac{1}{4}\int_1^5 e^{(x-1)^2}\,2(x-1) = \frac{1}{4} e^{(x-1)^2}\Big|_1^5$$

$$\longrightarrow \frac{1}{4}\left(e^{16}-1\right)$$

$x^2=1-y \qquad x=\pm\sqrt{1-y} \xrightarrow{y=0} x=\pm 1 \qquad z^2=1-y \qquad z=\pm\sqrt{1-y}$ (6)

$$R=\left\{(x,y,z)\,\middle|\,-1\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq 1-x^2,\ -\sqrt{1-y}\leq z\leq\sqrt{1-y}\right\}$$

$$\int_{-1}^1\int_0^{1-x^2}\int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} dz\,dy\,dx = \int_{-1}^1\int_0^{1-x^2} 2\sqrt{1-y}\,dy\,dx = \int_{-1}^1 -2(1-y)^{3/2}\times\frac{2}{3}\Big|_0^{1-x^2} dx$$

$$-\frac{4}{3}\int_{-1}^1 (x^2)^{3/2}\,dx = \frac{-4}{3}\times\frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^1 = \frac{-1}{3}\times 2 = \left|\frac{-2}{3}\right| = 2/3$$

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial}{\partial x}(2xy+z)+\frac{\partial}{\partial y}(y^2)+\frac{\partial}{\partial z}(-x-2y) = 2y+2y = 4y$$ (7)

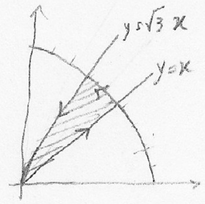
$$\iint_D F\cdot N\,ds = \iiint_R 4y\,dv \rightarrow \begin{cases} 0\leq z\leq 6 \\ 0\leq r\leq \end{cases}$$

۲۸ خرداد ۹۳ A عصر

8) حاصل انتگرال $\oint_C \underbrace{(x^3-y^3)}_{P}dx+\underbrace{(e^{y^2}+x^3)}_{Q}dy$ را که در آن C مسیر بسته متشکل از $x=y$ و $y=\sqrt{3}x$ و $y=\sqrt{1-x^2}$ است

که در جهت مثلثاتی طی می شود را به کمک قضیه گرین پیدا کنید!

$$\oint_C F\cdot dr=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dA$$



$$\iint_D\left(\frac{\partial}{\partial x}(3x^2)\right)-\left(\frac{\partial}{\partial y}(3y^2)\right)dA\rightarrow\iint_D(3x^2-3y^2)\,dx\,dy$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\int_0^1 3r^2 r\,dr\,d\theta\rightarrow3\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\int_0^1 r^3\,dr\,d\theta\rightarrow3\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{r^4}{4}\right)\Big]_0^1 d\theta$$

$$\frac{3}{4}\theta\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\longrightarrow=\frac{3}{4}\underbrace{\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)}_{\frac{\pi}{12}}=\boxed{\frac{\pi}{16}}$$

$y=\sqrt{3}x\rightarrow\tan\theta=\sqrt{3}$

$\rightarrow\ \theta=\frac{\pi}{3}$

$x^2+y^2=1\rightarrow2x^2=1$

$x^2=\frac{1}{2}\rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\theta=\frac{\pi}{4}$

$0\leq r\leq1$

سوال حساب نمی شود.

9) درستی قضیه استوکس را برای تابع برداری $\vec{F}=(x+y,2z,y)$ و سطح S را که قسمتی از سطح $x^2+y^2-z^2=-1$ محدود به

صفحه $z=2$ است را تحقیق کنید!

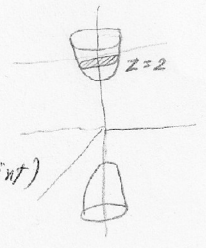
$-x^2-y^2+z^2=1$

$x+y=\sqrt{3}\qquad x^2+y^2=3$

$(0,0,1)$

$$\oint_C F\cdot dr=\int curl\,F\cdot N\,ds$$

$0\leq t\leq2\pi$



$r(t)=(\sqrt{3}\cos t,\sqrt{3}\sin t)$

$$=\int_0^{2\pi}(\sqrt{3}\cos t+\sqrt{3}\sin t)(-\sqrt{3}\sin t)+(2(\sqrt{3}\cos t)+0)\,dt$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(-3\cos t\sin t-\underbrace{3\sin^2 t}_{\frac{1-\cos2t}{2}}\right)+2\sqrt{3}\cos t\,)\,dt$$

$$\rightarrow=\frac{3\cos^2 t}{2}-\frac{3}{2}t+\frac{3}{4}\sin2t+2\sqrt{3}\sin t\Big]_0^{2\pi}\longrightarrow=\left(\frac{3}{2}-3\pi+0+0\right)-\left(\frac{3}{2}-0+0+0\right)=\boxed{-3\pi}$$

طرف اول

$$\iint_{cur}F\cdot N\,ds=\iint_D\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\,dA=-\iint dA=-\pi(+\sqrt{3})^2=-3\pi$$

سوی صفر داریم.

$$F=(\underbrace{x+y}_{P},\underbrace{z}_{Q},y)$$

عصر $\boxed{A}$ 28 مرداد 94

) پیوستگی تابع در مبدا را بررسی کنید!

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^3}{x^2+2y^6} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x^2y^3}{x^2+2y^6}\right)=\lim_{x\to 0} 0=0$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^2y^3}{x^2+2y^6}\right)=\lim_{y\to 0} 0=0$$

$$\xrightarrow{y=mx}\lim_{x\to 0}\frac{x^2(m^3x^3)}{x^2+2(m^6x^6)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^5m^3}{x^2(1+2m^6x^4)}=\frac{x^3m^3}{1+2m^6x^4}=0$$

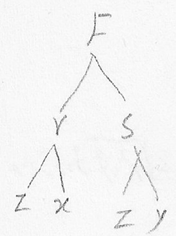
$$\xrightarrow{y=mx^2}\lim_{x\to 0}\frac{x^2(m^3x^5)}{x^2+2(m^6x^8)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^7m^3}{x^2(1+2m^6x^6)}=\frac{x^5m^3}{1+2m^6x^6}=0$$ پیوسته است

$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ \forall(x,y)\in D_f,\ \|(x,y)-(0,0)\|<\delta\rightarrow\sqrt{x^2+2y^6}<\delta\rightarrow\left|\frac{x^2y^3}{x^2+2y^6}-0\right|<\varepsilon\rightarrow\frac{|x^2||y^3|}{|x^2|+|2y^6|}\leq|y|\leq\sqrt{x^2+2y^6}$

) مشتق سوی تابع $f(x,y,z)=3x-5y+2z$ را در جهت عمود بر سطح $g: x^2+y^2+z^2=9$ در نقطه ای با مختصات $P_0(2,2,1)$ بدست آورید!

eng-hvac.mihanblog.com

) اگر z تابعی از x و y باشد و $F(\underbrace{z-\frac{1}{x}}_{r},\underbrace{z+\frac{1}{y}}_{s})=0$ آنگاه نشان دهید: $y^2z_y-x^2z_x=1$



$$z_x=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z}+\frac{\partial F}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial z}}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial r}\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{\partial F}{\partial r}(1)+\frac{\partial F}{\partial s}(1)}\quad A$$

$$z_y=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial r}\frac{\partial r}{z}+\frac{\partial F}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial z}}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial s}\left(-\frac{1}{y^2}\right)}{\frac{\partial F}{\partial r}(1)+\frac{\partial F}{\partial s}(1)}\quad B$$

$$\frac{-y^2\left(\frac{-1}{y^2}\frac{\partial F}{\partial s}\right)+x^2\left(\frac{1}{x^2}\frac{\partial F}{\partial r}\right)}{\frac{\partial F}{\partial r}+\frac{\partial F}{\partial s}}=1$$

28 خرداد 93 صنایع

1) پیوستگی تابع در مبدا را بررسی کنید

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{2x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

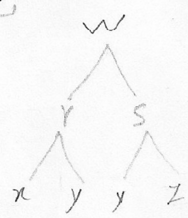
$$\lim_{x\to0}\left(\lim_{y\to0}\frac{x^2y^2}{2x^4+y^4}\right)=\lim_{x\to0}0=0$$

$$\lim_{y\to0}\left(\lim_{x\to0}\frac{x^2y^2}{2x^4+y^4}\right)=\lim_{y\to0}0=0$$

$$\underline{y=mx}\rightarrow \lim_{x\to0}\frac{x^2m^2x^2}{2x^4+m^4x^4}=\lim_{x\to0}\frac{\cancel{x^4}m^2}{\cancel{x^4}(2+m^4)}=\frac{m^2}{2+m^4}$$

حد ندارد پیوسته نیست.

2) با فرض $w=f\left(\underbrace{\frac{y-x}{xy}}_{r},\underbrace{\frac{z-y}{yz}}_{s}\right)$ نشان دهید $x^2w_x+y^2w_y+z^2w_z=0$



$$w_x=\frac{\partial w}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x},\quad w_y=\frac{\partial w}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial s}\,\frac{\partial s}{\partial y},\quad w_z=\frac{\partial w}{\partial s}\,\frac{\partial s}{\partial z}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{y-x}{xy}=\frac{-xy-y(y-x)}{(xy)^2}=\boxed{\frac{-1}{x^2}},\quad \frac{\partial r}{\partial y}=\frac{(xy)-x(y-x)}{x^2y^2}=\boxed{\frac{1}{y^2}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z-y}{yz}=\frac{-(yz)-z(z-y)}{y^2z^2}=\boxed{\frac{-1}{y^2}}$$

$$\frac{\partial s}{\partial z}=\frac{yz-y(z-y)}{y^2z^2}=\boxed{\frac{1}{z^2}}$$

$$x^2\left(-\frac{1}{x^2}\cdot\frac{\partial w}{\partial r}\right)+y^2\left(\frac{\partial w}{\partial r}\cdot\frac{1}{y^2}+\frac{\partial w}{\partial s}-\frac{1}{y^2}\right)+z^2\left(\frac{\partial w}{\partial s}\cdot\frac{1}{z^2}\right)=0$$

3) مشتق سوی تابع $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ را در جهت عمود بر سطح $g=x^2-y^2+z^2=1$ در نقطه ی $P(3,4,0)$ به دست آورید

$$D_{u_f}=\vec{\nabla f}\cdot u$$

$$\vec{\nabla f}=\left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{2z}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$$

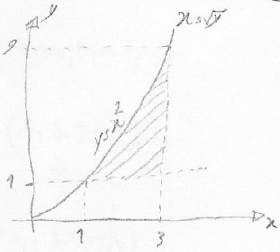
$$(3,4,0)\rightarrow\left(\frac{2(3)}{2\sqrt{25}},\frac{2(4)}{2\sqrt{25}},\frac{2(0)}{2\sqrt{25}}\right)\rightarrow\left(\frac{6}{10},\frac{8}{10},0\right)\rightarrow\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5},0\right)$$

$$u=\frac{\nabla g}{\|\nabla g\|}=\frac{(2x,-2y,2z)}{\sqrt{4x^2+4y^2+4z^2}}\xrightarrow{(3,4,0)}\left(\frac{3}{5},-\frac{4}{5},0\right)$$

$$D_uf=u\cdot\nabla f=\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5},0\right)\cdot\left(\frac{3}{5},-\frac{4}{5},0\right)=\frac{9}{25}-\frac{16}{25}=\boxed{\frac{-7}{25}}$$

4) انتگرال دوگانه زیر را بعد از تعویض ترتیب انتگرال حل کنید:

$$\int_1^9\int_{\sqrt{y}}^3 \frac{e^{x^2-2x}}{x+1}\,dx\,dy$$



$$\int_1^3\int_1^{x^2}\frac{e^{x^2-2x}}{x+1}\,dy\,dx$$

$$\int_1^3 \frac{y\,e^{x^2-2x}}{x+1}\,dy\Big|_1^{x^2} \to \int_1^3 \frac{e^{x^2-2x}\,\overbrace{(x^2-1)}^{(x-1)(x+1)}}{x+1}\,dx$$

$$\frac{1}{2}\int_1^3 e^{x^2-2x}\,2(x-1)\,dx=\frac{1}{2}e^{x^2-2x}\Big|_1^3=\frac{1}{2}\left(e^{3}-e^{-1}\right)$$

5) حجم داخل مخروط $z=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}}$ و بین کره های $x^2+y^2+z^2=1$ و $x^2+y^2+z^2=4$ را بدست آورید

$$1\le x^2+y^2+z^2\le 4 \to \begin{cases}1\le r\le 2\\ 0\le\theta\le 2\pi\end{cases} ,\quad z=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}} \longrightarrow r^2\cos^2\phi=\frac{r^2\sin^2\phi}{3}$$

$$\tan^2\phi=3\to\tan\phi=\sqrt{3}\to\phi=\frac{\pi}{3} ,\quad \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\int_1^2 r^2\sin\phi\,dr\,d\phi\,d\theta \to \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\int_1^2 2\sin\phi\,\frac{\sqrt{3}}{3}\,r^2\sin\phi\,dr\,d\phi\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\int_1^2 r^3\sin^2\phi\,\frac{\sqrt{3}}{3}\,dr\,d\phi\,d\theta \to =\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{r^4}{4}\sin^2\phi\,\frac{\sqrt{3}}{3}\Big|_1^2 d\phi\,d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{15\sqrt{3}}{12}\left(\frac{1-\cos2\phi}{2}\right)d\phi\,d\theta$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{15\sqrt{3}}{6}\left(\phi-\frac{1}{2}\sin\phi\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{15\sqrt{3}}{6}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)d\theta=\frac{5\sqrt{3}\,\pi}{6}\,\theta-\frac{15}{12}\,\theta\Big|_0^{2\pi}$$

$$\boxed{=\frac{5\sqrt{3}}{3}\pi^2-\frac{15}{6}\pi}$$

6) کار انجام شده توسط میدان برداری $\vec{F}=(y^2\cos x+z^3)\vec{i}+(2y\sin x-4)\vec{j}+(3xz^2+2)\vec{k}$ روی منحنی $C:\vec{R}(t)=\sin^{-1}t\,\vec{i}+t\,\vec{j}+t^2\vec{k};\ 0\le t\le 1$ را بیابید

$$\operatorname{curl}\vec{F}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y^2\cos x+z^3 & 2y\sin x-4 & 3xz^2+2\end{vmatrix}=\Big(\underbrace{\tfrac{\partial}{\partial y}(3xz^2+2)}_{0}-\underbrace{\tfrac{\partial}{\partial z}(2y\sin x-4)}_{0}\Big)\vec{i}-\Big(\underbrace{\tfrac{\partial}{\partial x}(3xz^2+2)}_{3z^2}-\underbrace{\tfrac{\partial}{\partial z}(y^2\cos x+z^3)}_{3z^2}\Big)$$

$$\vec{j}+\Big(\underbrace{\tfrac{\partial}{\partial x}(2y\sin x-4)}_{2y\cos x}-\underbrace{\tfrac{\partial}{\partial y}(y^2\cos x+z^3)}_{2y\cos x}\Big)=0$$

پایستار

$$\operatorname{curl}\vec{F}=\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial x}=y^2\cos x+z^3\to f(x,y,z)=\int y^2\cos x+z^3\,dx=y^2\sin x+z^3x\\ \frac{\partial F}{\partial y}=2y\sin x-4\to f(x,y,z)=\int 2y\sin x-4\,dy=y^2\sin x-4y\\ \frac{\partial F}{\partial z}=3xz^2+2\to f(x,y,z)=\int 3xz^2+2\,dz=3x\frac{z^3}{3}+2z=xz^3+2z\end{cases}$$

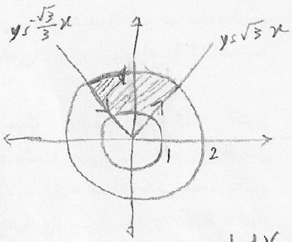
$$f(x,y,z)=y^2\sin x+z^3x-4y+2z \qquad ,\ r(t)=\sin^{-1}t\,\vec{i}+t\,\vec{j}+t^2\vec{k}$$

$$\left.\begin{aligned}r(0)&=(0,0,0)\\ r(1)&=\left(\tfrac{\pi}{2},1,1\right)\end{aligned}\right\}\Rightarrow f(R(1))-f(R(0))=\boxed{\frac{\pi}{2}-1}$$

۷) به کمک قضیه گرین حاصل انتگرال $\int_C \underbrace{-x^2y\,dx}_{P} + \underbrace{xy^2\,dy}_{Q}$ که C مرز ناحیه بسته بین دو دایره $x^2+y^2=1$ و $x^2+y^2=4$ و خطوط $y=\sqrt{3}x$ و $y=\frac{-\sqrt{3}}{3}x$ در نیم صفحه بالایی باشد را بیابید.

$$\oint_C F\cdot dr=\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dA$$

$$\iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}(-x^2y)-\frac{\partial}{\partial y}(xy^2)\right)dA \rightarrow \iint_D x^2-y^2\,dA$$



$$\iint_D (r^2)\,dA \rightarrow \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{6}}\int_1^2 r^2 r\,dr\,d\theta$$

$1 \leq r \leq 2$

$\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{2\pi}{6}$

$$\rightarrow \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{6}} \frac{r^4}{4}\Big|_1^2\,d\theta \rightarrow \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{6}} \frac{16}{4}-\frac{1}{4} = \frac{15}{4}\,d\theta$$

$y=\sqrt{3}x \rightarrow \tan\theta=\sqrt{3}$

$\theta=\frac{\pi}{3}$

$$\rightarrow \frac{15}{4}\theta\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{6}} = \frac{15}{4}\left(\frac{5\pi}{6}-\cancel{\frac{2\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\right) = \boxed{\frac{15\pi}{8}}$$

$y=\frac{-\sqrt{3}}{3}x \rightarrow \tan\theta=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

ربع دوم $\theta=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$

۸) بردارهای T، B و N و انحنای منحنی را برای تابع برداری $\vec{R}(t)=(2\cos t, 2\sin t, -t^2)$ در لحظه $t=0$ بیابید.

$\vec{V}(t)=(-2\sin t, 2\cos t, -2t)$ $\quad \vec{V}(0)=(0,2,0)$ $\quad \|\vec{V}(0)\|=2$

$\vec{a}(t)=(-2\cos t, -2\sin t, -2)$

$\vec{a}(0)=(-2,0,-2)$ $\quad \|\vec{a}(0)\|=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$

$$T=\frac{\vec{V}(t)}{\|\vec{V}(t)\|}=\frac{(0,2,0)}{2}=(0,1,0)$$

$$N=\frac{\vec{a}(t)}{\|\vec{a}(t)\|}=\frac{(-2,0,-2)}{2\sqrt{2}}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},0,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\vec{V}\times\vec{a}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{vmatrix}=(-4,0,4)$$

$\|\vec{V}\times\vec{a}\|=\sqrt{16+16}=4\sqrt{2}$

$$B=T\times N=\frac{\vec{V}\times\vec{a}}{\|\vec{V}\times\vec{a}\|}=\frac{(-4,0,4)}{4\sqrt{2}}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

1) در پیوستگی تابع زیر در مبداء بحث کنید.

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{3xy^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{3xy^2}{x^2+y^2}\right)=\lim_{x\to 0}0=0$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{3xy^2}{x^2+y^2}\right)=\lim_{y\to 0}0=0$$

$$y=mx \rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{3xm^2x^2}{x^2+m^2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{3x^{\cancel{3}}m^2}{\cancel{x^2}(1+m^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{3xm^2}{1+m^2}=0$$

$$y=mx^2 \rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{3xm^2x^4}{x^2+m^2x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{3x^{\cancel{5}\,3}m^2}{\cancel{x^2}(1+m^2x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{3x^3m^2}{(1+m^2x^2)}=0$$

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ ;\ \forall(x,y)\in D_f\ \underbrace{\|(x,y)-(0,0)\|}_{\sqrt{x^2+y^2}}<\delta \Rightarrow \left|\frac{3xy^2}{x^2+y^2}-0\right|<\varepsilon$$

$$\frac{3|x||y^2|}{|x^2|+|y^2|}\leqslant\frac{3\sqrt{x^2+y^2}\,(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)+(x^2+y^2)}\leqslant\frac{3\sqrt{x^2+y^2}}{2}<\frac{3}{2}\delta<\varepsilon\Rightarrow\delta<\frac{2\varepsilon}{3}$$

2) معادله خط مماس و صفحه قائم بر منحنی $C\begin{cases}3x^2+2y^2+z^2=49\\ x^2+y^2-2z^2=10\end{cases}$ را در نقطه $(3,-3,2)$ بیابید.

3) نشان دهید تابع $w=f(2x+4y-6z,\,2y+4z-6x,\,4x-6y+2z)$ در معادله $w_x+w_y+w_z=0$ صدق میکند.

4) نقاط ماکزیمم و مینیمم تابع زیر $z=3x^3+y^2-9x+4y$ را در صورت وجود بیابید.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=9x^2-9=0\rightarrow x=\pm1$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=2y+4=0\rightarrow y=-2$$

نقاط بحرانی $(-1,-2),(1,-2)$

$$r=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=18x\ ,\ s=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0\ ,\ t=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2$$

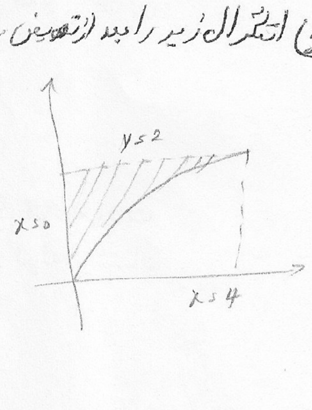
$$(-1,-2)\rightarrow\begin{cases}r=-18\\ s=0\\ t=2\end{cases}\rightarrow rt-s^2=-36-0=-36<0$$ زینی است

$$(1,-2)\rightarrow\begin{cases}r=18\\ s=0\\ t=2\end{cases}\rightarrow rt-s^2=36-0=36>0$$ مینیمم نسبی

5) انتگرال زیر را با تعویض ترتیب انتگرال حل کنید. $\int_0^4\int_{\sqrt{x}}^2\cos(y^3)\,dy\,dx$?

$$\int_0^4\int_{\sqrt{x}}^2\cos(y^3)\,dy\,dx=\int_0^2\int_0^{y^2}\cos(y^3)\,dx\,dy=\int_0^2\cos y^3\,x\Big|_0^{y^2}dy$$

$$\int_0^2 y^2\cos y^3\,dy=\frac{1}{3}\int_0^2 3y^2\cos y^3\,dy=\frac{1}{3}\sin(y^3)\Big|_0^2=\boxed{\frac{1}{3}\sin 8}$$



6) شار نیروی $\vec{F} = 2x\vec{i} - 3y\vec{j} + 4z\vec{k}$ گذرا از سطح خارجی ناحیه ایجاد شده توسط سهمیگون $z = x^2 + y^2$ و $z = 1$ را بیابید.

$$\operatorname{div} F = \nabla \cdot F = \frac{\partial}{\partial x}(2x) + \frac{\partial}{\partial y}(-3y) + \frac{\partial}{\partial z}(4z) = 2 - 3 + 4 = 3$$

$$\iint_D F \cdot N \, ds = \iiint_R 3 \, dV \qquad \begin{cases} 0 \leq z \leq r^2 \\ 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases} \qquad \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{r^2} 3r \, dz \, dr \, d\theta$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 3r^3 \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} 3\frac{r^4}{4}\Big|_0^1 d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{3}{4} d\theta = \frac{3}{4}(2\pi - 0) = \boxed{\frac{3}{2}\pi}$$

7) مطلوب است محاسبه $\iiint_R \frac{x}{9x^2 + 4y^2} dV$ که در آن R ناحیه ایجاد شده توسط بیضوی $\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} + z^2 = 1$ می باشد.

8) درستی قضیه گرین را برای تابع برداری $\vec{F} = \underbrace{(x-y)}_{Q}\vec{i} + \underbrace{(x+y)}_{P}\vec{j}$ و $x^2 + y^2 = 4$ بررسی کنید؟

$$\oint_C F \cdot dr = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$$

دایره

طرف چپ $\rightarrow \int F \cdot dr = \int F(r(t)) \cdot r'(t) \, dt \rightarrow x^2 + y^2 = 4 \rightarrow \begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases} \rightarrow r(t) = (2\cos t, 2\sin t) \quad ; \ 0 \leq t \leq 2\pi$

$$F r(t) = (2\cos t - 2\sin t)\vec{i} + (2\cos t + 2\sin t)\vec{j} \quad , \quad (2\cos t - 2\sin t) \cdot (-2\sin t + 2\cos t)$$

$$F r(t) \cdot r'(t) = (-4\sin t \sin t + 4\sin^2 t) + (4\cos^2 t + 4\sin t \cos t) = \int_0^{2\pi} 4\cos^2 t + 4\sin^2 t \, dt = \int_0^{2\pi} 4 \cdot dt \Big]_0^{2\pi} = \boxed{8\pi}$$

طرف راست

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA \rightarrow \iint_D \frac{\partial}{\partial x}(x-y) - \frac{\partial}{\partial y}(x+y) \, dA \rightarrow \iint_D 1 + 1 \, dA \rightarrow \int_0^{2\pi} \int_0^2 2r \, dr \, d\theta \rightarrow$$

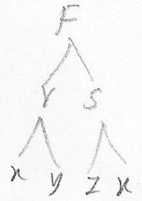
$$\rightarrow \int_0^{2\pi} 2r \Big]_0^2 = \boxed{8\pi}$$

91 / 10 / 20

۱) پیوستگی تابع در مبدا را بررسی کنید.

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(xy)}{xy} & (x,y)\neq(0,0)\\[2mm] 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

۲) تابع ضمنی $F(\underbrace{x^2-y^2}_{r},\underbrace{z-x^2}_{s})=0$ مفروض است حاصل yz_x+xz_y را بدست آورید!



$$z_x=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial z}} \rightarrow \frac{\frac{\partial F}{\partial r}(2x)+\frac{\partial F}{\partial s}(-2x)}{\frac{\partial F}{\partial s}(1)}$$

$$z_y=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial z}}=\frac{\frac{\partial F}{\partial r}(2y)}{\frac{\partial F}{\partial s}(1)}$$

$$\Longrightarrow yz_x+xz_y=y\left(-\frac{\frac{\partial F}{\partial r}(2x)+\frac{\partial F}{\partial s}(-2x)}{\frac{\partial F}{\partial s}}\right)+x\left(\frac{\frac{\partial F}{\partial r}(2y)}{\frac{\partial F}{\partial s}}\right)$$

$$\rightarrow \frac{\cancel{-\frac{\partial F}{\partial r}(2xy)}-\cancel{\frac{\partial F}{\partial s}}(2xy)+\cancel{\frac{\partial F}{\partial r}(2xy)}}{\cancel{\frac{\partial F}{\partial s}}}=\boxed{-2xy}$$

۳) انحنا و تاب منحنی c حاصل از تقاطع دو رویه $x^2+y^2-\frac{1}{4}z^2=1$ و $z=x^2+y^2$ را بدست آورید!

$$=x^2+y^2\rightarrow z-\frac{1}{4}z^2=1\rightarrow\frac{1}{4}z^2-z+1=0\rightarrow\left(\frac{1}{2}z-1\right)^2=0\rightarrow z=2$$

$$r(t)=(\sqrt2\cos t,\sqrt2\sin t,2)\rightarrow V(t)=(-\sqrt2\sin t,\sqrt2\cos t)$$

$$\|V(t)\|=\sqrt{2\sin^2t+2\cos^2t}=\sqrt2$$

$$a(t)=(-\sqrt2\cos t,-\sqrt2\sin t)$$

$$V\times a=2\sin^2t+2\cos^2t=2$$

$$\boxed{K=\frac{\|V\times a\|}{\|V\|^3}=\frac{2}{(\sqrt2)^3}=2^{-1/2}}$$

۴) مساحت قسمتی از عرقچین بالای کره $x^2+y^2+z^2=4$ که توسط مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ جدا شده است را محاسبه کنید!

1) پیوستگی تابع زیر در مبدا بحث کنید!

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\[2mm] 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

2) معادله خط مماس بر منحنی $C\begin{cases}3x^2+2y^2+z^2=49 & \text{بیضی گون}\\ x^2+y^2-2z^2=10 & \text{هذلولی گون}\end{cases}$ را در نقطه $(3,-3,2)$ بیابید!

$f_1(x,y,z)=3x^2+2y^2+z^2-49=0 \rightarrow \nabla f_1=\vec{n_1}=(6x,4y,2z)$

$f_2(x,y,z)=x^2+y^2-2z^2-10=0 \rightarrow \nabla f_2=\vec{n_2}=(2x,2y,-4z)$

$$(3,-3,2)\ \xrightarrow{\text{تماس}}\ \begin{cases}n_1=(18,-12,4)\\ n_2=(6,-6,-8)\end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} i & j & k\\ 18 & -12 & 4\\ 6 & -6 & -8\end{vmatrix}=(96+24)\vec{i}-(+144+24)\vec{j}+(-108+72)\vec{k}$$

$$\rightarrow (120,168,-36) \longrightarrow \frac{x-3}{120}=\frac{y+3}{168}=\frac{z-2}{-36}$$

3) عدد حقیقی K را طوری بیابید که تابع $w=f(\underbrace{2x+4y-6z}_{r},\underbrace{2y+4z-6x}_{s},\underbrace{Kx-6y+2z}_{t})$ در معادله $w_x+w_y+w_z=0$ صدق کند!

$w=f(r,s,t)$

$$\left.\begin{aligned} w_x&=f_r\cdot r_x+f_s\cdot s_x+f_t\, t_x \rightarrow w_x=2f_r-6f_s+Kf_t\\ w_y&=f_r\, r_y+f_s\, s_y+f_t\, t_y \rightarrow w_y=4f_r+2f_s-6f_t\\ w_z&=f_r\, r_z+f_s\, s_z+f_t\, t_z \rightarrow w_z=-6f_r+4f_s+2f_t\end{aligned}\right\} \Rightarrow w_x+w_y+w_z=(K-4)f_t=0 \rightarrow K-4=0 \rightarrow \boxed{K=4}$$

$\boxed{92 / 5 / 20}$

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 12x - 6x^2 + 6y = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 6y + 6x = 0 \end{cases}$$

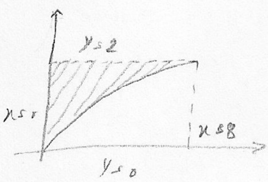
$12x - 6x^2 + 6$

4) نقاط ماکزیمم و مینیمم این تابع $z = 6x^2 - 2x^3 + 3y^2 + 6xy$ در صورت وجود بیابید؟

5) حاصل انتگرال $\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{dy\,dx}{y^4+1}$ را بعد از تعویض ترتیب انتگرال‌گیری حل کنید؟

$y = \sqrt[3]{x} \to x = y^3 \quad x=0 \to y=0$

$x = 8 \to y = 2$



$$\int_{y=0}^{y=2} \int_{x=0}^{x=y^3} \frac{1}{y^4+1}\, dx\, dy \to \int_0^2 \left[\frac{x}{y^4+1}\right]_0^{y^3} dy \to \int_0^2 \frac{y^3}{y^4+1} - \frac{0}{y^4+1}\, dy$$

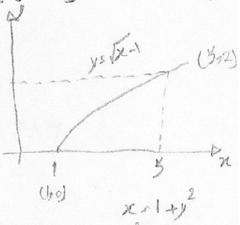
$$= \frac{1}{4}\int_0^2 \frac{4y^2}{y^4+1}\, dy = \frac{1}{4} Ln(y^4+1)\Big]_0^2 \to = \frac{1}{4} Ln(17) - \cancel{\frac{1}{4} Ln(1)}_{0}$$

6) فرمول محاسبه حجم بیضوی $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ را بیابید؟

7) شار نیروی $\vec{F} = x\vec{i} - y\vec{j} + z\vec{k}$ گذرا از سطح خارجی ناحیه ایجاد شده توسط مخروط $z = \sqrt{x^2+y^2}$ و صفحه $z=1$ را بیابید؟

$$\int_0^2\int_{1+y^2} y\,e^{(x-1)^2}\,dx\,dy$$

۵) انتگرال زیر را پس از تعویض ترتیب انتگرالگیری حل کنید.



$x=1+y^2$

$y^2=x-1$

$y=\sqrt{x-1}$

$$\int_0^5\int_0^{\sqrt{x-1}} y\,e^{(x-1)^2}\,dy\,dx \to \int_1^5 \frac{y^2}{2}e^{(x-1)^2}dx\Big]_0^{\sqrt{x-1}} \Rightarrow = \frac{x-1}{2}e^{(x-1)^2} \to \int_1^5 \frac{x-1}{2}e^{(x-1)^2} \to$$

$$\to \frac{1}{4}\int_1^5 2(x-1)e^{(x-1)^2}dx \to \frac{1}{4}e^{(x-1)^2}\Big|_1^5 = \frac{1}{4}e^{16}-\frac{1}{4}e^0$$

۶) حجم ناحیه ایجاد شده بوسیله سطوح $y=1-z^2$ و $y=1-x^2$ و $y=0$ را بیابید. صرفاً نسبت به محور x ها (z ها) متقارن است.

$y=0$, $y=1-x^2$, $y=1-z^2$ $\Rightarrow$ $y=0$, $x=\pm1$, $\xrightarrow[y=0]{\text{}}z=\pm1$

$R=\{(x,y,z)\mid -1\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq 1-x^2,\ -\sqrt{1-y}\leq z\leq\sqrt{1-y}\}$

$$\int_{-1}^1\int_0^{1-x^2}\int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} dz\,dy\,dx$$

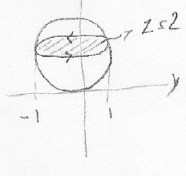
$$\int_{-1}^1\int_0^{1-x^2} 2\sqrt{1-y}\,dy\,dx \to \int_{-1}^1 -2(1-y)^{3/2}\times\frac{2}{3}\Big]_0^{1-x^2}dx \to \frac{-4}{3}\int_{-1}^1 (x^2)^{3/2}dx \to -\frac{4}{3}\times\frac{x^4}{4}\Big]_{-1}^1 \to = -\frac{1}{3}\times 2 = \left|-\frac{2}{3}\right| \to \frac{2}{3}$$

$$\int_{z=-1}^1\int_{y=0}^{1-z^2}\int_{x=-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} dx\,dy\,dz \to 2\sqrt{1-y} = -2(1-y)^{3/2}\times\frac{2}{3}\Big]_0^{1-z^2} \to -\frac{4}{3}z^3\Big]_{-1}^1 = -\frac{4}{3}\frac{z^4}{4}\Big]_{-1}^1 = \left|-\frac{2}{3}\right| = \frac{2}{3}$$

۷) شار نیروی $\vec F=(2xy+z)\vec i+y^2\vec j-(x+3y)\vec k$ روی سطح خارجی بسته متشکل از سطوح $2x+2y+z=6$ و $x=0$ و $y=0$ و $z=0$ را بیابید.

۸) درستی قضیه استوکس را برای تابع برداری $\vec F=\underbrace{3y\vec i}_{Q}+\underbrace{xz\vec j}_{P}+\underbrace{z\vec k}_{N}$ تحقیق کنید. C منحنی حاصل از تقاطع سطوح $z=x^2+y^2$ و $z=2$ مثبت...

$$\oint_C F\cdot dr = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right.$$



$0\leq\theta\leq 2\pi$

$-1\leq r\leq 1$

$x=r\cos\theta$

$y=r\sin\theta$

$z=2$

$\left|\frac{xy^2}{x^2+y^4}\right| \leq |x| \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq \delta$ ...

۹۱/۶/۷

۱) در پیوستگی تابع ، در مبدا ، بحث کنید

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^2}{x^2+y^4} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{xy^2}{x^2+y^4}\right)=\lim_{x\to 0} 0=0,\quad \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{xy^2}{x^2+y^4}\right)=\lim_{y\to 0} 0=0$$

$$y=mx \rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{x(m^2x^2)}{x^2+(m^4x^4)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3m^2}{x^2(1+m^4x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{xm^2}{1+m^4x^2}=0$$

$$\lim_{y=mx^2}\lim_{x\to 0}\frac{x(m^2x^4)}{x^2+(m^4x^8)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^5m^2}{x^2(1+m^4x^6)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3m^2}{1+m^4x^6}=0$$ پیوسته است

$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ \forall(x,y)\in D_f,\ 0<\|(x,y)-(0,0)\|<\delta$

$\sqrt{x^2+y^2}<\delta \rightarrow \left|\frac{xy^2}{x^2+y^4}-0\right|<\varepsilon$

$$\frac{|x||y^2|}{|x^2|+|y^4|}\leq|y|\leq\sqrt{x^2+y^2}<\delta=\varepsilon$$

۲) اگر $z=\frac{1}{y}f(x-y)$ حاصل $z+yz_x+yz_y$ را بیابید!

$$\frac{1}{y}f(x-y)+y\underbrace{\left(\frac{1}{y}f'(x-y)\right)}_{z_x}+y\underbrace{\left(-\frac{1}{y^2}f(x-y)+\frac{1}{y}(-1)f'(x-y)\right)}_{z_y}=0$$

۳) از تابع $z=1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$ در جهت مماس بر منحنی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ در نقطه $\left(\frac{a}{\sqrt2},\frac{b}{\sqrt2}\right)$ مشتق بگیرید.

$$f(x,y,z)=1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-z=0 \rightarrow \nabla f=\left(\frac{-2x}{a^2},\frac{-2y}{b^2},-1\right) \rightarrow g:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \rightarrow \nabla f=\left(\frac{-2x}{a^2},\frac{-2y}{b^2},-1\right) \rightarrow u=\frac{\nabla g}{|\nabla g|}$$

$$\begin{matrix}x=a\cos t\\ y=b\sin t\end{matrix} \rightarrow r(t)=(a\cos t,b\sin t) \rightarrow \left(\frac{a}{\sqrt2},\frac{b}{\sqrt2}\right) \rightarrow t=\frac{\pi}{4}$$

بردار مماس $\rightarrow T=\frac{r'(t)}{|r'(t)|}=\frac{(-a\sin t,b\cos t)}{\sqrt{a^2\sin^2t+b^2\cos^2t}} \rightarrow T=\frac{\left(-\frac{a}{\sqrt2},\frac{b}{\sqrt2}\right)}{\sqrt{\frac12(a^2+b^2)}} \rightarrow \nabla f=\left(\frac{-2}{a\sqrt2},\frac{-2}{b\sqrt2}\right)$ در نقطه

$$D_uf=\left(\frac{-2}{a\sqrt2},\frac{-2}{b\sqrt2}\right)\cdot\frac{\left(\frac{-a}{\sqrt2},\frac{-b}{\sqrt2}\right)}{\sqrt{\frac12(a^2+b^2)}} \Longrightarrow =\frac{1+1}{\frac{1}{\sqrt2}\sqrt{a^2+b^2}}$$

۴) نقاط ماکسیمم یا مینیمم تابع $z=x^2+2xy+3y^3$ را بیابید!

$$\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=2x+2y=0\\ \frac{\partial z}{\partial y}=2x+9y^2=0\end{cases} \xrightarrow{\times -1} \begin{cases}-2x-2y=0\\ 2x+9y^2=0\end{cases} \Longrightarrow -2y+9y^2=0 \rightarrow y(-2+9y)=0 \rightarrow \begin{cases}y=0,\ x=0\\ y=\frac29,\ x=-\frac29\end{cases}$$

نقاط بحرانی $\left(-\frac29,\frac29\right)$ و $(0,0)$

$r=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2$ ، $s=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2$ ، $t=\frac{\partial^2 z}{\partial y}=18y$

$$(0,0)\rightarrow\begin{cases}r=2\\ s=2\\ t=18(0)=0\end{cases} \Rightarrow rt-s^2=0-2^2=\underline{-4<0}$$ زین اسب

$$\left(-\frac29,\frac29\right)\rightarrow\begin{cases}r=2\\ s=2\\ t=18\left(\frac29\right)=4\end{cases} \Longrightarrow rt-s^2=8-2^2=\underline{4>0}$$ مینیمم نسبی

۷) حجم ناحیه درون استوانه $x^2+y^2=2y$ که توسط کره $x^2+y^2+z^2=4$ محدود شده است را بیابید.

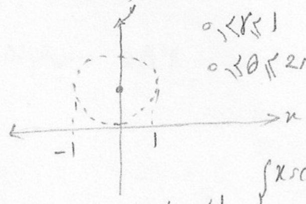
نسبت به محور z ها متقارن است و تصویر را روی محور xy بدست می‌آوریم.

$$\begin{cases} x^2+2y^2=2y \rightarrow x^2+y^2-2y=0 \rightarrow x^2+y^2-2y+1=1 \\ x^2+(y-1)^2=1 \end{cases}$$

دایره‌ای به مرکز (0,1) و شعاع 1

$$\rightarrow z=\pm\sqrt{4-(x^2+y^2)}$$

$$z^2=4-(x^2+y^2)$$



$0\leqslant r\leqslant 1$

$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$

$-1\leqslant x\leqslant 1$

$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y-1=r\sin\theta \end{cases}$$

قطبی

$$(y-1)^2=1-x^2 \rightarrow y-1=\pm\sqrt{1-x^2} \rightarrow y=1\pm\sqrt{1-x^2}$$

$$R=\left\{(x,y,z)\,\middle|\,-1\leqslant x\leqslant 1,\ 1-\sqrt{1-x^2}\leqslant y\leqslant 1+\sqrt{1-x^2},\ -\sqrt{4-(x^2+y^2)}\leqslant z\leqslant +\sqrt{4-(x^2-y^2)}\right\}$$

$$\int_{-1}^{1}\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{1+\sqrt{1-x^2}}\int_{-\sqrt{4-(x^2+y^2)}}^{+\sqrt{4-(x^2-y^2)}} dz\,dy\,dx$$

$$R=\left\{(r,\theta,z)\,\middle|\,0\leqslant r\leqslant 1,\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,\ -\sqrt{4-(x^2+y^2)}\leqslant z\leqslant +\sqrt{4-(x^2+y^2)}\right\}$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{-\sqrt{4-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}} r\,dz\,dr\,d\theta \rightarrow =\left(\int_0^{2\pi}d\theta\right)\left(\int_0^1 rz\Big]_{-\sqrt{4-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}} dr\right)=(2\pi)\left(\int_0^1 2r\sqrt{4-r^2}\right)dr$$

$$\Rightarrow (2\pi)\left(-4-r^2\right)^{3/2}\times\frac{2}{3}\Big]_0^1=\frac{-4}{3}\times\left[3^{3/2}-4^{3/2}\right]$$

۸) کار انجام شده توسط میدان $\vec{F}=(e^{\sin x}+4y^2-1)\vec{i}+(4x+e^{y^2})\vec{j}$ روی مسیر $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ در جهت مثلثاتی را بدست آورید.

به نام خدا

سئوالات امتحانی پایان نیمسال دوم سال تحصیلی 90-1389

دانشکده فنی واحد تهران جنوب

نام درس : ریاضی عمومی 2 — نام استاد: کلیه اساتید — کد درس: 6503 — گروه آموزشی: ریاضی

تاریخ امتحان: 91/6/6 — مدت امتحان: 2 ساعت — [illegible] جزوه باز ☐ جزوه بسته ■ جدول موارد [illegible]

استفاده از ماشین حساب: مجاز ☐ غیر مجاز ■ — تذکر: برگه فرمول ضمیمه است ☐ نیست ■

بارم	سئوالات
[illegible] نمره	1- در پیوستگی تابع زیر در مبدا بحث کنید. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$
[illegible] نمره	2- اگر $z=\dfrac{1}{y}f(x-y)$ حاصل $z+yz_x+yz_y$ را بیابید.
2 نمره	3- از تابع $z=1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}$ در جهت مماس بر منحنی $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ در نقطه $(\dfrac{a}{\sqrt2},\dfrac{b}{\sqrt2})$ مشتق بگیرید.
2 نمره	4- نقاط ماکزیمم یا می نیمم تابع $z=x^2+2xy+3y^2$ را بیابید.
2 نمره	5- انتگرال زیر را بعد از تعویض ترتیب انتگرالگیری حل کنید. $\int_0^2\int_{1+y^2}^{5} ye^{(x-1)^2}\,dx\,dy$
2.5 نمره	6- حجم ناحیه ایجاد شده بو سیله سطوح $y=1-z^2$ و $y=1-x^2$ و $y=0$ را بیابید.
2.5 نمره	7- شار نیروی $\vec F=(2xy+z)\vec i+y^2\vec j-(x+2y)\vec k$ روی سطح خارجی بسته متشکل از سطوح $2x+2y+z=6$ و $x=0$ و $y=0$ و $z=0$ بیابید.
3 نمره	8- درستی قضیه استوکس را برای تابع برداری $\vec F= +y\,\vec i+x\vec j+z\vec k$ تحقیق کنید که C منحنی حاصل از تقاطع سطوح $z=x^2+y^2$ و $z=2$ می باشد.

■ کار کلاسی و میان ترم جمعا 2 نمره

سربلند باشید

[illegible]