$$F = k\frac{q_1 q_2}{R^2} \qquad k \simeq 9\times10^{9}\ \frac{N.m^2}{c^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

- اگر دو بار نقطه‌ای هر یک به اندازه‌ی یک کولن در فاصله‌ی یک متری از هم قرار دهیم، به یک دیگر 9×10^{9} نیوتون نیرو وارد می کنند

توان 2 موجود در مخرج در واقع تا 15 رقم اعشار دقت دارد

نیروی الکتریکی 10^{38} بار بزرگتر از گرانش است

1- بار کوانتیده است:

$q = m.e \qquad m \in \mathbb{Z}$

$e = 1.6\times10^{-19}\ c$

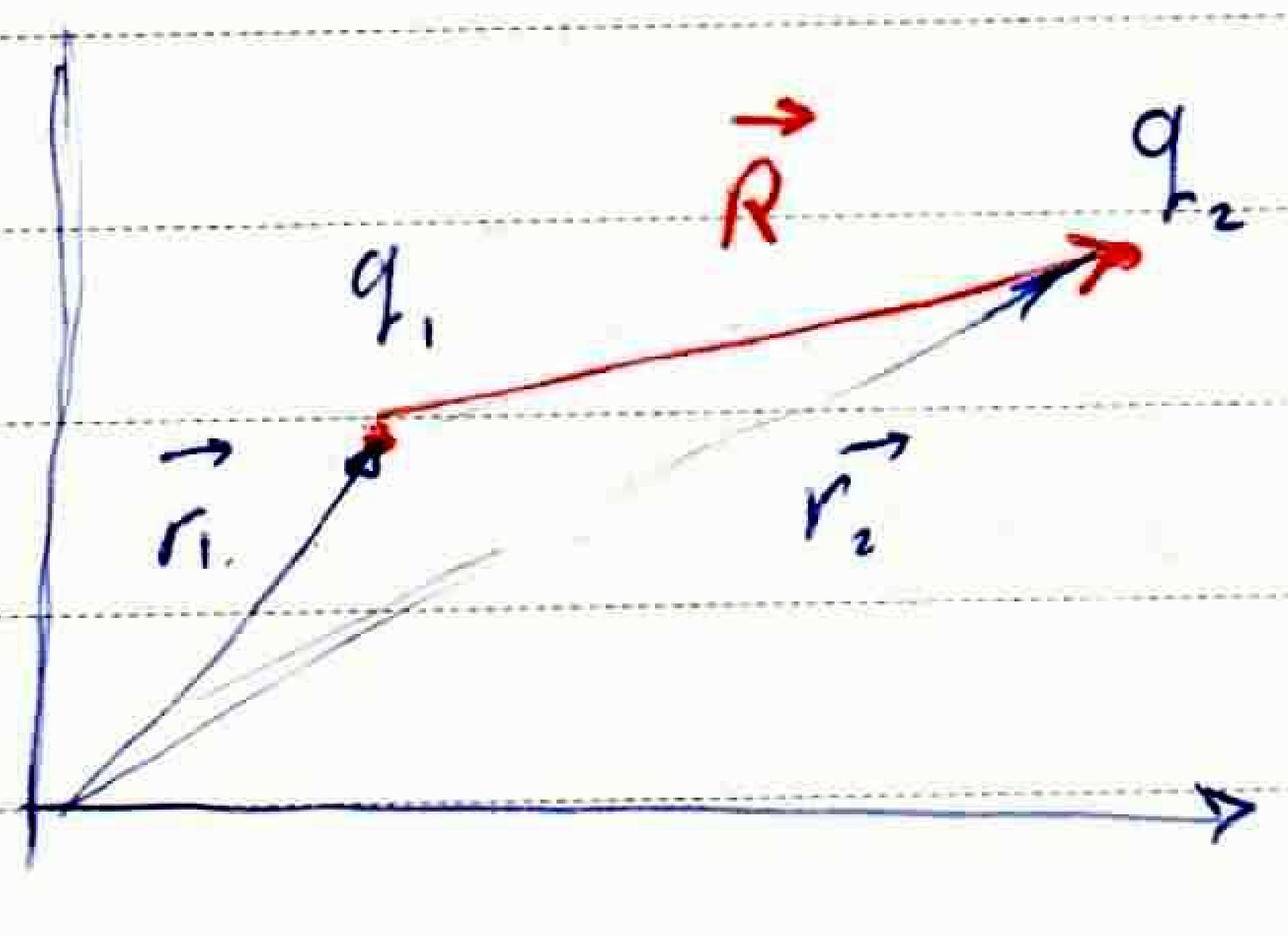
دقیق تر : 1.6021917×10^{-9}

2- بار پایسته است

$$K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \Rightarrow \varepsilon_0 \simeq 8.8542\times10^{-12} \qquad k = 8.9875\times10^{9}$$

نیرویی که دو بار به یکدیگر وارد می کنند در راستای خط واصل دو بار است. اگر دو بار هم علامت باشند، نیرو دافعه و اگر مختلف العلامت باشند نیرو جاذبه است.

$$\vec{F} = k\frac{q_1 q_2}{R^2}\hat{r} = K\frac{q_1 q_2}{R^3}\vec{R}$$

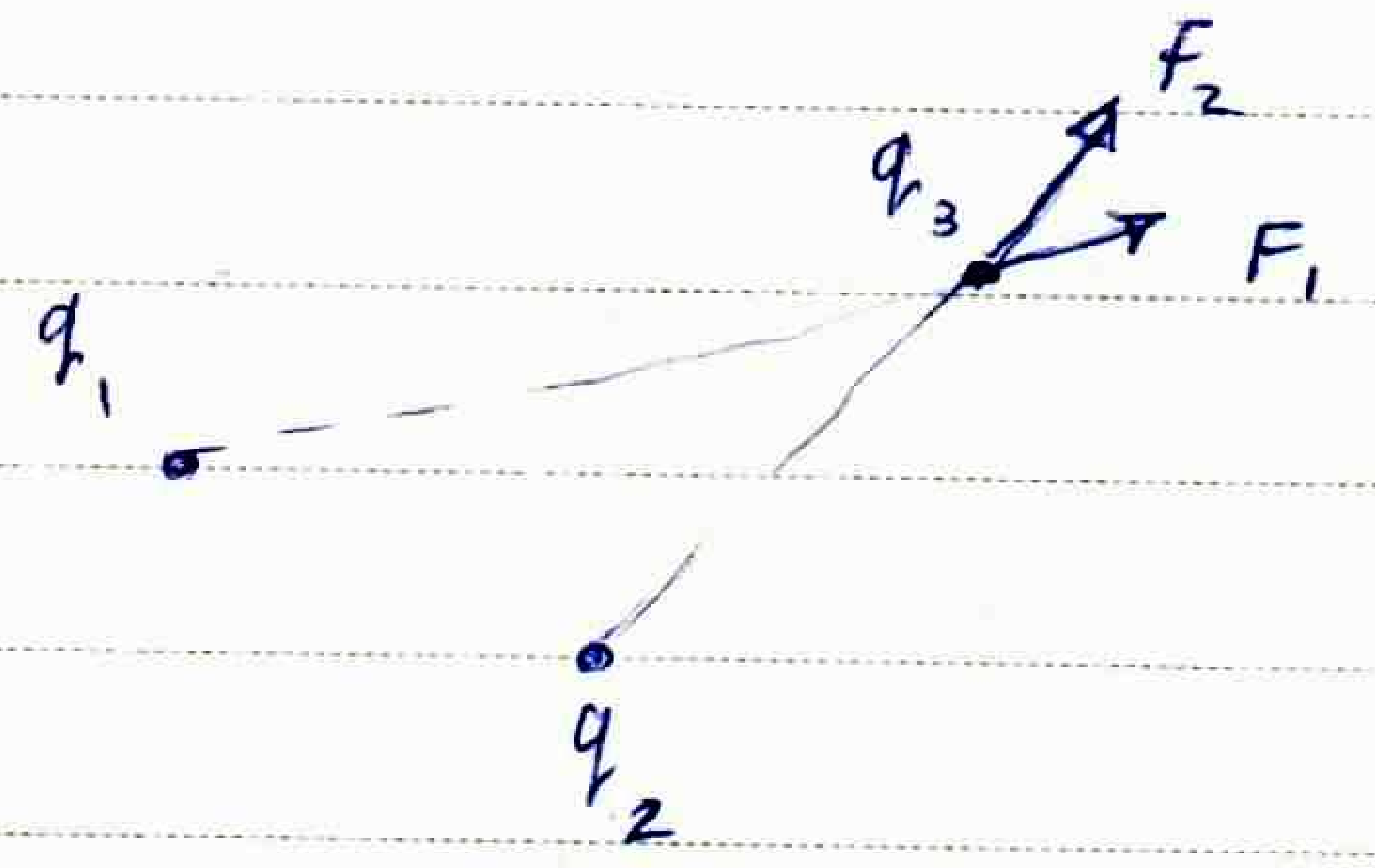


$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{|\vec{r_1}-\vec{r_2}|^3}(\vec{r_2}-\vec{r_1})$$

Subject :

Date

اصل برهم نهی :



$$\vec{F}_T = \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23}$$

برای n بار داریم :

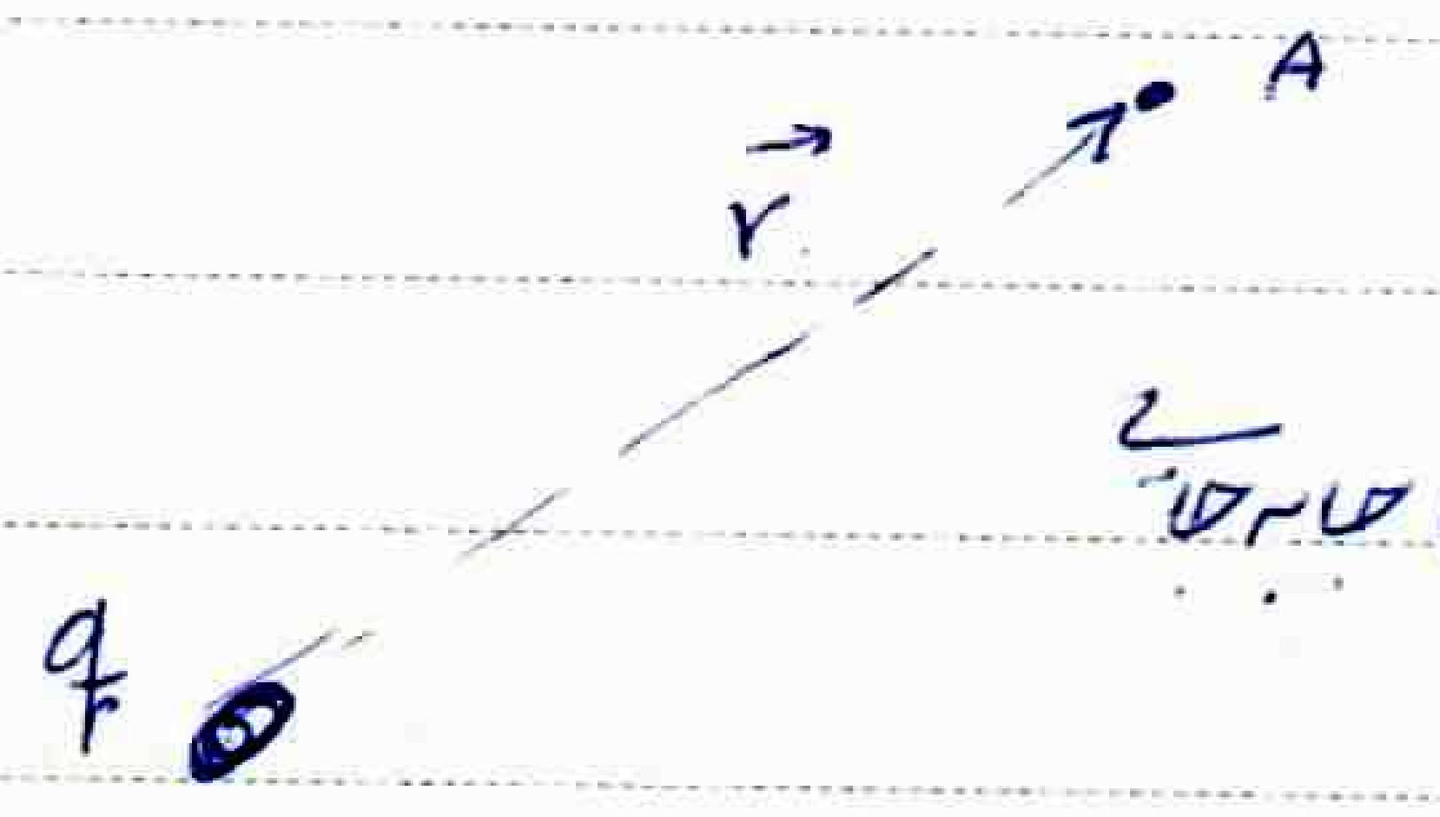
$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i q'}{|\vec{r_i}-\vec{r}'|^3}(\vec{r}'-\vec{r_i})$$

میدان الکتریکی :

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{\vec{q}}$$

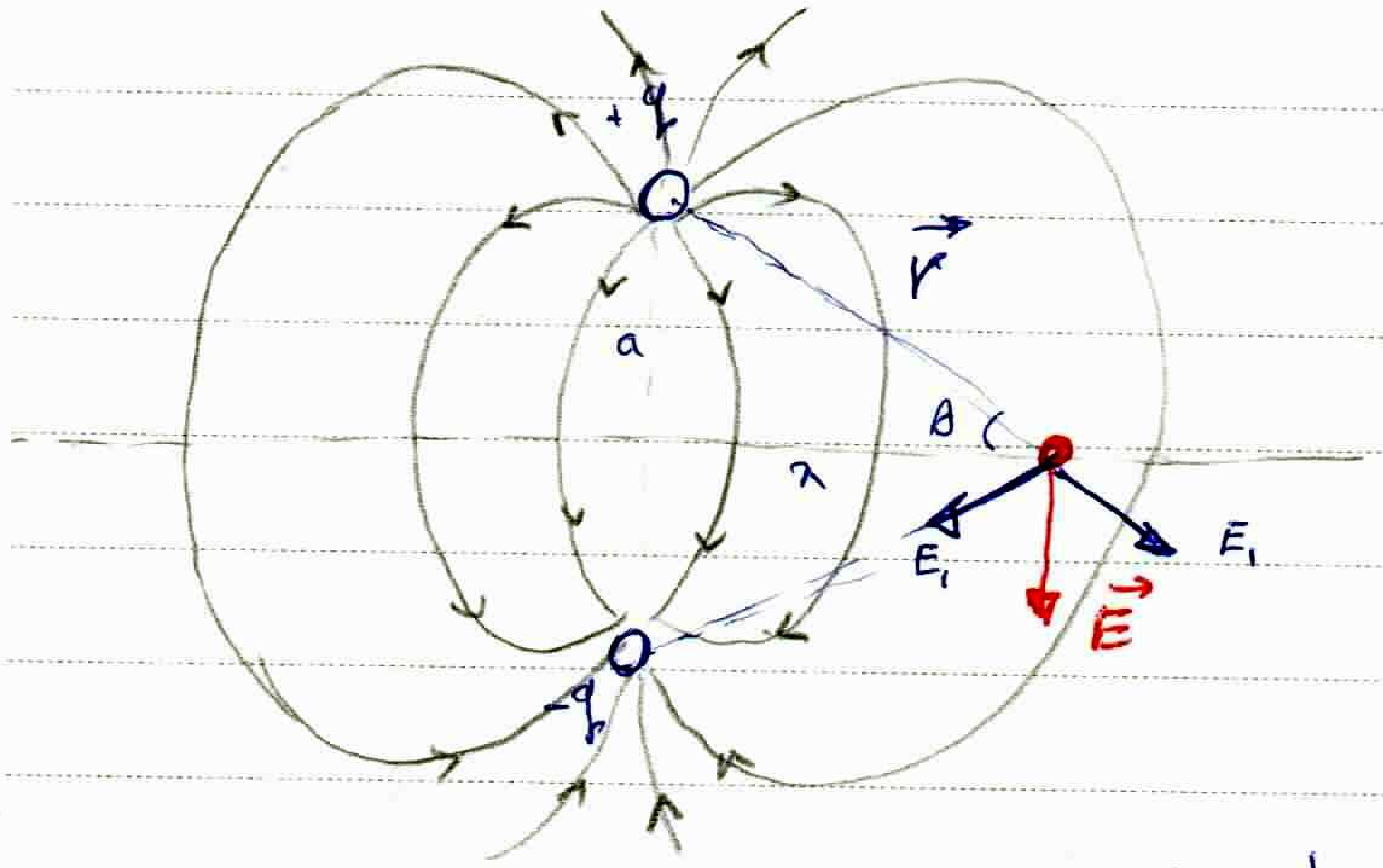
q : بار آزمون (که بسیار کوچک است)

خاصیتی که یک بار در نقطه‌ای از فضا ایجاد می‌کند



اگر بار q جابه‌جا شود، مدتی طول می‌کشد تا اثر این جابه‌جایی به A برسد

مثال 1) میدان دوقطبی الکتریکی



$$r^2 = a^2 + x^2$$

$$E = 2\sin\theta \cdot E_1$$

$$= 2\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{a^2+x^2}\frac{a}{(a^2+x^2)^{1/2}}$$

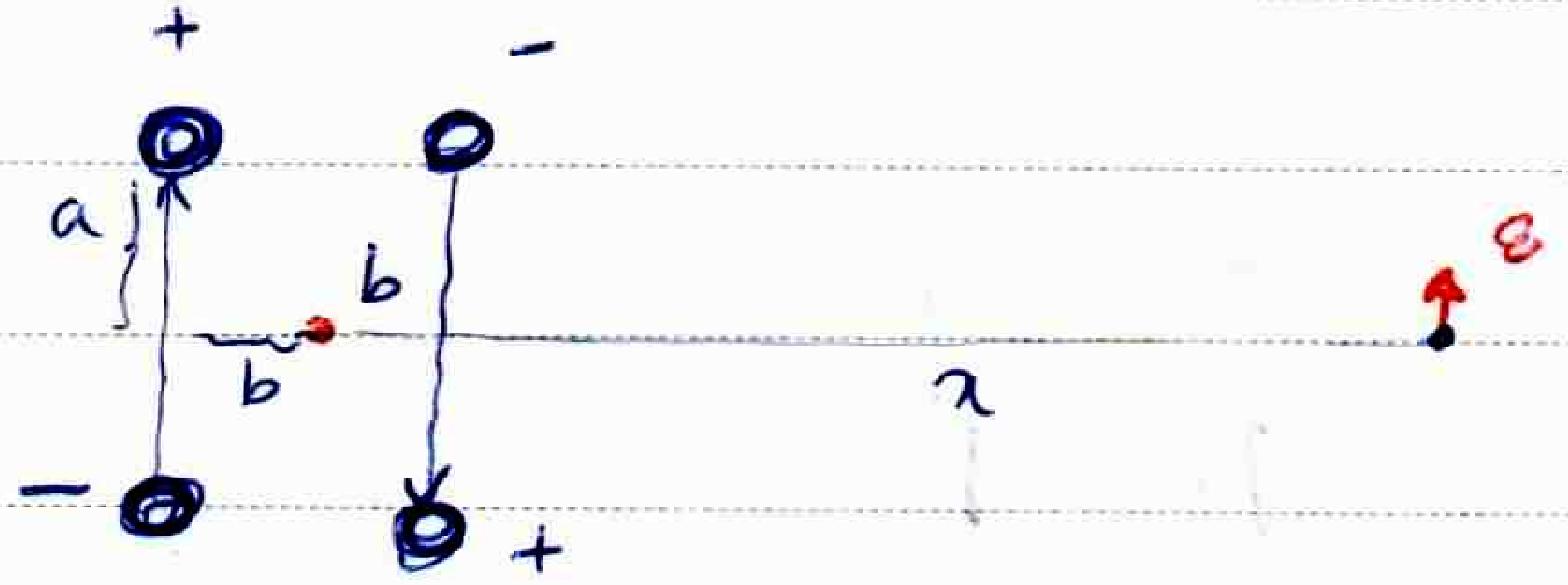
P = 2qa : گشتاور دوقطبی

Subject :
Date

$$\Rightarrow \quad E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{P}{(a^2+x^2)^{3/2}}$$

$$x \gg a \qquad \Rightarrow \quad E \simeq \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{P}{x^3}$$

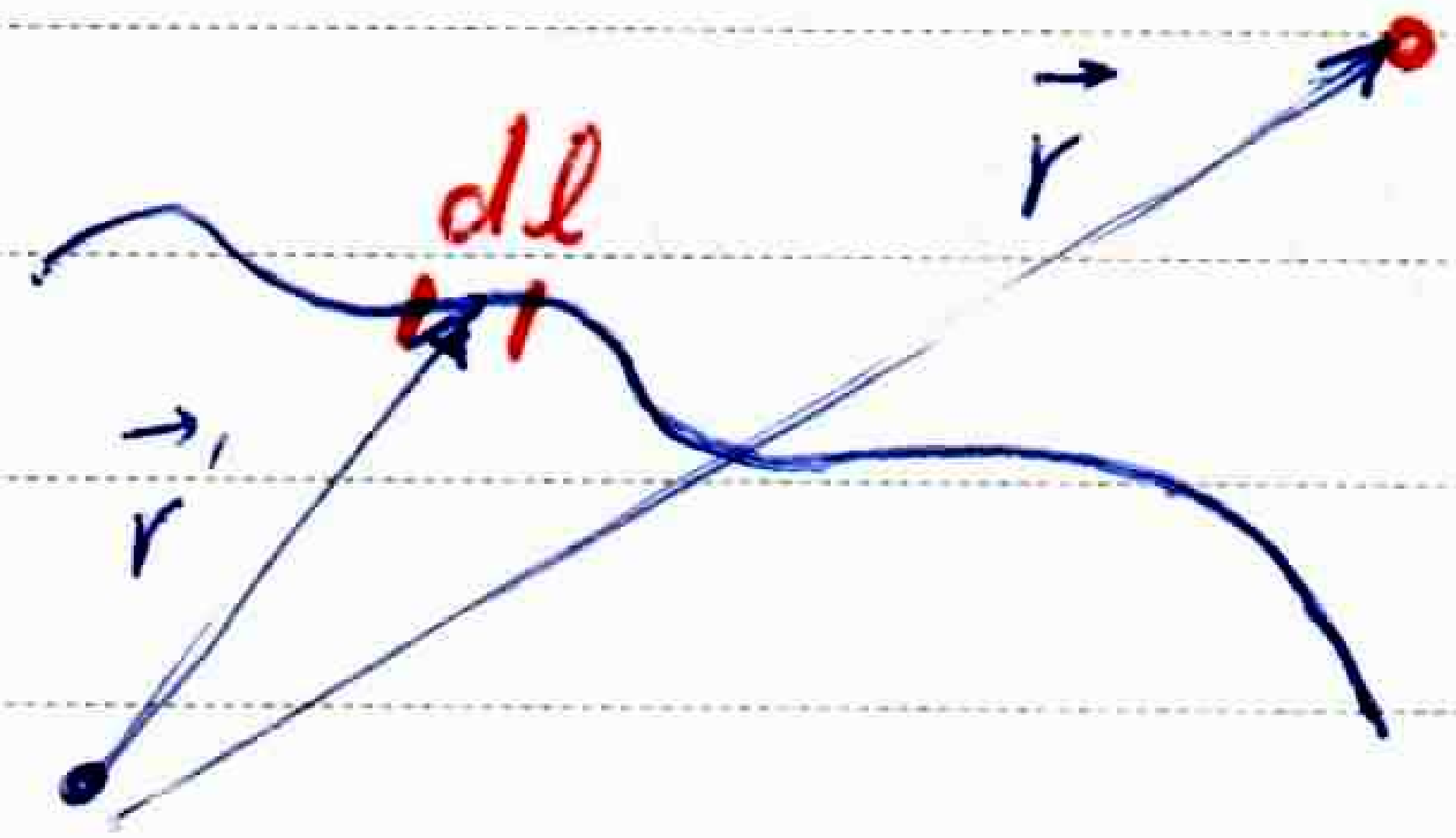
بار با تغییر فاصله نسبت عکس دارد (اگر بارهای مثبت و منفی هم دیگر را خنثی نکنند)



$$\varepsilon = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{(2qa)}{[a^2+(x+b)^2]^{3/2}} - \frac{2qa}{[a^2+(x-b)^2]^{3/2}}\right]$$

اگر داشته باشیم $x \gg a$ ، با بسط دادن حاصل می‌شود که اندازه‌ی میدان با $\frac{1}{x^4}$ رابطه دارد.

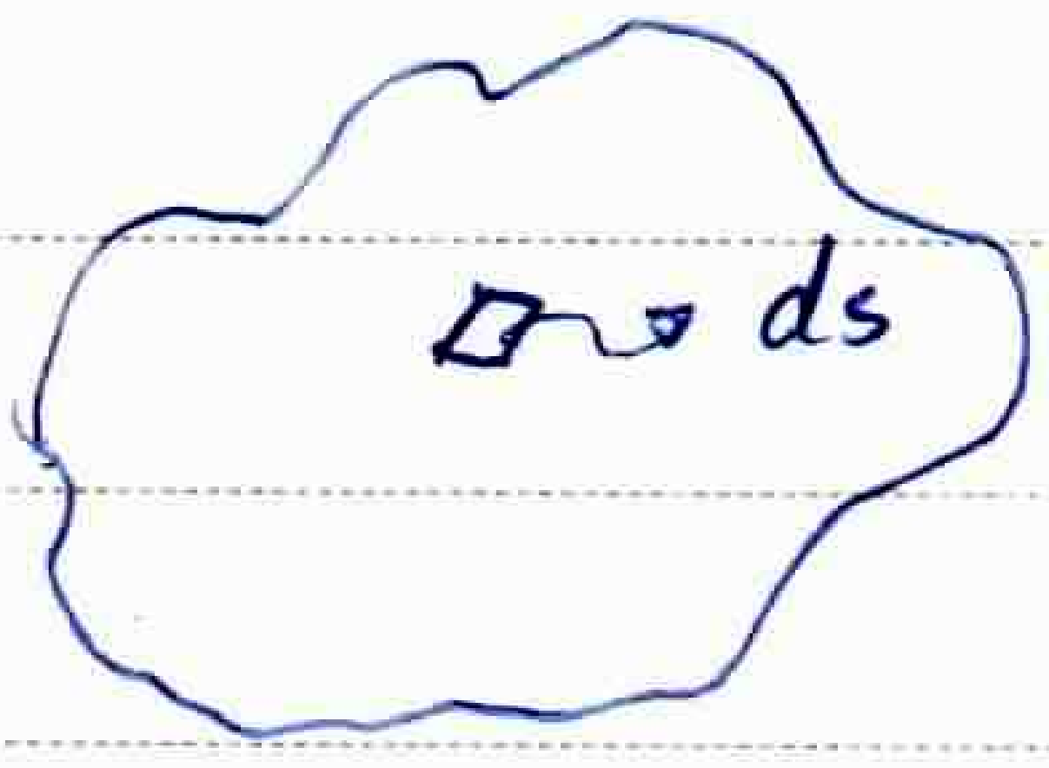
محاسبه‌ی میدان توزیع پیوسته :



1) $\lambda = \frac{q}{l}$ چگالی بار خطی

dl (تعداد بار $= \lambda\, dl$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} \frac{\lambda\, dl}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\,(\vec{r}-\vec{r}')$$



2) $\sigma = \frac{q}{A} \qquad \Rightarrow dq = \sigma\, ds$

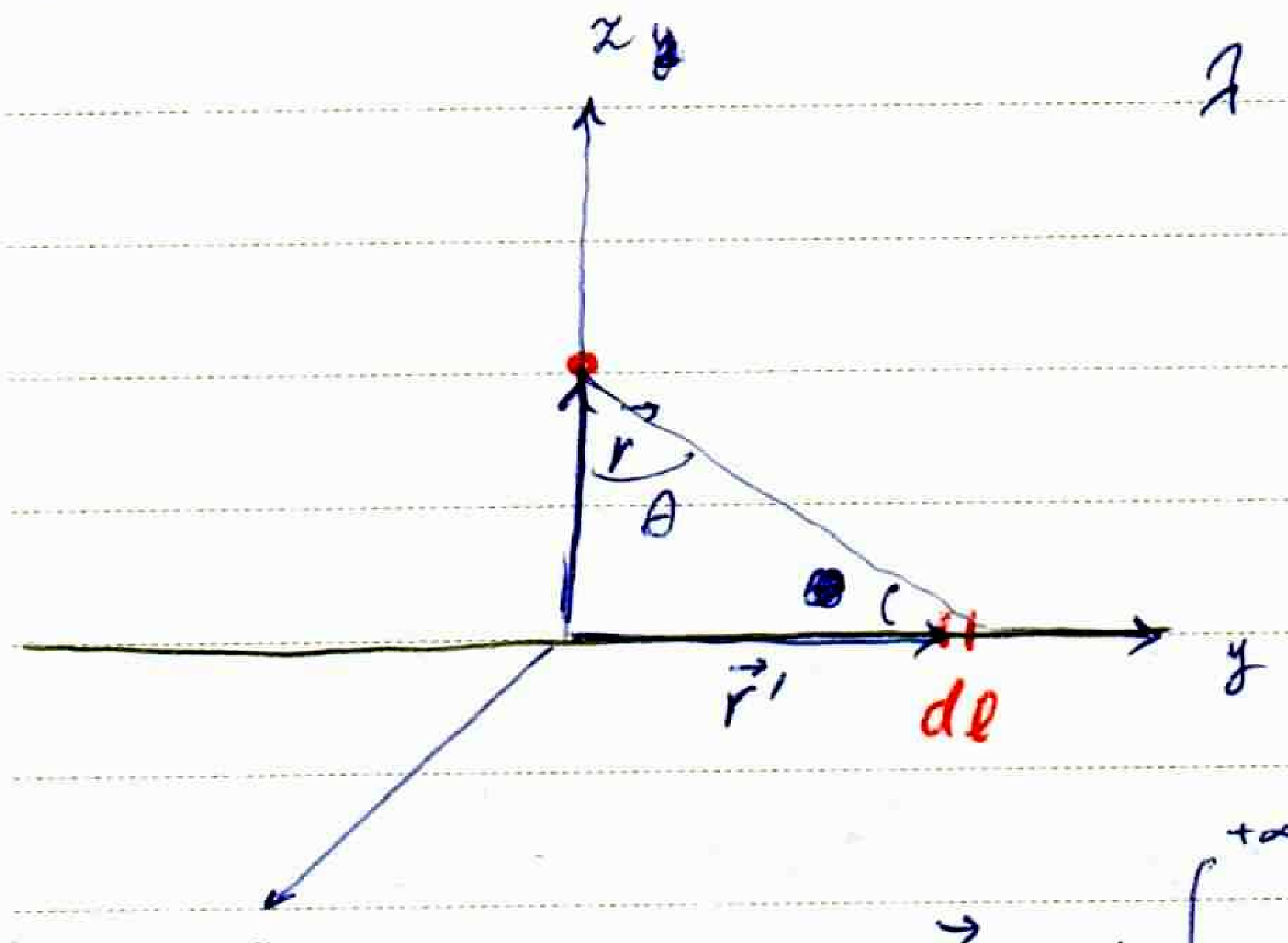
$$\Rightarrow \quad \varepsilon = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\sigma\, ds}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\,(\vec{r}-\vec{r}')$$

Subject:
Date

$$\rho = \frac{q}{v} \Rightarrow dq = \rho\, dv \qquad (3$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho\, dv}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} (\vec{r}-\vec{r}')$$

مثال یک سیم از $-\infty$ تا $+\infty$ با چگالی بار λ



$$\vec{r} = z\hat{k} \qquad \vec{r}' = y\vec{j}$$

$$|\vec{r}-\vec{r}'|^2 = z^2 + y^2$$

$$\vec{r}-\vec{r}' = z\hat{k} - y\hat{j}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy\, \lambda}{(z^2+y^2)^{3/2}} (z\hat{k} - y\hat{j})$$

$$\vec{E}_x = 0$$

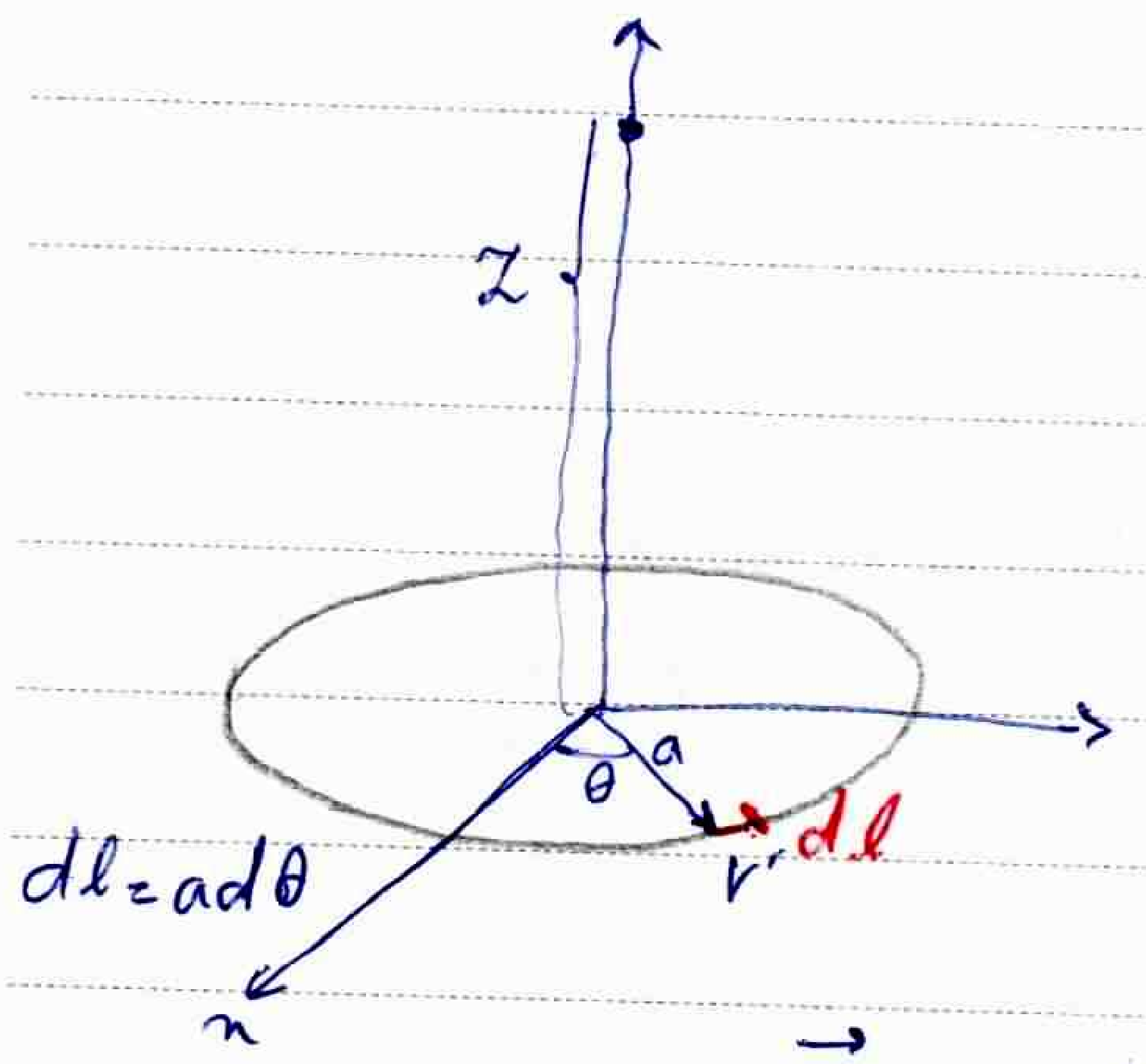
$$E_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy\, \lambda}{(z^2+y^2)^{3/2}} (z\hat{k} - y\hat{j})\, \sin\theta$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y\, dy\, \lambda}{(z^2+y^2)^{3/2}} = 0$$

$$E_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z\, dy\, \lambda}{(z^2+y^2)^{3/2}} = \frac{2\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{z}$$

تغییر متغیر: $\frac{y}{z} = \operatorname{tg}\theta$

مثال) یک حلقه به چگالی بار λ



$$\vec{r} = z\hat{k}$$

$$\vec{r}' = a\,c\theta\,\hat{i} + a\,s\theta\,\hat{j}$$

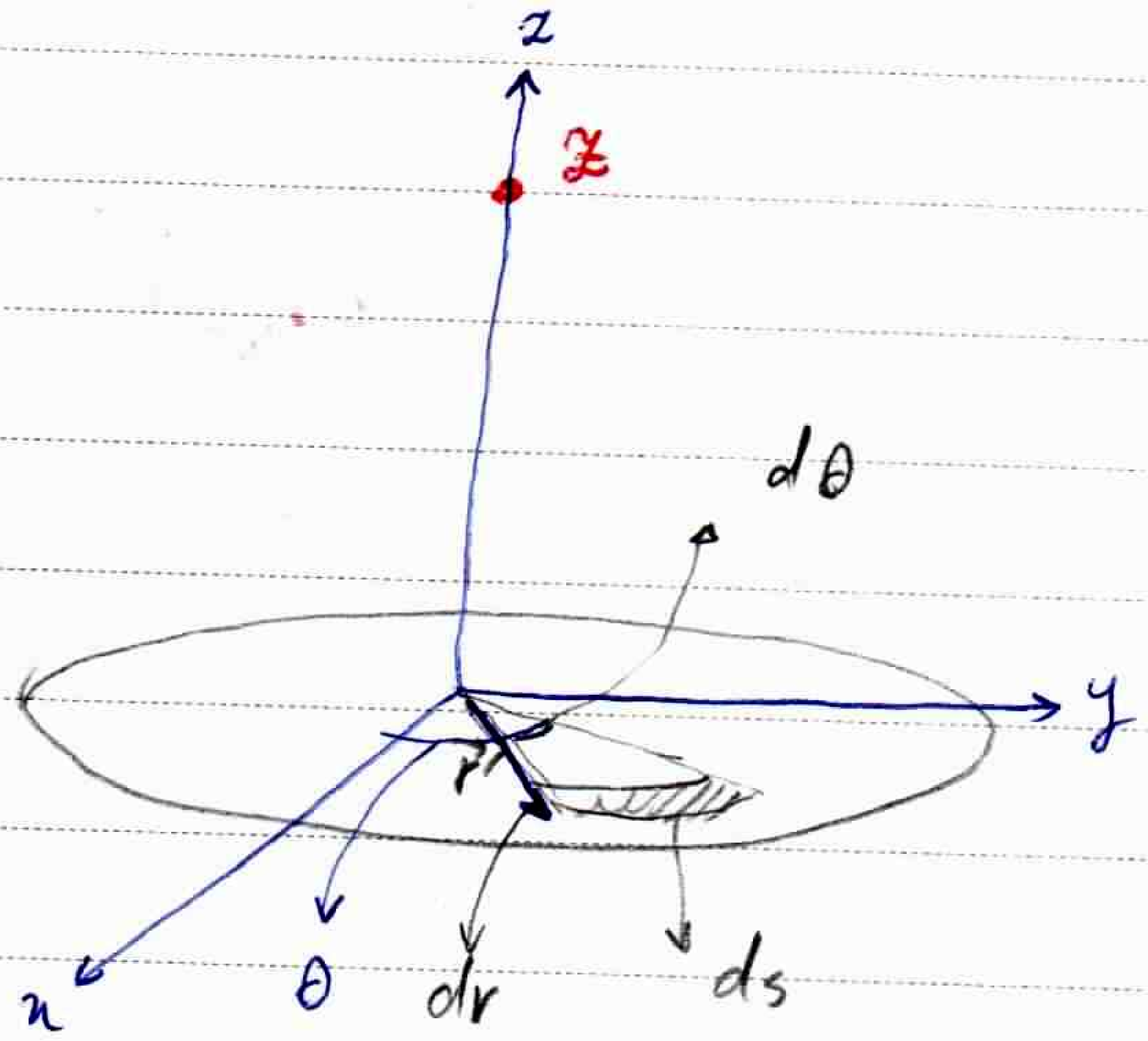
$$\vec{r} - \vec{r}' = z\hat{k} - a\,c\theta\,\hat{i} - a\,s\theta\,\hat{j}$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = z^2 + a^2$$

$$\Rightarrow \vec{\mathcal{E}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\frac{\lambda a\,d\theta}{(z^2+a^2)^{3/2}}\left(z\hat{k} - \underset{0}{a\,c\theta\,\hat{i}} - \underset{0}{a\,s\theta\,\hat{j}}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{\mathcal{E}} = \frac{\lambda a z \times 2\pi}{(z^2+a^2)^{3/2} \times 4\pi\varepsilon_0} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{z}{(z^2+a^2)^{3/2}}$$

مثال) یک دیسک به شعاع a ، چگالی بار σ



$$\vec{r} = z\hat{k}$$

$$\vec{r}' = r'c\theta\,\hat{i} + r's\theta\,\hat{j}$$

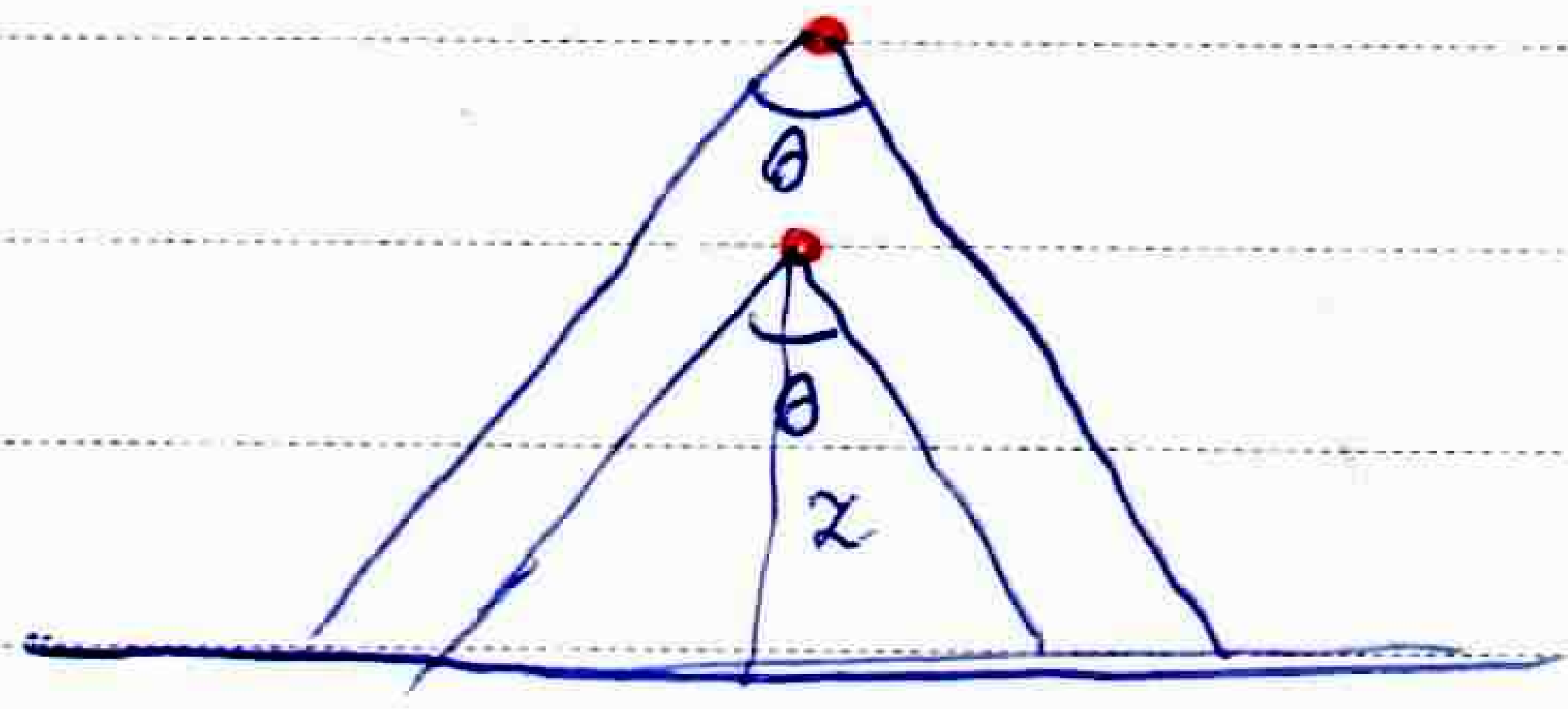
$$\left(|\vec{r} - \vec{r}'|\right)^2 = z^2 + r'^2$$

$$\sigma\,ds = r'dr'd\theta\,\sigma$$

$$\Rightarrow \mathcal{E} = E_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^a\int_0^{2\pi}\frac{z\sigma\,r'dr'd\theta}{(z^2+r^2)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow E_z = \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0}\left[\frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{z^2+a^2}}\right]$$

اگر $a \to \infty$ ، آنگاه میدان به میدان صفحه تخت با مقدار $\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ تبدیل می‌شود.



توجیه : برای یک خط از بار داریم :

اگر فاصله زیاد شود، تعداد بارها به صورت خطی زیاد می شود ولی اثر هر بار به صورت $\frac{1}{z^2}$ کم می شود، پس میدان با $\frac{1}{z}$ ارتباط دارد.

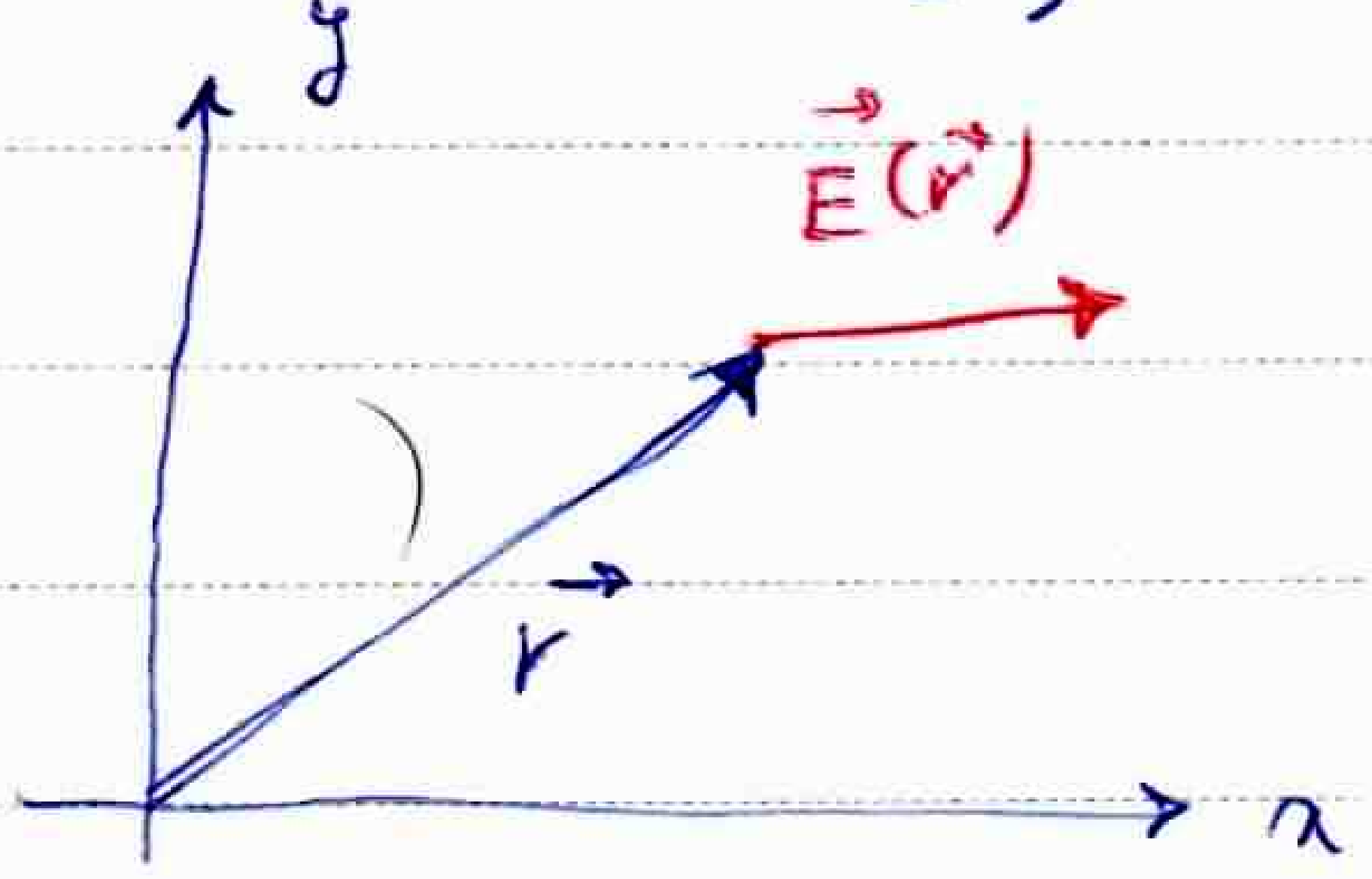
اما برای دیسک، با افزایش z، مقدار بار با z^2 ارتباط دارد، اثر هر بار هم با $\frac{1}{z^2}$ ارتباط دارد. پس میدان یکنواخت است.

فصل دوم : قانون گاوس

- میدان الکتریکی یک میدان برداری است. یعنی در هر نقطه از فضا، یک بردار میدان الکتریکی داریم.

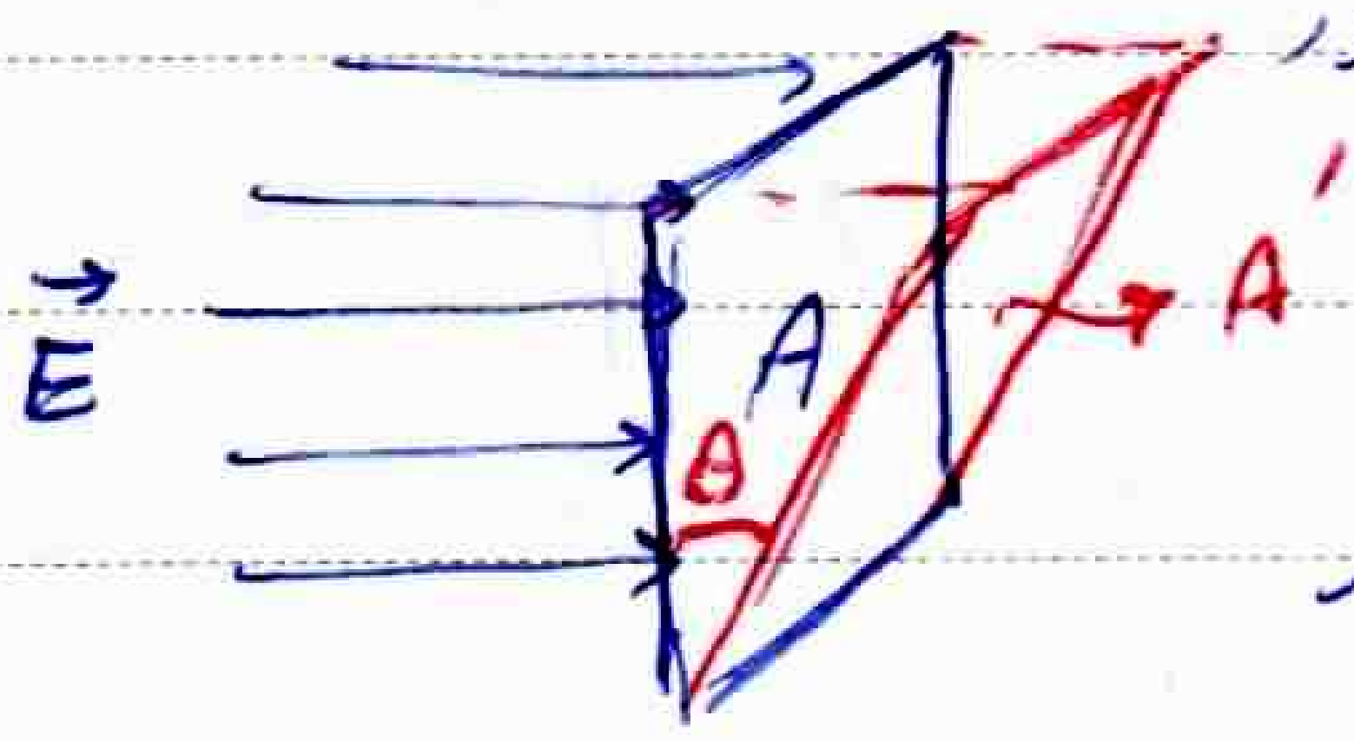
(میدان می‌تواند اسکالر باشد. مانند دما)

میدان در نقطه‌ی $\vec{r}$ ، $\vec{E}(\vec{r})$



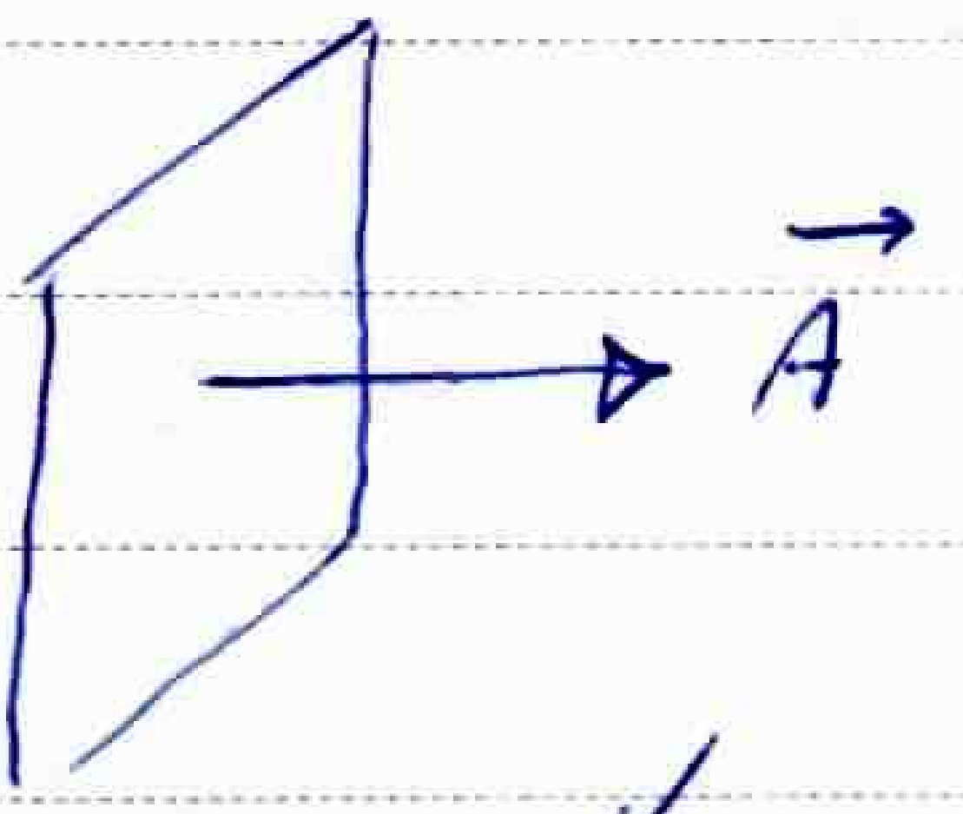
* شار (Flow)

میدان را در یک ناحیه‌ی کوچک در نظر می‌گیریم که به طور تقریبی یکنواخت است.
سطحی به مساحت A را عمود بر میدان در نظر می‌گیریم. داریم



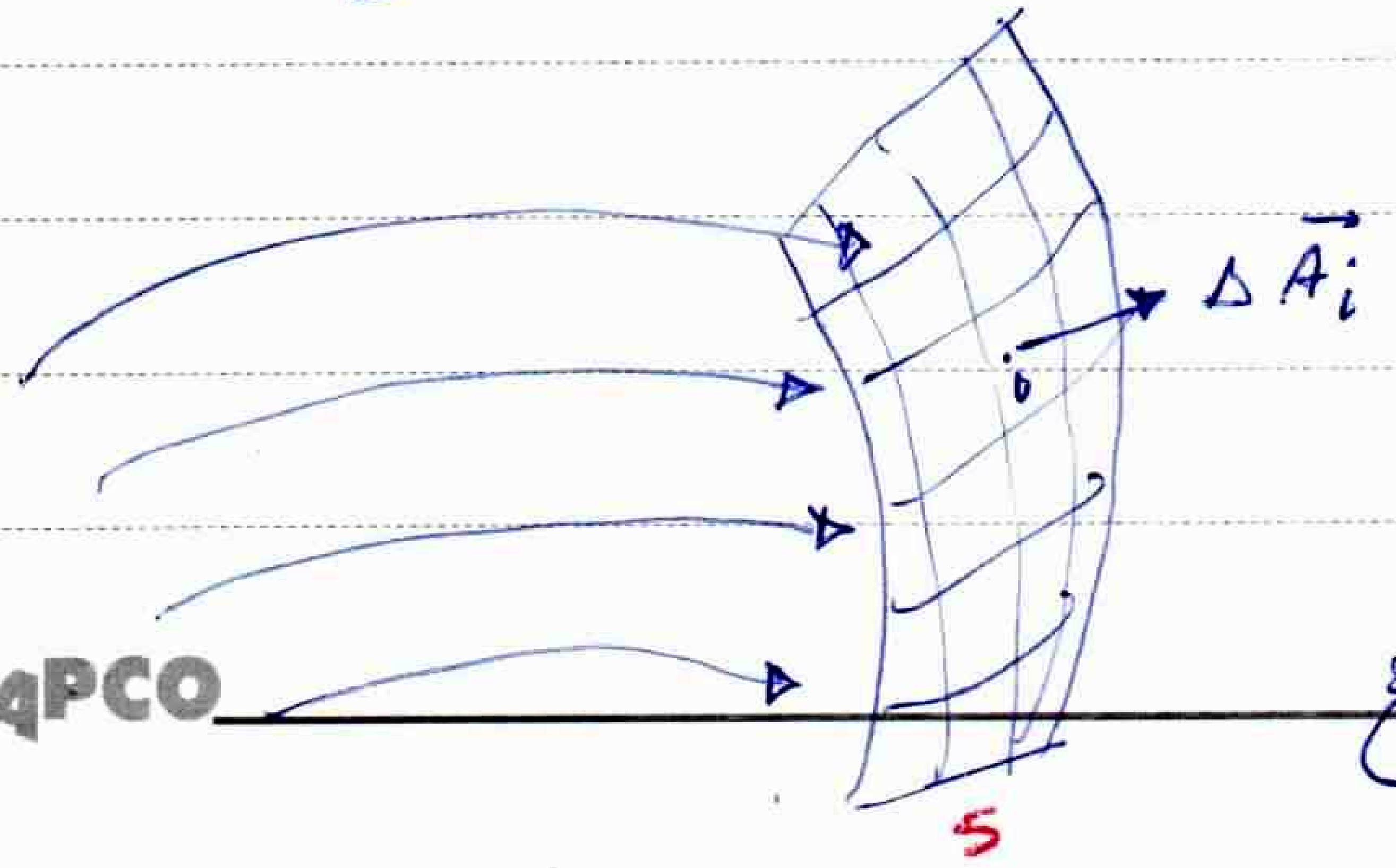
شار گذرنده از سطح A = $EA = \phi$

شار گذرنده از سطح A' $EA'\cos\theta = \phi$



بردار $\vec{A}$ را این گونه تعریف می‌کنیم که اندازه‌ی آن برابر مساحت صفحه و جهت آن عمود بر صفحه است.

شار گذرنده از سطح = $\vec{E}\cdot\vec{A} = \phi$

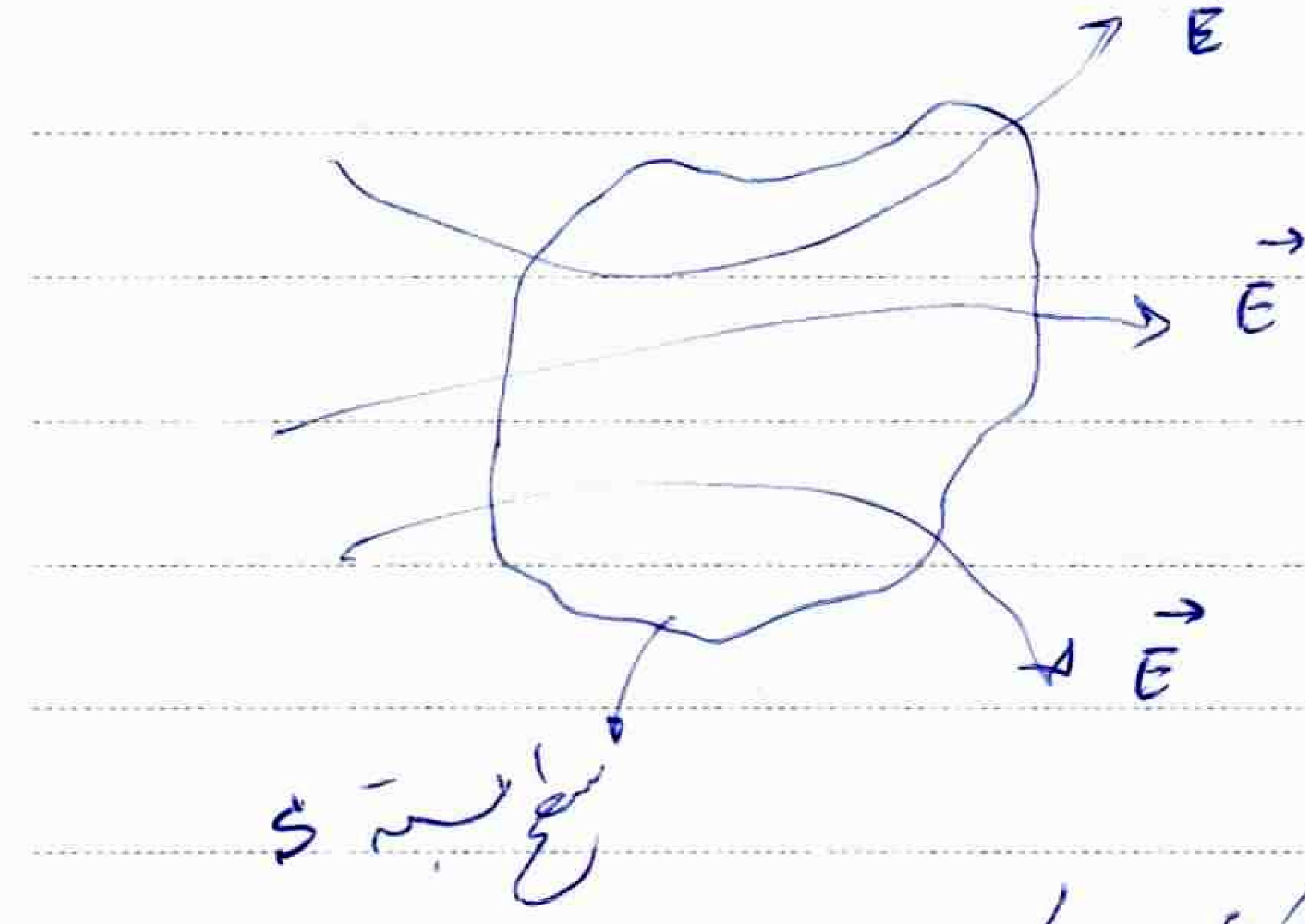


$$\Phi \simeq \sum_{i=1}^{N} E(\vec{r}_i)\cdot\Delta\vec{A}_i$$

$$\Phi_s = \int_S \vec{E}(\vec{r})\cdot d\vec{A}$$

شار گذرنده از سطح

اگر سطح باز باشد، این انتگرال ، دوگانه خواهد بود.

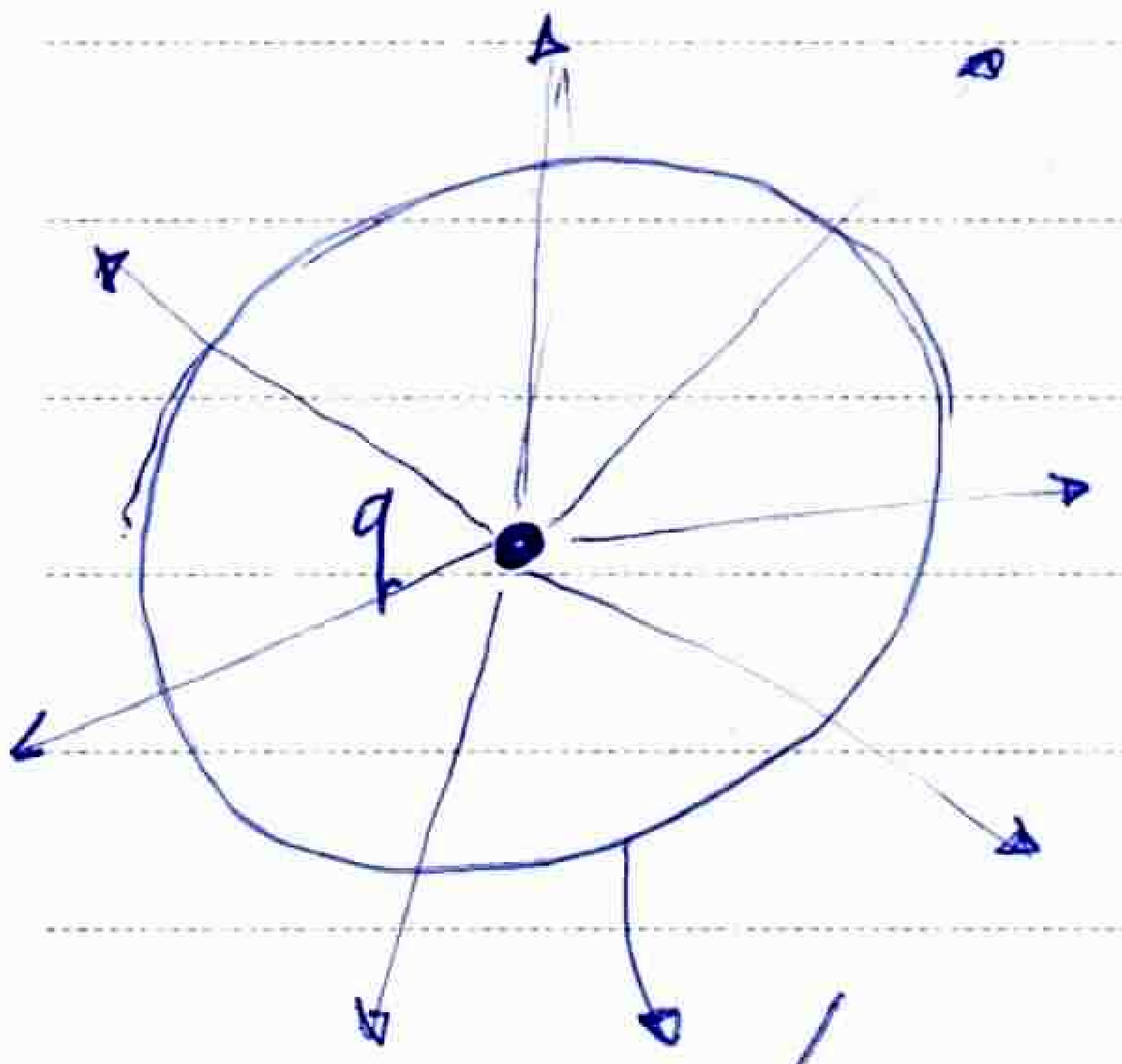


قانون گاوس (Gauss Law)

$$\oint_s \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}$$

q_{in} : بار داخل سطح

این قانون هم ارز (یا قوی‌تر از) قانون کولن است.



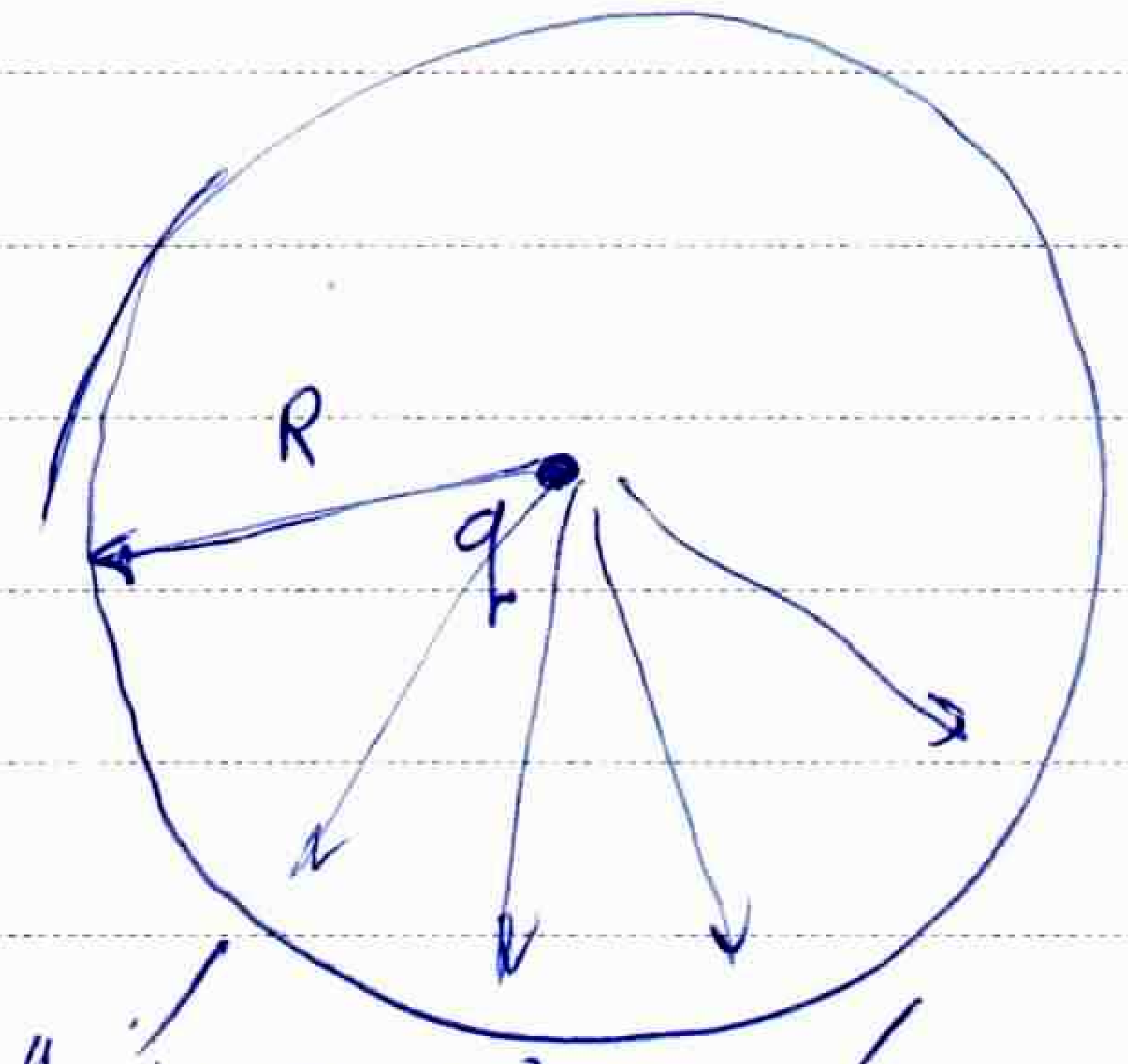
S : کره‌ای به شعاع R

$$\Phi_s = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\int_s \vec{E}\cdot d\vec{A} = \int_s E\,dA \underset{\text{به دلیل تقارن}}{=} E\int_s dA = E4\pi R^2$$

$$\Rightarrow E\,4\pi R^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^2}$$

*



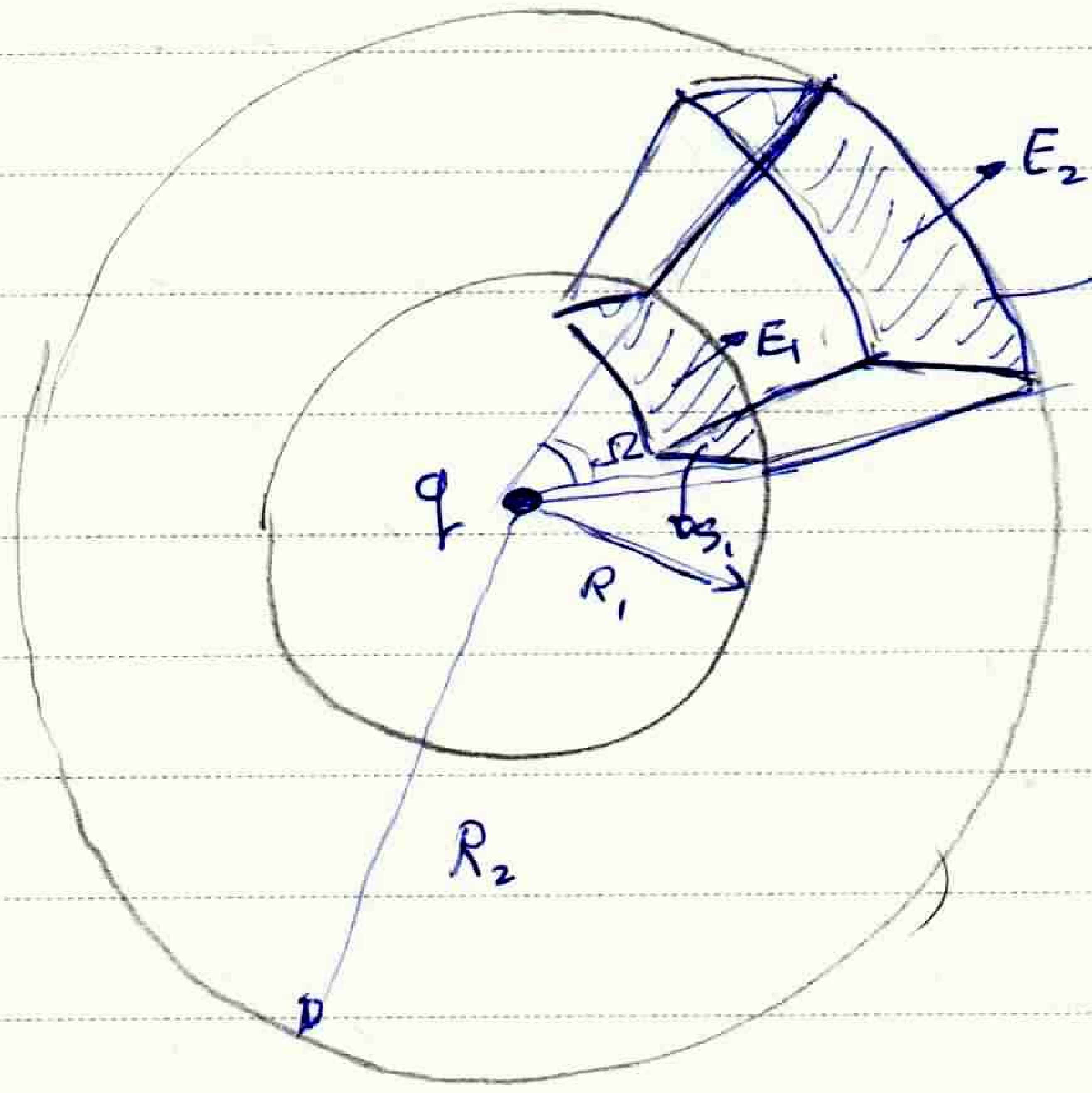
کره‌ای به شعاع R در مرکز q

$$\Phi = \int_s \vec{E}\cdot d\vec{A} = \int_s E\,dA$$

$$= E\int_s dA = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^2}\cdot 4\pi R^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

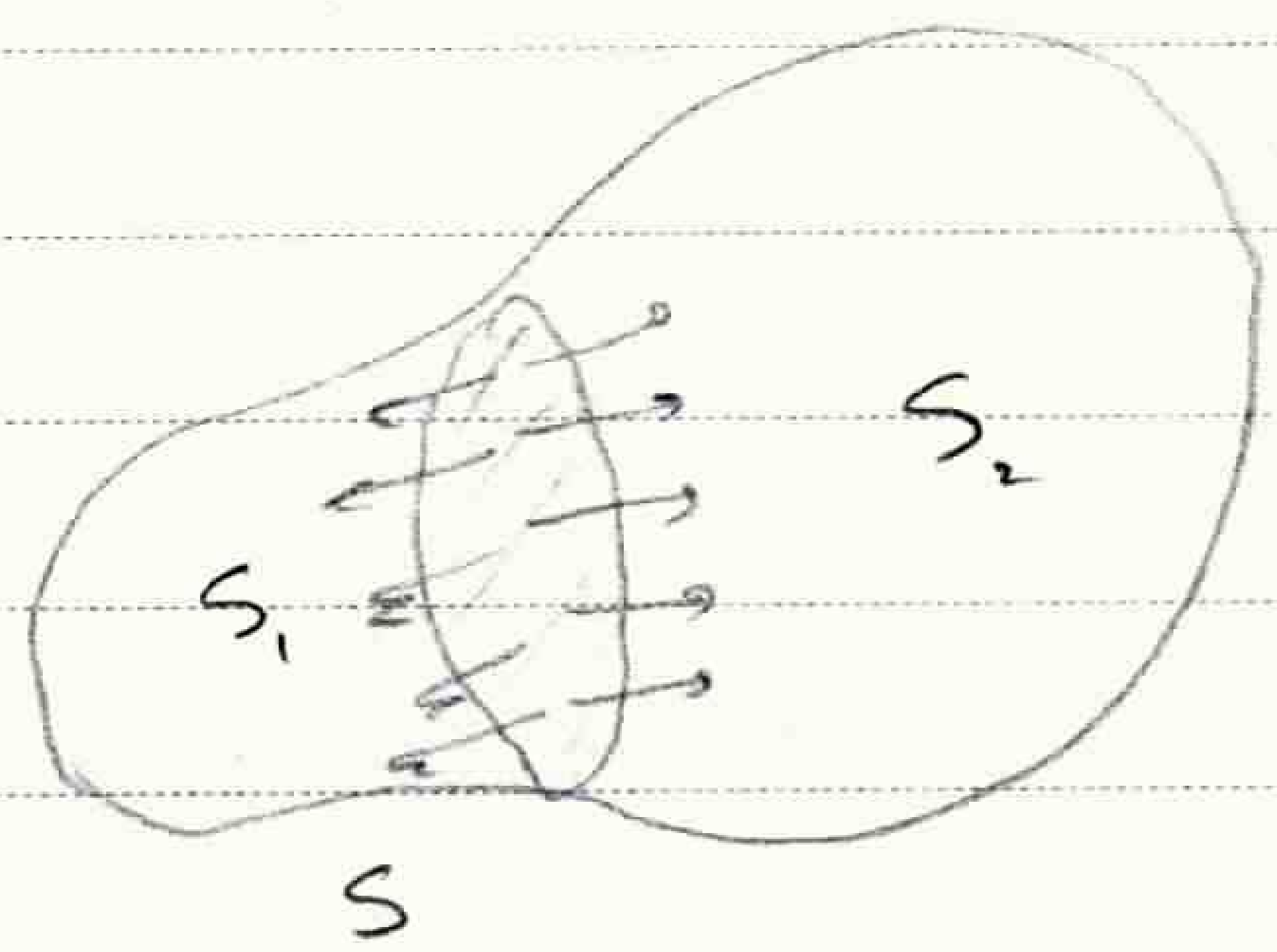
پس قانون گاوس در این حالت صادق است

Subject:
Date

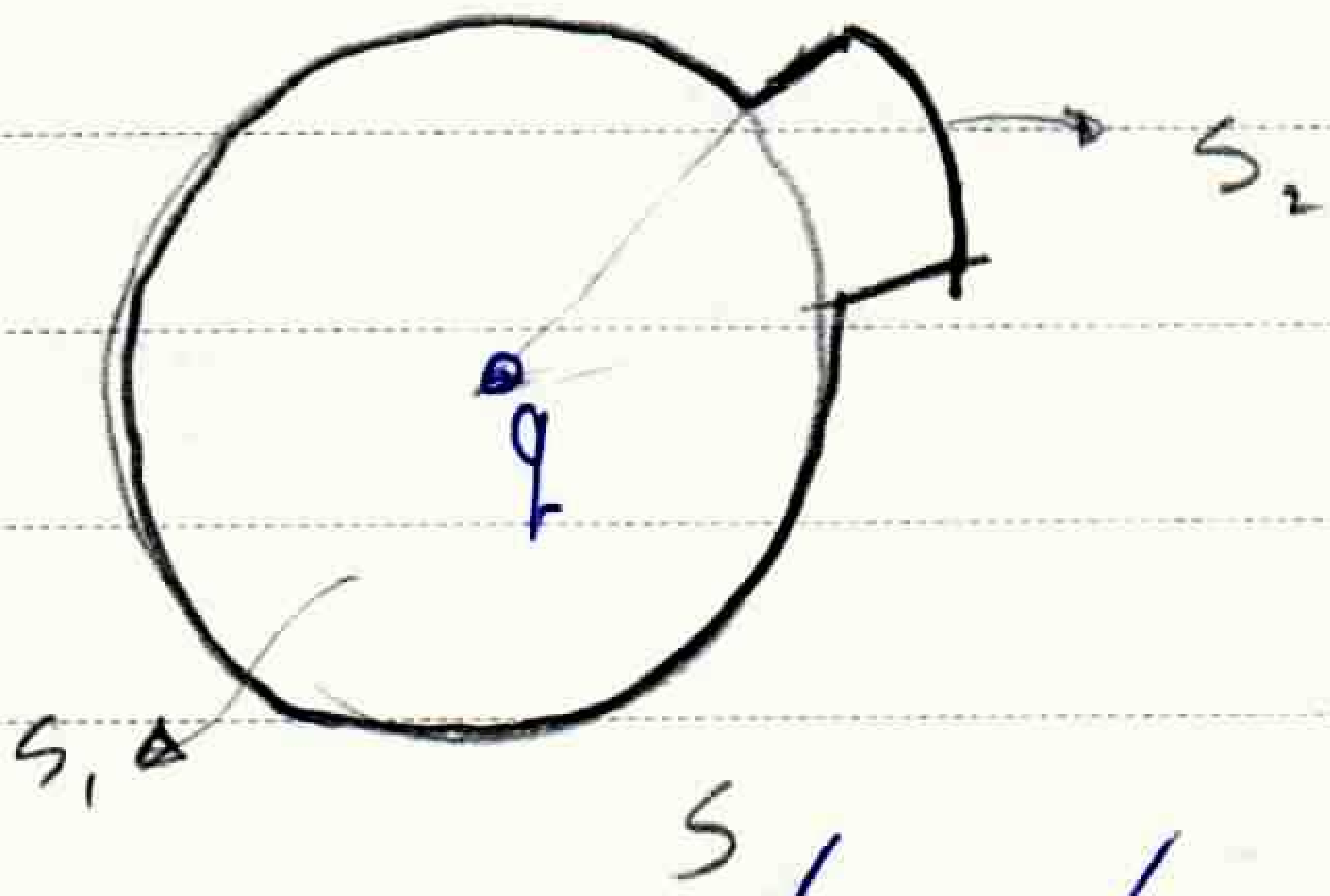


فضای محصور بین دو کره با شعاع‌های : S
R_1 و R_2

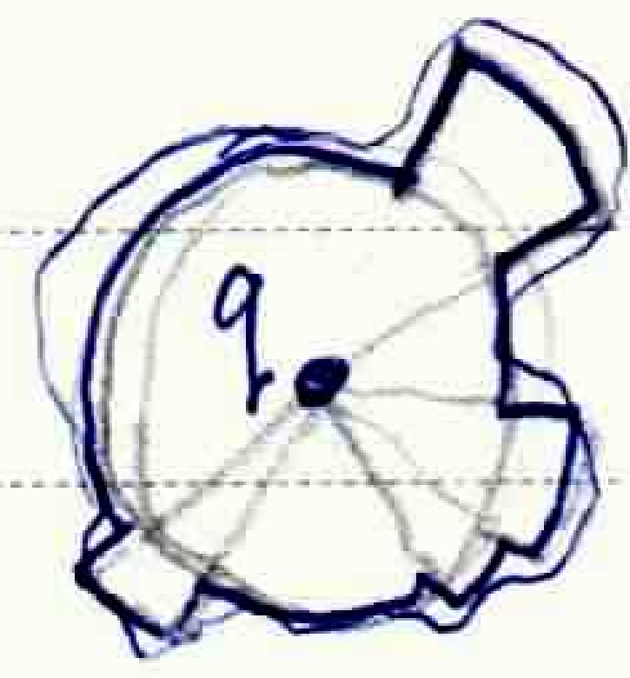
$$\Phi = E_2 S_2 - E_1 S_1$$
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R_2^2} - (\Omega R_2^2)$$
$$- \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R_1^2}(\Omega R_1^2) = 0$$



$$\Phi_S = \Phi_{S_1} + \Phi_{S_2}$$



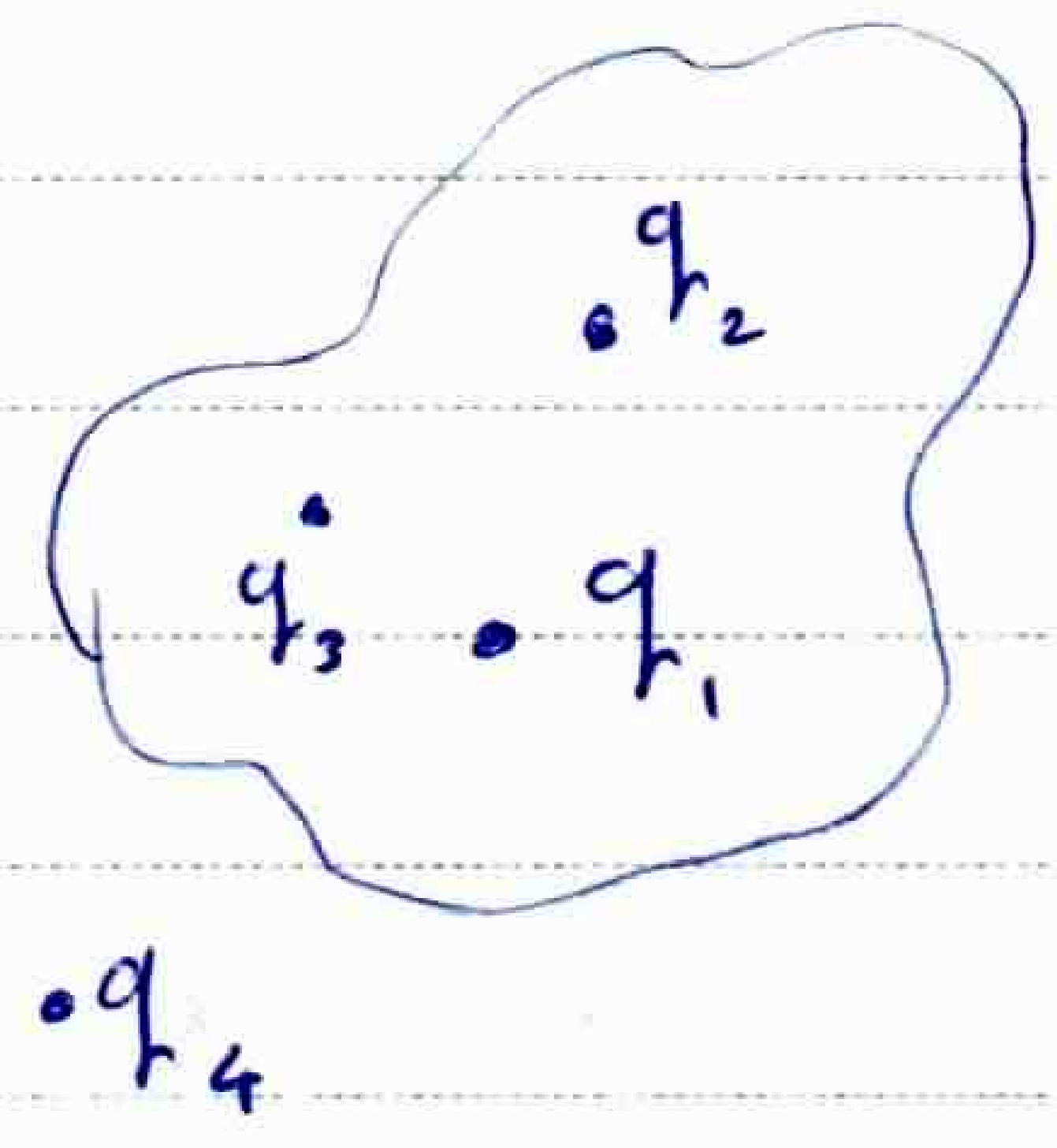
$$\Phi_S = \Phi_{S_1} + \underset{0}{\cancel{\Phi_{S_2}}} = \Phi_{S_1}$$
$$= \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}$$



هر سطح را می‌توان با یک کره و چند زائده و بیرون زدگی (مانند شکل بالا) تقریب زد. هم چنین وقتی که تقارن سطح به هم بخورد، دیگر مهم نیست که بار q در مرکز باشد.
پس قانون گاوس برای یک بار q ثابت شد.

PAPCO

Subject:
Date



- اگر چند بار داشته باشیم، از قانون جمع آثار استفاده می کنیم. به این صورت که می دانیم قانون گاوس برای تک تک آنها صادق است. و چون میدان الکتریکی در هر نقطه، برآیند میدان این بارها ست، پس قانون گاوس برای تک تک آنها صادق است و داریم:

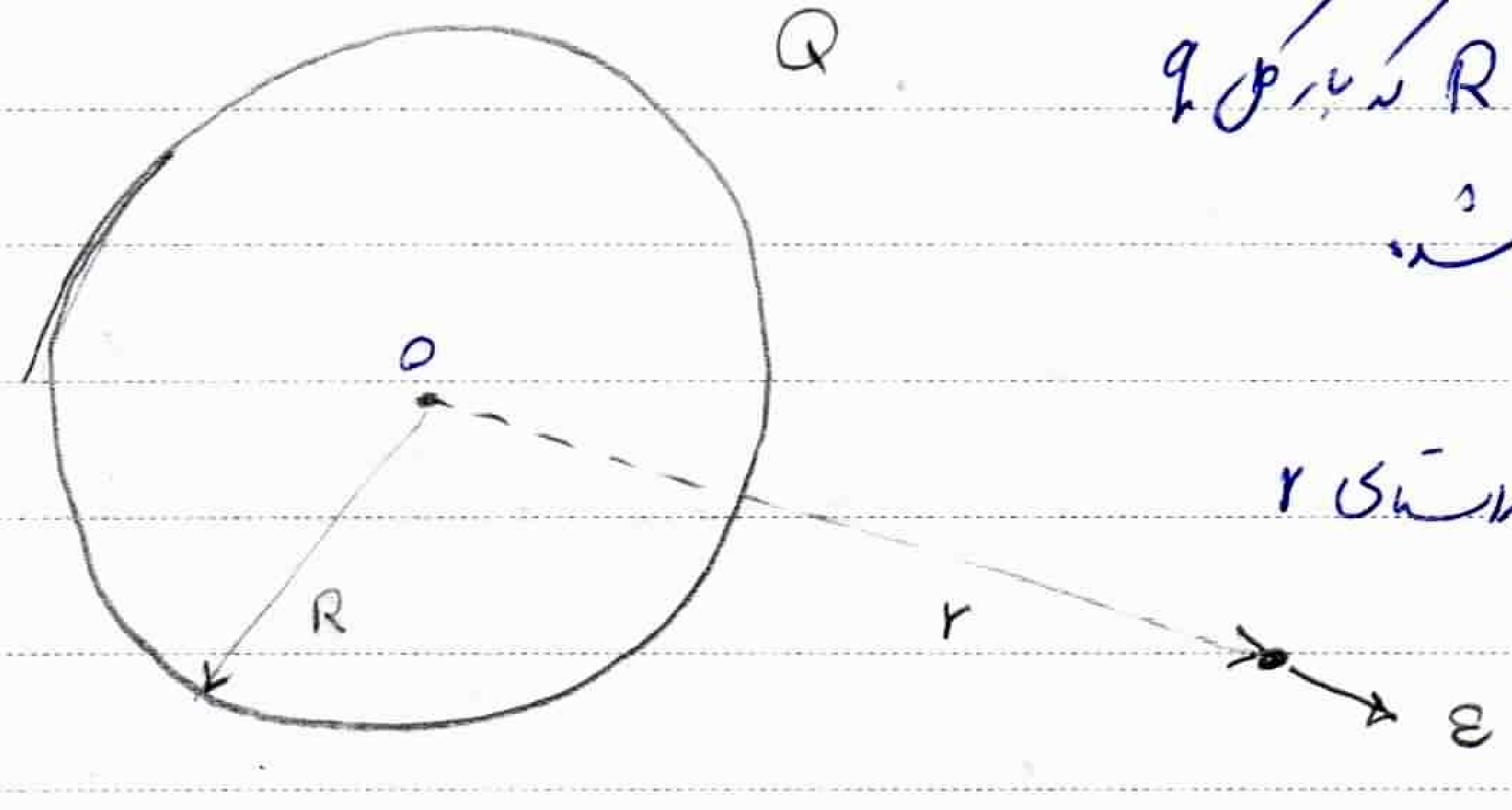
$$\oint_s \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_1+q_2+q_3+\cdots}{\varepsilon_0}$$

هم چنین اگر باری در خارج از آن باشد داریم:

برای بار q_4 : $\oint_s \vec{E}\cdot d\vec{A} = 0$

پس تأثیری ندارد.

مثال: یک پوسته‌ی کروی باردار به شعاع R که بار کل q به صورت یکنواخت روی آن پخش شده،



به دلیل تقارن کروی، میدان باید در راستای r باشد و بزرگی آن فقط به مقدار r بستگی دارد.

سطح گاوسی کروی شکل S را با مرکز O و شعاع r در نظر می گیریم. طبق قانون گاوس:

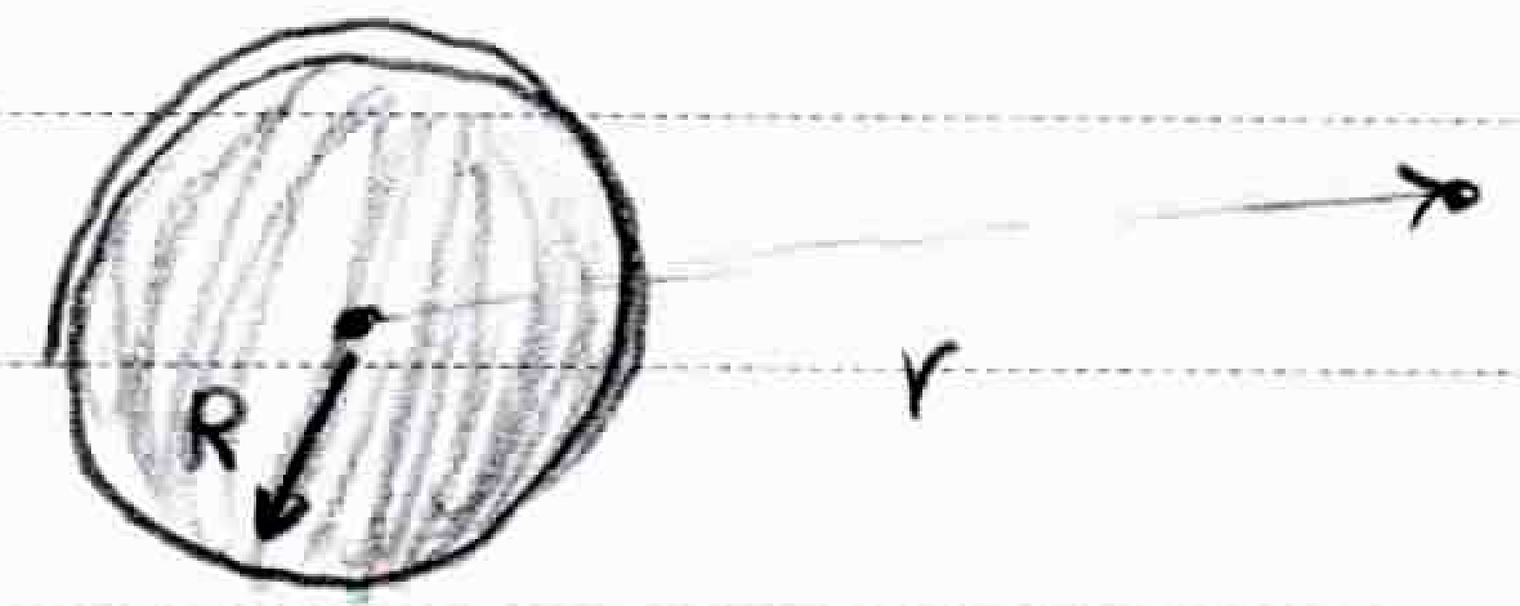
$$\left.\begin{aligned} &\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \\ &\oint E\cdot dA = E\oint_S dA = E\left(4\pi r^2\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$$

که این یافته مانند این است که تمام بار را در مرکز متمرکز کرده باشیم یا مانند قانون پوسته ها

هم چنین مطابق گاوس، میدان درون پوسته صفر است

مثال : یک کره ی توپر با چگالی بار یکنواخت

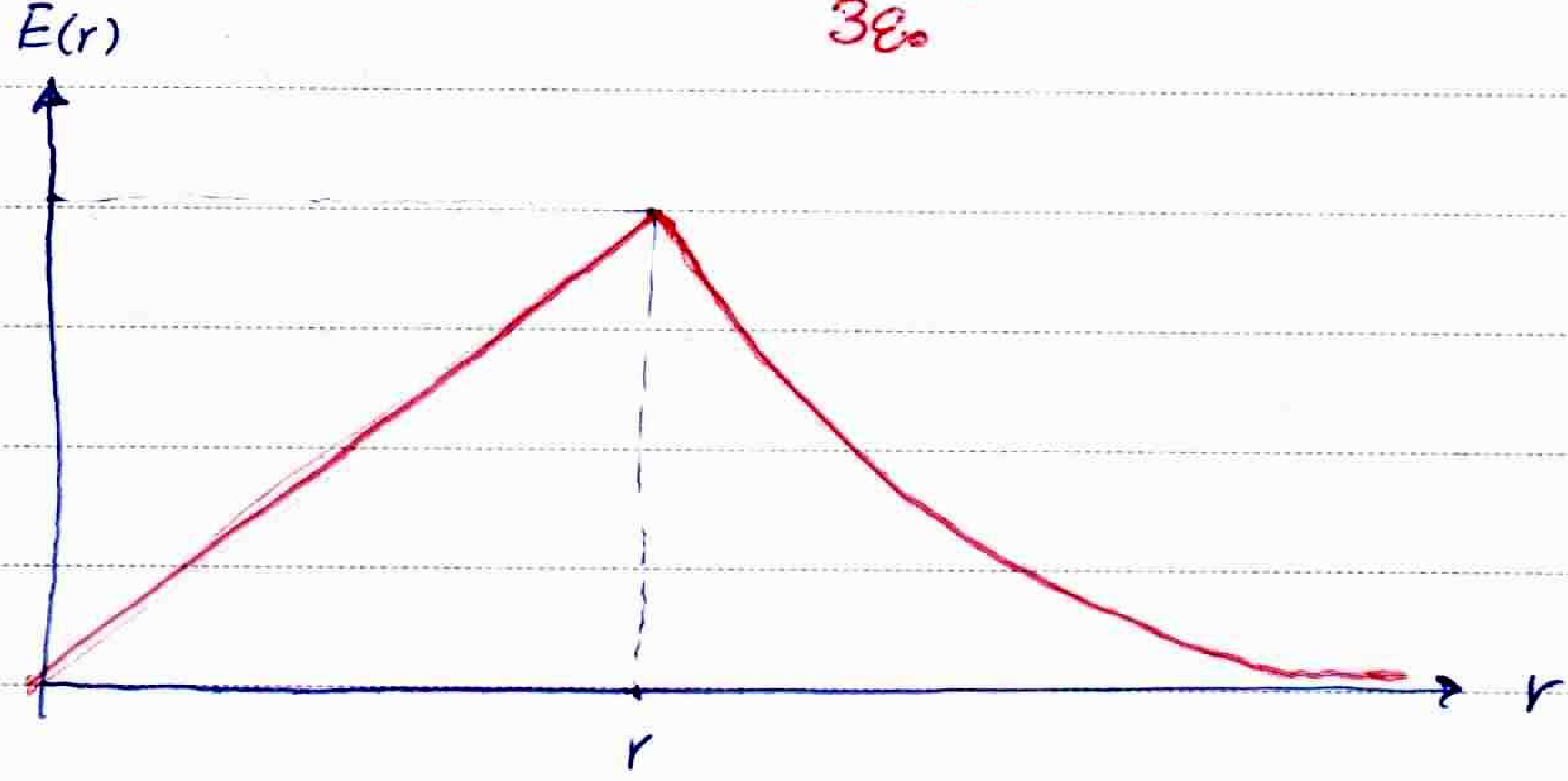
$\rho =$



$r > R$; $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2}$ مطابق قانون پوسته ها

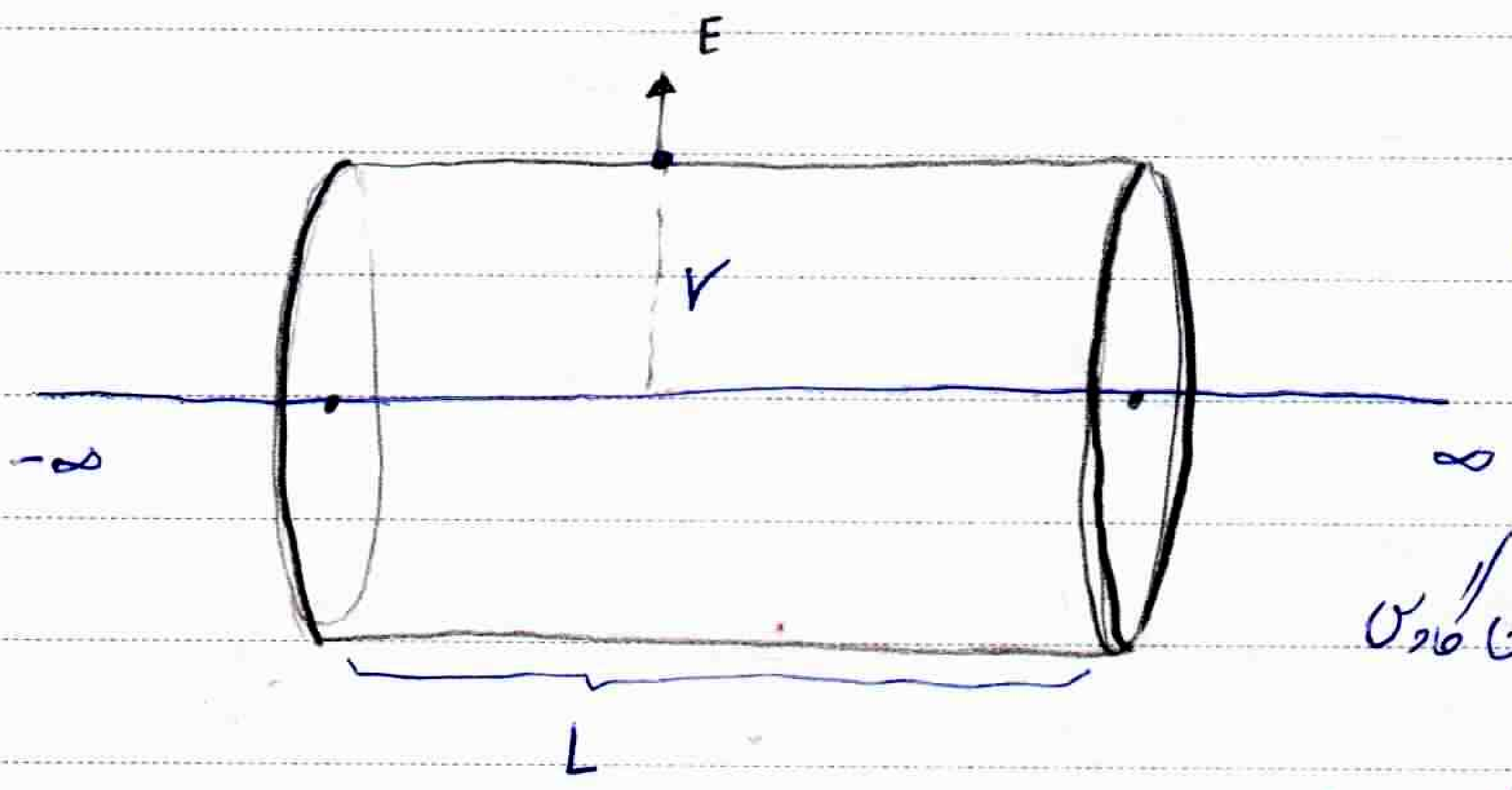
$r < R$: $\oint E . dA = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E . (4\pi r^2) = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \frac{4}{3} \pi r^3$

$$\Rightarrow E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r$$



مثال : چگالی بار λ

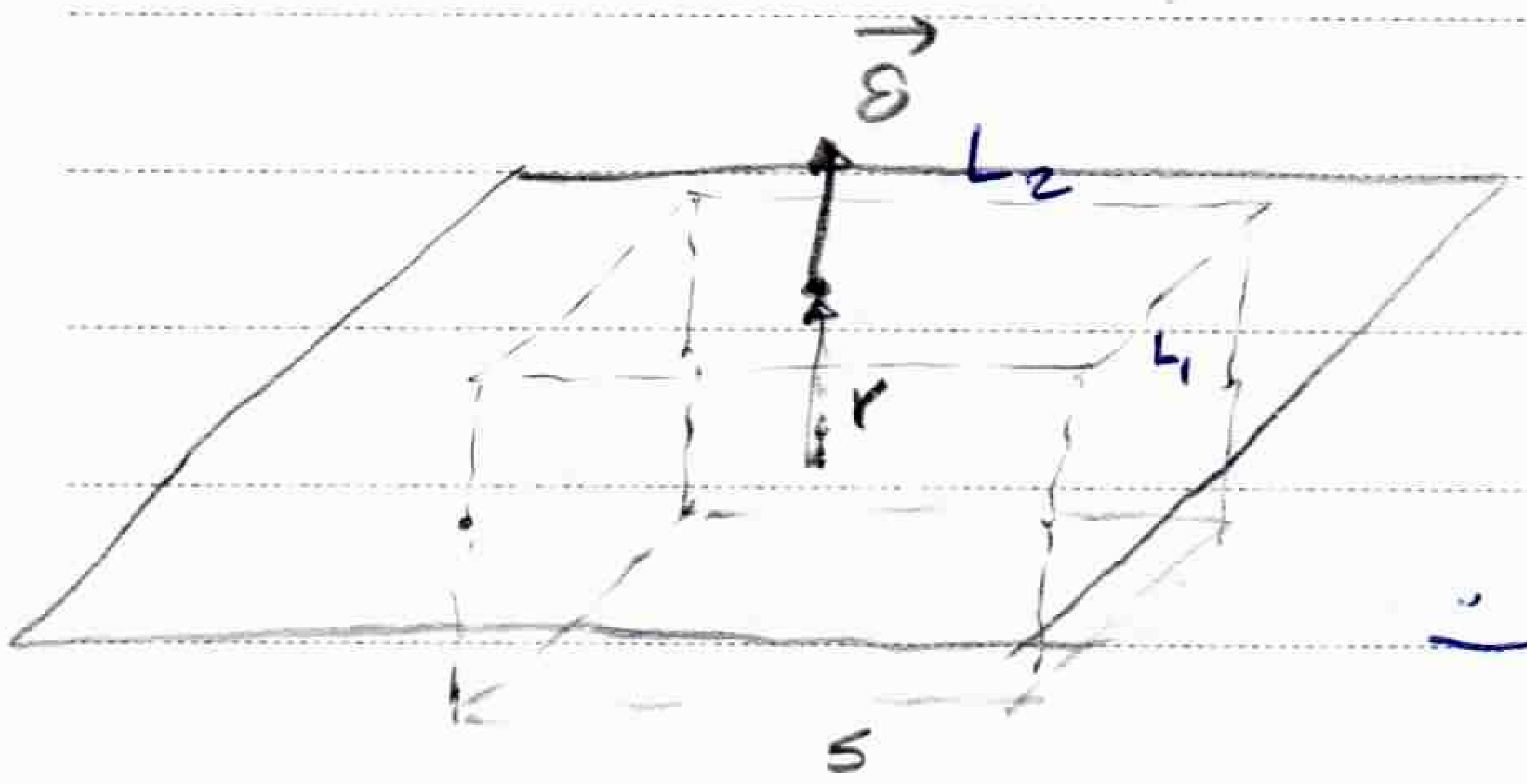
مطابق تقارن میدان عمود بر خط است و اندازه ی آن تابع r است.



قانون گاوس : $E\ (2\pi r) L = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0}$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda}{r}$$

مثال 4) صفحه‌ی بی نهایت بزرگ
با چگالی بار یکنواخت σ

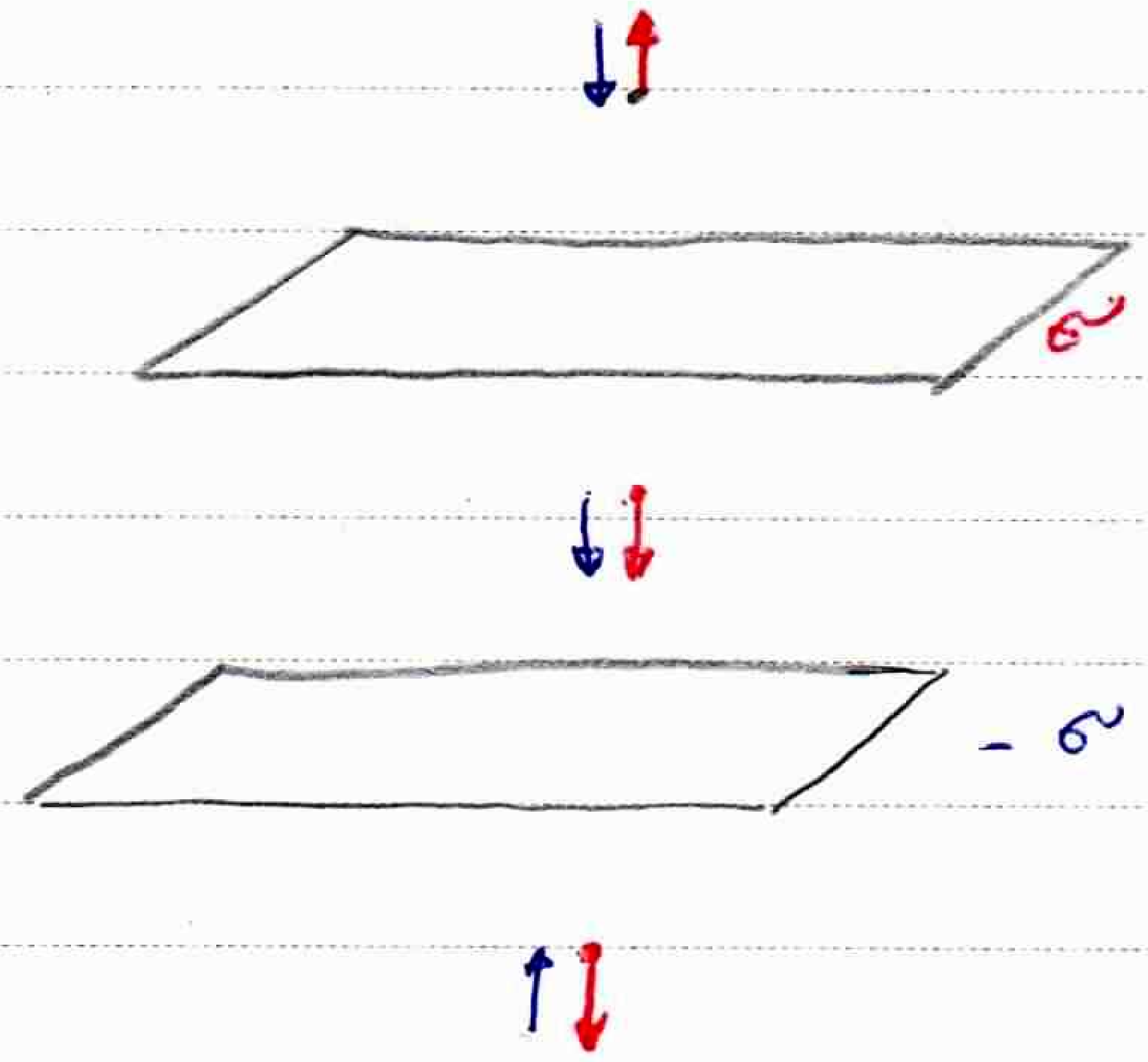


اندازه‌ی میدان تابع r نیست و
به دلیل تقارن در جهت r است

$$q_{in} = \sigma L_1 L_2 = \sigma S$$

$$\left.\begin{array}{l} \Phi_s = \oint E\cdot dA = 2ES = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} \end{array}\right\} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

مثال 5) دو صفحه‌ی بی نهایت بزرگ



از اصل برهم نهی استفاده می‌کنیم

بیرون از دو صفحه : $\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = 0$

داخل دو صفحه $= 2\,\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

قانون گاوس به صورت موضعی:
برای یک سطح کوچک:

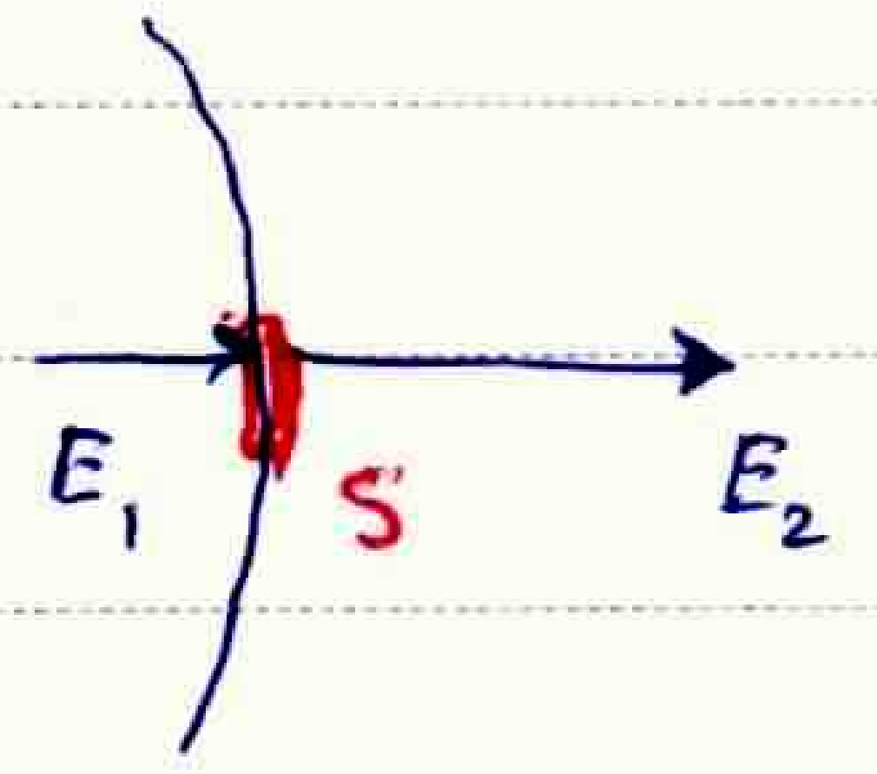
$$\oint_s \vec E\cdot d\vec A = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(r)\,.\,\Delta V$$

$$\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oint \vec E\cdot d\vec A}{\Delta V} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = \mathrm{Div}\,E = \vec\nabla\cdot\vec E$$

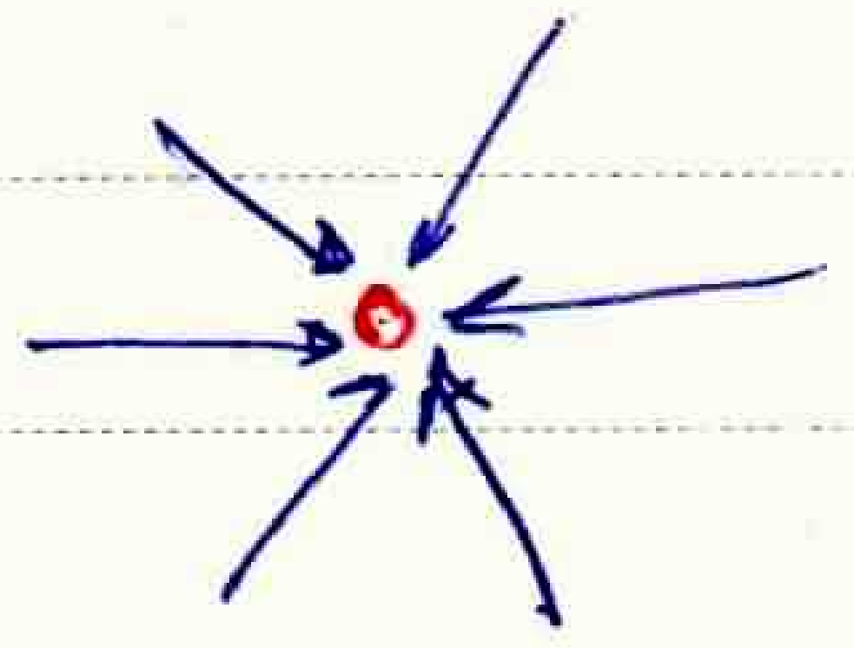
$$\Rightarrow \vec\nabla\cdot\vec E = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho(x,y,z)}{\varepsilon_0}$$

Subject:
Date

دو نکته در مورد قانون گاوس:



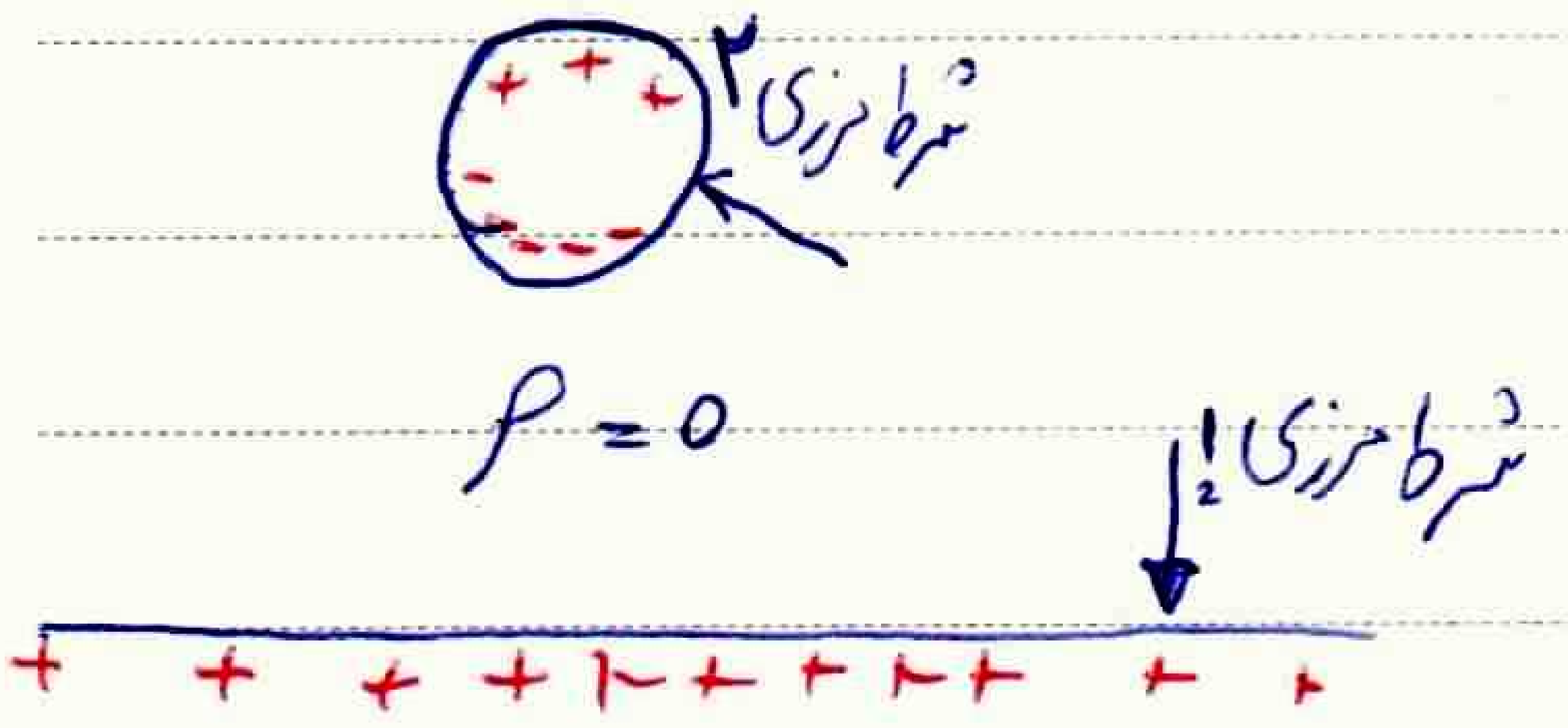
۱- مطابق قانون گاوس میدان به صورت پیوسته تغییر می‌کند. زیرا در غیر این صورت، قانون گاوس برای سطح دیفرانسیلی S نقض می‌شود



2- مطابق قانون گاوس، در هیچ نقطه‌ای از فضا نمی‌توان تعادل پایدار میدان ها داشت. زیرا باز هم این قانون در غیر این صورت نقض می‌شود.

* برای اینکه یک میدان در یک فضای خالی داشته باشیم باید $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$

مثال: یک کره‌ی بدون بار رسانا و یک صفحه‌ی باردار رسانا داریم میدان را حساب کنید برای فضا بین کره و صفحه



با قرار دادن کره، آرایش میدان و بار تغییر می‌کند

برای فضای بین داریم ، $\rho = 0 \Rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$

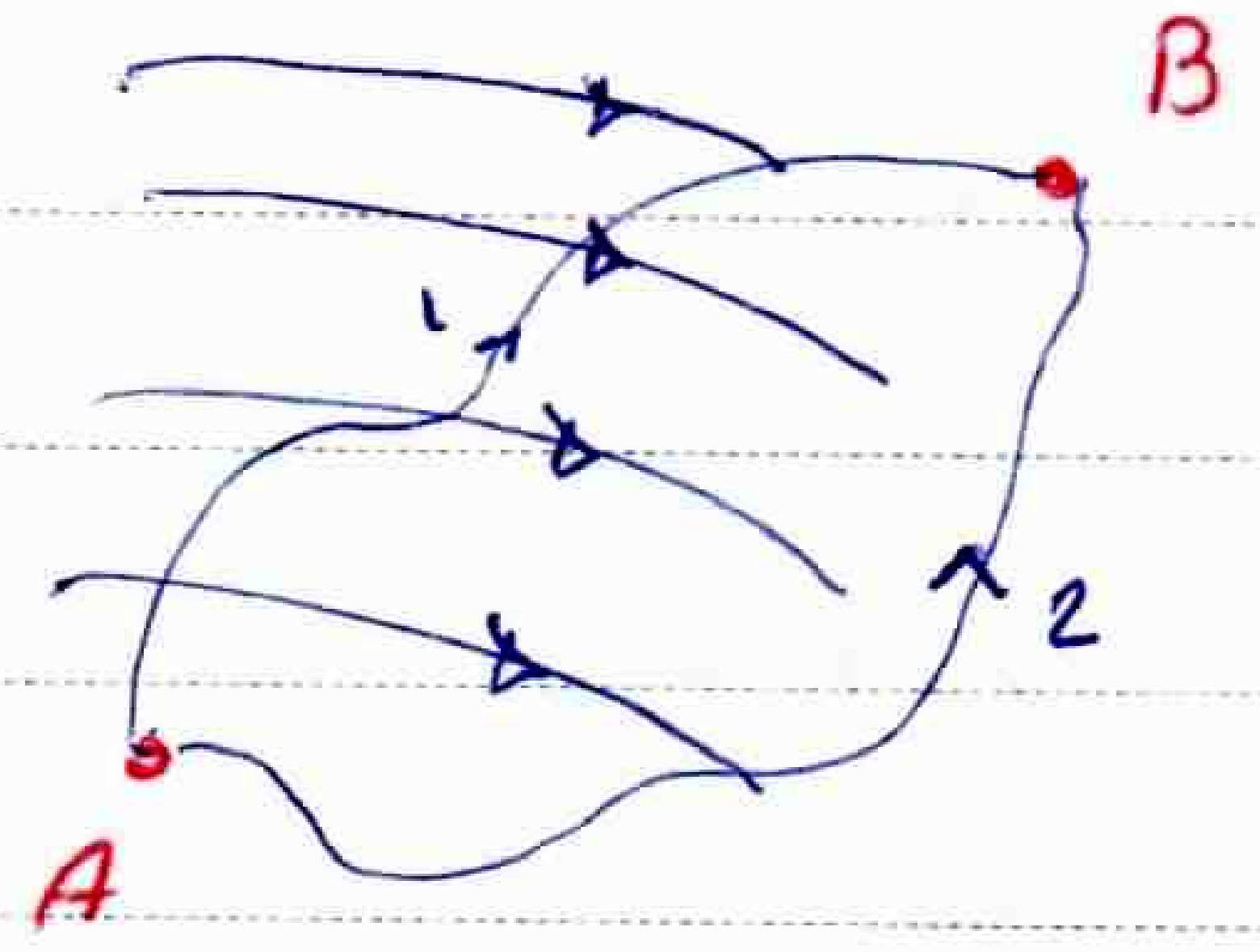
شرط مرزی ۱ : میدان به صفحه عمود است

شرط مرزی ۲ : میدان به سطح کره عمود است

PAPCO

Subject:
Date

پتانسیل الکتریکی :



$W_{A\to B}$: مقدار کار لازم برای بردن بار q از نقطه‌ی A به B بدون تغییر انرژی جنبشی

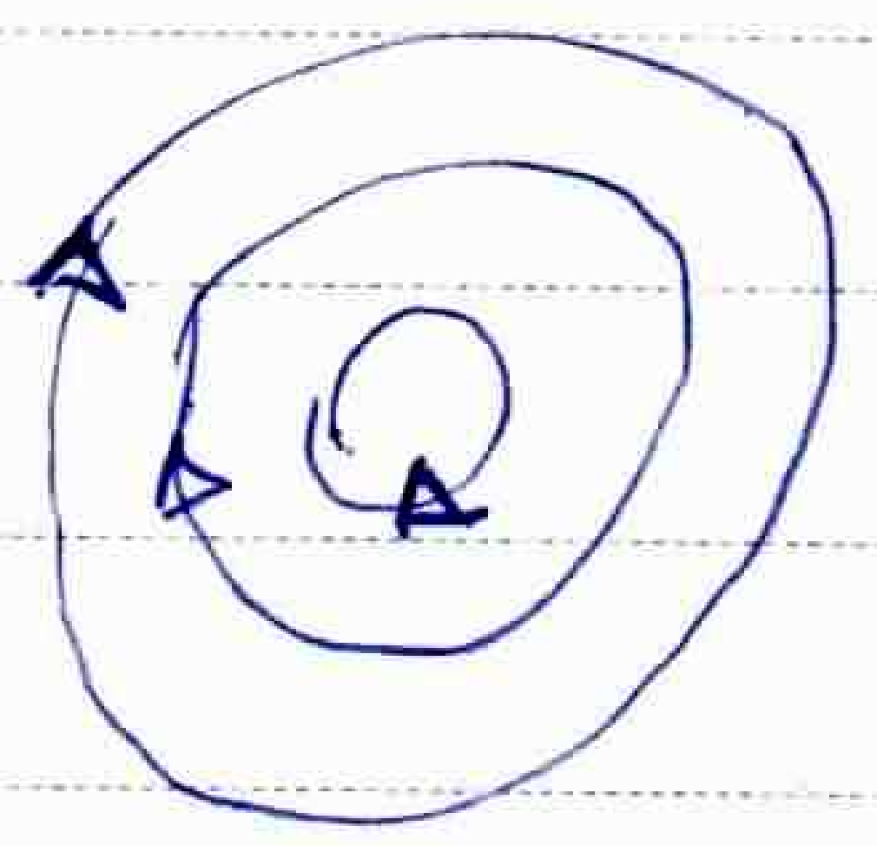
$$W_{A\to B} = \int_A^B \vec{F}_H \cdot d\vec{r} = \int_A^B -q\vec{E}\cdot d\vec{r} = U_B - U_A$$

$$\frac{W_{A\to B}}{q} = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{r} = \underbrace{\phi_B - \phi_A}_{\text{اختلاف پتانسیل الکتریکی}}$$

ϕ : پتانسیل الکتریکی

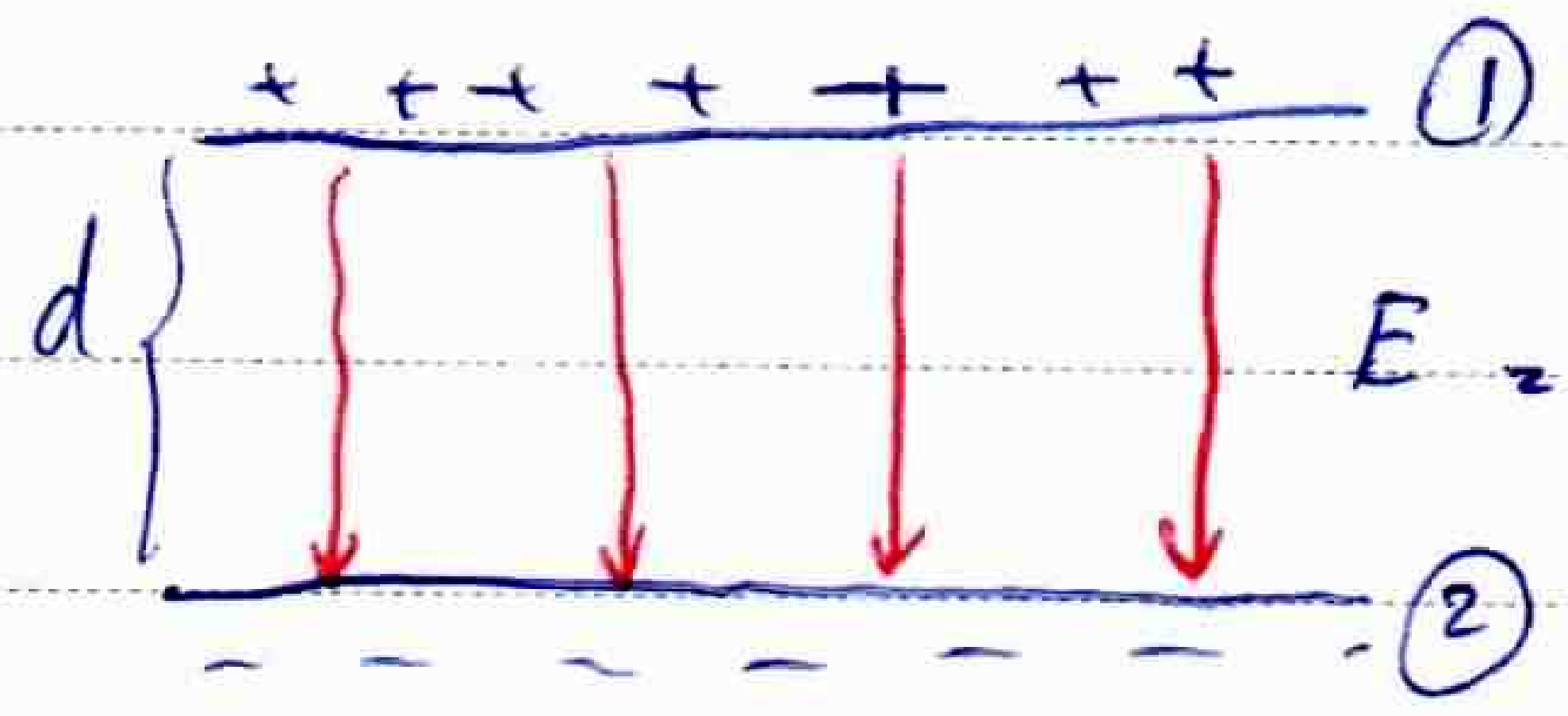
$$1 \text{ volt} = \frac{1\ J}{1\ c}$$

$$\int_{A\,(1)}^{B} \vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_{A\,(2)}^{B} \vec{E}\cdot d\vec{r} \Rightarrow \oint_C \vec{E}\cdot d\vec{r} = 0$$ *



مطابق این نکته، مادامی که بارها ساکن باشند، هیچ‌گاه گردابه‌ای مطابق روبرو در میدان نداریم.

* برای دو صفحه‌ی بی‌نهایت با چگالی بار سطحی داریم:



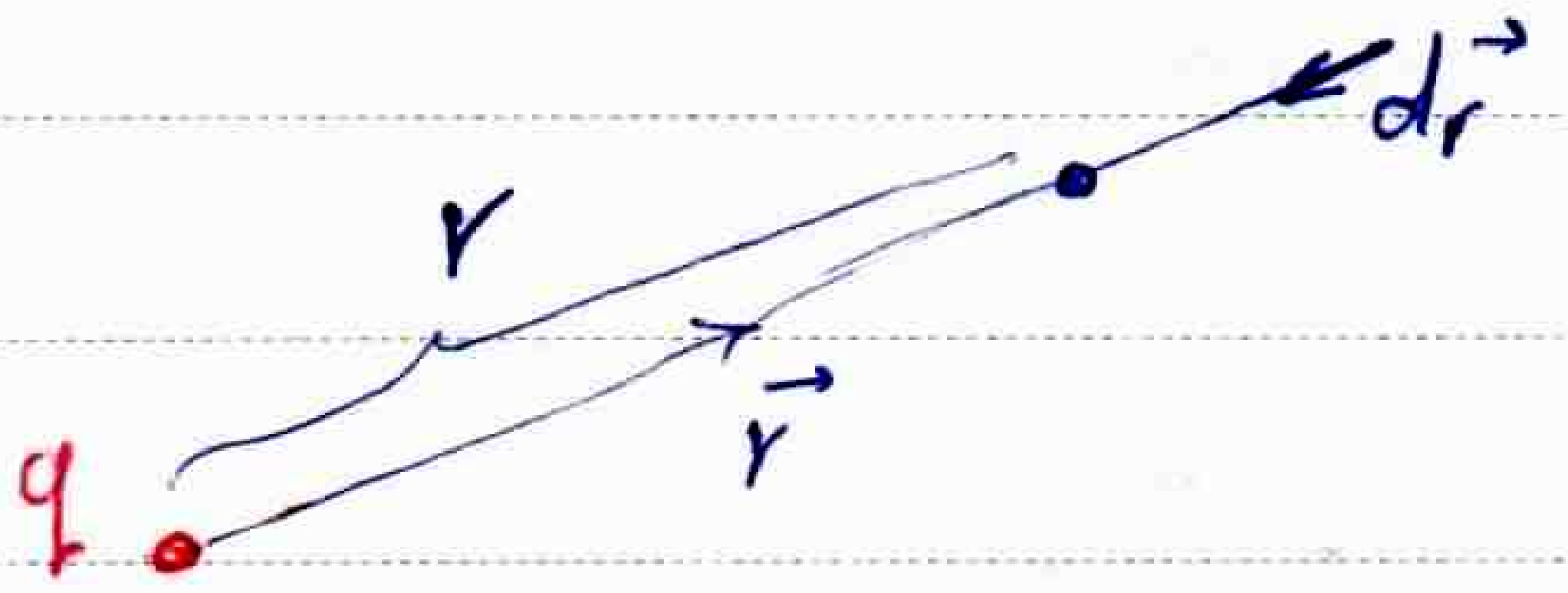
$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \Rightarrow \Delta V = |\phi_1 - \phi_2| = \frac{d\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$\phi_B = -\int_\infty^B \vec{E}\cdot d\vec{r}$$

* $\phi_\infty = 0$ تعریف می‌کنیم

P4PCO

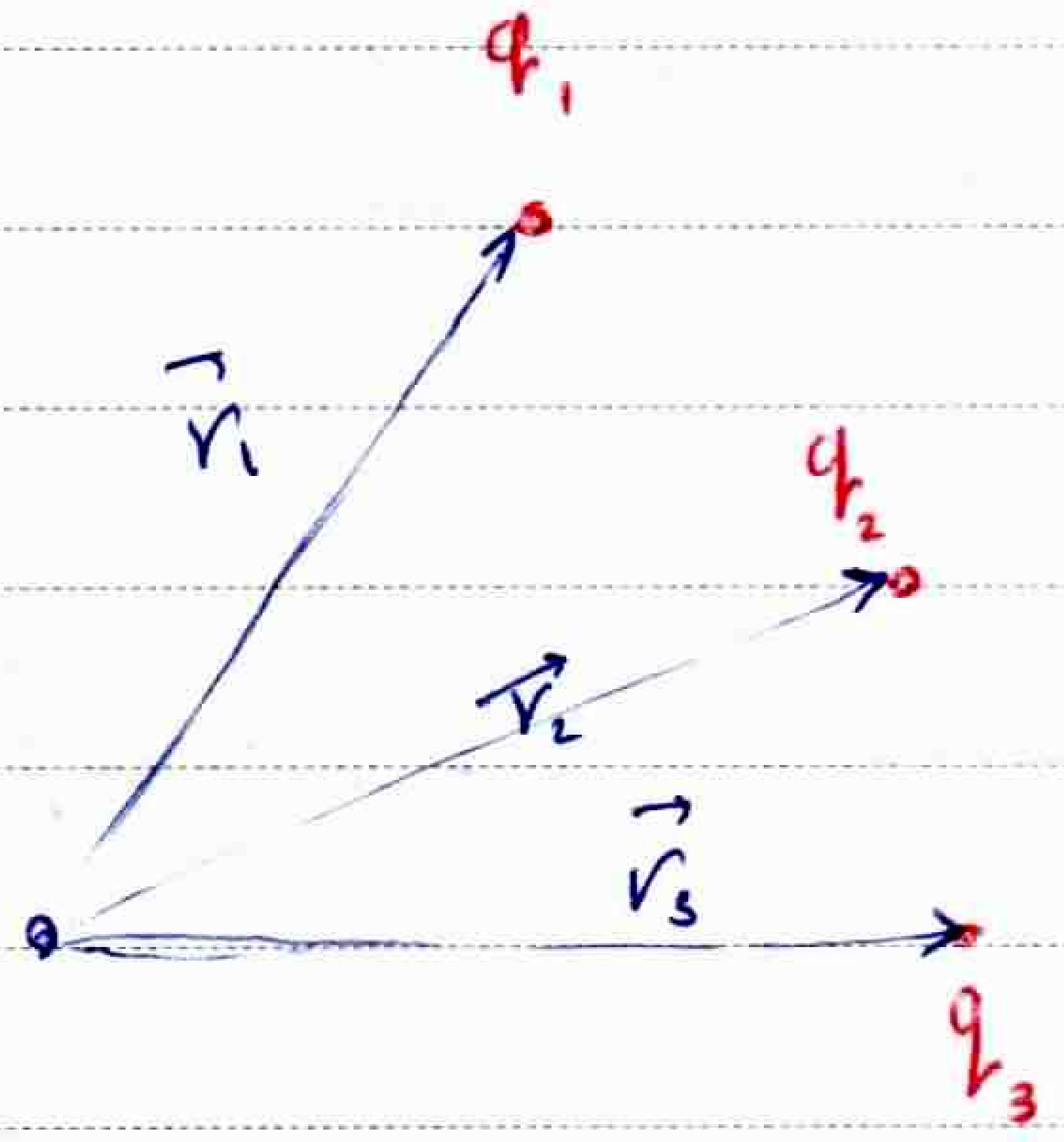
* برای بار نقطه‌ای q داریم :



$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{r}$$

$$\Rightarrow \phi_B = -\int_{\infty}^{r} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{r} \cdot d\vec{r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\infty}^{r} \frac{-1}{r^2} dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r}$$

پتانسیل الکتریکی برای یک مجموعه‌ی ذرات باردار :



مطابق اصل برهم‌نهی داریم :

$\vec{r}$

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{m} \frac{q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|}$$

توزیع پیوسته :

1- توزیع بار در حجم : این انتگرال سه‌گانه است

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(r')\,dv'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

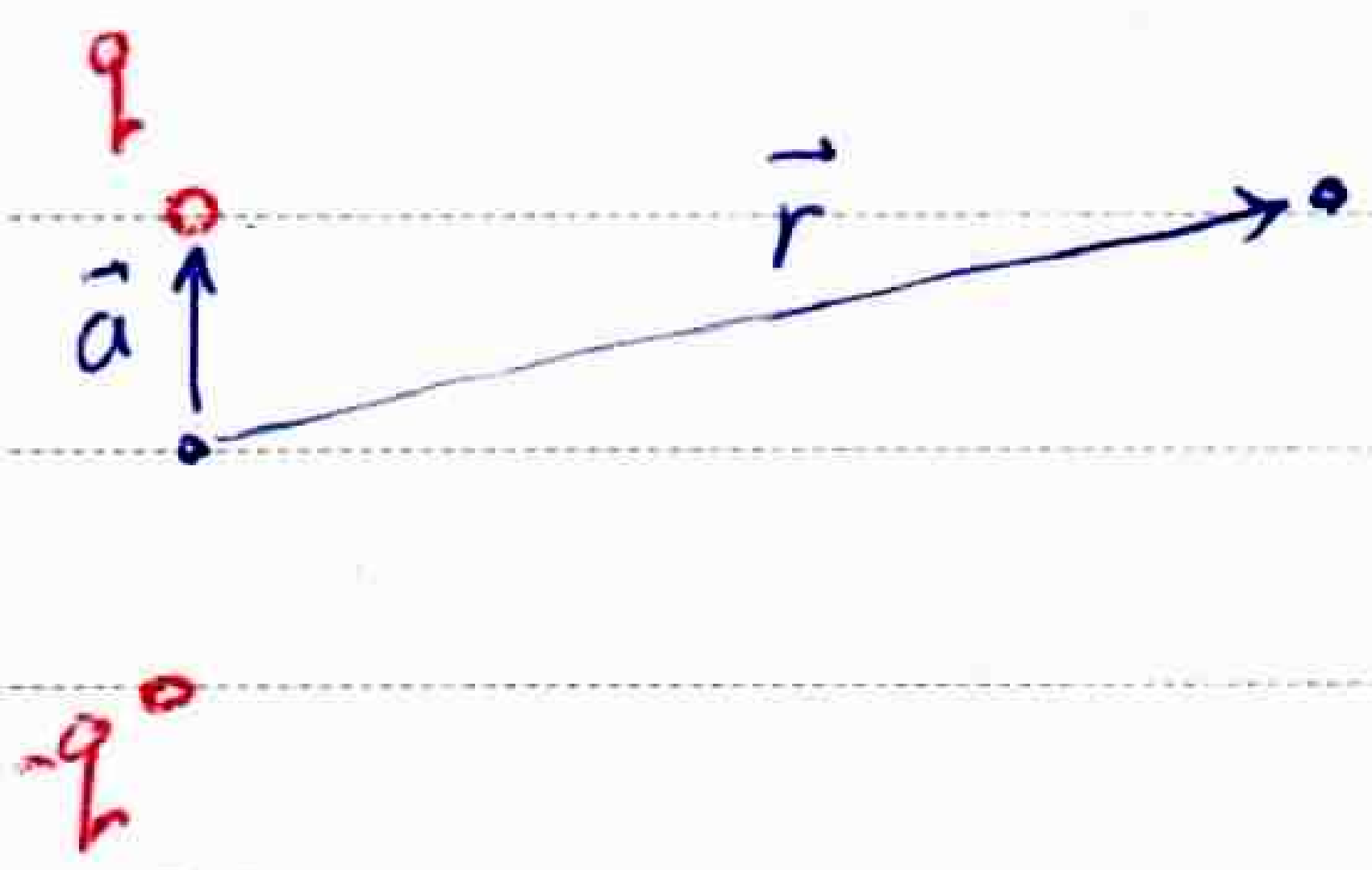
2- توزیع بار در سطح : این انتگرال دوگانه است

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\sigma(r')\,dA'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

3- توزیع بار خطی این انتگرال یگانه است

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\lambda(r')\,dl'}{|r-\vec{r}'|}$$

مثال :



$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{a}|} - \frac{1}{|\vec{r}+\vec{a}|}\right)$$

Subject :

Date

در دوردست $|\vec r| \gg |\vec a|$

$$|\vec r - \vec a| = \sqrt{r^2 + a^2 - 2\vec r.\vec a}$$
$$\simeq \sqrt{r^2 - 2\vec r.\vec a} \simeq r^{-1}\left(1 + \frac{\vec r.\vec a}{r^2}\right)$$

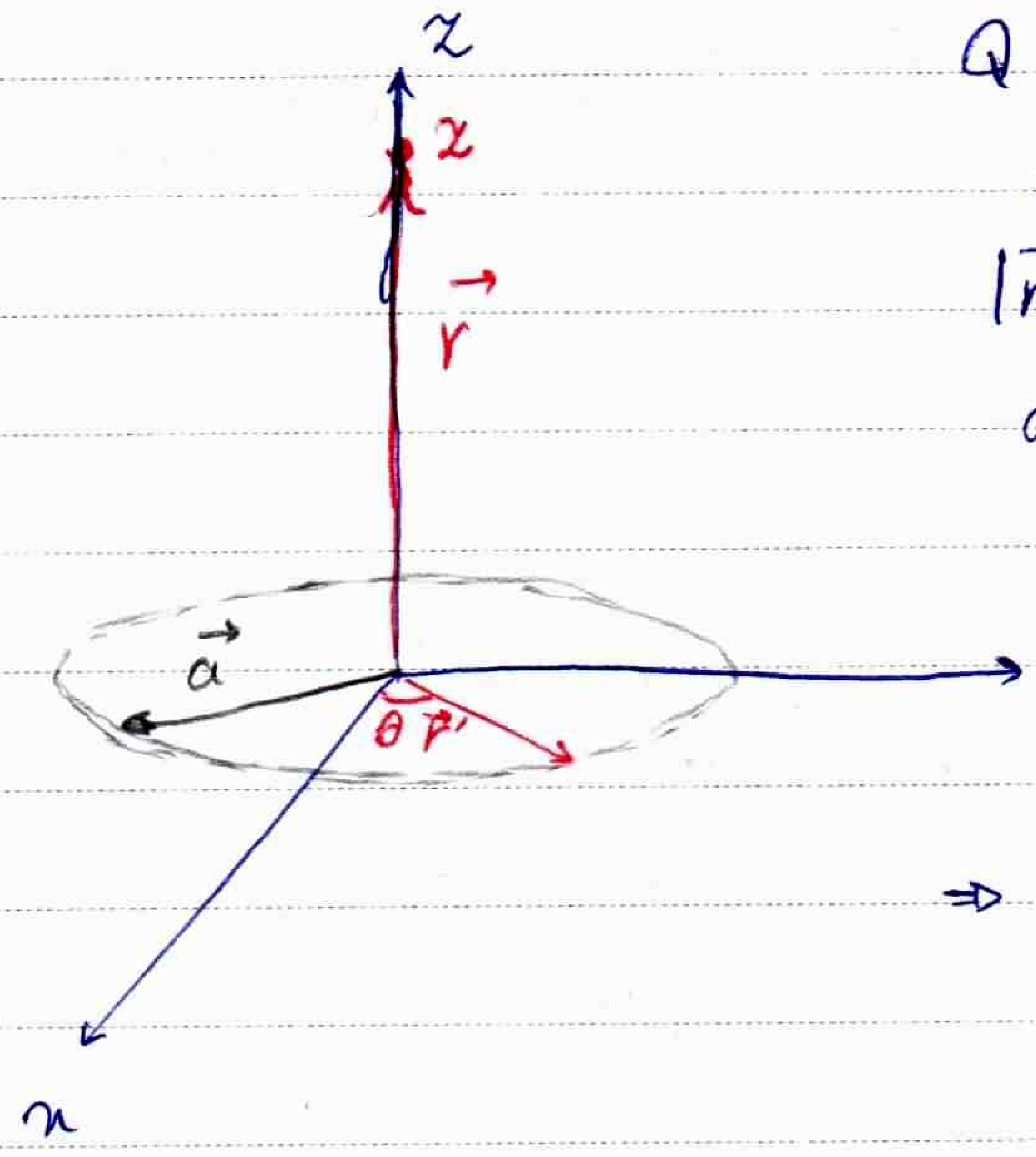
به همین ترتیب : $|\vec r + \vec a| \simeq r^{-1}\left(1 + \frac{r.\vec a}{r^2}\right)$

$$\Rightarrow \phi(\vec r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{|\vec r - \vec a|} - \frac{1}{|\vec r + \vec a|}\right) \simeq \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\vec r.\vec a}{r^3}$$

$$\Rightarrow \phi(\vec r) = \frac{\vec P.\hat r}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

بستگی به فاصله $\frac{1}{r^2}$ است.

مثال:



$Q = \lambda 2\pi a$

$\vec r = z\hat k \qquad \vec r' = a\cos\theta\,\hat i + a\sin\theta\,\hat j$

$|\vec r - \vec r'| = \sqrt{z^2 + a^2}$

$dl = a\,d\theta$

$$\Rightarrow \phi(\vec r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\lambda\,dl}{|\vec r - \vec r'|}$$

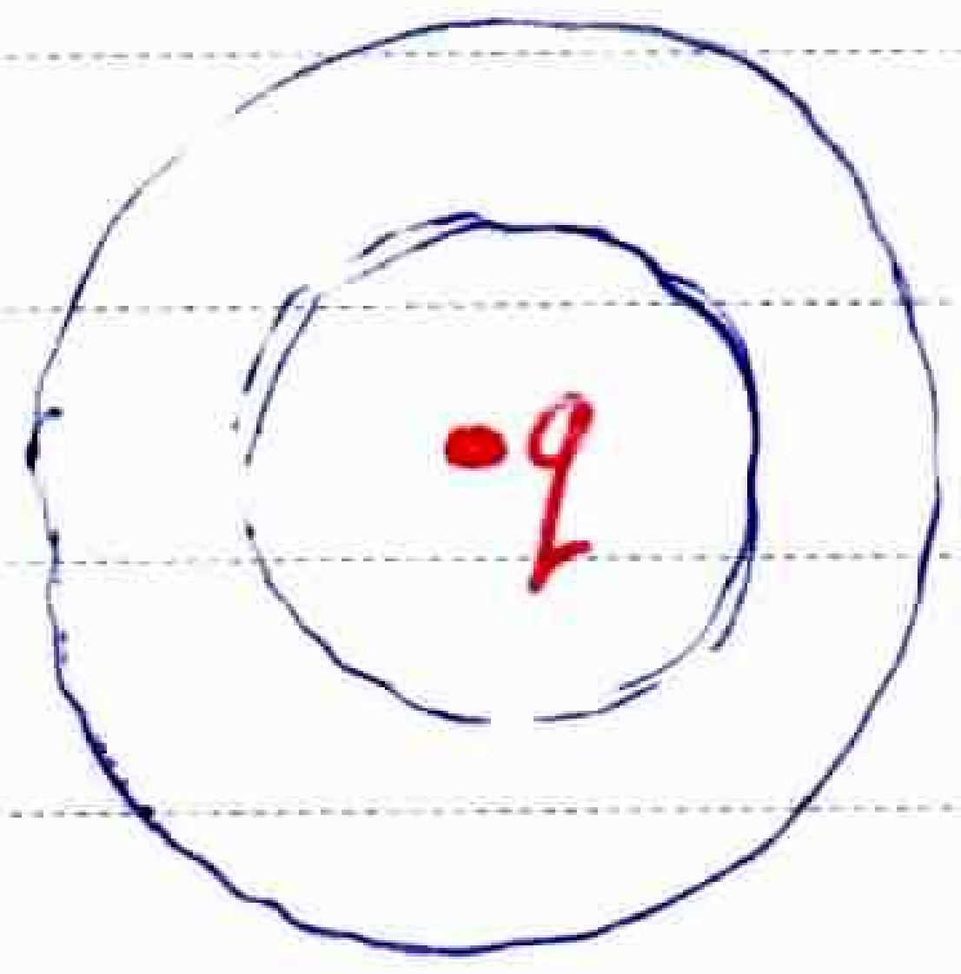
$$\Rightarrow \phi(\vec r) = \frac{\lambda a}{2\varepsilon_0\sqrt{z^2 + a^2}}$$

Equi - potential - surfaces

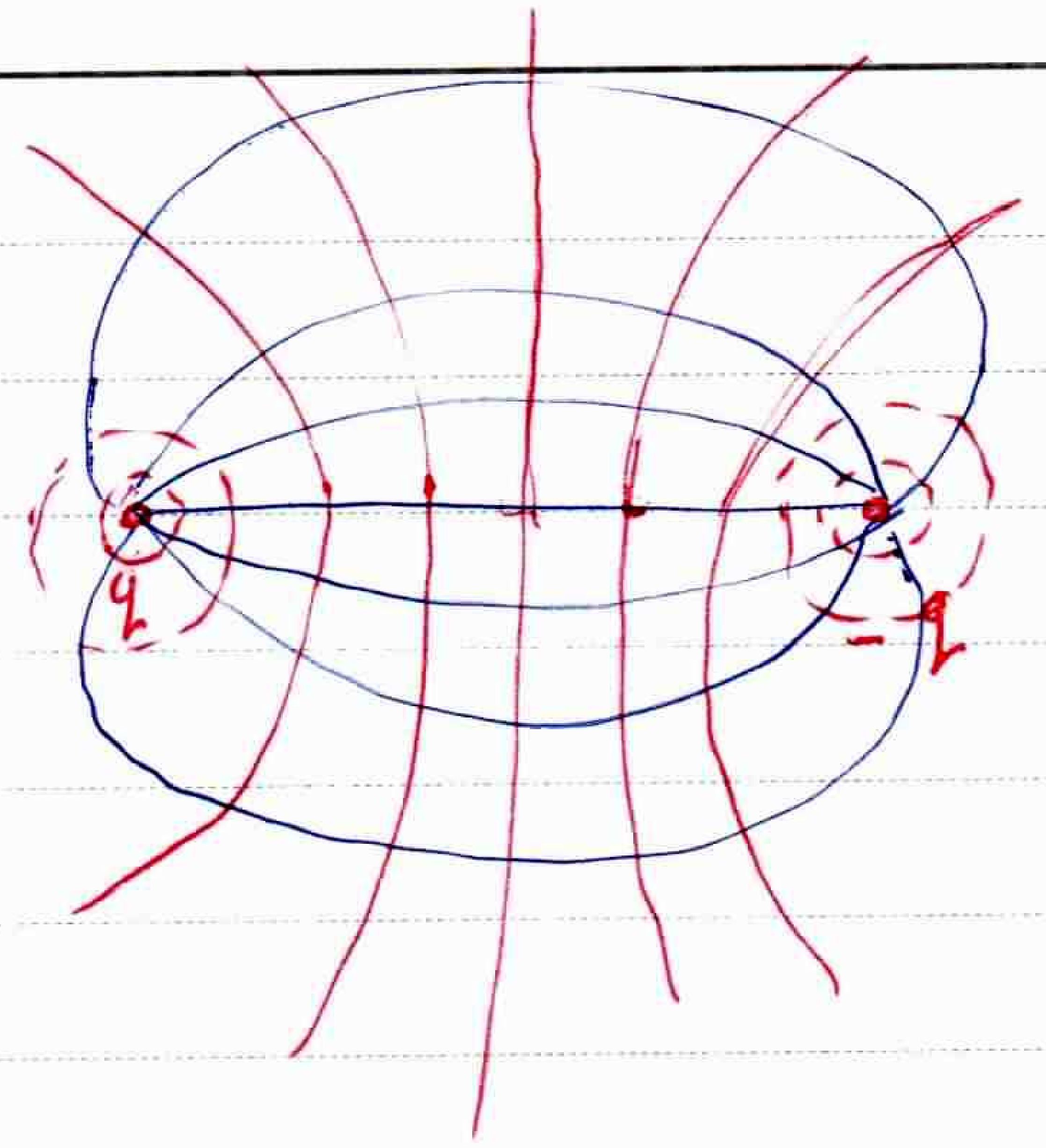
سطوح هم پتانسیل:

میدان بر سطوح هم پتانسیل حتماً عمود است.

برای بار تک نقطه، کره های هم مرکز:



Subject :
Date

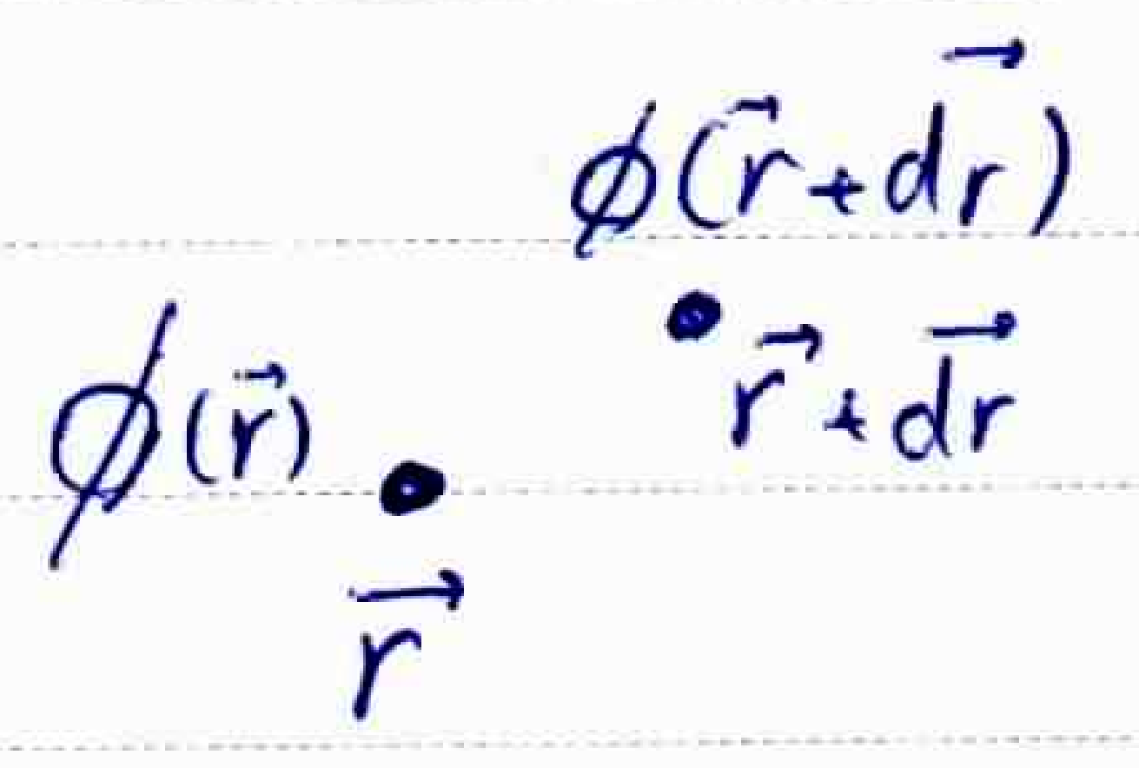


- برای دوقطبی :

به دست آوردن میدان از پتانسیل :

$$\frac{f(x+dx)-f(x)}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} \Rightarrow f(x+dx)-f(x) = \frac{\partial f}{\partial x}dx$$: یادآوری ریاضی

$$f(x+dx\,,\,y+dy) - f(x\,,y) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

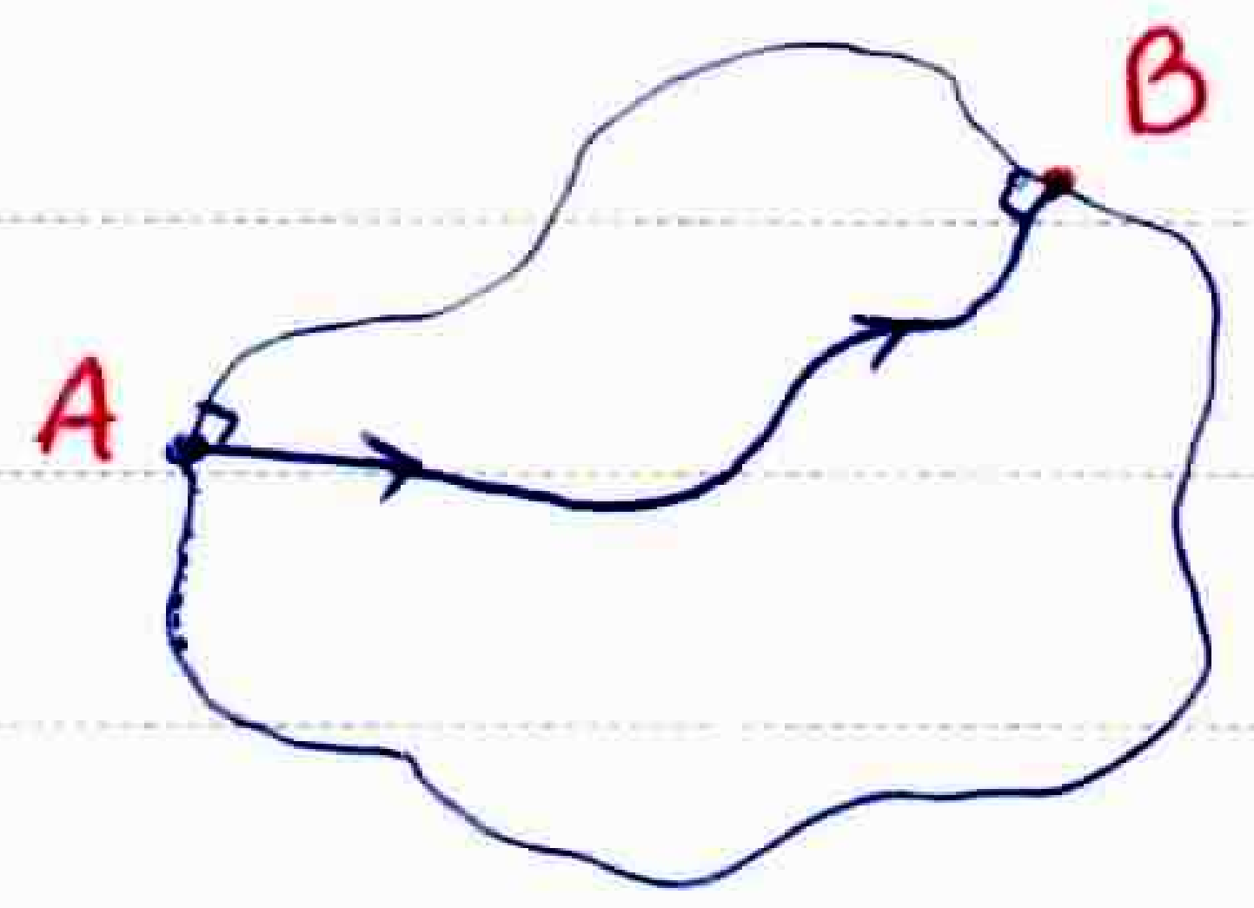


$$\phi(\vec{r}+\vec{dr}) - \phi(\vec{r})$$
$$= \phi(x+dx\,,\,y+dy\,,\,z+dz) - \phi(x,y,z)$$
$$= -(E_x dx + E_y dy + E_z dz)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} E_x = -\dfrac{\partial \phi}{\partial x} \\ E_y = -\dfrac{\partial \phi}{\partial y} \\ E_z = -\dfrac{\partial \phi}{\partial z} \end{cases} \Rightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$$

نکته : میدان داخل یک پوسته ی رسانا صفر است. زیرا میدان بر یک سطح رسانا عمود است. یعنی هر پوسته ی رسانا یک سطح هم پتانسیل است. و اگر داخل میدان داشته باشیم باید به این

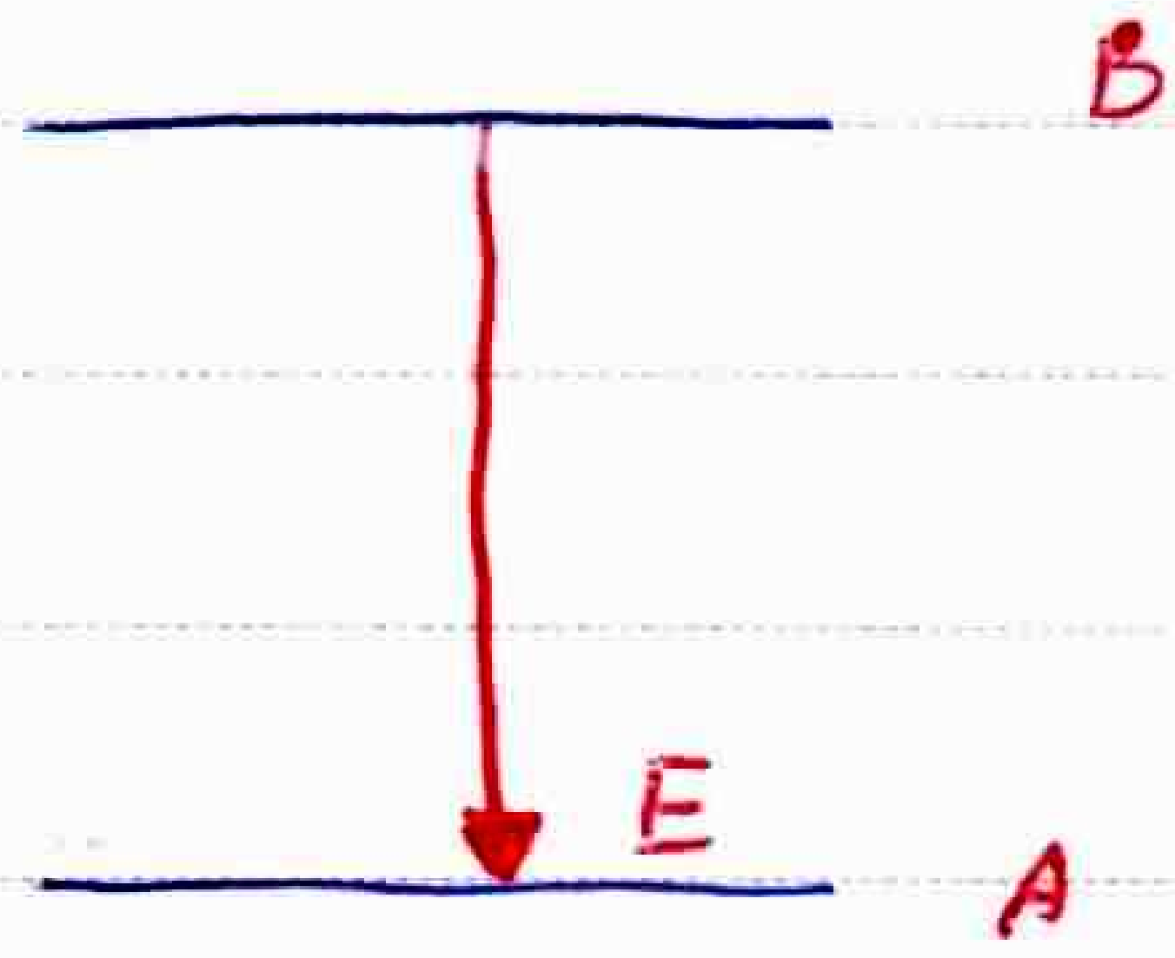
Subject:
Date



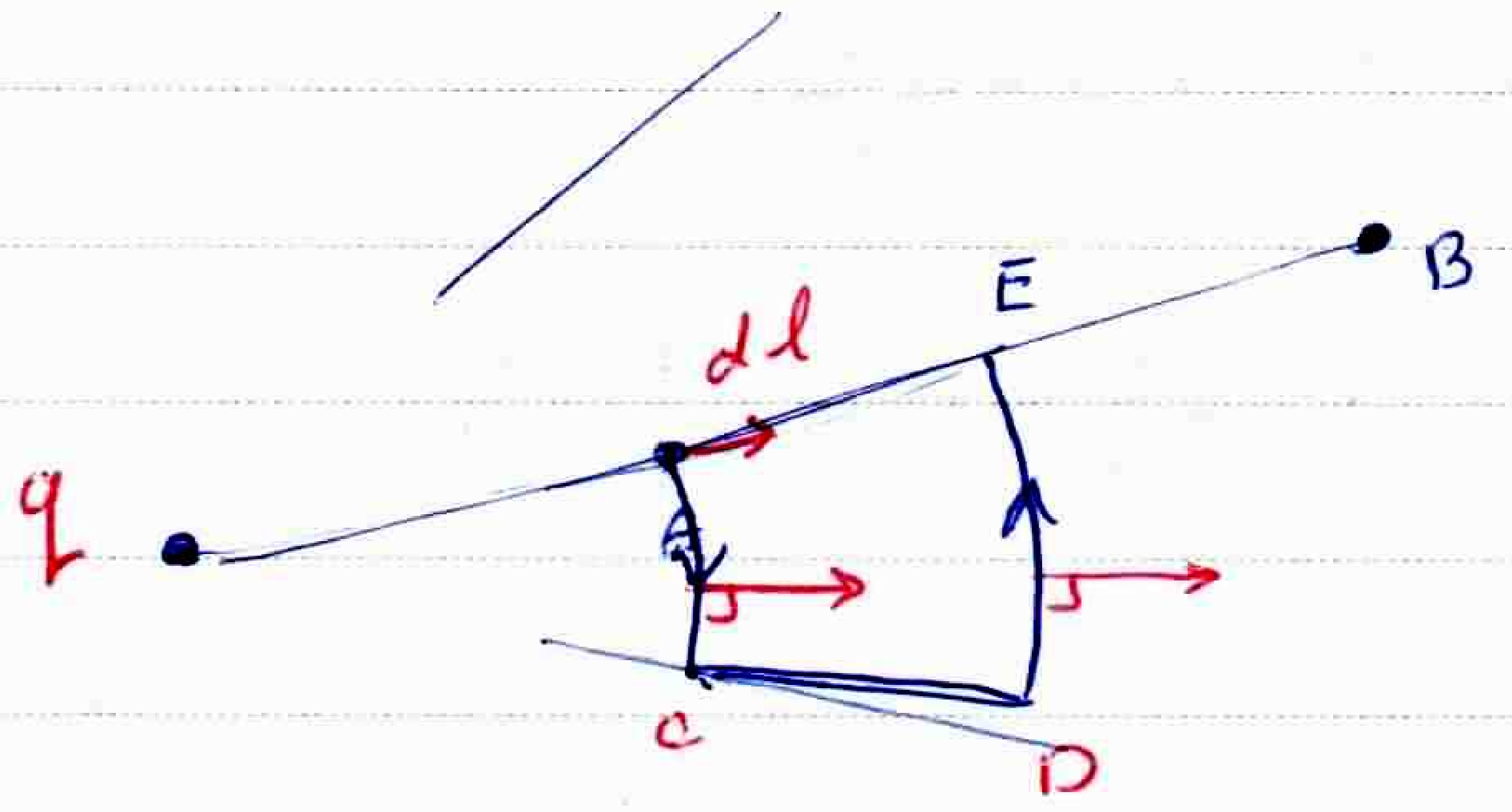
صورت بسته :

یعنی بین دو نقطه‌ی A و B اختلاف پتانسیل داریم

که این تناقض است. پس در داخل میدان الکتریکی نداریم.



$$v_B - v_A = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$



$$\int_A^C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\int_C^D \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

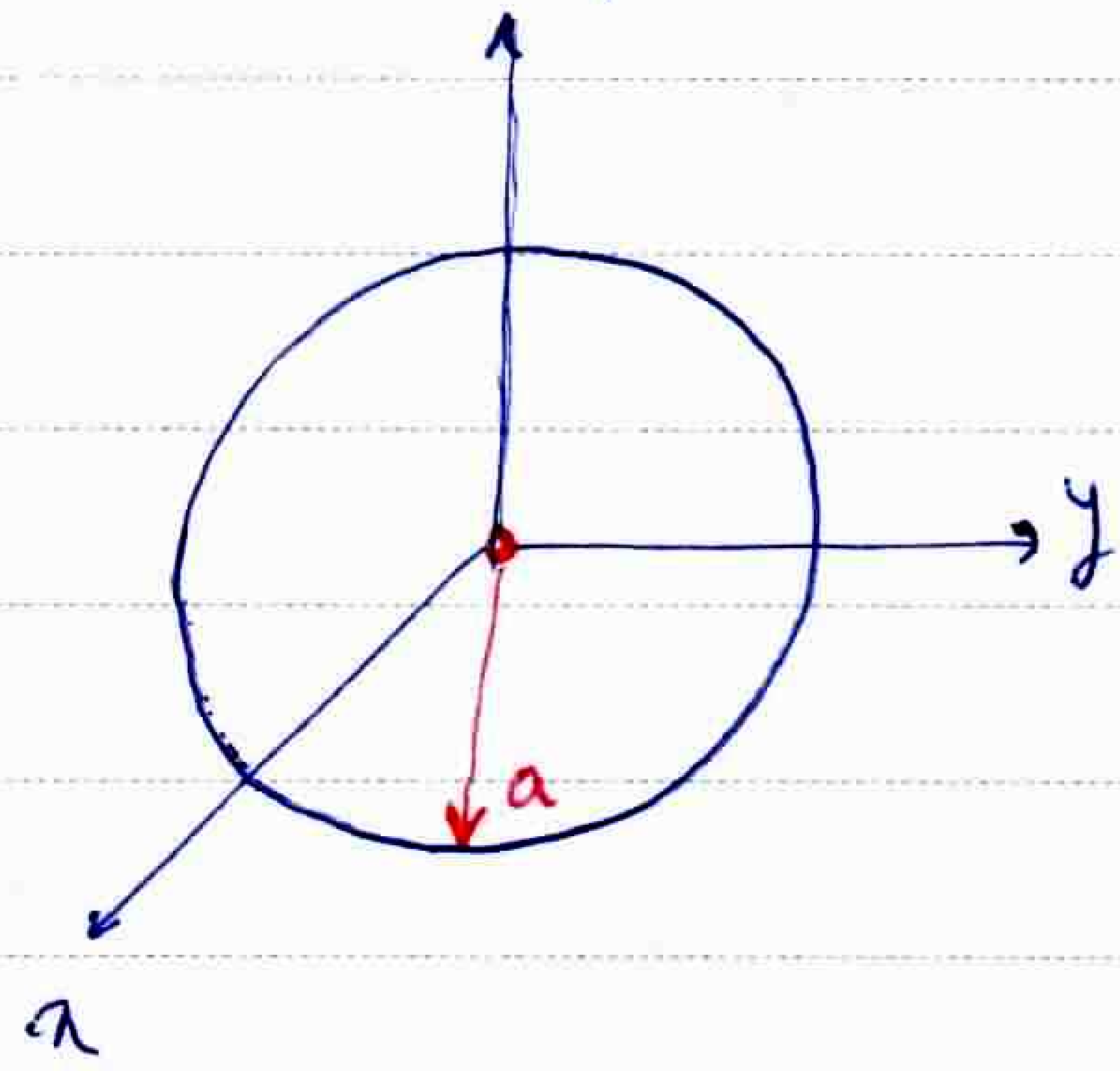
$$\int_D^E \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

اگر چند بار داشتیم، از اصل برهم نهی استفاده می‌کنیم.

می‌توانیم، با استفاده از این دندانه‌ها، مسیرهایی به شکل مختلف بسازیم.

مثال: پتانسیل یک پوسته‌ی کروی باردار :

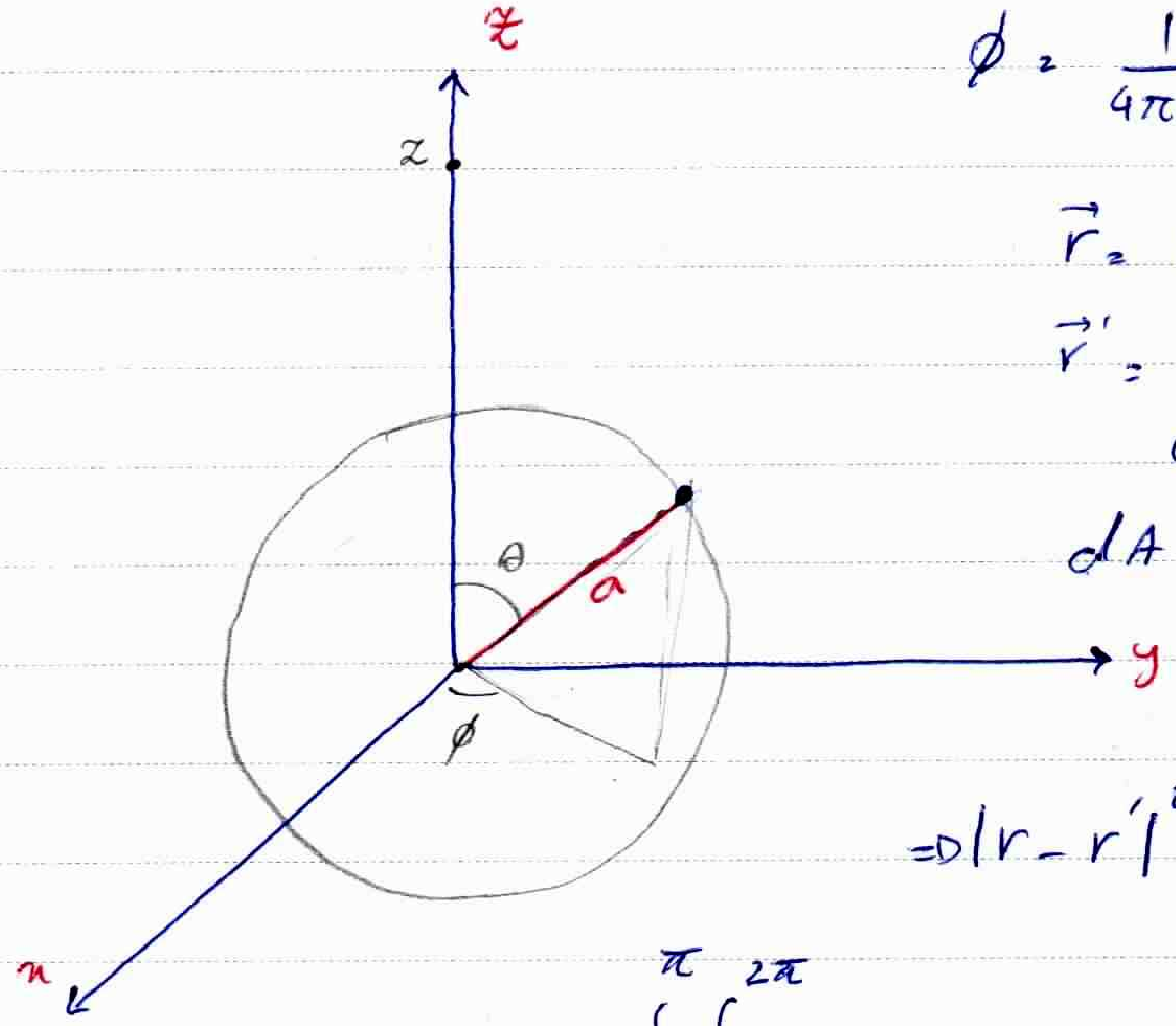
مقدار بار q



$$\sigma = \frac{q}{4\pi a^2}$$

PAPCO

Subject:
Date



$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\sigma\, dA}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$\vec{r} = z\,k$$

$$\vec{r}' = a\,\mathrm{Sin}\theta\, C\phi\,\hat{i} + a\,\mathrm{Sin}\theta\,\mathrm{Sin}\phi\,\hat{j}$$
$$a\, C\theta\, \hat{k}$$

$$dA = a.\mathrm{Sin}\,\theta . d\phi . a . d\theta$$

$$\Rightarrow |r - r'|^2 = z^2 + a^2 - 2az\,C\theta$$

$$\Rightarrow \Phi = \frac{\sigma a^2}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{Sin}\,\theta\, d\theta\, d\phi}{\sqrt{z^2+a^2-2az\,C\theta}}$$

$$= \frac{2\pi\sigma a^2}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{Sin}\,\theta\, d\theta}{\sqrt{z^2+a^2-2az\,C\theta}}$$

$$z^2+a^2-2az\,C\theta = u \qquad \Rightarrow du = 2az\,\mathrm{Si}\,\theta\, d\theta$$
$$u_0 = (z-a)^2 \qquad u_1 = (z+a)^2$$

$$\Rightarrow \Phi = \frac{\sigma a^{\cancel{2}}}{2\varepsilon_0}\frac{1}{2az}\int_{u_0}^{u_1} u^{-\frac{1}{2}}\, du = \frac{4\sigma a^2 2\pi}{4\varepsilon_0\, z\, a\pi}\Big\{ |z+a| - |z-a| \Big\}$$

$$\Rightarrow \phi = \frac{2\pi\sigma a^2}{4\pi\varepsilon_0}\begin{cases} \frac{2}{z} & z \geqslant a \\ \frac{2}{a} & z \leqslant a \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Phi = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{z} & z \leqslant a \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a} & z \leqslant a \end{cases}$$

Subject:
Date

این نتیجه شبیه قانون پوسته ها است. یعنی اگر $z \gg a$ ، مثل این است که تمام بار را در مرکز جمع کنیم.

در داخل کره هم، چون میدان صفر است، پس پتانسیل تمام نقاط یکسان است.

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi$$

$$\Rightarrow E_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \qquad E_y = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

$$E_{\cancel{y}z} = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

هم چنین داشتیم:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}E_x + \frac{\partial}{\partial y}E_y + \frac{\partial}{\partial z}E_z = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2}\Phi + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\Phi + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\Phi = \frac{-\rho}{\varepsilon_0}$$

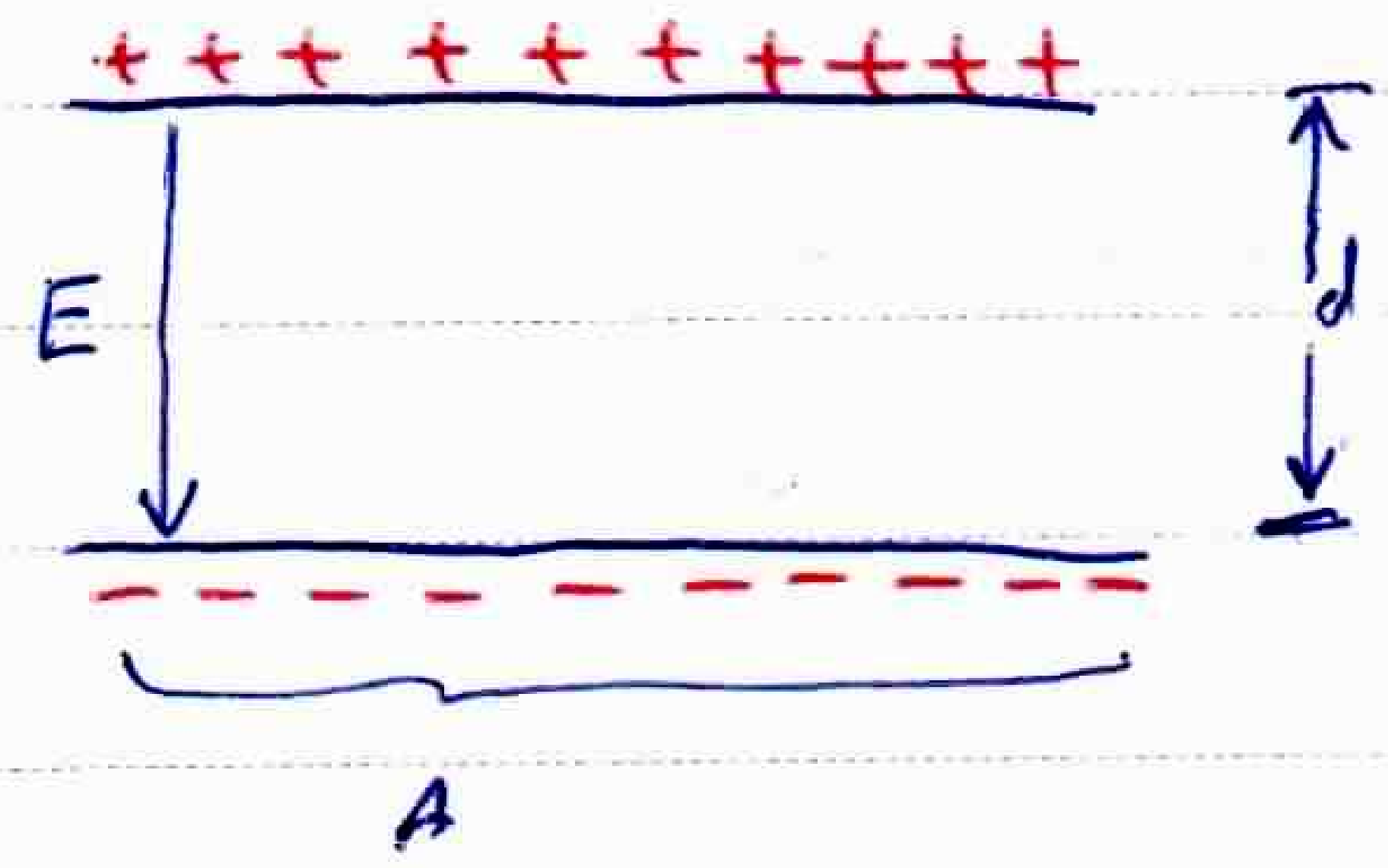
$$\Rightarrow \nabla^2\Phi = \frac{-\rho}{\varepsilon_0}$$

Laplacian

یعنی هر معادله ای برای پتانسیل واقعی نیست.

Subject:
Date

خازن ها و دی الکتریک ها



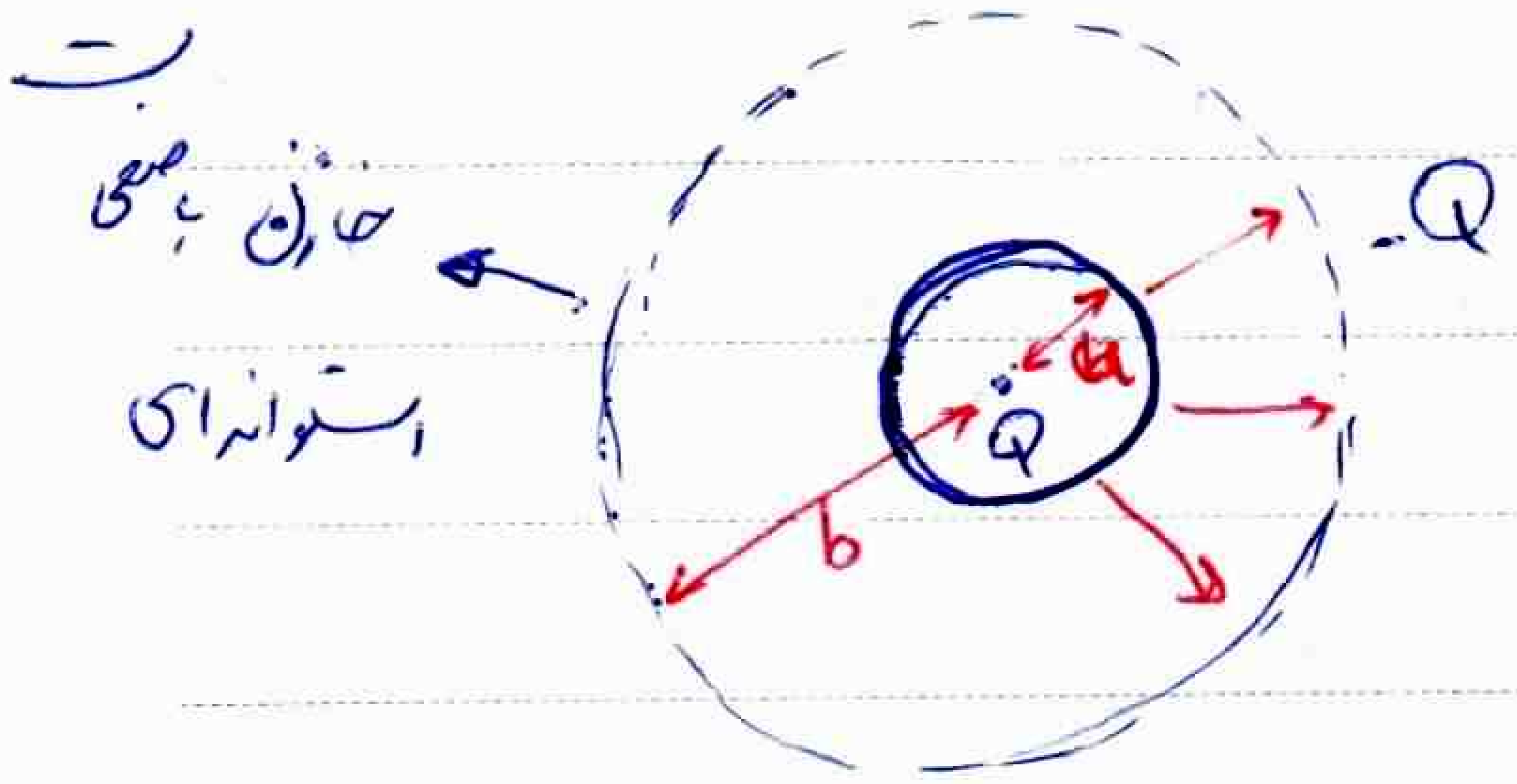
$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ $V =$ اختلاف پتانسیل $= Ed$

$Q = \sigma \cdot A$ مقدار بار ذخیره شده

تعریف می کنیم : $C := \frac{Q}{V} = \frac{\sigma A}{E \cdot d} = \frac{\sigma A}{\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \cdot d} \Rightarrow C = \varepsilon_0 \frac{A}{d}$

← نشان دهنده ی این است که ظرفیت خازن تنها به هندسه خازن بستگی دارد.

واحد : $C : \frac{coulomb}{volt} = Farad$



مثال : مطابق قانون گاوس : $\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$

$$\Rightarrow E \oint dA = E \int_0^{2\pi} r d\theta L = E 2\pi r l$$

$$\Rightarrow E = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 r L}$$

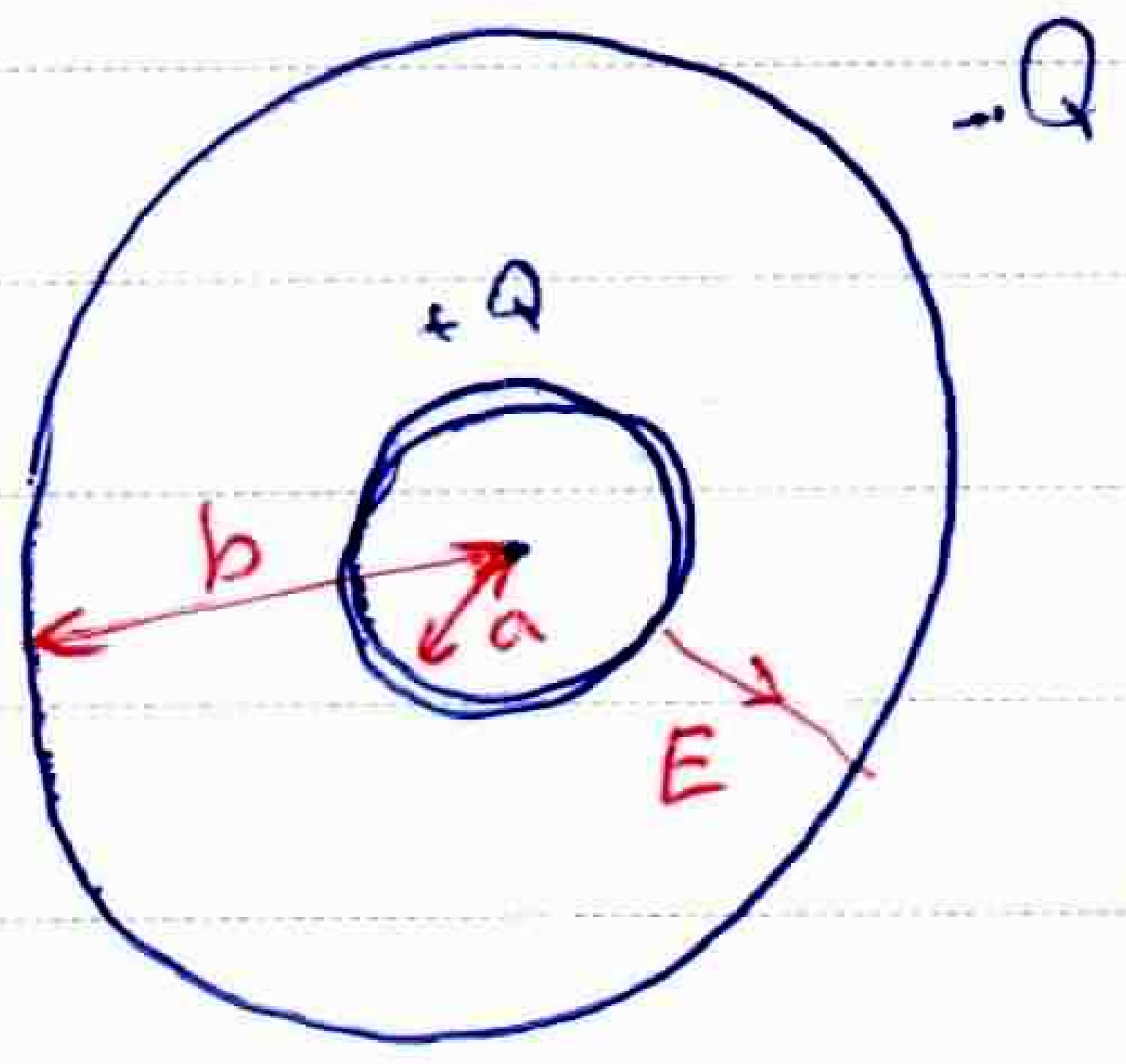
$$V = \int_a^b E dr = \int_a^b \frac{Q}{2\varepsilon_0 \pi} \frac{dr}{rL} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L} \ln\frac{b}{a} \Rightarrow C = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln\frac{b}{a}}$$

مثال عددی :

$A = 1cm^2$ $d = 1mm$

$$C = \varepsilon_0 \frac{A}{d} = 8.85 \times 10^{-12} \times \frac{10^{-4}}{10^{-3}} = 0.88\ pF$$

مثال : خازن با صفحات کروی



$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2}$$

$$\Rightarrow V = \left| \int_a^b E\,dr \right| = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

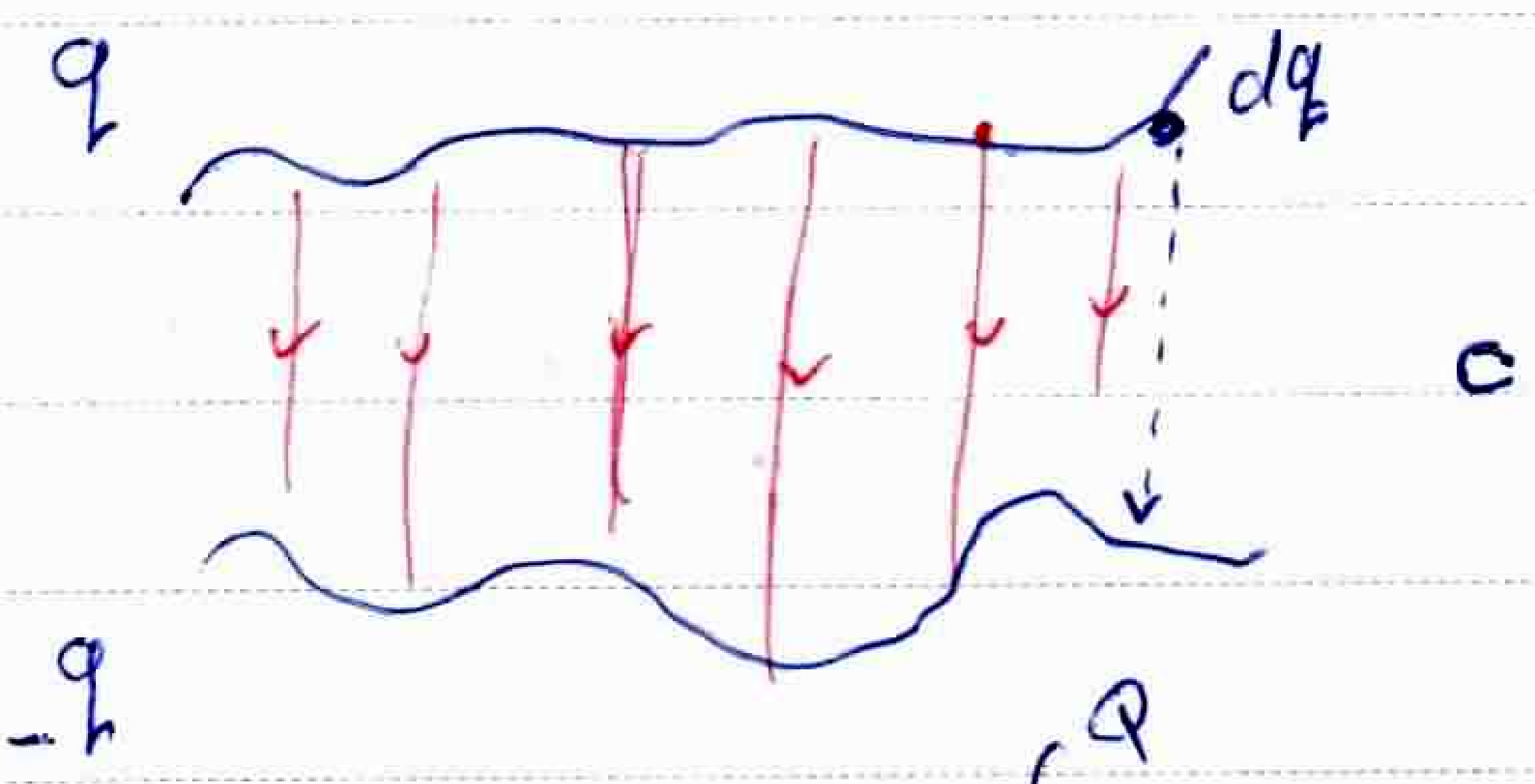
$$C = \frac{Q}{V} \Rightarrow C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{ba}{b-a}$$

اگر فقط یک کره باشد : $\lim_{b \to \infty} C = 4\pi\varepsilon_0 a$

برای تمام خازن ها اگر $Q \to 2Q$ آنگاه $V \to 2V$, $E \to 2E$

$\Rightarrow C = \frac{Q}{V}$: depends on Geometry

انرژی: بار کل : Q ظرفیت : C

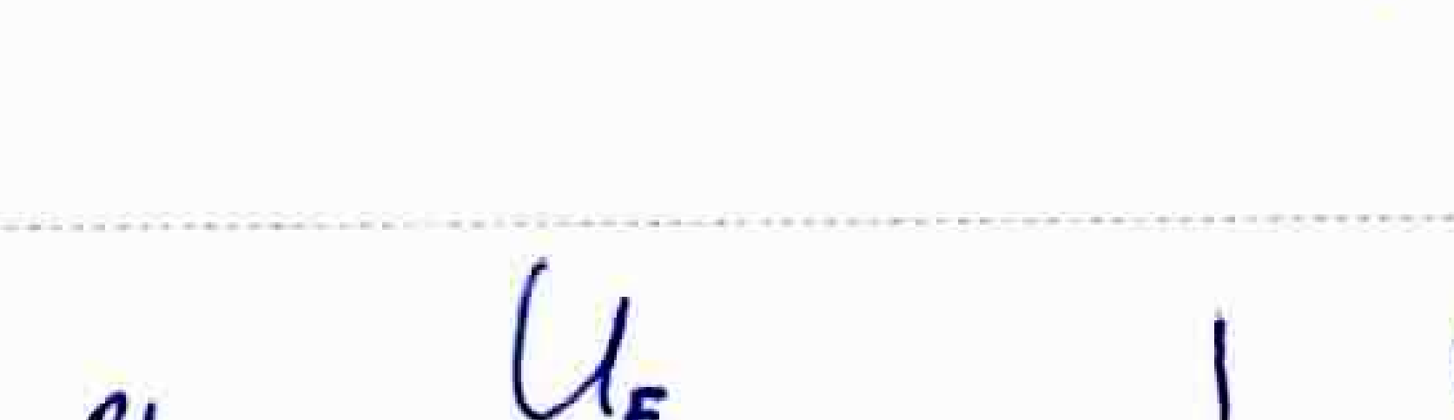


$$C = \frac{q}{V} \Rightarrow V = \frac{q}{C}$$

$$dW = V\,dq$$

$$\Rightarrow W = \int_0^Q V\,dq = \int_0^Q \frac{q\,dq}{C} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

انرژی ذخیره شده در خازن $U_E = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}QV$



$$U_E = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{Q}{\varepsilon_0 A} d$$

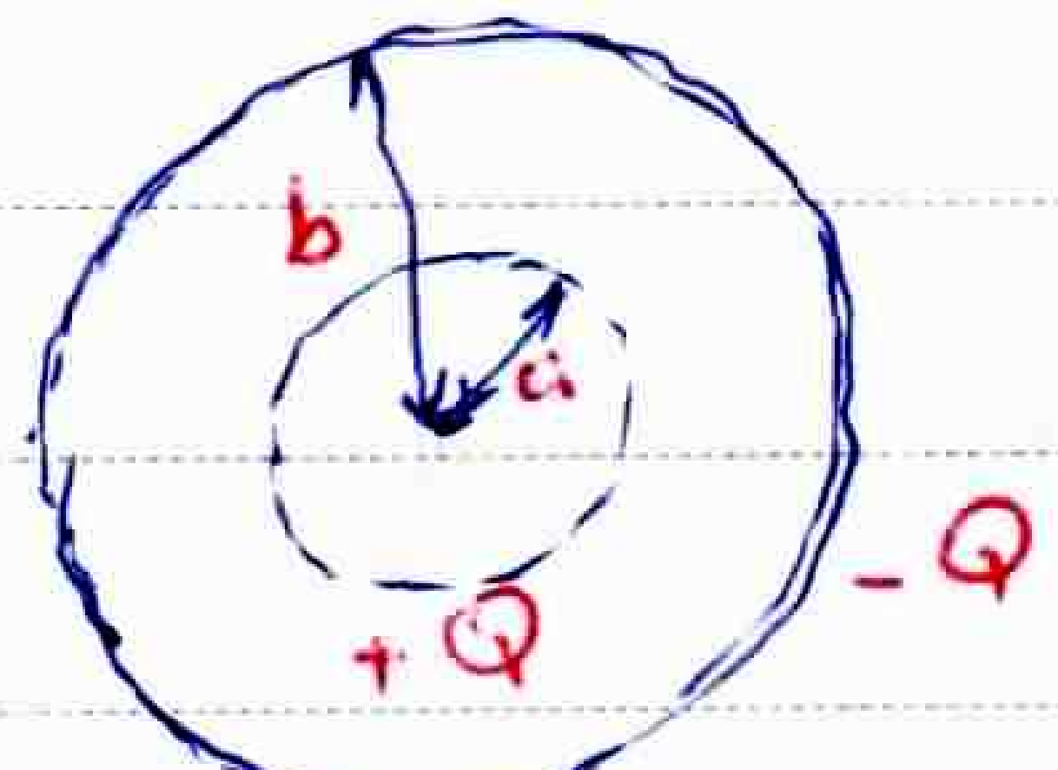
$$u_E = \frac{U_E}{Ad} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{\varepsilon_0 A^2} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} \Rightarrow u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

می توان ثابت کرد که بصورت کلی، چگالی انرژی از همین رابطه بدست می آید

Subject:
Date

مثال: خازن با صفحات کروی:

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}$$



$$C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{ba}{b-a}$$

$$\Rightarrow U_E = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{b-a}{ba} Q^2$$

المان $dv = 4\pi r^2 dr$

$$U_E = \int u_E\, dv = \int \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 dv = \frac{1}{2}4\pi\varepsilon_0\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\int_a^b \frac{1}{r^4}r^2 dr$$

$$= \frac{1}{2}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right) \checkmark$$

مثال: انرژی که برای باردار کردن یک کره‌ی توپر با چگالی ρ در شعاع a لازم است.

$$E = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} = \frac{\beta}{r^2} & r > a \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r}{a^3} = \alpha r & r < a \end{cases} \Rightarrow u_E = \begin{cases} \frac{1}{2}\varepsilon_0\frac{\beta^2}{r^4} & r > a \\ \frac{1}{2}\varepsilon\alpha^2 r^2 \end{cases}$$

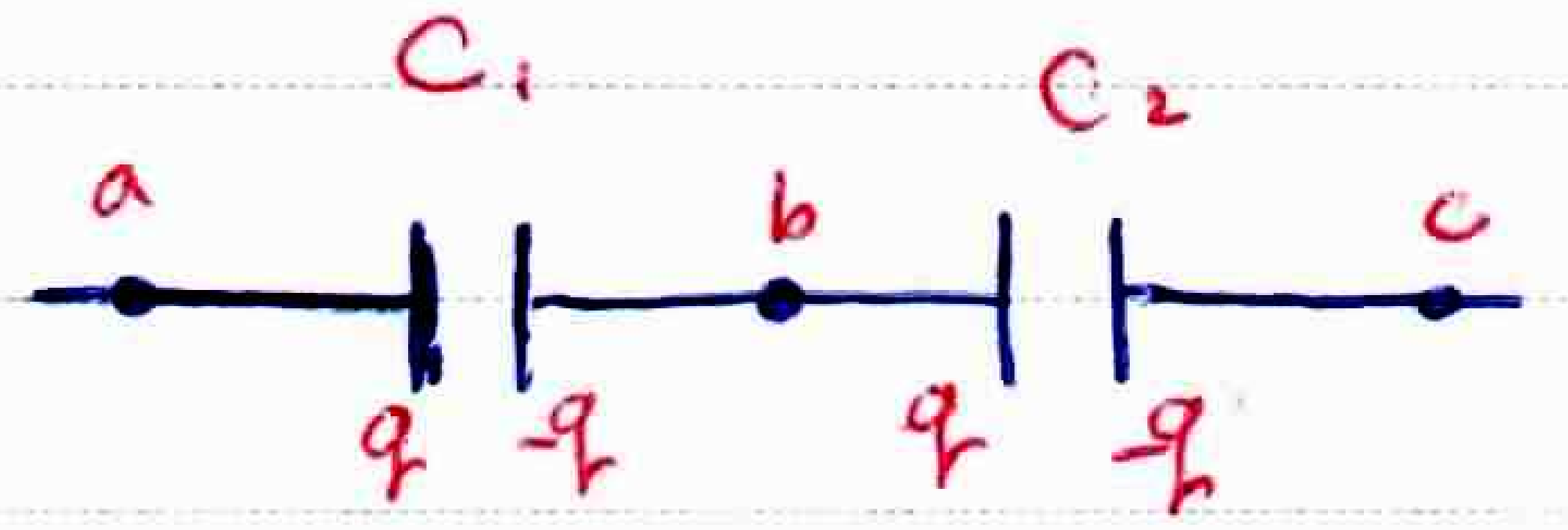
$$U_E = \int u_E\, dv = \int_0^a \left(\frac{1}{2}\varepsilon_0\frac{\beta^2}{r^4}\right)dv + \int_a^\infty\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0\alpha^2 r^2\right)dv$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon_0 4\pi\alpha^2\frac{1}{5}a^5 + 2\pi\varepsilon_0\beta^2\frac{1}{a}$$

$$U_E = \frac{3}{20}\frac{1}{\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{a}$$

خازن های سری و موازی

در سری :



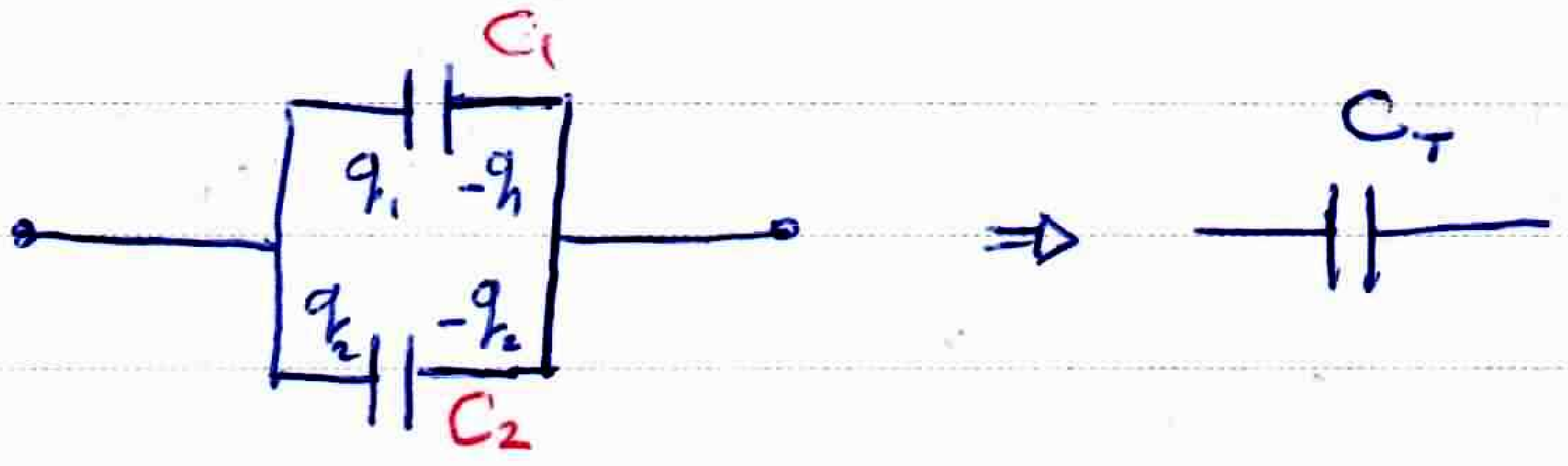
$$V_{ac} = V_{ab} + V_{bc}$$

$$\Rightarrow V_1 + V_2 = V \Rightarrow \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} = \frac{Q}{C} \Rightarrow \frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

برای n خازن :

$$\frac{1}{C_T} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}$$

در موازی :



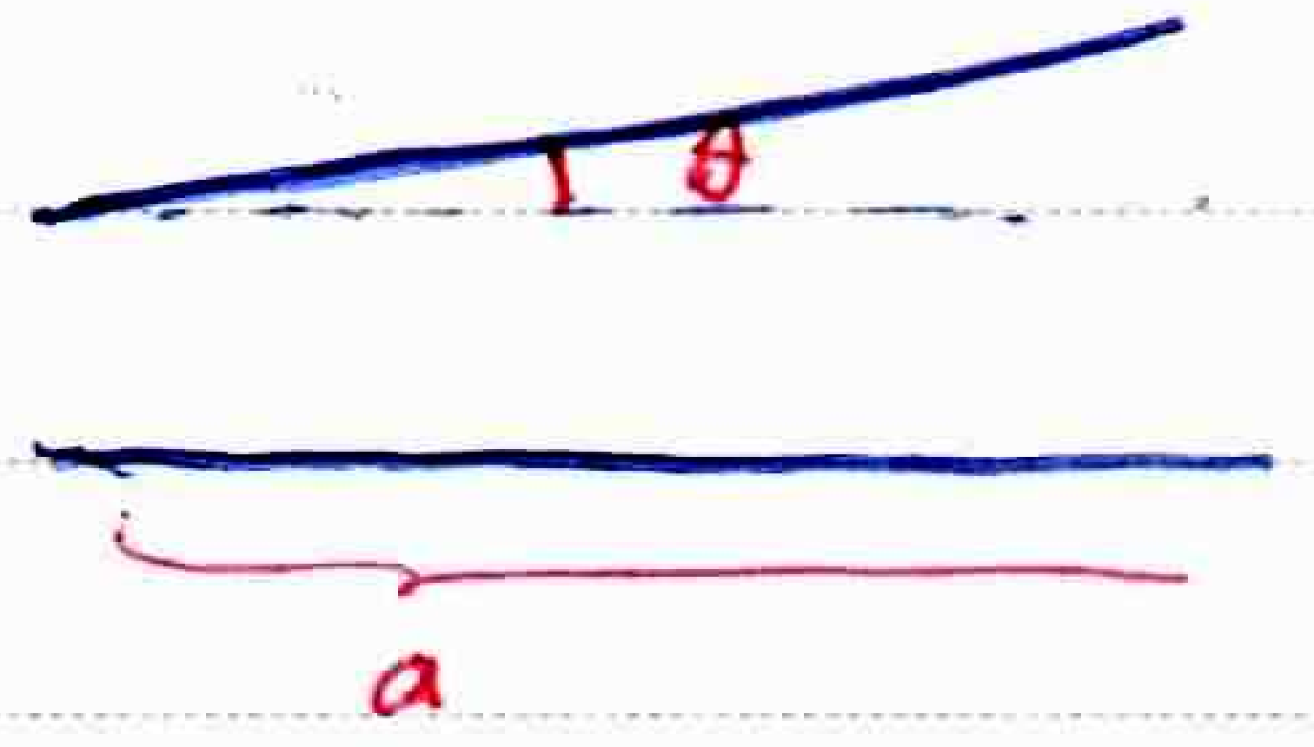
$$\Rightarrow Q_T = Q_1 + Q_2 \Rightarrow C_T \cancel{V_T} = C_1 \cancel{V_1} + C_2 \cancel{V_2}$$

$$\Rightarrow C_T = C_1 + C_2$$

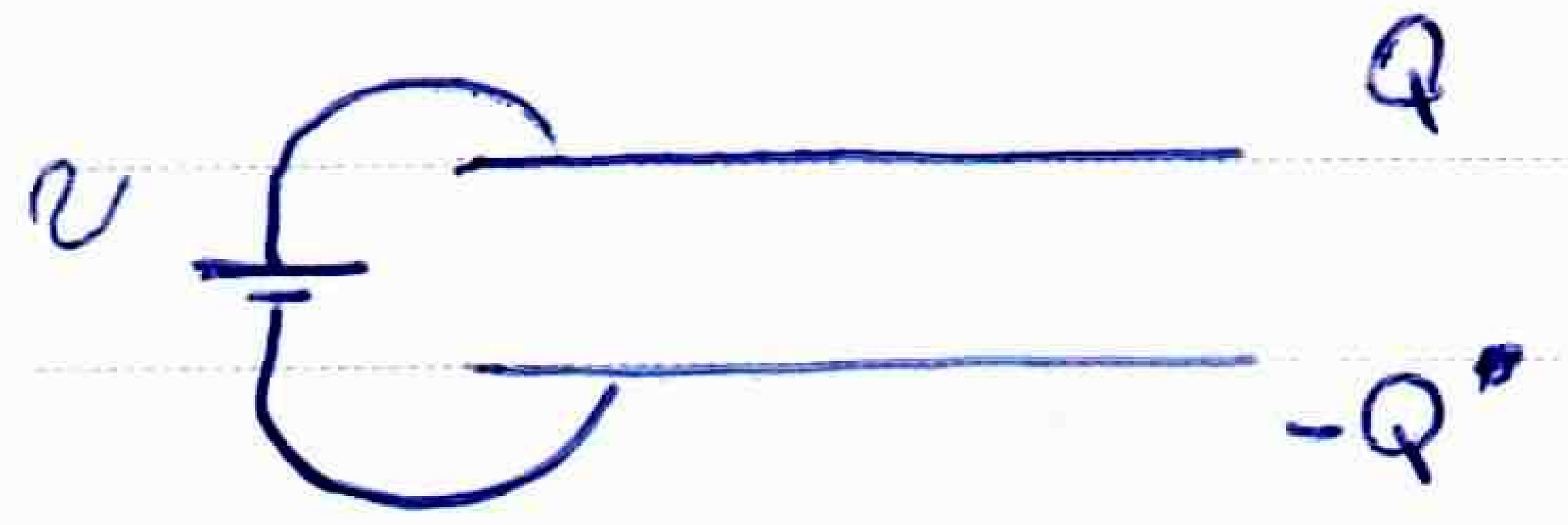
برای n خازن :

$$C_T = \sum_{i=1}^{n} C_i$$

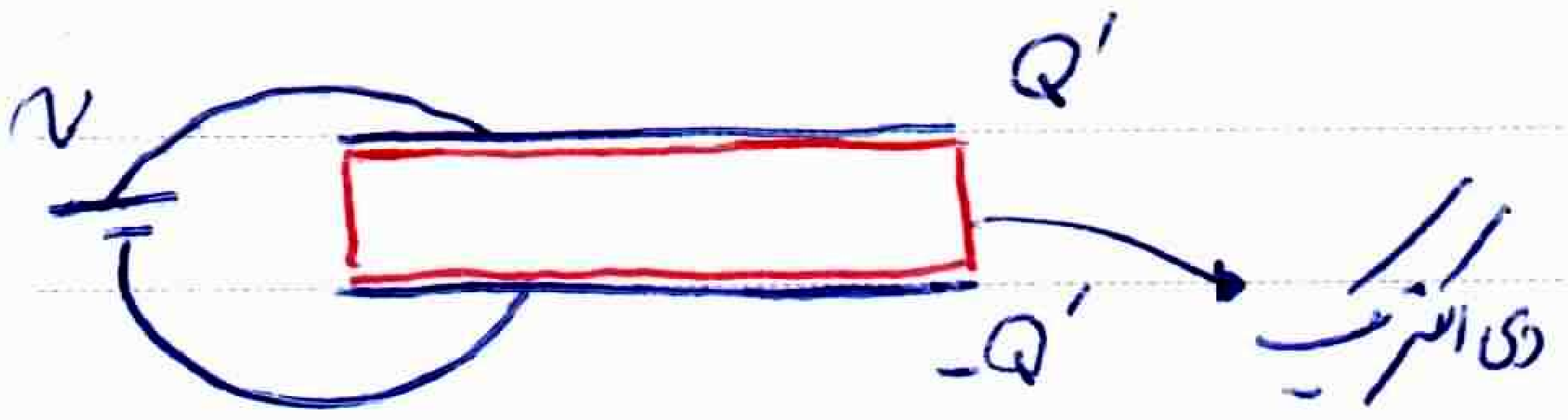
مثال : طول صفحه a ، عرض صفحه b ، θ زاویه‌ی کوچک
ظرفیت ؟



دی الکتریک ها



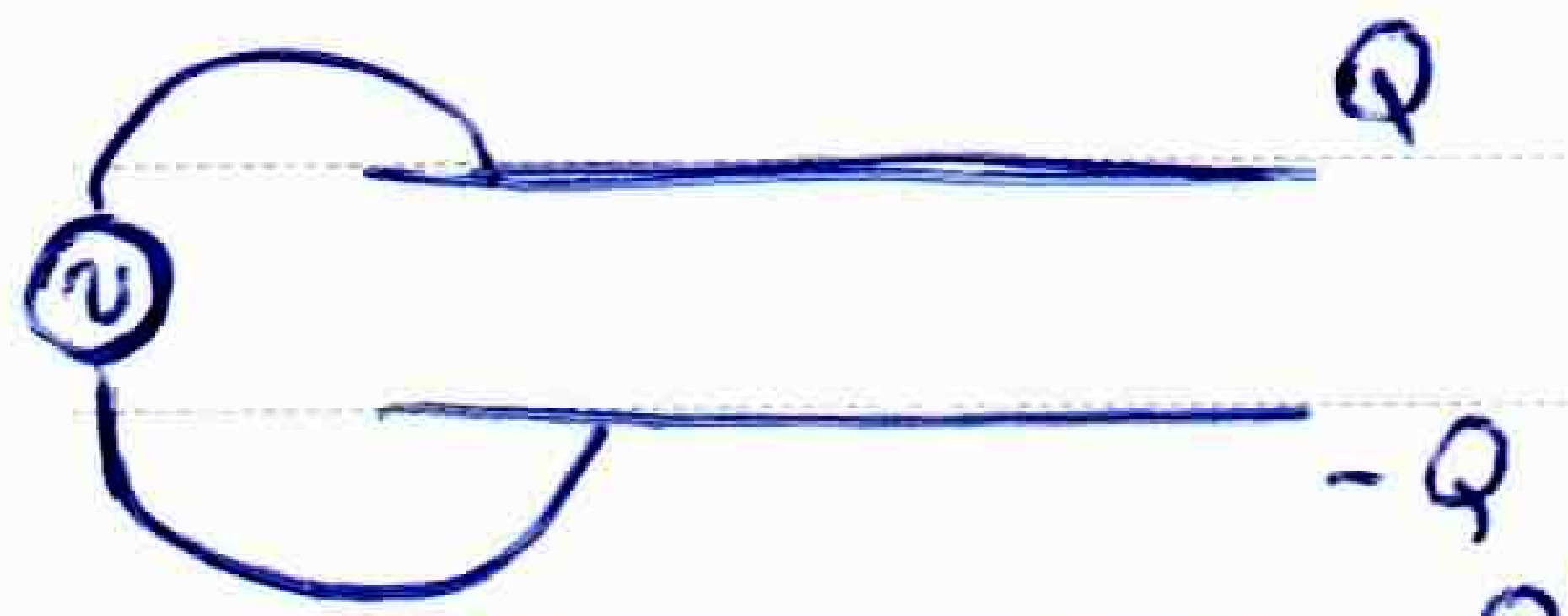
$$Q = CV$$

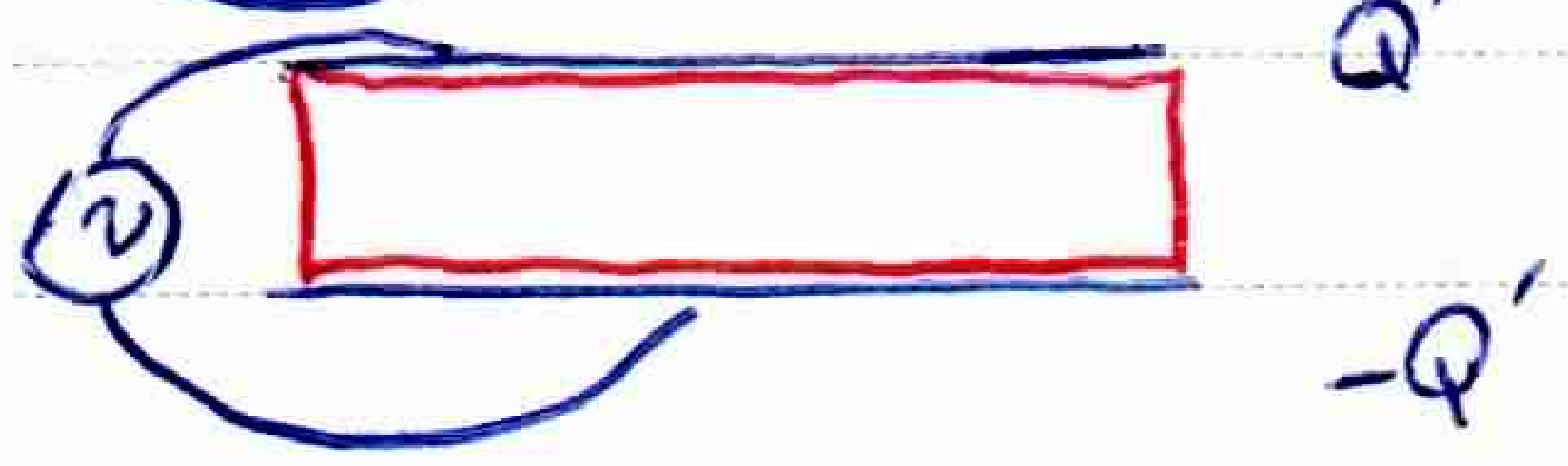


$$Q' = K\,Q$$

$$\Rightarrow C' = KC = K\frac{\varepsilon_0 A}{d}$$

ضریب دی الکتریک

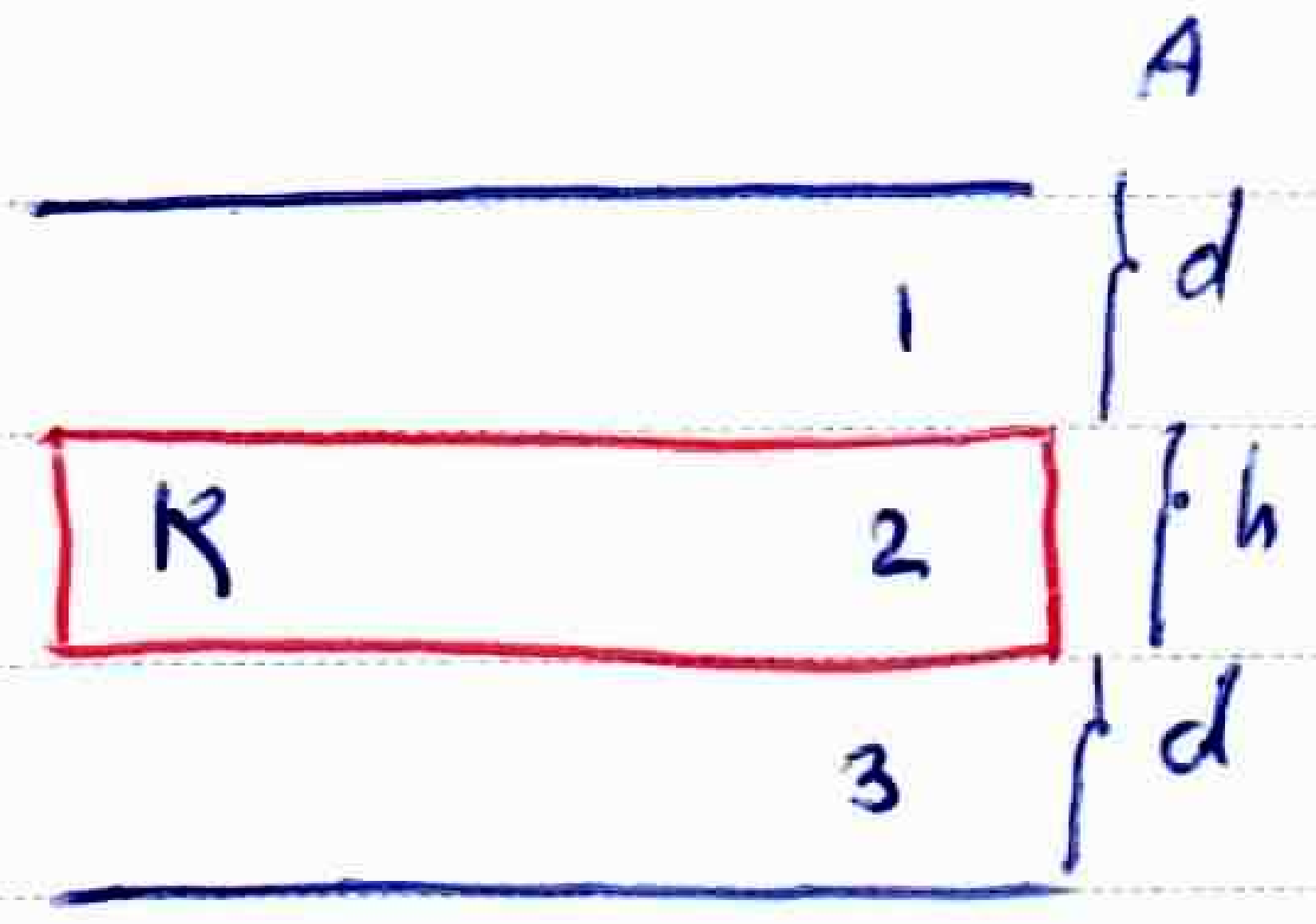




$$V = \frac{Q}{C}$$

$$V' = \frac{V}{K} \Rightarrow C' = KC$$

مثال:



این خازن مانند سه خازن سری است

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{C} = \frac{d}{\varepsilon_0 A} + \frac{h}{K\varepsilon_0 A} + \frac{d}{\varepsilon_0 A} \Rightarrow \frac{1}{C} = \frac{1}{\varepsilon_0 A}\left(2d + \frac{h}{K}\right)$$

$$\Rightarrow C = \frac{K\varepsilon_0 A}{2Kd + h}$$

حالت های حدی:

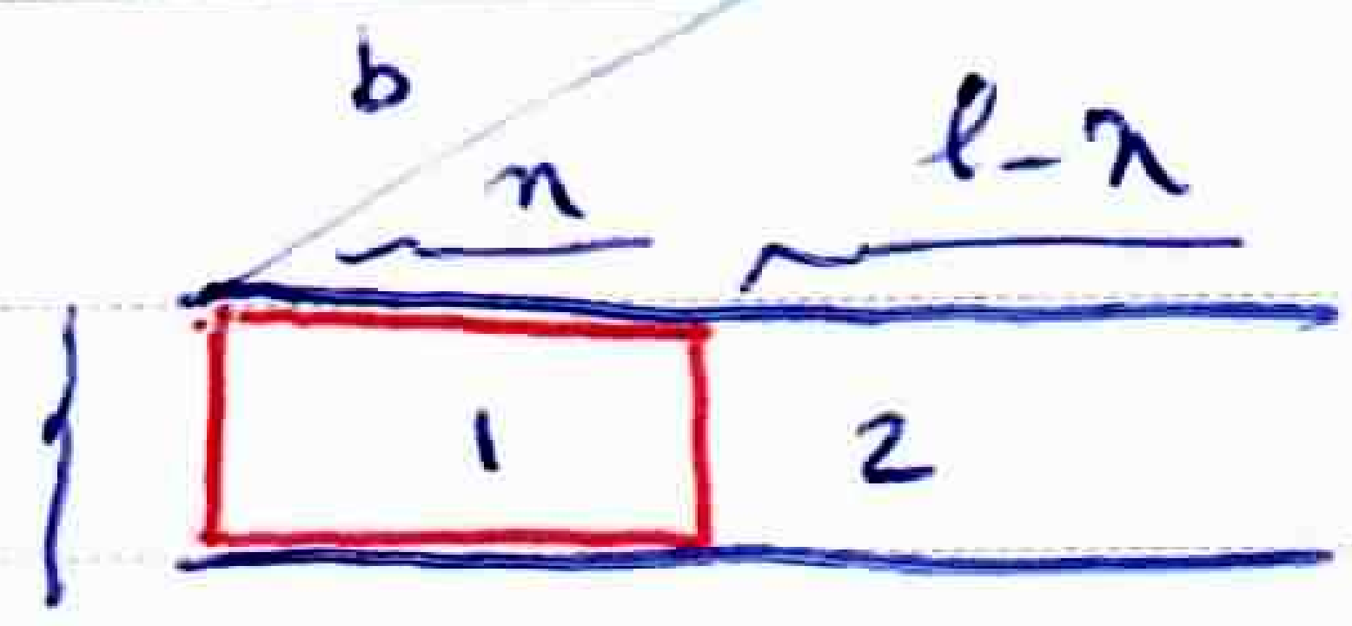
$$h = 0 \Rightarrow C = \frac{\varepsilon_0 A}{2d}$$

$$K = 1 \Rightarrow C = \frac{\varepsilon_0 A}{2d + h}$$

n. ahmadypour@gmail.com

Subject:
Date

مثال:

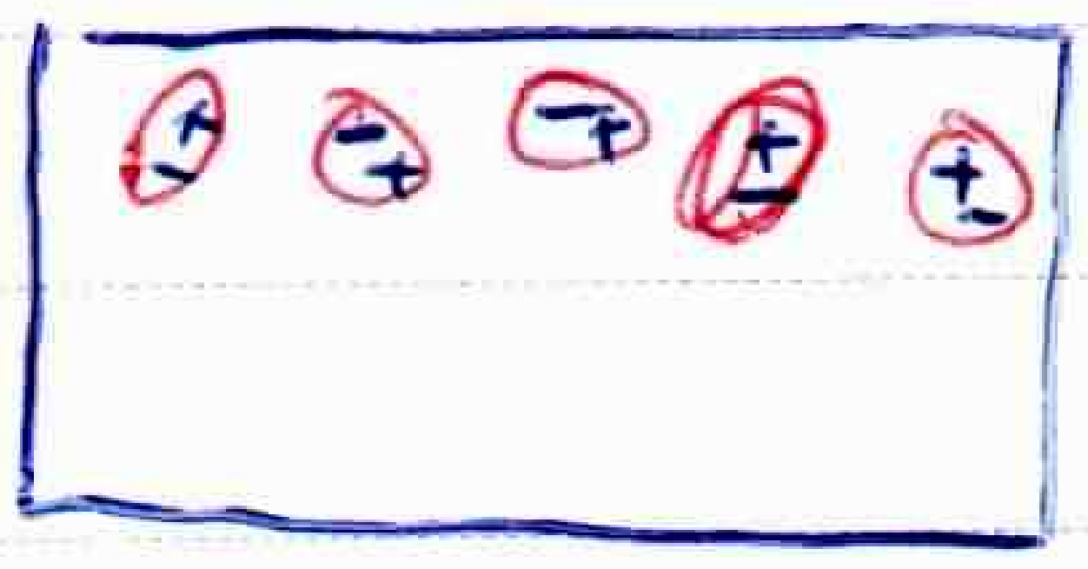


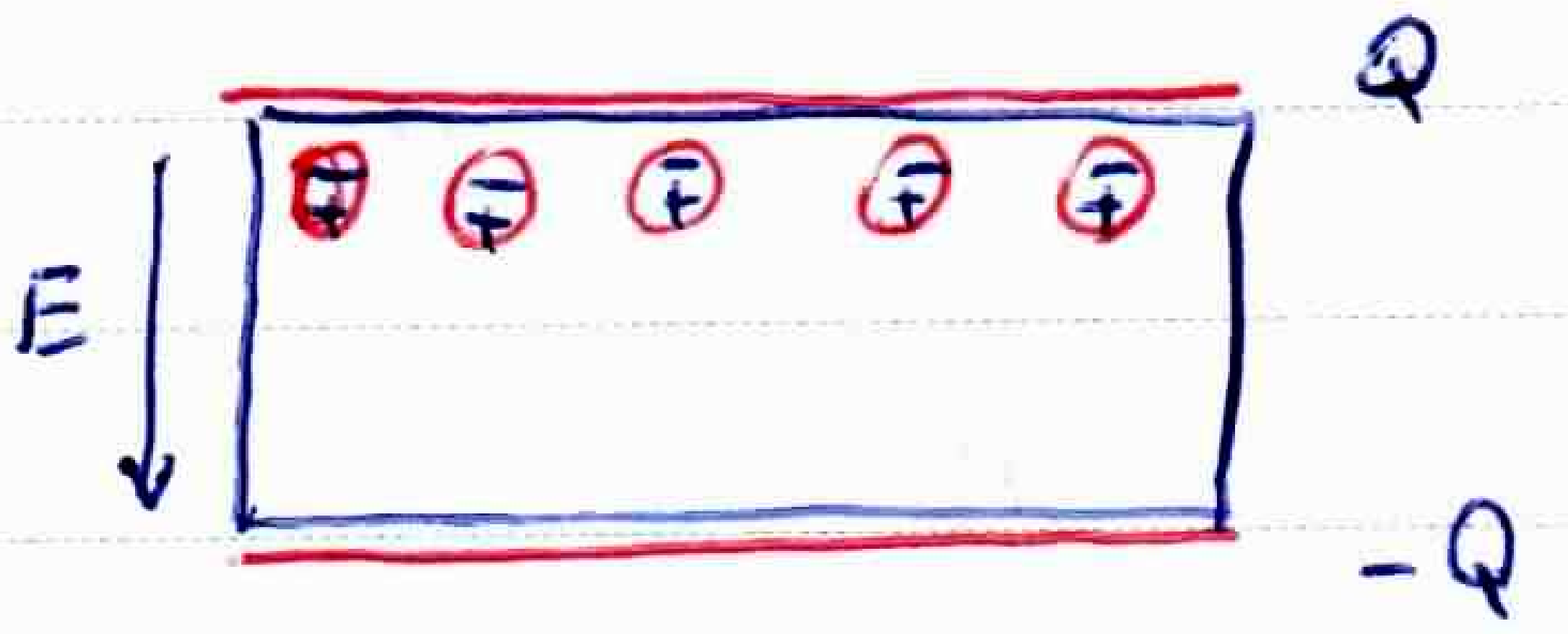
$$C = C_1 + C_2$$

$$\Rightarrow C = \frac{k\varepsilon_0}{d} bx + \frac{\varepsilon_0}{d}(l-x)b$$

ساختار داخلی دی الکتریک

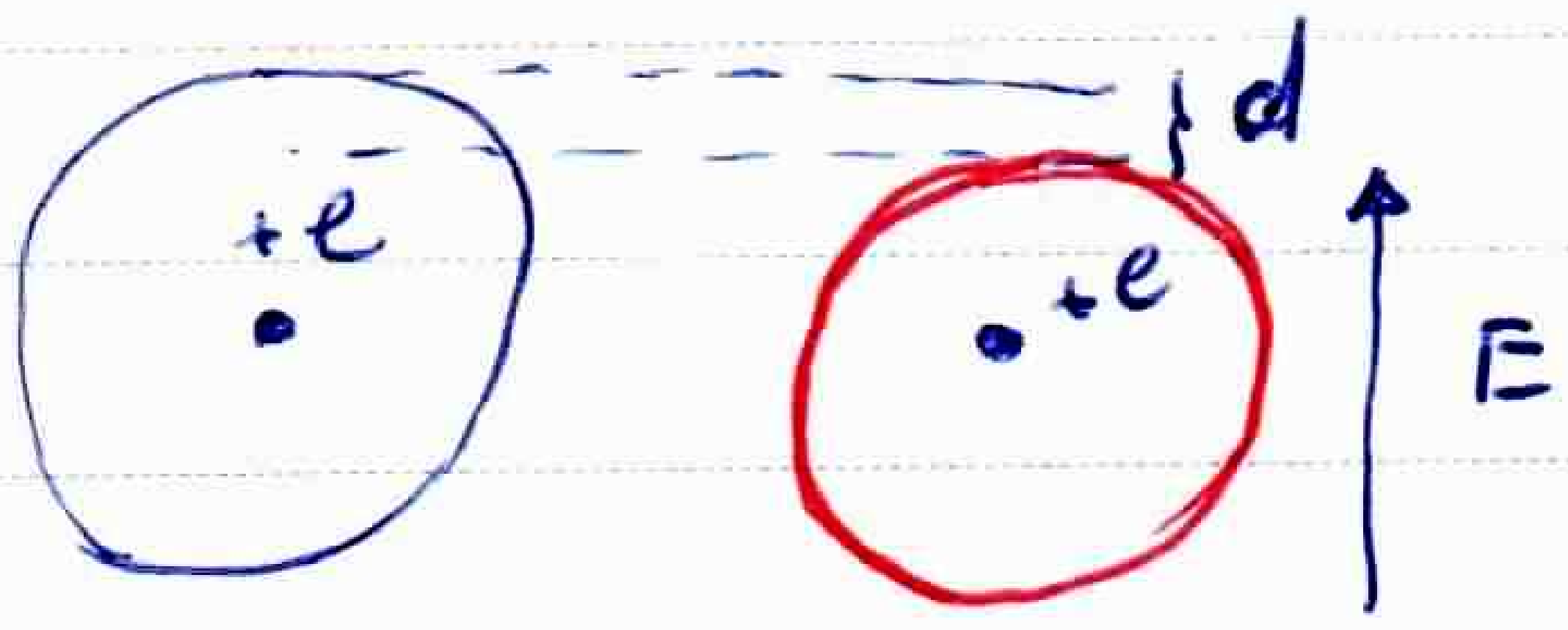
1) مولکول های دی الکتریک، دوقطبی باشند.



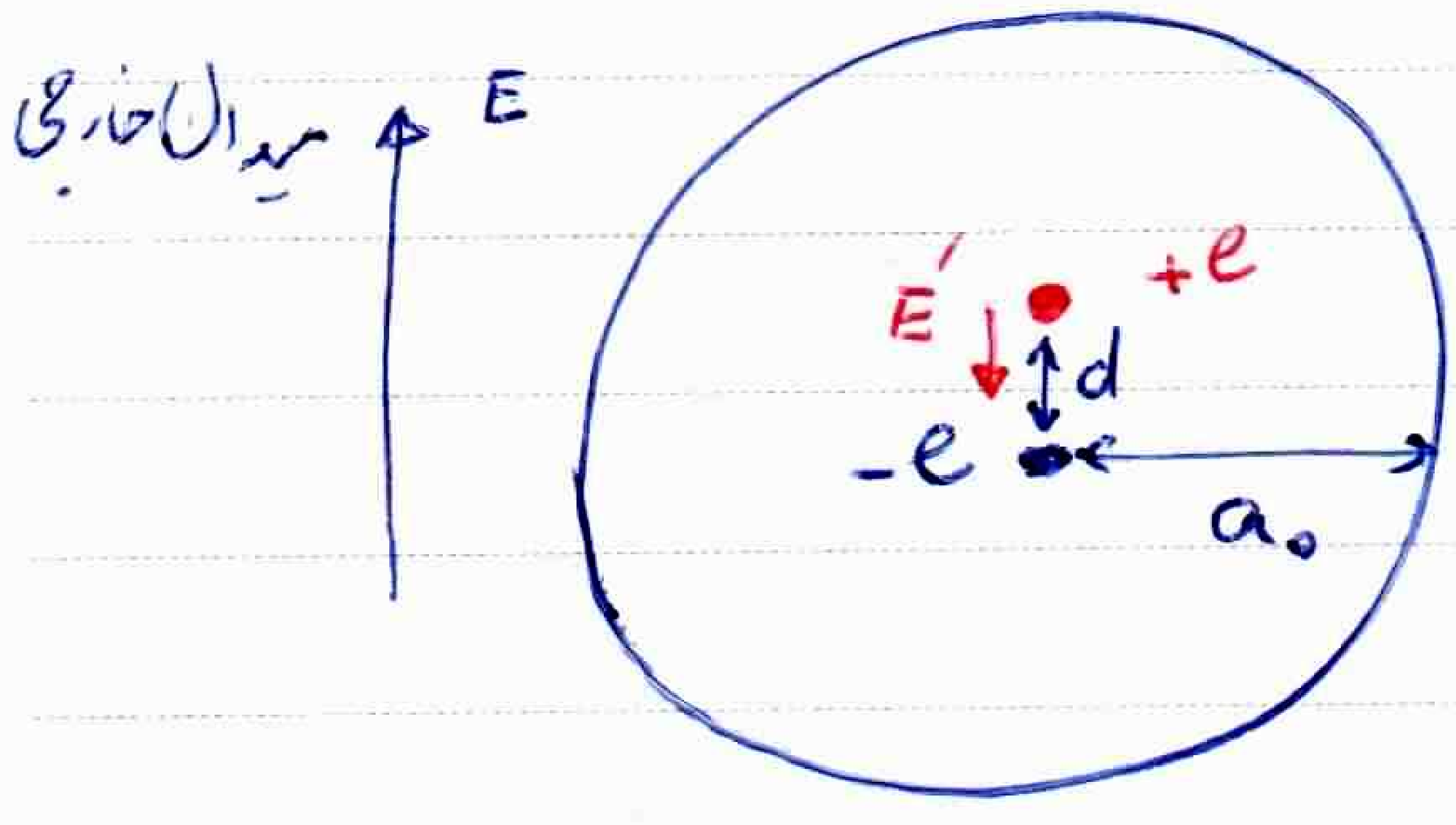


مولکول ها تا حدی با میدان هم راستا می شوند.

2) مولکول دی الکتریک دوقطبی نباشد.



در این حالت میدان، مولکول را قطبیده می کند.



ابر الکترونی را یک کره ی [illegible] در نظر می گیریم:

$$eE = eE' \Rightarrow E = E'$$

$$E' = \alpha d \qquad \alpha = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a_0^3}$$

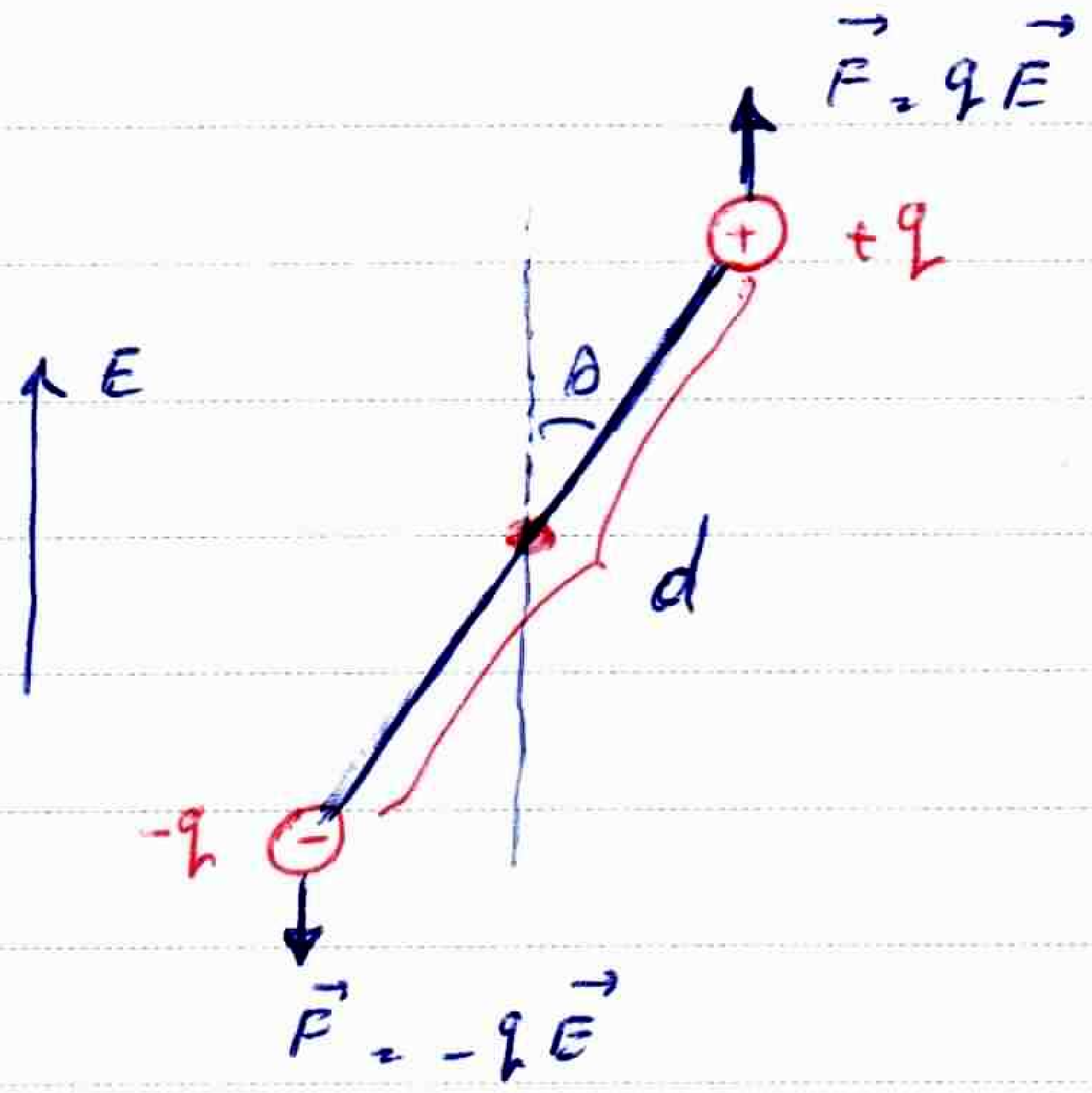
$$\Rightarrow E = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 a_0^3} d \Rightarrow \vec{P} = (4\pi\varepsilon_0 a_0^3)\vec{E}$$

$$\Rightarrow d = \frac{E}{e}(4\pi\varepsilon_0 a_0^3)$$

PAPCO

Subject:
Date

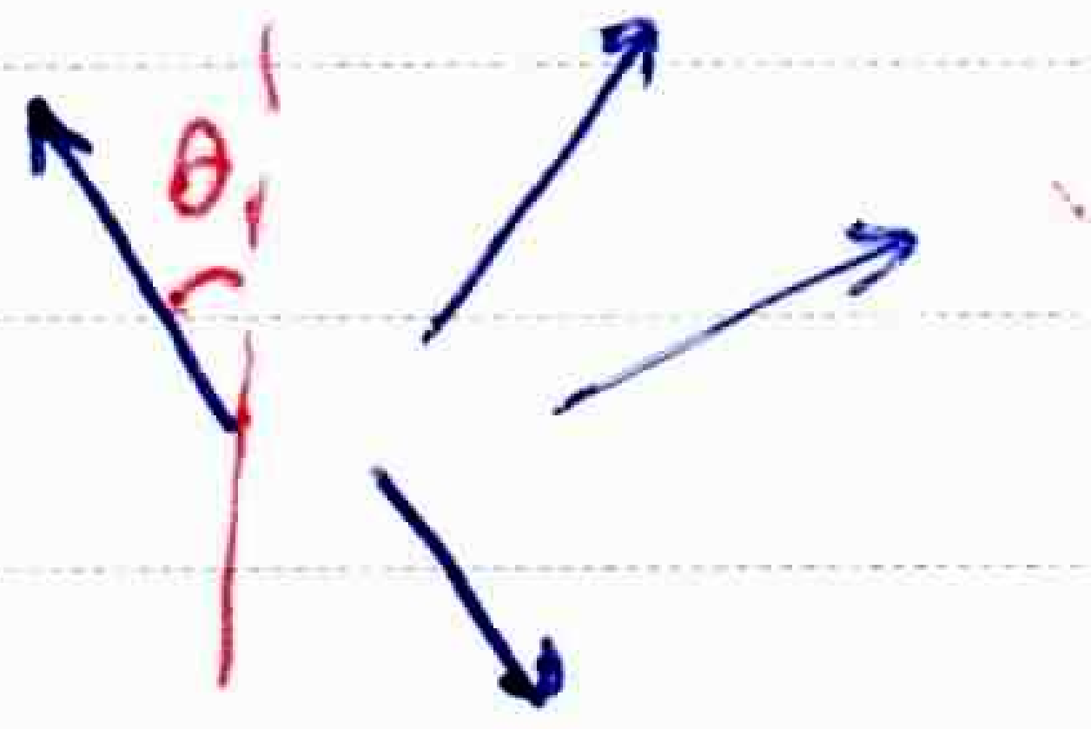
$d \simeq 10^{-\beta}\,cm$: $E = 10^{6}$ برای



$$|\tau| = qE\left(\frac{d}{2}\,Sin\theta\right) = (qd)\,E\,Sin\theta$$
$$= PE\,Sin\theta$$

$$\Rightarrow \vec{\tau} = \vec{P} \times \vec{E}$$
$$U = -\vec{P}\cdot\vec{E} = -\int \vec{\tau}\cdot d\vec{\theta}$$

تعریف : متوسط یک مجموعه از دوقطبی ها :
$$\langle \vec{P} \rangle = \frac{\vec{P_1} + \vec{P_2} + \cdots + \vec{P_n}}{n}$$



+ برای مجموعه ای از ذرات دوقطبی داریم :

$$P(\theta) \propto e^{-\beta \mathcal{E}} \propto e^{-\beta(-Ep\cos\theta)}$$

$$\beta = \frac{1}{kT} \quad : \quad k = 1.38 \times 10^{-23}\ j/_k$$
ثابت بولتزمان

$$P(\theta) = \frac{1}{Z}\, e^{+\beta Ep\cos\theta}$$

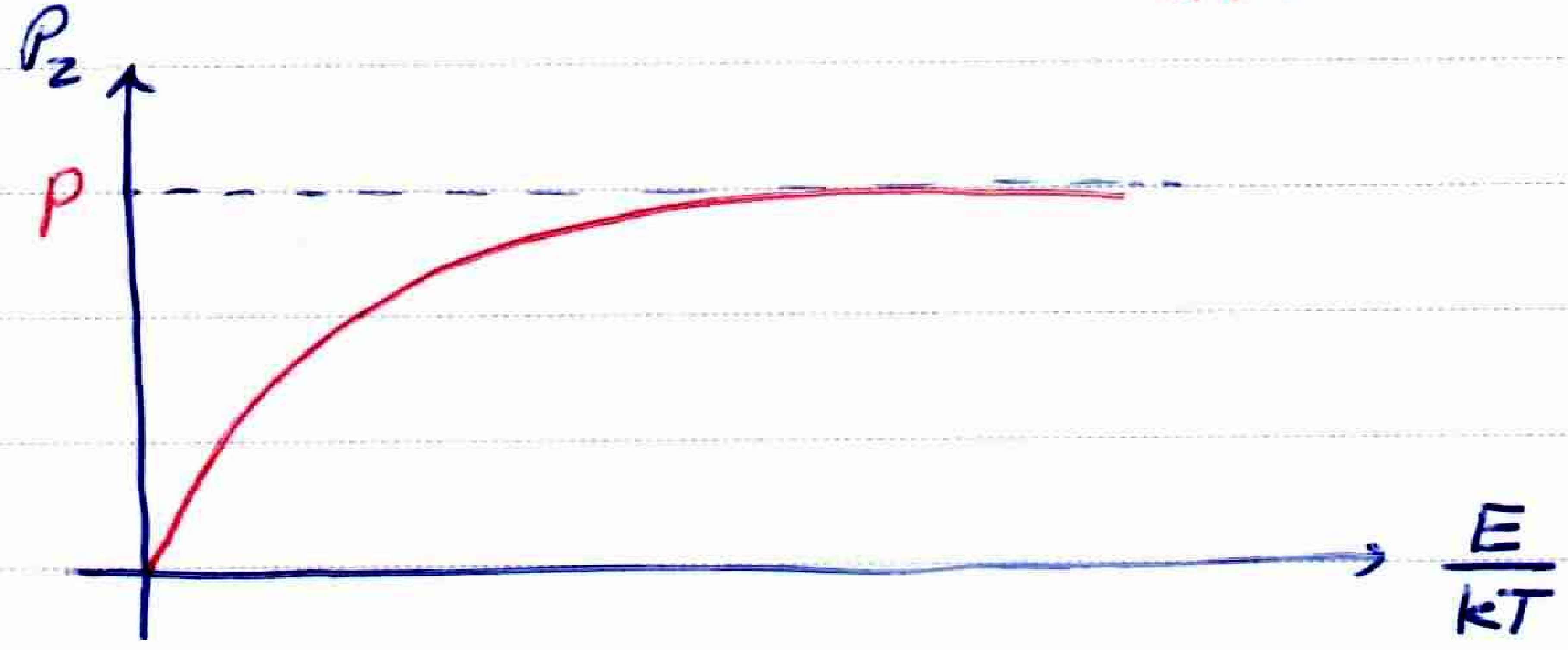
$$\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\phi=0}^{2\pi} P(\theta)\,\underbrace{Sin\theta\, d\theta\, d\phi}_{\text{زاویه ی فضایی}} = 1$$

ثابت Z از این انتگرال محاسبه می شود.

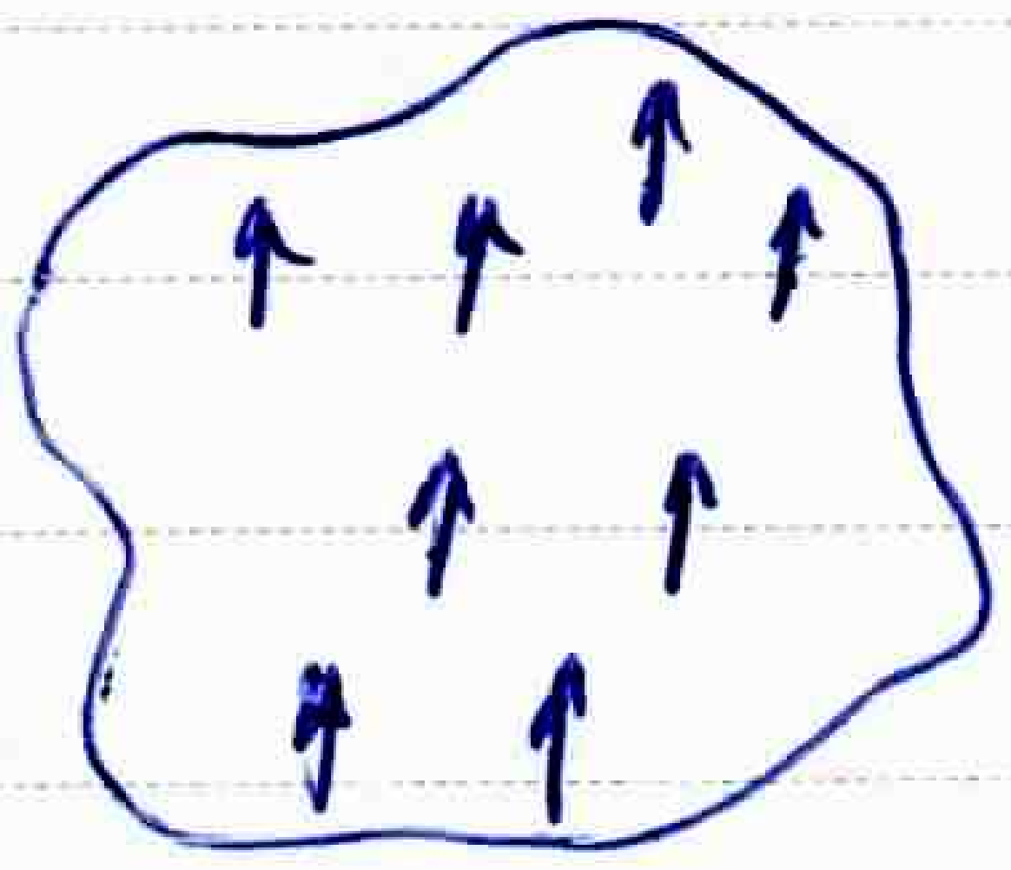
$$\langle P_z \rangle = \langle P \cos\theta \rangle$$

$$= \int \left(\frac{1}{Z} e^{\beta E p \cos\theta}\right)(p \cos\theta)(\sin\theta \, d\theta \, d\phi)$$

$$\Rightarrow \langle P_z \rangle = P \tanh\left(\frac{E}{kT}\right)$$

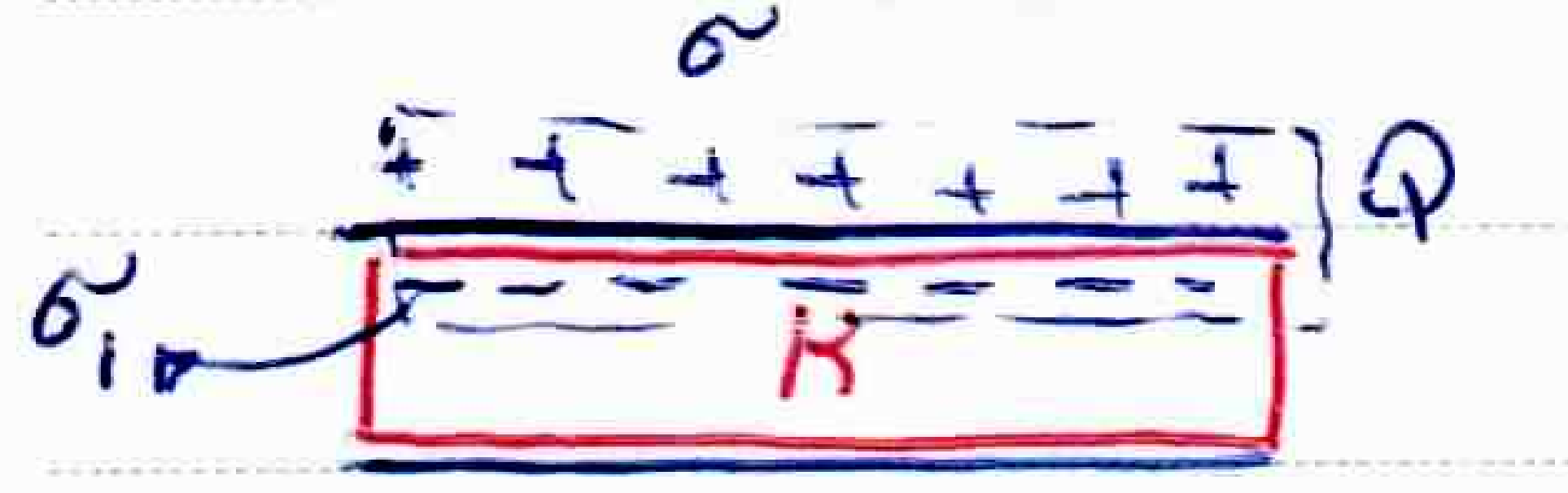


تقابل دو عامل انرژی (نظم دهنده) و دما (بی نظمی)



$$\sigma = \hat{n} \cdot \tilde{\vec{P}}$$

$$\tilde{\vec{P}} = \frac{\vec{P}}{V}$$ متوسط

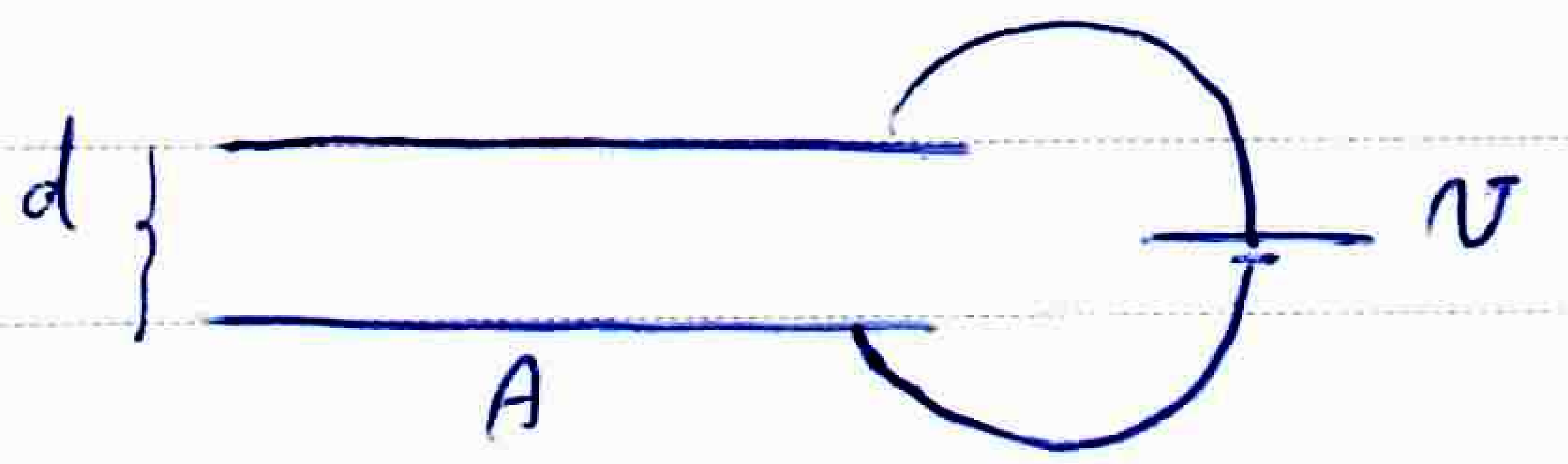


$$C' = K \frac{\varepsilon_0 A}{d}$$

$$V' = \frac{Q}{C'} = \frac{Q}{K\varepsilon_0 A} d$$

$$E' = \frac{V'}{d} = \frac{Q}{K\varepsilon_0 A}$$

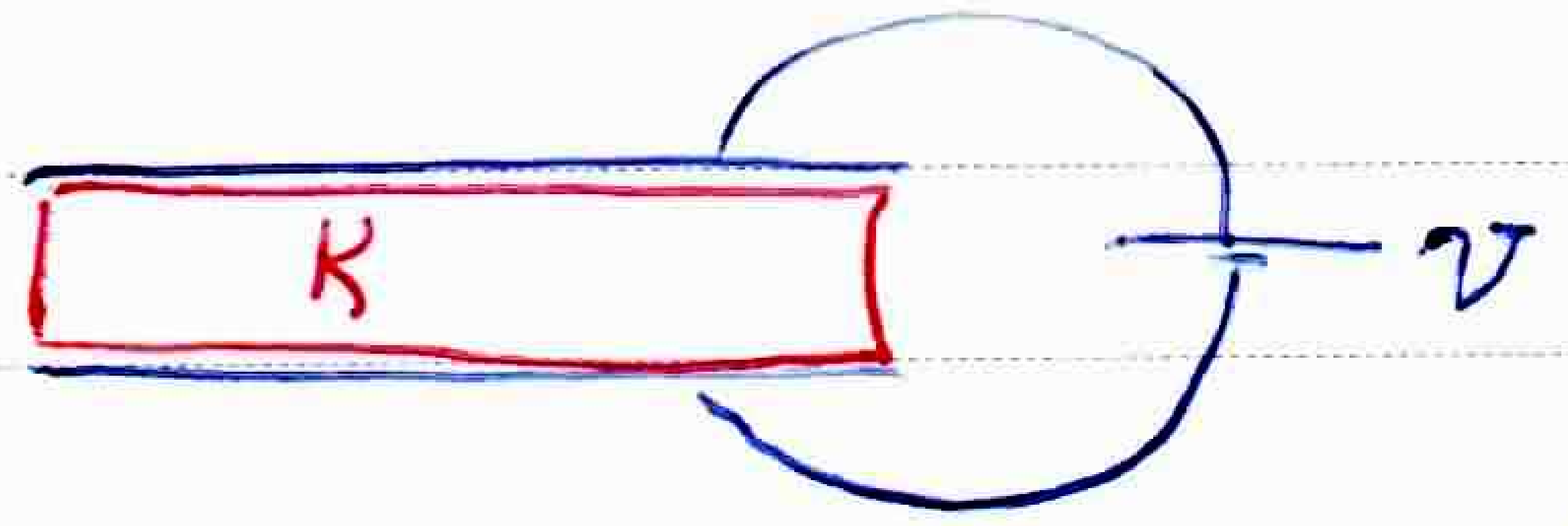
$$E' = \frac{\sigma - \sigma_1}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{K\varepsilon_0} \Rightarrow \sigma_1 = \sigma\left(1 - \frac{1}{K}\right)$$



$$C = \varepsilon_0 \frac{A}{d}$$

$$Q = CV = \varepsilon_0 \frac{A}{d} V$$

$$E = \frac{V}{d} \qquad \sigma = \frac{Q}{A}$$

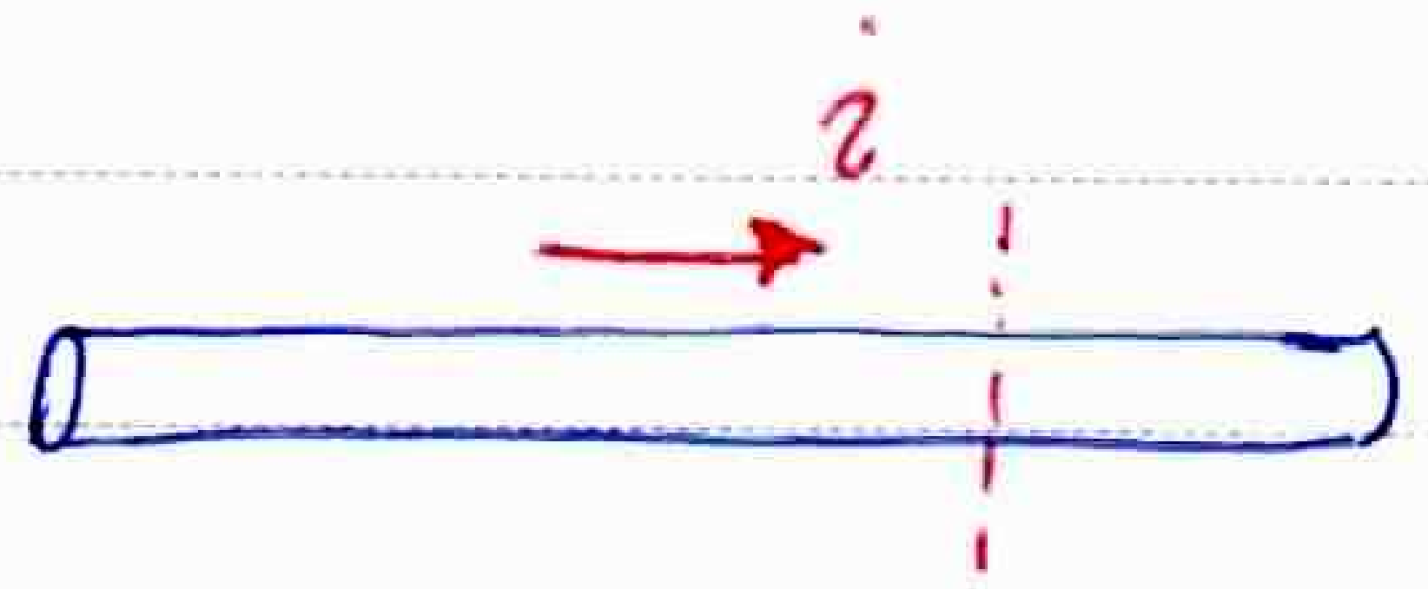


$$C' = K \frac{\varepsilon_0 A}{d} \qquad Q' = C'V = KQ$$

$$\Rightarrow \sigma' = K\sigma \qquad E = \frac{V}{d} = \frac{\sigma' - \sigma_1}{\varepsilon_0} = \frac{K\sigma - \sigma_1}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \sigma_1 = (K-1)\sigma$$

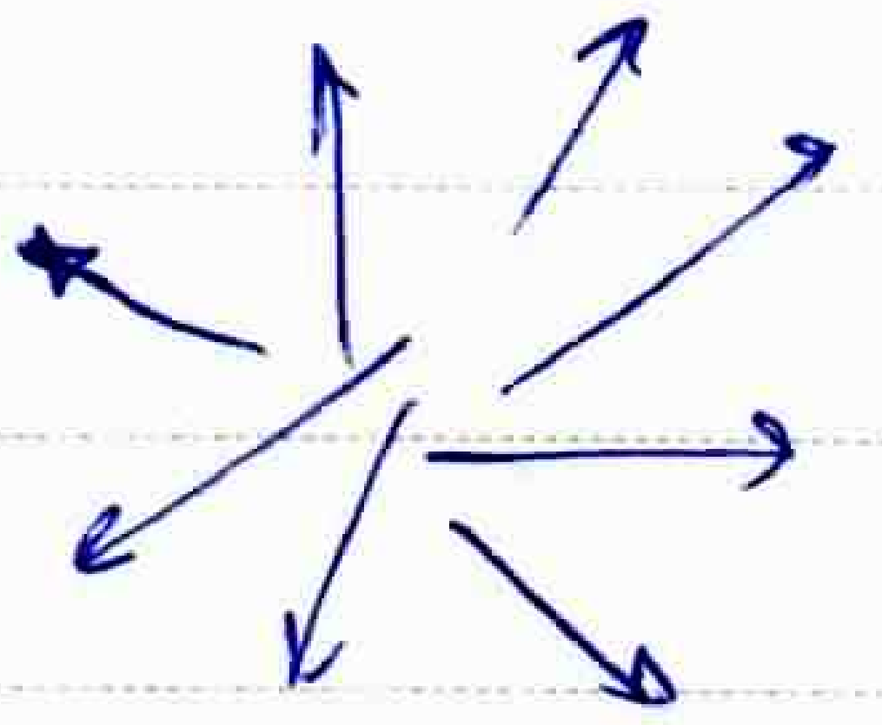
Subject:
Date



$i = \frac{\Delta q}{\Delta t}$ $\qquad$ $i = \frac{dq}{dt}$ $\qquad$ (A) = $\frac{1\ \text{coulomb}}{1\ \text{second}}$

q : بار حامل های بار $\qquad$ n: چگالی حامل های بار

$\vec{v}_d$: سرعت سوق $\qquad$ $\vec{J} := nq\vec{v}_d$



$\langle \vec{v} \rangle = 0$

اگر میدان الکتریکی وجود نداشته باشد، حامل های بار حرکت کاتوره ای دارند ولی جابه جایی خالص بار صفر است

$$\frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} k T$$

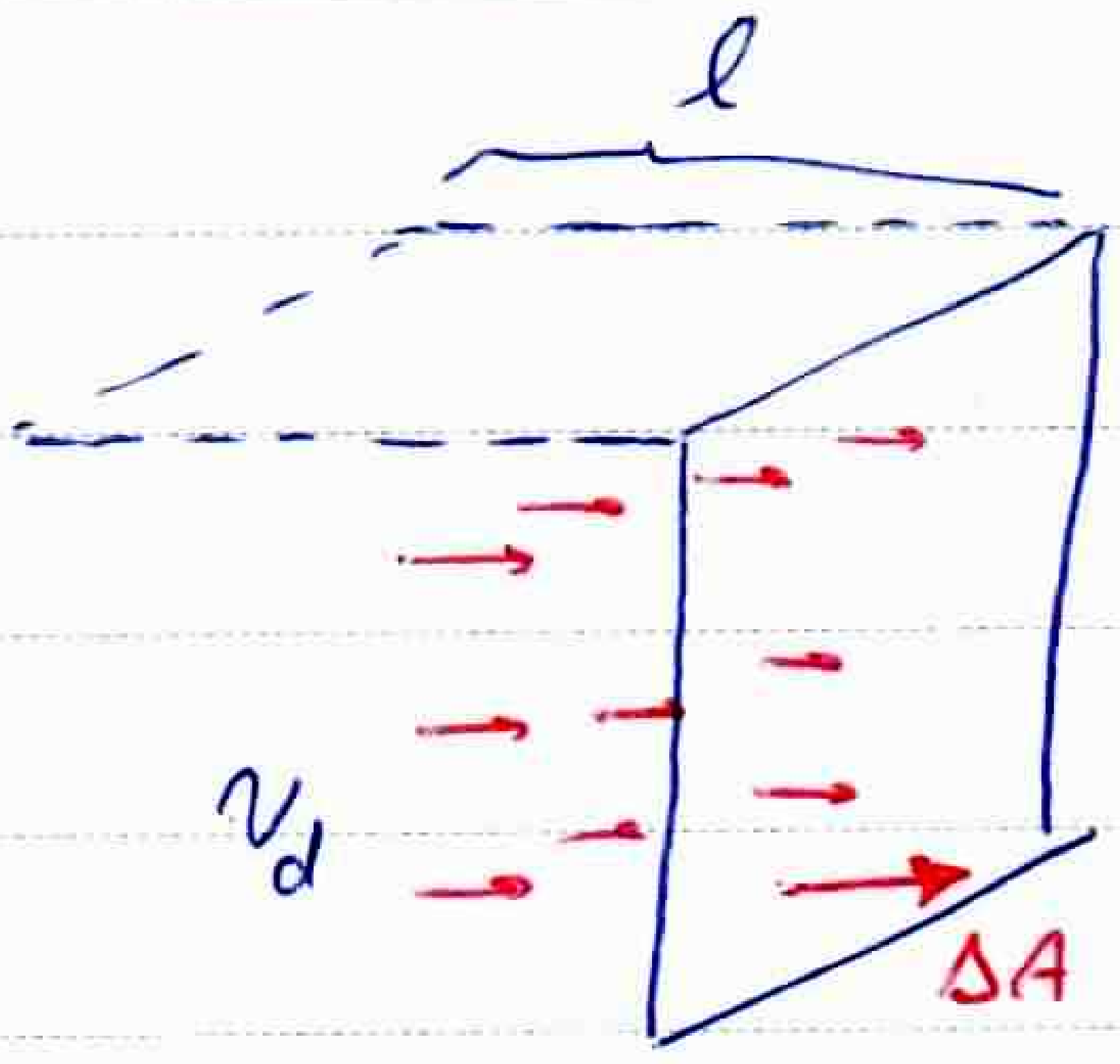
ثابت بولتزمن $= 1.38 \times 10^{-3}$ J/k

$m = 9.011 \times 10^{-31}$ kg $\quad T = 300$ k : (در دمای اتاق) برای یک الکترون داریم

$$\Rightarrow \langle v^2 \rangle = \frac{3 \times 1.38 \times 10^{-23} \times 300}{9.11 \times 10^{-31}} \simeq 1.3 \times 10^{10}$$

$$v_{RMS} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} \simeq 10^{5}\ m/s$$

اگر یک میدان الکتریکی برقرار شود، یک مولفه در راستای میدان به اندازه $\vec{v}_d$ در سرعت حرکت الکترون ها پدید می آید.



$$l = v_d \cdot \Delta t$$

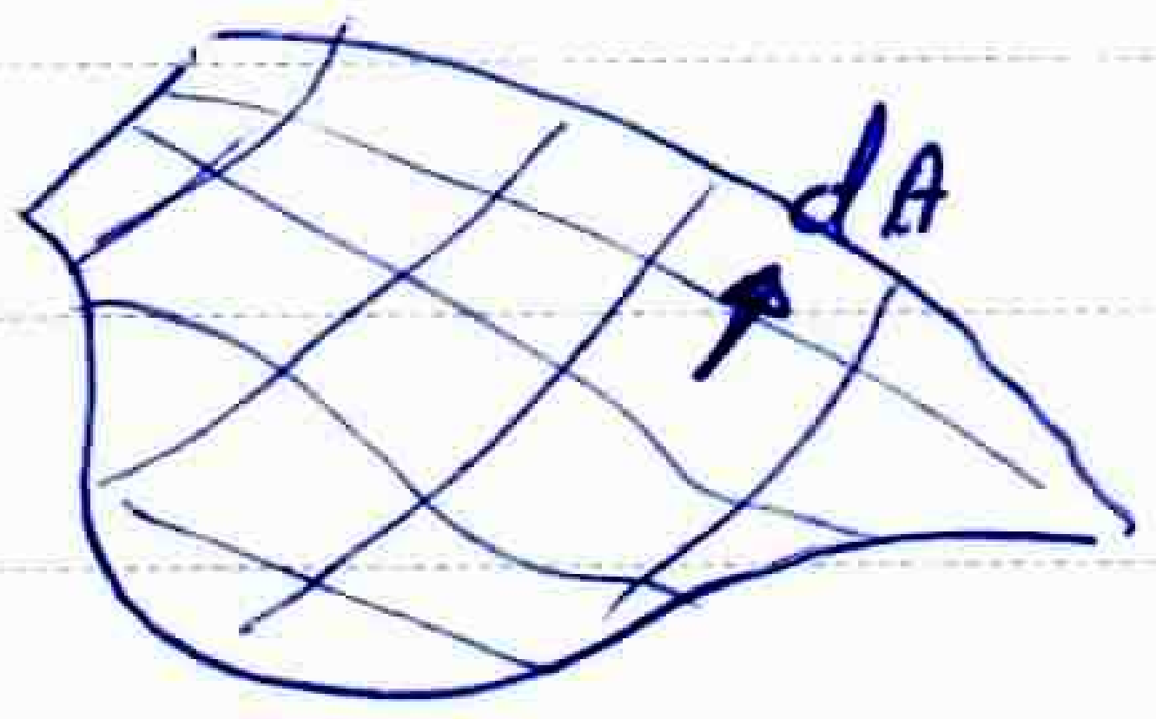
$$\Delta q = [(\Delta A)\, v_d . \Delta t]\, nq$$

$$\Rightarrow \Delta I = \Delta A \cdot J$$

اگر $\vec{J}$, $\vec{\Delta A}$ موازی نباشند داریم:

$$\Delta I = \vec{J} \bullet \vec{\Delta A}$$

و برای یک سطح دلخواه داریم:



$$I = \int_s \vec{J} . d\vec{A}$$

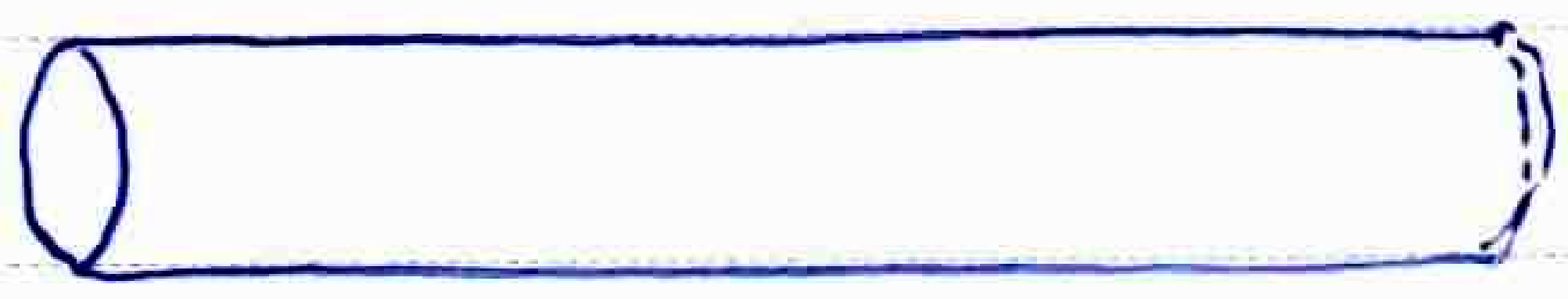
و برای یک سطح بسته داریم:

$$I = \oint_s \vec{J} . d\vec{A}$$

و اگر Q مقدار بار داخل سطح بسته باشد:

$$\frac{dQ}{dt} = -\oint_s \vec{J} . d\vec{A}$$

مثال:



$A = 1\,cm^2$

$I = 1$ AMP

$$\Rightarrow J = \frac{I}{A} =$$

حجم هر اتم را تقریباً $10\, A^{\circ 3}$ درنظر بگیریم:

$$n \simeq \frac{1 \text{ electron}}{10\, A^{\circ 3}} = 10^{-29} \ {}^{1}/_{m^3}$$

$$J = (ne)\, v_d \Rightarrow v_d = \frac{J}{ne} \simeq 10^{-6}\ m/s$$

Subject :
Date

مقاومت :

$\vec{J} = \sigma \vec{E}$ σ : ضریب هدایت $\frac{Amp}{m.\,volt}$

$\frac{1}{\sigma} = \rho$

قانون اهم : $R = \frac{V}{I} = \frac{E\,l}{J\,A} = \rho \frac{l}{A}$

عواملی که باعث می شوند سرعت الکترون ها در یک شبکه ی فلزی محدود باشد.

به هم ریختگی شبکه : Dislocation ناخالصی : impurity

* اگر چند نوع حامل بار داشته باشیم :

برای K حامل بار : $\vec{J} = \sum_{i=1}^{K} n_i q_i \vec{v}_{d_i}$

وقتی الکترون ها در میدان الکتریکی هستند به آنها نیرویی معادل زیر به آنها وارد می شود.

$F = m\vec{a} = \frac{q\vec{E}}{\cancel{m}} \Rightarrow \vec{a} = \frac{q\vec{E}}{m}$

هم چنین برای الکترون i ام ، t_i : مدت زمانی است که از آخرین برخورد این الکترون با الکترون های دیگر می گذرد.

$\vec{v}_i = \vec{v}_{i(0)} + \frac{q\vec{E}}{m} t_i$

$\vec{v}_d = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \vec{v}_i = \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \vec{v}_{i(0)}}_{0} + \frac{q\vec{E}}{m} \times \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i$

$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i = \tau$ → Mean Free Time

τ: متوسط زمانی است که یک الکترون آزادانه حرکت می‌کند.

$$\Rightarrow \quad \vec{v}_d = \frac{q\vec{E}}{m}\tau \qquad \Rightarrow \quad \vec{J} = \frac{nq^2\vec{E}}{m}\tau$$

$$\Rightarrow \quad \sigma = \frac{nq^2\tau}{m}$$

* اثر دما:

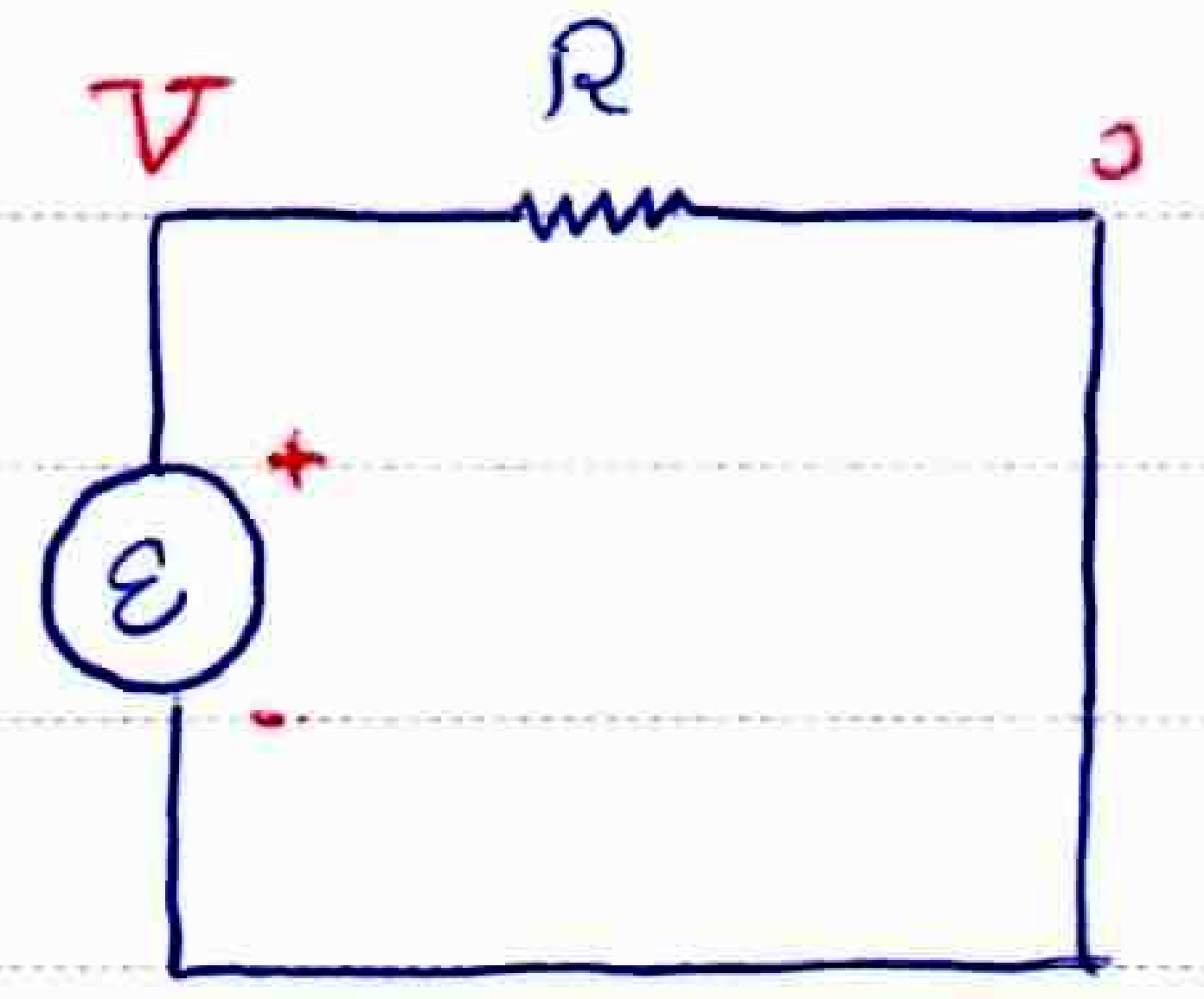
برای فلزات داریم $\rho = \rho_0 + \alpha (T - T_0)$

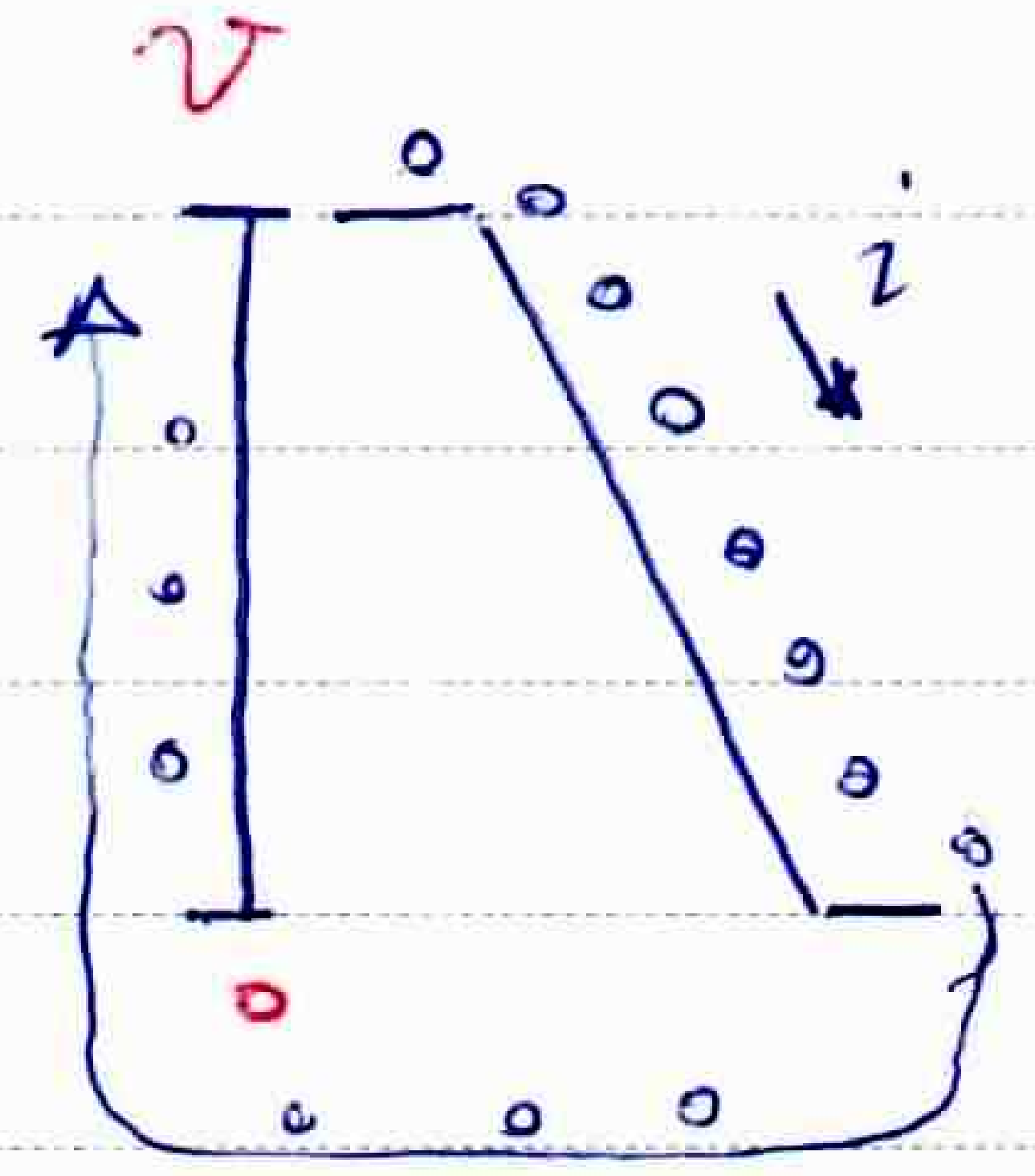
در حقیقت چون n ثابت است، می‌توان گفت که با افزایش دما، τ کاهش می‌یابد.

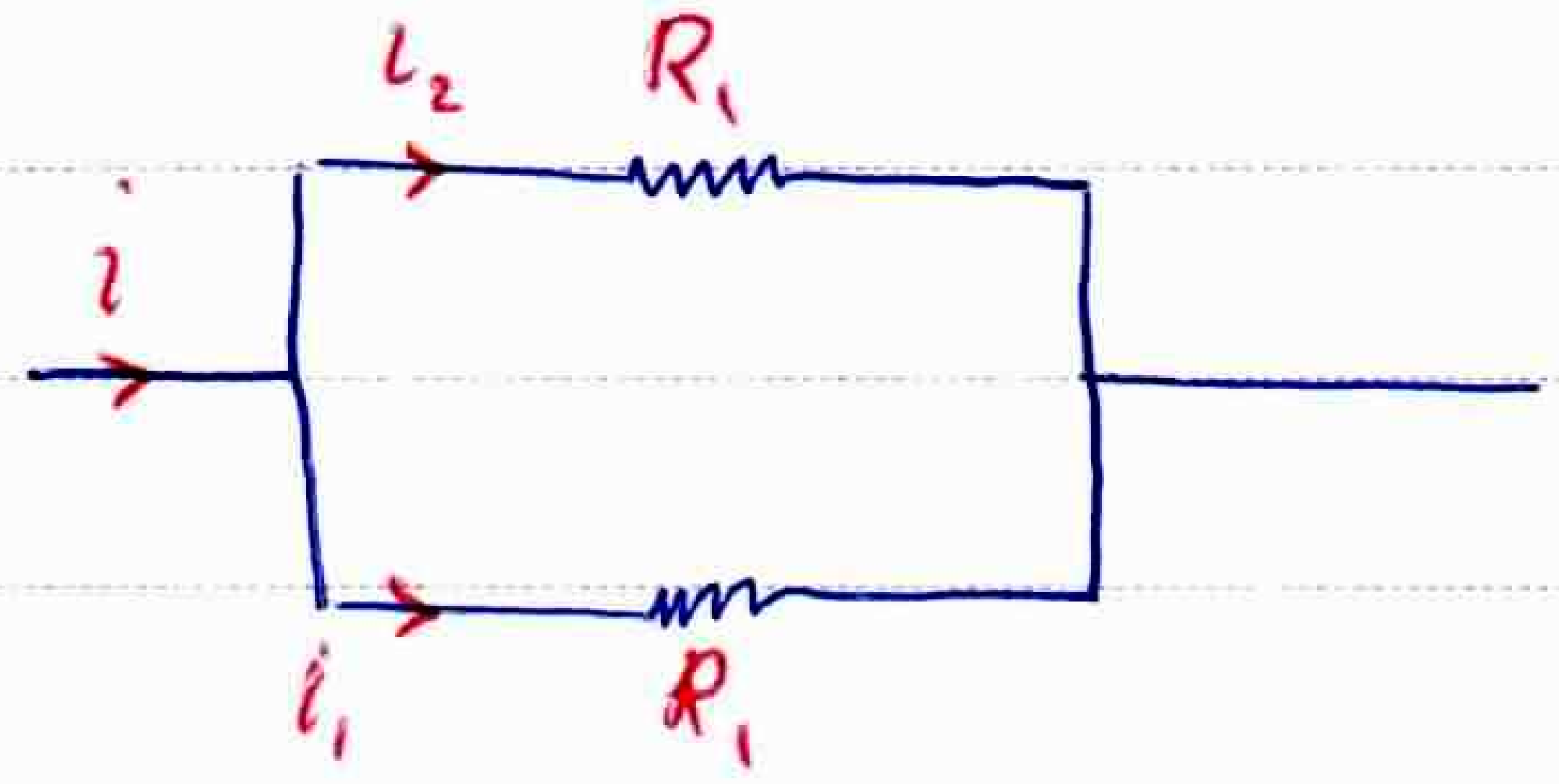
برای شبه‌فلزات چون با افزایش دما، تعداد حامل بار را افزایش می‌دهد، اثر افزایش آن از اثر کاهش τ بیشتر است، با افزایش دما، ρ کاهش می‌یابد.

Subject:
Date

درس ششم : مدارهای جریان مستقیم







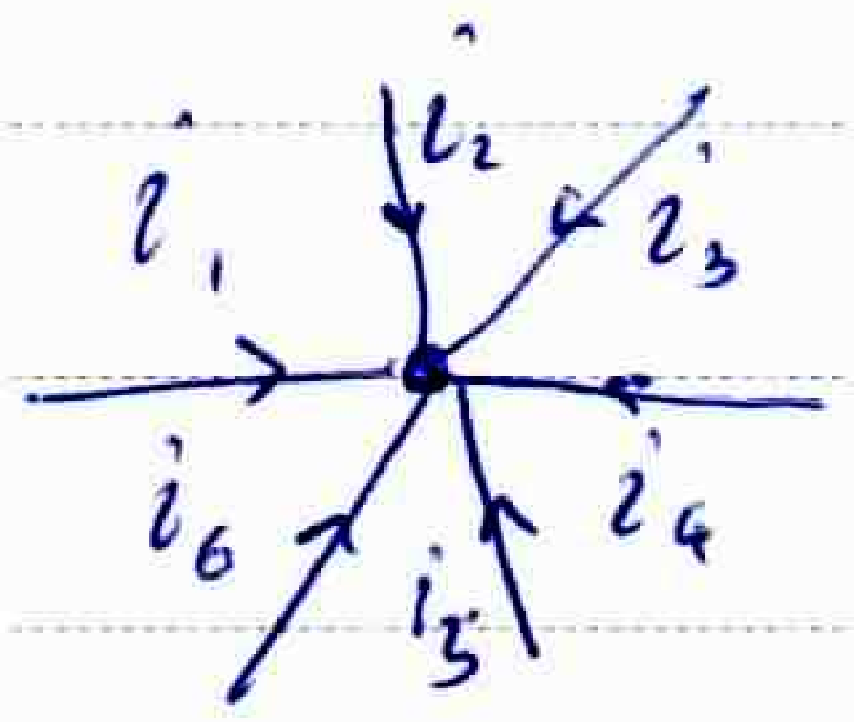
$i = i_1 + i_2$

$\Rightarrow \frac{V}{R_{eq}} = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} \Rightarrow \frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$

$i R_{eq} = i R_1 + i R_2$

$\Rightarrow R_{eq} = R_1 + R_2$

Kirchoff current low - KCL ①



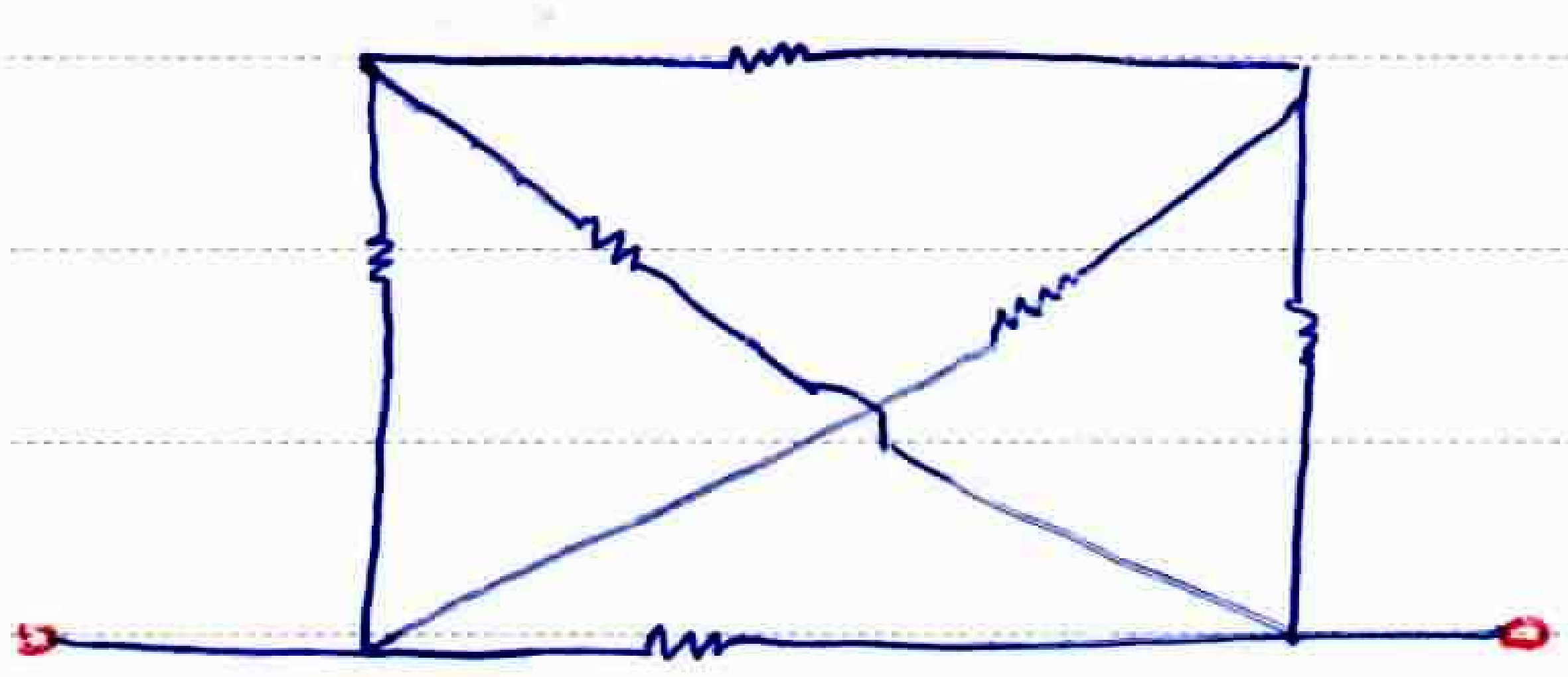
$$\sum_{k=1}^{n} i_k = 0$$

Kirchoff current low - KVL ②

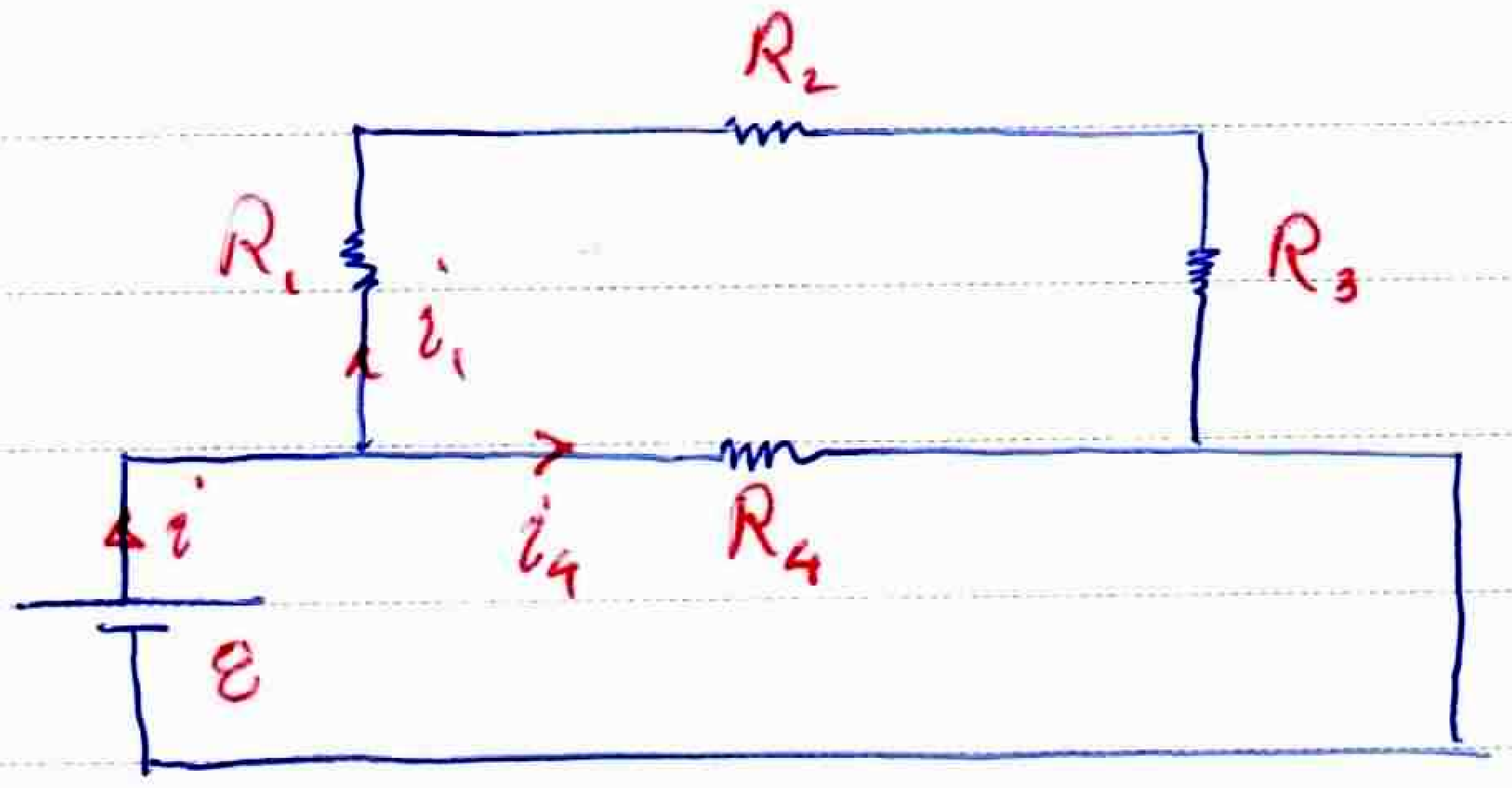
در یک حلقه :

$\sum v_i = 0$

مثال : تمام مقاومت ها R هستند؟ $R_{eq} = ?$.



مثال 1)

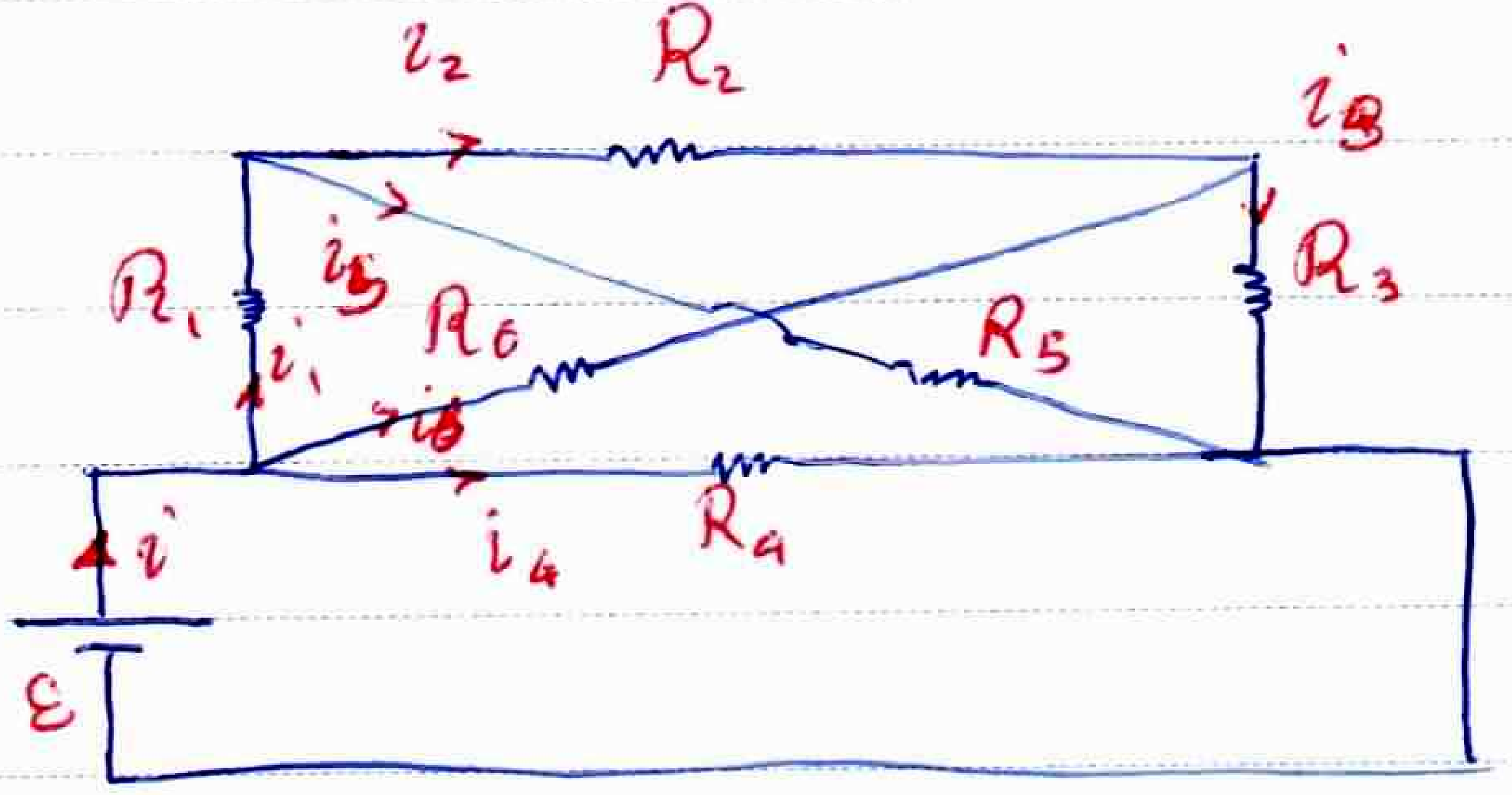


$$R = \frac{R_4(R_1+R_2+R_3)}{R_1+R_2+R_3+R_4}$$

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R}$$

$$\Rightarrow \quad i_1 = \frac{R_4}{R_1+R_2+R_3+R_4}\, i \qquad i_4 = \frac{R_1+R_2+R_3}{R_1+R_2+R_3+R_4}\, i$$

مثال 2)



$$i_6 = i - i_1 - i_4$$

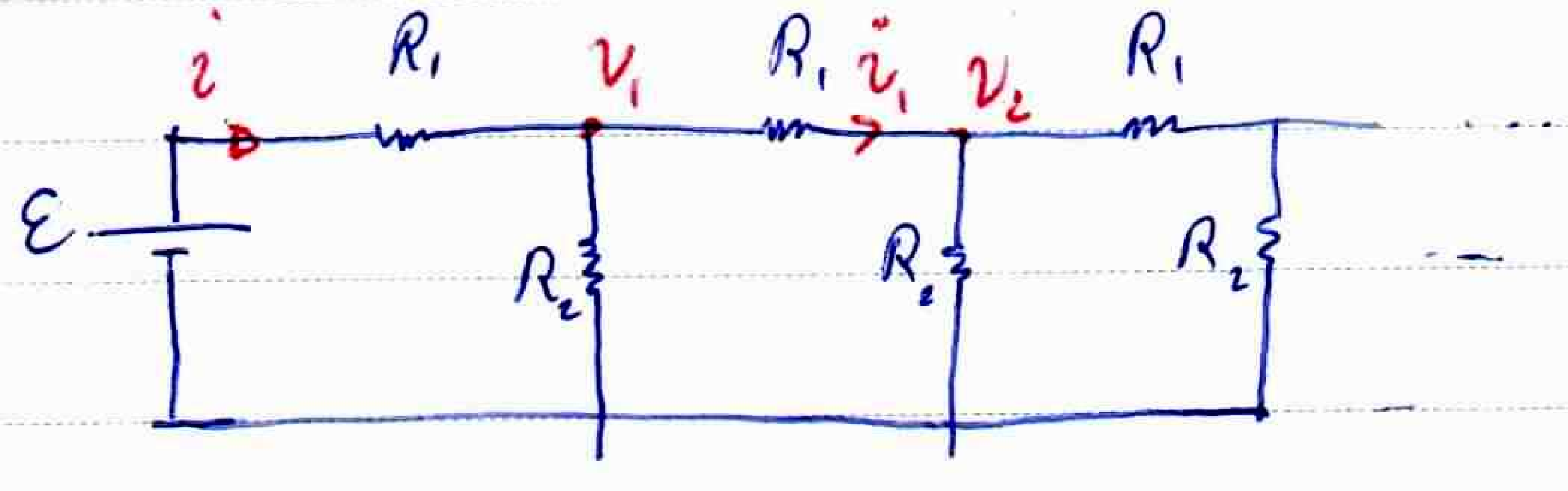
$$i_5 = i_1 - i_2$$

$$i_3 = i_2 + i_6 = i - i_1 - i_4 + i_2$$

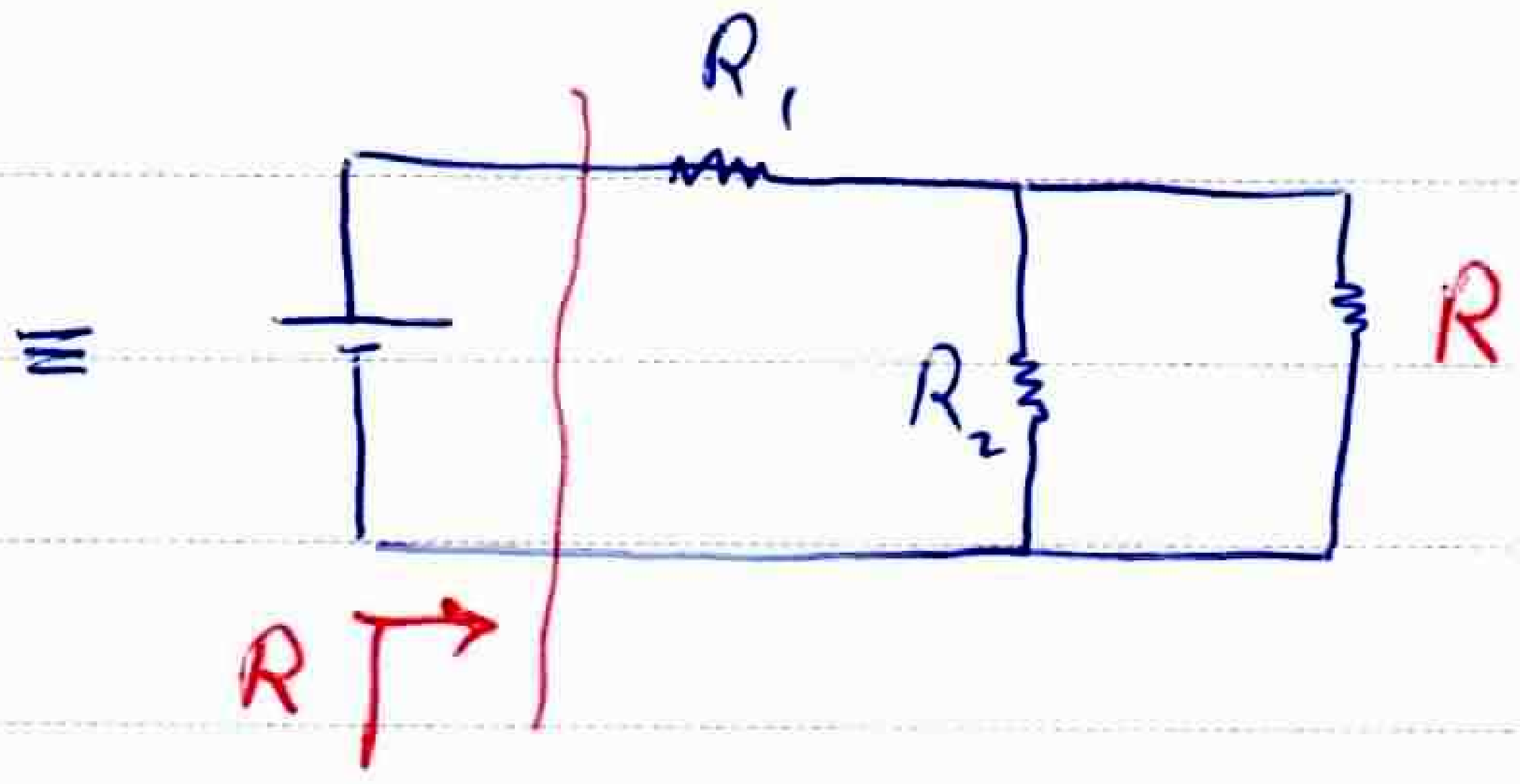
چهار مجهول داریم: i ، i_1 ، i_2 و i_4 ← پس باید چهار معادله ی KVL بنویسیم.

$$\begin{cases} -\mathcal{E} + R_4 i_2 = 0 \\ R_1 i_1 + R_2 i_2 + R_3(i - i_1 - i_4 + i_2) - \mathcal{E} = 0 \\ R_1 i_1 + R_5(i_1 - i_2) - R_4 i_4 = 0 \\ R_2 i_2 + R_3(i - i_1 - i_4 + i_2) - R_5(i_1 - i_2) = 0 \end{cases}$$

مثال 3)

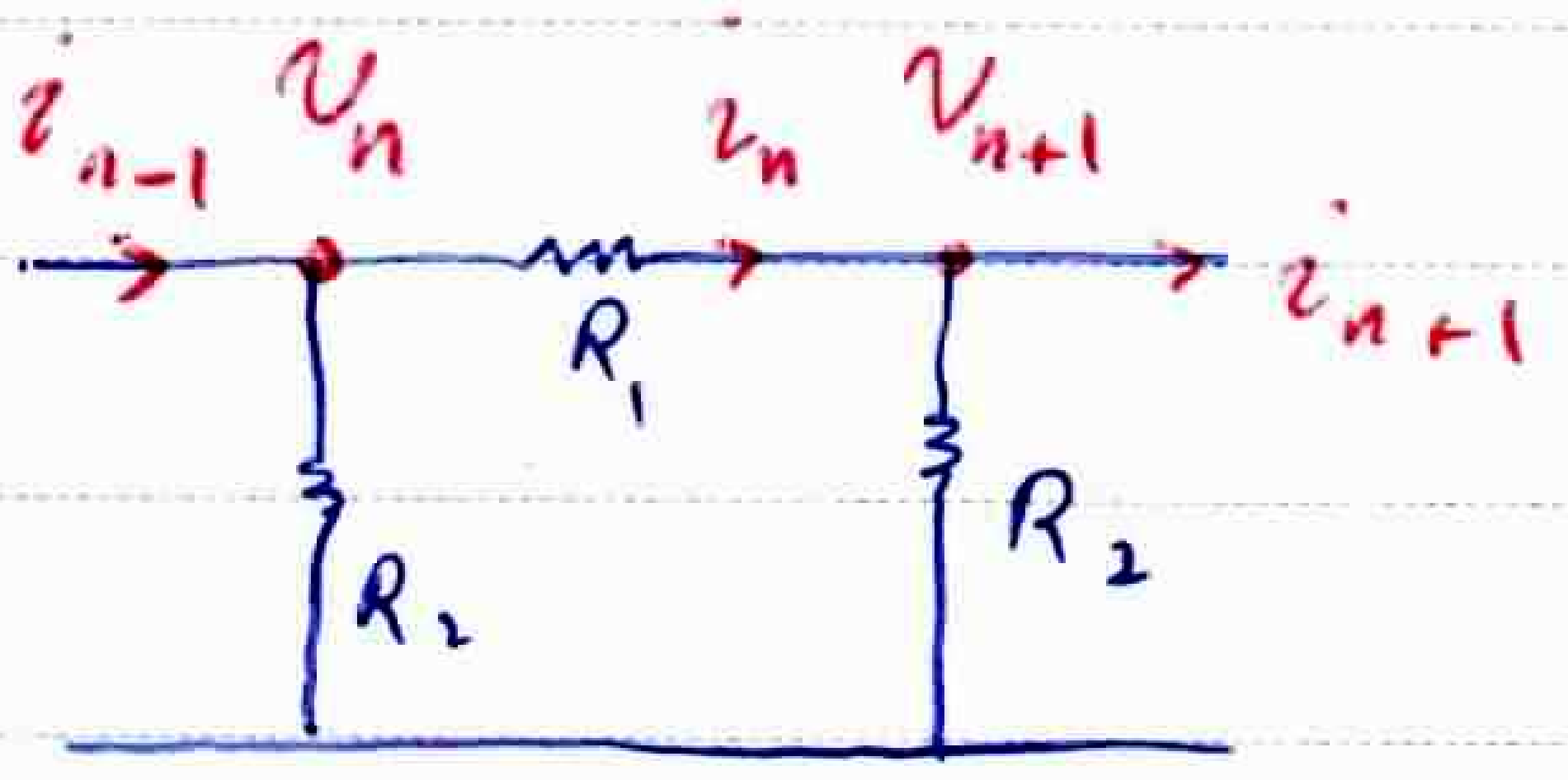


$\equiv$



$$\frac{RR_2}{R_2+R} + R_1 = R$$

$$\Rightarrow R = \frac{R_1 + \sqrt{R_1^2 + 4R_1R_2}}{2}$$



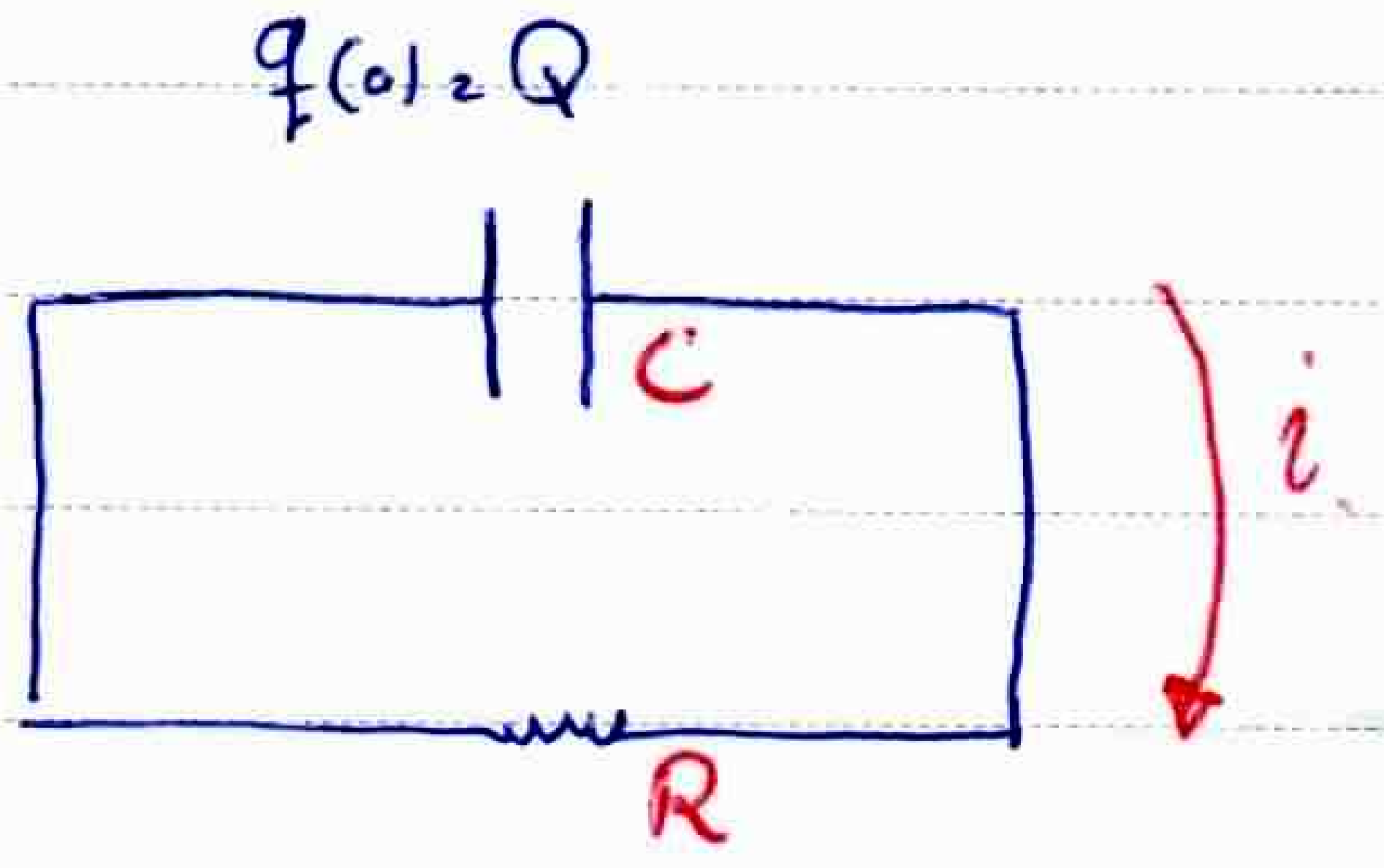
$$\begin{cases} v_n - R_1 i_n - v_{n+1} = 0 \\ i_n = i_{n+1} + \frac{v_{n+1}}{R_2} \end{cases}$$

همچنین داریم : $i_n = \frac{v_n}{R}$

$$\Rightarrow \frac{i_{n+1}}{i_n} = \frac{R - R_1}{R} = \frac{\sqrt{R_1^2 + 4R_1R_2} - R_1}{\sqrt{R_1^2 + 4R_1R_2} + R_1} =: \gamma$$

$$\Rightarrow i_n = A\gamma^n \qquad A = \frac{\varepsilon}{R}$$

مدارهای RC



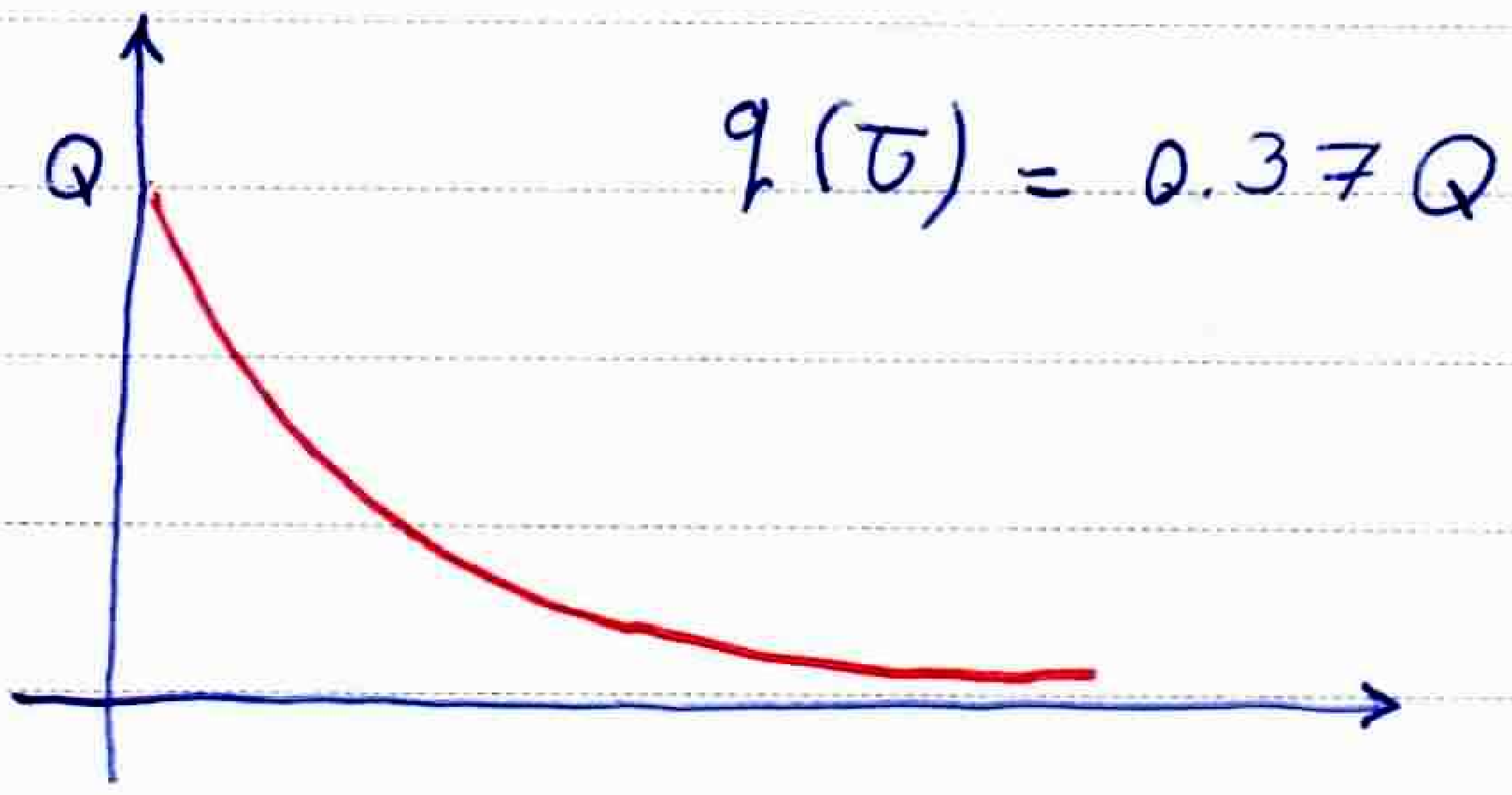
$$\frac{q(t)}{C} - Ri(t) = 0$$

$$i(t) = -\frac{dq(t)}{dt}$$

$$\Rightarrow \dot{q} + \frac{1}{RC}q = 0$$

$\tau := RC$ ثابت زمانی مدار

$$\Rightarrow q(t) = Qe^{-t/\tau}$$

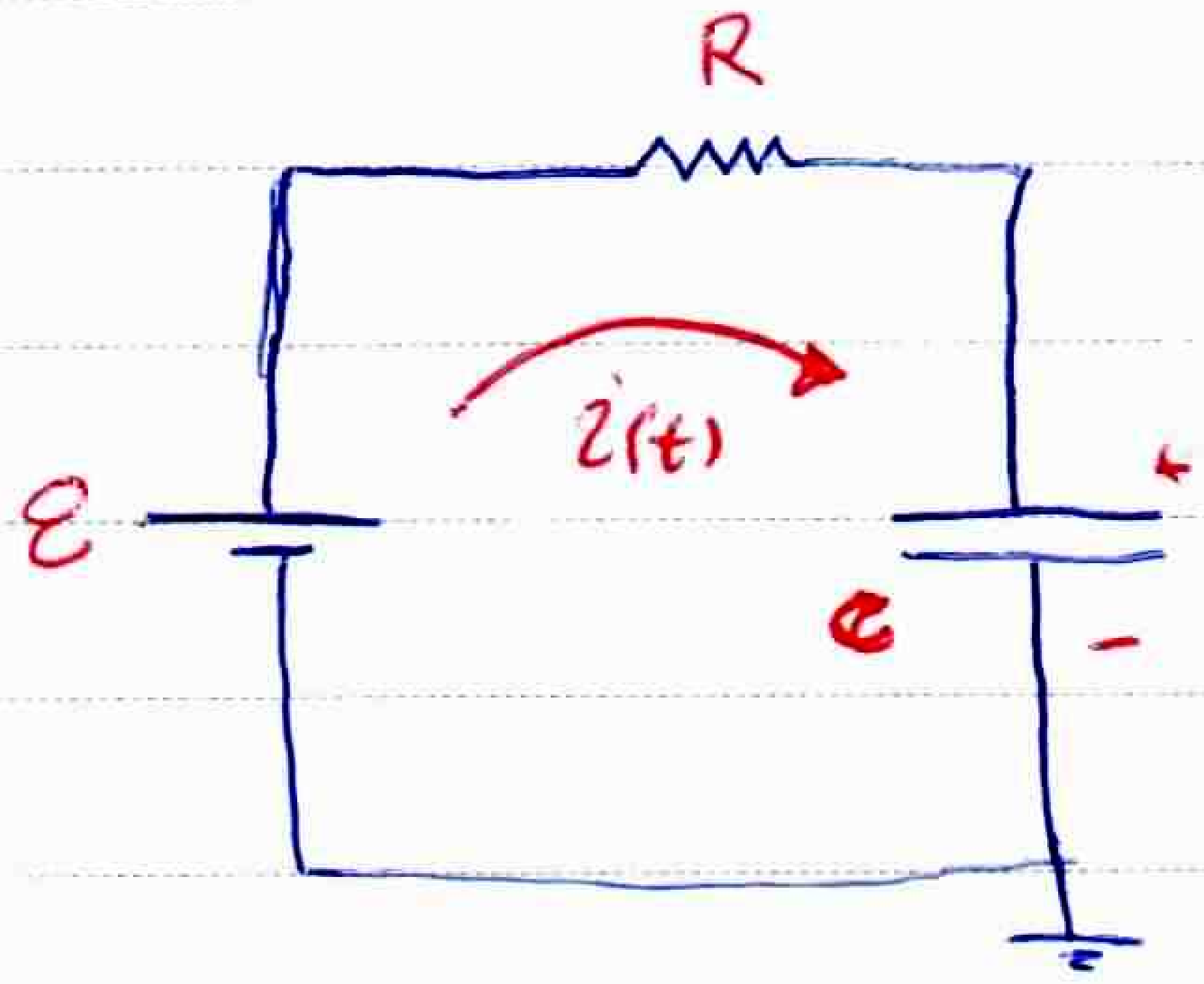


$q(\tau) = 0.37Q$

$$u_c(0) = 1/2 \frac{Q^2}{C}$$

$$P_R(t) = i^2(t) R = R \frac{Q}{\tau} e^{-2t/\tau}$$

$$\Rightarrow E_R = \int_0^\infty P_R(t)\, dt = \int_0^\infty R\frac{Q}{\tau} e^{-2t/\tau} = \frac{Q^2}{2C}$$



شارژ شدن خازن :

$q(0) = 0$

هم چنین در بی نهایت باید داشته باشیم :

$$\frac{q(\infty)}{C} = \varepsilon$$

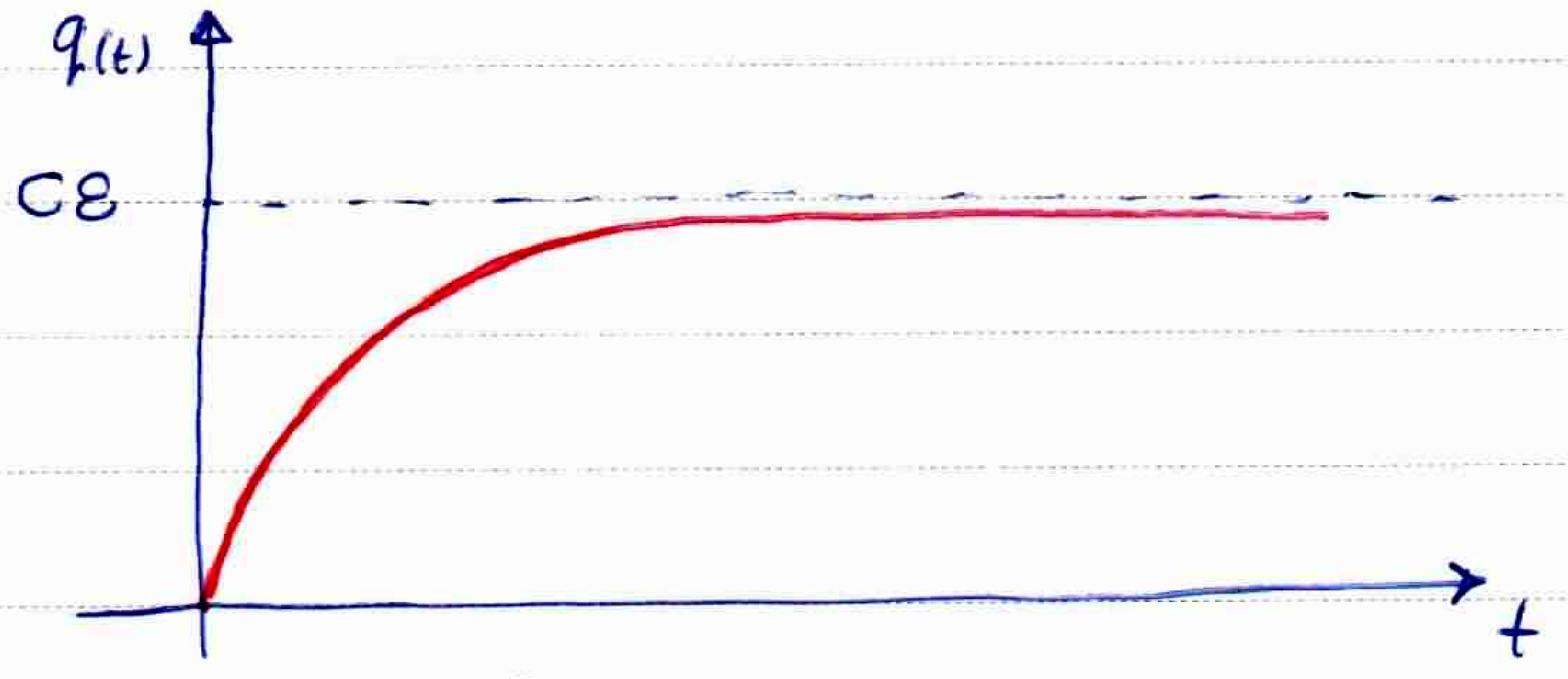
KVL : $Ri + \frac{q}{C} - \varepsilon = 0$

$$i(t) = \frac{dq}{dt} \quad \Rightarrow \quad R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = \varepsilon$$

$$\Rightarrow \frac{dq}{dt} + \frac{1}{\tau} q = \varepsilon/R$$

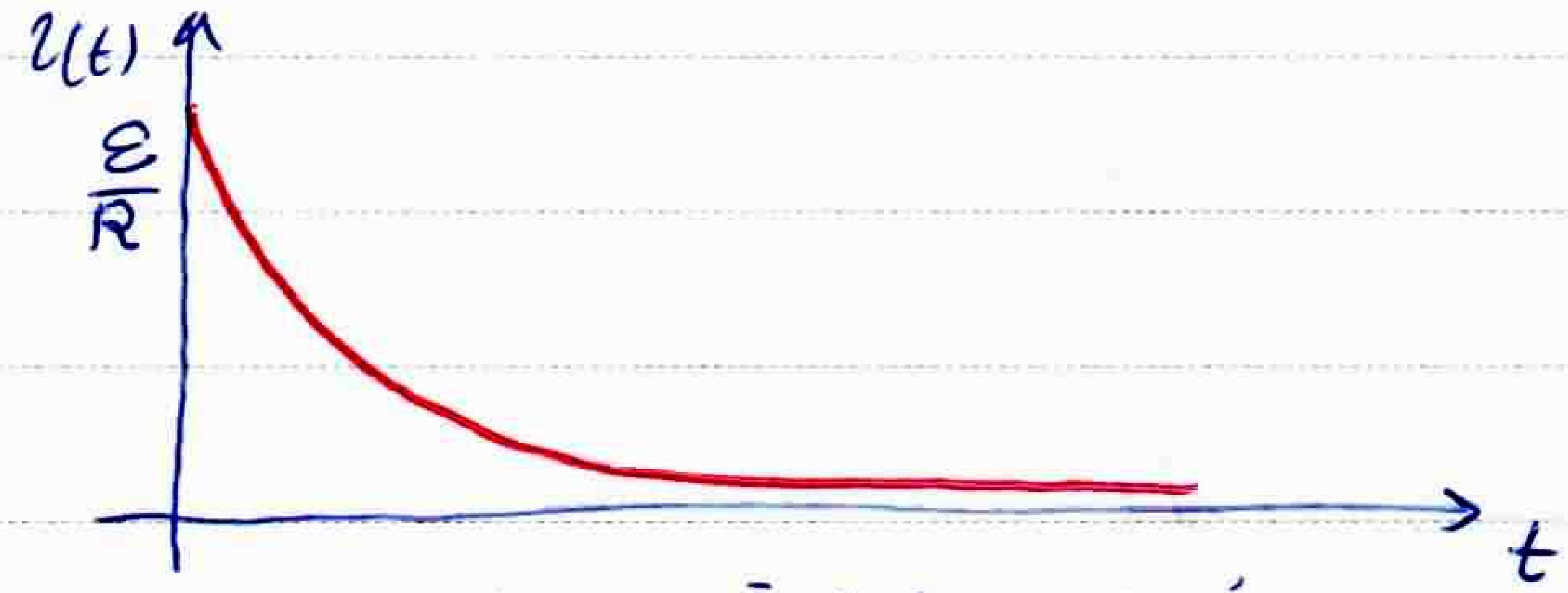
جواب همگن : $q_1(t) = A e^{-t/\tau}$

جواب ناهمگن : $q_2(t) = \varepsilon . C$ $\Rightarrow q(t) = C.\varepsilon(1 - e^{-t/\tau})$



$$q(\tau) = 0.63\, C.\varepsilon$$

$$i(t) = \frac{dq}{dt} \Rightarrow i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/\tau}$$



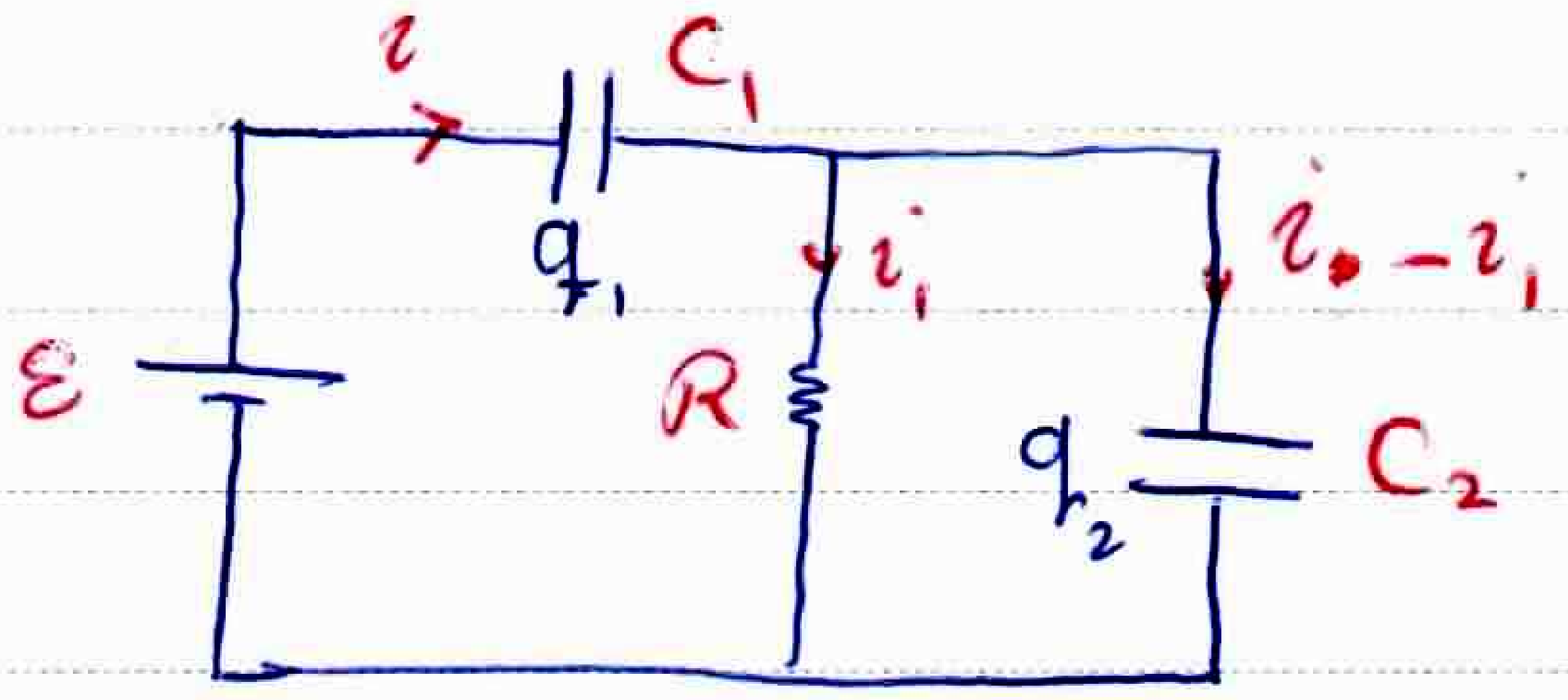
در لحظه‌ی $t = 0$ ، خازن مانند سیم بدون مقاومت است . پس جریان در لحظه‌ی صفر برابر $\frac{\mathcal{E}}{R}$ است .

$$U_C = 1/2\, C \mathcal{E}^2$$

$$U_B = \int_0^\infty (i\mathcal{E})dt = \int_0^\infty dq.\mathcal{E} = Q\mathcal{E} = C\mathcal{E}^2$$

$$U_R = \int_0^\infty i^2 R.dt = \frac{1}{2} C\mathcal{E}^2$$

مثال :



$$\begin{cases} \mathcal{E} - \frac{q_1}{C_1} - Ri_1 = 0 \\ Ri_1 - \frac{q_2}{C_2} = 0 \\ i_1 = \frac{dq_2}{dt} - \frac{dq_1}{dt} \end{cases}$$

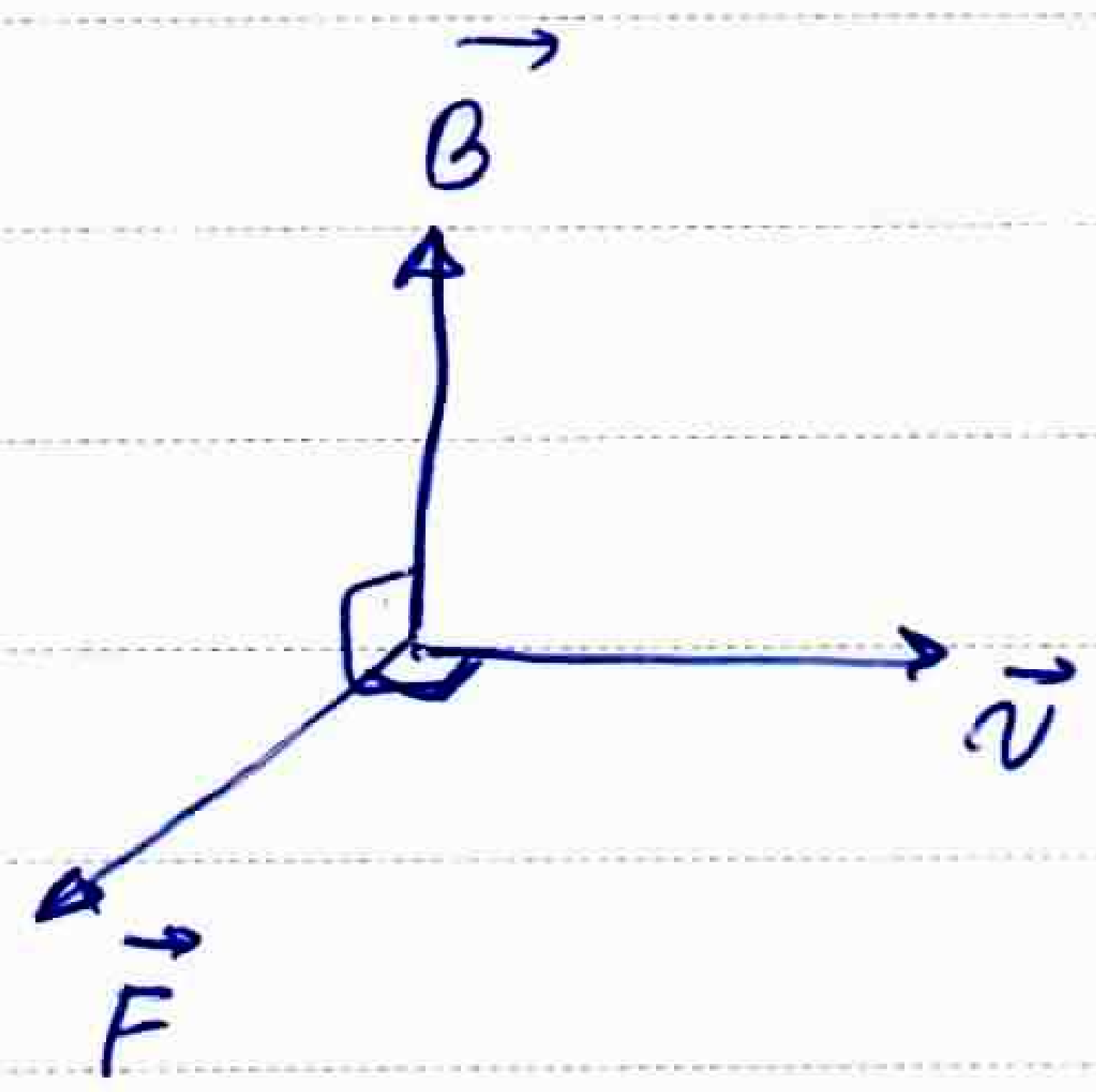
میدان های مغناطیسی

* بار الکتریکی متحرک در میدان

1) $F \propto q$ 2) $F \propto v$ 3) $F \perp v$

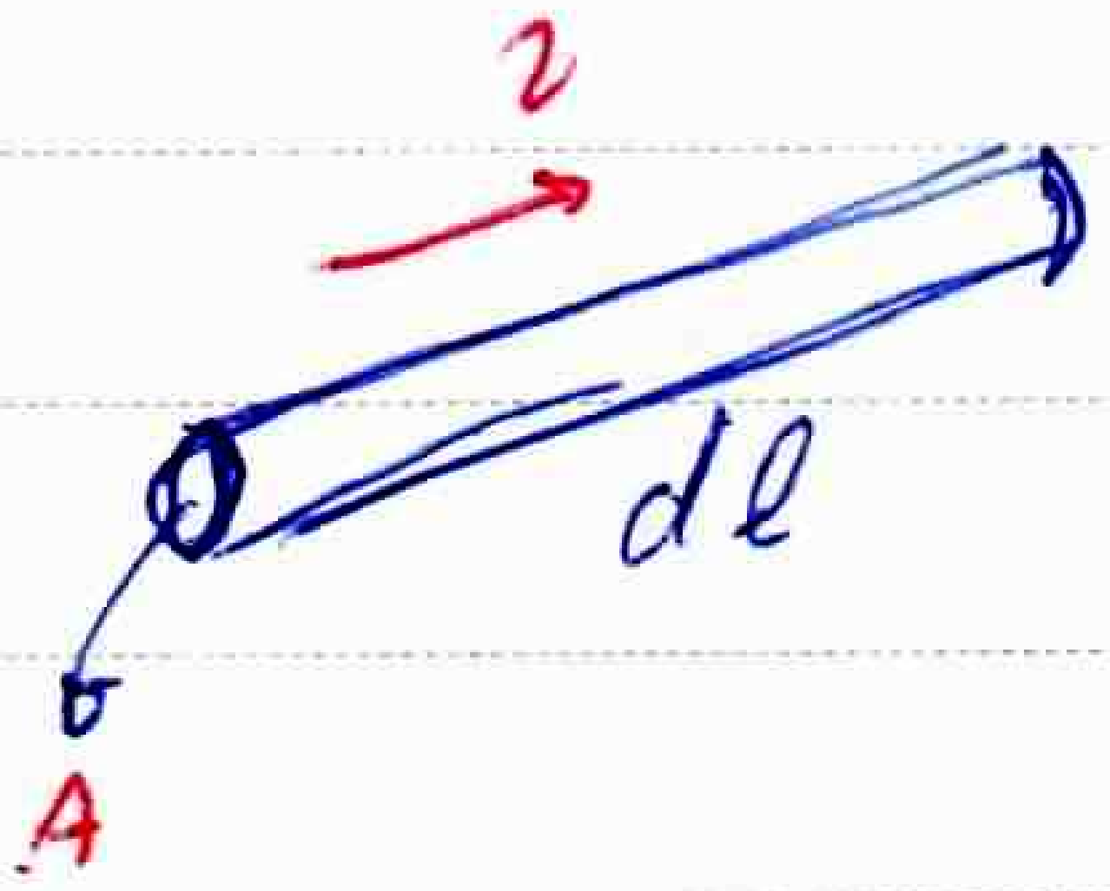
4) $F \propto q \vec{v} \times \vec{n}$: جهت خاصی مانند $\hat{n}$ وجود دارد که

$$\Rightarrow \vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$



B : Tesla $= \frac{N}{C.\frac{m}{s}}$ میدان مغناطیسی

* نیروی وارد بر سیم حامل بار :



$d\vec{F} = (q\vec{v} \times \vec{B})\, N$ تعداد بار

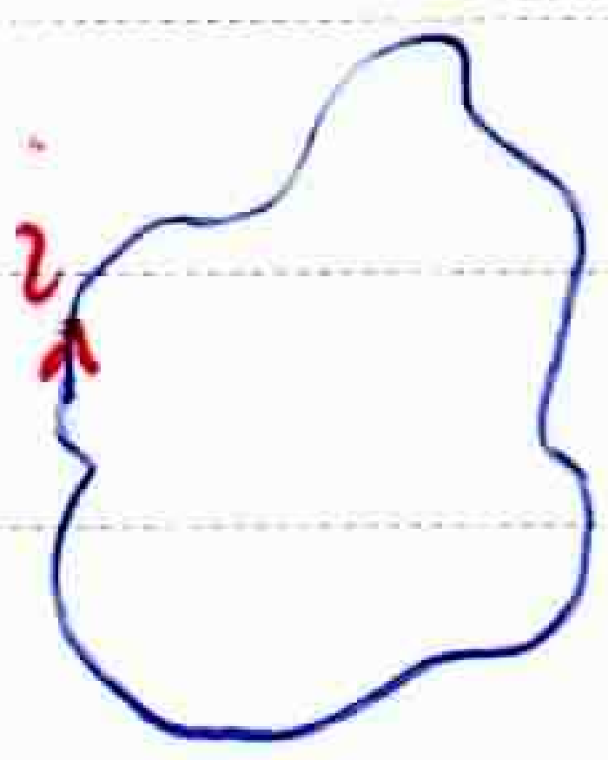
$\vec{v}$ باید هم جهت سرعت باشد (در جهت جریان باشد)

n : چگالی بار

$$\Rightarrow d\vec{F} = n(A\,dl)\, q\, \vec{v}_d \times \vec{B} = nAqv_d . d\vec{l} \times \vec{B} = i\, d\vec{l} \times \vec{B}$$

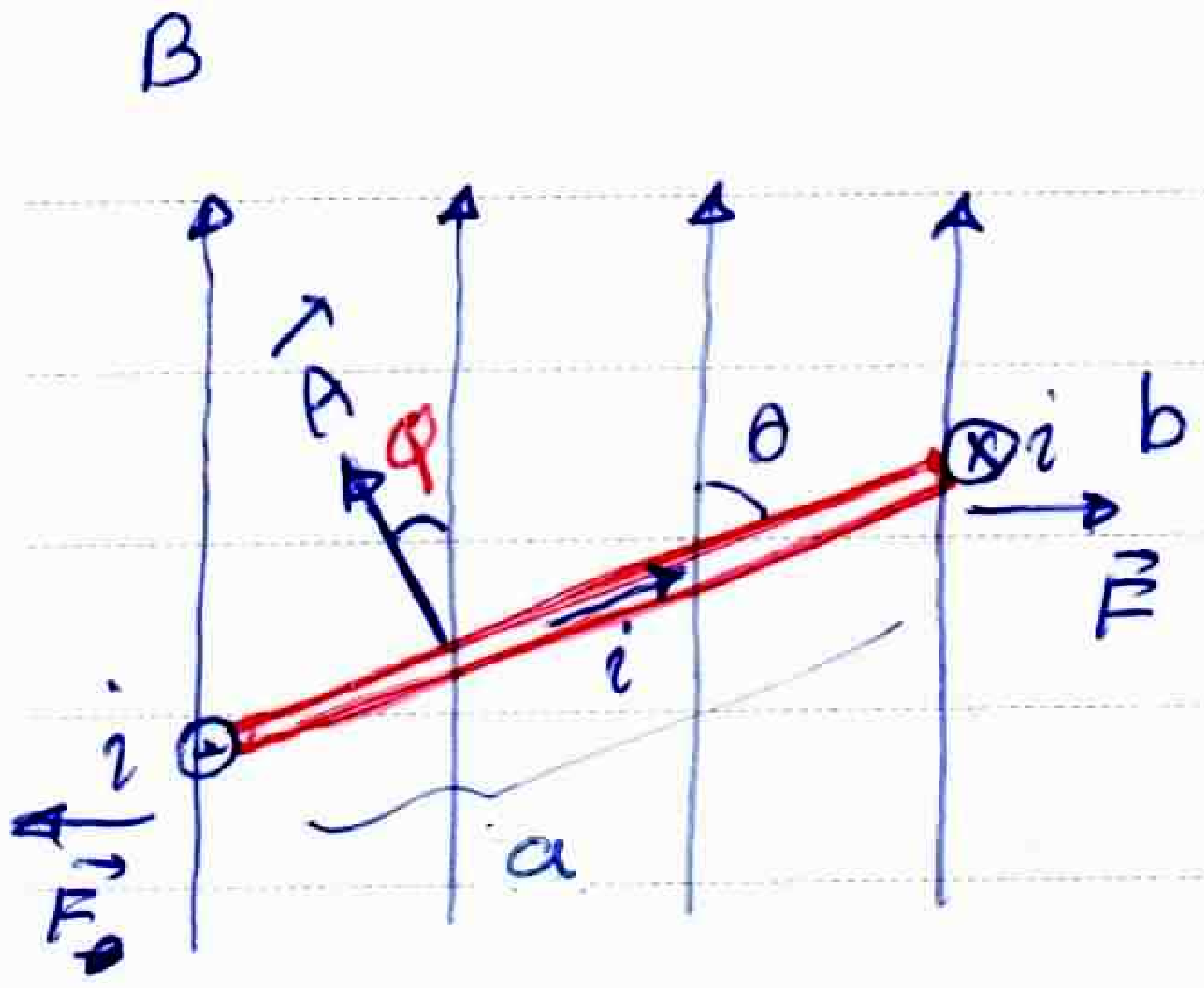
$$\Rightarrow F = \int i\, d\vec{l} \times \vec{B}$$

* برای یک حلقه‌ی یکنواخت در میدان یکنواخت:



$$\vec{F} = \int i\, d\vec{l} \times B$$

$$= \left(i \oint d\vec{l}\right) \times \vec{B} = 0$$



یک حلقه‌ی مستطیلی داریم. (شکل از کنار است)

جریان i از آن عبور می‌کند.

اضلاع مستطیل a, b هستند

$$F = ibB \Rightarrow \tau = 2 \cdot F \cdot \frac{a}{2} C\theta$$

$$\Rightarrow \tau = iB(ab) C\theta \Rightarrow \tau = iBA \sin\varphi$$

$$\Rightarrow \vec{\tau} = i\vec{A} \times \vec{B}$$

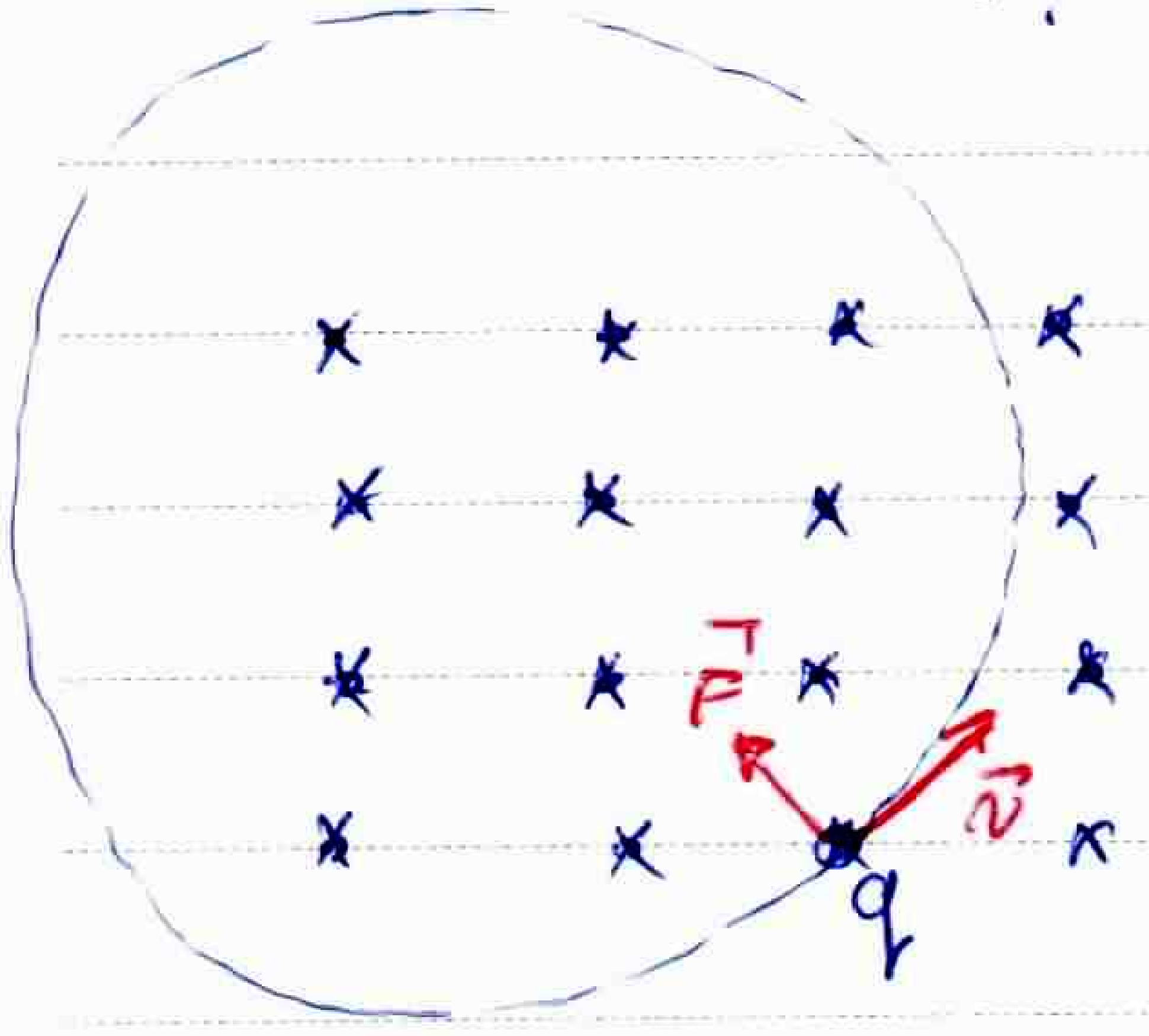
$$\vec{\mu} = i\vec{A}$$

تعریف می‌کنیم:

و به آن گشتاور دوقطبی مغناطیسی می‌گوییم

$$\Rightarrow \vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$$

* تک قطبی مغناطیسی وجود ندارد. خطوط میدان مغناطیسی بسته هستند.



مثال: یک میدان مغناطیسی درون سو داریم.

راستای $\vec{F}$ عمود بر $\vec{v}$ است. پس یک حرکت دایره‌ای داریم:

$$\left.\begin{array}{l} F = qvB \\ F = mv^2/R \end{array}\right\} \Rightarrow qvB = m\frac{v^2}{R} \Rightarrow qB = m\omega$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{qB}{m}$$

یعنی فرکانس ارتباطی با سرعت ندارد.

هرچه با سرعت بیشتری پرتاب کنیم، شعاع حرکت بیشتر خواهد بود.

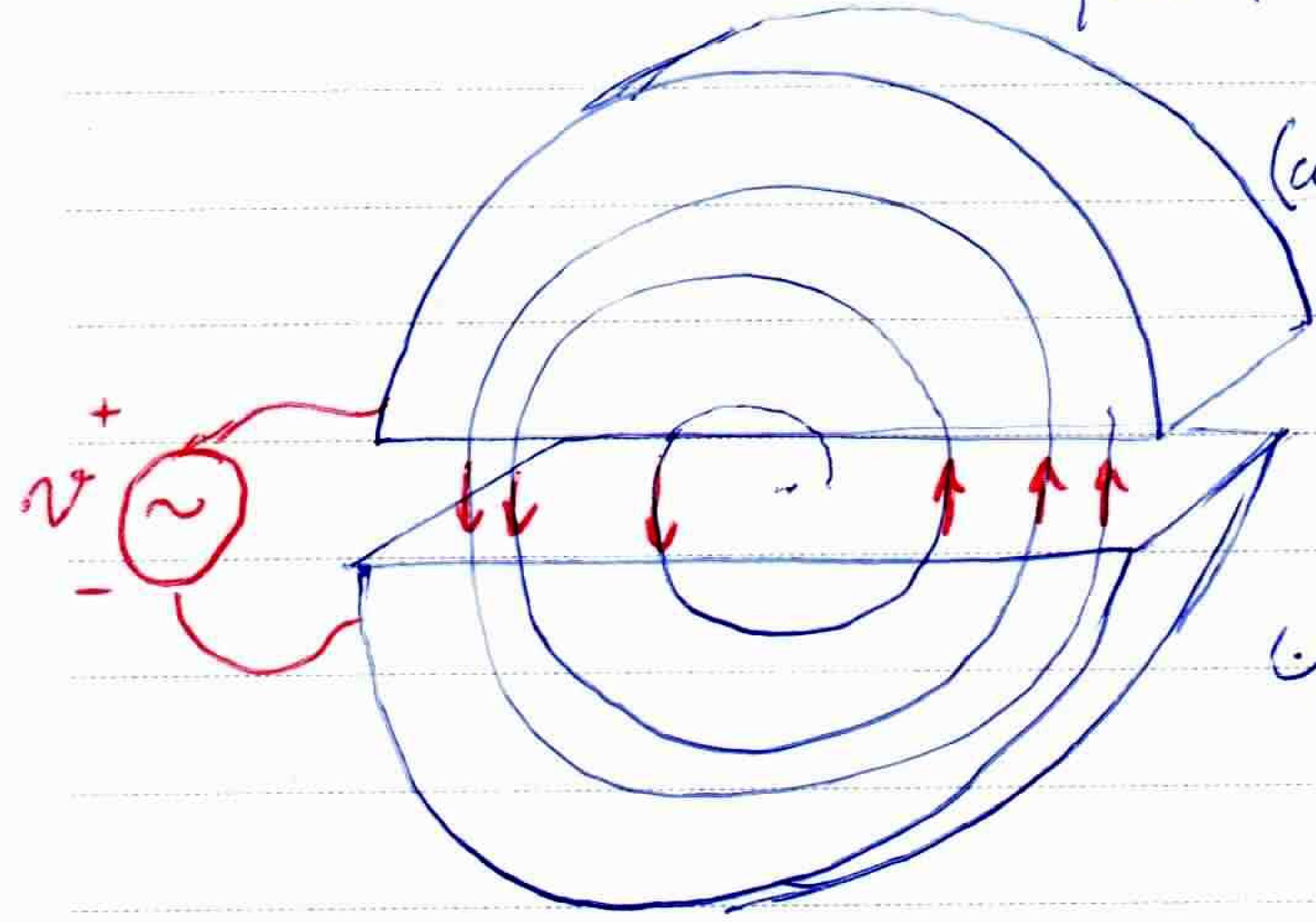
Subject:

Date

Cyclotron

کاربرد: شتاب دهنده‌ی الکترونی (سیکلوترون)

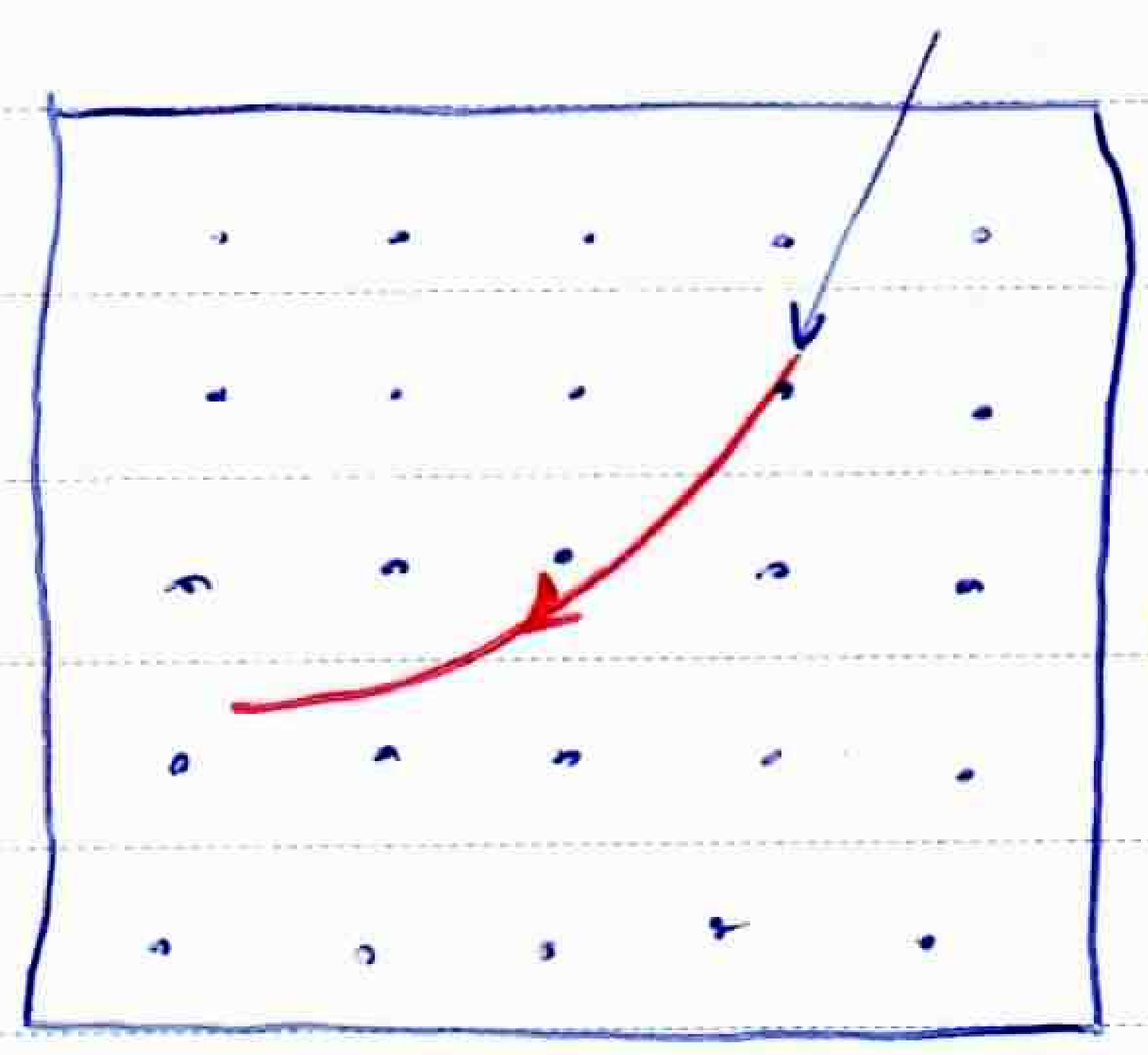
الکترونی را با شعاع کمی توسط یک میدان مغناطیسی می‌گردانیم. توسط یک میدان الکتریکی سرعت آن و در نتیجه شعاع آن را بیشتر می‌کنیم

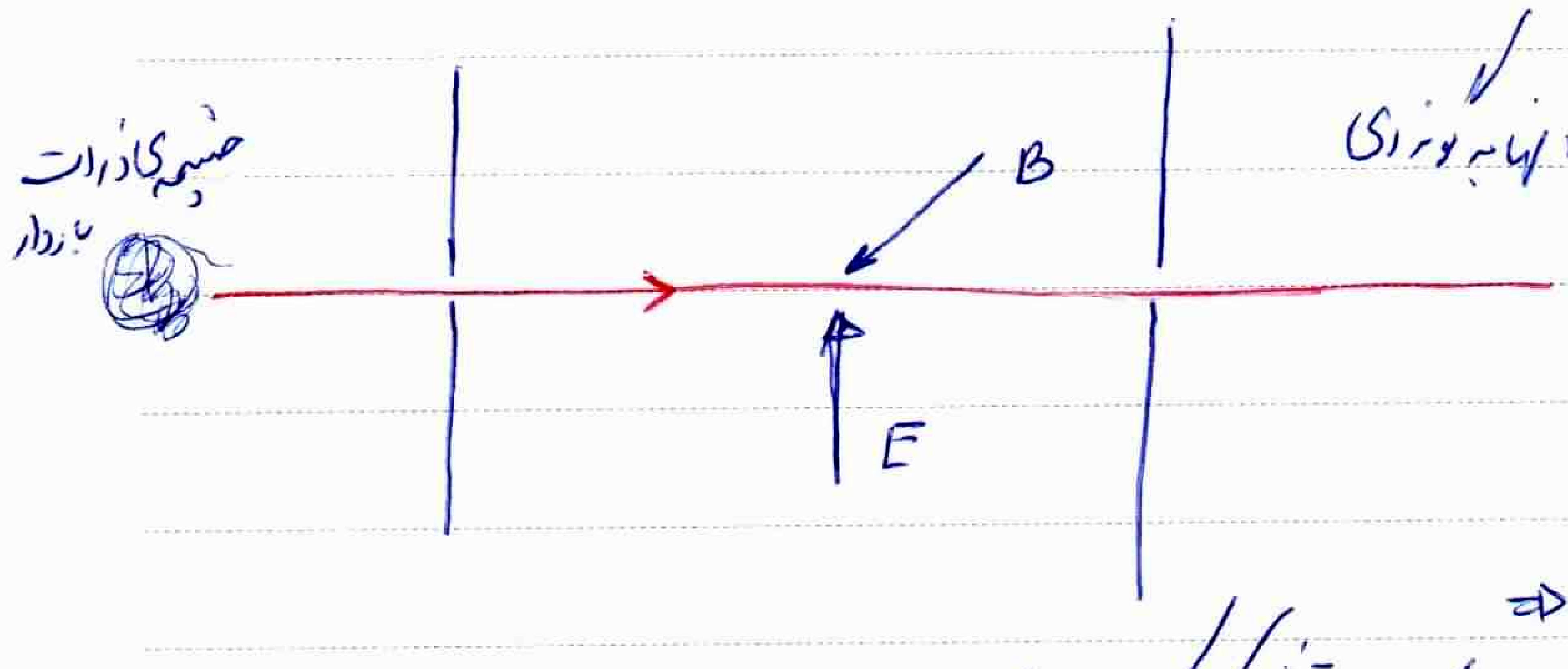


چون فرکانس ثابت است ($\omega = \frac{qB}{m}$) منبع ولتاژی با همان فرکانس قرار می‌دهیم تا نیرو همواره به الکترون شتاب دهد. چون الکترون میلیون‌ها بار از این میدان عبور می‌کند؛ با یک میدان کوچک می‌توان انرژی را به چند میلیون الکترون ولت رساند.

Bubble chamber *

یک محفظه پر از بخار فوق سرد که از آن میدان مغناطیسی برون سو عبور می‌کند. با عبور یک ذره‌ی باردار، مسیر آن توسط قطرات آب مشخص می‌شود. از روی مسیر می‌توان به نوع ذره پی برد





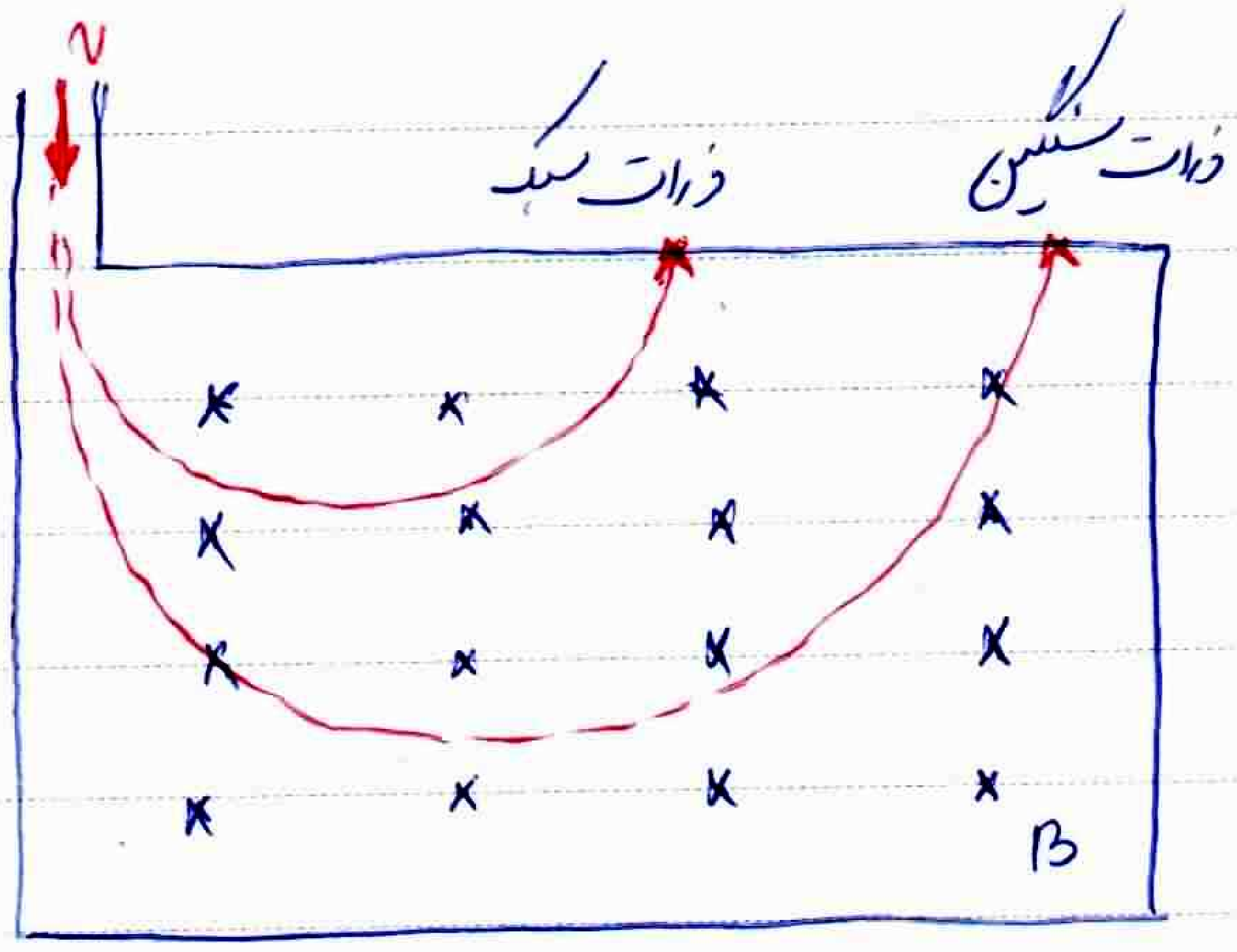
* تنها ذراتی منحرف نمی‌شوند که سرعت آنها به گونه‌ای باشد

$$qvB = qE$$

$$\Rightarrow v = \frac{E}{B}$$

پس می‌توان نسبت های E و B را به گونه‌ای تنظیم کرد که پرتو خروجی سرعت خاصی داشته باشد.

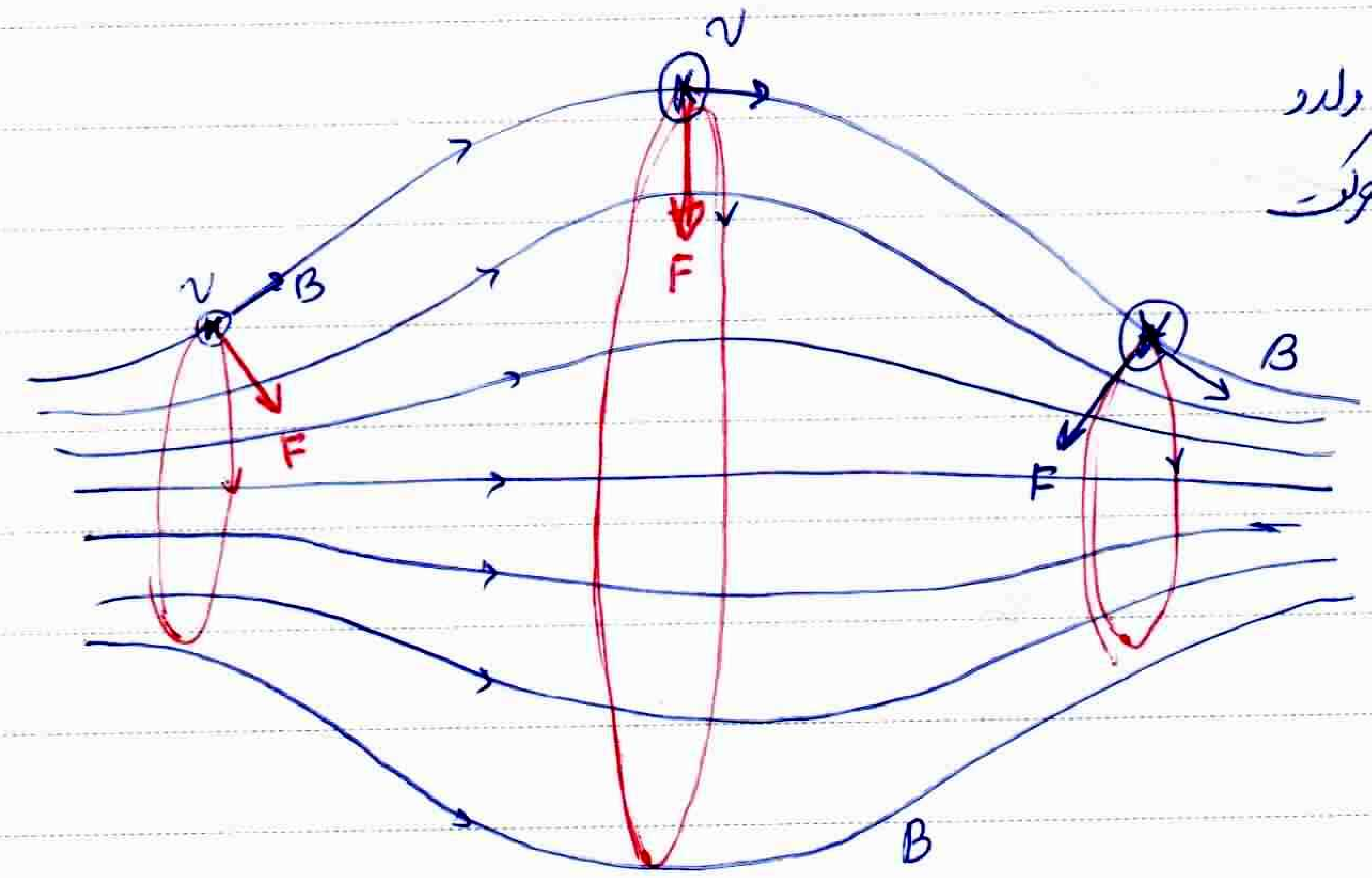
طیف سنج جرمی:



باریکه‌ای با سرعت v (با استفاده از ایده‌ی قسمت قبل) تولید می‌کنیم. این ذرات همه بار ثابت q دارند.

$$m \frac{v^2}{R} = qvB \Rightarrow R = \frac{mv}{qB}$$

که تنها عامل تفاوت m است بین ذرات. با جرم بیشتر شعاع بیشتری دارند.



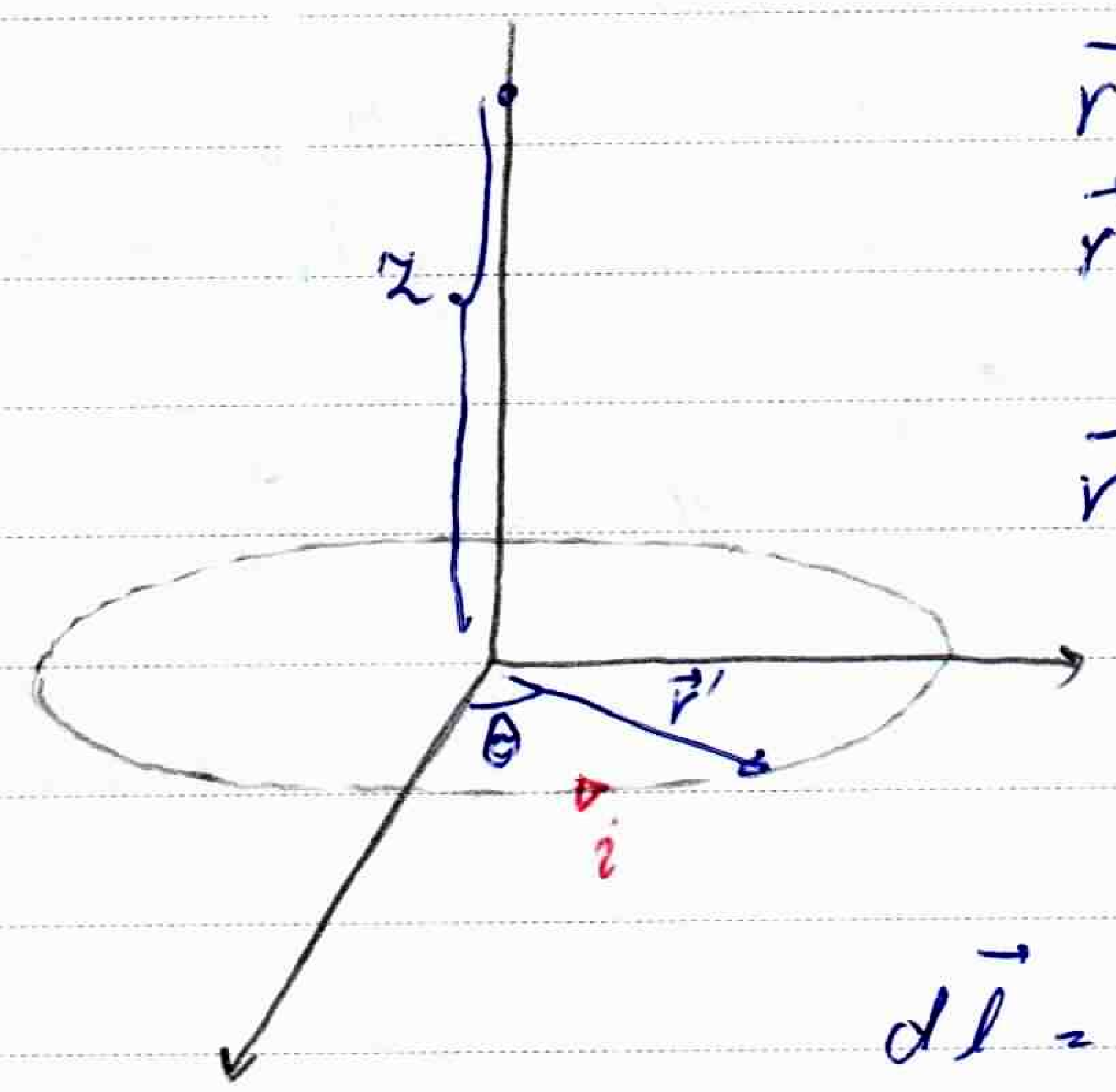
⊛ یک ذره‌ی چرخان وارد این میدان می‌کنیم. ذره حرکت رفت و برگشتی انجام می‌دهد.

Subject :

Date

میدان دیسک :

$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{i\,d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}$$



$\vec{r} = (0, 0, z)$

$\vec{r}\,' = (a\sin\theta , a\cos\theta , 0)$

$\vec{r} - \vec{r}\,' = (-a\sin\theta, -a\cos\theta, z)$

$|\vec{r} - \vec{r}\,'|^2 = a^2 + z^2$

$d\vec{l} = d\vec{r}\,' = -a\sin\theta\, d\theta\, \hat{i} + a\cos\theta\, d\theta\, \hat{j}$

$$d\vec{l} \times (r - r') = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -a\sin\theta & a\cos\theta & 0 \\ -a\cos\theta & -a\sin\theta & z \end{vmatrix} d\theta$$

$$= \hat{i}\,(az\cos\theta)\,d\theta + \hat{j}\,(az\sin\theta)\,d\theta + \hat{k}a^2\,d\theta$$

$$\Rightarrow \vec{B}(r) = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\hat{i}\,(az\cancelto{0}{\cos\theta}) + \hat{j}\,(az\cancelto{0}{\sin\theta}) + \hat{k}a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}}\, d\theta$$

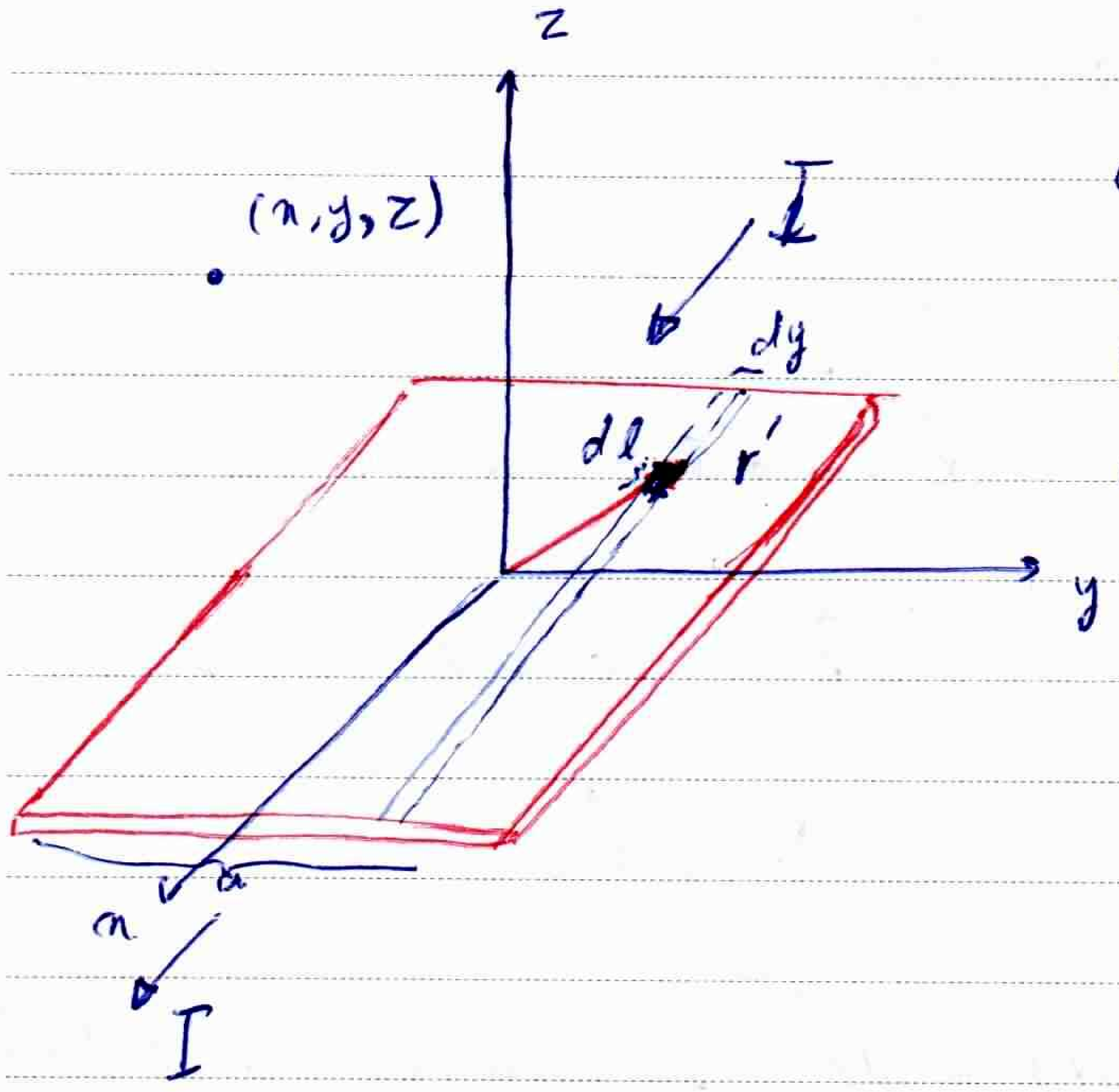
$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 a^2 i}{2(a^2 + z^2)^{3/2}}$$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ اگر جای دایره بیضی داشتیم با قطرهای a , b :

$r' = \hat{i}\, a\cos\theta + \hat{j}\, b\sin\theta$

Subject :
Date

مثال :



$$\vec{dl} = dx'\hat{i}$$

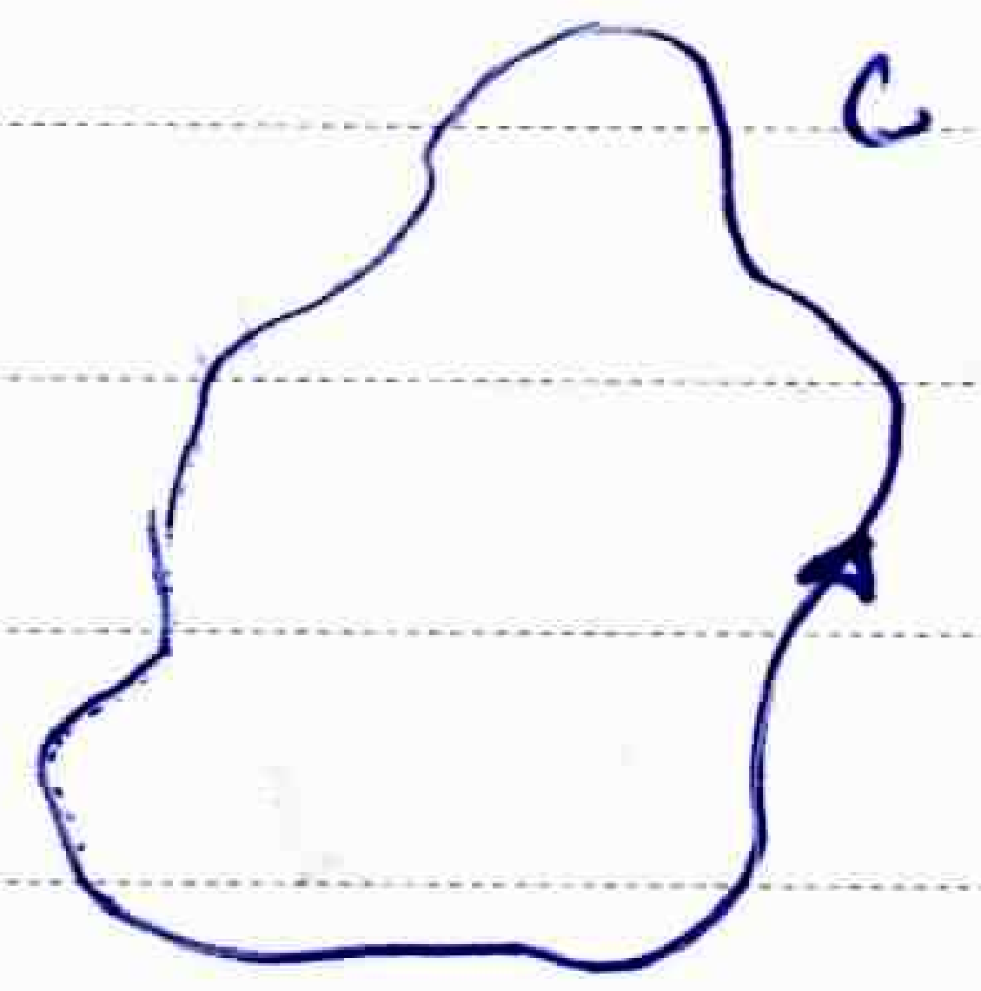
$$\vec{r'} = x'\hat{i} + y'\hat{j}$$

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

$$di = I\frac{dy}{a}$$

جایگذاری

قانون آمپر



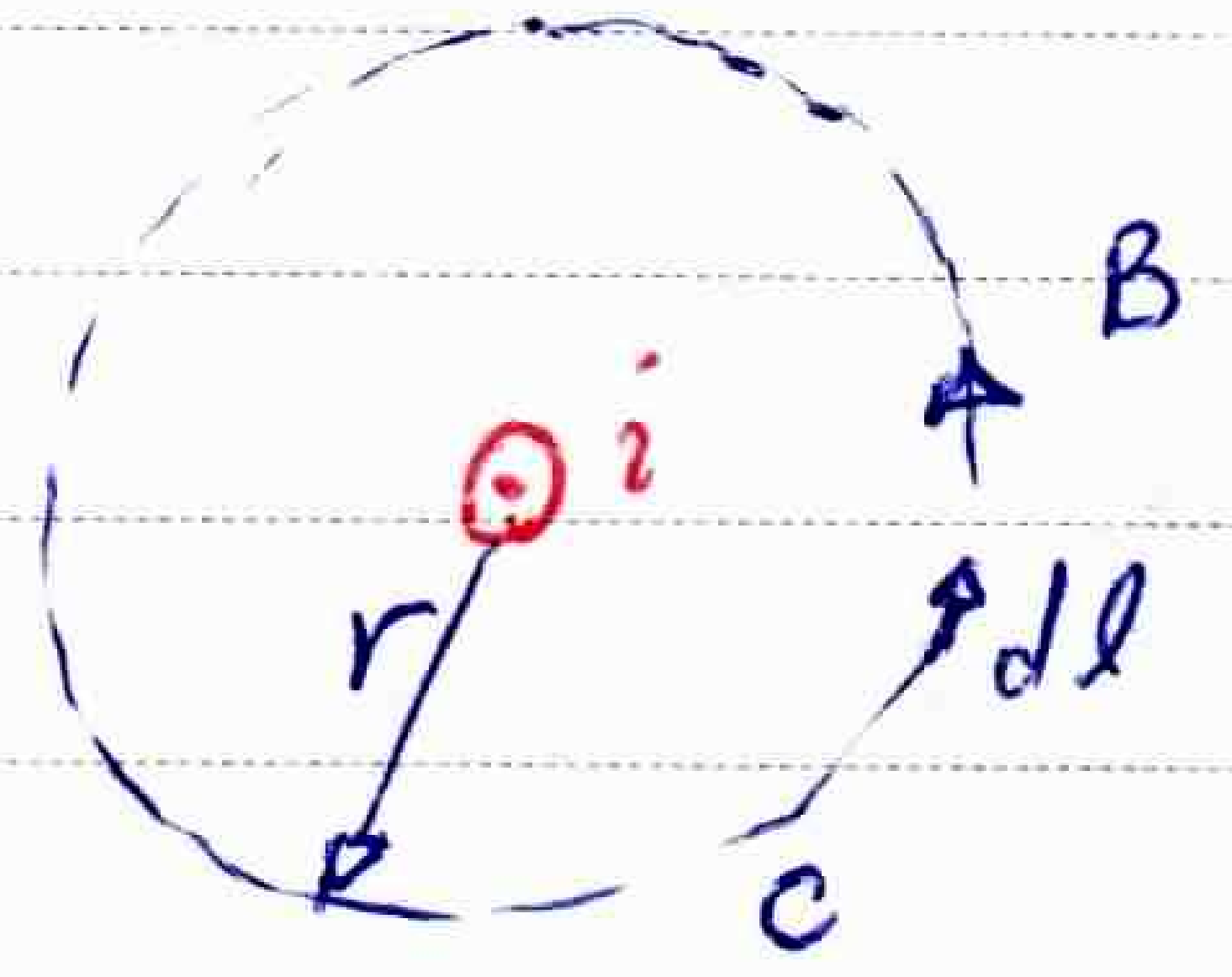
خم بسته C با جهت دلخواه داریم:

$$\oint_c \vec{B}\cdot\vec{dl} = \mu_0 \, i_{in}$$

جریان گذرنده از درون خم

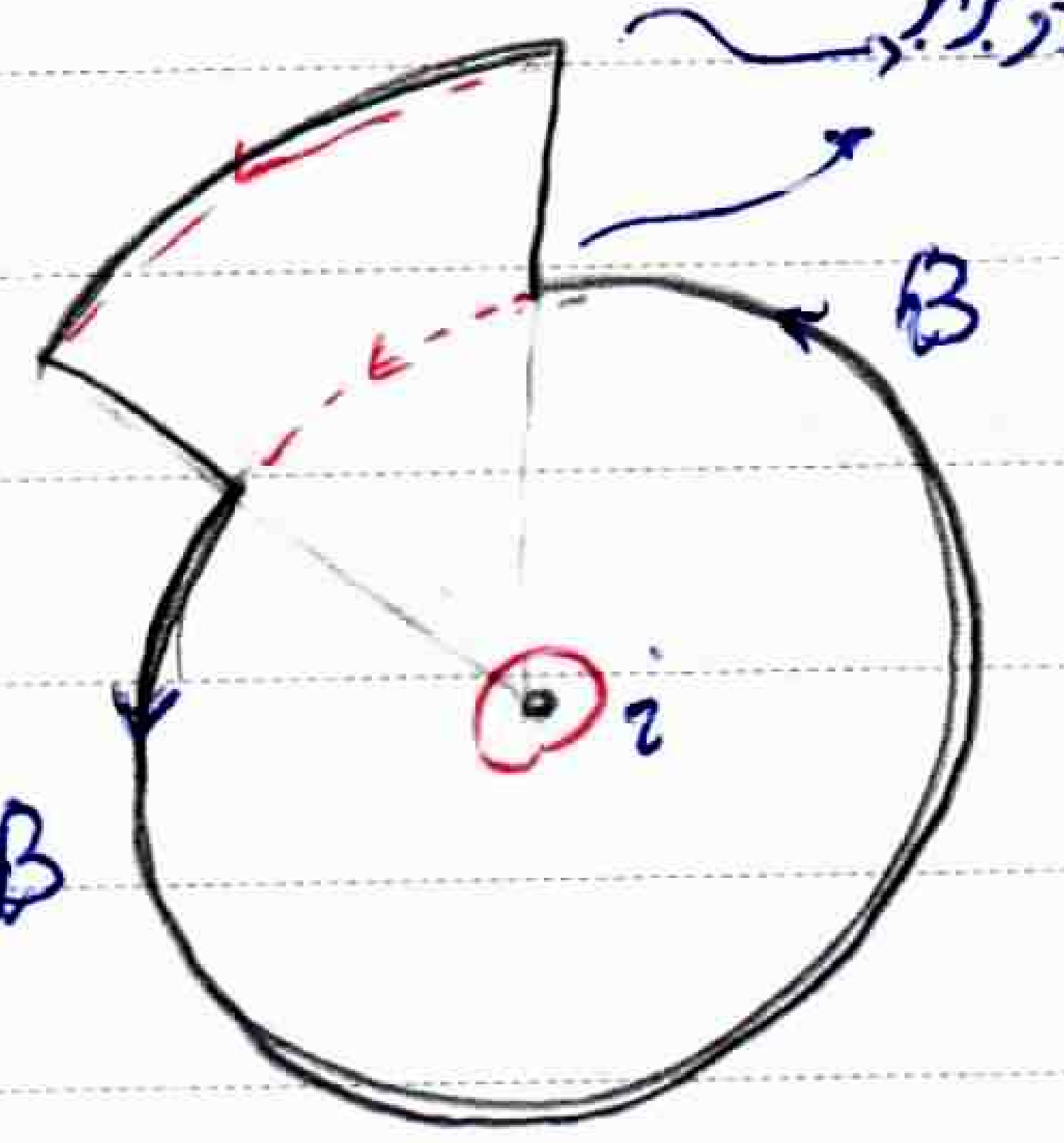
+ برای یک سیم :

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi r} i$$



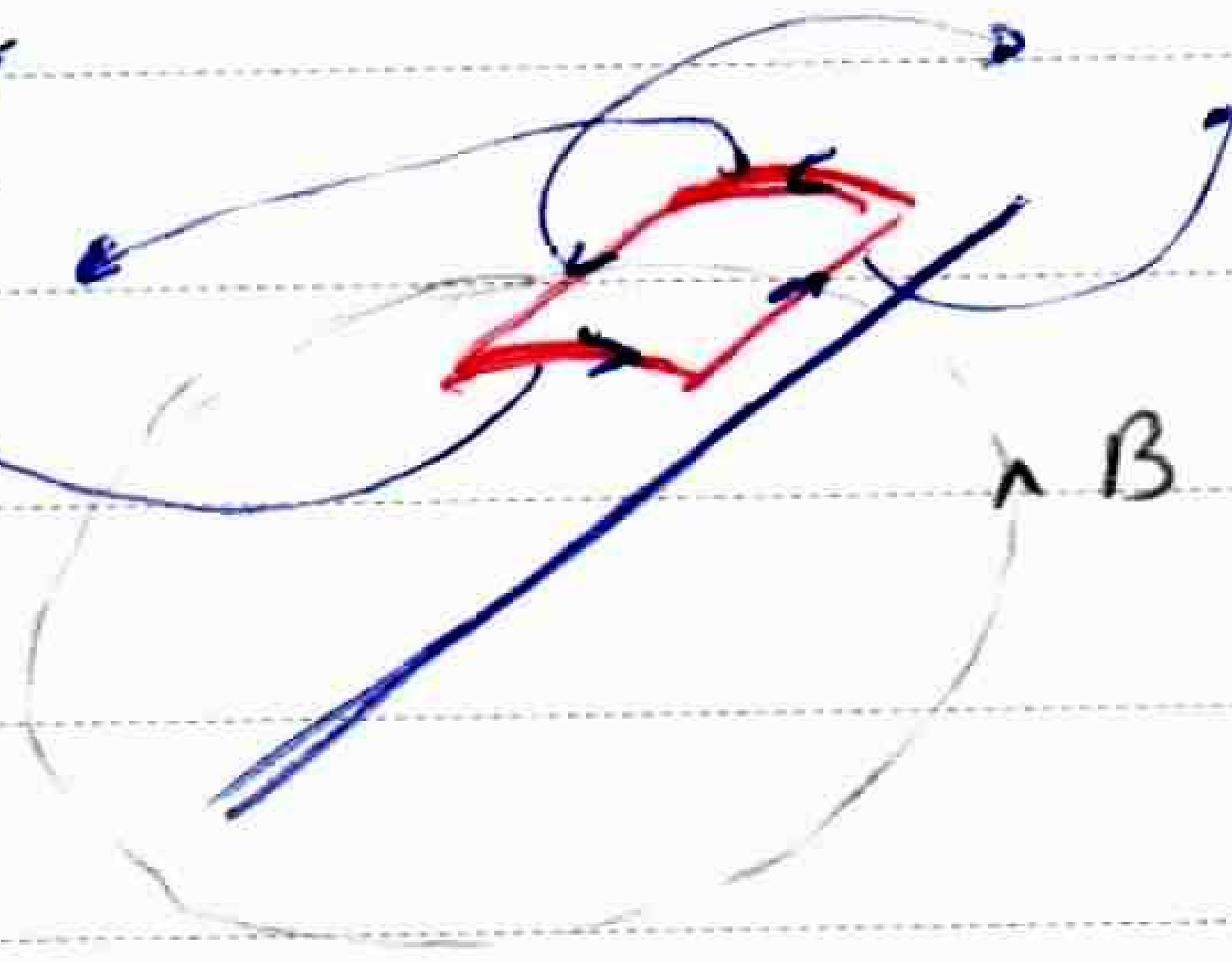
$$\oint_c \vec{B}\cdot\vec{dl} = B\oint_c dl = 2\pi r . B = \mu_0 i$$

Subject :
Date



انتگرال برای این در برابر است

مانند قبل : $\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{in}$

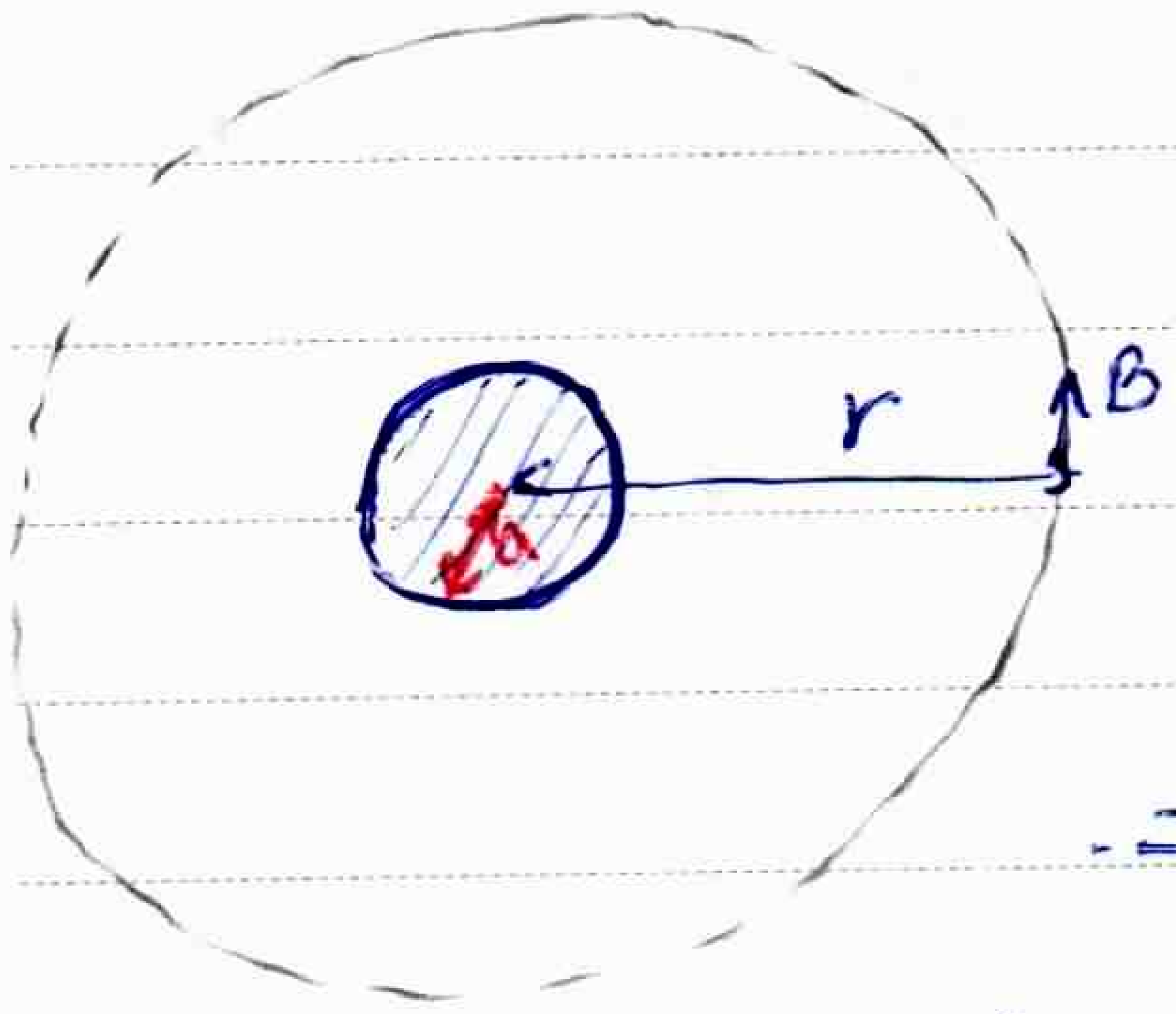


انتگرال این قسمت ها صفر است.

انتگرال این دو قسمت قرینه هستند

$$\Rightarrow \int \vec{B}\cdot d\vec{l} = 0$$

مثال: یک کابل با شعاع a و جریان I. میدان در همه‌ی نقاط:



$$\boxed{\oint_s B\cdot ds = 0 \quad *}$$

به دلیل تقارن و با توجه به قانون بالا، میدان بر شعاع عمود است.

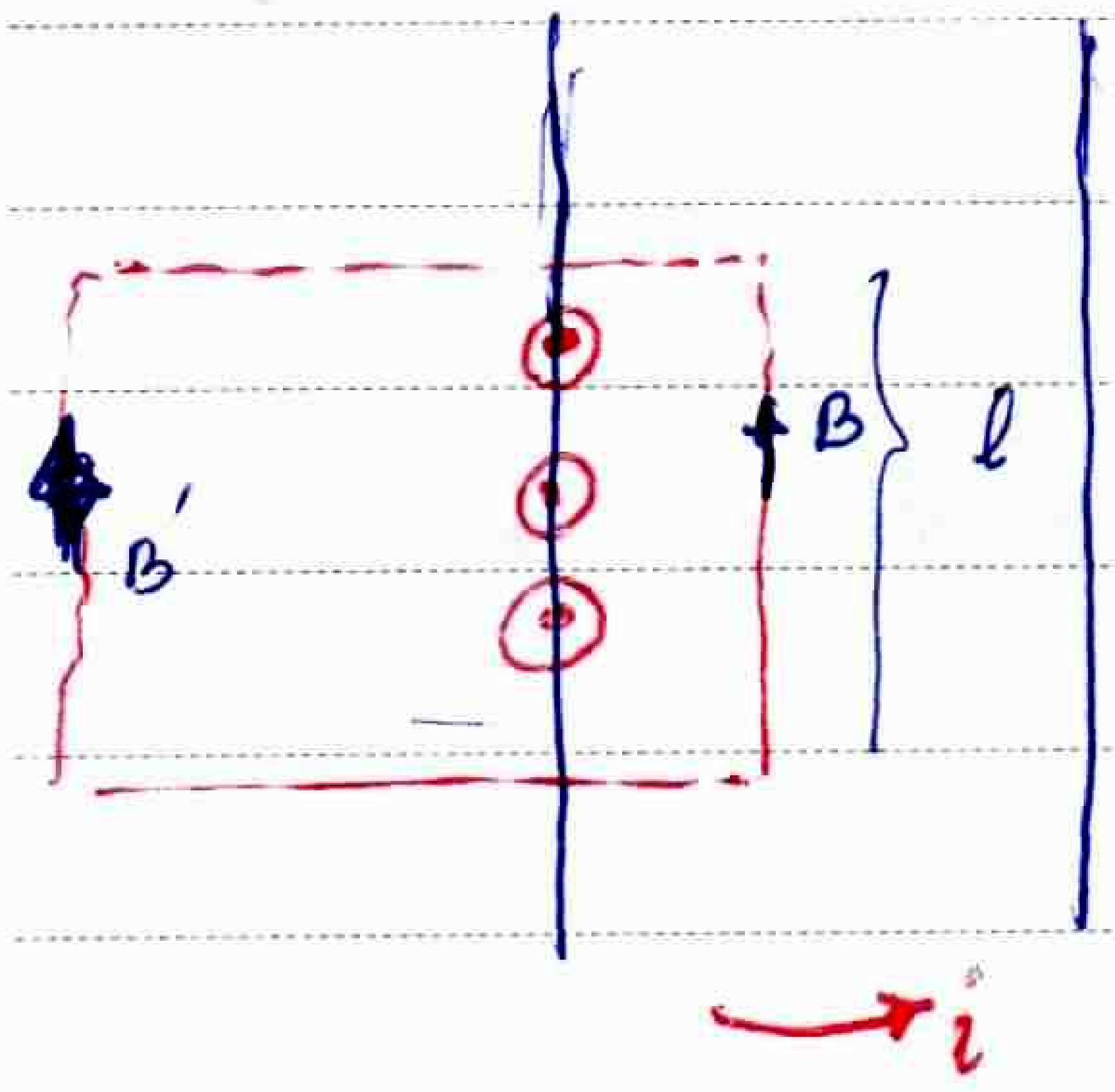
$$\oint B\cdot dl = 2\pi r B = \mu_0 I \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

اگر a از r بزرگتر باشد:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\cdot\frac{r^2}{a^2}$$

$$\Rightarrow B = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 I}{2\pi a^2} r & r < a \\ \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r} & r \geqslant a \end{cases}$$

* محاسبه‌ی میدان سیم‌لوله:



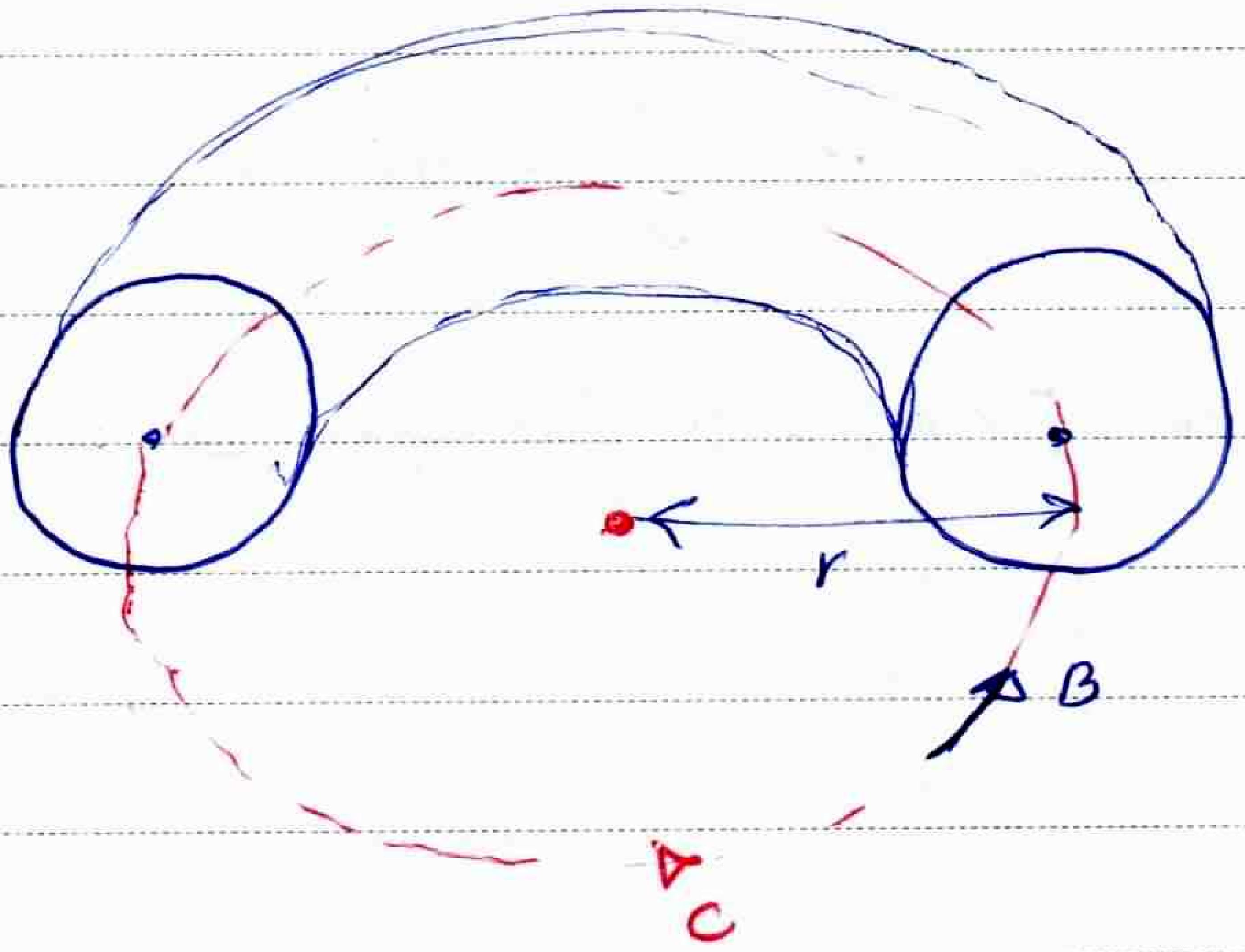
n: تعداد دور بر واحد طول

l: طول   i: جریان

$$\oint B.dl = (Bl - B'l) = \mu_0 lni$$

$$\Rightarrow B = \mu_0 ni \qquad B' = 0$$

* میدان چنبره:



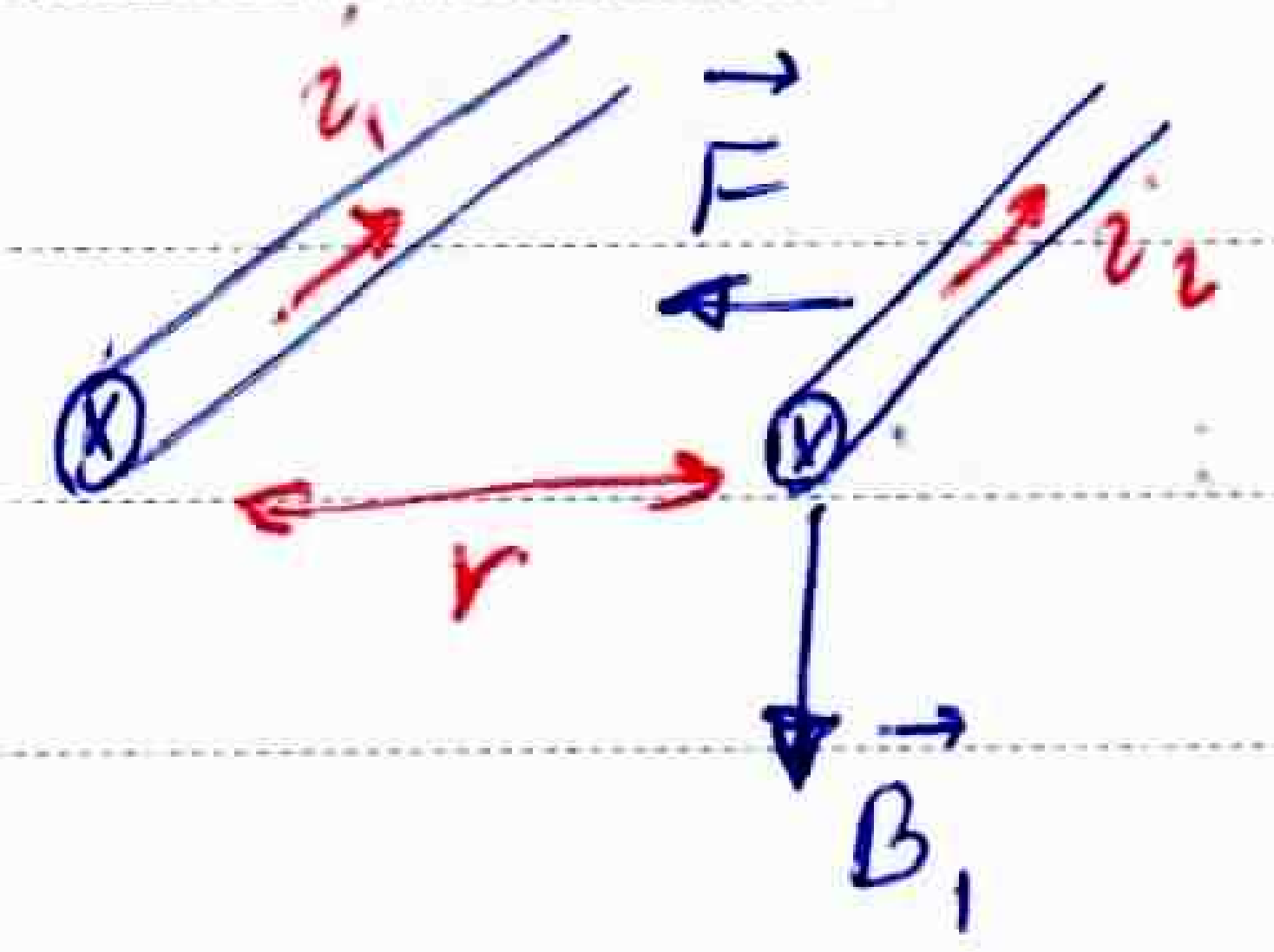
N: تعداد دور ، i

$$\oint B.dl = B.2\pi r$$

$$= \mu_0 Ni$$

$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0 Ni}{2\pi r}$$

* نیروی بین دو سیم:



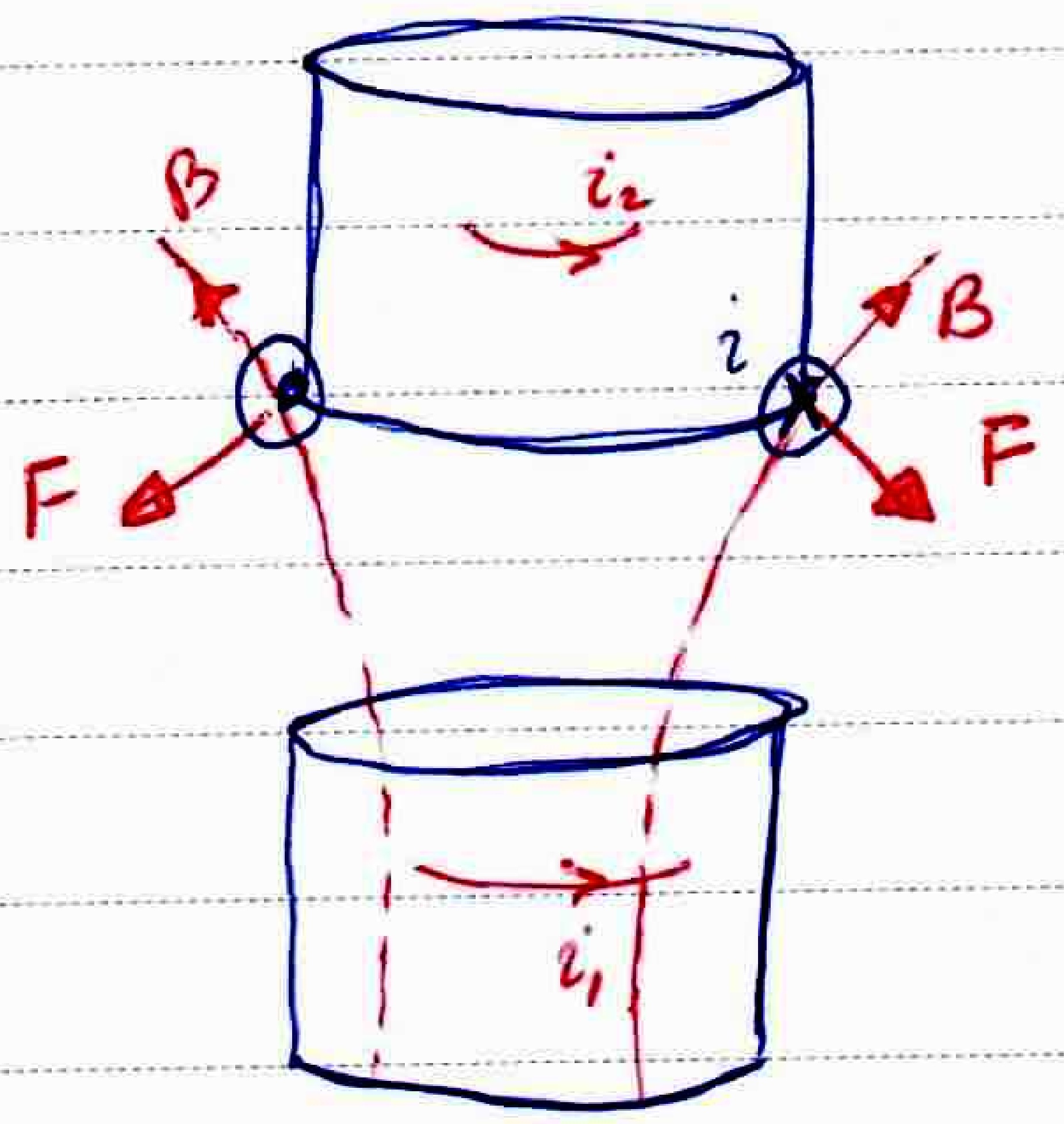
$$B = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi r}$$

$$F = i_2 l B_1 = \frac{\mu_0}{2\pi r} i_1 i_2 l$$

پس نیروی بر واحد

$$F_l = \frac{\mu_0}{2\pi r} i_1 i_2$$

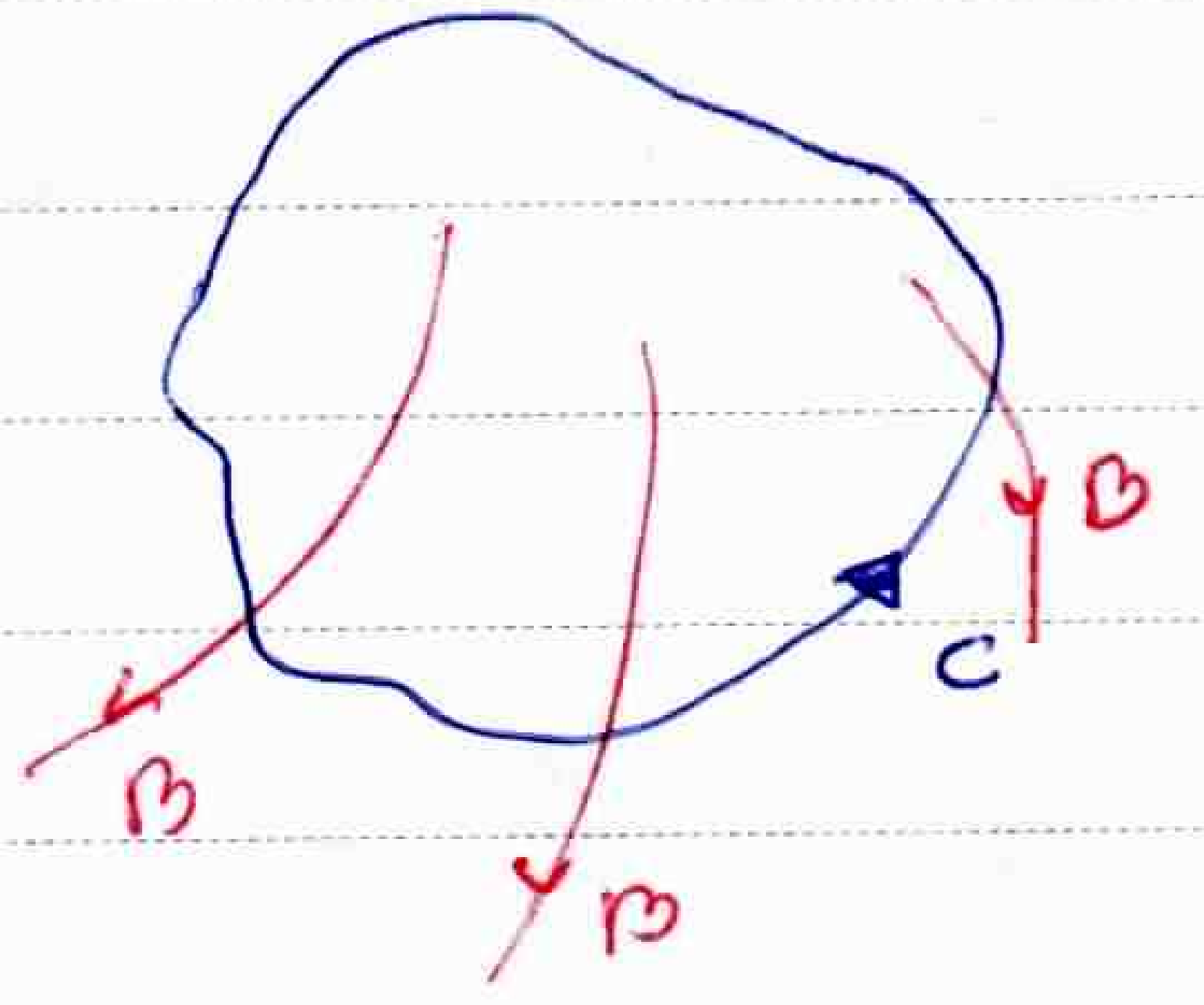
Subject :
Date



نیروی بین دو سیم لوله :

بین دو سیم لوله‌ای که جریان های آنها هم جهت است ، یکدیگر را جذب می کنند.

قانون القای فارادی



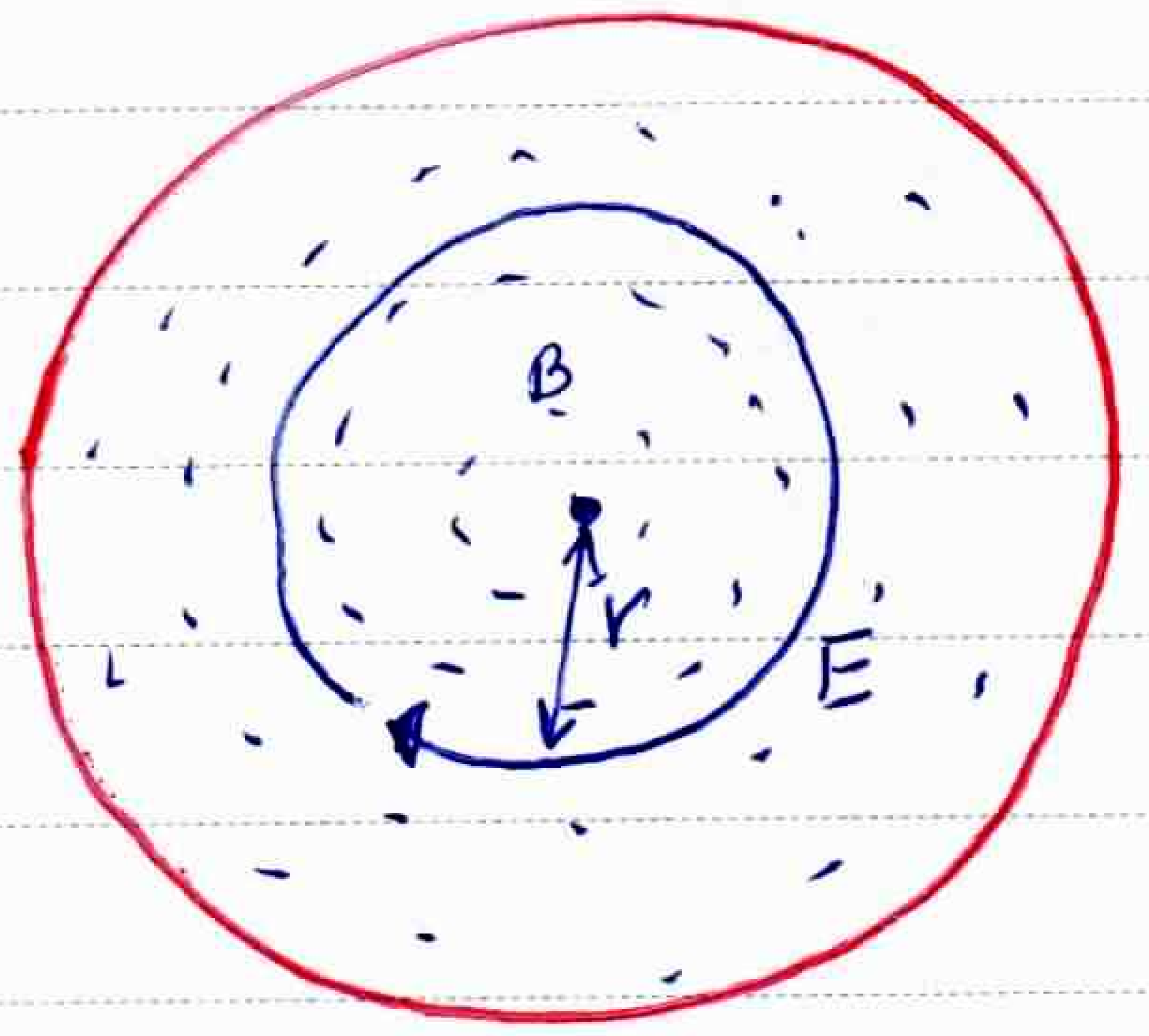
$$\Phi = \oint_s \vec{B} \cdot \vec{ds}$$

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E} \cdot \vec{dl}$$

— نیروی محرکه ایجاد شده باید با عامل تغییرات مخالفت کند. تا قانون بقای انرژی برقرار بماند.

مثال: یک استوانه با میدان یکنواخت در وسط آن که میدان با زمان تغییر می‌کند (اندازه‌ی میدان تغییر می‌کند)

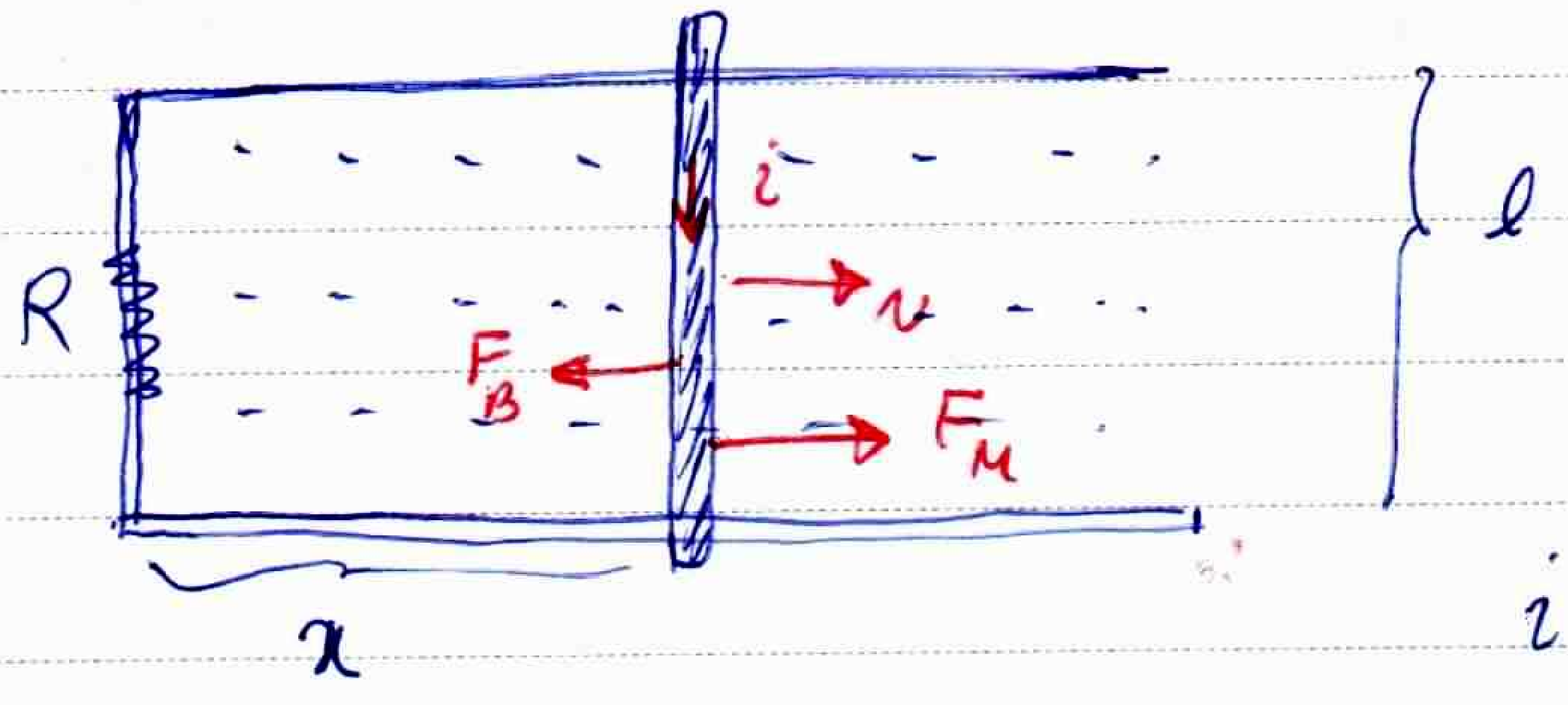


$$\oint E \cdot dl = \mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

$$\Rightarrow E\, 2\pi r = -\frac{d}{dt} B \cdot \pi r^2$$

$$\Rightarrow E = -\frac{1}{2} r \frac{dB}{dt}$$

مثال:

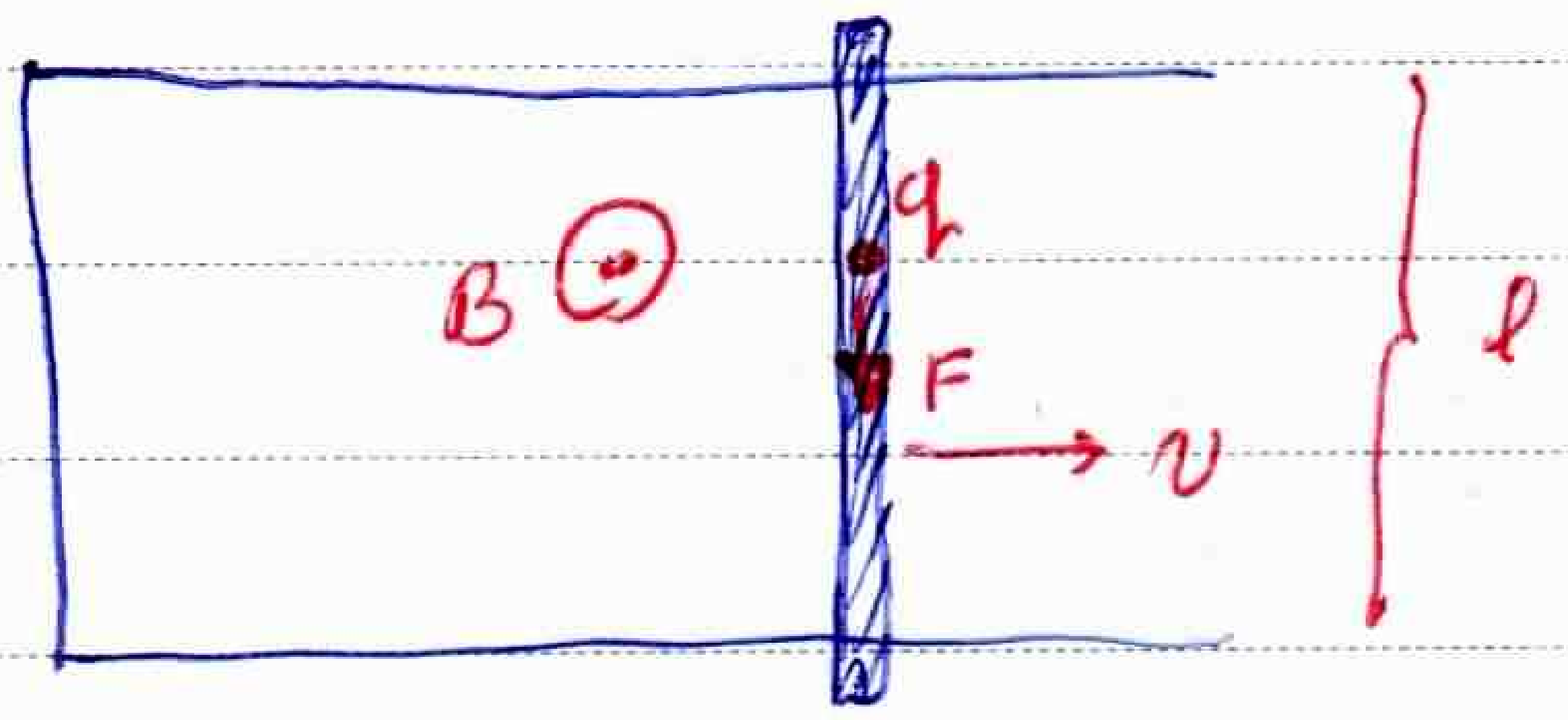


$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(x l B)$$

$$\Rightarrow |\mathcal{E}| = Blv$$

$$i = \frac{Blv}{R} \quad , \quad P_R = \frac{(Blv)^2}{R}$$

$$|F_M| = |F_B| = ilB = \frac{(Bl)^2 v}{R} \quad \Rightarrow |P_M| = |F_M v| = \frac{(Blv)^2}{R}$$



$F = qvB = qE$

$\Rightarrow E = vB \Rightarrow V = El = lBv$

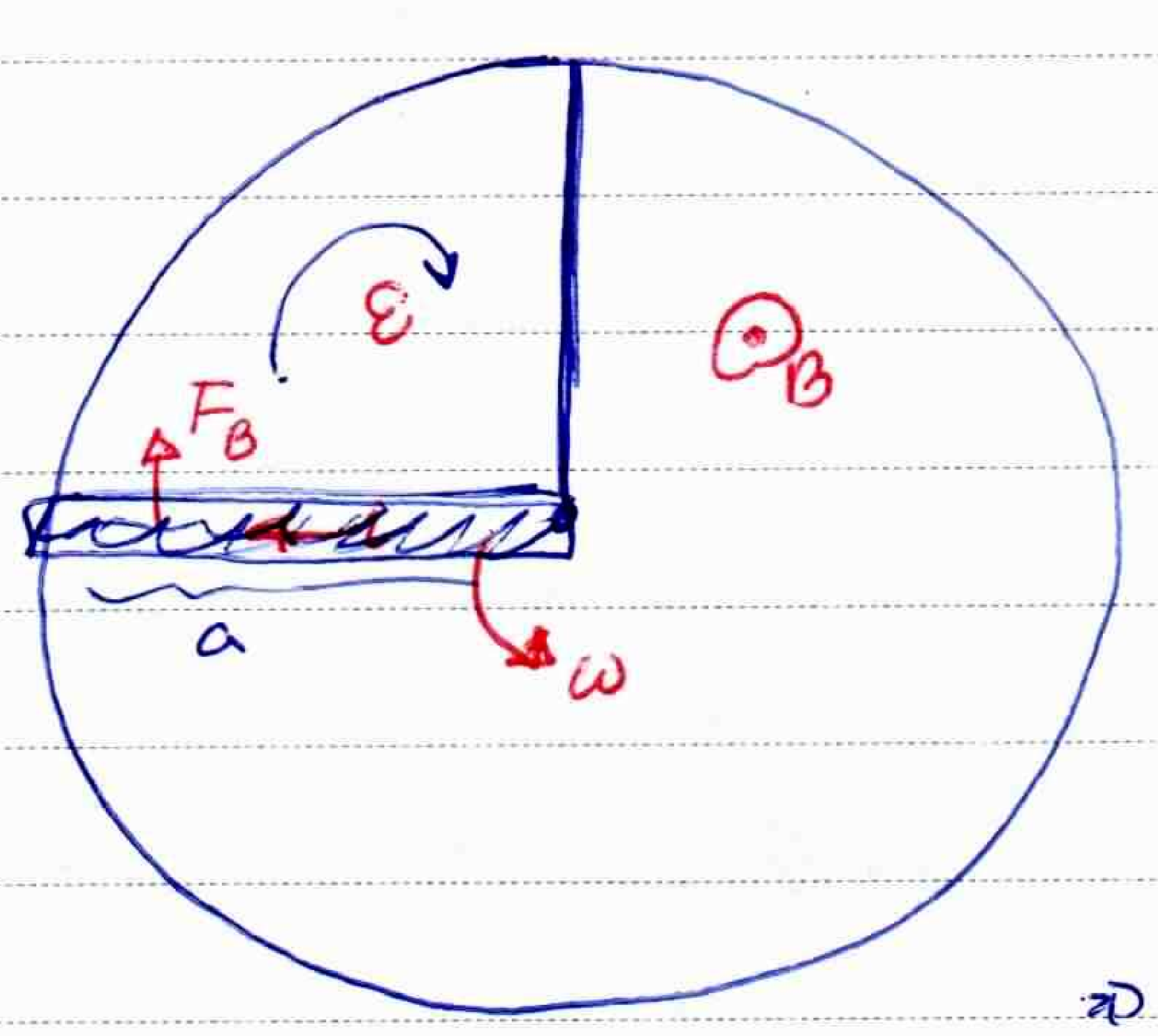
حل:

$|\varepsilon| = \frac{d\phi}{dt} = \frac{d}{dt}\left(B \frac{1}{2} \theta a^2\right)$

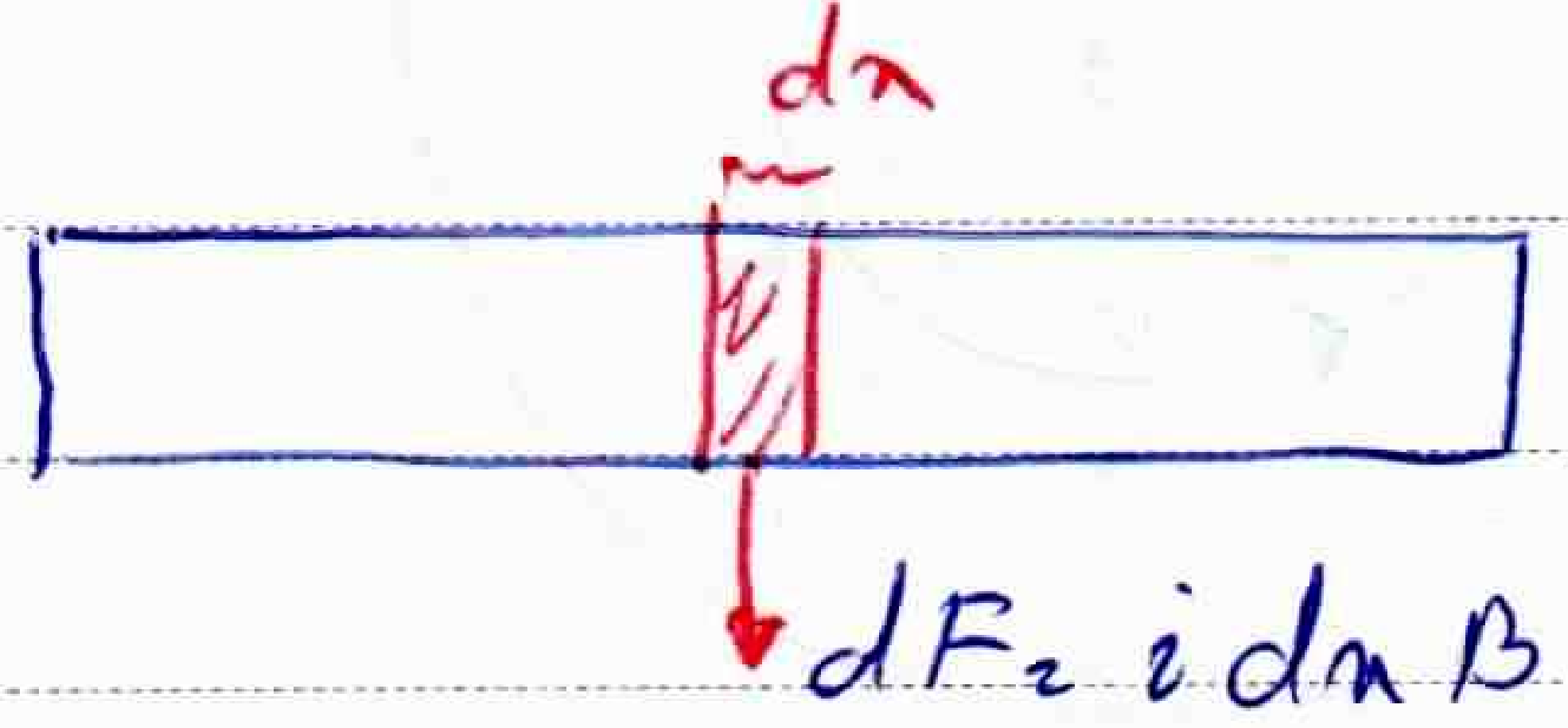
$= \frac{1}{2} B \omega a^2$

$\Rightarrow i = \frac{B\omega a^2}{2R}$

$\Rightarrow P_R = \frac{(B\omega a^2)^2}{4R}$



$F = iaB$



$dP = dF\, v_x = i\,dx\, B\, .\, \omega x$

$\Rightarrow P = \int dP = iB\omega \int_0^a x\,dx = \frac{1}{2} Bi\omega a^2 = \frac{(B\omega a^2)^2}{4R}$

* $\oint_s \vec{E} \cdot \vec{ds} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}$

$\nabla \cdot E = \rho / \varepsilon_0$

$\left(\nabla \cdot E = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right)$

* $$\oint_s B \cdot ds = 0$$

$$\nabla \cdot B = 0$$

* نکته ریاضی :

$$= \oint_s \vec{A} \cdot \vec{ds} = \oint_v (\nabla \cdot A)\, dv$$

$$\oint_s \vec{A} \cdot \vec{ds} = \oint_c (\nabla \times A)\, dl$$

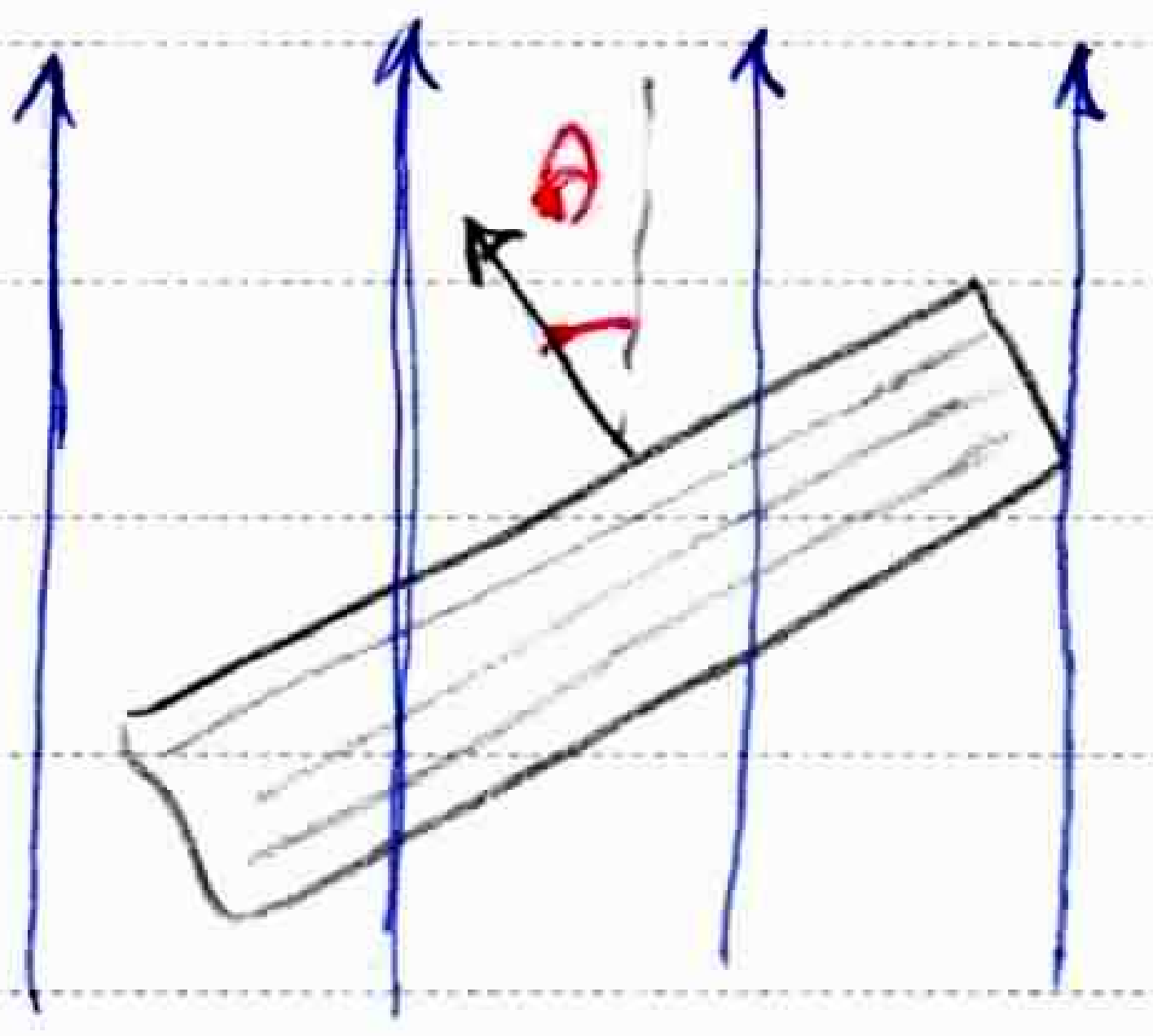
* $$\oint_c B \cdot dl = \mu_0 I_{in} = \mu_0 \int j \cdot ds$$

$$\Rightarrow \nabla \times B = j$$

* $$\oint_c E \cdot dl = -\frac{d}{dt} \oint B \cdot ds$$

$$\Rightarrow \nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

ژنراتور :



مساحت A

تعداد دور N

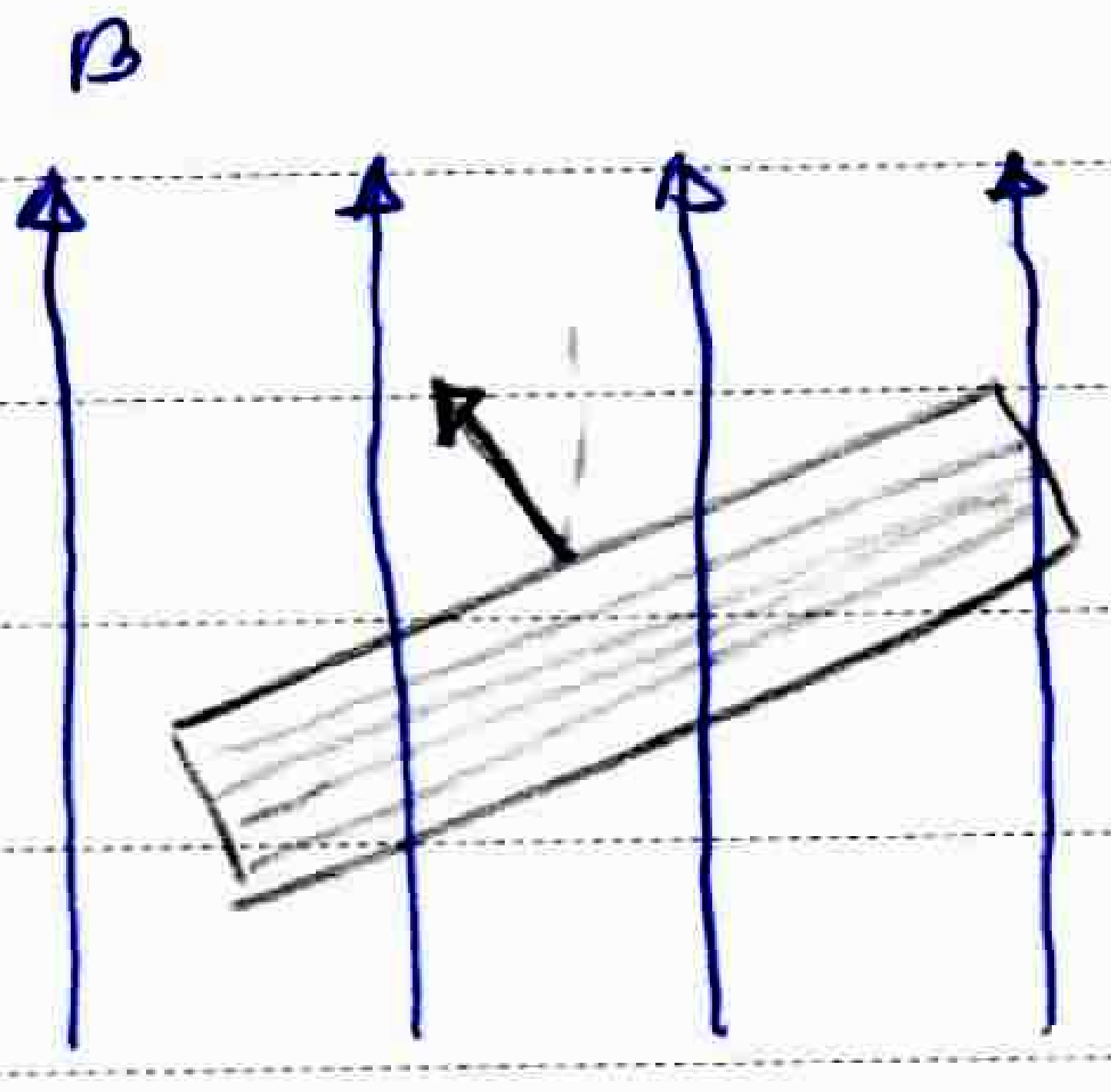
$$\phi = NBA \, a\theta$$

اگر داشته باشیم :

$$\theta = \omega t$$

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi}{dt} \Rightarrow \mathcal{E} = (NAB\omega)\, \mathrm{Sin}\, \omega t$$

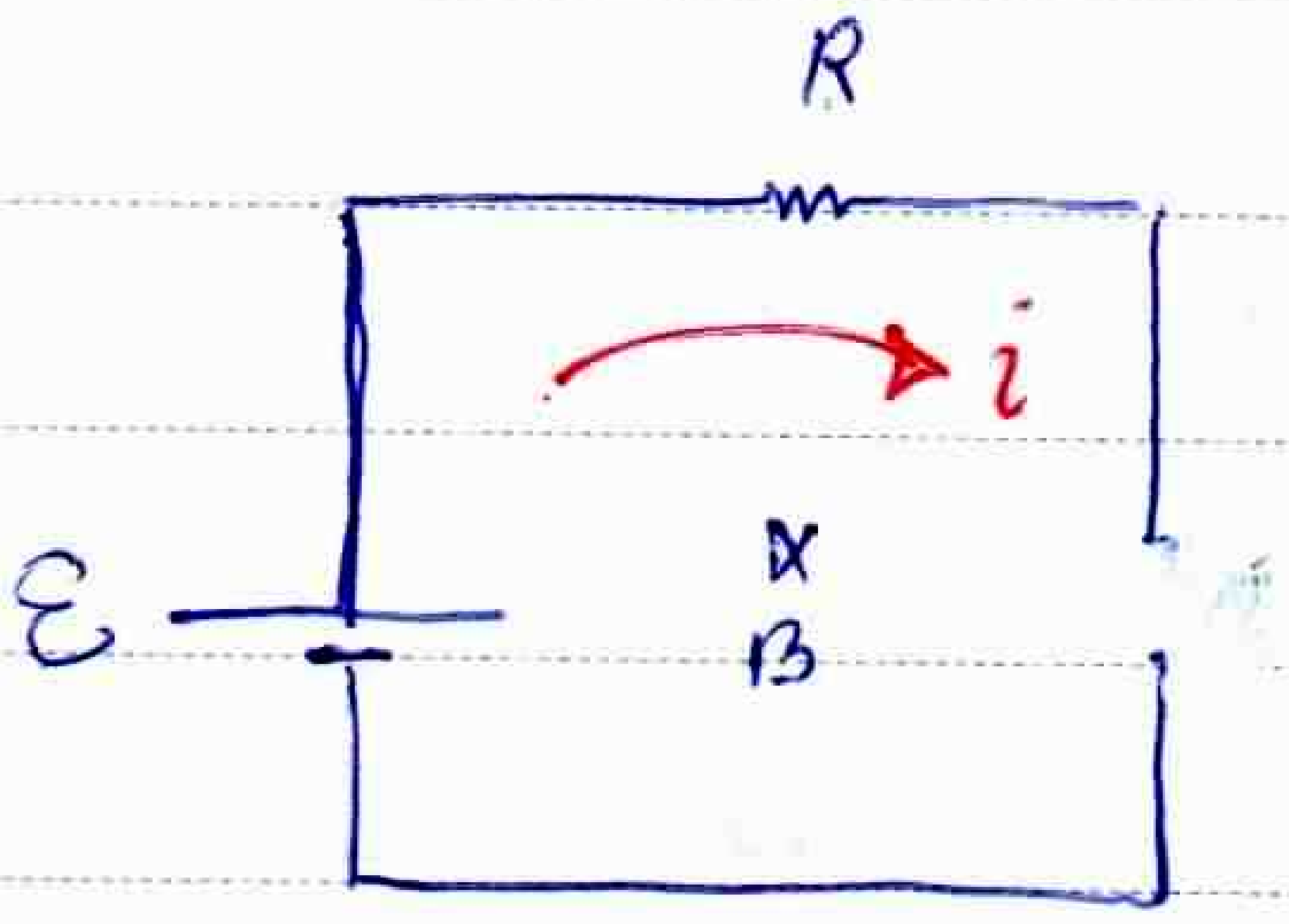
+ موتور



$$\vec{\mu} = (NiA)\hat{n}$$
$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$$

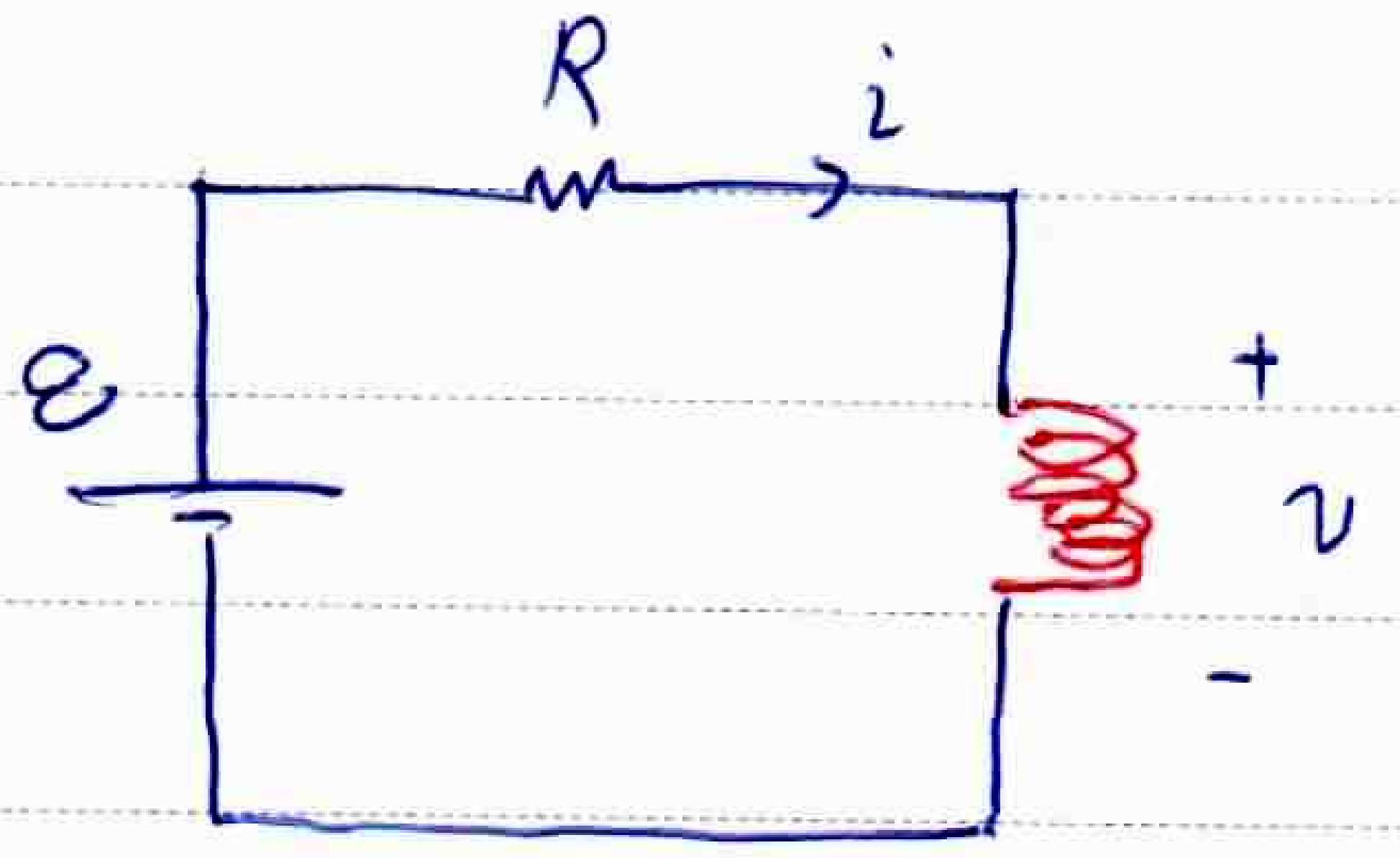
اگر جهت جریان ثابت باشد، پس از اینکه θ به صفر می‌رسد، با ادامه‌ی حرکت، جهت گشتاور عوض می‌شود. پس جهت جریان باید به موقع عوض شود

خودالقایی :



مدار مانند یک حلقه است، پس تغییرات جریان، باعث تغییر میدان مغناطیسی می‌شود و طبق قانون فارادی، نیروی محرکه‌ای القایی می‌شود که با تغییرات جریان مخالفت می‌کند.

این خود القایی را با یک عنصر در مدار نشان می‌دهیم :

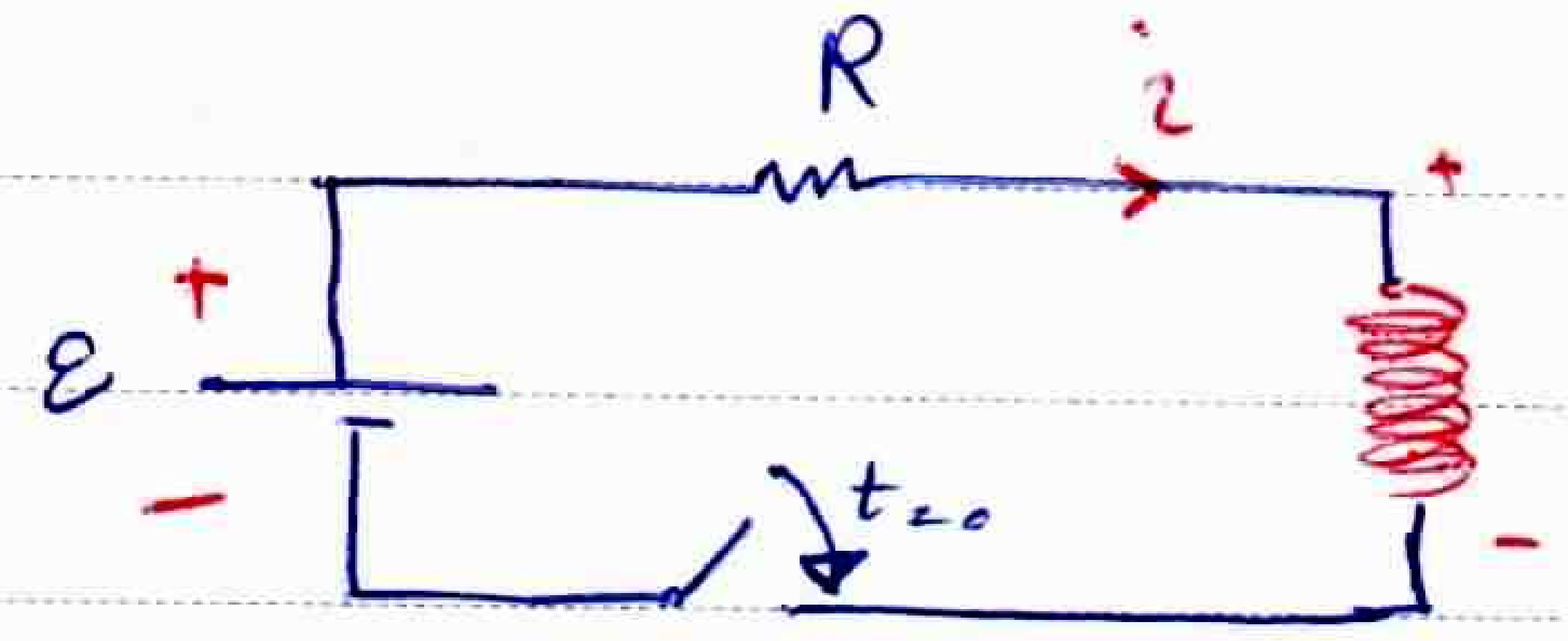


$$v = L\frac{di}{dt}$$

برای سلف :

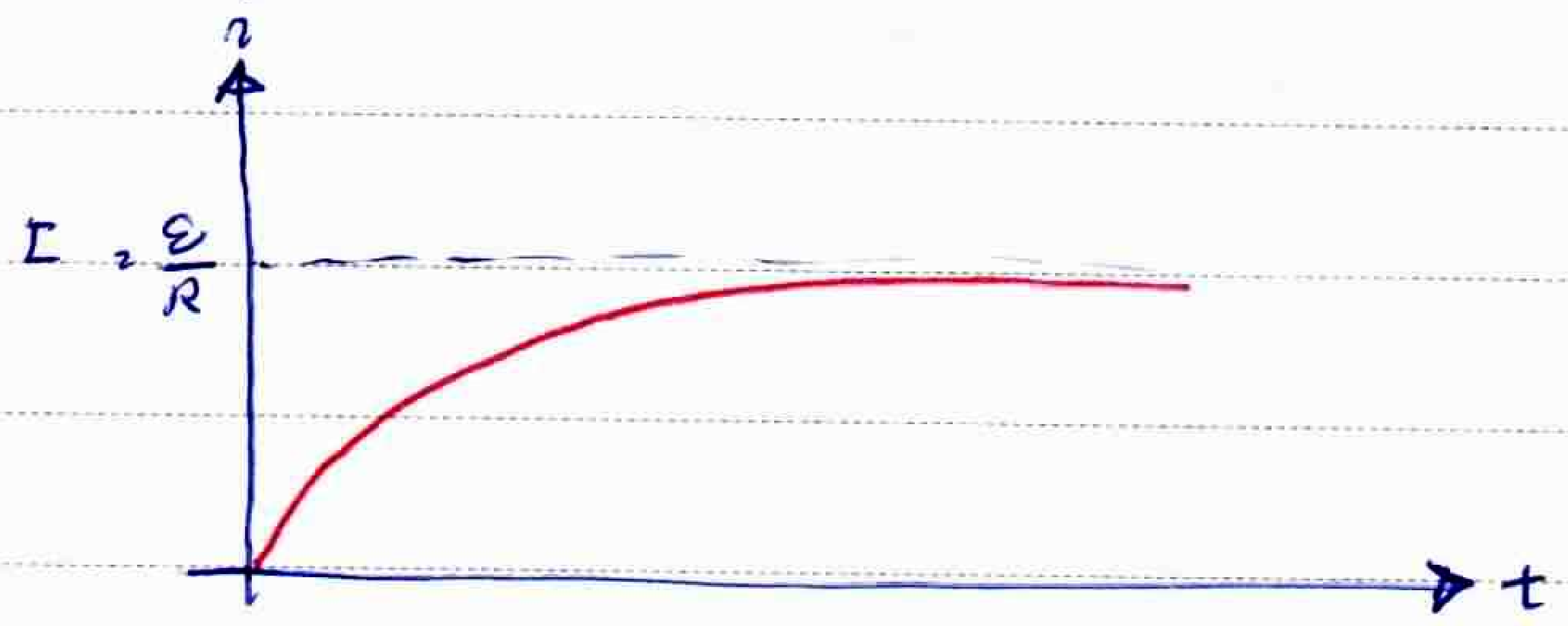
$$B = \mu_0 \frac{N}{l} i$$

$$\phi = BAN = \mu_0 \frac{N^2 A}{l} i \Rightarrow L = \mu_0 N^2 \frac{A}{l}$$



$$\varepsilon = L\frac{di}{dt} + Ri$$

$i(0) = 0$, $i(t) = ?$



$$i_p = \frac{\varepsilon}{R}$$

$$i_g = A e^{-\frac{t}{\tau_L}}$$

$$-L\frac{1}{\tau_L} + R = 0 \Rightarrow \tau_L = \frac{L}{R}$$

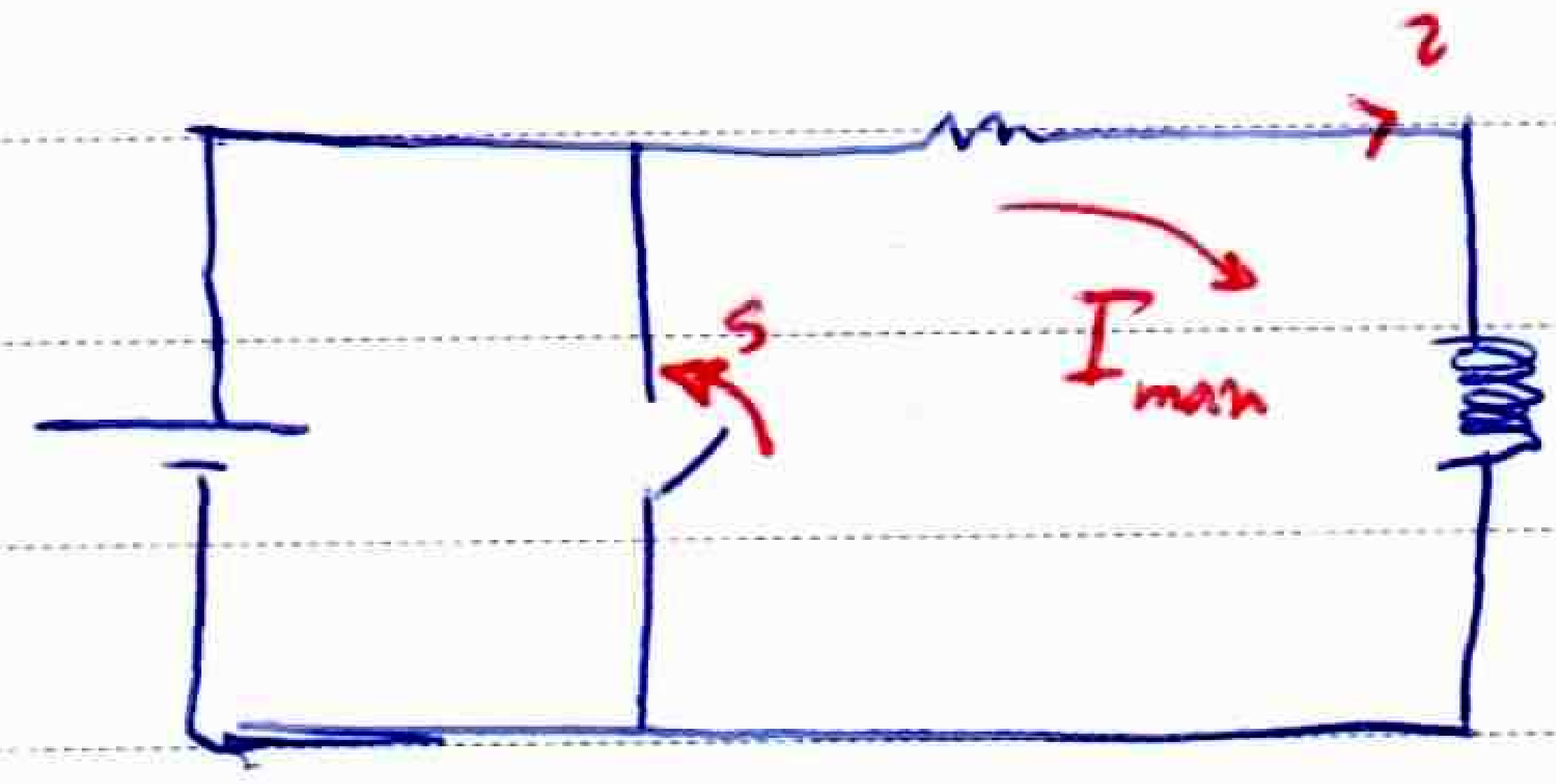
Subject:
Date

$$\Rightarrow \quad i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R}\left(1 - e^{-t/\tau_L}\right)$$

$$i(\tau_L) = I_{max}\left(1 - \frac{1}{e}\right) = 0.63\, I_{max}$$

* واحد L : H : Henry

$$1\ \text{Henry} = \frac{1\ \text{Tesla}.m^2}{1\ A}$$



$$L\frac{di}{dt} + Ri = 0 \qquad *$$

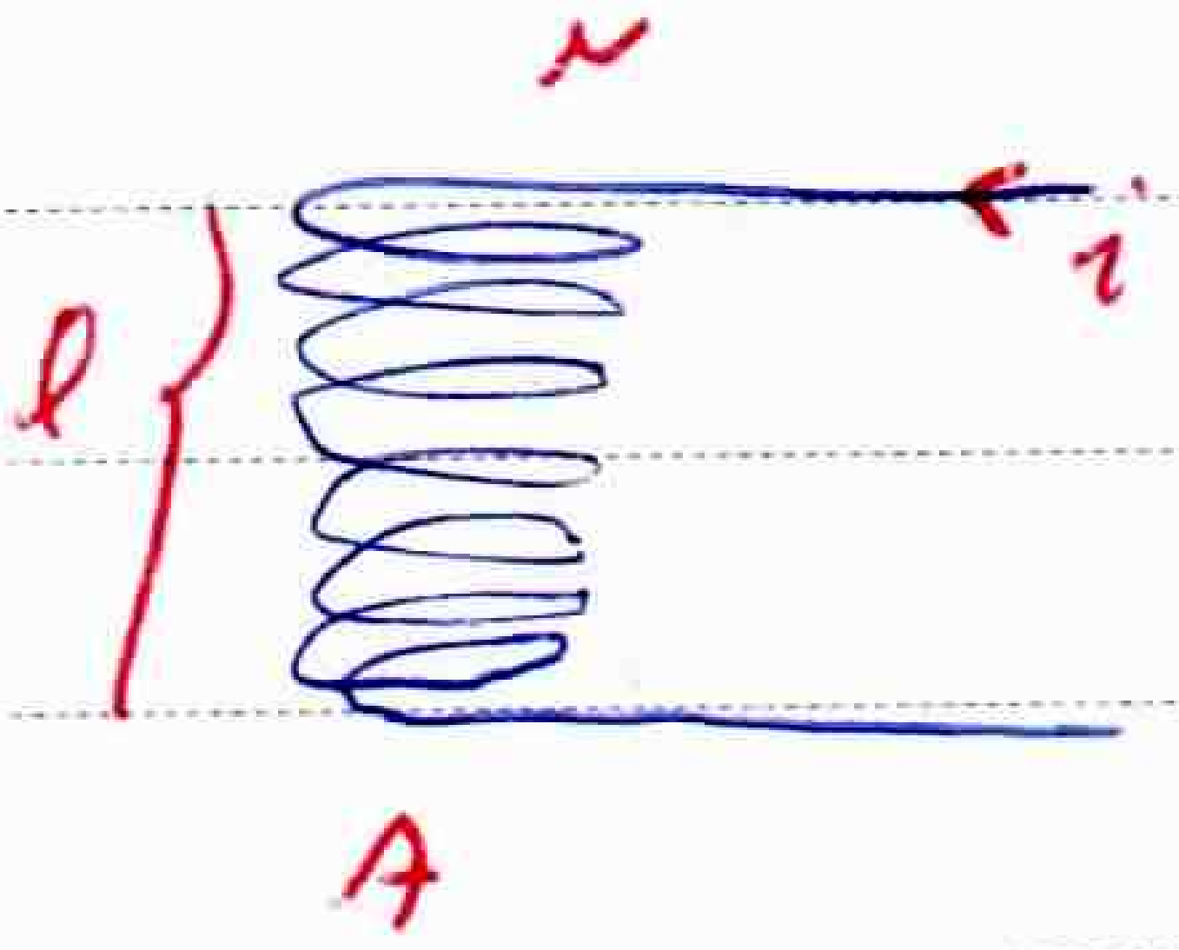
$$\Rightarrow \quad i = I_{max}\, e^{-t/\tau_L}$$

- انرژی تلف شده در مقاومت :

$$U_R = \int_0^\infty R i^2 dt$$

$$= \int_0^\infty R\frac{\mathcal{E}^2}{R^2} e^{-\frac{2t}{\tau_L}} dt = \frac{\mathcal{E}^2}{R^2}\frac{\tau_L}{2} = \frac{1}{2} L I_{max}^2$$

پس مطابق این محاسبات، در سلف انرژی ذخیره می شود.



$$U_L = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2}\mu_0 \frac{N^2}{l} A i$$

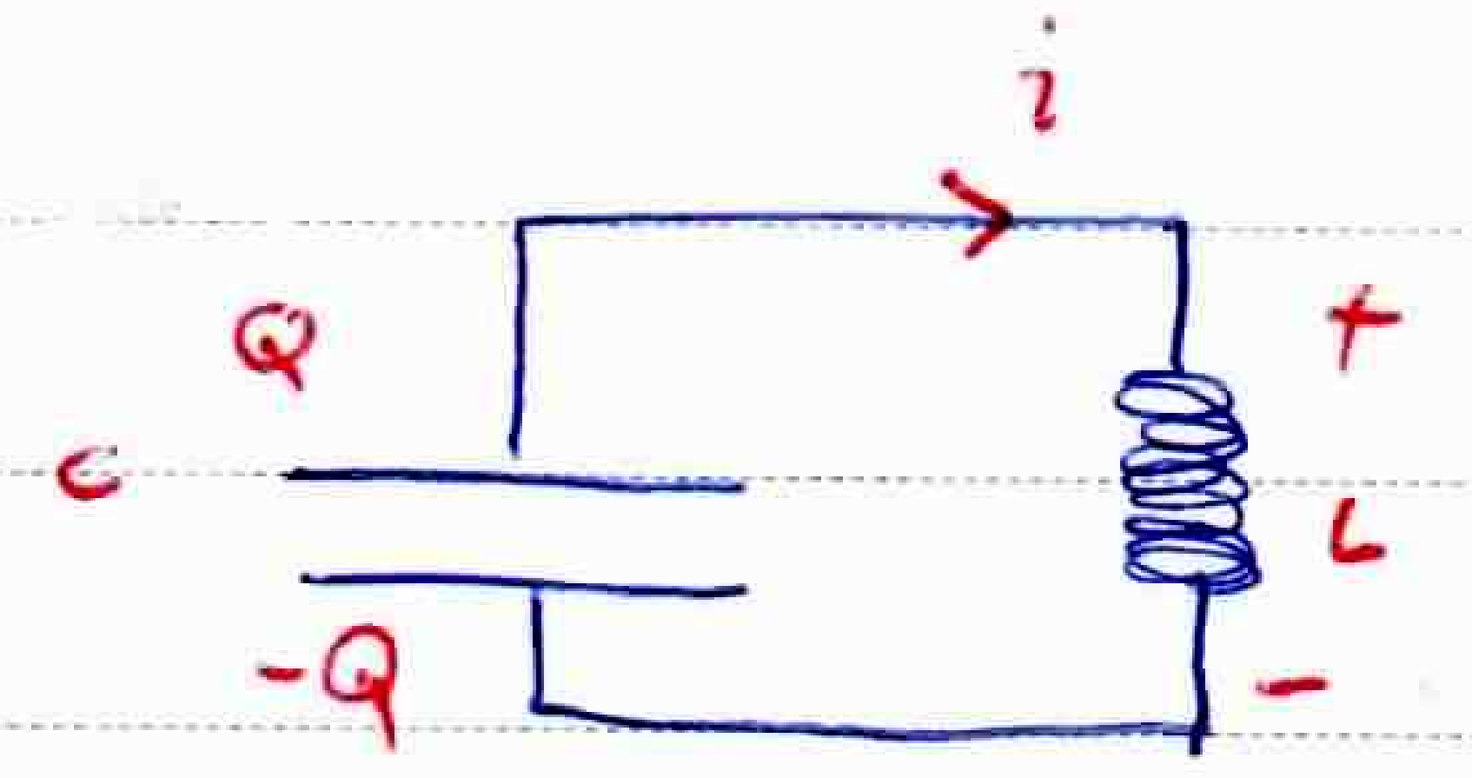
$$= \frac{1}{2}\mu_0^2 \frac{N^2}{l^2} A i^2 \frac{l}{\mu_0} = \frac{1}{2\mu_0} B^2 \underbrace{Al}_{V}$$

$$\Rightarrow \quad u = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}$$ چگالی انرژی میدان مغناطیسی

PAPCO

Subject:
Date

مدار LC



$$\frac{q}{C} + L\frac{di}{dt} = 0$$

$$-dq/dt = i$$

$$\Rightarrow \ddot{q} + \frac{1}{LC} q = 0 \qquad \omega^2 \equiv \frac{1}{LC}$$

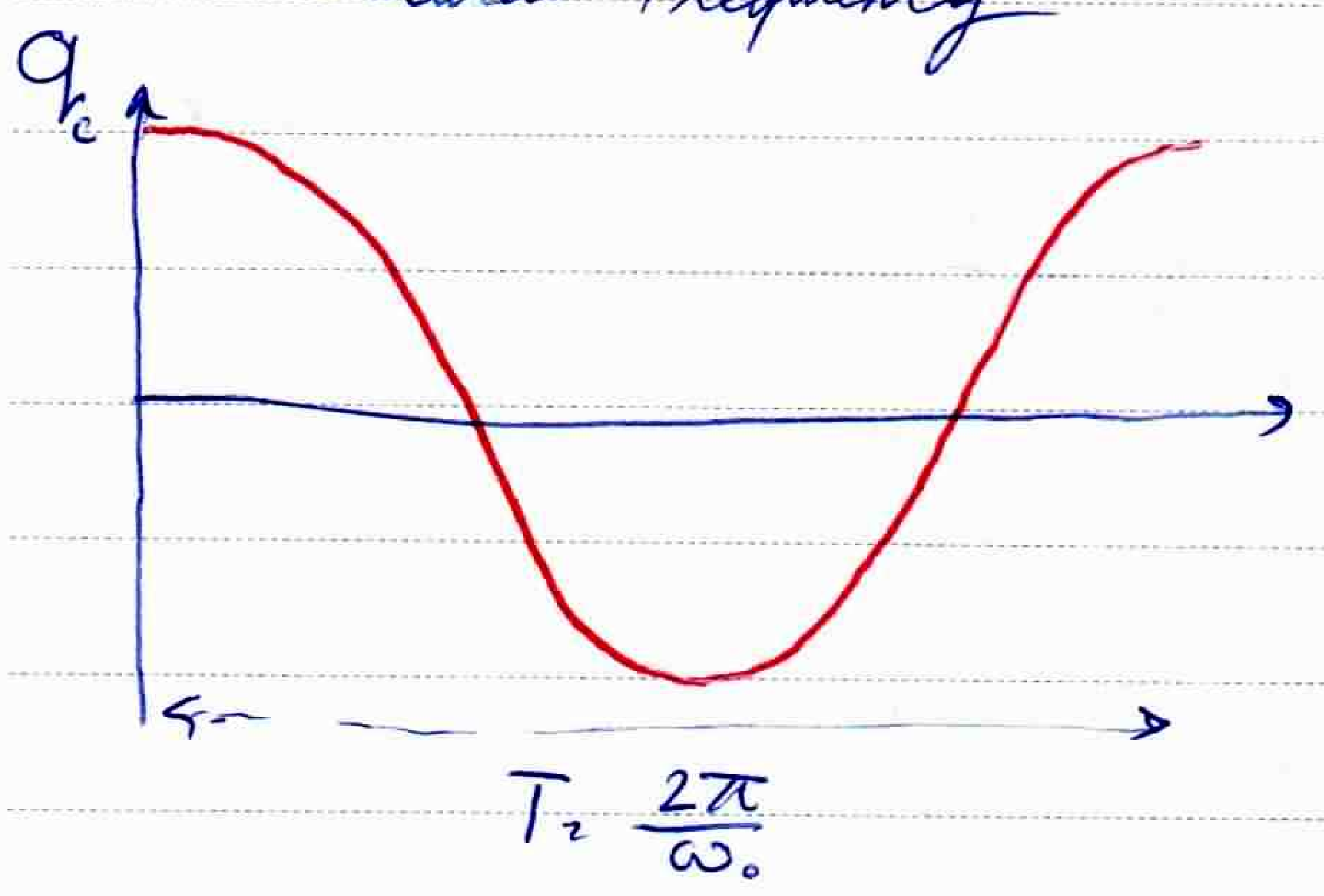
$$\Rightarrow \ddot{q} + \omega^2 q = 0$$

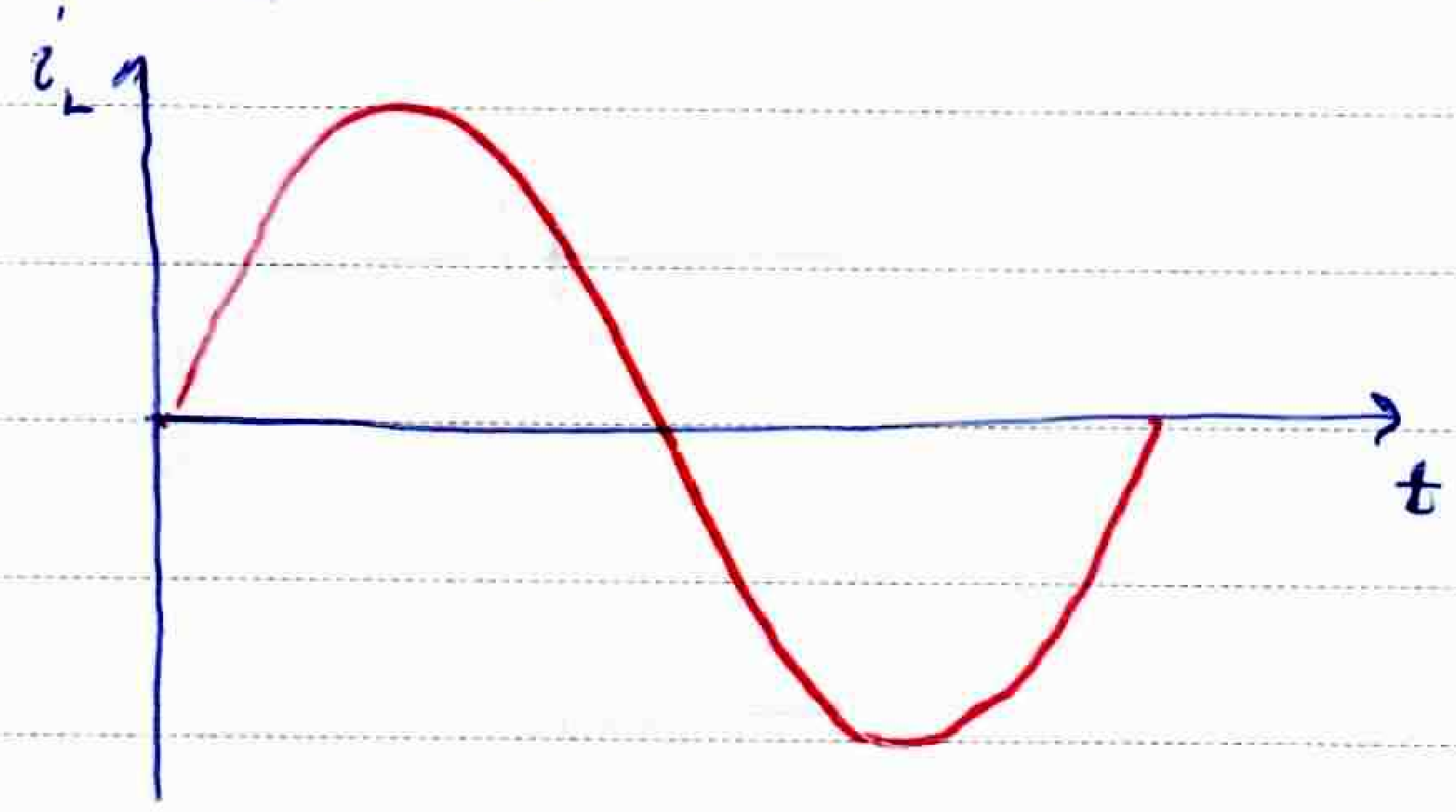
$$q(0) = Q$$

$$\Rightarrow q(t) = Q \cos(\omega t)$$

$$\Rightarrow i(t) = +Q\omega \sin(\omega t)$$

Natural Frequency : فرکانس طبیعی : ω



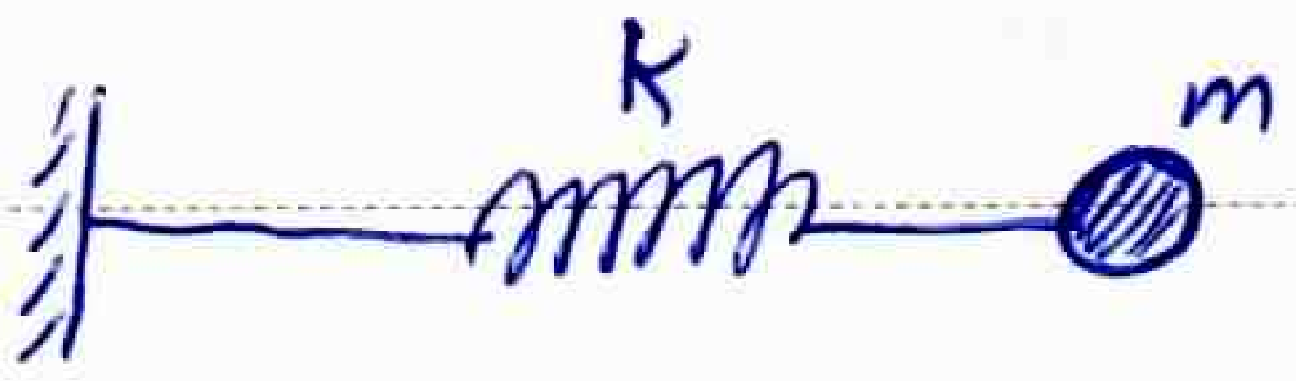


$$U_c = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}\cos^2(\omega_0 t) \qquad U_L = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2} L Q^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t)$$

با توجه به $L\omega_0^2 = \frac{1}{C}$ داریم:

$$U_c + U_L = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \longrightarrow$$ انرژی اولیه خازن

⊕ مشابه همین معادلات در دستگاه نوسانگر ساده‌ی جرم ـ فنر داریم:

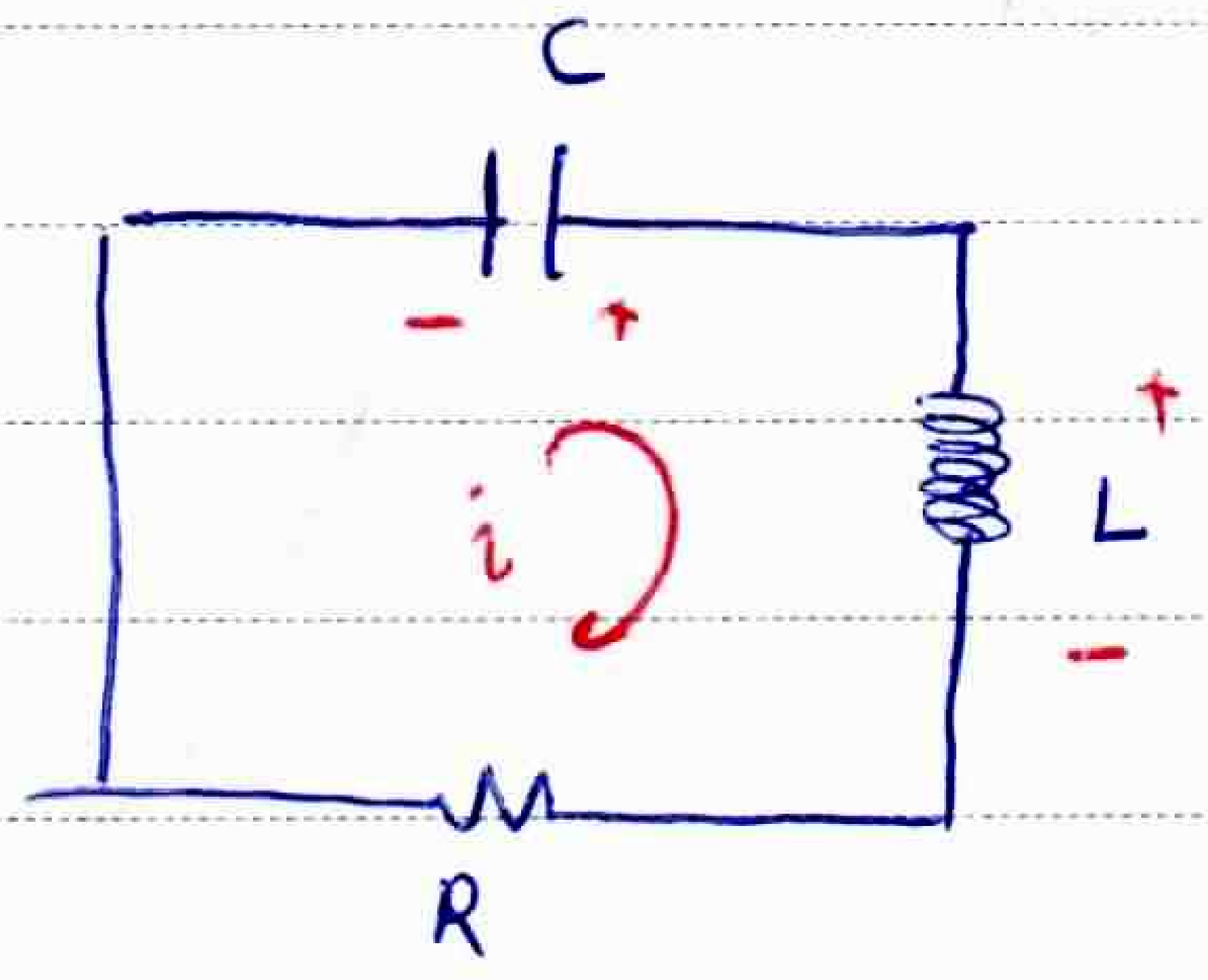


$$m\ddot{x} + kx = 0$$

$$L\ddot{q} + \frac{q}{C} = 0$$

Elect..	Mech..
q	x
i	v
$\frac{1}{C}$	k
L	m
$\frac{1}{2} L i^2$	$\frac{1}{2} m v^2$
$\frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$	$\frac{1}{2} k x^2$

+ مثال RLC :



$$\begin{cases} \frac{q}{C} - L\frac{di}{dt} - Ri = 0 \\ i = -\frac{dq}{dt} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{q}{C} + L\ddot{q} + R\dot{q} = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC} q = 0$$

$$\gamma := \frac{R}{2L} \qquad \omega_0^2 := \frac{1}{LC}$$

$$\Rightarrow \ddot{q} + 2\gamma\dot{q} + \omega_0^2 q = 0$$

برای حل معادله فرض می‌کنیم:

$$q(t) = Ae^{\alpha t}$$

با جایگذاری داریم :

$$\alpha^2 + 2\gamma\alpha + \omega_0^2 = 0$$

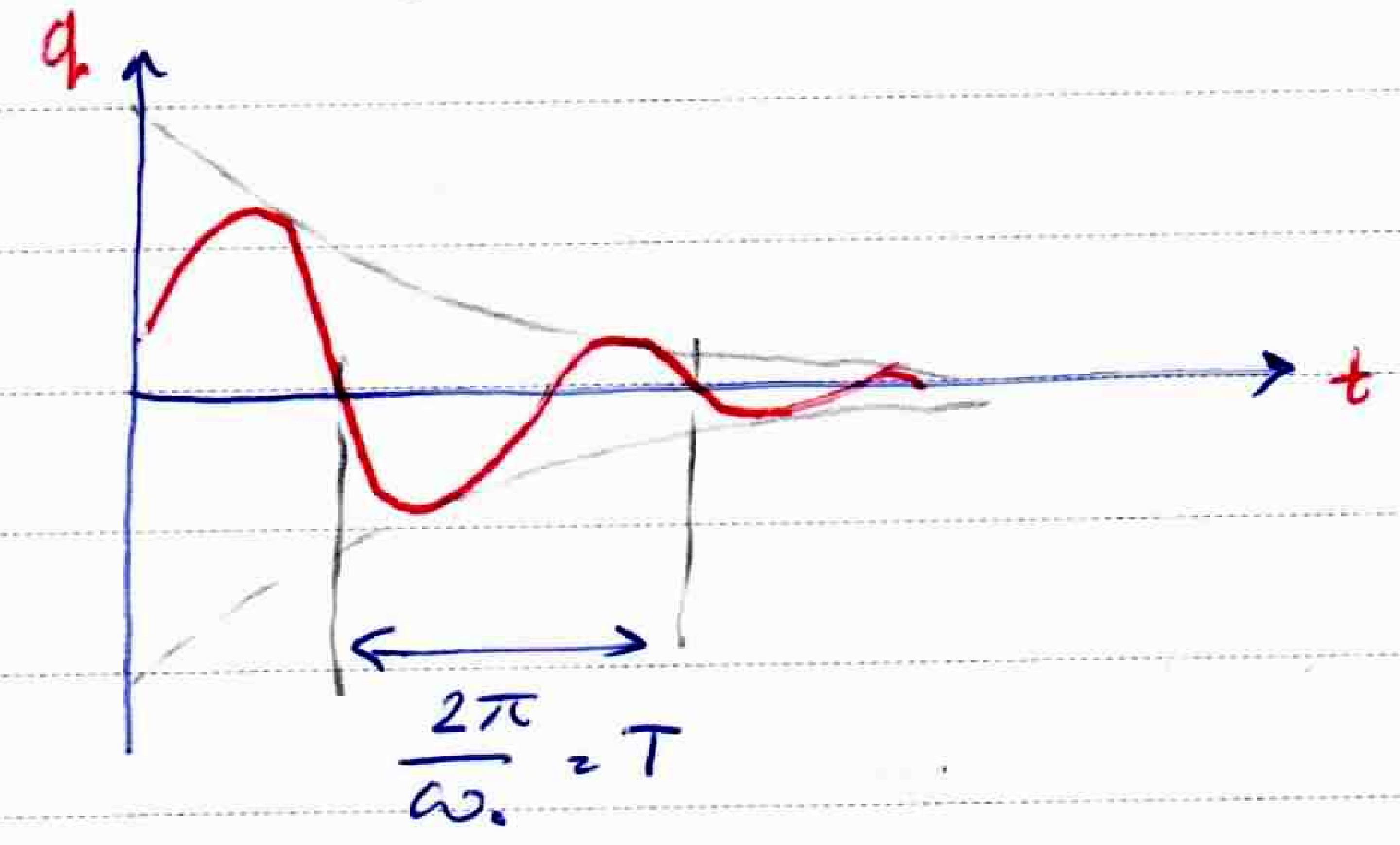
$$\Rightarrow \alpha = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

Underdamped : $\gamma < \omega_0$ ①

$$\alpha = -\gamma \pm i\omega_1 \qquad \omega_1 := \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

$$\Rightarrow q(t) = e^{-\gamma t}\left(k_1 \sin(\omega_1 t) + k_2 \cos(\omega_1 t)\right)$$

k_1 و k_2 با استفاده از شرایط اولیه سلف و خازن به دست می آیند .



هم چنین برای انرژی داریم :

انرژی اولیه

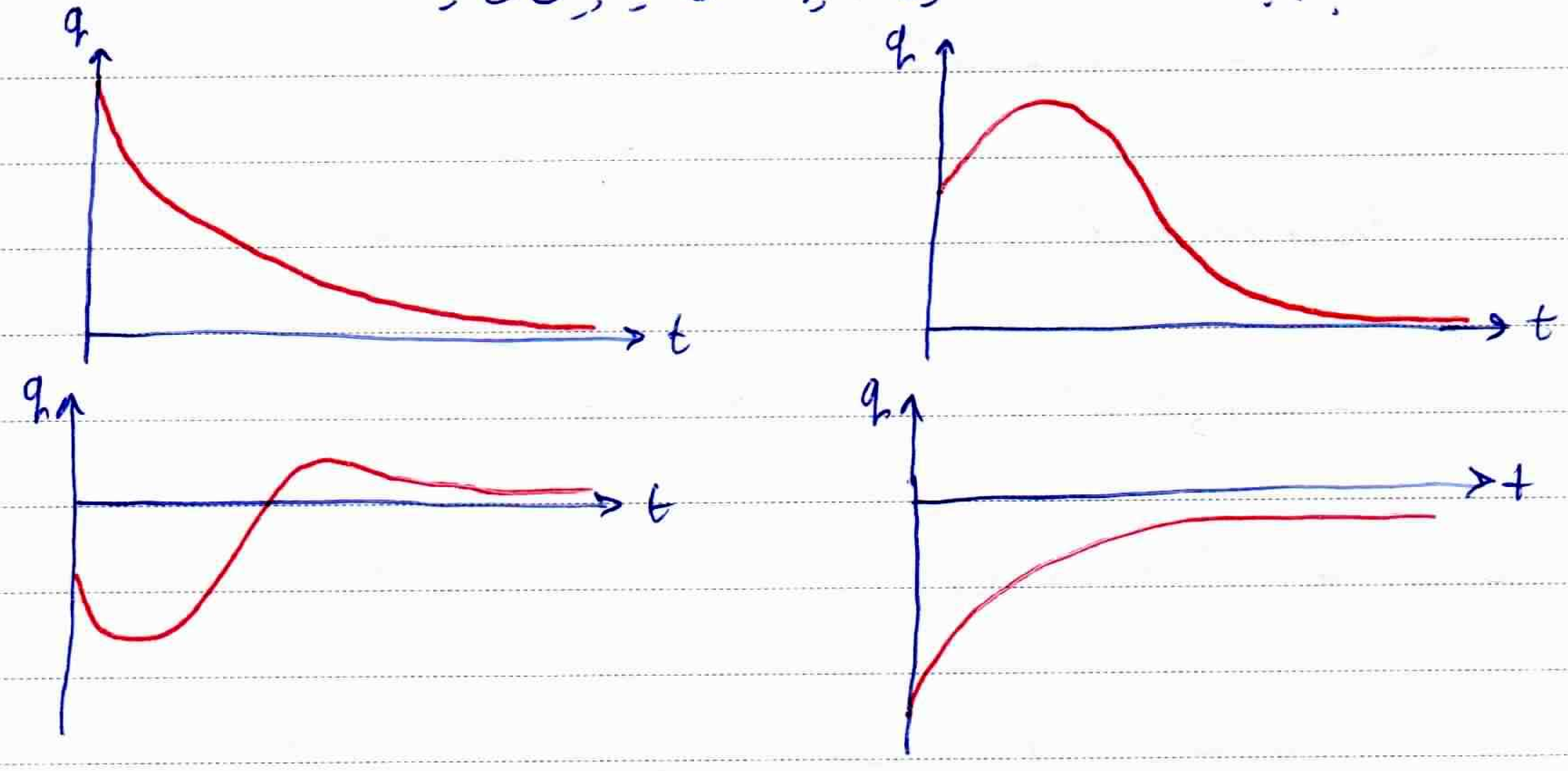
$$U_i - \left(\frac{1}{2}\frac{q(t)^2}{C} + \frac{1}{2} L\, i(t)^2\right) = \int_0^t R\, i(t)^2\, dt$$

Overdamped $\gamma > \omega_0$ ②

$$\alpha = -\gamma \pm \xi \qquad \xi := \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

$$\Rightarrow q(t) = e^{-\gamma}\left[A e^{-\xi t} + B e^{\xi t}\right]$$

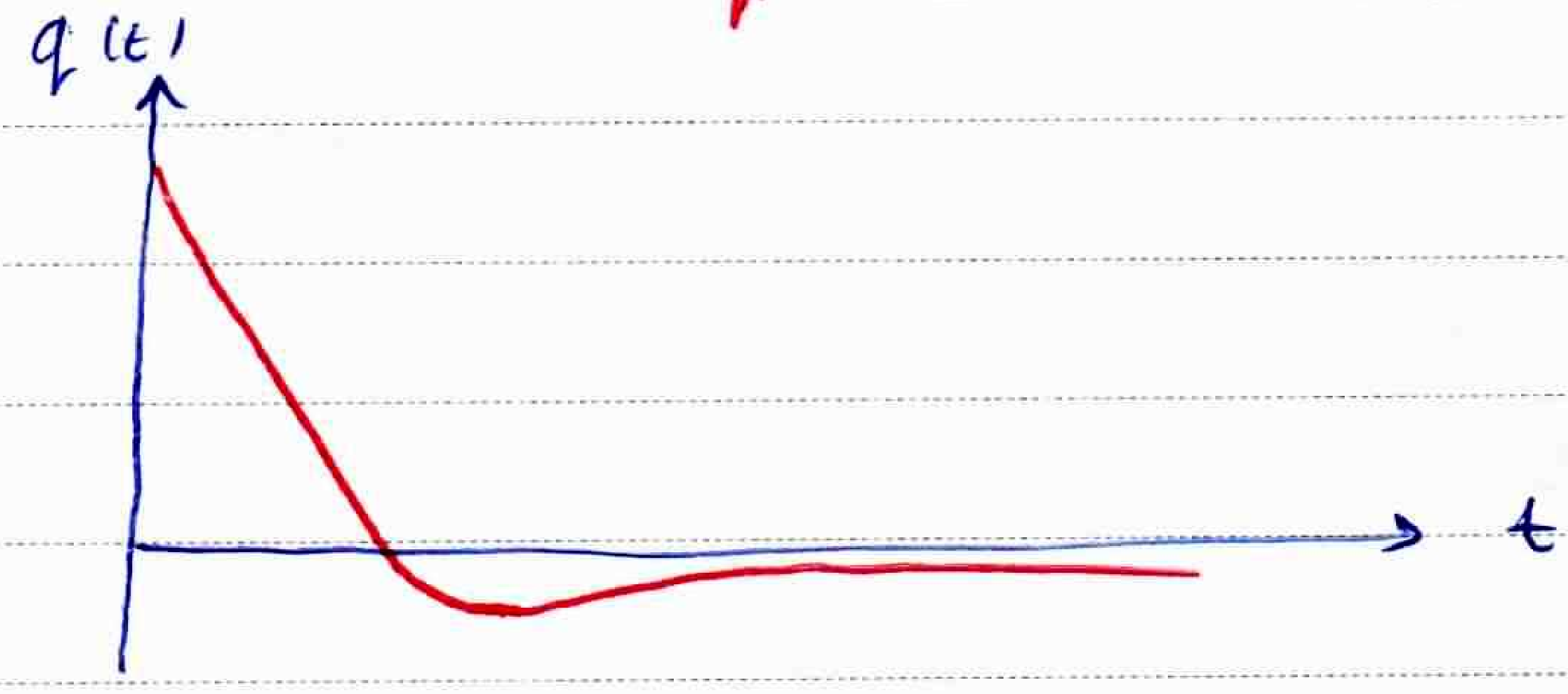
- بسته به مقدار A و B یکی از چهار شکل زیر پیش می آید :



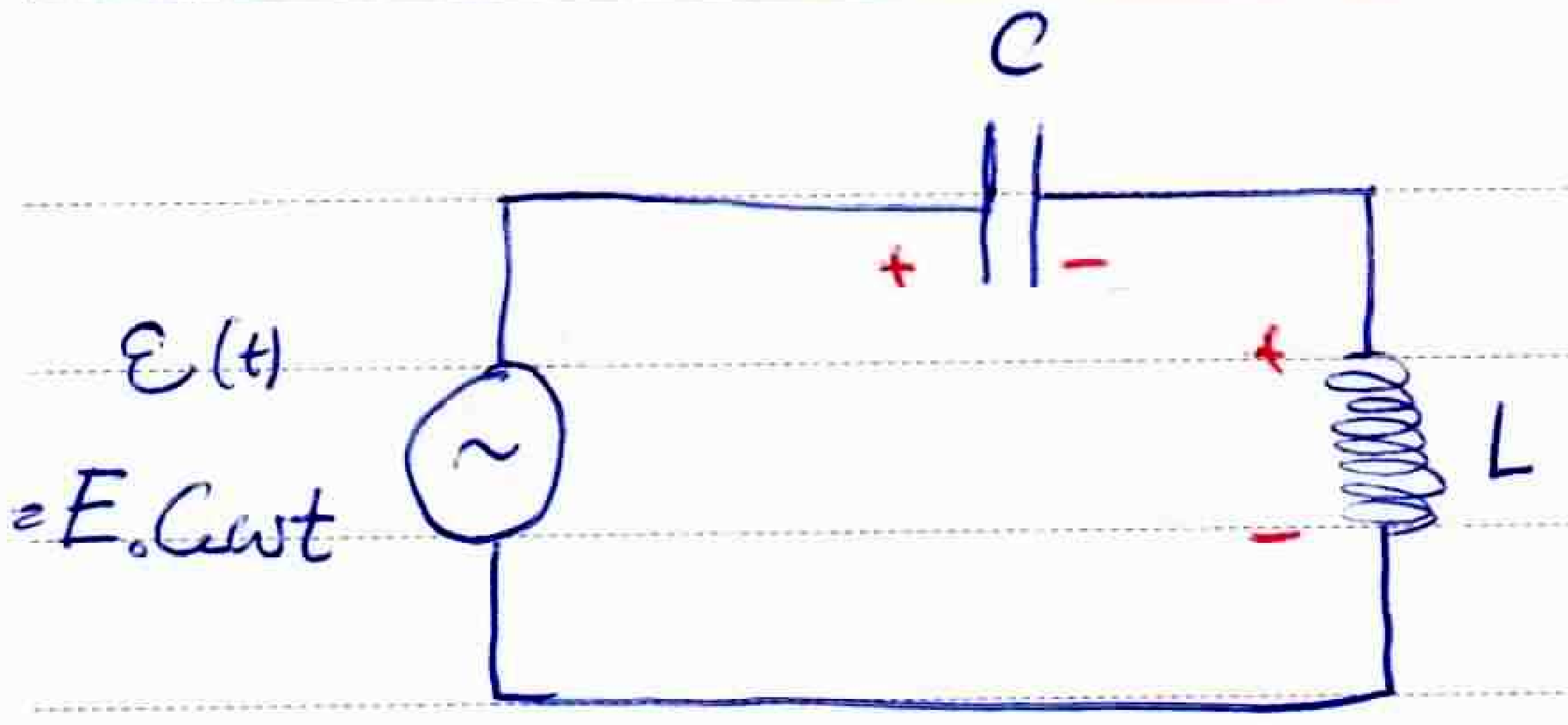
Critical damped $\gamma^2 = \omega_0^2$ ③

$\Rightarrow \alpha = -\gamma$

$$\Rightarrow q(t) = A e^{-\gamma t} + Bt e^{-\gamma t}$$



Subject :
Date



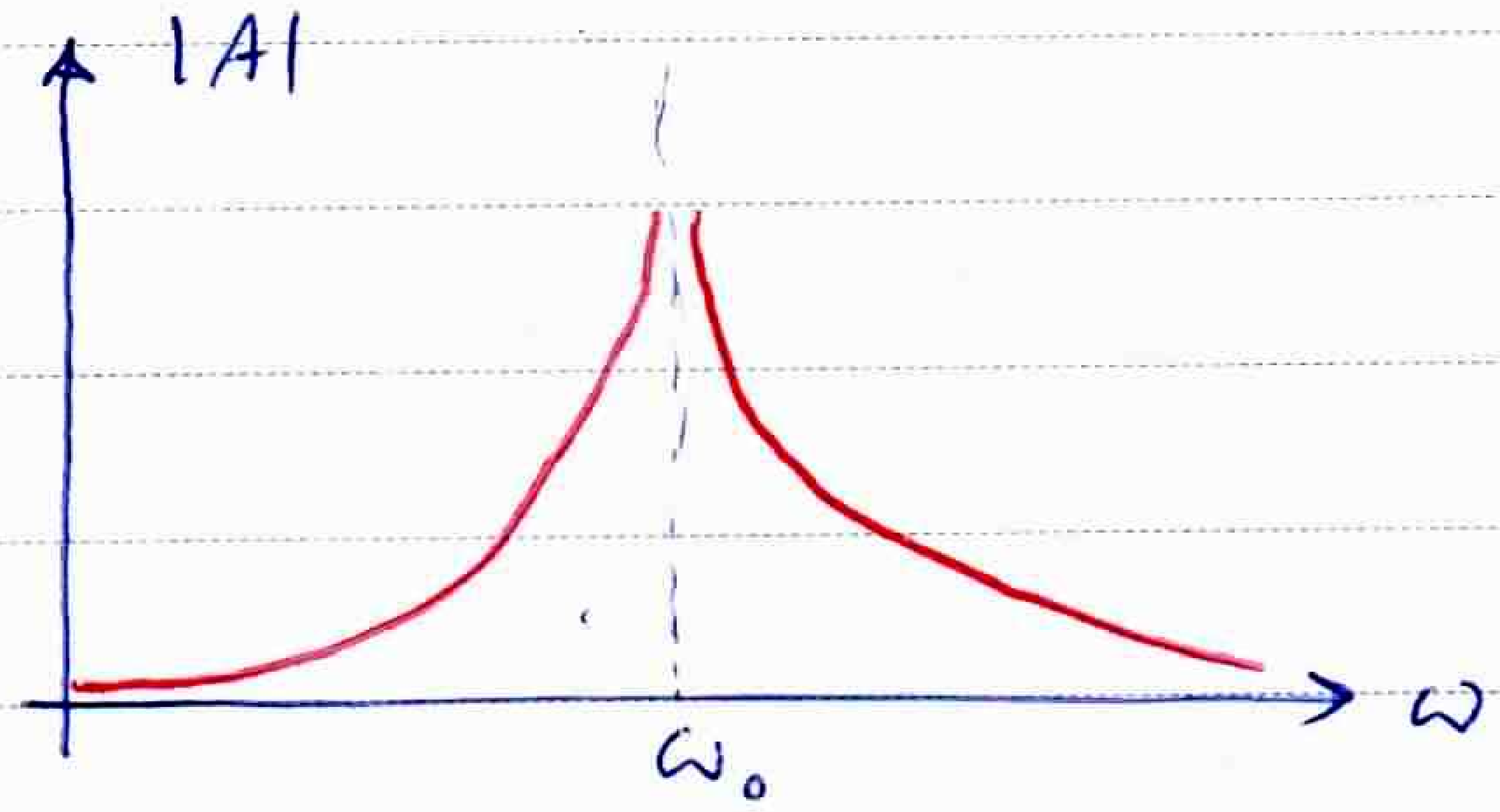
$$\begin{cases} \mathcal{E}_0 - \frac{q}{C} - L\frac{di}{dt} = 0 \\ i = \frac{dq}{dt} \end{cases}$$

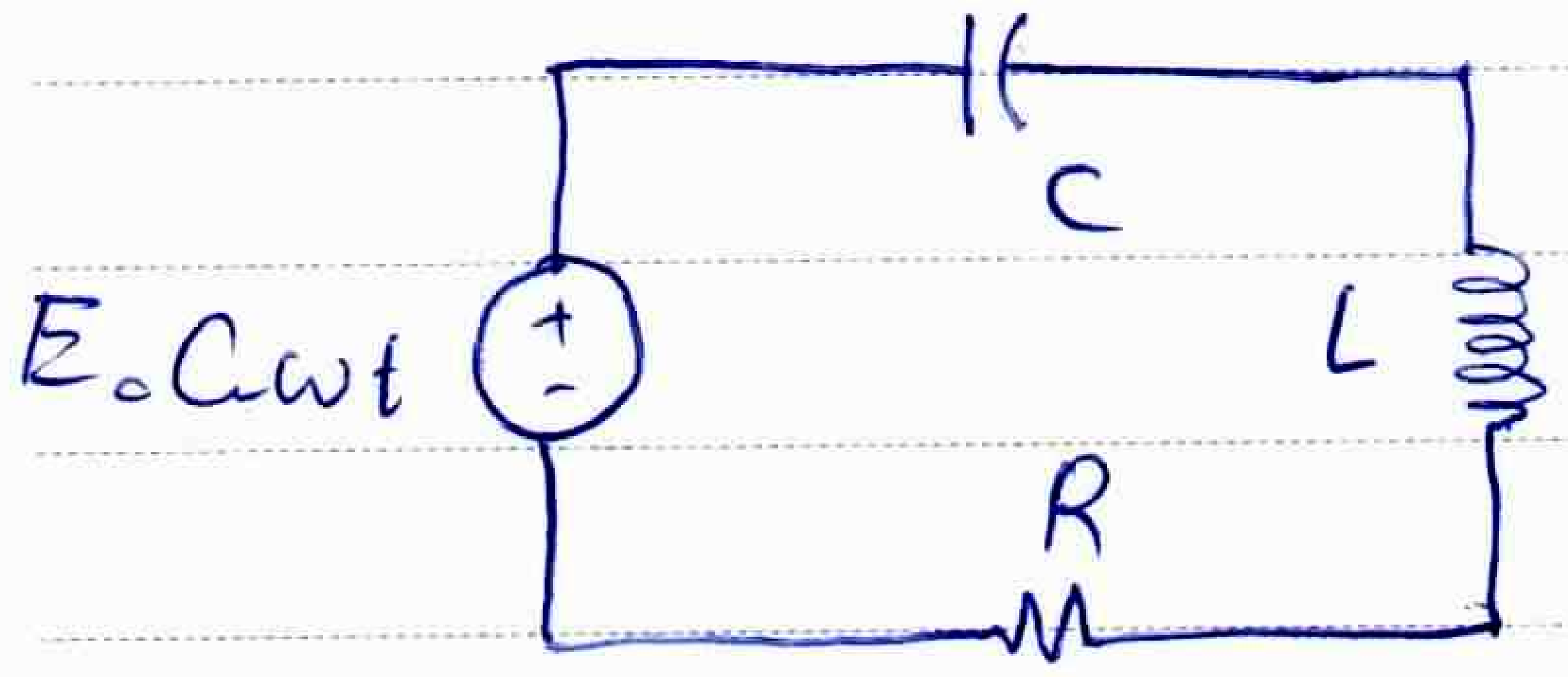
$$\Rightarrow \quad L\ddot{q} + \frac{q}{C} = E_0 \cos\omega t$$

$$\omega_0^2 := \frac{1}{LC}$$

$q_{gen} = q_h + q_p$, $q_p = A\cos\omega t$

$$\Rightarrow \left(-LA\omega^2 + \frac{A}{C}\right)\cos(\omega t) = E_0 \cos(\omega t) \Rightarrow A = \frac{E_0}{L}\,\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}$$





$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = E_0 \cos\omega t \quad +$$

$$q_p = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

$$= \mathcal{A}\cos(\omega t + \theta)$$

$$A = \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}\,\frac{E_0}{L} \qquad B = \frac{2\gamma\omega}{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}\,\frac{E_0}{L}$$

$$\gamma := \frac{R}{L} \qquad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

Subject:
Date

$$\Rightarrow q_p = \frac{\frac{E_0}{L}}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\gamma\omega)^2}}\cos(\omega t-\theta)$$

$$\theta = \text{tg}^{-1}\left(\frac{2\gamma\omega}{(\omega_0^2-\omega^2)}\right)$$

- استفاده از اعداد مختلط :

۱) مدار LC :

$$L\ddot{q}+\frac{q}{C} = E_0\cos\omega t = Re\left(E_e e^{i\omega t}\right)$$

حال این معادله را حل می‌کنیم :

$$\Rightarrow L\ddot{\tilde{q}}+\frac{1}{C}\tilde{q} = E_0 e^{i\omega t}$$

و از جواب Re می‌گیریم.

$$\Rightarrow \tilde{q} = Ae^{i\omega t}$$

جایگذاری $\Rightarrow A(-\omega^2+\omega_0^2) = \frac{E_0}{L} \Rightarrow \tilde{q} = \frac{1}{\omega_0^2-\omega^2}\frac{E_0}{L}e^{i\omega t}$

$$\Rightarrow q = Re(\tilde{q}) = \frac{1}{\omega_0^2-\omega^2}\frac{E_0}{L}\cos(\omega t)$$

۲) مدار RLC :

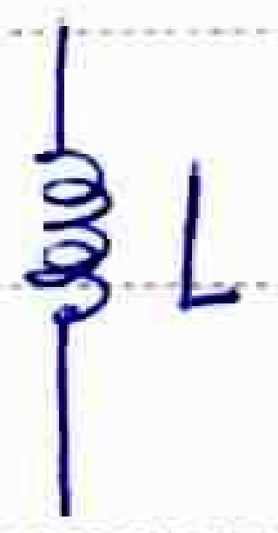
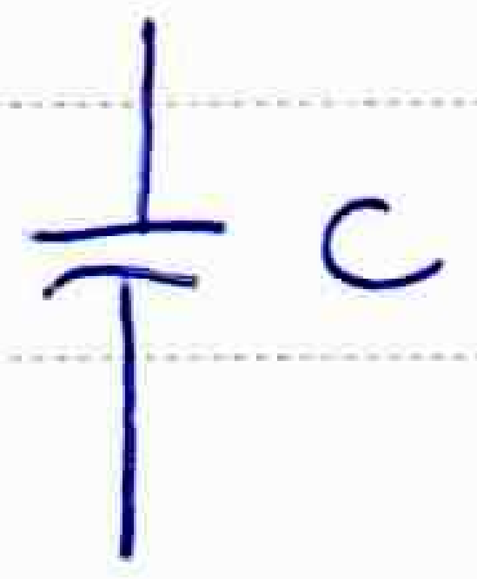
$$\ddot{q}+2\gamma q+\omega_0^2 q = \frac{E_0}{L}\cos\omega t$$

$$\Rightarrow \ddot{\tilde{q}}+2\gamma\dot{\tilde{q}}+\omega_0^2\tilde{q} = \frac{E_0}{L}e^{i\omega t} \qquad \tilde{q} = Ae^{i\omega t}$$

$$\Rightarrow A(-\omega^2+2\gamma i\omega+\omega_0^2) = \frac{E_0}{L}$$

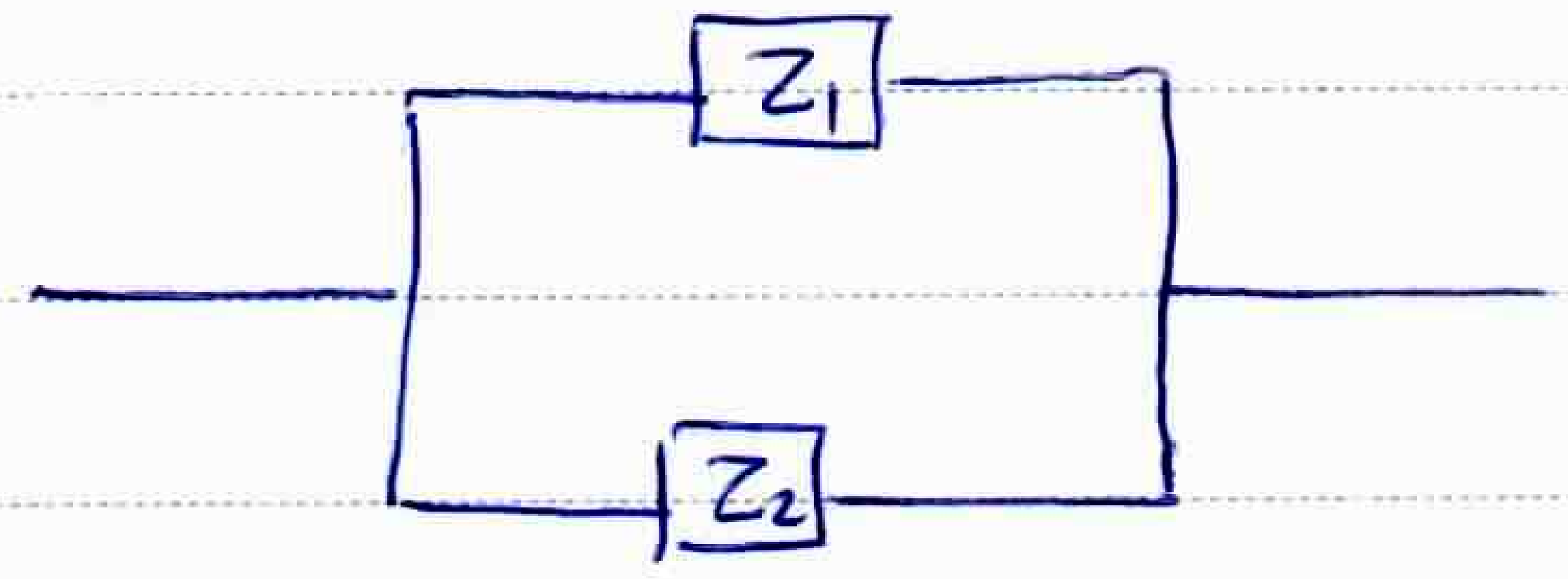
$$\Rightarrow A = \frac{1}{(\omega_0^2-\omega^2)+(2\gamma\omega)i}\frac{E_0}{L} \Rightarrow \begin{cases} |A| = \dfrac{1}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)+(2\gamma\omega)^2}} \\ \text{tg}\,\theta = \dfrac{2\gamma\omega}{(\omega_0^2-\omega^2)} \end{cases}$$

Subject:
Date

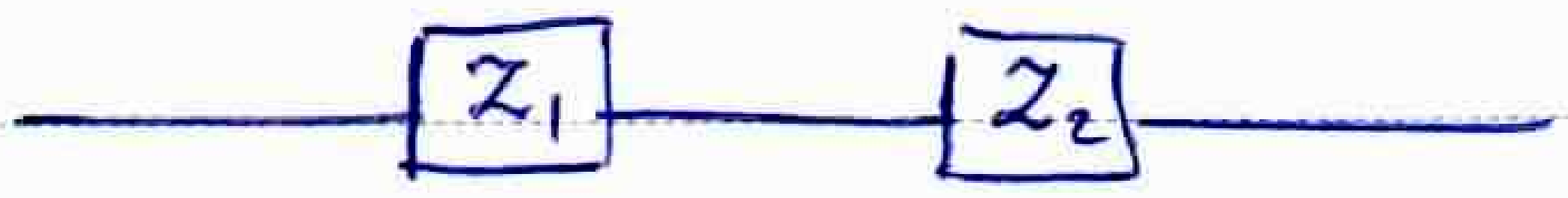
ولتاژ :	جریان	عنصر
$(RI_0)e^{i\omega t}$	$I_0 e^{i\omega t}$	 R
$(i\omega L)\, I_0 e^{i\omega t}$	$I_0 e^{i\omega t}$	 L
$\frac{I_0}{i\omega C} e^{i\omega t}$	$I_0 e^{i\omega t}$	 C

$Z_R = R$ $\qquad Z_L = Li\omega$ $\qquad Z_C = \frac{1}{i\omega C}$

به Z امپدانس Impedance می‌گویند

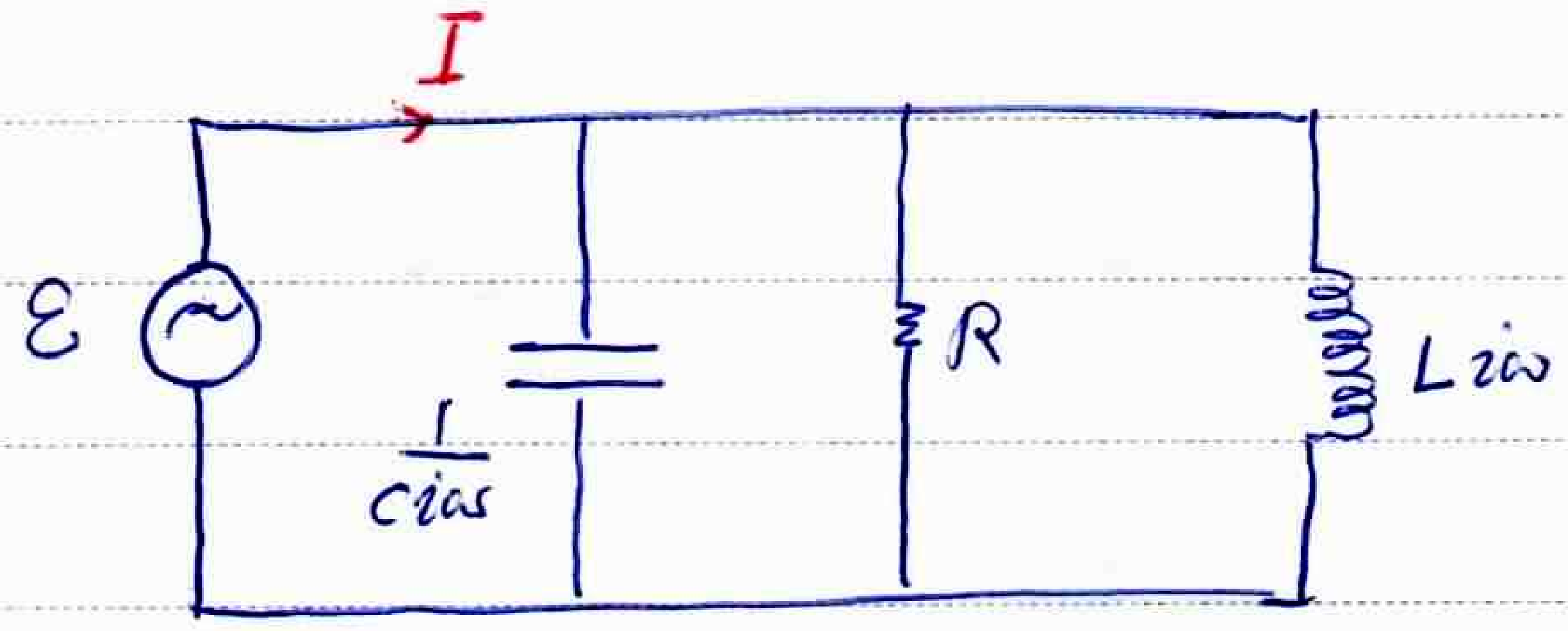


$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}$$



$$Z = Z_1 + Z_2$$

مثال:



$$I = \mathcal{E}\left[\frac{1}{R} + i\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)\right]$$

$$|I| = |\mathcal{E}|\sqrt{1/R^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}$$

$$tg\,\theta = \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)/R$$

توان :

$$\overline{P} = \frac{1}{T}\int_0^T \mathcal{E}(t)\, I(t)$$

Subject :
Date

$$\Rightarrow \overline{P_k} = \frac{1}{T}\int_0^T \mathcal{E}_0 \cos(\omega t) . I_0 \cos(\omega t+\theta)$$

$$= \frac{\mathcal{E}_0 I_0}{2T}\int_0^T \left[\underbrace{\cos(2\omega t+\theta)}_{0} + \cos\theta\right]dt$$

$$\Rightarrow \overline{P} = \frac{1}{2}\mathcal{E}_0 I_0 \cos = \frac{1}{2}|Z| I_0^2 \cos\theta$$

اگر داشته باشیم

$$Z = X + iY = |Z| e^{-i\theta}$$

$$\Rightarrow X = |Z| \cos\theta$$

$$\Rightarrow \overline{P} = \frac{1}{2} Re(Z) |I_0|^2$$

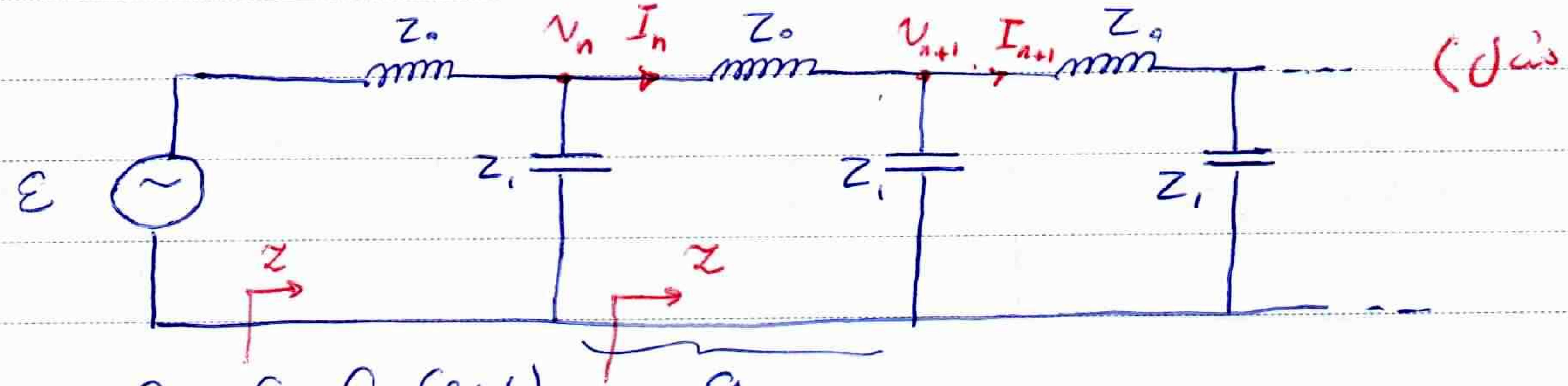
$$Z = \frac{1/R - i\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)}{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2} \Rightarrow \overline{P} = \frac{1}{2}|I_0|^2 \frac{\frac{1}{R}}{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}$$

با جایگذاری اندازه I_0 داریم :

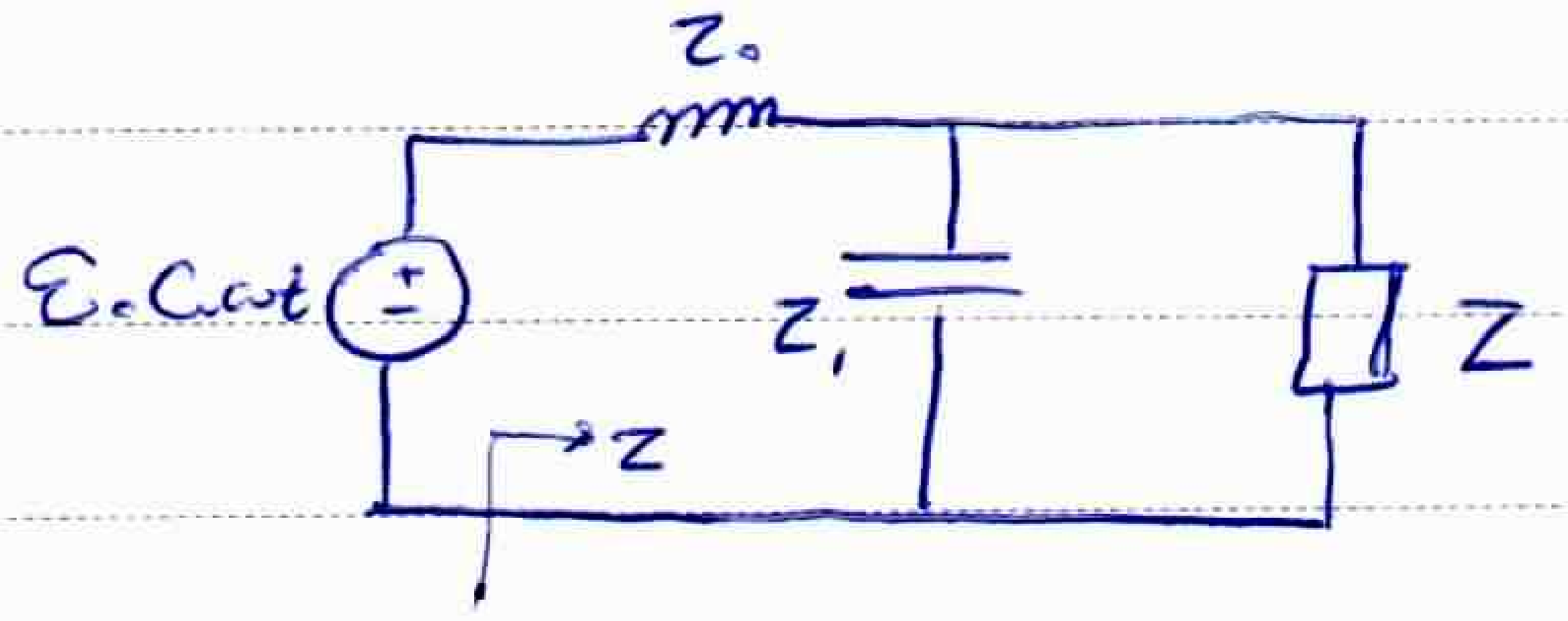
$$\overline{P} = \frac{\mathcal{E}_0}{2R}$$

که معادل توان متوسط یک مدار شامل مقاومت R و منبع $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t)$ است

(شکل



$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t)$$



با حل معادله داریم :

$$Z = \frac{1}{2}\left(Z_0 + \sqrt{Z_0^2 + 4Z_0Z_1}\right)$$

PAPCO

Subject:
Date

$$Z_0 = i\omega L \qquad Z_1 = \frac{1}{i\omega C}$$

$$\Rightarrow Z = \frac{1}{2}\left(i\omega L + \sqrt{-\omega^2 L^2 + 4 L/C}\right) . \qquad \omega_0^2 := \frac{4}{LC}$$

$$\Rightarrow Z = \frac{L}{2}\left(i\omega + \sqrt{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$$

$\omega < \omega_0$: چون Z قسمت حقیقی دارد، پس بخشی از انرژی بر نمی گردد، در واقع قسمتی از انرژی منتقل می شود

$\omega \geqslant \omega_0$: چون Z قسمت حقیقی ندارد، پس انرژی منتقل نمی شود

- پس این شبکه می تواند یک فیلتر پایین گذر (Low Pass filter) برای انتقال انرژی است.

- اگر جای سلف و خازن ها را عوض کنیم، یک فیلتر بالاگذر (High Pass filter) داریم.

$$\left.\begin{array}{l} v_n = I_n Z \\ v_{n+1} - v_n = I_{n+1} Z_0 \end{array}\right\} \Rightarrow I_n Z - I_{n+1} Z = I_{n+1} Z_0$$

$$\Rightarrow \frac{I_{n+1}}{I_n} = \frac{-Z_0 + \sqrt{Z_0^2 + 4 Z_1 Z_0}}{Z_0 + \sqrt{Z_0^2 + 4 Z_1 Z_0}} = \alpha$$

$$\Rightarrow I_n = I_1 \alpha^{n-1}$$

$$\alpha = \frac{-i\omega + \sqrt{\omega_0^2 - \omega^2}}{i\omega + \sqrt{\omega_0^2 - \omega^2}}$$

$\omega < \omega_0$: $|\alpha| = 1 \Rightarrow |I_n| = |I_1|$ میرا نیست
فقط اختلاف فاز دارد

$\omega > \omega_0$ $|\alpha| < 1 \Rightarrow |I_n| \longrightarrow 0$

$\Rightarrow \alpha = e^{-i\phi}$ فرض کنید : $\omega < \omega_0$

$$I_n = I_0 \alpha^n = I_0 e^{-in\phi}$$

$$i_n(t) = I_0 e^{-in\phi + i\omega t} \Rightarrow i_n(t) = I_0 \cos(\omega t - n\phi)$$

$na = x \qquad \frac{\phi}{a} = k$

$$\Rightarrow i_n(t) = I_0 \cos(\omega t - kx)$$

برای سرعت موج داریم

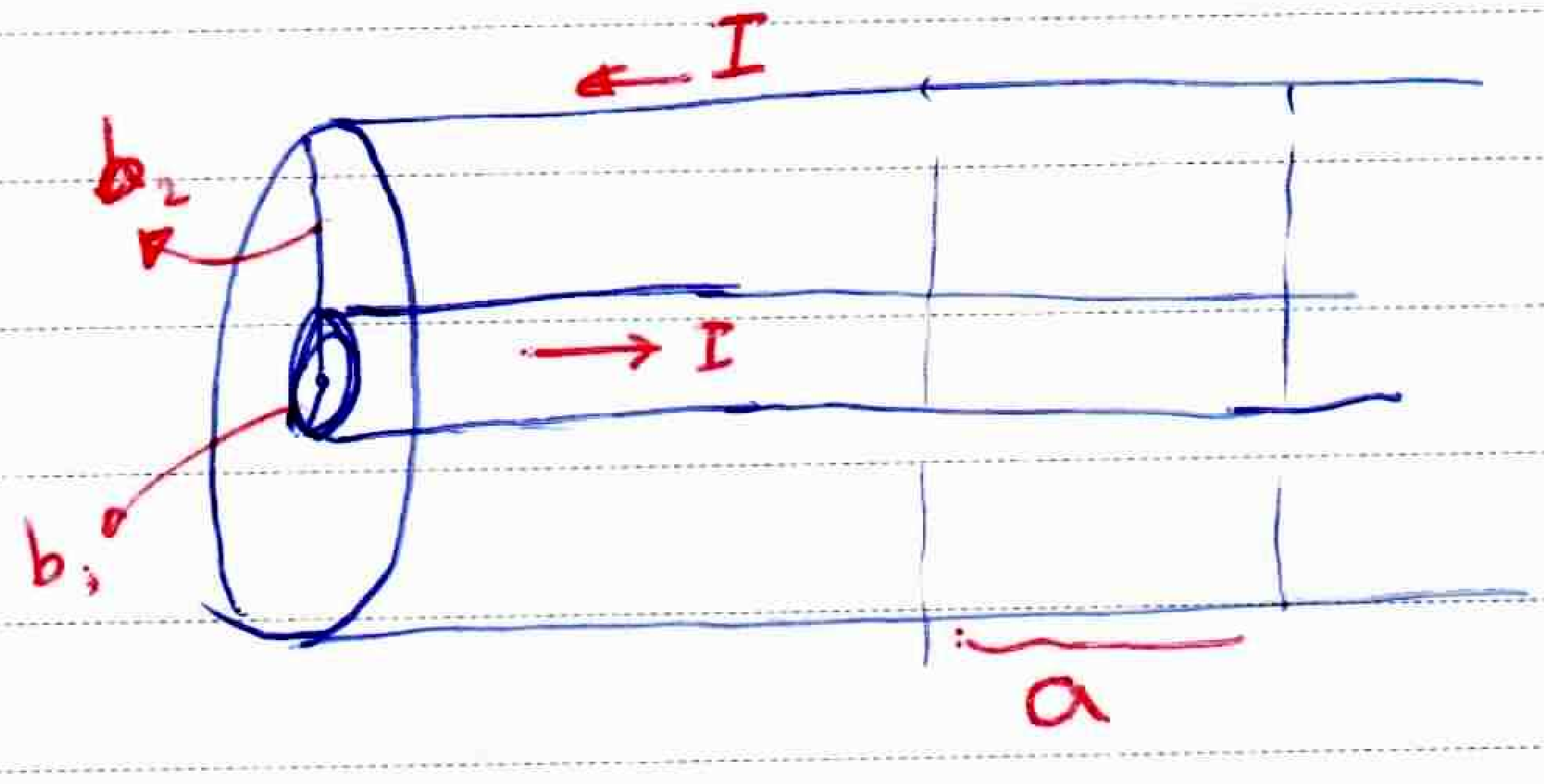
$$\left.\begin{array}{l} \omega = kv \Rightarrow v = \frac{\omega}{k} \\ k = \phi/a \end{array}\right\} \Rightarrow v = \frac{\omega a}{\phi}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \frac{\omega}{\sqrt{\omega_0^2 - \omega^2}}$$

فرض می‌کنیم : $\omega \ll \omega_0$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \frac{\omega}{\omega_0} \Rightarrow \frac{\theta}{2} = \frac{\omega}{\omega_0} \Rightarrow \theta = \frac{2\omega}{\omega_0}$$

$$\Rightarrow v = \frac{a\omega_0}{2}$$



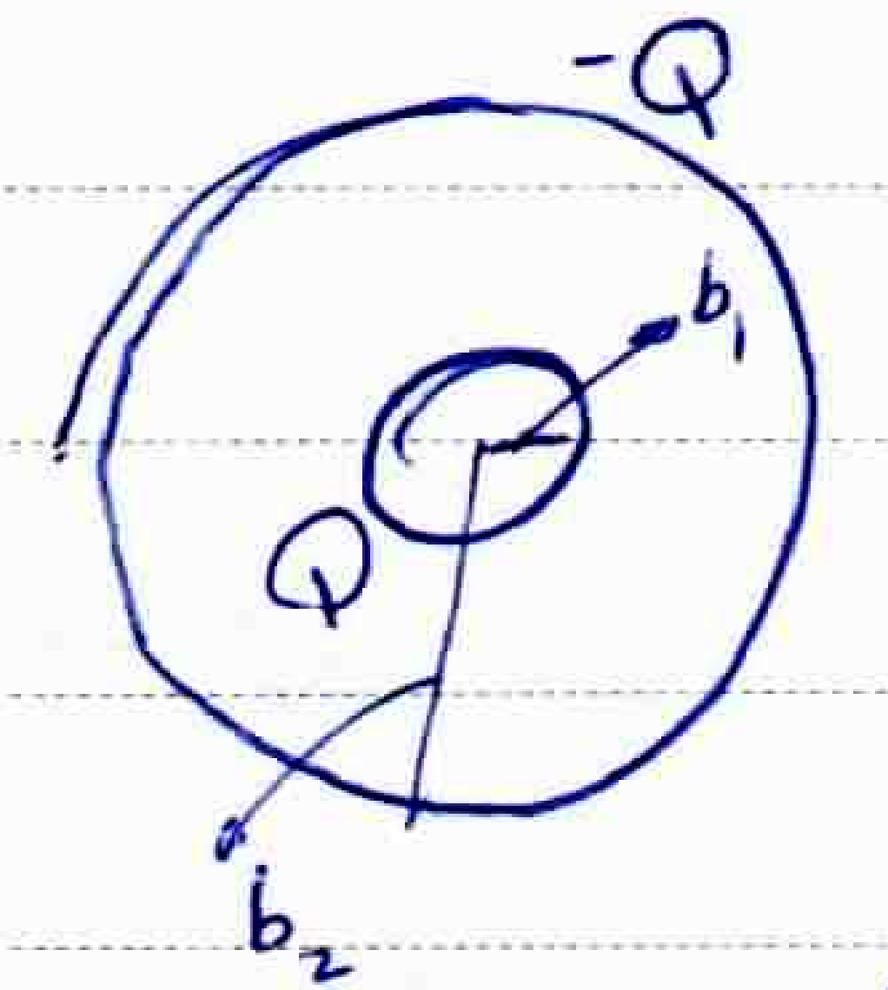
Coaxial Cable

$L_a = ?$

$C_a = ?$

- محاسبه‌ی C_a

چگالی بار : λ



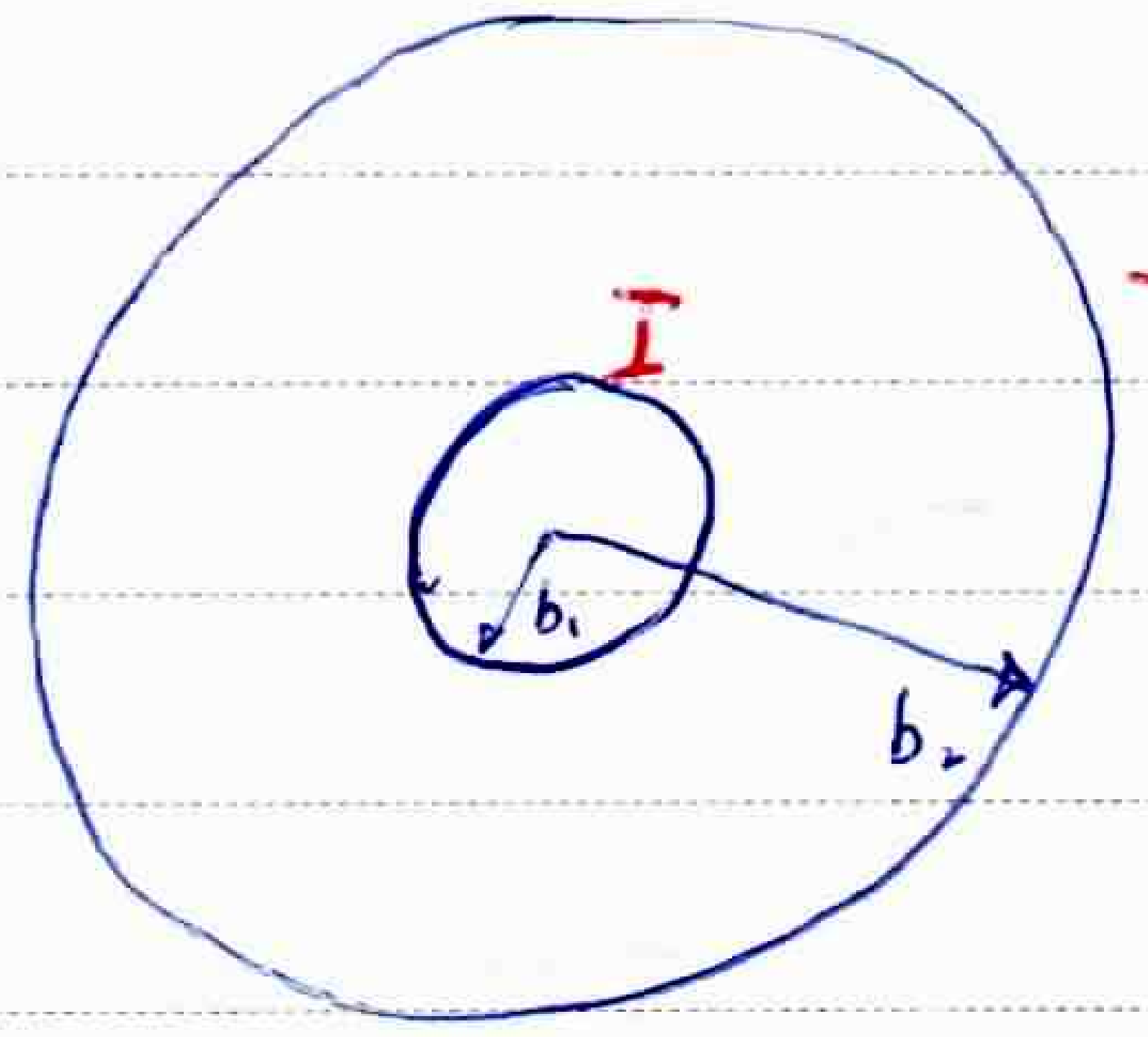
$$Q = (2\pi b_1) a \lambda$$

طبق قانون گاوس : $E(r) = \frac{\lambda b_1}{\epsilon_0 r}$

$$|V| = \int_{b_1}^{b_2} E(r)\,dr = \int_{b_1}^{b_2} \frac{\lambda b_1}{\epsilon_0 r}\,dr = \frac{\lambda b_1}{\epsilon_0} \ln\left(\frac{b_2}{b_1}\right)$$

$$C_a = \frac{2\pi a \epsilon_0}{\ln\left(\frac{b_2}{b_1}\right)}$$

- محاسبه‌ی L_a :



طبق قانون آمپر : $(2\pi r) B = \mu_0 I$

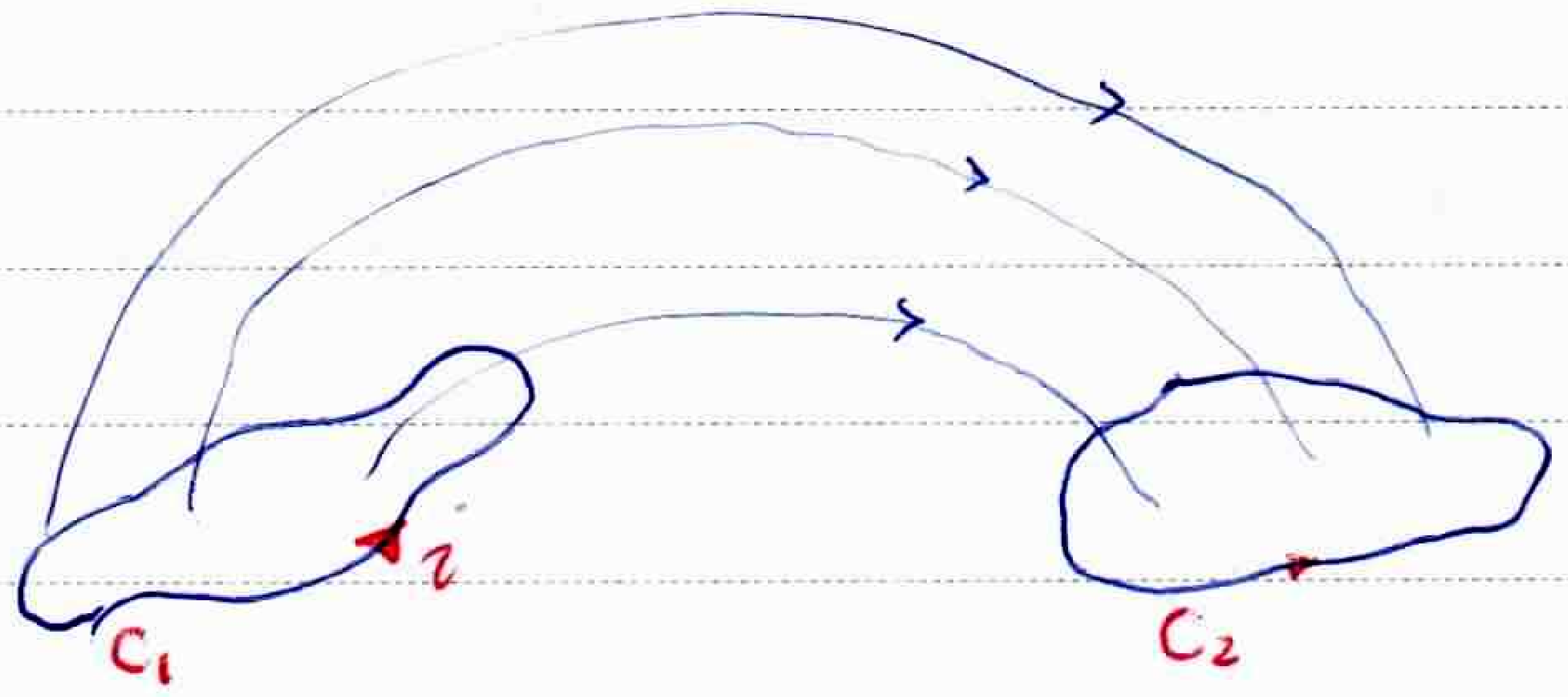
$$\Phi = \int_{b_1}^{b_2} B (dr) a = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln\left(\frac{b_2}{b_1}\right)$$

$$L = \frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln \frac{b_2}{b_1}$$

$$\Rightarrow \omega_0^2 = \frac{4}{LC} = \frac{4}{a^2 \mu_0 \epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \omega_0 = \frac{2}{a\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \Rightarrow v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \simeq 3 \times 10^8 \ m/s$$

القای متقابل :



$$\Phi_2 \propto B_1 \propto i_1$$

Subject:
Date

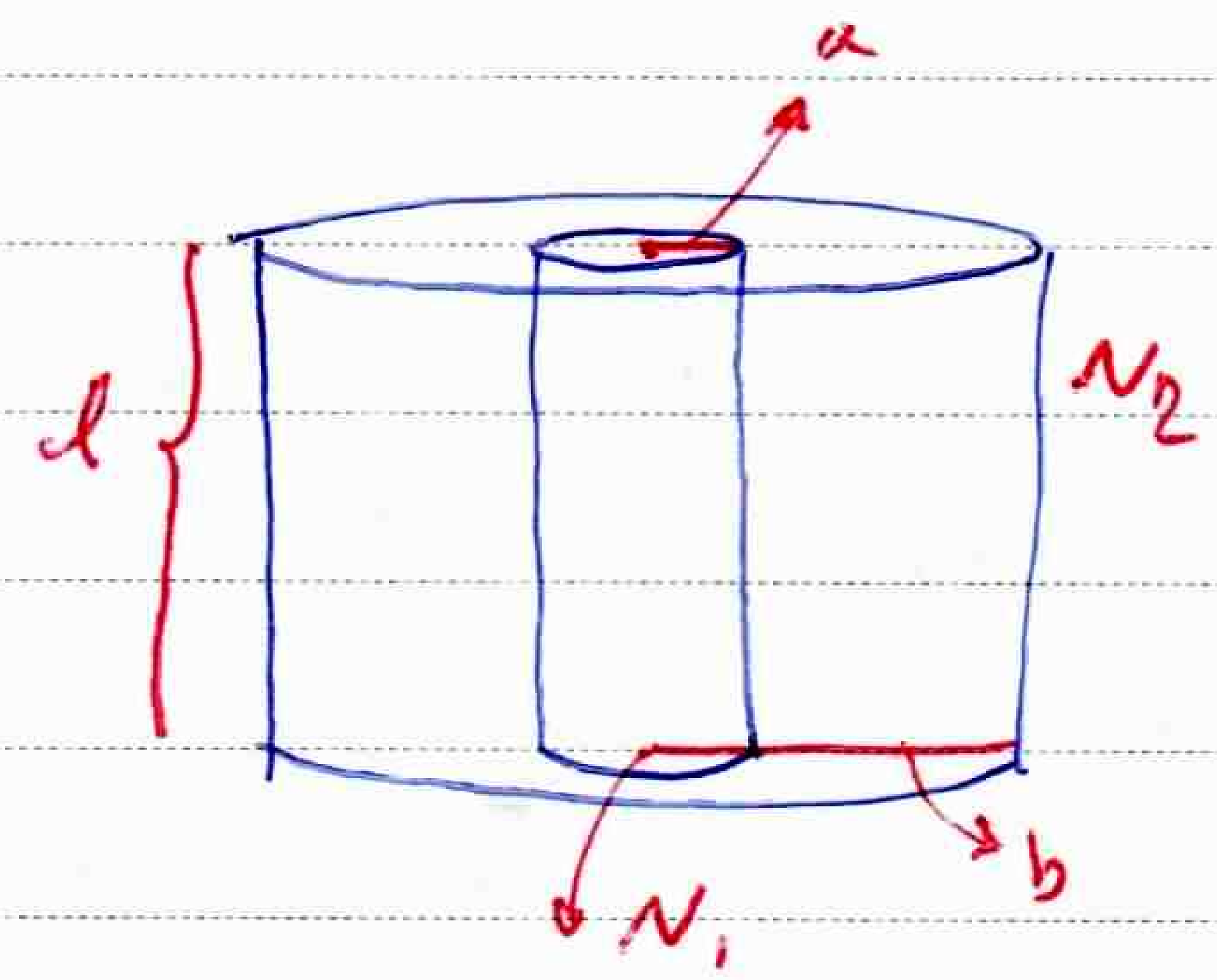
$$\Rightarrow \quad \Phi_2 = M i_1$$

در حالت کلی :

$$\begin{bmatrix} \Phi_2 \\ \Phi_1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}}_{\equiv} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix} \qquad (M_{12} = M_{21})$$

مثال:



اگر یک جریان از سیم پیچ داخلی بگذرانیم :

$$B_1 = \mu_0 \frac{N_1}{l} i_1$$

$$\Phi_2 = N_2 (B_1 \pi a^2)$$

$$\Rightarrow M_{21} = \mu_0 \frac{N_2 N_1}{l} \pi a^2$$

حال اگر یک جریان از سیم پیچ خارجی بگذرانیم :

$$B_2 = \mu_0 \frac{N_2}{l} i_2$$

$$\Phi_1 = (\pi a^2) N_1 B_2 \quad \Rightarrow \quad M_{12} = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{l} \pi a^2$$

$$\Rightarrow M_{12} = M_{21}$$

قوانین ماکسول

المان سطح : ds — سطح : S

المان طول : dl — منحنی : C

$$\oint_S E.ds = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} \qquad \oint_C E.dl = -\frac{d\phi_B}{dt}$$

$$\oint_S B.ds = 0 \qquad \oint_C B.dl = \mu_0 I$$

* می‌توان نوشت :

$$+ \quad \int_C E.dl = -\frac{d}{dt}\int_S B.ds$$

$$C = \partial S$$

$$\oint_C B.dl = \mu_0 \int J.ds$$

می‌دانیم ،

$$I = \varepsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt}$$

برای شکل در خازن داریم :

$$i = \frac{dq}{dt}$$

$$q = \varepsilon_0 A E$$

$$\Rightarrow i = \varepsilon_0 A \frac{dE}{dt} = \varepsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt}$$

حال این قانون مطابق اصل برهم نهی به این صورت کامل می‌شود :

$$\oint_C B.dl = \mu_0 I + \mu_0 \left(\varepsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt}\right)$$

Subject:

Date

Φ : میدان اسکالر

A : میدان برداری

گرادیان : $\nabla \Phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\hat{k}$

و $\nabla . A = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$

Cerl : $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$

قضیه گاوس

$$\oint_S \vec{A} . \vec{ds} = \int_V (\nabla . A)\, dv \Rightarrow (\nabla . A)(p) = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\oint A . ds}{\Delta v}$$

قضیه ی کرل :

$$\oint_C \vec{A} . \vec{dl} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{A}) . ds \qquad C = \partial S$$

$$(\vec{\nabla} \times \vec{A})_z = \lim_{dz \to 0} \frac{\oint \vec{A} . \vec{dl}}{dz} \quad *$$

$$\nabla . (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0 \quad *$$

1) $\oint_S E . ds = \int (\nabla . E)\, dv = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho\, dv \Rightarrow \nabla . E = \frac{\rho}{\epsilon_0}$

2) $\oint_S B . ds = 0 \Rightarrow \nabla . B = 0$

3) $\oint_C E . dl = \int_S (\nabla \times E) . ds = -\frac{d}{dt} \int B . ds \Rightarrow \nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$

4) $\oint_C B . dl = \int_S (\nabla \times B)\, ds = \mu_0 \int_S J . ds + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int E . ds$

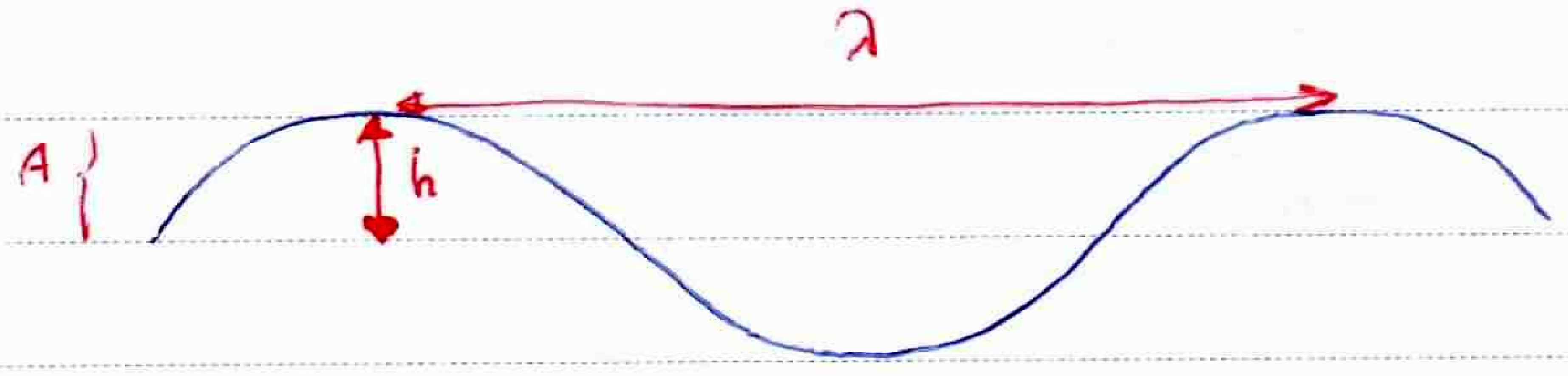
Subject :
Date

$$\Rightarrow \quad \nabla \times B = \mu_0 J + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$$

قوانین ماکسول :

1) $\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ 2) $\nabla \cdot B = 0$

3) $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ 4) $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$



$\omega = \frac{2\pi}{T}$ $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

$$h(x,t) = A \cos(\omega t - kx)$$
$$= A \cos k(x - vt)$$

$v = \frac{\omega}{k}$

$$h(x,t) = f(\widetilde{x - vt}) \Rightarrow \frac{\partial h}{\partial x} = f'(\gamma)\frac{\partial \gamma}{\partial x} = f'(\gamma)$$

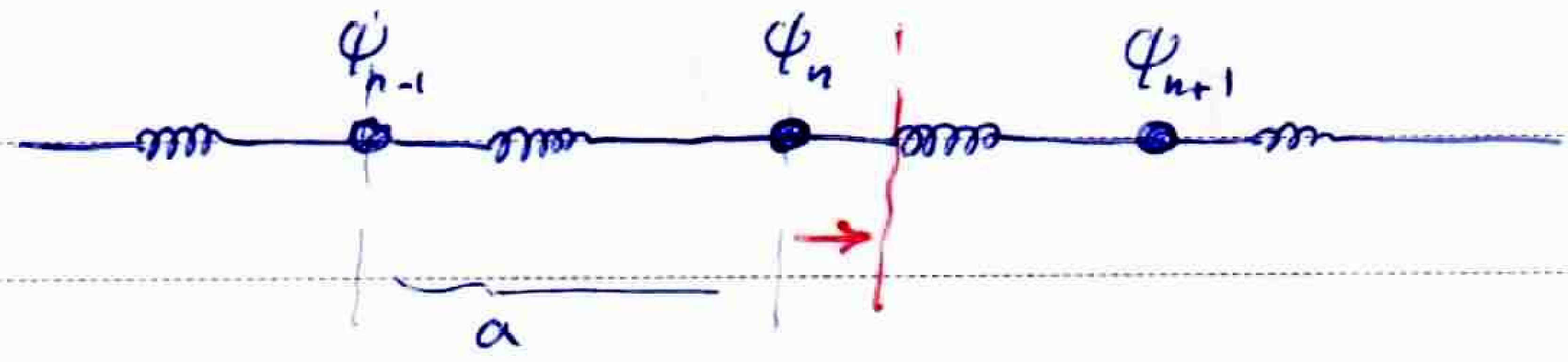
$$\Rightarrow \frac{\partial h}{\partial t} = f'(\gamma)\frac{\partial \gamma}{\partial t} = -f'(\gamma)v$$

حال داریم :
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = f''(\gamma) \\ \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = f''(\gamma) v^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 h}{\partial t^2}}$$

معادله‌ی موج

P4PCO

Subject :
Date



$$ma = m\frac{d^2\psi_n}{dt^2} = -k\left(\frac{\psi_n - \psi_{n-1}}{a}\right) + k\left(\psi_{n+1} - \psi_n\right)$$

$$\longrightarrow \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_{na}$$

$$\Rightarrow m\frac{\partial^2\psi_n}{\partial t^2} = ka\left[\frac{\partial\psi}{\partial x}\bigg|_{na+a} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\bigg|_{na}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{m}{a}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = ka\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$$

$\frac{m}{a} =: \mu$ $\quad$ $ka =: T$ $\quad$ $\Rightarrow \mu\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = T\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$

$v^2 = \frac{T}{\mu}$ $\quad$ $\Rightarrow \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = v^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$

در محیط سه بعدی داریم:

$$\nabla^2\psi := \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = v^2\nabla^2\psi \longrightarrow$$ معادله‌ی کلی موج

* در خلأ داریم:

$\nabla\cdot E = 0$ $\quad$ $\nabla\cdot B = 0$

$\nabla\times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$ $\quad$ $\nabla\times B = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial E}{\partial t}$

Subject:
Date

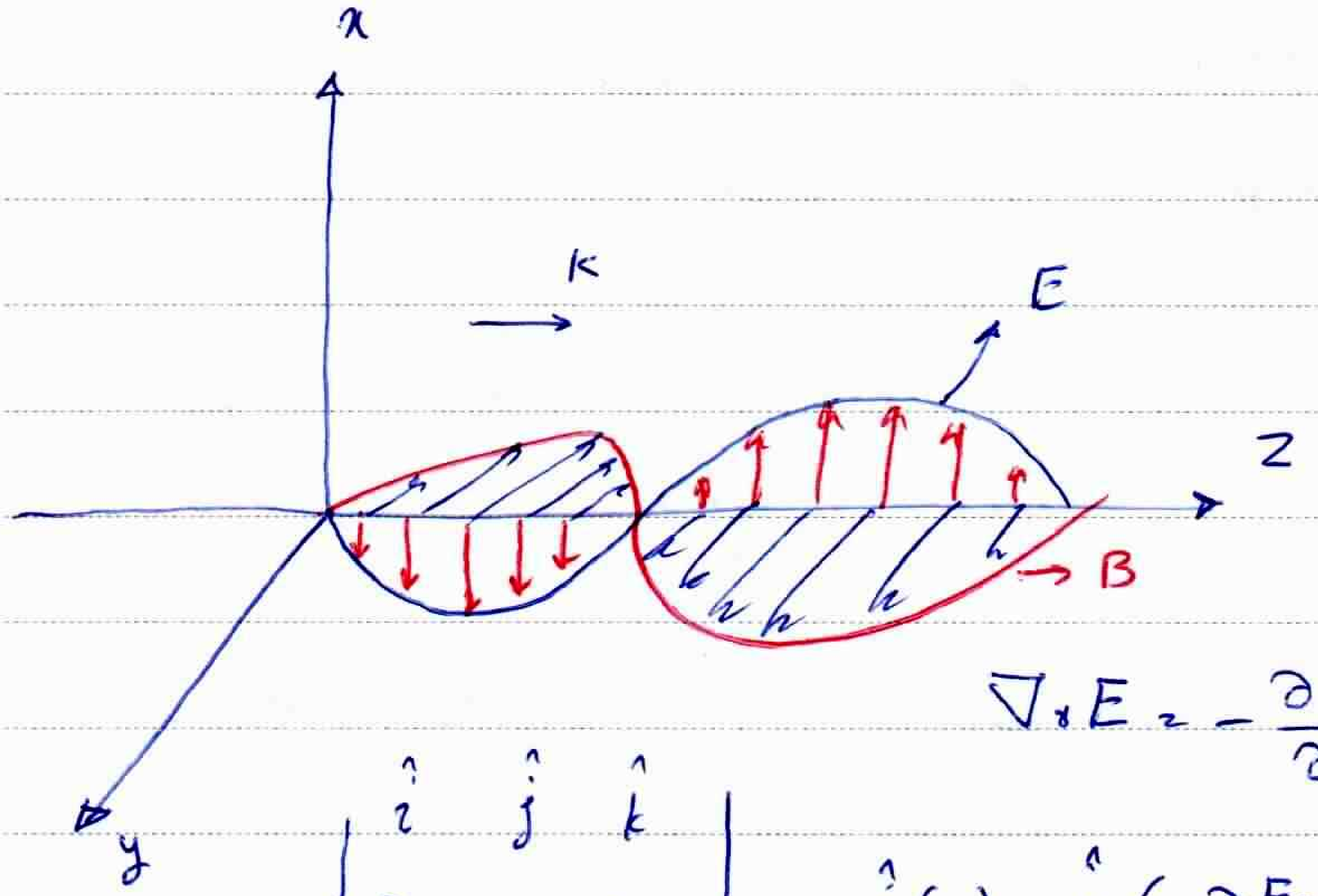
$$\nabla\times(\nabla\times E) = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times B) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\underbrace{\mu_0\varepsilon_0}_{\frac{1}{C^2}}\frac{\partial E}{\partial t}\right)$$

$$\Rightarrow \nabla\times(\nabla\times E) = -\frac{1}{C^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

$$\nabla\times(\nabla\times E) = \underbrace{\cancel{(\nabla\cdot E)}}_{0}\nabla - (\nabla\cdot\nabla)E = -\nabla^2 E$$

$$\Rightarrow \nabla^2 E = \frac{1}{C^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 B = \frac{1}{C^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$ به همین ترتیب داریم:



$E_x = E_0 \cos(\omega t - kz)$

$E_y = 0 \qquad E_z = 0$

$$\nabla\times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ E_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = \hat{i}(0) - \hat{j}\left(\frac{-\partial E_x}{\partial z}\right) + \hat{k}\left(-\overset{0}{\cancel{\frac{\partial E_x}{\partial y}}}\right)$$

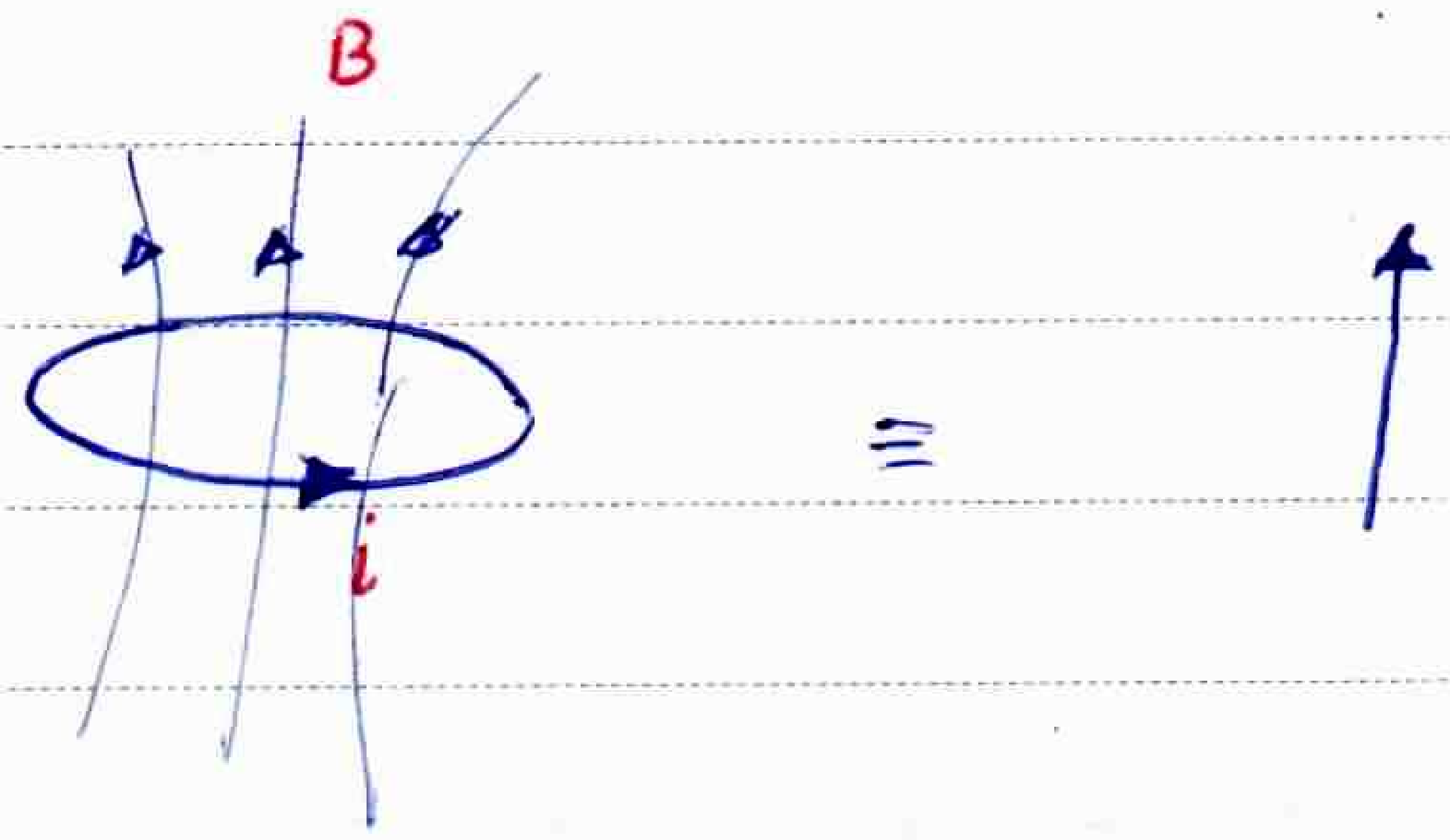
$$\Rightarrow \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\left(\frac{\partial E_x}{\partial z}\right)\hat{j} = -kE_0\sin(\omega t - kz)\hat{j}$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{kE_0}{\omega}\cos(\omega t - kz)\hat{j} = B_0\cos(\omega t - kz)\hat{j}$$

$$B_0 = \frac{E_0}{c}$$

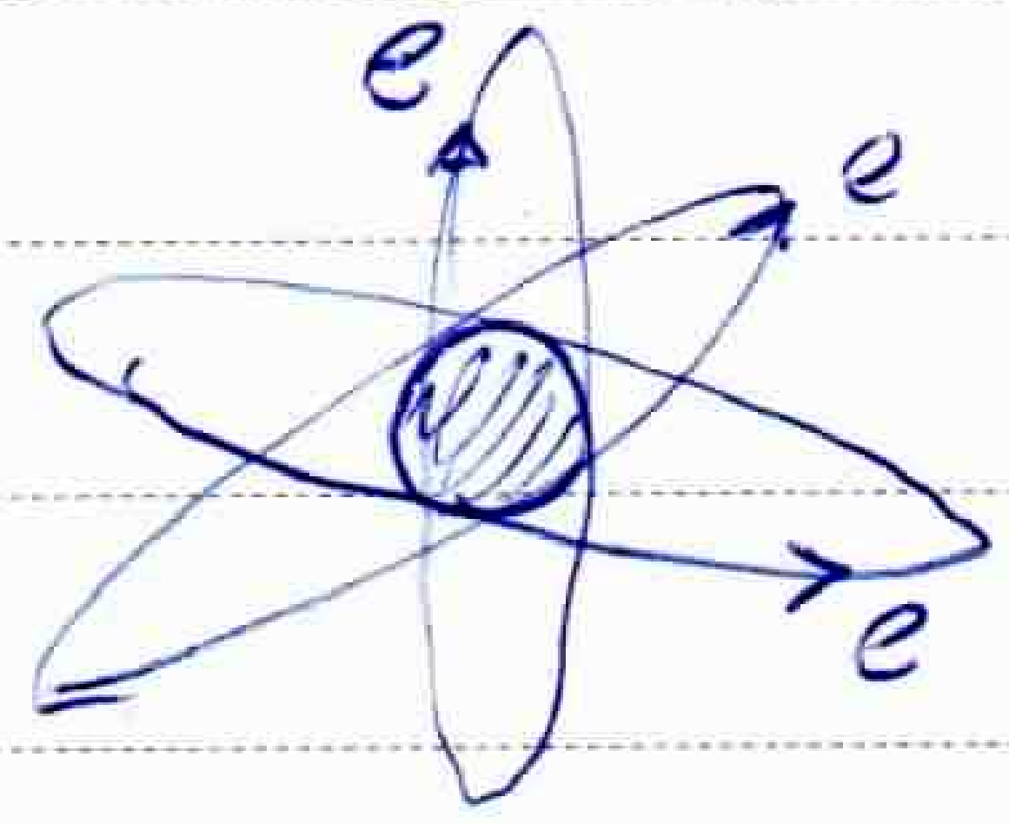
P4PCO

خاصیت مغناطیسی :



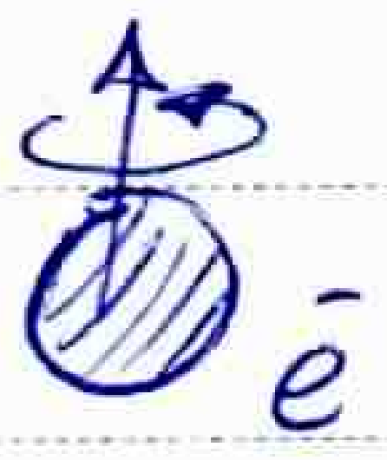
ماده مغناطیسی : وجود حلقه‌های کوچک جریان در مقیاس اتمی

* حرکت مداری



در حالت عادی، برآیند میدان های مغناطیسی صفر است .

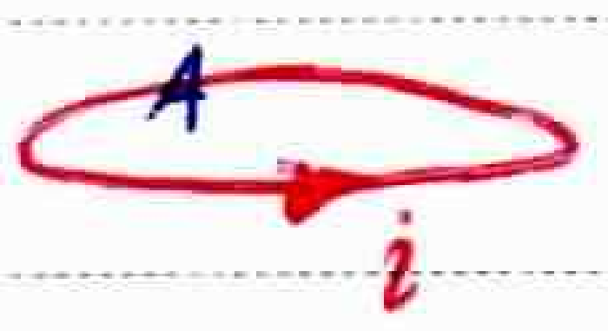
* حرکت وضعی یا اسپینی :



الکترون ها (و هم چنین هسته) - دور خود می چرخند که این کار، باعث تولید میدان مغناطیسی می شود .

$\vec{p} = q\vec{a}$

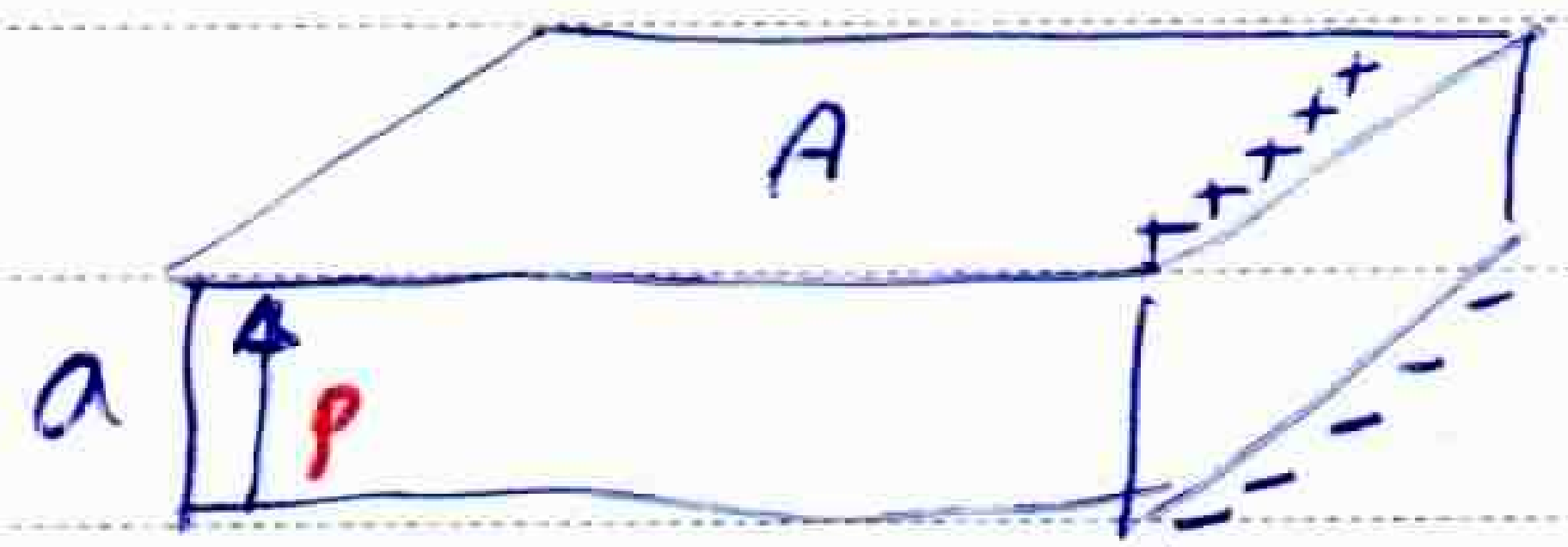
- میدان الکتریکی : دوقطبی دائمی را منظم می کند
  دوقطبی را القا می کند



$\vec{\mu} = i\vec{A}$

- میدان مغناطیسی : دوقطبی دائمی را مرتب می کند .
  دوقطبی را القا می کند

* در دی الکتریک داشتیم :



تعداد دوقطبی های : N

دوقطبی کل ← $P = Np = Nqa$

$$\mathbb{P} = \frac{P}{V} = \frac{Nqa}{A \cdot a} = \frac{Q}{A}$$

میزان قطبش الکتریکی در واحد حجم

Subject
Date

از طرفی داریم

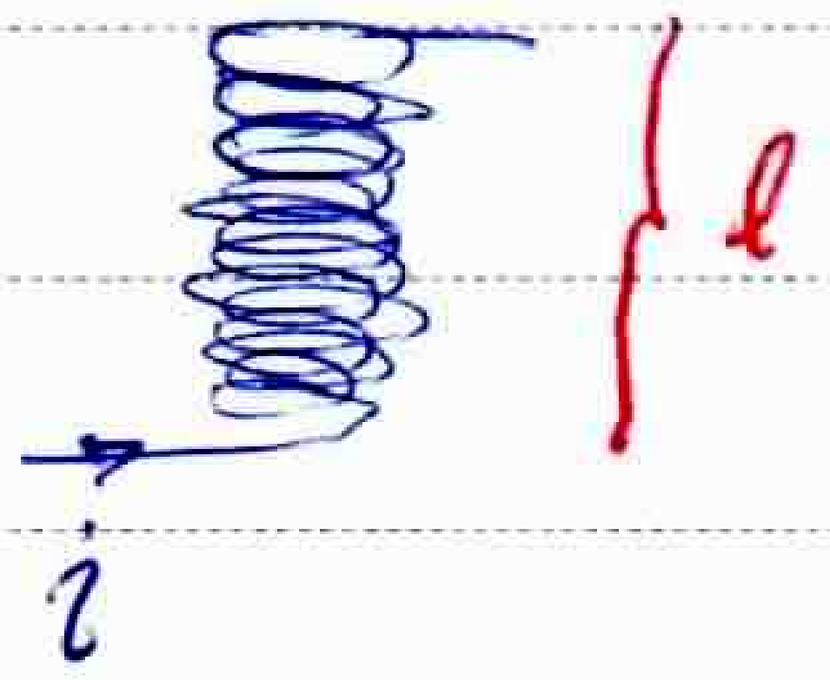
$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{A\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{P}}{\varepsilon_0}$$

- برای میدان مغناطیسی داریم:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{M}$$

$\vec{M}$: گشتاور مغناطیسی در واحد حجم



$$B = \mu_0 \frac{N}{l} i$$

N : تعداد دورها

A : سطح هر حلقه

$$B = \mu_0 \frac{Ni}{l}$$

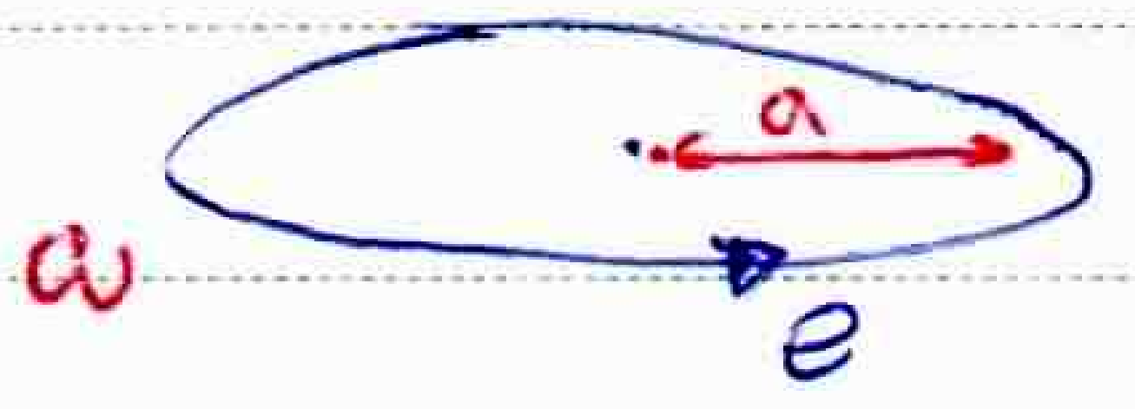
برای هر حلقه $\mu = iA \Rightarrow M = \frac{N\mu}{V} = \frac{NiA}{Al} = \frac{Ni}{l}$ $\Big\} \Rightarrow \vec{B} = \mu_0 \vec{M}$

داریم:

$$\underbrace{\vec{B}}_{} = \vec{B}_0 + \mu_0 \vec{M}$$

میدان خارجی

میدان القایی



$$\mu = Ai = \pi a^2 i = \pi a^2 \frac{e}{\frac{2\pi}{\omega}}$$ *

$$= \frac{1}{2}(a^2\omega) e$$

$$L = mva = ma^2\omega \Rightarrow |\vec{\mu}| = \frac{e}{2m} |\vec{L}|$$

$$L = n \frac{\hbar}{2}$$

عدد صحیح

$$\hbar = \frac{6.62}{2\pi} \times 10^{-34}$$

ثابت پلانک