Year: ------ Month: ------ Day: -------   Subject: ------------------

ریاضی (بلالی):

مجموعه: دسته‌ای از اشیاء است که دو به دو قابل تشخیص و از هم متمایز اند.

$A = \{\square, \star, \text{پروین}, ۲\}$ ✓ $n(A) = ۴$ $B = \{۳, ۴, ۵, ۶, \{۳, ۴\}\}$ ✓ $n(B) = ۵$

$C = \{۲, ۷, ۲, ۱\}$ ✓ $n(C) = ۳$ $D = \{\{۴, ۵, \{۴, ۵\}\}\}$ ✓ $n(D) = ۱$

$F = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$ ✓ $n(F) = ۳$ $E = \{\emptyset, \{۳, ۲, ۱\}\}$ ✓ $n(E) = ۲$

★ عدد اصلی یا کاردینالیته منظور همان تعداد عضوهای یک مجموعه است و به شکل $n(A) = ۴$ یا

$|A| = ۴$ نشان می دهند.

ـ کدام یک از گزاره های زیر با توجه به مثال بالا درست و کدام یک نادرست است؟

★ $\in$: عین همان در مجموعه باشد. $\subset$: با صرف نظر از $\{\}$ باید در مجموعه باشد.

$۲ \in A$ ✓ $\{۳, ۵\} \subset B$ ✓

$\{۳, ۵\} \in B$ ✗ $\{۳, ۴\} \subset B$ ✓

$\{۳, ۴\} \in B$ ✓ $\{۴, ۵\} \in D$ ✗

$\{۴, ۵\} \subset D$ ✗ $\emptyset \in D$ ✗

$\emptyset \subset D$ ✓ ★ تهی زیرمجموعه ی هر مجموعه ای است $\emptyset \notin E$ ✗

$\{۳, ۲\} \in E$ ✗ $\{\emptyset\} \notin E$ ✗

Year: ------ Month: ------ Day: ------ Subject: ----------------

$\{\emptyset\} \in F$ ✓ $\{\emptyset\} \in E$ ✗

$\{4, 5, \{4\}\} \in D$ ✗ $\{4, 5\} \notin D$ ✓

تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه:

برای محاسبه‌ی آن از فرمول 2^n که در آن n همان عدد اصلی مجموعه است؛ استفاده می‌کنیم.

برای محاسبه‌ی تعداد زیرمجموعه‌ی محض یا سره‌ی یک مجموعه (همه‌ی زیرمجموعه‌ها به جز خود مجموعه) از فرمول $2^n - 1$ استفاده می‌کنیم.

- یک مجموعه‌ی $k+3$ عضوی، ۱۲۸ زیرمجموعه دارد. یک مجموعه‌ی $2k-1$ عضوی چند زیرمجموعه‌ی محض دارد؟

$2^{k+3} = 128 \longrightarrow 2^{k+3} = 2^7 \longrightarrow k+3=7 \rightarrow k=4$

$\xrightarrow{k=4} 2k-1=7$ زیرمجموعه‌ی محض: $2^7-1 = 128-1 = 127$

- یک مجموعه‌ی $k+4$ عضوی، $\frac{8}{2^3}$ برابر یک مجموعه‌ی $k+1$ عضوی زیرمجموعه دارد. k را بیابید.

$2^{k+4} = 2^3(2^{k+1}) \longrightarrow 2^{k+4} = 2^{k+4} \longrightarrow k+4 = k+4$

k می‌تواند هر عدد حسابی و ۱- باشد. $k \in W \cup \{-1\}$

N اعداد طبیعی: $\{1, 2, 3, \ldots\}$

W اعداد حسابی: $\{0, 1, 2, \ldots\}$

Z اعداد صحیح: $\{0, \pm1, \pm2, \ldots\}$

* کسری برابر صفر است که صورتش صفر باشد.

Q اعداد گویا: $\{\frac{a}{b} \mid a,b \in Z \,,\, b \neq 0\}$

$\{\frac{a}{b} \mid a \in Z \,,\, b \in N\}$

Q' اعداد گنگ: هرجا که گویا نباشد یا متمم گویا

R اعداد حقیقی: همه‌ی اعداد

$N \subset W \subset Z \subset Q \subset R \subset C$

---

* هر عدد اعشاری گویا نیست ولی همه‌ی اعداد گویا را می‌توان به صورت اعشاری نوشت.

انواع اعداد گویا:

۱- اعداد مختوم یا حقیقی: اعدادی که اگر صورت را بر مخرج تقسیم کنیم، باقی‌مانده صفر می‌شود. $\frac{۲}{۵} = ۰٫۴$

۲- اعداد متناوب ساده: اعدادی که اگر صورت را بر مخرج تقسیم کنیم، باقی‌مانده صفر نمی‌شود و به دوره‌ی گردش می‌رسیم و دوره‌ی گردش بلافاصله بعد از ممیز شروع می‌شود. $\frac{۳}{۷} = ۰٫\overline{۴۲۸۵۷۱}$

۳- اعداد متناوب مرکب: اعدادی که اگر صورت را بر مخرج تقسیم کنیم، باقی‌مانده صفر نمی‌شود ولی دوره‌ی گردش هم بلافاصله بعد از ممیز نمی‌آید. $\frac{۲}{۲۸} = ۰٫۰\overline{۷۱۴۲۸۵}$

روش Δ برای حل معادلات درجه‌ی ۲:

$\Delta > 0$: دو جواب داریم. $\pm$

$\Delta = 0$: دو ریشه‌ی مضاعف داریم.

$\Delta < 0$: جواب داریم ولی حقیقی نیست.

Year: ------ Month: ------ Day: ------- Subject: ------------------

* تمام اعداد صحیح، گویا هستند. $2=\frac{10}{5}$

* $Q' \cup Q = R$ $Q' \cap Q = \varnothing$

ترکیب فصلی: وقتی می‌گوییم (یا) زمانی درست است که حداقل یکی از آن‌ها درست باشد. همان $\cup$

ترکیب عطفی: وقتی می‌گوییم (و) زمانی درست است که جفت آن‌ها درست باشد. همان $\cap$

$P \vee Q \rightarrow$ یا $P \wedge Q \rightarrow$ و

P	Q	$P \vee Q$	$P \wedge Q$
د	د	د	د
د	ن	د	ن
ن	د	د	ن
ن	ن	ن	ن

ترکیب شرطی: اگر شما به منزل من بیایید آن گاه من فیلم نگاه می‌کنم.

تالی P Q مقدم

همان شرط تابع بودن، یک به یک بودن و ....

P	Q	$P \Rightarrow Q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

- یک مجموعه‌ی $2k+3$ عضوی، $\underset{2^2}{4}$ برابر یک مجموعه‌ی $k+1$ عضوی زیرمجموعه دارد. k را بیابید.

$2^{2k+3} = 2^2(2^{k+1}) \longrightarrow 2^{2k+3} = 2^{k+3} \longrightarrow 2k+3 = k+3 \rightarrow k=0$

SEPAND M.S

- یک مجموعه‌ی $2K$ عضوی، ۱۲۸ زیرمجموعه بیشتر از یک مجموعه‌ی $K+3$ عضوی زیرمجموعه دارد. K را بیابید.

راه تشخیص اعداد گویای متناوب ساده از مرکب: ابتدا کسر را تحویل ناپذیر می‌کنیم (تا جای ممکن ساده می‌کنیم یا به صورت و مخرج یک شود) سپس مخرج کسر را تجزیه می‌کنیم. اگر فقط عامل ۲ یا ۵ ببینیم، مختوم است. اگر عامل ۲ و ۵ نبینیم، متناوب ساده است. اگر علاوه بر عامل ۲ یا ۵ عامل دیگری ببینیم، آن عدد متناوب مرکب است.

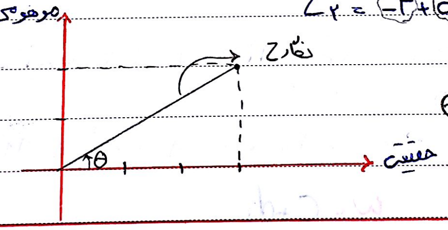
اعداد مختلط یا موهومی ($\mathbb{C}$): $\mathbb{C}=\{a+bi \mid a,b\in R ,\ i^2=-1\}$

Re حقیقی — Im موهومی

$Z_1=3+2i$

Re — Im

$Z_2=-4+5i$



اسم نمودار: آرگومان یا θ

- معادلات زیر را حل کنید.

$x^2-x+5=0$ $\Delta=-19=19i^2$

$x_1,x_2=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{19}\,i}{2} \longrightarrow x_1=\frac{1+\sqrt{19}\,i}{2}$, $x_2=\frac{1-\sqrt{19}\,i}{2}$

$Re=\frac{1}{2}$ $Im=\frac{\sqrt{19}\,i}{2}$

- در صورتی که $z=5+2i$ و $w=4+i$ و $u=-1-i$ باشد حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

Year: ------ Month: ------ Day: -------   Subject: ------------------

الف) $z+w = 5+2i+4+i = 9+3i = (9,3) \to z+w = w+z$ *خاصیت جابجایی دارند

ب) $\bar{z}$ (مزدوج) $= 5-2i = (5,-2)$ *در مزدوج فقط قسمت موهومی قرینه می‌شود

ج) $-z$ (قرینه) $= -5-2i = (-5,-2)$ *در قرینه هر دو قسمت قرینه می‌شوند.

د) $z+\bar{z} = \cancel{5+2i}+\cancel{5-2i} = 10$ *اعداد حقیقی حاصل اعداد مختلطی اند که قسمت موهومی آن‌ها صفر است.

هـ) $z+w+u \overset{?}{=} z+(w+u) \to 9+3i-1-i = 5+2i+(4+\cancel{i}-1-\cancel{i})$ *خاصیت جابجایی:

$\to 8+2i = 8+2i$ ✓

و) $\overline{z+w} \overset{?}{=} \bar{z}+\bar{w} \to 9-3i = 5-2i+4-i \to 9-3i = 9-3i$ ✓

ز) $z.u = (5+2i)(-1-i) = -5-5i-2i-2i^2 \to -5-7i-2\underset{(-1)}{i^2} \to$

$-7i-3$

ط) $\overline{z.w} \overset{?}{=} \bar{z}.\bar{w}$ $\overline{z.w} = (5+2i)(4+i) \to 20+5i+8i+2i^2 \to 13i+18 \to 18-13i$

$\bar{z}.\bar{w} = (5-2i)(4-i) \to 20-5i-8i+2i^2 = -13i+18$

*نکته:

$z = a+bi$ $w = c+di$

$z.w = (a+bi)(c+di) = ac+adi+bci+bdi^2 \to (ac-bd, ad+bc)$

$\to (a,b)(c,d) = (ac-bd)$ و $(ad+bc)i$

SEPAND M.S

ی) $\frac{z}{u} = \frac{(5,2)}{-1-i} \times \frac{(-1,1)}{-1+i} = \frac{(-5-2, 5-2)}{1-i+i-i^2} = \frac{(-7,3)}{2}$

* مخرج باید مزدوج باشد برای حذف در مزدوجش ضرب می‌کنیم. فرقی ندارد صورت و مخرج را یک مدل بنویسیم

* ضرب هر عدد مختلط در مزدوجش یک عدد حقیقی است.

ز) $z.\bar{z} = (5+2i)(5-2i) = 25-4i^2 \rightarrow 25+4 = 29 \rightarrow$ * $z\bar{z} = a^2+b^2$

به معنی شعاع یا قدر مطلق

ک) $|z| \rightarrow \sqrt{25+4} = \sqrt{29} = \sqrt{z.\bar{z}}$ * $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$

ل) $\theta = ?$ $\tan\theta = \frac{b}{a} = \frac{5}{2} \rightarrow \theta^{-1} = \frac{5}{2}$

- اگر $z = -2+\sqrt{2}i$ و $w = 2+3i$ باشد به سؤالات زیر پاسخ دهید:

الف) $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} \overset{?}{=} \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$

$\frac{z}{w} = \frac{(-2,\sqrt{2})}{2+3i} \times \frac{(2,-3)}{2-3i} = \frac{(-4+3\sqrt{2}, 6+2\sqrt{2})}{4-9i^2} = \frac{(-4+3\sqrt{2}, 6+2\sqrt{2})}{13} \rightarrow \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{-4+3\sqrt{2}, -6-2\sqrt{2}}{13}$

$\frac{\bar{z}}{\bar{w}} = \frac{(-2,-\sqrt{2})}{2-3i} \times \frac{(2,-3)}{2-3i} = \frac{(-4+3\sqrt{2}, 6+2\sqrt{2})}{13}$ ✓

ب) $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$ $\left|\frac{z}{w}\right| = \sqrt{\left(\frac{-4+3\sqrt{2}}{13}\right)^2 + \left(\frac{6+2\sqrt{2}}{13}\right)^2} = \frac{\sqrt{16+18-24\sqrt{2}+36+8+24\sqrt{2}}}{13} = \frac{\sqrt{78}}{13}$

$\frac{|z|}{|w|} = \frac{\sqrt{4+2}}{\sqrt{4+9}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{13}} \times \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{78}}{13}$ ✓

ج) $|z.w| = |z|.|w|$

Year: ------ Month: ------ Day: ------- Subject: ------------------

i^{4n} و i^{4n+2} و i^{4n+3} = ?

$i^{4n} = (i^2)^{2n} = (-1)^{2n} = 1$ چون ۱- به توان زوج می‌شود (۱+)

$i^{4n+1} = 1 \times i = i$

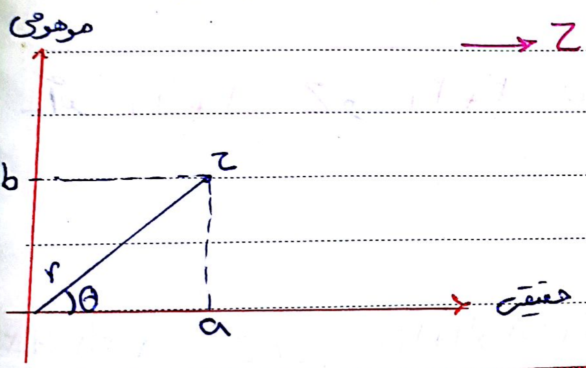
$i^{4n+2} = 1 \times i^2 = 1 \times (-1) = -1$

$i^{4n+3} = i^{4n+2} \times i = -1 \times i = -i$

فرم مثلثاتی اعداد مختلط:

$Z = a+bi = r\cos\theta + r\sin\theta\, i$

$\to Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$



$\sin\theta = \frac{b}{r} \to b = r\sin\theta$

$\cos\theta = \frac{a}{r} \to a = r\cos\theta$

$r = \sqrt{a^2+b^2}$

فرم مثلثاتی اعداد زیر را به دست آورید.

الف) $Z = -1$ $\quad r = \sqrt{1+0} = 1 \quad \cos\theta = \frac{a}{r} = \frac{-1}{1} = -1 \to \theta = \pi$

$\to 1(\cos\pi + i\sin\pi)$

ب) $2+\sqrt{3}\,i \quad r = \sqrt{4+3} = \sqrt{7} \quad \cos\theta = \frac{a}{r} = \frac{2}{\sqrt{7}} \times \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{7}}{7}$

$\to \sqrt{7}\left(\cos\left(\arccos\frac{2\sqrt{7}}{7}\right) + i\sin\left(\arccos\frac{2\sqrt{7}}{7}\right)\right)$

چون زاویه نامعلوم بود، به صورت Arc نوشتیم

ضرب دو عدد مختلط به صورت مثلثاتی:

$Z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$

$Z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

Year: ------ Month: ------ Day: ------ Subject: ------

$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos\theta_1 \cos\theta_2 + i\cos\theta_1 \sin\theta_2 + i\sin\theta_1 \cos\theta_2 + i^2 \sin\theta_1 \sin\theta_2)$

$z_1 z_2 = r_1 r_2 \left[(\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2) + i(\sin\theta_1 \cos\theta_2 + \cos\theta_1 \sin\theta_2)\right]$

$\rightarrow z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2))$

اگر $\left.\begin{array}{l} z_1 = z_2 = z \\ r_1 = r_2 = r \\ \theta_1 = \theta_2 = \theta \end{array}\right\} \rightarrow z^2 = r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)$

$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$ دستور دموآور

- حاصل را بیابید.

$(1+i)^{12} = ?$ $r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$

$(1+i) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \longrightarrow (1+i)^{12} = (\sqrt{2})^{12}\left(\cos 12\times\frac{\pi}{4} + i\sin 12\times\frac{\pi}{4}\right)$

$(1+i)^{12} = (\sqrt{2})^{12}(\cos 3\pi + i\sin 3\pi)$

ریشه‌یابی: $k \in \mathbb{Z}$

$\omega = R(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ $z = ?$

فرض $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = R(\cos\varphi + i\sin\varphi) = R(\cos(2k\pi+\varphi) + i\sin(2k\pi+\varphi))$

$r^n = R \rightarrow r = \sqrt[n]{R}$

$n\theta = 2k\pi + \varphi \rightarrow \theta = \frac{2k\pi+\varphi}{n}$ $k = 0, 1, \dots, n-1$

- معادله‌ی زیر را حل کنید.

الف) $z^4 + 64 = 0$ $z^4 = -64$ $R = \sqrt{64^2 + 0} = 64$

$\cos\varphi = \frac{-64}{64} = -1 \rightarrow \varphi = \pi$

SEPAND M.S

Year: ------ Month: ------ Day: ------ Subject: ------------------

$z^6 = 64\left(\cos(2k\pi+\pi) + i\sin(2k\pi+\pi)\right) = r^6\left(\cos 6\theta + i\sin 6\theta\right)$

$r^6 = 64 \rightarrow r = \sqrt[6]{64} = 2$

$6\theta = 2k\pi + \pi \rightarrow \theta = \frac{2k\pi+\pi}{6} \rightarrow$

$k=0 \rightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{6} \rightarrow z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + i$

$k=1 \rightarrow \theta_2 = \frac{\pi}{2} \rightarrow z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2i$

$k=2 \rightarrow \theta_3 = \frac{5\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6} \rightarrow z_3 = 2\left(\cos(\pi-\frac{\pi}{6}) + i\sin(\pi-\frac{\pi}{6})\right) = -\sqrt{3} + i$

$k=3 \rightarrow \theta_4 = \frac{7\pi}{6} = \pi + \frac{\pi}{6} \rightarrow z_4 = 2\left(\cos(\pi+\frac{\pi}{6}) + i\sin(\pi+\frac{\pi}{6})\right) = -\sqrt{3} - i$

$k=4 \rightarrow \theta_5 = \frac{9\pi}{6} = \frac{3\pi}{2} \rightarrow z_5 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -2i$

$k=5 \rightarrow \theta_6 = \frac{11\pi}{6} = 2\pi - \frac{\pi}{6} \rightarrow z_6 = 2\left(\cos(2\pi-\frac{\pi}{6}) + i\sin(2\pi-\frac{\pi}{6})\right) = \sqrt{3} - i$

- نمودار $Re\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{4}$ را رسم کنید.

$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} \times \frac{a-bi}{a-bi} = \frac{a-bi}{a^2-b^2i^2} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i \rightarrow \frac{a}{a^2+b^2} = \frac{1}{4}$

$\rightarrow a^2+b^2 = 4a \rightarrow a^2+b^2-4a+4-4=0 \rightarrow (a-2)^2+b^2 = 4$

نمودار دایره ای به مرکز (۲،۰) و شعاع ۲ است.

- ثابت کنید $Re\sum_{j=1}^{n} z_n = \sum_{j=1}^{n} Re\, z_i$.

$\sum_{j=1}^{n} z_i\left((a_1+b_1i)+(a_2+b_2i)+\cdots+(a_n+b_ni)\right) \rightarrow$

$= \left((a_1+a_2+\cdots+a_n)+(b_1+b_2+\cdots b_n)i\right) \rightarrow$

$= \left(\sum_{j=1}^{n} a_j + \sum_{j=1}^{n} b_j i\right) \rightarrow Re\left(\sum_{j=1}^{n} z_j\right) = \sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{j=1}^{n} Re(z_j)$

$\rightarrow I_m\left(\sum_{j=1}^{n} z_i\right) = \sum_{j=1}^{n} b_j = \sum_{j=1}^{n} I_m(z_j)$

SEPAND M.S

- حاصل $\dfrac{(i-1)^8}{(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})^{16}}$ را بیابید.

$(i-1)^8 \rightarrow r=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$ $\qquad \cos\varphi = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \varphi = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

$\rightarrow r(\cos\theta + i\sin\theta) = \sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}) \longrightarrow$

$(i-1)^8 = r^8(\cos 8\theta + i\sin 8\theta) = 16(\cos 6\pi + i\sin 6\pi) = 16(1+0i) = 16$

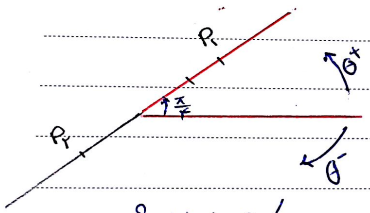
$(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})^{16} = (\cos 4\pi + i\sin 4\pi) = 1+0i = 1$

$\longrightarrow \dfrac{(i-1)^8}{(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})^{16}} = \dfrac{16}{1} = 16$

مختصات دکارتی و قطبی:

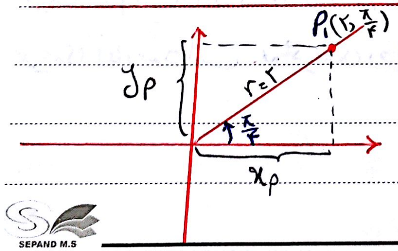
$P(r,\theta)$ ← شعاع قطبی ، زاویه‌ی قطبی

$P_1 = (2, \frac{\pi}{4})$ $\qquad P_2 = (-2, \frac{\pi}{4})$



* یک نقطه در مختصات قطبی می‌تواند بی‌نهایت مختصات قطبی داشته باشد ولی در دکارتی فقط نمایش دهنده‌ی یک مختصات دکارتی است. در مختصات قطبی که می‌تواند بی‌نهایت مختصات قطبی داشته باشد، دارای زاویه‌ی برابر و شعاع متفاوت اند.

رابطه‌ی مختصات دکارتی و قطبی:



$\cos\theta = \frac{x}{r} \rightarrow x = r\cos\theta \rightarrow x = 2\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$

$\sin\theta = \frac{y}{r} \rightarrow y = r\sin\theta \rightarrow y = 2\sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$

$r^2 = x^2 + y^2 \rightarrow r = \sqrt{x^2+y^2}$

فرم کلی معادله‌ی قطبی: $r = f(\theta)$ ، $f(-\theta)$

- معادله‌ی $r = \frac{4}{2-\cos\theta}$ را به فرم دکارتی بنویسید.

$$r = \frac{4}{2-\frac{x}{r}} \longrightarrow 1 = \frac{4}{2r-x} \longrightarrow 2r - x = 4 \longrightarrow 2\underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{\text{نامنفی}} = x+4$$

شرط: $x+4 \geq 0$

$$\longrightarrow 4(x^2+y^2) = x^2+16+8x \longrightarrow 3x^2+4y^2-8x=16 \quad \text{(معادله‌ی بیضی)}$$

با توجه به مثال بالا داریم:

$$\theta \longrightarrow -\theta \qquad r = \frac{4}{2-\cos(-\theta)} = \frac{4}{2-\cos\theta}$$

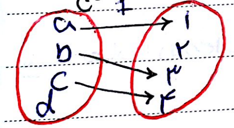
$\longrightarrow f(-\theta) = f(\theta)$ محور طول‌ها محور تقارن منحنی است

$$\theta \longrightarrow \pi - \theta \qquad r = \frac{4}{2-\cos(\pi-\theta)} = \frac{4}{2+\cos\theta} \neq f(\theta)$$

$\longrightarrow f(\pi-\theta) = f(\theta)$ محور عرض‌ها محور تقارن است

$\theta = \pi + \theta \longrightarrow f(\pi+\theta) = f(\theta)$ مبدا مختصات مرکز تقارن است.

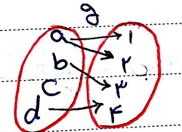
تابع: همه‌ی زوج مرتب‌های یک رابطه از دو تابع همه‌ی رابطه‌ها نیز تابع نیست.



تابع f

$f: A \to B$

$f = \{(a,1),(b,3),(c,4)\}$

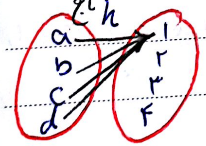


g

$g: A \to B$

$g: \{(a,1)(a,2)(b,3)(d,4)\}$

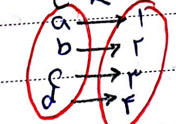
* به عضوهایی از مجموعه‌ی اول که به مجموعه‌ی دوم نسبت داده می‌شود را دامنه گویند که زیر مجموعه‌ی مجموعه‌ی آغاز شده است. به مجموعه‌ی دوم نیز هم دامنه گویند.



تابع h

$h: A \to B$

$h: \{(a,1)(b,1)(c,1)(d,1)\}$



تابع K

$K: A \to B$

$K = \{(a,1)(b,2)(c,3)(d,4)\}$

* به عضوهایی از مجموعه‌ی دوم که به آن‌ها نسبت داده‌ایم، را برد گویند. برد تابع زیرمجموعه‌ی هم‌دامنه است. تابعی که برد آن فقط یک عضو دارد را تابع ثابت گویند. تابعی که برد آن با هم‌دامنه برابر باشد را تابع پوشا گویند. تابعی که دامنه و برد آن اعداد حقیقی باشند، را تابع حقیقی گویند. مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب که تمام مؤلفه‌های آن از مجموعه اول و تمام مؤلفه‌های دوم آن از مجموعه‌ی دوم را ضرب دکارتی گویند. ($A\times B=\{(a,1),(a,2),(a,3),\dots,(d,4)\}$)
ضرب دکارتی نیز تابع نیست. مگر این که هم‌دامنه‌ی آن دارای یک عضو باشد. در ضرب دکارتی خاصیت جابه‌جایی وجود ندارد.

- مقادیر x و y از برابری زیر پیدا کنید.

$$\frac{x}{1+2i}+\frac{y}{3+2i}=\frac{5+6i}{8i-1} \qquad \frac{3x+2ix+y+2iy}{3+2i+6i+4i^2}=\frac{5+6i}{8i-1}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 3x+y=5 \\ 2x+2y=6 \end{cases} \rightarrow -4x=-4 \rightarrow x=1,\ y=2$$

- معادله‌ی قطبی را به دکارتی و برعکس تبدیل کنید.

الف) $r^2=4\sin 2\theta \rightarrow x^2+y^2=8\sin\theta\cos\theta \rightarrow x^2+y^2=\frac{8y}{\sqrt{x^2+y^2}}\times\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$\rightarrow (x^2+y^2)^2=8xy$

ب) $P\left|\begin{matrix}2=x\\ 2\sqrt{3}=y\end{matrix}\right.$ $\quad r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{4+12}=4 \rightarrow x=r\cos\theta \rightarrow 2=4\cos\theta$

$\rightarrow \cos\theta=\frac{1}{2} \rightarrow \theta=\frac{\pi}{3} \rightarrow \left|\begin{matrix}4\cos\frac{\pi}{3}\\ 4\sin\frac{\pi}{3}\end{matrix}\right.$

Year: ------ Month: ------ Day: ------ Subject: ----------------

- دامنه‌ی توابع زیر را بدست آورید.

الف) $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}} \frac{x-3}{x+1}}$

1) $\frac{1}{2} > 0$ ✓

2) $\frac{1}{2} \neq 1$ ✓

3) $\frac{x-3}{x+1} > 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} x < -1 \;\cup\; x > 3$

4) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{x-3}{x+1} \geq 0$

$$\star\ 0 < a < 1 \rightarrow \begin{cases} \log_a x > 0 & 0 < x < 1 \\ \log_a x < 0 & x > 1 \end{cases}$$

$$a > 1 \rightarrow \begin{cases} \log_a x \geq 0 & x \geq 1 \\ \log_a x < 0 & 0 < x < 1 \end{cases}$$

$$\rightarrow 0 < \frac{x-3}{x+1} \leq 1 \ ✓ \qquad \frac{x-3}{x+1} \leq 1 \rightarrow \frac{-4}{x+1} \leq 0 \rightarrow x+1 > 0 \rightarrow x > -1$$

$$\rightarrow D_f = (3, +\infty)$$

تعریف تابع:

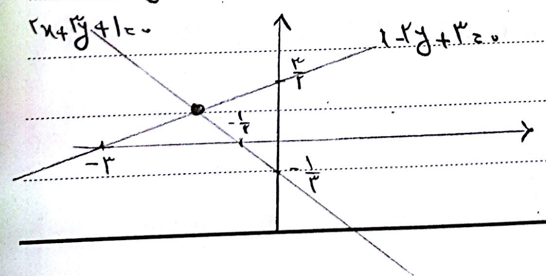
$$\forall x_1, x_2 \in D_f \quad \text{if } x_1 = x_2 \rightarrow y_1 = y_2 \quad \text{تابع}$$

- مشخص کنید هر کدام تابع است یا نه.

الف) $|2x+3y+1| + |x-2y+3| = 0$ ⋆ چون مجموع دو قدر مطلق صفر است، پس هر کدام را جداگانه برابر صفر قرار می‌دهیم.

$$|2x+3y+1| = 0 \longrightarrow \begin{cases} 2x+3y+1 = 0 \\ x-2y+3 = 0 \end{cases} \longrightarrow 7y = 5 \rightarrow \boxed{y = \frac{5}{7}}$$

$$|x-2y+3| = 0 \longrightarrow \qquad \boxed{x = -\frac{11}{7}}$$



تابع است.

ب) $|2x+3y+1||x-2y+3|=0$ چون ضرب دو قدرمطلق برابر صفر است، پس باید یکی از آن ها صفر باشد.

$$|2x+3y+1|=0 \longrightarrow \begin{cases} 2x+3y+1=0 \\ x-2y+3=0 \end{cases} \longrightarrow 7y=5 \longrightarrow \boxed{y=\frac{5}{7}}$$

$$|x-2y+3|=0 \longrightarrow \qquad \boxed{x=-\frac{11}{7}}$$

تابع است

تعریف تابع یک به یک:

$\forall x_1, x_2 \in D_f$ if $y_1=y_2 \rightarrow x_1=x_2$ تابع یک به یک ← معکوس پذیر

Year: ------ Month: ------ Day: ------ Subject: ------------------

فرمول های جمع به ضرب :

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

$$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\sin p - \sin q = 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

---

* $f'_+(x_0) = f'_-(x) = +\infty$ عطف قائم

$f'_+(x) = f'_-(x) = -\infty$ عطف قائم

$f'_+(x) = +\infty$ $f'_-(x) = -\infty$ بازگشتی

$f'_+(x) = -\infty$ $f'_-(x) = +\infty$ بازگشتی

قضیه های مشتق :

۱) $y = a$ $y' = 0$

۲) $y = ax + b$ $y' = a$

۳) $y = x^n$ $y' = nx^{x-1}$

۴) $y = u^n$ $y' = nu'u^{n-1}$

۵) $y = u + v - w$ $y' = u' + v' - w'$

۶) $y = u.v$ $y' = u'v + v'u$

۷) $y = u.w.v$ $y' = u'vw + v'uw + w'uv$

Year: ------ Month: ------ Day: ------ Subject: ----------------

۸) $y = \frac{u}{v}$ $y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

۹) $y = \sqrt{x}$ $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

۱۰) $y = \sqrt{x}$ $y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

۱۱) $y = \sqrt[n]{u}$ $y' = \frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$

۱۲) $y = \sqrt[n]{u^m}$ $y' = \frac{mu'}{n\sqrt[n]{u^{n-m}}}$

۱۳) $y = \sin u$ $y' = u' \cos u$

۱۴) $y = \cos u$ $y' = -u' \sin u$

۱۵) $y = \tan u$ $y' = u'(1 + \tan^2 u) = \frac{u'}{\cos^2 u}$

۱۶) $y = \cot u$ $y' = \frac{-u'}{\sin^2 u} = -u'(1 + \cot^2 u)$

۱۷) $y = e^u$ $y' = u'e^u$

۱۸) $y = a^u$ $y' = u'a^u \ln a$

۱۹) $y = \ln u$ $y' = \frac{u'}{u}$

۲۰) $y = \log_a u$ $y' = \frac{u'}{u \ln a}$

۲۱) $y = \sec u$

$y' = \frac{u' \sin u}{\cos^2 u} = u' \sin u (1 + \tan^2 u) = u' \sec u \tan u$

۲۲) $y = \csc u$ $y' = \frac{-u' \cos u}{\sin^2 u} = -u' \csc u (1 + \cot^2 u) = -u' \csc \cot u$

۲۳) $y = \arcsin u$ $y' = \frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}$

۲۴) $y = \arccos u$ $y' = \frac{-u'}{\sqrt{1 - u^2}}$

۲۵) $y = \arctan u$ $y' = \frac{u'}{1 + u^2}$

۲۶) $y = \operatorname{arccot} u$ $y' = \frac{-u'}{1 + u^2}$

۲۷) $fog(x) = f(g(x))$

$$\begin{cases} (fog)'(x) = g'(x) f'(g(x)) \\ y = f(u) \quad y' = u' f'(u) \\ y \to u \to x \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} \end{cases}$$

قاعده زنجیره‌ای

توابع هیپربولیک :

$\sinh x = \dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}$ $\cosh x = \dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}$

۲۸) $\sinh u$ $y' = u'\cosh u$ ۲۹) $y = \cosh u$ $y' = u'\sinh u$

۳۰) $y = \operatorname{sech} u$ $y' = -u'\operatorname{sech} u \tanh u$

۳۱) $y = \operatorname{csch} u$ $y' = -u'\operatorname{csch} u \coth u$

۳۲) $y = \operatorname{Arc} \cosh u$ $y' = \dfrac{u'}{\sqrt{u^2-1}}$

۳۳) $y = \operatorname{Arc} \sinh u$ $y' = \dfrac{u'}{\sqrt{u^2+1}}$

۳۴) $y = \operatorname{Arc} \tanh u$ $y' = \dfrac{u'}{1-u^2}$ ۳۵) $y = \operatorname{Arc} \coth u$ $y' = \dfrac{u'}{1-u^2}$

۳۶) $y = \operatorname{Arc} \operatorname{sech} u$ $y' = \dfrac{-u}{u\sqrt{1-u^2}}$

۳۷) $y = \operatorname{Arc} \operatorname{csch} u$ $y' = \dfrac{u'}{u\sqrt{u^2+1}}$

۳۸) $\operatorname{Arc} \sec u$ $y' = \dfrac{u'}{|u|\sqrt{u^2-1}}$ ۳۹) $y = \operatorname{Arc} \csc u$ $y' = \dfrac{-u}{|u|\sqrt{u^2-1}}$

مشتق بگیرید.

الف) $y = \sin 5x + \cos^2 4x$ $y' = 5\cos 5x - 2\times 4\sin 4x \cos 4x$

Year: ------ Month: ------ Day: ------ Subject: ------

ب) $y = \cos^3(\sin(\tan(e^{\cot(3x+1)})))$

$y' = 3\cos^2(\sin(\tan(e^{\cot(3x+1)})))\left[-\sin(\sin(\tan(e^{\cot(3x+1)})))\cdot\cos(\tan(e^{\cot(3x+1)}))\times\frac{e^{\cot(3x+1)}\times\frac{-3}{\sin^2(3x+1)}}{\cos^2(e^{\cot(3x+1)})}\right]$

$y = a^{\sin x} \qquad x=\frac{\pi}{4} \qquad a^{\sin\frac{\pi}{4}} = a^{\frac{\sqrt2}{2}}$

- معادله‌ی خط قائم را بنویسید.

$f'(x) = y' = \cos x \cdot a^{\sin} \ln a \qquad a>0$

$f'(\frac{\pi}{4}) = \cos\frac{\pi}{4}\, a^{\sin\frac{\pi}{4}} \ln a$

مماس $m = \frac{\sqrt2}{2} a^{\frac{\sqrt2}{2}} \ln a \longrightarrow y - a^{\frac{\sqrt2}{2}} = \frac{\sqrt2}{2} a^{\frac{\sqrt2}{2}} \ln a\,(x-\frac{\pi}{4})$

$m' = \frac{-1}{\frac{\sqrt2}{2} a^{\frac{\sqrt2}{2}} \ln a} = -\frac{\sqrt2\, a^{-\frac{\sqrt2}{2}}}{\ln a} \longrightarrow$ قائم $= y - a^{\frac{\sqrt2}{2}} = -\frac{\sqrt2\, a^{-\frac{\sqrt2}{2}}}{\ln a}(x-\frac{\pi}{4})$

$y = \sin^3(\cos^2(\log_2(x+3)))$

- مشتق بگیرید.

$y' = 3\left[\sin^2(\cos^2(\log_2(x+3)))\right](\cos(\cos^2(\log_2(x+3)))\left[-\sin(\log_2(x+3))\times\frac{1}{(x+3)\ln 2}\right]$

$y = \arcsin(\underbrace{\tan\sqrt{x+2}}_{u})$

$\longrightarrow \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} \longrightarrow \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+2}}(1+\tan^2\sqrt{x+2})}{\sqrt{1-(\tan\sqrt{x+2})^2}}$

کاربرد مشتق:

- مسیر صعودی و نزولی توابع زیر را بررسی نمائید و نقاط اکسترمم نسبی و مطلق آن را در صورت وجود بیابید.

SEPAND M.S

Year: ------ Month: ------ Day: ------ Subject: ------------------

الف) $y = x^3 - 5x^2 - x + 1$ * همه توابع جزء توابع براکتی و چند ضابطه‌ای در دامنه‌شان پیوستگی دارد.

$D = R$ پیوسته * پیوستگی : $\lim f(x)^+ = \lim f(x)^- = \lim\limits_{x\to 0} f(x)$

* توابع چند ضابطه‌ای زمانی در دامنه‌شان پیوسته‌اند که در مرز ضابطه‌ها پیوسته باشند.

$y' = 3x^2 - 10x - 1$ $\quad \Delta = 28 \quad x_1, x_2 = \dfrac{5 \pm 2\sqrt{7}}{3}$

x	$-\infty$	$\frac{5-2\sqrt{7}}{3}$		$\frac{5+2\sqrt{7}}{3}$	$+\infty$
y'	+	0	−	0	+
y	$-\infty \nearrow$	$f(x_1)$	$\searrow$	$f(x_2)$	$\nearrow +\infty$

اکسترمم مطلق: نقطه‌ای است که در آن y بیشترین مقدار خود را داشته باشد.

max نسبی: نقطه‌ای است که y آن نقطه از همسایگی بیشتر یا مساوی باشد.

min نسبی: نقطه‌ای که y آن نقطه از همسایگی کمتر باشد.

$3{,}43 \to \dfrac{5+2\sqrt{7}}{3}$

min نسبی $\Big|\ -20{,}9 \to f\left(\dfrac{5+2\sqrt{7}}{3}\right)$

* مماس در نقطه‌ی min , max در تابع درجه ۲ و ۳ موازی با محور طول‌هاست.

ب) $y = x^3 + 1$ $\quad D = R$ پیوسته $\quad y' = 3x^2 = 0 \to x = 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	+	0	+
y	$-\infty \nearrow$	1	$\nearrow +\infty$

ج) $y = \sqrt[3]{x} + 2$ $\quad D = R$ پیوسته $\quad y' = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \neq 0$ ریشه‌ی مشتق ندارد $\quad D_{f'} = R - \{0\}$

مشتق نمی‌پذیرد

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	+		+
y	$-\infty \nearrow$	2	$\nearrow +\infty$

$f'(0^+) = f'(0) = +\infty$ عطف قائم

د) $y = \sqrt[3]{x^2} - 1$ $\quad D = R$ پیوسته $\quad y' = \dfrac{2 \times 1}{3\sqrt[3]{x}} \neq 0$ ریشه‌ی مشتق ندارد $\quad D_{f'} = R - \{0\}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	−		+
y	$-\infty \searrow$	-1	$\nearrow +\infty$

min نسبی $\Big|\ \begin{matrix} 0 \\ -1 \end{matrix}$

SEPAND M.S