دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده مهندسی مکانیک

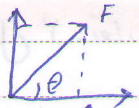
جزوه درس:

استاتیک

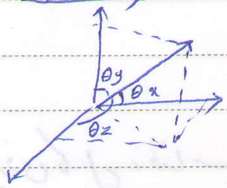
استاد: دکتر حسن موسوی
دانشجو: مهندس علی نصر

نیمسال دوم ۸۸-۱۳۸۹

فصل ۱ - نیرو

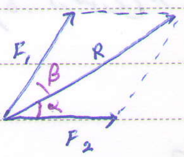


$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} = (F\cos\theta)\,\vec{i} + (F\sin\theta)\,\vec{j}$$



$$\vec{F} = (F\cos\theta_x)\,\vec{i} + (F\cos\theta_y)\,\vec{j} + (F\cos\theta_z)\,\vec{k}$$

$$\cos^2\theta_x + \cos^2\theta_y + \cos^2\theta_z = 1$$



$$R^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\theta \qquad \theta = (\alpha + \beta)$$

$$\frac{R}{\sin\theta} = \frac{F_1}{\sin\alpha} = \frac{F_2}{\sin\beta}$$

$$\vec{R} = \sqrt{(\Sigma F_x)^2 + (\Sigma F_y)^2} \qquad \tan\theta = \frac{\Sigma F_y}{\Sigma F_x}$$

$\vec{A}\cdot\vec{B} = \|A\|\|B\|\cos\theta = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$ حاصلضرب داخلی

$\vec{A}\times\vec{B} = \|A\|\|B\|\sin\theta = \det\begin{vmatrix} i & j & k \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$ حاصلضرب خارجی

تصویر نیرو بر امتداد داده شده حاصلضرب داخلی نیرو در بردار واحد (بردار یکه) امتداد داده شده

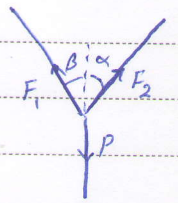
کسینوس های هادی = مولفه های بردار را بر اندازه بردار تقسیم می کنیم $\lambda_x = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ ...

فصل ۲ - تعادل نقطه مادی

$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad \Sigma F_z = 0$ تعادل

نیروی کابل، طناب وسیم باید کششی در نظر گرفته شود

قرقره: درصورتی که اصطکاک بین کابل و قرقره صفر باشد کشش کابل در دو طرف قرقره با یکدیگر برابر است

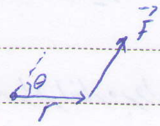


$$F_1 = \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} P \qquad F_2 = \frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} P$$

درصورتی که رابطه ۱ را استفاده کنیم و دو نیروی F_2 و P در دو طرف آن باشند نیروی F_2 مثبت و در غیر اینصورت منفی است.

فصل ۳ - تعادل اجسام صلب

$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

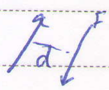


گشتاور نیروی F حول نقطه A

$M = r.F.\sin\theta$

جهت گشتاور ساعتگرد منفی است

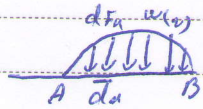
$M = Fd$



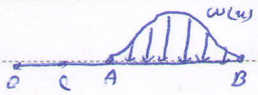
کوپل: دو نیروی برابر و موازی و مختلف الجهت کوپل ایجاد می کنند

نیروی بارگسترده

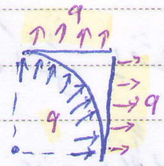
$dF = w(x)dx \qquad F = \int_{x_A}^{x_B} w(x)dx$



$M_C = \int_{x_A}^{x_B} (x - x_c)\, w(x)\, dx$

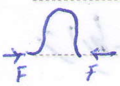


گشتاور بار گسترده حول یک نقطه



عضو منحنی شکل

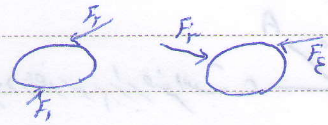
تبدیل نیرو به ۲ نیروی عمود بر هم و سپس گشتاور حول نقطه دلخواه



تعادل عضو دو نیرویی: آن دو نیرو باید مساوی، مخالف جهت یکدیگر و روی یک خط راستا واقع شوند

* اگر به عضوی فقط دو نیرو وارد شود و دو نیرو در یک امتداد نباشند جهت تعادل، هر دو نیرو باید صفر شوند

$F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = 0$



تعادل عضو سه نیرویی:

- درصورتی که جسم در تعادل باشد باید سه نیرو متقارب باشند
- درصورتی که متقارب نباشند باید هر سه نیرو صفر شوند
- درصورتی که دو نیرو از ۳ نیرو با هم موازی باشند باید نیروی سوم نیز با آن دو موازی باشد

صفحه ۷۴ و ۷۳ کتاب

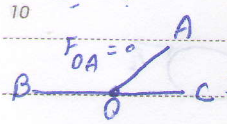
فصل ۴ـ خرپا

اعضای خرپا به صورت عضو دو نیرویی اند و به صورت کششی یا فشاری اند

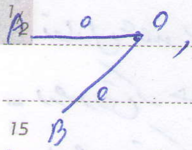
اعضای خرپا معمولاً بدون وزن بوده - در صورتی که وزن عضوی در نظر گرفته شود باید نیروی وزن به طور مساوی در دو انتهای عضو روی مفصل ها اعمال گردد

شرایط حل خرپا: خرپا دارای m عضو ، تعداد مجهولات پایه خرپا R ، و مفصل های خرپا j

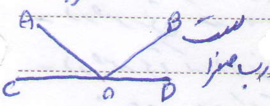
$m+R<2j$ خرپا ناپایدار ، $m+R>2j$ خرپا نامعین ، $m+R=2j$ خرپا معین



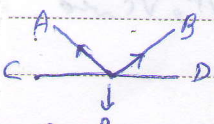
* سه عضو خرپا به یک مفصل که دو عضو در یک امتداد باشند نیروی عضو سوم برابر صفر است



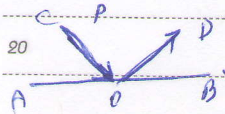
* در صورتی که دو عضو خرپا به یک مفصل متصل شده باشند هیچ نیروی خارجی به آن ها وارد نشود نیروی آن دو عضو صفر است



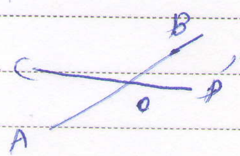
* اگر به مفصلی که روی خط تقارن خرپایی قرار دارد ۴ عضو متصل باشند نیروی دو عضو مورب صفر است



* اگر به مفصل فوق نیروی P وارد شود نیرو را با نوشتن $\Sigma F_y=0$ می توان محاسبه کرد



* اگر به مفصل خرپایی ۴ عضو متصل باشد نیرو در یکی فشاری و در دیگری کششی است



* در خرپایی به یک مفصل ۴ عضو متصل باشد به طوری که عضوها دو به دو در امتداد یکدیگر باشند نیرو در عضوهایی که در امتداد یکدیگر هستند برابرند

مقطع می زنیم و با $\Sigma F=0$ و $\Sigma M=0$ نیروهای مجهول را بدست می آوریم

مقطع نباید از سه عضو نامتقارب رد شود !

فصل ۵ ـ قاب‌ها و ماشین‌ها

در قاب‌ها عضوها چند نیرویی می‌باشند. بدین معنی که کوپل‌ها و نیروها علاوه بر دو انتهای عضو می‌توانند در هر نقطه دلخواه دیگر به عضو وارد شوند

$\sum M = 0$

درجه نامعینی قاب‌ها

$(3m + r) - (3n + c)$

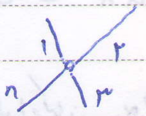
$m =$ تعداد عضوها

$r =$ تعداد مجهول

$n =$ محل اتصال اعضاء = تعداد گره

$c =$ مفصل داخلی اعضا

در صورتی که به یک مفصل n عضو متصل شده باشد مقدار c برابر است با $n-1$



$c = n - 1$

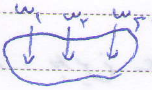
شکل صفحه ۱۸۸

$\sin\alpha - \cos\alpha = \sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4} - \alpha)$

فصل ۶ - مرکز سطح

مرکز نیروهای موازی

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i w_i}{\sum w_i} \qquad \bar{y} = \frac{\sum y_i w_i}{\sum w_i}$$



مرکز سطح

$$\bar{x} = \frac{\int x_e \, dA}{\int dA} \qquad \bar{y} = \frac{\int y_e \, dA}{\int dA}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum \lambda_i x_i A_i}{\sum \lambda_i A_i} \qquad \bar{y} = \frac{\sum \lambda_i y_i A_i}{\sum \lambda_i A_i}$$

قضیه پاپوس

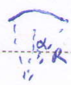
قضیه اول: سطح حاصل از دوران کامل یک منحنی حول یک محور برابر با حاصلضرب طول منحنی در مسافتی که مرکز ثقل بر اثر دوران طی می کند

$$S = 2\pi \bar{y} L$$

قضیه دوم: حجم حاصل از دوران کامل یک صفحه حول یک محور برابر است با حاصلضرب مساحت صفحه در مسافتی که مرکز ثقل صفحه بر اثر دوران طی می کند

$$V = 2\pi \bar{y} A$$

مساحت αR^2 و حجم حاصل از دوران کامل آن $\frac{4}{3}\pi R^3 \sin\alpha$



طول کمان $2R\alpha$ مساحت سطح حاصل از دوران کامل $4\pi R^2 \sin\alpha$

فصل ۷ - نیروهای داخلی - نمودار نیروی برشی و گشتاور خمشی - کابل ها

نیروهای داخلی در یک نقطه یا مقطع = ۳ دسته نیروهای محوری و برشی و گشتاور خمشی

نیروی F که بر سطح مقطع عمود است نیروی محوری و نیروی V که عمود بر محور قطعه یا موازی مقطع است نیروی برشی اند

نیروی محوری F با معادله تعادل $\sum F_x = 0$ ، نیروی برشی V با معادله $\sum F_y = 0$ و گشتاور خمشی M با معادله $\sum M_H = 0$ می توان بدست آورد

تیر با تکیه گاه های ساده = تیری که در دو انتهای خود روی پایه های مفصلی قرار گرفته باشد تیر با تکیه گاه ساده نامیده می شود

تیر یکسر گیردار یا طره یا کنسولی = تیری که از یک طرف گیردار باشد (نه تغییر مکان داشته باشد نه دوران) و از طرف دیگر آزاد باشد

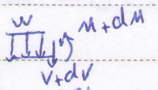
نمودار نیروهای برشی و گشتاور خمشی در نقاطی که بار گسترده تغییر می کند یا در نقاطی که بار متمرکز (منفرد) یا گشتاور خمشی به تیر وارد می شود ناپیوسته است

نیروی برشی و گشتاور خمشی مثبت

قسمت چپ ↓ قسمت راست ↑

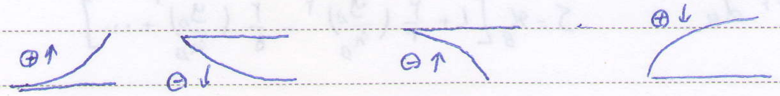
رابطه بین بار گسترده، نیروی برشی و گشتاور خمشی

$$\frac{dV}{dx} = -W \qquad \frac{dM}{dx} = V$$



$\frac{dV}{dx} = -W$ شیب خط مماس بر نمودار نیروی برشی (V) در هر نقطه، برابر منفی شدت بار گسترده بر روی تیر در آن نقطه می باشد

$\frac{dM}{dx} = V$ شیب خط مماس بر نمودار گشتاور خمشی (M) در یک نقطه، برابر مقدار نیروی برشی در آن نقطه می باشد



مقدار نمودار نیروی گسترده بر روی تیر برابر شیب نمودار نیروی برشی است

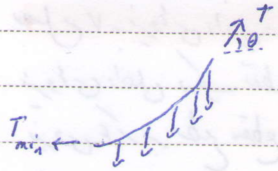
* گشتاور خمشی ماکزیمم علاوه بر نقطه ای که نیروی برشی صفر است $V = 0$ در نقاط اعمال بار یا گشتاور خمشی و نقاطی که شدت بار گسترده تغییر می کند

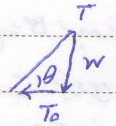
* در صورتی که در دو انتهای تیر نیروی برشی مثبت و منفی باشد در جایی در میان تیر گشتاور خمشی ماکزیمم وجود دارد

* در صورتی که مشتق گشتاور خمشی (یا مقدار نیروی برشی) در هیچ نقطه ای از تیر صفر نشد برای بدست آوردن گشتاور خمشی ماکزیمم، گشتاور در دو انتهای تیر و نقاطی که نیرو و یا گشتاور متمرکز وارد می شود یا در نقاطی که بار گسترده تغییر می کند را محاسبه می کنیم و سپس مقایسه می کنیم

* نیروی برشی ماکزیمم علاوه بر نقاطی که $\frac{dV}{dx}$ است معمولاً در نقاطی که بار گسترده به صفر می رسد و یا نقاطی که نیروی متمرکز وارد می شود ممکن است رخ دهد.

کابل ها: کابلها فقط نیروی کشش را تحمل می کنند





$$T=\sqrt{T_0^2+W^2} \qquad T\cos\theta=T_0 \qquad T\sin\theta=W \qquad \tan\theta=\frac{W}{T_0}$$

* مولفه افقی نیروی کشش کابل در کلیه نقاط کابل ثابت است

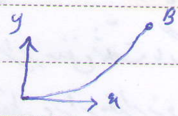
$$\tan\theta=\frac{dy}{dx}=\frac{W}{T_0} \rightarrow \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{dW}{dx}}{T_0} \qquad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{w(x)}{T_0}$$

کابلهای سهمی شکل

$$y=\frac{w_0}{2T_0}x^2$$

h فاصله عمودی = شکم کابل L فاصله نقاط اتصال = دهانه کابل

$$T_0=\frac{w_0L^2}{8h}$$



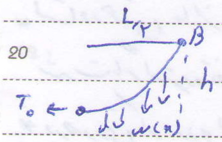
طول کابل $S=\int\sqrt{1+y'^2}\,dx$ $\qquad S=x_B\left[1+\frac{2}{3}\left(\frac{y_B}{x_B}\right)^2-\frac{2}{5}\left(\frac{y_B}{x_B}\right)^4+\dots\right]$

$$T=\sqrt{T_0^2+w_0^2s^2}$$

کابل تحت نیروی وزن خود

$$s=c\sinh\frac{x}{c} \qquad y=c\cosh\frac{x}{c} \qquad y^2-s^2=c^2 \qquad T=w_0y$$

پارامتر c مجهول می باشد که از شرایط مرزی سؤال بدست می آید



$$\Sigma M=0 \qquad T_0h-\int_0^{\frac{L}{2}}\left(\frac{L}{2}-x\right)w(x)\,dx=0$$

$$\rightarrow T_0=\frac{1}{h}\int_0^{\frac{L}{2}}\left(\frac{L}{2}-x\right)w(x)\,dx$$

$$T_{max}=\sqrt{W^2+T_0^2}=\sqrt{\left(w_0\frac{L}{2}\right)^2+\left(\frac{w_0L^2}{8h}\right)^2}=\frac{w_0L}{2}\sqrt{1+\left(\frac{L}{4h}\right)^2}$$

فصل ۸ - اصطکاک

در تماس دو جسم مقاومت نیرویی در مقابل حرکت نسبی دو جسم نسبت به یکدیگر وجود دارد که اصطکاک نام دارد

$F = \mu N$ μ ضریب اصطکاک

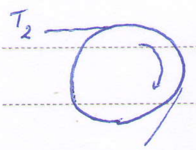
$F = \tan\phi \, N$ $\mu = \tan\phi$ و ϕ زاویه اصطکاک

اصطکاک تر بین دو سطح که توسط فیلمی از مایع جدا شده باشند رخ می دهد. اصطکاک تر بستگی به سرعت مایع و توانایی تحمل نیروی برشی

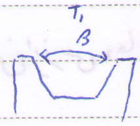
μ_s : ضریب اصطکاک استاتیکی : هنگامی که جسم در آستانه حرکت قرار می گیرد

$\mu_k < \mu_s$ μ_k یا μ_d : ضریب اصطکاک دینامیکی : جسم در حال حرکت

اصطکاک تسمه ها



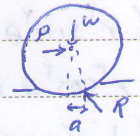
$$T_2 = T_1 e^{\mu\theta}$$



$$T_2 = T_1 e^{\mu\theta / \sin\frac{\beta}{2}}$$

مقاومت غلطشی : فرورفتگی در استوانه سطح

$$P = \frac{Wa}{r}$$



اصطکاک پیچ ها

گام پیچ : P : ارتفاع سطح شیبدار برابر فاصله دنده های پیچ

زاویه شیب پیچ : θ $\tan\theta = \frac{P}{2\pi r}$

زاویه اصطکاک بین سطوح دنده پیچ و مهره

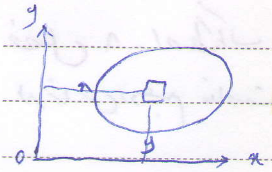
بستن پیچ $M = Wr\tan(\theta + \phi)$

باز کردن پیچ $M = Wr\tan(\theta + \phi)$

خود ایستایی $\phi > \theta$

اصطکاک در یاتاقان استوانه

ϕ_k زاویه اصطکاک دینامیکی $M = Wr\sin\phi_k = Wr_f$



فصل ۹ _ گشتاور اینرسی و حاصلضرب اینرسی سطح

ممان اینرسی (گشتاور دوم)

$$I_x = \int y^2\,dA \qquad I_y = \int x^2\,dA$$

حاصلضرب اینرسی

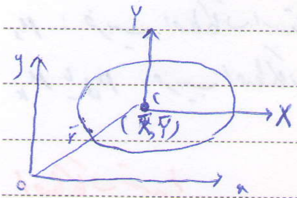
$$I_{xy} = \int xy\,dA$$

گشتاور (ممان) اینرسی قطبی

$$J_0 = \int r^2\,dA = \int (x^2+y^2)\,dA = \int x^2\,dA + \int y^2\,dA = I_x + I_y$$

* اگر سطحی حداقل دارای یک محور تقارن باشد حاصل ضرب اینرسی نسبت به محور تقارن و هر محور عمود بر آن صفر است

قضیه محورهای موازی



$$I_x = \bar I_X + A\bar y^2$$
$$I_y = \bar I_Y + A\bar x^2$$
$$I_{xy} = \bar I_{XY} + \bar x \bar y A$$
$$J_0 = J_C + A\bar r^2$$

ممان اینرسی و حاصلضرب اینرسی در مختصات قطبی

$$I_x = \iint r^3 \sin^2\theta\,dr\,d\theta$$
$$I_y = \iint r^3 \cos^2\theta\,dr\,d\theta$$
$$I_{xy} = \iint \frac{1}{2} r^3 \sin 2\theta\,dr\,d\theta$$
$$J_0 = \int r^3\,dr\,d\theta$$

شعاع ژیراسیون

$$r_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \qquad r_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \qquad r_0 = \sqrt{\frac{J_0}{A}}$$

چرخش محورها

$$I_{x'} = I_x \cos^2\theta + I_y \sin^2\theta - I_{xy}\sin 2\theta = \frac{I_x+I_y}{2} + \frac{I_x-I_y}{2}\cos 2\theta - I_{xy}\sin 2\theta$$
$$I_{y'} = I_x \sin^2\theta + I_y \cos^2\theta + I_{xy}\sin 2\theta = \frac{I_x+I_y}{2} - \frac{I_x-I_y}{2}\cos 2\theta + I_{xy}\sin 2\theta$$
$$I_{x'y'} = \frac{I_x-I_y}{2}\sin 2\theta + I_{xy}\cos 2\theta$$
$$\tan 2\theta_p = -\frac{2 I_{xy}}{I_x - I_y}$$

محوری که ممان اینرسی حول آن ماکزیمم (یا مینیمم) شود محور اصلی نامیده می‌شود θ_p

$$I_{1,2} = \frac{I_x+I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x-I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

حاصلضرب اینرسی یک مقطع نسبت به محورهای اصلی برابر صفر است

تانسور ممان

$$A = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} \\ I_{xy} & I_y \end{bmatrix}$$

$\det(A - \lambda I) = 0$ مقدار ویژه ممان اینرسی برابر ممان اینرسی اصلی مقطع می باشد. λ مقدار ویژه.

$I_x + I_y = I_{x'} + I_{y'}$

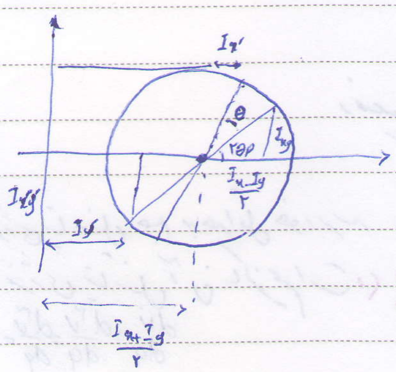
$I_{x'} I_{y'} - I_{x'y'}^2 = I_x I_y - I_{xy}^2$

$J_1 = I_x + I_y = cte$

$J_2 = I_x I_y - I_{xy}^2 = cte$

* اگر مقطعی دو دستگاه محور متقارن اصلی داشته باشد ممان اینرسی مقطع حول کلیه محورهایی که از مرکز سطح می گذرند برابر است
* اگر ممان اینرسی حول محورهای اصلی مقطع باهم برابر باشند ممان اینرسی مقطع حول هر محوری که از مرکز سطح به محورهای اصلی عبور کند یکسان است
* اگر مقطعی دارای دو محور تقارن غیر متعامد باشد ممان اینرسی مقطع حول هر محوری که از محل تلاقی دو محور تقارن بگذرد برابر است
* ممان اینرسی یک چند ضلعی منتظم حول هر محوری که از مرکز آن بگذرد برابر است.

$\frac{\theta}{2}$ دوران



جدول صفحه ۴۰۵ کتاب ناش

فصل ۱۰ - کار مجازی

کار یک نیرو: $dw = \vec{F}.\vec{dr} = F\, ds \cos\theta \qquad w = \int \vec{F}.\vec{dr}$

کار زوج نیرو (گشتاور): $dw = M\, d\theta \qquad w = \int M\, d\theta$

کار مجازی

اگر نیروی F به اندازه جابجایی کوچک و مجازی δr حرکت کند کار مجازی انجام شده $\delta w = F\cos\theta\, \delta s$

در صورتی که کوپل M به اندازه زاویه کوچک و مجازی $\delta\theta$ دوران کند کار مجازی انجام شده $\delta w = M\delta\theta$

اصل کار مجازی: اگر یک نقطه مادی در حال تعادل باشد، مجموع کار نیروهای که به این نقطه وارد می‌شود در اثر یک جابه‌جایی مجازی دلخواه برابر صفر است. $\delta w = 0$

مجموع کار نیروهای داخلی صفر است

انرژی پتانسیل: انرژی پتانسیل، توانایی انجام کار توسط یک جسم یا یک سیستم مکانیکی است

$V_g = wh$

$V_e = \frac{1}{2} K \delta_0^2 = \frac{1}{2} F \delta = \frac{F^2}{2K}$

$\frac{1}{2} K \theta_0^2 = \frac{1}{2} M \theta_0 = \frac{M^2}{2K}$

وضعیت تعادل $\frac{dV}{dq} = 0$

تعادل پایدار: انرژی پتانسیل جسم به حداقل خود برسد $\frac{dV}{dq} = 0 \quad \frac{d^2V}{dq^2} > 0$

تعادل ناپایدار: انرژی پتانسیل آن ماکزیمم است $\frac{dV}{dq} = 0 \quad \frac{d^2V}{dq^2} < 0$

تعادل بی‌تفاوت: $\frac{dV}{dq} = \frac{d^2V}{dq^2} = \frac{d^3V}{dq^3} = 0$

تعادل سیستم با دو درجه آزادی

تعادل پایدار: $\frac{dV}{dq_1} = \frac{dV}{dq_2} = 0$

$$\left(\frac{d^2V}{dq_1 dq_2}\right)^2 - \frac{d^2V}{dq_1^2}\frac{d^2V}{dq_2^2} < 0$$

$$\frac{d^2V}{dq_1^2} , \frac{d^2V}{dq_2^2} > 0$$

تعادل ناپایدار:

$$\left(\frac{d^2V}{dq_1 dq_2}\right)^2 - \frac{d^2V}{dq_1^2}\frac{d^2V}{dq_2^2} < 0$$

$$\frac{d^2V}{dq_1^2} , \frac{d^2V}{dq_2^2} < 0$$