بسمه تعالی

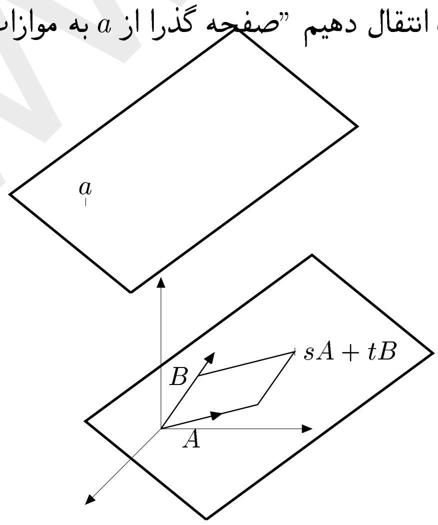
نام جزوه: ریاضی2

دانشگاه: صنعتی شریف

زیرفضاهای مستوی (۱)

www.tinar.ir

در جلسه قبل مفهوم نقطه و خط راست را که ابتدایی‌ترین مفاهیم هندسه‌اند در $\mathbb{R}^n$ در نظر گرفتیم. گام بعدی ما تعریف یک "صفحه راست" (یا به طور خلاصه "صفحه") در $\mathbb{R}^n$ است ($n \geq ۲$). یادآوری می‌کنیم که "خط گذرا از a به موازات A"، $A \neq \underline{۰}$، این گونه تعریف شد که نخست مضارب حقیقی A را در نظر گرفتیم، که یک "خط گذرا از $\underline{۰}$ در راستای A" تشکیل می‌دهند، و سپس با انتقال این خط با مقدار ثابت a، "خط گذرا از a به موازات A" به‌دست آمد. برای تعریف صفحه به طریق مشابه عمل می‌کنیم. فرض کنید A, B دو n تایی ناهمراستا باشند یعنی هیچ‌یک مضرب حقیقی دیگری نباشد. نخست مجموعهٔ نقاط به شکل $sA + tB$ را در نظر می‌گیریم. تصور شهودی ما از این مجموعه، صفحهٔ گذرا از مبدأ و شامل نقاط A و B است. توجه کنید که به‌ازای $s = t = ۰$، مبدأ به‌دست می آید، به‌ازای $t = ۰$، $s = ۱$، نقطهٔ A و به‌ازای $t = ۱$، $s = ۰$، نقطهٔ B. حال اگر نقطه‌ای a در نظر بگیریم و همه نقاط این مجموعه را به اندازهٔ a انتقال دهیم "صفحه گذرا از a به موازات A و B" حاصل می‌شود.



بدین ترتیب تعریف می‌کنیم

$$\langle a; A, B\rangle = \{a + sA + tB \mid s, t \in \mathbb{R}\} \tag{۱}$$

این مجموعه را صفحهٔ گذرا از a به موازات A و B می‌نامیم.

مثال ۱ (صفحات مختصاتی). در $\{۱, \ldots, n\}$ به تعداد $\frac{n(n-۱)}{۲} = \binom{n}{۲}$ زوج اندیس $\{i, j\}$، $\{i,j\}$، $i \neq j$، وجود دارد. به‌ازای هر $\{i, j\}$ مجموعهٔ

$$\{se_i + te_j \mid s, t \in \mathbb{R}\}$$

یک صفحهٔ مختصاتی در $\mathbb{R}^n$ است.

اگر E یک صفحه در $\mathbb{R}^n$ باشد، $E = \langle a; A, B\rangle$، E° یا انتقال‌یافتهٔ E به مبدأ را به صورت

$$E^{\circ} = \langle \underline{۰}; A, B\rangle$$

تعریف می‌کنیم. گاهی به جای $\langle \underline{۰}; A, B\rangle$ می‌نویسیم $\langle A, B\rangle$. اگر $E_۱$ و $E_۲$ هر یک خط یا صفحه باشد، $E_۱$ و $E_۲$ را موازی می‌نامیم و می‌نویسیم $E_۱ \| E_۲$ مشروط بر این که اشتراک $E_۱$ و $E_۲$ تهی باشد و به علاوه:

$$E_۱ \subset E_۲ \qquad \text{یا} \qquad E_۲ \subset E_۱$$

مثال ۲. اگر E یک صفحه در $\mathbb{R}^n$ باشد و $\underline{۰} \notin E$. نشان می‌دهیم $E \| E^{\circ}$. باید نشان دهیم E و E° نقطهٔ مشترک ندارند. فرض کنید $E = \langle a; A, B\rangle$، پس $E^{\circ} = \langle \underline{۰}; A, B\rangle$. اگر نقطهٔ مشترکی وجود داشته باشد، مثلاً P، آنگاه $P = a + s_۱A + t_۱B$ برای $s_۱$ و $t_۱$ مناسب، و نیز $P = s_۲A + t_۲B$ برای $s_۲$ و $t_۲$ مناسب، پس $a + s_۱A + t_۱B = s_۲A + t_۲B$، یا

$$a = (s_۲ - s_۱)A + (t_۲ - t_۱)B \tag{۲}$$

www.ttmar.ir

در نتیجه می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} \underline{0} &= (s_2 - s_1)A + (t_2 - t_1)B + (s_1 - s_2)A + (t_1 - t_2)B \\ &= a + (s_1 - s_2)A + (t_1 - t_2)B \end{aligned}$$

یعنی $\underline{0} \in E$ که خلاف فرض است.

مثال ۳. اگر $E = \langle a; A, B\rangle$ یک صفحه باشد، $b \notin E$، و $L = \langle b; B\rangle$، آنگاه خط L با صفحهٔ E موازی است زیرا که اولاً $L^\circ = \langle \underline{0}; B\rangle \subset \langle \underline{0}; A, B\rangle = E^\circ$ ، و ثانیاً نشان می‌دهیم L و E نقطهٔ مشترک ندارند. فرض کنید P یک نقطهٔ مشترک باشد، پس $P = b + tB$ و نیز $P = a + s_1 A + t_1 B$، بنابراین

$$b + tB = a + s_1 A + t_1 B$$

$$b = a + s_1 A + (t_1 - t)B$$

یعنی $b \in E$ که خلاف فرض است.

مثال ۴. در $\mathbb{R}^3$، اگر دو صفحه نقطه مشترک نداشته باشند، لزوماً موازی‌اند. این وضعیت در $\mathbb{R}^n$، برای $n \geq 4$، لزوماً حاکم نیست، یعنی دو صفحهٔ فاقد نقطهٔ مشترک ممکن است موازی نباشند! مثال زیر را در $\mathbb{R}^4$ در نظر بگیرید:

$$E_1 = \langle \underline{0}; e_1, e_2\rangle \quad , \quad E_2 = \langle e_4; e_1, e_3\rangle$$

E_1 متشکل از نقاط به شکل $(s, t, 0, 0)$ است و E_2 متشکل از نقاط به صورت $(s', 0, t', 1)$. بدیهی است که E_1 و E_2 نقطهٔ مشترک ندارند زیرا که مؤلفه چهارم هر عنصر E_1 صفر است و مؤلفه چهارم هر عنصر E_2 برابر ۱ می‌باشد. حال اگر E_1 و E_2 را به مبدأ منتقل کنیم، داریم

$$E_1^\circ = E_1 = \{(s, t, 0, 0) \mid s, t \in \mathbb{R}\} \quad , \quad E_2^\circ = \{(s', 0, t', 0) \mid s', t' \in \mathbb{R}\}$$

که نه E_1° زیرمجموعهٔ E_2° است و نه بالعکس، پس E_1 و E_2 در تعریف توازی صدق نمی‌کنند. دو صفحه در $\mathbb{R}^n$، $n \geq 4$، را که نه نقطهٔ مشترک داشته باشند و نه موازی باشند، دو صفحه متنافر می‌نامیم.

در اینجا می‌توان گزاره‌هایی مشابه گزاره‌های (۱ــ۴) و (۱ــ۵) جلسهٔ قبل ثابت کرد به این مضمون که:

۱) اگر $E = \langle a; A, B\rangle$، C و D دو عنصر ناهمراستای E° باشند و $b \in E$، آنگاه $E = \langle b; C, D\rangle$.

۲) اگر P, Q, R سه نقطهٔ متمایز و ناهمراستای مشترک بین دو صفحه $E_۱$ و $E_۲$ باشند، آنگاه $E_۱ = E_۲$.

چون به زودی احکام کلی‌تری ثابت خواهیم کرد در حال حاضر اثبات این دو حکم را به دانشجویان واگذار می‌کنیم و به معرفی مفاهیم جدیدی فرای خط و صفحه می‌پردازیم. تصور ذهنی ما از خط و صفحه، اشکال مسطح "یک بعدی" و "دو بعدی" است. هنوز تعریفی دقیق از کلمه "بعد" ارائه نکرده‌ایم و لیکن می‌دانیم که نقاط خط با یک پارامتر t در مجموعه $\{a + tA \mid t \in \mathbb{R}\}$ مدرج می‌شوند و نقاط یک صفحه با دو پارامتر s, t در مجموعهٔ $\{a + sA + tB \mid s, t \in \mathbb{R}\}$. به طور شهودی می‌توان تعداد پارامترهای حقیقی مستقل لازم برای تمیز دادن نقاط یک مجموعه را "بعد" آن مجموعه تلقی کرد. این مفهوم را به طور دقیق‌تر ضمن معرفی "زیرفضاهای مستوی kـ بعدی در $\mathbb{R}^n$"، $k \leq n$، که تعمیم خط و صفحه به عنوان "اشیاء مسطح kـ بعدی" خواهند بود، بررسی خواهیم کرد.

فرض کنید می‌خواهیم در $\mathbb{R}^n$، $n \geq ۳$، تعریفی برای اشیاء سه‌بعدی مسطح مشابه خط و صفحهٔ دوبعدی تعریف کنیم. طبیعی است که نخست مجموع‌های به شکل $rA + sB + tC$، r, s, t اعداد حقیقی را در نظر بگیریم که در آن A، B و C سه n تایی هستند. سپس اگر $a \in \mathbb{R}^n$ داده شده باشد، مجموعه انتقال یافته، یعنی $\{a + rA + sB + tC | r, s, t \in \mathbb{R}\}$ را "یک زیرفضای سه‌بعدی" در $\mathbb{R}^n$ تلقی کنیم. نکتهٔ قابل توجه این که در مورد خط راست فرض کردیم $A \neq \underline{\circ}$ که در غیر این صورت مجموعهٔ $\{a + tA \mid t \in \mathbb{R}\}$ به یک تک نقطهٔ $\{a\}$ مبدل می‌شود. همین‌طور در مورد صفحه، فرض ناهمراستا بودن A و B را اعمال کردیم که در غیر این صورت مجموعهٔ $\{a + sA + tB \mid s, t \in \mathbb{R}\}$ به یک خط راست یا حتی یک نقطه (وقتی $A = B = \underline{\circ}$) مبدل می‌شود. حال می‌خواهیم شرطی مناسب برای سه n تایی (یا حتی به طور کلی k، n تایی) بیابیم که تعمیم طبیعی صفر نبودن A در $\{A\}$ و ناهمراستا بودن A و B در $\{A, B\}$ باشد.

www.tmar.ir

(۲—۱) تعریف. فرض کنید $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_k$ عناصر $\mathbb{R}^n$ باشند. مجموعهٔ $\{\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_k\}$ را مستقل خطی می‌نامیم در صورتی که هیچ مجموع مضارب حقیقی $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_k$، یعنی $t_1\mathbf{A}_1 + \cdots + t_k\mathbf{A}_k$، صفر نشود مگر این که همه ضرایب $t_1, \dots, t_k$ صفر باشند.

اگر مجموعهٔ $\{\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_k\}$ مستقل خطی نباشند، آن را وابستهٔ خطی می‌نامیم. هر مجموع به شکل $t_1\mathbf{A}_1 + \cdots + t_k\mathbf{A}_k$ یک ترکیب خطی $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_k$ خوانده می‌شود.

مثال ۱. برای $k = 1$، مجموعه $\{A\}$ وابستهٔ خطی خواهد بود به شرطی که $tA = \underline{0}$ بتواند برقرار باشد بدون این که $t = 0$. این تنها وقتی میسر است که $A = \underline{0}$. پس شرط اعمال شده برای تعریف خط راست $\langle a; A\rangle$ روی A (یعنی $A \neq \underline{0}$) معادل این است که $\{A\}$ مستقل خطی است.

مثال ۲. برای $k = 2$، وابستگی خطی مجموعهٔ دو عنصری $\{A, B\}$ معادل این است که $t_1A + t_2B = \underline{0}$ بدون این که هردوی t_1 و t_2 صفر شوند. مثلاً اگر $t_1 \neq 0$، آنگاه $A = -\frac{t_2}{t_1}B$، یعنی A مضربی حقیقی از B خواهد شد. بدین ترتیب در تعریف صفحه $\langle a; A, B\rangle$ شرط همراستا نبودن A و B را می‌توان بدین صورت بیان کرد که $\{A, B\}$ مستقل خطی است.

مثال ۳. اگر در مجموعهٔ $\{A_1, \dots, A_k\}$، یک یا بیشتر از A_i ها nـ تایی صفر، $\underline{0}$، باشد، مجموعه، وابسته خطی می‌شود. مثلاً فرض کنید $A_j = 0$. ضرایب t_i را این طور در نظر بگیرید:

$$t_i = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

در این صورت $t_1A_1 + \cdots + t_kA_k = \underline{0}$ بدون این که همهٔ A_i ها صفر باشند.

(۲—۲) گزاره. شرطی لازم و کافی برای وابستگی خطی $\{A_1, \dots, A_k\}$ بدین شرح است:

الف) در حالت $k = 1$، $\{A_1\}$ وابستهٔ خطی است اگر و تنها اگر $A_1 = \underline{0}$.

ب) در حالت $k > 1$، $\{A_1, \dots, A_k\}$ وابسته خطی است اگر و تنها اگر بتوان یکی از A_i ها را به صورت ترکیبی خطی از سایر A_i ها نوشت.

www.ttnar.ir

اثبات. حالت $k=1$ در مثال ۱ بالا بررسی شد، فرض کنید $k \geq 2$. اگر $\{A_1,\dots,A_k\}$ وابستهٔ خطی باشد، $t_1,\dots,t_k$ حقیقی وجود دارند، نه همه صفر، که $t_1A_1+\dots+t_kA_k=\underline{0}$. مثلاً $t_j \neq 0$. در این صورت

$$A_j = -\frac{t_1}{t_j}A_1 - \dots - \frac{t_{j-1}}{t_j}A_{j-1} - \frac{t_{j+1}}{t_j}A_{j+1} - \dots - \frac{t_n}{t_j}A_n$$

یعنی A_j ترکیبی خطی از سایر A_i ها است.

بالعکس اگر داشته باشیم:

$$A_j = c_1A_1 + \dots + c_{j-1}A_{j-1} + c_{j+1}A_{j+1} + \dots + c_kA_k$$

با انتقال A_j به طرف دیگر رابطه داریم

$$c_1A_1 + \dots + c_{j-1}A_{j-1} - A_j + c_{j+1}A_{j+1} + \dots + c_kA_k = \underline{0}$$

و این در حالی است که دست کم یکی از ضرایب (ضریب A_j) صفر نیست. □

با این مقدمه، زیرفضاهای با بعد بالاتر از ۱ و ۲ در $\mathbb{R}^n$ به صورت زیر تعریف می‌شود. فرض کنید $\{A_1,\dots,A_k\}$ یک مجموعهٔ مستقل خطی از عناصر $\mathbb{R}^n$ باشد و $a \in \mathbb{R}^n$ یک نقطهٔ داده شده، در این صورت مجموعهٔ زیر یک زیرفضای مستوی kـ بعدی ("زیرفضای مستوی kـ بعدی گذرا از a به موازات $A_1,\dots,A_k$") خوانده می‌شود:

$$\langle a; A_1,\dots,A_k\rangle = \{a + t_1A_1 + \dots + t_kA_k \mid t_1,\dots,t_k \in \mathbb{R}\} \qquad (۳)$$

اگر مجموعهٔ تعریف شده در (۳) را به E نمایش دهیم، مقصود از E° (انتقال‌یافتهٔ E به $\underline{0}$)، مجموعهٔ $\langle A_1,\dots,A_k\rangle = \langle \underline{0}, A_1,\dots,A_k\rangle$ است. به طور کلی یک زیرفضای مستوی kـ بعدی که شامل $\underline{0}$ باشد یک زیرفضای خطی خوانده می‌شود. طبق قرارداد، تنها زیرفضای صفر بعدی تک عنصری $\{\underline{0}\}$ است، و بدین ترتیب زیرفضاهای مستوی صفربعدی تک عنصری‌های $\{a\}$ هستند، $a \in \mathbb{R}^n$، که

از انتقال $\circ$ به a به‌دست می‌آیند. بدین ترتیب جدول زیر را داریم:

زیرفضای مستوی صفربعدی $\longleftrightarrow$ نقطه

زیرفضای مستوی یک‌بعدی $\longleftrightarrow$ خ

زیرفضای مستوی دوبعدی $\longleftrightarrow$ صفحه

$\vdots$

تعریف زیرفضای kـ بعدی جای تأمل دارد. سؤال‌های متعددی می‌توان این مقطع مطرح کرد. آیا عدد k به طور منحصر به فرد تعیین می‌شود، یعنی اگر $\{A_1, \ldots, A_k\}$ و $\{B_1, \ldots, B_l\}$ دو مجموعه، هر یک مستقل‌خطی، باشند، آیا می‌توان رابطه‌ای به شکل $\langle a; A_1, \ldots, A_k\rangle = \langle b; A_1, \ldots, A_k\rangle$، برای a و b مناسب، برقرار ساخت بدون این که $k = l$؟ به چه اعتباری زیرمجموعه‌های $\langle a; A_1, \ldots, A_k\rangle$ را "مسطح" تجسم می‌کنیم؟ همان طور که دو خط راست دارای دو نقطهٔ متمایز مشترک بر هم منطبق می‌شوند، آیا دو زیرفضای مستوی kـ بعدی با $(k+1)$ نقطهٔ مشترک، لزوماً بر هم منطبق‌اند؟ در باقیمانده این جلسه و جلسهٔ بعد به جواب‌های قاطعی در مورد این گونه سؤال‌ها خواهیم رسید.

(۲—۳) گزاره. فرض کنید $\{A_1, \ldots, A_k\}$ مستقل خطی ست و $a \in \mathbb{R}^n$، در این صورت نمایش عناصر $\langle a; A_1, \ldots, A_k\rangle$ به شکل $a + t_1A_1 + \cdots + t_kA_k$ منحصر به فرد است.

اثبات. توجه کنید که هر عنصر $\langle a; A_1, \ldots, A_k\rangle$ طبق تعریف به شکل $a + t_1A_1 + \cdots + t_kA_k$ برای $t_1, \ldots, t_k$ مناسب است. می‌خواهیم ثابت کنیم $t_1, \ldots, t_k$ به طور یگانه تعیین می‌شوند. فرض کنید:

$$a + t_1A_1 + \cdots + t_kA_k = a + t'_1A_1 + \cdots + t'_kA_k$$

از این رابطه نتیجه می‌شود که $\circ = (t_1 - t'_1)A + \cdots + (t_k - t'_k)A_k$. از آنجا که $\{A_1, \ldots, A_k\}$ مستقل خطی است نتیجه می‌شود که همهٔ ضرایب صفر هستند، پس $t'_i = t_i$ برای $i = 1, \ldots, k$، و یگانگی ضرایب به اثبات می‌رسد. $\square$

گزارهٔ فوق نشان می‌دهد هر زیرفضای مستوی kـ بعدی در تناظر یک به یک با مجموعهٔ kـ تایی‌های مرتب $(t_1, \ldots, t_k)$، یعنی مجموعهٔ $\mathbb{R}^k$، قرار می‌گیرد، همان طور که خط راست با $\mathbb{R}$ و

صفحه با $\mathbb{R}^۲$ مدرج می‌شود.

نکته زیر نیز در مورد مفهوم استقلال خطی مکرراً مورد استفاده قرار خواهد گرفت:

(۲—۴) گزاره. اگر مجموعهٔ $\{A_۱, \ldots, A_k\}$ مستقل خطی باشد، هر زیرمجموعهٔ ناتهی آن نیز مستقل خطی است. اگر $\{A_۱, \ldots, A_k\}$ وابستهٔ خطی باشد، هر مجموعهٔ شامل آن نیز وابستهٔ خطی است.

اثبات. اگر زیرمجموعه‌ای از $\{A_۱, \ldots, A_k\}$ وابستهٔ خطی شود، یک ترکیب خطی از اعضای آن زیرمجموعه برابر صفر می‌شود بدون آن که همهٔ ضرایب صفر باشند. اگر سایر A_i ها را با ضریب صفر به این رابطه بیافزاییم یک رابطهٔ وابستهٔ خطی برای $\{A_۱, \ldots, A_k\}$ به‌دست می‌آید. همین طور اگر یک رابطهٔ وابستگی خطی برای $\{A_۱, \ldots, A_k\}$ موجود باشد، همین رابطه، وابستگی خطی برای هر مجموعهٔ شامل $\{A_۱, \ldots, A_k\}$ را نشان می‌دهد. □

www.ttmar.ir

زیرفضاهای مستوی (۲)

در پایان جلسه قبل به تعدادی سؤال بنیادی در مورد تعریف زیرفضای مستوی kـ بعدی اشاره کردیم که قرار شد به پاسخگویی کامل آنها اقدام کنیم. قضیهٔ زیر و روش اثبات آن کلید این بحث است.

(۳—۱) قضیهٔ تبادل. فرض کنید $\{A_1, \ldots, A_k\}$ و $\{B_1, \ldots, B_l\}$ دو زیرمجموعهٔ مستقل خطی از عناصر $\mathbb{R}^n$ باشند به طوری که $\langle B_1, \ldots, B_l\rangle = \langle A_1, \ldots, A_k\rangle$، در این صورت $l = k$.

اثبات. نشان می‌دهیم $k \neq l$ منجر به تناقض می‌شود. مثلاً فرض کنید $k \leq l$. چون $B_1 \in \langle B_1, \ldots, B_l\rangle = \langle A_1, \ldots, A_k\rangle$، می‌توان نوشت:

$$B_1 = t_1 A_1 + \cdots + t_k A_k \tag{1}$$

دست کم یکی از ضرایب $t_1, \ldots, t_n$ باید ناصفر باشد چه در غیر این صورت $B_1 = \underline{0}$ و مجموعهٔ $\{B_1, \ldots, B_l\}$ نمی‌تواند مستقل خطی باشد. مثلاً فرض می‌کنیم $t_1 \neq 0$ (در صورت لزوم اندیس‌ها را تعویض کنید به طوری که ضریب با اندیس ۱ ناصفر باشد)، پس با تبادل جای B_1 و $t_1 A_1$ در دو طرف (۱) داریم:

$$\begin{aligned} -t_1 A_1 &= -B_1 + t_2 + \cdots + t_k A_k \\ A_1 &= \tfrac{1}{t_1} B_1 - \tfrac{t_2}{t_1} A_2 - \cdots - \tfrac{t_k}{t_1} A_k \end{aligned} \tag{2}$$

از (۲) نتیجه می‌شود که هر ترکیب خطی $A_1, \ldots, A_k$، یعنی هر عنصر $\langle A_1, \ldots, A_k\rangle$، ترکیبی خطی از $\{B_1, A_2, \ldots, A_k\}$ است. حال عنصر $B_2 \in \langle B_1, \ldots, B_l\rangle = \langle A_1, \ldots, A_k\rangle$ را در نظر می‌گیریم.

چون ثابت کرده‌ایم هر عنصر $\langle A_1,\ldots,A_k\rangle$ ترکیبی خطی از $\{B_1,A_2,\ldots,A_k\}$ است، می‌توان نوشت:

$$B_2 = s_1B_1 + s_2A_2 + \cdots + s_kA_k \qquad (3)$$

در اینجا همهٔ ضرایب $s_2,\ldots,s_k$ نمی‌توانند صفر باشند زیرا در این صورت $B_2 = s_1B_1$ و مجموعه $\{B_1,\ldots,B_l\}$ وابسته خطی خواهد شد که خلاف فرض قضیه است. پس دست کم یکی از $s_2,\ldots,s_k$ صفر نیست که مثلاً (با تعویض نام اندیس‌ها در صورت لزوم) فرض می‌کنیم $s_2 \neq 0$. پس مجدداً با تبادل مکان B_2 و s_2A_2 داریم:

$$\begin{aligned} -s_2A_2 &= -s_1B_1 - B_2 + s_3A_3 + \cdots + t_kA_k \\ A_2 &= -\tfrac{s_1}{s_2}B_1 - \tfrac{1}{s_2}B_2 - \tfrac{s_3}{s_2}A_3 - \cdots - \tfrac{s_k}{s_2}A_k \end{aligned} \qquad (4)$$

این رابطه نشان می‌دهد که هر ترکیب خطی $B_1,A_2,\ldots,A_k$ (در نتیجه هر ترکیب خطی $A_1,\ldots,A_k$) ترکیبی خطی از $\{B_1,B_2,A_3,\ldots,A_k\}$ است. به همین روش ادامه داده، تک تک A_i ها را با B_i ها مبادله می‌کنیم. از آنجا که $k \leq l$، پس از k مرحله به این نتیجه می‌رسیم که هر ترکیب خطی $A_1,\ldots,A_k$ یک ترکیب خطی $B_1,\ldots,B_k$ است. از آنجا که $\langle A_1,\ldots,A_k\rangle = \langle B_1,\ldots,B_l\rangle$، اگر l اکیداً بزرگتر از k باشد، B_{k+1} باید ترکیبی خطی از $B_1,\ldots,B_k$ باشد که این خلاف استقلال خطی $\{B_1,\ldots,B_l\}$ است. نتیجه این که $l=k$ و حکم به اثبات می‌رسد. $\square$

قضیه تبادل نشان می‌دهد که اگر یک زیرفضای خطی E° متشکل از ترکیب‌های خطی یک مجموعهٔ مستقل خطی $\{A_1,\ldots,A_k\}$ باشد، هر مجموعهٔ مستقل خطی دیگر که ترکیب‌های خطی عناصر آن همین مجموعه را ایجاد کند باید دارای دقیقاً k عضو باشد. بدین ترتیب عدد k، که از این پس بعد زیرفضای خطی $\langle A_1,\ldots,A_k\rangle$ خوانده خواهد شد عددی است که به طور ذاتی بر این زیرفضای خطی تحمیل می‌شود. هر زیرمجموعهٔ مستقل خطی kـ عضوی $\{A_1,\ldots,A_k\}$ از عناصر E° را یک پایه برای E می‌نامیم. اگر زیرفضای مستوی $E = \langle a; A_1,\ldots,A_k\rangle$ از انتقال زیرفضای

خطی $\langle A_1, \ldots, A_k\rangle$ به‌دست آمده باشد، بعد E را نیز k می‌گیریم. اکنون می‌توانیم گزاره‌ای مشابه (۱—۴) در حالت کلی ارائه کنیم:

(۳—۲) گزاره. اگر $\{A_1, \ldots, A_k\}$ مستقل خطی باشد $E = \langle a; A_1, \ldots, A_k\rangle$، $\{B_1, \ldots, B_k\}$ یک مجموعهٔ مستقل خطی از عناصر $E^\circ = \langle A_1, \ldots, A_k\rangle$ باشد، و $b \in E$، آنگاه $E = \langle b; B_1, \ldots, B_k\rangle$.

اثبات. چون $b \in E$، داریم

$$b = a + t_1A_1 + \cdots + t_kA_k \tag{۵}$$

برای اعداد حقیقی مناسب $t_1, \ldots, t_k$. از طرفی دیگر دیدیم که هر ترکیب خطی $\{A_1, \ldots, A_k\}$ یک ترکیب خطی $\{B_1, \ldots, B_k\}$ است، و بالعکس. این امر را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} x &= a + s_1A_1 + \cdots + s_kA_k \\ &= b + (s_1 - t_1)A_1 + \cdots + (s_k - t_k)A_k \quad (\text{طبق } ۵) \end{aligned} \tag{۶}$$

و طبق (۶) می‌توان $(s_1 - t_1)A_1 + \cdots + (s_k - t_k)A_k$ را به صورت ترکیبی خطی از $B_1, \ldots, B_k$ نوشت، پس $\mathbf{x} \in \langle b; B_1, \ldots, B_k\rangle$. بالعکس اگر $y \in \langle b; B_1, \ldots, B_k\rangle$، آنگاه:

$$y = b + r'_1B_1 + \cdots + r'_kB_k \qquad \text{برای اعداد حقیقی مناسب } r'_1, \ldots, r'_k$$

ترکیب خطی $r'_1B_1 + \cdots r'_kB_k$ را می‌توان طبق (۶) به صورت $r_1A_1 + \cdots + r_kA_k$ نوشت، پس به کمک (۵):

$$y = a + (t_1 + r_1)A_1 + \cdots + (t_k + r_k)A_k$$

یعنی $y \in \langle a; A_1, \ldots, A_k\rangle$، و حکم به اثبات می‌رسد. □

گزاره زیر نیز مشابه (۱—۵) است:

www.ttmar.ir

(۳ــ۳) گزاره. اگر زیرفضاهای مستوی kــ بعدی $E_۱, E_۲$ در $\mathbb{R}^n$ دارای $(k+۱)$ نقطهٔ مشترک باشند که در یک زیرفضای با بعد کوچکتر از k در $\mathbb{R}^k$ قرار نمی‌گیرند، آنگاه $E_۱ = E_۲$.

اثبات. فرض کنید $P_۰, P_۱, \ldots, P_k$ نقاط مشترک $E_۱, E_۲$ باشند. اگر $\{A_۱, \ldots, A_k\}$ یک پایه برای $E_۱^۰$ باشد، عناصر $E_۱$ را می‌توان به صورت

$$P_۰ + t_۱ A_۱ + \cdots + t_k A_k$$

نمایش داد. حال چون $P_۱, \ldots, P_k \in E$، هر یک به صورت فوق نوشته می‌شود، پس $P_۱ - P_۰, \ldots, P_k - P_۰$ هر یک ترکیبی خطی از $A_۱, \ldots, A_k$ است. می‌نویسیم $P'_۱ = P_۱ - P_۰, \ldots P'_k = P_k - P_۰$. حال ادعا می‌کنیم $\{P'_۱, \ldots, P'_k\}$ مستقل خطی است. نشان می‌دهیم فرض وابستگی خطی $\{P'_۱, \ldots, P'_k\}$ منجر به تناقض با این فرض گزاره می‌شود که $P_۰, P_۱, \ldots, P_k$ در یک زیرفضای با بعد کوچکتر از k جای نمی‌گیرند. اگر $k = ۱$ که در حالت گزاره (۱ــ۵) هستیم که قبلاً ثابت شده است، پس فرض می‌کنیم $k > ۱$. حال فرض کنید $\{P'_۱, \ldots, P'_k\}$ وابستهٔ خطی است. دست کم یکی از $P'_۱, \ldots, P'_k$ ناصفر است زیرا اگر همهٔ اینها صفر باشند داریم $P_۰ = P_۱ = \cdots = P_k$ پس $\{P_۰, P_۱, \ldots, P_k\}$ در یک زیرفضای مستوی صفر بعدی $\mathbb{R}^n$ قرار می‌گیرد که خلاف فرض است. بدین ترتیب $\{P'_۱, \ldots, P'_k\}$ دارای حداقل یک زیرمجموعهٔ مستقل خطی است (یک تک عنصری ناصفر). بزرگترین زیرمجموعه (از نظر تعداد اعضا) از $\{P'_۱, \ldots, P'_k\}$ را در نظر می‌گیریم که مستقل خطی است، تعداد اعضای آن را l می‌نامیم. چنین زیرمجموعهٔ $\{P'_۱, \ldots, P'_k\}$ ممکن است منحصر به فرد نباشد و لیکن به هر حال $l < k$ زیرا $\{P'_۱, \ldots, P'_k\}$ وابستهٔ خطی فرض شده است. با تعویض نام اندیس‌ها در صورت لزوم، فرض می‌کنیم $\{P'_۱, \ldots, P'_l\}$ این زیرمجموعهٔ مستقل خطی (دارای بیشترین تعداد ممکن عضو) باشد. زیرفضای خطی ایجاد شده توسط $P'_۱, \ldots, P'_l$ را F° می‌نامیم، $F^\circ = \langle P'_۱, \ldots, P'_l \rangle$. داریم $P_{l+۱}, \ldots, P_k \in F^\circ$ زیرا که افزودن هر یک به $\{P'_۱, \ldots, P'_l\}$ وابستگی خطی ایجاد می‌کند. F° یک زیرفضای خطی lــ بعدی است، $l \leq k$، و اگر آن را با $P_۰$

انتقال دهیم، یک زیرمجموعهٔ مستوی lـ بعدی F به‌دست می آید:

$$F = \langle P_0 ; P'_1, \dots, P'_l \rangle$$

که P_0، $P_1 = P_0 + P'_1$، … ، $P_k = P_0 + P'_k$ همه عضو آن هستند. چون $l < k$، این خلاف فرض گزاره است. نتیجه این که وابستگی خطی $\{P'_1, \dots, P'_k\}$ منجر به تناقض شد و این مجموعه باید مستقل خطی باشد. بنابراین $\{P'_1, \dots, P'_k\}$ یک پایه برای E_1° است و طبق گزارهٔ (۳—۲) داریم

$$E_1 = \langle P_0 ; P'_1, \dots, P'_k \rangle$$

چون $P_0, P_1, \dots, P_k \in E_2$، عین همین استدلال برای E_2 نیز کار می‌کند و نتیجه می‌شود که:

$$E_2 = \langle P_0 ; P'_1, \dots, P'_k \rangle$$

و $E_1 = E_2$ نتیجه می‌شود. $\square$

مفهوم توازی را که برای خط و صفحه تعریف کردیم می‌توانیم به زیرفضاهای مستوی از هر بعد تعمیم دهیم. فرض کنید E_1, E_2 دو زیرفضای مستوی $\mathbb{R}^n$ باشند. می‌گوییم E_1, E_2 موازی هستند، و می‌نویسیم $E_1 \| E_2$، در صورتی که اشتراک E_1, E_2 تهی باشد و برای انتقال یافته‌های آنها به مبدأ، یعنی E_1°, E_2°، داشته باشیم $E_1^\circ \subset E_2^\circ$ یا $E_2^\circ \subset E_1^\circ$.

مثال. وضعیت نسبی خط راست $l : \frac{x_1 - 2}{1} = \frac{x_2}{2} = \frac{x_3}{0} = \frac{x_4 - 1}{1} = \frac{x_1 + 2}{-1}$ را با زیرفضای سه بعدی $E = \langle e_3 ; e_1, e_4, e_5 \rangle$ از $\mathbb{R}^5$ بررسی کنید. عناصر E به شکل $(x_1, 0, 1, x_4, x_5)$، و برای نقاط l مؤلفه سوم صفر است، پس $l \cap E$ تهی است. داریم $l^\circ : \frac{x_1}{1} = \frac{x_2}{2} = \frac{x_3}{0} = \frac{x_4}{1} = \frac{x_1}{-1}$ و $E^\circ = \langle e_1, e_4, e_5 \rangle$، یعنی مؤلفه‌های دوم و سوم عناصر E° صفر هستند. حال نقطهٔ $(1, 2, 0, 1, -1)$ روی l° قرار دارد ولی در E° نیست، پس $l^\circ \not\subset E^\circ$. از طرفی دیگر $E^\circ \not\subset l^\circ$ زیرا که بعد E° از بعد l° بزرگتر است. پس E و l موازی نیستند. E و l را مثل گذشته متنافر می‌نامیم.

www.ttnar.ir

ضرب داخلی و هندسهٔ اقلیدسی در $\mathbb{R}^n$ (۱)

تاکنون مفاهیم ابتدایی نقطه، خط، صفحه و توازی را به $\mathbb{R}^n$ تعمیم داده‌ایم. در هندسهٔ مقدماتی طول و زاویه نیز نقش مهمی ایفا می‌کنند. هدف بعدی ما معرفی این مفاهیم در $\mathbb{R}^n$ و بحث پیرامون موضوع‌های هندسی وابسته به آنهاست. برای این کار رابطهٔ طول، زاویه و ضرب داخلی بردارها در $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$ را یادآوری می‌کنیم و خاطر نشان می‌سازیم که هر دو مفهوم "طول" و "زاویه" را می‌توان برحسب ضرب داخلی بیان کرد. از این رو در $\mathbb{R}^n$ ضرب داخلی را مبنای بحث قرار می‌دهیم.

اگر $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ دو بردار در $\mathbb{R}^3$ باشند اغلب حاصل‌ضرب داخلی آنها، $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$u \cdot v = |u||v| \cos \alpha \tag{۱}$$

که $\alpha \in [0, \pi]$ زاویه بین $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ است و $|\;|$ طول بردار را نمایش می‌دهد. با قرار دادن $\mathbf{u} = \mathbf{v}$، از (۱) نتیجه می‌شود که:

$$|u| = \sqrt{u \cdot u} \tag{۲}$$

یعنی طول بردار را می‌توان برحسب ضرب داخلی بیان کرد. حال اگر $u \neq \underline{0}$ و $v \neq \underline{0}$، به طوری که زاویهٔ بین آنها، $\alpha \in [0, \pi]$، معنی داشته باشد، از (۱) می‌توان نوشت:

$$\cos \alpha = \frac{u \cdot v}{\sqrt{u \cdot u}\sqrt{v \cdot v}} \tag{۳}$$

تابع کسینوس روی بازهٔ $[0,\pi]$ یک به یک است و همهٔ مقادیر ممکن برای کسینوس، یعنی اعداد بازهٔ $[-1,1]$ را (یک بار) اتخاذ می‌کند، پس تابع معکوس $\cos^{-1} : [-1,1] \longrightarrow [0,\pi]$ وجود دارد و می‌توان نوشت:

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{u \cdot v}{\sqrt{u \cdot u}\sqrt{v \cdot v}}\right) \qquad (4)$$

بدین ترتیب مفهوم زاویهٔ بین دو بردار نیز به کمک (۴)از ضرب داخلی به‌دست می‌آید. حال اگر بتوان حاصل‌ضرب داخلی دو بردار را مستقل از "طول" و "زاویه" تعریف کرد، می‌توان با به‌کار گرفتن (۲) و (۴) به تعریف مفاهیم طول و زاویه رسید. در واقع در هندسهٔ تحلیلی دو بعدی و سه بعدی عبارتی جبری برای حاصل‌ضرب داخلی به‌دست می‌آید (به کمک قضیهٔ مثلثاتی "قاعده کسینوس") که این خواست را برآورده می‌کند. در $\mathbb{R}^2$ اگر $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ و $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ ثابت می‌شود که:

$$u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 \qquad (5)$$

و نیز در $\mathbb{R}^3$، برای $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ و $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$:

$$u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 \qquad (6)$$

عبارت‌های جبری (۵) و (٦) تعریف زیر را در $\mathbb{R}^n$ القا می‌کنند:

(۴ـ۱) تعریف. برای $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ و $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$، حاصل‌ضرب داخلی، $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$u \cdot v = u_1 v_1 + \dots + u_n v_n$$

خواص زیر همه به سادگی از تعریف فوق نتیجه می‌شوند:

(۴ـ۲) خواص ابتدایی حاصل‌ضرب داخلی

www.ttrar.ir

(۴—۲—۱) برای هر $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n$، $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}$.

(۴—۲—۲) برای هر $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in\mathbb{R}^n$، $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}+\mathbf{w})=(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})+(\mathbf{u}\cdot\mathbf{w})$ و $(\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}=(\mathbf{u}\cdot\mathbf{w})+(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})$.

(۴—۲—۳) برای هر $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n$ و هر $r\in\mathbb{R}$، $(r\mathbf{u})\cdot\mathbf{v}=r(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})$ و $\mathbf{u}\cdot(r\mathbf{v})=r(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})$.

(۴—۲—۴) برای هر $\mathbf{u}\in\mathbb{R}^n$، $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}\geq 0$ و $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}=0$ اگر و تنها اگر $\mathbf{u}=\underline{0}$.

با توجه به (۴—۲—۴) و با الهام از (۲)، طول $\mathbf{u}\in\mathbb{R}^n$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$|u|=\sqrt{u\cdot u} \tag{۷}$$

تنها nـ تایی دارای طول صفر، $\underline{0}$ است. برای $|\mathbf{u}|$، علاوه بر طول، اصطلاح‌های نرم و قدرمطلق نیز به‌کار می‌رود. بعضی $|\mathbf{u}|$ را به $\|\mathbf{u}\|$ نمایش می‌دهند.

اکنون می‌خواهیم مفهوم زاویهٔ بین $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ را نیز همانند (۴) تعریف کنیم. برای این کار باید اطمینان حاصل کرد که با تعریف ارائه شده در $\mathbb{R}^n$، مقدار عبارت $\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\sqrt{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}}\sqrt{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}}$ همواره در بازهٔ $[-1,1]$ قرار دارد.

(۴—۳) نامساوی کوشی‌ـ شوارتس. برای هر $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n$:

$$|u\cdot v|\leq|u||v|$$

به علاوه شرطی لازم و کافی برای برقراری تساوی این است که $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ همراستا باشند.

اثبات. نخست حالتی را در نظر بگیرید که $\mathbf{v}$ و $\mathbf{u}$ همراستا هستند. اگر یکی از $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ صفر باشد که دو طرف نامساوی بالا صفر می‌شود، در غیر این صورت $\mathbf{v}=r\mathbf{u}$ برای عدد حقیقی مناسب r. در این صورت هر دو طرف نامساوی به $|r||\mathbf{u}|^2$ تبدیل می‌شود و تساوی برقرار است. حال فرض کنید $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ همراستا نباشند، بالاخص $\mathbf{u}\neq 0$ و $\mathbf{v}\neq 0$. nـ تایی $x\mathbf{u}+\mathbf{v}$، $x\in\mathbb{R}$، را در نظر بگیرید. داریم

www.tinar.ir

$x\mathbf{u}+\mathbf{v} \neq 0$ زیرا در غیر این صورت $\mathbf{v} = -x\mathbf{u}$ و همراستایی ایجاد می‌شود. پس:

(طبق ۴—۲—۴) $\quad (xu+v)\cdot(xu+v) > 0$

(با استفاده مکرر از ۴—۲—۲) $\quad (xu)\cdot(xu) + (xu)\cdot v + v\cdot(xu) + (v\cdot v) > 0$

(با استفاده مکرر از ۴—۲—۳ و ۴—۲—۱) $\quad (u\cdot u)x^2 + 2(u\cdot v)x + (v\cdot v)$

این نامساوی درجهٔ دوم نسبت به x برای هر عدد حقیقی x برقرار است، پس مبین عبارت منفی است:

$$(u\cdot v)^2 - (u\cdot u)(v\cdot v) < 0$$

یا

$$|u\cdot v|^2 < |u|^2|v|^2$$

که نامساوی مورد نظر است. $\square$

حال با توجه به نامساوی ثبت شده داریم

$$-1 \leq \frac{u\cdot v}{\sqrt{u\cdot u}\sqrt{v\cdot v}} = \frac{u\cdot v}{|u||v|} \leq 1$$

و یگانه مقدار واقع در $[0,\pi]$ که کسینوس آن برابر $\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\sqrt{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}}\sqrt{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}}$ است زاویهٔ بین $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ می‌نامیم:

$$\measuredangle(u,v) = \cos^{-1}\frac{u\cdot v}{\sqrt{u\cdot u}\sqrt{v\cdot v}} \qquad (۸)$$

قضیهٔ زیر که از ابتدایی‌ترین قضایای هندسه است، از نامساوی کوشی‌ـ شوارتس نتیجه می‌شود:

(۴—۴) نامساوی مثلث برای هر $u,v\in\mathbb{R}^n$

$$|u+v| \leq |u| + |v|$$

شرط لازم و کافی برای برقراری تساوی این است که یکی از $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ مضربی نامنفی از دیگری باشد.

اثبات. کافی است نامساوی برای مجذور دو طرف ثابت شود، یعنی:

$$|u+v|^2 \leq |u|^2 + |v|^2 + 2|u||v|$$

www.tnar.ir

که معادل است با

$$(u+v)\cdot(u+v) \leq (u\cdot u) + (v\cdot v) + ۲|u||v|$$

و پس از ساده کردن:

$$u\cdot v \leq |u||v|$$

$$|u||v|\cos\measuredangle(u,v) \leq |u||v| \quad \text{(طبق نتیجه نامساوی کوشی ـ شوارتس)}$$

اگر $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ صفر باشد (که در این صورت یکی مضرب صفر از دیگری است) تساوی برقرار می‌شود، و اگر هر دو ناصفر باشند، رابطهٔ بالا معادل است با:

$$\cos\measuredangle(u,v) \leq ۱$$

که همواره برقرار است. تساوی در صورتی حاصل می‌شود که $\cos\measuredangle(\mathbf{u},\mathbf{v}) = ۱$، یعنی $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ همراستا و هم‌جهت باشند. □

برای دو عنصر $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ از $\mathbb{R}^n$ می‌نویسیم $\mathbf{u}\perp\mathbf{v}$، و می‌گوییم $\mathbf{u}$ بر $\mathbf{v}$ عمود است در صورتی که $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = ۰$. قضیهٔ فیثاغورس که پایهٔ هندسهٔ اقلیدسی است در $\mathbb{R}^n$ با تعاریف طول و زاویهٔ ذکر شده برقرار است:

(۴—۵) قضیه فیثاغورس. هرگاه برای $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n$ داشته باشیم $\mathbf{u}\perp\mathbf{v}$، آنگاه:

$$|u+v|^۲ = |u|^۲ + |v|^۲$$

اثبات. عبارت بالا را می‌توان به صورت

$$(u+v)\cdot(u+v) = (u\cdot u) + (v\cdot v)$$

نوشت که با توجه به $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = ۰$ برقرار است. □

www.ttmar.ir

توجه کنید که با همین استدلال (یا جایگزینی $-\mathbf{v}$ به جای $\mathbf{v}$)، رابطهٔ $|\mathbf{u}-\mathbf{v}|^۲ = |\mathbf{u}|^۲ + |\mathbf{v}|^۲$ نیز تحت فرض $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = ۰$ برقرار است. در $\mathbb{R}^n$ نیز، مانند $\mathbb{R}^۲$، قضیهٔ فیثاغورس به شکل $|\mathbf{u}-\mathbf{v}|^۲ = |\mathbf{u}|^۲ + |\mathbf{v}|^۲$ حالت خاص قاعدهٔ کسینوس است که می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$|u-v|^۲ = |u|^۲ + |v|^۲ - ۲|u||v|\cos\measuredangle(u,v) \quad v \neq \underline{۰}, u \neq \underline{۰} \text{ برای هر} \qquad (۹)$$

این نیز از محاسبه‌ای مشابه محاسبهٔ بالا با استفاده از (۸) به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} |u-v|^۲ &= (u-v)\cdot(u-v) \\ &= |u|^۲ + |v|^۲ - ۲(u\cdot v) \\ &= |u|^۲ + |v|^۲ - ۲|u||v|\cos\measuredangle(u,v) \quad \text{((طبق (۸)} \end{aligned}$$

به طور کلی، هرگاه $\mathbf{x} = (x_۱,\ldots,x_n)$ و $\mathbf{y} = (y_۱,\ldots,y_n)$ دو عنصر $\mathbb{R}^n$ باشند، فاصلهٔ $\mathbf{x}$ از $\mathbf{y}$، که گاهی به $d(\mathbf{x},\mathbf{y})$ نمایش داده می‌شود، برابر $|\mathbf{x}-\mathbf{y}|$ تعریف می‌شود. این تعریف با آنچه از بردارها در $\mathbb{R}^۲$ و $\mathbb{R}^۳$ می‌دانیم سازگار است. قضیه‌های هندسی اخیر را می‌توانیم با توجه به این تعریف به صورت‌های آشناتری نیز ارائه کنیم:

(۴–۶) نامساوی مثلث. برای $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}$ در $\mathbb{R}^n$:

$$|y-z| \leq |y-x| + |x-z|$$

(۴–۷) قضیهٔ فیثاغورس. هرگاه برای $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}$ در $\mathbb{R}^n$ داشته باشیم $(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \perp (\mathbf{x}-\mathbf{z})$، آنگاه:

$$|y-z|^۲ = |y-x|^۲ + |z-x|^۲$$

(۴–۸) قاعدهٔ کسینوس. برای هر $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}$ در $\mathbb{R}^n$ داریم:

$$|y-z|^۲ = |y-x|^۲ + |z-x|^۲ - ۲|y-x||z-x|\cos\measuredangle(y-x,z-x)$$

هر یک از این روابط با جایگزینی در رابطهٔ متناظر به‌دست می‌آید. در (۴—۶) بنویسید $\mathbf{u}=\mathbf{y}-\mathbf{x}$ و $\mathbf{v}=\mathbf{x}-\mathbf{z}$، آنگاه $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{y}-\mathbf{z}$. در مورد (۴—۷) و (۴—۸)، می‌نویسیم $\mathbf{u}=\mathbf{y}-\mathbf{x}$ و $\mathbf{v}=\mathbf{z}-\mathbf{x}$، آنگاه $\mathbf{u}-\mathbf{v}=\mathbf{y}-\mathbf{z}$.

(۴—۹) تصویر قائم روی یک راستا. یکی از موارد استفاده مهم ضرب داخلی در $\mathbb{R}^{2}$ و $\mathbb{R}^{3}$ محاسبهٔ تصویر قائم یک بردار روی راستایی است که یک بردار ناصفر دیگر پدید می‌آورد (شکل ۱).

شکل ۱

اگر $\mathbf{v}\neq\underline{0}$ و $\mathbf{u}$ در $\mathbb{R}^{3}$ باشند، $\mathbf{u}'$، تصویر قائم $\mathbf{u}$ بر راستای $\mathbf{v}$، برداری است که طول آن برابر $|\,|\mathbf{u}|\cos\measuredangle(\mathbf{u},\mathbf{v})|$ است (در حالتی که $\mathbf{u}=\underline{0}$، این طول برابر صفر در نظر گرفته می‌شود هرچند که زاویهٔ بین $\mathbf{u},\mathbf{v}$ تعریف نشده است)، $\mathbf{u}'$ مضربی از $\mathbf{v}$ است، $\mathbf{u}'=r\mathbf{u}$، و علامت r با علامت کسینوس زاویهٔ بین $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ یکی است. بدین ترتیب اگر $\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|}$ بردار واحد در جهت $\mathbf{v}$ باشد، می‌توان نوشت:

$$u'=|u|\cos\measuredangle(u,v)\frac{v}{|v|} \tag{10}$$

یا معادلاً:

$$u'=\frac{u\cdot v}{|v|^{2}}v \tag{11}$$

با توجه به این که عبارت‌های سمت راست (۱۱)همه در $\mathbb{R}^{n}$ معنی دارند، می‌توانیم تصویر قائم $\mathbf{u}$ بر $\mathbf{v}\neq\underline{0}$ در $\mathbb{R}^{n}$ را نیز به صورت (۱۱) تعریف کنیم. در حالت خاصی که $\mathbf{v}$ یک بردار واحد باشد:

$$u'=(u\cdot v)v \quad \text{اگر} \quad |v|=1 \tag{12}$$

مثال (پایهٔ متداول $\mathbb{R}^{n}$). $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ را مانند مثال صفحه ۸ جلسه قبل در نظر بگیرید، یعنی

$$e_1=(1,0,\ldots,0),e_2=(0,1,0,\ldots,0),\ldots,e_n=(0,\ldots,0,1)$$

www.ttnar.ir

هر $\mathbf{x} = (x_۱, \ldots, x_n)$ را می‌توان به صورت:

$$x = x_۱ e_۱ + \cdots + x_n e_n$$

نوشت. در واقع $x_i \mathbf{e}_i$ تصویر قائم $\mathbf{x}$ بر راستای $\mathbf{e}_i$ (محور i ام) است:

$$(x \cdot e_i) e_i = x_i e_i$$

پس می‌توان نوشت:

$$x = \sum_{i=۱}^{n} (x \cdot e_i) e_i \qquad (۱۳)$$

مجموعه $\{\mathbf{e}_۱, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ را پایه متداول $\mathbb{R}^n$ می‌نامند.

www.ttmar.ir

ضرب داخلی و هندسهٔ اقلیدسی در $\mathbb{R}^n$ (۲)

در پایان جلسهٔ گذشته مشاهده کردیم که اگر $e_1, \ldots, e_n$ پایهٔ متداول $\mathbb{R}^n$ باشد، هر عنصر x از $\mathbb{R}^n$ را می‌توان به صورت

$$x = \sum_{i=1}^{n} (x \cdot e_i) e_i \qquad (1)$$

نمایش داد. حال به یک تعمیم این مطلب اشاره می‌کنیم. به طور کلی، اگر $\{b_1, \ldots, b_k\}$ یک مجموعه در $\mathbb{R}^n$ باشد (در حالت خاص، پایه‌ای برای زیرفضای خطی E از $\mathbb{R}^n$)، $\{b_1, \ldots, b_k\}$ را متعامد می‌نامیم در صورتی که $b_i \perp b_j$ برای $i \neq j$. مجموعهٔ $\{b_1, \ldots, b_k\}$ را راست هنجار می‌نامیم در صورتی که متعامد باشد و به علاوه $|b_i| = 1$ برای $i = 1, \ldots, k$. به عنوان نمونه، $\{e_1, \ldots, e_n\}$ یک پایه راست هنجار برای $\mathbb{R}^n$ است و هرگاه اعداد حقیقی ناصفر $c_1, \ldots, c_n$ داده شده باشند، $\{c_1 e_1, \ldots, c_n e_n\}$ یک پایهٔ متعامد برای $\mathbb{R}^n$ است. حال فرض کنید $\{b_1, \ldots, b_k\}$ یک پایهٔ راست هنجار برای زیرفضای خطی E باشد و $x \in E$. داریم $x = \sum_{i=1}^{k} t_i b_i$. اگر ضرب داخلی دو طرف را با b_j، j ثابت، محاسبه کنیم، حاصل می‌شود $x \cdot b_j = \sum_{i=1}^{k} t_i (b_i \cdot b_j)$. از آنجا که پایه راست هنجار است، نتیجه می‌شود که $b_i \cdot b_j = 0$ اگر $i \neq j$ و $b_j \cdot b_j = 1$، پس $x \cdot b_j = t_j$. بنابراین عین فرمول (۱) در اینجا نیز برقرار است:

$$x = \sum_{i=1}^{k} (x \cdot b_i) b_i \qquad (2)$$

www.ttmar.ir

بدین ترتیب محاسبهٔ ضرایب نمایش نسبت به یک پایهٔ راست هنجار بسیار ساده است. به زودی یک روش عمومی برای ساختن پایه‌های راست هنجار برای زیرفضاهای خطی ارائه خواهیم کرد، ولی مقدمتاً گزارهٔ زیر را مطرح می‌کنیم:

(۱۰−۱) **گزاره.** اگر $\{B_1,\ldots,B_k\}$ یک مجموعهٔ متعامد متشکل از عناصر ناصفر $\mathbb{R}^n$ باشد، آنگاه $\{B_1,\ldots,B_k\}$ مستقل خطی است.

اثبات. فرض کنید $c_1B_1+\cdots+c_kB_k=\underline{0}$، باید ثابت کنیم همهٔ c_i ها صفر هستند. برای j ثابت و دلخواه، حاصل‌ضرب داخلی دو طرف رابطه را با B_j محاسبه می‌کنیم:

$$c_1(B_1\cdot B_j)+\cdots+(B_k\cdot B_j)=0$$

ولی $B_i\cdot B_j=0$ مگر وقتی که $i=j$ که در این صورت $B_j\cdot B_j=|B_j|^2$ ناصفر است زیرا که همه $B_1,\ldots,B_k$ ناصفر فرض شده‌اند. پس از رابطهٔ $c_j|B_j|^2=0$ نتیجه می‌گیریم که $c_j=0$. چون j در بین $1,\ldots,k$ دلخواه بود، حکم به اثبات می‌رسد. □

اکنون نشان می‌دهیم چگونه می‌توان به کمک هر پایهٔ داده شده برای زیرفضای خطی E، یک پایهٔ راست هنجار برای E ساخت:

(۱۰−۲) **روش گرام‑ اشمیت.** فرض کنید E یک زیرفضای خطی kـ بعدی از $\mathbb{R}^n$ است که متشکل از ترکیب‌های خطی $t_1A_1+\cdots+t_kA_k$ از مجموعهٔ مستقل خطی $\{A_1,\ldots,A_k\}$ می‌باشد. می‌خواهیم یک پایهٔ راست هنجار $\{B_1,\ldots,B_k\}$ برای E بسازیم. برای این کار نخست یک پایهٔ متعامد $\{B'_1,\ldots,B'_k\}$ برای E به‌دست می‌آوریم، سپس با قرار دادن $B_i=\frac{1}{|B'_i|}B'_i$، یک پایهٔ راست هنجار حاصل می‌شود.

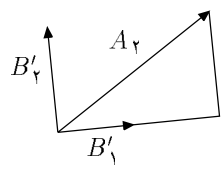
برای ساختن $\{B'_1,\ldots,B'_k\}$، گام به گام به صورت زیر عمل می‌کنیم:

www.tmar.ir

۱) قرار می‌دهیم $B'_1 = A_1$.

۲) برای ساختن B'_2، تصویر قائم A_2 بر $B'_1 = A_1$ را از A_2 کم می‌کنیم:

$$B'_2 = A_2 - \frac{A_2 \cdot B'_1}{B'_1 \cdot B'_1} B'_1 \qquad (3)$$



توجه کنید که $B'_1 \perp B'_2$ زیرا حاصل‌ضرب داخلی طرف راست با B'_1 صفر می‌شود. به علاوه $B'_2 \neq \underline{0}$ زیرا که اگر $B'_2 = \underline{0}$، آنگاه با توجه به این که $A_1 = B'_1$، یک رابطهٔ وابستگی خطی $A_2 - \frac{A_2 \cdot B'_1}{B'_1 \cdot B'_1} A_1$ در $\{A_1, A_2\}$ پدید می‌آید که خلاف فرض استقلال خطی $\{A_1, \ldots, A_k\}$، و در نتیجه استقلال خطی هر زیرمجموعهٔ آن، است. نتیجه این که بنابر گزارهٔ ۱۰—۱، $\{B'_1, B'_2\}$ مستقل خطی است. ضمناً توجه کنید که $\langle B'_1, B'_2 \rangle = \langle A_1, A_2 \rangle$ زیرا که $B'_1 = A_1$ و طبق (۳) می‌توان نقش A_2 و B'_2 را مبادله کرد.

۳) به طور استقرایی می‌توان به این روش ادامه داد. اگر $\{B'_1, \ldots, B'_j\}$ به‌دست آمده باشد، $j < k$، که عناصر آن ناصفر و دو به دو بر هم عمودند به طوری که $\langle B'_1, \ldots, B'_j \rangle = \langle A_1, \ldots, A_j \rangle$، B'_{j+1} را به روش زیر می‌سازیم:

$$B'_{j+1} = A_{j+1} - \frac{A_{j+1} \cdot B'_1}{B'_1 \cdot B'_1} B'_1 - \cdots - \frac{A_{j+1} \cdot B'_j}{B'_j \cdot B'_j} B'_j \qquad (4)$$

در واقع در (۴) تصویر قائم A_{j+1} بر تک تک $B'_1, \ldots, B'_j$ را از A_{j+1} کم کرده‌ایم. حاصل باید بر $B'_1, \ldots, B'_j$ عمود باشد که این موضوع با محاسبه حاصل‌ضرب داخلی دو طرف راست (۴) با B'_i، $i = 1, \ldots, j$، مشاهده می‌شود. همچنین توجه کنید که $B'_{j+1} \neq \underline{0}$ زیرا که طبق فرض

استقراء $\langle B'_1,\ldots,B'_j\rangle=\langle A_1,\ldots,A_j\rangle$، و $\{A_1,\ldots,A_j,A_{j+1}\}$ مستقل خطی است. و بالاخره مجموعهٔ متعامد $\{B'_1,\ldots,B'_{j+1}\}$ که همهٔ عناصرش ناصفرند، طبق ۱۰—۱ مستقل خطی است و مجدداً با استدلال مشابه گام ۲ داریم $\langle B'_1,\ldots,B'_{j+1}\rangle=\langle A_1,\ldots,A_{j+1}\rangle$.

بدین ترتیب با ادامهٔ روش، در k گام به مجموعهٔ $\{B'_1,\ldots,B'_k\}$ دست می‌یابیم که از عناصر ناصفر دو به دو بر هم عمود در E تشکیل شده است. چون تعداد عناصر برابر بعد E است و مجموعه طبق ۱۰—۱ مستقل خطی است، به یک پایهٔ متعامد برای E دست یافته‌ایم. □

مثال. تحقیق می‌کنیم که مجموعه $\{A_1,A_2,A_3\}$ در $\mathbb{R}^4$ که در آن $A_1=(0,0,-1,1)$، $A_2=(1,0,2,0)$، و $A_3=(1,1,3,0)$ یک مجموعهٔ مستقل خطی است. فرض کنید $c_1A_1+c_2A_2+c_3A_3=\underline{0}$، پس

$$(c_2+c_3,c_3-c_1+2c_2+3c_3,c_1)=(0,0,0,0)$$

نتیجه این که $c_3=0$ و $c_1=0$ که از اینها نتیجه می‌شود $c_2=0$، پس $\{A_1,A_2,A_3\}$ مستقل خطی است. E را زیرفضای متشکل از ترکیب‌های خطی A_1,A_2,A_3 می‌گیریم، $E=\langle A_1,A_2,A_3\rangle$. توجه کنید که $\{A_1,A_2,A_3\}$ متعامد نیست، مثلاً $A_1\cdot A_2=-2\neq 0$. روش گرام‌ـ اشمیت را به‌کار می‌گیریم:

$$B'_1=A_1=(0,0,-1,1)$$

$$B_2=(1,0,2,0)-\frac{(1,0,2,0)\cdot(0,0,-1,1)}{(0,0,-1,1)\cdot(0,0,-1,1)}(0,0,-1,1)=(1,0,2,0)+(0,0,-1,1)$$

یا $B'_2=(1,0,1,1)$. بالاخره:

$$\begin{aligned}B'_3 &= (1,1,3,0)-\tfrac{(1,1,3,0)\cdot(0,0,-1,1)}{(0,0,-1,1)\cdot(0,0,-1,1)}(0,0,-1,1)-\tfrac{(1,1,3,0)\cdot(1,0,1,1)}{(1,0,1,1)\cdot(1,0,1,1)}(1,0,1,1)\\ &= (1,1,3,0)+\tfrac{3}{2}(0,0,-1,1)-\tfrac{4}{3}(1,0,1,1)\\ &= (-\tfrac{1}{3},1,\tfrac{1}{6},\tfrac{1}{6})\end{aligned}$$

پس مجموعهٔ $\{(0,0,-1,1),(1,0,1,1),(-\frac{1}{3},1,\frac{1}{6},\frac{1}{6})\}$ یک پایهٔ متعامد برای E است، که می‌توان این مطلب را مستقیماً نیز تحقیق کرد. برای یافتن یک پایهٔ راست هنجار، هر یک از B'_i ها را در معکوس طول آن ضرب می‌کنیم:

$$B_1 = (0, 0, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}})$$

$$B_2 = (\tfrac{1}{\sqrt{3}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}})$$

$$B_3 = (-\tfrac{2}{\sqrt{42}}, \tfrac{6}{\sqrt{42}}, \tfrac{1}{\sqrt{42}}, \tfrac{1}{\sqrt{42}})$$

روش گرام‌ـ اشمیت در تکمیل یک مجموعهٔ متعامد (یا راست هنجار) به یک پایهٔ کامل نیز به‌کار گرفته می‌شود:

(۱۰−۳) تکمیل مجموعهٔ متعامد به پایه. فرض کنید $\{B_1, \dots, B_k\}$ یک مجموعهٔ راست هنجار از عناصر E باشد که $k < n$. نشان می‌دهیم چگونه می‌توان با استفاده از روش ۱۰−۲، عناصر $B_{k+1}, \dots, B_n$ از $\mathbb{R}^n$ یافت، به طوری که $\{B_1, \dots, B_n\}$ یک پایهٔ راست هنجار برای تمام $\mathbb{R}^n$ باشد. چون $k < n$، عنصری A_{k+1} از $\mathbb{R}^n$ یافت می‌شود که در $\langle A_1, \dots, A_k\rangle$ نیست. به روش گرام‌ـ اشمیت با کم کردن تصویر قائم A_{k+1} بر $B_1, \dots, B_k$، عنصری B'_{k+1} به‌دست می‌آوریم که $\{B_1, \dots, B_k, B'_k\}$ متعامد و مستقل خطی است:

$$B'_{k+1} = A_{k+1} - (A_{k+1} \cdot B_1)B_1 - \cdots - (A_{k+1} \cdot B_k)B_k$$

سپس با تعریف $B_{k+1} = \frac{1}{|B'_{k+1}|}B'_{k+1}$، یک مجموعه $\{B_1, \dots, B_k, B_{k+1}\}$ حاصل می‌شود که عناصر آن طول واحد دارند و دو به دو بر هم عمودند (یعنی یک مجموعهٔ راست هنجار). اگر $k + 1 = n$ که چون این مجموعه مستقل خطی به تعدادی برابر بعد $\mathbb{R}^n$ عضو دارد، خود یک پایهٔ راست هنجار برای $\mathbb{R}^n$ می‌شود، $\mathbb{R}^n = \langle B_1, \dots, B_{k+1}\rangle$. اگر $k + 1 < n$، عنصری A_{k+2} در $\mathbb{R}^n$ یافت می‌شود که در $\langle B_1, \dots, B_{k+1}\rangle$ نیست. به روش بالا، از A_{k+2}، عنصری B_{k+2} می‌سازیم که

www.tnar.ir

$\{B_1, \ldots, B_{k+2}\}$ راست هنجار است. اگر این عمل را $(n-k)$ بار انجام دهیم به یک مجموعه راست هنجار n عضوی $\{B_1, \ldots, B_n\}$ می‌رسیم که بنابراین یک پایه برای $\mathbb{R}^n$ خواهد بود.

(۱۰–۴) کاربرد در معادلهٔ زیرفضاها. زیرفضای مستوی E از $\mathbb{R}^n$ را یک ابرصفحه در $\mathbb{R}^n$ می‌نامیم در صورتی که بعد E برابر $(n-1)$ باشد. بدین ترتیب ابرصفحه‌های $\mathbb{R}$، نقاط $\mathbb{R}$ هستند، ابرصفحه‌های $\mathbb{R}^2$، خطوط راست در $\mathbb{R}^2$، و ابرصفحه‌های $\mathbb{R}^3$، صفحات واقع در $\mathbb{R}^3$ می‌باشند. حال یک ابرصفحهٔ E از $\mathbb{R}^n$ در نظر بگیرید. اگر E° انتقال‌یافتهٔ E به $\underline{0}$ باشد، می‌توان برای E° یک پایهٔ متعامد $\{B_1, \ldots, B_{n-1}\}$ طبق روش گرام‌ـ اشمیت در نظر گرفت. با استفاده از ۱۰–۳، عنصری C، $C \neq 0$، در $\mathbb{R}^n$ وجود دارد که بر $B_1, \ldots, B_{n-1}$ عمود است و در نتیجه $\{B_1, \ldots, B_{n-1}, C\}$ یک پایهٔ متعامد برای $\mathbb{R}^n$ می‌باشد. توجه کنید که شرطی لازم و کافی برای این که عنصر x از $\mathbb{R}^n$ در E° باشد این است که:

$$C \cdot x = 0 \tag{۵}$$

زیرا اگر بنویسیم $x = \sum_{i=1}^{n-1} c_i B_i + c_n C$، عناصر E° دقیقاً آن x هایی هستند که $c_n = 0$، پس اگر $x \in E$، آنگاه $B_n \cdot x = \sum_{i=1}^{n-1} c_i (B_1 \cdot B_n) = 0$ بالعکس اگر $C \cdot x = 0$، داریم

$$0 = C \cdot x = \sum_{i=1}^{n-1} c_i (C \cdot B_i) + c_n (C \cdot C) = c_n$$

حال فرض کنید ابرصفحه E به شکل $E = \langle p; B_1, \ldots, B_{n-1} \rangle$ توصیف شده است که $p = (p_1, \ldots, p_n)$ نقطه‌ای در E است. نقطهٔ $x = (x_1, \ldots, x_n)$ در E است اگر و تنها اگر $x - p \in E^\circ$، پس شرطی لازم و کافی برای $x \in E$ این است که

$$(x - p) \cdot C = 0 \tag{٦}$$

www.ttmar.ir

اگر n تایی C را به $(C_1, \dots, C_n)$ نمایش دهیم، (۶) معادل است با

$$C_1(x_1 - p_1) + \cdots + C_n(x_n - p_n) = 0 \qquad (۷)$$

این رابطه را معادلهٔ ابرصفحهٔ گذرا از p عمود بر C می‌نامند. نمایش متداول خط در صفحه و صفحه در فضای سه بعدی حالت‌های خاص (۷) هستند.

(۷) را می‌توان به زیرفضاهای مستوی ابعاد غیر از $(n-1)$ تعمیم داد. اگر E یک زیرفضای مستوی kــ بعدی به شکل $E = \langle p; B_1, \dots, B_k \rangle$ باشد که در آن $\{B_1, \dots, B_k\}$ یک پایهٔ متعامد برای انتقال‌یافتهٔ E به مبدأ، E°، است، طبق روش (۱۰-۳)، $\{B_1, \dots, B_k\}$ را به پایه‌ای متعامد $\{B_1, \dots, B_k, B_{k+1}, \dots, B_n\}$ برای $\mathbb{R}^n$ تکمیل می‌کنیم. با استدلالی مشابه آنچه برای ابرصفحه‌ها آمد، شرطی لازم و کافی برای این که نقطهٔ x در E باشد این خواهد بود که $x-p$ بر $B_{k+1}, \dots, B_n$ عمود باشد. پس E مجموعهٔ نقاطی است که در $(n-k)$ رابطه زیر صدق می‌کنند:

$$B_{k+1} \cdot (x-p) = 0, \dots, B_n \cdot (x-p) = 0 \qquad (۸)$$

مثال. می‌خواهیم در $\mathbb{R}^4$ فاصلهٔ نقطهٔ $(1,-1,0,2)$ را از خط راست $\frac{x_1}{2} = \frac{x_2-1}{1} = \frac{x_3+1}{-1} = \frac{x_4}{3}$ محاسبه کنیم. مقصود از فاصلهٔ نقطه از خط، کوتاهترین فاصلهٔ ممکن از نقطهٔ داده شده به نقاط روی خط است. توجه کنید که نقطهٔ داده شده، $(1,-1,0,2)$، روی خط داده شده قرار ندارد (چرا؟)، پس خط و نقطه روی یک صفحه مستوی منحصر به فرد قرار می‌گیرند و می‌توان به روال هندسهٔ عادی فرض کرد کوتاهترین فاصله با رسم عمود از نقطه بر خط به‌دست می‌آید (اثباتی مستقیم از این مطلب در تمرین زیر آمده است). با فرض این مطلب برای یافتن پای عمود از $(1,-1,0,2)$ به خط داده شده، معادلهٔ ابرصفحهٔ گذرا از $(1,-1,0,2)$ عمود بر $(2,1,-1,3)$ را می‌نویسیم و اشتراک آن را با خط پیدا می‌کنیم. نقطهٔ تقاطع نزدیکترین نقطهٔ خط به $(1,-1,0,2)$ است. طبق (۷)، معادله

www.ttmar.ir

ابرصفحه مورد نظر هست:

$$2(x_1 - 1) + (x_2 + 1) - x_3 + 3(x_4 - 2) = 0$$

حال با جایگزینی از $\frac{x_1}{2} = \frac{x_2 - 1}{1} = \frac{x_3 + 1}{-1} = \frac{x_4}{3}$ در رابطهٔ بالا برحسب x_1 داریم:

$$2(x_1 - 1) + (\frac{x_1}{2} + 2) + (\frac{x_1}{2} + 1) + 3(\frac{3}{2}x_1 - 2) = 0$$

$$x_1 = \frac{2}{3}$$

پس $x_2 = \frac{4}{3}$، $x_3 = -\frac{4}{3}$ و $x_4 = 1$، و نقطهٔ $(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, 1)$ نزدیکترین نقطه خط به $(1, -1, 0, 2)$ می‌باشد که فاصله‌اش برابر مقدار زیر است:

$$\sqrt{(1 - \frac{2}{3})^2 + (-1 - \frac{4}{3})^2 + (\frac{4}{3})^2 + (2 - 1)^2} = \frac{5}{\sqrt{3}}$$

تمرین. فرض کنید در $\mathbb{R}^n$، l خط گذرا از a به موازات A است، $a = (a_1, \ldots, a_n)$، $A = (A_1, \ldots, A_n) \neq \underline{0}$ و $p = (p_1, \ldots, p_n)$ یک نقطه در $\mathbb{R}^n$ است. نشان دهید به‌ازای نقطه منحصر به فردی q روی l نزدیکترین فاصله به p حاصل می‌شود و در واقع $q = a + \frac{(p-a)\cdot A}{A\cdot A}A$ (یعنی از نقطهٔ a روی l باید به اندازهٔ تصویر قائم $(p-a)$ روی A جدا کرد تا به نقطهٔ q رسید).

راهنمایی. معادلهٔ پارامتری خط l، $x_i = a_i + tA_i$، را در نظر بگیرید و مجذور فاصلهٔ p از نقطهٔ $a + tA$ را برحسب t بنویسید. عبارت به‌دست آمده، یک عبارت درجه ۲ برحسب t خواهد بود که با توجه به نقطهٔ مینیموم سهمی می‌توان t مطلوب را از آن محاسبه کرد.

www.ttmar.ir

نگاشت‌های خطی (۱)

وقتی $m \times n$ عدد حقیقی a_{ij}، $i = ۱, \ldots, m$، $j = ۱, \ldots, n$، را در یک قالب m در n، با m ردیف و n ستون به شکل زیر بنویسیم، یک ماتریس $m \times n$ (حقیقی) تعریف می‌شود:

$$\begin{bmatrix} a_{۱۱} & \cdots & a_{۱n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m۱} & & a_{mn} \end{bmatrix}$$

اعداد مندرج در ماتریس را درایه‌های ماتریس می‌نامند. مقصود از a_{ij} درایه‌ای است که در ردیف i ام و ستون j ام قرار دارد. گاهی اوقات A را به صورت $[a_{ij}]$، یا به طور کاملتر $[a_{ij}]_{i=۱,\ldots,m\ j=۱,\ldots,n}$ می‌نویسیم.

برای ماتریس‌های هم اندازه می‌توان عمل جمع، و عمل ضرب در اعداد حقیقی، همانند عملیات مشابه برای n تایی‌ها (بردارها) را تعریف کرد. اگر $A = [a_{ij}]$ و $B = [b_{ij}]$ دو ماتریس $m \times n$ باشند، مجموع دو ماتریس، $A + B = [c_{ij}]$ با فرمول

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \qquad (۱)$$

تعریف می‌شود. تحقیق صحت خواص زیر از تعریف سرراست است:

(۱۱—۱) خواص ابتدایی جمع ماتریس‌ها

(۱۱—۱—۱) تعویض‌پذیری (جابجایی). اگر A و B دو ماتریس $m \times n$ باشند، داریم

www.ttmar.ir

$A+B=B+A$.

(۱۱—۱—۲) شرکت‌پذیری. اگر A، B و C ماتریس‌های $m \times n$ باشند، داریم $A+(B+C) = (A+B)+C$.

(۱۱—۱—۳) عنصر بی‌اثر. ماتریس صفر $m \times n$ که همهٔ درایه‌های آن صفر است و به O نمایش می‌دهیم (یگانه ماتریس $m \times n$) دارای این ویژگی است که برای هر ماتریس $m \times n$، A، داریم $A+O=O+A=A$.

(۱۱—۱—۴) عنصر قرینه. برای $A=[a_{ij}]$، ماتریس $-A=[b_{ij}]$ که با $b_{ij}=-a_{ij}$ تعریف می‌شود (یگانه ماتریس) دارای این ویژگی است که $A+(-A)=(-A)+A=O$.

حال اگر $A=[a_{ij}]$ یک ماتریس $m \times n$ باشد و $r \in \mathbb{R}$، ماتریس $rA=[b_{ij}]$ با فرمول $b_{ij}=ra_{ij}$ تعریف می‌شود، یعنی همهٔ درایه‌های A در عدد r ضرب می‌شوند. تحقیق خواص زیر نیز سرراست است:

(۱۱—۲) خواص ابتدایی ضرب اعداد در ماتریس‌ها

(۱۱—۲—۱) $۱ \cdot A = A$ برای هر ماتریس A.

(۱۱—۲—۲) $(rs)A = r(sA)$ برای هر ماتریس A و هر زوج عدد حقیقی r, s.

(۱۱—۲—۳) $(r+s)A = rA + sA$ برای هر ماتریس A و هر زوج عدد حقیقی r, s.

(۱۱—۲—۴) $r(A+B) = rA + rB$ برای هر عدد حقیقی r و هر دو ماتریس هم اندازهٔ A و B.

علاوه بر عملیات بالا، مفهوم ضرب ماتریس‌ها نیز مابین ماتریس‌های اندازه‌های مناسب که توضیح

داده خواهد شد، تعریف می‌شود. اگر $A=[a_{ij}]$ یک ماتریس $m\times n$ و $B=[b_{ij}]$ یک ماتریس $n\times p$ باشد، ماتریس حاصل‌ضرب، $AB=[c_{ij}]$، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$c_{ij}=a_{i۱}b_{۱j}+a_{i۲}b_{۲j}+\cdots+a_{in}b_{nj} \qquad (۲)$$

توجه کنید که لازمهٔ تعریف حاصل‌ضرب این است که تعداد ستون‌های A برابر تعداد ردیف‌های B باشد، بنابراین عبارت (۲) معنی دارد و در واقع می‌توان c_{ij} را حاصل‌ضرب داخلی ردیف i ام ماتریس A به عنوان n تایی $(a_{i۱},\dots,a_{in})$ با ستون j ام ماتریس B، به عنوان n تایی $(b_{j۱},\dots,b_{nj})$ تلقی کرد. انگیزهٔ این تعریف را در جلسهٔ آینده بررسی خواهیم کرد.

(۱۱—۳) خواص ابتدایی ضرب ماتریس‌ها

(۱۱—۳—۱) شرکت‌پذیری. A، B و C ماتریس‌های دارای اندازهٔ به ترتیب $m\times n$، $n\times p$ و $p\times q$ هستند. در این صورت:

$$(AB)C=A(BC)$$

(۱۱—۳—۲) قانون پخشی. داریم

$$(A+B)C=(AC)+(AB) \quad , \quad A(B+C)=(AB)+(AC)$$

مشروط بر این که اندازهٔ ماتریس‌های فوق برای عملیات ذکر شده مناسب باشد.

(۱۱—۳—۳) ماتریس واحد $n\times n$، $I_n=[\delta_{ij}]$ بدین صورت تعریف می‌شود که:

$$\delta_{ij}=\begin{cases} ۱ & i=j \\ ۰ & i\neq j \end{cases}$$

برای هر ماتریس $m \times n$، A، و هر ماتریس $n \times p$، B، داریم:

$$A \cdot I_n = A \quad , \quad I_n \cdot B = B$$

اثبات (۱۱—۳—۱) را ارائه می‌کنیم، دوتای دیگر ساده‌ترند و تحقیق آنها به خواننده واگذار می‌شود. برای (۱۱—۳—۱) بنویسید $A = [a_{ij}]$، $B = [b_{ij}]$، $C = [c_{ij}]$، $AB = [d_{ij}]$، $BC = [e_{ij}]$، $(AB)C = [x_{ij}]$ و $A(BC) = [y_{ij}]$. طبق تعریف حاصل‌ضرب ماتریس‌ها عمل می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
x_{ij} = &= \sum_{i=1}^{p} d_{ik}c_{kj} \\
&= \sum_{k=1}^{p} (\sum_{l=1}^{n} a_{il}b_{lk})c_{kj} \\
&= \sum_{k=1}^{p} \sum_{l=1}^{n} a_{il}b_{lk}c_{kj} \\
&= \sum_{l=1}^{n} a_{il}(\sum_{k=1}^{p} b_{lk}c_{kj}) \\
&= \sum_{l=1}^{n} a_{il}e_{lj} \\
&= y_{ij}
\end{aligned}$$

و حکم به اثبات می‌رسد.

در اینجا قابل ذکر است که اگر AB تعریف شده باشد، لزومی ندارد BA نیز تعریف شدنی باشد زیرا که تعریف AB مستلزم این است که تعداد ستون‌های A برابر تعداد ردیف‌های B باشد، و این حکمی در مورد برابری تعداد ستون‌های B با تعداد ردیف‌های A نمی‌کند. حتی اگر AB و BA هر دو تعریف‌شدنی باشند، لزومی ندارد هر دو یک اندازه باشند، مثلاً اگر A یک ماتریس $n \times 1$ و B یک

ماتریس $n \times ۱$ باشند، $n > ۱$،

$$A = [a_۱ \ \dots \ a_n] \quad , \quad B = \begin{bmatrix} b_۱ \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

AB یک ماتریس ۱×۱، با تک درایهٔ $\sum_{i=۱}^{n} a_i b_i$ می‌شود، در حالی که BA یک ماتریس $n \times n$ است که درایهٔ ردیف i ام و ستون j ام آن عبارت است از $b_j a_i$. حتی اگر A و B هر دو $n \times n$، با $n \geq ۲$، باشند، لزومی بر تساوی AB و BA نیست، مثلاً:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

البته در مورد ماتریس I_n و هر ماتریس $n \times n$، A، از ۱۱—۳—۳ نتیجه می‌شود که $AI_n = I_n A$ $(A =)$.

توجه کنید که برای یک nـ تایی مرتب از اعداد، مثلاً $x = (x_۱, \dots, x_n)$، اکنون سه نمایش ممکن داریم، یکی به صورت بالا که معمولاً تجسم برداری دارد، دیگر به صورت یک ماتریس $n \times ۱$، $[x_۱ \ \dots \ x_n]$ و بالاخره به صورت یک ماتریس $۱ \times n$، $\begin{bmatrix} x_۱ \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$. اغلب لازم است که بین این سه نمایش تمایز قائل شویم تا ابهامی در عملیات حاصل نشود. برای این منظور، هرگاه n تایی $x = (x_۱, \dots, x_n)$ به صورت یک ماتریس $n \times ۱$ نوشته شود، آن را به $|x\rangle$ نمایش می‌دهیم، و هرگاه به صورت یک ماتریس $۱ \times n$ نمایش داده شود، آن را به $\langle x|$ نمایش می‌دهیم.

با این مقدمه در مورد ماتریس‌ها، به موضوع اصلی درس که "نگاشت‌های خطی" است می‌پردازیم. کلمات "تابع"، "نگاشت" و "تبدیل" در اینجا به صورت کاملاً مترادف به‌کار خواهند رفت هر چند که به لحاظ تاریخی گاهی تصاویر ذهنی متفاوتی از این کلمات القاء می‌شود. اگر S و T دو مجموعه باشند، مقصود از یک تابع (= نگاشت، = تبدیل) از S به T، قانونی f است که به هر عنصر s از S، عنصر مشخصی $f(s)$ از T نسبت می‌دهد. می‌نویسیم $f : S \longrightarrow T$. در گذشته کلمهٔ "تابع" معمولاً وقتی به‌کار می‌رفته است که T برابر $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ باشد، "تبدیل" در حالت $S = T$، یعنی تابع‌های از یک مجموعه

به خود آن، و "نگاشت" برای تابع‌های $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$، m, n بزرگتر از ۱، به‌کار می‌رفته است. ما چنین تمایزهایی قایل نمی‌شویم. برای تابع $f : S \longrightarrow T$، مجموعهٔ S را دامنه (= قلمرو)، و مجموعهٔ T را بُرد می‌نامیم. مجموعه $\{f(s) \mid s \in S\}$ که یک زیرمجموعهٔ T است، تصویر f، یا تصویر S تحت f خوانده می‌شود. در واقع برای هر زیرمجموعهٔ E از S، تصویر E تحت f، که به $f(E)$ نمایش داده می‌شود به صورت:

$$f(E) = \{f(s) \mid s \in E\}$$

تعریف می‌شود. تابع f را یک به یک می‌نامیم در صورتی که $f(s_۱) = f(s_۲)$ همواره نتیجه دهد $s_۱ = s_۲$، و f پوشا می‌نامیم اگر $f(S) = T$. برای تابع‌های یک به یک و پوشا، $f : S \longrightarrow T$، تابعی به نام وارون f (یا معکوس f) به صورت زیر تعریف می‌شود که به $f^{-۱} : T \longrightarrow S$ نمایش می‌دهیم. هرگاه $t \in T$، چون f پوشا است، عنصری s از S وجود دارد که $f(s) = t$. به علاوه چون f یک به یک فرض شده است، چنین عنصر s به طور منحصر به فرد تعیین می‌شود، پس $f^{-۱}$ به صورت قانونی بی‌ابهام $f^{-۱}(t) = s$ تعریف شدنی است و داریم:

$$f \circ f^{-۱} = ۱_T \quad , \quad f^{-۱} \circ f = ۱_S$$

که مقصود از ۱_X تابع همانی مجموعهٔ X است، $۱_X(x) = x$ برای هر $x \in X$.

نماد $f^{-۱}(t)$ حتی وقتی $f^{-۱}$ تعریف شدنی نباشد نیز به‌کار می‌رود. مقصود از $f^{-۱}(t)$ مجموعهٔ نقاط S است که تحت f به t فرستاده (= نگاشته) می‌شوند، یعنی:

$$f^{-۱}(t) = \{s \in S \mid f(s) = t\}$$

$f^{-۱}(t)$ را گاهی مجموعهٔ تراز منسوب به t می‌خوانیم. به طور کلی، اگر Y زیرمجموعه‌ای از T باشد، زیرمجموعهٔ $f^{-۱}(Y)$ (تصویر وارون Y) یک زیرمجموعهٔ S است که بدین صورت تعریف می‌شود:

$$f^{-۱}(Y) = \{s \in S \mid f(s) \in Y\}$$

موضوع اصلی درس ما بررسی تابع‌های $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ (یا به طور کلی‌تر، تابع‌های $f:S\longrightarrow \mathbb{R}^m$، $S\subset \mathbb{R}^n$) است. بدین ترتیب چنین تابع f به هر n تایی مرتب از اعداد حقیقی در دامنه، یک m تایی مرتب از اعداد حقیقی نسبت می‌دهد:

$$f(x_۱,\dots,x_n)=(y_۱,\dots,y_m) \qquad (۳)$$

هر y_i وابسته به $(x_۱,\dots,x_n)$ است، پس در واقع ارائه f همانند ارائه m تابع $f_۱,\dots,f_m$، هر یک از $\mathbb{R}^n$ به $\mathbb{R}$ است، $f_i(x_۱,\dots,x_n)=y_i$، $i=۱,\dots,m$. (۳) را به صورت زیر نیز می‌نویسیم:

$$\begin{cases} f_۱(x_۱,\dots,x_n)=y_۱ \\ \quad \cdots \\ f_m(x_۱,\dots,x_n)=y_m \end{cases} \qquad (۴)$$

گاهی می‌نویسیم $f=(f_۱,\dots,f_m)$ و هر f_i را یک مؤلفه f می‌نامیم.

تابع $f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m$ در (۳) یا (۴) را خطی می‌نامیم در صورتی که هر $f_i(x_۱,\dots,x_n)$ یک عبارت همگن درجه اول نسبت به $x_۱,\dots,x_n$ باشد، یعنی:

$$\begin{cases} y_۱=a_{۱۱}x_۱+a_{۱۲}x_۲+\cdots+a_{۱n}x_n \\ \quad \cdots \quad \cdots \\ y_m=a_{m۱}x_۱+a_{m۲}x_۲+\cdots+a_{mn}x_n \end{cases} \qquad (۵)$$

مقصود از "همگن" این است که همهٔ جملات سمت راست از یک درجه‌اند، در اینجا همه از درجه ۱، بالاخص جملهٔ ثابت وجود ندارد. اگر هر عبارت سمت راست را فقط درجه ۱ در نظر بگیریم و محدودیت همگن را حذف کنیم، یک عدد ثابت نیز ممکن است به هر جمله افزوده شود. این گونه تابع‌ها را مستوی می‌نامیم:

$$\begin{cases} y_۱=a_{۱۰}+a_{۱۱}x_۱+\cdots+a_{۱n}x_n \\ \quad \cdots \quad \cdots \\ y_m=a_{m۰}+a_{m۱}x_۱+\cdots+a_{mn}x_n \end{cases} \qquad (٦)$$

مقدار تابع مستوی (۶) از انتقال مقدار تابع (۵) با mــ تایی ثابت $(a_{10},\dots,a_{m0})$ به‌دست می‌آید و نیازی به بررسی جداگانهٔ تابع‌های مستوی نیست.

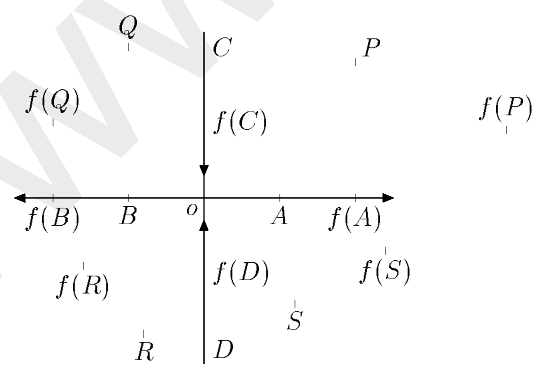
(۱۱ــ۴) چند مثال

(۱۱ــ۴ــ۱) هر تابع خطی $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ به شکل $f(x)=mx$ است که در آن $m\in\mathbb{R}$ یک عدد حقیقی داده شده است. تابع‌های مستوی $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ به شکل $g(x)=mx+b$، m و b اعداد حقیقی داده شده، می‌باشند.

(۱۱ــ۴ــ۲) $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$f(x_1,x_2)=(2x_1,\frac{1}{2}x_2)$$

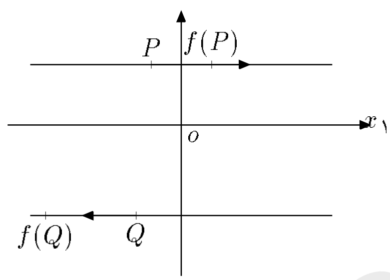
هر دو عبارت $2x_1$ و $\frac{1}{2}x_2$ درجه ۱ همگن نسبت به (x_1,x_2) هستند، پس f خطی است. عملکرد این تابع بدین صورت است که فاصله هر نقطه را از محور x_2 به دو برابر افزایش می‌دهد و فاصلهٔ آن از محور x_1 را نصف می‌کند. محور x_1 با ضریب تجانس ۲ به خود آن نگاشته می‌شود (انبساط با ضریب ۲)، و محور x_2 با ضریب تجانس $\frac{1}{2}$ روی خود منقبض می‌شود. (شکل ۱)



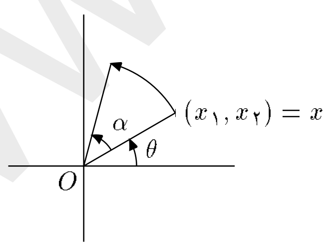
(۱۱—۴—۲) $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x_1,x_2)=(x_1+x_2,x_2)$$

f خطی است. توجه کنید که هر خط راست افقی $x_2=c$ به خود آن نگاشته می‌شد ولی هر نقطه روی این خط به اندازه مقدار c انتقال افقی می‌یابد. بدین ترتیب خطوط راست افقی بالای محور x_1 به طرف راست و خطوط افقی پایین محور x_1 به سمت چپ روی خود می‌لغزند. نقاط محور x_1 سر جای خود ثابت می‌مانند.



(۱۱—۴—۳) (دوران حول $\underline{0}$ در $\mathbb{R}^2$) دوران حول $\underline{0}$ در $\mathbb{R}^2$ با زاویهٔ α را در نظر بگیرید. اگر $x=(x_1,x_2)$ نقطه‌ای $\neq \underline{0}$ در صفحه باشد، نمایش آن به صورت قطبی در نظر بگیرید: $x_1=|x|\cos\theta$، $x_2=|x|\sin\theta$.



اگر دوران زاویهٔ α حول $\underline{0}$ را به $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ نمایش دهیم، نمایش قطبی $f(x_1,x_2)$ می‌شود:

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2) &= (|x|\cos(\theta+\alpha),|x|\sin(\theta+\alpha)) \\ &= (|x|\cos\theta\cos\alpha-|x|\sin\theta\sin\alpha,|x|\sin\theta\cos\alpha+|x|\cos\theta\sin\alpha) \\ &= ((\cos\alpha)x_1-(\sin\alpha)x_2,(\sin\alpha)x_1+(\cos\alpha)x_2) \end{aligned}$$

www.ttnar.ir

هر یک از دو مؤلفهٔ f یک تابع درجه یک همگن نسبت به $(x_{۱}, x_{۲})$ است، پس f خطی است.

(۱۱—۴—۴) (تصویر قائم روی یک زیرفضای مختصاتی) فرض کنید $n > m$ و $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ را به صورت زیر تعریف کنید

$$f(x_{۱}, \ldots, x_n) = (x_{۱}, \ldots, x_m)$$

این تابع خطی است و عملکرد آن این است که نقطهٔ $(x_{۱}, \ldots, x_n)$ را به $(x_{۱}, \ldots, x_m)$، متشکل از m مؤلفهٔ اول آن، می‌نگارد. مثلاً برای $n = ۳$ و $m = ۲$، $f(x, y, z) = (x, y)$ تصویر قائم (x, y, z) روی صفحهٔ xy است.

(۱۱—۴—۵) $f : \mathbb{R}^{۲} \longrightarrow \mathbb{R}^{۴}$ را به صورت زیر تعریف کنید:

$$f(x_{۱}, x_{۲}) = (x_{۱}, x_{۱} - x_{۲}, ۲x_{۱} + x_{۲}, -x_{۲})$$

چون هر مؤلفه f یک عبارت درجهٔ یک همگن نسبت به $(x_{۱}, x_{۲})$ است، این تابع خطی است.

(۱۱—۴—٦) $f : \mathbb{R}^{۳} \longrightarrow \mathbb{R}^{۲}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f(x_{۱}, x_{۲}, x_{۳}) = (x_{۱} - x_{۲} + x_{۳}, x_{۱}x_{۲})$$

این تابع خطی نسبت زیرا مؤلفه دوم f، یعنی $x_{۱}x_{۲}$ از درجهٔ یک نیست.

اکنون ارتباط میان دو بحث این جلسه را بیان می‌کنیم. توجه کنید که می‌توان (۵) را به صورت زیر نوشت:

$$\begin{bmatrix} y_{۱} \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & \ldots & a_{۱n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m۱} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{۱} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad (۷)$$

یا به طور موجز:

$$|y\rangle = A|x\rangle \qquad (۸)$$

یعنی محاسبهٔ مقدار یک تابع خطی بدین صورت حاصل می‌شود که ضرایب a_{ij} در (۵) را در یک ماتریس $m \times n$ قرار می‌دهیم و حاصل‌ضرب این ماتریس را با ستون $|x\rangle$ محاسبه می‌کنیم. بدین ترتیب یک تناظر یک به یک میان تابع‌های خطی $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ و ماتریس‌های $m \times n$ ایجاد می‌شود.

برای مثال‌های خطی بالا، ماتریس‌های مربوط به ترتیب از بالا به پایین عبارتند از:

$$[m]$$

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & \frac{۱}{۲} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ۱ & & O & \\ & \ddots & & O \\ O & & ۱ & \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & -۱ \\ ۲ & ۱ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}$$

با نگاه کردن به ماتریس متناظر به یک تابع خطی می‌توان عمل تابع خطی بر اعضای پایهٔ متداول، یعنی $e_۱, \ldots, e_n$، را فوراً دریافت. توجه کنید که اگر ماتریس $A = [a_{ij}]$ از سمت چپ در ستون $|e_j\rangle$ ضرب شود، ستون jـ ام ماتریس $\begin{bmatrix} a_{۱j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$ به‌دست می‌آید. بدین ترتیب، برای نوشتن ماتریس مربوط به یک تابع خطی f، کافی است $f(e_۱)$، ... ، $f(e_n)$ را محاسبه کنیم و نتایج حاصل را به ترتیب در ستون‌های اول تا n ام درج کنیم.

نگاشت‌های خطی (۲)

مثال‌هایی که از تابع‌های خطی در جلسهٔ گذشته ارائه کردیم از تنوع قابل ملاحظه‌ای برخوردار بود و ممکن است این احساس را ایجاد کرده باشد که وجه تشابه چندانی میان تابع‌های خطی موجود نیست. در چند جلسهٔ آینده، برعکس، خواهیم دید که تابع‌های خطی از بعضی وجوه شباهت‌های فوق‌العاده‌ای به هم دارند. بررسی این خواص دست‌آوردهای مهمی برای ما خواهد داشت. یکی از این دستاوردها امکان بحث کامل در مورد وجود و نظام جواب‌های یک دستگاه m معادلهٔ n مجهولی درجه اول است که به آن خواهیم پرداخت. دستاوردی دیگر زمینه‌سازی برای بررسی توابع غیرخطی در باقیماندهٔ درس است که در آنجا، آنچه در چند جلسهٔ آینده در مورد تابع‌های خطی خواهیم دید رهنمودی مهم خواهد بود. در این جلسه زمینه را برای مطالعه تابع‌های خطی فراهم می‌کنیم. کار عمدهٔ ما بازبینی بعضی تعاریف و مفاهیمی خواهد بود که در جلسات قبل مطرح شده‌اند و اکنون آنها را به صورتی قابل استفاده در می‌آوریم.

(۱۲–۱) گزاره. تابع $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ خطی است در صورتی که واجد دو شرط زیر باشد:

الف) برای هر x و x' در $\mathbb{R}^n$، $f(x+x')=f(x)+f(x')$.

ب) برای هر x در $\mathbb{R}^n$ و هر عدد حقیقی r، $f(rx)=rf(x)$.

www.ttmar.ir

اثبات. اگر $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ خطی باشد، ماتریس متناظر با آن، A، را در نظر می‌گیریم. عملکرد f روی عناصر x از $\mathbb{R}^n$ به صورت:

$$|f(x)\rangle = A|x\rangle \tag{۱}$$

است. بنابراین:

$$\begin{aligned} |f(x+x')\rangle &= A|x+x'\rangle \\ &= A|x\rangle + A|x'\rangle && \text{قانون پخشی ضرب ماتریسی} \\ &= |f'(x)\rangle + |f(x')\rangle \end{aligned}$$

پس (الف) برقرار است. همین طور:

$$\begin{aligned} |f(rx)\rangle &= A|rx\rangle \\ &= r(A|x\rangle) \end{aligned}$$

و (ب) برقرار است. بالعکس فرض کنید شرط‌های (الف) و (ب) برای تابع $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ برقرارند. باید نشان دهیم ماتریسی $m \times n$، A، وجود دارد که برای هر $x \in \mathbb{R}^n$، داریم $|f(x)\rangle = A|x\rangle$. از بحث پایان جلسهٔ قبل به یاد می‌آوریم که ستون‌های ماتریس یک تابع خطی به ترتیب از مؤلفه‌های $f(e_1)$ تا $f(e_n)$ تشکیل می‌شوند، بنابراین نامزد واضحی برای ماتریس مورد نظر A وجود دارد که باید در مورد آن ادعای $|f(x)\rangle = A|x\rangle$ را ثابت کرد. ماتریس A را این گونه در نظر می‌گیریم که ستون jـ‌ام آن، برای $j = 1, \ldots, n$، برابر $|f(e_j)\rangle$ باشد. برای $x = (x_1, \ldots, x_n) = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$ داریم:

$$\begin{aligned} |f(x)\rangle &= |f(x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n)\rangle \\ &= |x_1 f(e_1) + \cdots + x_n f(e_n)\rangle && \text{طبق (الف) و (ب)} \\ &= |x_1 f(e_1)\rangle + \cdots + |x_n f(e_n)\rangle \\ &= x_1 |f(e_1)\rangle + \cdots + x_n |f(e_n)\rangle \\ &= x_1 (A|e_1\rangle) + \cdots + x_n (A|e_n\rangle) \\ &= A|x_1 e_1\rangle + \cdots + A|x_n e_n\rangle \\ &= A|x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n\rangle && \text{قانون پخشی ضرب ماتریسی} \\ &= A|x\rangle \end{aligned}$$

www.ttmar.ir

و حکم به اثبات می‌رسد. $\square$

بدین ترتیب از این پس برای استفاده از خطی بودن یک تابع به‌کارگیری دو خاصیت (الف) و (ب) بالا کافی است و نیازی به نوشتن صریح ماتریس مربوط نیست.

در جلسهٔ قبل ضرب ماتریسی را تعریف کردیم. این تعریف در نظر اول دور از ذهن و فاقد انگیزهٔ مشخص به نظر می‌رسد، ولی گزاره زیر نشان می‌دهد که حاصل‌ضرب دو ماتریس در واقع بیانگر ترکیب تابع‌های خطی متناظر است.

(۱۲—۲) گزاره. تابع‌های خطی $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ با ماتریس A و $g : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^p$ با ماتریس B داده شده‌اند. در این صورت ماتریس $g \circ f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ برابر BA است.

اثبات. مقدمتاً توجه کنید که $g \circ f$ در واقع یک تابع خطی است که این مطلب را می‌توان با استفاده از گزاره ۱۲—۱ ملاحظه کرد:

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x + x') &= g(f(x + x')) \\ &= g(f(x) + f(x')) && \text{چون } f \text{ خطی است} \\ &= g(f(x)) + g(f(x')) && \text{چون } g \text{ خطی است} \\ &= (g \circ f)(x) + (g \circ f)(x')\end{aligned}$$

به همین روش

$$\begin{aligned}(g \circ f)(rx) &= g(f(rx)) \\ &= g(rf(x)) && \text{چون } f \text{ خطی است} \\ &= rg(f(x)) && \text{چون } g \text{ خطی است} \\ &= r(g \circ f)(x)\end{aligned}$$

حال به اثبات ادعای گزاره می‌پردازیم. ماتریس $g \circ f$ را به C نمایش می‌دهیم. داریم:

$$\begin{aligned} C|x\rangle &= |(g \circ f)(x)\rangle \\ &= |g(f(x))\rangle \\ &= B|f(x)\rangle \\ &= B|(A|x\rangle)\rangle \\ &= BA|x\rangle \qquad \text{بنابر ویژگی شرکت‌پذیری ضرب ماتریسی} \end{aligned}$$

پس $C|x\rangle = BA|x\rangle$. اگر حاصل‌ضرب دو ماتریس $p \times n$ در هر ستون n تایی برابر باشد، دو ماتریس برابرند زیرا که با گرفتن $x = e_j$، $j = ۱, \ldots, n$، کلیهٔ ستون‌های ماتریس‌ها به‌دست می‌آیند. □

بالاخره ضابطهٔ ساده‌ای برای تحقیق کردن این مطلب که آیا یک زیرمجموعهٔ E از $\mathbb{R}^n$ یک زیرفضای خطی است ارائه می‌کنیم.

(۱۲–۳) گزاره. زیرمجموعهٔ ناتهی E از $\mathbb{R}^n$ یک زیرفضای خطی $\mathbb{R}^n$ است اگر و تنها اگر دو شرط زیر برقرار باشند:

الف) هرگاه x و x' در E باشند، آنگاه $x + x'$ نیز در E است.

ب) هرگاه x در E باشد و $r \in \mathbb{R}$، آنگاه rx نیز در E است.

اثبات. نخست نشان می‌دهیم هر زیرفضای خطی E از $\mathbb{R}^n$ از دو ویژگی فوق برخوردار است. زیرفضای خطی E را به شکل $\langle A_۱, \ldots, A_k\rangle$، یعنی مجموعهٔ ترکیب‌های خطی $\{A_۱, \ldots, A_k\}$، که یک مجموعهٔ مستقل خطی عناصر E است، در نظر می‌گیریم. پس x و x' به شکل $x = t_۱A_۱ + \cdots + t_kA_k$ و $x' = t'_۱A_۱ + \cdots + t'_kA_k$ هستند. بنابراین داریم:

$$x + x' = (t_۱ + t'_۱)A_۱ + \cdots + (t_k + t'_k)A_k$$

و $x, x' \in E$. همین طور:

$$r(t_۱A_۱ + \cdots + t_kA_k) = (rt_۱)A_۱ + \cdots + (rt_k)A_k$$

و $rx \in E$.

بالعکس فرض کنید زیرمجموعهٔ ناتهی E از $\mathbb{R}^n$ واجد شرط‌های (الف) و (ب) باشد، نشان می‌دهیم E یک زیرفضای خطی است، یعنی برابر مجموعهٔ ترکیب‌های خطی یک مجموعهٔ مستقل خطی می‌باشد. قطعاً داریم $\underline{\circ} \in E$ زیرا که E ناتهی است یعنی عنصری x در E هست، پس طبق (ب) $\circ \cdot x = \underline{\circ}$ در E قرار دارد.

اگر E عضو دیگری نداشته باشد، یعنی $E = \{\underline{\circ}\}$ که طبق قرارداد E یگانه زیرفضای خطی صفر بعدی $\mathbb{R}^n$ است. اگر عضو دیگری $A_1 \neq \underline{\circ}$ در E باشد، طبق (ب)، همه مضارب A_1، یعنی rA_1 ها، $r \in \mathbb{R}$، در E هستند. حال اگر عضو دیگری در E نباشد، یعنی $E = \langle A_1 \rangle$، E یک زیرفضای خطی یک بعدی است. در غیر این صورت عنصری A_2 در E وجود دارد که مضرب A_1 نیست، و در نتیجه $\{A_1, A_2\}$ مستقل خطی است. طبق (الف) و (ب)، همه ترکیب‌های خطی A_1 و A_2 در E قرار دارند، یعنی $\langle A_1, A_2 \rangle \subset E$.

اگر $\langle A_1, A_2 \rangle$ همهٔ E باشد که حکم ثابت شده است، و گرنه، عنصری A_3 در E وجود دارد که $\{A_1, A_2, A_3\}$ مستقل خطی است. استدلال بالا را مجدداً به‌کار می‌گیریم. همهٔ ترکیب‌های خطی A_1, A_2, A_3، طبق (الف) و (ب)، باید در E باشند. در صورتی که $\langle A_1, A_2, A_3 \rangle$ همه E نباشد، عنصری A_4 انتخاب می‌کنیم و غیره. این استدلال باید در حداکثر n گام به نتیجه رسد زیرا در $\mathbb{R}^n$ یک مجموعهٔ مستقل خطی نمی‌تواند بیش از n عضو داشته باشد. بنابراین اگر E فقط از $\underline{\circ}$ تشکیل نشده باشد، در گامی k، $1 \leq k \leq n$، به این نتیجه می‌رسیم که $E = \langle A_1, \ldots, A_k \rangle$ و حکم به اثبات می‌رسد. □

توجه کنید که این گزاره نوعی تایید برقرار بودن ایدهٔ شهودی "مسطح بودن" زیرفضاهای خطی است. اگر نقطه‌ای x در E باشد خط گذرا از $\underline{\circ}$ و x به تمامی در E واقع است، و اگر x و x' در E باشند، صفحه گذرا از $\underline{\circ}$، x و x' در E واقع است. طبق قسمت دوم گزاره، اگر این دو شرط برای E برقرار باشند می‌توان حکم کرد که E متشکل از همهٔ ترکیب‌های خطی k عضو $\mathbb{R}^n$ است.

نگاشت‌های خطی (۳)

با مقدمات جلسه قبل اکنون آماده هستیم بررسی عمومی توابع خطی

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \tag{۱}$$

را آغاز کنیم. آنچه در زیر خواهد آمد در رابطه با تابع خطی (۱) خواهد بود.

(۱۳—۱) تحت اثر f، $\underline{0} \in \mathbb{R}^n$ به $\underline{0} \in \mathbb{R}^m$ نگاشته می‌شود.

اثبات. می‌نویسیم $\underline{0} = 0 \cdot x$ که x عنصری دلخواه از $\mathbb{R}^n$ است. داریم:

$$f(\underline{0}) = f(0 \cdot x) = 0 \cdot f(x) = \underline{0}$$

(۱۳—۲) تحت اثر f، تصویر هر زیرفضای خطی (به ترتیب هر زیرفضای مستوی) یک زیرفضای خطی (به ترتیب یک زیرفضای مستوی) است.

اثبات. نخست حالت یک زیرفضای خطی E را در نظر بگیرید، باید ثابت کنیم $f(E) = \{f(x) \mid x \in E\}$ یک زیرفضای خطی $\mathbb{R}^m$ است. با استفاده از ضابطه (۱۲—۱) جلسه قبل عمل می‌کنیم. اگر y و y' دو عنصر $f(E)$ باشند، داریم $y = f(x)$ و $y' = f(x')$ برای x و x' مناسب در

www.ttnar.ir

E. پس

$$y+y=f(x)+f(x')=f(x+x')$$

چون $x,x'\in E$، طبق ضابطهٔ (۱۲—۳) جلسهٔ قبل، $x+x'\in E$، پس $y+y'\in f(E)$ به همین ترتیب اگر $r\in\mathbb{R}$،

$$\begin{aligned} ry &= rf(x) \\ &= f(rx) \qquad \text{طبق (۱۲—۱)} \end{aligned}$$

و $rx\in E$ طبق ۱۲—۳، پس $ry\in f(E)$. بدین ترتیب ثابت کرده‌ایم که تصویر یک زیرفضای‌خطی، خود یک زیرفضای خطی است. حال هر زیرفضای مستوی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$a+E=\{a+x \mid x\in E\}$$

که E یک زیرفضای خطی و a یک عنصر داده شده از E است. بنابراین هر عنصر تصویر به شکل $f(a+x)=f(a)+f(x)$ می‌باشد. چون $f(x)\in f(E)$ و در بالا دیدیم که $f(E)$ یک زیرفضای خطی است، تصویر زیرفضای مستوی بالا برابر انتقال‌یافتهٔ $f(E)$ توسط عنصر ثابت $f(a)$ است، پس مستوی است. □

توجه کنید که در استدلال بالا، در صورتی که $f(a)\in f(E)$، تصویر زیرفضای مستوی یک زیرفضای‌خطی خواهد بود که تناقض نیست زیرا که زیرفضاهای خطی خود نوعی زیرفضای مستوی هستند. ضمناً اگر دو زیرفضای موازی و همبعد $a+E$ و $b+E$ در $\mathbb{R}^n$ را در نظر بگیریم، طبق آنچه در بالا مشاهده شد، تصویر آنها به ترتیب $f(a)+f(E)$ و $f(b)+f(E)$ خواهد بود، یعنی دو زیرفضای موازی (یا منطبق) از $\mathbb{R}^m$:

(۱۳—۳) اگر $E_۱$ و $E_۲$ دو زیرفضای مستوی همبعد و موازی از $\mathbb{R}^n$ باشند، $f(E_۱)$ و $f(E_۲)$ همبعد و موازی (یا منطبق) خواهند بود. □

www.ttmar.ir

(۴–۱۸) مثال. تابع خطی $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ را که با ماتریس $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ مشخص می‌شود در نظر می‌گیریم. تصویر هر نقطهٔ (x,y,z) تحت f را به (X,Y,Z) نمایش می‌دهیم: $(X,Y,Z)=f(x,y,z)$. داریم:

$$X=-x+y \quad , \quad Y=2x+y-z \quad , \quad Z=5x+y-2z \qquad (2)$$

توجه کنید که $Z=2Y-X$، پس همهٔ نقاط $\mathbb{R}^3$ به یک صفحهٔ گذرا از $\underline{0}$ (زیرفضای خطی دوبعدی)، یعنی $x_1-2x_2+x_3=0$ نگاشته می‌شوند. حال اثر f را بر چند صفحه خاص در نظر می‌گیریم. نخست صفحهٔ مختصاتی xy، متشکل از نقاط $(x,y,0)$ را در نظر بگیرید. طبق (۲) داریم:

$$f(x,y,0)=(-x+y,2x+y,5x+y)$$

ادعا می‌کنیم هر نقطه صفحهٔ $x_1-2x_2+x_3=0$ در تصویر صفحهٔ مختصاتی xy قرار دارد. اگر $(x_1,x_2,-x_1+2x_2)$ یک چنین نقطه‌ای باشد، باید نشان دهیم دستگاه زیر دارای جواب برحسب x و y است:

$$\begin{cases} -x+y=x_1 \\ 2x+y=x_2 \\ 5x+y=-x_1+2x_2 \end{cases}$$

دو معادلهٔ اول جواب منحصر به فرد $x=\frac{-x_1+x_2}{2}$، $y=\frac{2x_1+x_2}{3}$ را دارند که با جایگزینی ملاحظه می‌کنیم در معادله سوم نیز صدق می‌کند. پس در واقع صفحهٔ مختصاتی xy به طور یک به یک بر صفحه تصویر همهٔ $\mathbb{R}^3$ نگاشته می‌شود. محاسبهٔ مشابه با صفحات مختصاتی yz و zx نشان خواهد داد که هر یک از این صفحات نیز به طور یک به یک بر $f(\mathbb{R}^3)$ نگاشته می‌شود. حال تصویر صفحهٔ $x_1+2x_2-x_3=0$ را تحت f بررسی می‌کنیم. نقاط این صفحه به شکل $(x,y,x+2y)$ هستند. طبق (۲) داریم:

$$f(x,y,x+2y)=(-x+y,x-y,3x-3y)$$

www.ttmar.ir

ملاحظه می‌کنیم که هر نقطهٔ تصویر مضربی از سه‌تایی $(-۱, ۱, ۳)$ است، یعنی تصویر، خط راست

$$\frac{x}{-۱} = \frac{y}{۱} = \frac{z}{۳}$$

می‌باشد. بدین ترتیب تصویر صفحاتی که تاکنون بررسی کردیم، بعضی یک صفحه (دوبعدی) و بعضی یک خط راست (یک بعدی) می‌شوند. سؤالی که مطرح می‌شود این است که چه قانونی بر تعیین بعد تصویر حاکم است؟ بررسی‌های بعدی این موضوع را روشن خواهد ساخت.

برای تابع خطی (۱)، هستهٔ f را به صورت زیر تعریف می‌کنیم و به $\ker(f)$ نمایش می‌دهیم:

$$\ker(f) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = \underline{\circ}\} \tag{۳}$$

(۱۳—۴) $\ker(f)$ یک زیرفضای خطی $\mathbb{R}^n$ است.

اثبات. اگر x و x' در $\ker(f)$ باشند، باید نشان دهیم $x + x'$ در $\ker(f)$ است، و اگر به علاوه $r \in \mathbb{R}$، باید نشان دهیم rx نیز در $\ker(f)$ است:

$$\begin{aligned} f(x+x') &= f(x) + f(x') \quad \text{طبق ۱۲—۱} \\ &= \underline{\circ} + \underline{\circ} = \underline{\circ} \\ f(rx) &= rf(x) \quad \text{طبق ۱۲—۱} \\ &= r\underline{\circ} = \underline{\circ} \end{aligned}$$

و حکم به اثبات می‌رسد. □

حال طبق (۱۳—۳)، اگر L از انتقال هستهٔ f با یک عضو ثابت $\mathbb{R}^n$ به‌دست آید، تصویر L تحت f موازی و همبعد تصویر هسته تحت f است، ولی هسته به تک نقطهٔ $\{\circ\}$ نگاشته می‌شود، بنابراین تصویر هر L یک تک نقطه خواهد بود:

(۱۳—۵) اگر K هستهٔ f باشد و $a \in \mathbb{R}^n$، تصویر $a+K$ تحت f تک نقطهٔ $\{f(a)\}$ است. بالعکس، اگر b نقطه‌ای در $\mathbb{R}^m$ باشد، $f^{-1}(b)$ (= مجموعهٔ تراز منسوب به b = مجموعهٔ نقاطی که تحت f به b نگاشته می‌شوند) یا تهی است یا یک زیرفضای مستوی همبعد و موازی K است.

اثبات. قسمت اول حکم را در بالا توضیح دادیم و برای قسمت دوم فرض کنید $f^{-1}(b)$ تهی نباشد، آنگاه عنصری a در $\mathbb{R}^n$ وجود دارد که $f(a)=b$. نشان می‌دهیم:

$$f^{-1}(a) = a + K$$

نخست برای هر عنصر $a+K$، یعنی عنصر به شکل $a+x$ که $x \in K$، داریم:

$$\begin{aligned} f(a+x) &= f(a)+f(x) \\ &= f(a) \\ &= b \end{aligned}$$

بالعکس اگر $a' \in f^{-1}(b)$، می‌نویسیم:

$$a' = a + (a'-a) \tag{۴}$$

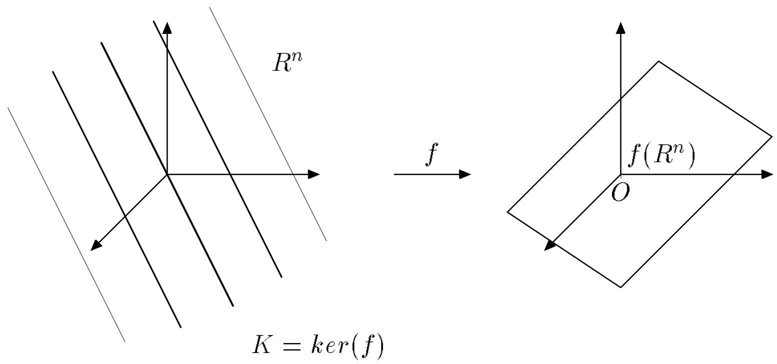
$a'-a$ در هسته است زیرا که

$$\begin{aligned} f(a'-a) &= f(a')-f(a) \\ &= b-b \\ &= \underline{\circ} \end{aligned}$$

بنابراین (۴) نشان می‌دهد که هر عضو $f^{-1}(b)$ مجموع a با یک عنصر هسته است و اثبات حکم کامل می‌شود. □

نتیجه‌های اخیر تصویری ساده و به لحاظی کامل از عملکرد یک تابع خطی $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ ارائه می‌کند. طبق (۱۳—۲)، کل $\mathbb{R}^n$ به یک زیرفضای خطی $\mathbb{R}^m$ نگاشته می‌شود، هسته به نقطهٔ $\underline{\circ}$ و

زیرفضاهای موازی و همبعد هسته هر یک به تمامی به یک نقطهٔ تصویر فرستاده می‌شوند. در واقع از هر نقطهٔ $\mathbb{R}^n$ یک زیرفضای منحصر به فرد همبعد و موازی K می‌گذرد که همهٔ نقاط آن به یک



شکل ۱

نقطه در $f(\mathbb{R}^n)$ نگاشته می‌شوند. می‌توان این توصیف عملکرد تابع خطی را این گونه تجسم کرد که در اثر عملکرد تابع خطی هر یک از زیرفضاهای مستوی موازی و همبعد هسته به یک نقطه در $\mathbb{R}^m$ منقبض می‌شود و حاصل یک زیرفضای خطی $\mathbb{R}^m$ است. به نظر می‌آید که در اثر انقباض این زیرفضاهای مستوی به تک نقطه‌ها، باید تصویر $\mathbb{R}^n$ تحت f، بعدی برابر $(n-k)$ داشته باشد که k بعد هسته است. در واقع حکم کلی زیر برقرار است:

(۱۳—۶) فرض کنید E یک زیرفضای خطی $\mathbb{R}^n$ باشد، در این صورت:

$$\dim E = \dim f(E) + \dim(E \cap \ker(f)) \qquad (۵)$$

(در اینجا dim مخفف dimension به معنای بُعد است)

اثبات. مقدمتاً توجه کنید که اشتراک هر دو زیرفضای خطی از $\mathbb{R}^n$، یک زیرفضای خطی است، بنابراین $E \cap \ker(f)$ یک زیرفضای خطی است و بُعد آن معنی دارد. برای مشاهدهٔ این امر فرض کنید E_1 و E_2 دو زیرفضای خطی $\mathbb{R}^n$ باشند. اگر x و x' هر دو در $E_1 \cap E_2$ باشند، چون هر دو در E_1

www.ttmar.ir

و هر دو در E_2 هستند، داریم $x + x' \in E_1$ و $x + x' \in E_2$، پس $x + x' \in E_1 \cap E_2$. همچنین اگر $x \in E \cap E'$ و $r \in \mathbb{R}$، داریم $rx \in E_1$ و $rx \in E_2$، پس $rx \in E_1 \cap E_2$.

حال به اثبات حکم می‌پردازیم. فرض کنید $\dim(E \cap \ker(f)) = l$. در این صورت مجموعهٔ مستقل خطی $\{A_1, \ldots, A_l\}$ از عناصر $E \cap \ker(f)$ وجود دارد که پایه برای این زیرفضاست، یعنی $E \cap \ker(f) = \langle A_1, \ldots, A_l \rangle$. اگر $E \cap \ker(f) = E$، $E \subset \ker(f)$، آنگاه لزوماً همهٔ نقاط E به صفر نگاشته می‌شوند، $\dim f(E) = 0$، و فرمول (۵) برقرار است. اگر $E \cap \ker(f)$ همهٔ E نباشد، عنصری A_{l+1} در E وجود دارد که ترکیبی خطی از $A_1, \ldots, A_l$ نیست. مجموعهٔ $\{A_1, \ldots, A_{l+1}\}$ مستقل خطی است (دقیقاً چرا؟). اگر $E = \langle A_1, \ldots, A_{l+1} \rangle$، داریم $\dim E = l + 1$ و $f(E)$ از مضارب $f(A_{l+1})$ تشکیل شده است زیرا که

$$\begin{aligned} f(t_1 A_1 + \cdots + t_l A_l + t_{l+1} A_{l+1}) &= \textstyle\sum_{i=1}^{l} t_i f(A_i) + t_{l+1} f(A_{l+1}) \\ &= t_{l+1} f(A_{l+1}) \end{aligned}$$

از طرفی دیگر $f(A_{l+1}) \neq \underline{0}$ چون $A_{l+1} \notin \ker(f)$. بنابراین $\dim f(E) = 1$ و مجدداً فرمول (۵) برقرار است. حال اگر $\langle A_1, \ldots, A_{l+1} \rangle$ همهٔ E نباشد، عنصری A_{l+2} از E به مجموعهٔ $\{A_1, \ldots, A_{l+1}\}$ می‌افزاییم که ترکیبی خطی از $A_1, \ldots, A_{l+1}$ نباشد و استدلال بالا را تکرار می‌کنیم. به طور کلی، اگر $\dim E = k$، در $k - l$ گام به مجموعهٔ مستقل خطی k عضوی $\{A_1, \ldots, A_l, A_{l+1}, \ldots, A_k\}$ می‌رسیم که لزوماً یک پایه برای E است. حال بعد $f(E)$ را محاسبه می‌کنیم. برای هر عضو x از E داریم:

$$\begin{aligned} x &= t_1 A_1 + \cdots + t_l A_l + t_{l+1} A_{l+1} + \cdots + t_k A_k \\ f(x) &= t_1 f(A_1) + \cdots + t_l f(A_l) + t_{l+1} f(A_{l+1}) + \cdots + t_k f(A_k) && \text{بنابر ۱۲–۱} \\ &= t_{l+1} f(A_{l+1}) + \cdots + t_k f(A_k) && (\text{چون } A_i \in \ker(f) \text{ برای } i = 1, \ldots l) \end{aligned}$$

بنابراین هر عضو تصویر E یک ترکیب خطی از $f(A_{l+1}), \ldots, f(A_k)$ است. اگر ثابت کنیم مجموعهٔ $\{f(A_{l+1}), \ldots, f(A_k)\}$ مستقل خطی است، نتیجه می‌شود که $\dim(f(E)) = k - l$ و رابطهٔ (۵) به

www.ttmar.ir

اثبات می‌رسد. برای اثبات این واقعیت فرض کنید مجموعهٔ فوق مستقل خطی نباشد، یعنی اعداد حقیقی $c_{l+1},\ldots,c_k$ وجود داشته باشند که:

$$c_{l+1}f(A_{l+1})+\cdots+c_kf(A_k)=\underline{0}$$
$$f(c_{l+1}A_{l+1}+\cdots+c_kA_k)=\underline{0}$$

این نشان می‌دهد که $c_{l+1}A_{l+1}+\cdots+c_kA_k$ عضوی از هستهٔ f است و در ضمن چون $A_{l+1},\ldots,A_k\in E$، $c_{l+1}A_{l+1}+\cdots+c_kA_k$، عضو $E\cap\ker f$ است. بنابراین اعداد حقیقی $c_1,\ldots,c_l$ وجود دارند که:

$$c_{l+1}A_{l+1}+\cdots+c_kA_k=c_1A_1+\cdots+c_lA_l$$
$$c_1A_1+\cdots+c_lA_l-c_{l+1}A_{l+1}-\cdots-c_kA_k=\underline{0}$$

با توجه به استقلال خطی $\{A_1,\ldots,A_k\}$ همهٔ ضرایب باید صفر باشند، بالاخص $c_{l+1}=\cdots=c_k=0$. و اثبات استقلال خطی $\{f(A_{l+1}),\ldots,f(A_k)\}$ و حکم (۵) به اتمام می‌رسد. □

با توجه به ۱۳—٦، اکنون می‌توانیم با نگاهی مجدد به مثال ۱۸—۴، این مطلب که تصاویر صفحات گوناگون تحت تابع خطی آن مثال، بعضی دوبعدی و بعضی یک بعدی بودند به طور کامل تجزیه و تحلیل کنیم. برای این کار نخست هستهٔ f در مثال ۱۸—۴ را پیدا می‌کنیم. باید داشته باشیم:

$$A|x\rangle=|\underline{0}\rangle$$

یا $(-x_1+x_2,2x_1+x_2-x_3,5x_1+x_2-2x_3)=(0,0,0)$. بنابراین $x_2=x_1$ و $x_3=3x_1$. نتیجه این که هستهٔ f عبارت است از خط راست:

$$\frac{x_1}{1}=\frac{x_2}{1}=\frac{x_3}{3}\qquad(6)$$

حال اگر E یک زیرفضای خطی دوبعدی $\mathbb{R}^3$ باشد، بعد تصویر E طبق ۱۸—٦ برابر $2-l$ است که l بعد اشتراک E با هسته است. دو امکان وجود دارد، یا اشتراک E و هسته فقط $\{\underline{0}\}$ است که در این

www.ltnar.ir

صورت $l = 0$ و تصویر E دوبعدی است، و یا اشتراک E و هسته یک بعدی است، یعنی هسته به تمامی در E قرار دارد، که در این صورت $l = 1$ و تصویر یک بعدی است. در مثال ۱۸–۴، هر یک از صفحات مختصاتی با هسته (یعنی خط راست (۶)) فقط در $\underline{0}$ اشتراک دارند، بنابراین تصویر هر یک، دوبعدی است. ولی صفحهٔ $x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$ شامل خط راست (۶) است، یعنی برای آن $l = 1$، و در نتیجه تصویر آن تحت f، یک بعدی می‌باشد.

www.ttmar.ir

نگاشت‌های خطی (۴)

آنچه در جلسه قبل دیدیم تصویر به نسبت جامعی از عملکرد تابع‌های خطی روی زیرفضاهای مستوی می‌دهد. گزاره‌های ذکر شده اکثراً به طور مستقیم به زیرفضاهای خطی مربوط می‌شدند ولی نتیجه‌گیری درست در مورد زیرفضاهای مستوی دشوار نیست. مثلاً آخرین گزاره:

$$\dim(E) = \dim(f(E)) + \dim(E \cap \ker f) \qquad (1)$$

برای زیرفضاهای خطی E برقرار است. اگر E' یک زیرفضای مستوی همبعد و موازی E باشد، یعنی $E' = p + E$، دیگر $E' \cap \ker f$ مطرح نیست، بلکه می‌دانیم که $\dim f(E') = \dim f(E)$ (تصویر زیرفضاهای مستوی موازی همبعد، موازی و همبعد است)، پس

$$\dim(E') = \dim f(E') + \dim(E \cap \ker f) \qquad (2)$$

یعنی در اینجا بعد اشتراک انتقال‌یافتهٔ E' به $\underline{0}$ با هسته، تعیین‌کننده افت بعد E' در اثر عملکرد f است.

با توجه به این تذکر، به مثال جلسهٔ قبل باز می‌گردیم.

مثال. تابع خطی $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ را با ماتریس $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ را بررسی می‌کنیم. هستهٔ این تابع خط راست $\frac{x_1}{1} = \frac{x_2}{1} = \frac{x_3}{3}$ است. دیدیم که زیرفضاهای خطی دوبعدی شامل هسته به یک خط راست و زیرفضاهای خطی دوبعدی که فقط در $\underline{0}$ با هسته اشتراک دارند به تمامی صفحه $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$ نگاشته می‌شوند. حال اگر F یک صفحهٔ دلخواه در $\mathbb{R}^3$ باشد (زیرفضای مستوی

www.itmar.ir

دوبعدی)، برای تعیین بعد تصویر آن باید انتقال یافتهٔ آن به مبدأ، F°، را در نظر بگیریم. اگر F° شامل هسته باشد، یعنی F موازی هسته باشد، تصویر F یک خط راست می‌شود. در غیر این صورت، F° با هسته فقط در $\underline{\circ}$ مشترک است و تصویر آن دوبعدی می‌شود. اکنون وضعیت تصویر خطوط راست $\mathbb{R}^۳$ را تحت اثر f بررسی می‌کنیم. اگر خط راست L به مبدأ منتقل شود تا خط راست L° به‌دست آید، L° یا برابر هسته است، که در این صورت L یک خط راست موازی هسته است و یا L° با هسته فقط در $\underline{\circ}$ مشترک است. در حالت اول تصویر L یک نقطه می‌شود و در حالت دوم تصویر آن یک خط راست است.

اکنون به ذکر چند نکته تکمیلی در مورد بحث جلسهٔ گذشته می‌پردازیم. پس تابع خطی

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

مورد نظر است.

(۱۴—۱) شرطی لازم و کافی برای یک به یک بودن f این است که $\ker(f) = \{\circ\}$. در این حالت لزوماً $n \leq m$.

اثبات. اگر عنصری $x \neq \underline{\circ}$ در هسته باشد، چون $f(x) = f(\underline{\circ}) = \underline{\circ}$، f یک به یک نیست. حال فرض کنید $\ker f = \{\underline{\circ}\}$ و $f(x_۱) = f(x_۲)$. چون f خطی است نتیجه می‌گیریم که $f(x_۱ - x_۲) = \underline{\circ}$، یعنی $x_۱ - x_۲ \in \ker(f)$، پس طبق فرض $x_۱ = x_۲$ و یک به یک بودن به اثبات می‌رسد. در این حالت $\dim(f(\mathbb{R}^n)) = n$، و چون $f(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{R}^m$، نتیجه می‌گیریم که $n \leq m$. □

در فرمول (۱)، وقتی $E = \mathbb{R}^n$ داریم:

$$n = \dim(f(\mathbb{R}^n)) + \dim(\ker(f))$$

پوشا بودن f معادل این است که $f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^m$، یعنی $n = m + \dim(\ker(f))$. بنابراین:

www.ttnar.ir

(۱۴–۲) شرطی لازم و کافی برای پوشا بودن f این است که $\dim(\ker(f)) = n - m$. در این حالت لزوماً $n \geq m$. □

برای تابع‌های $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$، یعنی در حالت $m = n$، از (۱۴–۱) و (۱۴–۲) نتیجه می‌شود که:

(۱۴–۳) تابع خطی $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ یک به یک است اگر و تنها اگر پوشا باشد. □

می‌دانیم که شرطی لازم و کافی برای وجود تابع معکوس (وارون) یک به یک و پوشا بودن تابع است. بدین ترتیب وقتی $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ یک به یک (معادلاً پوشا) باشد، تابعی $f^{-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ وجود دارد که

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad , \quad f(f^{-1}(x)) = x$$

ادعا می‌کنیم که f^{-1} نیز خطی است. فرض کنید $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n$. چون f پوشا است، x_1 و x_2 وجود دارند که $y_1 = f(x_1)$ و $y_2 = f(x_2)$. بنابراین

$$\begin{aligned} f^{-1}(y_1 + y_2) &= f^{-1}(f(x_1) + f(x_2)) \\ &= f^{-1}(f(x_1 + x_2)) \quad \text{چون } f \text{ خطی است} \\ &= x_1 + x_2 \\ &= f^{-1}(y_1) + f^{-1}(y_2) \end{aligned}$$

به همین ترتیب اگر $y = f(x)$ و r یک عدد حقیقی باشد،

$$\begin{aligned} f^{-1}(ry) &= f^{-1}(rf(x)) \\ &= f^{-1}(f(rx)) \quad \text{چون } f \text{ خطی است} \\ &= rx \\ &= rf^{-1}(y) \end{aligned}$$

چون f^{-1} خطی است، به آن ماتریسی $n \times n$، B، منسوب می‌شود. اگر A ماتریس تابع خطی f باشد، رابطهٔ B را با A بررسی می‌کنیم. داریم $f \circ f^{-1} = 1_{\mathbb{R}^n}$ و $f^{-1} \circ f = 1_{\mathbb{R}^n}$ که در آن $1_{\mathbb{R}^n}$ تابع همانی

www.ttnar.ir

$\mathbb{R}^n$ است. از آنجا که ماتریس $1_{\mathbb{R}^n}$ برابر I_n است و ترکیب تابع‌های خطی متناظر با حاصل‌ضرب ماتریس‌های مربوط است، داریم:

$$BA = I_n \quad , \quad AB = I_n$$

چنین ماتریس B وارون یا معکوس ماتریس A خوانده می‌شود و معمولاً آن را به A^{-1} نمایش می‌دهیم.

مثال زیر نشان می‌دهد چگونه می‌توان بعضی مسائل هندسی را به بحث در مورد جواب‌های یک دستگاه معادلهٔ درجه یک تبدیل کرد و سپس از مطالب فوق در حل مسأله یاری جست.

مثال. فرض کنید E_1 و E_2 دو صفحه (زیرفضای مستوی دوبعدی) در $\mathbb{R}^4$ هستند. نشان می‌دهیم:

(الف) اگر $E_1 \cap E_2$ یک تک نقطه باشد و E'_1 یک صفحهٔ موازی E_1 و E'_2 یک صفحهٔ موازی E_2 باشد، آنگاه $E'_1 \cap E'_2$ نیز یک تک نقطه است.

(ب) اگر $E_1 \cap E_2$ یک خط راست باشد، صفحه‌ای E'_1 موازی E_1 و صفحه‌ای E'_2 موازی E_2، وجود دارند که $E'_1 \cap E'_2$ تهی است.

فرض کنید E_1 صفحهٔ گذرا از p به موازات A_1 و A_2 باشد، $\{A_1, A_2\}$ مستقل خطی، و E_2 صفحه گذرا از q به موازات B_1 و B_2، و $\{B_1, B_2\}$ مستقل خطی. این که E_1 و E_2 دقیقاً یک نقطهٔ مشترک دارند بدین صورت قابل بیان است که چهارتایی منحصر به فردی (s_1, s_2, t_1, t_2) از اعداد حقیقی وجود دارد که:

$$p + s_1 A_1 + s_2 A_2 = q + t_1 B_1 + t_2 B_2 \tag{3}$$

حال p, q, A_1, A_2, B_1, B_2 همه عناصر $\mathbb{R}^4$، یعنی چهارتایی هستند. می‌نویسیم $p = (p_1, \ldots, p_4)$، $q = (q_1, \ldots, q_4)$، $A_1 = (a_{11}, a_{21}, a_{31}, a_{41})$، $A_2 = (a_{12}, a_{22}, a_{32}, a_{42})$، $B_1 = (b_{11}, b_{21}, b_{31}, b_{41})$، $B_2 = (b_{12}, b_{22}, b_{32}, b_{42})$، پس اگر مؤلفه‌های اول تا چهارم دو طرف

(۳) را برابر قرار دهیم حاصل می‌شود:

$$\begin{cases} p_1 + s_1 a_{11} + s_2 a_{12} = q_1 + t_1 b_{11} + t_2 b_{12} \\ p_2 + s_1 a_{21} + s_2 a_{22} = q_2 + t_1 b_{21} + t_2 b_{22} \\ p_3 + s_1 a_{31} + s_2 a_{32} = q_3 + t_1 b_{31} + t_2 b_{32} \\ p_4 + s_1 a_{41} + s_2 a_{42} = q_4 + t_1 b_{41} + t_2 b_{42} \end{cases} \tag{۴}$$

با انتقال جملات دارای s_1, s_2, t_1, t_2 به سمت چپ و سایر جملات به سمت راست، دستگاه زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & -b_{11} & -b_{12} \\ a_{21} & a_{22} & -b_{21} & -b_{22} \\ a_{31} & a_{32} & -b_{31} & -b_{32} \\ a_{41} & a_{42} & -b_{41} & -b_{42} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \\ q_3 - p_3 \\ q_4 - p_4 \end{bmatrix} \tag{۵}$$

ماتریس 4×4 سمت چپ یک تابع خطی $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ تعریف می‌کند. اینکه E_1 و E_2 فقط یک نقطهٔ اشتراک داشته باشند بدین صورت قابل بیان است که یک و تنها یک نقطهٔ $\mathbb{R}^4$ به نقطهٔ $(q-p)$ نگاشته می‌شود، مجموعهٔ تراز، $f^{-1}(q-p)$ تک عضوی است. می‌دانیم که همهٔ مجموعه‌های تراز ناتهی از انتقال هسته به‌دست می‌آیند و با هم موازی هستند. پس در این حالت هسته برابر $\{0\}$ است و در نتیجه f یک به یک و پوشا است. حال اگر به جای E_1 و E_2، دو زیرفضای موازی جایگزین کنیم، فقط طرف راست (۵) عوض می‌شود، ولی از آنجا که f یک به یک و پوشا است، مجدداً جواب منحصر به فردی (s_1, s_2, t_1, t_2) برای دستگاه به‌دست می‌آید، یعنی اشتراک دو زیرفضای موازی نیز یک تک نقطه است.

اکنون حالتی را در نظر بگیرید $E_1 \cap E_2$ یک خط راست است. به زبان تابع‌های خطی، این مطلب را می‌توان به این صورت بیان کرد که مجموعه تراز $f^{-1}(q-p)$ یک بعدی است. نتیجه می‌شود که هستهٔ تابع خطی $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ یک بعدی است. بنابراین f یک به یک نیست و طبق (۱۴—۳) پوشا نیست. بنابراین طرف راست (۵) را می‌توان طوری اختیار کرد که مجموعهٔ تراز منسوب به آن تهی باشد. مثلاً با ثابت نگاهداشتن p و تغییر مناسب q، می‌توان به چنین نقطه‌ای رسید. نتیجه این که با

انتقال موازی مناسب $E_۱$ و $E_۲$ می‌توان به دو صفحهٔ غیر متقاطع رسید.

مثال بالا به خوبی نشان می‌دهد که بسیاری سؤال‌های مربوط به دستگاه‌های معادلات خطی را اکنون می‌توان به کمک اطلاعاتی که در مورد تابع‌های خطی کسب کرده‌ایم جواب داد. دستگاه کلی m معادلهٔ n مجهولی درجه یک را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} a_{۱۱}x_۱ + \cdots + a_{۱n}x_n = b_۱ \\ \qquad \cdots \\ a_{m۱}x_۱ + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{٦}$$

یا به طور خلاصه:

$$A|x\rangle = |b\rangle \tag{٧}$$

که در آن $A = [a_{ij}]$. دستگاهی که طرف چپ آن مانند بالا و طرف راست از صفر تشکیل شده باشد، دستگاه همگن (یا متجانس) وابسته به (٦) یا (٧) می‌نامند:

$$A|x\rangle = |\underline{\circ}\rangle \tag{٨}$$

جدول زیر رابطهٔ بین جبر حل دستگاه‌های معادلات بالا و هندسهٔ تابع‌های خطی را خلاصه می‌کند:

جبر	هندسه
حل (٦) برای b داده شده	یافتن مجموعهٔ تراز منسوب b
وجود جواب به‌ازای b داده شده	ناتهی بودن مجموعهٔ تراز منسوب به b
وجود جواب به‌ازای هر b	پوشا بودن تابع خطی f
یگانگی جواب در صورت وجود	هسته $= \{\circ\}$
حل دستگاه همگن	یافتن هسته

چند نمونه از احکام جبری را که اکنون می‌توان با توسل به هندسهٔ تابع‌های خطی جواب داد در زیر می‌آوریم. مثال‌های دیگری در تمرین‌ها آمده‌اند.

(۱۴—۴) اگر تعداد معادلات بیش از تعداد مجهول‌ها باشد، می‌توان b را طوری اختیار کرد که دستگاه جواب نداشته باشد.

اثبات. این حالت $m > n$ است که طبق ۱۴—۲ تابع خطی مربوط پوشا نیست، یعنی $b \in \mathbb{R}^m$ وجود دارد که $f^{-1}(b)$ تهی است. □

(۱۴—۵) اگر $\overline{x} = (\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_n)$ یک جواب (٦) باشد، همهٔ جواب‌های (٦) عبارتند از $x + \overline{x}$ که در آن x یک جواب دستگاه همگن متناظر است.

اثبات. داریم $f(\overline{x}) = b$. اگر x یک جواب دستگاه همگن باشد، یعنی x در هستهٔ f است، پس $f(x + \overline{x}) = f(x) + f(\overline{x})$. بالعکس فرض کنید $\overline{\overline{x}}$ جواب دیگری از (٦) باشد، آنگاه

$$f(\overline{\overline{x}} - \overline{x}) = f(\overline{\overline{x}}) - f(\overline{x}) = b - b = \underline{0}$$

پس $\overline{x} - \overline{\overline{x}}$ در هسته است و می‌توان نوشت $\overline{x} + (\overline{\overline{x}} - \overline{x}) = \overline{\overline{x}}$. □

حالت مهم $m = n$ (تعداد مجهول = تعداد معادله) را در نظر بگیرید. دیدیم که در این حالت شرایط زیر معادل هستند: f یک به یک، f پوشا، f وارون‌پذیر، هسته $f = \{0\}$. در این حالت، ماتریس مربوط، A، نیز وارون‌پذیر است و با ضرب کردن دو طرف (۷) در A^{-1} از سمت چپ، جواب (منحصر به فرد) دستگاه به‌دست می‌آید:

$$|x\rangle = A^{-1}|b\rangle \qquad (۹)$$

حجم و دترمینان (۱)

در بین مفاهیم هندسی که تاکنون در $\mathbb{R}^n$ بررسی کرده‌ایم اثری از مساحت، حجم و تعمیم آنها به نوعی مفهوم برای سنجش "محتوای nـ بعدی" نبوده است. برای اقدام به این کار لازم است وجه مشترکی میان طول، مساحت و حجم بیابیم که قابلیت تعمیم به هر بعد را داشته باشد. در اینجا نخست مفهوم ضرب برداری در $\mathbb{R}^3$ را یادآوری می‌کنیم.

برای $u, v \in \mathbb{R}^3$، $u = (u_1, u_2, u_3)$ و $v = (v_1, v_2, v_3)$، حاصل‌ضرب برداری، $u \times v \in \mathbb{R}^3$، را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$u \times v = (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1) \qquad (1)$$

(۱۰ــ۱) ویژگی‌های ابتدایی ضرب خارجی

(۱۰ــ۱ــ۱) **(ضد تقارن)** برای هر $u, v \in \mathbb{R}^3$ داریم

$$u \times v = -v \times u \qquad (2)$$

بالاخص

$$u \times u = \underline{0} \qquad (3)$$

www.ttmar.ir

اثبات. در فرمول (۱) اگر نقش u, v تعویض شود، هر مؤلفه در (-1) ضرب می‌شود. اگر در (۲) قرار دهیم $u = v$، نتیجه می‌شود که $u \times u = -(u \times u)$، پس لزوماً $u \times u = \underline{0}$. $\square$

(۱۰—۱—۲) (قوانین پخشی) برای هر $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ داریم:

$$(u+v) \times w = (u \times w) + (v \times w) \quad , \quad u \times (v+w) = (u \times v) + (u \times w) \tag{۴}$$

اثبات. این دو قانون با محاسبهٔ سر راست از (۱) حاصل می‌شوند. محاسبه به خواننده واگذار می‌شود. $\square$

(۱۰—۱—۳) برای $u, v \in \mathbb{R}^3$ و $r \in \mathbb{R}$ داریم:

$$(ru) \times v = r(u \times v) \quad , \quad u \times (rv) = r(u \times v) \tag{۵}$$

اثبات. اگر در (۱) یکی از u یا v در r ضرب شود، هر مؤلفه طرف راست در r ضرب می‌شود. $\square$

(۱۰—۱—۴) برای هر $u, v \in \mathbb{R}^3$ داریم:

$$v \cdot (u \times v) = 0 \quad , \quad u \cdot (u \times v) = 0 \tag{٦}$$

اثبات. این نیز یک محاسبهٔ سرراست است:

$$\begin{aligned} u \cdot (u \times v) &= (u_1, u_2, u_3) \cdot (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1) \\ &= u_1(u_2 v_3 - u_3 v_2) + u_2(u_3 v_1 - u_1 v_3) + u_3(u_1 v_2 - u_2 v_1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

www.tlnar.ir

و به همین ترتیب اتحاد دیگر ثابت می‌شود. □

(۱۰—۱—۵) (رابطه با ضرب داخلی) برای هر $u, v \in \mathbb{R}^3$ داریم:

$$|u \times v|^2 + |u \cdot v|^2 = |u|^2 |v|^2 \qquad (۷)$$

اثبات. توجه کنید که مقصود از $|u \times v|$ طول سه‌تایی $u \times v$ است و مقصود از $|u \cdot v|$ قدرمطلق عدد $u \cdot v$. اتحاد (۶) به صورت زیر بسط داده می‌شود:

$$\begin{aligned} &(u_2 v_3 - u_3 v_2)^2 + (u_3 v_1 - u_1 v_3)^2 + (u_1 v_2 - u_2 v_1)^2 + (u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3)^2 \\ &= (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) \end{aligned} \qquad (۸)$$

صحت این اتحاد جبری را می‌توان با محاسبه تحقیق کرد. □

اگر $\{u, v\}$ وابسته خطی باشد، مثلاً $v = ru$، برای عدد حقیقی r، آنگاه از (۵) و (۲) نتیجه می‌شود $u \times v = \underline{0}$. البته این مطلب از (۷) نیز نتیجه می‌شود زیرا که اگر $\{u, v\}$ وابستهٔ خطی باشد، آنگاه $|u \cdot v| = |u||v|$. حال فرض کنید $\{u, v\}$ مستقل خطی باشد، بالاخص $u \neq \underline{0}$ و $v \neq \underline{0}$. در این صورت u, v هر یک، یک نیم‌خط تعریف می‌کند (مضارب مثبت این بردار). α را زاویهٔ بین دو نیم‌خط می‌گیریم. از آنجا که $u \cdot v = |u||v| \cos \alpha$، از (۷) نتیجه می‌شود که:

$$|u \times v| = |u||v||\sin \alpha| \qquad (۹)$$

عبارت طرف راست در واقع مساحت متوازی‌الاضلاعی است که توسط u, v ایجاد می‌شود. به طور دقیقتر، مقصود از متوازی‌الاضلاع ایجاد شده توسط u, v مجموعهٔ زیر است:

$$P(u, v) = \{t_1 u_1 + t_2 v \mid 0 \leq t_1 \leq 1, 0 \leq t_2 \leq 1\}$$

www.ttnar.ir

شکل ۱

توجه کنید که ارتفاع وارد بر "قاعده" u، دارای طول $|v||\sin\alpha|$ است، پس $|u||v||\sin\alpha|$ فی‌الواقع مساحت $P(u,v)$ است.

بدین ترتیب تاکنون به این نتایج در مورد $u \times v$ رسیده‌ایم: اگر $\{u,v\}$ وابستهٔ خطی باشد، $u \times v$ برابر $\underline{\circ}$ است و اگر $\{u,v\}$ مستقل خطی، آنگاه $u \times v$ بر صفحه u,v عمود است (بنابر (٦)) و طول آن برابر $|u||v||\sin\alpha|$ می‌باشد. در واقع حالت وابستگی خطی را می‌توان حالت خاص حکم دوم دانست زیرا که در آن صورت $\sin\alpha = \circ$ و چون $u \times v = \underline{\circ}$، این حاصل‌ضرب بر هر صفحهٔ شامل u,v عمود است (به مفهوم صفر شدن ضرب داخلی). حال در حالت استقلال خطی، دقیقاً دو سه‌تایی با طول $|u||v||\sin\alpha|$ وجود دارند که بر صفحهٔ u,v عمودند. برای مشخص کردن این که کدام یک برابر $u \times v$ است از مفهوم "دترمینان" کمک می‌گیریم.

اگر $u = (u_۱, u_۲)$ و $v = (v_۱, v_۲)$ دو عنصر $\mathbb{R}^۲$ باشند، مؤلفه‌های u,v را به ترتیب در ستون‌های اول و دوم یک ماتریس ۲ × ۲ به صورت زیر قرار می‌دهیم

$$M = \begin{bmatrix} u_۱ & v_۱ \\ u_۲ & v_۲ \end{bmatrix}$$

دترمینان ماتریس M بنابر تعریف برابر $u_۱v_۲ - u_۲v_۱$ است. معنی هندسی این عبارت رابررسی می‌کنیم. اگر $(v_۱, v_۲)$ را به اندازهٔ $\frac{\pi}{۲}$ در جهت عقربهٔ ساعت دوران دهیم بردار v' به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$v' = (v_۲, -v_۱)$$

شکل ۲

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} u_1v_2 - u_2v_1 &= u \cdot v' \\ &= |u||v'| \cos \measuredangle(u, v') \\ &= |u||v| \cos(\alpha - \tfrac{\pi}{2}) \\ &= |u||v| \sin \alpha \end{aligned}$$

قدرمطلق عبارت سمت راست اندازهٔ مساحت $P(u,v)$ و علامت آن به علامت $\sin\alpha$ وابسته است. اگر $\{u,v\}$ وابستهٔ خطی باشد، $\sin\alpha = 0$ و $\det M$ صفر می‌شود. ولی چنانچه $\{u,v\}$ مستقل خطی باشد، اگر زاویه α (از نیم‌خط تعیین شده توسط u به نیم‌خط تعیین شده توسط v) بین 0 و π باشد، $\sin\alpha > 0$ و $\det M$ مثبت است. ولی اگر زاویهٔ α بین π و 2π باشد، $\sin\alpha < 0$ و $\det M$ منفی است

شکل ۳

یک زوج مرتب برداری (u,v) در صفحه مانند (الف) در شکل (۳) را "راستگرد" و یک زوج مرتب برداری مانند (ب) در شکل (۳) را "چپگرد" می‌نامند. تمایز این دو وضعیت را می‌توان به صورت زیر نیز بیان کرد. چنانچه با گردش کوچکتر از یک نیم صفحه در جهت مثلثاتی از بردار اول به بردار دوم برسیم، زوج مرتب راستگرد خوانده می‌شود ولی چنانچه با گردش کوچکتر از یک نیم صفحه در جهت عقربه ساعت از بردار اول به بردار دوم برسیم، زوج مرتب چپگرد محسوب می‌شود.

با توجه به بحث بالا، می‌توان زوج مرتب (u,v) را راستگرد (به ترتیب چپگرد) تعریف کرد اگر $\det M > 0$ (به ترتیب $\det M < 0$) بنابراین $\det M$ مشخص کنندهٔ دو اطلاع زیر است:

الف) قدرمطلق دترمینان M برابر مساحت متوازی‌الاضلاع $P(u,v)$ است.

ب) $\det M = 0$ اگر و تنها اگر $\{u,v\}$ وابستهٔ خطی باشد، $\det M > 0$ (به ترتیب $\det M < 0$) اگر و تنها اگر زوج مرتب (u,v) راستگرد (به ترتیب چپگرد) باشد.

این ملاحضات را می‌توان به $\mathbb{R}^3$ تعمیم داد. فرض کنید $u = (u_1,u_2,u_3)$، $v = (v_1,v_2,v_3)$ و

www.ttnar.ir

$w = (w_1, w_2, w_3)$ عناصر $\mathbb{R}^3$ باشند. مقصود از متوازی السطوح ایجاد شده توسط u، v و w مجموعهٔ زیر است:

$$P(u,v,w) = \{t_1 u + t_2 v + t_3 w \mid 0 \leq t_i \leq 1, i = 1,2,3\} \qquad (۱۰)$$

اگر سه‌تایی $\{u,v,w\}$ وابستهٔ خطی باشد، سه بردار در یک صفحه قرار می‌گیرند و حجم این متوازی السطوح صفر است. در غیر این صورت، برای به‌دست آوردن حجم باید مساحت یک قاعده (مثلاً متوازی الاضلاع $P(u,v)$) را در ارتفاع وارد بر این قاعده ضرب کنیم. ارتفاع وارد قاعدهٔ $P(u,v)$ برابر طول تصویر قائم w بر امتداد عمود بر صفحهٔ u,v است. امتداد عمود بر صفحه توسط $u \times v$ تعیین می‌شود، پس

$$\text{طول ارتفاع} = \frac{|w \cdot (u \times v)|}{|u \times v|^2} |u \times v|$$

و در نتیجه چون مساحت قاعده برابر $|u \times v|$ است:

$$\begin{aligned} \text{حجم}\ P(u,v,w) &= |w \cdot (u \times v)| \\ &= |w_1(u_2 v_3 - u_3 v_2) + w_2(u_3 v_1 - u_1 v_3) + w_3(u_1 v_2 - u_2 v_1)| \end{aligned} \qquad (۱۱)$$

حال مانند حالت دو بعدی، مؤلفه‌های سه بردار u، v و w را به ترتیب در ستون‌های یک ماتریس 3×3 قرار می‌دهیم:

$$M = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{bmatrix}$$

طبق تعریف، دترمینان ماتریس 3×3 بالا برابر است با

$$\det M = u_1 v_2 w_3 - u_1 v_3 w_2 + v_1 w_2 u_3 - v_1 w_3 u_2 + w_1 u_2 v_3 - w_1 u_3 v_2 \qquad (۱۲)$$

که می‌توان آن را به صورت‌های زیر نیز نوشت:

$$\det M = u_1(v_2 w_3 - v_3 w_2) + u_2(v_3 w_1 - v_1 w_3) + u_3(v_1 w_2 - v_2 w_1) \qquad (۱۳)$$

www.ttmar.ir

$$\det M = v_1(w_2u_3 - w_3u_2) + v_2(w_3u_1 - w_1u_3) + v_3(w_1u_2 - w_2u_1) \qquad (۱۴)$$

$$\det M = w_1(u_2v_3 - u_3v_2) + w_2(u_3v_1 - u_1v_3) + w_3(u_1v_2 - u_2v_1) \qquad (۱۵)$$

از مقایسهٔ (۱۵) و (۱۱) می‌بینیم که قدرمطلق دترمینان M همان حجم متوازی السطوح $P(u,v,w)$ است. در مورد علامت، سه‌تایی مرتب (u,v,w) در $\mathbb{R}^3$ را راستگرد (به ترتیب چپگرد) می‌نامیم در صورتی که $\det M > 0$ (به ترتیب $\det M < 0$). توجه کنید که $\det M = 0$ اگر و تنها اگر سه‌تایی $\{u,v,w\}$ وابستهٔ خطی باشد زیرا که اگر u، v و w در یک صفحه باشند، حاصل‌ضرب داخلی w با $u \times v$ که بر این صفحه عمود است صفر می‌شود. به این ترتیب مجدداً $\det M$ مشخص کنندهٔ دو اطلاع زیر است:

الف) قدرمطلق دترمینان M برابر حجم متوازی‌السطوح $P(u,v,w)$ است.

ب) $\det M = 0$ اگر و تنها اگر $\{u,v,w\}$ وابستهٔ خطی باشد، $\det M > 0$ (به ترتیب $\det M < 0$) اگر و تنها اگر سه‌تایی مرتب (u,v,w) راستگرد (به ترتیب چپگرد) باشد.

ضمناً با توجه به (۱۳) و (۱۴) نیز می‌توان نوشت:

$$u \cdot (v \times w) = v \cdot (w \times u) = w \cdot (u \times v) = -w \cdot (v \times u) = -v \cdot (u \times w) = -u \cdot (w \times v) \quad (۱۶)$$

قدرمطلق هر یک از این عبارت‌ها حجم متوازی‌السطوح $P(u,v,w)$ به صورت حاصل‌ضرب یک قاعده در ارتفاع وارد بر آن است.

در اینجا راهی برای تعریف "حجم nـ بعدی"، دست کم برای تعمیم متوازی الاضلاع و متوازی‌السطوح به نظر می‌رسد. اگر $u_1 = (u_{11}, u_{21}, \ldots, u_{n1})$، ...، $u_n = (u_{1n}, \ldots, u_{nn})$، n

www.ttnar.ir

عنصر $\mathbb{R}^n$ باشند، متوازی‌السطوح nـ بعدی ایجاد شده توسط $u_1, \dots, u_n$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$P(u_1, \dots, u_n) = \{t_1 u_1 + \dots + t_n u_n \mid 0 \le t_i \le 1, i = 1, \dots, n\} \tag{17}$$

با قرار دادن مؤلفه‌های u_1 تا u_n در یک ماتریس $n \times n$ داریم:

$$M = \begin{bmatrix} u_{11} & \dots & u_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{n1} & \dots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

اگر مفهوم دترمینان یک ماتریس $n \times n$ در دست باشد، قاعدتاً باید n تایی مرتب $(u_1, \dots, u_n)$ را "راستگرد" (به ترتیب "چپگرد") بنامیم اگر $\det M > 0$ (به ترتیب $\det M < 0$)، و $\det M = 0$ باید معادل وابستگی خطی $\{u_1, \dots, u_n\}$ باشد. همچنین $|\det M|$ را باید "حجم nـ بعدی $P(u_1, \dots, u_n)$" تعریف کرد. تعمیم دترمینان به ماتریس‌های $n \times n$ و پیگیری این مفاهیم در جلسه آینده انجام خواهد شد.

به سؤال اولیه‌ای که بحث بالا را پیش آورد باز می‌گردیم. اگر $\{u, v\}$ در $\mathbb{R}^3$ مستقل خطی باشد، می‌خواستیم بدانیم $u \times v$ کدامیک از دو بردار عمود بر صفحه u, v به طول $|u||v||\sin\alpha|$ است. اکنون ادعا می‌کنیم:

(۱۰ــ۲) اگر $\{u, v\}$ یک مجموعهٔ مستقل خطی در $\mathbb{R}^3$ باشد، سه‌تایی مرتب $(u, v, u \times v)$ راستگرد است.

اثبات. باید نشان دهیم دترمینان ماتریس زیر مثبت است:

$$M = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_2 & v_2 & u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_3 & v_3 & u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{bmatrix}$$

که طبق (۱۵) می‌شود:

$$\det M = (u_۲ v_۳ - u_۳ v_۲)^۲ + (u_۳ v_۱ - u_۱ v_۳)^۲ + (u_۱ v_۲ - u_۲ v_۱)^۲$$

اگر $\{u, v\}$ مستقل خطی باشد، دست کم یکی از سه عبارت بالا صفر نیست و $\det M > ۰$. $\square$

بدین ترتیب $u \times v$ از نظر هندسی به طور منحصر به فرد مشخص می‌شود.

www.ttmar.ir

معرفی و دانلود رایگان : جزوات درسی . کتابها . نرم افزار های مهندسی . و ارائه بهترین مقالات روز علم عمران
.ir
مرجع دانشجویان و مهندسین عمران
منبع iransaze.net
www.icivil.ir

حجم و دترمینان (۲)

هدف ما در این بخش تعمیم مفاهیم دترمینان و حجم به $\mathbb{R}^n$ است. نخست تعریف هندسی و تعریف جبری دترمینان ماتریس‌های ۲ × ۲ و ۳ × ۳ را یادآوری می‌کنیم. فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \text{یا} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

ستون‌های ماتریس ۲ × ۲ را به ترتیب از چپ به راست به A^1 و A^2، و ستون‌های ماتریس ۳ × ۳ را به A^1، A^2 و A^3 نمایش می‌دهیم. در $\mathbb{R}^2$، متوازی‌الاضلاع $P(A)$ را به صورت

$$P(A) = \{t_1A^1 + t_2A^2 \mid 0 \le t_1 \le 1, 0 \le t_2 \le 1\}$$

و در $\mathbb{R}^3$، متوازی‌الاضلاع $P(A)$ را به صورت

$$P(A) = \{t_1A^1 + t_2A^2 + t_3A^3 \mid 0 \le t_1 \le 1, 0 \le t_2 \le 1, 0 \le t_3 \le 1\}$$

در نظر می‌گیریم.

(۱۱—۱) تعریف هندسی دترمینان

در حالت ۲ × ۲: مساحت $P(A) = |\det A|$

$$\text{علامت } \det A = \begin{cases} + & \text{اگر زوج مرتب } (A^1, A^2) \text{ راستگرد باشد} \\ - & \text{اگر زوج مرتب } (A^1, A^2) \text{ چپگرد باشد} \\ 0 & \text{اگر } \{A^1, A^2\} \text{ وابسته خطی باشد} \end{cases}$$

www.ttmar.ir

icivil.ir مرجع دانشجویان و مهندسین عمران
معرفی و دانلود رایگان : جزوات درسی . کتابها . نرم افزار های مهندسی . و ارائه بهترین مقالات روز علم عمران
www.icivil.ir منبع iransaze.net

در حالت ۳ × ۳: حجم $P(A) = |\det A|$

$$\text{علامت } \det A = \begin{cases} + & \text{اگر سه‌تایی مرتب } (A^1, A^2, A^3) \text{ راستگرد باشد} \\ - & \text{اگر زوج مرتب } (A^1, A^2, A^3) \text{ چپگرد باشد} \\ 0 & \text{اگر } \{A^1, A^2, A^3\} \text{ وابسته خطی باشد} \end{cases}$$

(۱۱—۲) تعریف جبری دترمینان

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \qquad (1)$$

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & 23 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \qquad (2)$$

برای تعمیم این مفاهیم به ماتریس‌های $n \times n$ و $\mathbb{R}^n$، طبعاً ما ذهنیتی پیشینی نسبت "به حجم nـ بعدی" و "راستگرد بودن یک nـ تایی بردارها در $\mathbb{R}^n$" نداریم. بنابراین راهبرد ما این خواهد بود که تعریف جبری را به‌گونه‌ای تعمیم دهیم که قدرمطلق آن خواصی مشابه مساحت و حجم در $\mathbb{R}^n$ را داشته باشد و علامت آن، nـ تایی‌های برداری مستقل خطی را به دو دستهٔ "راستگرد" و "چپگرد" تقسیم کند به نحوی که قرابت مورد نظر با دوگونگی متناظر در $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$ برقرار شود. به این منظور سه ویژگی دترمینان در حالت ۲ × ۲ و ۳ × ۳ را در زیر مورد نظر قرار می‌دهیم و خواهیم دید که به طور کلی برای ماتریس‌های $n \times n$ یک و تنها یک روش نسبت دادن یک عدد به یک ماتریس وجود دارد که این سه ویژگی را داراست. این عدد را "دترمینان ماتریس" نام خواهیم گذارد.

پایهٔ متداول $\mathbb{R}^n$، یعنی $(\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_n)$ را در نظر بگیرید. مقصود از مکعب nـ بعدی واحد، مجموعه

www.ttmar.ir

معرفی و دانلود رایگان : جزوات درسی . کتابها . نرم افزار های مهندسی . و ارائه بهترین مقالات روز علم عمران
www.icivil.ir منبع iransaze.net
icivil.ir مرجع دانشجویان و مهندسین عمران

زیر است:

$$K^n = \{t_1 e_1 + \cdots + t_n e_n \mid 0 \leq t_1 \leq 1, \ldots, 0 \leq t_n \leq 1\} \qquad (3)$$

برای $n = 1$، داریم $K^1 = [0, 1]$، برای $n = 2$، $K^2 = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ و برای $n = 3$، $K^3 = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$ (شکل ۱)

به طور کلی، برای n عضو $A^1, \ldots, A^n$ در $\mathbb{R}^n$، متوازی‌السطوح nـ بعدی ایجاد شده توسط $A^1, \ldots, A^n$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$P(A^1, \ldots, A^n) = \{t_1 A^1 + \cdots + t_n A^n \mid 0 \leq t_i \leq 1, i = 1, \ldots, n\} \qquad (4)$$

اگر nـ تایی‌های A^1 تا A^n را به ترتیب به عنوان ستون‌های یک ماتریس A در نظر می‌گیریم، $P(A^1, \ldots, A^n)$ را به طور خلاصه به $P(A)$ نمایش می‌دهیم.

(۱۱ــ۳) سه ویژگی اساسی دترمینان (برای ماتریس‌های 2×2 و 3×3)

(۱۱ــ۳ــ۱) دترمینان نسبت به هر ستون خطی است اگر سایر ستون‌های ثابت نگاه‌داشته شوند.

مقصود از "خطی بودن" برقراری دو شرط ۷ــ۱ است، یعنی اگر همهٔ درایه‌های یک ستون در عددی r ضرب شوند، دترمینان در r ضرب می‌شود. اگر یک ستون (به عنوان یک nـ تایی عددی) برابر مجموع دو ستون باشد، دترمینان برابر مجموع دترمینان‌های ماتریس‌هایی خواهد شد که از تفکیک دو ستون به‌دست می‌آیند. مثلاً:

$$\det\begin{bmatrix} a_{11}+a'_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+a'_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+a'_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} a'_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a'_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

این دو شرط به سادگی از تعریف جبری (۱) و (۲) به‌دست می‌آیند. نکته این است که در هر جملهٔ سمت راست (۱) و (۲) فقط یک درایه از هر ستون ظاهر می‌شود و با درجه یک. وقتی $r > 0$، تعبیر

www.ttnar.ir

معرفی و دانلود رایگان : جزوات درسی . کتابها . نرم افزار های مهندسی . و ارائه بهترین مقالات روز علم عمران
www.icivil.ir
منبع iransaze.net
.ir مرجع دانشجویان و مهندسین عمران

هندسی شرط اول این است که با ضرب کردن طول یک ضلع متوازی‌الاضلاع (به ترتیب یک ضلع متوازی‌السطوح) در r و ثابت نگاه‌داشتن اضلاع دیگر، مساحت متوازی‌الاضلاع (به ترتیب حجم متوازی‌السطوح) در r ضرب می‌شود. وقتی $r < ۰$، جهت گردش (راستگردی یا چپگردی) اضلاع معکوس می‌شود، بنابراین علامت دترمینان عوض می‌شود (شکل ۲).

تعبیر هندسی شرط دوم در حالت $n = ۲$ در شکل ۳ نمایش داده شده است. اگر یک ضلع متوازی‌الاضلاع، مثلاً ضلع u، برابر مجموع $u' + u''$ باشد به طوری که (u, v)، (u', v) و (u'', v) هر سه راستگرد یا هر سه چپگرد باشند، مساحت $P(u, v)$ برابر مجموع مساحت‌های $P(u', v)$ و $P(u'', v)$ می‌شود. وقتی جهت گردش سه دوتایی یکسان نباشد، باید علامت دترمینان را نیز منظور کرد. تعبیر مشابهی در حالت سه‌بعدی برقرار است و این حکم را می‌توان از اینکه مساحت برابر $|u \times v|$ و حجم برابر $|(u \times v) \cdot w|$ است نتیجه گرفت.

اکنون ویژگی اساسی دوم دترمینان را بیان می‌کنیم:

(۱۱—۳—۲) دترمینان نسبت به ستون‌ها "ضدمتقارن" است، یعنی هرگاه جای دو ستون تعویض شود، دترمینان در (۱—) ضرب می‌شود.

این مطلب را می‌توان به طور جبری از تعریف‌های جبری (۱) و (۲) مشاهده کرد. تعبیر هندسی این است که تعویض ترتیب دو ضلع جهت گردش را معکوس می‌کند. توجه کنید که اگر k بار تعویض ستونی صورت گیرد، هر بار دترمینان در (۱—) ضرب می‌شود، بنابراین پس از k تعویض، دترمینان در $(-۱)^k$ ضرب خواهد شد.

بالاخره، ویژگی اساسی سوم دترمینان به شرح زیر است:

$$\det \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} = ۱ \quad , \quad \det \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = ۱ \qquad (۳-۳-۱۱)$$

در حالت ۲×۲، این بدین معنی است که مساحت مربع واحد برابر یک است و دوتایی مرتب

معرفی و دانلود رایگان : جزوات درسی . کتابها . نرم افزار های مهندسی . و ارائه بهترین مقالات روز علم عمران
www.icivil.ir منبع iransaze.net
icivil.ir مرجع دانشجویان و مهندسین عمران

$(\mathrm{e}_۱, \mathrm{e}_۲)$ راستگرد می‌باشد. مشابهاً در حالت ۳×۳، حجم مکعب واحد برابر یک است و سه‌تایی مرتب $(\mathrm{e}_۱, \mathrm{e}_۲, \mathrm{e}_۳)$ راستگرد است.

خواهیم دید که این سه ویژگی دترمینان را به طور منحصر به فرد مشخص می‌کنند. لازم است نخست مفهوم "ضدتقارن" را کمی بیشتر بررسی کنیم. به طور کلی جابجا کردن ترتیب n شیء، مانند n ستون یک ماتریس $n \times n$، یک "جایگشت" خوانده می‌شود. اگر n شیء را با شماره‌گذاری به مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ نمایش دهیم، یک جایگشت $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ در واقع یک تابع یک به یک و پوشا از $\{۱, \ldots, n\}$ به خود آن است.

$$\sigma : \{۱, \ldots, n\} \longrightarrow \{۱, \ldots, n\}$$

مقصود از $\sigma(i)$ جای جدید i است. تابع همانی جایگشتی است که هر یک از ۱ تا n را سرجای خود نگاه می‌دارد. یک نوع جایگشت ساده، "تبادل" است. مقصود از یک تبادل یا ترانهش جایگشتی است که $(n-۲)$ عنصر را تثبیت می‌کند و جای دو عنصر باقیمانده را تعویض می‌کند. مثلاً

$$۱ \longrightarrow ۱ \quad , \quad ۲ \longrightarrow ۳ \quad , \quad ۳ \longrightarrow ۲ \quad , \quad ۴ \longrightarrow ۴$$

یک تبادل $\{۱, ۲, ۳, ۴\}$ است.

(۱۱−۴) قضیه. هر جایگشت $\{۱, \ldots, n\}$ را می‌توان به صورت ترکیبی متناهی از تبادل‌ها نمایش داد. روش نمایش یکتا نیست ولی تعداد تبادل‌های لازم همواره زوج یا همواره فرد است.

برهان. حکم اول را می‌توان با استقراء ثابت کرد. برای $n = ۱$، حکم واضح است. فرض کنید حکم تا n ثابت شده است، آن را برای $(n + ۱)$ ثابت می‌کنیم. پس فرض کنید σ یک جایگشت $\{۱, \ldots, n, n + ۱\}$ است. اگر σ همانی باشد، می‌توان نوشت $\sigma = \tau \circ \tau$ که τ یک تبادل دلخواه است. اگر σ همانی نباشد، σ دست‌کم یک i را جابجا می‌کند، مثلاً $\sigma(i) = j \neq i$. حال تبادل ρ را در نظر بگیرید که بدین صورت تعریف می‌شود: $\rho(i) = j$، $\rho(j) = i$ و $\rho(k) = k$ اگر $k \neq i, j$ ترکیب $\rho \circ \sigma$

معرفی و دانلود رایگان : جزوات درسی . کتابها . نرم افزار های مهندسی . و ارائه بهترین مقالات روز علم عمران
www.icivil.ir
منبع iransaze.net
icivil.ir مرجع دانشجویان و مهندسین عمران

جایگشتی است که i را تثبیت می‌کند زیرا که $(\rho\circ\sigma)(i)=\rho(j)=i$. بدین ترتیب می‌توان $\rho\circ\sigma$ را یک جایگشت n شیء $\{۱,\ldots,i-۱,i+۱,\ldots,n+۱\}$ تلقی کرد. طبق فرض استقراء، ρ باید ترکیب تعدادی تبادل τ_i باشد (که i را ثابت نگاه می‌دارند)، $\rho\circ\sigma=\tau_k\circ\cdots\circ\tau_۱$. حال اگر روی دو طرف، تبادل ρ را اثر دهیم، چون همانی $=\rho\circ\rho$، نتیجه می‌شود که $\sigma=\rho\circ\tau_k\circ\cdots\circ\tau_۱$ یعنی σ ترکیبی از تبادل‌ها است.

برای حکم دوم نخست به هر جایگشت σ از $\{۱,\ldots,n\}$ عدد $\varepsilon(\sigma)$ را به صورت زیر نسبت می‌دهیم:

$$\varepsilon(\sigma)=\frac{۱}{(۱)!(۲)!\ldots(n-۱)!}\prod_{i<j}(\sigma(j)-\sigma(i)) \qquad (۵)$$

نشان می‌دهیم که $\varepsilon(\sigma)=\pm۱$. توجه کنید که به‌ازای هر $k\neq l$، $k,l\in\{۱,\ldots,n\}$، جملهٔ $(k-l)$ یا $(l-k)$ یک و فقط یک بار در حاصل‌ضرب سمت راست ظاهر می‌شود، بنابراین می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}\textstyle\prod_{i<j}(\sigma(i)-\sigma(j)) &= \pm\textstyle\prod_{k<l}(l-k)\\ &= \pm(\textstyle\prod_{۱<l}(l-۱))(\prod_{۲<l}(l-۲))\ldots(\prod_{n-۱<l}(l-(n-۱)))\end{aligned}$$

و طرف راست برابر $\pm(n-۱)!\ldots(۱)!$ است. بنابراین $\varepsilon(\sigma)=\pm۱$. حال اثر ترکیب یک تبادل τ را با σ بر $\varepsilon(\sigma)$ بررسی می‌کنیم. نشان می‌دهیم $\varepsilon(\tau\circ\sigma)=-\varepsilon(\sigma)$. فرض کنید تبادل τ دو عدد متمایز μ و ν را جابجا می‌کند و سایر اعداد را ثابت نگاه می‌دارد، مثلاً $\mu<\nu$. در حاصل‌ضرب طرف راست (۵) جملات $(\sigma(j)-\sigma(i))$ که در آنها $\sigma(i)\neq\mu,\nu$ و $\sigma(j)\neq\mu,\nu$ تغییری نمی‌کنند، داریم:

$$(\tau\circ\sigma)(j)-(\tau\circ\sigma)(i)=\sigma(j)-\sigma(i)$$

یکی از دو جملهٔ $(\nu-\mu)$ یا $(\mu-\nu)$ یک و فقط یک‌بار به صورت $(\sigma(i)-\sigma(j))$ ظاهر می‌شود که با اثر دادن τ، در (-۱) ضرب می‌شود. سایر جملات $(\sigma(j)-\sigma(i))$ را که در آنها یکی از جمله‌ها برابر μ یا ν است. می‌توان دوتا، دوتا، به صورت زیر در نظر گرفت:

$$\pm(\sigma(k)-\nu)(\sigma(k)-\mu) \quad , \quad \sigma(k)\neq\mu,\nu \qquad (٦)$$

www.ttmar.ir

معرفی و دانلود رایگان : جزوات درسی . کتابها . نرم افزار های مهندسی . و ارائه بهترین مقالات روز علم عمران
www.icivil.ir
منبع iransaze.net
icivil.ir
مرجع دانشجویان و مهندسین عمران

و (٦) تحت اثر τ تغییر علامت نمی‌دهد:

$$\begin{aligned}((\tau\circ\sigma)(k)-\tau(\nu))((\tau\circ\sigma)(k)-\tau(\mu)) &= (\sigma(k)-\mu)(\sigma(k)-\nu)\\ &= (\sigma(k)-\nu)(\sigma(k)-\mu)\end{aligned}$$

بنابراین ماحصل اثر دادن τ این است که $\varepsilon(\sigma)$ در (-۱) ضرب می‌شود:

$$\varepsilon(\tau\circ\sigma) - \varepsilon(\sigma) \qquad ,\text{تبادل } : \tau \tag{۷}$$

توجه کنید که اگر σ همانی باشد، $\varepsilon(\sigma)=۱$ زیرا به‌ازای $i<j$، $\sigma(j)-\sigma(i)=j-i>۰$. بنابراین برای هر تبادل τ داریم $\varepsilon(\tau)=-۱$. حال اگر σ یک جایگشت دلخواه باشد، طبق قسمت اول قضیه، σ را به صورت ترکیبی از تبادل‌ها می‌نویسیم، $\sigma=\tau_k\circ\cdots\circ\tau_۱$ با استفاده مکرر از (۷) داریم:

$$\varepsilon(\sigma)=(-۱)^k \tag{۸}$$

که k تعداد تبادل‌هاست. چون به هر σ یک $\varepsilon(\sigma)$ مشخص نسبت داده شده است، (۸) نشان می‌دهد تعداد تبادل‌های لازم برای نمایش σ باید همواره زوج یا همواره فرد باشد. □

به عنوان دستاوردی از قضیه بالا، اگر $\sigma_۱$ و $\sigma_۲$ دو جایگشت باشند، داریم:

$$\varepsilon(\sigma_۱\circ\sigma_۲)=\varepsilon(\sigma_۱)\cdot\varepsilon(\sigma_۲) \tag{۹}$$

یک جایگشت را زوج (به ترتیب فرد) می‌نامیم در صورتی که $\varepsilon(\sigma)=+۱$ (به ترتیب $\varepsilon(\sigma)=-۱$). هر جایگشت زوج ترکیب تعدادی زوج تبادل است و هر جایگشت فرد ترکیب تعدادی فرد تبادل.

به کمک قضیه ۱۱—۴ اکنون می‌توانیم نسبت به تعمیم مفهوم دترمینان به ماتریس‌های $n\times n$ اقدام کنیم.

(۱۱—۵) گزاره. فرض کنید به هر ماتریس $n\times n$، A، عددی $D(A)$ نسبت داده‌ایم که واجد دو شرط زیر است:

الف) $D(A)$ نسبت به هر ستون خطی است اگر سایر ستون‌ها ثابت نگاه‌داشته شوند.

www.ttnar.ir

معرفی و دانلود رایگان : جزوات درسی . کتابها . نرم افزار های مهندسی . و ارائه بهترین مقالات روز علم عمران
www.icivil.ir منبع iransaze.net
icivil.ir مرجع دانشجویان و مهندسین عمران

ب) $D(A)$ نسبت به ستون‌ها ضدمتقارن است، یعنی جابجایی دو ستون آن را در (-1) ضرب می‌کند.

در این صورت مقدار $D(I_n)$، D را به طور منحصر به فرد مشخص می‌کند.

برهان. ستون‌های ماتریس $A = [a_{ij}]$ را به $A^1, \ldots, A^n$ نمایش می‌دهیم. اگر ستون j ام، A_j را به عنوان یک n تایی، یعنی عضوی از $\mathbb{R}^n$ در نظر بگیریم، داریم:

$$A^j = a_{1j}e_1 + \cdots + a_{nj}e_n$$

با توجه به (الف) داریم

$$D(A) = \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_n=1}^{n} a_{i_1 1}a_{i_2 2} \ldots a_{i_n n}D[e_{i_1}|e_{i_2}| \cdots |e_{i_n}] \tag{10}$$

در ماتریس بالا چنانچه برای $\mu \neq \nu$ داشته باشیم $e_{i_\mu} = e_{i_\nu}$، مقدار $D[e_{i_1}| \cdots |e_{i_n}]$ صفر می‌شود زیرا که جابجایی e_{i_μ} و e_{i_μ} از یک طرف ماتریس سمت راست بالا را عوض نمی‌کند و از طرفی دیگر طبق (ب) مقدار D باید در (-1) ضرب شود. بنابراین $D[e_{i_1}| \ldots |e_{i_n}]$ صفر است مگر اینکه $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ جایگشتی σ از $(1, 2, \ldots, n)$ باشد. بنابراین می‌توان (۱۰) را به صورت زیر نوشت:

$$D(A) = \sum_{\sigma:\ \text{جایگشت}} a_{\sigma(1),1} \ldots a_{\sigma(n),n}D[e_{\sigma(1)}| \cdots |e_{\sigma(n)}]$$

ولی از خاصیت ضد تقارن (ب) می‌توانیم نتیجه بگیریم که:

$$\begin{aligned} D[e_{\sigma(1)}| \cdots |e_{\sigma(n)}] &= \varepsilon(\sigma)D[e_1| \cdots |e_n] \\ &= \varepsilon(\sigma)D(I_n) \end{aligned}$$

پس

$$D(A) = \sum_{\sigma:\ \text{جایگشت}} \varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1),1} \ldots a_{\sigma(n),n}D(I_n) \tag{11}$$

و گزاره به اثبات می‌رسد. □

www.tinar.ir

معرفی و دانلود رایگان : جزوات درسی . کتابها . نرم افزار های مهندسی . و ارائه بهترین مقالات روز علم عمران
www.icivil.ir
منبع iransaze.net
icivil.ir مرجع دانشجویان و مهندسین عمران

همچنان که در بررسی سه ویژگی اصلی دترمینان ۲×۲ و ۳×۳ دیدیم، ویژگی‌های اول و دوم، که مشابه (الف) و (ب) هستند، ویژگی‌های ابتدایی مساحت و حجم متوازی‌الاضلاع و متوازی‌السطوح با منظور کردن علامت هستند ویژگی سوم، یعنی نسبت‌دادن عددی به مکعب واحد، به منزله ارائه واحد یا مقیاس برای مساحت یا حجم است.

توجه کنید که ستون‌های I_n در واقع بردارهای تعریف کننده مکعب واحد هستند. با تعیین $D(I_n)$ مقدار $D(A)$ برای هر ماتریس A مشخص می‌شود. چنانچه $D(I_n)$ را برابر ۱ بگیریم تابع D حاصل، طبق تعریف، $\det(A)$ (دترمینان A)، خوانده می‌شود، پس:

$$\det A = \sum_{\text{جایگشت } :\sigma} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(۱),۱} \dots a_{\sigma(n),n} \tag{۱۲}$$

(۱۱–۶) نتیجه. تابع $\det$ که به هر ماتریس $n \times n$ مقدار (۱۲) را نسبت می‌دهد یگانه تابع از ماتریس‌های $n \times n$ به $\mathbb{R}$ است که سه ویژگی زیر را دارد: (الف) نسبت به هر ستون خطی است وقتی سایر ستون‌ها ثابت نگاه‌داشته شوند. (ب) نسبت به ستون‌ها ضدمتقارن است، و (ج) $\det(I_n) = ۱$. □

تعریف. برای $A^۱, \dots, A^n \in \mathbb{R}^n$، حجم nـ بعدی متوازی‌السطوح $P(A)$ برابر $|\det A|$ است.

تعبیر زیر برحسب نگاشت‌های خطی نیز مورد استفاده قرار خواهد گرفت. ماتریس A که از کنار هم قراردادن n تایی‌های $A^۱, \dots, A^n$ به‌دست می‌آید در واقع نماینده یک نگاشت خطی $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ است که $f(e_j) = A^j$، برای هر $j = ۱, \dots, n$. $\det f$ را همان $\det A$ تعریف می‌کنیم. نگاشت خطی f مکعب واحد را به متوازی‌السطوح $P(A)$ می‌نگارد. پس $|\det f|$ در واقع حجم nـ بعدی تصویر مکعب واحد تحت f است.

(۱۱–۸) گزاره. برای تابع‌های خطی $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ و $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ داریم:

$$\det(g \circ f) = (\det g)(\det f) \tag{۱۳}$$

معرفی و دانلود رایگان : جزوات درسی . کتابها . نرم افزار های مهندسی . و ارائه بهترین مقالات روز علم عمران
www.icivil.ir منبع iransaze.net
icivil.ir مرجع دانشجویان و مهندسین عمران

یا اگر ماتریس f را به A و ماتریس g را به B نمایش دهیم:

$$\det(BA) = (\det B)(\det A) \tag{۱۴}$$

برهان. برای اثبات، g (معادلاً B) را تثبیت می‌کنیم و دو تابع زیر از مجموعهٔ ماتریس‌های $n \times n$ به $\mathbb{R}$ را در نظر می‌گیریم:

$$D_1, D_2 : \text{مجموعه‌ماتریس‌های } n \times n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$D_1(A) = (\det B)(\det A)$$

$$D_2(A) = \det(BA)$$

اگر نشان دهیم D_1 و D_2 هر دو واجد شرط‌های (الف) و (ب) گزارهٔ (۱۱—۵) هستند، از این گزاره نتیجه می‌شود که مقدار D_1 و D_2 با دانستن مقدار آنها به‌ازای $A = I_n$ تعیین می‌شود. ولی داریم:

$$D_1(I_n) = (\det B)(\det I_n) = \det B$$

$$D_2(I_n) = \det(BI_n) = \det B$$

پس اگر ثابت شود که شرط‌های (الف) و (ب) برای D_1 و D_2 برقرارند، خواهیم داشت $D_1(A) = D_2(A)$ برای هر ماتریس A و حکم گزاره به اثبات می‌رسد. برای $D_1(A)$ که مضرب ثابتی از $\det A$ است برقرار بودن (الف) و (ب) واضح است. موضوع را در مورد D_2 تحقیق می‌کنیم. فرض کنید A^j، ستون jـ ام A، به صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a'_{1j} \\ \vdots \\ a'_{nj} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a''_{1j} \\ \vdots \\ a''_{nj} \end{bmatrix}$$

در این صورت ستون jـ ام ماتریس BA می‌شود:

$$\begin{bmatrix} \sum_{\nu=1}^{n} b_{1\nu}a_{\nu j} \\ \vdots \\ \sum_{\nu=1}^{n} b_{n\nu}a_{\nu j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{\nu=1}^{n} b_{1\nu}a'_{\nu j} \\ \vdots \\ \sum_{\nu=1}^{n} b_{n\nu}a'_{\nu j} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sum_{\nu=1}^{n} b_{1\nu}a''_{\nu j} \\ \vdots \\ \sum_{\nu=1}^{n} b_{n\nu}a''_{\nu j} \end{bmatrix}$$

چون ویژگی (الف) در مورد det برقرار است داریم:

$$\det(BA) = \det(BA') + \det(BA'')$$

www.ttnar.ir

معرفی و دانلود رایگان : جزوات درسی . کتابها . نرم افزار های مهندسی . و ارائه بهترین مقالات روز علم عمران
www.icivil.ir
مرجع دانشجویان و مهندسین عمران
منبع iransaze.net

که در آن A' و A'' ماتریس‌های هستند که از تفکیک ستون jـ ام ماتریس A به‌دست آمده‌اند. پس

$$D_2(A) = D_2(A') + D_2(A'')$$

همین‌طور اگر ستون jـ ام A در عدد r ضرب شود، ستون jـ ام BA نیز در r ضرب خواهد شد و خطی بودن نسبت به ستون jـ ام ثابت می‌شود. در مورد ویژگی (ب)، اگر A' ماتریس باشد که از تعویض ستون‌های i و j ماتریس A به‌دست آید، BA' نیز از تعویض ستون‌های i و j ماتریس BA حاصل می‌شود زیرا که به طور کلی در حاصل‌ضرب دو ماتریس MN، ستون j ام از ضرب کردن ردیف‌های M در ستون jـ ام N به‌دست می‌آید. پس چون $\det$ واجد شرط (ب) است و این شرط برای D_2 نیز نتیجه می‌شود و گزاره به اثبات می‌رسد. $\square$

گزاره بالا نتایج مهمی در پی دارد از جمله:

(۱۱—۹) نتیجه. شرطی لازم و کافی برای وارون‌پذیری تابع خطی $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ این است که $\det f \neq 0$. مشابهاً شرطی لازم و کافی برای وارون‌پذیری ماتریس $n \times n$، A، این است که $\det A \neq 0$.

برهان. اگر A وارون‌پذیر باشد، ماتریسی A^{-1} وجود دارد که $AA^{-1} = I$، پس طبق (۱—۸)، $(\det A)(\det A^{-1}) = 1$، در نتیجه $\det A \neq 0$. بالعکس اگر A (یا معادلاً تابع خطی متناظر، f) وارون‌پذیر نباشد، می‌دانیم ستون‌های A وابستهٔ خطی خواهند شد، پس می‌توان یک ستون را به صورت ترکیب خطی ستون‌های دیگر نوشت. پس با استفاده از بسط دادن به کمک ویژگی (الف)، به مجموع $(n-1)$ دترمینان ماتریس‌هایی می‌رسیم که یک ستون آنها تکرار شده است. دترمینان ماتریسی که دو ستون برابر داشته باشد صفر است زیرا که با تعویض دو ستون از یک سو ماتریس عوض نمی‌شود و از سویی طبق (ب) مقدار دترمینان باید در (۱—) ضرب شود. $\square$

یک دستاورد برهان بالا را جداگانه ثبت می‌کنیم:

(۱۱—۱۰) نتیجه. مجموعهٔ $\{A^1, \ldots, A^n\}$ از عناصر $\mathbb{R}^n$ مستقل خطی است اگر و تنها اگر

معرفی و دانلود رایگان : جزوات درسی . کتابها . نرم افزار های مهندسی . و ارائه بهترین مقالات روز علم عمران
iCIVIL.ir مرجع دانشجویان و مهندسین عمران
منبع iransaze.net
www.icivil.ir

$\det A \neq 0$. $\square$

اکنون می‌توانیم مفهوم "راستگرد" و "چپگرد" را در $\mathbb{R}^n$ تعریف کنیم. فرض کنید $\{A^1, \ldots, A^n\}$ مستقل خطی است. n تایی مرتب $(A^1, \ldots, A^n)$ را راستگرد (به ترتیب چپگرد) می‌نامیم چنانچه $\det A > 0$ (به ترتیب $\det A < 0$). بدین ترتیب عیناً مانند حالت‌های دوبعدی و سه‌بعدی $\det A$ حاوی دو اطلاع زیر است:

i) $|\det A|$ برابر حجم nـ بعدی متوازی‌السطوح $P(A)$ است.

ii) علامت $\det A$ نشان‌دهندهٔ راستگردی یا چپگردی n تایی مرتب ستون‌های $(A^1, \ldots, A^n)$ است.

www.ttmar.ir

خواص تابع‌های پیوسته (۲)

فرض کنید $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع باشد. نقطهٔ $x_\circ$ از S را یک نقطهٔ بیشینه یا ماکسیمم برای تابع f می‌نامیم در صورتی که $f(x_\circ) \geq f(x)$ برای هر x در S. به همین ترتیب نقطه کمینه یا می‌نیمم به عنوان نقطه‌ای $x_\circ$ که در آن $f(x_\circ) \leq f(x)$، برای هر x در S، تعریف می‌شود. در حالت اول $f(x_\circ)$ را بیشینه یا ماکسیمم تابع f در S، و در حالت دوم، $f(x_\circ)$ را کمینه یا می‌نیمم تابع f در S می‌نامند.

به طور کلی، به دلایل مختلف، تابع $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ ممکن است فاقد ماکسیمم یا می‌نیمم باشد. در شکل ۱ سه تابع نمایش داده شده‌اند. در (الف) تابع پیوسته نیست، به‌ازای مقادیر صحیح می‌نیمم تابع اتخاذ می‌شود ولی تابع ماکسیمم ندارد. در واقع تابع به دلخواه به کوچکترین کران بالایی مقادیر خود نزدیک می‌شود ولی به‌ازای هیچ نقطه دامنه برابر کوچکترین کران بالایی، یعنی ۱+، نمی‌شود. در (ب)، تابع پیوسته و صعودی است ولی از آنجا که دامنهٔ تابع یک بازهٔ باز است، تابع در هیچ نقطهٔ دامنه به کوچکترین کران بالایی خود یا بزرگترین کران پایینی نمی‌رسد. در (ج) نیز تابع پیوسته و صعودی است ولی در نزدیک شدن به دو انتهای بازه تابع بی‌کران می‌شود. برای تابعی که مجموعهٔ مقادیرش کران بالایی داشته باشد، نقطهٔ ماکسیمم نقطه‌ای در دامنه است که تابع این مقدار را بگیرد، و به همین ترتیب، برای تابعی که مجموعهٔ مقادیرش کران پایینی داشته باشد، نقطهٔ می‌نیمم نقطه‌ای از دامنه است که مقدار تابع در آن برابر بزرگترین کران پایینی باشد. قضیهٔ زیر نشان می‌دهد که برای یک تابع پیوسته تعریف شده روی $[a, b]$، a, b عدد حقیقی، همواره نقطهٔ ماکسیمم و نقطهٔ می‌نیمم وجود دارد، بالاخص چنین تابعی لزوماً کراندار است.

(۱۲–۱) قضیه. هر تابع پیوسته $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ دارای نقطهٔ ماکسیمم و می‌نیمم در $[a, b]$ است.

www.ttnar.ir

برهان این قضیه را نیز، مانند برهان قضیهٔ مقدار بینی در بخش پیش، نخست برای $[a, b] = [0, 1]$ ارائه می‌کنیم. حالت کلی به روشی کاملاً مانند اثبات قضیهٔ مقدار بینی از همین حالت خاص نتیجه خواهد شد که این نتیجه‌گیری را به خواننده واگذار می‌کنیم.

برهان. فرض می‌کنیم $[a, b] = [0, 1]$، $a = 0$، $b = 1$. نقاط بازهٔ $[0, 1]$ را در مبنای ۲ می‌نویسیم. بدین ترتیب هر عضو $[0, 1]$ نمایشی به شکل

$$c = 0/c_1 c_2 c_3 \ldots$$

دارد که در آن c_i ها رقم ۰ یا ۱ هستند. نقطه‌ای با نمایش بالا جستجو می‌کنیم که نقطهٔ ماکسیمم تابع f باشد. مانند اثبات قضیهٔ مقدار بینی ارقام c_1، c_2، c_3، ... را به ترتیب می‌سازیم ولی روش کار در اینجا از پیچیدگی بیشتری برخوردار است. بازهٔ $[0, 1]$ را به صورت اجتماع دو زیربازهٔ $[0, \frac{1}{2}]$ و $[\frac{1}{2}, 1]$ در نظر می‌گیریم. ادعا می‌کنیم دست کم یکی از دو بازهٔ $[0, \frac{1}{2}]$ و $[\frac{1}{2}, 1]$ ویژگی زیر را دارد:

(*) هیچ نقطهٔ t_0 از این بازه وجود ندارد که به‌ازای هر t در بازهٔ دیگر داشته باشیم:

$$f(t_0) > f(t)$$

این ادعا که دست‌کم یکی از دو بازه $[0, \frac{1}{2}]$ و $[\frac{1}{2}, 1]$ ویژگی (*) را دارد بدین طریق توجیه می‌شود: اگر یکی از این دو بازه ویژگی ذکر شده را نداشته باشد، آنگاه عنصر t_0 از این بازه هست که $f(t_0)$ اکیداً بزرگتر از $f(t)$ برای هر t در بازهٔ دیگر است. بنابراین هیچ عنصری از بازهٔ دیگر وجود ندارد که مقدار f در آن اکیداً بزرگتر از مقدار f در هر نقطهٔ این بازه (بالاخص $f(t_0)$) باشد، یعنی بازهٔ دیگر ویژگی (*) را داراست.

اگر فقط یکی از دو بازه ویژگی (*) را داشته باشد، بازهٔ دیگر را I_1 می‌نامیم، و اگر هر دو بازه این ویژگی را داشته، یکی از آنها را به دلخواه I_1 می‌نامیم. رقم c_1 را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$c_1 = \begin{cases} 0 & \text{اگر } I_1 = [0, \frac{1}{2}] \\ 1 & \text{اگر } I_1 = [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

از این پس جستجو برای نقطهٔ ماکسیمم را به بازهٔ $I_۱$ محدود می‌کنیم. $I_۱$ را به صورت اجتماع دو زیربازهٔ چپ و راست، هر یک به طول $\frac{۱}{۴}$ می‌نویسیم. مجدداً به همان استدلالی که در بالا آمد ادعا می‌کنیم دست‌کم یکی از این دو زیربازهٔ $I_۱$ باید واجد شرط (*) نسبت به دیگری باشد. مانند قبل اگر فقط یک زیربازه شرط (*) را احراز کند، دیگری را $I_۲$ می‌نامیم، و اگر هر دو واجد شرط (*) باشند، یکی را به دلخواه $I_۲$ می‌نامیم. تعریف می‌کنیم:

$$c_۲ = \begin{cases} ۰ & \text{اگر } I_۲ \text{ زیربازهٔ چپ باشد} \\ ۱ & \text{اگر } I_۲ \text{ زیربازهٔ راست باشد} \end{cases}$$

و از این جستجو برای نقطهٔ ماکسیمم را به $I_۲$ محدود می‌کنیم. این فرایند را با نیمه کردن $I_۲$، ادعای اینکه (*) باید برای دست‌کم یک نیمهٔ آن برقرار باشد، انتخاب $I_۳$ و تعیین $c_۳$ برابر صفر یا یک بسته به این که نیمهٔ چپ $I_۳$ باشد یا نیمهٔ راست، ادامه می‌دهیم. با ادامهٔ روش به ترتیب رقم‌های c_n ساخته می‌شوند. ثابت می‌کنیم نقطهٔ $c = ۰/c_۱c_۲c_۳\ldots$ که بدین طریق به‌دست می‌آید یک نقطهٔ ماکسیمم است. استدلال به طریق برهان خلف است. فرض می‌کنیم c یک نقطهٔ ماکسیمم نباشد و به تناقض می‌رسیم. اگر $f(c)$ ماکسیمم نباشد، نقطه‌ای d در $[۰, ۱]$ وجود دارد، $d \neq c$، که:

$$f(d) > f(c) \tag{۱}$$

توجه کنید که هر نقطهٔ غیر از c در یک مرحلهٔ فرایند نصف کردن بالا باید از c جدا شده باشد زیرا فاصله c تا d هرچه قدر کوچک باشد، عددی n وجود دارد $\frac{۱}{۲^n}$ (یعنی طول بازهٔ I_n، که c همواره در آن است) از فاصله c تا d کوچکتر است و بازهٔ شامل c نمی‌تواند شامل d نیز باشد. فرض کنید $n_۱$ اولین مرحله‌ای است که d در زیربازهٔ کنار گذاشته شده واقع شده است. در این صورت طبق (*) نقطه‌ای d' وجود دارد، در بازهٔ $I_{n_۱}$، که:

$$f(d) \leq f(d') \tag{۲}$$

از (۱) و (۲) می‌بینیم که $f(d') > f(c)$. حال در مورد d' نیز استدلالی مشابه d انجام می‌دهیم. داریم $d' \neq c$ چون $f(d') \neq f(c)$، پس $n_۲$ را اولین مرحله‌ای می‌گیریم که d' از c جدا شده است، یعنی d' در

$I_{n_۲}$ قرار ندارد. پس طبق (*) عنصری d'' در $I_{n_۲}$ وجود دارد که:

$$f(d') \leq f(d'') \qquad (۳)$$

بدین ترتیب تاکنون داریم $f(d'') \geq f(d') \geq f(d) \geq f(c)$، با ادامه این استدلال، دنباله‌ای $d^{(k)}$ از نقاط $[۰, ۱]$ پیدا می‌کنیم که $d^{(k)} \in I_{n_k}$ و $n_۱ < n_۲ < n_۳ < \cdots$. چون طول I_j برابر $\frac{۱}{۲^j}$ است و دنبالهٔ $(n_i)_i$ اکیداً صعودی است، دنبالهٔ I_{n_k} به سوی نقطهٔ c منقبض می‌شود و داریم:

$$d^{(k)} \longrightarrow c \quad \text{وقتی} \quad k \longrightarrow +\infty$$

نشان می‌دهیم این در تناقض با $f(c) < f(d)$ است. اگر $f(d) - f(c) > ۰$ را به e نمایش دهیم، نتیجه می‌شود $\delta > ۰$ وجود دارد که برای هر x با $|x - c| < \delta$ داریم $|f(x) - f(c)| < e$، بالاخص $f(x) - f(c) < e$، یا

$$f(x) < f(c) + e \qquad (۴)$$

چون $d^{(k)} \longrightarrow c$، برای k بزرگ داریم $|d^{(k)} - c| < \delta$، پس

$$f(d^{(k)}) < f(c) + e = f(d)$$

که در تناقض با $f(d) \leq f(d') \leq f(d'') \leq \cdots$ است. این تناقض نشان می‌دهد فرض $f(d) > f(c)$ نادرست است و $f(c)$ باید ماکسیمم تابع f در $[۰, ۱]$ باشد.

استدلال مربوط به می‌نیمم کاملاً مشابه است و به خواننده واگذار می‌شود. □

(۱۲−۲) یادداشت. نکته مهمی در مورد اثبات بالا باید ذکر شود. در اثبات اینکه $f(c)$ ماکسیمم است، تنها استفادهٔ ما از پیوستگی f، استفاده از نامساوی (۴) بود. این در واقع "نصف پیوستگی" است زیرا که طبق پیوستگی f در c، برای $e > ۰$، $\delta > ۰$ وجود دارد که $|x - a| < \delta$ نتیجه می‌دهد $|f(x) - f(c)| < e$. نامساوی اخیر شامل دو حکم است:

$$\begin{aligned} f(x) - f(c) &< e \\ -e < f(x) - f(c) & \end{aligned}$$

در اثبات قبل فقط از نامساوی اول استفاده شد. اگر اثبات وجود می‌نیمم را به طور مشابه دنبال کنیم خواهیم دید که در آن اثبات فقط از نامساوی دوم بالا استفاده می‌شود. تابع‌هایی که فقط یکی از دو نامساوی بالا برایشان برقرار باشد تابع‌های "نیم پیوسته" خوانده می‌شوند. به طور خاص، تابع $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ را نیم‌پیوسته از بالا در نقطهٔ c از دامنه می‌نامیم در صورتی که برای هر $e > \circ$، $\delta > \circ$ وجود داشته باشد که هرگاه $x \in S$ و $|x - a| < \delta$، آنگاه

$$f(x) < f(c) + e$$

به همین ترتیب f نیم پیوسته از پایین در نقطهٔ c خوانده می‌شود اگر برای $e > \circ$، $\delta > \circ$ وجود داشته باشد که هرگاه $x \in S$ و $|x - a| < \delta$، آنگاه:

$$f(x) > f(c) - e$$

f را نیم‌پیوسته از بالا در S (به ترتیب نیم‌پیوسته از پایین در S) می‌نامیم در صورتی که f در همهٔ نقاط S نیم‌پیوسته از بالا (به ترتیب نیم‌پیوسته از پایین) باشد.

بدین ترتیب می‌توان برای بهره‌برداری بیشتر از قضیهٔ ۱۲—۱، قضیه را به دو قسمت تجزیه کرد:

(۱۲—۳) قضیه. تابع $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ داده شده است. (الف) اگر f نیم‌پیوسته از بالا باشد، f دارای ماکسیمم در $[a, b]$ است، (ب) اگر f نیم‌پیوسته از پایین باشد، f دارای می‌نیمم در $[a, b]$ است. $\square$

به زودی کاربرد مهمی از این صورت جامعتر قضیه خواهیم دید، ولی نخست مثال‌هایی ارائه می‌کنیم.

مثال ۱. تابع $f : [\circ, ۱] \longrightarrow \mathbb{R}$ را به صورت $f(x) = x - [x]$ در نظر می‌گیریم که مقصود از $[x]$ جزء صحیح x است. در واقع $f(x) = \begin{cases} x & \circ \leq x < ۱ \\ \circ & x = ۱ \end{cases}$. این تابع در همهٔ نقاط به استثنای $x = ۱$ پیوسته است و در $x = ۱$ نیم‌پیوسته از پایین است و نیم‌پیوسته از بالا نیست. فرض کنید $e > \circ$ داده شده است. قطعاً برای هر x داریم:

$$f(x) > f(\circ) - e = -e$$

www.ttmar.ir

زیرا که f در $[0,1]$ نامنفی است. از طرفی دیگر، اگر $e=\frac{1}{2}$ را در نظر می‌گیریم، $\delta>0$ هرچه باشد برای $x\in[0,1]$ که $|x-1|<\delta$ نمی‌توان حکم کرد که

$$f(x)<f(0)+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

زیرا که اگر x از طرف چپ به ۱ نزدیک باشد، $f(x)=x$ نزدیک ۱ است. ضمناً توجه کنید که این تابع در $[0,1]$ دارای می‌نیمم است ولی دارای ماکسیمم نیست.

مثال ۲. تابعی که به صورت $f:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$، $f(x)=[x]-x$ تعریف می‌شود در نقطهٔ ۱ نیم‌پیوسته از بالا است ولی نیم‌پیوسته از پایین نیست. در واقع داریم $f(x)=\begin{cases}-x & 0\leq x<1\\ 0 & x=1\end{cases}$. برای $e>0$ داده شده، x هر نقطه‌ای که در دامنه باشد، داریم $f(x)<f(0)+e=e$ زیرا که مقادیر f نامثبت‌اند، پس نیم‌پیوستگی از بالا برقرار است. بالعکس برای $e=\frac{1}{2}$، $\delta>0$ هرچه باشد، $|x-1|<\delta$، $x\in[0,1]$، دلالت بر $f(x)>f(1)-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$ نمی‌کند زیرا که برای x نزدیک ۱ از سمت چپ مقدار f نزدیک -1 است.

اکنون کاربرد مهمی از نیم‌پیوستگی را در رابطه با بحث "پیوستگی یکنواخت" که در پایان بخش ۹ آمد ارائه می‌کنیم. فرض کنید $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ یک تابع پیوسته باشد. از گزارهٔ ۹—۴ به یاد می‌آوریم که هرگاه $e>0$ داده شده باشد، برای هر نقطهٔ $t\in[a,b]$، عددی $\delta>0$ وجود دارد که برای هر دو نقطهٔ t_1 و t_2 از $[a,b]$ که در $]t-\delta,t+\delta[$ قرار گیرند داریم $|f(t_1)-f(t_2)|<e$. برای هر $t\in[a,b]$، $\delta(t)$ را برابر کوچکترین کران بالایی $\delta>0$ هایی می‌گیریم که در ویژگی بالا صدق می‌کنند ولی سقف $b-a$ را برای $\delta(t)$ منظور می‌کنیم. توجه کنید که به هر حال اگر δ از $b-a$ بزرگتر شود، آنگاه $]t-\delta,t+\delta[$ از بازهٔ $[a,b]$ بزرگتر می‌شود و بزرگتر کردن آن نقاط جدیدی از $[a,b]$ به‌دست نمی‌دهد. بدین ترتیب اگر $\delta<\delta(t)$، آنگاه برای هر دو نقطهٔ t_1 و t_2 که در $]t-\delta_1,t+\delta_1[$ باشند، داریم $|f(t_1)-f(t_2)|<e$.

(۱۲—۴) لم. برای $e>0$ ثابت، تابع $\delta(t)$ که برای $t\in[a,b]$ تعریف شده است، نیم‌پیوسته از پایین است.

www.ttmar.ir

برهان. باید ثابت کنیم برای هر $e' > ۰$ داده شده، $\delta' > ۰$ وجود دارد که هرگاه $t' \in]t - \delta', t + \delta'[$، آنگاه $\delta(t') > \delta(t) - e'$. یعنی باید ثابت کنیم که برای این δ'، اگر $|t' - t| < \delta$ و $t_۱$ و $t_۲$ در فاصلهٔ $\delta(t) - e$ از t' قرار گیرند، آنگاه $|f(t_۱) - f(t_۲)| < e$. برای مطلب اخیر، کافی است نشان دهیم که اگر $t_۱$ و $t_۲$ در این بازه باشند، آنگاه $t_۱, t_۲ \in]t - \delta(t), t + \delta(t)[$. قرار می‌دهیم $۰ < \delta' < e'$. بنابراین اگر $t_۱, t_۲$ در $]t' - \delta', t' + \delta'[$ باشند، داریم:

$$i = ۱, ۲ : \quad |t_i - t| \leq |t_i - t'| + |t' - t| < \delta' + \delta(t) - e' < \delta(t)$$

و حکم به اثبات می‌رسد. □

به کمک این لم اکنون می‌توان به سادگی دید که هر تابع پیوسته $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ به طور یکنواخت پیوسته است، یعنی هرگاه $e > ۰$ داده شده باشد، آنگاه $\delta > ۰$ وجود دارد که برای هر دو نقطهٔ $t_۱$ و $t_۲$ از $[a, b]$ با $|t_۱ - t_۲| < \delta$، داریم $|f(t_۱) - f(t_۲)| < e$. به این منظور، برای $e > ۰$ داده شده، برای هر $t \in [a, b]$، $\delta(t)$ را طبق بحث فوق در نظر می‌گیریم δ تابعی است با مقادیر اکیداً مثبت که طبق لم نیم‌پیوسته از پایین است. بنابراین طبق ۱۲—۳، ب، $\delta(t)$ در $[a, b]$ می‌نیمم خود را اتخاذ می‌کند. مقدار این می‌نیمم را به δ نمایش می‌دهیم، پس $\delta \leq \delta(t)$ برای هر t. در نتیجه اگر $|t_۱ - t_۲| < \delta$، آنگاه $t_۲$ در فاصلهٔ کوچکتر یا مساوی $\delta(t_۱)$ از $t_۱$ قرار دارد، بنابراین $|f(t_۲) - f(t_۱)| < e$ و حکم به اثبات می‌رسد:

(۱۲—۵) قضیه. هر تابع پیوسته $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ به طور یکنواخت پیوسته است. □

www.ftnar.ir

خم‌های هموار در $\mathbb{R}^n$ (۲)

همهٔ ما تصویری ذهنی از شدت یا ضعف "خمیدن" یا "انحنای" یک خم هندسی (تصویر یک خم پارامتری داریم. معمولاً تصور ما از انحنا، شدت انحراف یک خم از "خط راست بودن" است. مثلاً انحنای یک دایره با شعاع بزرگ را کوچکتر از انحنای یک دایره با شعاع کوچک می‌دانیم. موجوداتی که روی یک کرهٔ با شعاع بزرگ زندگی کنند دیرتر از موجوداتی که روی یک کره با شعاع کوچک زندگی کنند به کروی بودن زیستگاه خود پی می‌برند. معادلاً می‌توان گفت که پیمودن مسافتی روی دایره‌ای کوچک، در مقایسه با پیمودن همان مسافت روی دایرهٔ بزرگ، متحرک را از خط مماس در نقطهٔ آغاز حرکت دورتر می‌کند (شکل ۱، الف و ب). بدین ترتیب انتظار داریم که تعریف ریاضی انحنا به گونه‌ای باشد که در شکل ۱، ج، انحنا در نقطه P بزرگتر از انحنا در نقطهٔ Q باشد.

الف　　　　ب　　　　ج

شکل ۱

(۱۳—۱) خم‌های مسطح با این پیش درآمد، برای ارائه تعریف دقیق ریاضی از انحنا، به طریق زیر عمل می‌کنیم. نخست بحث ما محدود به خم‌های $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ خواهد بود. نیم‌خطی را به عنوان یک جهت مرجع اختیار می‌کنیم، مثلاً نیم‌خط افقی به طرف راست. برای خم هموار $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$، به‌ازای هر $t \in I$، $\gamma'(t) \neq 0$، بنابراین جهت مثبت خط مماس (نیم‌خط تعیین شده توسط جهت بردار سرعت) نیز مشخص است. حال زاویهٔ θ را به‌ازای هر t، برابر زاویهٔ از نیم‌خط مرجع به نیم‌خط مثبت مماس تعریف می‌کنیم (واحد اندازهٔ زاویه را رادیان می‌گیریم). طبق صحبتی که شد، انحنا باید آهنگ تغییر θ نسبت به مسافت طی شده روی خم باشد، یعنی

$$\kappa = \frac{d\theta}{ds} \qquad (۱)$$

(κ: حرف یونانی "کاپا"، معمولاً برای انحنا به کار گرفته می‌شود.) تعریف دقیق θ را باید (ضریب زاویهٔ خط مماس) $arc\tan$ گرفت. دو شکل در اینجا ظاهر می‌شود:

شکل ۲

۱) ضریب زاویه مربوط به خط مماس است که با یک بار مشتق‌گیری از خم γ به‌دست می‌آید، بنابراین مشتق‌گیری مجدد، $\frac{d\theta}{ds}$،مستلزم این است که خم اولیه دوبار مشتق‌پذیر باشد.
۲) وقتی خط مماس در وضعیت قائم قرار گیرد، ضریب زاویه تعریف نشده است (یا ∞ است) هر چند که به نظر می‌رسد θ قابل تعریف شدن باشد.

در مورد (۱)، از این پس برای بحث در مورد انحنا فرض می‌کنیم که γ دوبار مشتق‌پذیر باشد. در مورد (۲)، اشکال تعریف θ برطرف شدنی است و در تعریف معادلی که بعداً از انحنا ارائه خواهد شد، به آن اشاره خواهیم کرد. فعلاً با همین تعریف (۱)، وضعیت خط راست و دایره را بررسی می‌کنیم:

مثال ۱. برای خط راست در صفحه، θ، ثابت است، پس $\frac{d\theta}{ds} = ۰$، بین انحنای خط راست، همچنان که انتظار داریم، صفر است.

شکل ۳

مثال ۲. دایره‌ای به شعاع R در نظر بگیرید که در جهت مثلثاتی پرمایش شده است (شکل ۴).

شکل ۴

داریم

$$\theta = \frac{\pi}{۲} + \alpha$$

$$\alpha = \frac{s}{R} \quad \text{(برحسب رادیان)}$$

پس $\kappa = \frac{d\theta}{ds} = \frac{۱}{R}$. بدین ترتیب همان گونه که انتظار می‌رفت، انحنا متناسب با معکوس شعاع دایره است.

در مثال بالا، اگر دایره در جهت عقربهٔ ساعت پرمایش شود، خواهیم داشت $\theta = \alpha - \frac{\pi}{۲}$ و $\alpha = -\frac{s}{R}$ (α را همواره در جهت مثلثاتی مثبت، و s را در جهت حرکت مثبت فرض می‌کنیم)، پس

www.ttmar.ir

$\kappa = \frac{d\theta}{ds} = -\frac{1}{R}$. بعضی کتاب‌ها از قدرمطلق $\frac{d\theta}{ds}$ به عنوان انحنا صحبت می‌کنند، که در آن صورت علامت منفی ظاهر نمی‌شود، ولی این روش باعث از دست رفتن پاره‌ای اطلاعات مهم می‌شود. در تعریف ما، صعود θ در جهت حرکت به منزلهٔ انحنای مثبت و نزول آن به معنای انحنای منفی است.

شکل ۵

به زودی به مفهوم فیزیکی این علامت اشاره خواهیم کرد.

با تعریف (۱) می‌توان به محاسبه انحنای انواع خم‌ها اقدام کرد، ولی در اینجا ترجیح می‌دهیم تعریف معادلی از انحنا ارائه کنیم که قابلیت تعمیم به خم‌های واقع در ابعاد بالاتر را نیز دارد. خم هموار دوبار مشتق‌پذیر $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ را در نظر بگیرید. مماس واحد در جهت حرکت به‌ازای هر $t \in I$ قابل تعریف کردن است:

$$\vec{T} = \frac{1}{|\gamma'(t)|}\gamma'(t) \qquad \text{(هموار بودن موجب می‌شود که } \gamma'(t) \neq 0\text{)} \tag{۲}$$

ضمناً بنابر (۵) بخش قبل، داریم:

$$\vec{T} = \frac{d\vec{r}}{ds} \tag{۳}$$

که s مقدار تابع طول در جهت حرکت است. چون $\vec{T}$ یک بردار واحد است، می‌توان مؤلفه‌های افقی و قائم آن را به ترتیب به صورت کسینوس و سینوس زاویهٔ θ نوشت:

$$\vec{T} = (\cos\theta, \sin\theta) \tag{۴}$$

اگر γ دوبار مشتق‌پذیر باشد، می‌توان ثابت کرد (ولی اثبات دقیق از حوصلهٔ این درس خارج است) که θ را می‌توان در طول خم به صورت تابعی مشتق‌پذیر از t (یا s) در نظر گرفت. نکتهٔ قابل توجه در مورد چنین تابع θ این که معمولاً نمی‌توان برای یک خم پیچیده، مقدار θ را به بازهٔ خاصی به طول 2π محدود کرد. به شکل ٦، الف، توجه کنید:

الف ب

شکل ٦

در نقطه A می‌توانیم θ را برابر ۰ یا هر مضرب دیگر ۲π انتخاب کنیم، ولی پس از این انتخاب، وقتی θ به طور پیوسته در طول خم تغییر کند، مقدار آن در نقاط دیگر با انتخاب آن در A تحمیل می‌شود. مثلاً اگر θ را در A برابر ۰ بگیریم، مقدار θ در B برابر $\frac{\pi}{2}$، در C برابر π، در D برابر $\frac{3\pi}{2}$ و در E برابر ۲π خواهد شد. با این که توابع مثلثاتی سینوس و کسینوس برای ۰ و ۲π یک مقدار دارند، و لیکن اگر θ به طور پیوسته تغییر کند، مقدار θ در A و در E برابر نخواهد بود، بلکه به اندازهٔ ۲π افزایش خواهد داشت که یک گردش کامل مماس واحد حول دایرهٔ مثلثاتی را نشان می‌دهد. در شکل ٦ ب، مماس‌های واحد در طول خم را به مبدأ مختصات منتقل کرده‌ایم؛ A'، B'، C'، D' و E' متناظر با A، B، C، D و E هستند. وقتی متحرک در طول خم از A به E حرکت کند، مماس واحد روی دایرهٔ واحد یک دور کامل دایرهٔ مثلثاتی را در جهت مثبت می‌پیماید و بدین ترتیب از A تا E مقدار θ به اندازهٔ ۲π افزایش می‌یابد.

به (۳) و (۴) باز می‌گردیم. $\vec{T}$ همواره طول ثابت واحد را دارد بنابراین آهنگ تغییر آن نسبت به s باید صرفاً خمیدن γ را مشخص کند، یعنی با انحنا رابطه داشته باشد. در واقع:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{T}}{ds} &= (-\sin\theta\frac{d\theta}{ds}, \cos\frac{d\theta}{ds}) \\ &= \kappa(-\sin\theta, \cos\theta)\end{aligned}$$

با توجه به این که $\cos(\theta + \frac{\pi}{2}) = -\sin\theta$ و $\sin(\theta + \frac{\pi}{2}) = \cos\theta$، بردار $(-\sin\theta, \cos\theta)$ عمود بر $\vec{T}$ و چرخش یافته نسبت به آن به اندازهٔ $\frac{\pi}{2}$ در جهت مثلثاتی است. این بردار را به $\vec{N}$ نمایش می‌دهیم و قائم واحد γ می‌نامیم. توجه کنید که به‌ازای هر t، دو قائم واحد قرینه برای γ وجود دارد که $\vec{N}$ آن قائم است که از گردش $\vec{T}$ به اندازهٔ $\frac{\pi}{2}$ در جهت مثلثاتی به‌دست می‌آید. پس داریم:

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \kappa\vec{N} \tag{۵}$$

زوج $(\vec{T}, \vec{N})$ و امتدادهای تعیین شده توسط آنها را به صورت یک دستگاه مختصات متحرک چسبیده به تصویر γ تجسم می‌کنیم $(\vec{T}, \vec{N})$ معمولاً کنج متحرک γ خوانده می‌شود. (۵) را می‌توان این گونه تعبیر کرد که κ آهنگ تغییر این دستگاه مختصات متحرک وابسته به خم است. ضمناً اگر از $\vec{N} = (-\sin\theta, \cos\theta)$ نسبت به s مشتق بگیریم، حاصل می‌شود:

$$\frac{d\vec{N}}{ds} = -\kappa\vec{T} \tag{٦}$$

www.tinar.ir

قبلاً اشاره کردیم که $\kappa = \frac{d\theta}{ds}$ متضمن دوبار مشتق‌گیری از γ است. از این رو رابطهٔ κ را با <u>بردار شتاب</u> $\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ بررسی می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) \\
&= \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\ \frac{d\vec{r}}{ds}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\vec{T}\right) \\
&= \frac{d^2 s}{dt^2}\vec{T} + \left(\frac{ds}{dt}\right)\left(\frac{ds}{dt} \cdot \frac{d\vec{T}}{ds}\right)
\end{aligned}$$

پس

$$\vec{a} = \left(\frac{d^2 s}{dt^2}\right)\vec{T} + \kappa\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \vec{N} \tag{۷}$$

فرمول (۷) را می‌توان تجزیه بردار شتاب در راستای دستگاه مختصات متحرک وابسته به γ تعبیر کرد. توجه کنید که برای $\kappa > 0$، مؤلفه $\vec{a}$ در جهت $\vec{N}$ مثبت و برای $\kappa < 0$، مؤلفه $\vec{a}$ در جهت $\vec{N}$ منفی است. اگر مسیر حرکت را مسیر یک حرکت فیزیکی فرض کنیم، $\vec{a}$ و نیرو همجهت هستند و $\vec{a}$ باید همواره به سوی تقعر منحنی اشاره کند. این نکته با تعبیری که قبلاً از علامت κ ارائه کردیم سازگار است (شکل ۷).

شکل ۷

حال سؤال اساسی زیر را مطرح می‌کنیم: انحنا تا چه حد معرف شکل هندسی (تصویر) یک خم است؟ قضیه زیر پاسخی قاطع به این سؤال می‌دهد. در واقع برای خم‌های هموار، کمیت انحنا شکل منحنی را به طور کامل تعیین می‌کند، یعنی دو منحنی که در نقاط متناظر انحنای برابر داشته باشند با یک حرکت اقلیدسی در صفحه (انتقال + دوران) برهم قابل انطباقند.

(۱۳ــ۲) <u>قضیهٔ اساسی خم‌ها</u> فرض کنید $\alpha, \beta : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ دو خم هموار پرمایش شده برحسب طول باشند. انحناهای α و β را به ترتیب به κ_1 و κ_2 نمایش می‌دهیم. اگر به‌ازای هر $s \in I$، داشته باشیم $\kappa_1(s) = \kappa_2(s)$، آنگاه می‌توان با یک حرکت اقلیدسی (انتقال + دوران) تصویر دو خم را برهم منطبق کرد.

www.ttmar.ir

اثبات یک نقطهٔ مرجع s_0 در I اختیار می‌کنیم. نخست انتقالی در صفحه انجام می‌دهیم که $\alpha(s_0)$ و $\beta(s_0)$ را برهم منطبق کند. "انتقال" به معنی تابعی $f(x,y)=(x,y)+(a,b)$ است که در آن (a,b) برداری ثابت (بردار انتقال) است. بدین ترتیب اگر $\alpha(s)=(\alpha_1(s),\alpha_2(s))$، $f(\alpha(s))=(\alpha_1(s)+a,\alpha_2(s)+b)$، و چون a و b ثابت هستند، $\vec{T}$، $\vec{N}$ و κ (که از مشتق‌گیری از α نسبت به s به‌دست می‌آیند) تغییر نمی‌کنند. بدین ترتیب می‌توان از اول فرض کرد که $\alpha(s_0)=\beta(s_0)$. حال کنج‌های متحرک وابسته به α و β را به ترتیب به $(\vec{T}_1,\vec{N}_1)$ و $(\vec{T}_2,\vec{N}_2)$ نمایش می‌دهیم. از آنجا که $(\vec{T}_1,\vec{N}_1)$ و $(\vec{T}_2,\vec{N}_2)$ هر دو راستگرد هستند، می‌توان با یک دوران به مرکز $\alpha(s_0)=\beta(s_0)$ فرض کرد $\vec{T}_2(s_0)=\vec{T}_1(s_0)$ و $\vec{N}_2(s_0)=\vec{N}_1(s_0)$. توجه کنید که دوران، زاویه θ را به مقداری ثابت تغییر می‌دهد، پس تابع‌های انحنا تغییر نخواهد کرد. بدین ترتیب می‌توان از آغاز فرض کرد که $\vec{T}_2(s_0)=\vec{T}_1(s_0)$ و $\vec{N}_2(s_0)=\vec{N}_1(s_0)$. حال تابع $\varphi: I\longrightarrow\mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\varphi(s)=\vec{T}_1(s)\cdot\vec{T}_2(s)+\vec{N}_1(s)\cdot\vec{N}_2(s)$$

مشتق‌گیری نسبت به s با استفاده از فرمول (۷) جلسه قبل و فرمول‌های (۵) و (۶) این جلسه نتیجه می‌دهد:

$$\varphi'(s)=\kappa_1(s)\vec{N}_1(s)\cdot\vec{T}_2(s)+\kappa_2(s)\vec{T}_1(s)\cdot\vec{N}_2(s)-\kappa_1(s)\vec{T}_1(s)\cdot\vec{N}_2(s)-\kappa_2(s)\vec{N}_1(s)\cdot\vec{T}_2(s)$$

از فرض قضیه، $\kappa_1(s)=\kappa_2(s)$ داریم $\varphi'(s)=0$ برای هر s، پس φ ثابت است. بنابراین:

$$\varphi(s)=\varphi(s_0)=\vec{T}_1(s_0)\cdot\vec{T}_2(s_0)+\vec{N}_1(s_0)\cdot\vec{N}_2(s_0)\qquad \text{برای هر } s$$

و چون به‌ازای s_0، دو کنج بر هم منطبقند، داریم $\varphi(s)=2$ به‌ازای هر s. ولی بردارهای $\vec{T}_i$ و $\vec{N}_i$ بردارهای واحدند، بنابراین $\varphi(s)$ تنها در صورتی می‌تواند همواره برابر ۲ باشد که برای هر s داشته باشیم $\vec{T}_1(s)=\vec{T}_2(s)$ و $\vec{N}_1(s)=\vec{N}_2(s)$. رابطهٔ اول نتیجه می‌دهد که $\frac{d}{ds}(\alpha(s)-\beta(s))=0$ پس $\alpha(s)-\beta(s)$ ثابت است. ولی به‌ازای $s=s_0$، با انتقال فرض کردیم $\alpha(s_0)=\beta(s_0)$، پس $\alpha(s)-\beta(s)=0$ برای هر s، یعنی با انتقال و دوران انجام شده، دو خم کاملاً برهم منطبق شده‌اند. ■

www.ttnar.ir

خم‌های هموار در $I\!R^n$

اکنون به بررسی خم‌های هموار $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^۳$ می‌پردازیم. روشن است که برای یک خم در $\mathbb{R}^۳$ امکان خمیدن و تابیدن بیشتری وجود دارد تا برای خم مسطح. اگر مانند سابق یک نیم‌خط را به عنوان جهت مرجع تعریف کنیم، هر مقدار θ به جای این که یک نیم‌خط منحصر بفرد تعریف کند، یک مخروط در فضا در تعیین خواهد کرد که هر مولد این مخروط زاویهٔ θ با محور مخروط می‌سازد (شکل ۱، الف). همچنین، هرچند که مماس واحد $\vec{T}$ در جهت حرکت

(الف) (ب)

شکل ۱

برای خم هموار فضایی معنی دارد (طبق معمول $\frac{۱}{|\gamma'(t)|}\gamma'(t)$، یا $\frac{d\vec{T}}{ds}$)، ولی برای بردار قائم واحد بی‌نهایت نامزد وجود دارد که در یک صفحهٔ عمود بر تصویر خم قرار می‌گیرند. آیا می‌توان $\vec{N}$ مشخصی را از این میان انتخاب کرد؟

چون $\vec{T}(s) \cdot \vec{T}(s) = ۱$ برای هر s، با مشتق‌گیری نسبت به s و استفاده از فرمول (۷) بخش (۱۲) نتیجه می‌شود که:

$$\frac{d\vec{T}}{ds} \perp \vec{T} \qquad \text{یا} \qquad \frac{d\vec{T}}{ds} \cdot \vec{T} = ۰ \tag{۱}$$

دو حالت می‌توان در نظر گرفت:

<u>حالت ۱: $\frac{d\vec{T}}{ds} = ۰$</u> در این حالت $\kappa(s)$ را همانند (۵) بخش (۱۳) برابر صفر تعریف می‌کنیم.

<u>حالت ۲: $\frac{d\vec{T}}{ds} \neq ۰$</u> در این حالت $\frac{d\vec{T}}{ds}$ جهتی مشخص عمود بر $\vec{T}$ مشخص می‌کند. تعریف می‌کنیم:

$$\kappa(s) = |\frac{d\vec{T}}{ds}| \quad , \quad \vec{N} = \frac{۱}{\kappa(s)}\,\frac{d\vec{T}}{ds} \tag{۲}$$

www.ttnar.ir

بدین ترتیب برای یک خم هموار $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$، همواره $\kappa(s) \geq 0$. در هر نقطه که $\kappa(s) \neq 0$، قائم واحدی $\vec{N}$ از میان قائم‌های واحد ممکن مشخص کرده‌ایم. از این پس فقط به نقاطی که در آن $\kappa(s) \neq 0$ توجه می‌کنیم (حالت ۲ بالا). برای تکمیل کنج متحرک، یا دستگاه مختصات متحرک وابسته به γ در این حالت، بردار واحد سومی $\vec{B}$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N} \tag{3}$$

چون $\vec{B}$ بر $\vec{T}$ عمود است، $\vec{B}$ نیز در صفحهٔ عمود بر خم در نقطهٔ $\gamma(s)$ قرار دارد. گاهی $\vec{N}$ را قائم واحد اول (یا قائم واحد اصلی)، و $\vec{B}$ را قائم واحد دوم می‌نامند. به تبعیت از حالت دوبعدی، آهنگ تغییرات $(\vec{T}, \vec{N}, \vec{B})$ نسبت به s را بررسی می‌کنیم، با این امید که کمیت‌هایی که به‌دست می‌آیند گویای شکل کامل تصویر خم باشند. شکل کلی باید چنین باشد:

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{T}}{ds} = a_{11}\vec{T} + a_{12}\vec{N} + a_{13}\vec{B} \\ \dfrac{d\vec{N}}{ds} = a_{21}\vec{T} + a_{22}\vec{N} + a_{23}\vec{B} \\ \dfrac{d\vec{B}}{ds} = a_{31}\vec{T} + a_{32}\vec{N} + a_{33}\vec{B} \end{cases} \tag{4}$$

که در آن a_{ij} ها تابع‌هایی نسبت به s هستند. تاکنون طبق تعریف داریم $a_{11} = a_{13} = 0$ و $a_{12}(s) = \kappa(s)$. به بررسی شش ضریب ردیف‌های دوم و سوم می‌پردازیم. اگر از $\vec{N}(s) \cdot \vec{N}(s) \equiv 1$ و $\vec{B}(s) \cdot \vec{B}(s) \equiv 1$ نسبت به s مشتق بگیریم نتیجه می‌شود که $\frac{d\vec{N}}{ds} \cdot \vec{N} = 0$ و $\frac{d\vec{B}}{ds} \cdot \vec{B} = 0$. نتیجه این که $a_{22} = 0$ و $a_{33} = 0$ (ضرب داخلی سطر دوم را با $\vec{N}$ و ضرب داخلی سطر سوم را با $\vec{B}$ در نظر بگیرید). همچنین از $\vec{T}(s) \cdot \vec{B}(s) \equiv 0$، با مشتق‌گیری نسبت به s نتیجه می‌شود که:

$$\frac{d\vec{T}}{ds} \cdot \vec{B} + \vec{T} \cdot \frac{d\vec{B}}{ds} = 0$$

$$a_{13} + a_{31} = 0$$

ولی $a_{13} = 0$، پس $a_{31} = 0$. بدین ترتیب، علاوه بر دو ضریب سطر اول، ضرایب a_{22}، a_{31} و a_{33} نیز صفر هستند. حال با مشتق‌گیری از $\vec{T} \cdot \vec{N} \equiv 0$ و $\vec{N} \cdot \vec{B} \equiv 0$ به روشی مشابه بالا نتیجه می‌گیریم

که $a_{12} + a_{21} = 0$ و $a_{23} + a_{32} = 0$. چون $a_{12} = \kappa$ (طبق تعریف)، داریم $a_{21} = -\kappa$. ضریب تابعی a_{23} را به τ نمایش می‌دهیم و تاب می‌نامیم. پس:

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{T}}{ds} = & \qquad +\kappa\vec{N} \\ \dfrac{d\vec{N}}{ds} = & -\kappa\vec{T} \qquad\qquad +\tau\vec{B} \\ \dfrac{d\vec{B}}{ds} = & \qquad -\tau\vec{N} \end{cases} \tag{5}$$

لازم به تأکید است تعریف $\vec{N}$، $\vec{B}$ و τ و برقراری سطرهای دوم و سطرهای سوم (۵) وابسته به فرض $\kappa \neq 0$ است. یک خم هموار در $\mathbb{R}^3$ که در سراسر آن $\kappa \neq 0$، خم فرنه خوانده می‌شود. کنج متحرک $(\vec{T}, \vec{N}, \vec{B})$ یک کنج فرنه و روابط (۵) معادلات فرنه نامگذاری شده‌اند.

شهود ما از κ تا حدی مشابه حالت دو بعدی تأمین می‌شود، κ ضریب $\vec{N}$در رابطهٔ آهنگ تغییر $\vec{T}$ نسبت به s می‌باشد. τ چه اهمیت هندسی دارد که "تاب" نام گرفته است؟ در زیر می‌بینیم که τ شاخص "تمایل" یک خم فضایی به خروج از صفحه مسطح است.

(۴–۴) گزاره برای خم فرنه $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$، $\tau \equiv 0$ اگر و تنها اگر تصویر γ به تمامی در یک صفحه قرار داشته باشد.

اثبات فرض می‌کنیم γ برحسب طول پرمایش شده است (که می‌دانیم همواره می‌توان خم را با حفظ جهت نسبت به طول پرمایش کرد). نقطه مرجع $\gamma(s_0)$ در نظر بگیرید و تعریف کنید:

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad f(s) = (\gamma(s) - \gamma(s_0)) \cdot \vec{B}(s)$$

داریم:

$$\begin{aligned} f'(s) &= \gamma'(s) \cdot \vec{B}(s) + (\gamma(s) - \gamma(s_0)) \cdot \tfrac{d\vec{B}}{ds} \\ &= \vec{T}(s) \cdot \vec{B}(s) + (-\tau)(\gamma(s) - \gamma(s_0)) \cdot \vec{N} \\ &= -\tau(\gamma(s) - \gamma(s_0)) \cdot \vec{N} \end{aligned}$$

اگر $\tau(s) \equiv 0$، نتیجه می‌شود که $f'(s) \equiv 0$، پس $f(s)$ ثابت است و

$$f(s) = f(s_0) = 0$$

www.ttmar.ir

ضمناً $\tau(s)\equiv 0$ از سطر سوم معادلات فرنه نتیجه می‌دهد که $B(s)$ نیز ثابت و همواره برابر $B(s_0)$ است. پس بردار واصل از $\gamma(s_0)$ به هر نقطهٔ دیگر تصویر خم، $\gamma(s)$، هموار در صفحه گذرا از $\gamma(s_0)$ و عمود بر $B(s_0)$ قرار دارد.

بالعکس اگر $\gamma(s)$ همواره در یک صفحه قرار داشته باشد، $T(s)=\gamma'(s)$ خمی در همان صفحه ترسیم می‌کند، پس $\vec{N}(s)=\frac{1}{\kappa}\,\frac{d\vec{T}}{ds}$ نیز در همان صفحه است. نتیجه این که $\vec{B}$ باید ثابت باشد، $\frac{d\vec{B}}{ds}\equiv 0$ و $\tau\equiv 0$. ■

(۱۴−۲) صفحه بوسان فرض کنید $\gamma: I\longrightarrow\mathbb{R}^3$ یک خم فرنه باشد. در این صورت در هر نقطه بردار $\vec{N}$ تعریف شده است. زوج متعامد $(\vec{T},\vec{N})$ یک صفحه در $\mathbb{R}^3$ ایجاد می‌کند. این صفحه را صفحه بوسان γ در نقطه مربوط می‌نامند. به تعابیر مختلف می‌توان نشان داد این صفحه "نزدیکترین" صفحه به تصویر خم است. در واقع دیدیم که شرط لازم و کافی برای $\tau\equiv 0$ این است که تصویر γ به تمامی در صفحهٔ بوسان بماند. هر صفحهٔ شامل امتداد $\vec{T}(t)$ را می‌توان صفحه‌ای مماس بر تصویر γ در نقطه $\gamma(t)$ تلقی کرد. از بین این صفحات، صفحه بوسان به مفهومی که در آینده خواهیم دید "مماس‌ترین" این صفحه‌هاست. تعبیر دیگری از صفحهٔ بوسان به صورت زیر به‌دست می آید. $t_0\in I$ را تثبیت کنید و t_1 و t_2 دو مقدار دیگر در I بگیرید. سه نقطهٔ $\gamma(t_0)$، $\gamma(t_1)$ و $\gamma(t_2)$ معمولاً یک صفحه پدید می آورند. وقتی $t_1\longrightarrow t_0$ و $t_2\longrightarrow t_0$، می‌توان نشان داد که این صفحه به صفحه بوسان میل می‌کند. تعبیر فیزیکی زیر نیز از صفحهٔ بوسان قابل توجه است. بردار شتاب $\vec{a}$ را می‌توان همانگونه که در حالت دو بعدی دیدیم در راستاهای تعیین شده توسط $\vec{T}$ و $\vec{N}$ تجزیه کرد:

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{d}{dt}\Big(\frac{d\vec{r}}{dt}\Big)=\frac{d}{dt}\Big(\frac{ds}{dt}\vec{T}\Big)\\ &= \Big(\frac{d^2s}{dt^2}\Big)\vec{T}+\Big(\frac{ds}{dt}\Big)\Big(\frac{dT}{ds}\frac{ds}{dt}\Big)\end{aligned}$$

پس

$$\vec{a}=\Big(\frac{d^2s}{dt^2}\Big)\vec{T}+\kappa\Big(\frac{ds}{dt}\Big)^2\vec{N} \tag{6}$$

یعنی $\vec{a}$ همواره در صفحهٔ بوسان قرار می‌گیرد. بدین ترتیب برای هر حرکت فیزیکی ممکن روی تصویر خم γ بردار شتاب همواره در صفحهٔ بوسان می‌ماند.

(۱۴—۳) قضیهٔ اساسی خم‌ها به شیوه‌ای کاملاً مشابه اثبات قضیهٔ اساسی خم‌ها در $\mathbb{R}^2$، می‌توان نشان داد که هرگاه $\alpha, \beta : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ دو خم فرنه پرمایش شده برحسب طول باشند با انحنا و تاب به ترتیب (κ_1, τ_1) و (κ_2, τ_2) به طوری که به‌ازای هر $s \in I$ داشته باشیم $\kappa_1(s) = \kappa_2(s)$ و $\tau_1(s) = \tau_2(s)$، آنگاه یک حرکت اقلیدسی در $\mathbb{R}^3$ وجود دارد که تصویر γ_1 و γ_2 را بر هم منطبق می‌کند. مقصود از یک حرکت اقلیدسی در اینجا نیز ترکیب انتقال و دوران است. اما مقصود از دوران در $\mathbb{R}^3$ چیست؟ دوران همواره به مفهوم چرخش $\mathbb{R}^3$ با یک زاویهٔ ثابت حول یک محور ثابت است. بدین ترتیب در دوران یک خط راست (محور دوران) نقطه به نقطه ساکن می‌ماند و زاویه‌ای φ وجود دارد که هر صفحهٔ عمود بر این محور روی خود به اندازهٔ زاویهٔ φ حول نقطه تقاطع با محور گردش می‌کند. در اثبات قضیهٔ اساسی پس از آن که یک نقطهٔ تصویر خم β را به نقطهٔ متناظر روی خم α منتقل می‌کنیم، باید کنج فرنهٔ β در آن نقطه را نیز بر کنج فرنهٔ α در همان نقطه منطبق کنیم. در واقع قضیه‌ای در هندسه سه بعدی هست که طبق آن می‌توان هر سه‌تایی متعامد واحد راستگرد ساطع از یک نقطه را به هر سه‌تایی متعامد راستگرد دیگر در آن نقطه با یک دوران به صورت ذکر شده منطبق کرد. نکتهٔ دیگری که در اینجا شایان توجه است این است که در اثر چنین دورانی مقادیر κ و τ تغییر نمی‌کنند. این موضوع نیاز به اثبات دارد. با فرض این نکات بقیهٔ اثبات عیناً مانند حالت دوبعدی است با این تفاوت که به جای تابع $f(s) = \vec{T}_1(s) \cdot \vec{T}_2(s) + \vec{N}_1(s) + \vec{N}_2(s)$ در ۱۴—۱، از تابع $f(s) = \vec{T}_1(s) \cdot \vec{T}_2(s) + \vec{N}_1(s) + \vec{N}_2(s) + \vec{B}_1(s) \cdot \vec{B}_2(s)$ استفاده می‌کنیم. بدین ترتیب برای خم‌های فرنه در $\mathbb{R}^3$، κ و τ شکل تصویر خم را به طور کامل توصیف می‌کنند.

(۱۴—۴) به عنوان یک مثال، انحنا و خم مارپیچ دوار را که در بخش ۱۲ معرفی کردیم محاسبه می‌کنیم. یادآوری می‌کنیم که مارپیچ دوار $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ به صورت $\gamma(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$ تعریف می‌شود که در آن $a > 0$ و b اعداد حقیقی داده شده‌اند. داریم $\gamma'(t) = (-a\sin t, a\cos t, b)$، پس $\frac{ds}{dt} = |\gamma'(t)| = \sqrt{a^2 + b^2}$. بدین ترتیب در این مثال پارامتر طول، $s = \sqrt{a^2 + b^2}\, t$ به سادگی

به‌دست می‌آید و می‌توان خم را برحسب s پرمایش کرد:

$$\widetilde{\gamma}\,(s) = (a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}s)$$

$$\vec{T}(s) = \frac{d\,\widetilde{\gamma}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(-a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, b)$$

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{1}{a^2+b^2}(-a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, -a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, 0)$$

پس

$$\kappa = \frac{a}{a^2+b^2} \quad , \quad \vec{N} = (-\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, -\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, 0)$$

بنابراین وقتی $a > 0$، یک خم فرنه به‌دست می‌آید. حال به محاسبهٔ $\vec{B}$ و τ می‌پردازیم:

$$\vec{B} = \vec{T}\times\vec{N} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(b\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, -b\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, a)$$

برای محاسبهٔ τ، از $\frac{d\vec{B}}{ds} = -\tau\vec{N}$ استفاده می‌کنیم:

$$\frac{d\vec{B}}{ds} = \frac{b}{a^2+b^2}(\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, 0)$$

پس

$$\tau = \frac{b}{a^2+b^2}$$

توجه کنید که τ با b هم علامت است. وقتی $\tau > 0$، جهت γ به طرف بالا، و وقتی $\tau < 0$ جهت γ به سوی پایین است. برای $b = 0$، تصویر خم γ در صفحه xy می‌ماند و $\tau = 0$. به طور کلی، برای خم‌های فرنه، می‌توان ثابت کرد که $\tau > 0$ به مفهوم تابیدن خم خارج از صفحهٔ بوسان در طرف $\vec{B}$ است و $\tau < 0$ تابیدن در طرف مقابل $\vec{B}$ را نشان می‌دهد.

(۱۴—۵) محاسبهٔ κ و τ در حالت کلی در مثال بالا محاسبه پارامتر طول برحسب پارامتری که خم بر حسب آن ارائه شده بود آسان بود و توانستیم از آغاز خم را برحسب s پرمایش کنیم. این یک وضعیت استثنایی است. بسیاری اوقات نمی‌توان عبارت‌های ساده و قابل استفاده‌ای برای بازپرمایش خم برحسب طول به‌دست آورد. در حالت کلی باید با استفاده از قاعدهٔ زنجیره‌ای و مشتق‌گیری نسبت به

www.tnar.ir

پارامتر داده شده به نتایج مورد نظر رسید. بخشی از این کار در فرمول (۶) انجام شده است. اگر ضرب خارجی دو طرف (۱) را با بردار سرعت $\gamma'(t)$ محاسبه کنیم، نتیجه می‌شود:

$$\gamma'(t) \times \gamma''(t) = (\frac{d^۲ s}{dt^۲})\gamma'(t) \times \vec{T} + \kappa(\frac{ds}{dt})^۲ \gamma'(t) \times \vec{N}$$

$\gamma'(t)$ و $\vec{T}$ همراستا هستند، پس جمله اول طرف راست صفر است. از طرفی دیگر

$$\gamma'(t) \times \vec{N} = (\frac{ds}{dt})\vec{T} \times \vec{N} = (\frac{ds}{ds})\vec{B}$$

پس

$$\gamma'(t) \times \gamma''(t) = \kappa(\frac{ds}{dt})^۳ \vec{B} \tag{۷}$$

و بالاخره با در نظر گرفتن طول بردار در دو طرف داریم

$$\kappa = \frac{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|}{|\gamma'(t)|^۳} \tag{۸}$$

این فرمول انحنا برحسب پارامتر دلخواه t است.

برای به‌دست آوردن فرمولی برای τ، از (۱) نسبت به t مشتق می‌گیریم که در آن فقط محاسبهٔ ضریب $\vec{B}$ بعداً موردنیاز قرار خواهد گرفت:

$$\gamma'''(t) = (\ )\vec{T} + (\ )\vec{N} + \kappa(\frac{ds}{dt})^۳ \tau \vec{B}$$

از محاسبهٔ ضرب داخلی دو طرف با $\vec{B}$ نتیجه می‌شود

$$\vec{B} \cdot \gamma'''(t) = \kappa(\frac{ds}{dt})^۳ \tau$$

و با جایگزینی از (۸) داریم:

$$\tau = \frac{(\gamma'(t) \times \gamma''(t)) \cdot \gamma'''(t)}{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|^۲} \tag{۹}$$

ضمناً این فرمول وابستگی τ به مشتق سوم γ را نشان می‌دهد. این موضوع نباید تعجب‌آور باشد زیرا که تعریف $\vec{N}$، مشتق دوم γ را می‌طلبید و τ در معادلات فرنه از مشتق‌گیری $\vec{N}$ به‌دست می‌آید

www.ttmar.ir

نتایج اولیهٔ مشتق‌پذیری

در جلسهٔ قبل مفهوم مشتق و مشتق‌پذیری مورد بررسی قرار گرفت. در این جلسه نخست با بیان و اثبات یک گزاره در مورد آمیختن جبری توابع مشتق‌پذیر، چند دسته تابع مشتق‌پذیر معرفی می‌کنیم، سپس به ذکر پاره‌ای خواص ابتدایی مشتق می‌پردازیم.

(۱۵—۱) گزاره. فرض کنید تابع‌های $f, g : S \longrightarrow \mathbb{R}$ در نقطهٔ درونی $x_\circ$ از دامنه مشتق‌پذیرند. در این صورت:

الف) $f+g$ در $x_\circ$ مشتق‌پذیر است و $(f+g)'(x_\circ) = f'(x_\circ) + g'(x_\circ)$.

ب) (قانون لایب نیتس) $f \cdot g$ در $x_\circ$ مشتق‌پذیر است و $(f \cdot g)'(x_\circ) = f'(x_\circ)g(x_\circ) + f(x_\circ)g'(x_\circ)$.

ج) قرار دهید $S' = \{x \in S \mid g(x) \neq \circ\}$. فرض کنید $x_\circ$ یک نقطهٔ درونی S' است. در این صورت تابع $\frac{f}{g} : S' \longrightarrow \mathbb{R}$ در $x_\circ$ مشتق‌پذیر است و

$$(\frac{f}{g})'(x_\circ) = \frac{f'(x_\circ)g(x_\circ) - f(x_\circ)g'(x_\circ)}{g(x_\circ)^{۲}}$$

برهان. (الف) $\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_\circ)}{x-x_\circ} = \frac{f(x)-f(x_\circ)}{x-x_\circ} + \frac{g(x)-g(x_\circ)}{x-x_\circ}$ و حکم از این که حد مجموع برابر مجموع حدهاست نتیجه می‌شود.

www.ttnar.ir

(ب)

$$\begin{aligned}\frac{(f\cdot g)(x)-(f\cdot g)(x_\circ)}{x-x_\circ} &= \frac{f(x)g(x)-f(x_\circ)g(x_\circ)}{x-x_\circ}\\ &= \frac{f(x)g(x)-f(x_\circ)g(x)}{x-x_\circ}+\frac{f(x_\circ)g(x)-f(x_\circ)g(x_\circ)}{x-x_\circ}\\ &= (\frac{f(x)-f(x_\circ)}{x-x_\circ})g(x)+f(x_\circ)(\frac{g(x)-g(x_\circ)}{x-x_\circ})\end{aligned}$$

توجه کنید که طبق گزاره ۱۴—۸، چون g در $x_\circ$ مشتق‌پذیر است، g در $x_\circ$ پیوسته نیز هست، پس $g(x)\longrightarrow g(x_\circ)$ وقتی $x\longrightarrow x_\circ$. حکم از اینکه حد مجموع و حاصل‌ضرب برابر مجموع و حاصل‌ضرب حد است نتیجه می‌شود.

(ج)

$$\begin{aligned}\frac{(\frac{f}{g})(x)-(\frac{f}{g})(x_\circ)}{x-x_\circ} &= \frac{f(x)g(x_\circ)-f(x_\circ)g(x)}{(x-x_\circ)g(x)g(x_\circ)}\\ &= [(\frac{f(x)-f(x_\circ)}{x-x_\circ})g(x_\circ)-f(x_\circ)\frac{g(x)-g(x_\circ)}{x-x_\circ}]\frac{۱}{g(x)g(x_\circ)}\end{aligned}$$

در اینجا نیز حکم از پیوستگی g در $x_\circ$ و قوانین حد مجموع و حاصل‌ضرب نتیجه می‌شود. □

(۱۵—۲) تابع‌های گویا. نخست یک تابع چندجمله‌ای

$$p(x)=a_\circ+a_۱x+\cdots+a_mx^m \qquad (۱)$$

را در نظر بگیرید. در مثال‌های ۱۴—۵—۱ و ۱۴—۵—۲ دیدیم که هر تک‌جمله‌ای a_kx^k، $k=\circ,۱,\ldots,m$، مشتق‌پذیر است و فرمولی برای مشتق آن پیدا کردیم. پس با توجه به ۱۵—۱ (الف)، این چندجمله‌ای به‌ازای هر x مشتق‌پذیر است و در واقع

$$p'(x)=a_۱+۲a_۲x+\cdots+ma_mx^{m-۱} \qquad (۲)$$

حال فرض کنید $q(x)=b_\circ+b_۱x+\cdots+b_nx^n$ یک چندجمله‌ای دیگر باشد. از ۱۵—۱ (ج) نتیجه می‌شود که تابع گویای تعریف شده به صورت $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ روی دامنهٔ $S'=\{x\in\mathbb{R}\mid q(x)\neq\circ\}$ در همهٔ نقاط دامنهٔ خود مشتق‌پذیر است و می‌توان مشتق آن را به کمک ۱۵—۱ محاسبه کرد. توجه کنید که هر نقطهٔ $x_\circ$ از S' یک نقطهٔ درونی S' است زیرا بنابر پیوستگی q، اگر $q(x_\circ)\neq\circ$، آنگاه برای همهٔ x های نزدیک $x_\circ$ نیز داریم $q(x)\neq\circ$.

(۱۵–۳) **تابع‌های مثلثاتی.** در گزارهٔ ۱۰–۴ از بخش ۱۰ دیدیم که تابع‌های مثلثاتی sin، cos، tan، cot، sec و csc، هر یک در دامنهٔ تعریف خود پیوسته هستند. اکنون نشان می‌دهیم این تابع‌ها در دامنهٔ تعریف خود مشتق‌پذیر نیز هستند و فرمول‌هایی برای مشتق آنها به‌دست می‌آوریم. با توجه به گزاره ۱۵–۱ کافی است مشتق‌پذیری سینوس و کسینوس ثابت شود زیرا چهار تابع دیگر به صورت خارج قسمت این تابع‌ها تعریف می‌شوند. بدین ترتیب نخست تابع سینوس را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned}\tfrac{\sin(x+h)-\sin x}{h} &= \tfrac{(\sin x)(\cos h)+(\cos x)(\sin h)-\sin x}{h}\\ &= (\sin x)\tfrac{\cos h-۱}{h}+(\cos x)\tfrac{\sin h}{h}\end{aligned}$$

در ۱۳–۷–۲ دو حد اساسی مثلثاتی $\lim_{h\to ۰}\frac{\sin h}{h}=۱$ و $\lim_{h\to ۰}\frac{۱-\cos h}{h}=۰$ را ثابت کردیم. بنابراین

$$\lim_{h\to ۰}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\cos x$$

به بیان دیگر، تابع sin به‌ازای هر x مشتق‌پذیر است و

$$\sin' x=\cos x \qquad (۳)$$

به همین ترتیب ثابت می‌شود که تابع cos به‌ازای هر x مشتق‌پذیر است و

$$\cos' x=-\sin x \qquad (۴)$$

حال با استفاده از ۱۵–۱ (ج) ثابت می‌شود که توابع $\tan=\frac{\sin}{\cos}$، $\cot=\frac{\cos}{\sin}$، $sec=\frac{۱}{\cos}$ و $csc=\frac{۱}{\sin}$ به‌ازای هر x در دامنهٔ تعریف (یعنی به‌ازای x هایی که مخرج عبارت تعریف کننده صفر نشود) مشتق‌پذیرند و فرمول‌های زیر به سادگی نتیجه می‌شوند:

$$\tan' x=sec^{۲} x=۱+\tan^{۲} x \qquad (۵)$$

$$\cot' x=-\csc^{۲} x=-(۱+\cot^{۲} x) \qquad (٦)$$

$$\sec' x=(\tan x)(sec\ x) \qquad (۷)$$

www.ttnar.ir

$$\csc' x = -(\cot x)(csc\ x) \qquad (۸)$$

در باقیماندهٔ این بخش به بررسی دسته‌ای از خواص مشتق می‌پردازیم که به علامت مشتق و اندازهٔ آن بستگی دارند.

(۱۵—۴) علامت مشتق در یک نقطه

فرض کنید $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ در نقطهٔ درونی $x_\circ$ از S مشتق‌پذیر باشد. سه حالت $f'(x_\circ) > \circ$، $f'(x_\circ) < \circ$ و $f'(x_\circ) = \circ$ وجود دارد که هر یک را بررسی می‌کنیم.

نخست فرض کنید $f'(x_\circ) > \circ$. اگر عددی e طوری اختیار کنیم که $\circ < e < f'(x_\circ)$، طبق تعریف حد، $\delta > \circ$ وجود دارد که برای $\circ < |x - x_\circ| < \delta$ داریم:

$$-e < \frac{f(x) - f(x_\circ)}{x - x_\circ} - f'(x_\circ) < e$$

بالاخص

$$\frac{f(x) - f(x_\circ)}{x - x_\circ} > f'(x_\circ) - e > \circ \qquad (۹)$$

بنابراین صورت و مخرج کسر سمت چپ باید هم علامت باشند و می‌توان حکم کرد که:

(۱۵—۴—۱) اگر $f'(x_\circ) > \circ$، آنگاه $\delta > \circ$ وجود دارد که اگر $x_\circ < x < x_\circ + \delta$، آنگاه $f(x) > f(x_\circ)$، و اگر $x_\circ - \delta < x < x_\circ$، آنگاه $f(x) < f(x_\circ)$.

به بیان دیگر اگر $f'(x_\circ) > \circ$، آنگاه برای x های نزدیک و بزرگتر از $x_\circ$، مقدار $f(x)$ بزرگتر از $f(x_\circ)$ است و برای x های نزدیک و کوچکتر از $x_\circ$، $f(x)$ کوچکتر از $f(x_\circ)$ می‌باشد. نکتهٔ قابل تذکر این است که این حکم فقط مقدار $f(x_\circ)$ را با مقدار $f(x)$، x نزدیک $x_\circ$، مقایسه می‌کند و دال بر صعودی بودن تابع f در یک بازهٔ کوچک حول $x_\circ$ نیست. شکل ۱ وضعیتی را نشان می‌دهد که حکم ۱۵—۴—۱ برقرار است ($f'(\circ) > \circ$) و لیکن f در هیچ بازهٔ حول $\circ$ صعودی نیست.

در این شکل نمودار تابع در نزدیکی ۰ بی‌نهایت "دندانه" یا شاخهٔ صعودی ـ نزولی دارد که دامنهٔ آنها به تدریج کوچک می‌شود ولی هر قدر هم که به ۰ نزدیک شویم هنوز شاخه‌های نزولی و صعودی در دو طرف ۰ وجود دارند. در آینده عبارت صریحی برای تعریف چنین تابعی ارائه خواهیم کرد.

حالت $f'(x_0) < 0$ مشابه است. در اینجا اگر e را طوری بگیریم که $0 < e < -f'(x_0)$، آنگاه $\delta > 0$ وجود دارد که برای $0 < |x - x_0| < \delta$ داریم:

$$-e < \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) < e$$

بالاخص

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < f'(x) + e < 0 \qquad (۱۰)$$

بنابراین صورت و مخرج کسر سمت چپ باید علامت مختلف داشته باشند که از آن نتیجه می‌شود:

(۱۵ـ۴ـ۲) اگر $f'(x_0) < 0$، آنگاه $\delta > 0$ وجود دارد که اگر $x_0 < x < x_0 + \delta$، آنگاه $f(x) < f(x_0)$، و اگر $x_0 - \delta < x < x_0$، آنگاه $f(x) > f(x_0)$.

در اینجا اگر x نزدیک و بزرگتر از x_0 باشد، داریم $f(x) < f(x_0)$، و اگر x نزدیک و کوچکتر از x_0 باشد، $f(x) > f(x_0)$.

از ۱۵ـ۴ـ۱ و ۱۵ـ۴ـ۲ نتیجه جالب توجهی حاصل می‌شود. برای یک تابع $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$، نقطهٔ درونی x_0 از S را یک نقطهٔ بیشینه موضعی (به ترتیب نقطهٔ کمینهٔ موضعی) می‌نامیم اگر $\delta > 0$ وجود داشته باشد که برای هر $x \in S$ که $|x - x_0| < \delta$ داشته باشیم $f(x) \leq f(x_0)$ (به ترتیب $f(x) \geq f(x_0)$). حال فرض کنید تابع f در نقطهٔ بیشینه یا کمینه موضعی x_0 مشتق‌پذیر است. در این صورت هیچ‌یک از دو وضعیت $f'(x_0) > 0$ و $f'(x_0) < 0$ در x_0 ممکن نیست زیرا که بنابر ۱۵ـ۴ـ۱ و ۱۵ـ۴ـ۲، مقدار تابع باید در یک طرف x_0 بزرگتر از $f(x_0)$ و در طرف دیگر کوچکتر از $f(x_0)$ باشد. بدین ترتیب لاجرم:

(۱۵ـ۴ـ۳) اگر تابع $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ در نقطهٔ درونی x_0 از S بیشینه یا کمینهٔ موضعی داشته باشد و f در x_0 مشتق‌پذیر باشد، آنگاه $f'(x_0) = 0$.

www.ttmar.ir

بدین ترتیب در نقاط بیشینه و کمینه موضعی درونی که تابع دارای خط مماس باشد، این خط مماس باید لزوماً افقی باشد (شکل ۲).

لازم به ذکر است که افقی شدن خط مماس لزوماً دال بر وجود بیشینه یا کمینهٔ موضعی نیست. در شکل ۲، در نقاط $x_۱$ و $x_۳$ کمینهٔ موضعی موجود است، در $x_۲$ بیشینهٔ موضعی، ولی در $x_۴$ که خط مماس افقی است، نه بیشینه موضعی ظاهر شده است و نه کمینهٔ موضعی. مثال‌های صریح زیر در تأیید این مطلب هستند.

مثال ۱. تابع $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ به صورت $f(x) = x^۴ - x^۳$ تعریف شده است. این تابع به‌ازای هر x مشتق‌پذیر است. نقاطی را که در آن مشتق صفر می‌شود بررسی می‌کنیم. داریم:

$$f'(x) = ۴x^۳ - ۳x^۲ = x^۲(۴x - ۳)$$

پس مشتق در دو نقطهٔ $x = ۰$ و $x = \frac{۳}{۴}$ صفر می‌شود. با توجه به علامت یابی $x^۴ - x^۳ = x^۳(x - ۱)$ ملاحظه می‌شود که مقدار f برای $x < ۰$ مثبت و برای $۰ < x < ۱$ منفی است، پس $x = ۰$ نمی‌تواند بیشینه یا کمینهٔ موضعی باشد. چون تابع پیوستهٔ $f(x) = x^۴ - x^۳$ روی $[۰, ۱]$ باید دارای کمینه باشد و مقدار تابع در $]۰, ۱[$ منفی است، مقدار کمینه باید منفی باشد. بنابراین این نقطهٔ کمینه باید یک نقطهٔ درونی $[۰, ۱]$ باشد زیرا که $f(۰) = f(۱) = ۰$. از طرفی دیگر مشتق در کمینهٔ درونی باید صفر باشد، پس نقطه $x = \frac{۳}{۴}$ لزوماً یک کمینه است. نمودار f در شکل ۳ (الف) نمایش داده شده است.

مثال ۲. تابع مشتق‌پذیر $f(x) = x - \sin x$ را در نظر می‌گیریم. داریم $f'(x) = ۱ - \cos x$ که در مضارب صحیح ۲π صفر می‌شود. هیچ‌یک از این نقاط بیشینه یا کمینه موضعی برای تابع نیست (شکل ۳ (ب)).

در گام بعدی به بررسی مثبت یا منفی بودن علامت مشتق در سراسر یک بازه می‌پردازیم. حربهٔ مناسب برای این کار "قضیه میانگین" است که کاربردهای بسیار دیگری نیز خواهد داشت. نخست حالت خاصی از این قضیه را که به قضیه رُل معروف است بیان و ثابت می‌کنیم.

www.ttmar.ir

(۱۵—۵) **قضیه رُل.** فرض کنید $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی پیوسته است که در همهٔ نقاط درونی $[a, b]$ مشتق‌پذیر می‌باشد و $f(a) = f(b) = 0$. در این صورت نقطه‌ای c وجود دارد، $a < c < b$، که $f'(c) = 0$.

برهان. اگر f در سراسر $[a, b]$ صفر باشد که مشتق آن در هر نقطه صفر است و نقطهٔ c مورد نظر وجود دارد. حال فرض کنید نقطه‌ای x در $[a, b]$ وجود دارد که $f(x) \neq 0$، مثلاً فرض کنید $f(x) > 0$. تابع پیوستهٔ f روی $[a, b]$ دارای بیشینه است و از آنجا که f در حداقل یک نقطه مثبت است، مقدار این بیشینه باید مثبت باشد. از طرفی دیگر $f(a) = f(b) = 0$، پس نقطهٔ بیشینه باید یک نقطهٔ درونی بازه باشد، مثلاً c که $a < c < b$. حال طبق ۱۵—۴—۳ داریم $f'(c) = 0$. به همین ترتیب اگر $f(x) < 0$، با استفاده از کمینه، نقطهٔ مورد نظر را پیدا می‌کنیم. $\square$

یک تعبیر قضیهٔ بالا این است که نقطه‌ای c بین a و b وجود دارد که مماس بر نمودار به‌ازای c موازی خط واصل بین دو انتهای نمودار است. قضیهٔ زیر را می‌توان دقیقاً این گونه تعبیر کرد.

(۱۵—۶) **قضیهٔ میانگین.** فرض کنید $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی پیوسته است که در همهٔ نقاط درونی $[a, b]$ مشتق‌پذیر می‌باشد. در این صورت نقطه‌ای c وجود دارد، $b > c > 0$، که

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \tag{11}$$

برهان. خط راست واصل بین $(a, f(a))$ و $(b, f(b))$ معادلهٔ زیر را دارد:

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

اگر مقدار سمت راست را از $f(x)$ کم کنیم در وضعیت قضیهٔ رُل قرار می‌گیریم. به طور دقیق، تعریف کنید

$$g(x) = f(x) - [f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)]$$

تابع g در $[a,b]$ پیوسته و در $]a,b[$ مشتق‌پذیر است زیرا که مجموع دو تابع با این ویژگی‌هاست. از طرفی دیگر:

$$g(a) = 0 \quad , \quad g(b) = 0$$

پس طبق قضیهٔ رل نقطه‌ای c وجود دارد $a < c < b$، که $g'(c) = 0$، یعنی:

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

که حکم قضیه است. □

به یک تعبیر هندسی این قضیه اشاره کردیم. اگر متغیر x را زمان و $y = f(x)$ را مکان یک ذره متحرک در زمان x فرض کنیم، $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ سرعت متوسط ذره در بازهٔ زمانی $[a,b]$ است. طبق این قضیه، زمانی c بین زمان شروع و زمان پایان حرکت وجود دارد که سرعت ذره در آن زمان برابر سرعت متوسط در طول مسیر است. در واقع مهمترین کاربردهای ۱۵—۶ به صورت نامساوی برای تخمین نمو یک تابع خواهد بود که بعداً به آن خواهیم پرداخت ولی فعلاً به چند کاربرد در تکمیل بررسی علامت مشتق می‌پردازیم.

(۱۵—۷) علامت مشتق در یک بازه

فرض کنید I یک بازه باشد و $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع پیوسته که در نقاط درونی بازه مشتق‌پذیر است.

(۱۵—۷—۱) اگر $f'(x) = 0$ برای هر نقطهٔ درونی x از I، آنگاه f در سراسر I ثابت است.

برهان. کافی است نشان دهیم برای هر دو نقطهٔ متمایز a و b از I داریم $f(a) = f(b)$. مثلاً فرض کنید $a < b$. طبق قضیهٔ میانگین نقطه‌ای c بین a و b وجود دارد که $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) = 0$ و حکم به اثبات می‌رسد. □

(۱۵—۷—۲) **نتیجه.** فرض کنید $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ دو تابع پیوسته باشند که در نقاط درونی I مشتق‌پذیر بوده و مشتق برابر دارند. در این صورت $f - g$ یک ثابت است. □

www.ttmar.ir

(۱۵—۷—۳) اگر $f'(x) > ۰$ برای هر نقطهٔ درونی x از I، آنگاه f در I صعودی است، یعنی برای هر a و b در I که $a < b$، داریم $f(a) < f(b)$.

برهان. طبق قضیهٔ میانگین $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) > ۰$، پس $b - a$ و $f(b) - f(a)$ هم علامت هستند. □

(۱۵—۷—۴) اگر $f'(x) < ۰$ برای هر نقطهٔ درونی x در I، آنگاه f در I نزولی است، یعنی برای هر a و b در I که $a < b$، داریم $f(a) > f(b)$. □

(۱۵—۸) تخمین نمو تابع. فرض کنید $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ پیوسته و f در نقاط درونی $[a,b]$ مشتق‌پذیر است. اگر $M \geq ۰$ وجود داشته باشد که $|f'(x)| \leq M$ برای هر x در $]a,b[$، آنگاه از (۱۱) نتیجه می‌شود که:

$$|f(b) - f(a)| \leq M|b - a| \qquad (۱۲)$$

از آنجا که $f'(x)$ آهنگ تغییر کمیت $y = f(x)$ در نقطهٔ x محسوب می‌شود. نامساوی (۱۲) بیانگر این واقعیت است که نمو y در بازهٔ $[a,b]$ از حاصل‌ضرب طول بازه در حداکثر آهنگ نمو بیشتر نیست. گاهی نمو x، یعنی $b - a$ را به Δx و نمو y، یعنی $f(b) - f(a)$ را به Δy نمایش می‌دهند. پس با این نمادگذاری:

$$|\Delta y| \leq M|\Delta x| \qquad (۱۳)$$

مثال ۱. نشان دهید برای هر α و β داریم

$$|\sin\alpha - \sin\beta| \leq |\alpha - \beta| \qquad (۱۴)$$

از آنجا که برای $f(x) = \sin x$، داریم $f'(x) = \cos x$ و $|\cos x| \leq ۱$، این حکم از (۱۲) نتیجه می‌شود.

مثال ۲. نشان دهید برای هر a و b مثبت داریم:

$$\left|\frac{۱}{۱+a} - \frac{۱}{۱+b}\right| \leq |a - b| \qquad (۱۵)$$

www.ttnar.ir

تابع $f(x) = \frac{1}{1+x}$ را روی $]-1, +\infty[$ در نظر می‌گیریم. در این بازه تابع تعریف شده، مشتق‌پذیر است، و داریم:

$$f'(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}$$

برای $x > 0$، مخرج از ۱ بزرگتر است، پس $|f'(x)| < 1$ و (۱۵) حاصل می‌شود.

www.ttmar.ir

مجموعه‌های تراز (۱)

به دنبال معرفی کلی مجموعه‌های تراز، اکنون مثال‌هایی مطرح می‌کنیم.

مثال ۱. فرض کنید $A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ یک نگاشت مستوی باشد. A را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$A(x) = L(x) + B \qquad \text{برای هر } x \in \mathbb{R}^n \tag{۱}$$

که در آن L یک نگاشت خطی از $\mathbb{R}^n$ به $\mathbb{R}^m$ است و B یک عنصر ثابت $\mathbb{R}^m$. مجموعه‌های تراز A و L یکی هستند، در واقع

$$A^{-1}(c + B) = L^{-1}(c)$$

یعنی مجموعهٔ تراز منسوب به c برای L همان مجموعهٔ تراز منسوب به $c + B$ برای A است. برای تابع خطی L می‌دانیم که مجموعه‌های تراز یا تهی هستند و یا زیرفضاهای خطی موازی و همبعد هستهٔ L می‌باشند.

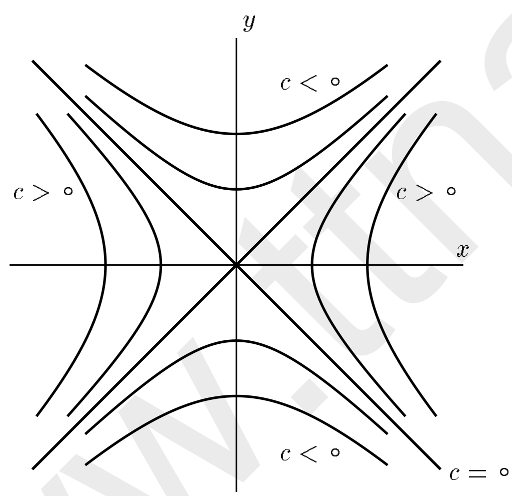
مثال ۲. $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ را به صورت $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ تعریف می‌کنیم. مجموعه‌های تراز f را برای مقادیر مختلف $c \in \mathbb{R}$ بررسی می‌کنیم. برای $c < 0$، مجموعهٔ تراز منسوب تهی است، برای $c = 0$، تک نقطه‌ای $\{(0, 0, 0)\}$ حاصل می‌شود، و برای $c > 0$، کرهٔ شعاع $\sqrt{c}$، یعنی مجموعهٔ نقاط (x, y, z) بقیه به شرط $x^2 + y^2 + z^2 = c$ به‌دست می‌آید.

www.ttnar.ir

مثال ۳. تابع $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ را در نظر می‌گیریم که به صورت $f(x,y)=x^2-y^2$ تعریف شده است. نمودار این تابع را در مثال ۴ بخش قبل بررسی کردیم، اکنون به بررسی مجموعه‌های تراز می‌پردازیم. برای $c=0$، مجموعهٔ

$$\{(x,y)\mid x^2-y^2=0\}=\{(x,y)\mid x-y=0 \text{ یا } x+y=0\}$$

از دو خط راست $x+y=0$ و $x-y=0$ تشکیل شده است. برای $c>0$، هذلولوی دو شاخهٔ $x^2-y^2=c$ به‌دست می‌آید که رئوس شاخه‌ها در نقاط $(\pm\sqrt{c},0)$ قرار دارند و شاخه‌ها به طرف راست و چپ باز می‌شوند. برای $c<0$، نقش x و y تعویض می‌شود. این بار دو رأس هذلولوی در $(0,\pm\sqrt{c})$ قرار دارند و هذلولوی به طرف بالا و پایین باز می‌شود (شکل ۱).



شکل ۱

ارتباط این شکل با نمودار $z=x^2-y^2$ به طریق زیر حاصل می‌شود. به‌ازای $z=c$ با تقاطع صفحه $z=c$ با نمودار متشکل از نقاط به شکل (x,y,c) است. اگر این مقطع را بر صفحهٔ xy تصویر کنیم دقیقاً مجموعهٔ تراز منسوب به c حاصل می‌شود.

مطلب فوق برای هر تابع $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ معتبر است. اگر نمودار تابع را با صفحهٔ $z=c$ قطع کنیم دقیقاً آن بخش نمودار به‌دست می‌آید که بالا سر مجموعهٔ تراز منسوب به c قرار دارد. بدین ترتیب اگر

www.ttmar.ir

نمودار تابع در دست باشد با قطع کردن آن به وسیلهٔ صفحات $z = c$ و تصویر کردن روی صفحه xy، مجموعه‌های تراز f حاصل می‌شوند. بالعکس چنانچه مجموعه‌های تراز رسم شده باشند، با انتقال هر مجموعهٔ تراز $f^{-1}(c)$ به ارتفاع $z = c$، نمودار تابع بازسازی می‌شود.

مثال ۴. فرض کنید $a \in \mathbb{R}^n$ داده شده باشد که $a \neq 0$. تابع $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x) = a \cdot x \tag{۲}$$

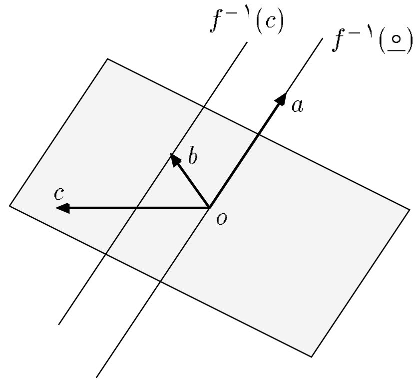
چون $a \cdot x = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n$، این در واقع یک تابع خطی است و در مثال ۱ می‌گنجد ولی بررسی مستقیم آن نیز قابل توجه است. می‌دانیم که مجموعهٔ x هایی که در $a \cdot x = c$ صدق می‌کنند یک ابرصفحه در $\mathbb{R}^n$ است و این ابرصفحه‌ها همه موازی $a \cdot x = 0$ (هستهٔ f = مجموعهٔ x هایی که $a \perp x$) می‌باشند.

مثال ۵. عضوی ثابت $a \neq 0$ در $\mathbb{R}^3$ در نظر می‌گیریم و $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x) = a \times x \tag{۳}$$

که مقصود از $a \times x$ ضرب برداری a و x است. تابع (۳) نیز خطی است (هر مؤلفه عبارت درجه ۱ همگن نسبت به x_1, x_2, x_3 است) و در چارچوب مثال ۱ قرار می‌گیرد. این مثال را نیز مستقیماً بررسی می‌کنیم. از آنجا که $a \times x$ بر a عمود است، اگر $c \in \mathbb{R}^3$ در صفحه گذرا از 0 و عمود بر a قرار نداشته باشد، مجموعهٔ تراز $f^{-1}(c)$ تهی است. برای $c = 0$، مجموعهٔ x هایی که در $a \times x = 0$ صدق می‌کنند مضارب بردار a هستند، یعنی نقاط روی خطی که از امتداد a پدید می‌آید. این در واقع هستهٔ تابع خطی f است. پس سایر مجموعه‌های تراز ناتهی خطوط راست موازی a می‌باشند. در واقع

اشتراک $f^{-۱}(c)$ با صفحه عمود بر a باید یگانه بردار b در این صفحه باشد که (a,b,c) یک سه‌تایی راستگرد است و مساحت مستطیل تعیین شده توسط a و b برابر طول c می‌باشد.



شکل ۲

مثال ٦. تابع $f:\mathbb{R}^۳\longrightarrow\mathbb{R}^۲$ را به صورت

$$f(x,y,z)=(z,x^۲+y^۲+z^۲)$$

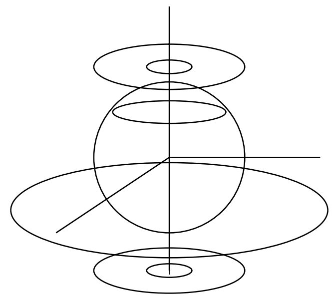
تعریف می‌کنیم. به‌ازای $c=(c_۱,c_۲)\in\mathbb{R}^۲$، مجموعهٔ تراز $f^{-۱}(c)$ عبارت است از:

$$\{(x,y,z)\mid z=c_۱\}\cap\{(x,y,z)\mid x^۲+y^۲+z^۲=c_۲\}$$

برای $c_۲<\circ$، مجموعهٔ سمت راست و در نتیجه $f^{-۱}(c)$ تهی است. برای $c_۲=\circ$، مجموعهٔ سمت راست از تک نقطه‌ای $\{(\circ,\circ,\circ)\}$ تشکیل شده است، پس $f^{-۱}(c_۱,\circ)$ تهی است مگر وقتی که $c_۱=\circ$، و $f^{-۱}(\circ,\circ)$ نیز تک نقطه‌ای $\{(\circ,\circ,\circ)\}$ است. حال فرض کنید $c_۲>\circ$. مجموعهٔ سمت راست، یعنی $f_۲^{-۱}(c_۲)$ کرهٔ شعاع $\sqrt{c_۲}$ به مرکز $\underline{\circ}$ است. برای این که مجموعهٔ سمت چپ، یعنی $f_۱^{-۱}(c_۱)$، با $f_۲^{-۱}(c_۲)$ اشتراک ناتهی داشته باشد، شرط لازم و کافی این است که $-\sqrt{c_۲}\le c_۱\le\sqrt{c_۲}$. وقتی $c_۱=\pm\sqrt{c_۲}$، صفحهٔ $z=\pm\sqrt{c_۲}$ بر کره مماس می‌شود و یک تک

www.ttmar.ir

نقطه‌ای به عنوان مجموعهٔ تراز حاصل می‌شود ($(0, 0, \pm\sqrt{c_2})$ بسته به این که صفحه $z = \sqrt{c_2}$ یا صفحه $z = -\sqrt{c_2}$ در نظر گرفته شود). برای $-\sqrt{c_2} < c_1 < \sqrt{c_2}$، $f^{-1}(c_1, c_2)$ دایرهٔ تقاطع کره با صفحهٔ $z = c_1$ است. بدین ترتیب مجموعه‌های تراز ناتهی تابع f عبارتند از تک نقطه‌ای‌های روی محور z و دایره‌های به مرکز روی محور z که در صفحات افقی $z = c$ قرار دارند.



شکل ۳

در اینجا مسأله زیر را مطرح می‌کنیم. در مورد تابع‌های مستوی دیدیم که مجموعه‌های تراز شکل‌های ساده و یکنواختی دارند. به عنوان گام بعدی، آیا می‌توان حکمی کلی در مورد مجموعه‌های تراز یک تابع درجه ۲ عنوان کرد؟ تابع $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = a_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \qquad (۴)$$

که در اینجا a_i ها و a_{ij} ها اعداد حقیقی داده شده‌اند. طرف راست (۴) کلی‌ترین عبارت درجه دوم برحسب $x_1, \ldots, x_n$ است. سؤال این است که مجموعه‌های تراز تابعی به شکل f در (۴) چگونه اشکالی هستند. در آینده خواهیم دید که با "دوران" مناسب در فضای $\mathbb{R}^n$ می‌توان فقط صورت‌هایی از (۴) را در نظر گرفت که در آن جملات مخلوط درجه دوم، یعنی $x_i x_j$ با $i \neq j$، وجود نداشته باشند، یعنی کافی است تابع‌های درجه دوم به شکل زیر را در نظر بگیریم:

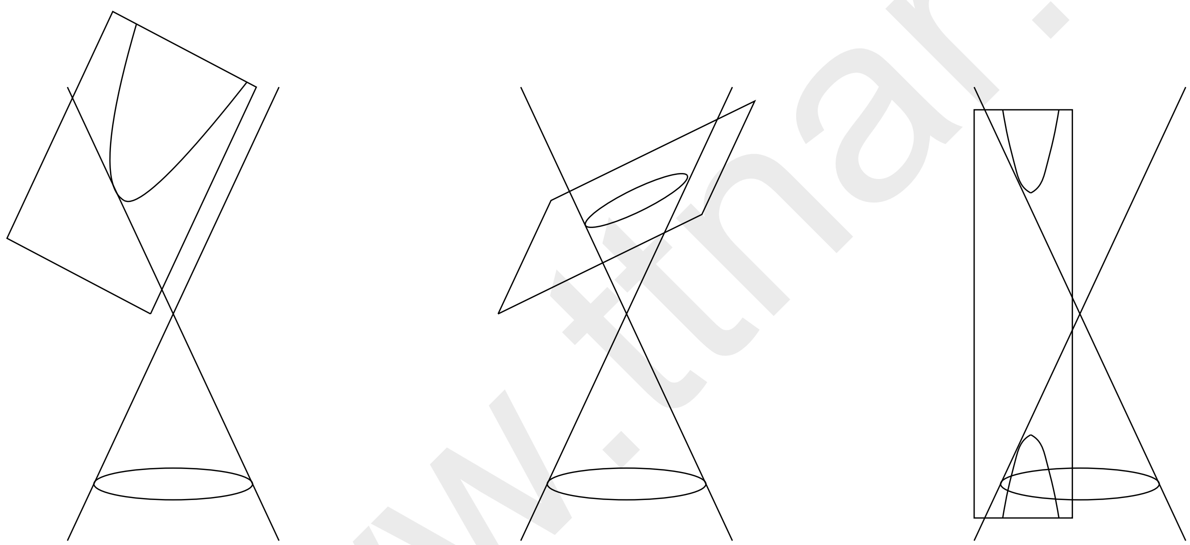
$$f(x_1, \ldots, x_n) = a_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n + a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + \cdots + a_{nn} x_n^2 \qquad (۵)$$

در این بخش و بخش بعد دو حالت $n = 2$ و $n = 3$ را توصیف می‌کنیم.

در حالت $n = ۲$ اگر به جای $x_۱$ و $x_۲$ نمادهای معمولتر x و y را به‌کار گیریم، داریم

$$f(x,y) = a_۰ + a_۱x + a_۲y + a_{۱۱}x^۲ + a_{۲۲}y^۲ \qquad (۶)$$

مجموعه‌های تراز چنین تابعی به مقاطع مخروطی معروفند به این دلیل که از نظر هندسی این منحنی‌ها را می‌توان به صورت مقطع یک صفحه و یک مخروط به‌دست آورد (شکل ۴). در واقع مقاطع مخروطی از دوران باستان شناخته شده بودند و کتاب مخروطات آپولونیوس که بیش از ۲۰۰ سال قبل از میلاد نوشته شده رسالهٔ جامعی در بررسی این اشکال است. سه شکل "سهمی"، "بیضی" و "هذلولی" که در شکل نمایش داده شده‌اند، سه نوع عمدهٔ مقاطع مخروطی هستند.



شکل ۴

حال برای f در (۶) می‌خواهیم مجموعهٔ (x,y) هایی را که در $f(x,y) = ۰$ صدق می‌کنند بررسی کنیم. در (۶) می‌توانیم قرار دهیم $a_۰ = ۰$ زیرا با جذب $a_۰$ در c مجموعه‌های تراز $f(x,y) = c$ همهٔ حالات ممکن را در بر می‌گیرد. چند حالت در نظر می‌گیریم:

الف) $a_{۱۱} = a_{۲۲} = ۰$. در این حالت در وضعیت تابع‌های مستوی قرار می‌گیریم که قبلاً بررسی شده‌اند.

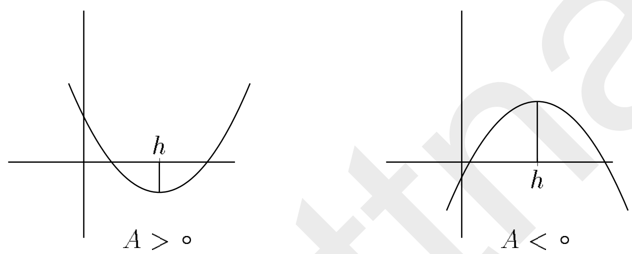
ب) یکی از a_{11} و a_{22} صفر و دیگری ناصفر. مثلاً فرض کنید $a_{11} \neq 0$ و $a_{22} = 0$. در این صورت با تکمیل مجذور، f به شکل زیر در می‌آید:

$$f(x,y) = A_0 + a_{11}(x-h)^2 + a_2 y \tag{۷}$$

اگر $a_2 \neq 0$، با قرار دادن $f(x,y) = 0$ و تقسیم بر a_2، عبارتی به شکل:

$$y = A(x-h)^2 + B \quad , \quad A = \frac{a_{11}}{a_2} \neq 0$$

به‌دست می‌آید. که سهمی نام دارد. بسته به این که $A > 0$ یا $A < 0$ یکی از دو منحنی نمایش داده شده در شکل ۵ حاصل می‌شود.



شکل ۵

به عنوان مقطع مخروطی، سهمی از تقاطع یک صفحه موازی یکی از خطوط مولد مخروط به‌دست می‌آید. اگر در (۷) داشته باشیم $a_2 = 0$، آنگاه $f(x,y) = 0$، بسته به علامت A_0 و a_{11}، دو خط راست قائم، یک خط راست یا تهی است.

حال فرض کنید a_{11} و a_{22} هر دو ناصفر باشند. در این صورت با تکمیل مجذورها در (٦) به عبارت زیر می‌رسیم:

$$f(x,y) = a_{11}(x-h)^2 + a_{22}(y-k)^2 + A_0 \tag{۸}$$

در اینجا دو حالت در نظر می‌گیریم:

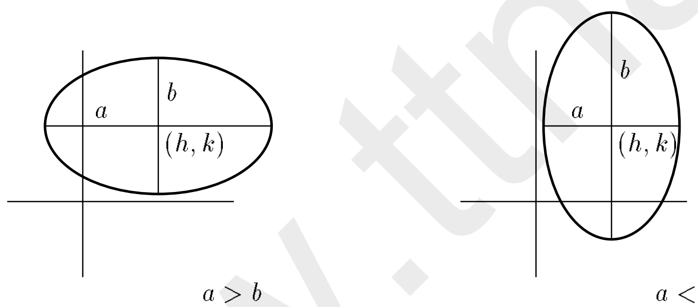
ج) a_{11} و a_{22} همعلامت باشند. در این صورت اگر A_0 نیز همعلامت با a_{11} و a_{22} باشد، $f(x,y)$ همواره مثبت یا همواره منفی است، یعنی در $f(x,y)=0$ هیچ نقطه‌ای صدق نمی‌کند. اگر $A_0=0$، آنگاه تنها نقطه (h,k) در $f(x,y)=0$ صدق می‌کند. بالاخره اگر علامت A_0 از علامت a_{11} و a_{22} متفاوت باشد، در $f(x,y)=0$، A_0 را به طرف دیگر معادله برده بر $-A_0$ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{(x-h)^2}{-A_0/a_{11}}+\frac{(y-k)^2}{-A_0/a_{22}}=1$$

از آنجا که علامت A_0 با علامت a_{11} و a_{22} متفاوت بود، هر یک از دو مخرج بالا مثبت است و می‌توان هر یک را به صورت یک مجذور نوشت، پس داریم:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1 \qquad (9)$$

این معادلهٔ یک بیضی به مرکز نقطهٔ (h,k) است (شکل ٦).



شکل ٦

د) a_{11} و a_{22} مختلف العلامه باشند. در این صورت نیز اگر $A_0\neq 0$، با محاسبه‌ای عیناً مانند فوق به یکی از دو عبارت زیر می‌رسیم (بسته به این که A_0 با کدامیک از a_{11} و a_{22} همعلامت باشد):

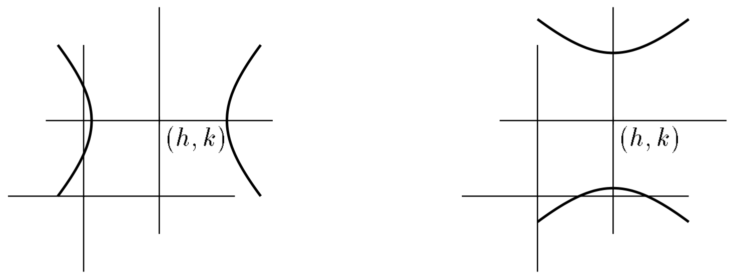
$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1 \qquad (10)$$

یا

$$-\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1 \qquad (11)$$

www.tnar.ir

هر یک از این دو منحنی یک هذلولی نام دارد. هر هذلولی از دو شاخه قرینه تشکیل شده است (شکل ۷)



شکل ۷

بالاخره در این حالت اگر $A_0 = 0$، آنگاه $f(x,y) = 0$ را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$a^2(x-h)^2 - b^2(y-k)^2 = 0 \tag{۱۲}$$

که در آن $a^2 = |a_{11}|$ و $b^2 = |a_{22}|$. این نمایش جبری دو خط راست متقاطع با ضریب زاویه‌های $\pm\frac{a}{b}$ است که از نقطهٔ (h,k) می‌گذرند. ضمناً هر یک از شاخه‌های هذلولی‌های (۱۰) و (۱۱) بر دو خط راست (۱۲) مجانبند.

www.ttmar.ir

مجموعه‌های تراز (۲)

به بررسی مجموعه‌های تراز تابع‌های درجه دو ادامه می‌دهیم. این بار تابع‌های درجه دو $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ را در نظر می‌گیریم. همان طور که در جلسهٔ قبل اشاره کردیم، می‌توان با دوران محورهای مختصات جملات مخلوط را حذف و f را به صورت زیر نمایش داد:

$$f(x,y,z) = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 \qquad (1)$$

مجموعه‌های تراز چنین تابعی رویه‌های درجه دوم خوانده می‌شوند. در زیر تعدادی مثال بررسی می‌کنیم.

مثال ۱. (بیضی‌وار) رویهٔ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad a,b,c > 0 \qquad (2)$$

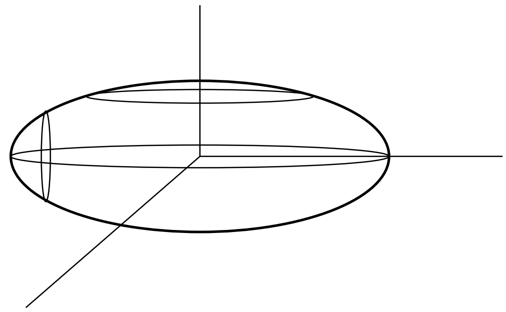
بیضی‌وار نام دارد. برای دستیابی به شکل این رویه در $\mathbb{R}^3$، تقاطع آن را با صفحات موازی صفحات مختصاتی بررسی می‌کنیم. مثلاً اشتراک (۲) را با صفحهٔ $z = k$ در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 - \dfrac{k^2}{c^2} \\ z = k \end{cases} \qquad (3)$$

اشتراک به‌ازای $|k| > c$ تهی است، به‌ازای $k = \pm c$، دو نقطهٔ $(0,0,\pm c)$ به‌دست می‌آیند، و برای $|k| < c$، با تقسیم دو طرف رابطهٔ اول (۳) بر $1 - \frac{k^2}{c^2}$ یک بیضی در صفحهٔ $z = k$ به‌دست می‌آوریم.

www.ttmar.ir

عیناً وضعیت مشابه برای اشتراک‌های $x = k$ و $y = k$ وجود دارد. رویهٔ (۲) در شکل ۱ نمایش داده شده است.

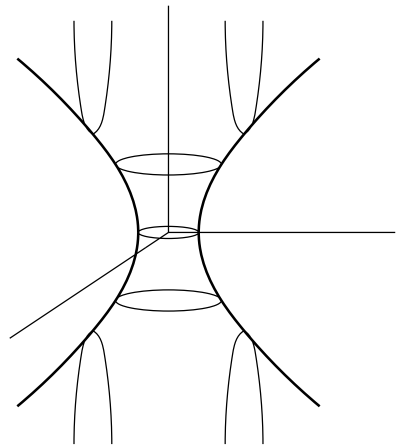


شکل ۱

مثال ۲. (هذلولی‌وار یکپارچه) رویهٔ زیر را در نظر می‌گیریم که هذلولی‌وار یکپارچه نام دارد:

$$\frac{x^۲}{a^۲} + \frac{y^۲}{b^۲} - \frac{z^۲}{c^۲} = ۱ \qquad a, b, c > ۰ \tag{۴}$$

مجدداً روش بررسی شکل این رویه، یافتن تقاطع رویه با صفحات موازی صفحات مختصاتی است. برای $z = k$، بیضی $\frac{x^۲}{a^۲} + \frac{y^۲}{b^۲} = ۱ + \frac{k^۲}{c^۲}$ در صفحهٔ $z = k$ به‌دست می‌آید. کوچکترین بیضی به‌ازای $k = ۰$ در صفحهٔ xy حاصل می‌شود و به طور کلی طول نیم‌قطرها برابر $a\sqrt{۱ + \frac{k^۲}{c^۲}}$ و $b\sqrt{۱ + \frac{k^۲}{c^۲}}$ است. برای تقاطع $x = k$ و $y = k$، به جای بیضی، به ترتیب هذلولی $\frac{y^۲}{b^۲} - \frac{z^۲}{c^۲} = ۱ - \frac{k^۲}{a^۲}$ در صفحه $x = k$ و هذلولی $\frac{x^۲}{a^۲} - \frac{z^۲}{c^۲} = ۱ - \frac{k^۲}{b^۲}$، را به‌دست می‌آوریم. در شکل (۲) رویهٔ (۴) نمایش داده شده است.



شکل ۲

مثال ۳. (هذلولی‌وار دوپارچه) این نام به مجموعهٔ (x,y,z) ها که در رابطه‌ای به صورت زیر صدق می‌کنند اطلاق می‌شود:

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad a,b,c>0 \tag{5}$$

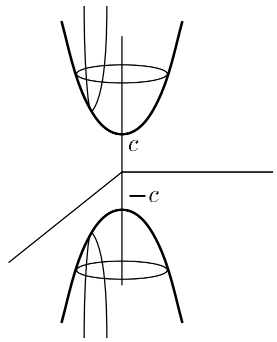
در اینجا تقاطع $x=k$ و $y=k$ همانند مثال قبل هذلولی هستند. برای $z=k$ داریم:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{k^2}{c^2}-1 \\ z=k \end{cases} \tag{6}$$

مشاهده می‌کنیم که به‌ازای $|k|>c$ یک بیضی در صفحه $z=k$ به‌دست می‌آید، برای $k=\pm c$، دو تک نقطه‌ای $(0,0,\pm c)$ به ترتیب در صفحات $z=c$ و $z=-c$ حاصل می‌شوند و برای $|k|<c$

www.ttmar.ir

اشتراک تهی است. هذلولی‌وار دو پارچه در شکل ۳ نمایش داد شده است.

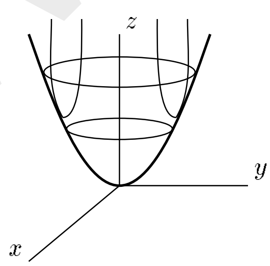


شکل۳

مثال ۴. (سهمی‌وار بیضوی) اصطلاح سهمی‌وار بیضوی به مجموعه‌های (x, y, z) که در معادلاتی چون $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ یا $z = -(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2})$ صدق می‌کنند اطلاق می‌شود. مثلاً مجموعه (x, y, z) هایی را در نظر بگیرید که در رابطهٔ زیر صدق می‌کنند:

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \qquad a, b > 0 \tag{۷}$$

مقطع این مجموعه با $z = k$ به ترتیب یک بیضی، تک نقطه‌ای $(0, 0, 0)$ و تهی است بسته به این که $k > 0$، $k = 0$ یا $k < 0$. هر مقطع $x = k$ و $y = k$ نیز یک سهمی است. بدین ترتیب شکل ۴ حاصل می‌شود.



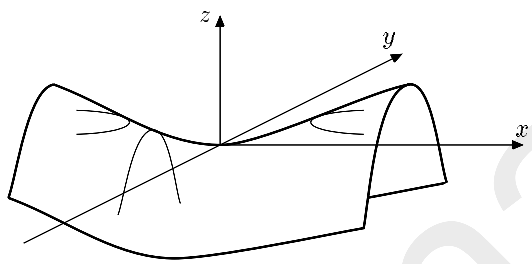
شکل ۴

www.ttmar.ir

مثال ۵. (سهمی‌وار هذلولوی) اگر علامت یکی از دو عبارت سمت راست (۷) را به منفی مبدل کنیم یک سهمی‌وار هذلولوی به‌دست می‌آید:

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \qquad a, b > 0 \tag{۸}$$

مقطع $z = 0$ یک جفت خط راست متقاطع $bx \pm ay = 0$ است و به‌ازای $z = k \neq 0$ یک هذلولوی به‌دست می‌آید که امتداد بازشدن آن برای $k > 0$ و $k < 0$ به اندازه $\frac{\pi}{2}$ چرخش دارد. تقاطع $x = k$ و $y = k$ سهمی هستند (شکل ۵)



شکل ۵

مثال ۶. (مخروط) مجموعهٔ نقاط (x, y, z) که در رابطهٔ زیر صدق می‌کنند در نظر بگیرید:

$$\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \qquad a, b, c > 0 \tag{۹}$$

تقاطع $z = k$ به‌ازای $k \neq 0$ بیضی و مقطع با $z = 0$ تک نقطه‌ای $(0, 0, 0)$ است. برای $x = k$ و $y = k$ مقطع یک هذلولی است. مقطع صفحهٔ قائم $Ax + By = 0$ را با این شکل به‌دست می‌آوریم. دست‌کم یکی از A و B ناصفر است، مثلاً $A \neq 0$. با جایگزینی در (۹) داریم:

$$\frac{z^2}{c^2} = \frac{B^2}{A^2 a^2} y^2 + \frac{y^2}{b^2}$$

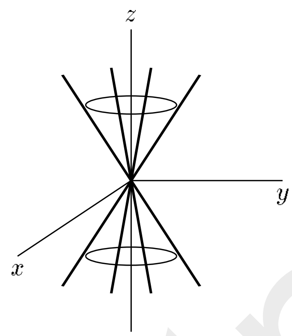
www.ttnar.ir

اگر $\frac{1}{b^2}+\frac{B^2}{A^2a^2}$ را به $\frac{1}{p^2}$ نمایش دهیم، داریم:

$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{p^2}=0$$

$$\left(\frac{z}{c}-\frac{y}{p}\right)\left(\frac{z}{c}+\frac{y}{p}\right)=0$$

پس تصویر مقطع روی صفحهٔ yz دو خط متقاطع است. با توجه به این که مقطع روی صفحه $Ax+By=0$ قرار دارد، مقطع خود از دو خط راست تشکیل شده است. این مخروط در شکل ۶ نمایش داده شده است.



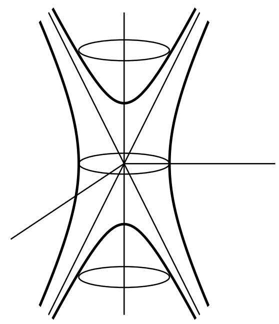
شکل ۶

مخروط را می‌توان حالت گذر از هذلولی‌وار یکپارچه به هذلولی‌وار دوپارچه تلقی کرد. تابع $f:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}$ را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$f(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2} \qquad (10)$$

که در آن $a,b,c>0$ داده شده‌اند. مجموعه‌های تراز f را بررسی می‌کنیم. به‌ازای $k>0$، $f^{-1}(k)$ یک هذلولی‌وار یکپارچه است. با میل دادن $k>0$ به سمت صفر، بیضی مرکزی این هذلولی‌وار تدریجاً کوچکتر می‌شود تا به‌ازای $k=0$ این بیضی تبدیل به یک نقطه می‌شود و مخروط $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ پدید می‌آید. وقتی k از صفر گذر کرده و منفی می‌شود، یعنی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=k<0$ رویه به یک هذلولی‌وار دوپارچه مبدل می‌شود. می‌توان موضوع را اینگونه

تلقی کرد که با گذر از صفر به مقادیر منفی، دو شاخهٔ مخروط از هم جدا می‌شوند (شکل ۷)



شکل ۷

قابل ذکر است که همهٔ هذلولی‌وارهایی که مجموعهٔ تراز این تابع هستند نسبت به مخروط فوق مجانبند.

شش مثال بالا بیشتر حالت‌های غیر استثنایی مجموعه‌های تراز یک تابع درجهٔ دوم سه متغیری را در بر می‌گیرد (در واقع مخروط را می‌توان یک حالت استثنایی تلقی کرد). یک مورد اساسی دیگر موجود است و آن وقتی است که یکی از سه متغیر به درجه دو و دوتای دیگر با درجه اول ظاهر می‌شوند. برای بررسی این مورد نخست وضعیت زیر را در نظر بگیرید.

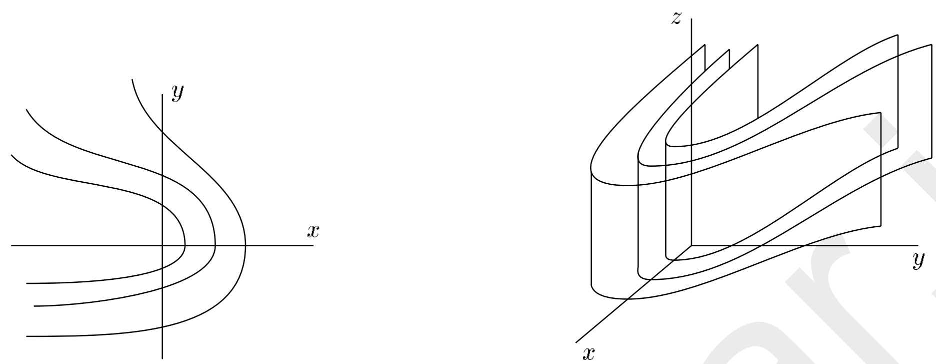
مثال ۷. (استوانه) فرض کنید $f : \mathbb{R}^{3} \longrightarrow \mathbb{R}$ به صورت زیر تعریف شده است:

$$f(x,y,z) = g(x,y) \tag{11}$$

که در آن $g : \mathbb{R}^{2} \longrightarrow \mathbb{R}$. مجموعه‌های تراز f را بررسی می‌کنیم.

$$\begin{aligned} f^{-1}(k) &= \{(x,y,z) \mid f(x,y,z) = k\} \\ &= \{(x,y,z) \mid g(x,y) = k, z \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

بدین ترتیب مجموعهٔ تراز $f^{-1}(k)$ بدین طریق به‌دست می‌آید که مجموعه تراز $g^{-1}(k)$ را در صفحه xy در نظر می‌گیریم و آن را به موازات محور z در فضای سه‌بعدی امتداد می‌دهیم. شکل به‌دست آمده یک استوانه نام دارد. برای تابع‌های هر تعداد متغیر، هرگاه یک یا چند متغیر در عبارت تعریف کنندهٔ تابع ظاهر نشوند یک استوانه به مفهوم عام به‌دست می‌آید.



شکل ۸

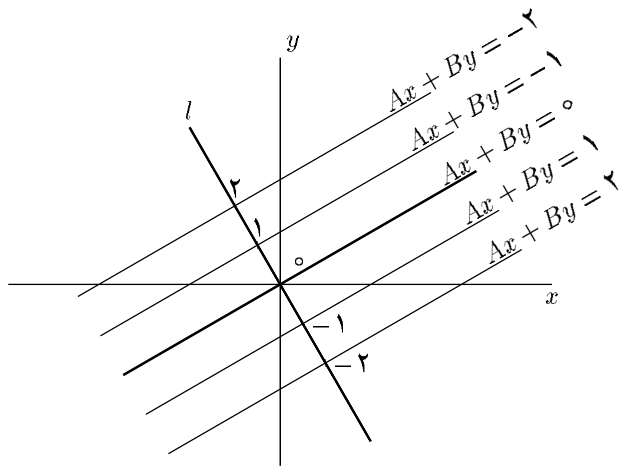
مثال ۸. حال مجموعهٔ (x, y, z) هایی را در نظر بگیرید که در رابطهٔ

$$Ax + By + Cz^2 = 0 \tag{۱۲}$$

صدق می‌کنند. در اینجا A، B و C اعداد حقیقی داده شده‌اند. قرار می‌دهیم $w = Ax + By$. خطوط راست $Ax + By = k$، $k \in \mathbb{R}$ داده شده، در صفحه xy موازی هستند. فرض کنید l خط گذرا از $\underline{0}$ در صفحهٔ xy عمود بر این خطوط باشد. خط l را محور w می‌نامیم و هر نقطهٔ آن را با مقدار ثابت w از

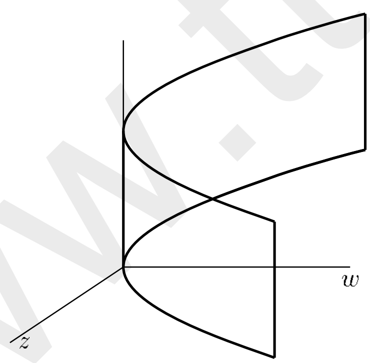
www.ttnar.ir

خط راست $Ax + By = w$ که در آن نقطه خط l را قطع می‌کند مدرج می‌کنیم (شکل ۹)



شکل ۹

حال در صفحه zw منحنی $w + cz^۲ = ۰$ را رسم می‌کنیم که یک سهمی است. اگر این سهمی را در جهت عمود بر صفحه zw امتداد دهیم استوانه‌ای به‌دست می‌آید که مکان هندسی (۱۲) است (شکل ۱۰)



شکل ۱۰

در پایان سؤال زیر را مطرح می‌کنیم. دیدیم که تابع‌های درجه ۱ (مستوی، خطی) دارای مجموعه‌های تراز مستوی، موازی و همبعد هستند، و تابع‌های درجه ۲ نیز از شکل‌های ویژه‌ای برخوردارند. تا چه حد می‌توان ماهیت یک تابع را از شکل مجموعه‌های تراز آن تعیین کرد؟ به عنوان

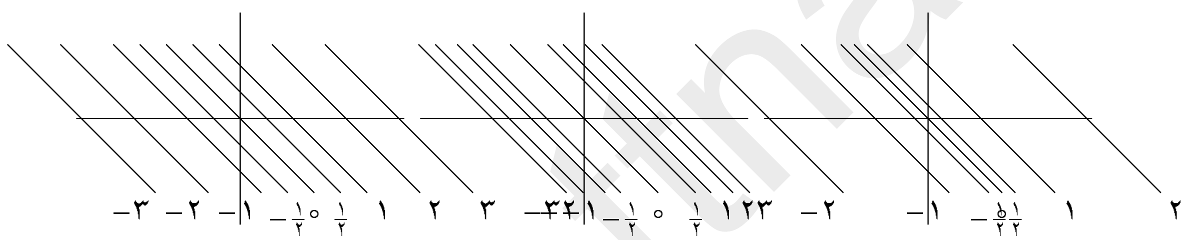
www.ttmar.ir

ساده‌ترین حالت، فرض کنید تابع $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ طوری باشد که مجموعه‌های تراز آن خطوط راست موازی باشند. آیا f لزوماً خطی یا مستوی است؟ جواب این سؤال منفی است:

مثال ۹. سه تابع زیر از $\mathbb{R}^2$ به $\mathbb{R}$ را در نظر بگیرید:

$$h(x,y)=\sqrt[3]{x+y} \quad , \quad g(x,y)=(x+y)^3 \quad , \quad f(x,y)=x+y$$

طرف راست هر یک از این عبارت‌ها را برابر مقداری ثابت قرار دهیم نتیجه می‌شود که $x+y$ ثابت است، و هر تابع هر مقدار ثابت را روی دقیقاً یک خط راست موازی $x+y=0$ می‌گیرد. در شکل (۱۱) مجموعه‌های تراز این سه تابع به‌ازای مقدار مختلف نمایش داده شده‌اند. مجموعه‌های تراز به‌ازای $c=0,\pm 1$ برای هر سه تابع یکی هستند. در مورد تابع خطی f به‌ازای مقادیر متوالی و



شکل ۱۱

هم فاصلهٔ c، مثلاً $-2,-1,0,1,2$، مجموعه‌های تراز مربوط از هم هم فاصله‌اند. برای تابع g، برای $|c|>1$، مجموعه‌های تراز برای مقادیر هم فاصلهٔ c کندتر از مورد f از هم دور می‌شوند، و برعکس برای h، برای $|c|>1$، مجموعه‌های تراز برای مقادیر هم فاصلهٔ c فواصل فزاینده‌ای دارند. عکس این وضعیت برای مقادیر $|c|<1$ رخ می‌دهد. به طور کلی نزدیکی و تمرکز مجموعه‌های تراز برای مقادیر هم فاصله دلیل بر رشد سریع تابع و بالعکس دوری نسبی آنها نشان رشد کند تابع است. مثلاً در این مثال، برای $|c|>1$، تابع با مقدار $(x+y)^3$ سریعتر از $x+y$ و $x+y$ سریعتر از $(x+y)^{\frac{1}{3}}$ رشد می‌کند. این روند برای مقادیر $|c|<1$ وقتی از ۱ به ۰ نزدیک می‌شویم معکوس می‌شود.

www.tmar.ir

فرض کنید $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع یک به یک باشد و $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع دلخواه. در این صورت مجموعه‌های تراز $g = \phi \circ f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ همان مجموعه‌های تراز f هستند منتها به‌ازای مقادیر متفاوت، که تحت ϕ جابجا می‌شوند. در مثال بالا، برای g داریم $\phi(t) = t^{۳}$ و برای h، $\phi(t) = t^{\frac{۱}{۳}}$. بالعکس اگر تابع $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ داده شده باشد و $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ دارای همان مجموعه‌های تراز f با مقادیر جابجا شده باشد، می‌توان نوشت $g = \phi \circ f$ که $\phi : S \longrightarrow \mathbb{R}$، S مجموعهٔ مقادیر ممکن f، و ϕ جابجا کنندهٔ مقادیر f است.

www.ttmar.ir

پیوستگی و حد (۱)

مفهوم‌های پیوستگی و حد در وضعیت چندمتغیری شباهت کامل به وضعیت یک متغیری دارند. همان انگیزه‌ها و همان روشها در اینجا نیز حکمفرماست. فرض کنید S زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^n$ است و $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع. نقاط S را به $x = (x_1, \ldots, x_n)$ و مقدار $f(x)$ را به y نمایش می‌دهیم. در یک مسأله تجربی می‌توان $x_1, \ldots, x_n$ را عواملی دانست که با آزمایش اندازه‌گیری می‌شوند و $f(x_1, \ldots, x_n)$ یک عبارت یا فرمول است که از آن مقدار y محاسبه می‌شود. نقطه‌ای $a = (a_1, \ldots, a_n)$ در دامنهٔ f در نظر بگیرید، یعنی $a \in S$. برای محاسبهٔ مقدار $f(a)$، خطایی $e > 0$ را به عنوان "خطای قابل تحمل" منظور می‌کنیم. می‌خواهیم بدانیم که آیا می‌توان حدود خطایی $e'_1 > 0$، ... ، $e'_n > 0$ برای به ترتیب x_1، ...، x_n پیدا کرد به طوری که اگر برای x در دامنهٔ f، $|x_1 - a_1| < e'_1$، ...، $|x_n - a_n| < e'_n$، آنگاه خطای حاصل در محاسبه، یعنی $|f(x) - f(a)|$ کوچکتر از e باشد؟ اگر بتوان برای هر $e > 0$، مقادیر متناظری $e'_1 > 0$، ...، $e'_n > 0$ با ویژگی بالا پیدا کرد، می‌گوییم "محاسبهٔ f در a پایدار است". اصطلاح معمول‌تر این است که تابع f را در نقطهٔ a پیوسته بنامیم.

مثال ۱. (تابع‌های مستوی) تابع مستوی $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ را در نظر می‌گیریم:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = c_0 + c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n$$

که در آن $c_0, c_1, \ldots, c_n$ اعداد حقیقی داده شده‌اند. نشان می‌دهیم f در همه نقاط $\mathbb{R}^n$ پیوسته است. نقطه‌ای $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ در نظر بگیرید و خطای دلخواهی $e > 0$ منظور کنید. می‌خواهیم $e'_1 > 0$، ...، $e'_n > 0$ را طوری تعیین کنیم که:

$$(|x_1 - a_1| < e'_1, \ldots, |x_n - a_n| < e'_n) \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < e$$

معمولاً یافتن $e'_1, \ldots, e'_n$ به این طریق حاصل می‌شود که سعی می‌کنیم عبارت $|f(x) - f(a)|$، یا کمیتی بزرگتر از آن را، طوری بازنویسی کنیم که اثر هر یک از عوامل $|x_1 - a_1|$، ...، $|x_n - a_n|$ در آن ظاهر شود. در اینجا:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &= |(c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n) - (c_1 a_1 + \cdots + c_n a_n)| \\ &= |c_1(x_1 - a_1) + \cdots + c_n(x_n - a_n)| \\ &\leq |c_1||x_1 - a_1| + \cdots + |c_n||x_n - a_n| \end{aligned}$$

حال اگر بتوانیم هر $|c_j||x_j - a_j|$ را کوچکتر از $\frac{e}{n}$ کنیم، نتیجه مطلوب در مورد خطای $f(x)$ به‌دست می‌آید. چون c_j داده شده و معلوم است اگر e'_j برابر (یا کوچکتر از) $\frac{e}{|c_j|n}$ اختیار شود مقصود حاصل می‌شود. تنها مشکل احتمالی این است که ممکن است c_j صفر باشد. برای احتراز از این مشکل $e_j > 0$ را کوچکتر یا مساوی $\frac{e}{(|c_j|+1)n}$ می‌گیریم. در این صورت:

$$\begin{aligned} (|x_1 - a_1| < e'_1, \ldots, |x_n - a_n| < e'_n) \Longrightarrow |f(x) - f(a)| &\leq |c_1||x_1 - a_1| + \cdots + |c_n||x_n - a_n| \\ &< |c_1|\tfrac{e}{(|c_1|+1)n} + \cdots + |c_n|\tfrac{e}{(|c_n|+1)n} \\ &< \tfrac{e}{n} + \cdots + \tfrac{e}{n} = e \end{aligned}$$

و حکم به اثبات می‌رسد.

توجه کنید که تابع‌های مستوی شامل مثال‌های مهم زیر می‌شوند:

الف) تابع‌های ثابت. در اینجا $c_1 = \cdots = c_n = 0$.

ب) تابع‌های افکنش. مقصود از "تابع افکنش روی مؤلفه j ام" تابع $\pi_j : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ که به صورت $\pi_j(x_1, \ldots, x_n) = x_j$ تعریف می‌شود. در اینجا $c_j = 1$ و سایر c_j ها صفر هستند.

www.ttnar.ir

ج) تابع جمع. تابع $s : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ که به صورت زیر تعریف می‌شود تابع جمع می‌نامیم:

$$s(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + \cdots + x_n$$

در اینجا $c_0 = 0$ و $c_1 = \cdots = c_n = 1$.

مثال ۲. (تابع ضرب) $p : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$p(x, y) = x \cdot y$$

ادعا می‌کنیم p در هر نقطهٔ (a, b) از $\mathbb{R}^2$ پیوسته است. برای خطای داده شدهٔ $e > 0$، باید $e'_1 > 0$ و $e'_2 > 0$ را طوری تعیین کنیم که:

$$(|x - a| < e'_1, |y - b| < e'_2) \Longrightarrow |xy - ab| < e$$

در اینجا نیز $|xy - ab|$ را بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{aligned} |xy - ab| &= |xy - xb + xb - ab| \\ &\leq |x||y - b| + |b||x - a| \end{aligned}$$

مجدداً می‌خواهیم با کوچکتر کردن هر یک از دو عامل جمع در سمت راست از $\frac{e}{2}$، به نتیجه مطلوب برسیم. تنها نکتهٔ جدید در اینجا این است که ضریب $|x|$ در عبارت اول خود متغیر است. برای رفع این مشکل، چون قرار است x به a نزدیک باشد، مقدمتاً x را به بازهٔ $]a - 1, a + 1[$ محدود می‌کنیم، پس با این قید:

$$|x| < |a| + 1$$

و در نتیجه

$$|xy - ab| \leq (|a| + 1)|y - b| + |b||x - a|$$

حال با گرفتن $0 < e'_1 \le \min\{1, \frac{e}{2(|b|+1)}\}$ و $0 < e'_2 \le \frac{e}{2(|a|+1)}$، هم قید مقدماتی تأمین می‌شود و هم نامساوی مورد نظر در مورد $|xy - ab|$ به‌دست می‌آید.

مثال ۳. (تابع خارج قسمت) U را مجموعهٔ زیر از $\mathbb{R}^2$ می‌گیریم:

$$U = \{(x,y) \mid y \neq 0\}$$

یعنی U مکمل محور x در صفحهٔ xy است. تابع $q : U \longrightarrow \mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$q(x,y) = \frac{x}{y}$$

ثابت می‌کنیم q در هر نقطه دامنهٔ خود، (a,b)، $b \neq 0$، پیوسته است. برای $e > 0$ داده شده، $e'_1 > 0$ و $e'_2 > 0$ جستجو می‌کنیم که

$$((x,y) \in U, |x-a| < e'_1, |y-b| < e'_2) \Longrightarrow |\frac{x}{y} - \frac{a}{b}| < e$$

داریم

$$\begin{aligned} |\tfrac{x}{y} - \tfrac{a}{b}| &= \tfrac{|bx-ay|}{|y||b|} \\ &= \tfrac{|bx-ba+ba-ay|}{|y||b|} \\ &\le \tfrac{|x-a|}{|y|} + \tfrac{|a||y-b|}{|y||b|} \end{aligned}$$

می‌خواهیم با انتخاب مناسب $e'_1 > 0$ و $e'_2 > 0$ هر یک از دو عامل طرف راست را از $\frac{e}{2}$ کوچکتر کنیم. با این که $y \neq 0$، از آنجا که فعلاً محدودیتی برای $y \neq 0$ قائل نشده‌ایم، مخرج هر یک از دو عبارت می‌تواند به دلخواه کوچک شود و از این رو در نگاه اول محدود کردن اندازهٔ کسرها مشکل به نظر می‌رسد. ولی توجه کنید که $b \neq 0$ مقداری داده شده است و قرار است y نهایتاً نزدیک b اختیار شود. مقدمتاً y را از نصف فاصلهٔ b به 0 بزرگتر می‌گیریم، یعنی $|y-b| < \frac{b}{2}$، یا $|y| > \frac{|b|}{2}$. این موجب می‌شود که $\frac{1}{|y|} < \frac{2}{|b|}$، پس با این قید داریم:

$$|\frac{x}{y} - \frac{a}{b}| \le \frac{2}{|b|}|x-a| + \frac{2|a|}{|b|^2}|y-b|$$

www.ttmar.ir

حال ضرایب $|x-a|$ و $|y-b|$ مقادیر ثابتی هستند. $e'_1 > 0$ و $e'_2 > 0$ را به طریق زیر اختیار می‌کنیم:

$$0 < e'_1 \leq \frac{|b|}{4} e \qquad , \qquad 0 < e'_2 \leq \min\{\frac{|b|^2}{4(|a|+1)} e, \frac{|b|}{2}\}$$

به این ترتیب اگر $|x-a| < e'_1$ و $|y-b| < e'_2$، هم قید مقدماتی رعایت می‌شود و هم $|\frac{x}{y} - \frac{a}{b}| < e$ حاصل می‌گردد.

تا اینجا فقط تابع‌هایی را در نظر گرفته‌ایم که برد آنها $\mathbb{R}$ است. حال تابعی $f : S \longrightarrow \mathbb{R}^m$ در نظر بگیرید که در آن $S \subset \mathbb{R}^n$. داریم $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$ که در اینجا هر یک از f_i ها تابعی از S به $\mathbb{R}$ است. از آنجا که محاسبهٔ تابع f به منزلهٔ محاسبهٔ m تابع $f_1, \ldots, f_m$ است، طبیعی است که پیوستگی f در نقطهٔ a را به صورت زیر تعریف کنیم: f را در نقطهٔ $a \in S$ پیوسته می‌نامیم در صورتی که هر یک از f_i ها در نقطهٔ a پیوسته باشد. بدین ترتیب پیوستگی یک تابع با مقدار در $\mathbb{R}^m$ نکتهٔ تازه‌ای ندارد، بلکه باید پیوستگی m تابع مؤلفه را بررسی کرد. با این حال می‌توان صورت معادلی از این تعریف ارائه کرد که شباهت ظاهری بیشتری به تعریف پیوستگی تابع‌های $S \longrightarrow \mathbb{R}$ دارد و تعبیر هندسی بعضاً سودمندی می‌پذیرد. برای این کار نخست نامساوی‌های ساده و اساسی زیر را مطرح می‌کنیم.

(۱۸—۱) فرض کنید $z = (z_1, \ldots, z_p)$ و $w = (w_1, \ldots, w_p)$ که در آن z_i ها و w_i ها اعداد حقیقی هستند. در این صورت

(۱) $$|z_i - w_i| \leq |z - w| \qquad \text{برای هر } j = 1, \ldots, p$$

(۲) $$|z - w| \leq \sqrt{p} \max\{|z_1 - p_1|, \ldots, |z_p - w_p|\}$$

توجه کنید که $|z-w|$ طول (نرم) p تایی $z-w$ است و هر $|z_i - w_i|$ قدرمطلق عدد $z_i - w_i$ می‌باشد. نامساوی (۱) از تعریف $|z-w|^2 = \sum_{i=1}^{p} |z_j - w_j|^2$ نتیجه می‌شود. برای (۲) نیز از همین تعریف

www.tinar.ir

داریم:

$$|z-w|^{۲} \leq p \max\{|z_{۱}-w_{۱}|^{۲}, \dots, |z_p-w_p|^{۲}\}$$

که با جذرگیری نتیجهٔ مورد نظر را می‌دهد.

نامساوی (۱) نتیجه می‌دهد که اگر دو p تایی z و w در $\mathbb{R}^p$ نزدیکتر از e باشند، تفاضل مؤلفه‌های متناظر آنها نیز کوچکتر از e است. بالعکس از (۲) می‌بینیم که هرگاه قدرمطلق تفاضل همهٔ مؤلفه‌های متناظر z و w کوچکتر از e باشند، آنگاه فاصلهٔ z از w کوچکتر از $\sqrt{p}e$ است. با توجه به این که در $\mathbb{R}^p$، p یک عدد ثابت است، این دو نامساوی نشان می‌دهند که برای نزدیک کردن z و w لازم و کافی است که همهٔ مؤلفه‌های متناظر z و w به هم نزدیک شوند. با این مقدمه، تعریف پیوستگی تابع‌های $f: S \longrightarrow \mathbb{R}^m$ را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

(۱۸—۲) گزاره. S زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^n$ است، $a \in S$، و $f: S \longrightarrow \mathbb{R}^m$ یک تابع. در این صورت شرطی لازم و کافی برای پیوستگی f در a این است که برای هر $e > ۰$، وجود داشته باشد $e' > ۰$ که

$$(x \in S, |x-a| < e') \Longrightarrow |f(x)-f(a)| < e$$

اثبات. نخست فرض می‌کنیم هر f_i در نقطهٔ a پیوسته است و $e > ۰$ داده شده است. بنابر فرض پیوستگی، $e'_{i۱} > ۰$، …، $e'_{in} > ۰$ وجود دارند که:

$$(x \in S, |x_{۱}-a_{۱}| < e'_{i۱}, \dots, |x_n-a_n| < e'_{in}) \Longrightarrow |f_i(x)-f_i(a)| < \frac{e}{\sqrt{m}}$$

بنابراین تحت این شرایط از (۲) نتیجه می‌گیریم که:

$$|f(x)-f(a)| < e$$

از سویی دیگر اگر قرار دهیم $e' = \min\{e'_{ij} \mid i = 1,\ldots,m; j = 1,\ldots,n\}$، هرگاه $|x-a| < e'$، می‌توان طبق (۱) نتیجه گرفت که $|x_j - a_j| < e'$ برای هر j، و در نتیجه $|x_j - a_j| < e'_{ij}$، بنابراین:

$$(x \in S, |x-a| < e') \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < e$$

بالعکس فرض کنید شرط بالا را بتوان به‌ازای هر $e > 0$ تأمین کرد، نشان می‌دهیم هر f_i در نقطهٔ a پیوسته است. فرض کنید $e > 0$ داده شده باشد، می‌خواهیم $e'_1 > 0, \ldots, e'_n > 0$ را طوری اختیار کنیم که:

$$(x \in S, |x_1 - a_1| < e'_1, \ldots, |x_n - a_n| < e'_n) \Longrightarrow |f_i(x) - f_i(a)| < e$$

طبق فرض، $e' > 0$ وجود دارد که $|x-a| < e'$ و $x \in S$ نتیجه می‌دهند $|f(x) - f(a)| < e$، و در نتیجه طبق (۱)، $|f_i(x) - f_i(a)| < e$ برای هر i. حال تعریف می‌کنیم:

$$e'_1 = \cdots = e'_n = \frac{e'}{\sqrt{n}}$$

بنابراین طبق (۲):

$$\begin{aligned}(x \in S, |x_1 - a_1| < e'_1, \ldots, |x_n - a_n| < e'_n) &\Longrightarrow (x \in S, |x-a| < e') \\ &\Longrightarrow |f(x) - f(a)| < e \\ &\Longrightarrow |f_i(x) - f_i(a)| < e\end{aligned}$$

و حکم به اثبات می‌رسد. □

حکم گزارهٔ ۱۸ــ۲ را می‌توان به صورت هندسی زیر تجسم کرد. مجموعهٔ y های $\mathbb{R}^m$ که در $|y - f(a)| < e$ صدق می‌کنند دقیقاً نقاط گوی باز شعاع e حول $f(a)$ هستند. همین طور مجموعهٔ نقاط $x \in S$ که در $|x-a| < e'$ صدق می‌کنند، دقیقاً آن نقاط گوی باز شعاع e' حول a هستند که در مجموعهٔ S قرار دارند. بنابراین پیوستگی در نقطهٔ a بدین معنی است که به‌ازای هر گوی باز B به شعاع مثبت حول $f(a)$، گوی بازی B' به شعاع مثبت حول a وجود دارد که $f(B' \cap S) \subset B$ (شکل ۱). اگر

www.ttmar.ir

به تعریف اولیهٔ مؤلفه‌ای پیوستگی در نقطهٔ a بازگردیم، برای هر f_i و هر e_i، باید $e'_{i1} > 0, \ldots, e'_{in} > 0$ وجود داشته باشند که $|x_j - a_j| < e'_{ij}$، $j = 1, \ldots, n$، و $x \in S$ نتیجه دهد $|f_i(x) - f_i(a)| < e_i$. قرار می‌دهیم $e'_j = \min\{e'_{1j}, \ldots, e'_{nj}\}$، پس

$$(x \in S, |x_1 - a_1| < e'_1, \ldots, |x_n - a_n| < e'_n) \Longrightarrow |f_i(x) - f_i(a)| < e_i, i = 1, \ldots, m)$$

تجسم هندسی این مطلب این است که برای هر مستطیل باز R به مرکز $f(a)$، مستطیل بازی R' به مرکز a وجود دارد که $f(R' \cap S) \subset R$ (شکل ۲). استدلال بالا و استدلال گزارهٔ ۱۸—۲ را می‌توان در این نکته خلاصه کرد که درون هر گوی باز به مرکز یک نقطهٔ p، مستطیل بازی به همان مرکز وجود دارد، و بالعکس درون هر مستطیل باز به مرکز p، یک گوی باز به مرکز p وجود دارد.

www.ttmar.ir

پیوستگی و حد (۲)

تابع $f : S \longrightarrow \mathbb{R}^m$ را پیوسته می‌نامیم در صورتی که f در همهٔ نقاط دامنه خود، یعنی S، پیوسته باشد.مثال عمده‌ای که از تابع‌های پیوسته در جلسهٔ گذشته دیدیم تابع‌های مستوی $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ بودند. در واقع ثابت کردیم هر تابع مستوی $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ پیوسته است ولی از آنجا که شرط لازم و کافی برای پیوستگی یک تابع به $\mathbb{R}^m$ پیوستگی همهٔ مؤلفه‌های f است و هر مؤلفهٔ تابع مستوی، مستوی است، حکم در مورد تابع‌های مستوی $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ نتیجه می‌شود. با مثال‌هایی که در مورد تابع‌های ضرب و خارج قسمت ثابت کردیم، اکنون می‌توان گردایهٔ بزرگی از تابع‌های پیوسته فراهم آورد. به این منظور نخست حکم کلی و مهم زیر را ثابت می‌کنیم:

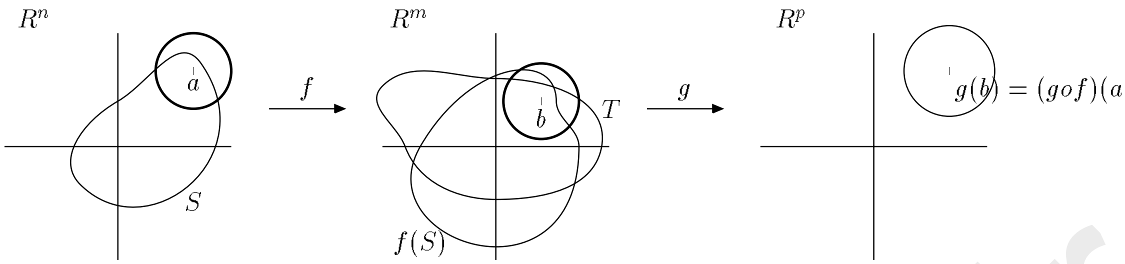
(۱۹–۱) گزاره. فرض کنید $f : S \longrightarrow \mathbb{R}^m$، $S \subset \mathbb{R}^n$، و $g : T \longrightarrow \mathbb{R}^p$، $T \subset \mathbb{R}^m$، دو تابع باشند، $a \in S$، $b = f(a) \in T$، f در a پیوسته باشد و g در b پیوسته باشد. در این صورت تابع $g \circ f$ در نقطهٔ a پیوسته است.

اثبات. نخست دامنهٔ $g \circ f$ را در نظر بگیرید:

$$\text{دامنه}\ (g \circ f) = \{x \in S \mid f(x) \in T\}$$

www.tinar.ir

که زیرمجموعه‌ای از S است. نقطه a در این دامنه است زیرا که فرض کرده‌ایم $b = f(a)$ عضو T است. اثبات گزاره با توجه به گزارهٔ ۱۸−۲ بخش قبل سرراست است. هرگاه گوی باز شعاع $e > ۰$



حول $(g \circ f)(a)$ داده شده باشد، باید $e' > ۰$ پیدا کنیم که هرگاه $x \in S$ و x در گوی باز شعاع e' حول a باشد، آنگاه $(g \circ f)(x)$ در گوی باز شعاع e حول $(g \circ f)(a)$ قرار گیرد. نخست از پیوستگی g در b استفاده می‌کنیم. طبق این فرض گوی شعاع $e'' > ۰$ حول $b = f(a)$ وجود دارد که:

$$(y \in T, |y - b| < e'') \Longrightarrow |g(y) - g(b)| < e \qquad (۱)$$

حال برای گوی شعاع $e'' > ۰$ حول b، بنابر پیوستگی f در a، گوی $e' > ۰$ حول a وجود دارد که:

$$(x \in S, |x - a| < e') \Longrightarrow |f(x) - b| < e'' \qquad (۲)$$

بنابراین اگر x به علاوه در دامنه $g \circ f$ باشد، اگر $f(x)$ در (۲) را y بنامیم، حکم از (۱) نتیجه می‌شود.□

با این گزاره و مثال‌های بخش قبل اکنون می‌توانیم پیوستگی "تابع‌های گویا" را بررسی کنیم. نخست مقصود از یک تک جمله‌ای $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی به شکل زیر است:

$$f(x_۱, \ldots, x_n) = c x_۱^{\alpha_۱} \cdots x_n^{\alpha_n} \qquad (۳)$$

که در اینجا $\alpha_۱, \ldots, \alpha_n$ اعداد صحیح نامنفی هستند و $c \in \mathbb{R}$. به عنوان یک حالت ساده تابع $f : \mathbb{R}^۳ \longrightarrow \mathbb{R}$ را در نظر بگیرید که به صورت $f(x, y, z) = xyz$ تعریف شده است. نشان می‌دهیم f

پیوسته است برای این کار، f را به صورت ترکیب $f = p \circ g$ می‌نویسیم که در آن:

$$g : \mathbb{R}^۳ \longrightarrow \mathbb{R}^۲ \quad , \quad g(x, y, z) = (xy, z)$$

و

$$p : \mathbb{R}^۲ \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad p(u, v) = uv$$

برای اثبات پیوستگی f، کافی است بنابر گزاره ۱۹—۱ ملاحظه کنیم که g و p پیوسته‌اند. p تابع حاصل‌ضرب است که در بخش گذشته پیوستگی آن ثابت شد. برای تابع g، باید تحقیق کنیم که هر مؤلفه پیوسته است، مؤلفهٔ دوم h تابع افکنش $z \longleftarrow (x, y, z)$ است که پیوسته می‌باشد. مؤلفه اول خود ترکیب افکنش و حاصل‌ضرب است:

$$(x, y, z) \longrightarrow (x, y) \longrightarrow xy$$

افکنش روی هر تعداد مؤلفه پیوسته است زیرا هر مؤلفه افکنش روی یک محور است. حال برای تک جمله‌ای کلی (۳) نیز با استفادهٔ مکرر از این استدلال، یا استقراء، دیده می‌شود که (۳) یک تابع پیوسته از $\mathbb{R}^n$ به $\mathbb{R}$ تعریف می‌کند.

مجموع تعداد متناهی تک جمله‌ای، یک چندجمله‌ای می‌شود:

$$f(x_۱, \ldots, x_n) = c_۱ x_۱^{\alpha_۱} \ldots x_n^{\alpha_n} + \cdots + c_k x_۱^{\rho_۱} \ldots x_n^{\rho_n} \qquad (۴)$$

f حاصل ترکیب تک‌جمله‌ای‌ها با تکرار عمل جمع است که هر دو نوع تابع پیوسته‌اند، پس f پیوسته است. به عنوان مثال برای دو جمله‌ای $f(x_۱, \ldots, x_n) = c_۱ x_۱^{\alpha_۱} \ldots x_n^{\alpha_n} + c_۲ x_۱^{\beta_۱} \ldots x_n^{\beta_n}$ ، f را به صورت ترکیب زیر می‌نویسیم:

$$(x_۱, \ldots, x_n) \xrightarrow{g} (c_۱ x_۱^{\alpha_۱} \ldots x_n^{\alpha_n}, c_۲ x_۱^{\beta_۱} \ldots x_n^{\beta_n}) \xrightarrow{s} c_۱ x_۱^{\alpha_۱} \ldots x_n^{\alpha_n} + c_۲ x_۱^{\beta_۱} \ldots x_n^{\beta_n}$$

www.ttmar.ir

تابع جمع، s، پیوسته است (مثال بخش قبل) و هر یک از دو مؤلفه تابع g تک جمله‌ای، پس پیوسته‌اند، بنابراین $f = s \circ g$ پیوسته می‌باشد. حالت کلی با استقراء یا استفاده مکرر از تابع جمع حاصل می‌شود. بدین ترتیب چندجمله‌ای‌ها تابع‌های پیوسته تعریف می‌کنند.

یک گام فرای چندجمله‌ای‌ها، "تابع‌های گویا" هستند. اگر $g(x)$ و $h(x)$ دو چندجمله‌ای برحسب $x = (x_1, \ldots, x_n)$ باشند، تابع $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف می‌شو یک تابع گویا می‌نامیم:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \frac{g(x_1, \ldots, x_n)}{h(x_1, \ldots, x_n)} \tag{۵}$$

دامنهٔ f از $(x_1, \ldots, x_n)$ هایی در $\mathbb{R}^n$ تشکیل شده که $h(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$. تابع f را می‌توان به صورت ترکیب دو تابع p و q به صورت زیر نوشت:

$$f = q \circ p \quad , \quad x \xrightarrow{p} (g(x), h(x)) \xrightarrow{q} \frac{g(x)}{h(x)} \tag{٦}$$

تابع p پیوسته است زیرا که هر مؤلفه آن یک چندجمله‌ای است، و تابع q نیز، که تابع خارج قسمت است، در بخش قبل نشان داده شده که در نقاطی که مؤلفه دوم صفر نباشد پیوسته است. بنابراین f پیوسته می‌باشد.

اکنون به بررسی مفهوم "حد" می‌پردازیم که قرابت‌هایی با مفهوم پیوستگی دارد. اگر $\rho > 0$ داده شده باشد، مقصود از گوی باز محذوف به شعاع ρ و مرکز a، $a \in \mathbb{R}^n$، مجموعهٔ زیر است:

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 < |x - a| < \rho\}$$

به بیان دیگر، با حذف مرکز از گوی باز شعاع ρ، گوی محذوف شعاع ρ به مرکز a به‌دست می‌آید. حال زیرمجموعهٔ S از $\mathbb{R}^n$ را در نظر بگیرید. نقطهٔ $a \in \mathbb{R}^n$ را یک نقطهٔ حدی S می‌نامیم در صورتی هر گوی محذوف شعاع مثبت به مرکز a حاوی نقطه‌ای از S باشد. توجه کنید که این تعریف شرطی بر

www.ttmar.ir

تعلق نقطهٔ a به مجموعهٔ S نمی‌گذارد، a ممکن است نقطه‌ای از S باشد یا نباشد. در واقع می‌توان از تعریف نتیجه گرفت که در هر گوی محذوف به مرکز نقطهٔ حدی، بی‌نهایت نقطه از مجموعهٔ S وجود دارد. زیرا که هرگاه نقطه‌ای x از S در یک گوی محذوف به مرکز a باشد، داریم $|x-a| > 0$ و حال طبق تعریف باید نقطه‌ای y از S در گوی محذوف شعاع $|x-a|$ حول a باشد، یعنی $|y-a| < |x-a|$، پس $x \neq y$، و به همین ترتیب با کوچک کردن شعاع کرهٔ محذوف همواره نقطهٔ جدیدی از S در گوی محذوف اولیه حول a پیدا می‌شود.

مثال ۱. برای مستطیل نیمه باز $a < x < b$، $c \leq y \leq d$ در $\mathbb{R}^2$، که در آن $a < b$ و $c < d$، مجموعهٔ نقاط حدی این مجموعه عبارت است از مستطیل بستهٔ $a \leq x \leq b$، $c \leq y \leq d$.

مثال ۲. برای حلقهٔ $0 < |x| < 1$ در $\mathbb{R}^n$، یعنی مجموعهٔ $\{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 < |x| < 1\}$، مجموعهٔ نقاط حدی برابر است با گوی بستهٔ $\{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq 1\}$.

اکنون می‌توانیم مفهوم "حد" یک تابع را مطرح کنیم. فرض کنید S زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^n$ باشد، a یک نقطهٔ حدی S، $f: S \longrightarrow \mathbb{R}^m$ یک تابع، و $L \in \mathbb{R}^m$. می‌نویسیم:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \tag{۷}$$

و می‌خوانیم حد تابع f وقتی x به a میل کند برابر L است در صورتی که برای هر $e > 0$، وجود داشته باشد $e' > 0$ که:

$$(x \in S, 0 < |x-a| < e') \Longrightarrow |f(x) - L| < e \tag{۸}$$

به بیان دیگر، برای هر گوی با شعاع مثبت e حول L، گوی محذوفی به شعاع مثبت e' حول a وجود داشته باشد که اشتراک آن با S به تمامی به داخل گوی شعاع e حول L نگاشته شود.

این تعریف با تعریف پیوستگی f در نقطهٔ a در نکات زیر متمایز است:

الف) نقطهٔ a ممکن است یک نقطهٔ دامنهٔ تعریف f نباشد و بالعکس یک نقطه پیوستگی f ممکن است نقطهٔ حدی نباشد، یعنی حد تابع وقتی x به a میل کند معنی نداشته باشد.

ب) در تعریف حد، حتی اگر f در a تعریف شده باشد، شرطی بر مقدار $f(a)$ قایل نشده‌ایم.

حکم زیر بلافاصله از تعریف نتیجه می‌شود:

(۱۹–۲) گزاره. برای تابع $f : S \longrightarrow \mathbb{R}^m$، اگر a در دامنه تعریف f، یعنی S، باشد، و نقطهٔ حدی S نیز باشد، آنگاه شرطی لازم و کافی برای پیوستگی f در a این است که حد f وقتی x به a میل می‌کند وجود داشته و برابر $f(a)$ باشد. □

توجه کنید که حد، در صورت وجود یگانه است. فرض کنید داشته باشیم:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L' \quad , \quad \lim_{x\to a} f(x) = L$$

اگر $L \neq L'$، $|L - L'|$ اکیداً مثبت است. عدد $e > ۰$ را طوری می‌گیریم که $e < \frac{۱}{۲}|L - L'|$. در این صورت $e' > ۰$ و $e'' > ۰$ وجود دارند که:

$$(x \in S, ۰ < |x - a| < e') \Longrightarrow |f(x) - L| < e$$

$$(x \in S, ۰ < |x - a| < e'') \Longrightarrow |f(x) - L'| < e$$

بدین ترتیب اگر $\overline{e} = \min\{e', e''\}$، همهٔ نقاط S که در گوی محذوف شعاع $\overline{e}$ حول a قرار دارند هم به داخل گوی شعاع e حول L و هم به داخل گوی شعاع e حول L' نگاشته می‌شوند. این غیرممکن است زیرا L و L' از یکدیگر فاصلهٔ بیش از دو برابر e دارند.

مثال. S را زیرمجموعهٔ $\{(x,y) \mid (x,y) \neq (\circ,\circ)\}$ از $\mathbb{R}^{۲}$ بگیرید. نقطهٔ $(\circ,\circ)$ عضو این مجموعه نیست ولی نقطهٔ حدی آن است. تابع $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x,y) = \frac{x^m y^n}{x^{۲} + y^{۲}}$$

که در آن $m \geq \circ$ و $n \geq \circ$ اعداد صحیح داده شده‌اند. می‌خواهیم $\lim_{(x,y)\to(\circ,\circ)} f(x,y)$ را بررسی کنیم. در مختصات قطبی عبارت تابع به صورت زیر در می‌آید:

$$f(x,y) = r^{m+n-۲} \cos^m \theta \sin^n \theta \quad , \quad r = \text{فاصله } (x,y) \text{ از } (\circ,\circ) \qquad (۹)$$

حالت اول. $(m+n > ۲)$ بنویسید $\circ < p = m+n-۲$. داریم

$$|f(x,y)| \leq r^p$$

زیرا که $|\cos\theta|$ و $|\sin\theta|$ هر دو کوچکتر یا مساوی واحد هستند. حال اگر $e > \circ$ داده شده باشد، قرار می‌دهیم $\circ < e' \leq \sqrt[p]{e}$. اگر (x,y) در گوی باز محذوف شعاع e' حول $(\circ,\circ)$ باشد، داریم:

$$|(x,y) - (\circ,\circ)| < \sqrt[p]{e} \Longrightarrow r^p < e$$

بنابراین $\lim_{(x,y)\to(\circ,\circ)} f(x,y) = \circ$.

حالت دوم. $(m+n \leq ۲)$. در اینجا نیز می‌نویسیم $p = m+n-۲$، ولی $p \leq \circ$. داریم:

$$f(x,y) = r^p \cos^m \theta \sin^n \theta$$

اگر $p = \circ$، داریم $f(x,y) = \cos^m\theta \sin^n\theta$ و f روی هر نیم‌خط منتهی به $(\circ,\circ)$ مقداری ثابت دارد. بنابراین هرگاه (x,y) از روی یک نیم‌خط به $(\circ,\circ)$ میل کند مقدار (ثابت) تابع به $\cos^m\theta \sin^n\theta$

میل خواهد کرد. با توجه به این که مقدار به θ بستگی دارد و حد، در صورت وجود، یگانه است، $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ وجود ندارد. برای p منفی، قرار می‌دهیم $p=-q$ که $q>0$ و داریم:

$$|f(x,y)| = \frac{1}{r^q}|\cos^m\theta||\sin^n\theta|$$

مثلاً برای $\theta=\frac{\pi}{4}$، $|f(x,y)| = \frac{2^{-\frac{m+n}{2}}}{r^q}$. وقتی فاصله (x,y) به $(0,0)$ به صفر میل کند، r^q به صفر میل می‌کند و $|f(x,y)|$ به طور نامحدود بزرگ می‌شود، یعنی به هیچ عدد L میل نمی‌کند.

شباهت‌های تعریف حد و پیوستگی نتایج مشابهی را ایجاب می‌کند. احکام زیر همه اثبات‌هایی کاملاً مشابه احکام نظیر در مورد پیوستگی دارند و اثبات آنها به خواننده واگذار می‌شود.

(۱۹—۳) $S\subset\mathbb{R}^n$، a یک نقطهٔ حدی برای S، $f:S\longrightarrow\mathbb{R}^m$، $f=(f_1,\ldots,f_m)$ و $L=(L_1,\ldots,L_m)$ عضوی از $\mathbb{R}^m$ است. در این صورت $\lim_{x\to a} f(x)=L$ اگر و تنها اگر $\lim_{x\to a} f_i(x)=L_i$ برای $i=1,\ldots,m$. □

(۱۹—۴) $S\subset\mathbb{R}^n$، a یک نقطهٔ حدی برای S، $f:S\longrightarrow\mathbb{R}$، $g:S\longrightarrow\mathbb{R}$، $\lim_{x\to a} f(x)=L$ و $\lim_{x\to a} g(x)=L'$. در این صورت تابع‌های $f+g:S\longrightarrow\mathbb{R}$ که به صورت $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ و $f\cdot g:S\longrightarrow\mathbb{R}$ که به صورت $(f\cdot g)(x)=f(x)g(x)$ تعریف می‌شوند دارای حد هستند وقتی x به a میل کند و در واقع:

$$\lim_{x\to a}((f+g)(x)) = L+L' \tag{10}$$

$$\lim_{x\to a}((f\cdot g)(x)) = LL' \tag{11}$$

□

www.ttmar.ir

در مورد خارج قسمت در وضعیت بالا، تابع خارج قسمت را به صورت

$$(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

تعریف می‌کنیم. دامنهٔ $\frac{f}{g}$ از آن نقاط $x \in S$ تشکیل شده است که در آن $g(x) \neq ۰$. فرض کنید $L' \neq ۰$. اگر e را برابر مثلاً $\frac{۱}{۲}|L'|$ در نظر بگیریم، $e' > ۰$ وجود دارد که:

$$(s \in S, |x-a| < e') \Longrightarrow |g(x) - L'| < e = \frac{۱}{۲}|L'|$$

از این مطلب نتیجه می‌شود که برای $x \in S$ که در گوی محذوف شعاع e' حول a باشند، لزوماً $g(x) \neq ۰$. بنابراین دامنهٔ $\frac{f}{g}$ شامل اشتراک S با یک گوی محذوف حول a می‌شود و a یک نقطهٔ حدی برای دامنهٔ $\frac{f}{g}$ است. با این مقدمه، می‌توان مانند حالت پیوستگی ثابت کرد که:

$$\lim_{x \to a}((\frac{f}{g})(x)) = \frac{L}{L'} \qquad (۱۲)$$

www.ttnar.ir

مشتق و تقریب خطی (۱)

در بررسی توابع حقیقی یک متغیری دیدیم که دو انگیزه متفاوت، یکی صورتبندی مفهوم آهنگ تغییرات، و دیگری یافتن مماس و تقریب خطی برای تابعهای غیرخطی، منجر به پیدایش مفهوم مشتق شدند. در اینجا قصد داریم همین بحثها را برای تابعهای چندمتغیری مطرح کنیم. خواهیم دید که دو رهیافت ذکر شده در اینجا منجر به تعاریف متمایز ولی مرتبط می‌شوند.

در آنچه خواهد آمد، S زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^n$ است، $f : S \longrightarrow \mathbb{R}^m$ یک تابع و a یک نقطهٔ درونی S است. اگر بخواهیم برای آهنگ تغییر f در نقطهٔ a عبارتی مشابه عبارت مربوط به مشتق تابع یک متغیری در نظر بگیریم، باید مفهوم $\lim_{h\to ۰} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ را تعمیم دهیم. با توجه به این که $a \in S$ یک n تایی است، "تغییر کوچک" در a، یعنی h، نیز باید عنصری از $\mathbb{R}^n$ در نظر گرفته شود (a ممکن است در هر جهتی از نقطهٔ a در $\mathbb{R}^n$ تغییر کند). اشکال واضحی که در اینجا پدید می‌آید این است که مخرج کسر بالا به یک nـ تایی تبدیل می‌شود ولی مفهوم "تقسیم بر یک بردار" تعریف نشده است. اگر چنین عمل تقسیمی تعریف شدنی بود، خارج قسمت تقسیم یک mـ تایی بر یک nـ تایی چگونه موجودی می‌بایست باشد؟ در بخش بعد خواهیم دید که جواب این سؤال به اعتباری یک ماتریس $m \times n$ است. توجه کنید که اگر mـ تایی‌ها و nـ تایی‌ها را به صورت ستون بنویسیم، حاصل‌ضرب یک ماتریس $m \times n$ در یک ستون n تایی یک ستون m تایی است، بنابراین دور از ذهن نیست که "نسبت" یک m تایی به یک n تایی از "جنس" ماتریس $m \times n$ باشد. ولی در ابتدا هدف محدودتری را مد نظر قرار

خواهیم داد. نمودار یک تابع با مقدار حقیقی، مثلاً تابعی $\mathbb{R}^۲ \longrightarrow \mathbb{R}$ را در نظر بگیرید. با توجه به خمیدگی‌های ممکن برای این نمودار در جهت‌های مختلف باید انتظار داشت که به‌ازای هر جهت ساطع از نقطهٔ a، بتوان عددی نسبت داد که آهنگ تغییر f در آن جهت را بیان کند.

"جهت‌های" مختلف در $\mathbb{R}^n$ به وسیلهٔ n تایی‌های به طول واحد مشخص می‌شوند. از آنجا که برای هر n تایی ناصفر v می‌توان نوشت $v = |v|\frac{v}{|v|}$؛ با قرار دادن $u_v = \frac{v}{|v|}$ یک n تایی به طول واحد به‌دست می آید و داریم $v = |v|u_v$، یعنی هر n تایی v با یک طول $|v|$ و یک 'جهت' u_v مشخص می‌شود.

اکنون برای $f : S \longrightarrow \mathbb{R}^m$، $S \subset \mathbb{R}^n$، a یک نقطهٔ درونی S، و n تایی واحد u در $\mathbb{R}^n$، مشتق سویی یا مشتق جهتدار تابع f در نقطهٔ a در جهت u را به صورت زیر مطرح می‌کنیم:

$$D_u f(a) = \lim_{h \to ۰} \frac{f(a+hu) - f(a)}{h} \tag{۱}$$

که در اینجا $h \in \mathbb{R}$. حد فوق ممکن است وجود داشته باشد یا نباشد. کمی توضیح در مورد این تعریف لازم است. در اینجا نیز مانند حالت یک متغیری نسبت تغییر تابع به تغییر متغیر را در نظر گرفته حد آن را وقتی تغییر متغیر به صفر میل کند مورد نظر قرار داده‌ایم. ولی توجه کنید که بررسی تغییرات متغیر به امتداد خط راست گذرا از a به موازات u محدود شده است. برای تابع‌های $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$، یعنی برای $m = ۱$، می‌توان یک تعبیر هندسی مشابه حالت یک متغیری ارائه کرد. مثلاً در شکل ۱ تابعی $\mathbb{R}^۲ \longrightarrow \mathbb{R}$ در نظر گرفته شده

است، $z = f(x, y)$. خط گذرا از a به موازات u را l می‌نامیم. $f(a+hu)$ فقط شامل مقادیر f روی این خط است. حال صفحهٔ π را در نظر بگیرید که شامل خط l و عمود بر صفحهٔ xy است. این صفحه نمودار را در یک منحنی قطع می‌کند که نمودار تحدید دامنه f به خط l است. در شکل (ب) صفحهٔ π و بخشی از نمودار را که بالای سر آن قرار دارد رسم کرده‌ایم. اگر برای l جهت مثبت را جهت u و برای امتداد عمود بر آن جهت مثبت را موازی جهت مثبت محور z منظور کنیم می‌توان در صفحهٔ

π، عیناً مانند صفحهٔ دکارتی xy، شیب خطوط راست مماس بر نمودار تابع‌های یک متغیری را مطرح نمود. در وضعیت موجود، $D_uf(a)$ دقیقاً ضریب زاویهٔ خط مماس بر منحنی تقاطع π با نمودار f در صفحهٔ π است.

ذکر این نکته لازم است که برای $f : S \longrightarrow \mathbb{R}^m$، $S \subset \mathbb{R}^n$، کسر $\frac{f(a+hu)-f(a)}{h}$ عنصری از $\mathbb{R}^m$ است، پس حد آن نیز، در صورت وجود، عنصری از $\mathbb{R}^m$ خواهد بود. ضمناً چون حد یک mتایی مؤلفه به مؤلفه منظور می‌شود، اگر $f = (f_۱, \dots, f_m)$، آنگاه:

$$D_uf(a) = (D_uf_۱(a), \dots, D_uf_m(a)) \qquad (۲)$$

مثال ۱. $f : \mathbb{R}^۲ \longrightarrow \mathbb{R}$ را به صورت $f(x,y) = x^۲ - y^۲$ تعریف می‌کنیم. در نقطهٔ $a = (۱, ۰)$، مشتق جهتدار f را در جهت‌های گوناگون بررسی می‌کنیم.

هر عنصر با طول یک از $\mathbb{R}^۲$ را می‌توان به صورت $u = (\cos\theta, \sin\theta)$ نوشت که در آن θ مختصهٔ قطبی در $\mathbb{R}^۲$ است. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} \frac{f(a+hu)-f(a)}{h} &= \frac{f(۱+h\cos\theta, h\sin\theta) - f(۱,۰)}{h} \qquad h \neq ۰ \\ &= \frac{(۱+h\cos\theta)^۲ - h^۲\sin^۲\theta - ۱}{h} \\ &= ۲\cos\theta + h(\cos^۲\theta - \sin^۲\theta) \end{aligned}$$

بنابراین

$$D_uf(۱,۰) = ۲\cos\theta$$

چند θ نمونه را در نظر می‌گیریم و تعبیر هندسی مشتق سویی را روی نمودار (شکل ۲) بررسی می‌کنیم. نخست برای $\theta = ۰$ خط موازی محور x گذرا از $(۱,۰)$ را در نظر می‌گیریم. مقطع صفحهٔ قائمی از این خط می‌گذرد و بر صفحه xy عمود است یک سهمی است $(z = x^۲)$ که در شکل ۲ (الف) نمایش

داده شده است ضریب زاویهٔ مماس برابر $2 \cos 0 = 2$ می‌باشد. برای $\theta = \frac{\pi}{4}$، اگر دامنهٔ نمودار f را به خط گذرا از $(1, 0)$ با ضریب زاویه $\frac{\pi}{4}$ محدود کنیم حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} z &= f((1, 0) + h(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})) \\ &= (1 + \frac{h}{\sqrt{2}})^2 - (\frac{h}{\sqrt{2}})^2 \\ &= 1 + \sqrt{2}h \end{aligned}$$

چون عبارت سمت راست نسبت به h درجهٔ یک است مقطع با نمودار یک خط راست می‌باشد، شکل ۲ (ب) که ضریب زاویهٔ آن $\sqrt{2} = 2 \cos \frac{\pi}{4}$ است. بالاخره با محدود کردن دامنهٔ نمودار f به خط قائم گذرا از $(1, 0)$، داریم:

$$\begin{aligned} z &= f((1, 0) + h(0, 1)) \\ &= f(1, h) \\ &= 1 - h^2 \end{aligned}$$

که یک سهمی به‌دست می‌دهد، شکل ۲ (ج)، و ضریب زاویهٔ مماس $2 \cos \frac{\pi}{2} = 0$ است. بدین ترتیب ملاحظه می‌کنیم که مشتق سویی در جهت‌های مختلف مقادیر مختلف دارد. قابل ذکر است که اگر جهت معکوس شود (یا به اندازه π به θ افزوده شود) مقدار مشتق جهتدار در (-1) ضرب می‌شود. دلیل این است که با جایگزینی $-u$ به جای u، جهت محور افقی که جهت افزایش h است معکوس می‌شود. اگر یک تابع مشتق‌پذیر یک متغیری در یک جهت افزایش یابد، در جهت معکوس به همان آهنگ کاهش می‌یابد.

در یک مورد خاص، نماد ویژه‌ای برای مشتق جهتدار وجود دارد. فرض کنید u یکی از اعضای پایهٔ متعارف $\mathbb{R}^n$ باشد، $u = e_j = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ که درایهٔ ۱ در مکان jـ ام n تایی است. در این صورت به جای $D_{e_i} f(a)$ برای تابع $y = f(x)$، معمولاً یکی از نمادهای زیر به‌کار می‌رود:

$$\frac{\partial y}{\partial x_j}(a), \frac{\partial f}{\partial x_j}(a), f_{x_j}(a), D_j f(a), D_{x_j} f(a)$$

www.tfnar.ir

و $D_{e_j}f(a)$ مشتق پاره‌ای (یا مشتق نسبی، یا مشتق جزیی) تابع f نسبت به x_j در نقطهٔ a خوانده می‌شود. به عبارت تعریف کنندهٔ مشتق پاره‌ای توجه کنید:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_{j-1}, a_j + h, a_{j+1}, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_n)}{h} \tag{۳}$$

ملاحظه کنید که این در واقع عمل مشتق‌گیری نسبت به متغیر x_j است وقتی سایر متغیرها یعنی مقدار $x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n$، برابر ثابت‌های به ترتیب $a_1, \ldots, a_{j-1}, a_{j+1}, \ldots, a_n$ نگاه داشته شود. بنابراین محاسبه $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ بسیار ساده است، کافی است متغیرهای غیر از x_j را ثابت فرض کرده از قوانین مشتق‌گیری یک متغیری برای محاسبهٔ مشتق نسبت به متغیر x_j استفاده کنیم.

مثال ۱. تابع $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ به صورت $f(x, y, z) = x^2 y - z^3$ تعریف شده است. مشتق‌های پاره‌ای f را نسبت به x، y و z در نقطهٔ دلخواه (x, y, z) محاسبه کنید. داریم:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -3z^2$$

مثال ۲. تابع $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ به صورت زیر تعریف شده است:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

فرمولی برای $\frac{\partial f}{\partial y}$ در نقطهٔ (x, y) پیدا کنید.

دو حالت $(x, y) = (0, 0)$ و $(x, y) \neq (0, 0)$ را جداگانه بررسی می‌کنیم. نخست برای $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$، توجه کنید که برای $x = 0$ ثابت، داریم $f(0, y) = 0$ برای هر x، پس $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$ و در واقع $\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = 0$ برای هر y. حال فرض کنید $(x, y) \neq (0, 0)$. چون برای حد گیری فقط مقادیر دو متغیر نزدیک به این (x, y) مطرح هستند، می‌توانیم همواره فرض کنیم که فقط عبارت $\frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$ مورد

www.tmar.ir

استفاده است و از این عبارت نسبت به y مشتق بگیریم:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{x^۲(x^۲+y^۲)-۲y(x^۲y)}{(x^۲+y^۲)^۲}\\ &= \frac{x^۴-x^۲y^۲}{(x^۲+y^۲)^۲}\end{aligned}$$

مثال ۳. طبق (۲)، اگر برد تابع، $\mathbb{R}^m$ باشد، مشتق‌های پاره‌ای تابع مؤلفه به مؤلفه محاسبه می‌شوند. به عنوان مثال فرض کنید $f:\mathbb{R}^۳\longrightarrow\mathbb{R}^۲$ به صورت زیر داده شده است:

$$f(x,y,z)=(xyz^۲,۲y-z)$$

در این صورت داریم:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= (yz^۲,\circ)\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= (xz^۲,۲)\\ \frac{\partial f}{\partial z} &= (۲xyz,-۱)\end{aligned}$$

یادداشت. در آنچه گذشت عبارت (۱) را به عنوان مشتق سویی، فقط برای n تایی‌های واحد u مطرح کردیم، ولی می‌توان این عبارت را برای هر n تایی v نوشت و حاصل، مشتق f نسبت به v در نقطهٔ a خوانده می‌شود. نخست اگر $v\neq\circ$، می‌نویسیم $v=|v|u_v$ که در اینجا $u_v=\frac{v}{|v|}$ بردار واحد در جهت v است. داریم:

$$\begin{aligned}D_vf(a) &= \lim_{h\to\circ}\frac{f(a+hv)-f(a)}{h}\\ &= \lim_{h\to\circ}\frac{f(a+(h|v|)u_v)-f(a)}{h}\\ &= \lim_{h\to\circ}|v|\frac{f(a+(h|v|)u_v)-f(a)}{h|v|}\end{aligned} \qquad (۴)$$

www.ttnar.ir

اگر $h|v|$ را به k نمایش دهیم، چون $|v|$ ثابت و ناصفر است، $h \to 0$ معادل $k \to 0$ است، پس:

$$\begin{aligned} D_v f(a) &= |v| \lim_{k \to 0} \frac{f(a+ku_v) - f(a)}{k} \\ &= |v| D_{u_v} f(a) \end{aligned}$$

برای $v = \underline{0}$، تعریف می‌کنیم $D_v f(a) = \underline{0}$، که با این رابطه سازگار است و به هر حال صورت کسر طرف راست (۴) همواره صفر است که بنابراین حد آن نیز صفر خواهد شد.

پس مشتق f نسبت به v در نقطهٔ a، $|v|$ برابر مشتق سویی f در جهت u_v در نقطهٔ a است. مطلب را می‌توان اینگونه تعبیر کرد: اگر متحرکی از نقطهٔ a با سرعت ثابت $|v|$ در جهت u_v در دامنه حرکت کند، $D_v f(a)$ آهنگ تغییر لحظه‌ای f در نقطهٔ a در جهت حرکت است، که متناسب با مقدار $|v|$ می‌باشد.

www.ttmar.ir

معرفی و دانلود رایگان : جزوات درسی . کتابها . نرم افزار های مهندسی . و ارائه بهترین مقالات روز علم عمران
iCIVIL.ir مرجع دانشجویان و مهندسین عمران
www.icivil.ir منبع iransaze.net

مشتق و تقریب خطی (۲)

در بخش گذشته مفهوم مشتق به عنوان آهنگ تغییر لحظه‌ای را تعمیم دادیم و به مفهوم مشتق سویی دست یافتیم. اکنون می‌خواهیم تعبیر دیگر مشتق، به عنوان خط مماس یا تقریب خطی، را برای تابع‌های $f : S \to \mathbb{R}^m$ پیاده کنیم. طبیعی است که به جای "خط" باید شیء مسطح با بعد مناسب مطرح شود. در واقع کوشش می‌کنیم تعریف مماس در حالات یک متغیری را عیناً تعمیم دهیم.

فرض کنید $f : S \longrightarrow \mathbb{R}^m$ و $g : T \longrightarrow \mathbb{R}^m$ دو تابع باشند که به ترتیب روی دامنه‌های S و T، زیر مجموعه‌هایی از $\mathbb{R}^n$، تعریف شده‌اند، و a یک نقطهٔ درونی هر دو مجموعهٔ S و T است. در این صورت می‌گوییم f در نقطهٔ a بر g مماس است در صورتی که:

$$f(a) = g(a) \qquad (۱)$$

$$\lim_{x \to a} \frac{|f(x) - g(x)|}{|x - a|} = 0 \qquad (۲)$$

برای $f : S \longrightarrow \mathbb{R}^m$ داده شده، f را مشتق‌پذیر در نقطه a می‌نامیم در صورتی که تابعی مستوی $A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ وجود داشته باشد که f در نقطهٔ a بر A مماس باشد، یعنی:

$$f(a) = A(a) \qquad (۳)$$

www.ttmar.ir

icivil.ir
مرجع دانشجویان و مهندسین عمران
معرفی و دانلود رایگان : جزوات درسی . کتابها . نرم افزار های مهندسی . و ارائه بهترین مقالات روز علم عمران
منبع iransaze.net
www.icivil.ir

$$\lim_{x\to a}\frac{|f(x)-A(x)|}{|x-a|}=0 \qquad (۴)$$

در این صورت A، تقریب خطی f در نقطهٔ a خوانده می‌شود (اصطلاح "تقریب مستوی" دقیق‌تر است ولی "تقریب خطی" بسیار رایج‌تر). این تعریف را کمی می‌شکافیم. هر تابع مستوی A به شکل زیر است

$$A(x)=L(x)+B \qquad (۵)$$

که در آن $L:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m$ یک تابع خطی است و B یک m تایی ثابت در $\mathbb{R}^m$. از (۳) داریم:

$$B=f(a)-L(a) \qquad (۶)$$

پس $A(x)=L(x)+f(a)-L(a)$، یا:

$$A(x)=f(a)+L(x-a) \qquad (۷)$$

زیرا که L خطی است. با جایگزینی در (۴) داریم:

$$\lim_{x\to a}\frac{|f(x)-[f(a)+L(x-a)]|}{|x-a|}=0 \qquad (۸)$$

اگر $x-a$ را به $\vec{h}$ نمایش دهیم، (۸) را می‌توان به صورت معادل زیر نیز نوشت:

$$\lim_{\vec{h}\to\underline{0}}\frac{|f(a+\vec{h})-f(a)-L(\vec{h})|}{|\vec{h}|}=0 \qquad (۹)$$

البته تابع خطی $L:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m$ را معمولاً به صورت یک ماتریس $m\times n$، مانند M، می‌نویسیم. بنابراین تقریب خطی، A، شکل زیر را دارد:

$$|A(x)\rangle=M|x\rangle+|B\rangle \qquad (۱۰)$$

www.ttnar.ir

.ir
مرجع دانشجویان و مهندسین عمران
معرفی و دانلود رایگان : جزوات درسی . کتابها . نرم افزار های مهندسی . و ارائه بهترین مقالات روز علم عمران
منبع iransaze.net
www.icivil.ir

که شباهت آن با $A(x) = mx + b$ واضح است. تابع خطی L (یا معادلاً ماتریس $m \times n$، M) را، در صورت مشتق‌پذیری f در a، مشتق (یا دیفرانسیل) f در نقطهٔ a می‌نامند و به $Df(a)$ نمایش می‌دهند.

(۲۱–۱) **محاسبهٔ مشتق.** اکنون نشان می‌دهیم که ماتریس مربوط به $Df(a)$ را می‌توان به سادگی محاسبه کرد. اگر M ماتریس تابع خطی $Df(a)$ باشد، می‌دانیم که ستون jـ ام آن از مؤلفه‌های $(Df(a))(e_j)$ تشکیل شده است. اگر در کسر (۹) به جای L، $Df(a)$ و به جای $\vec{h}$، he_j را جایگزین کنیم (که $h \in \mathbb{R}$)، نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned}\frac{f(a+he_j)-f(a)-(Df(a))(he_j)}{|he_j|} &= \frac{|f(a+he_j)-f(a)-h(Df(a))(e_j)|}{|h|} \\ &= |\tfrac{f(a+he_j)-f(a)}{h} - (Df(a))(e_j)|\end{aligned}$$

بنابراین اگر f در نقطهٔ a مشتق‌پذیر باشد، داریم:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = (Df(a))(e_j) \qquad (۱۱)$$

بدین ترتیب اگر f در نقطهٔ a مشتق‌پذیر باشد، ستون jـ ام ماتریس $Df(a)$، از مشتق‌های پاره‌ای مؤلفه‌های f تشکیل شده، پس $Df(a)$ نمایش ماتریسی زیر را دارد:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{bmatrix} \qquad (۱۲)$$

گاهی اصطلاح ماتریس ژاکوبی نیز برای این ماتریس به‌کار می‌رود.

مثال ۱. برای تابع $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$، $f(x,y) = x^2 - y^2$، با فرض مشتق‌پذیری f در نقطهٔ $(۲,۱)$، معادلهٔ صفحهٔ مماس بر نمودار را در نقطهٔ $(۲,۱,۳)$ پیدا کنید. در اینجا $Df(۲,۱)$ به وسیلهٔ ماتریس ۱×۲ زیر داده می‌شود

$$[\frac{\partial f}{\partial x}(۲,۱) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(۲,۱)] = [۴ \quad -۲]$$

www.tnar.ir

معرفی و دانلود رایگان : جزوات درسی . کتابها . نرم افزار های مهندسی . و ارائه بهترین مقالات روز علم عمران
www.icivil.ir منبع iransaze.net
icivil.ir مرجع دانشجویان و مهندسین عمران

بنابراین طبق (۷):

$$A(x,y) = ۳ + ۴(x-۲) - ۲(y-۱)$$

که اگر بنویسیم $z = A(x,y)$، معادلهٔ صفحهٔ مماس در فضای x,y,z عبارت است از:

$$۴x - ۲y - z - ۳ = ۰$$

مثال ۲. فرض کنید S زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^n$، $a = (a_۱, \ldots, a_n)$ یک نقطهٔ درونی S و $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشد. معادلهٔ ابرصفحهٔ مماس بر نمودار f را در نقطهٔ $(a_۱, \ldots, a_n, f(a))$ محاسبه کنید. نقاط دامنه را به $x = (x_۱, \ldots, x_n)$ و مقدار تابع را به $x_{n+۱} = f(x_۱, \ldots, x_n)$ نمایش می‌دهیم. $Df(a)$ نمایش ماتریسی زیر را به عنوان یک ماتریس $۱ \times n$ دارد:

$$[\frac{\partial f}{\partial x_۱}(a) \ \cdots \ \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)]$$

بنابراین طبق (۷)، معادلهٔ ابرصفحهٔ مماس، یا عبارت تقریب خطی، عبارت است از:

$$x_{n+۱} = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x_۱}(a)(x_۱ - a_۱) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)(x_n - a_n) \qquad (۱۳)$$

شباهت این عبارت به معادلهٔ خط مماس برای تابع‌های $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$، یعنی $y = f(a) + f'(a)(x-a)$، مشهود است.

در اینجا می‌توانیم رابطهٔ مشتق‌پذیری، مشتق، و مشتق‌های سویی را تشریح کنیم. فرض کنید $f : S \longrightarrow \mathbb{R}^m$ در نقطهٔ درونی a از S مشتق‌پذیر باشد. با محاسبه‌ای مشابه آنچه به یافتن درایه‌های ماتریس ژاکوبی منجر شد، رابطهٔ $Df(a)$ و مشتق سویی را به‌دست می‌آوریم. فرض کنید v یک عضو ناصفر $\mathbb{R}^n$ باشد. اگر در کسر (۹)، به جای $\vec{h}$ مقدار hv را جایگزین کنیم، $h \in \mathbb{R}$، و به جای L بنویسیم

معرفی و دانلود رایگان : جزوات درسی . کتابها . نرم افزار های مهندسی . و ارائه بهترین مقالات روز علم عمران
www.icivil.ir
منبع iransaze.net
icivil.ir مرجع دانشجویان و مهندسین عمران

$Df(a)$، داریم:

$$\begin{aligned}\frac{|f(a+hv)-f(a)-Df(a)(hv)|}{|hv|} &= \frac{1}{|v|}\frac{|f(a+hv)-f(a)-h(Df(a))(v)|}{|h|}\\ &= \frac{1}{|v|}\left|\frac{f(a+hv)-f(a)}{h}-(Df(a))(v)\right|\end{aligned}$$

طبق فرض مشتق‌پذیری f در a، عبارت بالا دارای حد صفر است، ولی حد عبارت اول داخل $|\ |$ در فوق همان مشتق نسبت به v، یعنی $D_vf(a)$، است. ضمناً برای $v = \underline{0}$ نیز تساوی $D_vf(a) = Df(a)(v)$ برقرار است زیرا دوطرف رابطه صفر هستند. بنابراین:

(۲۱—۲) گزاره. اگر f در a مشتق‌پذیر باشد برای هر $v \in \mathbb{R}^n$ داریم

$$D_vf(a) = (Df(a))(v) \tag{۱۴}$$

■

بالاخص این نتیجه مهم نشان می‌دهد که اگر تابع در a مشتق‌پذیر باشد، میان مشتق‌های جهت‌دار در جهت‌های گوناگون رابطه‌ای وجود دارد زیرا که همه آنها با دانستن مشتق‌های پاره‌ای (درایه‌های $Df(a)$) و دانستن جهت، یعنی u، قابل محاسبه‌اند. از نظر هندسی نیز باید همین را انتظار داشت زیرا که در صورت مشتق‌پذیری، خطوط مماس در جهات مختلف همه در یک شیء مسطح، یعنی نمودار تابع مستوی مماس باشد، قرار می‌گیرند. که همهٔ خطوط مماس در یک زیرفضای مستوی قرار می‌گیرند برای تابعهایی که مشتق‌پذیر نباشند ممکن است برقرار نباشد. مثال زیر نمونهٔ ساده‌ای از چنین وضعیتی است.

مثال. تابع $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

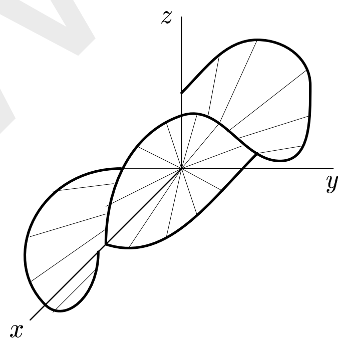
www.ttnar.ir

معرفی و دانلود رایگان : جزوات درسی . کتابها . نرم افزار های مهندسی . و ارائه بهترین مقالات روز علم عمران
www.icivil.ir منبع iransaze.net
icivil.ir مرجع دانشجویان و مهندسین عمران

نشان می‌دهیم f در $(\circ,\circ)$ مشتق‌پذیر نیست. عبارت $\frac{x^{۲}y}{x^{۲}+y^{۲}}$ در مختصات قطبی تبدیل می‌شود به $r\cos^{۲}\theta\sin\theta$. مقدار این عبارت در مبدأ مختصات، یعنی $r=\circ$، صفر است، پس به طور کلی

$$f(x,y)=r\cos^{۲}\theta\sin\theta$$

اگر دامنهٔ f را به یک خط راست گذرا از مبدأ محدود کنیم، نمودار یک خط راست است زیرا که برای نیم‌خط تعریف شده توسط θ ثابت داریم $z=(\cos^{۲}\theta\sin\theta)r$، یعنی z تابعی خطی نسبت به r (فاصله از $\underline{\circ}$) است، و برای نیم‌خط مقابل (یعنی به‌ازای $\theta+\pi$)، $\sin(\theta+\pi)=-\sin\theta$، پس در واقع $z=(\cos^{۲}\theta\sin\theta)r$ یک خط راست بالا سر خط $\{\theta,\theta+\pi\}$ تعریف می‌کند. به‌ازای $\theta=\circ,\pi$ و نیز به‌ازای $\theta=\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲}$، داریم $f(x,y)=\circ$، یعنی محورهای x و y جزء نمودار تابع f هستند. بنابراین اگر f در $(\circ,\circ)$ مشتق‌پذیر می‌بود، می‌بایست دو محور x و y جزء صفحهٔ مماس باشند و در نتیجه صفحه مماس می‌بایست همان صفحه xy باشد. ولی به‌ازای مقادیر θ غیر از مقادیر مربوط به دو محور، داریم $(\cos^{۲}\theta)(\sin\theta)\neq\circ$ و خط راست $z=(\cos^{۲}\theta\sin\theta)r$ با صفحهٔ xy در $\underline{\circ}$ برخورد غیر مماس دارد. این نکته نشان می‌دهد که تنها نامزد ممکن صفحهٔ مماس برای نمودار f در $(\circ,\circ)$ در واقع بر همهٔ نمودار مماس نیست، یعنی تابع در $(\circ,\circ)$ مشتق‌پذیر نیست (شکل ۱)!



شکل ۱

ضمناً توجه کنید که در $(\circ,\circ)$، f دارای مشتق سویی در همه جهتهاست زیرا با قرار دادن

www.tinar.ir

icivil.ir مرجع دانشجویان و مهندسین عمران
معرفی و دانلود رایگان : جزوات درسی . کتابها . نرم افزار های مهندسی . و ارائه بهترین مقالات روز علم عمران
www.icivil.ir منبع iransaze.net

$u = (\cos\theta, \sin\theta)$، داریم:

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{f(\underline{0} + hu) - f(\underline{0})}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{h^3 \cos^2\theta \sin\theta}{h^3} \\ &= \cos^2\theta \sin\theta \end{aligned}$$

اکنون مشتق‌ناپذیری f در $(0, 0)$ را به طور دقیق‌تر با توجه به تعاریف و نتایج به‌دست آمده توضیح می‌دهیم. فرض کنید f در $(0, 0)$ مشتق‌پذیر باشد. در این صورت ماتریس $Df(a)$ هست $[\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)]$. با توجه به این که f روی هر دو محور مقدار ثابت صفر را داراست، نتیجه می‌شود که $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ و $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. بنابراین با توجه به این که $f(0,0) = 0$، صفحهٔ مماس در $(0, 0)$ باید $z = 0$ باشد. حال اگر تابع در $(0, 0)$ مشتق‌پذیر می‌بود، طبق (۹) با قراردادن $a = (0, 0)$ و $\vec{h} = (x, y)$، باید می‌داشتیم:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|\frac{x^2 y}{x^2+y^2}|}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

یا در مختصات قطبی:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (\cos^2\theta |\sin\theta|) = 0$$

چون $\cos^2\theta|\sin\theta|$ روی هر خط گذرا از مبدأ مقدار ثابتی دارد و این مقدار ثابت غیر از روی دو محور صفر نیست، حد بالا نمی‌تواند برقرار باشد.

این نکته را باید تأکید کرد که علیرغم وجود $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ و $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ و در واقع همهٔ مشتقهای سویی در $(0, 0)$، تابع در $(0, 0)$ مشتق‌پذیر نیست. مطالب این جلسه نشان دادند اگر تابع در نقطهٔ a مشتق‌پذیر باشد، مشتق‌های پاره‌ای، و در واقع مشتق‌های سویی، همه در نقطهٔ a وجود دارند و رابطهٔ کلی (۱۴) برقرار است. ولی وجود مشتق‌های پاره‌ای (و حتی وجود همهٔ مشتق‌های سویی)، بر مشتق‌پذیری دلالت نمی‌کند. در مثال فوق خطوط مماس در جهات مختلف در یک زیرفضای مسطح واحد قرار نگرفتند، یعنی یک تقریب خطی در برگیرندهٔ همهٔ جهات وجود نداشت.

www.tinar.ir

معرفی و دانلود رایگان : جزوات درسی . کتابها . نرم افزار های مهندسی . و ارائه بهترین مقالات روز علم عمران
iCIVIL.ir
مرجع دانشجویان و مهندسین عمران
منبع iransaze.net
www.icivil.ir

در مثالی که در زیر می‌آید، با اینکه خطوط مماس در همهٔ جهتها در یک صفحه قرار می‌گیرند، این صفحه بر نمودار مماس نخواهد بود! در واقع در مثال زیر تابع داده شده در نقطه مزبور حتی پیوسته نیست در حالیکه مشتقهای سویی تابع در آن نقطه در همه جهات موجود است.

مثال ۴. خم C در صفحه را که در مختصات قطبی به‌صورت زیر تعریف شده است در نظر بگیرید:

$$r = 2\pi - \theta, \quad 0 \le \theta < 2\pi$$

تصویر C در شکل ۲ نمایش داده شده است. توجه کنید که C هر خط راست گذرا از $\underline{0}$ را

شکل ۲

در دقیقاً دو نقطه قطع می‌کند. حال تابع $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{اگر } (x,y) \text{ روی } C \text{ نباشد} \\ 1 & \text{اگر } (x,y) \text{ روی } C \text{ باشد} \end{cases}$$

تحدید این تابع به هر خط گذرا از مبدأ در همه‌جا به استثنای دو نقطه غیر $\underline{0}$ صفر است، پس مشتق سویی تابع در $\underline{0}$ در همه‌جهتها وجود دارد و برابر صفر است. بدین ترتیب خطوط مماس در $\underline{0}$ در همهٔ جهتها افقی هستند و روی صفحه xy قرار می‌گیرند. ولی این تابع در $(0,0)$ پیوسته نیست زیرا اگر به $(0,0)$ در طول C نزدیک شویم مقدار f به ۱ میل می‌کند و اگر از بیرون C نزدیک شویم مقدار f به 0 میل می‌کند. این تابع در $(0,0)$ مشتق‌پذیر نیست زیرا طبق گزارهٔ زیر اگر f در نقطه‌ای مشتق‌پذیر باشد، در آن نقطه پیوسته نیز هست.

(۲۱–۳) گزاره. اگر f در a مشتق‌پذیر باشد، f در a پیوسته است.

www.ttnar.ir

icivil.ir مرجع دانشجویان و مهندسین عمران
معرفی و دانلود رایگان : جزوات درسی . کتابها . نرم افزار های مهندسی . و ارائه بهترین مقالات روز علم عمران
www.icivil.ir منبع iransaze.net

برهان. طبق تعریف مشتق‌پذیری داریم

$$\lim_{\overrightarrow{h}\to \circ}\frac{|f(a+\overrightarrow{h})-f(a)-Df(a)(\overrightarrow{h})|}{|\overrightarrow{h}|}=\circ$$

پس حد صورت زیر صفر است

$$\lim_{\overrightarrow{h}\to \circ}|f(a+\overrightarrow{h})-f(a)-Df(a)(\overrightarrow{h})|=\circ$$

چون $Df(a)$ یک تابع خطی است، $Df(a)$ پیوسته است و مقدار تابع خطی در $\overrightarrow{h}=\underline{\circ}$ برابر صفر است، پس داریم:

$$\lim_{\overrightarrow{h}\to \circ}|f(a+\overrightarrow{h})-f(a)|=\circ$$

که این در واقع بیان پیوستگی f در نقطهٔ a است. ■

www.ttmar.ir

مشتق و تقریب خطی (۳)

مثالهای بخش پیشین نشان داد که تحقیق مشتق‌پذیری در یک تابع یک نقطه از دامنه ممکن است موضوع ظریفی باشد. خوشبختانه ضابطه‌ای کافی برای مشتق‌پذیری وجود دارد که در بسیاری موارد کارساز و قابل استفاده است. قضیه زیر بیان این ضابطه است:

(۲۴−۱) قضیه. فرض کنید $S \subset \mathbb{R}^n$، $f : S \longrightarrow \mathbb{R}^m$ طوری باشد که تابع‌های $\frac{\partial f}{\partial x_i} : S \longrightarrow \mathbb{R}^m$ همه در یک گوی باز حول نقطهٔ درونی a از S وجود داشته و در نقطهٔ a پیوسته باشند. در این صورت f در نقطهٔ a مشتق‌پذیر است.

بدین ترتیب برای تحقیق مشتق‌پذیری f کافی است پس از اطمینان از این که مشتق‌های پاره‌ای در نزدیکی a وجود دارند، پیوستگی هر یک را در آن نقطه تحقیق کنیم. اثبات زیر در واقع نشان می‌دهد که پیوستگی $(n-۱)$ مشتق پاره‌ای در نقطهٔ a و وجود مشتق پاره‌ای باقیمانده در آن نقطه برای مشتق‌پذیری کافی است.

برهان. قضیه را نخست در حالت دو متغیری ثابت می‌کنیم که ایدهٔ اصلی را نشان می‌دهد، سپس روش تعمیم آن به n متغیر را توضیح می‌دهیم. بدین ترتیب فرض کنید $S \subset \mathbb{R}^۲$، (a,b) یک نقطهٔ درونی S است، $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ وجود دارد، و $\frac{\partial f}{\partial y}$ در یک گوی باز حول (a,b) وجود دارد و در نقطهٔ (a,b) پیوسته است. برای مشتق‌پذیری f در (a,b) باید ثابت کنیم:

$$\lim_{(h,k)\to(۰,۰)} \frac{f(a+h,b+k)-[f(a,b)+h\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)+k\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)]}{\sqrt{h^۲+k^۲}} = ۰ \qquad (۱)$$

www.ttnar.ir

چون (a,b) یک نقطهٔ درونی S است، در بالا و در باقیمانده بحث می‌توان فرض کرد که $0 < |h|$ و $0 < |k|$ آنقدر کوچک هستند که مستطیل $a-|h| \le x \le a+|h|$، $b-|k| \le y \le b+|k|$، در دامنهٔ تعریف S قرار دارد. صورت کسر (۱) را با افزودن و کم کردن عبارت $f(a+h,b)$ به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$[f(a+h,b+k) - f(a+h,b) - k\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)] + [f(a+h,b) - f(a,b) - h\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)]$$

بنابراین کافی است دو حد زیر را تحقیق کنیم

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|f(a+h,b) - f(a,b) - h\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)|}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0 \qquad (۲)$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|f(a+h,b+k) - f(a+h,b) - k\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)|}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0 \qquad (۳)$$

در مورد (۲) داریم

$$\begin{aligned} |\frac{[f(a+h,b) - f(a,b) - h\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)]}{\sqrt{h^2+k^2}}| &\le |\frac{f(a+h,b) - f(a,b) - h\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)}{h}| \\ &= |\frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h} - \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)| \end{aligned}$$

و اینکه حد عبارت سمت راست صفر است به معنای وجود مشتق $\frac{\partial f}{\partial x}$ در (a,b) است. برای (۳)، از آنجا که $\frac{\partial f}{\partial y}$ در یک گوی حول (a,b) تعریف شده است، با تثبیت h کوچک، $f(a+h,y)$ برای y در نزدیکی b تابعی مشتق‌پذیر نسبت به متغیر دوم است و با استفاده از قضیهٔ میانگین یک متغیری می‌توان نوشت:

$$f(a+h,b+k) - f(a+h,b) = k\frac{\partial f}{\partial y}(a+h,b')$$

که در آن b' بین b و $b+k$ است. پس صورت کسر (۳) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$k[\frac{\partial f}{\partial y}(a+h,b') - \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)]$$

حال چون $|\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}| \le 1$، قدرمطلق کسر (۳) کوچکتر یا مساوی $|\frac{\partial f}{\partial y}(a+h,b') - \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)|$ است. از آنجاکه b' بین b و $b+k$ است، وقتی $(h,k) \to (0,0)$، نقطه $(a+h,b')$ به (a,b) میل می‌کند و چون $\frac{\partial f}{\partial y}$ در (a,b) پیوسته فرض شده است، این عبارت به صفر میل می‌کند و اثبات حکم کامل می‌شود.

برای اثبات حکم در حالت n متغیری، روش بالا را به صورت زیر تعمیم می‌دهیم. فرض کنید نقطهٔ درونی $a = (a_1, \ldots, a_n)$ از مجموعهٔ S داده شده است و نقطهٔ $(a_1+h_1, \ldots, a_n+h_n)$ در دامنهٔ f طوری است که مستطیل $a_1 - |h_1| \le x_1 \le a_1 + |h_1|$، ... ، $a_n - |h_n| \le x_n \le a_n + |h_n|$ به تمامی در دامنهٔ تعریف f قرار می‌گیرد. حال با تفریق و افزودن $(n-1)$ مقدار $f(a_1+h_1, \ldots, a_{n-1}+h_{n-1}, a_n)$، $f(a_1+h_1, \ldots, a_{n-2}+h_{n-2}, a_{n-1}, a_n)$، ...، $f(a_1+h_1, a_2, \ldots, a_n)$، عبارت $f(a_1+h_1, \ldots, a_n+h_n) - f(a_1, \ldots, a_n) - \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ را به صورت مجموع n عبارت زیر می‌نویسیم:

$$[f(a_1+h_1, \ldots, a_n+h_n) - f(a_1+h_1, \ldots, a_{n-1}+h_{n-1}, a_n) - h_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)] + \cdots +$$

$$[f(a_1+h_1, a_2, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n) - h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)]$$

و نشان می‌دهیم نسبت تقسیم قدرمطلق هر کروشه بر $\sqrt{h_1^2 + \cdots + h_n^2}$ به صفر میل می‌کند. برای کروشهٔ آخر، این امر از وجود $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)$ نتیجه می‌شود و برای سایر کروشه‌ها مثل استدلال بالا از قضیهٔ میانگین و پیوستگی $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ در نقطهٔ a استفاده می‌کنیم. استدلال عین بالا است. □

مثال. به مثالی که در هر یک از دو بخش قبل مورد بحث قرار گرفت باز می‌گردیم، یعنی تابع $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ با ضابطهٔ:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

دیدیم که این تابع در $(0,0)$ مشتق‌پذیر نیست. و در عین حال $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ و $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ وجود دارند. بنابراین طبق قضیه هیچ‌یک از $\frac{\partial f}{\partial x}$ $\frac{\partial f}{\partial y}$ نمی‌توانند در $(0,0)$ پیوسته باشند. ضمناً برای $\frac{\partial f}{\partial y}$ در دو

www.ttnar.ir

بخش قبل عبارت زیر را به‌دست آوردیم:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\begin{cases}\frac{x^{۴}-x^{۲}y^{۲}}{(x^{۲}+y^{۲})^{۲}} & (x,y)\neq(۰,۰)\\ ۰ & (x,y)=(۰,۰)\end{cases}$$

در مختصات قطبی خارج از $(۰,۰)$ داریم $\frac{\partial f}{\partial y}=\cos^{۲}\theta(\cos^{۲}\theta-\sin^{۲}\theta)$. روی محور x، $\theta=۰,\pi$، و $\frac{\partial f}{\partial x}(x,۰)=۱$ برقرار است. بنابراین حدّ $\frac{\partial f}{\partial y}$ وقتی $(x,y)\to(۰,۰)$ برابر $\frac{\partial f}{\partial y}(۰,۰)=۰$ نیست، و $\frac{\partial f}{\partial y}$ در $(۰,۰)$ پیوسته نیست. مشابهاً با محاسبه $\frac{\partial f}{\partial x}$ در نقاط خارج از مبدأ می‌توان مشاهده کرد که $\frac{\partial f}{\partial x}$ نیز در $(۰,۰)$ پیوسته نیست.

اکنون به جنبه‌های کاربردی‌تر تقریب خطی می‌پردازیم. همان طور که دیدیم در بین تابع‌های درجه یک که نمودارشان از یک نقطهٔ خاص نمودار تابع داده شده می‌گذرد، تقریب خطی یگانه تابعی است که تفاضل مقدارش با مقدار متناظر تابع داده شده سریعتر از فاصلهٔ متغیر از نقطهٔ مورد بحث به صفر میل می‌کند. این ویژگی باید روش تقریب مناسبی را پیش پای ما بگذرد زیرا که از یک سو تقریب خوبی مطرح است و از سویی دیگر محاسبهٔ تابع‌های درجه یک بسیار ساده است.

مثال ۱. به کمک روش تقریب خطی، مقداری تقریبی برای $\sqrt[۳]{x^{۲}-y}$ پیدا کنید وقتی $x=۲/۹$ و $y=۱/۱$. ملاحظه می‌کنیم که به‌ازای $a=۳$ و $b=۱$، داریم $\sqrt[۳]{a^{۲}-b}=۲$ و نقطهٔ $(x,y)=(۲/۹,۱/۱)$ را می‌توان برای بعضی مقاصد نزدیک نقطه (a,b) فرض کرد. تابع $f(x,y)=\sqrt[۳]{x^{۲}-y}$ را در نظر می‌گیریم. مشتق‌های پاره‌ای این تابع نسبت به x و y وجود دارند و پیوسته‌اند وقتی زیر $\sqrt[۳]{}$ صفر شود، یعنی وقتی $y\neq x^{۲}$. نقطه $(۳,۱)$ روی $y=x^{۲}$ نیست، پس در یک گوی باز حول آن (که شامل $(۲/۹,۱/۱)$ نیز می‌شود) مشتق‌های پاره‌ای وجود دارند. در واقع

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{۲x}{۳}(x^{۲}-y)^{-\frac{۲}{۳}}\quad,\quad\frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{۱}{۳}(x^{۲}-y)^{-\frac{۲}{۳}}$$

تقریب خطی f را در نقطهٔ $(a,b) = (۳,۱)$ می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} A(x,y) &= ۲ + \frac{\partial f}{\partial x}(۳,۱)(x-۳) + \frac{\partial f}{\partial y}(۳,۱)(y-۱) \\ A(۲/۹, ۱/۱) &= ۲ + \tfrac{۱}{۲}(-۰/۱) + (\tfrac{-۱}{۱۲})(۰/۱) \\ &= ۲ - \tfrac{۱}{۲۰} - \tfrac{۱}{۱۲۰} \end{aligned}$$

پس طبق تقریب خطی:

$$\sqrt[۳]{(۲/۹)^۲ - (۱/۱)} \simeq ۲ - \frac{۱}{۲۰} - \frac{۱}{۱۲۰} \simeq ۱/۹۴۱۶۶۷$$

در اینجا روش دیگری برای استفاده از تقریب خطی به نظر می‌رسد. داریم $\sqrt[۳]{۷/۳۱} = \sqrt[۳]{(۲/۹)^۲ - (۱/۱)}$. می‌توان این مسأله را به صورت تقریب خطی یک متغیری مطرح کرد. تابع $f(t) = \sqrt[۳]{t}$ در نظر بگیرید. داریم $f(۸) = ۲$ و می‌خواهیم مقداری تقریبی برای $f(۷/۳۱) = f(۸ - ۰/۶۹)$ پیدا کنیم. طبق تقریب خطی یک متغیری:

$$f(۷/۳۱) \simeq f(۸) - (۰/۶۹) f'(۸)$$

حال $f'(t) = \frac{۱}{۳} t^{-\frac{۲}{۳}}$، پس $f'(۸) = \frac{۱}{۱۲}$ و

$$f(۷/۳۱) \simeq ۲ - \frac{۶۹}{۱۲۰۰} = ۱/۹۴۲۵$$

کدامیک از دو تقریب به واقعیت نزدیکتر است؟ تابع دو متغیری $f(x,y) = \sqrt[۳]{x^۲ - y}$ را در نظر بگیرید. ترکیب‌های مختلفی از x و y منجر به $\sqrt[۳]{۷/۳۱}$ می‌شوند. در واقع با قرار دادن $x^۲ - y = ۷/۳۱$ یک سهمی در صفحه xy به دست می‌آید که جزیی از آن "نزدیک" نقطهٔ $(۳,۱)$

شکل ۱

است. بخشی از نمودار $f(x,y) = \sqrt[۳]{x^۲ - y}$ را که بالای سر این منحنی قرار دارد در نظر بگیرید که یک منحنی روی نمودار می‌شود. نقاط مختلف این منحنی از تقریب خطی در نقطهٔ $(۳,۱)$ فواصل

www.ttmar.ir

گوناگون دارند، یعنی تقریب خطی در $(3,1)$ جوابی یکسان برای همهٔ این نقاط نمی‌دهد، که امری طبیعی است. برای هر چنین (x,y)، دو مقدار $(x-3)$ و $(y-1)$ بر تقریب خطی به‌دست آمده اثر دارند. در تقریب خطی یک متغیری، همه این نقاط به صورت یک نقطه روی محور t دیده می‌شوند و تقریبی که به‌دست می‌آید نسبت به پستی بلندی‌های نمودار $f(x,y) = \sqrt[3]{x^2 - y}$ حساس نیست. جمعبندی بحث بالا این است که اگر مسأله اولیه به طور طبیعی یک مسأله دو متغیری باشد، بهتر است تقریب خطی دو متغیری در نظر گرفته شود که تمایز میان نقاط مختلفی که منجر به یک مسأله یک متغیری می‌شوند نادیده گرفته نشود. بالعکس اگر یک مسأله یک متغیری را به روش‌های گوناگون به مسأله‌ای دو متغیری مبدل کنیم، جواب‌های گوناگونی حاصل خواهند شد که هر یک ممکن است وابسته به فرض‌های اضافی و بعضاً غیرطبیعی باشد. در مثال ۱ که مسأله به صورت دو متغیری مطرح بود، روش طبیعی، استفاده از تقریب خطی دو متغیری است.

مثال ۲. $S \subset \mathbb{R}^n$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$S = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i > 0, i = 1, \ldots, n\}$$

و تابع $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = c x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} \tag{۴}$$

که در آن $c, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ اعداد حقیقی مثبت داده شده‌اند. این گونه تابع در بعضی مسائل اقتصادی مطرح می‌شود که در آن x_i ها مقادیر عوامل مختلف تولید هستند ولی منحصر به این نوع کاربرد نیستند. سؤالی که مطرح می‌کنیم این است که اگر عوامل $x_1, \ldots, x_n$ به ترتیب با دقت نسبی $r_1, \ldots, r_n$ درصد معلوم باشند، نتیجه محاسبه، یعنی $f(x_1, \ldots, x_n)$ با چه دقت نسبی تعیین می‌شود؟ اگر $a_1, \ldots, a_n$ "مقادیر واقعی" متغیرهای $x_1, \ldots, x_n$ باشند، خطاهای نسبی به ترتیب

www.tmar.ir

$\frac{x_1-a_1}{a_1},\dots,\frac{x_n-a_n}{a_n}$ هستند. x_i-a_i را به Δx_i نیز نمایش می‌دهیم. طبق فرمول تقریب خطی داریم:

$$f(x_1,\dots,x_n)\simeq f(a_1,\dots,a_n)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(a)\Delta x_i \qquad (5)$$

با مشتق‌گیری از (۱) داریم:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}=c\alpha_i x^{\alpha_1}\dots x_{i-1}^{\alpha_{i-1}}x_i^{\alpha_i-1}x_{i+1}^{\alpha_{i+1}}\dots x_n^{\alpha_n}=\frac{\alpha_i}{x_i}f(x)$$

بنابراین با جایگزینی در (۲):

$$\Delta f=f(x)-f(a)\simeq f(x)\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\Delta x_i$$

در نتیجه خطای نسبی f، یعنی $\frac{\Delta f}{f}$، از تقریب خطی به صورت زیر است:

$$\frac{\Delta f}{f}\simeq\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\frac{\Delta x_i}{x_i}$$

حال اگر خطای نسبی x_i برابر r_i درصد باشد، نتیجه می‌شود که خطای نسبی در محاسبه f حدوداً $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i r_i$ درصد خواهد بود.

www.ttmar.ir

میدان گرادیان

فرض کنید تابع $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ داده شده است، $S \subset \mathbb{R}^n$، که در سراسر S مشتق‌پذیر است. می‌دانیم که برای هر $a \in S$ و هر $v \in \mathbb{R}^n$:

$$D_v f(a) = (Df(a))(v) \tag{۱}$$

بازنویسی جالب توجهی از (۱) وجود دارد که منشاء بحث این بخش است. چون برد تابع f فضای یک بعدی $\mathbb{R}$ است، ماتریس $Df(a)$ یک ماتریس $n \times ۱$ می‌باشد و وقتی $v = (v_۱, \ldots, v_n)$ به صورت یک ستون نوشته شود سمت راست (۱) به صورت زیر در می‌آید:

$$\frac{\partial f}{\partial x_۱}(a)v_۱ + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)v_n \tag{۲}$$

که حاصل‌ضرب داخلی دو بردار n تایی v و $(\frac{\partial f}{\partial x_۱}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a))$ است. بردار متشکل از مشتقات پاره‌ای f را گرادیان f در نقطه a می‌نامیم و با $\bigtriangledown f(a)$ یا $grad\ f(a)$ نمایش می‌دهیم:

$$\bigtriangledown f(a) = (\frac{\partial f}{\partial x_۱}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)) \tag{۳}$$

تفاوت $\bigtriangledown f(a)$ و $Df(a)$ در این است که $\bigtriangledown f(a)$ یک n تایی عضو $\mathbb{R}^n$ تلقی می‌شود و $Df(a)$ یک ماتریس $n \times ۱$. بدین ترتیب وقتی تابع f در نقطهٔ a مشتق‌پذیر باشد، داریم:

$$D_v f(a) = \bigtriangledown f(a) \cdot v \tag{۴}$$

www.ttmar.ir

∇f در واقع به هر نقطهٔ مشتق‌پذیری تابع f یک بردار n تایی $\nabla f(a)$ نسبت می‌دهد. معمول است که این تابع را به صورت یک "میدان" تجسم می‌کنیم به این معنی که بردار $\nabla f(a)$ را روییده از مبدأ نقطهٔ a در نظر می‌گیریم.

مثال ۱. $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ را به صورت $f(x) = x^2 - y$ در نظر بگیرید. داریم $\nabla f(x, y) = (2x, -1)$. برای رسم میدان گرادیان، به مبدأ هر نقطهٔ (x, y)، بردار $(2x, -1)$ را رسم می‌کنیم (شکل ۱).

مثال ۲. $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ را به صورت $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + \cdots + x_n^2$ در نظر بگیرید. داریم $\nabla f(x) = (2x_1, \ldots, 2x_n)$ پس در هر نقطه، برداری به دو برابر بردار حامل از مبدأ به آن و در همان جهت نصب می‌شود (شکل ۲ برای $n = 2$).

مثال ۳. در مکانیک نیوتنی و دستگاه‌های پایسته، میدان نیرو در هر نقطه برابر گرادیان $(-U)$ است که U انرژی پتانسیل دستگاه است. مثلاً برای گرانش مرکزی در فضای سه بعدی که جسم سنگینی در مبدأ مختصات منشاء گرانش است، انرژی پتانسیل برابر است با $U(x, y, z) = -\frac{k}{r}$ که $k > 0$ ثابت است و $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ فاصله از مبدأ می‌باشد. در اینجا میدان نیرو $\vec{F}$ برابر است با $\vec{F}(x, y, z) = -\frac{k}{r^3}(x, y, z)$.

اکنون نشان خواهیم داد که چگونه میدان گرادیان همراه با مجموعه‌های تراز تصویری بسیار گویا از رفتار یک تابع حقیقی چند متغیری ارائه می‌کند. از (۴) نتیجه می‌گیریم که:

$$D_v f(a) = |\nabla f(a)||v| \cos \measuredangle(\nabla f(a), v) \qquad (5)$$

وقتی v یک بردار به طول واحد باشد و در نتیجه $D_v f(a)$ مشتق سویی در جهت v، داریم:

$$D_v f(a) = |\nabla f(a)| \cos \measuredangle(\nabla f(a), v) \qquad (6)$$

www.tmar.ir

از آنجا که $|\cos\measuredangle| \leq ۱$، نتیجه می‌گیریم که:

$$|D_v f(a)| \leq |\bigtriangledown f(a)| \qquad (۷)$$

یعنی قدرمطلق مشتق سویی در یک نقطه حداکثر برابر طول بردار گرادیان در آن نقطه است. در واقع اگر در نقطهٔ a، $\bigtriangledown f(a) \neq ۰$، برای بردار واحد در جهت $\bigtriangledown f(a)$، یعنی $v = \frac{\bigtriangledown f(a)}{|\bigtriangledown f(a)|}$، $\cos\measuredangle(\bigtriangledown f(a), v) = ۱$ متقابلاً برای بردار واحد v در جهت مخالف $\bigtriangledown f(a)$، کسینوس زاویه، (-۱) می‌شود، پس:

(۲۳—۱) گزاره. اگر در نقطهٔ a، $\bigtriangledown f(a) \neq \underline{۰}$، جهت حداکثر افزایش تابع، جهت گرادیان، و جهت حداکثر کاهش تابع، جهت معکوس گرادیان است. □

مثال ۴. تابع $f : \mathbb{R}^۲ \longrightarrow \mathbb{R}$ به صورت $f(x, y) = x^۲ - y^۲$ را در نظر می‌گیریم که در جلسات قبل نیز با آن آشنایی پیدا کرده‌ایم. می‌خواهیم جهت حداکثر افزایش و کاهش تابع را در نقطهٔ $(۲, ۰)$ پیدا کنیم. داریم $\bigtriangledown f(x, y) = (۲x, -۲y)$، پس $\bigtriangledown f(۲, ۰) = (۴, ۰)$. بردار واحد در جهت گرادیان بردار $(۱, ۰)$ است، که جهت حداکثر افزایش تابع می‌باشد. مشتق سویی در جهت $(۱, ۰)$ یعنی $\frac{\partial f}{\partial x}(۲, ۰)$ که برابر ۴ است. همچنین جهت حداکثر کاهش تابع جهت مقابل $(۱, ۰)$، یعنی جهت $(-۱, ۰)$ است که مشتق سویی نسبت به آن برابر (-۴) می‌شود. روی نمودار تابع (شکل ۳) مشاهده می‌شود که جهت حداکثر افزایش تابع متناظر با صعود روی "یال" زین است و جهت حداکثر کاهش جهت مقابل آن.

می‌توان (۷) را به شکل زیر نوشت:

$$-|\bigtriangledown f(a)| \leq D_v f(a) \leq |\bigtriangledown f(a)| \qquad (۸)$$

بین جهت حداکثر افزایش تابع و جهت حداکثر کاهش تابع، انتظار داریم جهتی موجود باشد که تابع کمترین تغییر را در آن جهت دارد، یعنی $D_v f(a) = ۰$. در واقع وقتی $v \perp \bigtriangledown f(a)$، کسینوس زاویه بین

www.tinar.ir

آنها صفر است و در نتیجه $D_v f(a) = 0$. نکتهٔ جالب این است که جهت‌های عمود بر گرادیان، در واقع جهت‌های مماس بر مجموعهٔ تراز گذرا از نقطهٔ a هستند:

(۲۳−۲) گزاره. اگر در نقطهٔ a داشته باشیم $\nabla f(a) \neq \underline{0}$، آنگاه ابرصفحه عمود بر $\nabla f(a)$ ابرصفحهٔ مماس بر مجموعهٔ تراز تابع f است که از نقطهٔ a می‌گذرد.

به طور خلاصه گفته می‌شود که گرادیان همواره بر مجموعه‌های تراز عمود است. البته وقتی گرادیان صفر شود، عمود بودن صرفاً به معنای صفر شدن حاصل‌ضرب داخلی گرادیان با بردارهای مماس بر مجموعه تراز (در صورت وجود) است. اثبات دقیق این گزاره را به بعد موکول می‌کنیم ولی کمی توضیح و استدلال شهودی در مورد آن بجاست. سؤال اولی که به ذهن می‌رسد این است که آیا مجموعه‌های تراز مجموعه‌هایی "هموار" هستند به این معنی که در هر نقطه دارای یک "ابرصفحه مماس" هستند؟ بعدها نشان داده خواهد شد که اگر در نقطهٔ a داشته باشیم $\nabla f(a) \neq \underline{0}$، آنگاه دست‌کم بخش کوچکی از مجموعهٔ تراز گذرا از a که در مجاورت نقطهٔ a قرار دارد 'هموار' است، ولی اگر $\nabla f(a) = \underline{0}$، آنگاه در نقطهٔ a ممکن است این "هموار بودن" نقض شود یا بعد فضای مماس کوچکتر از $(n - 1)$ شود (به مثال‌های بعد مراجعه کنید). نقاطی را که در آن $\nabla f(a) = \underline{0}$ نقاط بحرانی تابع f و نقاطی را که در آن $\nabla f(a) \neq \underline{0}$، نقاط عادی یا نقاط منظم می‌نامیم. با فرض این مقدمه، می‌توان دلایل شهودی زیر را برای عمود بودن گرادیان بر مجموعهٔ تراز ارائه کرد:

استدلال شهودی ۱. تابع f روی مجموعهٔ تراز ثابت است، بنابراین "مشتق در جهت مجموعه تراز"، یعنی مشتق نسبت به هر جهت مماس بر مجموعهٔ تراز باید صفر باشد.

استدلال شهودی ۲. فرض کنید u یک بردار مماس بر مجموعهٔ تراز در نقطهٔ a باشد و به کسر

$$\frac{f(a+hu) - f(a)}{h} \tag{۹}$$

توجه کنید که حد آن وقتی h به صفر میل کند برای $D_uf(a)$ است. از نقطهٔ $a+hu$ عمودی بر مجموعهٔ تراز رسم کنید. با توجه به تعریفی که از "مماس" ارائه کردیم انتظار داریم طول پاره‌خط عمود سریعتر از h به صفر میل کند وقتی $h \longrightarrow 0$. ولی پای عمود روی مجموعهٔ تراز است یعنی مقدار f در آن برابر مقدار f در a است، بنابراین نامعقول نیست که با اثر دادن تابع مشتق‌پذیر f، انتظار داشته باشیم تفاضل $f(a+h)-f(a)$ نیز سریعتر از h به صفر میل کند، یعنی حد کسر (۹) صفر باشد.

با قبول این گزاره، تصویر زیر در مورد رفتار تابع مشتق‌پذیر $f: S \longrightarrow \mathbb{R}$، $S \subset \mathbb{R}^n$، حاصل می‌شود:

گرادیان f همواره بر مجموعه‌های تراز f عمود است و به جهت حداکثر افزایش f اشاره می‌کند.

مثال ۵. تابع $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ را به صورت $f(x,y,z) = x^2+y^2-z^2$ تعریف می‌کنیم. داریم:

$$\nabla f(x,y,z) = (2x, 2y, -2z)$$

به‌ازای $c > 0$، مجموعهٔ تراز منسوب به c، یعنی $x^2+y^2-z^2 = c$ یک هذلولی‌وار یکپارچه است، به‌ازای $c = 0$ یک مخروط به‌دست می‌آید و به‌ازای $c < 0$، مجموعهٔ تراز یک هذلولی‌وار دو پارچه است (شکل ۵). جهت گرادیان یعنی بردار $(2x, 2y, -2z)$، خارج از محور z، هموار دور از محور z، به طرف پایین وقتی $z > 0$ و به طرف بالا وقتی $z < 0$، می‌باشد.

روی محور z، جهت گرادیان به طرف مبدأ است. تنها نقطهٔ بحرانی $(0,0,0)$ است که در آن مجموعهٔ تراز مربوط (مخروط) هموار نیست.

مثال ۶. تابع $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ را به صورت $f(x,y) = (x^2-1)^2+y^2$ تعریف می‌کنیم. داریم:

$$\nabla f(x,y) = (4x(x^2-1), 2y)$$

سه نقطه بحرانی $(\pm 1, 0)$ و $(0,0)$ وجود دارند. نخست مجموعه‌های تراز شامل این نقاط بحرانی را در نظر می‌گیریم. به‌ازای $(\pm 1, 0)$ داریم $f(\pm 1, 0)$ و در واقع با قرار دادن $(x^2-1)^2+y^2 = 0$

فقط این دو نقطه به‌دست می‌آیند. پس مجموعهٔ تراز منسوب به صفر از دو نقطهٔ $(1,0)$ و $(-1,0)$ تشکیل شده است. می‌بینیم که این مجموعهٔ تراز حالتی استثنایی دارد، یعنی به جای حالت معمول، که مجموعهٔ تراز یک منحنی است، در اینجا از دو نقطهٔ مجزا تشکیل شده است. به‌ازای نقطهٔ بحرانی دیگر، یعنی $(0,0)$، $f(0,0) = 1$. مجموعهٔ تراز $(x^2 - 1)^2 + y^2 = 1$ را می‌توان با نقطه‌یابی، استفاده از مختصات قطبی، یا ترسیم کامپیوتری به‌دست آورد که یک منحنی پروانه شکل است (شکل ۶). توجه کنید که این مجموعهٔ تراز در نقطهٔ بحرانی $(0,0)$ هموار نیست، یعنی دو شاخه منحنی در آن نقطه متقاطع می‌شوند. برای $c < 0$ مجموعهٔ تراز $(x^2 - 1)^2 + y^2 = c$ تهی است. برای $0 < c < 1$، مجموعهٔ تراز از دو منحنی بستهٔ کوچک در داخل دو شاخهٔ پروانه و حول دو نقطهٔ بحرانی $(\pm 1, 0)$ تشکیل شده است، و بالاخره برای $c > 1$، مجموعهٔ تراز یک منحنی است که از بیرون پروانه را احاطه می‌کند. میدان گرادیان روی مجموعه‌های تراز ترسیم شده است.

نمودار این تابع را می‌توان به کمک مجموعه‌های تراز بازسازی کرد به این ترتیب که مجموعه تراز منسوب به c را به ارتفاع $z = c$ منتقل می‌کنیم. صفحه $z = 0$ بر نمودار در دو نقطه $(\pm 1, 0, 0)$ مماس است. برای $c > 0$ کوچک، $0 < c < 1$، صفحه $z = c$ نمودار را در دو منحنی قطع می‌کند، به‌ازای $z = 1$ شکل پروانه‌ای پدید می‌آید و برای $z > 1$ مقطع یک منحنی بسته است (شکل ۷).

مثال ۷. تابعهای $f, g, h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ در مثال ۹، بخش ۱۷ را در نظر می‌گیریم. داریم

$$\begin{aligned}
\nabla f(x,y) &= (1,1)\\
\nabla g(x,y) &= 3(x+y)^2(1,1)\\
\nabla h(x,y) &= \tfrac{1}{3}(x+y)^{\frac{-2}{3}}(1,1)
\end{aligned}$$

گرادیان هر سه تابع بر مجموعه‌های تراز که خطوط راست (ثابت $x+y$) هستند عمودند. توجه کنید که در مورد f میدان گرادیان ثابت است که شدت رشد یکنواخت تابع f را نشان می‌دهد. در مورد g، با دور شدن از $\underline{0}$، طول بردار گرادیان ∇g سریعتر از ∇f رشد می‌کند که نشانگر افزایش سریعتر $(x+y)^3$ در

www.ttnar.ir

مقایسه با $x+y$ است. ضمناً مجموعه‌های تراز g نیز نسبت به هم نزدیکتر می‌شوند که حاکی از همین امر است. بالعکس در مورد h، ∇h با دور شدن از $\underline{o}$ کوچکتر می‌شود و مجموعه‌های تراز نیز از هم فاصله می‌گیرند که نمایانگر رشد کندتر h نسبت به تابع خطی $f(x,y) = x+y$ است.

www.ttmar.ir

قاعدهٔ زنجیره‌ای (۲)

در این جلسه مثال‌هایی از نحوهٔ استفاده از قاعدهٔ زنجیری ارائه خواهیم کرد.

مثال ۱. فرض کنید دمای ناحیه‌ای در $\mathbb{R}^{۳}$ در همسایگی نقطهٔ $(۰,۰,۰)$ از فرمول $T = \frac{۱۰۰}{۱+x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}}$ تبعیت می‌کند. مکان متحرکی مجهز به یک دماسنج در زمان t به وسیلهٔ $(x,y,z) = (۱+t, t^{۲}, t-t^{۳})$ داده شده است. آهنگ تغییر دمای نمایش داده شده توسط دماسنج را در لحظهٔ $t = ۱$ به‌دست آورید.

در اینجا T به عنوان تابعی از (x,y,z) ارائه شده است و (x,y,z) به عنوان تابعی از زمان، t:

$$t \longrightarrow (x,y,z) \longrightarrow T$$

بنابراین قاعدهٔ زنجیری به صورت زیر در می‌آید:

$$[\frac{dT}{dt}] = [\frac{\partial T}{\partial x} \quad \frac{\partial T}{\partial y} \quad \frac{\partial T}{\partial z}] \begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{bmatrix}$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial T}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial T}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

در $t = ۱$ داریم $(x,y,z) = (۲,۱,۰)$:

$$\begin{aligned}
[\frac{\partial T}{\partial x} \quad \frac{\partial T}{\partial y} \quad \frac{\partial T}{\partial z}]|_{(۲,۱,۰)} &= [\frac{-۲۰۰x}{(۱+x^{۲}+y^{۲}+z^{۲})^{۲}}, \frac{-۲۰۰y}{(۱+x^{۲}+y^{۲}+z^{۲})^{۲}}, \frac{-۲۰۰x}{(۱+x^{۲}+y^{۲}+z^{۲})^{۲}}]|_{(۲,۱,۰)} \\
&= [-\tfrac{۴۰۰}{۳۶} \quad -\tfrac{۲۰۰}{۳۶} \quad ۰] \\
&= [-\tfrac{۱۰۰}{۹} \quad -\tfrac{۵۰}{۹} \quad ۰]
\end{aligned}$$

www.ttmar.ir

از طرفی دیگر

$$\begin{aligned}(\tfrac{dx}{dt} \quad \tfrac{dy}{dt} \quad \tfrac{dz}{dt})|_{t=1} &= (1 \quad 2t \quad 1-3t^2)|_{t=1} \\ &= (1 \quad 2 \quad -2)\end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\frac{dT}{dt} &= -\frac{100}{9} - \frac{100}{9} + 0 \\ &\simeq -22/22\end{aligned}$$

مثال ۲. تابعی $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ به صورت $z = x^2 - y^2$ داده شده است. اگر (r, θ) مختصات قطبی در صفحهٔ xy باشند، $\frac{\partial z}{\partial r}$ و $\frac{\partial z}{\partial \theta}$ را محاسبه کنید.

در اینجا باید $z = x^2 - y^2$ را به عنوان تابعی از (r, θ) در نظر بگیریم و سپس $\frac{\partial z}{\partial r}$ و $\frac{\partial z}{\partial \theta}$ را محاسبه کنیم. در این مثال ساده می‌توان به راحتی z را برحسب (r, θ) نوشت و محاسبهٔ مستقیم مشتق‌های پاره‌ای را انجام داد ولی اگر عبارت تعریف کنندهٔ تابع پیچیده‌تر باشد اغلب استفاده از قاعدهٔ زنجیری کوتاه‌تر است. برای روشن شدن روش از قاعدهٔ زنجیری استفاده می‌کنیم. داریم:

$$(r, \theta) \longrightarrow (x, y) \longrightarrow z$$

بنابراین قاعدهٔ زنجیری به صورت زیر در می‌آید:

$$[\frac{\partial z}{\partial r} \quad \frac{\partial z}{\partial \theta}] = [\frac{\partial z}{\partial x} \quad \frac{\partial z}{\partial y}] \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix}$$

هر یک از دو ماتریس طرف راست را محاسبه می‌کنیم:

$$[\frac{\partial z}{\partial r} \quad \frac{\partial z}{\partial \theta}] = [2x \quad -2y]$$

با توجه به $x = r\cos\theta$، $y = r\sin\theta$ داریم:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & r\cos\theta \\ \sin\theta & -r\sin\theta \end{bmatrix}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial r} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}\\ &= (۲r\cos\theta)(\cos\theta)+(-۲r\sin\theta)(\sin\theta)\\ &= ۲r\cos ۲\theta\\ \frac{\partial z}{\partial \theta} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}\\ &= (۲r\cos\theta)(r\cos\theta)+(-۲r\sin\theta)(-r\sin\theta)\\ &= ۲r^{۲}\end{aligned}$$

مثال ۳. در بحث مربوط به گرادیان اشاره کردیم به این مطلب که اگر $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$، $S \subset \mathbb{R}^n$، تابعی مشتق‌پذیر باشد و $\nabla f(a) \neq \underline{\circ}$، آنگاه $\nabla f(a)$ بر مجموعهٔ تراز تابع f که از نقطهٔ a می‌گذرد در آن نقطه عمود است. عمود بودن بردار $\nabla f(a)$ بر مجموعهٔ تراز را بدین معنی گرفتیم که $\nabla f(a)$ بر هر بردار مماس بر مجموعهٔ تراز در نقطهٔ a عمود است و دلایلی شهودی برای این واقعیت ارائه کردیم. اکنون اثبات دقیق‌تری از این مطلب به کمک قاعدهٔ زنجیری ارائه می‌کنیم. فرض کنید v برداری مماس بر مجموعهٔ تراز مورد نظر در نقطهٔ a باشد. در این صورت یک منحنی پارامتری مشتق‌پذیر $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$، I یک بازه در $\mathbb{R}$، وجود دارد که تصویر آن به تمامی روی مجموعهٔ تراز قرار دارد، در زمانی $t_\circ \in I$ از نقطهٔ a می‌گذرد، $\alpha(t_\circ) = a$، و بردار سرعت آن برابر v است، $\alpha'(t_\circ) = v$ (این مطلب نیاز به اثبات دارد که در جلسات بعد ارائه خواهد شد).

طبق تعریف مجموعهٔ تراز، f روی مجموعهٔ تراز گذرا از a مقداری ثابت دارد، پس $f(\alpha(t)) = c$ که $c \in \mathbb{R}$ مقداری ثابت است، پس $\frac{d}{dt}(f(\alpha(t))) = \circ$، و طبق قاعدهٔ زنجیره‌ای:

$$(D(f\circ\alpha))(t_\circ) = Df(\alpha(t_\circ))\circ D\alpha(t_\circ)$$

www.ttmar.ir

یا با نوشتن $\alpha(t) = (x_1, \ldots, x_n)$:

$$\frac{d}{dt}((f \circ \alpha)(t))|_{t=t_0} = [\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \quad \cdots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)] \begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt}(t_0) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt}(t_0) \end{bmatrix} = \bigtriangledown f(a) \cdot v$$

پس $\bigtriangledown f(a) \cdot v = 0$ و حکم به اثبات می‌رسد.

مثال ۴ (اصل بقای انرژی برای دستگاه‌های پایسته). یک دستگاه مکانیکی نیوتنی در نظر می‌گیریم با مختصات مکانی $(x_1, \ldots, x_n)$، مختصات سرعتی $(v_1, \ldots, v_n)$، و جرم‌های $m_1, \ldots, m_n$. مثلاً می‌توان k ذره در $\mathbb{R}^3$ را در نظر گرفت که تحت اثر متقابل گرانشی در حرکتند. در این صورت $n = 3k$، (x_1, x_2, x_3) مختصات مکانی ذره اول، (v_1, v_2, v_3) سرعت ذره اول، و $m_1 = m_2 = m_3$ جرم ذرهٔ اول است.

برای ذره دوم، (x_4, x_5, x_6)، (v_4, v_5, v_6) و $m_4 = m_5 = m_6$ در نظر گرفته می‌شوند و غیره. این دستگاه را پایسته می‌نامیم در صورتی که تابعی مشتق‌پذیر U از $(x_1, \ldots, x_n)$ وجود داشته باشد (موسوم به پتانسیل) که:

$$\vec{F} = - \bigtriangledown U$$

که در اینجا $\vec{F}$ بردار نیرو است و در فرمول نیوتن $\vec{F} = m\vec{a}$ صدق می‌کند. مقصود از $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ بردار شتاب است و $m\vec{a}$ یک خلاصه نویسی برای $(m_1 a_1, \ldots, m_n a_n)$ می‌باشد. انرژی جنبشی دستگاه را به صورت $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i v_i^2$ تعریف می‌کنیم و $E = U + K$ را انرژی دستگاه می‌نامیم. E تابعی از $(x_1, \ldots, x_n, v_1, \ldots, v_n)$ است. در سیر تحول دستگاه، این $(2n)$ تایی به عنوان تابعی از زمان، t، تغییر می‌کنند. می‌خواهیم ثابت کنیم

$$\frac{dE}{dt} = 0$$

www.ttnar.ir

یعنی E در طی تحول دستگاه ثابت می‌ماند. در واقع باید ثابت کنیم که مشتق ترکیب دو تابع زیر صفر است:

$$t \longrightarrow (x_1, \ldots, x_n, v_1, \ldots, v_n) \longrightarrow E$$

طبق قاعدهٔ زنجیره‌ای داریم:

$$\begin{aligned}
\tfrac{dE}{dt} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial E}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial E}{\partial v_i}\frac{dv_i}{dt} \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-\frac{\partial U}{\partial x_i}) v_i + \sum_{i=1}^{n} (m_i v_i)(a_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-m_i a_i) v_i + \sum_{i=1}^{n} (m_i v_i)(a_i) \\
&= 0
\end{aligned}$$

مثال ۵ (فرمول اویلر). S را زیرمجموعهٔ $\mathbb{R}^n$ متشکل از $(x_1, \ldots, x_n)$ هایی می‌گیریم که همهٔ x_i ها مثبت هستند. تابع $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ را همگون از درجهٔ d می‌نامیم در صورتی که به‌ازای هر $r > 0$ داشته باشیم:

$$f(rx_1, \ldots, rx_n) = r^d f(x_1, \ldots, x_n) \qquad (1)$$

رابطهٔ زیر به فرمول اویلر معروف است:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = df(x_1, \ldots, x_n) \qquad (2)$$

برای اثبات (۱)، از دو طرف (۱) نسبت به r مشتق می‌گیریم. طبق قاعدهٔ زنجیره‌ای داریم:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r}[f(rx_1, \ldots, rx_n)] &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(rx_1, \ldots, rx_n) \cdot \frac{\partial (rx_i)}{\partial r} \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(rx_1, \ldots, rx_n) \\
\frac{\partial}{\partial r}[r^d f(x_1, \ldots, x_n)] &= dr^{d-1} f(x_1, \ldots, x_n)
\end{aligned}$$

www.ttmar.ir

با برابر قرار دادن دو طرف و جایگزینی $r = ۱$ فرمول اویلر به‌دست می‌آید.

www.ttnar.ir

مشتق‌های پاره‌ای مرتبهٔ بالا و چندجمله‌ای تیلور

فرض کنید $S \subset \mathbb{R}^n$، a یک نقطهٔ درونی S است و برای $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$، $y = f(x)$، مشتق پاره‌ای $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ در همهٔ نقاط یک گوی باز حول a تعریف شده است. در این صورت $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ خود یک تابع با مقدار حقیقی است که نقطهٔ a یک نقطهٔ درونی دامنهٔ آن است. بدین ترتیب می‌توان برای تابع $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ وجود مشتق پاره‌ای نسبت به متغیر x_j را در نقطهٔ a مطرح کرد. $(\frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial f}{\partial x_i}))(a)$ را در صورت وجود به نمادهای زیر نمایش می‌دهیم

$$\frac{\partial^{2} y}{\partial x_j \partial x_i}(a) \quad , \quad \frac{\partial^{2} f}{\partial x_j \partial x_i}(a) \quad , \quad D_{ij}f(a) \quad , \quad f_{x_i x_j}(a) \qquad (1)$$

و آن را یک مشتق پاره‌ای مرتبهٔ دوم f در نقطه a می‌نامیم. برای تابع n متغیری $y = f(x_1, \ldots, x_n)$، می‌توان n^2 مشتق پاره‌ای مرتبهٔ دوم در نظر گرفت زیرا که در (۱)، i, j هر یک عدد صحیحی بین ۱ و n هستند. معمولاً به جای $\frac{\partial^{2} y}{\partial x_j \partial x_j}$ می‌نویسیم $\frac{\partial^{2} y}{\partial x_j^{2}}$.

به همین ترتیب، اگر مشتق پاره‌ای مرتبه دوم $\frac{\partial^{2} y}{\partial x_j \partial x_i}$ در یک گوی باز حول a تعریف شده باشد، می‌توان وجود مشتق پاره‌ای مرتبهٔ سوم $\frac{\partial}{\partial x_k}(\frac{\partial^{2} y}{\partial x_j \partial x_i}) = \frac{\partial^{3} y}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i}$ را بررسی نمود، و همین طور برای مشتق‌های پاره‌ای مرتبه‌های بالاتر.

نکتهٔ مهم در مورد مشتق‌های پاره‌ای مرتبهٔ دو به بالا این است که تحت شرایط سهل الوصول، ترتیب مشتقگیری نسبت به متغیرهای مختلف اثری بر نتیجه نهایی ندارد و تنها عامل اثرگذار تعداد دفعاتی است که مشتقگیری نسبت به متغیر خاص صورت گرفته است. قضیهٔ زیر نمونه‌ای از این نوع احکام است:

(۲۶−۱) قضیه. فرض کنید S زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^n$ باشد، a یک نقطهٔ درونی S و $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع به طوری که $\frac{\partial^{2} f}{\partial x_i \partial x_j}$ و $\frac{\partial^{2} y}{\partial x_j \partial x_i}$ هر دو در یک گوی باز حول a تعریف شده و در نقطهٔ a پیوسته

www.ttmar.ir

باشند. در این صورت:

$$\frac{\partial^{۲} f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^{۲} f}{\partial x_j \partial x_i}(a) \qquad (۲)$$

بدیهی است که می‌توان با به‌کارگیری مکرر این قضیه، حکم را به مشتق‌های پاره‌ای مرتبه‌های بالاتر تعمیم داد.

اثبات قضیه. برای سهولت در نوشتن، حالت $n = ۲$ را در نظر می‌گیریم. اثبات حالت کلی عیناً به همین صورت است، کافی است استدلال را به صفحه (x_i, x_j) محدود کنیم. بدین ترتیب نقاط S را به (x, y) و نقطهٔ درونی مورد نظر را به (a, b) نمایش می‌دهیم. اگر $|h|$ و $|k|$ به اندازه کافی کوچک باشند، مستطیل $a \le x \le a + h$، $b \le y \le b + k$ (در صورتی که هر یک از h, k منفی باشد، جهت نامساوی مربوط را معکوس کنید) در درون دامنه تعریف $\frac{\partial^{۲} f}{\partial x_i \partial x_j}$ و $\frac{\partial^{۲} f}{\partial x_j \partial x_i}$ قرار می‌گیرد. از سه تابع کمکی Q، u و v به شرح زیر استفاده می‌کنیم:

$$Q(h, k) = f(a + h, b + k) - f(a + h, b) - f(a, b + k) + f(a, b) \qquad (۳)$$

Q تفاضل مجموع مقدار f در دو رأس مقابل مستطیل و دو رأس مقابل دیگر است.

$$u(x) = f(x, b + k) - f(x, b) \quad (\text{برای هر } k \text{ ثابت}) \qquad (۴)$$

$$v(y) = f(a + h, y) - f(a, y) \quad (\text{برای هر } h \text{ ثابت}) \qquad (۵)$$

بدین ترتیب u و v، به ترتیب، تفاضل f در دو انتهای پاره‌خط‌های قائم و افقی را نمایش می‌دهند. داریم

$$Q(h, k) = u(a + h) - u(a) \qquad (٦)$$

و نیز

$$Q(h, k) = v(b + k) - v(b) \qquad (۷)$$

www.ttnar.ir

طبق قضیهٔ مقدار میانگین یک متغیری، برای u داریم:

$$u(a+h)-u(a)=h\cdot u'(\xi) \qquad (۸)$$

که در آن ξ بین a و $a+h$ است. ضمناً مشتق u طبق (۴) از مشتق‌گیری f نسبت به x به‌دست می‌آید، پس از (۶) و (۸):

$$Q(h,k)=h[\frac{\partial f}{\partial x}(\xi,b+k)-\frac{\partial f}{\partial x}(\xi,b)] \qquad (۹)$$

حال اگر تابع $\frac{\partial f}{\partial x}$ را به عنوان تابعی از متغیر دوم آن در نظر بگیریم، طبق قضیهٔ میانگین یک متغیری داریم:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\xi,b+k)-\frac{\partial f}{\partial x}(\xi,b)=k\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(\xi,\eta) \qquad (۱۰)$$

که در اینجا η بین b و $b+k$ است. پس

$$Q(h,k)=kh\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(\xi,\eta) \qquad (۱۱)$$

حال به همین ترتیب، اگر به جای u، از v استفاده کنیم، نقطه η' بین b و $b+k$، نقطه ξ' بین a و $a+h$ به‌دست می‌آیند که:

$$Q(h,k)=kh\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\xi',\eta') \qquad (۱۲)$$

از مقایسه (۱۱) و (۱۲) نتیجه می‌شود که

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\xi',\eta')=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(\xi,\eta) \qquad (۱۳)$$

توجه کنید که (ξ,η) و (ξ',η') دو نقطه در مستطیل شکل ۱ هستند، پس وقتی $(h,k)\longrightarrow(0,0)$، هر دو نقطه به (a,b) میل می‌کنند. از پیوستگی $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ و $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ در (a,b) نتیجه می‌شود که:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(a,b)$$

www.ttnar.ir

چنان که حکم بود. ■

مثال ۱. برای $f:\mathbb{R}^{۲}\longrightarrow\mathbb{R}$، $f(x,y)=xe^{y}-y^{۲}x^{۳}$، مشتق‌های پاره‌ای مرتبهٔ دوم را محاسبه کنید.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=e^{y}-۳x^{۲}y^{۲} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}=xe^{y}-۲yx^{۳}$$

$$\frac{\partial^{۲} f}{\partial x^{۲}}=-۶xy^{۲} \qquad , \quad \frac{\partial^{۲} f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^{۲} f}{\partial y\partial x}=e^{y}-۶x^{۲}y \quad , \quad \frac{\partial^{۲} f}{\partial y^{۲}}=xe^{y}-۲x^{۳}$$

مثال ۲. کلیه مشتق‌های پاره‌ای از همه مراتب $f(x,y)=ye^{x}$ را محاسبه کنید.

از عبارات بالا مشخص است که همه مشتق‌های پاره‌ای وجود دارند و پیوسته خواهند بود، بنابراین ترتیب مشتقگیری اهمیتی ندارد. اگر از عبارت فوق یک بار نسبت به y مشتقگیری شود، متغیر y حذف می‌شود، پس می‌توان نوشت

$$\frac{\partial^{k+l} f}{\partial x^{k}\partial y^{l}}=\circ \quad \text{اگر} \quad l\geq ۲$$

همچنین نتایج زیر نیز به‌دست می‌آیند:

$$\frac{\partial^{k} f}{\partial x^{k}}=ye^{x} \quad , \quad \frac{\partial^{k+۱} f}{\partial x^{k}\partial y}=e^{x}$$

یکی از کاربردهای مهم مشتقهای مرتبهٔ بالا ارائه تقریبهای مرتبهٔ بالا برای تابع‌ها به‌صورت چندجمله‌ای تیلور است. در همین رابطه آزمون مشتق دوم برای تعیین نوع نقاط بحرانی (یعنی نقاطی که در آن مشتق صفر است) و تعیین جهت تحدب نمودار یک تابع را نیز باید نام برد. مشابه همین ملاحظات را می‌توان تابعهای چندمتغیری نیز مطرح نمود. برای این منظور نخست حالت یک متغیری چندجمله‌ای‌های تیلور و خواص آنها را یادآوری می‌کنیم. فرض کنید I یک بازه در $\mathbb{R}$، a یک نقطهٔ درونی I، و $f:I\longrightarrow\mathbb{R}$ تابعی باشد که در نقطهٔ a مشتق‌پذیر است. تقریب خطی f در نقطهٔ a، چندجمله‌ای درجه ۱ زیر است:

$$f(a)+f'(a)\cdot(x-a) \qquad (۱۴)$$

این چندجمله‌ای را به $T_{۱}(x)$ نمایش می‌دهیم. هر یک از دو ویژگی زیر $T_{۱}(x)$ را از میان چندجمله‌ای‌های درجه یک به طور منحصر به فرد متمایز می‌کنند:

الف) $T_1(x)$ یگانه چندجمله‌ای درجه یک است که $T_1(a) = f(a)$ و $T'_1(a) = f'(a)$.

ب) $T_1(x)$ یگانه چندجمله‌ای درجه یک است که $T_1(a) = f(a)$ و $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-T_1(x)}{|x-a|} = 0$.

قبلاً دیده‌ایم که (ب) را می‌توان به این صورت تعبیر کرد که $T_1(x)$ "نزدیک‌ترین تقریب درجه یک" به f حول $x = a$ است، و چندجمله‌ای‌های تیلور این وضعیت را به تقریب‌های درجهٔ بالاتر تعمیم می‌دهند. اگر f در نقطهٔ a دارای مشتق تا مرتبهٔ p (با شمول درجهٔ p) باشد، چندجمله‌ای تیلور درجه p تابع f حول a به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$T_p(x) = f(a) + f'(a)\cdot(x-a) + \cdots + \frac{1}{p!}f^{(p)}(a)\cdot(x-a)^p$$

به طور کلی می‌توان انتظار داشت که با بالا بردن درجه، تقریب‌های بهتری از تابع f به‌دست می‌آید زیرا که برای $q < p$، می‌توان هر چندجمله‌ای درجه q را یک چندجمله‌ای درجه p (با ضرایب صفر پس از درجهٔ q) فرض کرد و بدین ترتیب "بهترین تقریب درجهٔ q" نمی‌تواند اکیداً بهتر از "بهترین تقریب درجهٔ p" باشد. در واقع مشابه خواص (الف) و (ب) برای $T_p(x)$ نیز برقرار است:

الف) $T_p(x)$ یگانه چندجمله‌ای درجه p است که $T_p(a) = f(a)$، $T'_p(a) = f'(a)$، ...، $T_p^{(p)}(a) = f^{(p)}(a)$.

ب) $T_p(x)$ یگانه چندجمله‌ای درجه p است که $T_p(a) = f(a)$ و $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-T_p(x)}{|x-a|^p} = 0$.

بدین ترتیب مشتقات f تا مرتبهٔ p در نقطهٔ a با مشتقات متناظر f برابرند و این امر، طبق (ب)، تقریبی آن چنان نزدیک از f حول a می‌دهد که تفاضل $f(x) - T_p(x)$ سریعتر از $|x-a|^p$ به صفر میل می‌کند وقتی $x \to a$. در مورد دقت این تقریب، راه‌های گوناگونی برای تخمین خطا وجود دارد. یکی از معمولترین روش‌ها، استفاده از "باقیماندهٔ لاگرانژ" است. طبق این روش، اگر f در بازهٔ بین a و x، دارای مشتق مرتبهٔ $(p+1)$ باشد، آنگاه نقطه‌ای ξ بین a و x وجود دارد که:

$$f(x) - T_p(x) = \frac{1}{(p+1)!}f^{(p+1)}(\xi)\cdot(x-a)^{p+1} \qquad (15)$$

www.tutar.ir

بدین ترتیب، مثلاً دقت تقریب خطی به قدرمطلق مشتق دوم تابع وابسته است. چنانچه مشتق مرتبهٔ دوم دارای قدرمطلق کوچک باشد، میزان تحدب یا تقعر تابع (به انحناء به انحراف از خط راست) کوچک است و نمودار تابع نزدیک به تقریب خطی می‌ماند، ولی اگر قدرمطلق مشتق دوم بزرگ باشد، نمودار تابع به سرعت از تقریب خطی دور می‌شود.

هدف ما در باقیماندهٔ این بخش این است که ملاحظات بالا را به تابع‌های چند متغیری تعمیم دهیم. فرض کنید S زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^n$، a یک نقطهٔ درونی S و $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع باشد. چون a یک نقطهٔ درونی S است، اگر نقطهٔ x در S به اندازه کافی نزدیک به a باشد، پاره‌خط واصل بین a و x به تمامی در S قرار می‌گیرد. این پاره‌خط را به صورت $a + t(x - a)$، $0 \leq t \leq 1$، پرمایش می‌کنیم. گاهی به جای $x - a$ می‌نویسیم h، پس $h = (h_1, \ldots, h_n) = (x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n)$. مقدار تابع f روی پاره خطی بالا را به $\varphi(t)$ نمایش می‌دهیم، پس:

$$\begin{cases} \varphi(t) = f(a + th) \\ \varphi(0) = f(a), \varphi(1) = f(x) \end{cases} \tag{16}$$

اگر f در همهٔ نقاط پاره‌خط $a + th$ مشتق‌پذیر باشد، طبق قاعدهٔ زنجیره‌ای داریم:

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= Df(a + th) \cdot h \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + th) \cdot (x_i - a_i) \end{aligned} \tag{17}$$

پس $\varphi'(0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot (x_i - a_i)$ و چندجمله‌ای تیلور φ به‌ازای $t = 1$ برابر می‌شود با:

$$\varphi(0) + \varphi'(0) \cdot (1 - 0) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot (x_i - a_i) \tag{18}$$

عبارت سمت راست همان چندجمله‌ای درجه یک نسبت به $x_1, \ldots, x_n$ است که به عنوان تقریب درجه یک تابع f در نقطهٔ a می‌شناسیم. به همین ترتیب، فرض می‌کنیم هر یک از مشتقات پاره‌ای $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ خود تابعی مشتق‌پذیر در طول پاره‌خط $a + th$ است (مثلاً با این فرض که مشتقات پاره‌ای مرتبه دوم f

پیوسته‌اند) و با مشتق‌گیری مجدد از (۵) داریم:

$$\begin{aligned} \varphi''(t) &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a+th)\cdot h_j\right)(x_i-a_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a+th)\cdot(x_j-a_j)(x_i-a_i) \end{aligned} \tag{19}$$

پس چندجمله‌ای تیلور درجه دوم φ به‌ازای $t = 1$ برابر می‌شود با:

$$\begin{aligned} &\varphi(0)+\varphi'(0)(1-0)+\frac{1}{2!}\varphi''(0)(1-0)^2 \\ &= f(a)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\cdot(x_i-a_i)+\frac{1}{2!}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\cdot(x_i-a_i)(x_j-a_j) \end{aligned} \tag{20}$$

توجه کنید که این عبارت یک چندجمله‌ای درجه دوم نسبت به $x_1,\ldots,x_n$ است. طرف راست (۷) را چندجمله‌ای تیلور درجه دوم تابع f حول a می‌نامیم. به طور کلی، اگر f دارای مشتقات پاره‌ای پیوسته از مرتبهٔ pـ ام باشد، با مشتق‌گیری مکرر می‌توانیم چندجمله‌ای تیلور درجهٔ p تابع یک متغیری φ را تشکیل دهیم. مقدار این چندجمله‌ای به‌ازای $t = 1$، چندجمله‌ای تیلور درجه p تابع f حول a خوانده می‌شود. جزء ثابت این چندجمله‌ای، $f(a)$؛ جزء درجه یک (نسبت به $x_1 - a_1$، ... ، $x_n - a_n$) برابر $\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x_i-a_i)$؛ جزء درجه دو برابر $\frac{1}{2!}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\cdot(x_i-a_i)(x_j-a_j)$ و ...، تعریف می‌شوند. توجه کنید که جزء درجه k از مجموع جملات به شکل زیر تشکیل شده است:

$$\left(\frac{1}{k!}\right)\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_k}}(a)\cdot(x_{i_1}-a_{i_1})\cdots(x_{i_k}-a_{i_k}) \tag{21}$$

(تکرار اندیس در بین i_j ها ممکن است) که در آن هر i_j همهٔ مقادیر ممکن بین ۱ تا n را اتخاذ می‌کند. اگر چندجمله‌ای تیلور درجه p تابع f را به $T_p(x_1,\ldots,x_n)$ نمایش دهیم، از (۱) نتیجه می‌شود که برای $k = p$:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_k}}(a)=\frac{\partial^k T_p}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_k}}(a) \tag{22}$$

(چرا؟)، یعنی ویژگی مشابه (الف) حالت یک متغیری همچنان برقرار است.

www.ttran.ir

قبل از ادامه بحث، برای مأنوس شدن بیشتر با شکل چندجمله‌ای تیلور، چندجمله‌ای تیلور یک تابع دو متغیری را به طور صریح محاسبه می‌کنیم. به جای $(x_۱, x_۲)$ می‌نویسیم (x, y) و به جای $(a_۱, a_۲)$ می‌نویسیم (a, b). اجزاء زیر به‌دست می آیند:

جزء درجه صفر: $f(a,b)$

جزء درجه ۱: $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\cdot(x-a)+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\cdot(y-b)$

جزء درجه ۲: $\frac{۱}{۲!}[\frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲}(a,b)\cdot(x-a)^۲+\frac{\partial^۲ f}{\partial y\partial x}(a,b)\cdot(y-b)(x-a)+\frac{\partial^۲ f}{\partial x\partial y}(a,b)\cdot(x-a)(y-b)+\frac{\partial^۲ f}{\partial y^۲}(a,b)\cdot(y-b)^۲]$

اگر مشتقات پاره‌ای مرتبهٔ دوم f پیوسته باشند، نتیجه می‌شود که $\frac{\partial^۲ f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^۲ f}{\partial y\partial x}$، پس جزء درجه دوم به شکل زیر خلاصه می‌شود:

$$\frac{۱}{۲!}[\frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲}(a,b)\cdot(x-a)^۲+۲\frac{\partial^۲ f}{\partial x\partial y}(a,b)\cdot(x-a)(y-b)+\frac{\partial^۲ f}{\partial y^۲}(a,b)\cdot(y-b)^۲]$$

به همین ترتیب اگر مشتقات پاره‌ای مرتبهٔ سوم f پیوسته باشند، به جای ۸ نوع جمله ممکن درجهٔ ۳، فقط چهارنوع به صورت زیر ظاهر می‌شوند:

جزء درجه ۳: $\frac{۱}{۳!}[\frac{\partial^۳ f}{\partial x^۳}(a,b)\cdot(x-a)^۳+۳\frac{\partial^۳ f}{\partial x^۲\partial y}(a,b)\cdot(x-a)^۲(y-b)+۳\frac{\partial^۳ f}{\partial x\partial y^۲}(a,b)\cdot(x-a)(y-b)^۲+\frac{\partial^۳ f}{\partial y^۳}(a,b)\cdot(y-b)^۳]$

ضرایب اجزاء درجه ۲ و درجه ۳ که به ترتیب $(۱,۲,۱)$ و $(۱,۳,۳,۱)$ هستند دقیقاً ضرایب بسط دوجمله‌ای $(A+B)^۲$ و $(A+B)^۳$ می‌باشند. در واقع با مشتق‌گیری مکرر و استقراء به سادگی دیده می‌شود که جزء درجه k نیز به همین شکل عمومی است، یعنی:

$$\frac{۱}{k!}[\sum_{i=۰}^{k}\binom{k}{i}\frac{\partial^k f}{\partial x^i\partial y^{k-i}}(a,b)\cdot(x-a)^i(y-b)^{k-i}] \qquad (۲۳)$$

که در اینجا $\binom{k}{i}=\frac{k!}{i!(k-i)!}$. برای به خاطر سپردن (۱۰) بیان نمادین زیر می‌تواند مفید باشد:

$$\frac{۱}{k!}[(x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}]^k\cdot f \quad (a,b) \qquad (۲۴)$$

در حالت n متغیری نیز، ضرایب برابر ضرایب بسط توان k یک n جمله‌ای، یعنی ضرایب

www.tinar.ir

$(A_1 + \cdots + A_n)^k$ می‌شوند و می‌توان جزء درجه k را به شکل نمادین زیر نمایش داد:

$$\frac{1}{k!}[(x_1 - a_1)\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + (x_n - a_n)\frac{\partial}{\partial x_n}]^k \cdot f \quad (a) \tag{۲۵}$$

گاهی $(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n})$ را به "بردار نمادین" ∂ و $(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$ را به Δ نمایش داده و عبارت داخل کروشه را به عنوان ضرب داخلی نمادین این دو "بردار" در نظر می‌گیرند که در این صورت (۱۲) به شکل زیر در می‌آید:

$$\frac{1}{k!}(\Delta \cdot \partial)^k f \quad (a) \tag{۲۶}$$

بدین ترتیب چندجمله‌ای تیلور درجه p تابع f را می‌توان به شکل زیر نمایش داد:

$$f(a) + \frac{1}{1!}(\Delta \cdot \partial) f(a) + \frac{1}{2!}(\Delta \cdot \partial)^2 f(a) + \cdots + \frac{1}{p!}(\Delta \cdot \partial)^p f(a) \tag{۲۷}$$

شکل فوق مستقل از تعداد متغیرهاست. قبل از پرداختن به خواص و کاربردهای چندجمله‌ای تیلور، یکی دومثال از محاسبهٔ چندجمله‌ای تیلور را مطرح می‌کنیم.

مثال ۱ چندجمله‌ای تیلور درجه ۲ تابع $f(x, y) = \sqrt[3]{x^2 - y}$ را حول $(3, 1)$ محاسبه می‌کنیم. تابع $\sqrt[3]{\ }$ جز در صفر از همه مراتب مشتق دارد و عبارت $x^2 - y$ نسبت به (x, y) از هر مرتبه مشتق‌پذیر است، پس در نقطهٔ $(3, 1)$ که زیر $\sqrt[3]{\ }$ صفر نمی‌شود می‌توان چندجمله‌ای تیلور از هر مرتبه را در نظر گرفت. در اینجا:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{3}(x^2 - y)^{-\frac{2}{3}} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{3}(x^2 - y)^{-\frac{2}{3}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2}{3}(x^2 - y)^{-\frac{2}{3}} - \frac{8x^2}{9}(x^2 - y)^{-\frac{5}{3}} \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{4x}{9}(x^2 - y)^{-\frac{5}{3}} \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{2}{9}(x^2 - y)^{-\frac{5}{3}}$$

پس چندجمله‌ای تیلور درجه ۲ عبارت است از:

$$f(3,1)+\frac{\partial f}{\partial x}(3,1)\cdot(x-3)+\frac{\partial f}{\partial y}(3,1)\cdot(y-1)+\frac{1}{2!}[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(3,1)(x-3)^2$$
$$+2\,\tfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(3,1)(x-3)(y-1)+\tfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(3,1)(y-1)^2]$$

$$=2+\frac{1}{2}(x-3)-\frac{1}{12}(y-1)+\frac{1}{2!}[(-\frac{1}{12})(x-3)^2+\frac{1}{12}(x-3)(y-1)-\frac{1}{144}(y-1)^2]$$

$$=2+\frac{1}{2}(x-3)-\frac{1}{12}(y-1)-\frac{1}{24}(x-3)^2+\frac{1}{24}(x-3)(y-1)-\frac{1}{288}(y-1)^2$$

<u>مثال ۲</u> چندجمله‌ای تیلور تابع $f(x,y,z)=x^2y^3-xz$ از همهٔ درجات را حول $(1,1,0)$ محاسبه می‌کنیم. نتیجه در هر حالت باید یک چندجمله‌ای برحسب $(x-1)$، $(y-1)$ و $z=(z-0)$ باشد. در عبارت داده شده برای f، به جای x، $(x-1)+1$، و به جای y، $(y-1)+1$ قرار می‌دهیم:

$$f(x,y,z)=((x-1)+1)^2((y-1)+1)^3-((x-1)+1)z$$

و جملات را به ترتیب توان برحسب $(x-1)$، $(y-1)$ و z مرتب می‌کنیم:

جزء ثابت:	1
جزء درجه ۱:	$2(x-1)+2(y-1)-z$
جزء درجه ۲:	$(x-1)^2+3(y-1)^2+6(x-1)(y-1)-(x-1)z$
جزء درجه ۳:	$(y-1)^3+3(x-1)^2(y-1)+6(x-1)(y-1)^2$
جزء درجه ۴:	$3(x-1)^2(y-1)^2+2(x-1)(y-1)^3$
جزء درجه ۵:	$(x-1)^2(y-1)^3$

برای به‌دست آوردن چندجمله‌ای تیلور درجه k حول $(1,1,0)$ اجزاء تا درجهٔ k را با هم جمع می‌کنیم. بدین ترتیب چندجمله‌ای‌های تیلور درجه ۵ به بالا همه برابرند. توجیه این روش یگانگی چندجمله‌ای تیلور است. در واقع طبق (۹) ضریب جملهٔ $(x_{i_1}-a_{i_1})\cdots(x_{i_k}-a_{i_k})$ برابر است با $\frac{1}{k!}\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_k}}(a)$. حال اگر از

$$f(x,y,z)=1+[2(x-1)+2(y-1)-z]+\cdots+[(x-1)^{(}y-1)^3]$$

www.ttnar.ir

از هر مرتبه مشتق گرفته و $(x,y,z)=(1,1,0)$ را جایگزین می‌کنیم ضرایب بالا به‌دست می‌آیند.

اکنون به ذکر پاره‌ای از خواص چندجمله‌ای تیلور می‌پردازیم. این خواص به سادگی از خواص مشابه در حالت یک متغیری به یاری تابع کمکی $\varphi(t)=f(a+th)$ که در آغاز این جلسه ذکر شد به‌دست می‌آیند. ویژگی مشابه (الف) در (۹) آمد. برای (ب) توجه کنید که:

$$f(a_1+th_1,\ldots,a_n+th_n)-T_p(a_1+th_1,\ldots,a_n+th_n)=\varphi(t)-[\varphi(0)+\varphi'(0)t+\cdots+\frac{\varphi^{(p)}(0)}{p!}t^p]$$

عبارت طرف راست وقتی بر $|t|^p$ تقسیم شود، بنابر ویژگی چندجمله‌ای تیلور یک متغیری به صفر میل می‌کند وقتی $t\longrightarrow 0$، از طرفی دیگر با قرار دادن $x=a+th$، می‌بینیم که $x\longrightarrow a$ معادل $t\longrightarrow 0$ است. بالاخره نوعی تخمین خطا به شکل باقیماندهٔ لاگرانژ را بررسی می‌کنیم. برای $t=1$ در عبارت بالا داریم

$$f(x)-T_p(x)=\varphi(1)-[\varphi(0)+\varphi'(0)\cdot 1+\cdots+\frac{\varphi^{(p)}(0)}{p!}\cdot 1^p]$$

فرض می‌کنیم f دارای مشتق‌های پاره‌ای مرتبهٔ $(p+1)$ پیوسته باشد که در نتیجه $\varphi(t)=f(a+th)$، $(p+1)$ بار مشتق‌پذیر خواهد شد و با استفاده از باقیماندهٔ لاگرانژ در حالت یک متغیری عددی $t_\circ$ بین 0 و 1 وجود دارد که:

$$\varphi(1)-[\varphi(0)+\varphi'(0)\cdot 1+\cdots+\frac{\varphi^{(p)}(0)}{p!}\cdot 1^p]=\frac{\varphi^{(p+1)}(t_\circ)}{(p+1)!}\cdot 1^{p+1}$$

اگر نقطهٔ $a+t_\circ h$ را ξ بنامیم، عبارت طرف راست مشابه جزء درجه $(p+1)$ چندجمله‌ای تیلور به شکل زیر محاسبه می‌شود:

$$\frac{1}{(p+1)!}(\Delta\cdot\partial)^{p+1}\cdot f\quad(\xi) \tag{۲۸}$$

عبارت فوق را <u>باقیماندهٔ لاگرانژ</u> در حالت n متغیری می‌نامند. مقدار آن خطای تقریب به وسیلهٔ چندجمله‌ای تیلور درجهٔ p را نمایش می‌دهد و همان طور که انتظار می‌رود به مشتق‌های پاره‌ای مرتبهٔ $(p+1)$ (در یک نقطهٔ نامشخص روی پاره‌خط واصل از a به x) وابسته است. برای به کار گرفتن (۲۸) باید کرانی برای مشتق‌های پاره‌ای مرتبهٔ $(p+1)$ در دست داشت.

www.ttnar.ir

مثال ۳ مقداری تقریبی برای $\sqrt[۳]{(۳/۱)^{۲}-(۰/۹)}$ از روش تقریب خطی به‌دست آورید و خطا را تخمین بزنید. در اینجا تابع $f(x,y)=\sqrt[۳]{x^{۲}-y}$ که قبلاً بررسی شد به ذهن می‌رسد. چون $f(۳,۱)=۲$ و $(۳/۱,۰/۹)$ نزدیک $(۳,۱)$ است، از تقریب خطی f حول $(۳,۱)$ استفاده می‌کنیم:

$$f(۳+۰/۱,۱-۰/۱)\sim ۲+\frac{۱}{۲}(۰/۱)-\frac{۱}{۱۲}(-۰/۱)=۲+\frac{۱}{۲۰}+\frac{۱}{۱۲۰}=۲/۰۵۸\overline{۳}$$

با استفاده از باقیمانده لاگرانژ خطای این تقریب را تخمین می‌زنیم. برای نقطه‌ای (ξ,η) بین $(۳,۱)$ و $(۳/۱,۰/۹)$ خطا برابر است با:

$$\frac{۱}{۲!}[\frac{\partial^{۲}f}{\partial x^{۲}}(\xi,\eta)\cdot(۰/۱)^{۲}+۲\frac{\partial^{۲}f}{\partial x\partial y}(\xi,\eta)\cdot(۰/۱)(-۰/۱)+\frac{\partial^{۲}f}{\partial y^{۲}}(\xi,\eta)\cdot(-۰/۱)^{۲}]$$

طبق محاسبات مشتق دوم در مثال ۱:

$$|\frac{\partial^{۲}f}{\partial x^{۲}}(\xi,\eta)|\leq(\frac{۲}{۳})\frac{۱}{\sqrt[۳]{(\xi^{۲}-\eta)^{۲}}}+(\frac{۸}{۹})\frac{\xi^{۲}}{\sqrt[۳]{(\xi^{۲}-\eta)^{۵}}}$$

ماکزیمم عبارت طرف راست وقتی حاصل می‌شود که مخرج کوچکترین مقدار ممکن را داشته باشد و در پاره‌خط واصل بین $(۳,۱)$ و $(۳/۱,۰/۹)$ این وقتی حاصل می‌شود که $\xi=۳$ و $\eta=۱$، پس

$$|\frac{\partial^{۲}f}{\partial x^{۲}}(\xi,\eta)|\leq\frac{۱}{۶}+(\frac{۸}{۹})\frac{۱۰}{۳۲}=\frac{۴}{۹}$$

(توجه کنید که برای $\xi^{۲}$ کران بالایی $۱۰>(۳/۱)^{۲}$ در نظر گرفته شده است.) به همین ترتیب:

$$|\frac{\partial^{۲}f}{\partial x\partial y}(\xi,\eta)|\leq(\frac{۴}{۹})\frac{۳/۱}{۳۲}=\frac{۱}{۸}\times\frac{۳/۱}{۹}<\frac{۳/۲}{۸\times۹}=\frac{۴}{۹۰}$$

$$|\frac{\partial^{۲}f}{\partial y^{۲}}(\xi,\eta)|\leq(\frac{۲}{۹})\frac{۱}{۳۲}=\frac{۱}{۱۴۴}$$

پس

$$|\text{خطا}|\leq\frac{۱}{۲۰۰}(\frac{۴}{۹}+\frac{۸}{۹۰}+\frac{۱}{۱۴۴})=\frac{۱۱۶۲}{۲۰۰\times۱۴۴۰}<\frac{۱}{۲۰۰}=۵\times۱۰^{-۳}$$

www.ftnar.ir

پس تقریب به‌دست آمده حداقل تا دو رقم اعشار درست است. محاسبه با ماشین حساب $\sqrt[۳]{(۳/۱)^{۲} - (۰/۹)}$ را ۲/۰۵۷۴۹۷۸ می‌دهد که با این نتایج سازگار است.

در اینجا باید ذکر کرد که روش‌های دیگری به جز باقیماندهٔ لاگرانژ برای تخمین خطا وجود دارد. از جمله، روش "باقیمانده انتگرال" که در آن به جای استفاده از مشتق‌های مرتبهٔ $(p + ۱)$ در یک نقطهٔ نامشخص، از نوعی میانگین موزون مشتق‌های مرتبهٔ $(p + ۱)$ در سراسر پاره‌خط واصل میان a و x استفاده می‌شود.

در پایان مختصراً به سری تیلور اشاره می‌کنیم. اگر تابع f در نقطهٔ a (یک نقطه درونی زیرمجموعهٔ S از $\mathbb{R}^n$) دارای مشتق‌های پاره‌ای از همه مراتب باشد، می‌توان سری تیلور آن حول a را به صورت زیر تشکیل داد:

$$f(a) + \sum_{i=۰}^{\infty} \frac{۱}{i!}((\Delta \cdot \partial)^i f)(a)$$

موضوع مهم در اینجا، مانند حالت یک متغیری، وجود عددی $\rho > ۰$ است که در گوی شعاع ρ حول a، یعنی به‌ازای x های دامنه که $|x - a| < \rho$، سری بالا به مقدار تابع f میل کند. چنین $\rho > ۰$ ممکن است وجود داشته باشد یا نباشد. مانند حالت یک متغیری، اگر بتوانیم نشان دهیم که باقیماندهٔ لاگرانژ (یا هر صورت دیگر باقیمانده)، به‌ازای $|x - a| < \rho$، به صفر میل می‌کند وقتی $p \longrightarrow +\infty$، آنگاه همگرایی سری تیلور ثابت می‌شود.

نقاط بحرانی

طبق معمول S را زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^n$، a را یک نقطهٔ درونی S، و $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ را یک تابع دارای مشتق‌های پاره‌ای مرتبهٔ اول پیوسته می‌گیریم. در این بخش به بررسی نقاط درونی a که در آن $\nabla f(a) = \underline{0}$ می‌پردازیم. این نقاط را نقاط بحرانی تابع f می‌نامیم. با ذکر تعدادی مثال بحث را آغاز می‌کنیم.

مثال ۱ (نقطهٔ می‌نیمم منزوی) f را به صورت $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$، $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + \cdots + x_n^2$ در نظر می‌گیریم. $\nabla f(a) = (2x_1, \ldots, 2x_n)$ و $(0, \ldots, 0)$ تنها نقطهٔ بحرانی f است. تابع f در این نقطه صفر است و در سایر نقاط $\mathbb{R}^n$ مقدار مثبت دارد، پس $(0, \ldots, 0)$ مینیمم تابع f است. نمودار تابع f در حالت $n = 2$ همراه با مجموعه‌های تراز در شکل ۱ نمایش داده شده است.

مثال ۲ (نقطهٔ ماکسیمم منزوی) اگر $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ را به صورت $f(x_1, \ldots, x_n) = -\sum_{i=1}^n x_i^2$ تعریف کنیم، $(0, \ldots, 0)$ تنها نقطهٔ بحرانی و ماکزیمم تابع خواهد بود (شکل ۲).

در واقع هر نقطه ماکسیمم یا مینیمم موضعی که نقطه درونی دامنه تابع بوده و تابع در آن نقطه مشتق‌پذیر باشد لزوماً بحرانی است. دلیل سادهٔ این موضوع این است که اگر دامنهٔ f را به خط راست گذرا از a به موازات محور x_i محدود کنیم f روی این دامنه نیز ماکسیمم یا مینیمم موضعی در نقطهٔ a خواهد داشت، پس $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$. در واقع استدلال نشان می‌دهد که اگر تحدید f به خطوط گذرا به موازات محورها ماکسیمم موضعی یا مینیمم موضعی باشد، نقطه a بحرانی است.

مثال ۳ (نقطهٔ زینی ساده) $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ را به صورت $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^k x_i^2 - \sum_{i=k+1}^n x_i^2$ تعریف می‌کنیم. مجدداً $\underline{0} = (0, \ldots, 0)$ تنها نقطهٔ بحرانی است. اگر تابع f به محورهای $x_1, \ldots, x_k$ محدود شود، $\underline{0}$ یک نقطهٔ مینیمم روی این محورها خواهد بود ولی تحدید f به هر یک از

www.ttmar.ir

محورهای $x_{k+۱},\dots,x_n$ در نقطهٔ $\underline{۰}$ یک ماکسیمم دارد. ساده‌ترین نقطهٔ زینی در حالت $n = ۲$ برای $f(x,y) = x^۲ - y^۲$ در $(۰,۰)$ مشاهده می‌شود. در شکل ۳ نمودار این تابع و مجموعه‌های تراز آن نمایش داده شده‌اند.

<u>مثال ۴</u> $f : \mathbb{R}^۲ \longrightarrow \mathbb{R}$ به صورت $f(x,y) = x^۲$ تعریف شده است. $\nabla f(x,y) = (۲x,۰)$ که نشان می‌دهد f در سراسر محور y بحرانی است. مقدار تابع در همه این نقاط صفر است و در سایر نقاط مثبت. مجموعهٔ تراز $f(x,y) = c$ به‌ازای $c > ۰$ از دو خط راست $x = \pm\sqrt{c}$ تشکیل شده است که برای $c = ۰$ دو خط بر هم منطبق می‌شوند. (شکل ۴)

توجه کنید که برای یک تابع دو متغیری $f(x,y)$، صفحه مماس بر نمودار تابع در یک نقطهٔ بحرانی افقی است. در مورد ماکزیمم و مینیمم منزوی این صفحه در یک طرف نمودار تابع قرار می‌گیرد، برای نقاط زینی بخشی از نمودار در یک طرف و بخشی دیگر در طرف دیگر قرار می‌گیرد. در مثال ۴ بالا صفحه مماس و نمودار در یک خط راست اشتراک دارند.

<u>مثال ۵</u> $f : \mathbb{R}^۲ \longrightarrow \mathbb{R}$ را به صورت $f(x,y) = x^۲ + y^۳$ در نظر می‌گیریم. مجدداً تنها نقطهٔ بحرانی، نقطهٔ $\underline{۰}$ است. در اینجا روی محور x، f یک مینیمم در $\underline{۰}$ دارد و روی محور y، یک نقطهٔ عطف در همان نقطه. نمودار تابع در امتداد سه نیمخط از محورهای مختصات با دور شدن از $\underline{۰}$ صعودی است و در امتداد نیمخط چهارم با دور شدن از $\underline{۰}$ نزولی (شکل ۵).

نمودار تابع‌های مثال‌های ۱—۵ و مجموعه‌های تراز آنها

<u>مثال ٦</u> (زین میمون) تابع $f : \mathbb{R}^۲ \longrightarrow \mathbb{R}$ را در نظر بگیرید که به صورت $f(x,y) = x^۳ - ۳xy^۲$ تعریف شده است. داریم $\nabla f(x,y) = (۳x^۲ - ۳y^۲, -٦xy)$ و $(۰,۰)$ تنها نقطهٔ بحرانی است. توجه کنید که عبارت f به صورت زیر تجزیه می‌شود:

$$f(x,y) = x(x - \sqrt{۳}y)(x + \sqrt{۳}y)$$

پس مجموعهٔ تراز $f(x,y) = ۰$ از اجتماع سه خط متقاطع $x = ۰$، $x = \sqrt{۳}y$ و $x = -\sqrt{۳}y$ تشکیل شده است. این سه خط صفحه xy را به ٦ ناحیه تقسیم می‌کنند (شکل ٦) که علامت f روی هر یک

نمایش داده شده است. برای $c > ۰$ کوچک یک مجموعه تراز نمونه در شکل ۶ رسم شده است که یک خم دارای سه بخش (شاخه) است. برای $c < ۰$ نیز شکل مشابهی در سه بخش دیگر صفحه مشاهده می‌شود. نمودار این تابع روی سه نیمخط $\theta = ۰, \frac{۲\pi}{۳}, \frac{۴\pi}{۳}$ با دور شدن از $\underline{۰}$ صعودی و روی سه نیمخط $\theta = \frac{\pi}{۳}, \pi, \frac{۵\pi}{۳}$ با دور شدن از $\underline{۰}$ نزولی است.

شکل ۶

مثال‌های بالا نشان می‌دهند که تنوع رفتار تابع‌ها حول یک نقطهٔ بحرانی حتی در حالت دو بعدی به مراتب گسترده‌تر از حالت یک بعدی است. هدف بعدی ما ارائه نوعی "آزمون مشتق دوم" است که می‌تواند مانند آزمون مشتق دوم یک متغیری در تشخیص ماکسیمم و مینیمم موضعی یا نقاط زینی ساده می‌تواند مؤثر واقع شود. فرض کنید برای تابع $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$، S: زیرمجموعهٔ $\mathbb{R}^n$، نقطهٔ درونی a از S یک نقطهٔ بحرانی است و f در یک گوی باز حول a دارای مشتق‌های پاره‌ای مرتبهٔ دوم پیوسته است. چون مشتق‌های پاره‌ای مرتبهٔ اول در نقطهٔ a صفر هستند، قضیهٔ تیلور با باقیماندهٔ لاگرانژ به صورت زیر در می آید:

$$f(x) - f(a) = \frac{۱}{۲!} \sum_{i,j=۱}^{n} \frac{\partial^۲ f}{\partial x_i \partial x_j}(\xi) \cdot (x_i - a_i)(x_j - a_j) \qquad (۱)$$

که در اینجا ξ نقطه‌ای روی پاره‌خط واصل از a به x است. $\frac{\partial^۲ f}{\partial x_l \partial x_j}(\xi)$ را A_{ij} و $x_i - a_i$ را X_i می‌نامیم و عبارت زیر را در نظر می‌گیریم:

$$X = (X_۱, \ldots, X_n) \quad , \quad Q(X) = \sum_{i,j=۱}^{n} A_{ij} X_i X_j \qquad (۲)$$

اگر عبارت درجه دوم همگون $Q(X)$ طوری باشد که برای $X \neq \underline{۰}$ و $|X|$ کوچک، $Q(X) > ۰$، از (۱) نتیجه می‌شود که f در نقطهٔ a یک مینیمم موضعی اکید دارد، و نیز اگر برای $|X|$ کوچک $X \neq \underline{۰}$، $Q(X)$ منفی باشد، نتیجه می‌شود که a یک نقطهٔ ماکسیمم موضعی اکید برای f است. هرگاه برای مقادیر کوچک و ناصفر $|X|$، $Q(X)$ هم مقادیر مثبت و هم مقادیر منفی بپذیرد، به همین ترتیب می‌بینیم که a نه یک نقطه مینیمم موضعی و نه یک نقطهٔ ماکسیمم موضعی است. بدین ترتیب چنانچه

www.ttmar.ir

علامت‌یابی $Q(X)$ میسر باشد، می‌توان در مورد ماهیت نقطهٔ بحرانی a حکم کرد. برای $n = 2$ یک چنین علامت‌یابی بر پایه جبر مقدماتی در دسترس است. در اینجا:

$$Q(X) = A_{11}X_1^2 + 2A_{12}X_1X_2 + A_{22}X_2^2 \qquad (3)$$

قرار می‌دهیم $\Delta = A_{12}^2 - A_{11}A_{12}$. داریم:

- اگر $\Delta < 0$، $Q(X)$ هم‌علامت A_{11} (و نیز A_{22}) است مگر وقتی $(X_1, X_2) = (0, 0)$.
- اگر $\Delta > 0$، $Q(X)$ تغییر علامت می‌دهد.

حالت دوم را دقیقتر بررسی می‌کنیم. اگر $A_{11} = A_{22} = 0$، که آنگاه $A_{12} \neq 0$، و علامت $Q(X) = 2A_{12}X_1X_2$ با علامت X_1 و X_2 تغییر می‌کند. بدین ترتیب دو خط راست $x_1 = a_1$ و $x_2 = a_2$ که از نقطهٔ بحرانی $a = (a_1, a_2)$ می‌گذرند صفحه را به چهاربخش تقسیم می‌کنند که علامت Q در آنها متناوباً مثبت و منفی است. بنابراین در این حالت a یک نقطهٔ زینی است. حال فرض کنید دست کم یکی از A_{11} و A_{22} صفر نیست، مثلاً $A_{11} \neq 0$. اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $A_{11}t^2 + 2A_{12}t + A_{22} = 0$ باشند، می‌توان نوشت:

$$Q(X) = A_{11}(X_1 - \alpha X_2)(X_1 - \beta X_2)$$

توجه کنید که $\alpha \neq \beta$ زیرا $\Delta > 0$. بنابراین وقتی نسبت $\frac{X_1}{X_2}$ از ریشه‌ها عبور می‌کند تغییر علامت حاصل می‌شود. معادلاً $Q = A_{11}(x_1 - \alpha x_2 - a_1 + \alpha a_2)(x_1 - \beta x_2 - a_1 + \beta a_2)$ ، دو خط راست متمایز $x_1 - \alpha x_2 - a_1 + \alpha a_2 = 0$ و $x_1 - \beta x_2 - a_1 + \beta a_2 = 0$ که از نقطهٔ بحرانی $a = (a_1, a_2)$ می‌گذرند صفحه را به چهار بخش تقسیم می‌کنند که Q در بخش‌های مجاور علامت مختلف دارد. بنابراین $\underline{0}$ یک نقطهٔ زینی است. بحث بالا را در زیر خلاصه می‌کنیم:

<u>آزمون مشتق دوم برای تابع‌های دو متغیری</u> S زیرمجموعهٔ $\mathbb{R}^2$ است، a یک نقطهٔ درونی S، $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی با مشتق‌های پاره‌ای مرتبهٔ دوم پیوسته در یک گوی باز حول a که a یک نقطهٔ بحرانی برای آن است. در این صورت:

الف) اگر $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ و $f_{xx} > 0$ در نقطهٔ a، a یک نقطهٔ مینیمم موضعی اکید است.

ب) اگر $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ و $f_{xx} < 0$ در نقطهٔ a، a یک نقطهٔ ماکسیمم موضعی اکید است.

ج) اگر $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 < 0$، a یک نقطهٔ زینی ساده است.

ذکر چند نکته ضروری است. اول اینکه از آنجا که مشتقات پاره‌ای مرتبهٔ دوم پیوسته فرض شده‌اند، هر علامت (مثبت یا منفی) که $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$ و f_{xx} در a داشته باشند، همین علامت را در یک گوی باز حول a حفظ می‌کنند، پس علامت باقیماندهٔ لاگرانژ نیز به همین صورت است. دوم اینکه در (الف) و (ب)، از منفی بودن $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$ نتیجه می‌شود که f_{xx} و f_{yy} هم علامت هستند، پس می‌توان به جای علامت f_{xx} از علامت f_{yy} در نقطهٔ a کمک گرفت. بالاخره اینکه وقتی $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$ در نقطهٔ a صفر شود، نمی‌توان حکمی در مورد نوع نقطهٔ a ابراز کرد. مثال‌های ۴، ۵ و ۶ سه نمونهٔ متفاوت از این نوع بودند. برای تابع‌های $f(x,y) = x^4 + y^4$ و $f(x,y) = -(x^4 + y^4)$ و $f(x,y) = x^4 - y^4$، عبارت $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$ در نقطهٔ بحرانی $(0,0)$ صفر است، در حالی که این نقطه برای سه تابع فوق به ترتیب مینیمم، ماکسیمم و زینی می‌باشد.

اکنون تعمیم آزمون مشتق دوم به حالت n متغیری را در نظر می‌گیریم. همان طور که قبلاً اشاره کردیم اگر a یک نقطهٔ بحرانی برای تابع n متغیری f باشد، تعیین نوع نقطهٔ بحرانی به بررسی علامت عبارت $Q(X) = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}X_iX_j$ منجر می‌شود (به بحث پیرامون (۲) مراجعه کنید). در این حالت کلی نیز می‌توان با استفاده از قضیه‌ای در جبرخطی در مورد علامت $Q(X)$ بحث کرد. ماتریس هسیان تابع f در نقطهٔ بحرانی a را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Hf(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{bmatrix}$$

از آنجا که مشتق‌های پاره‌ای مرتبهٔ دوم را پیوسته فرض کرده‌ایم این ماتریس متقارن است. برای هر ماتریس $n \times n$، $A = [a_{ij}]$ مقادیر ویژه A ریشه‌های معادله درجه n زیر برحسب λ هستند:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \qquad (۴)$$

که در آن I ماتریس واحد $n \times n$، یعنی $\begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$ است. در جبرخطی ثابت می‌شود که اگر ماتریس A متقارن باشد (مانند ماتریس هسیان)، همهٔ ریشه‌های (۴) حقیقی هستند (تکرار ریشه‌ها ممکن است).

<u>آزمون مشتق دوم برای تابع‌های n متغیری</u> S زیرمجموعهٔ $\mathbb{R}^n$ است، a یک نقطهٔ درونی S، $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی با مشتق‌های پاره‌ای مرتبهٔ دوم پیوسته در یک گوی باز حول a که a یک نقطهٔ بحرانی برای آن است. مقادیر ویژهٔ ماتریس هسیان را با منظور کردن تعدد ریشه‌ها به $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ نمایش می‌دهیم. در این صورت:

الف) اگر همهٔ λ_i ها مثبت باشند، a یک نقطهٔ مینیمم موضعی اکید است.

ب) اگر همهٔ λ_i ها منفی باشند، a یک نقطه ماکسیمم موضعی اکید است.

ج) اگر همهٔ λ_i ها ناصفر باشند، k تا مثبت و $(n-k)$ تا منفی، آنگاه a یک نقطهٔ زینی ساده است و n امتداد متمایز در $\mathbb{R}^n$ وجود دارد که f روی k امتداد از آنها در نقطهٔ a مینیمم موضعی دارد و روی $(n-k)$ امتداد دیگر ماکسیمم موضعی.

در حالتی که حتی یک λ_i صفر شود، رفتارهای دیگری نیز می‌توان انتظار داشت. اثبات آزمون خارج از برنامه ما است ولی توجه کنید که در حالت $n = 2$، همان آزمون مشتق مرتبهٔ دوم توابع دو متغیری به‌دست می‌آید. در اینجا ماتریس هسیان عبارت است از:

$$\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{bmatrix}$$

و مقادیر ویژه از حل معادلهٔ زیر به‌دست می‌آیند:

$$\det \begin{bmatrix} f_{xx} - \lambda & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} - \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - (f_{xx} + f_{yy})\lambda + f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 0 \qquad (5)$$

شرط‌های (الف) و (ب) بالا وقتی برقرار می‌شوند که $\lambda_1\lambda_2 > 0$، یعنی $f_{xy}^2 - f_{xx}f_{yy} < 0$ که این عیناً شرط داشتن ماکسیمم یا مینیمم موضعی است. مجموع دو ریشهٔ معادله (۵) برابر می‌شود با $f_{xx} + f_{yy}$.

پس در حالت (الف) و (ب) مثبت بودن (به ترتیب منفی بودن) هر دو مقدار ویژه معادل است با این که $f_{xx}+f_{yy}>0$ (به ترتیب $f_{xx}+f_{yy}<0$). ولی در این حالت f_{xx} و f_{yy} هم‌علامتند، پس همان نتیجه آزمون مشتق توابع دو متغیری به‌دست می‌آید.

<u>مثال</u> نقاط بحرانی تابع $f:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}$ که به صورت $f(x,y,z)=x^2+12yz+(y-z)^3$ تعریف شده است را پیدا کنید و نوع آنها را شناسایی کنید.

<u>حل</u> داریم $\nabla f(x,y,z)=(2x,12z+3(y-z)^2,12y-3(y-z)^2)$، و دو نقطه بحرانی $P=(0,0,0)$ و $Q=(0,1,-1)$ به‌دست می‌آیند. ماتریس هسیان در هر مورد به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$H(P)=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&0&12\\0&12&0\end{bmatrix}\quad,\quad H(Q)=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&12&0\\0&0&12\end{bmatrix}$$

در مورد Q، مقادیر ویژه عبارتند از ۲، ۱۲، ۱۲ که هر سه مثبت هستند، پس $(0,1,-1)$ یک نقطهٔ مینیمم موضعی اکید است. برای P مقادیر ویژه را بررسی می‌کنیم:

$$\det\begin{bmatrix}2-\lambda&0&0\\0&-\lambda&12\\0&12&-\lambda\end{bmatrix}=0$$

$$(2-\lambda)(\lambda^2-144)=0$$

مقادیر ویژه عبارتند از $\lambda=2,\pm12$، پس $(0,0,0)$ یک نقطهٔ زینی ساده است.

www.ttnar.ir

توابع ضمنی

در حساب دیفرانسیل یک متغیری به مطلب زیر برخورده‌اید. رابطه‌ای $F(x,y)=0$ داده شده است. اگر فرض کنیم بتوان از این رابطه y را به عنوان تابعی مشتق‌پذیر از x در نظر گرفت، $y=f(x)$، می‌خواهیم مشتق این تابع، یعنی $f'(x)=\frac{dy}{dx}$، را محاسبه کنیم. اینکه بتوان y را به عنوان تابعی از x از $F(x,y)=0$ استخراج کرد نتیجه می‌دهد که $F(x,f(x))$ به‌ازای همه مقادیر x صفر است. بنابراین مشتق عبارت $F(x,f(x))$ نسبت به x همواره صفر خواهد بود. با استفاده از قاعدهٔ زنجیره‌ای دو متغیری داریم:

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}(F(x,f(x))=\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dx}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0\\
&\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0
\end{aligned}
\tag{۱}
$$

حال اگر در نقطهٔ (x,y) داشته باشیم $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\neq 0$، می‌توان نوشت:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} \tag{۲}$$

روش فوق گاهی زیرعنوان "مشتق‌گیری ضمنی" مطرح می‌شود. این روش اغلب بر حل رابطهٔ $F(x,y)=0$ برای y بر حسب x و سپس مشتق گرفتن، ارجحیت دارد. دلایل عمدهٔ برتری ادعا شده به این شرح است:

الف) ممکن است استخراج صریح y بر حسب x ناممکن یا دشوار باشد ولی مشتق را بتوان از (۲) به سادگی محاسبه کرد.

ب) اگر در نقطه‌ای (x,y) داشته باشیم $\frac{\partial F}{\partial y}=0$ و $\frac{\partial F}{\partial x}\neq 0$، این امر می‌تواند دلیل بر این باشد که مماس بر خم تعریف شده به وسیله $F(x,y)=0$ قائم باشد. در این صورت باید بتوان x را به صورت تابعی مشتق‌پذیر از y حول (x,y) فوق نوشت.

ج) مهمترین دلیل این است که رابطهٔ $F(x,y)=0$ عموماً y را به عنوان تابعی از x تعریف نمی‌کند. مجموعه نقاط (x,y) که در $F(x,y)=0$ صدق می‌کنند ممکن است مثلاً خمی مانند شکل ۱ باشد.

شکل ۱

در اینجا از شکل چنین بر می‌آید که در نقاط P، Q و S مماس بر خم قائم است و در نقطهٔ R، نه y تابعی مشتق‌پذیر از x است و نه x تابعی مشتق‌پذیر از y. اگر نقاط P، Q، R و S را حذف کنیم، ظاهراً می‌توان پنج تابع به شکل $y=f(x)$ از رابطهٔ فوق استخراج کرد. حتی اگر بتوان عبارت این تابع‌ها را صریحاً به‌دست آورد، مشتق‌گیری جداگانه از آنها دشوارتر از این است که از $F(x,y)=0$ یک بار به طور ضمنی مشتق‌گیری شود. مشتق‌گیری ضمنی این ویژگی را نیز دارد که نقاط P، Q و S را که در آنها مماس قائم وجود دارد بدون تبعیض نمایان می‌کند. حتی در مورد عبارت سادهٔ $x^2+y^2=R^2$، دایره شعاع R حول $(0,0)$، از مشتق‌گیری ضمنی $x+y\frac{dy}{dx}=0$، یا $x\frac{dx}{dy}+y=0$ می‌توان ضریب زاویهٔ خط مماس در هر نقطهٔ دایره را به سادگی محاسبه کرد، و این روش طبیعی‌تر از استخراج دو تابع $y=\pm\sqrt{R^2-x^2}$ و کارکردن با آنهاست که به هر حال دو نقطهٔ $(\pm R,0)$ را پوشش نمی‌دهند.

فرمول مشابه (۲) را می‌توان برای مشتق‌گیری ضمنی از یک عبارت با تعداد متغیر بیشتر نیز به‌دست آورد. فرض کنید $F(x_1,\ldots,x_n,y)=0$. اگر فرض کنیم از این عبارت، y به صورت تابعی مشتق‌پذیر از $x_1,\ldots,x_n$ استخراج شدنی است، $y=f(x_1,\ldots,x_n)$، آنگاه $F(x_1,\ldots,x_n,f(x_1,\ldots,x_n))$ به‌ازای همهٔ مقادیر $(x_1,\ldots,x_n)$ صفر است و اگر نسبت به x_j مشتق بگیریم حاصل صفر خواهد شد.

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(F(x_1,\ldots,x_n,f(x_1,\ldots,x_n)))=0$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial x_j}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x_j}=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x_j}=0$$

بنابراین وقتی $\frac{\partial F}{\partial y} \neq ۰$، داریم:

$$\frac{\partial y}{\partial x_j} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_j}}{\frac{\partial F}{\partial y}} \tag{۳}$$

که مشابه (۲) است. توجه کنید که در (۲) و (۳)، علاوه بر این فرض که $\frac{\partial F}{\partial y} \neq ۰$، به طورضمنی این نیز فرض شده است که واقعاً می‌توان y را به صورت تابعی مشتق‌پذیر از x، یا $(x_۱, \ldots, x_n)$، نوشت. موضوع اصلی بخش حاضر بررسی شرایط صحت این فرض و بحث پیرامون نتایج آن است. در واقع به جای یک رابطه $F(x_۱, \ldots, x_n, y) = ۰$، حالت کلی یک مجموعه رابطه را در نظر می‌گیریم.

فرض کنید m رابطه زیر میان $(m+n)$ متغیر $x_۱, \ldots, x_n, y_۱, \ldots, y_m$ داده شده‌اند:

$$\begin{cases} F_۱(x_۱, \ldots, x_n, y_۱, \ldots, y_m) = ۰ \\ \vdots \\ F_m(x_۱, \ldots, x_n, y_۱, \ldots, y_m) = ۰ \end{cases} \tag{۴}$$

که در آن هر F_i دارای مشتق‌های پاره‌ای پیوسته نسبت به کلیهٔ متغیرهای $x_۱, \ldots, x_n, y_۱, \ldots, y_n$ است. با توجه به تعداد روابط، m، انتظار می‌رود که معمولاً بتوان m متغیر$y_۱, \ldots, y_m$ را برحسب متغیرهای باقیمانده، $x_۱, \ldots, x_n$، به صورت تابع‌هایی $y_۱ = f_۱(x_۱, \ldots, x_n)$، ...، $y_m = f_m(x_۱, \ldots, x_n)$، استخراج کرد. البته این انتظار بعضی اوقات برآورده نمی‌شود. مثلاً در شکل ۱ دیدیم که پنج تابع مختلف $y = f(x)$ از رابطهٔ داده شده استخراج می‌شود، یا از رابطهٔ $x^۲ + y^۲ + ۱ = ۰$ هیچ تابعی نمی‌توان استخراج کرد چون چون هیچ نقطهٔ (x, y) در این رابطه صدق نمی‌کند. به همین ترتیب اگر دستگاه دو معادلهٔ سه مجهولی زیر را در نظر بگیریم:

$$\begin{cases} x^۲ + y^۲ + z^۲ - ۱ = ۰ \\ x + y + z - ۲ = ۰ \end{cases}$$

این دستگاه جواب ندارد (چرا؟). موضوعی که در اینجا بررسی خواهیم کرد به شرح زیر است. فرض می‌کنیم (۴) دارای دست کم یک جواب باشد، یعنی نقطه‌ای $(x_۱, \ldots, x_n) = x = a = (a_۱, \ldots, a_n)$ و $(y_۱, \ldots, y_m) = y = b = (b_۱, \ldots, b_n)$ وجود داشته باشند که در (۴) صدق کند. در این صورت "قضیه تابع ضمنی" که در زیر خواهد آمد، شرطی کافی ارائه می‌کند برای این که بخشی (احتمالاً

www.ttnar.ir

کوچک) از مجموعهٔ جواب (۴) که حول (a,b) قرار دارد به شکل نمودار تابعی مشتق‌پذیر $y = f(x)$ باشد. چون نمودار یک تابع مشتق‌پذیر را معمولاً "هموار" تعبیر می‌کنیم، به این مفهوم، و تحت شرط کافی که ارائه خواهد شد، مجموعهٔ جواب در نزدیکی (a,b) "هموار" تلقی می‌شود.

(۲۸–۱) <u>قضیهٔ تابع ضمنی</u> **فرض می‌کنیم F_i ها در (۴) دارای مشتق‌های پاره‌ای پیوسته نسبت به متغیرهای x و y هستند، نقطهٔ $(x,y) = (a,b)$ در (۴) صدق می‌کند و:**

$$\det[\frac{\partial F_i}{\partial y_i}(a,b)] \neq 0 \qquad (5)$$

در این صورت $r_1 > 0$ و $r_2 > 0$ وجود دارند و تابعی مشتق‌پذیر f از گوی باز شعاع r_1 حول a به گوی باز شعاع r_2 حول b، به طوری که نمودار تابع f دقیقاً برابر مجموعه نقاط (x,y) واجد شرط‌های $|x| < r_1$ و $|y| < r_2$ است که در (۴) صدق می‌کنند.

در حالت $m = n = 1$، شرط (۵)به این یعنی است که $\frac{\partial F}{\partial y}(a,b) \neq 0$ و شکل ۲ حکم قضیه را نمایش می‌دهد. توجه کنید که فقط بخش کوچکی از مجموعهٔ جواب که حول (a,b) قرار دارد به صورت نمودار یک تابع مشتق‌پذیر $y = f(x)$ ظاهر می‌شود.

شکل ۲

اثبات قضیهٔ تابع ضمنی در این درس ارائه نخواهد شد ولی از صورت آن استفاده فراوان خواهد شد. در زیر به بحث پیرامون بعضی کاربردها و حواشی قضیه خواهیم پرداخت.

(۲۸–۲–۱) شرط (۵) یک شرط کافی بسیار قابل استفاده است. بدون آن نیز گاهی حکم قضیه برقرار می‌شود. مثلاً اگر رابطهٔ $y^3 - x^4 = 0$ را در نظر بگیریم، برای $F(x,y) = y^3 - x^4$ داریم $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = 0$، ولی مجموعه جواب برابر نمودار تابع مشتق‌پذیر $y = x^{\frac{4}{3}}$ است. با این حال برای درک اهمیت (۵) لازم است با بعضی مشکلاتی که ممکن است در صورت عدم برقراری آن رخ دهد آشنا شویم. برای $m = n = 1$ سه مثال در نظر می‌گیریم. در ابعاد بالا تنوع مشکلات گسترده‌تر است. برای هر یک از سه تابع $F, G, H : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ که به صورت

$$F(x,y) = x^2 + y^2 \quad , \quad G(x,y) = x + y^2 \quad , \quad H(x,y) = x + y^3$$

www.ftnar.ir

تعریف شده‌اند، مجموعهٔ جواب، به ترتیب $F(x,y)=0$، $G(x,y)=0$ و $H(x,y)=0$ در شکل‌های ۳الف، ۳ب و ۳ج نمایش داده شده‌اند. در هر مورد نقطه $(a,b)=(0,0)$ در رابطه صدق می‌کند. در (الف) $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0)=0$ و مجموعهٔ جواب $F(x,y)=0$ از یک تک نقطه‌ای، $(0,0)$، تشکیل شده است. طبعاً این تک نقطه نمودار تابعی نیست که روی یک گوی باز حول $a=0$ تعریف شده باشد. در اینجا انتظار متعارف ما که مجموعهٔ جواب یک خم (یک بعدی) باشد برآورده نمی‌شود. در (ب)، $\frac{\partial G}{\partial y}(0,0)=0$. مجموعهٔ جواب نمی‌تواند نمودار یک تابع تعریف شده در مجموعهٔ بازی حول $a=0$ باشد. در (ج)، $\frac{\partial H}{\partial y}(0,0)=0$. مجموعهٔ جواب در این مورد نمودار یک تابع از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ است، ولیکن این تابع در $a=0$ مشتق‌پذیر نیست (مماس قائم).

(۲۸—۲—۲) هموار بودن مجموعهٔ تراز. فرض کنید S زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ باشد، $F:S\longrightarrow\mathbb{R}$ تابعی مشتق‌پذیر با مشتق‌های پاره‌ای پیوسته و a یک نقطهٔ درونی S. قبلاً اشاره کرده‌ایم که اگر $\nabla F(a)\neq\underline{0}$، آنگاه مجموعهٔ تراز گذرا از a به مفهومی "هموار" است. این مطلب را می‌توانیم اکنون به طور دقیق توضیح دهیم. $\nabla F(a)=(\frac{\partial F}{\partial x_1}(a),\ldots,\frac{\partial F}{\partial x_n}(a))\neq\underline{0}$ بدین معنی است که دست کم یکی از مشتق‌های پاره‌ای F در نقطهٔ a صفر نیست. مثلاً فرض کنید $\frac{\partial F}{\partial x_n}(a)\neq\underline{0}$. اگر $F(a)=c$، یعنی a روی مجموعهٔ تراز منسوب به c قرار داشته باشد، تابع $G:S\longrightarrow\mathbb{R}$ را به صورت $G(x)=F(x)-c$ تعریف می‌کنیم. مجموعه تراز فوق‌الذکر به مجموعهٔ منسوب به 0 برای G تبدیل می‌شود. برای این مجموعهٔ تراز داریم $G(x_1,\ldots,x_n)=0$، نقطه a در این رابطه صدق می‌کند و $\frac{\partial G}{\partial x_n}(a)=\frac{\partial F}{\partial x_n}(a)\neq 0$. پس طبق قضیهٔ تابع ضمنی، تابعی مشتق‌پذیر f تعریف شده از یک گوی باز حول $(a_1,\ldots,a_{n-1})$ به بازهٔ بازی حول a_n در $\mathbb{R}$ وجود دارد که نمودار آن برابر بخشی از مجموعهٔ تراز است که حول a قرار دارد. به این مفهوم مجموعه تراز حول a هموار است.

برای بهره‌گیری کاملتر از قضیهٔ تابع ضمنی، لازم است همانند فرمول‌های (۲) و (۳)، فرمولی در حالت کلی برای مشتق تابع مشتق‌پذیر f که وجود آن به وسیلهٔ قضیهٔ تابع ضمنی تضمین می‌شود به‌دست آوریم. برای $y=f(x)$، ماتریس مشتق، $[\frac{\partial y_i}{\partial x_j}(a)]$ یک ماتریس $m\times n$ است، ماتریس مشتق‌های پاره‌ای F_i ها نسبت به $(x_1,\ldots,x_n)$، $[\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(a,b)]$ نیز یک ماتریس $m\times n$، و ماتریس

مشتق‌های پاره‌ای f_i ها نسبت به $(y_1, \ldots, y_m)$ یک ماتریس مربعی $m \times m$ می‌باشد. ضمناً شرط $\det[\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(a,b)] \neq 0$ تضمین می‌کند که وارون ماتریس $[\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(a,b)]$ وجود دارد.

(۲۸–۳) **متمم قضیهٔ تابع ضمنی** **در شرایط قضیهٔ تابع ضمنی، اگر (x,y) به اندازه کافی به (a,b) نزدیک باشد، داریم:**

$$[\frac{\partial y_i}{\partial x_j}(x)] = -[\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(x,y)]^{-1}[\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x,y)] \qquad (٦)$$

توجه کنید که چون مشتق‌های پاره‌ای پیوسته فرض شده‌اند و دترمینان تابعی پیوسته از درایه‌هاست (برحسب ضرب و جمع تعریف شده است)، صفر نبودن دترمینان $[\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(x,y)]$ به‌ازای $(x,y) = (a,b)$ موجب می‌شود که این دترمینان در نزدیکی (a,b) نیز ناصفر باشد، پس وارون ماتریس $[\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(x,y)]$ برای (x,y) به اندازهٔ کافی نزدیک به (a,b) وجود خواهد داشت. توجه کنید که در حالت $m = 1$، (٦) به (۳) تبدیل می‌شود و در حالت خاص‌تر $m = 1$ و $n = 1$، این همان رابطهٔ (۲) است.

اثبات (٦) با استفاده از قاعدهٔ زنجیره‌ای سر راست است. برای x در دامنهٔ تابع f ذکر شده در قضیهٔ تابع ضمنی، $F(x, f(x))$ همواره ثابت صفر است، پس

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(F(x,f(x))) = \underline{0}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_j}(F_1(x,f(x))) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_j}(F_m(x,f(x))) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

مشتق‌گیری طرف چپ را به کمک قاعدهٔ زنجیره‌ای انجام می‌دهیم:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F_1}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial F_1}{\partial y_l}\frac{\partial y_l}{\partial x_j} = 0 \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F_m}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial F_m}{\partial y_l}\frac{\partial y_l}{\partial x_j} = 0 \end{cases}$$

www.tinar.ir

یا

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_j} \\ \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_j} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_j} \\ \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

با انتقال ستون سمت چپ به طرف راست و ضرب کردن در وارون ماتریس $m \times m$ داریم

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_j} \\ \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_j} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_j} \\ \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_j} \end{bmatrix}$$

حال اگر برای $j = 1, \ldots, m$ این ستون‌ها را کنار هم قرار دهیم، فرمول (۶) نتیجه می‌شود.

مثال ۱. روابط زیر داده شده‌اند:

$$\begin{cases} x^3y + 2y^2z^2 - xz^3 = 0 \\ e^{y+z} - x = 0 \end{cases}$$

نقطهٔ $(x, y, z) = (1, 0, 0)$ در این روابط صدق می‌کند. انتظار عادی این است که هر یک از دو معادلهٔ فوق یک رویه (سطح خمیده) در $\mathbb{R}^3$ تعریف کند و اشتراک این دو رویه یک خم باشد. می‌دانیم $(1, 0, 0)$ در این اشتراک قرار دارد. آیا می‌توان برای بخشی از این اشتراک که در نزدیکی $(1, 0, 0)$ قرار دارد، دو متغیر را به صورت تابعی مشتق‌پذیر از متغیر سوم نوشت؟ در صورت جواب مثبت، می‌خواهیم مشتق دو متغیر را نسبت به متغیر سوم در نقطهٔ $(1, 0, 0)$ محاسبه کنیم. این مسأله ظاهراً در چارچوب قضیهٔ تابع ضمنی با $m = 2$ و $n = 1$ قرار می‌گیرد ولی مشخص نیست کدام دو از متغیرهای x، y و z می‌توانند نقش متغیرهای y_i را در قضیه ایفاء کنند. به منظور یافتن متغیرهای مناسب، ماتریس مشتق‌های عبارت‌های بالا را نسبت به متغیرهای x، y و z تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{bmatrix} 3x^2y - z^3 & x^3 + 4yz^2 & 4y^2z - 3xz^2 \\ -1 & e^{y+z} & e^{y+z} \end{bmatrix}_{(1,0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(ستون‌های اول تا سوم، به ترتیب، مشتق نسبت به x، y و z را نمایش می‌دهند.) برای اینکه از قضیهٔ تابع ضمنی استفاده کنیم باید دو متغیر را طوری انتخاب کنیم که ماتریس 2×2 متشکل از ستون‌های مربوط به آن دو متغیر دارای دترمینان ناصفر باشد. اگر $x^3y + 2y^2z^2 - xz^3$ را به $F_1(x, y, z)$ و

$e^{y+z} - x$ را به $F_2(x,y,z)$ نمایش دهیم، داریم

$$\det \frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(x,y)} = \det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 1$$

$$\det \frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(x,z)} = \det \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\det \frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(y,z)} = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 1$$

بدین ترتیب، طبق قضیهٔ تابع ضمنی، می‌توان حول $(0, 0, 1)$، (x,y) را به عنوان تابعی مشتق‌پذیر از z، و نیز (y,z) را به عنوان تابعی مشتق‌پذیر از x در نظر گرفت، ولی قضیهٔ تابع ضمنی تضمین نمی‌کند که بتوان (x,z) را به صورت تابعی مشتق‌پذیر از y نمایش داد (خواهیم دید که در واقع نمی‌توان حول $(0, 0, 1)$، (x,z) را تابعی مشتق‌پذیر از y پنداشت). برای محاسبهٔ مشتق، فرض کنید (x,y) را تابعی مشتق‌پذیر از z در نظر گرفته‌ایم. طبق متمم قضیهٔ تابع ضمنی داریم:

$$\begin{bmatrix} \frac{dx}{dz} \\ \frac{dy}{dz} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{bmatrix}$$

و در نقطهٔ $(0, 0, 1)$:

$$\begin{bmatrix} \frac{dx}{dz} \\ \frac{dy}{dz} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{dx}{dz} = 1 \quad , \quad \frac{dy}{dz} = 0$$

محاسبهٔ مشتق‌های فوق را می‌توان بدون استفاده از متمم قضیهٔ تابع ضمنی انجام داد به این شرط که متغیرهای مناسب را اختیار کرده باشیم. به عنوان مثال، به فرض اینکه بدانیم می‌توان (x,y) را تابعی مشتق‌پذیر از z در نظر گرفت (حول $(0, 0, 1)$)، $(x,y) = f(z)$، روابط $F_1(f(z), z) = 0$ و $F_2(f(z), z) = 0$ برای z در نزدیکی $z = 0$ برقرار است، پس مشتق عبارت‌های طرف چپ نسبت به z

صفر خواهد بود. با استفاده از قاعدهٔ زنجیره‌ای داریم:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_1}{\partial x}\dfrac{dx}{dz} + \dfrac{\partial F_1}{\partial y}\dfrac{dy}{dz} + \dfrac{\partial F_1}{\partial z}\dfrac{dz}{dz} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial F_2}{\partial x}\dfrac{dx}{dz} + \dfrac{\partial F_2}{\partial y}\dfrac{dy}{dz} + \dfrac{\partial F_2}{\partial z}\dfrac{dz}{dz} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (3x^2y - z^3)\frac{dx}{dz} + (x^3 + 4yz^2)\frac{dy}{dz} + (4y^2z - 3xz^2) = 0 \\[1ex] -\frac{dx}{dz} + e^{y+z}\frac{dy}{dz} + e^{y+z} = 0 \end{cases}$$

در نقطهٔ $(1, 0, 0)$ داریم

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dz} = 0 \\[2ex] -\dfrac{dx}{dz} + \dfrac{dy}{dz} + 1 = 0 \end{cases}$$

که مجدداً نتیجه می‌دهد $\frac{dy}{dz} = 0$ و $\frac{dx}{dz} = 1$.

اگر فرض می‌کردیم (x, z) را می‌توان به عنوان تابعی مشتق‌پذیر از y حول $(1, 0, 0)$ در نظر گرفت و محاسبهٔ مشابهی انجام می‌دادیم حاصل می‌شد:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_1}{\partial x}\dfrac{dx}{dy} + \dfrac{\partial F_1}{\partial y}\dfrac{dy}{dy} + \dfrac{\partial F_1}{\partial z}\dfrac{dz}{dy} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial F_2}{\partial x}\dfrac{dx}{dy} + \dfrac{\partial F_2}{\partial y}\dfrac{dy}{dy} + \dfrac{\partial F_2}{\partial z}\dfrac{dz}{dy} = 0 \end{cases}$$

و در نقطهٔ $(1, 0, 0)$:

$$\begin{cases} 1 = 0 \\[2ex] -\dfrac{dx}{dy} + 1 + \dfrac{dz}{dy} = 0 \end{cases}$$

این نتیجهٔ متناقض گویای این واقعیت است که نمی‌توان (x, z) را تابعی مشتق‌پذیر از y حول $(1, 0, 0)$ انگاشت. در واقع با توجه به محاسبهٔ پیشین که نتیجه داد $\frac{dy}{dz} = 0$، اگر مجموعه جواب حول $(1, 0, 0)$ را روی صفحه (y, z) تصویر کنیم، خمی مشاهده خواهد شد که مماس بر آن محور z مماس است. بدین ترتیب اگر (x, z) به صورت تابعی از y نوشته شود، مشتق z نسبت به y تعریف شدنی نیست.

مثال ۲. در ترمودینامیک از رابطه معروف $PV - kT = 0$ (P: فشار، V: حجم، T: دمای کلوین)

www.ttmar.ir

رابطهٔ زیر نوشته می‌شود:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V = -1 \tag{۷}$$

مقصود از $\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T$ این است که از رابطه $PV - kT = 0$، P به عنوان تابعی از (V,T) در نظر گرفته شده و سپس مشتق آن نسبت به V با ثابت نگاهداشتن T محاسبه شده است، به همین ترتیب در مورد دو عبارت دیگر. صحت (۷) به رابطهٔ خاص $PV - kT = 0$ وابسته نیست، بلکه هرگاه $F(x,y,z) = 0$ داده شده باشد که در آن مشتق‌های پاره‌ای F نسبت به سه متغیر وجود داشته و پیوسته باشند، در هر نقطهٔ (x,y,z) که سه مشتق پاره‌ای $\frac{\partial F}{\partial x}$، $\frac{\partial F}{\partial y}$ و $\frac{\partial F}{\partial z}$ ناصفر باشند، می‌توان نوشت:

$$(\frac{\partial x}{\partial y})_z(\frac{\partial y}{\partial z})_x(\frac{\partial z}{\partial x})_y = -1 \tag{۸}$$

این رابطه را نیز می‌توان به n متغیر تعمیم داد. فرض کنید $F(x_1,\ldots,x_n) = 0$، مشتق‌های پاره‌ای F نسبت به $x_1,\ldots,x_n$ همه وجود داشته و پیوسته باشند، و به‌ازای مقداری از $(x_1,\ldots,x_n)$ داشته باشیم $\frac{\partial F}{\partial x_j} \neq 0$ برای هر $j = 1,\ldots,n$. در این صورت طبق قضیهٔ تابع ضمنی، می‌توان حول این نقطه، هر x_j را تابع مشتق‌پذیر از سایر متغیرها فرض کرد و طبق (۳) داریم:

$$\frac{\partial x_j}{\partial x_{j+1}} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_{j+1}}}{\frac{\partial F}{\partial X_j}} \tag{۹}$$

(برای $j = n$، به جای $j+1$ در دو مخرج، بنویسید ۱). با ضرب کردن n رابطهٔ (۹) به‌ازای $j = 1,\ldots,n$ حاصل می‌شود:

$$(\frac{\partial x_1}{\partial x_2})(\frac{\partial x_2}{\partial x_3})\cdots(\frac{\partial x_n}{\partial x_1}) = (-1)^n \tag{۱۰}$$

(برای $n = 2$، رابطه $1 = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dy}$ به‌دست می‌آید.) البته در اینجا نیز مقصود از $(\frac{\partial x_1}{\partial x_2})$، به طور مبسوط‌تر، $(\frac{\partial x_1}{\partial x_2})_{x_3,\ldots,x_n}$ است، یعنی x_1 به عنوان تابعی مشتق‌پذیر از $(x_2,\ldots,x_n)$ در نظر گرفته شده و سپس مشتق‌گیری نسبت به x_2 با ثابت نگاهداشتن $x_3,\ldots,x_n$ منظور شده است.

قضیهٔ تابع وارون، تعویض مختصات

فرض کنید روابط زیر داده شده‌اند که در آن هر f_i تابعی دارای مشتق‌های پاره‌ای پیوسته است:

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ y_n = f_n(x_1, \dots, x_n) \end{cases} \tag{۱}$$

در اینجا n کمیت $y_1, \dots, y_n$ برحسب کمیت‌های $x_1, \dots, x_n$ داده شده‌اند. سؤالی طبیعی که تکراراً در ریاضیات و کاربردهای آن مطرح می‌شود این است که در چه شرایطی می‌توان از کمیت‌های $y_1, \dots, y_n$ به جای $x_1, \dots, x_n$ به عنوان متغیرهای مسأله خاصی که برحسب $x_1, \dots, x_n$ بیان شده است استفاده کرد. در واقع می‌توان این سؤال را به عنوان "تعویض متغیر" یا "تعویض مختصات" مطرح کرد. از سویی دیگر می‌توان (۱) را بیان یک تابع $f = (f_1, \dots, f_n)$ از دامنهٔ مشترک f_i ها در $\mathbb{R}^n$ به $\mathbb{R}^n$، فرض کرد. تابع وارون یا تابع معکوس f، تابعی g با این ویژگی است که هرگاه $y = f(x)$، آنگاه $x = g(y)$، و بالعکس (شکل ۱). بدین ترتیب f و g تناظری یک به یک میان دو زیرمجموعهٔ $\mathbb{R}^n$ برقرار می‌کنند و می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} x_1 = g_1(y_1, \dots, y_n) \\ \vdots \\ x_n = g_n(y_1, \dots, y_n) \end{cases} \tag{۲}$$

شکل ۱

اگر $g_1, \dots, g_n$ تابع‌های دارای مشتق‌های پاره‌ای پیوسته باشند، جایگزینی $y_1, \dots, y_n$ به جای $x_1, \dots, x_n$ را توسط (۲) تعویض مختصات مجاز از x به y می‌نامیم. بدین ترتیب اگر

www.ttmar.ir

$Z = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ یک تابع مشتق‌پذیر از $x_1, \ldots, x_n$ باشد، می‌توان نوشت $Z = \varphi(g(x_1, \ldots, x_n))$ و بنابر قاعدهٔ زنجیره‌ای، $\varphi \circ g$ کمیت Z را به عنوان تابعی مشتق‌پذیر از $y_1, \ldots, y_n$ بیان می‌کند.

در مورد تابع‌های یک متغیری، $n = 1$، دیده‌ایم که شرطی لازم و کافی برای وجود وارون برای تابعی $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$، I یک بازهٔ باز در $\mathbb{R}$، این است که f یکنوا (صعودی یا نزولی) باشد. در این وضعیت، اگر f مشتق‌پذیر با مشتق همواره مثبت (یا همواره منفی) باشد، تابع وارون، g، نیز مشتق‌پذیر خواهد شد و از رابطهٔ $g(f(x)) = x$ بنابر قاعدهٔ زنجیره‌ای نتیجه می‌گیریم که:

$$g'(x) = \frac{1}{f'(x)} \quad \text{اگر} \quad y = f(x) \tag{۳}$$

البته شرط صعودی یا نزولی بودن یک تابع در سراسر دامنه به ندرت حاصل می‌شود. از این رو معمولاً به مفهوم "وارون موضعی" متوسل می‌شویم که به صورت زیر است. دامنهٔ تابع داده شدهٔ f را به بازه‌ای کوچکتر محدود می‌کنیم به طوری که در این بازه f صعودی یا نزولی باشد. در این صورت برای تحدید تابع به این زیربازه وارونی وجود خواهد داشت که یک وارون موضعی f خوانده می‌شود. در این صورت تحدید f به یک زیربازهٔ باز از دامنه اولیه، این بازه را به طور یک به یک به یک بازهٔ باز می‌نگارد.

مثالی باز تابع $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$، $f(x) = \sin x$ است. چنانچه دامنهٔ f را بازهٔ $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ محدود کنیم، f در این بازه صعودی است و وارون آن معمولاً به $\sin^{-1}$ یا Arcsin نمایش داده می‌شود. بدین ترتیب $\sin^{-1}(y)$، برای $-1 \leq y \leq 1$، یگانه x در بازهٔ $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ است که $\sin x = y$. اگر به جای بازهٔ بسته $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$، از بازهٔ باز $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ استفاده کنیم، مشتق f در این بازه اکیداً مثبت است، پس $\sin^{-1}$ در تصویر این بازه، یعنی $]-1, 1[$ مشتق‌پذیر است و

$$\begin{aligned}(\sin^{-1})'(y) &= \frac{1}{\sin' x} = \frac{1}{\cos x} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}\end{aligned}$$

(فقط جذر مثبت $\cos^2 x = (1 - \sin^2 x)$ در نظر گرفته شده است زیرا که $\cos x$ برای $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ مثبت است).

هدف ما اکنون این است که موضوع "وارون موضعی" را به توابع چند متغیری تعمیم دهیم. قضیهٔ زیر تعمیم مورد نظر است:

(۲۹–۱) قضیهٔ تابع وارون دستگاه (۱) را در نظر بگیرید و فرض کنید هر f_i دارای مشتق‌های پاره‌ای مرتبهٔ اول پیوسته است. فرض کنید نقطهٔ $a = (a_1, \dots, a_n)$ یک نقطهٔ درونی دامنه $f = (f_1, \dots, f_n)$ باشد که در آن $\det(Df(a)) \neq 0$. در این صورت زیرمجموعهٔ بازی U از دامنهٔ f حول a وجود دارد که $V = f(U)$ یک مجموعهٔ باز است و تحدید f به U تناظری یک به یک میان U و V ایجاد می کند. به علاوه اگر $g : U \longrightarrow V$ وارون موضعی f باشد، g دارای مشتق‌های پاره‌ای مرتبهٔ اول پیوسته است.

این قضیه را می‌توان به‌صورت حالت خاصی از قضیهٔ تابع ضمنی به صورت زیر نتیجه گرفت، ولی شایان ذکر است که معمولاً نخست این قضیه به اثبات می‌رسد و سپس می‌توان قضیهٔ تابع ضمنی را از این قضیه نتیجه گرفت. برای اثبات، (۱) را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{cases} -y_1 + f_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ -y_n + f_n(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \qquad (۴)$$

و قرار می‌دهیم $b = (b_1, \dots, b_n) = f(a)$. نقطه $(y, x) = (b, a)$ در (۴) صدق می‌کند. اگر به جای $-y_i + f_i(x_1, \dots, x_n)$ بنویسیم $F_i(y_1, \dots, y_n, x_1, \dots, x_n)$، نتیجه می‌شود که دترمینان ماتریس $[\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(b, a)]$ ناصفر است. پس بنابر قضیهٔ تابع ضمنی می‌توان برای (y, x) های نزدیک (b, a) که در (۴) صدق می‌کنند، x را به صورت تابعی از y استخراج کرد، $x = g(y)$، یا

$$\begin{cases} x_1 = g_1(y_1, \dots, y_n) \\ \vdots \\ x_n = g_n(y_1, \dots, y_n) \end{cases} \qquad (۵)$$

که در آن g_i ها تابع‌های دارای مشتق‌های پاره‌ای مرتبهٔ اول پیوسته هستند. بدین ترتیب یک وارون موضعی برای f حول a به‌دست می‌آید.

مضافاً توجه کنید که با مشتق‌گیری از ترکیب $g(f(x)) = x$ و $f(g(y)) = y$ روابطی مشابه (۳)

به‌دست می‌آیند:

$$Dg(y)\cdot Df(x)=I \quad , \quad Df(x)\cdot Dg(y)=I \tag{۶}$$

که در اینجا ماتریس واحد $n\times n$، یعنی $\begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$ است. پس ماتریس مشتق‌های پاره‌ای y_i ها نسبت به x_j ها، وارون ماتریس مشتق‌های پاره‌ای x_i ها نسبت به y_j هاست:

$$[\frac{\partial x_i}{\partial y_j}(y)]=[\frac{\partial y_i}{\partial x_j}(x)]^{-1} \tag{۷}$$

در زیر چند نوع تعویض مختصات معروف را در این چارچوب بررسی می‌کنیم.

<u>مثال ۱</u> (مختصات قطبی (x,y)) می‌نویسیم

$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases} \tag{۸}$$

داریم

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}$$

پس $\det(\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)})=r$. طبق قضیهٔ تابع وارون اگر (r_0,θ_0) طوری باشد که $r_0\neq 0$، آنگاه (۸) یک تعویض مختصات مجاز از یک مجموعهٔ باز U حول (r_0,θ_0) به مجموعهٔ بازی V حول $(x_0,y_0)=(r_0\cos\theta_0,r_0\sin\theta_0)$ ایجاد می‌کند ولی می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} r=g_1(x,y) \\ \theta=g_2(x,y) \end{cases} \quad \text{برای } (r,\theta)\in U \text{ و } (x,y)\in V \tag{۹}$$

در مورد بزرگی اندازهٔ U و V توجه کنید که نباید $r=0$ را شامل شود زیرا که به‌ازای $r=0$ یک به یک بودن تابع تعریف شده در (۸) نقض می‌شود. همچنین U نباید شامل دو نقطهٔ (r,θ_1) و (r,θ_2) باشد که $\theta_2-\theta_1$ مضرب صحیحی از 2π است زیرا که مجدداً یک به یک بودن (۸) نقض خواهد شد.

شکل ۲

www.ttnaf.ir

مثال ۲ (مختصات استوانه‌ای در $\mathbb{R}^۳$) این در واقع جایگزینی (x,y) در مختصات دکارتی فضای سه‌بعدی (x,y,z) با مختصات قطبی است، یعنی

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases} \qquad (۱۰)$$

سه‌تایی (r,θ,z) را مختصات استوانه‌ای نقطهٔ (x,y,z) می‌نامیم. داریم

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & ۰ \\ \sin\theta & r\cos\theta & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

و $\det \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = r$. در اینجا ملاحضاتی مشابه مثال ۱ برقرار است.

مثال ۳ (مختصات کروی) برای نقطهٔ (x,y,z) در $\mathbb{R}^۳$، ρ را برابر فاصلهٔ نقطه از $\underline{۰}$، θ را به مفهوم مختصات قطبی، و φ را زاویهٔ از نیمهٔ بالای محور z به نیمخط واصل از $\underline{۰}$ به (x,y,z) می‌گیریم.

شکل ۳

بدین ترتیب:

$$\begin{cases} x = \rho\sin\varphi\cos\theta \\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases} \qquad (۱۱)$$

و داریم:

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\varphi,\theta)} = \begin{bmatrix} \sin\varphi\cos\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & ۰ \end{bmatrix}$$

و محاسبه دترمینان این ماتریس نشان می‌دهد که $\det = \rho^۲\sin\varphi$. این دترمینان دقیقاً در نقاط خارج از محور z ناصفر است، پس حول این نقاط می‌توان یک تعویض مختصات موضعی مجاز به مختصات کروی انجام داد. در واقع اگر محدودیت‌های $۰ \leq \varphi \leq \pi$، $۰ \leq \theta \leq ۲\pi$ و $\rho > ۰$ را اعمال کنیم، دستگاه (۱۱) یک تابع یک به یک از (ρ,φ,θ) به (x,y,z) تعریف می‌کند. اگر مشتق‌پذیری تابع وارون مطرح نباشد می‌توان از این تعویض مختصات خارج از $\underline{۰}$ استفاده کرد.

بهینه‌سازی (۱)

مسائل بهینه‌سازی چند متغیری بدین صورت ارائه می‌شوند که تابعی $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$، S: زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^n$، داده شده است، و هدف یافتن ماکسیمم یا مینیمم مطلق f در مجموعهٔ S است. روش بخش ۲۷ تا حدودی جوابگوی این مسأله است به این مفهوم که اگر ماکسیمم یا می‌نیمم مورد نظر در یک نقطهٔ درونی مجموعهٔ S ظاهر شود و اگر f در این نقطه مشتق‌پذیر باشد، این نقطه یک نقطهٔ بحرانی تابع خواهد بود. روشن است که برای حل کامل مسأله، علاوه بر در نظر گرفتن نقاط بحرانی، باید نقاط نوع زیر نیز در نظر گرفته شوند تا با مقایسهٔ مقدار f در این نقاط و نقاط بحرانی جواب نهایی مسأله معلوم گردد. این نقاط عبارتند از:

۱) نقاط مرزی ناحیه تعریف تابع.

۲) نقاط تکین، یعنی نقاطی که در آن f مشتق‌پذیر نیست.

اگر S یک مجموعهٔ بسته (شامل کلیهٔ نقاط مرزی) و کراندار باشد، می‌دانیم هر تابع پیوسته $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ روی S ماکسیمم و مینیمم مطلق اتخاذ می‌کند، بنابراین اگر S بسته و کراندار و $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ پیوسته باشد، مقایسه نتایج به‌دست آمده از نقاط بحرانی، نقاط مرزی و نقاط تکین قطعاً جواب مورد نظر را به‌دست خواهد داد. در حالتی که مجموعه S بی‌کران باشد، یا بعضی نقاط مرزی خود را شامل نشود، امکان دارد که ماکسیمم یا مینیمم در S موجود نباشد. برای این‌گونه مجموعه‌ها باید رفتار تابع $f(x)$ را وقتی x به یک نقطهٔ مرزی خارج S نزدیک می‌شود و نیز وقتی $|x| \longrightarrow \infty$ (در داخل مجموعهٔ S، وقتی S بی‌کران است) جداگانه بررسی کرد. امکان دارد در این موارد اصلاً ماکسیمم یا مینیمم وجود نداشته باشد. در زیر به ذکر دو مثال می‌پردازیم.

مثال ۱ ماکسیمم و مینیمم تابع $f(x,y) = x^۲ + y^۲ + x$ را در ناحیهٔ $x^۲ + y^۲ \leq ۱$ به‌دست آورید.

www.ttmar.ir

<u>حل</u> ناحیه داده شده گوی بستهٔ شعاع ۱ حول مبدأ در $\mathbb{R}^2$ است که بسته و کراندار می‌باشد. تابع داده شده به‌ازای هر (x,y) مشتق‌پذیر است، پس نقطهٔ تکین وجود ندارد. کافی است نقاط بحرانی و نقاط مرزی را بررسی و مقایسه کنیم. برای نقاط بحرانی:

$$\nabla f(x,y) = (2x+1, 2y) = (0,0)$$

نتیجه می‌دهد $(-\frac{1}{2}, 0)$ تنها نقطهٔ بحرانی است، و $f(-\frac{1}{2}, 0) = -\frac{1}{4}$. نقاط مرزی دقیقاً آن (x,y) ها هستند که $x^2+y^2=1$، پس در یک نقطهٔ مرزی $f(x,y) = x+1$ و از آنجا که برای نقاط مرزی $-1 \leq x \leq 1$، نتیجه می‌گیریم که ماکسیمم f روی مرز در نقطهٔ $(1,0)$ و مینیمم آن در نقطهٔ $(-1,0)$ به‌دست می‌آید. داریم $f(1,0)=2$ و $f(-1,0)=0$. از مقایسه سه مقدار به‌دست آمده نتیجه می‌گیریم که ماکسیمم تابع برابر ۲ است و در نقطهٔ مرزی $(1,0)$ ظاهر می‌شود، در حالی که مینیمم آن، $-\frac{1}{4}$، در نقطهٔ بحرانی درونی $(-\frac{1}{2}, 0)$ حاصل می‌شود.

<u>مثال ۲</u> ماکسیمم و مینیمم تابع $f(x,y) = \frac{|xy|}{x^2+y^2+1}$ را در $\mathbb{R}^2$ به‌دست آورید.

<u>حل</u> وجود قدرمطلق نشان می‌دهد تابع ممکن است وقتی $xy=0$ مشتق‌پذیر نباشد. در هر حال به‌ازای $xy=0$، یعنی روی اجتماع محورهای x,y، مقدار تابع صفر است که قطعاً مینیمم تابع می‌باشد زیرا که به‌ازای $xy \neq 0$ مقدار تابع مثبت است. در خارج اجتماع محورها، کافی است مقدار تابع به‌ازای $x>0$، $y>0$ بررسی شود زیرا که به سبب قدرمطلق، تقارن نسبت به دو محور دیگر وجود دارد. در ربع اول داریم

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{y(y^2+1-x^2)}{(x^2+y^2+1)^2}, \frac{x(x^2+1-y^2)}{(x^2+y^2+1)^2}\right)$$

برای $x>0$ و $y>0$، $\nabla f(x,y) = \underline{0}$ جواب ندارد. زیرا که خم‌های $y^2 = 1+x^2$ و $x^2 = 1+y^2$ نقطهٔ مشترک ندارند، پس نقطهٔ بحرانی وجود ندارد. از سویی دیگر برای $x \neq 0$ و $y \neq 0$:

$$\frac{|xy|}{x^2+y^2+1} = \frac{\frac{|xy|}{x^2+y^2}}{1+\frac{1}{x^2+y^2}} < \frac{1}{2}$$

www.ttnar.ir

و در امتداد خط $y = x$ مقدار تابع به $\frac{1}{2}$ میل می‌کند وقتی $x \longrightarrow +\infty$. نتیجه این که تابع ماکسیمم ندارد.

در مثال اول، مجموعهٔ مرزی، دایرهٔ $x^2 + y^2 = 1$ بود و تابع مورد نظر $f(x,y) = x^2 + y^2 + x$ روی این مجموعه به شکل سادهٔ $f(x,y) = 1 + x$ خلاصه می‌شد. در حالت کلی، یافتن ماکسیمم یا مینیمم روی مرز یک مجموعهٔ می‌تواند دشوار باشد. مجموعه‌های مرزی که در عمل ظاهر می‌شوند معمولاً از یک یا چند قطعهٔ هموار تشکیل شده‌اند. "روش لاگرانژ" که در زیر می آید حربهٔ مؤثری برای یافتن نقاط ماکسیمم یا مینیمم موضعی تحدید یک تابع به یک مجموعهٔ هموار (مثلاً مجموعهٔ تراز غیر بحرانی) است. به طور خاص وضعیت زیر را در نظر بگیرید. فرض کنید S یک زیرمجموعه باز $\mathbb{R}^n$ است، $g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی با مشتق‌های پاره‌ای مرتبهٔ اول پیوسته، و M یک مجموعهٔ تراز تابع g، مثلاً

$$M = \{x \in U \mid g(x) = c\}$$

در مثال‌های مورد نظر ما گاهی M مرز یک ناحیه است (مثلاً مرز ناحیه‌ای که در آن $g(x) \geq c$ یا ناحیه‌ای که در آن $g(x) \leq c$). فرض کنید تابع $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ نیز داده شده است که مشتق‌های پاره‌ای مرتبهٔ اول پیوسته دارد. می‌خواهیم نقاط ماکسیمم و مینیمم موضعی تحدید f به M را شناسایی کنیم.

(۱۶–۱)قضیهٔ لاگرانژ فرض کنید a یک نقطه ماکسیمم یا مینیمم موضعی تحدید f به M باشد و a یک نقطهٔ بحرانی برای g نباشد، در این صورت $\nabla f(a)$ در نقطهٔ a بر M عمود است:

بدین ترتیب، چون a برای g بحرانی نیست، یعنی $\nabla g(a) \neq \underline{0}$، عددی حقیقی λ وجود دارد که:

$$\nabla f(a) = \lambda \nabla g(a)$$

توجه کنید که $\nabla g(a) \neq \underline{0}$ نشان می‌دهد که مجموعهٔ تراز M حول a هموار است، پس عمود بودن $\nabla f(a)$ بر آن معنی دارد، این در واقع به معنی عمود بودن بر کلیه بردارهای مماس بر M در نقطهٔ a است. فرض کنید v یک چنین بردار باشد. خمی هموار $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ در نظر می‌گیریم که تصویر آن به تمامی روی M قرار گیرد، $\gamma(t) \in M$ برای هر $t \in I$، $\gamma(t_0) = a$ و $\gamma'(t_0) = v$، چون a یک نقطهٔ مینیمم موضعی (یا ماکسیمم موضعی) برای تحدید f به M است $f(\gamma(t))$ به‌ازای $t = t_0$ دارای

شکل ۱

مینیمم موضعی (یا ماکسیمم موضعی) است، پس $\frac{d}{dt}((f\circ\gamma)(t))|_{t=t_\circ} = \circ$. طبق قاعدهٔ زنجیره‌ای:

$$\circ = \frac{d}{dt}((f\circ\gamma)(t))|_{t=t_\circ} = \nabla f(\gamma(t_\circ))\cdot\gamma'(t_\circ) = \nabla f(a)\cdot v$$

یعنی $\nabla f(a) \perp v$ و قضیهٔ لاگرانژ به اثبات می‌رسد.

قبل از ارائه مثال و تکمیل کردن صورت قضیهٔ لاگرانژ که بعداً خواهد آمد، دو بحث شهودی در تأیید قضیهٔ لاگرانژ بیان می‌کنیم:

(۱۶—۲)بحث شهودی ۱ محدود ساختن دامنه f به M و جستجو برای نقاط ماکسیمم و مینیمم آن را می‌توان به شکل یک آزمایش ذهنی بدین صورت مطرح کرد. موجوداتی را تصور می‌کنیم که چسبیده به M زندگی می‌کنند و از جهان خارج (یعنی $\mathbb{R}^n$) هیچ‌گونه ادراکی ندارند. برای این موجودات تابع f فقط روی M تعریف شده است. چون نقطهٔ a یک نقطهٔ غیربحرانی g است، M حول a از هموار بودن کافی برخوردار است و این موجودات ناحیهٔ حول a را به شکل $\mathbb{R}^{n-1}$ تجسم می‌کنند. اگر a یک نقطهٔ ماکسیمم یا مینیمم موضعی برای تحدید f به M باشد، برای این موجودات a یک نقطهٔ بحرانی f (محدود به جهان آنان) است و بنابراین باید "گرادیان f" (به مفهوم جهان M) از نظر این موجودات صفر شود. ولی "گرادیان f" از دیدگاه این موجودات با "گرادیان f" به مفهوم ما چه رابطه‌ای دارد؟ طبیعی به نظر می‌رسد که فرض کنیم گرادیان f برای موجودات محدود به M، "سایه" یا تصویر قائم گرادیان f عادی روی M است. در این صورت صفر شدن گرادیان برای این موجودات معادل با عمود بودن آن بر M از نظر ما است.

(۱۶—۳) بحث شهودی ۲ یک مورد خاص را در نظر می‌گیریم که وضعیت کلی را به طرزی بارز نشان می‌دهد. این مثال را می‌توان در هر بعد ارائه کرد ولی برای سهولت تجسم آن را در $\mathbb{R}^۲$ یا $\mathbb{R}^۳$ تصور کنید. شکل ۲ مربوط $\mathbb{R}^۲$ است. فرض کنید هدف یافتن مینیمم (مجذور) فاصلهٔ نقطه $p=(p_۱,\dots,p_n)$ به مجموعهٔ تراز هموار $M=g^c$ است که p خارج آن قرار دارد. برای این کار بالنی کروی به مرکز p تجسم می‌کنیم که تدریجاً شعاع آن افزایش می‌یابد. اولین برخورد سطح این بالن

با M در نقطهٔ حداقل فاصله M از p صورت می‌گیرد. در این نقطه سطح بالن و M بر هم مماس می‌شوند پس قائم‌های این دو در یک راستا قرار می‌گیرند. جهت قائم بر M در نقطهٔ تماس a به وسیله $\nabla g(a)$ مشخص می‌شود. تابعی که یافتن مینیمم آن مطرح است، مجذور فاصله از p، یعنی $f(x) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - p_i)^2$ می‌باشد که گرادیان آن $\nabla f(x) = 2(x_1 - p_1, \ldots, x_n - p_n)$ در امتداد شعاع حامل از p به نقطهٔ x بر سطح بالن عمود است (در واقع سطح بالن در لحظات مختلف مجموعه‌های تراز گوناگون f است). بدین ترتیب همراستا بودن $\nabla f(a)$ و $\nabla g(a)$ توجیه می‌شود.

شکل ۲

اکنون مثال‌هایی از نحوهٔ به‌کار گرفتن قضیهٔ لاگرانژ در حل مسایل بهینه‌سازی ارائه می‌کنیم. در هر مسأله نقاط a را که در رابطهٔ $\nabla f(a) = \lambda \nabla g(a)$ صدق می‌کنند پیدا کرده و با مقایسهٔ مقدار f در این نقاط به جواب مسأله می‌رسیم. توجه کنید که اگر مسأله در $\mathbb{R}^n$ باشد، رابطهٔ $\nabla f(a) = \lambda \nabla g(a)$ در واقع n معادلهٔ $(n+1)$ـ مجهولی به‌دست می‌دهد (λ نیز نامعلوم است) ولی رابطه $g(x) = c$ (مجموعهٔ ترازی که نقطهٔ مورد نظر روی آن قرار دارد) نیز برقرار است که با انضمام آن می‌توان امید داشت از $(n+1)$ معادلهٔ $(n+1)$ مجهولی به جواب برسیم.

<u>مثال ۱</u> نزدیکترین و دورترین نقاط بیضی‌وار $\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{2} = 1$ را از نقطهٔ $(-1, 0, 0)$ پیدا کنید. مجذور فاصله، یعنی $f(x,y,z) = (x+1)^2 + y^2 + z^2$ را در نظر می‌گیریم. هدف یافتن مینیمم و ماکسیمم این تابع برای (x,y,z) محدود به سطح بیضی‌وار است. اگر قرار دهیم $g(x,y,z) = \frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{2}$، هدف یافتن ماکسیمم و مینیمم تحدید f به مجموعهٔ تراز $g(x,y,z) = 1$ است. داریم $\nabla g(x,y,z) = (\frac{x}{2}, 2y, z)$ پس ∇g در هیچ نقطهٔ مجموعهٔ تراز $g(x,y,z) = 1$ صفر نمی‌شود و روش لاگرانژ باید جواب دهد. رابطهٔ $\nabla f = \lambda \nabla g$ به صورت زیر در می‌آید:

$$\begin{cases} 2(x+1) = \lambda(\frac{x}{2}) \\ 2y = \lambda(2y) \\ 2z = \lambda(z) \end{cases}$$

رابطه دوم نشان می‌دهد $y = 0$ یا $\lambda = 1$ که این دو حالت را جداگانه بررسی می‌کنیم.

www.ttmar.ir

حالت $y = ۰$ از معادله سوم نتیجه می‌شود که $z = ۰$ یا $\lambda = ۲$. اگر $z = ۰$، علاوه بر $y = ۰$، داریم $x = \pm ۲$ و دو نقطهٔ $(\pm ۲, ۰, ۰)$ برای بررسی مطرح می‌شوند. اگر $\lambda = ۲$، معادلهٔ اول می‌دهد $x = ۲x + ۲$ یا $x = -۲$ که در نتیجه $y = z = ۰$ و همان نقطهٔ $(-۲, ۰, ۰)$ به‌دست می‌آید.

حالت $\lambda = ۱$ در این صورت معادله سوم نتیجه می‌دهد $z = ۰$ و معادله اول $\frac{x}{۲} = ۲x + ۲$ منجر می‌شود به $x = -\frac{۴}{۳}$. چون $z = ۰$ داریم $y = \pm\frac{\sqrt{۵}}{۳}$. در نتیجه دو نقطه $(-\frac{۴}{۳}, \pm\frac{\sqrt{۵}}{۳}, ۰)$ مطرح می‌گردند.

در مجموع به چهار نقطهٔ $(\pm ۲, ۰, ۰)$ و $(-\frac{۴}{۳}, \pm\frac{\sqrt{۵}}{۳}, ۰)$ دست یافته‌ایم که با مقایسه مقدار f در این چهار نقطه باید جواب مورد نظر به‌دست آید:

$$f(۲, ۰, ۰) = ۹ \quad , \quad f(-۲, ۰, ۰) = ۱ \quad , \quad f(-\frac{۴}{۳}, \pm\frac{\sqrt{۵}}{۳}, ۰) = \frac{۲}{۳}$$

نتیجه این که $(۲, ۰, ۰)$ دورترین نقطهٔ بیضی‌وار، و $(-\frac{۴}{۳}, \pm\frac{\sqrt{۵}}{۳}, ۰)$ نزدیکترین نقطه‌های بیضی‌وار به نقطهٔ $(-۱, ۰, ۰)$ هستند.

مثال ۲ فرض کنید $K, A, B, C, D, \alpha, \beta, \gamma$ داده‌های ثابت مثبت هستند. می‌خواهیم ماکسیمم تابع $f(x, y, z) = Kx^{\alpha}y^{\beta}z^{\gamma}$ را مشروط به این که $Ax + By + Cz = D$، $x \geq ۰$، $y \geq ۰$ و $z \geq ۰$ بررسی کنیم. این نوع بهینه‌سازی در بعضی مسایل اقتصادی مطرح می‌شود. در این تعبیر x، y و z عوامل تولید هستند (مثلاً نیروی کار، ماده اولیه و سرمایه‌گذاری در ماشین آلات) و A، B و C هزینهٔ واحد این عوامل. D مقدار ثابتی است که مجموع هزینه‌گذاری را نمایش می‌دهد. f تابع تولید برحسب عوامل x, y, z است. هدف، انتخاب نسبت مناسب از x، y و z با قید $Ax + By + Cz = D$ است به نحوی که میزان تولید حداکثر ممکن باشد. از نظر هندسی باید ماکسیمم تابع $f(x, y, z) = Kx^{\alpha}y^{\beta}z^{\gamma}$ روی مثلث واقع بر صفحهٔ $Ax + By + Cz = D$ محصور در ثمن اول $(x \geq ۰, y \geq ۰, z \geq ۰)$ بررسی شود. توجه کنید که روی اضلاع مثلث، یکی از سه متغیر x، y یا z صفر می‌شود و در نتیجه مقدار f صفر می‌شود، بنابراین جواب باید یک نقطهٔ درونی مثلث باشد.

شکل ۳

ضمناً با نوشتن $g(x,y,z) = Ax + By + Cz$ می‌بینیم که $\nabla g(x,y,z) = (A,B,C)$ همه‌جا ناصفر است و روش لاگرانژ باید جواب مورد نظر را به‌دست دهد. رابطه $\nabla f = \lambda \nabla g$ به صورت مؤلفه به مؤلفه هست:

$$\begin{cases} \alpha K x^{\alpha-1} y^{\beta} z^{\gamma} = \lambda A \\ \beta K x^{\alpha} y^{\beta-1} z^{\gamma} = \lambda B \\ \gamma K x^{\alpha} y^{\beta} z^{\gamma-1} = \lambda C \end{cases}$$

چون برای جواب مطلوب $x \neq 0$، $y \neq 0$ و $z \neq 0$، می‌توانیم سه رابطه را به ترتیب در x، y، و z ضرب کرده نتیجه بگیریم:

$$\begin{cases} \alpha f(x,y,z) = \lambda A x \\ \beta f(x,y,z) = \lambda B y \\ \gamma f(x,y,z) = \lambda C z \end{cases}$$

بنابراین

$$\frac{A}{\alpha}x = \frac{B}{\beta}y = \frac{C}{\gamma}z$$

که با جایگزین در $Ax + By + Cz = D$ به جواب منحصر به فردی می‌رسد. همان طور که بحث شد این جواب یکتا باید ماکسیمم باشد. رابطهٔ بالا نشان می‌دهد سهم مناسب x، y و z با ماکسیمم کردن تابع تولید نسبت $(x:y:z) = (\frac{\alpha}{A} : \frac{\beta}{B} : \frac{\gamma}{C})$ است.

بالاخره مثال سادهٔ زیر نشان می‌دهد که رعایت بررسی جداگانهٔ نقاط احتمالاً ناهموار، یعنی نقاطی که در آن ∇g صفر می‌شود کاملاً ضروری است.

مثال ۳ نزدیکترین نقطهٔ خم $y^2 - x^3 = 0$ به نقطهٔ $(-1, 0)$ را پیدا کنید.

مجذور فاصلهٔ $(-1, 0)$ از نقطهٔ (x,y) هست $f(x,y) = (x+1)^2 + y^2$. برای $g(x,y) = y^2 - x^3$، رابطهٔ $\nabla f = \lambda \nabla g$ به صورت زیر در می آید:

$$\begin{cases} 2(x+1) = \lambda(-3x^2) \\ 2y = \lambda(2y) \end{cases}$$

www.ttmar.ir

جواب بدیهی مسأله، نقطه $(0,0)$ است که در رابطهٔ اول بالا صدق نمی‌کند. توجه کنید که $\triangledown g(0,0) = \underline{0}$ و خم $y^2 - x^3 = 0$ در $(0,0)$ هموار نیست.

شکل ۴

www.ttmar.ir

بهینه‌سازی (۲)

در این جلسه نخست به تشریح نقش فرض $\nabla g(a) \neq 0$ در قضیهٔ لاگرانژ می‌پردازیم. همان طور که مثال آخر جلسهٔ قبل نشان داد وقتی $\nabla g(a) = 0$، ممکن است مجموعهٔ تراز تابع g که از a می‌گذرد در نقطهٔ a هموار نباشد و در این صورت مماس و قائم در آن نقطه فاقد معنی می‌شوند. یادآوری می‌کنیم که "هموار بودن" مجموعه تراز $M = g^c$ در نقطهٔ a را بدین معنی گرفتیم که بتوانیم بخشی از مجموعهٔ M حول a را به صورت نمودار یک تابع مشتق‌پذیر $(n-1)$ متغیری بنویسیم. حال $\nabla g(a) = (\frac{\partial g}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial g}{\partial x_n}(a))$ و شرط $\nabla g(a) \neq 0$ معادل این است که دست کم یکی از $\frac{\partial g}{\partial x_i}(a)$ ها صفر نباشد. مثلاً فرض کنید $\frac{\partial g}{\partial x_n}(a) \neq 0$. در این صورت بنابر قضیهٔ تابع ضمنی نقاط $(x_1, \ldots, x_n)$ از مجموعهٔ تراز $M = g^c$ را که نزدیک a هستند می‌توان به صورت نمودار تابعی مشتق‌پذیر $x_n = \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1})$ نمایش داد و تحدید تابع f به M را می‌توان به صورت تابعی از $x_1, \ldots, x_{n-1}$ نوشت:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_{n-1}, \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}))$$

که عبارت سمت راست را به $h(x_1, \ldots, x_{n-1})$ نمایش می‌دهیم. حال اگر a یک نقطهٔ ماکسیمم یا مینیمم موضعی تحدید f به M باشد، $a' = (a_1, \ldots, a_{n-1})$ یک نقطهٔ بحرانی برای h است، و در واقع در هر نقطهٔ بحرانی a' از h داریم $\nabla h(a') = 0$، یا $\frac{\partial h}{\partial x_i}(a') = 0$ برای هر i. طبق قاعدهٔ زنجیره‌ای داریم:

$$\frac{\partial h}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$$

پس در نقطهٔ بحرانی a:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = 0 \quad , \quad i = 1, \ldots, n-1 \qquad (1)$$

www.ttmar.ir

از طرفی دیگر چون مجموعهٔ M در واقع مجموعهٔ تراز منسوب به ۰ تابع $\varphi(x_۱,\ldots,x_{n-۱}) - x_n$ است، جهت عمود بر آن توسط گرادیان این تابع، یعنی بردار زیر داده می‌شود:

$$(\frac{\partial\varphi}{\partial x_۱},\ldots,\frac{\partial\varphi}{\partial x_{n-۱}},-۱) \qquad (۲)$$

از مقایسهٔ روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که:

$$(\frac{\partial\varphi}{\partial x_۱}:\cdots:\frac{\partial\varphi}{\partial x_{n-۱}}:-۱) = (\frac{\partial f}{\partial x_۱}:\cdots:\frac{\partial f}{\partial x_{n-۱}}:\frac{\partial f}{\partial x_n})$$

پس در نقطهٔ a، $\bigtriangledown f(a)$ عمود بر M است. استدلال بالا در واقع اثبات دیگری از قضیهٔ لاگرانژ است که در آن به صراحت نشان داده شد که هرگاه مجموعهٔ تراز M در a هموار باشد و a یک نقطهٔ بحرانی برای تحدید f به M، آنگاه $\bigtriangledown f(a)$ بر مجموعهٔ تراز M عمود است.

هدف بعدی ما تعمیم قضیهٔ لاگرانژ به حالتی است که به جای $g(x_۱,\ldots,x_n)=c$، تعدادی رابطه از این نوع ملحوظ شده باشد. به طور کلی، به خصوص در کاربردها، اصطلاحات زیر معمول است. تابع f که ماکسیمم یا مینیمم تحدید آن به زیرمجموعهٔ خاصی مطرح است تابع عینی، و شرط $g(x_۱,\ldots,x_n)=c$ (تعریف کنندهٔ مجموعهٔ تراز $M=g^c$) را یک قید می‌نامند. تا اینجا فقط مسائل تک قیدی را مطرح کرده‌ایم و اکنون قصد داریم مسائل چند قیدی را نیز بررسی کنیم.

وضعیت زیر را در نظر می‌گیریم. تابع $f:U\longrightarrow\mathbb{R}$ داده شده است که تابعی مشتق‌پذیر روی زیرمجموعهٔ باز U از $\mathbb{R}^n$ است. به علاوه تابع‌های $g_۱,\ldots,g_k:U\longrightarrow\mathbb{R}$ نیز داده شده‌اند که دارای مشتق‌های پاره‌ای مرتبهٔ اول پیوسته می‌باشند. می‌خواهیم ماکسیمم یا مینیمم تحدید تابع f به اشتراک مجموعه‌های تراز $M_۱:g_۱(x_۱,\ldots,x_n)=c_۱$، ...، $M_k:g_k(x_۱,\ldots,x_n)=c_k$ را بیابیم. به بیان دیگر، مقصود یافتن ماکسیمم یا مینیمم f تحت قیود $g_۱(x_۱,\ldots,x_n)=c_۱$، ...، $g_k(x_۱,\ldots,x_n)=c_k$ است. در حالت $k=۱$ دیدیم که اگر در نقطهٔ مطلوب a، $\bigtriangledown g(a)\neq ۰$، آنگاه مجموعهٔ تراز $M:g(x)=c$ حول نقطهٔ a هموار است، و $\bigtriangledown f(a)$ عمود بر این مجموعه عمود خواهد بود. حال اگر اشتراک مجموعه‌های تراز حول a هموار باشد، آنگاه خواهیم دید که به دلیلی کاملاً مشابه حالت تک قیدی، $\bigtriangledown f(a)$ بر این اشتراک عمود است. بدین ترتیب دو سؤال زیر مطرح می‌شود:

۱) تحت چه شرایطی اشتراک مجموعه‌های تراز حول a هموار است؟

۲) به شرط هموار بودن اشتراک مجموعه‌های تراز حول a، چگونه می‌توان عمود بودن $\nabla f(a)$ بر این اشتراک را به صورت یک رابطهٔ جبری قابل استفاده بیان کرد؟

نخست سؤال (۱) را بررسی می‌کنیم. اشتراک مجموعه‌های تراز، مجموعهٔ $(x_1, \dots, x_n)$ هایی است که در روابط زیر صدق می‌کنند:

$$\begin{cases} g_1(x_1, \dots, x_n) - c_1 = 0 \\ \vdots \\ g_k(x_1, \dots, x_n) - c_k = 0 \end{cases}$$

فرض کنید نقطهٔ a در این روابط صدق کند. اگر بتوان از این روابط، حول a، k متغیر را به صورت تابع‌های مشتق‌پذیر از $(n-k)$ متغیر باقیمانده نوشت، آنگاه بخشی از اشتراک $M_1 \cap \dots \cap M_k$ که حول a قرار دارد به صورت نمودار یک تابع مشتق‌پذیر $(n-k)$ متغیری ظاهر می‌شود و بدین معنی "هموار" است. طبق قضیهٔ تابع ضمنی اگر یک زیرماتریس $k \times k$ از ماتریس $k \times n$ زیر، متشکل از k ستون، دارای دترمینان ناصفر باشد، آنگاه k متغیر مربوط به این k ستون را می‌توان به صورت تابع‌های مشتق‌پذیر نسبت به $(n-k)$ متغیر باقیمانده نوشت:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_k}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_k}{\partial x_n}(a) \end{bmatrix} \qquad (۳)$$

توجه کنید که ردیف iـ ام این ماتریس از مؤلفه‌های $\nabla g_i(a)$ تشکیل شده است. در حالت $k = 1$، که قبلاً بررسی شد، وجود یک ماتریس 1×1 با دترمینان مخالف صفر در واقع معادل این است که $\nabla g(a)$ صفر نباشد (یعنی حداقل یک مؤلفهٔ ناصفر داشته باشد). برای $k > 1$ توجه کنید اگر یکی از $\nabla g_i(a)$ ها را بتوان به صورت "ترکیبی خطی" از سایر $\nabla g_i(a)$ ها نوشت، یعنی مثلاً:

$$\nabla g_k(a) = c_1 \nabla g_1(a) + \dots + c_{k-1} \nabla g_{k-1}(a)$$

که در آن $c_1, \dots, c_{k-1}$ عدد حقیقی هستند، آنگاه برای هر زیرماتریس $k \times k$ از ماتریس بالا نیز، یک ردیف ترکیبی خطی از سایر ردیف‌ها می‌شود و در نتیجه دترمینان صفر خواهد شد. طبق قضایای جبر خطی، عکس موضوع فوق نیز صحیح است، یعنی شرطی لازم و کافی برای این که ماتریس (۳) دارای

زیر ماتریس $k \times k$ با دترمینان ناصفر باشد این است که نتوان هیچ‌یک از $\triangledown g_i(a)$ ها را به صورت ترکیبی خطی از سایر $\triangledown g_i(a)$ ها نوشت.

بدین ترتیب جایگزین مناسب برای شرط $\triangledown g(a) \neq \circ$ در حالتی که k قید موجود باشند این خواهد بود که $\{\triangledown g_۱(a), \ldots, \triangledown g_k(a)\}$ مستقل خطی باشد. این شرط تضمین می‌کند که بخشی از $M = M_۱ \cap \ldots \cap M_k$ که در نزدیکی a قرار دارد نمودار یک تابع $(n-k)$ متغیری مشتق‌پذیر است و به این مفهوم از "هموار بودن" برخوردار است.

حال به سؤال دوم می‌پردازیم. فرض کنید اشتراک $M = M_۱ \cap \ldots \cap M_k$ حول a هموار است و بردار w بر این اشتراک عمود می‌باشد. با توجه به ملاحظات بالا که M حول a نمودار یک تابع مشتق‌پذیر $(n-k)$ـ متغیری است و با $(n-k)$ پارامتر به طور مشتق‌پذیر توصیف می‌شود، می‌توان آن را یک شیء هموار $(n-k)$ـ بعدی تصور کرد که در $\mathbb{R}^n$ قرار گرفته است. بنابراین جهت عمود بر M در نقطهٔ a، k بعدی می‌شود. توجه کنید که k بردار مستقل خطی $\triangledown g_۱(a), \ldots, \triangledown g_k(a)$ همه در راستای عمود بر M قرار دارند زیرا که $\triangledown g_i(a)$ بر M_i عمود است و در نتیجه هر زیرمجموعه M از M_i نیز عمود می‌باشد. پس ترکیب‌های خطی $c_۱ \triangledown g_۱(a) + \cdots + c_k \triangledown g_k(a)$ یک فضای kـ بعدی پدید می‌آورند که همان فضای kـ بعدی عمود بر M است. بدین ترتیب باید بتوان w را به صورت ترکیبی خطی از $\triangledown g_۱(a), \ldots, \triangledown g_k(a)$ نوشت. با توجه به این توضیحات، اکنون آماده‌ایم تعمیم قضیهٔ لاگرانژ را ارائه کنیم:

(۱۷—۱)<u>قضیه لاگرانژ (صورت کامل)</u> U زیرمجموعه‌ای باز از $\mathbb{R}^n$ است، $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی مشتق‌پذیر، و $g_۱, \ldots, g_k : U \longrightarrow \mathbb{R}$ تابع‌هایی با مشتق‌های پاره‌ای مرتبهٔ اول پیوسته. فرض کنید برای اعداد حقیقی داده شدهٔ $c_۱, \ldots, c_k$، مجموعه‌های $M_۱, \ldots, M_k$، به ترتیب، مجموعه‌های تراز $g_۱, \ldots, g_k$ منسوب به $c_۱, \ldots, c_k$ باشند، یعنی $M_i = g_i^{c_i}$، و $M = M_۱ \cap \ldots \cap M_k$. اگر نقطهٔ a در M یک نقطهٔ ماکسیمم یا مینیمم موضعی تحدید تابع f به M باشد و اگر $\triangledown g_۱(a), \ldots, \triangledown g_k(a)$ مستقل خطی باشند، آنگاه اعداد حقیقی $\lambda_۱, \ldots, \lambda_k$ وجود دارند که:

$$\triangledown f(a) = \lambda_۱ \triangledown g_۱(a) + \cdots + \lambda_k \triangledown g_k(a) \qquad (۴)$$

با توجه به مقدمات ذکر شده بیشتر اثبات این قضیه قبلاً آماده شده است، فقط باید ثابت کنیم که اگر a یک نقطهٔ ماکسیمم یا مینیمم موضعی برای تحدید f به M باشد، آنگاه $\nabla f(a)$ بر M عمود است. ولی اثبات این مطلب عیناً مانند حالت $k = 1$ است. اگر $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ خمی مشتق‌پذیر باشد که تصویر آن به تمامی در M قرار می‌گیرد و $\gamma(t_0) = a$، باید ثابت کنیم $\nabla f(a)$ بر $\gamma'(t_0)$ عمود است. برای این کار توجه می‌کنیم که $f \circ \gamma$ در t_0 دارای ماکسیمم یا مینیمم موضعی است، پس $(f \circ \gamma)'(t_0) = 0$، و طبق قاعدهٔ زنجیره‌ای $\nabla f(a) \cdot \gamma'(t_0) = 0$ و حکم به اثبات می‌رسد.

در زیر به ذکر دو مثال می‌پردازیم. توجه کنید که (۴) در واقع n معادله با $(n+k)$ مجهول $x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_k$ به‌دست می‌دهد، و با کمک k قید داده شده مجموعاً $(n+k)$ معادله با $(n+k)$ مجهول در دست است.

<u>مثال ۱</u> برای اشتراک استوانهٔ $x^2 + y^2 = 1$ و صفحهٔ $x + 2y + 3z = 1$، نقطه‌هایی که بزرگترین و کوچکترین z را دارند پیدا کنید.

<u>حل</u> تابع عینی در اینجا $f(x,y,z) = z$ است و قیدها عبارتند از $x^2 + y^2 - 1 = 0$ و $x + 2y + 3z - 1 = 0$. می‌نویسیم $g_1(x,y,z) = x^2 + y^2 - 1$ و $g_2(x,y,z) = x + 2y + 3z - 1$. داریم $\nabla g_1(x,y,z) = (2x, 2y, 0)$ و $\nabla g_2(x,y,z) = (1,2,3)$. ∇g_2 که هیچ‌گاه مضربی از ∇g_1 نیست زیرا که مؤلفه سوم ∇g_2 برابر ۳ است و مؤلفه سوم ∇g_1 برابر ۰. تنها به‌ازای $x = y = 0$، ∇g_1 مضرب (صفر) ∇g_2 می‌شود، ولی هیچ نقطهٔ به شکل $(0,0,z)$ روی استوانهٔ داده شده قرار ندارد، پس شرط استقلال خطی در همهٔ نقاط اشتراک برقرار است. بدین ترتیب می‌توانیم از رابطهٔ $\nabla f = \lambda_1 \nabla g_1 + \lambda_2 \nabla g_2$ استفاده کنیم:

$$\begin{cases} 0 = \lambda_1(2x) + \lambda_2(1) \\ 0 = \lambda_1(2y) + \lambda_2(y) \\ 1 = \lambda_1(0) + \lambda_2(3) \end{cases}$$

از معادله سوم نتیجه می‌شود که $\lambda_2 = \frac{1}{3}$ و با جایگزین در معادله اول معلوم می‌شود که $\lambda_1 \neq 0$، پس $x = \frac{-1}{6\lambda_1}$ و $y = \frac{-1}{3\lambda_1}$. با جایگزین در $x^2 + y^2 = 1$ داریم $\lambda_1 = \pm\frac{\sqrt{5}}{6}$، پس با استفاده

www.ttnar.ir

از $x + ۲y + ۳z = ۱$، دو نقطهٔ $(\frac{۱+\sqrt{۵}}{۳}, \frac{-۲}{\sqrt{۵}}, \frac{-۱}{\sqrt{۵}})$ و $(\frac{۱-\sqrt{۵}}{۳}, \frac{۲}{\sqrt{۵}}, \frac{۱}{\sqrt{۵}})$ به‌دست می‌آیند، که اولی بزرگترین z و دومی کوچکترین z ممکن را دارد.

مثال ۲ فرض کنید که $g_۱(x,y,z) = ۰$ و $g_۲(x,y,z) = ۰$ دو رویه هموار در $\mathbb{R}^۳$ هستند که اشتراک تهی دارند، و نقطه P روی رویهٔ اول و نقطهٔ Q روی رویهٔ دوم طوری هستند که پاره‌خط PQ کوتاهترین طول ممکن میان پاره‌خط‌های واصل بین دو رویه را دارد. نشان دهید پاره‌خط PQ بر هر دو رویه عمود است.

حل هموار بودن دو رویه را بدین معنی می‌گیریم که تابع‌های $g_۱$ و $g_۲$ دارای مشتق‌های پاره‌ای مرتبه اول پیوسته‌اند، و $\nabla g_۱$ در سراسر $g_۱(x,y,z) = ۰$ و $\nabla g_۲$ در سراسر $g_۲(x,y,z) = ۰$ ناصفر هستند. اگر یک نقطهٔ رویهٔ اول را به (x,y,z) و یک نقطهٔ رویهٔ دوم را به (x',y',z') نمایش دهیم، تابعی که مینیمم آن مطرح است تابع ٦ متغیری $f(x,y,z,x',y',z') = (x-x')^۲ + (y-y')^۲ + (z-z')^۲$ می‌باشد. تابع‌های $g_۱$ و $g_۲$ را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$G_۱(x,y,z,x',y',z') = g_۱(x,y,z) \quad , \quad G_۲(x,y,z,x',y',z') = g_۲(x',y',z')$$

بدین ترتیب قیدهای مسأله $G_۱(x,y,z,x',y',z') = ۰$ و $G_۲(x,y,z,x',y',z') = ۰$ می‌باشند. توجه کنید که

$$\nabla G_۱(x,y,z,x',y',z') = (\frac{\partial g_۱}{\partial x}, \frac{\partial g_۱}{\partial y}, \frac{\partial g_۱}{\partial z}, ۰, ۰, ۰)$$

$$\nabla G_۲(x,y,z,x',y',z') = (۰, ۰, ۰, \frac{\partial g_۲}{\partial x'}, \frac{\partial g_۲}{\partial y'}, \frac{\partial g_۲}{\partial z'})$$

که مستقل خطی هستند زیرا که $\nabla g_۱ \neq \underline{۰}$ و $\nabla g_۲ \neq \underline{۰}$ در سراسر رویه‌های داده شده فرض شده

www.ttmar.ir

است. رابطهٔ لاگرانژ $\nabla f = \lambda_۱ \nabla G_۱ + \lambda_۲ \nabla G_۲$ به صورت زیر در می‌آید:

$$\begin{cases} ۲(x-x') = \lambda_۱ \dfrac{\partial g_۱}{\partial x} + \lambda_۲(۰) \\ ۲(y-y') = \lambda_۱ \dfrac{\partial g_۱}{\partial y} + \lambda_۲(۰) \\ ۲(z-z') = \lambda_۱ \dfrac{\partial g_۱}{\partial z} + \lambda_۲(۰) \\ -۲(x-x') = \lambda_۱(۰) + \lambda_۲ \dfrac{\partial g_۲}{\partial x'} \\ -۲(y-y') = \lambda_۱(۰) + \lambda_۲ \dfrac{\partial g_۲}{\partial y'} \\ -۲(z-z') = \lambda_۱(۰) + \lambda_۲ \dfrac{\partial g_۲}{\partial z'} \end{cases}$$

اگر $P = (x,y,z)$ و $Q = (x',y',z')$ جواب مسأله باشند، که باید در این روابط صدق کنند، از سه رابطهٔ اول داریم $۲\vec{QP} = \lambda_۱ \nabla g_۱(P)$، پس $\vec{PQ}$ بر $g_۱(x,y,z) = ۰$ در نقطهٔ P عمود است. همین طور از سه رابطهٔ دوم نتیجه می‌شود که $-۲\vec{PQ} = \lambda_۲ \nabla g_۲(Q)$، یعنی $\vec{PQ}$ در نقطهٔ Q بر $g_۲(x',y',z') = ۰$ عمود است، و نتیجه مطلوب به‌دست می‌آید.

دو توضیح در مورد مثال بالا بجا است. یکی اینکه حکم مشابه برای اشکال مسطح، مثلاً دو خط متنافر در $\mathbb{R}^۳$، را معمولاً در چارچوب هندسه اقلیدسی ثابت می‌کنیم، ولی حتی بیان مطلب برای اشیاء خمیده نیاز به مفهوم "شیء هموار" دارد که در اینجا به تعریفی از آن رسیده‌ایم. نکتهٔ دیگر این که برای حل این مسأله سه بعدی (دو رویه در $\mathbb{R}^۳$) عملاً مطلب را به یک مسأله در $\mathbb{R}^٦$ تبدیل کردیم و به سهولت به جواب رسیدیم. توجه کنید که $G_۱(x,y,z,x',y',z') = ۰$ و $G_۲(x,y,z,x',y',z') = ۰$ هر یک یک "شیء هموار ۵ـ بعدی" در $\mathbb{R}^٦$ تعریف می‌کند که اشتراک آنها به سبب استقلال خطی $\nabla G_۱$ و $\nabla G_۲$ یک "شیء هموار ۴ـ بعدی" در $\mathbb{R}^٦$ می‌شود. آنگاه مینیمم تحدید تابع f را به این شیء چهار بعدی مد نظر قرار دادیم.

انتگرال چندگانه

یکی از دو رکن اصلی حساب دیفرانسیل و انتگرال، فرایند انتگرال‌گیری است. یک تعبیر متداول از انتگرال $\int_a^b f$ وقتی f تابعی نامنفی و تعریف شده روی $[a,b]$ باشد، اندازهٔ مساحت زیر نمودار تا محور x بین a و b است. در اینجا می‌خواهیم مفهوم انتگرال تابع‌های تعریف شده روی ناحیه‌های واقع در $\mathbb{R}^n$ را بررسی کنیم. یک تفاوت فوری که به ذهن می‌رسد تنوع شکل ناحیه‌ها در حالت دو بعدی و ابعاد بالاتر است. در حالت یک بعدی دامنهٔ تعریف تابع معمولاً یک بازه یا اجتماع چند بازه در نظر گرفته می‌شود و این در تقریباً همهٔ موارد کفاف نیاز می‌کند. در حالت دو بعدی انواع ناحیه‌های محصور به پاره‌خط یا قطعه خم را می‌توان تصور کرد که به طور طبیعی در مسائل گوناگون ظاهر می‌شوند. مثلاً در شکل ۱، ناحیهٔ داده شده ممکن است یک صفحه نازک با چگالی متغیر $\rho(x,y)$ باشد. برای محاسبه جرم این صفحه باید از $\rho(x,y)$ در سراسر ناحیه "انتگرال‌گیری" شود. برای مطرح ساختن مفهوم انتگرال در بعد ۲ به بالا، نخست مفهوم انتگرال را روی "مستطیل" که تعمیم طبیعی بازه است مطرح می‌کنیم، سپس به ناحیه‌های پیچیده‌تر می‌پردازیم.

شکل ۱

فرض کنید $2n$ عدد حقیقی $a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n$ داده شده‌اند که $a_1 \leq b_1$، ...، $a_n \leq b_n$. مجموعهٔ زیر یک <u>مستطیل بسته</u> در $\mathbb{R}^n$ خوانده می‌شود:

$$R = \{(x_1,\dots,x_n) \mid a_1 \leq x_1 \leq b_1,\dots,a_n \leq x_n \leq b_n\}$$

اصطلاح "بسته" ارجاع به علامت $\leq$ است. وقتی به جای $\leq$، نماد $<$ به‌کار برده شود، یک "مستطیل باز" تعریف می‌شود و در صورت اختلاط $<$ و $\leq$، انواع مستطیل‌ها که شامل بخشی از مرز خود می‌شوند به‌دست می‌آیند. مقصود از یک <u>افراز</u> R، تجزیهٔ R به زیرمستطیل‌هایی از همین نوع به شکل دقیق زیر

است. برای هر مؤلفه، مثلاً مؤلفهٔ iـ ام، بازهٔ $[a_i, b_i]$ را به صورت زیر افراز می‌کنیم:

$$a_i = a_{i0} \leq a_{i1} \leq \cdots \leq a_{i,p_i} = b_i$$

p_i تعداد زیربازه‌هایی است که $[a_i, b_i]$ به آن تجزیه شده است. اگر این افراز برای هر مؤلفه انجام گیرد، تجزیه‌ای که برای R حاصل می‌شود مرکب از زیرمستطیل‌های به شکل زیر است:

$$a_{1,j_1} \leq x_i \leq a_{1,j_1+1}, \ldots, a_{n,j_n} \leq x_n \leq a_{n,j_n+1}$$

در شکل ۲، یک نمونه از زیرمستطیل‌های تجزیه هاشور زده شده است.

شکل ۲

حجم nـ بعدی مستطیل R را برابر حاصل‌ضرب طول اضلاع، یعنی $(b_1 - a_1) \times \cdots \times (b_n - a_n)$ تعریف می‌کنیم. بدین ترتیب حجم R برابر مجموع حجم‌های زیرمستطیل‌های پدید آمده در افراز است. در حالت $n = 1$، حجم ۱ـ بعدی همان طول، در حالت $n = 2$، حجم دو بعدی برابر مساحت، و برای $n = 3$، همان مفهوم حجم معمولی است.

حال فرض کنید تابعی کراندار $f : R \longrightarrow \mathbb{R}$ داده شده است، می‌خواهیم مفهومی $\int_R f$ تعریف کنیم که موارد استفاده‌ای مشابه انتگرال روی یک بازهٔ $[a, b]$ را داشته باشد. بدین ترتیب در حالت دو بعدی، $n = 2$، اگر $f(x) \geq 0$ برای هر x در R، آنگاه $\int_R f$ باید بیانگر "حجم" زیر نمودار $f : R \longrightarrow \mathbb{R}$ باشد. همچنین برای $n = 2$ و $n = 3$، اگر f در هر نقطهٔ R، چگالی منسوب به آن نقطه را بیان کند، $\int_R f$ باید جرم کل R باشد. به این منظور به روشی مشابه حالت یک بعدی عمل می‌کنیم. فرض کنید افرازی از R داده شده باشد و زیرمستطیل‌های افراز را $R_1, \ldots, R_p$ نامگذاری کنید. در هر R_i، نقطه‌ای Q_i به دلخواه انتخاب کنید و مجموع زیر را در نظر بگیرید:

$$\sum_{i=1}^{p} vol(R_i) \cdot f(Q_i) \qquad (1)$$

که در اینجا مقصود از $vol(R_i)$ حجم (nـ بعدی) R_i است. مجموع‌های به شکل (۱) را مجموع ریمان می‌نامند. در حالت دو بعدی مجموع فوق تقریب معقولی برای حجم زیر نمودار f است چه

www.ttmar.ir

$vol(R_i) \cdot f(Q_i)$ در واقع حاصل‌ضرب مساحت قاعدهٔ مستطیل R_i در ارتفاع نمودار بالاسر Q_i است، یعنی حجم یک مکعب مستطیل. مجموع حجم‌های این مکعب مستطیل‌ها تقریبی است برای حجم زیر نمودار. به تقلید از حالت یک بعدی می‌خواهیم "حد" مجموع‌های ریمان را، وقتی "ضخامت افراز" به صفر میل می‌کند، حجم زیر نمودار یا انتگرال تابع f بنامیم. ضخامت افراز را می‌توان مثلاً به شکل $\max_{i,j}(a_{i,j+1} - a_{i,j})$ تعریف کرد. تعریف دقیق انتگرال به صورت زیر است:

(۳۲—۱)<u>تعریف</u> تابع کراندار f روی مستطیل بستهٔ R تعریف شده است. اگر عددی I وجود داشته باشد با این ویژگی که به‌ازای هر $\varepsilon > 0$، $\delta > 0$ وجود داشته باشد که هرگاه ضخامت یک افراز R از δ کوچکتر باشد، آنگاه برای مجموع (۱) داشته باشیم:

$$|\text{مجموع ریمان} - I| < \varepsilon$$

در آن صورت f را <u>انتگرال‌پذیر روی R</u> خوانده و I را، که معمولاً به $\int_R f$ نمایش می‌دهیم، <u>انتگرال f روی R</u> می‌نامیم.

خواص زیر به روش‌هایی کاملاً مشابه حالت یک متغیری قابل اثبات هستند.

(۳۲—۲)<u>خواص ابتدایی انتگرال روی مستطیل</u>

(۳۲—۲—۱) <u>(خطی بودن)</u> اگر f, g روی R انتگرال‌پذیر باشند و c یک عدد حقیقی باشد، آنگاه $f+g$ و cf روی R انتگرال‌پذیرند و

$$\int_R (f+g) = \int_R f + \int_R g \qquad (۲)$$

$$\int_R (cf) = c\int_R f \qquad (۳)$$

(۳۲—۲—۲) اگر f روی R انتگرال‌پذیر باشد و $f(x) \geq 0$ برای هر x در R، آنگاه:

$$\int_R f \geq 0$$

(۳۲—۲—۳) اگر f تابع ثابت $f(x)=k$ روی R باشد، f انتگرال‌پذیر است و:

$$\int_R f = k.vol(R) \tag{۴}$$

بدین ترتیب اگر از تابع ثابت با مقدار ۱ روی R انتگرال بگیریم عدد حاصل برابر حجم nــ بعدی R است.

(۳۲—۲—۴) اگر مستطیل R برابر اجتماع دو زیرمستطیل R' و R'' باشد که فقط در مرز اشتراک دارند و f روی هر یک از R' و R'' انتگرال‌پذیر باشد، آنگاه f روی R انتگرال‌پذیر است و

$$\int_R f = \int_{R'} f + \int_{R''} f \tag{۵}$$

شکل ۳

(۳۲—۳) مثال مهم: تابع پیوسته. فرض کنید $f : R \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع پیوسته باشد. می‌دانیم هر تابع پیوسته روی مجموعهٔ بسته و کراندار، کراندار است (در واقع حتی، ماکسیمم و مینیمم اتخاذ می‌کند). طبق قضیه‌ای که اثبات آن در اینجا نخواهد آمد، هر تابع پیوسته روی یک مجموعهٔ بسته و کراندار $\mathbb{R}^n$، در واقع به طور یکنواخت پیوسته است، بدین معنی که هرگاه $\varepsilon > ۰$ داده شده باشد، $\delta > ۰$ وجود دارد که برای هر دو عضو x, x' از دامنهٔ تابع که $|x-x'| < \delta$، داریم $|f(x)-f(x')| < \varepsilon$. تفاوت این امر با پیوستگی عادی در سراسر دامنه این است که در حالت عادی یک δ ی واحد ممکن است در سراسر دامنه برای ε داده شده کار نکند، بلکه به‌ازای هر x دامنه، باید $\delta > ۰$ مناسب آن نقطه یافت شود که هرگاه $|x-x'| < \delta$، آنگاه $|f(x)-f(x')| < \varepsilon$. به کمک مفهوم پیوستگی یکنواخت می‌توان نشان داد که هر تابع پیوسته روی مستطیل بسته انتگرال‌پذیر است. در واقع انتگرال‌پذیری محدود به تابع‌های پیوسته نیست. در حالت یک متغیری دیده‌ایم که تعدادی متناهی "جهش" در مقدار تابع اثری بر انتگرال‌پذیری ندارد. قضیه‌ای قاطع در این زمینه وجود دارد که طبق آن شرطی لازم و کافی برای انتگرال‌پذیری تابع کراندار f روی یک مستطیل nــ بعدی این است که نقاط

www.ttmar.ir

ناپیوستگی f مجموعاً "حجم nـ بعدی ناچیز" داشته باشد. تعریف دقیق چنین است: زیرمجموعهٔ S از $\mathbb{R}^n$ را دارای اندازهٔ صفر nـ بعدی می‌نامیم در صورتی که برای هر $\varepsilon > ۰$، دنباله‌ای $R_۱, R_۲, \ldots$ از مستطیل‌های nـ بعدی وجود داشته باشد که S را بپوشانند، یعنی $S \subset \bigcup_{i=۱}^{\infty} R_i$، و $\sum_{i=۱}^{\infty} vol(R_i) < \varepsilon$.

مثال ۱ هر مجموعهٔ متناهی در $\mathbb{R}^n$ اندازهٔ nـ بعدی صفر دارد. قرار دهید $S = \{p_۱, \ldots, p_k\}$. به مرکز p_i، مکعب nـ بعدی (یعنی مستطیل nـ بعدی با اضلاع برابر) به ضلع کوچکتر از $\sqrt[n]{\frac{\varepsilon}{k}}$ در نظر بگیرید و آن را R_i بنامید. داریم $S \subset \bigcup_{i=۱}^{k} R_i$ و $vol(R_i) < \frac{\varepsilon}{k}$، پس $\sum vol(R_i) < \varepsilon$.

مثال ۲ در واقع مثال بالا را می‌توان به هر مجموعهٔ شمارا $S = \{p_۱, p_۲, \ldots\}$ تعمیم داد. حول p_i مکعبی R_i به ضلع کوچکتر از $\sqrt[n]{\frac{\varepsilon}{۲^i}}$ در نظر بگیرید. داریم $\sum_{i=۱}^{\infty} vol(R_i) < \sum_{i=۱}^{\infty} \frac{\varepsilon}{۲^i} = \varepsilon$.

مثال ۳ استدلال مشابه بالا نشان می‌دهد اگر $S_۱, S_۲, \ldots$ دنباله‌ای از مجموعه‌های با اندازهٔ nـ بعدی صفر باشد، اجتماع آنها نیز اندازهٔ صفر دارد. در واقع می‌توان S_k را با دنباله‌ای از مستطیل‌ها به مجموع کوچکتر از $\frac{\varepsilon}{۲^k}$ پوشاند. مجموعهٔ همهٔ این مستطیل‌ها یک پوشش شمارا برای اجتماع S_k ها می‌دهد و مجموع حجم مستطیل از ε کوچکتر است.

مثال ۴ فرض کنید R یک مستطیل بسته در $\mathbb{R}^{n-۱}$ با حجم $(n-۱)$ـ بعدی ناصفر V است و $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع پیوسته. نمودار f یک زیرمجموعهٔ $\mathbb{R}^n$ است. نشان می‌دهیم نمودار f، به عنوان یک زیرمجموعه $\mathbb{R}^n$، دارای اندازهٔ nـ بعدی صفر است. برای $\frac{\varepsilon}{V}$، طبق پیوستگی یکنواخت f روی R، $\delta > ۰$ وجود دارد که هرگاه $|x - x'| < \delta$، آنگاه $|f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{V}$. افرازی از R در نظر می‌گیریم با ضخامت آنقدر کوچک که هر دو نقطه در یک زیرمستطیل افراز، فاصله کوچکتر از δ داشته باشند. حال برای هر زیرمستطیل $(n-۱)$ بعدی R_i از این افراز، مستطیلی n بعدی S_i به ترتیب زیر می‌سازیم. فرض کنید M_i و m_i به ترتیب ماکسیمم و مینیمم تابع پیوسته f روی R_i باشند. S_i را متشکل از نقاط $(x_۱, \ldots, x_{n-۱}, x_n)$ می‌گیریم که $(x_۱, \ldots, x_{n-۱})$ در R_i باشد و $m_i \leq x_n \leq M_i$. داریم

$$vol(S_i) = vol(R_i) \times (M_i - m_i)$$

که در طرف چپ $vol(S_i)$ حجم n بعدی است و در طرف راست، $vol(R_i)$، حجم $(n-1)$ بعدی. بنابر انتخاب $\delta > 0$، داریم $M_i - m_i < \frac{\varepsilon}{V}$، پس $vol(S_i) < \frac{\varepsilon}{V} vol(R_i)$. حال توجه کنید که S_i ها نمودار f را می‌پوشانند و

$$\sum_i vol(S_i) = \sum_i (vol(R_i) \times (M_i - m_i)) < \frac{\varepsilon}{V} \sum_i vol(R_i) = \varepsilon$$

مثال فوق وسیلهٔ سودمندی برای محاسبهٔ انتگرال روی ناحیه‌های غیرمستطیل شکل خواهد شد. اکنون به بررسی انتگرال روی مجموعه‌های غیرمستطیلی می‌پردازیم. فرض کنید D یک مجموعهٔ کراندار در $\mathbb{R}^n$ باشد و $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع کراندار. چون D کراندار است، مستطیلی بسته R وجود دارد که $D \subset R$. تابع $\tilde{f} : R \longrightarrow \mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in D \\ 0 & x \notin D \end{cases}$$

شکل ۴

حال اگر $\tilde{f}$ روی R انتگرال‌پذیر باشد، چون $\tilde{f}$ خارج D صفر است، طبیعی است که $\int_D f$ را برابر $\int_R \tilde{f}$ تعریف کنیم. یک سؤال اساسی که بلافاصله مطرح می‌شود این است که حتی اگر f روی D پیوسته نباشد، جهش مقادیر $\tilde{f}$ به صفر خارج از D می‌تواند ناپیوستگی در سراسر مرز D پدید آورد. بدین ترتیب اگر ناحیه D دارای این ویژگی باشد که <u>مرز D اندازهٔ nـ بعدی صفر</u> داشته باشد، آنگاه $\tilde{f}$ روی R انتگرال‌پذیر خواهد شد مشروط بر این که مجموعهٔ نقاط ناپیوستگی f در D نیز یک مجموعه با اندازهٔ nـ بعدی صفر باشد (بالاخص اگر f روی D پیوسته باشد). ناحیه‌های کراندار D در $\mathbb{R}^n$ را که مرز دارای اندازهٔ nـ بعدی صفر داشته باشند <u>ناحیه‌های مجاز</u> خواهیم خواند. هر تابع پیوسته و کراندار روی یک چنین ناحیهٔ مجاز انتگرال‌پذیر می‌شود (اگر D به علاوه بسته باشد، یعنی شامل مرز خود باشد، تابع پیوستهٔ f روی D خود به خود کراندار می‌شود). اگر D یک ناحیهٔ مجاز در $\mathbb{R}^n$ باشد، <u>حجم nـ بعدی D</u> را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$vol(D) = \int_D 1$$

www.ttnar.ir

که در طرف راست، مقصود از ۱ تابع ثابت با مقدار ۱ روی D است.

اکنون می‌توانیم خواصی مشابه آنچه در (۳۲—۲) آمد برای انتگرال روی ناحیه‌های مجاز بیان کنیم. این خواص عموماً از (۳۲—۲) نتیجه می‌شوند:

(۳۲—۴) خواص ابتدایی انتگرال روی ناحیه‌های مجاز

(۳۲—۴—۱) (خطی بودن) اگر f, g روی ناحیهٔ مجاز D انتگرال‌پذیر باشند و c یک عدد حقیقی باشد، آنگاه $f+g$ و cf روی D انتگرال‌پذیرند و:

$$\int_D (f+g) = \int_D f + \int_D g \qquad (٦)$$

$$\int_D (cf) = c\int_D f \qquad (۷)$$

(۳۲—۴—۲) اگر f روی ناحیهٔ مجاز D انتگرال‌پذیر باشد و $f(x) \geq 0$ برای هر x در D، آنگاه:

$$\int_D f \geq 0 \qquad (۸)$$

از (۳۲—۴—۲) و (۳۲—۴—۱) نتیجه می‌شود که اگر g, h روی ناحیهٔ مجاز D انتگرال‌پذیر باشند و $g(x) \geq h(x)$ برای هر x در D، آنگاه

$$\int_D g \geq \int_D h \qquad (۹)$$

(۳۲—۴—۳) اگر f تابع ثابت $f(x) = k$ روی ناحیهٔ مجاز D باشد، آنگاه f روی D انتگرال‌پذیر است و

$$\int_D f = k \cdot vol(D) \qquad (۱۰)$$

(۳۲—۴—۴) اگر ناحیهٔ مجاز D اجتماع دو ناحیهٔ مجاز D' و D'' باشد که فقط در مرز اشتراک دارند و f روی هر یک از D' و D'' انتگرال‌پذیر باشد، آنگاه f روی D انتگرال‌پذیر است و

$$\int_D f = \int_{D'} f + \int_{D''} f \qquad (۱۱)$$

زیرمجموعهٔ U از $\mathbb{R}^n$ را همبند مسیری می‌نامیم در صورتی که برای هر دو نقطهٔ A, B از U، خمی پیوسته $\gamma : [a,b] \longrightarrow U$ وجود داشته باشد که $\gamma(a) = A$ و $\gamma(b) = B$.

(۳۲—۴—۵) (قضیهٔ میانگین انتگرال) فرض کنید D یک ناحیهٔ بسته و همبند مسیری در $\mathbb{R}^n$ باشد و $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع پیوسته. در این صورت نقطه‌ای P در D وجود دارد که:

$$\int_D f = f(P) \cdot vol(D) \qquad (۱۲)$$

اثباتی از این حکم ارائه می‌کنیم. چون f پیوسته است روی مجموعهٔ بسته و کراندار D در نقطه‌ای A مینیمم و در نقطه‌ای B ماکسیمم خود را اتخاذ می‌کند، $f(A) = m$ و $f(B) = M$. برای هر x در D داریم $m \leq f(x) \leq M$، پس بنابر (۹) و (۱۰):

$$m \cdot vol(D) \leq \int_D f \leq M \cdot vol(D)$$

یا

$$m \leq \frac{\int_D f}{vol(D)} \leq M \qquad (۱۳)$$

چون D همبند مسیری فرض شده است، خمی پیوسته $\gamma : [a,b] \longrightarrow D$ وجود دارد که $\gamma(a) = A$ و $\gamma(b) = B$. پس $(f \circ \gamma)(a) = m$ و $(f \circ \gamma)(b) = M$. حال $f \circ \gamma$ تابعی پیوسته از $[a,b]$ به $\mathbb{R}$ است که در نقطه a مقدار m و در نقطهٔ b مقدار M را می‌گیرد. بنابر قضیهٔ مقدار بینی باید نقطه‌ای c در $[a,b]$ وجود داشته باشد که $(f \circ \gamma)(c) = \frac{\int_D f}{vol(D)}$. نقطهٔ $P = \gamma(c)$ در حکم قضیه صدق می‌کند.

www.ttnar.ir

محاسبهٔ انتگرال چندگانه

پس از بحث در مورد کلیات انتگرال که در بخش قبل گذشت، اکنون به تشریح روش محاسبهٔ انتگرال چندگانه می‌پردازیم. مقدمتاً ذکر یکی دو نکته در مورد نمادها لازم است. انتگرال تابع f روی مجموعهٔ D از $\mathbb{R}^n$ را تاکنون به $\int_D f$ نمایش داده‌ایم. برای تأکید n بعدی بودن ناحیهٔ D، بعضی نماد $\int \cdots \int_D f$ (با n بار $\int$) را به‌کار می‌برند. همچنین اگر نقاط D به $x = (x_1, \ldots, x_n)$ نمایش داده شده باشند، نماد $\int \cdots \int f(x_1, \ldots, x_n) dV$ یا $\int \cdots \int f(x_1, \ldots, x_n) dV_x$ نیز به‌کار گرفته می‌شود. گاهی از dV به عنوان "عنصر حجم nــ بعدی" یاد می‌شود. در حالت دو بعدی، $n = 2$، به جای dV معمولاً از dA ("عنصر سطح") استفاده می‌شود.

محاسبهٔ انتگرال را با انتگرال دوگانه روی مستطیل آغاز می‌کنیم. قضیهٔ زیر راهگشای حالت کلی است.

(۳۳ــ۱) قضیه فرض کنید مستطیل بستهٔ $D = \{(x,y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ و تابع انتگرال‌پذیر $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ داده شده است. در این صورت:

$$\begin{aligned} \int\int_D f(x,y) dA &= \int_a^b [\int_c^d f(x,y) dy] dx && (1) \\ &= \int_c^d [\int_a^b f(x,y) dx] dy && (2) \end{aligned}$$

نخست برای (۱) (معادلاً (۲)) یک تعبیر هندسی ارائه می‌کنیم. حالت $f(x,y) \geq 0$ را در نظر بگیرید. در انتگرال داخلی (۱)، برای x ثابت یک انتگرال‌گیری نسبت به y انجام شده است. این به منزلهٔ محاسبهٔ مساحت مقطع ثابت $= x$ در زیر نمودار f است. بنابراین (۱) بیانگر این مطلب است که برای محاسبهٔ حجم زیر نمودار، برای هر x ثابت مساحت مقطع مربوط زیر نمودار را محاسبه می‌کنیم که تابعی از x می‌شود سپس با محاسبهٔ انتگرال این تابع مساحت برای $a \leq x \leq b$، حجم مورد نظر را

www.ttmar.ir

به‌دست می‌آوریم. در واقع حجم زیر نمودار از انباشتن لایه‌های بینهایت نازک به‌ازای x های ثابت گوناگون به‌دست می‌آید.

تعبیر دیگر (۱) را می‌توان بر اساس مجموع‌های ریمان ارائه کرد. فرض کنید افراز $a = x_۰ < x_۱ < \cdots < x_p = b$ برای $[a, b]$ و افراز $c = y_۰ < y_۱ < \cdots < y_q = d$ برای $[c, d]$ در نظر گرفته شوند و در زیرمستطیل $R_{ij} : x_{i-۱} \leq x \leq x_i$ و $y_{j-۱} \leq y \leq y_j$، نقطهٔ دلخواهی z_{ij} در نظر بگیرید. مجموع ریمان مربوط عبارت است از

$$\sum_{i=۱}^{p}\sum_{j=۱}^{q} f(z_{ij})\cdot(y_j - y_{j-۱})(x_i - x_{i-۱}) = \sum_{i=۱}^{p}(\sum_{j=۱}^{q} f(z_{ij})(y_j - y_{j-۱}))(x_i - x_{i-۱}) \qquad (۳)$$

در پرانتز داخلی، برای i ثابت، نسبت به j جمعبندی شده است. برای گذر به حد، باید $(x_i - x_{i-۱})$ ها و $(y_j - y_{j-۱})$ ها تواماً به صفر میل کنند. فرمول (۱) بیانگر این است که تحت شرایط انتگرال‌گیری می‌توان نخست برای x ثابت گذر به حد را با کوچک کردن $(y_j - y_{j-۱})$ انجام داد و سپس حاصل را که وابسته به x است مجدداً با سوق دادن $(x_i - x_{i-۱})$ به صفر حدگیری کرد. با دقیق‌تر کردن این ایده می‌توان اثبات کاملی از (۱) ارائه کرد ولی این کار در اینجا انجام نخواهد شد.

مثال ۱ انتگرال تابع $f(x) = x^۲y + e^{-۲y}$ را روی مستطیل $۱ \leq x \leq ۲$، $۰ \leq y \leq ۱$ محاسبه کنید. این محاسبه را از هر دو روش (۱) و (۲) انجام می‌دهیم. اگر R مستطیل فوق باشد:

$$\begin{aligned}
\int\int_R (x^۲y + e^{-۲y})dA &= \int_۱^۲ [\int_۰^۱ (x^۲y + e^{-۲y})dy]dx \qquad \text{از فرمول (۱)}\\
&= \int_۱^۲ [\frac{۱}{۲}x^۲y^۲ - \frac{۱}{۲}e^{-۲y}]|_۰^۱ dx\\
&= \int_۱^۲ (\frac{۱}{۲}x^۲ - \frac{۱}{۲}e^{-۲} + \frac{۱}{۲})dx\\
&= [\frac{۱}{۶}x^۳ + \frac{۱}{۲}(۱ - e^{-۲})x]|_۱^۲\\
&= \frac{۸}{۶} + (۱ - e^{-۲}) - \frac{۱}{۶} - \frac{۱}{۲}(۱ - e^{-۲}) = \frac{۵}{۳} - \frac{۱}{۲}e^{-۲}
\end{aligned}$$

www.tinar.ir

$$\int\int_R (x^2y + e^{-2y})dA = \int_0^1 [\int_1^2 (x^2y + e^{-2y})dx]dy \quad \text{از فرمول (۲)}$$

$$= \int_0^1 [\frac{1}{2}x^3y - e^{-2y}x]|_1^2 dx$$

$$= \int_0^1 (\frac{7}{3}y + e^{-2y})dy$$

$$= (\frac{7}{6}y^2 - \frac{1}{2}e^{-2y})|_0^1 = \frac{7}{6} - \frac{1}{2}e^{-2} + \frac{1}{2} = \frac{5}{3} - \frac{1}{2}e^{-2}$$

قضیه (۳۳–۱) تعمیمی واضح به حالت مستطیل nـ بعدی دارد. به طور کلی می‌توان یک انتگرال روی مستطیل n بعدی را به $n!$ نوع مختلف به عنوان انتگرال مکرر بیان کرد.

مثال ۲ انتگرال تابع $f(x,y,z) = x + e^{-y+z}$ را روی مستطیل R با مشخصات $1 \leq x \leq 2$، $0 \leq y \leq 1$، $0 \leq z \leq 2$، محاسبه کنید. این انتگرال را به یکی از شش ترتیب ممکن محاسبه می‌کنیم.

$$\int\int\int_R (x + e^{-y+z})dV = \int_0^2 [\int_0^1 [\int_1^2 (x + e^{-y+z})dx]dy]dz$$

$$= \int_0^2 [\int_0^1 [(\frac{1}{2}x^2 + e^{-y+z}x)|_1^2]dy]dz$$

$$= \int_0^2 [\int_0^1 (\frac{3}{2} + e^{z-y})dy]dz$$

$$= \int_0^2 (\frac{3}{2}y - e^{z-y})|_0^1 dz$$

$$= \int_0^2 (\frac{3}{2} - e^{z-1} + e^z)dz$$

$$= (\frac{3}{2}z - e^{z-1} + e^z)|_0^2 = 3 - e + e^2 + e^{-1} - 1$$

$$= 2 - e + e^2 + e^{-1}$$

برای محاسبهٔ انتگرال روی ناحیه‌های غیر مستطیل شکل، به روش زیر عمل می‌کنیم. اگر ناحیهٔ مجاز D و تابع انتگرال‌پذیر $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ داده شده باشد، مانند جلسه قبل، D را در یک مستطیل R جای داده، تابع f را به تابعی $\tilde{f}$ توسعه می‌دهیم که در R تعریف شده ولی خارج D صفر است، به عنوان مثال مورد زیر را در نظر بگیرید. فرض کنید تابع‌های $\alpha, \beta : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ داده شده‌اند که $\alpha(x) \leq \beta(x)$

www.tinar.ir

برای هر x در $[a,b]$. ناحیه D به شکل زیر را یک ناحیهٔ yـ محدب می‌نامیم:

$$D: \begin{cases} a \leq x \leq b \\ \alpha(x) \leq y \leq \beta(x) \end{cases}$$

حال ناحیهٔ yـ محدب D را در مستطیل R با تعریف $a \leq x \leq b$، $c \leq y \leq d$، که $c \leq \alpha(x) \leq \beta(x) \leq d$ قرار می‌دهیم و داریم:

$$\int\int_D f(x,y)dA = \int\int_R \tilde{f}(x,y)dA = \int_a^b [\int_c^d \tilde{f}(x,y)dy]dx$$

برای x ثابت، $\tilde{f}(x,y)$ به‌ازای $y < \alpha(x)$ و $y > \beta(x)$ صفر است، پس

$$\int_c^d \tilde{f}(x,y) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)dx$$

و در نتیجه:

$$\int\int_D f(x,y)dA = \int_a^b [\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)dy]dx \qquad (۴)$$

ضمناً توجه کنید که اگر α و β پیوسته باشند، همچنان که در درس قبل دیدیم نمودار هر یک، یک مجموعهٔ دارای اندازهٔ صفر دو بعدی خواهد بود و ناحیهٔ D یک ناحیهٔ مجاز انتگرال‌گیری است.

به همین ترتیب یک ناحیهٔ xـ محدب ناحیه‌ای با توصیف زیر است:

$$D: \begin{cases} c \leq y \leq d \\ \gamma(y) \leq x \leq \delta(y) \end{cases}$$

و اگر تابع‌های γ و δ پیوسته باشند، D یک ناحیهٔ مجاز انتگرال‌گیری خواهد بود.

برای این نوع ناحیه به ترتیب قبل خواهیم داشت:

$$\int\int_D f(x,y)dA = \int_c^d [\int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x,y)dx]dy \qquad (۵)$$

مثال ۳ ربع گوی زیر را در نظر بگیرید:

$$D: \begin{cases} ۰ \leq x \leq ۱ \\ ۱ \leq y \leq ۱ + \sqrt{۱ - x^۲} \end{cases}$$

می‌خواهیم $\int\int_D xdA$ را محاسبه کنیم. طبق فرمول (۴) داریم:

$$\begin{aligned}
\int\int_D xdA &= \int_0^1 [\int_1^{1+\sqrt{1-x^2}} xdy]dx \\
&= \int_0^1 (xy)|_1^{1+\sqrt{1-x^2}} dx \\
&= \int_0^1 x\sqrt{1-x^2}dx \\
&= (-\tfrac{1}{2})(\tfrac{2}{3})(1-x^2)^{\frac{3}{2}}|_0^1 = \tfrac{1}{3}
\end{aligned}$$

ناحیهٔ D، xـ محدب نیز هست و می‌توان آن را به شکل زیر تعریف کرد:

$$\begin{cases} 1 \leq y \leq 2 \\ 0 \leq x \leq \sqrt{2y-y^2} \end{cases}$$

بنابراین،

$$\begin{aligned}
\int\int_D xdA &= \int_1^2 [\int_2^{\sqrt{2y-y^2}} xdx]dy \\
&= \int_1^2 (\frac{1}{2}x^2)|_0^{\sqrt{2y-y^2}} dy \\
&= \frac{1}{2}\int_1^2 (2y-y^2)dy \\
&= (\tfrac{1}{2})(y^2-\tfrac{1}{3}y^3)|_1^2 = \tfrac{1}{3}
\end{aligned}$$

گاهی اوقات محاسبهٔ یک انتگرال به یکی از دو روش (۴) یا (۵) مقدور نیست یا دشوار است ولی به روش دیگر امکان‌پذیر است. مثال زیر نمونه‌ای از این وضعیت است.

مثال ۴ می‌خواهیم انتگرال تابع $f(x,y)=e^{-y^2}$ را روی ناحیهٔ مثلثی زیر محاسبه کنیم:

$$T: \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ x \leq y \leq 1 \end{cases}$$

اگر این ناحیه را به شکل yـ محدب تلقی کنیم، داریم:

$$\int\int_T e^{-y^2}dA = \int_0^1 [\int_x^1 e^{-y^2}dy]dx$$

در اینجا به این مشکل بر می‌خوریم که تابع اولیهٔ e^{-y^2} را نمی‌شناسیم و ادامه محاسبه به این طریق عملی نیست. ولی اگر T را به صورت xـ محدب بنویسیم، نتیجه حاصل خواهد شد:

$$T: \begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ 0 \le x \le y \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int\int_T e^{y^2} dA &= \int_0^1 [\int_0^y e^{y^2} dx] dy \\ &= \int_0^1 (e^{-y^2} x)|_0^y dy \\ &= \int_0^1 e^{-y^2} y dy \\ &= (-\tfrac{1}{2}) e^{-y^2}|_0^1 = (-\tfrac{1}{2})(e^{-1} - 1) \end{aligned}$$

روشی که برای محاسبهٔ انتگرال برای ناحیه‌های دو بعدی غیر مستطیل شکل ذکر شد به حالت n بعدی نیز تعمیم‌پذیر است و اگر بتوانیم ناحیهٔ D در $\mathbb{R}^n$ را به صورت زیر توصیف کنیم:

$$\begin{cases} \alpha_n(x_1, \ldots, x_{n-1}) \le x_n \le \beta(x_1, \ldots, x_{n-1}) \\ \vdots \\ \alpha_2(x_1) \le x_2 \le \beta_2(x_1) \\ \alpha_1 \le x_1 \le \beta_1 \end{cases}$$

آنگاه $\int \cdots \int_D f$ را می‌توان به صورت زیر محاسبه کرد:

$$\int \cdots \int_D f = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} [\int_{\alpha_2(x_1)}^{\beta_2(x_1)} [\cdots [\int_{\alpha_n(x_1,\ldots,x_{n-1})}^{\beta_n(x_1,\ldots,x_{n-1})} f(x_1, \ldots, x_n) dx_n] dx_{n-1} \cdots] dx_1 \qquad (7)$$

البته هر ترتیب دیگری از متغیرهای $x_1, \ldots, x_n$ نیز ممکن است به‌کار رود. توجه کنید که در هر مرحلهٔ انتگرال‌گیری در فرمول (۷) حداقل یکی از متغیرها از بین می‌رود به طوری که در مرحلهٔ آخر فقط یک انتگرال‌گیری یک متغیری با حدود عددی باقی می‌ماند.

مثال ۵ حجم ناحیهٔ محصور به $z \ge x^2 + y^2$ و داخل استوانهٔ $x^2 + (z-2)^2 = 1$ را به کمک انتگرال سه‌گانه محاسبه کنید.

www.tmar.ir

ناحیهٔ مورد نظر را می‌توان به صورت زیر توصیف کرد:

$$D:\begin{cases} -\sqrt{z-x^2}\leq y\leq\sqrt{z-x^2} \\ 2-\sqrt{1-x^2}\leq z\leq 2+\sqrt{1-x^2} \\ -1\leq x\leq 1 \end{cases}$$

بنابراین

$$\int\int\int_D 1dV=\int_{-1}^{1}[\int_{2-\sqrt{1-x^2}}^{2+\sqrt{1-x^2}}[\int_{-\sqrt{z-x^2}}^{\sqrt{z-x^2}}dy]dz]dx$$

و با سه بار انتگرال‌گیری حجم مورد نظر به‌دست می‌آید.

مثال ٦ حجم ناحیهٔ محصور بین دو استوانه $x^2+y^2=a^2$ و $x^2+z^2=a^2$ را محاسبه کنید ($a>0$).

توجه کنید که این جسم روی گوی $x^2+y^2\leq a^2$ بنا شده است، جدار بالای آن روی نیمهٔ بالایی سطح استوانه $x^2+z^2=a^2$ و جدار پایینی آن روی نیمهٔ پایینی سطح همین استوانه قرار دارد. ناحیهٔ سه بعدی را می‌توان به صورت زیر توصیف کرد:

$$D:\begin{cases} -\sqrt{a^2-x^2}\leq z\leq\sqrt{a^2-x^2} \\ -\sqrt{a^2-x^2}\leq y\leq\sqrt{a^2-x^2} \\ -a\leq x\leq a \end{cases}$$

پس

$$\int\int\int_D 1dV=\int_{-a}^{a}[\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}[\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}dy]dz]dx$$

مثال ٧ حجم چهار بعدی گوی $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2\leq R^2$ در $\mathbb{R}^4$ را محاسبه کنید.

این ناحیه را می‌توان به شکل زیر توصیف کرد:

$$D:\begin{cases} -\sqrt{R^2-(x_1^2+x_2^2+x_3^2)}\leq x_4\leq\sqrt{R^2-(x_1^2+x_2^2+x_3^2)} \\ -\sqrt{R^2-(x_1^2+x_2^2)}\leq x_3\leq\sqrt{R^2-(x_1^2+x_2^2)} \\ -\sqrt{R^2-x_1^2}\leq x_2\leq\sqrt{R^2-x_1^2} \\ -R\leq x_1\leq R \end{cases}$$

www.tmar.ir

می‌توان به روش ذکر شده به نتیجه رسید ولی با توجه به این که فرمول حجم گوی سه بعدی را می‌دانیم، محاسبه را می‌توان در یک گام خلاصه کرد. توجه کنید که برای x_1 ثابت، مقطع این گوی، یک گوی سه بعدی به شعاع $\sqrt{R^2 - x_1^2}$ است که حجم سه بعدی آن $\frac{4}{3}\pi(R^2 - x_1^2)^{\frac{3}{2}}$ می‌باشد این در واقع نتیجه سه انتگرال‌گیری اول روی ناحیهٔ بالا است. بنابراین

$$\text{حجم گوی چهار بعدی} = \int_{-R}^{R} \frac{4}{3}\pi(R^2 - x_1^2)^{\frac{3}{2}} dx_1$$

با قرار دادن $x_1 = R\sin\theta$، انتگرال بالا تبدیل می‌شود به

$$\begin{aligned}
(\frac{4}{3}\pi)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (R^3 \cos^3\theta)(R\cos\theta)d\theta &= (\frac{4}{3}\pi R^4)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta d\theta \\
&= (\frac{4}{3}\pi R^4)(\frac{3\pi}{8}) = \frac{\pi^2}{2}R^4
\end{aligned}$$

بالاخره این نکته در مورد نماد انتگرال مکرر قابل ذکر است که معمولاً کروشه‌ها نوشته نمی‌شوند و مقصود از نماد $\int\cdots\int f(x_1,\ldots,x_n)dx_1\ldots dx_n$ این است که انتگرال‌گیری از داخل به خارج به ترتیب نسبت به x_1، بعد نسبت به x_2، ...و نهایتاً نسبت به x_n انجام می‌شود.

www.tnar.ir

تعویض متغیر در انتگرال چندگانه

در حالت یک متغیری مشاهده کرده‌ایم که کمتر ممکن است یک انتگرال مستقیماً از دستورهای متداول جداول تابع اولیه محاسبه شود، بلکه معمولاً نوعی تعویض متغیر و استفادهٔ هر چند ضمنی از قاعدهٔ زنجیره‌ای برای محاسبهٔ انتگرال لازم است. در مورد توابع چند متغیری نیاز به یک روش مؤثر تعویض متغیر از اهمیت کمتری برخوردار نیست و نقشی تعیین کننده هم در عمل و هم در تئوری دارد. قبل از پرداختن به فرمول تعویض متغیر انتگرال چند متغیری لازم است حالت یک متغیری را مورد بازبینی قرار دهیم. فرض کنید $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ یک تابع انتگرال‌پذیر، مثلاً تابعی پیوسته، باشد، $\varphi:[\alpha,\beta]\longrightarrow\mathbb{R}$ یک تابع مشتق‌پذیر با مشتق پیوسته به طوری که φ بازه $[\alpha,\beta]$ را بر بازهٔ $[a,b]$ می‌نگارد به این‌صورت که $\varphi(\alpha)=a$ و $\varphi(\beta)=b$، یا $\varphi(\alpha)=b$ و $\varphi(\beta)=a$. اگر نقاط $[a,b]$ را به t و نقاط $[a,b]$ را به τ نمایش دهیم، داریم

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)dt=\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(\tau))\varphi'(\tau)d\tau \qquad (۱)$$

این فرمول تعویض متغیر تابع‌های یک متغیری است و به سادگی از قاعدهٔ زنجیره‌ای نتیجه می‌شود. می‌خواهیم این فرمول را از دیدگاه هندسی تعبیر انتگرال به عنوان مساحت بررسی کنیم و به خصوص به نقش $\varphi'(\tau)$ آگاهی عمیقتری کسب کنیم. به این منظور f را مثبت فرض کنید و موقتاً فرض کنید φ' تغییر علامت نمی‌دهد، یعنی همواره $\varphi'(\tau)>0$ یا همواره $\varphi'(\tau)<0$ برای هر τ در $[\alpha,\beta]$. بدین ترتیب φ صعودی یا نزولی و در هر حال یک به یک است. وقتی $\varphi'>0$، داریم $\varphi(\alpha)=a$ و $\varphi(\beta)=b$، و در حالتی که $\varphi'<0$، داریم $\varphi(\alpha)=b$ و $\varphi(\beta)=\alpha$. در شکل ۲ نمودارهای f و $f\circ\varphi$ را

شکل ۱

در حالت $\varphi' > 0$ نمایش داده‌ایم. توجه کنید که به طور کلی طول بازه‌های $[\alpha, \beta]$ و $[a, b]$ لازم نیست برابر باشد ولی چون φ یک به یک فرض شده است تناظری یک به یک میان نقاط $[\alpha, \beta]$ و $[a, b]$ وجود دارد و مقادیر f و $f \circ \varphi$ در نقاط متناظر برابر است: $f(t) = (f \circ \varphi)(\tau)$، وقتی $t = \varphi(\tau)$. به طور کلی نمودار f از نمودار $f \circ \varphi$ با کشش وقتی $\varphi' > 1$ و فشردن وقتی $0 < \varphi' < 1$ به‌دست می‌آید.

شکل ۲

از آنجا که تناظری یک به یک بین مقادیر دو تابع f و $f \circ \varphi$ وجود دارد ولی توزیع این مقادیر با حفظ ترتیب به سبب انبساط ($\varphi' > 1$) یا انقباض ($\varphi' < 1$) پایه دستخوش جابجایی شده است، نمی‌توان انتظار داشت که دو مساحت $\int_a^b f(t)dt$ و $\int_\alpha^\beta f(\varphi(\tau))d\tau$ برابر باشند. در اینجا نقش هندسی ضریب $\varphi'(\tau)$ که باید در داخل انتگرال دوم ضرب شود نمایان می‌شود. وقتی $\varphi'(\tau) > 1$ بازه‌های کوچک حول τ تحت φ بزرگتر می‌شوند، بنابراین افزایش مساحت روی بازهٔ متناظر صورت می‌گیرد، و بالعکس وقتی $0 < \varphi'(\tau) < 1$، φ بازه‌های کوچک حول τ را منقبض می‌کند و کاهش مساحت زیر منحنی رخ می‌دهد. حال با ضرب کردن $f(\varphi(\tau))$ در $\varphi'(\tau)$ عملاً نوعی "تصحیح تغییر طول پایه" با تعدیل نمودار صورت می‌گیرد به طوری که $\int_a^b f(t)dt$ و $\int_\alpha^\beta f(\varphi(\tau))\varphi'(\tau)d\tau$ دو مساحت برابر را نشان می‌دهند. شکل ۳ بیانگر این مطلب است.

شکل ۳

در حالت $\varphi' < 0$ وضع مشابه این است با این تفاوت که دو انتهای بازه تعویض می‌شوند. در این حالت منفی بودن φ' و این که در $\int_\alpha^\beta$ حد بالای انتگرال کوچکتر از حد پایین است (شکل ۱، سمت راست) توأماً منجر به نتیجه مثبت برای حاصل انتگرال‌گیری می‌شوند.

یک نکتهٔ آخر در مورد فرمول تعویض متغیر این که در (۱) لازم نیست φ تابعی یک به یک باشد. نکته این است که وقتی φ' تغییر علامت می‌دهد، همان طور که در بالا ذکر شد، تعویض حدود بالا و پایین انتگرال خود به خود نتیجه نهایی را تصحیح می‌کند. در شکل ۴ انتگرال‌گیری $\int_a^b 1 \cdot dt$ تحت تعویض متغیر غیر یک به یک نمایش داده شده است.

شکل ۴

با این مقدمات آماده‌ایم تعویض متغیر در انتگرال چندگانه را توصیف کنیم:

(۳۴–۱) قضیه (تعویض متغیر انتگرال چندگانه) W و W' ناحیه‌های همبند مسیری و مجاز انتگرال‌گیری در $\mathbb{R}^n$ هستند، φ یک تابع دارای مشتق‌های پاره‌ای پیوسته از یک زیرمجموعه $\mathbb{R}^n$ به $\mathbb{R}^n$ که دامنه آن شامل W' است و W' را به طور یک به یک بر W می‌نگارد، $\varphi(W') = W$، و $\det D\varphi(x) \neq 0$ برای هر x در W'. در این صورت برای هر تابع انتگرال‌پذیر $f : W \longrightarrow \mathbb{R}$ داریم:

$$\int_W f = \int_{W'} (f \circ \varphi) \cdot |\det D\varphi| \qquad (۲)$$

تحت شرایط قضیه $(f \circ \varphi)|\det D\varphi|$ یک تابع انتگرال‌پذیر روی W' خواهد شد، و طبق قضیهٔ تابع وارون، وارون تحدید f به W وجود دارد، $\varphi^{-1} : W \longrightarrow W'$، و φ^{-1} دارای مشتقات پاره‌ای پیوسته است.

فرمول (۲) را می‌توان به صورت زیر نیز نوشت. اگر نقاط W را به $y = (y_1, \ldots, y_n)$ و نقاط W' را به $x = (x_1, \ldots, x_n)$ نمایش دهیم، $y = \varphi(x)$، آنگاه

$$\int \cdots \int_W f(y_1, \ldots, y_n) dV_y = \int \cdots \int_{W'} f(\varphi(x_1, \ldots, x_n)) |\det \frac{\partial(y_1, \ldots, y_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}| dV_x \qquad (۳)$$

مقصود از dV_x و dV_y به ترتیب $dx_1 \ldots dx_n$ و $dy_1 \ldots dy_n$، هر یک به ترتیب مناسب برای انتگرال‌گیری مکرر است.

قبل از توضیح بیشتر در مورد صحت این فرمول، که در پایان جلسه خواهد آمد، نکته‌ای در مورد مقایسهٔ این فرمول با حالت یک متغیری ذکر می‌کنیم و چند مثال می‌آوریم.

(۳۴–۲) مقایسه با حالت یک متغیری در نگاه اول وجود علامت قدرمطلق در اینجا متفاوت از حالت یک متغیری به‌نظر می‌رسد. در حالت یک متغیری نیازی به | | نیست زیرا که در صورت منفی بودن φ'، حدود انتگرال‌گیری خود به خود وارونه می‌شوند یعنی حد بالایی کوچکتر از حد پایینی خواهد شد ولی در حالت $n \geq 2$، روش انتگرال‌گیری روی مستطیل‌ها چنان بود که همواره حد پایینی انتگرال

کوچکتر از حد بالایی است. از این رو علامت قدر مطلق الزامی می‌شود. در حالت یک متغیری نیز می‌توان فرمول (۱) را به صورت

$$\int_a^b f(t)dt = \int_\alpha^\beta f(\varphi(\tau))|\varphi'(\tau)|d\tau$$

نوشت مشروط بر این که به جای $\varphi(\alpha) = a$ و $\varphi(\beta) = b$ داشته باشیم $\{\varphi(\alpha), \varphi(\beta)\} = \{a, b\}$، $a \leq b$ و $\alpha \leq \beta$. شرط یک به یک بودن φ نیز در اینجا الزامی می‌شود زیرا به علت فقدان مکانیسمی مشابه وارونه کردن حد بالایی و پایینی انتگرال، حذف خود به خود انتگرال‌گیری مثبت و منفی زائد صورت نمی‌گیرد.

مثال ۱ حجم درون بیضی‌وار، یعنی ناحیه $\frac{x^۲}{a^۲} + \frac{y^۲}{b^۲} + \frac{z^۲}{c^۲} \leq ۱$ را محاسبه کنید که در آن a, b, c اعداد حقیقی مثبت داده شده‌اند.

حل با یک تعویض متغیر ساده می‌توان بیضی‌وار را به کره تبدیل کرد که حجم درون آن را می‌دانیم. قرار دهید $X = \frac{x}{a}$ و $Y = \frac{y}{b}$ و $Z = \frac{z}{c}$، و:

$$(x, y, z) = \varphi(X, Y, Z) = (aX, bY, cZ)$$

$$\det \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(X, Y, Z)} = \det \begin{bmatrix} a & ۰ & ۰ \\ ۰ & b & ۰ \\ ۰ & ۰ & c \end{bmatrix} = abc$$

$$\int\int\int_{\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}+\frac{z^۲}{c^۲}\leq ۱} ۱ \cdot dV_{x,y,z} = \int\int\int_{X^۲+Y^۲+Z^۲\leq ۱} (abc)dV_{X,Y,Z} = (abc)\frac{۴}{۳}\pi$$

مثال ۲ حجم جسم محصور درون کرهٔ $x^۲ + y^۲ + z^۲ \leq ۱$ و درون استوانهٔ $(x - \frac{۱}{۲})^۲ + y^۲ \leq \frac{۱}{۴}$ را محاسبه کنید.

حل

www.ttnar.ir

شکل ۵

از مختصات استوانه‌ای (r,θ,z) استفاده می‌کنیم. یادآوری می‌کنیم که $\det\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}=r$. معادلهٔ دایرهٔ $(x-\frac{۱}{۲})^۲+y^۲=\frac{۱}{۴}$ در مختصات قطبی می‌شود $r=\cos\theta$، $-\frac{\pi}{۲}\leq\theta\leq\frac{\pi}{۲}$، بنابراین جسم سه‌بعدی مورد نظر در مختصات استوانه‌ای توصیف زیر را دارد:

$$\begin{cases} -\frac{\pi}{۲}\leq\theta\leq\frac{\pi}{۲} \\ ۰\leq r\leq\cos\theta \\ -\sqrt{۱-r^۲}\leq z\leq\sqrt{۱-r^۲} \end{cases}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \text{حجم مورد نظر} &= \int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}}\int_{۰}^{\cos\theta}\int_{-\sqrt{۱-r^۲}}^{\sqrt{۱-r^۲}} r\,dz\,dr\,d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}}\int_{۰}^{\cos\theta}(۲r)\sqrt{۱-r^۲}\,dr\,d\theta \\ &= -\int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}}\frac{۲}{۳}[(۱-\cos^۲\theta)^{\frac{۳}{۲}}-۱]d\theta \\ &= -\frac{۲}{۳}\int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}}(|\sin\theta|^۳-۱)d\theta=-\frac{۴}{۳}\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}(\sin^۳\theta-۱)d\theta \\ &= (-\frac{۴}{۳})\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}[\sin\theta-\sin\theta\cos^۲\theta-۱]d\theta \\ &= (-\frac{۴}{۳})[(۰+۱)+\frac{۱}{۳}(۰-۱)-\frac{\pi}{۲}] \\ &= \frac{۲\pi}{۳}-\frac{۸}{۹} \end{aligned}$$

<u>مثال ۳</u> حجم قیفی که از بالا به سطح کرهٔ $x^۲+y^۲+z^۲=R^۲$ و از پایین به مخروط $\varphi=\alpha$ (φ: مختصهٔ کروی، α: ثابت در $[۰,\pi]$) محصور است محاسبه کنید

شکل ٦

www.tfnar.ir

حل می‌دانیم $\det \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\theta)} = \rho^۲ \sin\varphi$. ناحیهٔ مورد نظر در مختصات کروی توصیف زیر را دارد:

$$\begin{cases} ۰ \leq \theta \leq ۲\pi \\ ۰ \leq \varphi \leq \alpha \\ ۰ \leq \rho \leq R \end{cases}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \text{حجم مورد نظر} &= \int_۰^{۲\pi} \int_۰^{\alpha} \int_۰^{R} \rho^۲ \sin\varphi d\rho d\varphi d\theta \\ &= (۲\pi)(\int_۰^{\alpha} \sin\varphi d\varphi)(\int_۰^{\rho} \rho^۲ d\rho) \\ &= \frac{۲\pi}{۳} R^۳(-\cos\alpha + ۱) \end{aligned}$$

توجه کنید برای $\alpha = \pi$، حجم گوی سه‌بعدی شعاع R، یعنی $\frac{۴}{۳}\pi R^۳$، حاصل می‌شود.

مثال ۴ مساحت متوازی الاضلاع محصور به چهار خط دو به دو موازی زیر را محاسبه کنید:

$$\begin{cases} A_۱x + B_۱y = C_۱ \\ A_۱x + B_۱y = C'_۱ \end{cases} \qquad \begin{cases} A_۲x + B_۲y = C_۲ \\ A_۲x + B_۲y = C'_۲ \end{cases}$$

حل حل این مسأله به روش عادی انتگرال‌گیری یک متغیری برای مساحت در تئوری سر راست است ولیکن با توجه به وضعیت‌های گوناگونی که ممکن است چهار رأس قرار گیرند انتگرال مربوط را باید به چند انتگرال تقسیم کرد و محاسبات در هر صورت جذاب و طبیعی نیستند. با فرمول تعویض متغیر انتگرال دوگانه می‌توانیم متوازی الاضلاع را به صورت یک مستطیل در آوریم و با یک محاسبهٔ ساده جواب مورد نظر در حالت کلی مستقل از مکان نسبی چهار رأس به‌دست می‌آید. تعویض متغیر طبیعی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} u = A_۱x + B_۱y \\ v = A_۲x + B_۲y \end{cases}$$

پس $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{bmatrix} A_۱ & B_۱ \\ A_۲ & B_۲ \end{bmatrix}$ که دترمینان آن $A_۱B_۲ - A_۲B_۱$ است. با توجه به این که دترمینان

معکوس ماتریس برابر معکوس دترمینان آن ماتریس است، داریم

$$|\det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}| = \frac{1}{|A_1B_2 - A_2B_1|}$$

بدین ترتیب

$$\text{(مساحت متوازی الاضلاع)} = \iint_{\text{متوازی الاضلاع}} 1 \cdot dV_{x,y}$$

$$= |\int_{C_1}^{C'_1} \int_{C_2}^{C'_2} \frac{1}{|A_1B_2 - A_2B_1|} dudv|$$

(قدرمطلق بیرونی بدین سبب است که معلوم نیست C_i و C'_i، $i = 1, 2$، کدام بزرگترند.)

$$= \frac{|C'_1 - C_1||C'_2 - C_2|}{|A_1B_2 - A_2B_1|}$$

شکل ۷

(۳۴—۳)توضیح در مورد اثبات قضیه (۳۴—۱) ارائه اثبات کامل این قضیه از حد بحث ما کمی خارج است ولی می‌توان به اصول اساسی آن با توجه به بازبینی فرمول (۱) که در آغاز جلسه مطرح شد پی برد. حالتی را در نظر بگیرید که W' (در قضیه) یک مستطیل nـ بعدی است (در هر صورت، طبق تعریف، همهٔ انتگرال‌گیری‌های ما به انتگرال‌گیری روی مستطیل تحویل شد). تحت اثر φ، W' به ناحیهٔ W نگاشته می‌شود که حجم nـ بعدی آن می‌تواند متفاوت از حجم W باشد، یا حتی اگر برابر باشد در بعضی قسمت‌ها گسترده‌تر شده و در بعضی نواحی دیگر فشرده‌تر شده باشد (شکل ۸ حالت دو بعدی را نشان می‌دهد)، چگونه می‌توان به یک ضریب "تصحیح تغییر حجم پایه"، مانند $\varphi'(\tau)$ در حالت یک بعدی، دست یافت؟ مستطیل W' را با ترسیم ابرصفحه‌هایی به موازات ابرصفحه‌های مختصاتی به قطعات کوچکتر افراز می‌کنیم و تصویر این

شکل ۸

www.ttnar.ir

برای هر زیرمستطیل کوچک نقطه‌ای p در آن اختیار می‌کنیم. اگر این زیرمستطیل به اندازه کافی کوچک باشد حجم تصویر آن حدوداً برابر حجم تصویر آن تحت تقریب خطی یعنی $D\varphi(p)$ است. تحت اثر تابع‌های خطی حجم nـ بعدی متوازی‌السطوح در $|\det D\varphi(p)|$ ضرب می‌شود، بنابراین $|\det D\varphi(p)|$ به طور تقریب ضریب "تصحیح تغییر حجم پایه" مناسب است. بدین ترتیب می‌توان انتظار داشت که $\sum (f\circ\varphi)(p)\cdot|\det D\varphi(p)|$ (مجموع نسبت به زیرمستطیل‌های افراز W') تقریب مناسبی برای $\int_W f$ باشد. با میل دادن ضخامت افراز به صفر، می‌توان نشان داد که مجموع فوق به انتگرال $\int_{W'}(f\circ\varphi)|\det D\varphi|$ میل می‌کند.

(۳۴-۴) انتگرال‌های ناسره در حالت یک بعدی علی الاصول دو نوع "انتگرال ناسره" وجود دارد که همهٔ انتگرال‌های ناسره مجموعی از آنها هستند. یک مورد حالتی است که تابع کراندار می‌ماند ولی بازهٔ انتگرال‌گیری از یک سو بی‌کران می‌شود. این انتگرال‌ها به $\int_a^\infty f$ یا $\int_{-\infty}^a f$ نمایش داده می‌شوند. مثلاً $\int_a^\infty f = \lim_{b\to\infty}(\int_a^b f)$. نوع دیگر انتگرال ناسره به وضعیتی اطلاق می‌شود که بازهٔ انتگرال‌گیری کراندار است ولی وقتی متغیر به یکی از دو نقطهٔ انتهایی بازه میل می‌کند تابع بی‌کران می‌شود. مثلاً اگر $f(x)\longrightarrow\infty$ وقتی $x\longrightarrow b^-$، $\int_a^b f$، در صورت وجود، برابر $\lim_{\varepsilon\to ۰^+}\int_a^{b-\varepsilon} f$ است. در حالت $n\geq ۲$، شیوهٔ بی‌کران شدن ناحیهٔ انتگرال‌گیری بی‌نهایت تنوع دارد، و نیز به جای فقط دو نقطهٔ مرزی، مرز یک ناحیه کراندار ممکن است دارای بی‌نهایت نقطه باشد که تابع ممکن است در نزدیکی هر یک بی‌کران شود. بدین ترتیب موضوع انتگرال ناسره برای توابع چند متغیری می‌تواند بسیار پیچیده‌تر شود. در اینجا توجه خود را به ناحیه‌های نوع زیر محدود می‌کنیم:

۱) یک ناحیهٔ مجاز انتگرال‌گیری که از آن تعدادی متناهی نقطه حذف شده باشد.

۲) $\mathbb{R}^n$ یا $\mathbb{R}^n-\{p_۱,\ldots,p_k\}$، یعنی $\mathbb{R}^n$ که از آن تعدادی متناهی نقطه حذف شده باشد.

۳) بخشی X از $\mathbb{R}^n$ که محصور به تعدادی متناهی ابرصفحه در $\mathbb{R}^n$ باشد، یا $X-\{p_۱,\ldots,p_k\}$

برای نوع (۳) می‌توان مثلاً ناحیه $\{(x_۱,\ldots,x_n)\mid x_i\geq ۰, i=۱,\ldots,n\}$ را مثال زد. علاوه بر این محدودیت، فقط تابع‌های غیرمنفی را در نظر می‌گیریم (مشابهاً می‌توان توابع غیرمثبت را در نظر

گرفت). قضیهٔ زیر را بدون اثبات مورد استفاده قرار می‌دهیم.

(۳۴–۵) <u>قضیه</u> فرض کنید D یک ناحیهٔ در $\mathbb{R}^n$ از نوع بالا باشد و $(D_n)_{n=1}^{\infty}$ یک دنباله از زیرمجموعه‌های بسته، کراندار و مجاز انتگرال‌گیری از $\mathbb{R}^n$ به طوری که:

$$D_1 \subset D_2 \subset D_3 \subset \cdots \quad , \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = D$$

اگر $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع پیوسته و نامنفی باشد و $\lim_{n\to\infty} \int_{D_n} f$ وجود داشته باشد، آنگاه برای هر دنباله $(D'_n)_{n=1}^{\infty}$ دیگر با شرایط ذکر شده برای $(D_n)_{n=1}^{\infty}$، $\lim_{n\to\infty} \int_{D'_n} f$ وجود دارد و برابر $\lim_{n\to\infty} \int_{D_n} f$ است.

این حد مشترک را <u>انتگرال ناسرهٔ f روی D</u> می‌نامیم و در صورت وجود حد می‌گوییم $\int_D f$ <u>همگراست</u>. لازم به ذکر است که اگر f همه‌جا غیرمنفی (یا همه‌جا غیرمثبت) نباشد، شکل نواحی D_n می‌تواند بر نتیجه نهایی، یعنی حد $\int_{D_n} f$ اثر بگذارد. این پدیده در حالت یک متغیری نیز دیده می‌شود. مثلاً برای تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ که روی بازهٔ محذوف $[-1, 1] - \{0\}$ تعریف شده و پیوسته است، اگر D_n را برابر $[-1, \frac{-1}{n}] \cup [\frac{1}{n}, 1]$ بگیریم، داریم $\int_{D_n} f = 0$ و در نتیجه حد این انتگرال‌ها صفر است. ولی برای $D'_n = [-1, \frac{-1}{n}] \cup [\frac{1}{2n}, 1]$ داریم $\int_{D'_n} f = \ln 2$ که حد آن نیز $\ln 2$ است.

<u>مثال</u> در مورد همگرایی انتگرال ناسرهٔ $\int\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dA$ بحث کنید.

<u>حل</u> D_n را گوی بستهٔ شعاع n حول مبدأ می‌گیریم، $\bigcup D_n = \mathbb{R}^2$. داریم:

$$\begin{aligned} \int\int_{D_n} e^{-(x^2+y^2)} dA &= \int_0^{2\pi} \int_0^n e^{-r^2} r dr d\theta \\ &= (2\pi)(-\tfrac{1}{2}) e^{-r^2} \big|_0^n \\ &= \pi(1 - e^{-n^2}) \end{aligned}$$

وقتی $n \longrightarrow \infty$، مقدار فوق به π میل می‌کند، پس $\int\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dA$ همگراست و برابر π می‌باشد.

<u>کاربرد</u> نشان می‌دهیم $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$ همگراست و برابر $\sqrt{\pi}$ می‌باشد. مقصود از $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$،

www.ttmar.ir

$\lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{a} e^{-x^۲}dx$ است هر چند که به سبب مثبت بودن $e^{-x^۲}$ نتیجه می‌شود که لازم نیست حدود انتگرال لزوماً متقارن گرفته شوند. توجه کنید که $\int_{-a}^{a} e^{-x^۲}dx = \int_{-a}^{a} e^{-y^۲}dy$ پس اگر $\int_{-a}^{a} e^{-x^۲}dx$ را I_a بنامیم، داریم $\int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a} e^{-(x^۲+y^۲)}dxdy = I_a^۲$. ناحیهٔ انتگرال‌گیری مربع $-a \leq x, y \leq a$ است. اگر این مربع را D'_a بنامیم، داریم $D'_۱ \subset D'_۲ \subset D'_۳ \subset \cdots$ و $\bigcup_{n=۱}^{\infty} D'_n = \mathbb{R}^۲$، پس طبق قضیه و مثال قبل $\lim_{n\to\infty} I_n^۲ = \pi$. نتیجه این که $\lim_{n\to\infty} I_n = \sqrt{\pi}$. این حد در نظریه احتمال زیاد به‌کار می‌رود.

www.ttnar.ir

رویه‌های هموار

در بخشهای ۱۲، ۱۳ و ۱۴ به بررسی نسبتاً مسبوطی از 'خمهای هموار' پرداختیم. در اینجا می‌خواهیم به توصیف اشیاء هموار دوبعدی احتمالاً خمیده (غیر مسطح) بپردازیم. به این منظور نخست مفهوم 'رویهٔ پارارمتری' را مطرح می‌کنیم، سپس شرطی را که متضمن خاصیت 'هموار بودن' است به تعریف می‌افزائیم. برای توصیف رویه که برداشت ذهنی ما از آن یک شی دوبعدی است دو پارامتر مورد نیاز است همانگونه که برای توصیف خم (یک بعدی) یک پارامتر t مورد استفاده قرار می‌گرفت.

اگر W یک ناحیه در صفحه uv باشد، تابع

$$\vec{r} = \varphi(u,v) \quad , \quad \varphi : W \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

یک رویهٔ پارامتری در $\mathbb{R}^3$ تعریف می‌کند. صفات پیوسته، مشتق‌پذیر، مشتق‌پذیر با مشتقات پاره‌ای پیوسته (اصطلاحاً C^1) وقتی به رویه پارامتری اطلاق شوند مقصود این است که تابع φ از این صفات برخوردار است. البته $\varphi(u,v)$ دارای سه مؤلفه (x,y,z) است، $x = \varphi_1(u,v)$، $y = \varphi_2(u,v)$، $z = \varphi_3(u,v)$ و صفت مربوط باید برای هر یک از تابع‌های φ_1، φ_2 و φ_3 برقرار باشد. شکل ۱ تجسم ما از رویه‌های پارامتری را نشان می‌دهد انتظار داریم خطوط راست (ثابت $= u$)و (ثابت $= v$) تحت اثر φ به خم‌هایی روی تصویر φ منتقل شوند و نوعی "دستگاه مختصات خمیده" روی $\varphi(W)$ بسازند

شکل ۱

این انتظار در حالت کلی کمی خوشبینانه است زیرا که به طور کلی تصویر φ ممکن است "دو بعدی" نشود، مثلاً φ ممکن است کل W را به یک پاره‌خط یا حتی یک نقطه بنگارد (تابع ثابت). در مورد خم‌ها، افزودن شرط پیوستگی مشتق و ناصفر ماندن بردار سرعت، این تضمین را ایجاد کرد که تصویر

خم پارامتری "یک بعدی و هموار" است. در اینجا باید شرط مشابهی را جستجو کنیم. مشتق‌های پاره‌ای φ نسبت به u و v را به ترتیب به $\vec{r}_u$ و $\vec{r}_v$ نمایش می‌دهیم. بدین ترتیب:

$$\vec{r}_u = (\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}) \quad , \quad \vec{r}_v = (\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v})$$

$\vec{r}_u$ و $\vec{r}_v$ تعبیر هندسی جالب توجهی دارند. با ثابت نگاهداشتن $v = v_\circ$ و مشتق‌گیری نسبت به u، بردار سرعت خم $\varphi(u, v_\circ)$ را که روی $\varphi(u,v)$ قرار دارد در نظر گرفته‌ایم، و به همین ترتیب $\vec{r}_v$ بردار سرعت خم $\varphi(u_\circ, v)$ است. پس $\vec{r}_u$ و $\vec{r}_v$ بردارهای مماس بر $\varphi(W)$ در نقطهٔ $\varphi(u,v)$ تلقی می‌شوند. اگر $\vec{r}_u$ و $\vec{r}_v$ همراستا نباشند، انتظار داریم u و v دو جهت مستقل روی رویهٔ $\varphi(W)$ را مدرج کنند و بدین ترتیب شیئی "دو بعدی" حاصل شود. با این زمینه، رویه پارامتری $\varphi : W \longrightarrow \mathbb{R}^۳$، $\vec{r} = \varphi(u,v)$، را <u>هموار</u> می‌نامیم در صورتی که شرایط زیر برقرار باشند:

الف) φ مشتق‌پذیر با مشتق‌های پاره‌ای پیوسته باشد.

ب) به‌ازای هر (u,v) در W داشته باشیم $\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq \underline{\circ}$ (معادلاً $\vec{r}_u$ و $\vec{r}_v$ همراستا نباشند).

ضمناً توجه کنید که چون $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$ بر $\vec{r}_u$ و $\vec{r}_v$ عمود است، و $\vec{r}_u$، $\vec{r}_v$ دو جهت مماس مستقل بر رویه را نشان می‌دهند، بردار واحد $\vec{n} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|}$ بر $\varphi(W)$ عمود خواهد بود. $\vec{n}$ را <u>قائم واحد قراردادی</u> رویهٔ هموار φ می‌نامیم.

برای توجیه اصطلاح هموار، نشان می‌دهیم که تحت این شرط، اگر $(u_\circ, v_\circ)$ نقطه‌ای از W باشد، آنگاه تحت شرط هموار بودن، گوی بازی D حول $(u_\circ, v_\circ)$ وجود دارد که تصویر آن تحت φ، در واقع نمودار یک تابع مشتق‌پذیر دو متغیری است. اگر ماتریس ژاکوبی φ (مشتق φ) در نقطهٔ $(u_\circ, v_\circ)$ را در نظر بگیریم، داریم:

$$D\varphi(u_\circ, v_\circ) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix}$$

یعنی $\vec{r}_u$ و $\vec{r}_v$ ستون‌های این ماتریس هستند. همراستا نبودن $\vec{r}_u$ و $\vec{r}_v$ دلالت بر این می‌کند که تصویرهای قائم این دو بردار بر دست کم یکی از سه صفحهٔ مختصاتی xy، yz یا zy همراستا نیستند.

برای صراحت فرض کنید تصویر این دو بر صفحه xy همراستا نباشند، یعنی $(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u})$ و $(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v})$ همراستا نباشند. نتیجه اینکه

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}_{(u_0,v_0)} \neq 0$$

طبق قضیهٔ تابع وارون مجموعهٔ باز D' حول (x_0, y_0) (تصویر قائم $\varphi(u_0, v_0)$ روی صفحه xy) وجود دارد و مجموعهٔ باز D حول (u_0, v_0) به طوری که φ یک تناظر یک به یک میان D و D' برقرار می‌کند و وارون آن، $\varphi^{-1} : D' \longrightarrow D$ نیز مشتق‌پذیر است. بدین ترتیب (u, v) در D تابعی مشتق‌پذیر از (x, y) در D' می‌شود. نتیجه این که $z = \varphi_3(u, v)$ نیز تابعی مشتق‌پذیر از (x, y) است،

$$z = (\varphi_3 \circ \varphi^{-1})(x, y)$$

پس نقاط $\varphi(u, v) = (x, y, z)$ برای (u, v) نزدیک (u_0, v_0) به صورت $(x, y, (\varphi_3 \circ \varphi^{-1})(x, y))$ یعنی نمودار تابع مشتق‌پذیر $\varphi_3 \circ \varphi^{-1}$ قابل نمایش‌اند. بدین مفهوم شرط‌های (الف) و (ب) مفهوم شهودی هموار بودن را برقرار می‌کنند.

استدلال بالا ضمناً نشان می‌دهد که برای هر $w_0 = (u_0, v_0)$ در W، دامنهٔ تعریف یک رویهٔ هموار، مجموعهٔ بازی حول w_0 وجود دارد که تحدید φ به آن یک به یک است، هر چند که یک رویهٔ هموار ممکن است نهایتاً خود را قطع کند. نکتهٔ دیگر این که $\vec{r}_u$ و $\vec{r}_v$، ستون‌های $D\varphi(u, v)$، تصاویر $e_1 = (1, 0)$ و $e_2 = (0, 1)$ تحت اثر تقریب خطی هستند، بنابراین ضریب تغییر مساحت در نقطهٔ (u, v) برابر مساحت متوازی الاضلاع تعریف شده توسط $\vec{r}_u$ و $\vec{r}_v$، یعنی $|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|$، است (مراجعه کنید به بحث تعویض متغیر در انتگرال)، از این رو $dS = |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| dudv$ را عنصر سطح رویهٔ هموار φ می‌نامند. اگر D زیرمجموعه‌ای از W باشد که روی آن φ یک به یک است و D یک ناحیهٔ مجاز انتگرال‌گیری در صفحه uv باشد، تعریف می‌کنیم:

$$\text{مساحت } \varphi(M) = \int\int_D dS = \int\int_D |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| dudv$$

www.ttmar.ir

<u>مثال ۱</u> اگر W یک زیرمجموعهٔ باز $\mathbb{R}^2$ باشد و $f : W \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع دارای مشتق‌های پاره‌ای پیوسته، نمودار f را می‌توان به صورت یک رویهٔ هموار پارامتری کرد:

$$\varphi : W \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad , \quad \varphi(u,v) = (u, v, f(u,v))$$

داریم $\vec{r}_u = (1, 0, \frac{\partial f}{\partial u})$ ،$\vec{r}_v = (0, 1, \frac{\partial f}{\partial v})$ ،$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = (-\frac{\partial f}{\partial u}, -\frac{\partial f}{\partial v}, 1)$ پس

$$dS = \sqrt{1 + (\frac{\partial f}{\partial u})^2 + (\frac{\partial f}{\partial v})^2} \quad , \quad \vec{n} = \frac{(-\frac{\partial f}{\partial u}, -\frac{\partial f}{\partial v}, 1)}{\sqrt{1 + (\frac{\partial f}{\partial u})^2 + (\frac{\partial f}{\partial v})^2}}$$

به کمک dS بالا می‌توانیم مساحت نمودارها را محاسبه کنیم.

<u>مثال ۱—۱</u> سطح جانبی جسم به‌دست آمده از اشتراک استوانه‌های $x^2 + y^2 \leq 1$ و $x^2 + z^2 \leq 1$ را محاسبه کنید.

برای این کار توجه کنید که به سبب تقارن، مساحت مورد نظر چهار برابر مساحت نمودار $z = \sqrt{1 - x^2}$ روی گوی $x^2 + y^2 \leq 1$ است. داریم $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$، $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$، پس مساحت نمودار برابر است با:

$$\begin{aligned} \int\int_{x^2+y^2 \leq 1} \sqrt{1 + \frac{x^2}{1 - x^2}} dA &= \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dy dx \\ &= \int_{-1}^{1} 2 dx = 4 \end{aligned}$$

بنابراین سطح جانبی مورد نظر برابر ۱۶ است. همین نتیجه را از روش انتگرال‌گیری روی خم نیز به‌دست آورده بودیم.

<u>مثال ۲</u> کره شعاع R حول $\underline{0}$ در $\mathbb{R}^3$ را به کمک مختصات کروی پارامتری می‌کنیم. تعریف می‌کنیم:

$$\varphi(u,v) = (R \sin u \cos v, R \sin u \sin v, R \cos u)$$

$$0 \leq u \leq \pi \quad , \quad 0 \leq v \leq 2\pi$$

در اینجا مختصه‌های کروی φ و θ به ترتیب به u و v نمایش داده شده‌اند. داریم:

$$\vec{r}_u = (R \cos u \cos v, R \cos u \sin v, -R \sin u) \quad , \quad \vec{r}_v = (-R \sin u \sin v, R \sin u \cos v, 0)$$

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = (R^2 \sin^2 u \cos v, R^2 \sin^2 u \sin v, R^2 \sin u \cos v) \quad , \quad dS = R^2 \sin u du dv$$

www.ttnar.ir

توجه کنید که شرط هموار بودن به‌ازای $u = 0, \pi$ (دو قطب کره) نقض می‌شود. این پدیده فقط ناشی از روش پارامتری کردن است و ارتباطی با شکل کره ندارد. توجه کنید که در دو قطب خطوط مختصاتی، یعنی تصاویر ثابت $= u$ و ثابت $= v$ (مدارها و نصف النهارها) از حالت متقاطع بودن خارج می‌شوند زیرا تصویر هر یک از $u = 0$ و $u = \pi$ یک تک نقطه است. با این حال، برای منظورهای انتگرال‌گیری، چنانچه تابعی در سراسر کره انتگرال‌پذیر باشد، دو خط $u = 0$ و $u = \pi$ که اندازهٔ دو بعدی صفر در مستطیل $0 \leq u \leq \pi$، $0 \leq v \leq 2\pi$، دارند، بی‌اثر هستند.

مثال ۳ (چنبره دوار) برای ثابت‌های $a > b > 0$، تعریف می‌کنیم:

$$\vec{r} = \varphi(u,v) = ((a + b\cos u)\cos v, (a + b\cos u)\sin v, b\sin u)$$

$$0 \leq u \leq 2\pi \quad , \quad 0 \leq v \leq 2\pi$$

این رویه از دوران دایرهٔ شعاع b به مرکز $(a, 0)$ در صفحهٔ xz حول محور z به‌دست می‌آید. تعبیر زاویه‌های u و v در شکل ۲ نمایش داده شده است. u دایرهٔ اولیه را مدرج می‌کند و v در واقع مختصهٔ θ در مختصات استوانه‌ای است، داریم:

$$\begin{cases} \vec{r}_u = ((-b\sin u)\cos v, (-b\sin u)\sin v, b\cos u) \\ \vec{r}_v = (-(a + b\cos u)\sin v, (a + b\cos u)\cos v, 0) \end{cases}$$

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = (-b(a + b\cos u)\cos u\cos v, -b(a + b\cos u)\cos u\sin v, -b\sin u(a + b\cos u))$$

$$|\vec{r}_u \times \vec{r}_v| = b(a + b\cos u) \quad , \quad dS = b(a + b\cos u)dudv$$

توجه کنید که شرط هموار بودن همه‌جا برقرار است. مساحت این چنبره برابر می‌شود با:

$$\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} b(a + b\cos u)dudv = (2\pi b)(2\pi a) = 4\pi^2 ab$$

شکل ۲

مثال ۴ برای $a, b, c > 0$ داده شده تعریف می‌کنیم:

$$\vec{r} = \varphi(u,v) = (a\cosh u\cos v, b\cosh u\sin v, c\sinh u)$$

$$0 \leq u \leq 1 \quad , \quad 0 \leq v \leq 2\pi$$

www.ttnar.ir

اگر سه مؤلفه $\varphi(u,v)$ را به ترتیب x، y و z بخوانیم، خواهیم داشت:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

پس تصویر جزیی از هذلولی‌وار یکپارچهٔ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ است، در واقع قسمتی که برای آن $0\le z\le c\sinh 1$ (شکل ۳). داریم

$$\vec{r}_u=(a\sinh u\cos v, b\sinh u\sin v, c\cosh u), \vec{r}_v=(-a\cosh u\sin v, b\cosh u\cos v, 0)$$

$$\vec{r}_u\times\vec{r}_v=(-bc\cosh^2 u\cos v, -ac\cosh^2 u\sin v, ab\sinh u\cosh u)\neq \underline{0}$$

پس شرط هموار بودن برقرار است.

شکل ۳

در مثال‌های بالا عمدتاً شرط هموار بودن نقض نمی‌شد و در یک مورد (کره) نقض این شرط تعبیر هندسی نداشت، بلکه یک ویژگی روش پارامتری کردن را منعکس می‌کرد. در زیر چند مثال از ناهنجاری‌های هندسی که ممکن است در اثر نقض شرط هموار بودن پیش آید نشان می‌دهیم:

<u>مثال ۵</u> (الف) برای a,b,c داده شده تعریف کنید

$$\varphi(u,v)=(a,b,c)\quad,\quad (u,v)\in\mathbb{R}^2$$

در اینجا به وضوح $\vec{r}_u=\vec{r}_v=\underline{0}$ و شرط هموار بودن همه‌جا نقض می‌شود. تصویر φ در واقع یک تک نقطه‌ای است و یک "رویه" به مفهوم دو بعدی آن نیست.

(ب) برای تابع $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ که دارای مشتق‌های پاره‌ای پیوسته است، تعریف کنید:

$$\varphi(u,v)=(f(u,v),f(u,v),f(u,v))$$

تصویر φ بخشی از خط راست $x=y=z$ است، یعنی یک بعدی است و با شهود رویهٔ دو بعدی سازگار نیست. در واقع $\vec{r}_u=(\frac{\partial f}{\partial u},\frac{\partial f}{\partial u},\frac{\partial f}{\partial u})$، $\vec{r}_v=(\frac{\partial f}{\partial v},\frac{\partial f}{\partial v},\frac{\partial f}{\partial v})$ و $\vec{r}_u\times\vec{r}_v=\underline{0}$.

(ج)

$$\vec{r}=\varphi(u,v)=(u\cos v, u\sin v, u)\quad,\quad (u,v)\in\mathbb{R}^2$$

www.ttmar.ir

داریم $\vec{r}_u = (\cos v, \sin v, ۱)$، $\vec{r}_v = (-u\sin v, u\cos v, ۰)$، پس

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = (-u\cos v, -u\sin v, u)$$

به‌ازای $u = ۰$ شرط هموار بودن نقض می‌شود. در واقع تصویر φ مخروط $z^۲ = x^۲ + y^۲$ است و $u = ۰$ متناظر با رأس مخروط می‌باشد که در آن نقطه مخروط صفحهٔ مماس ندارد

شکل ۳

(د) به مثال ۴، بخش ۱۲، $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^۲$، نگاه کنید که در آن تصویر γ نمودار $y = |x|$ را به صورت مشتق‌پذیر با مشتق پیوسته پارامتری می‌کند ولی $\gamma'(۰) = ۰$. حال تعریف کنید:

$$\vec{r} = \varphi(u,v) = (u, \gamma_۱(v), \gamma_۲(v)) \quad , \quad (u,v) \in \mathbb{R}^۲$$

که در آن $\gamma(v) = (\gamma_۱(v), \gamma_۲(v))$. داریم:

$$\vec{r}_u = (۱, ۰, ۰) \quad , \quad \vec{r}_v = (۰, \gamma'_۱(v), \gamma'_۲(v)) \quad , \quad \vec{r}_u \times \vec{r}_v = (۰, -\gamma'_۲(v), \gamma'_۱(v))$$

برای $v = ۰$، مستقل از u، شرط هموار بودن نقض می‌شود. $v = ۰$ در شکل ۴ متناظر با خط "تا شدن" رویه است که در سراسر آن صفحه مماس بر تصویر رویه وجود ندارد.

در اینجا لازم است یک نمایش معمول دیگر برای $dS = |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| du dv$ را نیز معرفی کنیم. داریم:

$$|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|^۲ = (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v)$$

طبق اتحاد لاگرانژ

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c}) \qquad (۱)$$

می‌توان نوشت:

$$|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|^۲ = (\vec{r}_u \cdot \vec{r}_u)(\vec{r}_v \cdot \vec{r}_v) - (\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v)^۲$$

www.ttnar.ir

معمولاً $\vec{r}_u \cdot \vec{r}_u$ را به E، $\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v$ را به F و $\vec{r}_v \cdot \vec{r}_v$ را به G نمایش می‌دهند (نمادگذاری گاوس)، پس:

$$dS = \sqrt{EG - F^{۲}}\,dudv \qquad (۲)$$

<u>یادداشت</u> تصویر یک رویه هموار ممکن است پرمایش‌های گوناگون به عنوان رویهٔ هموار داشته باشد، می‌توان "بازپرمایش" را همچنان که در مورد خم‌های هموار مطرح کردیم در اینجا نیز مطرح کنیم. در ساده‌ترین حالت فرض کنید W و W' دو مجموعهٔ باز و همبند مسیری در $\mathbb{R}^{۲}$ باشند، نقاط W را به (u,v) و نقاط W' را به (u',v') نمایش دهید. فرض کنید $\tau : W' \longrightarrow W$ یک نگاشت یک به یک، پوشا و دارای مشتق‌های پاره‌ای پیوسته باشد که به‌ازای هر $w' = (u',v')$ در W' داشته باشیم $\det D\tau(w') \neq ۰$. اگر $\varphi : W \longrightarrow \mathbb{R}^{۳}$ یک رویهٔ‌هموار تعریف کند، $\varphi \circ \tau : W' \longrightarrow \mathbb{R}^{۳}$ نیز یک رویهٔ هموار است و همان مجموعهٔ $\varphi(W)$ را توصیف می‌کند. چون W' همبند مسیری فرض شده است، $\det D\tau(w')$ برای همهٔ نقاط w' از W' یا مثبت یا منفی است (در غیر این صورت اگر مسیر پیوسته‌ای بین دو نقطه با علامت مختلف در نظر بگیریم، به سبب پیوستگی $\det D\varphi(w')$، این کمیت باید جایی در طول مسیر صفر شود که خلاف فرض است). در حالت اول τ را یک <u>بازپرمایش جهت‌نگهدار</u> و در حالت دوم τ را یک <u>بازپرمایش جهت‌برگردان</u> می‌نامند. برای بازپرمایش‌های جهت‌نگهدار، قائم واحد قراردادی تغییر نمی‌کند، ولی برای بازپرمایش‌های جهت‌برگردان، $\vec{n}$ وارونه می‌شود. پس در واقع یک رویهٔ هموار در $\mathbb{R}^{۳}$ دو 'جهت' می‌پذیرد که با انتخاب جهت قائم واحد مشخص می‌شود.

www.ttmar.ir

انتگرال روی خم و رویه (۱)

تاکنون مفهوم انتگرال فقط روی مجموعه‌های "مسطح" مطرح بوده است: یک بازه در $\mathbb{R}$، یک ناحیه در صفحه و به طور کلی یک ناحیهٔ توپر در $\mathbb{R}^n$. نمونه اشیاء خمیده، یک خم در $\mathbb{R}^n$، یک رویه در $\mathbb{R}^3$، یا یک مجموعه تراز یک تابع غیرخطی $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ است. مفهوم انتگرال روی اینگونه مجموعه‌ها کاربردهای اساسی هم در درون ریاضیات و هم در بیرون آن دارد. در باقیماندهٔ درس مفهوم انتگرال روی خم‌ها و رویه‌ها محور اصلی بحث خواهد بود.

دو نوع انتگرال در اینجا مورد بحث قرار خواهد گرفت. نوع اول که به 'انتگرال چگالی' معروف است برای خم γ به $\int_\gamma f ds$ و برای رویهٔ φ به $\int_\varphi \int f dS$ نمایش داده خواهد شد. در اینجا f تابعی است، معمولاً پیوسته، که روی تصویر خم یا رویه تعریف شده است. در حالتی که f مثبت باشد، اگر آن را به چگالی تصویر خم یا تصویر رویه تعبیر کنیم، مقدار انتگرال مربوط برابر جرم تصویر خواهد بود. مقدار این انتگرال به جهت خم یا رویه بستگی ندارد. نوع دوم انتگرال، که محور اصلی بحثهای بعدی خواهد بود، 'انتگرال یک میدان برداری'، یا 'انتگرال یک فرم دیفرانسیل' نام دارد و با تعویض جهت یا رویه مقدار آن تغییر علامت می‌دهد.

(۳۶—۱) <u>انتگرال چگالی روی خم</u> یک خم هموار $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ در نظر بگیرید و فرض کنید f تابعی با مقدار حقیقی است که دامنهٔ آن شامل تصویر γ می‌باشد. معمولاً با f پیوسته سروکار داریم. طبق معمول پارامتر طول خم را به s نمایش می‌دهیم. تعریف می‌کنیم:

$$\int_\gamma f ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \frac{ds}{dt} dt \qquad (۱)$$

طرف چپ این تعریف به پارامتر خاص t بستگی ندارد ولی طرف راست ظاهراً به t وابسته است. برای این که این تعریف معنی داشته باشد، باید نحوهٔ وابستگی سمت راست به پارامتر t را بررسی کنیم.

www.ttnar.ir

فرض کنید $\varphi:[\alpha,\beta]\longrightarrow[a,b]$ یک بازپرمایش γ را تعریف کند، $t=\varphi(\tau)$، داریم:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(\gamma(t))\frac{ds}{dt}dt &= \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)}(f\circ\gamma)(\varphi(\tau))\frac{ds}{dt}(\varphi(\tau))\frac{dt}{d\tau}d\tau\\ &= \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)}(f\circ\gamma)(\varphi(\tau))\frac{ds}{d\tau}d\tau\end{aligned}$$

اگر φ جهت‌نگهدار باشد، داریم $\varphi^{-1}(a)=\alpha$ و $\varphi^{-1}(b)=\beta$ پس عبارت سمت راست برابر $\int_\alpha^\beta f((\gamma\circ\varphi)(\tau))\frac{ds}{d\tau}d\tau$ می‌شود. اگر φ جهت برگردان باشد، $\varphi^{-1}(a)=\beta$ و $\varphi^{-1}(b)=\alpha$ و در نتیجه عبارت سمت راست برابر می‌شود با $-\int_\alpha^\beta f((\gamma\circ\varphi)(\tau))\frac{ds}{d\tau}d\tau$ که در اینجا s پارامتر طول خمیده اولیه یعنی γ است. اگر پارامتر طول خم معکوس را به $\tilde{s}$ نمایش دهیم، داریم $\frac{d\tilde{s}}{dt}=-\frac{ds}{dt}$، پس مجدداً مقدار انتگرال نسبت به پارامتر جدید، یعنی $\int_\alpha^\beta f((\gamma\circ\varphi)(t))\frac{d\tilde{s}}{dt}dt$ همان مقدار سابق است. برای $\int_\gamma fds$ دو تعبیر زیر را مطرح می‌کنیم.

(۳٦—۱—۱) فرض کنید $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ یک‌به‌یک باشد. اگر f تابعی مثبت باشد و تصویر γ را یک مفتول نازک به چگالی $f(\gamma(t))$ در نقطهٔ متناظر با t فرض کنیم، $\int_\gamma fds$ جرم کل مفتول تلقی می‌شود.

(۳٦—۱—۲) در حالت خاصی که تصویر خم یک‌به‌یک $\gamma:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}^3$ در یک صفحه مسطح P قرار گیرد، و f مثبت باشد، می‌توان به $\int_\gamma fds$ یک تعبیر مساحت به صورت زیر نسبت داد. روی تصویر خم γ و عمود بر صفحه P، در هر نقطه $\gamma(t)$ عمودی در یک طرف صفحه به ارتفاع $f(\gamma(t))$ در نظر بگیرید. این پاره‌خط‌های عمود رویه‌ای عمود بر P می‌سازند که مساحت آن برابر $\int_\gamma fds$ است (شکل ۱).

شکل ۱

<u>مثال</u> مساحت سطح جانبی جسمی را که از تقاطع دو استوانه $x^2+y^2=1$ و $x^2+z^2=1$ ساخته می‌شود محاسبه کنید.

<u>حل</u> قبلاً حجم داخل این جسم را محاسبه کرده‌ایم. سطح جانبی این جسم از دو قسمت متساوی تشکیل شده است که یک بخش آن روی دایرهٔ $x^2+y^2=1$ ساخته شده و متشکل از پاره‌خط‌هایی

www.ttmar.ir

است که روی استوانهٔ $x^2+y^2=1$ قرار دارند و توسط $x^2+z^2=1$ بریده شده‌اند. روی نقطهٔ $(x,y,0)$ از دایرهٔ $x^2+y^2=1$، این پاره‌خط با $-\sqrt{1-x^2}\leq z\leq\sqrt{1-x^2}$ مشخص می‌شود که طول آن $2\sqrt{1-x^2}$ است. بنابر تقارن، بخش دیگر سطح جانبی نیز وضعیت مشابه دارد (با تعویض نقش y و z). بدین ترتیب:

$$\text{سطح جانبی} = 2\times\int_\gamma 2\sqrt{1-x^2}\,ds$$

که در اینجا γ دایرهٔ $x^2+y^2=1$ را نمایش می‌دهد که یک بار در جهت مثلثاتی طی شده است. با استفاده از پرمایش $x=\cos t$، $y=\sin t$، $0\leq t\leq 2\pi$، $s=t$، داریم:

$$\text{سطح جانبی} = 4\times\int_0^{2\pi}|\sin t|dt = 8\times\int_0^{\pi}\sin t\,dt = 16$$

(۱–۳۶) انتگرال چگالی روی رویه فرض کنید $\varphi: W\to\mathbb{R}^3$ یک رویه هموار باشد $\overrightarrow{r}=\varphi(u,v)$، و W یک ناحیهٔ مجاز انتگرال‌گیری در صفحه (u,v). اگر f تابعی با مقدار حقیقی باشد که دامنهٔ آن شامل $\varphi(W)$ است، انتگرال $\int_\varphi\int fdS$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\int_\varphi\int fdS=\int_W\int f(\varphi(u,v))|\overrightarrow{r}_u\times\overrightarrow{r}_v|dudv \qquad (2)$$

برای اینکه طرف راست (۲) وجود داشته باشد، تابع $f\circ\varphi$ باید روی ناحیهٔ مجاز W انتگرال‌پذیر باشد. اگر f پیوسته باشد، ترکیب $f\circ\varphi$ نیز پیوسته است، $|\overrightarrow{r}_u\times\overrightarrow{r}_v|$ نیز پیوسته می‌باشد زیرا که مشتقات پاره‌ای φ نسبت به u و v پیوسته فرض شده‌اند، پس انتگرال طرف راست وجود دارد.

اکنون به کمک قاعدهٔ زنجیره‌ای و فرمول تعویض متغیر انتگرال دوگانه نشان می‌دهیم که طرف راست (۲) تحت بازپرمایش پا برجا می‌ماند. فرض کنید $\Psi: W'\to W$ تابعی یک‌به‌یک و C^1 از ناحیهٔ مجاز انتگرال‌گیری W' به W است به‌طوری که دترمینان ماتریس ژاکوبی Ψ همه‌جا ناصفر است. نقطه w' را به $w'=(u',v')$ نمایش می‌دهیم و می‌نویسیم $\overrightarrow{r}=(x,y,z)$. از قاعدهٔ زنجیره‌ای داریم:

$$\begin{bmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} y_{u'} & y_{v'} \\ z_{u'} & z_{v'} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u'_u & u'_v \\ v'_u & v'_v \end{bmatrix} \qquad (3)$$

www.tinar.ir

$$\begin{bmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{u'} & z_{v'} \\ x_{u'} & x_{v'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'_u & u'_v \\ v'_u & v'_v \end{bmatrix} \tag{۴}$$

$$\begin{bmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{u'} & x_{v'} \\ y_{u'} & y_{v'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'_u & u'_v \\ v'_u & v'_v \end{bmatrix} \tag{۵}$$

با توجه به اینکه دترمینان تمرینهای طرف چپ مؤلفه‌های $\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v$ و دترمینان ماتریسهای سمت چپ طرف راست مؤلفه‌های $\overrightarrow{r}_{u'} \times \overrightarrow{r}_{v'}$ هستند، داریم

$$|\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v| = |\overrightarrow{r}_{u'} \times \overrightarrow{r}_{v'}|.|\det \frac{\partial(u',v')}{\partial(u,v)}| \tag{٦}$$

با جایگزینی (٦) در (۲) و با استفاده از فرمول تعویض متغیر نتیجه می‌شود که:

$$\int_W \int f(\varphi(u,v))|\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v| du\, dv = \int_{W'} \int f(\varphi \circ \Psi(u',v'))|\overrightarrow{r}'_u \times \overrightarrow{r}'_v| du'\, dv'$$

پس تعریف (۲) تحت بازپرمایش تغییر نمی‌کند.

تعبیر جرم و چگالی در اینجا نیز مطرح می‌شود. اگر φ یک‌به‌یک باشد و به ازای هر $(u,v) \in W$، $f(\varphi(u,v)) > ۰$ چگالی رویه در نقطهٔ $\varphi(u,v)$ تلقی شود، طبیعی است که مقدار $\int_\varphi \int f dS$ را جرم کل $\varphi(W)$ تلقی کنیم. مفهوم مرکز ثقل یک مفتول نازک (تصویر یک خم) و مرکز ثقل یک پیوستهٔ نازک (تصویر یک رویه) را نیز اکنون می‌توان به شیوهٔ معمول تعریف کرد. برای خم $\gamma : [۰, b] \to \mathbb{R}^۳$ و رویهٔ $\varphi : W \to \mathbb{R}^۳$، چگالی را به δ نمایش می‌دهیم. مختصات مرکز ثقل، $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

برای خم γ:

$$\overline{x} = \frac{\int_\gamma x\delta ds}{\int_\gamma \delta ds}, \quad \overline{y} = \frac{\int_\gamma y\delta ds}{\int_\gamma \delta ds}, \quad \overline{t} = \frac{\int_\gamma z\delta ds}{\int_\gamma \delta ds} \tag{۷}$$

و برای رویهٔ φ:

$$\overline{x} = \frac{\int_\gamma \int y\delta dS}{\int_\gamma \int \delta dS}, \quad \overline{y} = \frac{\int_\gamma \int y\delta dS}{\int_\gamma \int \delta dS}, \quad \overline{z} = \frac{\int_\gamma \int z\delta dS}{\int_\gamma \int \delta dS} \tag{۸}$$

www.ttnar.ir

در (۸) و (۹) مخرجها جرم کل را بیان می‌کنند. در حالتی که δ ثابت باشد (چگالی یکنواخت)، δ از صورت و مخرج حذف می‌شود و مرکز هندسی تصویر خم با تصویر رویه به‌دست می آید.

مثال مختصات مرکز نیمکرهٔ $x^۲ + y^۲ + z^۲ = R^۲$، $z \geq ۰$، را به‌دست آورید وقتی این نیمکره از ماده‌ای با چگالی یکنواخت ساخته شده باشد.

از تقارن کره واضح است که $\overline{x} = \overline{y} = ۰$. برای محاسبه $\overline{z}$ از (۹) استفاده می‌کنیم. پس از حذف کردن δ از صورت و مخرج کسر، مخرج عبارت $\overline{z}$ برابر مساحت نیمکره یعنی $۲\pi R^۲$ خواهد شد. نیمکره را طبق مثال ۲، بخش ۳۵، پرمایش می‌کنیم که در آن $dS = R^۲ \sin u \, du \, dv$. پس

$$\begin{aligned} \int_{\varphi} \int z dS &= \int \int R^۳ \cos u \sin u \, du \, dv \\ &= (۲\pi) R^۳ (\tfrac{۱}{۲}) \sin^۲ u |_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \\ &= \pi R^۳ \end{aligned}$$

بنابراین $\overline{z} = \frac{R}{۲}$.

برای معرفی انتگرالهای روی خم و رویه از نوع دوم لازم است که نخست کلیاتی را در مورد 'میدانهای برداری' مطرح کنیم. اگر U زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^n$ باشد و $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ یک تابع، به F یک میدان برداری نیز می‌گویند. معمولاً وقتی اصطلاح میدان برداری به‌کار می‌رود تجسمی بدین صورت مورد نظر است که بردار $F(x)$ را به مبدأ نقطهٔ x رسم می‌کنیم و کلمهٔ "میدان" یک توزیع پیکان‌ها در نقاط مختلف U را تداعی می‌کند. با این تعبیر، معمولاً برای تأکید برداری بودن مقدار $F(x)$، به جای F از $\vec{F}$ استفاده می‌کنیم.

شکل ۲

در $\mathbb{R}^۳$، میدان‌های پایه $\vec{i}$، $\vec{j}$ و $\vec{k}$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\vec{i}(x,y,z) = (۱,۰,۰) \quad , \quad \vec{j}(x,y,z) = (۰,۱,۰) \quad , \quad \vec{k}(x,y,z) = (۰,۰,۱) \qquad (۹)$$

بدین ترتیب میدان دلخواه $\vec{F}(x,y,z) = (F_۱(x,y,z), F_۲(x,y,z), F_۳(x,y,z))$ را می‌توان به صورت $\vec{F} = F_۱\vec{i} + F_۲\vec{j} + F_۳\vec{k}$ نمایش داد. برقراری صفاتی مانند پیوستگی و مشتق‌پذیری برای $\vec{F}$ معادل برقراری این صفات برای هر سه مؤلفه است.

www.ttnar.ir

شکل ۳

به همین ترتیب در $\mathbb{R}^n$، میدان‌های پایهٔ $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\vec{e}_j(x_1, \dots, x_n) = (0, \dots, 0, 1, 0 \dots, 0)$$

که در اینجا درایهٔ ۱ در مکان jــ ام است. هر میدان $\vec{F} = (F_1, \dots, F_n)$ را می‌توان به صورت $\vec{F}(x) = \sum_{i=1}^{n} F_i(x)\vec{e}_i$ نوشت.

یک مفهوم اساسی در رابطه با میدان برداری، مفهوم "خم انتگرال" است. اگر F یک میدان برداری تعریف شده روی زیرمجموعهٔ U از $\mathbb{R}^n$ باشد، مقصود از یک خم انتگرال (یا خط میدان) برای $\vec{F}$، خمی مشتق‌پذیر $\gamma : I \longrightarrow U$ است که $\gamma'(t) = \vec{F}(\gamma(t))$ به‌ازای هر t در I. بدین ترتیب تصویر خم انتگرال طوری قرار می‌گیرد که بردار سرعت آن همواره منطبق بر بردار میدان داده شده است. پس خم‌های انتگرال در واقع جواب‌های دستگاه معادلهٔ دیفرانسیل زیر می‌شوند:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = F_1(x) \\ \vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = F_n(x) \end{cases} \qquad (10)$$

قضیه اساسی وجود و یگانگی جواب معادلات دیفرانسیل حکم می‌کند که اگر $F_1, \dots, F_n$ دارای مشتق‌های پاره‌ای پیوسته باشند، از هر نقطهٔ x در U، خم انتگرال منحصر به فردی عبور می‌کند. در زیر به ذکر چند مثال در صفحه می‌پردازیم:

مثال ۱ میدان $\vec{F}(x,y) = x\vec{i} + y\vec{j}$ را در نظر بگیرید. این میدان در مبدأ صفر است و در هر نقطهٔ دیگر به اندازهٔ بردار حامل از مبدأ به آن نقطه، از آن نقطه ساطع می‌کند. بدین ترتیب بردارهای میدان همه به دور از مبدأ اشاره می‌کنند. نقطهٔ $(0,0)$ را در این صورت یک چشمه می‌نامند (شکل ۴، الف) خم‌های انتگرال این میدان نیم‌خط‌های راست هستند که می‌توان به صورت $\gamma(t) = (x_0 e^t, y_0 e^t)$ نمایش داد. توجه کنید که $\gamma(0) = (x_0, y_0)$، و $\gamma(t) \longrightarrow (0,0)$ وقتی $t \longrightarrow -\infty$.

<u>مثال ۲</u> برای $\vec{G}(x,y) = -x\vec{i} - y\vec{j}$ جهت میدان مثال ۱ وارونه می‌شود و میدان به سوی مبدأ اشاره می‌کند. $(0,0)$ را در این حالت یک <u>چاهک</u> می‌نامند. خم‌های انتگرال این میدان برداری را می‌توان به صورت $\gamma(t) = (x_0 e^{-t}, y_0 e^{-t})$ نوشت.

<u>مثال ۳</u> میدان $\vec{R}(x,y) = (-y)\vec{i} + x\vec{j}$ را در نظر بگیرید. در نقطهٔ (x,y)، بردار میدان عمود بر بردار حامل است و در واقع از دوران $\frac{\pi}{2}$ در جهت مثلثاتی حاصل می‌شود (شکل ۴، ب). خم انتگرال گذرا از نقطهٔ $(x_0, y_0) = (r_0 \cos\theta_0, r_0 \sin\theta_0)$ را می‌توان به صورت:

$$\gamma(t) = (r_0 \cos(\theta_0 + t), r_0 \sin(\theta_0 + t))$$

نوشت که تصویر آن یک دایره به شعاع r_0 حول مبدأ است. در این حالت $(0,0)$ را یک <u>مرکز</u> می‌نامند.

<u>مثال ۴</u> میدان $\vec{S}(x,y) = x\vec{i} + (-y)\vec{j}$ را در نظر بگیرید. این میدان در شکل ۴، ج، نمایش داده شده است و خم انتگرال گذرا از (x_0, y_0) را می‌توان به $\gamma(t) = (x_0 e^{t}, y_0 e^{-t})$ نمایش داد.

شکل ۴

که یک شاخهٔ هذلولی $xy = x_0 y_0$ است. برای $x_0 = 0$، $y_0 \neq 0$ و $y_0 = 0$، $x_0 \neq 0$، نیم‌خط‌های مختصاتی به‌دست می‌آیند. نقطهٔ $(0,0)$ را در اینجا یک <u>نقطه زینی</u> می‌نامند.

نوع مهمی از میدان برداری که قبلاً نیز به آن برخورده‌ایم <u>میدان گرادیان</u> است. اگر U زیرمجموعه‌ای باز از $\mathbb{R}^n$ باشد و $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی مشتق‌پذیر، گرادیان f، ∇f، را به صورت زیر تعریف کرده‌ایم:

$$\nabla f(x) = \frac{\partial f}{\partial x_1}\vec{e}_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\vec{e}_n$$

تابع f را یک <u>پتانسیل</u> برای میدان ∇f می‌نامیم و از آنجا که میدان گرادیان بر مجموعه‌های تراز عمود است، خم‌های انتگرال که بر میدان مماس هستند نیز بر مجموعه‌های تراز عمود خواهند شد. میدان‌های $\vec{F}$، $\vec{G}$ و $\vec{S}$ در مثال‌های ۱، ۲ و ۴ میدان‌های گرادیان هستند با پتانسیل‌های به ترتیب

www.ttnar.ir

$f(x,y)=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$، $g(x,y)=\frac{-1}{2}(x^2+y^2)$ و $s(x,y)=\frac{1}{2}(x^2-y^2)$. برای f و g، دوایر به مرکز مبدأ مجموعه‌های تراز هستند که بر نیم‌خط‌های مماس بر میدان عمودند. برای s، هذلولی‌های ثابت $=x^2-y^2$ مجموعه‌های تراز هستند که بر خانوادهٔ هذلولی‌های ثابت $xy=$ عمود می‌باشند. نشان می‌دهیم میدان $\vec{R}$ (مثال ۳) از نوع گرادیان نیست. فرض کنید تابعی $r(x,y)$ وجود داشته باشد که $\nabla r=\vec{R}$، یعنی $\frac{\partial r}{\partial x}=-y$ و $\frac{\partial r}{\partial y}=x$. از آنجایی که تابع‌های $(-y)$ و x خود مشتق‌پذیر با مشتق‌های پاره‌ای پیوسته‌اند، نتیجه می‌شود که $r(x,y)$ باید دارای مشتق‌های پاره‌ای مرتبه دوم پیوسته باشد، پس $\frac{\partial^2 r}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 r}{\partial x\partial y}$، که برقرار نیست زیرا $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial r}{\partial y})=1$ و $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial r}{\partial x})=-1$. این استدلال عمومیت دارد و منجر به شرط لازم زیر برای گرادیان بودن می‌شود:

(۲—۳۶) شرط لازم برای گرادیان بودن یک میدان فرض کنید میدان برداری $\vec{F}=F_1\vec{e}_1+\cdots+F_n\vec{e}_n$ که دارای مشتق‌های پاره‌ای پیوسته مرتبهٔ اول است، گرادیان یک تابع باشد، در این صورت:

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}=\frac{\partial F_j}{\partial x_i} \quad \text{برای هر زوج} \quad i,j=1,\ldots,n$$

اگر f پتانسیل $\vec{F}$ باشد، تساوی بالا همان $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}$ است. میدان‌های برداری گرادیان را میدان‌های پایسته نیز می‌نامند.

www.ftnar.ir

انتگرال روی خم و رویه (۲)

در بخش گذشته انتگرال چگالی روی خم و رویه را بررسی کردیم. اکنون به بررسی نوع دیگری انتگرال روی خم و رویه می‌پردازیم که به انتگرال یک میدان برداری یا انتگرال یک 'فرم دیفرانسیل' شهرت دارد. مقدار این انتگرال نیز تحت اثر بازپرمایش جهت نگهدار عوض نمی‌شود ولی تحت اثر بازپرمایش جهت برگردان تغییر علامت می‌دهد. بحث را از انتگرال روی خم آغاز می‌کنیم.

(۲۲—۱) انتگرال میدان برداری در طول خم فرض کنید $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ یک خم هموار است که گاهی آن راه به‌صورت $\vec{r} = \gamma(t)$ می‌نویسیم و $\vec{F} = (F_1, \ldots, F_n)$ یک میدان برداری پیوسته که دامنهٔ تعریف آن شامل تصویر خم γ در $\mathbb{R}^n$ می‌باشد. انتگرال میدان F در امتداد خم γ که به نماد $\int_\gamma \vec{F}.d\vec{r}$ نمایش داده می‌شود، به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\int_\gamma \vec{F}.d\vec{r} = \int_\gamma (\vec{F}.\frac{d\vec{r}}{ds})ds \tag{۱}$$

بدین ترتیب $\int_\gamma \vec{F}.d\vec{r}$ به یک انتگرال چگالی $\int_\gamma f ds$ تبدیل می‌شود که در آن $f = \vec{F}.\frac{d\vec{r}}{ds}$. نکتهٔ تمایز این است که تحت تعویض متغیر جهت برگردان، $\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{T}$ (مماس واحد) در (-1) ضرب می‌شود، پس f تغییر علامت می‌دهد و در نتیجه (۱) به جهت خم وابسته است. مقدار طرف راست (۱) را می‌توان عیناً به‌صورت انتگرال چگالی محاسبه کرد و با استفاده از قاعدهٔ زنجیره‌ای داریم:

$$\int_\gamma \vec{F}.d\vec{r} = \int_a^b (\vec{F}(\gamma(t)).\frac{d\vec{r}}{dt})dt \tag{۲}$$

با توجه به اینکه $\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{T}$ مماس واحد در جهت پرمایش خم γ است، تعبیر هندسی این انتگرال نیز مشهود است. $\vec{F} \cdot \vec{T} = |\vec{F}| \cos(\vec{F}, \vec{T})$ مؤلفه $\vec{F}$ در جهت $\vec{T}$ است، پس در واقع $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$ نمایانگر میزان انباشته شدن میدان $\vec{F}$ در راستای حرکت روی γ است. در فیزیک، اگر $\vec{F}$ یک میدان نیرو باشد

$\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$ را "کار انجام شده" در امتداد γ می‌نامند. قبل از ارائه مثال و کاربردهای این نوع انتگرال، نمادگذاری دیگری را که نیز معمول است معرفی می‌کنیم. بردار $\vec{r}=\gamma(t)$ در واقع مکان متحرک را در زمان t نشان می‌دهد. می‌نویسیم $\vec{r}=(x_۱,\ldots,x_n)$، و در نتیجه $\gamma'(t)=(\frac{dx_۱}{dt},\cdots,\frac{dx_n}{dt})$. بنابراین (۲) به صورت زیر در می آید:

$$\int_a^b (F_۱\frac{dx_۱}{dt}+\cdots+F_n\frac{dx_n}{dt})dt \qquad (۳)$$

چون تعویض پارامتر جهت نگهدار اثری بر مقدار انتگرال فوق ندارد، گاهی با حذف dt ها انتگرال $\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$ را به صورت زیر نیز می‌نویسند:

$$\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_\gamma F_۱dx_۱+\cdots+F_ndx_n \qquad (۴)$$

<u>مثال ۱</u> برای $\vec{R}(x,y)=(-y)\vec{i}+x\vec{j}$ و γ دایرهٔ شعاع A به مرکز $(۰,۰)$ که یک بار در جهت مثلثاتی پیموده شده است، $\int_\gamma \vec{R}\cdot d\vec{r}$ را محاسبه کنید.

<u>حل</u> داریم $\vec{r}=\gamma(t)=(A\cos t,A\sin t)$، $۰\le t\le ۲\pi$، پس $x=A\cos t$ و $y=A\sin t$. بدین ترتیب:

$$\begin{aligned}\int_\gamma \vec{R}\cdot d\vec{r} &= \int_۰^{۲\pi}(\vec{R}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt})dt\\ &= \int_۰^{۲\pi}[(-A\sin t)(-A\sin t)+(A\cos t)(A\cos t)]dt\\ &= ۲\pi A^۲\end{aligned}$$

لازم است که مفهوم انتگرال روی خم را به خم‌های "قطعه قطعه هموار" توسعه دهیم. خم پیوسته $\gamma:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}^n$ را <u>قطعه قطعه هموار</u> می‌نامیم در صورتی که افراز $a=t_۰<t_۱<\cdots<t_p=b$ وجود داشته باشد که تحدید γ به دامنهٔ $[t_{i-۱},t_i]$، برای هر $i=۱,\ldots,n$، یک خم هموار تعریف کند. بدین ترتیب γ ممکن است در $\gamma(t_i)$ "گوشه" داشته باشد زیرا که مماس چپ $\vec{T}(t_i)^-$ و مماس راست $\vec{T}(t_i)^+$ ممکن است بر هم منطبق نباشند. برای خم قطعه قطعه هموار فوق، $\int_\gamma f\,ds$ را برابر مجموع $\sum_{i=۱}^p\int_{\gamma_i}f\,ds$ تعریف می‌کنیم در آن γ_i تحدید γ به $[t_{i-۱},t_i]$ است.

<u>مثال ۲</u> اگر $\vec{R}$ مانند مثال قبل باشد، $\int_\gamma \vec{R}\cdot d\vec{r}$ را برای γ: مربع با رئوس $(\pm A, \pm A)$ یک بار پیموده شده در جهت مثلثاتی، محاسبه کنید.

<u>حل</u>

شکل ۵

خم‌های $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ چهار ضلع مربع را طبق شکل توصیف می‌کنند. باید $\sum_{i=1}^{4} \int_{\gamma_i} \vec{R}\cdot d\vec{r}$ را محاسبه کنیم. خم‌ها را می‌توان به شکل زیر توصیف کرد

$$\begin{cases} \gamma_1(t) = (A, t), & -A \le t \le A \\ \gamma_2(t) = (-t, A), & -A \le t \le A \\ \gamma_3(t) = (-A, -t), & -A \le t \le A \\ \gamma_4(t) = (t, -A), & -A \le t \le A \end{cases}$$

پس

$$\int_{\gamma_1} \vec{R}\cdot d\vec{r} = \int_{-A}^{A} [(-t, A)\cdot(0, 1)]dt = \int_{-A}^{A} A dt = 2A^2$$

$$\int_{\gamma_1} \vec{R}\cdot d\vec{r} = \int_{-A}^{A} [(-A, -t)\cdot(-1, 0)]dt = \int_{-A}^{A} A dt = 2A^2$$

به همین ترتیب انتگرال‌های روی γ_3 و γ_4 نیز هر یک برابر $2A^2$ خواهند شد و $\int_\gamma \vec{R}\cdot d\vec{r}$ برابر $8A^2$ می‌شود.

توجه کنید که در این مثال و مثال قبل $\int_\gamma -ydx + xdy$ دو برابر مساحت محصور شده توسط γ درآمد. این یک واقعیت کلی است که بعداً به دلیل آن پی خواهیم برد.

در ادامه بحث، انتگرال‌های روی خم $\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$ را برای میدان‌های پایستهٔ $\vec{F}$ بررسی می‌کنیم. فرض کنید $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ یک خم هموار باشد با نقطهٔ آغازی $\gamma(a) = A$ و نقطهٔ پایانی $\gamma(b) = B$،

و $\vec{F} = \nabla f$ برای تابع مشتق‌پذیر f. در این صورت:

$$\begin{aligned} \int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_a^b (\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt}) dt \\ &= \int_a^b (f \circ \gamma)'(t) dt \\ &= f(B) - f(A) \end{aligned}$$

یعنی مقدار $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$، مستقل از مسیر هموار γ، برابر اختلاف پتانسیل در دو انتهای مسیر است. این مطلب را می‌توان به خم‌های پیوستهٔ قطعه قطعه هموار $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ نیز تعمیم داد زیرا که اگر $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_p = b$ افرازی باشد که تحدید γ به هر $[t_{i-1}, t_i]$ هموار است و این تحدید را به γ_i نمایش دهیم، آنگاه بنابر پیوستگی خم، $\gamma_i(t_i) = \gamma_{i+1}(t_i)$ و در نتیجه:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^p \int_{\gamma_i} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \sum_{i=1}^p (f(\gamma_i(t_i)) - f(\gamma_i(t_{i-1}))) \\ &= f(\gamma_p(b)) - f(\gamma_1(a)) \end{aligned}$$

نکتهٔ مهم این که این ویژگی مختص میدان‌های پایسته است.

(۳۷–۲) <u>قضیه</u> فرض کنید U یک مجموعهٔ باز و همبند مسیری در $\mathbb{R}^n$ باشد و $\vec{F}$ یک میدان پیوسته تعریف شده در U. در این صورت $\vec{F}$ پایسته است اگر و تنها اگر $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$ مستقل از مسیر باشد، یعنی برای هر دو خم قطعه قطعه هموار α و β در U با نقاط آغازی و پایانی مشترک، داشته باشیم $\int_\alpha \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_\beta \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

<u>اثبات</u> لزوم این شرط را در بالا دیدیم. حال فرض کنید شرط استقلال از مسیر برقرار باشد، می‌خواهیم وجود پتانسیل برای میدان $\vec{F}$ را ثابت کنیم. نقطه‌ای P را در U به عنوان نقطهٔ مرجع تثبیت می‌کنیم. تابعی f روی U تعریف می‌کنیم که $\nabla f = \vec{F}$.

شکل ۱

برای نقطهٔ دلخواه Q، $f(Q)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم. از آنجا که U همبند مسیری و باز است، مسیری قطعه قطعه هموار از P به Q وجود دارد، و به سبب شرط استقلال از مسیر، $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$ برای هر

مسیر قطعه قطعه هموار از P به Q یک مقدار را دارد، پس با انتخاب یک چنین مسیر γ، می‌توان تعریف کرد:

$$f(Q) = \int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

باید نشان دهیم f پتانسیل مورد نظر است، یعنی $\frac{\partial f}{\partial x_i} = F_i$، که F_i مؤلفهٔ iـ ام $\vec{F}$ است. به این منظور از Q پاره‌خط راستی به موازات محور x_i رسم می‌کنیم که در U بماند و آن را به صورت زیر پارامتری می‌کنیم:

$$\lambda(t) = Q + te_i \quad , \quad ۰ \leq t \leq h$$

نقطهٔ $Q_h = Q + he_i$، نقطهٔ پایانی مسیری است که از P شروع می‌شود، نخست تصویر γ را می‌پیماید و سپس تصویر λ را. این مسیر را، که قطعه قطعه هموار است، به $\gamma * \lambda$ نمایش می‌دهیم. طبق تعریف:

$$f(Q_h) = \int_{\gamma * \lambda} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_\lambda \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(Q) + \int_۰^h F_i(\lambda(t))dt$$

(توجه کنید که غیر از مؤلفه iـ ام، سایر مؤلفه‌های λ ثابت هستند) بنابراین:

$$\frac{f(Q_h) - f(Q)}{h} = \frac{۱}{h} \int_۰^h F_i(\lambda(t))dt$$

بنابر قضیهٔ میانگین انتگرال، انتگرال سمت راست برابر است با $h \cdot F_i(Q^*)$ که Q^* نقطه‌ای روی پاره‌خط λ است. بدین ترتیب $\frac{f(Q_h)-f(Q)}{h} = F_i(Q^*)$. وقتی $h \longrightarrow ۰$، Q_h به Q میل می‌کند و در نتیجه Q^* که روی پاره‌خط واصل قرار دارد نیز به Q میل می‌کند. طبق پیوستگی F_i، سمت راست به $F_i(Q)$ میل می‌کند و ثابت می‌شود که $\frac{\partial f}{\partial x_i}(Q) = F_i(Q)$. ■

<u>مثال ۳</u> میدان $\vec{F}$ روی $\mathbb{R}^n - \{\underline{۰}\}$ به صورت زیر تعریف شده است:

$$\vec{F}(x_۱, \ldots, x_n) = \sum_{i=۱}^{n} \frac{x_i}{x_۱^۲ + \cdots + x_n^۲} \vec{e}_i$$

اگر P و Q دو نقطه به فواصل $|P|$ و $|Q|$ از $\underline{۰}$ باشند و γ یک خم قطعه قطعه هموار در $\mathbb{R}^n - \{\underline{۰}\}$ با نقطهٔ آغازی P و نقطهٔ پایانی Q، ادعا می‌کنیم $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \ln \frac{|Q|}{|P|}$. بالاخص اگر P و Q هم فاصله از

www.ttmar.ir

$\underline{\circ}$ باشند، داریم $\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}=\circ$. در اینجا می‌توان به سادگی حدس زد و تحقیق نمود که میدان $\vec{F}$ دارای پتانسیل $f(x_1,\dots,x_n)=\frac{1}{2}\ln(x_1^2+\cdots+x_n^2)$ است و حکم فوراً نتیجه می‌شود.

<u>مثال ۴</u> میدان $\vec{F}$ در $\mathbb{R}^2-\{\underline{\circ}\}$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\vec{F}(x,y)=\frac{-y}{x^2+y^2}\vec{i}+\frac{x}{x^2+y^2}\vec{j}$$

آیا این میدان پایسته است؟ توجه کنید که استقلال از مسیر برای انتگرال میدان‌های پایسته نتیجه می‌دهد که انتگرال حول یک مسیر بستهٔ قطعه قطعه هموار باید صفر شود. اگر معلوم شود که $\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$ برای یک مسیر قطعه قطعه هموار بسته صفر نیست، $\vec{F}$ نمی‌تواند پایسته باشد. γ را دایره‌ای به شعاع R به مرکز $\underline{\circ}$ یک بار پیموده شده در جهت مثلثاتی می‌گیریم:

$$\gamma(t)=(R\cos t,R\sin t)\quad,\quad \circ\le t\le 2\pi$$

$$\begin{aligned}\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} &= \int_\circ^{2\pi}[\frac{-R\sin t}{R^2}(-R\sin t)+\frac{R\cos t}{R^2}(R\cos t)]dt\\ &= \int_\circ^{2\pi}=2\pi\neq\circ\end{aligned}$$

بدین ترتیب $\vec{F}$ پایسته نیست. ضمناً توجه کنید که نتیجه انتگرال‌گیری به شعاع R بستگی ندارد، این مطلب بعداً بررسی خواهد شد.

مثال را بالا نباید به همین صورت (فقدان پتانسیل) رها کرد. توجه کنید که این میدان بر بردار حامل از $\underline{\circ}$ به نقطهٔ (x,y) عمود است، بنابراین بر نیم‌خط ($\theta=$ ثابت) عمود می‌باشد. به نظر می آید که باید پتانسیلی برای این میدان وجود داشته باشد که مجموعه‌های تراز آن نیم‌خط‌های ثابت $=\theta$ باشند. در واقع با در نظر گرفتن $f(x,y)=\theta=\tan^{-1}(\frac{y}{x})$ داریم:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{-\frac{y}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}}=\frac{-y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\frac{1}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}}=\frac{x}{x^2+y^2}$$

یعنی، علیرغم آنچه ثابت شد، ظاهراً پتانسیلی برای این میدان موجود است. اشکالی که فوراً به ذهن می‌رسد این است که $\frac{y}{x}$ روی محور y تعریف نشده و $\tan^{-1}(\frac{y}{x})$ نمی‌تواند معنی داشته باشد. ولیکن با قرار دادن $\theta = \frac{\pi}{2}$ روی نیم‌خط بالای محور y و $\theta = \frac{3\pi}{2}$ روی نیم‌خط پایین به نظر می‌آید که مشکل حل شود چون θ چیزی جز مختصهٔ قطبی زاویه نیست. مشکل واقعی در اینجا "چند مقداری بودن" θ است. توجه کنید که اگر نیم‌خط مثبت محور x را با $\theta = 0$ مشخص کنیم و یک دور کامل

شکل ۲

دور مبدأ گردش کنیم در حالی که تابع θ به طور پیوسته تغییر کند، آنگاه در بازگشت به نیمه راست محور x، مقدار θ به (2π) می‌رسد، نه صفر! جالب اینجاست که این مقدار 2π در واقع مقداری است که برای انتگرال مثال قبل به‌دست آورده‌ایم و این امر تصادفی نیست. در واقع به اعتباری، نوعی "پتانسیل چند مقداری" برای $\vec{F}$ وجود دارد که $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$ همچنان برابر اختلاف پتانسیل بین دو سر مسیر خواهد بود. کار کردن با این پتانسیل‌ها دقت می‌طلبد و بررسی دقیق آنها از کار این درس خارج است. موضع رسمی ما در مورد این میدان همچنان فقدان پتانسیل خواهد بود. پس از مطالعهٔ قضیهٔ گرین در جلسه بعد، به نحو مؤثرتری از این میدان استفاده خواهیم کرد. بالاخص خواهیم دید که $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$، همچنان که با توجه به θ انتظار داریم، برابر $2\pi k$ خواهد بود که k تعداد دفعات گردش مسیر γ حول $\underline{0}$ در جهت مثلثاتی است.

بالاخره در مورد مثال بالا ذکر این نکته نیز لازم است که چنانچه یک نیم‌خط کامل ساطع از $\underline{0}$ را از $\mathbb{R}^2$ حذف کنیم، تابع θ بدون ابهام به عنوان یک تابع مشتق‌پذیر روی باقیماندهٔ صفحه قابل تعریف است زیرا در این ناحیه امکان گردش دور $\underline{0}$ و بازگشت به نقطهٔ آغازی وجود ندارد. مثلاً با حذف $\theta = \theta_0$ و تعریف کردن $\theta_0 < \theta < \theta_0 + 2\pi$ برای باقیماندهٔ صفحه، θ تابعی مشتق‌پذیر در دامنهٔ خود خواهد شد. تحدید $\vec{F}$ به چنین ناحیه‌ای پایسته است و $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$ برای هر مسیر بسته کاملاً واقع شده در این ناحیه صفر است (شکل ۳).

شکل ۳

انتگرال روی خم و رویه (۳)

در ادامه بحث انتگرال روی اجسام خمیده، اکنون مفهوم انتگرال یک میدان برداری 'یا فرم دیفرانسیل' را روی رویه بررسی می‌کنیم. فرض کنید $\varphi : W \to \mathbb{R}^3$، $\vec{r} = \varphi(u,v)$، یک رویه هموار باشد و W یک ناحیهٔ مجاز انتگرالگیری در $\mathbb{R}^2$. طبق معمول نقاط W را به $W = (u,v)$، عنصر سطح $|\varphi_n \times \varphi_v| dudv$، را به dS، و قائم واحد قراردادی $\frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|}$ را به $\vec{n}$ نمایش می‌دهیم. گاهی $(\vec{r}_u \times \vec{r}_v)dudv = \vec{n}dS$ را به $d\vec{S}$ نیز نمایش می‌دهند. فرض کنید $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ یک میدان برداری پیوسته باشد که دامنهٔ آن شامل تصویر φ، یعنی $\varphi(W)$، است. در این‌صورت تعریف می‌کنیم:

$$\int\int_{\varphi} \vec{F}.d\vec{S} = \int_{\varphi}\int (\vec{F}.\vec{n})dS \tag{1}$$

توجه کنید به ازای هر $(u,v) \in W$، $\vec{F}(\varphi(u,v)).\vec{n}((u,v))$ تعریف شده است، پس طرف راست بالا یک انتگرال چگالی به مفهوم عادی می‌باشد. از طرفی دیگر چون $\vec{n}$ معرف جهت رویه است، $\vec{F}.\vec{n}$ تحت تعویض متغیر جهت برگردان تغییر علامت می‌دهد، پس (۱) نیز تحت تعویض متغیر جهت برگردان تغییر علامت می‌دهد.

تعبیرفیزیکی زیر در مورد انتگرال (۱) منشاء کاربردهای بسیاری است. $\vec{F}$ را یک میدان نیرو فرض کنید و $\varphi(W)$ را یک لایهٔ بسیار نزدیک در فضای سه‌بعدی تصور کنید که در معرض این نیرو قرار دارد. مقدار $\vec{F}.\vec{n}$ برابر مؤلفه $\vec{F}$ در جهت عمود قراردادی بر لایه است. انتگرال $\vec{F}.\vec{n}$ نسبت به dS روی این لایه نمایشگر کل شار گذرا از لایه محسوب می‌شود.

مثال ۱ میدان واحد قائم $\vec{F} = \vec{k}$ در $\mathbb{R}^3$ را در نظر بگیرید. شار گذرا از نیمکرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$، $z \geq 0$، را محاسبه کنید اگر قائم واحد $\vec{n}$ با مؤلفه سوم مثبت برای نیمکره منظور شود.

در نقطهٔ (x,y,z) از نیمکره داریم $\vec{n}=(\frac{x}{R},\frac{y}{R},\frac{z}{R})$، باید نماد دیگر $\vec{n}=\frac{x}{R}\vec{i}+\frac{y}{R}\vec{j}+\frac{z}{R}\vec{k}$. پس $\vec{F}.\vec{n}=\frac{z}{R}$ و یا به انتگرال $\int\int\frac{z}{R}dS$ را روی نیمکره محاسبه کنیم. در مختصات کروی داریم:

$$z=R\cos\varphi$$

$$dS=R^{2}\sin\varphi d\varphi d\theta$$

پس

$$\begin{aligned}\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(\cos\varphi)(R^{2}\sin\varphi)d\varphi d\theta &= (2\pi R^{2})(\tfrac{1}{2})\sin^{2}\varphi\,\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}\\ &= \pi R^{2}\end{aligned}$$

عبارت داخل انتگرال در طرف راست (۱) را می‌توان به صورتهای دیگری نیز بازنویسی کرد. از آنجا که $\vec{n}=\frac{\vec{r}_u\times\vec{r}_v}{|\vec{r}_n\times\vec{r}_v|}$، داریم

$$\vec{n}dS=(\vec{r}_u\times\vec{r}_v)dudv \tag{۲}$$

پس

$$\int_{\varphi}\int\vec{F}.d\vec{S}=\int_{W}\int\vec{F}.(\vec{r}_v\times\vec{r}_v)dudv \tag{۳}$$

حال اگر بنویسیم $\vec{r}=(x,y,z)$، داریم

$$\vec{r}_u\times\vec{r}_v=\left(\begin{vmatrix}y_u & y_v\\ z_u & z_v\end{vmatrix},\begin{vmatrix}z_u & z_v\\ x_u & x_v\end{vmatrix},\begin{vmatrix}x_u & x_v\\ y_u & y_v\end{vmatrix}\right)$$

که طبق معمول مقصود از نماد y_u مشتق پاره‌ای y نسبت به u، یعنی $\frac{\partial y}{\partial u}$، است و به همین ترتیب برای سایر درایه‌های دترمینان‌های بالا. پس برای $\vec{F}=(F_1,F_2,F_3)$، نتیجه می‌شود که:

$$\int_{\varphi}\int\vec{F}.d\vec{S}=\int_{W}\int\left[F_1\begin{vmatrix}y_u & y_v\\ z_u & z_v\end{vmatrix}+F_2\begin{vmatrix}z_u & z_v\\ x_u & x_v\end{vmatrix}+F_3\begin{vmatrix}x_u & x_v\\ y_u & y_v\end{vmatrix}\right]dudv \tag{۴}$$

طرف راست (۴) روش محاسبه صریح این نوع انتگرال را برحسب پرمایش φ عرضه می‌کند. از آنجا که تحت تعویض پارامتر جهت‌نگهدار مقدار این انتگرال تغییر نمی‌کند، مطلوب است که عبارت سمت راست (۴) به‌صورتی مستقل از پارامترهای خاص (u,v) نوشته شود. توجه کنید که دترمینان $\begin{vmatrix}y_u & y_v\\ z_u & z_v\end{vmatrix}$ دترمینان ماتریس مشتقهای y و z نسبت به u و v است. به جای $\begin{vmatrix}y_u & y_v\\ z_u & z_v\end{vmatrix}dudv$ گاهی

می‌نویسیم $dydz$. و به همین ترتیب $dzdx$ و $dxdy$ (به ترتیب توجه کنید) را جایگزین عبارتهای متناظر کرده و (۴) را به‌صورت زیر نیز می‌نویسیم:

$$\int_{\varphi(W)}\int \vec{F}.d\vec{S} = \int_{\varphi}\int F_1 dydz + F_2 dzdx + F_3 dxdy \tag{۵}$$

مقصود از عبارت سمت راست این است که نسبت به هر پرمایش مجاز φ با جایگزین مناسب برای $dydz$، $dzdx$ و $dxdy$ برحسب پارامترهای ذیربط می‌توان انتگرال را محاسبه کرد.

<u>مثال ۲</u> انتگرال مثال (۱) را به روش دیگری محاسبه می‌کنیم. داریم $F_1 = F_2 = 0$ و $F_3 = 1$، پس برای نیمکره شمالی H، به شعاع R، داریم:

$$\int_H\int \vec{k}.d\vec{S} = \int_H\int (1)dxdy$$

حال می‌توان نیمکرهٔ شمالی را به‌صورت نمودار تابعی برحسب x و y، یعنی $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ پرمایش کرد که ضمناً دیده‌ایم مؤلفه سوم $\vec{r}_x \times \vec{r}_y$ همواره مثبت است پس جهت رویه منظور شده در مثال (۱) را دارد. پس:

$$\int_H\int dxdy = \int_{x^2+y^2\leq R^2}\int dxdy = \pi R^2$$

در باقیماندهٔ این بخش دو مفهوم 'دیوژرانس' و 'چرخه' را معرفی می‌کنیم که همراه با گرادیان نقش اساسی در قضایای مهم انتگرال روی خمها و رویه‌ها دارند. فرض کنید U زیرمجموعه‌ای باز از $\mathbb{R}^n$ است و $\vec{F} = (F_1, \ldots, F_n)$ یک میدان برداری C^1 تعریف شده روی U. <u>دیورژانس</u> $\vec{F}$، که به $div\vec{F}$، نمایش داده می‌شود، تابع زیر است:

$$div\vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1}\ldots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \tag{٦}$$

اگر $\vec{F}$ تابعی از U به $\mathbb{R}^n$ تصور کنیم، $div\vec{F}$ در واقع مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس ژاکوبی $\vec{F}$ است. مجموع عناصر قطری یک ماتریس مربعی، مانند دترمینان، از خواص مهمی برخوردار است. در بخشهای آینده خواهیم دید که دیورژانس $\vec{F}$ نوعی شاخص وضعیت میدان $\vec{F}$ از نظر انبساط یا انقباض

www.ttnar.ir

است. مثبت بودن $div\vec{F}$ در یک نقطه نوعی انبساط حول آن نقطه، یا دور شدن پیکانهای میدان حول آن نقطه را نشان می‌دهد، و بالعکس منفی بودن $div\vec{F}$ دالّ بر تقارب پیکانها یا انقباض است.

بدین ترتیب دیورژانس به هر میدان برداری $C^{۱}$ روی U یک تابع پیوسته $div\vec{F}: U \to \mathbb{R}$ نسبت می‌دهد، در حالی که گرادیان، به هر تابع $C^{۱}$، $f: U \to \mathbb{R}$ یک میدان برداری پیوسته $gradf = \nabla f$ روی U منسوب می‌کند.

در حالت $n = ۳$، یعنی وقتی که U زیرمجموعه بازی از $\mathbb{R}^{۳}$ باشد، یک عملگر دیگر روی میدانهای برداری مجموعهٔ گرادیان و دیورژانس را کامل می‌کند. این عملگر که <u>چرخه</u> نام دارد و به نمادهای $curl$ یا rot نمایش داده می‌شود، به هر میدان بردارای مشتقپذیر $\vec{F} = (F_{۱}, F_{۲}, F_{۳})$ روی U میدان دیگری به شکل زیر نسبت می‌دهد:

$$curl\vec{F} = (\frac{\partial F_{۳}}{\partial y} - \frac{\partial F_{۲}}{\partial z}, \frac{\partial F_{۱}}{\partial z} - \frac{\partial F_{۳}}{\partial x}, \frac{\partial F_{۲}}{\partial x} - \frac{\partial F_{۱}}{\partial y}) \qquad (۷)$$

در بخشهای آینده خواهیم دید که $curl\vec{F}$ به اعتباری تقریب $\vec{F}$ با یک میدان چرخشی است، $|curl\vec{F}|$ مقدار چرخش و راستای $curl\vec{F}$ (چنانچه $curl\vec{F}$ صفر نباشد) محور این چرخش است.

دو حکم کلیدی زیر ارتباط مهمی را میان سه عملگر $grad$، $curl$ و div بیان می‌کنند.

(۱—۳۸) (الف) اگر f تابعی $C^{۲}$ باشد داریم:

$$curl(grad f) = \underline{\circ} \qquad (۸)$$

(ب) اگر $\vec{F}$ یک میدان $C^{۲}$ باشد، داریم

$$div(curl\vec{F}) = \circ \qquad (۹)$$

<u>برهان</u> اثبات (۸) و (۹) سرراست است ولی مشاهده محاسبات لازم حایز اهمیت است:

$$\begin{aligned} curl(grad f) &= curl(\tfrac{\partial f}{\partial x}, \tfrac{\partial f}{\partial y}, \tfrac{\partial f}{\partial z}) \\ &= (\tfrac{\partial^{۲} f}{\partial y \partial z} - \tfrac{\partial^{۲} f}{\partial z \partial y}, \tfrac{\partial^{۲} f}{\partial z \partial x} - \tfrac{\partial^{۲} f}{\partial x \partial z}, \tfrac{\partial^{۲} f}{\partial y \partial x} - \tfrac{\partial^{۲} f}{\partial x \partial y}) \end{aligned}$$

www.ttnar.ir

از آنجا که f تابعی C^{2}، یعنی دارای مشتقهای پاره‌ای مرتبه دوم پیوسته، فرض شده است، هر سه مؤلفه بالا صفر هستند. به همین ترتیب داریم:

$$\begin{aligned} div(curl\vec{F}) &= div(\frac{\partial F_{3}}{\partial y}-\frac{\partial F_{2}}{\partial z}, \frac{\partial F_{1}}{\partial z}-\frac{\partial F_{3}}{\partial x}, \frac{\partial F_{2}}{\partial x}-\frac{\partial F_{1}}{\partial y}) \\ &= \frac{\partial^{2} F_{3}}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^{2} F_{2}}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^{2} F_{1}}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^{2} F_{3}}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^{2} F_{2}}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^{2} F_{1}}{\partial z\partial y} \end{aligned}$$

و در اینجا نیز چون مولفه‌های $\vec{F}$ دارای مشتقهای پاره‌ای پیوسته مرتبه دوم فرض شده‌اند، شش جملهٔ بالا دوبه‌دو حذف می‌شوند و حکم نتیجه می‌شود.

□

توجه کنید که هر دو حکم بالا دقیقاً بیانگر مجاز بودن تعویض ترتیب مشتقگیری برای تابعهای C^{2} هستند. می‌توان تعبیری شهودی از (۸) و (۹) ارائه داد. در مورد (۸)، میدان گرادیان میدانی است که تمایل گردشی ندارد زیرا که خطوط میدان همواره در جهت بیشترین افزایش تابع f حرکت می‌کنند. بنابراین $curl(grad f)$، که میزان چرخش میدان $grad f$ است، صفر می‌شود. به همین ترتیب، $curl\vec{F}$ حالت چرخشی دارد، یعنی نه منبسط کننده و نه منقبض کننده است، بنابراین دیورژانس آن صفر می‌شود.

نماد زیر برای به یاد ماندن سه عملگر ذکر شده رویه مفید واقع می‌شود و به هر حال خلاصه‌نویسی سودمندی است. اگر ∇ را به‌طور نمادین به‌صورت

$$\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}) \qquad (۱۰)$$

بنویسیم، گرادیان f از نوشتن f در جوار مولفه‌های ∇ به‌دست می‌آید، یعنی:

$$\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}) \qquad (۱۱)$$

اگر $\vec{F}=(F_{1}, F_{2}, F_{3})$ یک میدان باشد، ضرب داخلی نمادین ∇ و $\vec{F}$ برابر دیورژانس می‌شود:

$$\nabla.\vec{F} = \frac{\partial F_{1}}{\partial x}+\frac{\partial F_{2}}{\partial y}+\frac{\partial F_{3}}{\partial z} \qquad (۱۲)$$

و بالاخره ضرب خارجی نمادین ∇ و $\vec{F}$، میدان $curl\vec{F}$ را به‌دست می‌دهد:

$$\nabla \times \vec{F} = (\frac{\partial F_{3}}{\partial y}-\frac{\partial F_{2}}{\partial z}, \frac{\partial F_{1}}{\partial z}-\frac{\partial F_{3}}{\partial x}, \frac{\partial F_{2}}{\partial x}-\frac{\partial F_{1}}{\partial y}) \qquad (۱۳)$$

www.ttmar.ir

عملگرهای گرادیان، چرخه و دیورژانس هریک رابطهٔ نزدیکی با مشتقگیری دارند. علاوه بر (۸) و (۹)، اتحادهای زیر نیز گاهی مورد استفاده قرار خواهد گرفت. بعضی از این اتحادها شباهت زیادی به قواعد مشتقگیری دارند. در زیر اعداد حقیقی ثابت با حروف a و b، تابعهای با مقدار حقیقی با حروفی مانند f و g، و میدانهای برداری با نمادهایی چون $\vec{F}$ و $\vec{G}$ نمایش داده شده‌اند. تابع‌ها و میدانها مشتقپذیر فرض شده‌اند.

$$\nabla(af+bg)=a(\nabla f)+b(\nabla g) \tag{۱۴}$$

$$\nabla(fg)=g(\nabla f)+f(\nabla g) \tag{۱۵}$$

$$\nabla(\frac{f}{g})=\frac{g(\nabla f)-f(\nabla g)}{g^{۲}} \qquad (g\not\in ۰) \tag{۱۶}$$

$$\nabla.(a\vec{F}+b\vec{G})=a(\nabla.\vec{F})+b(\nabla.\vec{G}) \tag{۱۷}$$

$$\nabla.(f\vec{G})=f(\nabla.\vec{G})+(\nabla f).\vec{G} \tag{۱۸}$$

$$\nabla.(\vec{F}\times\vec{G})=\vec{G}.(\nabla\times\vec{F})-\vec{F}.(\nabla\times\vec{G}) \tag{۱۹}$$

$$\nabla\times(a\vec{F}+b\vec{G})=a(\nabla\times\vec{F})+b(\nabla\times\vec{G}) \tag{۲۰}$$

$$\nabla\times(f\vec{G})=f(\nabla\times\vec{G})+(\nabla f)\times\vec{G} \tag{۲۱}$$

اثبات این اتحادها سر راست است و به خواننده واگذار می‌شود.

www.ttmar.ir

آنالیز برداری (۱)

همان طور که قبلاً ذکر شد هدف ما اکنون بررسی انتگرال روی مجموعه هموار خمیده یا دارای مرز خمیده است. دستاورد مهم این بررسی سه قضیه به نام‌های قضیهٔ گرین، قضیهٔ استوکس و قضیهٔ دیورژانس خواهد بود که هر یک به نوعی انتگرال روی یک مجموعهٔ را به انتگرال یک بعد پایین‌تر روی مرز آن مرتبط می‌سازد. از دیدگاهی، هر سه قضیه، تعمیم‌های قضیهٔ حساب دیفرانسیل و انتگرال هستند، و در واقع عنصر اصلی اثبات هر یک از آنها همان قضیه اساسی است. در این سیر نخست به بحث پیرامون قضیهٔ گرین می‌پردازیم.

فرض کنید D یک ناحیه در صفحه است که محصور به یک یا چند (تعدادی متناهی) تصویر سه خم قطعه قطعه هموار می‌باشد. در شکل ۱ (الف) مرز ناحیهٔ D تصویر، یک خم، در شکل ۱ (ب)، مرز ناحیهٔ D متشکل از تصویر خم قطعه قطعه هموار است. ناحیهٔ D قسمت هاشورزدهٔ شکل است. یادآوری می‌کنیم که خم پیوسته $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ را قطعه قطعه هموار می‌نامیم در صورتی که افراز $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_p = b$ وجود داشته باشد به‌طوری که تحدید γ به هر $[t_{i-1}, t_i]$ یک خم هموار باشد. در نقاط انتهایی $[t_{i-1}, t_i]$ مشتق یک‌طرفه منظور می‌کنیم. اجتماع تصاویر خمهای مرزی را به ∂D نمایش می‌دهیم. هر نقطهٔ $\gamma(t_i)$ یک "گوشه" ∂D است.

شکل ۱

در نقاط غیر گوشه‌ای مرز D دو انتخاب برای مماس واحد $\vec{T}$ وجود دارد. جهت قراردادی ∂D، یعنی انتخاب مماس واحد، را به‌صورت زیر منظور می‌کنیم. در هر نقطهٔ غیرگوشه‌ای $\vec{T}$ به گونه‌ای انتخاب می‌شود که اگر به اندازهٔ $\frac{\pi}{2}$ در جهت مثلثاتی گردش کند به سوی درون D قرار گیرد. بدین ترتیب جهت ∂D در شکل ۱ (الف) جهت مثلثاتی است و در شکل ۱ (ب)،

www.ttnar.ir

خم بیرونی در جهت مثلثاتی و خمهای داخلی در جهت عقربهٔ ساعت جهت داده می‌شوند. در زیر همواره ∂D با جهت قراردادی موردنظر است.

(۳۹—۱) قضیه گرین D ناحیه‌ای در صفحه است که مرز آن ∂D از تعدادی متناهی تصویر خمهای قطعه قطعه هموار تشکیل شده است و $\vec{F} = (F_1, F_2)$ یک میدان برداری C^1 که دامنهٔ تعریف آن شامل D و ∂D است.

در این‌صورت داریم

$$\int_{\partial D} \vec{F}.d\vec{r} = \int_D \int (\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}) dA_{x,y} \qquad (1)$$

قبل از پرداختن به اثبات این قضیه، تعدادی از کاربردهای آن را بررسی می‌کنیم. از نظر محاسباتی قضیهٔ گرین می‌تواند در بسیاری موارد کارساز باشد. در عمل گاهی طرف راست فرمول (۱) و گاهی طرف چپ از نظر محاسباتی ساده‌ترند و در هر صورت می‌توان از قضیهٔ گرین بهره جست.

کاربرد ۱ با انتخاب مناسب مؤلفه‌های $\vec{F}$، می‌توان فرمول‌های متعددی برای مساحت ناحیهٔ D برحسب انتگرال روی خم ∂D پیدا کرد. مثلاً با گرفتن $\vec{F} = \frac{1}{2}(-y, x)$، داریم $\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 1$، پس

$$D \text{ مساحت } = \frac{1}{2} \int_{\partial D} (-ydx + xdy) \qquad (2)$$

کاربرد ۲ (مسأله پتانسیل در صفحه) قبلاً دیدیم که اگر $\vec{F} = F_1\vec{i} + F_2\vec{j}$ یک میدان گرادیان در ناحیه‌ای U از صفحه xy باشد، لزوماً داریم:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x} \qquad (3)$$

اکنون ملاحظه خواهیم کرد که اگر U واجد شرط هندسی مناسبی باشد، شرط (۳) برای این که $\vec{F}$ به شکل گرادیان باشد (معادلاً $\vec{F}$ پایسته باشد) کفایت می‌کند:

(۳۹—۲) قضیه فرض کنید مجموعهٔ باز و همبند مسیری U در صفحه واجد شرط هندسی زیر باشد: برای هر خم بستهٔ سادهٔ قطعه قطعه هموار در U، ناحیه درون خم به تمامی در U قرار دارد. در این

صورت اگر میدان دارای مشتق‌های پاره‌ای پیوستهٔ $\vec{F} = F_۱\vec{i} + F_۲\vec{j}$ که در U تعریف شده است حایز شرط (۳) باشد، $\vec{F}$ پایسته است.

شرط ذکر شده بدین صورت بیان می‌شود که "ناحیهٔ U فاقد حفره است". در شکل (۲ الف) یک ناحیهٔ فاقد حفره و در شکل (۲ ب) یک ناحیهٔ حفره دار دیده می‌شود. توجه کنید که برای ناحیهٔ

شکل ۲

حفره‌دار درون یک خم بستهٔ ساده حول حفره به تمامی در U قرار ندارد.

اثبات قضیه به سادگی از قضیهٔ گرین به‌دست می‌آید. قبلاً دیده‌ایم که شرطی لازم و کافی برای پایسته بودن $\vec{F}$ در U این است که $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$ برای هر خم بستهٔ ساده در U صفر شود. حال اگر شرط هندسی ذکر شده برقرار باشد، برای هر خم بستهٔ ساده γ در U، ناحیهٔ درون آن D به تمامی در U، قلمرو $\vec{F}$، قرار دارد، و می‌توان از قضیهٔ گرین و اینکه $\frac{\partial F_۲}{\partial x} - \frac{\partial F_۱}{\partial y} = ۰$ نتیجه گرفت که $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = ۰$، پس حکم نتیجه می‌شود. □

کاربرد ۳ فرض کنید γ، $\gamma_۱$، ...، γ_k خمهای بستهٔ ساده قطعه قطعه هموار و همجهت باشند که تصویرهای $\gamma_۱, \ldots, \gamma_k$ دوبه‌دو متخارج بوده و همگی در درون تصویر γ قرار داشته باشند (شکل ۳). اگر میدان برداری $\vec{F}$ در سراسر ناحیهٔ بین خمهای γ_i و γ تعریف شده، $C^۱$ باشد، و داشته باشیم $\frac{\partial F_۲}{\partial x} = \frac{\partial F_۱}{\partial y}$، آنگاه:

$$\int_\gamma \vec{F}.d\vec{r} = \sum_{i=۱}^{k} \int_{\gamma_i} \vec{F}.d\vec{r} \tag{۴}$$

در شکل (۳) ناحیهٔ بین γ_iها و γ با نقطه‌چین مشخص شده است. برای اثبات (۴)، D را ناحیهٔ بین γ_iها و γ_i می‌گیریم. اگر ∂D (اجتماع تصویر γ_iها و γ) را با جهت قراردادی منظور کنیم، طبق قضیهٔ گرین داریم:

$$\left(\int_{\partial D} \vec{F}.d\vec{r}\right) = ۰ \tag{۵}$$

ولی ∂D از اجتماع تصویر γ (با جهت مثلثلاتی) و تصاویر γ_iها (با جهت عقربهٔ ساعت) تشکیل شده است. بنابراین اگر γ_iها و γ را همجهت بگیریم (یعنی یا γ_iها را تغییر جهت دهیم، یا γ را)، از (۵)

رابطه (۴) حاصل می‌شود زیرا که تعویض جهت علامت مقدار انتگرال می‌شود.

بدین ترتیب هر چند شرط (۳)، به تنهایی، ممکن است دلالت بر پایسته بودن $\vec{F}$ نکند، ولیکن مقدار انتگرال $\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$ برای هر دو خم سادهٔ بسته‌ای که ناحیهٔ بین آنها در دامنهٔ تعریف قرار داشته باشد برابر است. نمونهٔ مهمی از این کاربرد، برای $\vec{F}=(\frac{-y}{x^2+y^2},\frac{x}{x^2+y^2})$ ظاهر می‌شود که شرط (۳) برای آن برقرار است. دیده‌ایم که $\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$ برای هر دایرهٔ شعاع R به مرکز $\underline{o}$ که یک بار در جهت مثلثاتی طی شود برابر (2π) است. نتیجه این که اگر به جای γ، هر خم بستهٔ سادهٔ قطعه قطعه هموار که یک بار در جهت مثلثاتی حول نقطه $\underline{o}$ می‌چرخد نیز برابر 2π می‌باشد زیرا که میدان $\vec{F}$ در ناحیهٔ بین این خم در یک دایرهٔ شعاع مناسب تعریف شده است. در واقع اگر خم بستهٔ γ ساده نباشد، یعنی خود را قطع کند، با تجزیه γ به چند قطعه بستهٔ ساده مشاهده می‌شود که $\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$ برابر $(2k\pi)$ است که k تعداد دفعات چرخش γ حول $\underline{o}$ در جهت مثلثاتی است (برای جهت عقربه ساعت، k منفی می‌شود). از این رو، تعریف دقیقی برای "دفعات گردش" خم بستهٔ γ، که در $\mathbb{R}^2-\{\underline{o}\}$ قرار دارد، حول $\underline{o}$ به صورت زیر ارائه می‌شود:

$$(\text{شاخص گردش } \gamma \text{ حول } \underline{o})\, I_\gamma(\underline{o})=(\frac{1}{2\pi})\int_\gamma(\frac{-y}{x^2+y^2}dx+\frac{x}{x^2+y^2}dy) \qquad (6)$$

طبیعی است که اگر به جای $\underline{o}$، نقطهٔ دیگری p در صفحه در نظر بگیریم، با انتقال مختصات می‌توان به طور مشابه $I_\gamma(p)$ را تعریف کرد. در شکل ۴ چند نمونه نمایش داده شده است.

شکل ۴

(۳−۳۹)<u>اثبات قضیه گرین</u> نخست قضیه گرین را برای یک مستطیل ثابت می‌کنیم. فرض کنید:

$$D=\{(x,y)\mid a\le x\le b, c\le y\le d\}$$

∂D از چهار پاره‌خط $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4$، به صورت مشخص شده در شکل (۵) تشکیل شده است.

شکل ۵

www.ttnar.ir

خم‌های مرزی را می‌توان به شکل زیر پرمایش کرد:

$$\gamma_1(t) = (t, c), a \leq t \leq b \quad , \quad \gamma_3(t) = (a+b-t, d), a \leq t \leq b$$

$$\gamma_2(t) = (b, t), c \leq t \leq d \quad , \quad \gamma_4(t) = (a, c+d-t), c \leq t \leq d$$

برای محاسبه $\int\int_D (\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}) dA$ (طرف راست (۱))، دو انتگرال دوگانه جداگانه محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \int\int_D \frac{\partial F_2}{\partial x} dA &= \int_c^d \int_a^b \frac{\partial F_2}{\partial x} dx dy \\ &= \int_c^d [F_2(b, y) - F_2(a, y)] dy \\ &= \textstyle\int_c^d F_2(b, y) dy - \int_c^d F_2(a, y) dy \end{aligned}$$

از طرفی دیگر:

$$\int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_c^d (F_1 \frac{dx}{dt} + F_2 \frac{dy}{dt}) dt$$

در امتداد γ_2، $x = b$ ثابت است، پس $\frac{dx}{dt} = 0$، و $\frac{dy}{dt} = 1$، پس:

$$\int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_c^d F_2(b, t) dt = \int_c^d F_2(b, y) dy$$

و نیز مشابهاً می‌بینیم که $\int_{\gamma_4} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_c^d F_2(a, y) dy$، پس

$$\int\int_D \frac{\partial F_2}{\partial x} dA = \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{\gamma_4} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

به همین ترتیب می‌توان دید که $-\int\int_D \frac{\partial F_1}{\partial y} dA = \int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{\gamma_3} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ و اثبات قضیهٔ گرین برای مستطیل کامل می‌شود. توجه کنید که در این اثبات عنصر اصلی، استفاده از قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال است.

در گام بعد، ناحیه‌هایی را در نظر می‌گیریم که مرز آنها اجتماع پاره‌خط‌هایی به موازات محورهای x و y است. این ناحیه‌ها را می‌توان با رسم خطوطی به موازات دو محور به اجتماع مستطیل‌هایی از نوع بالا تجزیه کرد که فقط در مرز اشتراک دارند (شکل ٦)

شکل ٦

www.tfnar.ir

ناحیه D به صورت اجتماعی متناهی از مستطیل‌های $D_۱, \ldots, D_k$ نوشته می‌شود که برای هر یک قضیهٔ گرین ثابت شده است. در جمع زدن $\int \vec{F} \cdot d\vec{r}$ برای مرزهای این مستطیل‌ها، مشاهده می‌کنیم که پاره‌خط‌های واقع در داخل D دوبار در جهت‌های مخالف طی می‌شوند، پس اثر آنها در مجموع صفر است در حالی که پاره‌خط‌های تشکیل‌دهندهٔ ∂D فقط یک بار ظاهر می‌شوند و در مجموع، $\int_{\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ را می‌سازند. بدین ترتیب قضیهٔ گرین برای این نوع نواحی ثابت می‌شود.

شکل ۷

بالاخره در حالت کلی، با رسم خطوط راستی موازی دو محور، افرازی از D به‌دست می‌آوریم و تقریبی از این ناحیه که به شکل گام بالا است (شکل ۷). می‌توان نشان داد (با جزئیاتی که در اینجا مطرح نخواهد شد) که باظریفتر کردن افراز، انتگرال دوگانه روی ناحیهٔ تقریب D به انتگرال دوگانه روی D میل می‌کند و نیز انتگرال روی خم مرزی به انتگرال روی مرز D میل خواهد کرد، و بدین ترتیب اثبات قضیهٔ گرین در حالت کلی به‌دست می‌آید.

آنالیز برداری (۲)

قضیهٔ گرین انتگرال دوگانهٔ عبارت $\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}$ روی یک ناحیهٔ مسطح در صفحه را برحسب انتگرال $\vec{F}.d\vec{r}$ روی مرز ناحیه بیان می‌کنند. در نظر اول ممکن است عبارت $\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}$ مصنوعی به‌نظر رسد. ولی اگر $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ را در نظر بگیریم، عبارت بالا مؤلفه سوم میدان $curl\vec{F}$ است. در واقع تعمیم مهمی از قضیهٔ گرین به ناحیه‌های خمیده (تصویر رویه‌های قطعه قطعه هموار) وجود دارد که در آن به جای این عبارت از $curl\vec{F}$ استفاده می‌شود. این قضیه را در زیر نخست در ساده‌ترین حالت در نظر می‌گیریم.

فرض کنید $\varphi : W \to \mathbb{R}^3$ یک رویهٔ هموار با شرایط اضافی زیر باشد:

الف) W دارای مرزی است که از یک یا چند (تعدادی متناهی) تصویر خم قطعه قطعه هموار تشکیل شده است.

ب) φ یک‌به‌یک است.

در این‌صورت $D = \varphi(W)$ را یک <u>رویهٔ ساده</u> می‌نامیم. مرز D، ∂D، برابر $\varphi(\partial W)$ تعریف می‌شود.

<u>مثال ۱</u> فرض کنید $W = \{(u,v) | 0 \leq u \leq \pi, -1 \leq v \leq 1\}$ و $\varphi : W \to \mathbb{R}^3$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\varphi(u,v) = (\cos u, \sin u, v)$$

به سادگی دیده می‌شود که φ یک‌به‌یک است. داریم

$$\begin{aligned} \varphi_u \times \varphi_v &= (-\sin u, \cos u, 0) \times (0, 0, 1) \\ &= (\cos u, \sin u, 0) \end{aligned}$$

www.ttmar.ir

به ازای هر (u,v) داریم $\varphi_u \times \varphi_v \neq 0$، پس φ یک رویهٔ هموار تعریف می‌کند. $D = \varphi(W)$ روی سطح استوانهٔ $x^2 + y^2 = 1$ دارد و نیمی از قطعهٔ $-1 \leq z \leq 1$، یعنی نیمهٔ $y \geq 0$، را در برمی‌گیرد (شکل ۱).مرز D از دو پاره‌خط راست و دو نیمدایره تشکیل شده است.

شکل ۱

<u>مثال ۲</u> فرض کنید

$$W = \{(u,v) | 1 \leq |u| + |v| \leq 2\}$$

W ناحیهٔ بین دو مربع در صفحه uv است (شکل ۲)

شکل ۲

حال $\varphi : W \to \mathbb{R}^3$ را به‌صورت $\varphi(u,v) = (u, v, u^2 + v^2)$ تعریف می‌کنیم. $D = \varphi(W)$ قطعه ای از نمودار تابع $z = x^2 + y^2$ است و می‌دانیم که نمودار یک تابع C^1 تصویر یک رویهٔ هموار است. φ در اینجا به وضوح یک‌به‌یک است. مرز D از دو خم تشکیل شده است که هریک قطعه قطعه هموار و اجتماع چهار قطعهٔ هموار است (شکل ۳).

شکل ۳

یادآوری می‌کنیم که برای رویهٔ ساده $D = \varphi(W)$ جهت قراردادی با قائم واحد

$$\vec{n} = \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{|\varphi_u \times \varphi_v|}$$

تعریف می‌شود. همچنان که در مورد مرز یک ناحیهٔ دوبعدی عمل کردیم، اکنون جهت مشخصی برای ∂D منظور می‌کنیم.

در هر نقطهٔ مرزی غیرگوشه‌ای، $\vec{\nu}$ را بردار واحدی می‌گیریم که بر رویهٔ D مماس است، بر مرز یعنی ∂D، عمود است و به درون D اشاره می‌کند. حال مماس واحد، $\vec{T}$، در یک نقطهٔ غیرگوشه‌ای را آن مماس واحد بر ∂D در آن نقطه می‌گیریم که $(\vec{T}, \vec{\nu}, \vec{n})$ یک سه‌تایی مرتب راستگرد باشد. اگر

www.ttnar.ir

انسانی را تصور کنیم که روی ∂D، در جهت $\vec{T}$ حرکت می‌کند و دست چپ او به طرف درون D است، جهت سر این انسان متحرک باید به طرف قائم قراردادی رویه، یعنی $\vec{n}$، باشد.

برای مثالهای ۱ و ۲، $\vec{T}$ را محاسبه می‌کنیم. در مثال ۱ دیدیم که $\vec{n} = (\cos u, \sin u, 0)$. روی قطعهٔ افقی $t = -1$ که با $v = -1$ مشخص می‌شود، داریم $\vec{v} = (0, 0, 1)$، پس

$$\vec{T} = \vec{v} \times \vec{n} = (-\sin u, \cos u, 0)$$

به همین ترتیب ملاحظه می‌کنیم که روی قطعهٔ قائم متناظر با $u = \pi$، داریم $\vec{n} = (0, 0, 1)$، روی قطعهٔ افقی متناظر با $v = 1$، $\vec{T} = (\sin u, -\cos u, 0)$، و بالاخره روی قطعهٔ قائم متناظر با $u = 0$، $\vec{T} = (0, 0, -1)$.

در مثال ۲، قائم واحد عبارت است از:

$$\begin{aligned} \frac{\varphi \times \varphi_v}{|\varphi_u \times \varphi_v} &= \frac{(1,0,2u)\times(0,1,2v)}{|(1,0,2u)\times(0,1,2v)|} \\ &= \frac{(-2u,-2v,1)}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}} \end{aligned}$$

که قائم بر نمودار سهمی‌وار $z = x^2 + y^2$ است که مؤلفهٔ سوم آن مثبت است، یعنی به‌طرف 'داخل' سهمی‌وار، یعنی ناحیه $z > x^2 + y^2$، اشاره دارد. نتیجه این که جهت ∂D طبق شکل ۱۰ می‌باشد. توجه کنید که اگر این جهت‌ها را بر صفحه xy (= صفحه uv) تصویر کنیم (ناحیهٔ شکل ۹)، مربع داخلی در جهت عقربهٔ ساعت و مربع خارجی در جهت مثلثاتی جهت می‌گیرد که سازگار با جهت مرز در قضیهٔ گرین است.

این در واقع کلیت دارد زیرا که φ_u تصویر $(1, 0)$ تحت $D\phi(u, v)$ است، φ_v تصویر $(0, 1)$ تحت $D\phi(u, v)$، پس $\vec{n} = \frac{\vec{\varphi}_u \times \vec{\varphi}_v}{|\vec{\varphi}_u \times \vec{\varphi}_v|}$ و $(\vec{\varphi}_u, \vec{\varphi}_v, \vec{n})$ مانند $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ راستگرد است. حال چون تحت φ، درون W به درون $D = \varphi(W)$ نگاشته می‌شود، جهت مرزها نیز متناظر خواهد شد.

اکنون می‌توانیم قضیهٔ استوکس را برای رویه‌های ساده بیان کنیم. در زیر مرز رویه طبق قرارداد بالا جهت داده شده است.

(۴۰−۲) <u>قضیه استوکس (رویه‌های ساده)</u> $D = \varphi(W)$ یک رویهٔ ساده در $\mathbb{R}^3$ است که φ تابعی C^2 است و مرز رویه، ∂D، طبق قرارداد جهت داده شده است و $\vec{n}$ قائم واحد قراردادی روی D می‌باشد،

www.tutar.ir

اگر $\vec{F}$ یک میدان برداری C^1 باشد که دامنهٔ تعریف آن شامل D و مرز آن است، داریم:

$$\int_{\partial D} \vec{F}.d\vec{r} = \int_D \int curl\vec{F}.\vec{n}dS \qquad (1)$$

برهان همان طور که انتظار می‌رود فرمول بالا با نوشتن (x, y, z) به صورت $\varphi(u, v)$ و استفاده از قاعدهٔ زنجیره‌ای به فرمول گرین در صفحه uv برای W و ∂W تبدیل می‌شود. طبق معمول می‌نویسیم:

$$(x, y, z) = \vec{r} = \varphi(u, v) = (\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v), \varphi_3(u, v))$$

نخست عبارت داخل انتگرال سمت چپ را برحسب (u, v) می‌نویسیم:

$$\begin{aligned}\vec{F} \cdot d\vec{r} &= F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz \\ &= F_1(\frac{\partial \varphi_1}{\partial u}du + \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}dv) + F_2(\frac{\partial \varphi_2}{\partial u}du + +\frac{\partial \varphi_2}{\partial v}dv) + F_3(\frac{\partial \varphi_3}{\partial u}du + \frac{\partial \varphi_3}{\partial v}dv)\end{aligned}$$

پس

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = (\vec{F} \cdot \vec{r}_u)du + (\vec{F} \cdot \vec{r}_v)dv$$

و طبق قضیهٔ گرین در صفحه داریم

$$\begin{aligned}\int_{\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_{\partial W} [(\vec{F}(\varphi(u, v)) \cdot \vec{r}_u)du + (\vec{F}(\varphi(u, v) \cdot \vec{r}_v)dv] \\ &= \int\int_W [\frac{\partial}{\partial u}(\vec{F}(\varphi(u, v)) \cdot \vec{r}_v) - \frac{\partial}{\partial v}(\vec{F}(\varphi(u, v) \cdot \vec{r}_u)]dA\end{aligned}$$

عبارت داخل انتگرال را بسط می‌دهیم:

$$[\frac{\partial}{\partial u}(F_1 x_v + F_2 y_v + F_3 z_v) - \frac{\partial}{\partial v}(F_1 x_u + F_2 y_u + F_3 z_u)]dudv$$

$$= [\frac{\partial(F_1 \circ \varphi)}{\partial u}x_v + (F_1 \circ \varphi)x_{vu} - \frac{\partial(F_1 \circ \varphi)}{\partial v}x_u - (F_1 \circ \varphi)x_{uv}$$

$+$(دو دسته چهارتایی جملات مشابه)$]dudv$

چون مشتقات پاره‌ای مرتبهٔ دوم φ پیوسته فرض شده‌اند داریم $x_{vu} = x_{uv}$ و نصف جملات حذف

می‌شوند. با استفاده از قاعدهٔ زنجیره‌ای عبارت بالا برابر می‌شود با:

$$[(\frac{\partial F_۱}{\partial x}x_u + \frac{\partial F_۱}{\partial y}y_u + \frac{\partial F_۱}{\partial z}z_u)x_v - (\frac{\partial F_۱}{\partial x}x_v + \frac{\partial F_۱}{\partial y}y_v + \frac{\partial F_۱}{\partial z}z_v)x_u$$

$$+(\text{دو دسته جملات مشابه})]dudv$$

$$= [-\frac{\partial F_۱}{\partial y}\cdot\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} + \frac{\partial F_۱}{\partial z}\cdot\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} - \frac{\partial F_۲}{\partial z}\cdot\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} + \frac{\partial F_۲}{\partial x}\cdot\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} - \frac{\partial F_۳}{\partial x}\cdot\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}$$

$$+\frac{\partial F_۳}{\partial y}\cdot\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}]dudv$$

$$= [(\frac{\partial F_۳}{\partial y} - \frac{\partial F_۲}{\partial z})\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} + (\frac{\partial F_۱}{\partial z} - \frac{\partial F_۳}{\partial x})\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} + (\frac{\partial F_۲}{\partial x} - \frac{\partial F_۱}{\partial y})\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}]dudv$$

که انتگرال عبارت بالا روی W دقیقاً برابر $\int\int_D(\vec{F}\cdot\vec{n})dS$ است و حکم به اثبات می‌رسد. ■

<u>مثال ۱</u> M را بخشی از نمودار $z = f(x,y) = ۱ - x^۲ - y^۲$ می‌گیریم که در بالای صفحه xy، یعنی در $z \geq ۰$، قرار دارد و $\vec{n}$ را قائم واحد به طرف z های مثبت روی این رویه می‌گیریم. میدان $\vec{F}$ به صورت زیر داده شده است:

$$\vec{F}(x,y,z) = (x-y)\vec{i} + (x+y^۲)\vec{j} + z^۲\vec{k}$$

می‌خواهیم $\int\int_D curl\vec{F}\cdot\vec{n}dS$ را محاسبه کنیم. ∂D عبارت است از دایرهٔ واحد $x^۲+y^۲ = ۱$، $z = ۰$. با توجه به این که D به وسیله $(u,v) \longmapsto (u,v,۱-u^۲-v^۲)$، $u^۲+v^۲ \leq ۱$، پرمایش می‌شود و قائم واحد عبارت است از:

$$\frac{\vec{r}_u\times\vec{r}_v}{|\vec{r}_u\times\vec{r}_v|} = \frac{(۱,۰,-۲u)\times(۰,۱,-۲v)}{|(۱,۰,-۲u)\times(۰,۱,-۲v)|} = \frac{(۲u,۲v,۱)}{\sqrt{۴u^۲+۴v^۲+۱}}$$

که مؤلفهٔ z آن مثبت است و برای به کارگیری قضیه گرین برای $u^۲+v^۲ \leq ۱$، باید مرز را در جهت مثلثاتی پرمایش کرد، جهت ∂D نیز باید جهت مثلثاتی در صفحه xy اتخاذ شود تا قضیهٔ استوکس برقرار گردد:

$$\int\int_D curl\vec{F}\cdot\vec{n}dS = \int_{\partial D}\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

www.ttmar.ir

می‌توان در اینجا انتگرال سمت راست را محاسبه کرد ولی کار ساده‌تر این است که مجدداً قضیهٔ استوکس را این بار برای رویهٔ $x^2+y^2 \leq 1$، $z=0$ به‌کار گیریم که نتیجه می‌دهد:

$$\begin{aligned}
\int_{\partial M}\vec{F}\cdot d\vec{r} &= \int\int_{x^2+y^2\leq 1}(curl\vec{F}\cdot\vec{k})dA \\
&= \int\int_{x^2+y^2\leq 1}((0-0)\vec{i}+(0-0)\vec{j}+(1+1)\vec{k})\cdot\vec{k}dA \\
&= \int\int_{x^2+y^2\leq 1} 2dA = 2\pi
\end{aligned}$$

برای بهره‌گیری کامل از قضیهٔ استوکس لازم است که آن را به "رویه‌های بزرگتر"، یعنی رویه‌هایی که نتوان (یا به آسانی نتوان) آنها را به صورت رویهٔ ساده پرمایش کرد تعمیم دهیم. زیرمجموعهٔ D از $\mathbb{R}^3$ را یک رویهٔ جهت‌پذیر می‌نامیم در صورتی $D = D_1 \cup \cdots \cup D_k$ و شرایط زیر برقرار باشند:

(الف) هر D_i یک رویهٔ ساده است.

(ب) دو D_i متمایز فقط در مرز می‌توانند اشتراک داشته باشند و $D_i \cap D_j$ را می‌توان به صورت اجتماعی متناهی از تصاویر خم‌های هموار نوشت

(ج) هر قطعه خم مرزی D_i با حداکثر یک D_j، $j \neq i$، مشترک است.

(د) برای D_i ها می‌توان طوری جهت اختیار کرد که جهت قراردادی مرز مشترک بین D_i و D_j متضاد باشد.

در شکل ۳ دو نمونه رویهٔ جهت‌پذیر نمایش داده شده است. ۳ (الف) از چسباندن سه چنبره به هم به‌دست آمده است. از چنبرهٔ میانی دو قطعه و از هر یک چنبره‌های کناری یک قطعه بریده و در امتداد برش‌ها چنبره‌ها را به هم چسبانده‌ایم. به برقرار بودن شرط (د) توجه کنید. در شکل (ب) از استوانه افقی سه خم بسته γ_1، γ_2 و γ_3 را بریده‌ایم به طوری که D_1 دارای مرزی متشکل از پنج خم بستهٔ $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5$ است. در امتداد γ_1، γ_2 و γ_3 سه استوانهٔ دیگر به D_1 چسبانده‌ایم. سه خم γ_1، γ_2 و γ_3 جهت‌های متضاد از D_i ها می‌گیرند. مرز $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4$ از پنج قطعهٔ γ_4، γ_5، γ_6، γ_7 و γ_8 با جهت نمایش داده شده تشکیل شده است. در ۳ (الف) مرز D تهی است. این نمونهٔ یک رویهٔ "جهت‌پذیر بسته" است.

www.tmar.ir

شکل ۳

در شکل ۴ "نوار موبیوس" نمایش داده شده است که جهت‌پذیر نیست. اگر دو سر یک نوار کاغذ را پس از یک دو تاب دادن در فضا به هم بچسبانیم نوار موبیوس حاصل می‌شود. این رویه را نمی‌توان به صورت یک رویهٔ جهت‌پذیر نمایش داد.

شکل ۴

مثلاً اگر دو برش cd و ef را طبق شکل ۵ انجام دهیم و روی هر یک از رویه حاصل شده جهتی اختیار کنیم

شکل ۵

مشاهده می‌شود که بسته به جهت‌های اختیار شده، یکی از دو قطعهٔ مرزی cd یا ef جهت‌های متوافق کسب می‌کنند و دیگری جهت متضاد. نمود دیگر جهت‌ناپذیری یک رویه در $\mathbb{R}^۳$ این است که نمی‌توان برای آن یک میدان برداری قائم واحد اختیار کرد که به طور پیوسته تغییر کند. مثلاً اگر در یک نقطهٔ دایرهٔ نقطه‌چین شکل ۴ یک قائم واحد بر رویه اختیار کنیم و آن را یک دو کامل در طول این خم بسته به طور پیوسته دنبال کنیم، در بازگشت به نقطهٔ آغازی جهت آن معکوس خواهد شد.

حال فرض کنید $D = D_۱ \cup \cdots \cup D_k$ یک رویهٔ جهت‌پذیر باشد و برای D_i ها جهت‌هایی طبق (د) اختیار کنید که خم‌های اشتراک جهت‌های متضاد کسب کنند. اگر فرمول استوکس را برای هر D_i بنویسیم و طرف‌های متناظر را با هم جمع کنیم، در طرف راست (۱) $\int\int_D curl\vec{F}\cdot\vec{n}dS$ حاصل می‌شود و در طرف چپ کلیه مرزهای مشترک به دلیل جهت‌های متضاد حذف شده و تنها انتگرال $\int \vec{F}\cdot d\vec{r}$ برای آن خم‌های مرزی باقی می‌ماند که متعلق به فقط یک قطعه هستند. این خم‌ها دقیقاً مرز D را تشکیل می‌دهند. در ضمن اگر رویهٔ D بسته باشد، همهٔ خم‌های مرزی مشترک هستند و مجموع انتگرال‌های سمت چپ صفر می‌شود. بدین ترتیب فرمول کلی استوکس به‌دست می‌آید:

(۴۰–۲) قضیه استوکس اگر D یک رویه جهت‌پذیر با مرز ∂D باشد و بردار قائم واحد و جهت ∂D به طور سازگار با قرارداد انتخاب شده باشند، برای هر میدان برداری با مشتق‌های پاره‌ای پیوستهٔ $\vec{F}$ که

دامنهٔ آن شامل D و ∂D باشد داریم:

$$\int_{\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int\int_D curl\vec{F} \cdot \vec{n} dS \tag{۲}$$

اگر رویه بسته نیز باشد، لزوماً:

$$\int\int_D curl\vec{F} \cdot \vec{n} dS = 0 \tag{۳}$$

مثال ۲ نمودار تابعی مشتق‌پذیر $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ استوانهٔ $x^2 + y^2 = 1$ را در خمی γ قطع می‌کند. میدان برداری $\vec{F}(x, y, z) = (-y)\vec{i} + x\vec{j}$ را در نظر بگیرید. نشان دهید که $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \pm 2\pi$ مستقل از تابع خاص f.

دو تابع مشتق‌پذیر مختلف $f, g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ در نظر بگیرید که اشتراک نمودارشان با $x^2 + y^2 = 1$ از یکدیگر مجزاست

شکل ٦

ناحیهٔ بین دو اشتراک روی سطح استوانه را D می‌نامیم. در شکل ٦ داریم $\partial D = \beta \cup (-\alpha)$، که مقصود از $(-\alpha)$ بازپرمایش جهت برگردان α است. داریم $curl\vec{F} = \underline{0}$، پس $\int_\beta \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_\alpha \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ ، یعنی همان طور که ادعا شده بود $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$ مستقل از تابع خاص f است. بنابراین برای محاسبه $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$ کافی است یک حالت خاص، مثلاً تابع ثابت $f(x, y) \equiv 0$ در نظر گرفته شود که اشتراک نمودار آن با استوانه، دایرهٔ واحد در صفحه xy است. برای این دایره می‌دانیم که $\int_\gamma -ydx + xdy = \pm 2\pi$ بسته به این که جهت γ مثلثاتی یا ضد مثلثاتی باشد.

(۴۰–۳) کاربرد در وجود پتانسیل

به عنوان یک کاربرد قضیهٔ گرین در صفحه دیدیم که هرگاه $\vec{F} = F_1\vec{i} + F_2\vec{j}$ یک میدان برداری دارای مشتق‌های پاره‌ای پیوسته باشد که در مجموعه باز و همبند مسیری U در $\mathbb{R}^2$ تعریف شده است و شرط لازم پایستگی $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial y}$ برقرار باشد، $\vec{F}$ پایسته است در صورتی که U ویژگی هندسی اضافی

زیر را داشته باشد: برای هر خم سادهٔ بستهٔ قطعه قطعه هموار در U، ناحیه محصور توسط این خم به تمامی در U واقع باشد. اکنون می‌توانیم با استفاده از قضیه استوکس تعمیم مناسبی برای این مطلب در $\mathbb{R}^3$ ارائه کنیم. U را یک مجموعهٔ باز و همبند مسیری در $\mathbb{R}^3$ می‌گیریم و فرض می‌کنیم میدان برداری $\vec{F}$، که دارای مشتق‌های پاره‌ای پیوسته است، در U تعریف شده است. شرطی لازم برای پایسته بودن $\vec{F}$ این است که:

$$curl\vec{F} = \underline{0} \qquad (۴)$$

این شرط برای پایسته بودن $\vec{F}$ کافی نیست زیرا که در مورد

$$\vec{F}(x,y,z) = \frac{-y}{x^2+y^2}\vec{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\vec{j}$$

که در مجموعه باز و همبند مسیری $U = \mathbb{R}^3 - \{$ محور $z\}$ تعریف شده است داریم $curl\vec{F} = 0$ ولیکن انتگرال $\int \vec{F}\cdot d\vec{r}$ روی دایرهٔ واحد در صفحه xy صفر نیست. ویژگی هندسی اضافی مورد نیاز در اینجا بدین شرح است: برای هر خم بستهٔ ساده قطعه قطعه هموار γ در U، رویه‌ای جهت‌پذیر D، کاملاً واقع شده در U وجود داشته باشد که $\partial D = \gamma$.

در صورت احراز این شرط، $\int\int_D curl\vec{F}\cdot\vec{n}dS = 0$ نتیجه می‌دهد $\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$ برای هر خم سادهٔ بستهٔ قطعه قطعه هموار در U، پس $\vec{F}$ دارای پتانسیل است.

به عنوان مثال توجه کنید که $\mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$ ویژگی مورد نظر را دارد زیرا که مثلاً برای هر خم بستهٔ ساده حول $\underline{0}$ در صفحه xy می‌توان رویه‌ای در $z > 0$ در نظر گرفت که γ را به عنوان مرز دارد. مثلاً نیمکرهٔ شمالی این ویژگی را دارد.

(۴−۴۰) تعبیر <u>$curl$</u> فرض کنید D_ρ یک گوی مسطح دو بعدی به شعاع ρ و به مرکز نقطهٔ P در $\mathbb{R}^3$ است. $\vec{F}$ یک میدان برداری است با مشتق‌های پاره‌ای پیوسته، که دامنهٔ آن شامل D_ρ و مرز آن است. طبق فرمول استوکس داریم:

$$\int_{\partial D_\rho} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int\int_{D_\rho} curl\vec{F}\cdot\vec{n}dS$$

با استفاده از قضیهٔ میانگین انتگرال، انتگرال سمت راست برابر می‌شود با $(\pi\rho^{۲})(curl\vec{F}\cdot\vec{n})(Q)$ که Q نقطه‌ای در D_ρ است. پس:

$$(curl\vec{F}\cdot\vec{n})(Q)=\frac{\int_{\partial D_\rho}\vec{F}\cdot d\vec{r}}{\pi\rho^{۲}} \qquad (۵)$$

حال $\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$ گردش $\vec{F}$ حول γ نام دارد زیرا که به مفهومی "مجموع" مؤلفه‌های $\vec{F}$ در راستای مماس بر γ است. بدین ترتیب طرف راست (۵) گردش متوسط $\vec{F}$ نسبت به مساحت را حول P در صفحهٔ عمود بر $\vec{n}$ نمایش می‌دهد. وقتی $\rho\longrightarrow ۰$، بنابر پیوستگی مشتق‌های پاره‌ای، $(curl\vec{F}\cdot\vec{n})(Q)$ به $(curl\vec{F}\cdot\vec{n})(P)$ میل می‌کند. بدین ترتیب تعبیر زیر برای $curl\vec{F}$ حاصل می‌شود: $curl\vec{F}(P)$ برداری است که تصویر آن روی هر راستا برابر گردش لحظه‌ای $\vec{F}$ حول آن راستا نسبت به واحد مساحت است. چون حداکثر $curl\vec{F}\cdot\vec{n}(P)$ وقتی به‌دست می‌آید که $\vec{n}$ در راستای $curl\vec{F}$ باشد، امتداد $curl\vec{F}$ را محور چرخش لحظه‌ای $\vec{F}$ در نقطهٔ P می‌نامند. به علاوه $\frac{۱}{۲}|curl\vec{F}|$ نیز معمولاً سرعت زاویه‌ای لحظه‌ای این چرخش خوانده می‌شود. دلیل این نامگذاری مثال سادهٔ زیر است:

مثال میدان $\vec{F}(x,y,z)=-\omega y\vec{i}+\omega x\vec{j}$ را در نظر بگیرید. این میدان نمایش دهندهٔ یک دوران حول محور z با سرعت زاویه‌ای ثابت ω است. داریم:

$$curl\vec{F}=(۰,۰,۲\omega)=(۲\omega)\vec{k}$$

بدین ترتیب مشاهده می‌شود که امتداد $curl\vec{F}$ در واقع محور چرخش است و ضریب $\vec{k}$ دو برابر سرعت زاویه‌ای می‌باشد.

بدین ترتیب $curl\vec{F}(P)$ تمایل میدان $\vec{F}$ به حالت چرخشی حول P را نمایش می‌دهد و امتداد $curl\vec{F}(P)$ محور بیشترین چرخش است. با این تعبیر می‌توان رابطهٔ اساسی $curl(grad\ f)=\underline{۰}$ را بازبینی کرد. به‌یاد آورید که خطوط میدان $grad\ f$ همواره در جهت بیشترین صعود f در حرکتند، پس خطوط میدان $grad\ f$ تمایلی به بازگشت به نقطهٔ شروع (چرخش) را ندارند که با $curl(grad\ f)=\underline{۰}$ سازگار است.

از این تعبیر باید با احتیاط و دقت استفاده کرد. به مثال زیر توجه کنید:

www.tfmar.ir

مثال میدان $\vec{F}(x,y,z) = x\vec{j}$ را در نظر می‌گیریم. این میدان روی صفحه yz صفر است و خارج از آن دارای خطوط میدان موازی محور y می‌باشد (شکل ۷ وضعیت میدان را در صفحه xy نشان می‌دهد).

شکل ۷

به نظر نمی‌رسد هیچ گونه تمایلی به چرخش در این میدان وجود داشته باشد زیرا که خطوط میدان خارج از صفحه yz خط راست هستند. ولیکن محاسبهٔ ساده نشان می‌دهد که $curl\vec{F} = \vec{k}$. چگونه باید این "تناقض" را توجیه کرد؟ یک راه توجیه این است که مشاهده کنیم در دو طرف صفحه yz جهت میدان عوض می‌شود. این امر به سبب صفر شدن میدان روی صفحه yz امکان‌پذیر است. می‌توان تصور کرد که در اینجا نوعی چرخش در جریان است که مسیر آن تا "بی‌نهایت" در امتداد محور y ادامه دارد. راه دیگر این است که یک چرخهٔ سبک چهارپره‌ای را تصور کنیم که تحت تأثیر "میدان نیروی" $\vec{F} = x\vec{j}$ قرار دارد. مثلاً اگر این چرخه در نیمهٔ $x > 0$ قرار داشته باشد، نیرویی که به پره‌های راست آن وارد می‌آید بزرگتر از نیرویی است که در همان جهت به پره‌های سمت چپ وارد می‌شود، پس چرخه دور خود خواهد چرخید. بدین ترتیب شاید بهتر باشد به جای این که $curl\vec{F}$ را نمایشگر تمایل خود میدان $\vec{F}$ به چرخش فرض کنیم، آن را نمایشگر توان میدان $\vec{F}$ برای چرخاندن اشیاء سبکی که در معرض اثر آن قرار می‌گیرند تعبیر کنیم.

آنالیز برداری (۳)

آخرین قضیه از رشته قضایایی که انتگرال روی یک مجموعه را به انتگرال روی مرز مرتبط می‌سازد 'قضیه دیوژرانس' است که در این بخش به آن خواهیم پرداخت. نخست حالت دوبعدی این قضیه را که در واقع یک بازنویسی قضیهٔ گرین است بررسی می‌کنیم.

ناحیهٔ D در صفحه xy را در نظر بگیرید که در شرایط قضیه گرین (قضیه ۳۹—۱) صدق می‌کند یعنی مرز آن ∂D از اجتماعی متناهی خمهای قطعه قطعه هموار تشکیل شده است و ∂D طبق قرارداد جهت داده شده است. مماس واحد در نقاط غیرگوشه‌ای را در نظر بگیرید، $\vec{T} = (\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds})$. قائم واحد برونگرا نسبت به D را، که به $\vec{n}$ نمایش می‌دهیم، از دوران $\vec{T}$ به اندازه $\frac{\pi}{2}$ در جهت عقربهٔ ساعت به دست می‌آید، پس $\vec{n} = (\frac{dy}{ds}, -\frac{dx}{ds})$. حال فرض کنید $\vec{G} = (G_1, G_2)$ یک میدان برداری C^1 است که دامنهٔ تعریف آن شامل D و ∂D است. در این‌صورت داریم:

$$\vec{G}.\vec{n} = G_1 \frac{dy}{ds} - G_2 \frac{dx}{ds}$$

میدان برداری $\vec{F} = (F_1, F_2)$ را با روابط $F_1 = -G_2$ و $F_2 = G_1$ تعریف می‌کنیم، پس

$$\vec{G}.\vec{n} = \vec{F}.\vec{T} \tag{1}$$

از طرفی دیگر

$$\operatorname{div} \vec{G} = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \tag{2}$$

پس با جایگزینی (۱) و (۲) در قضیهٔ گرین برای میدان برداری $\vec{F}$ داریم:

$$\int_{\partial D} \vec{G}.\vec{n}\, ds = \int_D \int \operatorname{div} G\, dA_{x,y} \tag{3}$$

www.tinar.ir

فرمول (۳) صورت دیورژانس قضیهٔ گرین نام دارد. این قضیه گاهی بدین صورت بیان می‌شود که انتگرال دیورژانس در ناحیهٔ D برابر شار خروجی از مرزهای ناحیه است. توجه کنید که $\vec{G}\cdot\vec{n}$ نمایانگر مؤلفه خروجی میدان $\vec{G}$ از مرز ناحیه است. در واقع (۳) منجر به تعبیر هندسی‐ فیزیکی مورد نظر از مفهوم دیورژانس می‌شود. فرض کنید D_ρ یک گوی به شعاع ρ حول نقطه‌ای p در صفحه باشد. چون $\vec{G}$ دارای مشتق‌های پاره‌ای پیوسته فرض شده است، $div\vec{G}$ پیوسته است و طبق قضیهٔ میانگین انتگرال، $\int\int_{D_\rho} div\vec{G}dA$ برابر حاصل‌ضرب مساحت D_ρ در $(div\vec{G})(Q)$ می‌باشد که Q نقطه‌ای مناسب در D_ρ است:

$$\int_{D_\rho}(div\vec{G})dA=(\pi\rho^۲)(div\vec{G})(Q)$$

حال اگر ρ به صفر میل داده شود، از پیوستگی $div\vec{G}$ نتیجه می‌شود که $div\vec{G}(Q)$ به $div\vec{G}(P)$ میل می‌کند، پس:

$$(div\vec{G})(P)=\lim_{p\to ۰}\frac{\int_{\partial D_\rho}\vec{G}\cdot\vec{n}\,ds}{\pi\rho^۲} \qquad (۴)$$

توجه کنید که صورت کسر، شار خروجی از دایرهٔ ρ حول P است و مخرج مساحت درون دایره، بنابراین $div\vec{G}(P)$ معمولاً بدین صورت تعبیر می‌شود که نمایانگر میزان شار خروجی حول P در واحد مساحت است. مثبت بودن $div\vec{G}(P)$ دلالت بر این دارد که برای دایره‌های کوچک حول P، $\vec{G}\cdot\vec{n}$ بیشتر مثبت است تا منفی، یعنی تمایل میدان بیشتر به دور شدن از P (انبساط حول P) است، و برعکس منفی بودن $div\vec{G}(P)$، نمایانگر تمایل میدان به انقباض به سوی P است. این تعبیر شهود مناسبی از کاربردهای دیورژانس در فیزیک می‌دهد.

(۴۱—۱)یک کاربرد هندسی فرض کنید D یک ناحیهٔ بسته، کراندار و محدب در صفحه باشد که مرز آن، ∂D، تصویر یک خم پیوستهٔ ساده، بسته و قطعه قطعه هموار است. ناحیهٔ محدب ناحیه‌ای است که برای هر دو نقطهٔ P و Q از آن، پاره‌خط واصل بین P و Q به تمامی در ناحیه قرار گیرد. می‌خواهیم نوعی مفهوم "مرکز" و "شعاع" برای D منظور کنیم. برای هر نقطهٔ p از D، r_p به صورت

$$r_p=\max\{|q-p|\mid q\in\partial D\}$$

تعریف می‌شود، یعنی r_p حداکثر فاصلهٔ p از نقاط مرزی D است. از پیوستگی خم تعریف کنندهٔ مرز می‌توان نتیجه گرفت که این ماکسیمم به‌ازای نقطه‌ای از مرز اتخاذ می‌شود. همچنین از محدب بودن ناحیه می‌توان نشان داد که r_p به طور پیوسته با p تغییر می‌کند و بنابراین نقطه‌ای C در D یافت می‌شود که در آن r_C حداقل ممکن است:

$$r_C = \min\{r_p \mid p \in D\}$$

$r_C = r$ را شعاع D و C را یک مرکز D می‌نامیم. برای گوی بستهٔ معمولی، مفهوم شعاع و مرکز همان مفهوم متداول است. حال اگر A مساحت D و L محیط ∂D باشد، ثابت می‌کنیم:

$$A \leq \frac{۱}{۲} r \cdot L \qquad (۵)$$

برای گوی مدور، در (۵) تساوی برقرار است. برای اثبات (۵)، میدان $\vec{G}$ را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\vec{G}(x,y) = (x - x_C, y - y_C)$$

که در آن $C = (x_C, y_C)$ مرکز است. داریم $div\vec{G} = ۲$. از سویی دیگر، اگر (x,y) یک نقطهٔ مرزی باشد:

$$\vec{G} \cdot \vec{n} = |\vec{G}||\vec{n}| \cos \measuredangle(\vec{G}, \vec{n}) \leq |\vec{G}|$$

ولی $|\vec{G}(x,y)|$ برابر فاصله (x,y) از C است، پس $|\vec{G}| \leq r$، یا

$$\vec{G} \cdot \vec{n} \leq r$$

بنابراین

$$۲A = \int\int_D div\vec{G} = \int_{\partial D} (\vec{G} \cdot \vec{n}) ds \leq r \cdot L$$

و حکم به اثبات می‌رسد.

قضیه دیورژانس تعمیمی در همه ابعاد دارد. در زیر تعمیم آن به ناحیه‌های سه‌بعدی را تشریح می‌کنیم.

www.ttmar.ir

(۴۱—۲) <u>قضیهٔ دیورژانس</u> M یک ناحیهٔ سه بعدی مجاز انتگرال‌گیری در $\mathbb{R}^۳$ است که به اجتماع متناهی رویه‌های قطعه قطعه هموار ∂M محصور می‌باشد و $\vec{G}$ یک میدان برداری دارای مشتق‌های پاره‌ای پیوسته است که در سراسر M و ∂M تعریف شده است. در این صورت اگر $\vec{n}$ قائم واحد برونگرای ∂M باشد، داریم:

$$\int\int\int_M div\vec{G}dV = \int\int_{\partial M} \vec{G}\cdot\vec{n}dS \qquad (٦)$$

ملاحظات زیر مشابه نکات متناظر در حالت دو بعدی هستند.

(۴۱—۳) <u>تعبیر دیورژانس.</u> M_ρ را گوی بستهٔ شعاع ρ حول نقطه p می‌گیریم. طبق قضیهٔ میانگین انتگرال، نقطه‌ای Q در این گوی وجود دارد که

$$\int\int\int_M div\vec{G}dV = (\text{حجم } M_\rho)\cdot(div\vec{G})(Q)$$

بنابراین

$$div\vec{G}(Q) = \frac{\int\int_{\partial M_\rho} \vec{G}\cdot\vec{n}dS}{\text{حجم } M_\rho}$$

حال وقتی $\rho \longrightarrow ۰$، $div\vec{G}(Q)$ به $\vec{G}(p)$ میل می‌کند زیرا که مشتق‌های پاره‌ای G، و در نتیجه $div\vec{G}$، پیوسته فرض شده‌اند. از این رو $div\vec{G}(p)$ به آهنگ انبساط میدان حول p نسبت به واحد حجم تعبیر می‌شود.

(۴۱—۴) همان‌گونه که برای ناحیه‌های محدب دو بعدی، "شعاع" و "مرکز" تعریف کرده‌ایم، برای ناحیه‌های محدب سه بعدی نیز مرکز و شعاع تعریف می‌شوند. در اینجا نیز با در نظر گرفتن میدان

$$\vec{G}(x,y,z) = (x-x_c, y-y_c, z-z_c) \qquad (x_c,y_c,z_c) : \text{مرکز ناحیه}$$

می‌توان ثابت کرد که:

$$V \leq \frac{۱}{۳} rS$$

که V حجم ناحیه، S سطح جانبی و r شعاع است. برای گوی سه بعدی تساوی برقرار است.

www.tmar.ir

اثبات قضیهٔ دیورژانس اثبات قضیه دیورژانس سه بعدی نیز کاملاً مانند اثبات قضیهٔ گرین دو بعدی است، نخست قضیه برای مستطیل‌های با اضلاع موازی محورها ثابت می‌شود، سپس برای ناحیه‌های قابل تجزیه به این گونه مستطیل‌ها، و بالاخره در حد برای ناحیه‌های مجاز ذکر شده در صورت قضیه. برای مستطیل $a_۱ \leq x \leq a_۲$، $b_۱ \leq y \leq b_۲$، $c_۱ \leq z \leq c_۲$، و $\vec{G} = G_۱\vec{i} + G_۲\vec{j} + G_۳\vec{k}$، سه انتگرال $\int\int\int_M \frac{\partial G_۱}{\partial x}dV$، $\int\int\int_M \frac{\partial G_۲}{\partial y}dV$، و $\int\int\int_M \frac{\partial G_۳}{\partial z}dV$ را به طور جداگانه محاسبه می‌کنیم. برای اولی، نخست نسبت به x انتگرال‌گیری می‌کنیم که بنابر قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال نتیجه می‌دهد:

$$\int_{c_۱}^{c_۲}\int_{b_۱}^{b_۲}[G_۱(a_۲, y, z) - G_۱(a_۱, y, z)]dydz$$

روی وجه‌های $x = a_۱$ و $x = a_۲$، به ترتیب، قائم واحد برابر $-\vec{i}$ و $\vec{i}$ است و در نتیجه:

$$x = a_۱ \quad \text{روی} \quad -G_۱(a_۱, y, z) = \vec{G}\cdot\vec{n}$$

$$x = a_۲ \quad \text{روی} \quad G_۱(a_۲, y, z) = \vec{G}\cdot\vec{n}$$

پس $\int\int\int_M \frac{\partial G_۱}{\partial x}dV$ برابر $\int\int \vec{G}\cdot\vec{n}dS$ روی دو وجه $x = a_۱$ و $x = a_۲$ می‌شود. به همین ترتیب دو انتگرال سه‌گانه دیگر برابر انتگرال‌های $\vec{G}\cdot\vec{n}$ روی چهار وجه باقیمانده می‌شوند و حکم به اثبات می‌رسد. اکنون دو مثال در نظر می‌گیریم.

مثال ۱. D ناحیه‌ای مسطح واقع بر یک صفحه در $\mathbb{R}^۳$ است و P نقطه‌ای خارج این صفحه. از P به همهٔ نقاط D وصل می‌کنیم و جسم حاصل را مخروط به رأس P و قاعدهٔ D می‌نامیم. نشان می‌دهیم:

$$\text{حجم مخرو} = \frac{۱}{۳}(\text{ارتفاع})(D \text{ مساحت})$$

که در اینجا مقصود از ارتفاع فاصلهٔ قائم P از صفحه‌ای است که D در آن واقع است. میدان برداری

$$\vec{G}(x, y, z) = (x - x_P)\vec{i} + (y - y_P)\vec{j} + (z - z_P)\vec{k}$$

را در نظر می‌گیریم که در آن $P = (x_p, y_p, z_p)$. داریم $div\vec{G} = ۳$. "سطح جانبی مخروط" اجتماع پاره‌خط‌هایی است که رأس P را به نقاط مرزی D وصل می‌کنند. روی این سطح $\vec{n}$ بر این خطوط

واصل عمود است، پس $\vec{G}\cdot\vec{n}=0$ و $\int\int \vec{G}\cdot\vec{n}dS$ روی سطح جانبی صفر می‌شود. برای سطح قاعده، D، داریم:

$$\vec{G}\cdot\vec{n}=|\vec{G}||\vec{n}|\cos\measuredangle(\vec{G},\vec{n})=|\vec{G}|\cos\measuredangle(\vec{G},\vec{n})$$

برای نقطهٔ (x,y,z) در D، $G(x,y,z)$ برابر بردار $(x-x_P,y-y_P,z-z_P)$ است که اگر در کسینوس زاویهٔ بین $\vec{G}$ و $\vec{n}$ ضرب شود تصویر قائم $\vec{G}$ بر امتداد عمود بر صفحهٔ D را می‌دهد که همان ارتفاع است، پس

$$\int\int_D \vec{G}\cdot\vec{n}dS=(\text{ارتفاع})(D\ \text{مساحت})$$

و حکم از قضیهٔ دیورژانس نتیجه می‌شود.

<u>مثال ۲.</u> میدان $\vec{G}(x,y,z)=A\vec{i}+B\vec{j}+C\vec{k}$ را در نظر می‌گیریم که در آن A,B,C اعداد حقیقی داده شده‌اند. T^+ را نیمهٔ بالایی چنبره توصیف شده در مثال ۳، بخش ۳۵، می‌گیریم، یعنی:

$$T^+:(x,y,z)=((a+b\cos u)\cos v,(a+b\cos u)\sin v,a\sin u)$$

$0\leq u\leq\pi,\ 0\leq v\leq 2\pi$، $\vec{n}$ قائم قراردادی که در اینجا درونگرا است

انتگرال روی رویهٔ $\int\int_{T^+}\vec{G}\cdot\vec{n}dS$ را به کمک قضیهٔ دیورژانس محاسبه می‌کنیم. به صورت داده شده، T^+ هیچ ناحیهٔ سه بعدی را محصور نمی‌کند و نمی‌توان از قضیهٔ دیورژانس استفاده کرد. در این گونه مسایل معمولاً رویه یا رویه‌های دیگری را جستجو می‌کنیم که در مرز به رویهٔ داده شده وصل شده و با هم یک ناحیه را محصور کنند. برای رویهٔ دوم کاندیداهای متنوعی وجود دارد، انتخاب مناسب انتخابی است که برای آن محاسبهٔ $\int\int\vec{G}\cdot\vec{n}dS$ ساده باشد. در این مثال رویهٔ حلقوی و مسطح:

$$R:z=0,(a-b)^2\leq x^2+y^2\leq(a+b)^2$$

در صفحهٔ xy همراه با T^+ یک ناحیهٔ سه بعدی M را محصور می‌کند. به علاوه چون $div\vec{G}=0$، از قضیه دیورژانس داریم:

$$\int\int_{T^+}\vec{G}\cdot\vec{n}dS+\int\int_R\vec{G}\cdot\vec{n}dS=0$$

بدین ترتیب برای R، $\vec{n} = -\vec{k}$ و $\vec{G}\cdot\vec{n} = -C$، پس $\int\int_{T^+} \vec{G}\cdot\vec{n}dS = (-C)(R \text{ مساحت})$ ، یعنی $-۴\pi abC$.

(۵—۴۱) پتانسیل برداری در بررسی وجود پتانسیل برای میدانهای برداری دیدیم که اگر $curl\vec{F} = \underline{Q}$ و دامنهٔ تعریف $\vec{F}$ از شرط هندسی مناسبی ('نداشتن حفره') برخوردار باشد، آنگاه $\vec{F}$ دارای پتانسیل است، یعنی تابع f وجود دارد که $\vec{F} = \nabla f$.

اکنون با توجه به این اتحاد که $\operatorname{div}(curl\vec{F}) = ۰$ (به شرط $C^۲$ بودن میدان $\vec{F}$)، این سؤال مطرح می‌شود که اگر برای میدانی $C^۱$، $\vec{G}$، داشته باشیم $\operatorname{div}\vec{G} = ۰$، آیا میدان برداری $\vec{F}$ وجود دارد که $\vec{G} = curl\vec{F}$؟

در صورت وجود، $\vec{F}$ را یک پتانسیل برداری برای $\vec{F}$ می‌نامند.

در اینجا نیز با افزودن شرطی هندسی بر دامنهٔ تعریف $\vec{G}$ می‌توان به نتیجهٔ مثبت رسید، ولی نخست مثال زیر را در نظر بگیرید که نشان می‌دهد بدون افزودن شرط مناسب، جواب ممکن است منفی باشد.

مثال میدان $\vec{G}$ روی $\mathbb{R}^۳ - \{(۰,۰,۰)\}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\vec{G}(x,y,z) = (\frac{x}{r^۳}, \frac{y}{r^۳}, \frac{z}{r^۳}) \qquad (۷)$$

که در آن $r = \sqrt{x^۲ + y^۲ + z^۲}$ (فاصله از مبدا). میدان $\vec{G}$ یک میدان $C^۱$ در U است. محاسبه سر راست نشان می‌دهد که در سراسر U داریم $\operatorname{div}\vec{G} = ۰$، ولی نشان می‌دهیم $\vec{G}$ فاقد پتانسیل است. فرض کنید میدان $\vec{F}$ وجود دارد که $\vec{G} = curl\vec{F}$. در این‌صورت برای هر رویهٔ بستهٔ D در U باید طبق قضیه استوکس داشته باشیم:

$$\int_D\int \vec{G}.\vec{n}dS = ۰$$

D را کرهٔ واحد $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۱$ با قائم واحد برونگرای $\vec{n} = (x,y,z)$ در نظر می‌گیریم. داریم

$$\vec{G}.\vec{r} = \frac{۱}{r} = ۱$$

پس $\int_D\int \vec{G}.\vec{r}dS = ۴\pi \neq ۰$ که نشان می‌دهد $\vec{G}$ نمی‌تواند به شکل $curl\vec{F}$ باشد.

شرط هندسی برای هر رویهٔ قطعه قطعه هموار بستهٔ D در U ، ناحیهٔ درون در U قرار می‌گیرد.

به شباهت این شرط با شرط متناظر در مورد وجود پتانسیل اسکالر توجه کنید. در اینجا به جای خم بسته، رویهٔ بسته (یک بعد بالاتر) را منظور کرده‌ایم. در واقع در اینجا طبق قضیهٔ استوکس می‌توان نتیجه گرفت که انتگرال $\vec{G}.\vec{r}$ روی هر رویهٔ بسته واقع شده در U صفر خواهد شد و نکتهٔ اصلی اثبات وجود پتانسیل برداری این شرط است.

در پایان شایان ذکر است که اگر ناحیهٔ U از شرط هندسی محدود کننده‌تری که در زیر خواهد آمد برخوردار باشد، به روشهای موجود می‌توانیم وجود پتانسیل را ثابت کنیم. ناحیهٔ U را ستاره‌وار نسبت به نقطهٔ P می‌نامیم در صورتی که پاره‌خط واصل از هر نقطهٔ (x,y,z) ناحیه U به نقطهٔ P به تمامی در ناحیهٔ U قرار گیرد.

(۴۱–۶) (لم پوانکاره) فرض کنید U ناحیه‌ای ستاره‌وار نسبت به نقطهٔ P در $\mathbb{R}^3$ باشد و $\vec{F}$ و $\vec{G}$ دو میدان برداری C^1 پیوسته در U. در این صورت:

(الف) اگر $curl\vec{F} = \underline{0}$، آنگاه $\vec{F}$ پایسته است و تابع f زیر یک پتانسیل برای آن است:

$$f(x,y,z) = \int_0^1 (\vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt})dt$$

که $\vec{r}(t) = P + t((x,y,z) - P)$، $0 \leq t \leq 1$، پاره‌خط واصل از P به (x,y,z) است.

(ب) اگر $div\vec{G} = 0$، آنگاه $\vec{G}$ دارای پتانسیل برداری است. میدان $\vec{H}$ زیر یک چنین پتانسیل برداری است:

$$\vec{H}(x,y,z) = \int_0^1 (\vec{G} \times \frac{d\vec{r}}{dt})tdt$$

که در آن $\vec{r}(t) = P + t((x,y,z) - P)$، $0 \leq t \leq 1$ پاره‌خط واصل از P به (x,y,z) است. (در اینجا مقصود از انتگرال تابع برداری، برداری است که هر مؤلفه آن انتگرال مؤلفه متناظر است.)

اثبات در هر دو مورد داریم

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = (x - x_P, y - y_P, z - z_P)$$

نخست به اثبات (الف) می‌پردازیم. باید ثابت کنیم $\frac{\partial f}{\partial x} = F_1$، $\frac{\partial f}{\partial y} = F_2$ و $\frac{\partial f}{\partial z} = F_3$. یک مورد، مثلاً

www.tarbiat.ir

$F_1 = \frac{\partial f}{\partial x}$، را ثابت می‌کنیم، دو مورد دیگر مشابه است. داریم:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\int_0^1 (\vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt})dt$$

چون $\vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}$ دارای مشتق پاره‌ای پیوسته نسبت به x است، می‌توان طبق قضیه‌ای مشتق‌گیری $\frac{\partial}{\partial x}$ را به داخل انتگرال منتقل کرد، پس

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \int_0^1 (\frac{\partial}{\partial x}(\vec{F}(r(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt})dt \\
&= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}[(x - x_P)F_1(\vec{r}(t)) + (y - y_P)F_2(\vec{r}(t)) + (z - z_P)F_3(\vec{r}(t))]dt \\
&= \int_0^1 [F_1(\vec{r}(t)) + (x - x_P)t\frac{\partial F_1}{\partial x}(\vec{r}(t)) + (y - y_P)t\frac{\partial F_2}{\partial x}(\vec{r}(t)) + (z - z_P)t\frac{\partial F_3}{\partial x}(\vec{r}(t))]dt
\end{aligned}$$

حال از فرض $curl\vec{F} = 0$ نتیجه می‌شود که $\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}$ و $\frac{\partial F_3}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial z}$، پس

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \int_0^1 [F_1(\vec{r}(t)) + t(x - x_P)\frac{\partial F_1}{\partial x}(\vec{r}(t)) + t(y - y_P)\frac{\partial F_1}{\partial y}(\vec{r}(t)) + t(z - z_P)\frac{\partial F_1}{\partial z}(\vec{r}(t))]dt \\
&= \int_0^1 \frac{d}{dt}(tF_1(r(t)))dt \\
&= (tF_1(\vec{r}(t)))|_0^1 \\
&= F_1(x, y, z)
\end{aligned}$$

و (الف) به اثبات می‌رسد.

اثبات (ب) مشابه است. اگر بنویسیم $\vec{G} = G_1\vec{i} + G_2\vec{j} + G_3\vec{k}$ و $H = H_1\vec{i} + H_2\vec{j} + H_3\vec{k}$، باید نشان دهیم $G_1 = \frac{\partial H_3}{\partial y} - \frac{\partial H_2}{\partial z}$ و مشابهاً برای دو مؤلفه دیگر. تساوی $G_1 = \frac{\partial H_3}{\partial y} - \frac{\partial H_2}{\partial z}$ را نشان می‌دهیم، دو مورد دیگر مشابه است. داریم:

$$\begin{cases}
H_2(x, y, z) = \int_0^1 [G_3(\vec{r}(t))(x - x_P) - G_1(\vec{r}(t))(z - z_P)]tdt \\
H_3(x, y, z) = \int_0^1 [G_1(\vec{r}(t))(y - y_P) - G_2(\vec{r}(t))(x - x_P)]tdt
\end{cases}$$

$$\frac{\partial H_2}{\partial z} = \int_0^1 [\frac{\partial G_3}{\partial z}(\vec{r}(t)) \cdot t \cdot (x - x_P) - \frac{\partial G_1}{\partial z}(\vec{r}(t)) \cdot t \cdot (z - z_P) - G_1(\vec{r}(t))]tdt$$

$$\frac{\partial H_3}{\partial y} = \int_0^1 [G_1(\vec{r}(t)) + \frac{\partial G_1}{\partial y}(\vec{r}(t)) \cdot t \cdot (y - y_P) - \frac{\partial G_2}{\partial y}(\vec{r}(t)) \cdot t \cdot (x - x_P)]tdt$$

www.ttmar.ir

پس با توجه به فرض $div\vec{G}=0$ که نتیجه می‌دهد $\frac{\partial G_1}{\partial x}=-\frac{\partial G_3}{\partial z}-\frac{\partial G_2}{\partial y}$ داریم:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H_3}{\partial y}-\frac{\partial H_2}{\partial z} &= \int_0^1 \{2tG_1(\vec{r}(t))+t^2[\frac{\partial G_1}{\partial x}(\vec{r}(t))\cdot(x-x_P)+\frac{\partial G_1}{\partial y}\cdot(y-y_P)+\frac{\partial G_1}{\partial z}\cdot(z-z_P)]\}dt \\
&= \int_0^1 \frac{d}{dt}[t^2G_1(\vec{r}(t))]dt \\
&= (t^2G_1(\vec{r}(t)))|_0^1 \\
&= G_1(x,y,z)
\end{aligned}$$

و حکم به اثبات می‌رسد.

و السلام

www.ttmar.ir