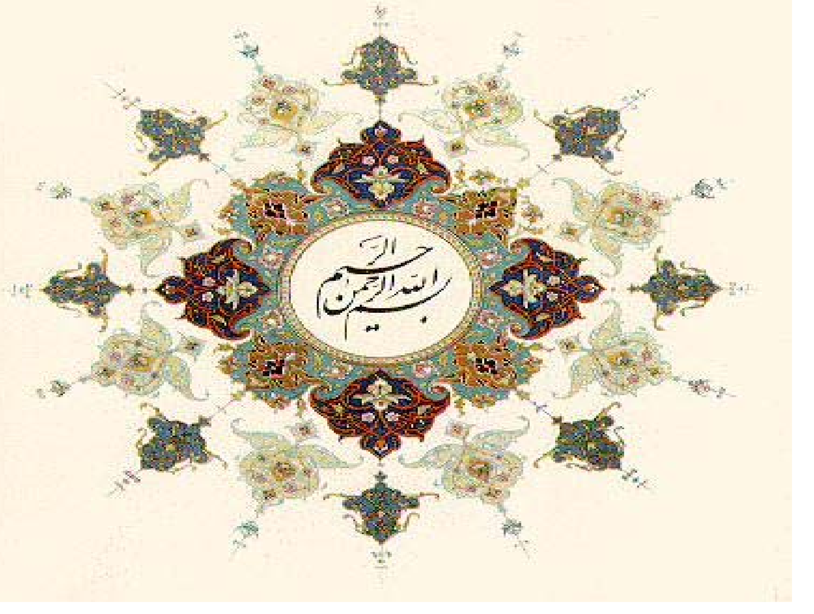
مقدمه اي بر كنترل مدرن

تألیف:

دکتر حمید رضا تقی راد

تقديم به پژوهشگران كوشا و صدّيق
گروه روباتيك ارس



پيشگفتار

در اين كتاب روشهاي تحليل و طراحي سيستمهاي كنترل خطي با نگرشي مدرن ارائه شده است. اين كتاب به عنوان مرجعي مناسب براي دانشجويان سال چهارم كارشناسي گرايش كنترل در مهندسي برق و يا سال اوّل كارشناسي ارشد در گرايشهاي مختلف مهندسي برق، مهندسي مكانيك و مهندسي فرآيندها پيشنهاد مي شود. پيشنياز لازم براي بهره برداري مناسب از مطالب اين كتاب، دروس معادلات ديفرانسيل، جبر خطي، فيزيك مكانيك، فيزيك الكتريسيته، مدارهاي الكتريكي و سيستمهاي كنترل خطي است.

موضوع اين نگارش طراحي سيستمهاي كنترل خطي با نگرشي مدرن است. اصول تحليل سيستمهاي كنترل خطي و طراحي كنترل كنندة مناسب براي آنها، بر پاية اصول رياضي محكمي بنا شده است و در كاربردهاي مختلف مهندسي مورد استفاده واقع مي شود. بدين جهت در تدوين اين نگارش، رياضيات لازم به صورت دقيق ارائه شده، امّا روند كاربردي روشها با ارائة مثالهاي متنوع صنعتي در متن كتاب و مسائل آن تعقيب شده است. بخشي از مطالب اين كتاب مستقيماً تأليف و بخشهاي ديگر از ترجمه، تركيب و تلخيص مراجع مختلف به رشته تحرير در آمده است. موضوع اين نگارش طي چند سال به صورت درس "كنترل مدرن" در دانشكدة برق دانشگاه صنعتي خواجه نصيرالدين طوسي ارائه گرديده است و حجم فصول متناسب با نياز برازش گرديده اند.

اين كتاب در فصولي به شرح زير تدوين شده است. در فصل اوّل ضرورت و مشخصات سيستمهاي كنترل معرفي شده و با ارائة مثالهاي مختلف صنعتي و اجتماعي علّت اصلي استفاده از سيستمهاي كنترل تشريح گشته است. سپس عناصر اصلي سيستمهاي كنترل در قالب المانهاي فيزيكي و مفهومي در اين گونه سيستمها معرفي شده و روشهاي طراحي عمومي سيستمهاي كنترل بيان شده است. با توجه به نحوة نگرش طراح به اين مسائل، روشهاي طراحي به دو دستة كلاسيك و مدرن تقسيم شده اند. در پايان نحوة ارائة روش مدرن طراحي كنترلر به صورت خلاصه معرفي گرديده است.

در فصل دوّم با عنايت به اينكه اولين مرحله در طراحي كنترل كننده، شناخت سيستم يا فرآيند مي باشد، با استفاده از قوانين و اصول فيزيكي حاكم بر سيستمهاي الكتريكي، الكترومكانيكي، مكانيكي و هيدروليكي دستة قابل توجهي از سيستمهاي صنعتي را مورد تجزيه و تحليل قرار داده و مدل آنها به فرم فضاي حالت بدست آورده شده است. فرم فضاي حالت با بهره گيري از متغير حالت مبناي اصلي روشهاي مدرن تحليل و طراحي در سيستمهاي كنترل مي باشد. با توجه به خصوصيت متغير حالت در فشرده سازي اطلاعات، اهميت استفاده از آن

در مدلسازي سيستمهاي خطي بيان شده است. در تكميل اين بررسي مثالهايي از سيستمهاي مهم حرارتي، شيميايي و الكترومغناطيسي در بخش مسائل اين فصل معرفي مي گردند و با ارائة اصول فيزيكي حاكم، به مدلسازي آنها خواهيم پرداخت. براي مدلسازي سيستمهاي مكانيكي روش لاگرانژ كه مبتني بر معادلات انرژي در اين گونه سيستمها مي باشد به عنوان تكنيكي مؤثر معرفي شده است. همچنين روش عمومي خطي سازي سيستمهاي غير خطي مورد بحث و بررسي قرار گرفته است. در پايان اين فصل با اشاره به اين موضوع كه كلية مدلهاي بدست آمده تنها تقريبي غير دقيق از سيستم واقعي مي باشند، كه ارتباط بين ورودي و خروجي را به فرم معادلات ديفرانسيل مشخص مي سازند، توجه خواننده را به عدم دقتها در مدلسازي معطوف ساخته و انواع نامعيني هاي مدلسازي معرفي شده اند.

در فصل سوّم با هدف بدست آوردن پاسخ سيستمهاي خطي در اثر شرايط اوليه و ورودي معين، خصوصيات سيستمهاي خطي مورد تجزيه و تحليل قرار گرفته است. بدين ترتيب پاسخ سيستم به دو بخش بدون ورودي و بدون شرايط اوليه تجزيه شده است و با توجه به اصل رويهم گذاري سيستمهاي خطي، پاسخ كامل سيستم با تعيين اين دو جزء به صورت مستقل بدست آمده است. در اين راستا ماتريس تبديل حالت سيستم تعريف شده است. اين نمايش نه تنها پاسخ كلية سيستمهاي خطي را به صورت عمومي تعيين مي كند، اهميت بردار متغير حالت را در فشرده سازي اطلاعات ورودي در خود نشان مي دهد. در ادامه، خصوصيات اصلي ماتريس انتقال حالت و مشابهت آن با توابع نمائي نشان داده شده است و روشهاي مختلف تعيين تحليلي و عددي آن بررسي شده اند. در پايان فصل سوّم نيز روشهاي نمايش سيستم به صورت غير مزدوج يا قطري را كه در تسريع عمليات عددي سيستمها حائز اهميت است، با معرفي تبديل همانندي تشريح نموده و در حالت عمومي فرم بلوكي– جوردن بدست آمده است.

در فصل چهارم مفاهيم كنترل پذيري، رؤيت پذيري، پايدار پذيري و آشكار پذيري تشريح شده اند. اپراتور كنترل پذيري در واقع به عنوان نگاشتي بين توابع بي نهايت بعدي ورودي و متغير حالت n بعدي، فشرده سازي اطلاعات ورودي به مقدار اولية متغير حالت را به عهده داشته و در صورتي كه رتبة اين نگاشت كامل باشد سيستم كنترل پذير ناميده مي شود. به صورت دوگان، اپراتور رؤيت پذيري به عنوان نگاشتي خطي بين متغير حالت n بعدي و خروجي بي نهايت بعدي سيستم، عمل كرده و خاصيت رؤيت پذيري در واقع تعداد و چيدمان سنسورهاي لازم را به منظور تعيين وضعيت سيستم در بر مي گيرد. اين دو خصوصيت قبل از طراحي هر نوع كنترل كنندة مدرن براي سيستمهاي خطي بايستي مورد ارزيابي قرار گيرد. با استفاده از تعاريف و قضاياي مربوط به اين خصوصيات، روشهاي تحليل كنترل پذيري و

رؤيت پذيري در سيستمهاي خطي ارائه گرديده و ارتباط آن با وجود مودهاي پنهان يا حذف صفر و قطب در نمايش ماتريس تبديل سيستم به بحث كشيده شده است. در انتها با ارائة روشهاي تجزية سيستم به مودهاي كنترل پذير، رؤيت پذير، كنترل ناپذير و رؤيت ناپذير نحوة تفكيك اجزاء سيستم به فرم كالمن تشريح شده است.

در فصل پنجم با روشهاي تحقق سيستمهاي خطي و روشهاي تحليل پايداري آنها آشنا مي شويم. تحقق سيستم به معناي نمايش يك سيستم به فرم فضاي حالت در صورت معين بودن فرم ماتريس حالت آن مي باشد. از آنجائي كه بر خلاف نمايش ماتريس حالت، فرم فضاي حالت سيستم يكتا نمي باشد، تحقق هاي بسياري براي يك ماتريس تبديل قابل بيان است. از آن جمله تحقق هاي كنترل پذيري، رؤيت پذيري، رؤيتگر، كنترلر و تحقق جوردن مي باشند كه در اين فصل تشريح شده اند، و به خصوصيات اصلي آنها اشاره شده است. فرم جامع تحقق در حالت چند ورودي- چند خروجي نيز در نهايت تشريح شده است.

تحليل پايداري سيستمهاي كنترل شرط اوليه و مهم در طراحي هر نوع سيستم كنترلي مي باشد. اين مهم توسط قضاياي مبسوط پايداري كه در فصل پنجم ارائه شده است، بررسي شده است. در ابتدا تعاريف پايداري سيستمهاي غير خطي و خطي را طرف توجه قرار داده ايم و پس از ارائة قضية مهم لياپانوف در تحليل پايداري سيستمهاي غير خطي قضاياي منتج شده براي سيستمهاي خطي ارائه شده است. پايداري داخلي كه مهمترين نوع پايداري سيستمهاي خطي مي باشد، در انتها مورد تجزيه و تحليل دقيق قرار گرفته است.

در فصل ششم اصول طراحي فيدبك حالت با دو روش جايابي قطب و كنترل بهينة LQR ارائه شده است. در اين فصل ابتدا اهداف عمومي طراحي كنترلر براي سيستمهاي صنعتي را بر شمرده، و حفظ پايداري سيستم به علاوه مسئله تنظيم و يا تعقيب، به صورت دقيق تعريف شده است. همچنين نشان داده شده است كه مسئلة تعقيب با تعميم روش تنظيم قابل دستيابي است. لذا در ادامه، حل مسئلة تنظيم توسط دو روش جايابي قطب و كنترلر بهينة LQR ارائه شده است و آلگوريتمهاي مختلف حل عددي اين مسائل نيز تشريح شده اند. در پايان اين فصل به منظور بررسي روشهاي رفع اغتشاش ثابت و متغير در سيستمهاي كنترل به تعميم روش فوق و اضافه نمودن ترم پيش خور رفع اغتشاش و همچنين فيدبك انتگرال حالت پرداخته شده است.

روش مدرن كنترل سيستمهاي صنعتي مبتني بر فيدبك حالت مي باشد. اين در حاليست كه معمولاً در اين سيستمها كلية حالتهاي سيستم در دسترس نبوده و تنها خروجيهاي خاصي از سيستم مورد اندازه گيري واقع مي شوند. در فصل هفتم ايدة تخمين متغيرهاي حالت با استفاده از خروجيهاي سيستم بسط داده شده است. رؤيتگر حالت به عنوان سيستم ديناميكي

كه مبتني بر مشخصات سيستم و اطلاعات خروجي تشكيل مي شود، نياز طراح را به اندازه گيري كلية متغيرهاي حالت مرتفع مي سازد و متغيرهاي تخمين زده شده را در حلقة فيدبك استفاده مي نمايد. علي رغم اينكه رؤيتگر حالت بدين منظور در ادبيات كنترل مدرن معرفي شده است، به خاطر ويژگيهاي منحصر بفرد خود، مورد مقبوليت و استفاده در بسياري از كاربردهاي ديگري كه به نوعي فيلتر سازي يا پيش بيني مورد نياز است، قرار گرفته است. حل مسئلة رؤيتگر حالت، خوشبختانه دوگان حل مسئلة فيدبك حالت بوده، و كلية روشهاي تشريح شده در تعيين بهرة فيدبك حالت، به صورت متناظر در حل مسئلة رؤيتگر حالت نيز مورد استفاده قرار مي گيرد. بدين ترتيب روشهاي جايابي قطب و رويتگر بهينة فيدبك حالت كه به فيلتر كالمن مشهور است تشريح شده اند. در ادامه اين فصل رويتگرهاي با كاهش مرتبه يا لوئنبرگر نيز مورد بررسي قرار گرفته است. و در پايان با تركيب رؤيتگر حالت و فيدبك حالت خصوصيات استفاده از متغير حالت تخمين زده شده در حلقة فيدبك بررسي شده است.

در كلية بخشها با ارائة مثالهاي صنعتي نحوه عملي تنظيم كنترل كنندة فيدبك حالت و بررسي عملكرد سيستم حلقه بسته با مشابه سازيهاي كامپيوتري محقق شده است. و با ارائه مثالهاي صنعتي همانند فصول قبل، نحوة تنظيم پارامترهاي كنترل كننده و رؤيتگر و همچنين بررسي عملكرد سيستم حلقه بسته صورت پذيرفته است.

در انتها از كليه كساني كه با تلاش خود در تهيه و تدوين اين كتاب مرا ياري كرده اند، به خصوص سركار خانمها سعيديان و سماواتيان كه در تايپ مطالب و طرح روي جلد زحمات زيادي را متحمل شده اند و سركار خانم شكوهي يكتا كه در ويرايش آن ياري نموده اند تشكر نموده و اميدوارم اين مجموعه در خدمت دانش پژوهان و متخصصين صنعتي كشور قرار گيرد.

حميد رضا تقي راد
آذر ماه ۱۳۸۲

فهرست

فصل اول

مقدمه

فصل اول: مقدمه

۱–۱) مقدمه

در بسياري از موارد اگر بخواهيم كميتي فيزيكي را نزديک به مقدار مطلوبي نگهداريم, نيـاز بـه سيستم كنترل اتوماتيك خواهيم داشت. اگر مقدار مطلوب ثابت باشـد, هـدف سيسـتم كنتـرل تنظيم[1] ناميده مي شود و اگر اين مقدار مطلوب با زمان تغيير كند اين هدف كنترلي را تعقيب[2] مي ناميم. به عنوان مثال كنترل دور چرخش هارد ديسک كامپيوتر, ميزان رطوبـت موجـود در مخلوط خمير كاغذ در صنايع كاغذ سازي, و يا غلظت مواد خروجـي از يـک رآكتـور شـيميائي مثالهاي صنعتي از سيستمهاي كنترلي تنظيم مي باشـند. از طـرف ديگـر حركـت بـازوي يـک روبات براي طي مسير مشخصي در فضا به منظور جوشـكاري Mig, كنتـرل پـرواز هواپيمـا يـا موشک در مسير مورد نظر, و يا تعقيـب هـدف متحـرک توسـط رادار يـا تلسـكوپ مثالهـائي از سيستمهاي كنترل تعقيب يا سيستمهاي سرو[3] مي باشد.
خداوند متعال قطعاً علم مهندسي كنترل را به كمال به اجرا رسانده است. درجـه حـرارت بـدن انسان تقريباً همواره نزديک ۳۷ درجه سانتيگراد نگهداري مي شـود. در حاليكـه تعـداد زيـادي سنسور حرارتي در طول بدن انسان پخش مي باشد و مكانيزمهاي مختلفي همانند تنفس, عرق كردن, لرزيدن، گردش خون و . . . نيز براي كنترل درجه حرارت در بدن انسان طراحـي شـده است. روش بظاهر ساده اي كه در آن، دست خود را دراز كـرده و يـک فنجـان چـاي را جابجـا مي كنيم, راه حل تحسين آميز مسئله بسيار مشكل در روباتيک در حال حاضر مي باشد.
چهار دليل عمـدة اسـتفاده از سيسـتمهاي كنتـرل را مـي تـوان عملكـرد, مسـائل اقتصـادي و سودآوري توليد, امنيت كاربر و قابليت اطمينان نام برد. بسياري از سيستمها به عملكرد مناسب نخواهنـد رسـيد مگـر از سيسـتم كنتـرل مناسـب در آنهـا اسـتفاده گـردد. عملكـرد مناسـب هواپيماهاي مسافربري در حمل و نقل انسان و هواپيماهاي جنگي در ايجاد مانورهـاي مختلـف

[1] Regulation
[2] Tracking
[3] Servo system

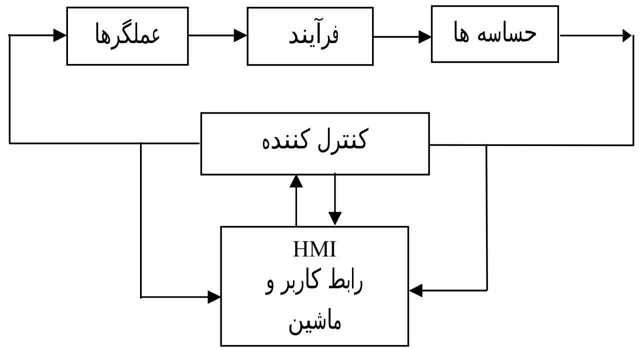
مديون سيستم كنترل آنست دقت عملكردي يک روبات توسط سيستم كنترل آن تأمين شـده, در كلية پروسه هاي توليدي، نيروگاه ها و پالايشگاه ها، سيستم هاي كنتـرل, كيفيـت مناسـب محصولات را ايجاد مي كنند.
مسائل اقتصادي و بهره وري مناسب نيز دليل عمـدة ديگـر اسـتفاده از سيسـتمهاي كنتـرل در صنعت مي باشد. اين امر بخصوص در فرآيندهاي توليدي بسيار حائز اهميت است. نيروگاههـاي توليد انرژي, ستونهاي تجزية پالايشگاهها, دستگاههاي توليد كاغذ و كلية فرآينـدهاي توليـدي پيوسته از جمله مثالهائي است كه كيفيت و قيمـت فرآينـد توليـد شـده بسـتگي مسـتقيم بـه سيستم كنترل آن دارد. سرعت توليد به همراه رسيدن به كيفيـت مناسـب و ضـايعات حـداقل, عوامل بسيار مهم اقتصادي است كه توسط سيسـتمهاي اتوماسـيون و كنتـرل قابـل دسترسـي است. دقت كنيد كه تنها درصد كوچكي بهبود كيفيـت و كـاهش قيمـت در محصـولي كـه بـه صورت پيوسته توليد مي شود در بهره وري آن نقش بسيار مهمي ايفا مي كنـد. از طـرف ديگـر افزايش ظرفيت توليد به نسبت سرمايه گذاري انجام شده بهره وري ديگر اقتصادي آنست.
امنيت كاربر نيز دليل ديگر اسـتفاده از سيسـتمهاي كنتـرل مـي باشـد. هواپيمـا تنهـا توسـط سيستمهاي كنترل و امنيتي دقيق قادر به فرود در حداقل ديد مي باشد. يک نيروگاه هسته اي تنها درصورت وجود سيستمهاي كنترل و امنيتي دقيق قادر به توليد انـرژي بـه صـورت كامـل ايمن خواهد بود. بسياري از سيستمها داراي محدوده هاي كوچك خطي در عملكرد مي باشـند كه تنها توسط سيستمهاي كنترل به صورت خودكار در محدودة ايمن كار خواهند نمود. مسئلة آخر كه در اينجا مي توان به آن اشاره نمود درجة اطمينان بيشتر در محصولات توليـدي اسـت كه توسط سيستم هاي كنترل تنظيم مي شوند. سيستمهاي كنترل تغييرات سريع كمّيت هـاي فيزيكي در سيستمهاي كنترل شده را به حداقل مي رسانند, موضوعي كـه بـه صـورت طبيعـي باعث افزايش قابليت اطمينان سيستم مي شود.

۱–۲) عناصر فيزيكی سيستمهای كنترل

شكل زير عناصر فيزيكي يک سيستم كنترل را به صورت عمومي نشان مي دهـد. فرآينـد[1], بـه موضوعي كه تحت كنترل قرار گرفته است اطـلاق مـي شـود. در اينصـورت يـک هواپيمـا نيـز مي تواند فرآيند تحت كنترل ناميده شود. فرآيند داراي متغيرهاي خروجي[2] مي باشد كه برخي

[1] Plant
[2] Outputs

از آنها تحت کنترل قرار دارند. این کمّیت ها توسط حساسه ها[1] يا سنسورها اندازه گيري مي شوند. يک حساسه معمولاً يک مبدل[2] مي باشد، که توسط آن کمّيت فيزيکي مورد نظر به صورت تناسبي به کميت فيزيکي ديگري (معمولاً الکتريکي) تبديل مي شود, تاکومتر, شتاب سنج، ترموکوپل, کرنش سنجها و اندازه گيرهاي PH از جملهٔ اين مبدل ها مي باشد.
همچنين يک فرآيند داراي متغيرهاي ورودي[3] مي باشد، که در واقع با تأثيرگذاري برروي فرآيند، کمّيت هاي خروجي را تغيير مي دهند. عناصري که متغيرهاي ورودي را ايجاد مي کنند, عملگرها[4] ناميده مي شوند. عملگرهاي هيدروليکي, نيوماتيکي, انواع موتورهاي الکتريکي, منابع ولتاژ متغير و شيرهاي کنترلي از جملهٔ عملگرهاي متداول صنعتي مي باشند.



شکل (۱-۱) عناصر فيزيکی سيستم کنترل

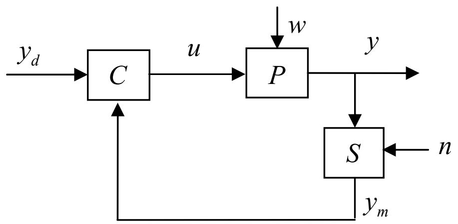
کنترل کننده وظيفهٔ اجراي استراتژي کنترل را برروي فرآيند بر عهده داشته و اين عمل را از طريق عملگرها و با دريافت اطلاعات سنسورها انجام مي دهد. کنترل کننده ها مي توانند آنالوگ و به صورت نيوماتيکي, الکتريکي يا الکترونيکي بوده و يا به صورت ديجيتال و توسط کامپيوتر و پردازشگرهاي عددي پياده سازي شوند، که در اين حالت توسط مبدلهاي A/D[5] و D/A[6] به فرآيند متصل مي شوند. رابط کاربر و ماشين در واقع پنجره اي است که فرآيند مورد

[1] Sensors
[2] Transducer
[3] Inputs
[4] Actuators
[5] Analog to digital convertors
[6] Digital to analog convertors

نظر را مونيتور نموده و اجزاء تنظيم کننده هاي کنترل کننده ها و همچنين کمّيات مورد نظري از فرآيند را که عملکرد سيستم را مشخص مي نمايند، در اختيار کاربر قرار مي دهد. در اين واحد، اطلاعات سنسورها و عملگرها مونيتور شده و کمّيت هاي مهم و قابل تنظيم کنترل کننده ها جهت استفاده و تنظيم کاربر در اختيار او قرار مي گيرد. انواع نشانگرها[1] در اين قسمت قرار مي گيرند. اين نشانگرها مي تواند شامل مونيتورهاي مختلف کامپيوتري باشند که توسط نرم افزار، ارتباط لازم با سيستم را ايجاد مي کند. در انتها بايد خاطر نشان ساخت که بررسي سيستمها در اين چهارچوب منحصر به فرآيندهاي مهندسي نبوده، و انواع سيستمهاي اجتماعي, رشد اقتصادي جامعه غيره. نيز مي تواند به صورت اصولي بدين ترتيب مورد تجزيه و تحليل قرار گيرند.

۱-۳) عناصر مفهومی سیستمهای کنترل

مهمترين شاخص تئوري کنترل کاربردي بودن آن در زمينه هاي مختلف مهندسي و حتي غير مهندسي مي باشد. علت توفيق تئوري کنترل در زمينه هاي مختلف مهندسي برق, مکانيک, شيمي, تحقيق در عمليات و اقتصاد, توانائي توصيف مسائل مختلف در يک چهارچوب رياضي و مهندسي يکسان مي باشد. شکل زير نمايش مفهومي سيستمهاي کنترل مي باشد.



شکل (۱-۲) عناصر مفهومی سیستم های کنترل

در اين نمايش P نمايش دهندهٔ فرآيند است، که توسط مدل رياضي آن تعيين مي شود. خروجي فرآيند y وروديهاي آن u, w مي باشند که کلية اين کمّيت ها بصورت برداري در نظر گرفته مي شوند. u ورودي کنترل و w ورودي اغتشاشي فرآيند ناميده مي شود. سنسورها نيز با نماد رياضي S نشان داده شده است که در اثر اندازه گيري متغيرهاي خروجي

[1] Gauges

فرآیند y تحت نویز اندازه گیري n, مقدار اندازه گیري شدة y_m را تولید مي کند. کنترل کننده را با C نمایش داده ایم که با استفاده از اطلاعات خروجي هاي اندازه گیري شده y_m و استراتژي کنترل از پیش تعیین شده, فرمان کنترل u را توسط عملگرها ایجاد مي کند. در این نمایش عملگرها جزئي از فرآیند دیده شده اند.

۱–۴) فرآیند طراحی کنترل کننده

هدف از طراحي کنترل کننده اینست که:

علیرغم وجود اغتشاشات w, نویز اندازه گیري n, عدم دقت در مدلسازي فرآیند P و محدودیتهاي عملگرها و سنسورها حتي المقدور خروجي سیستم $y(t)$ نزدیک به مقدار مطلوب $y_d(t)$ باقي بماند.

طراحي کنترل کننده به معناي ایجاد رابطة ریاضي مناسب یا استراتژي منطقي مناسب C براي رسیدن به هدف فوق است. المان مهم فیدبک یعني در دسترس داشتن اطلاعات خروجي y_m براي تولید فرآیند کنترلي u ضروري است. مي توان نشان داد که با وجود فیدبك میتوان هدف کنترلي فوق را علیرغم محدودیتها و خواستهاي متعدد بدست آورد. به منظور طراحي کنترل کنندة مناسب مراحل زیر بایستي محقق گردد.

- مدلسازي فرآیند
- مشخص نمودن مشخصات فیزیکي w, y_d در حوزة زمان یا فرکانس
- مشخص نمودن معیار یا معیارهاي عملکرد $(y_d \simeq y(t))$
- مدلسازي ریاضي عملگرها، سنسورها، مبدلها و مشخصات فیزیکي نویز اندازه گیري
- مشخص نمودن فرم عمومي کنترل کننده به عنوان مثال PID یا فیدبک حالت و یا غیره

در اینحالت مرحلة طراحي کنترل کننده بدین صورت تعقیب مي شود که با استفاده از تئوري کنترل کلاسیک یا مدرن ضرایب کنترل کننده (PID) یا بهرة حلقة فیدبک حالت تعیین مي گردد. پس از طراحي کنترل کننده نحوة پیاده سازي آن توسط کنترل کننده هاي آنالوگ

یا دیجیتال بایستي بررسي شده و رابط کاربر HMI[1] لازم بایستي طراحي و اجرا گردند. همچنین انتخاب مناسب سنسورها و عملگرهاي مناسب براي سیستم ضروري است. همانگونه که مشخص است طراحي موفق کنترل کننده و پیاده سازي آن نیاز به چند تخصص (مهندسي برق، مکانیك، شیمي، کامپیوتر و . . .) داشته، لذا غالباً این عملیات به صورت گروهي صورت مي پذیرد ولي در هرحال مهندس کنترل به عنوان مدیر پروژه یا یکي از افراد کلیدي آن، بایستي آشنائي با کلیة زیرمجموعه ها را داشته باشد.

همانگونه که از این مقدمه مشخص است، پل واسط بین تئوري کنترل و پیاده سازي آن در فرآیندهاي مختلف مدلسازي دینامیکي آن فرآیند مي باشد. نحوة مدلسازي و نگرش طراح در این زمینه، روشهاي متنوع طراحي کنترل کننده را سبب شده است. در دیدگاه کلاسیک, مدلسازي در حوزة فرکانسي به صورت توابع تبدیل صورت پذیرفته و کلیة مشخصه هاي عملکردي و پایداري سیستم را در این حوزه بررسي مي کنیم. این تئوري که در دهة ۵۰ میلادي به اوج خود رسیده است با تئوریهاي بودي[2] و نایکویست[3] و روشهاي تحلیلي در طراحي کنترل کننده هاي PID, به صورت کامل در کلیة صنایع و سیستمهاي کنترل فرآیندهاي صنعتي رسوخ کرده است.

در انتهاي دهة ۵۰ و دهة ۶۰ نگرش مدرن به مدلسازي سیستمهاي دینامیکي به صورت فضاي حالت و استفاده از روشهاي عددي و کامپیوتري به جاي روشهاي تحلیلي جاي خود را در میان تئوري کنترل باز نموده است. این نگرش به دیدگاه مدرن مشهور است و موضوع این کتاب مي باشد. با این نگرش و با ترتیب فصول زیر مسئلة طراحي کنترل کنندة مدرن مورد تجزیه و تحلیل قرار مي گیرد.

در فصل دوّم با عنایت به اینکه اولین مرحله در طراحي کنترل کننده، شناخت سیستم یا فرآیند مي باشد، با استفاده از قوانین و اصول فیزیکي حاکم بر سیستمهاي الکتریکي، الکترومکانیکي، مکانیکي و هیدرولیکي دستة قابل توجهي از سیستمهاي صنعتي را مورد تجزیه و تحلیل قرار داده و مدل آنها به فرم فضاي حالت بدست آورده شده است. فرم فضاي حالت با بهره گیري از متغیر حالت مبناي اصلي روشهاي مدرن تحلیل و طراحي در سیستمهاي کنترل مي باشد. با توجه به خصوصیت متغیر حالت در فشرده سازي اطلاعات، اهمیت استفاده از آن در مدلسازي سیستمهاي خطي بیان شده است. در تکمیل این بررسي مثالهایي از سیستمهاي مهم حرارتي، شیمیایي و الکترومغناطیسي در بخش مسائل این فصل معرفي مي گردند و با

1 Human machine interface
2 Bode theorem
3 Nyquist criteria

ارائة اصول فيزيكي حاكم، به مدلسازي آنها خواهيم پرداخت. براي مدلسازي سيستمهاي مكانيكي روش لاگرانژ كه مبتني بر معادلات انرژي در اين گونه سيستمها مي باشد به عنوان تكنيكي مؤثر معرفي شده است. همچنين روش عمومي خطي سازي سيستمهاي غير خطي مورد بحث و بررسي قرار گرفته است. در پايان اين فصل با اشاره به اين موضوع كه كلية مدلهاي بدست آمده تنها تقريب غير دقيق رياضي از سيستم واقعي مي باشند، كه ارتباط بين ورودي و خروجي را به فرم معادلات ديفرانسيل مشخص مي سازند، توجه خواننده را به عدم دقتها در مدلسازي معطوف ساخته و انواع نامعيني هاي مدلسازي معرفي شده اند.

در فصل سوّم با هدف بدست آوردن پاسخ سيستمهاي خطي در اثر شرايط اوليه و ورودي معين، خصوصيات سيستمهاي خطي كه به فرم فضاي حالت مدلسازي شده اند، مورد تجزيه و تحليل قرار گرفته است. بدين ترتيب پاسخ سيستم به دو بخش بدون ورودي و بدون شرايط اوليه تجزيه شده است و با توجه به اصل رويهم گذاري سيستمهاي خطي، پاسخ كامل سيستم با تعيين اين دو جزء به صورت مستقل بدست آمده است. در اين راستا ماتريس تبديل حالت سيستم تعريف شده است. اين نمايش نه تنها پاسخ كلية سيستمهاي خطي را به صورت عمومي تعيين مي كند، اهميت بردار متغير حالت را در فشرده سازي اطلاعات ورودي در خود نشان مي دهد. در ادامه، خصوصيات اصلي ماتريس انتقال حالت و مشابهت آن با توابع نمائي نشان داده شده است و روشهاي مختلف تعيين تحليلي و عددي آن بررسي شده اند. در پايان فصل سوّم نيز روشهاي نمايش سيستم به صورت غير مزدوج يا قطري را كه در تسريع عمليات عددي سيستمها حائز اهميت است، با معرفي تبديل همانندي تشريح نموده و در حالت عمومي فرم بلوكي– جوردن معرفي شده است.

در فصل چهارم مفاهيم كنترل پذيري، رؤيت پذيري، پايدار پذيري و آشكار پذيري تشريح شده اند. اپراتور كنترل پذيري در واقع به عنوان نگاشتي بين توابع بي نهايت بعدي ورودي و متغير حالت n بعدي، فشرده سازي اطلاعات ورودي به مقدار اولية متغير حالت را به عهده داشته و در صورتي كه رتبة اين نگاشت كامل باشد سيستم كنترل پذير ناميده مي شود. به صورت دوگان، اپراتور رؤيت پذيري به عنوان نگاشتي خطي بين متغير حالت n بعدي و خروجي بي نهايت بعدي سيستم، عمل كرده و خاصيت رؤيت پذيري در واقع تعداد و چيدمان سنسورهاي لازم را به منظور تعيين وضعيت سيستم در بر مي گيرد. اين دو خصوصيت قبل از طراحي هر نوع كنترل كنندة مدرن براي سيستمهاي خطي بايستي مورد ارزيابي قرار گيرد. با استفاده از تعاريف و قضاياي مربوط به اين خصوصيات، روشهاي تحليل كنترل پذيري و رؤيت پذيري در سيستمهاي خطي ارائه گرديده و ارتباط آن با وجود مودهاي پنهان يا حذف صفر و قطب در نمايش ماتريس تبديل سيستم به بحث كشيده شده است. در انتها با ارائة

روشهاي تجزية سيستم به مودهاي كنترل پذير، رؤيت پذير، كنترل ناپذير و رؤيت ناپذير نحوة تفكيك اجزاء سيستم به فرم كالمن تشريح شده است.

در فصل پنجم با روشهاي تحقق سيستمهاي خطي و روشهاي تحليل پايداري آنها آشنا مي شويم. تحقق سيستم به معناي نمايش يك سيستم به فرم فضاي حالت در صورت معين بودن فرم ماتريس حالت آن مي باشد. از آنجائي كه بر خلاف نمايش ماتريس حالت، فرم فضاي حالت سيستم يكتا نمي باشد، تحقق هاي بسياري براي يك ماتريس تبديل قابل بيان است. از آن جمله تحقق هاي كنترل پذيري، رؤيت پذيري، رؤيتگر، كنترلر و تحقق جوردن مي باشد كه در اين فصل تشريح شده اند، و به خصوصيات اصلي آنها اشاره شده است. فرم جامع تحقق در حالت چند ورودي- چند خروجي نيز در انتها تشريح شده است.

تحليل پايداري سيستمهاي كنترل شرط اوليه و مهم در طراحي هر نوع سيستم كنترلي مي باشد. اين مهم توسط قضاياي مبسوط پايداري كه در فصل پنجم ارائه شده است، بررسي شده است. در ابتدا تعاريف پايداري سيستمهاي غير خطي و خطي را طرف توجه قرار داده ايم و پس از ارائة قضية مهم لياپانوف در تحليل پايداري سيستمهاي غير خطي قضاياي منتج شده براي سيستمهاي خطي ارائه شده است. پايداري داخلي كه مهمترين نوع پايداري سيستمهاي خطي مي باشد، در انتها مورد تجزيه و تحليل دقيق قرار گرفته است.

در فصل ششم اصول طراحي فيدبك حالت با دو روش جايابي قطب و كنترل بهينة LQR ارائه شده است. در اين فصل ابتدا اهداف عمومي طراحي كنترلر براي سيستمهاي صنعتي را بر شمرده، و حفظ پايداري سيستم به علاوه مسئله تنظيم و يا تعقيب، به صورت دقيق تعريف شده است. همچنين نشان داده شده است كه مسئلة تعقيب با تعميم روش تنظيم قابل دستيابي است. لذا در ادامه، حل مسئلة تنظيم توسط دو روش جايابي قطب و كنترلر بهينة LQR ارائه شده است و آلگوريتمهاي مختلف حل عددي اين مسائل نيز تشريح شده اند. در پايان اين فصل به منظور بررسي روشهاي رفع اغتشاش ثابت و متغير در سيستمهاي كنترل به تعميم روش فوق و اضافه نمودن ترم پيش خور رفع اغتشاش و همچنين فيدبك انتگرال حالت پرداخته شده است.

كنترل مدرن سيستمهاي صنعتي مبتني بر فيدبك حالت مي باشد. اين در حاليست كه معمولاً در اين سيستمها كلية حالتهاي سيستم در دسترس نبوده و تنها خروجيهاي خاصي از سيستم مورد اندازه گيري واقع مي شوند. در فصل هفتم ايدة تخمين متغيرهاي حالت از روي خروجيهاي سيستم بسط داده شده است. رؤيتگر حالت به عنوان سيستم ديناميكي كه مبتني بر مشخصات سيستم و متغيرهاي خروجي تشكيل مي شود، نياز طراح را به اندازه گيري كلية متغيرهاي حالت مرتفع مي سازد و متغيرهاي تخمين زده شده را در حلقة فيدبك استفاده

مي نمايد. علي رغم اينكه رؤيتگر حالت بدين منظور در ادبيات كنترل مدرن معرفي شده است، به خاطر ويژگيهاي منحصر بفرد خود، مورد مقبوليت و استفاده در بسياري از كاربردهاي ديگري كه به نوعي فيلتر سازي يا پيش بيني مورد نياز است، قرار گرفته است. حل مسئلة رؤيتگر حالت، خوشبختانه دوگان حل مسئلة فيدبك حالت بوده، و كلية روشهاي تشريح شده در تعيين بهرة فيدبك حالت، به صورت متناظر در حل مسئلة رؤيتگر حالت نيز مورد استفاده قرار مي گيرد. بدين ترتيب روشهاي جايابي قطب و رويتگر بهينة فيدبك حالت كه به فيلتر كالمن مشهور است تشريح شده اند. در ادامه اين فصل رويتگرهاي با كاهش مرتبه يا لوئنبرگر نيز مورد بررسي قرار گرفته است. و در پايان با تركيب رؤيتگر حالت و فيدبك حالت خصوصيات استفاده از متغير حالت تخمين زده شده در حلقة فيدبك بررسي شده است.

در كلية بخشها با ارائة مثالهاي صنعتي نحوه عملي تنظيم كنترل كنندة فيدبك حالت و بررسي عملكرد سيستم حلقه بسته با مشابه سازيهاي كامپيوتري محقق شده است. و با ارائه مثالهاي صنعتي همانند فصول قبل، نحوة تنظيم پارامترهاي كنترل كننده و رؤيتگر و همچنين بررسي عملكرد سيستم حلقه بسته صورت پذيرفته است.

۱–۵) جمع بندي

در اين فصل ابتدا ضرورت و مشخصات سيستمهاي كنترل معرفي شده و با ارائة مثالهاي مختلف صنعتي و اجتماعي علّت اصلي استفاده از سيستمهاي كنترل تشريح گشته است. سپس عناصر اصلي سيستمهاي كنترل در قالب عناصر فيزيكي و مفهومي در اين گونه سيستمها معرفي شده و روش طراحي عمومي سيستمهاي كنترل بيان شده است. بدين ترتيب و با توجه به نحوة نگرش طراح به اين مسائل، روشهاي طراحي به دو دستة كلاسيك و مدرن تقسيم شده است. با توجه به محتوي اين كتاب نحوة ارائة روش مدرن طراحي كنترلر كه در ساير فصول اين كتاب به تشريح آنها خواهيم پرداخت، به صورت خلاصه معرفي گرديده است.

مراجع

[1] Bélanger, Pierre., *Control engineering: a modern approach,* Saunders College Pub., c1995.

[2] Brogan, William L., *Modern control theory,* 3rd ed. Englewood Cliffs, N.J., Prentice Hall, c1991.

[3] Callier, Frank M. and Charles A. Desoer, *Linear system theory*,

Springer-Verlag, c1991.

[4] Chen, Chi-Tsong., *Linear system theory and design*, Oxford University Press, c1999.

[5] Dorf, Richard C. and H. Bishop, *Modern control system,* Upper Saddle River, NJ : Prentice Hall, 2001.

فصل دوم

نمايش سيستمهاي خطي

فصل دوم: نمایش سیستمهای خطی

۲–۱) مقدمه

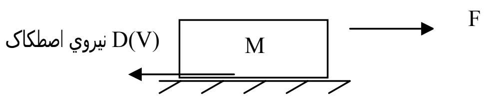
نقطة شروع طراحي کنترل کننده براي سيستمهاي خطي دانستن مشخصات فيزيکي و يا مـدل رياضي سيستم مي باشد. در طراحي هاي کلاسـيک از مـدل هـاي فرکانسـي يـا توابـع تبـديل سيستم استفاده مي شود، درحاليکه در ديدگاه مدرن در فضاي زماني و از معادلات ديفرانسـيل براي مدلسازي سيستمهاي ديناميکي بهره مي بريم. در اين راستا توصيف فضاي حالـت تصـوير کاملي از ديناميک داخلي سيستم را توليد مي کند. اين مدل نشـان مـي دهـد کـه متغيرهـاي داخلي سيستم چگونـه بـا هـم تـداخل کـرده و رابطـة ورودي سيسـتم بـر خروجـي از طريـق متغيرهاي حالت مشخص مي شود. اين روش داراي اين مزيت است که سيستمهاي غيرخطـي، سيستمهاي متغير با زمان و سيستمهاي چند ورودي – چند خروجـي را مـي تـوان توسـط آن مدلسازي نمود.

۲–۲) نمایش فضای حالت

بسياري از سيستمها را مي توان توسط يک دستگاه معادلات ديفرانسيل مرتبـة يـک مدلسـازي نمود.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \qquad (۲\text{-}۱)$$

اجازه دهيد با يک مثال ساده شروع کنيم: حرکت جرم M را تحت نيروي F مطابق شکل زير درنظر بگيريد.



شکل (۲–۱) حرکت با اصطکاک یک جرم M

از قانون دوّم نيوتن استفاده مي كنيم:

$$M\frac{dv}{dt} = F - D(v) \qquad (۲-۲)$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{M} - \frac{D(v)}{M} \qquad (۳-۲)$$

لذا معادلات حالت به صورت زير نوشته مي شود:

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{F}{M} - \dfrac{D(v)}{M} \\ \dfrac{dx}{dt} = v \end{cases} \qquad (٤-۲)$$

دقت كنيد دو معادلة فوق از اصول فيزيكي مختلف يعني قانون دوم نيوتن و تعريف سرعت مكانيكي بدست آمده اند, اما هر دو شكل مشتركي دارند و معادلة ديفرانسيل رتبة اول مي باشند. اين دستگاه معادلات درجة يک به صورت طبيعي مدل رياضي از سيستم توليد مي كند، كه خصوصيات اين مدل با توجه به وجود تابع غيرخطي از سرعت D(v), غيرخطي مي باشد. در حالت كلي بسياري از مدلهاي سيستمهاي مختلف صنعتي را مي توان به صورت دسته اي از معادلات ديفرانسيل مرتبة اول نمايش داد. كه به آن *معادلات حالت* سيستم گفته مي شود.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, u_1, u_2, \ldots, u_r, t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, u_1, u_2, \ldots, u_r, t) \\ y_1 &= h_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, u_1, u_2, \ldots, u_r, t) \\ &\vdots \\ y_m &= h_m(x_1, x_2, \ldots, x_n, u_1, u_2, \ldots, u_r, t) \end{aligned} \qquad (۵-۲)$$

كه در آن $u_1, u_2, \ldots, u_r$ وروديهاي سيستم و $y_1, y_2, \ldots y_m$ خروجيهاي سيستم مي باشند، كه اندازه گيري شده و در دسترس مي باشند.

شكل (۲-۲) نمايش سيستم به صورت ورودی-خروجی

اين در حاليست كه متغيرهاي $\mathbf{x} = x_1, x_2, \ldots x_n$ را *"متغيرهاي حالت"* سيستم مي ناميم. اين متغيرها رفتار ديناميكي سيستم را به صورت كامل مشخص مي كنند. براي مثال قبل مي توان متغيرهاي تعريف شده را به صورت زير مشخص نمود:

$$\text{متغیرهای حالت} \quad \begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = v = \dfrac{dx}{dt} \end{cases} \qquad (٦-۲)$$

$$\text{ورودی} \quad u = F \qquad (۷-۲)$$

$$\text{خروجی} \quad y = x \qquad (۸-۲)$$

خروجي سيستم متغيري است كه به لحاظ كنترلي مهم بوده (معمولاً كنترل مـي شـود) و لـذا مورد اندازه گيري قرار مي گيرد. در اين مثال ميزان جابجائي بلوک بـراي مـا اهميـت دارد. لـذا معادلات حالت به صورت زير نمايش داده مي شوند:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 = f_1(x_1, x_2, u_1) \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{D(x_2)}{M} + \dfrac{u}{M} = f_2(x_1, x_2, u_1) \end{cases} \qquad (۹-۲)$$
$$y = x_1 = h(x_1, x_2, u_1)$$

لذا همانگونه كه در اين مثال مشاهده مي شود متغيرهاي حالت به صورت طبيعـي از معـادلات ديفرانسيل حاكم بر سيستم قابل انتزاع مي باشند. درحالت كلي معادلات ديفرانسيل حـاكم بـر سيستمها به فرم زير مي باشد.

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\ \mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \end{cases} \qquad (۱۰-۲)$$

در اين مثال توابع f_i تابعي از زمان نبوده لذا اين توابع را*غير متغير با زمان*[1] مي نامند. عـلاوه بر آن اگر توابع h_i, f_i نسبت به متغيرهـاي x, u خطـي باشـند, سيسـتم نهـائي را "سيسـتم خطي غير متغير با زمان" يا LTI[2] مي ناميم. درصورتي كه توابع h, f برحسب x, u, t خطـي باشند اين معادله به فرم ماتريسي متغير با زمان زير تبديل مي شود.

[1] Time invariant
[2] Linear Time invariant

$$\begin{cases}\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{A}(t)\mathbf{x}+\mathbf{B}(t)\mathbf{u}\\ \mathbf{y}(t)=\mathbf{C}(t)\mathbf{x}+\mathbf{D}(t)\mathbf{u}\end{cases} \qquad (۲-۱۱)$$

جالب توجه است كه اين دستگاه معادلات ديفرانسيل در كلي ترين فرم خـود (معادلـه ۲-۱۰) درصورت وجود شرايط بسيار ملايم Lipschitz داراي پاسخ يكتـا مـي باشـد. شـرط Lipschitz ترجمة رياضي وجود رابطة علت و معلول يا علّي بودن[1] سيسـتم مـي باشـد و از لحـاظ رياضـي بدين صورت تعبير مي شود كه شيب توابع h,f نسبت بـه متغيرهـاي خـود x,u,t در هـيچ جاي فضا نامتناهي نشود. اين خصوصيت در كلية سيستمهاي فيزيكي برقرار بوده لذا با استفاده از قوانين فيزيكي حاكم بر سيستمها همانند قانون بقاي انرژي, قانون بقاي اندازه حركت خطـي يا زاويه اي, قانون بقاي جرم و . . . مـي تـوان بـه صـورت طبيعـي معـادلات حالـت حـاكم بـر سيستمها را تعيين نمود. مثالهاي متنوعي در اين مورد در ادامه مورد بررسي قرار مي گيرد.

اما ويژگي اصلي متغيرهاي حالت $\mathbf{x}=x_1,\dots x_n$ چيست؟

براي پاسخ به اين سئوال به تعبير رياضي اين متغيرها و نقـش اساسـي آنهـا در حـل معـادلات ديفرانسيل مي پردازيم. در ابتدا بايستي توجه داشت كه يک سيستم مي تواند تنهـا داراي يـک ورودي و يک خروجي باشد (SISO)[2] اما تعداد متغيرهاي حالت آن ۲، ۳ و يا حتي n باشد.

شكل (۲-۳) نمايش سيستم به صورت ورودی-خروجی با متغير حالت

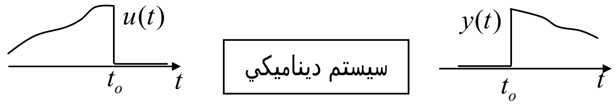
مشخصة اصلي متغيرهاي حالت اينست كـه متغيرهـاي مسـتقلي مـي باشـند كـه توسـط آنهـا مي توان رابطة بين ورودي و خروجي را توسط معـادلات حالـت تعيـين نمـود. اگـر بـا ديـدگاه نگاشت به سيستم نگاه كنيم، سيستم ديناميكي يک تابع رياضي يا يک نگاشت رياضي است كه ورودي u(t) را به خروجي y(t) مرتبط مي سازد.

$$S:\mathbf{u}(t)\rightarrow\mathbf{y}(t) \qquad (۲-۱۱)$$

لذا بعد اين تابع بينهايت بوده و يک تابع زماني u(t) در بازة زماني $+\infty$ تا $-\infty$ را به يک تـابع زماني $+\infty$ تا $-\infty$ بايستي تبديل كند. متغير حالت پل واسطي است بين اين نگاشـت بـدين

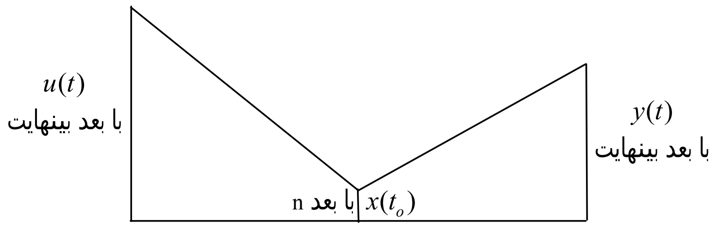
[1] Causality
[2] Single input single output

ترتيب كه اگر بخواهيم خروجي سيستم را در لحظة t_0 به بعد بيابيم و فرض كنيم از اين لحظه به بعد ورودي سيستم صفر است تا ديناميک خود سيستم عمل نمايد، $\mathbf{x}$ متغيرهـاي مسـتقلي است كه در لحظة t_0 يعني $\mathbf{x}(t_0)$ كلية اطلاعات ديناميكي ورودي سيستم را $u(t)\big|_{-\infty}^{t_0}$ را در خود داشته و براي اينكه خروجي از اين لحظه به بعد را داشته باشيم كافي است تنها $x(t_0)$ را داشته باشيم.



شكل (۲-۴) مشخصات ورودی-خروجی سيستم و ارتباط آن با متغير حالت

بدين ترتيب كلية اطلاعات يك متغير با بعد بينهايت $u(t)$، در يک متغير داراي بعد محدود n فشرده مي شود و ديگر نيازي به نگهداري اين مقدار اطلاعات وجود ندارد. لذا نوشتن معـادلات ديفرانسيل سيستم برحسب متغيرهاي حالـت در واقـع نگاشـتي اسـت كـه يـک تـابع بـا بعـد بينهايت $u(t)$، را به يک تابع با بعد n $x(t_o)$، تبديل نموده و آنرا قابـل اسـتفاده بـراي تعيـين تابع با بعد بينهايت $y(t)$ مي سازد. اين فشرده سازي اطلاعات نه تنها از لحاظ فيزيكـي داراي اهميت است بلكه توسط محاسبات عددي و كامپيوتري كمک زيادي به حل معـادلات (تعيـين $y(t)$) خواهد نمود.



شكل (۲-۵) تعبير سيستم به صورت نگاشت رياضی

۲-۳) مدلسازی سيستم بر اساس اصول فيزيكی

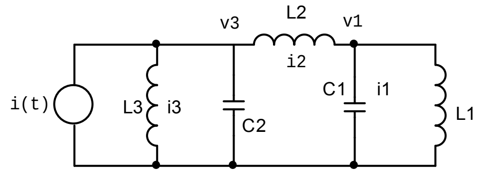
با توجه به توضيحات فوق مي توان با استفاده از قوانين فيزيكـي حـاكم بـر سيسـتمها هماننـد قانون بقاي انرژي, قانون بقاي اندازه حركت خطي يا زاويه اي, قانون بقاي جرم و . . . به صورت

طبيعي معادلات حالت حاكم بر سيستمها را بدست آورد. در ادامه سيستمهاي مختلفي را با توجه به ماهيت فيزيكي آنها مورد بررسي قرار داده و معادلات حالت سيستم را بدست مي آوريم.

۲-۳-۱) سيستمهای الکتريکی

با استفاده از قوانين ولتاژ و جريان معادلات حالت سيستمهاي الكتريكي تعيين مي گردند. با ارائة يك مثال نحوة تعيين اين معادلات را مرور مي كنيم.

مثال (۲-۱) مدار الكتريكي زير را درنظر بگيريد:



شكل (۲-۶) مدار الکتريکی

با استفاده از قوانين جريان ولتاژ مي توان نوشت:

$$\begin{aligned} v_1(t) &= L_1 \frac{di_1}{dt} \\ v_2(t) &= L_2 \frac{di_2}{dt} + v_1(t) \\ v_2(t) &= L_3 \frac{di_3}{dt} \\ i_2(t) &= c_1 \frac{d}{dt} v_1(t) + i_1(t) \\ i(t) &= i_3(t) + C_2 \frac{d}{dt} v_2(t) + i_2(t) \end{aligned} \qquad (۲-۱۲)$$

با نوشتن معادلة حلقة دربرگيرندة L_3, L_2, L_1 و انتگرال گيري از آن داريم:

$$L_3 i_3(t) = L_2 i_2(t) + L_1 i_1(t) + k \qquad (۲-۱۳)$$

كه در آن k ثابت انتگرال گيري و تابعي از شرايط اوليه است، كه با شرايط اولية صفر k=0 خواهد شد. اين معادله نشان مي دهد كه جريان يک سلف مستقل نبوده و تابعي از جريان

سلفهاي ديگري است. لذا عليرغم وجود پنج المان ذخيره و تبديل انرژي L_1, L_2, L_3, C_1, C_2، چهار متغير حالت براي نمايش معادلات سيستم كافي است اين چهار متغير را به صورت زير بر حسب جريانهاي سلف و ولتاژهاي خازن انتخاب مي كنيم.

$$\begin{aligned} x_1(t) &= v_1(t) \qquad & x_3(t) &= i_1(t) \\ x_2(t) &= v_2(t) \qquad & x_4(t) &= i_2(t) \end{aligned} \qquad (۲-۱۴)$$

با حذف جريان وابسته i_3 خواهيم داشت:

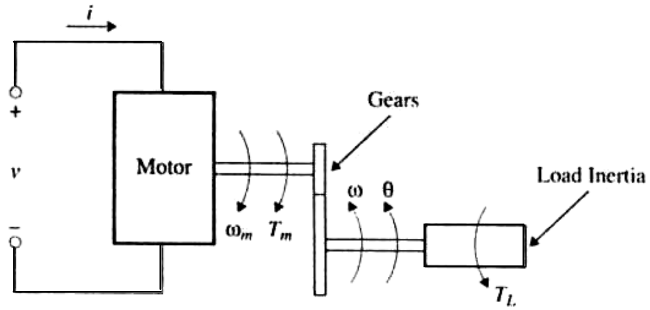
$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \\ \dot{i}_1 \\ \dot{i}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{C_1} & \frac{1}{C_1} \\ 0 & 0 & -\frac{L_1}{L_3 C_2} & -\frac{L_2 + L_3}{L_3 C_2} \\ \frac{1}{L_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{L_2} & \frac{1}{L_2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{C_2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \qquad (۲-۱۵)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

در اينحالت ورودي سيستم جريان منبع i درنظر گرفته شده و خروجي سيستم ولتاژ v_1 مي باشد.

۲-۳-۲) سيستمهای الکترومکانيکی

مثال (۲-۲) موتور DC مغناطيس دائم

يكي از سيستمهاي بسيار متداول در كنترل اجزاء مختلف فرآيندهاي صنعتي و روباتيک موتور DC مي باشد. در اين مثال موتور DC با هستة مغناطيس دائم را بررسي مي كنيم. كنترل دور اين موتور كه به جعبه دنده مجهز است توسط ولتاژ آرميچر آن صورت مي پذيرد. فرض نمائيد از اين سيستم براي كنترل زاوية حركتي يک ضد هوائي استفاده شود كه داراي ممان اينرسي J مي باشد. همچنين كلية اغتشاشات وارد بر سيستم و ديناميكهاي مدل نشده به صورت گشتاور خارجي T_L مدل شده است.



شكل (۲-۷) سرو موتور DC

ورودي و خروجي: ولتاژ آرميچر موتور v و گشتاور اغتشاشي T_L دو ورودي كنترلي و اغتشاشي سيستم مي باشند.

خروجي سيستم: خروجي سيستم زاوية ميز ضد هـوائي θ يـا سـرعت زاويـه اي آن بسـته بـه كاربرد $\omega=\dot{\theta}$ مي باشد.

اصول فيزيكي حاكم بر سيستم هاي الكترو- مكانيكي

جعبه دنده با نسبت تبديل N وسـيله ايسـت بـراي كـاهش دور موتـور و افـزايش گشـتاور آن، درحالت ايده آل:

$$N=\frac{\omega_m}{\omega} \quad or \quad N=\frac{\theta_m}{\theta} \; \frac{\text{زاوية موتور:}}{\text{زاوية بار:}} \qquad (۱۶-۲)$$

درصورتيكه گشتاورهاي تلفات و اصطكاك در جعبه دندة وجود نداشته باشد:

$$\frac{1}{N}=\frac{T_m}{T} \qquad (۱۷-۲)$$

گشتاور توليد شده توسط موتور T_m در موتورهاي DC با مغناطيس دائم برابر است با:

$$T_m=K_1\cdot\phi\cdot i=K_m\cdot i \qquad (۱۸-۲)$$

كه در آن ϕ شار مغناطيسي بوده كـه در موتـور مغنـاطيس دائـم مقـدار ثـابتي اسـت. موتـور الكتريكي داراي مقاومت الكتريكي R و اندوكتانس L مي باشد و ولتـاژ ضـدمحركه[1] در آن نيـز متناسب با سرعت موتور مي باشد.

$$v_{Emf}=K_2\cdot\phi\cdot\omega_m=K_m\cdot\omega_m \qquad (۱۹-۲)$$

[1] Back electro-motive force (Emf)

درصورتيكه از واحدهاي SI استفاده شود K_1 برابر K_2 و دو رابطة فـوق بـا يـك ضـريب K_m قابل نمايش مي باشند. ممان اينرسي موتور نيز J_m فرض مي شود.

- مدلسازي: قانون دوم نيوتن (يا قانون اويلر براي حركتهاي زاويه اي) را اعمال مي كنيم.

$$J_m\dot{\omega}_m=T_m-T_e \qquad (۲۰-۲)$$

كه در آن T_e گشتاور منتقل شده از طرف موتور به سمت بار مي باشد. در واقع گشتاور اينرسي حركتي موتور $J_m\dot{\omega}_m$ از ميزان گشتاور توليدي موتور $T_m=K_m i$ كم مي شود.

لذا

$$T_e=-J_m\dot{\omega}_m+T_m \qquad (۲۱-۲)$$

قانون اويلر را در سمت بار هم استفاده مي كنيم.

$$\begin{aligned} J\cdot\dot{\omega}&=NT_e-T_L \\ &=NT_m-NJ_m\dot{\omega}_m-T_L \end{aligned} \qquad (۲۲-۲)$$

با توجه به اثر جعبه دنده: $(\omega_m=N\omega)$ خواهيم داشت:

$$\underbrace{(J+N^2J_m)}_{J_e}\dot{\omega}=NT_m-T_L$$

دقت كنيد J_e ممان اينرسي معادل بار و موتور مي باشد و با توجه به ترم N^2 , هر ميزان كـه ممان اينرسي موتور نسبت به بار كوچك باشد تأثير آن در ديناميك مجموعه و J_e با توان دوم ضريب يا نسبت جعبه دنده افزايش مي يابد. اين دليل اصلي عدم صرفنظر از ديناميك موتور (و درحالت عمومي خطي شدن معادلات حركت سيستمهاي روباتيـك) مـي باشـد. لـذا در نهايـت خواهيم داشت:

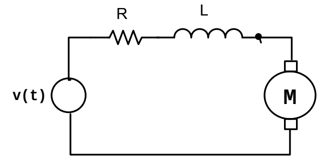
$$J_e.\dot{\omega}=NT_m-T_L \qquad (۲۳-۲)$$

معادلة حالت اول:

$$\boxed{\dot{\omega}=\frac{1}{J_e}(N\cdot K_m\cdot i-T_L)} \qquad (۲۴-۲)$$

معادلة مدار الكتريكي را نيز مي نويسيم:

$$L\frac{di}{dt}+Ri=v-v_{emf} \qquad (۲۵-۲)$$



شکل (۲-۸) مدار الکتریکی معادل موتور DC

معادلة حالت دوم:

$$\boxed{\frac{di}{dt}=-\frac{R}{L}i+\frac{1}{L}v-\frac{NK_m}{L}\cdot\omega}$$ (۲۶-۲)

و آخرين معادلة حالت نيز رابطه سرعت زاويه اي است:

$$\boxed{\dot{\theta}=\omega}$$ (۲۷-۲)

خوشبختانه معادلات حالت همگي خطي مي باشند و به فرم ماتريسي زير قابل نمايش مي باشند.

$$\begin{cases}\dot{\mathbf{x}}=A\mathbf{x}+B\mathbf{u}\\ \mathbf{y}=C\mathbf{x}\end{cases}$$ (۲۸-۲)

که در آن:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\theta\\ \omega\\ i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & NK_m/J_e\\ 0 & -NK_m/L & -R/L\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta\\ \omega\\ i\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & -1/J_e\\ 1/L & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v\\ T_L\end{bmatrix}$$ (۲۹-۲)

درصورتيکه هم θ و هم ω را به عنوان خروجيهاي سيستم اندازه گيري کنيم.

$$\begin{bmatrix}\theta\\ \omega\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta\\ \omega\\ i\end{bmatrix}$$ (۳۰-۲)

که در آن $\mathbf{x}=\begin{bmatrix}\theta\\ \omega\\ i\end{bmatrix},\quad \mathbf{u}=\begin{bmatrix}v\\ T_L\end{bmatrix},\quad \mathbf{y}=\begin{bmatrix}\theta\\ \omega\end{bmatrix}$ درنظر گرفته شده است.

- مشابه سازي

با دانستن مقادير عددي پارامترهاي سيستم ماتريسهاي C,B,A را به صورت عددي محاسبه مي کنيم.

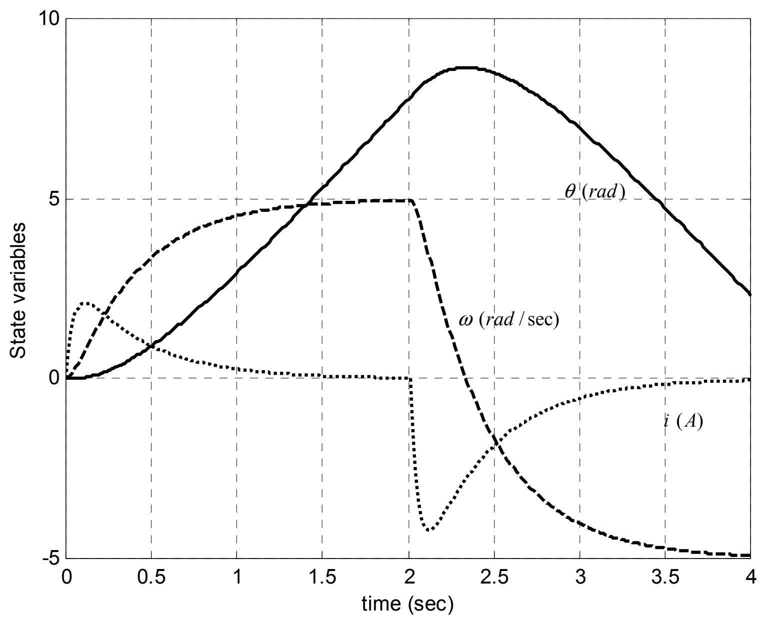
$$K_m=0.05Nm/A,\ \ R=1.2\Omega,\ \ L=0.05H,$$
$$J_m=8\times10^{-4}Kgm^2,\ \ J=2\times10^{-2}Kgm^2,\ \ N=12$$

$$\Rightarrow A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 4.438\\ 0 & -12 & -24\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & -7.396\\ 20 & 0\end{bmatrix},C=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$ (۳۱-۲)

با استفاده از نرم افزار Matlab و توابع (Lsim, ode45, . . .) يا بستة نرم افزاري Simulink مي توان براي هر شرايط اوليه خاص (در اينجا صفر) و ورودي مشخص به عنوان مثال:

$$v(t)\begin{cases}3 & 0\le t<2\\ -3 & 2\le t<4\end{cases}$$

سيستم را مشابه سازي نمود و تغييرات متغيرهاي حالت را برحسب زمان مطابق شکل (۲-۹) ترسيم نمود.

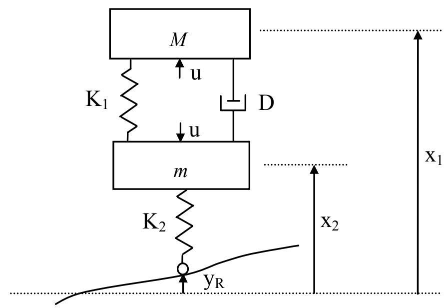


شکل (۲-۹) پاسخ های سیستم سرو موتور DC

۲-۳-۳) سیستمهای مکانیکی

مثال (۲-۳) سیستم تعلیق فعال اتومبیل

شکل (۲-۱۰) سیستم تعلیق فعال یک اتومبیل را نمایش مي دهد. در این مدل که به مدل يك چهارم سیستم تعلیق خودرو مشهور است، تنها حرکت عمودي خودرو با جرم M بـا متغیـر x_1 مشخص شده است. اکسل خودرو نیز داراي جـرم m و جابجـائي عمـودي x_2 مـي باشـد تـاير خودرو با ضریب سختي K_2 و فنر و کمک فنر خودرو با ضرایب سختي K_1 و ضریب استهلاک ویسکوز (خطي) D مدل شده اند. علاوه بر وجود فنر و کمک فنر هماننـد سیسـتمهاي متـداول تعلیق خودرو (تعلیق غیرفعال) یک عملگر هیدرولیکي یا نیوماتیکي نیروي u را به بدنۀ خـودرو اعمال مي کند که از نوسانات خودرو جلوگیري نماید. نـاهمواري جـاده را بـا ورودي اغتشاشـي y_R نمایش داده ایم.



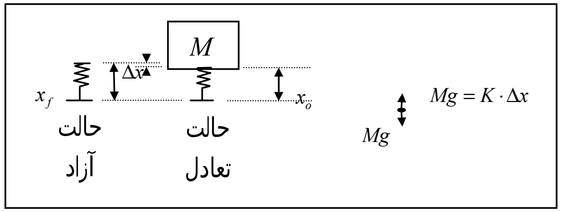
شکل (۲-۱۰) مدل یک چهارم خودرو و سیستم تعلیق فعال آن

ورودي و خروجي: u ورودي عملگر سیستم تعلیق فعال مي باشد که به صـورت ورودي کنتـرل شده عمل کرده و اغتشاش جاده y_R به صورت ورودي اغتشاشي به سیستم اعمـال مـي شـود. خروجي مورد نظر در این سیستم نوسانات خودرو x_1 مي باشد که بایستي به حداقل برسد.

اصول فیزیکي حاکم:

نیروي فنر به صورت خطي $F = K \cdot \Delta x$ و نیروي کمک فنـر بـه صـورت اسـتهلاک ویسـکوز $F = D \cdot \Delta \dot{x}$ عمل مي کند. معادلات حاکم بر سیستم, معادلات نیـوتن مـي باشـد. در اینجـا

نکته اي در مورد حالت آزاد فنر بایستي مورد توجه قرار گیرد. زمانیکـه جرمـي روي فنـر قـرار مي گیرد آنرا از حالت آزاد به اندازۀ Δx جابجا مي کند. اگر در این حالت طول فنر را در حالت تعادل با x_o مشخص کنیم در این حالت نیروي وزن با نیروي فنر خنثي شده است.

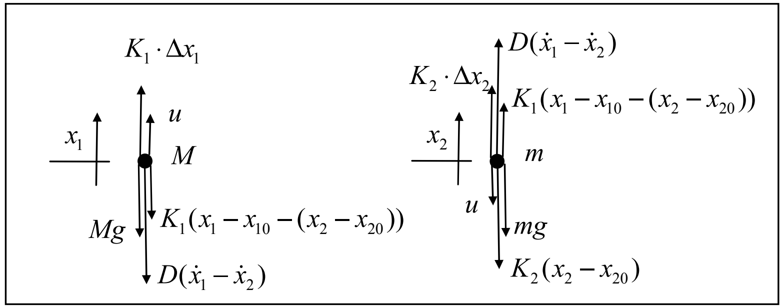


شکل (۲-۱۱) حالت تعادل فنر و برابری نیروهای آن

لذا در صورتیکه حالت تعادل فنر را مبناي اندازه گیري نیرو هـاي ایجـاد شـده در فنـر در نظـر بگیریم، مي توان با حذف این دو نیروي اولیه مجموع نیروهاي خارجي وارد بر سیستم را بدست آورد.

- مدلسازي

دیاگرام آزاد نیروها را براي دو جرم M, m رسم مي کنیم.



شکل (۲-۱۲) دیاگرام آزاد نیروها را برای دو جرم M, m در سیستم تعلیق فعال اتومبیل

قانون نیوتن را اعمال مي کنیم:
$$M \frac{dv}{dt} = \sum F_{ext}$$

$$\begin{aligned} M\frac{dv_1}{dt} &= -K_1(x_1 - x_2 - x_{10} + x_{20}) - D(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + u \\ m\frac{dv_2}{dt} &= K_1(x_1 - x_2 - x_{10} + x_{20}) + D(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - u - K_2(x - x_{20} - y_R) \end{aligned} \qquad (۳۲\text{-}۲)$$

كه در آن x_{10}, x_{20} مقادير ثابتي مي باشند. با در نظر گرفتن مبدأ سنجش جابجائي فنرها از حالت تعادل آنها $x_{10} = x_{20} = 0$ مي باشد. لذا معادلات حالت را مي توان به صورت زير بازنويسي نمود.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = v_1 \\ \dot{x}_2 = v_2 \\ \dot{x}_3 = \dot{v}_1 = \dfrac{1}{M}[-K_1x_1 + K_1x_2 - D\dot{x}_1 + D\dot{x}_2] + \dfrac{1}{M}u \\ \dot{x}_4 = \dot{v}_2 = \dfrac{1}{m}[K_1x_1 - K_1x_2 + D\dot{x}_1 - D\dot{x}_2] - \dfrac{u}{m} - \dfrac{K_2}{m}x + \dfrac{K_2}{m}y_R \end{cases} \qquad (۳۳\text{-}۲)$$

معادلة خروجي عبارتست از:

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \qquad (۳۴\text{-}۲)$$

با درنظر گرفتن مقادير عددي زير:

$$M = 300Kg, m = 50Kg, K_1 = 3\times10^3\ N/m, K_2 = 3\times10^4\ N/m = D = 600\ N/ms^{-1}$$

خواهيم داشت:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -10 & 10 & -2 & 2 \\ 60 & -660 & 12 & -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.0033 \\ -0.02 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 600 \end{bmatrix} y_R \qquad (۳۵\text{-}۲)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

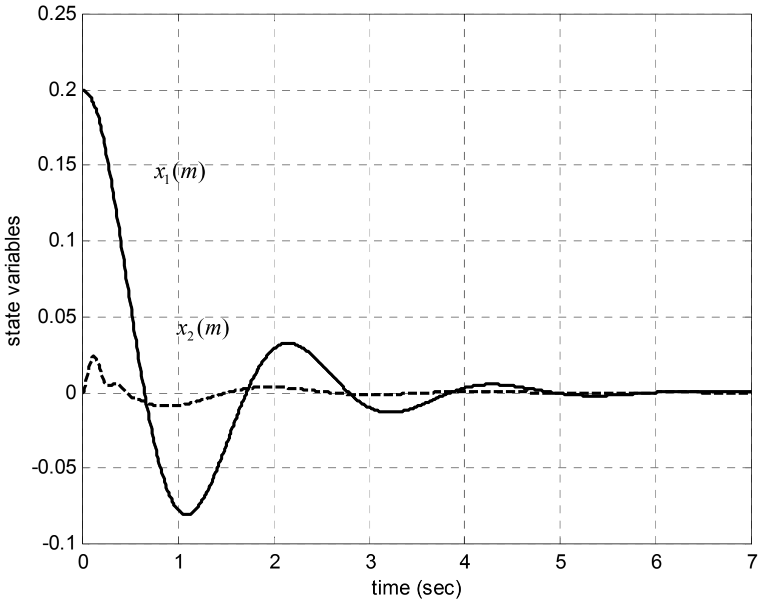
- مشابه سازي: مجدداً با دستور Lsim يا ode45 و يا توسط Simulink با شرايط اوليه و ورودیهاي زير سيستم را مشابه سازي مي نمائيم.

الف) پاسخ سيستم به شرايط اولية زير را بدست آوريد:

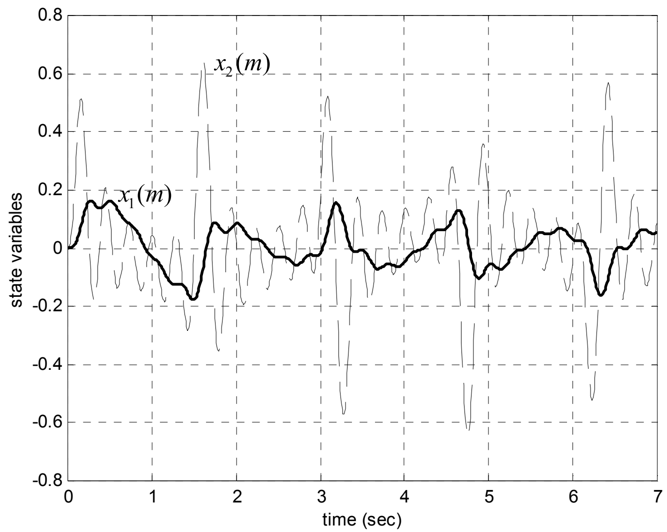
$$\begin{aligned} &x_1(0) = 0.2,\ \ x_2(0) = 0.0 \\ &v_1(0) = v_2(0) = 0 \\ &u(t) = y_r(t) = 0, \qquad 0 \le t \le 7\sec \end{aligned}$$

پاسخ مشابه سازي شده توسط تابع $initial(sys, x_o, t)$ در شكل (۲-۱۳) آورده شده است. همانگونه كه در اين شكل مشاهده مي شود جابجائي بدنة خودرو و محور آن با سرعت مناسبي به سمت حالت تعادل خود ميل مي كنند.

ب) پاسخ سيستم تعليق غير فعال خودرو را به ورودي جاده اي را كه از تركيب چند ورودي سينوسي به صورت زير تشكيل شده است: $y_r(t) = \sum_{n=0}^{4} 0.1\ Sin(5+4n)\cdot t$ را بدست آوريد.
با استفاده از دستور $lsim(sys, u, t)$ پاسخ سيستم به ورودي مورد نظر بدست آمده و در شكل (۲-۱٤) نشان داده شده است كه در آن اغتشاش جاده تا حدّي تضعيف شده است.



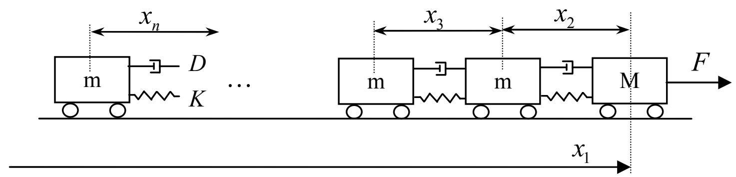
شكل (۲-۱۳) پاسخ سيستم تعليق خودرو به شرايط اوليۀ غير صفر



شكل (۲-۱۴) پاسخ سيستم تعليق خودرو به نوسانات جاده

مثال (۲-۴) قطار

قطاري را درنظر بگيريد كه داراي لوكوموتيو پيشران و تعدادي واگن مي باشد كه در صفحة افق درحال حركت است. واگن ها و لوكوموتيو توسط كوپلينگهاي مكانيكي مشابهي به يكديگر متصل شده اند. هدف كنترلي در اين مثال ثابت نگهداشتن سرعت كلية واگن ها و لوكوموتيو و آناليز نيروي قابل تحمل كوپلينگهاي مكانيكي بين واگنها مي باشد.



شكل (۲-۱۵) مدل قطار و متغيرهاي حالت آن

- ورودي و خروجي

ورودي كنترلي F، نيروي پيشران لوكوموتيو مي باشد. خروجي هاي سيستم نيز با توجه به هدف كنترلي سرعت لوكوموتيو و فاصلة نسبي بين واگنها با هم و واگن اول با لوكوموتيو مي باشد.

- مدلسازي

$$\begin{aligned}
&\text{لوكوموتيو:}\quad M\dot{v}_1 = F_1 - K(x_2 - x_{20}) - D(v_1 - v_2)\\
&\text{امين واگن i:}\quad m\dot{v}_i = K(x_i - x_{io}) + D(v_{i-1} - v_i) - K(x_{i+1} - x_{i+10}) - D(v_i - v_{i+1}) \quad i = 2,3,\dots,N-1\\
&\text{آخرين واگن:}\quad m\dot{v}_N = K(x_N - x_{N0}) + D(v_{N-1} - v_N)
\end{aligned} \tag{۲-۳۶}$$

لذا متغيرهاي حالت را مي توان به فرم زير انتخاب نمود:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= v_1\\
\dot{x}_2 &= v_1 - v_2\\
\dot{x}_3 &= v_2 - v_5\\
&\vdots\\
\dot{x}_N &= v_{N-1} - v_N
\end{aligned} \tag{۲-۳۷}$$

و خروجيهاي سيستم را v_1 و كلية متغيرهاي مياني $x_N,\dots,x_3,x_2$ تشكيل مي دهند. اين انتخاب هدف كنترلي را تأمين مي كند چرا كه سرعت v_1 بايستي كنترل شود و متغيرهاي x_i بايستي محدود بمانند تا نيروي كوپلينگ بين واگنها محدود باقي بماند.

اگر مقادير عددي زير را درنظر بگيريم:

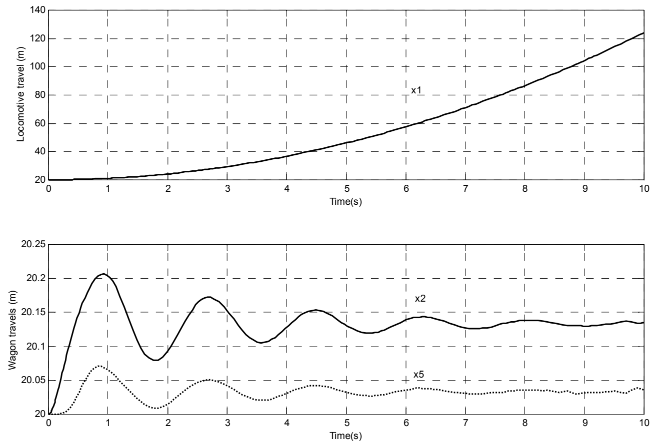
$$M = 2\times 10^5\,Kg,\ \ m = 4\times 10^4\,Kg,\ \ K = 2.5\times 10^6\,N/m,\ \ D = 1.5\times 10^5\,N/ms^{-1}$$

و فاصلة اوليه كلية واگنها را برابر $x_{io} = 20m$ درنظر بگيريم، معادلات حالت به فرم زير خواهند بود.

$$\begin{cases}
\dot{v}_1 = -12.5x_2 - 0.75v_1 + 0.75v_2 + 250 + 0.005F_1\\
\dot{v}_i = 62.5x_i - 62.5x_{i+1} + 3.75v_{i-1} - 7.5v_i + 3.75v_{i+1} \quad i = 2,\dots N-1\\
\dot{v}_N = 62.5x_N + 3.75v_{N-1} - 3.75v_N - 1250
\end{cases} \tag{۲-۳۸}$$

واحد مورد استفاده براى F را KN درنظر گرفته ايم. متغيرهاى حالت اين دستگاه معادلات با افزايش تعداد واگنها افزايش يافته و درنتيجه حجم محاسبات نيز متناسباً بيشتر مي شود.

با در نظر گرفتن N=5 و شرايط اولية $F_1 = 750\ KN, x_i(0) = 20\ m$ مـي تـوان مطـابق شـكل (۲-۱٦) پاسخهاي سيستمها را با استفاده از دستور ode45 در Matlab بدست آورد:



شكل (۲-۱۶) پاسخ مدل ديناميكى قطار به شرايط اولية غير صفر

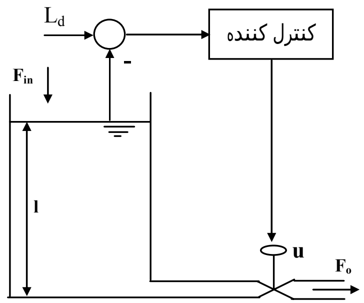
۲-۳-۴) سيستمهاى هيدروليكى

مثال (۲-۵) كنترل سطح تانك

يک مخزن نگهداري آب را با سطح مقطع يكسان درنظر بگيريد. جريان سيال ورودي F_{in} به آن وارد شده و توسط شير كنترلي جريان خروجي آن تنظيم مي شود. هدف سيستم كنترل، ثابت نگهداشتن ارتفاع آب در مخزن مي باشد.

ورودي و خروجي: ورودي كنترلي ميـزان جابجـائي سـوزن[1] شـير كنترلـي: u و جريـان ورودي اغتشاشي F_{in} مي باشد. خروجي مورد نظر سيستم نيز ارتفاع آب در مخزن يا ℓ مي باشد.

[1] Spool



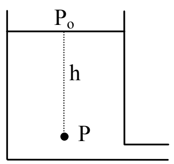
شكل (۲-۱۷) مدلسازى ارتفاع آب در مخزن روباز

- اصول فيزيكي حاكم بر سيستم

۱) اصل بقاي جرم:

تغييرات حجم آب داخل مخزن = حجم آب خروجي از مخزن - حجم آب ورودي به مخزن

۲) نيروي هيدروستاتيكي: فشار آب در هر نقطه معادل وزن ستون آب بالاي آن نقطه است.



$$P = P_0 + \rho g h \qquad (۳۹\text{-}۲)$$

كه در آن P_0 فشار اتمسفر يا فشار گاز فوقاني روي سيال است.

۳) شير كنترل يا اريفيس: جريان عبوري از يک گذرگاه يا اريفيس[1] متناسب با مجذور فشار دو طرف آن و متناسب با سطح عبوري سيال در گذرگاه, يا اريفيس مي باشد.

$$F \propto S\sqrt{\frac{2\Delta P}{\rho}} \qquad (۴۰\text{-}۲)$$

اگر فرض كنيم شير كنترلي داراي سطح مقطع كنترل شونده ايست كه متناسب با حركت سوزن شير تغيير مي كند. در اينصورت مي توان نوشت:

$$F = C' \cdot u\sqrt{\frac{2\Delta P}{\rho}}$$

[1] Orifice

اگر کلية ثابتها را درهم ضرب مي کنيم خواهيم داشت:

$$F = C\cdot u\sqrt{\Delta \mathrm{P}} \qquad (۲\text{-}۴۱)$$

- مدلسازي: از بقاي جرم داريم:

$$\dot{V} = A\frac{d\ell}{dt} = F_{in} - F_o \qquad (۲\text{-}۴۲)$$

از طرفي:

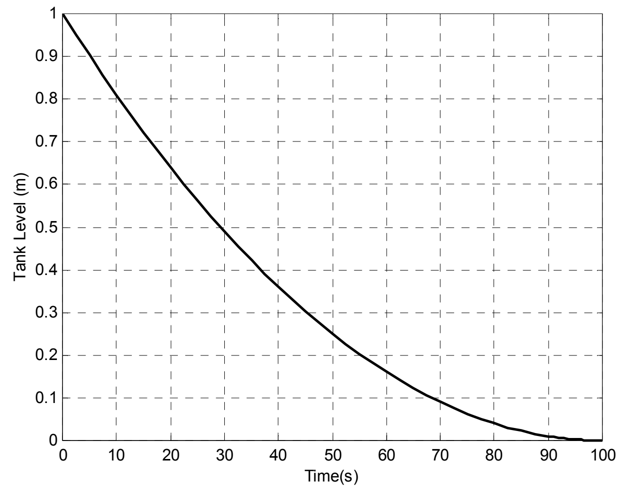
$$\begin{aligned} &F_o = C'u\sqrt{\Delta \mathrm{P}} = Cu\sqrt{P_b - P_a} \\ &P_b = P_0 + \rho g\ell,\ \ P_a = P_0 \qquad \mathrm{P_b} \quad \mathrm{P_a} \\ &\Rightarrow F_o = C'u\sqrt{\rho g \ell} = Cu\sqrt{\ell} \end{aligned} \qquad (۲\text{-}۴۳)$$

لذا معادلة حالت حاکم بر سيستم عبارتست از:

$$\boxed{\frac{d\ell}{dt} = \frac{F_{in}}{A} - \frac{Cu\sqrt{\ell}}{A}} \qquad (۲\text{-}۴۴)$$

اين معادلة ديفرانسيل رستة يک بوده ولي برخلاف کلية مثالهاي ارائه شده قبلي، غيرخطي مي باشد. براي مشابه سازي اين سيستم مي توان از دستور ode45 يا از Simulink استفاده نمود.

- مشابه سازي: با فرض $A = 1\ \mathrm{m}^2;\ \mathrm{C}=2.0\ \mathrm{m}^{3/2}/s$ و $F_{in}=0,\ u(t)=0.01m,\ \ell(0)=1m$ در مدت ۱۰۰ ثانيه پاسخ سيستم مطابق شکل زير مي باشد.



شکل (۲-۱۸) پاسخ مشابه سازی سيستم ارتفاع آب در مخزن روباز

پاسخ سيستم عليرغم شکل ظاهريش، نمائي نبوده چراکه معادلة ديفرانسيل آن غيرخطي است و با تغيير شرايط اوليه شکل فوق تغيير محسوسي خواهد نمود. بسياري از سيستمهاي فيزيکي داراي معادلات غيرخطي مي باشند.

۲-۴) مدلسازي بر اساس روش لاگرانژ

معادلة لاگرانژ روش شناخته شده و بسيار کارآمدي براي مدلسازي سيستمهاي مکانيکي، بخصوص سيستمهايي که از چند جرم تشکيل مي شوند، مي باشد. اين معادله براساس اصل کارمجازي و بقاي انرژي در سيستمهاي مکانيکي بنا شده است. در اين روش با مشخص کردن متغيرهاي تعميم يافته که کلية حرکتهاي مستقل را معرفي مي کنند (q_i)، مي بايست ابتدا انرژي پتانسيل و جنبشي کلية اجزاء سيستم را بدست آوريم. انرژي جنبشي $T(q_i,\dot{q}_i)$ تابعي از متغيرهاي تعميم يافته و مشتقات آنها مي باشد، درصورتيکه انرژي پتانسيل $V(q)$ تنها تابعي از متغيرهاي تعميم يافته مي باشد. براي حرکتهاي صفحه اي اجسام صلب، انرژي جنبشي عبارتست از:

$$T = \frac{1}{2}mv_c^{\,2} + \frac{1}{2}\,{}^cI\omega^2 \qquad (۲\text{-}۴۵)$$

که در آن v_c سرعت مرکز جرم و ${}^cI$ ممان اينرسي جسم حول مرکز جرم آن مي باشد.
براي حرکتهاي سه بعدي خواهيم داشت:

$$T = \frac{1}{2}v_c\cdot P_c + \frac{1}{2}\omega\cdot H_c \qquad (۲\text{-}۴۶)$$

که در آن $\mathrm{P_c}$ اندازه حرکت خطي مرکز جرم و $\mathrm{H_c}$ اندازه حرکت زاويه اي حول مرکز جرم مي باشد. انرژي پتانسيل نيز درصورت وجود فنر و اختلاف ارتفاع به صورت زير تعيين مي شود:

$$V = mgh + \frac{1}{2}Kx^2 + ... \qquad (۲\text{-}۴۷)$$

معادلة لاگرانژ با تعيين لاگرانژين به فرم زير بدست مي آيد:

$$\mathrm{L} = T - V \qquad (۲\text{-}۴۸)$$

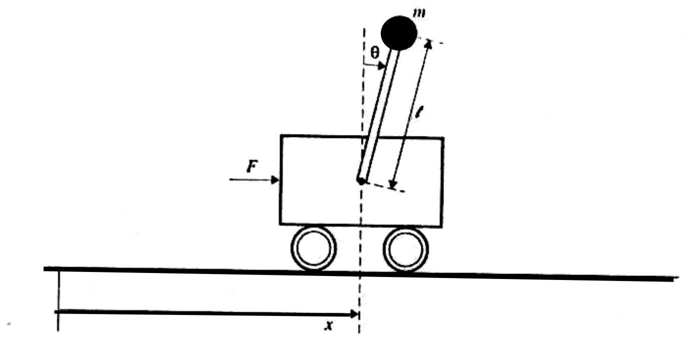
معادلة لاگرانژ:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial q_i} = Q_i \qquad i = 1,2,\ldots,n} \qquad (۲\text{-}۴۹)$$

که در آن Q_i نيروهاي تعميم يافته خارجي وارد بر سيستم در راستاي متغيرهاي q_i مي باشند.

مثال (۲-۶) پاندول معکوس

مطابق شکل زير، يک پاندول معکوس به جرم m و به طول l را درنظر بگيريد که بر روي ارابه به جرم M که حرکت افقي دارد نصب شده است. نيرو کنترل F باعث حرکت M و متعاقباً تعادل پاندول معکوس مي گردد. فرض کنيد ميلة پاندول داراي جرم قابل صرفنظر بوده و هيچگونه اصطکاکي در سيستم وجود نداشته باشد.



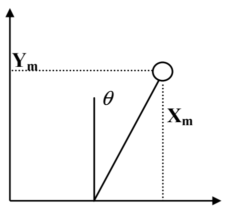
شکل (۲-۱۹) مدلسازي پاندول معکوس توسط روش لاگرانژ

- ورودي و خروجي:

ورودي سيستم نيروي F و خروجيهاي آن زاوية پاندول θ و ميزان جابجائي ارابه x مي باشد.

- مدلسازي توسط معادلة لاگرانژ

متغيرهاي تعميم يافته که حرکت سيستم را به صورت کامل توصيف مي کنند عبارتند از: $x\,,\,\theta$. فرض کنيد سرعت خطي ارابه $\dot{x}$ و سرعت زاويه اي پاندول $\dot{\theta}$ باشد براي تعيين انرژي جنبشي ابتدا سرعت مطلق پاندول را که در اثر حرکت خطي $\dot{x}$ ارابه و حرکت زاويه اي پاندول $\dot{\theta}$ ناشي مي شود، تعيين مي کنيم. ابتدا اندازة موقعيت مطلق جرم را تعيين مي کنيم.



$$X_m = x + \ell\,\sin\theta$$
$$Y_m = \ell\,\cos\theta$$

با مشتق گيري از اين رابطه خواهيم داشت:

$$V_x = \dot{x} + \ell\dot{\theta}\cos\theta$$
$$V_y = -\ell\dot{\theta}\sin\theta$$

لذا انرژي جنبشي کل سيستم برابر است با:

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m({v_x}^2 + {v_y}^2)$$
$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m[(\dot{x} + \dot{\theta}\,\ell\cos\theta)^2 + (-\ell\dot{\theta}\,\sin\theta)^2] \qquad (۲-۵۰)$$
$$T = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(\ell\dot{\theta})^2 + m\dot{x}\dot{\theta}\,\ell\cos\theta$$

از طرفي انرژي پتانسيل تنها در اثر تغيير ارتفاع در جرم پاندول ايجاد مي شود. اگر سطح انرژي پتانسيل ارابه را $V_\circ$ درنظر بگيريم، انرژي پتانسيل مجموعه عبارتست از:

$$V = V_0 + V_0 + mg\ell\,Cos\,\theta \qquad (۲-۵۱)$$

لذا تابع لاگرانژين سيستم عبارتست از:

$$L = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(\ell\dot{\theta})^2 + m\dot{x}\dot{\theta}\,\ell Cos\,\theta - 2V_0 - mg\ell Cos\,\theta \qquad (۲-۵۲)$$

نيروي تعميم يافته در جهت x عبارتست از F ولي به علت عدم تحريک مستقل پاندول نيروي تعميم يافته اي در جهت θ وجود نخواهد داشت. حال معادلة لاگرانژ را در امتداد x,θ مي نويسيم:

- در امتداد x

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = F$$
$$\frac{d}{dt}(M\dot{x} + m\;(\dot{x} + \ell\,\dot{\theta}\;Cos\theta)) - 0 = F$$

لذا معادله نهائي عبارتست از:

$$\boxed{(M+m)\ddot{x} + m\ell\ddot{\theta}\cos\theta - m\ell\dot{\theta}^2\sin\theta = F} \qquad (۲-۵۳)$$

- در امتداد θ

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$
$$\frac{d}{dt}(m\ell\dot{x}\cos\theta + m\ell^2\dot{\theta}) - mg\ell\;\sin\theta = 0 \qquad (۲-۵۴)$$
$$\boxed{m\ell\ddot{x}\cos\theta + m\ell^2\ddot{\theta} - mg\ell\;\sin\theta = 0}$$

با ساده سازي نهائي خواهيم داشت:

$$\boxed{\ddot{x}\, cos\theta + \ell\ddot{\theta} - g\ sin\theta = 0} \qquad (۲\text{-}۵۵)$$

اگر معادلات حركت سيستم را به صورت ماتريسي نمايش دهيم:

$$\begin{bmatrix} M+m & m\ell cos\theta \\ cos\theta & \ell \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F + m\ell\omega^2 sin\theta \\ g\ sin\theta \end{bmatrix} \qquad (۲\text{-}۵۶)$$

اين معادلات به صورت مزدوج بوده و به فرم استاندارد معادلة حالت تعبير نشده اند. با حل اين معادلة ماتريسي بر حسب $\dot{\omega}, \dot{v}$ (بدست آوردن ماتريس معكوس جرمي) معادلات حالت سيستم به فرم زير نوشته مي شوند.

$$\begin{cases} \dot{v} = \dfrac{F + m\ell\omega^2 sin\theta - mg\ sin\theta\, cos\theta}{M + m(1-cos^2\theta)} \\ \dot{\omega} = \dfrac{-F\, cos\theta - m\ell\omega^2 sin\theta\, cos\theta + (M+m)g\ sin\theta}{\ell[M + m(1-cos^2\theta)]} \\ \dot{x} = v \\ \dot{\theta} = \omega \end{cases} \qquad (۲\text{-}۵۷)$$

دقت كنيد دو معادلة اول غير خطي بوده در حاليكه معادلات آخر بر حسب تعريف سرعت خطي زاويه اي به صورت خطي نوشته شده اند. با فرض مقادير عددي:

$$l = 1,\ M = m = 1,\ g = 9.8$$

معادلات حالت سيستم عبارتند از:

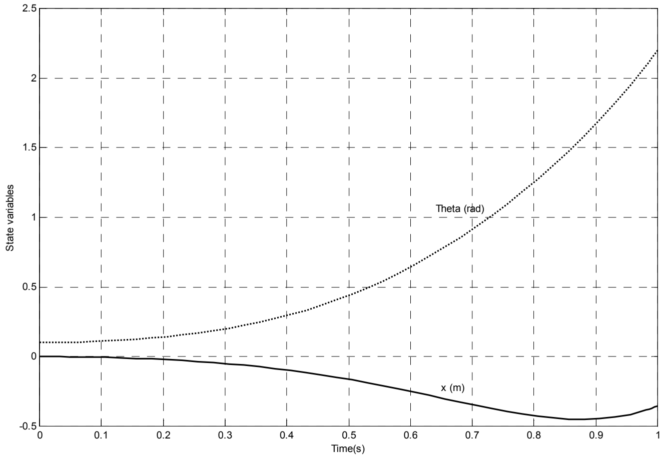
$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{\theta} = \omega \\ \dot{v} = \dfrac{F + \omega^2 sin\theta - 9.8 sin\theta\, cos\theta}{2 - cos^2\theta} \\ \dot{\omega} = \dfrac{-F\, cos\theta - \omega^2 sin\theta\, cos\theta + 19.6 sin\theta}{2 - cos^2\theta} \end{cases}$$

- مشابه سازي

شرايط مشابه سازي به شرح زير است:

$$x(0) = v(0) = \omega(0) = 0,\ \ \theta(0) = 0.1,\ \ F(t) = 0,\ \ 0 \le t \le 1$$

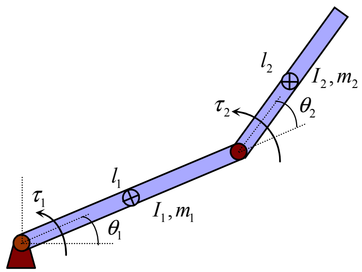
با استفاده از توابع مشابه سازي غير خطي Matlab همانند Ode45 پاسخ مشابه سازي سيستم مطابق شكل زير خواهد بود.



شكل (۲-۲۰) نتايج مشابه سازی سيستم پاندول معكوس

مثال (۲-۷) روبات 2R

يك روبات با دو محور حركتي كنترل شده را در نظر بگيريد. مشخصات هندسي و اينرسي روبات در شكل (۲-۲۱) ارائه شده است. مطلوبست تعيين معادلات حركت سيستم با استفاده از روش لاگرانژ.

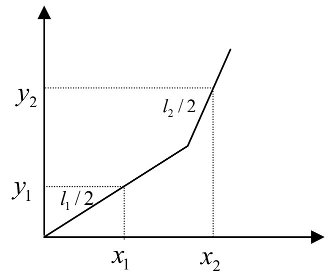


شكل (۲-۲۱) شماتيک روبات دو محورۀ چرخشی 2R

پاسخ: ابتدا متغيرها و نيروهاي تعميم يافته را تعيين مي كنيم.

$$q=\begin{bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad Q=\begin{bmatrix}\tau_1\\ \tau_2\end{bmatrix}$$

براي تعيين انرژي جنبشي روبات، معادلات سرعت بازوها را با استفاده از هندسهٔ حركت تعيين مي كنيم.



$$\begin{cases} x_1 = l_1/2\ \cos\theta_1 \\ y_1 = l_1/2\ \sin\theta_1 \end{cases}$$

با مشتق گيري سرعت مركز جرم بازوي اوّل به صورت زير تعيين مي شود.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -l_1/2\ \dot{\theta}_1\ \sin\theta_1 \\ \dot{y}_1 = l_1/2\ \dot{\theta}_1\ \cos\theta_1 \end{cases}$$

$$\rightarrow \quad v_1^2 = \dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 = \left(l_1/2\ \dot{\theta}_1\right)^2$$

براي مركز جرم بازوي دوّم به صورت مشابه مي توان نوشت.

$$\begin{cases} x_2 = l_1\ \cos\theta_1 + l_2/2\ \cos(\theta_1+\theta_2) \\ y_2 = l_1\ \sin\theta_1 + l_2/2\ \sin(\theta_1+\theta_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = -l_1\ \dot{\theta}_1\ \sin\theta_1 - l_2/2\ (\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)\ \sin(\theta_1+\theta_2) \\ \dot{y}_2 = l_1\ \dot{\theta}_1\ \cos\theta_1 + l_2/2\ (\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)\ \cos(\theta_1+\theta_2) \end{cases}$$

لذا معادلهٔ نهائي سرعت عبارتست از:

$$v_2^2 = \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 = (l_1\ \dot{\theta}_1)^2 + \left[l_2/2\ (\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)\right]^2 + l_1\ l_2\ \dot{\theta}_1\ (\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)\cos\theta_2$$

$$\begin{aligned} T &= T_1 + T_2 \\ &= 1/2\ \mathrm{m}_1 v_{c1}^2 + 1/2\ {}^{c}\mathrm{I}_1\omega_1^2 + 1/2\ \mathrm{m}_2 v_{c2}^2 + 1/2\ {}^{c}\mathrm{I}_2\omega_2^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T =\ & 1/2\ \mathrm{m}_1 (l_1/2\ \dot{\theta}_1)^2 + 1/2\ \mathrm{I}_1\ \dot{\theta}_1^2 + 1/2\ \mathrm{I}_2(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)^2 \\ & + 1/2\ \mathrm{m}_2\left\{(l_1\ \dot{\theta}_1)^2 + \left[l_2/2\ (\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)\right]^2 + l_1\ l_2\ \dot{\theta}_1\ (\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)\cos\theta_2\right\} \end{aligned}$$

معادلهٔ نهائي T عبارتست از:

$$\begin{aligned} T =\ & 1/2\left[\mathrm{m}_1(l_1/2)^2 + \mathrm{I}_1 + \mathrm{m}_2 l_1^2 + \mathrm{m}_2(l_2/2)^2 + \mathrm{m}_2 l_1 l_2\ \cos\theta_2 + \mathrm{I}_2\right]\dot{\theta}_1^2 \\ & + 1/2\left[2\mathrm{m}_2(l_2/2)^2 + \mathrm{m}_2\ l_1 l_2\ \cos\theta_2 + 2\mathrm{I}_2\right]\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \\ & + 1/2\left[\mathrm{m}_2(l_2/2)^2 + \mathrm{I}_2\right]\dot{\theta}_2^2 \end{aligned}$$

معادلهٔ انرژي پتانسيل نيز به شرح زير مي باشد.

$$V = V_0 + m_1 g l_1/2\ \cos(\theta_1) + V_0 + m_2 g l_1\ \cos(\theta_1) + m_2 g l_2/2\ \cos(\theta_1+\theta_2)$$

با تشكيل لاگرانژين به فرم:

$$L = T - V$$

معادلات حالت را با استفاده از معادلهٔ لاگرانژ تعيين مي كنيم:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial q_i} = Q_i \qquad i = 1,2$$

براي $q=\theta_1$ داريم:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}\left\{\left[\mathrm{m}_1(l_1/2)^2 + \mathrm{I}_1 + \mathrm{m}_2 l_1^2 + \mathrm{m}_2(l_2/2)^2 + \mathrm{m}_2 l_1 l_2\ \cos\theta_2 + \mathrm{I}_2\right]\dot{\theta}_1 \right. \\ & \qquad \left. + \left[\mathrm{m}_2(l_2/2)^2 + 1/2\ \mathrm{m}_2\ l_1 l_2\ \cos\theta_2 + \mathrm{I}_2\right]\dot{\theta}_2\right\} \\ & \qquad - \left\{\mathrm{m}_1 g l_1/2\ \sin(\theta_1) + \mathrm{m}_2 g l_1\ \sin(\theta_1) + \mathrm{m}_2 g l_2/2\ \sin(\theta_1+\theta_2)\right\} = \tau_1 \end{aligned}$$

لذا:

$$\begin{aligned} & \left[\mathrm{m}_1(l_1/2)^2 + \mathrm{I}_1 + \mathrm{m}_2 l_1^2 + \mathrm{m}_2(l_2/2)^2 + \mathrm{m}_2 l_1 l_2\ \cos\theta_2 + \mathrm{I}_2\right]\ddot{\theta}_1 - \mathrm{m}_2\ l_1 l_2\ \sin\theta_2\ \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \\ & \qquad + \left[\mathrm{m}_2(l_2/2)^2 + 1/2\ \mathrm{m}_2\ l_1 l_2\ \cos\theta_2 + \mathrm{I}_2\right]\ddot{\theta}_2 - 1/2\ \mathrm{m}_2\ l_1 l_2\ \sin\theta_2\ \dot{\theta}_2^2 \\ & \qquad - \left\{(\mathrm{m}_1 l_1/2 + \mathrm{m}_2 l_1)\mathrm{g}\ \sin(\theta_1) + \mathrm{m}_2 \mathrm{g} l_2/2\ \sin(\theta_1+\theta_2)\right\} = \tau_1 \end{aligned}$$

براي $q=\theta_2$ داريم:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}\left\{\left[\mathrm{m}_2(l_2/2)^2 + 1/2\ \mathrm{m}_2\ l_1 l_2\ \cos\theta_2 + \mathrm{I}_2\right]\dot{\theta}_1 + \left[\mathrm{m}_2(l_2/2)^2 + \mathrm{I}_2\right]\dot{\theta}_2\right\} \\ & \qquad - \mathrm{m}_2 g l_2/2\ \sin(\theta_1+\theta_2) = \tau_2 \end{aligned}$$

و نهايتاً:

$$\begin{aligned} & \left[\mathrm{m}_2(l_2/2)^2 + 1/2\ \mathrm{m}_2\ l_1 l_2\ \cos\theta_2 + \mathrm{I}_2\right]\ddot{\theta}_1 + \left[\mathrm{m}_2(l_2/2)^2 + \mathrm{I}_2\right]\ddot{\theta}_2 \\ & \qquad - 1/2\ \mathrm{m}_2\ l_1 l_2\ \sin\theta_2\ \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 - \mathrm{m}_2 g l_2/2\ \sin(\theta_1+\theta_2) = \tau_2 \end{aligned}$$

معادلات حركت روباتها را مي توان به فرم ماتريسي زير نوشت:

$$M\ddot{q} + V(q,\dot{q}) + G(q) = Q$$

كه در مورد اين روبات 2R خواهيم داشت:

$$M=\begin{bmatrix} \mathrm{m}_1(l_1/2\ )^2+\mathrm{I}_1+\mathrm{m}_2 l_1^2+\mathrm{m}_2(l_2/2\ )^2 \\ +\mathrm{m}_2 l_1 l_2\ \cos\theta_2+\mathrm{I}_2 & \mathrm{m}_2(l_2/2\ )^2+\ 1/2\ \mathrm{m}_2\ l_1 l_2\ \cos\theta_2+\mathrm{I}_2 \\ \mathrm{m}_2(l_2/2\ )^2+\ 1/2\ \mathrm{m}_2\ l_1 l_2\ \cos\theta_2+\mathrm{I}_2 & \mathrm{m}_2(l_2/2\ )^2+\mathrm{I}_2 \end{bmatrix}$$

$$V=\begin{bmatrix} -\ \mathrm{m}_2\ l_1 l_2\ \sin\theta_2\ \dot\theta_1\dot\theta_2-1/2\ \mathrm{m}_2\ l_1 l_2\ \sin\theta_2\ \dot\theta_2^{\ 2} \\ -\ 1/2\ \mathrm{m}_2\ l_1 l_2\ \sin\theta_2\ \dot\theta_1\dot\theta_2 \end{bmatrix}$$

$$G=\begin{bmatrix} -(\mathrm{m}_1 l_1/2+\mathrm{m}_2 l_1)\mathrm{g}\ \sin(\theta_1)-\mathrm{m}_2\mathrm{g}l_2/2\ \sin(\theta_1+\theta_2) \\ -\mathrm{m}_2\mathrm{g}l_2/2\ \sin(\theta_1+\theta_2) \end{bmatrix}$$

$$Q=\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}$$

براي بدست آوردن فرم فضاي حالت مي توان از معادلة زير استفاده نمود.

$$\dot q=\dot\omega$$
$$\dot\omega=\ddot q=M^{-1}\left[Q-V(q,\dot q)-G(q)\right]$$

۲–۵) خطی سازی ریاضی

همانگونه كه در مثالهاي قبل مشاهده نموديم, بسياري از سيستمهاي صنعتي داراي ديناميک غير خطي مي باشند. به منظور استفاده از تكنيكهاي طراحي كنترل كننده هاي خطي براي اين گونه سيستم ها لازم است ابتدا معادلات غيرخطي سيستم را به صورت رياضي خطي سازي كنيم. در سيستمهاي كنترل, تقريب خطي از يک مدل رياضي غير خطي خوب عمل مي كند چرا كه اگر سيستم كنترلي درست طراحي شده باشد هدف سيستم كنترل يعني تنظيم پارامترهاي خروجي در نزديكي شرايط كاركرد نامي ارضاء خواهد شد. لذا تقريب خطي كه در زير بدان مي پردازيم داراي درجة اعتبار خوبي در نزديكي نقطة كارنامي سيستم مي باشد.
براي خطي سازي سيستم لازم است دو مرحلة زير صورت پذيرد.

۱- تعيين شرايط ماندگار سيستم يا نقطة تعادل با توجه به مقادير نامي خروجي و ورودي.
۲- طراحي سيستم كنترلي براساس تغييرات تفاضلي سيستم از شرايط نامي.

با اين توصيف متغيرهاي كنترلي سيستم u سبب مي گردند تغييرات پاسخ سيستم از شرايط ماندگار با سرعت مناسبي به سمت صفر ميل نموده و همواره در نزديكي شرايط نامي باقي

بمانند. اين موضوع به نوبة خود باعث مي شود تقريب خطي از يک معادلة غير خطي معتبر بماند. با معادلة برداري و عمومي يک سيستم غيرخطي شروع مي كنيم.

$$\begin{aligned}\dot x&=f(x,u)\\ y&=h(x,u)\end{aligned} \qquad (۵۸\text{-}۲)$$

در عمل براي انجام اين دو مرحله به صورت سيستماتيک، ابتدا مقادير ماندگار را تعيين نموده و سپس معادلات ديناميكي سيستم را براي تغييرات كوچک حول مقادير ماندگار بدست مي آوريم. درحالت ماندگار ديگر تغييراتي در متغيرهاي حالت وجود نداشته لذا در حالت تعادل $\dot x^*=0$ است. از حل معادلة زير مقادير متغيرهاي حالت, وروديهاي لازم و خروجيهاي نتيجه شده در حالت ماندگار و يا تعادل تعيين مي شوند.

$$\begin{cases} f(x^*,u^*)=0\}n \\ h(x^*,u^*)=y^*\}m \end{cases} \qquad (۵۹\text{-}۲)$$

دقت كنيد اين معادله داراي m+n معادله بوده اما با توجه به ابعاد $x^*_{n\times1},\ u^*_{r\times1},\ y^*_{m\times1}$ تعداد r+m+n مجهول دارد. لذا در حالت كلي قابل حل نيست. بايستي براي تعيين مقادير تعادل تعداد r مجهول را دانسته فرض نمود. اين كاملاً منطبق با فيزيک مسئله است، چراكه به ازاي اعمال ورودي دلخواه به سيستم (u^*)، مسلماً خروجي سيستم نيز متناظراً به مقدار ماندگار ديگري ميل خواهد نمود. لذا بايستي يا $y^*=y_d$ يا $x^*=x_d$ يا $u^*=u_d$ به تعداد r معادله مفروض درنظر گرفته شده و ساير مقادير را از معادلات تعادل (۲-۵۹) بدست آوريم. در عين حال اين معادلات غيرخطي اند, لذا ممكن است جواب نداشته و يا جواب تكراري داشته باشند. انجام اين مرحله در عمل بسيار مهم ولي به صورت تحليلي معمولاً مشكل مي باشد. لذا براي حل اين معادلات در عمل مي توان از طرق ديگري همانند تعيين مقادير ماندگار از روي فيزيک مسئله و يا مشابه سازي سيستم و يا حل عددي، استفاده نمود.
مرحلة بعدي بدست آوردن معادلات ديناميكي براي متغيرهاي تفاضلي[1] مي باشد. متغير تفاضلي $\Delta x,\ \Delta y,\ \Delta u$ اختلاف جزئي متغيرهاي حالت نسبت به حالت تعادل خود مي باشند:

$$x(t)=x^*+\Delta x(t),\ \ u(t)=u^*+\Delta u(t),\ \ y(t)=y^*+\Delta y(t) \qquad (۶۰\text{-}۲)$$

با توجه به اينكه $\dot x^*=0$ مي باشد معادلات سيستم براساس متغيرهاي جديد Δ به فرم زير تعبير مي شود.

[1] incremental variables

$$\begin{cases}\Delta\dot{x} = f\,(x^*+\Delta x\,,\ u^*+\Delta u)\\ \Delta y = h\,(x^*+\Delta x\,,\ u^*+\Delta u)-y^*\end{cases}$$ (۲-۶۱)

توابع f, h را حول متغيرهاي حالت x^* و وروديهاي u^* با تقريب چند متغيره سري تيلور نمايش مي دهيم.

$$f_i(x^*+\Delta x,\ u^*+\Delta u) = f_i(x^*,u^*) + \frac{\partial f_i}{\partial x_1}\bigg|_* \Delta x_1 + \cdots + \frac{\partial f_i}{\partial x_n}\bigg|_* \Delta x_n + \frac{\partial f_i}{\partial u_1}\bigg|_* \Delta u_1 + \cdots + \frac{\partial f_i}{\partial u_r}\bigg|_* \Delta u_r + \mathrm{O}(\Delta x)^2 + \mathrm{O}(\Delta u)^2 + \cdots$$ (۲-۶۲)

كه در آن نماد $\left(\Big|_*\right)$ به معناي تعيين مقادير توابع در u^*,x^* مي باشد. با توجه به فرض خطي سازي كه در آن تغييرات متغيرهاي حالت و وروديهاي سيستم از شرايط نامي $\Delta x,\ \Delta u$ بسيار كوچک تر از u, x مي باشند مي توان براحتي از ترمهاي رتبة بالاتر صرفنظر نمود. اين فرض مهم در عمل در زماني كه سيستم كنترل خوب عمل نمايد معتبر است. لذا مي توان توابع f, g را به فرم زير نمايش داد.

$$f_i\,(x^*+\Delta x\,,u^*+\Delta u) \approx \frac{\partial f_i}{\partial x}\bigg|_* \Delta x + \frac{\partial f_i}{\partial u}\bigg|_* \Delta u$$ (۲-۶۳)

كه در آن $\frac{\partial f}{\partial x}$ ژاكوبين تابع f نسبت به x مي باشد و از رابطة زير بدست مي آيد.

$$\frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_* = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_*$$ (۲-۶۴)

به طريق مشابه معادلات حالت تغييرات را مي توان به فرم زير نگاشت:

$$\begin{cases}\Delta\dot{x} = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_* \Delta x + \frac{\partial f}{\partial u}\Big|_* \Delta u \\ \Delta y = \frac{\partial h}{\partial x}\Big|_* \Delta x + \frac{\partial h}{\partial u}\Big|_* \Delta u\end{cases}$$ (۲-۶۵)

دقت كنيد كلية ژاكوبين ها در نقطة تعادل مقدار دهي شده اند. لذا ماتريسهاي معيني را تشكيل مي دهند و مي توان معادلة فوق را به فرم استاندارد معادلات حالت خطي غير متغير با زمان نمايش داد.

$$\begin{cases}\Delta\dot{x} = A\ \Delta x + B\ \Delta u \\ \Delta y = C\ \Delta x + D\ \Delta u\end{cases}$$ (۲-۶۶)

نكته ۱: به جاي خطي سازي حول يک نقطة تعادل ثابت u^*, x^*، مي توان معادلات خطي سيستم را حول يک مسير يا Trajectory بدست آورد. مسير عبارتست از توابع $u^*(t),\ x^*(t)$ كه در معادلات حالت صدق كنند. در اينحالت مشابه حالت قبل سيستم را مي توان حول مسير خطي سازي نمود, تنها اختلاف مهم در اين مورد آنست كه ماتريسهاي A, B, C, D سيستم تابعي از زمان خواهند بود (TV). براي بررسي اين روش به مسئلة ۲-۱۸ مراجعه شود.

نكتهٔ ۲: اگر سيستم غيرخطي داراي وروديهاي اغتشاشي w و نويز اندازه گيري v نيز باشد و به صورت زير قابل نمايش باشد:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f\,(x,u,\omega)\\ y &= h(x,u,\omega,v)\end{aligned}$$ (۲-۶۷)

به صورت مشابه سيستم تفاضلي حول نقاط كار يا مسير را مي توان به صورت زير خطي سازي نمود.

$$\begin{aligned}\Delta\dot{x} &= \frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_* \Delta x + \frac{\partial f}{\partial u}\bigg|_* \Delta u + \frac{\partial f}{\partial w}\bigg|_* \Delta w \\ \Delta y &= \frac{\partial h}{\partial x}\bigg|_* \Delta x + \frac{\partial h}{\partial u}\bigg|_* \Delta u + \frac{\partial h}{\partial w}\bigg|_* \Delta\omega + \frac{\partial h}{\partial v}\bigg|_* \Delta v\end{aligned}$$ (۲-۶۸)

و يا به صورت ماتريسي به صورت زير تعبير نمود.

$$\begin{cases}\Delta\dot{x} = A\Delta x + B\Delta u + F\Delta w \\ \Delta y = C\Delta x + D\Delta u + G\Delta\omega + H\Delta v\end{cases}$$ (۲-۶۹)

مثال (۲–۸) موتور DC:

نقطة تعادل را براي سيستم موتور DC به ازاي $\theta^*=\theta_d,\ T_L=0$ محاسبه نموده و مدل خطي حول اين مقدار تعادل را محاسبه كنيد.

پاسخ: سيستم خطي مي باشد، لذا مدل حول نقطة تعادل نيز همان فرم مدل اصلي را داراست. به علت خطي بودن معادلات، نقطة تعادل را براحتي مي توان محاسبه نمود:

$$\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&NK_m/J_e\\0&-NK_m/L&-R/L\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta^*\\\omega^*\\i^*\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\1/L\end{bmatrix}v^*$$
$$\theta_d=\begin{bmatrix}1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta^*\\\omega^*\\i^*\end{bmatrix} \qquad (۷۰-۲)$$

$$\theta^*=\theta_d,\ \omega^*=i^*=v^*=0$$
$$\Delta\theta=\theta-\theta_d,\ \ \Delta\omega=\omega,\ \ \Delta i=i,\ \ \Delta v=v \qquad (۷۱-۲)$$

مدل خطي همانند قبل عبارتست از:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\Delta\theta\\\omega\\i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&NK_m/J_e\\0&-NK_m/L&-R/L\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta\theta\\\omega\\i\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\1/L\end{bmatrix}v$$
$$\begin{bmatrix}\Delta\theta\\\omega\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta\theta\\\omega\\i\end{bmatrix} \qquad (۷۲-۲)$$

مثال (۲–۹) مخزن:

نقطة تعادل را به ازاي $F_{in}^*=F_d,\ \ell=\ell_d$ محاسبه نموده و مدل خطي حول نقطه تعادل را بدست آوريد.

پاسخ: براي سيستم مزبور معادلة غيرخطي را باز نويسي مي كنيم:

$$\dot{\ell}=\frac{F_{in}}{A}-\frac{c\,u\,\sqrt{\ell}}{A} \qquad (۷۳-۲)$$

لذا تابع غيرخطي عبارتست از:

$$F(\ell,u,F_{in})=\frac{F_{in}}{A}-\frac{c\,u\,\sqrt{\ell}}{A} \qquad (۷۴-۲)$$

جهت خطي سازي ابتدا نقطة تعادل را تعيين مي كنيم. فرض كنيد نقطة نامي مورد نظر $\ell^*=\ell_d$ به ازاي ورودي مورد نظر ثابت $F_{in}^*=F_d$ باشد لذا:

$$0=-\frac{c}{A}u^*\sqrt{\ell_d}+\frac{F_d}{A}\quad\Rightarrow\quad u^*=\frac{F_d}{c\sqrt{\ell_d}} \qquad (۷۵-۲)$$

حال ژاكوبين ها را تعيين مي كنيم.

$$\frac{\partial f}{\partial\ell}=-\frac{c}{2A}\frac{u}{\sqrt{\ell}}\quad\rightarrow\quad\left.\frac{\partial f}{\partial\ell}\right|_*=-\frac{c}{2A}\frac{F_d}{c\sqrt{\ell_d}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\ell_d}}=-\frac{F_d}{2A\ell_d}$$
$$\frac{\partial f}{\partial u}=-\frac{c}{A}\sqrt{\ell}\quad\rightarrow\quad\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_*=-\frac{c}{A}\sqrt{\ell_d} \qquad (۷۶-۲)$$
$$\frac{\partial f}{\partial F_{in}}=\frac{1}{A}\quad\rightarrow\quad\left.\frac{\partial f}{\partial F_{in}}\right|_*=\frac{1}{A}$$

لذا معادلة حالت تغييرات عبارتست از:

$$\Delta\dot{\ell}=(-\frac{F_d}{2A\ell_d})\ \Delta\ell-(\frac{c}{A}\sqrt{\ell_d})\Delta u+\frac{1}{A}\ \Delta F_{in} \qquad (۷۷-۲)$$

مثال (۲–۱۰) پاندول معكوس

براي سيستم پاندول معكوس، نقطة تعادل و مدل خطي حول آنرا محاسبه كنيد.

پاسخ: براي محاسبة نقطة تعادل از فيزيك مسئله استفاده مي كنيم:

$$x^*=\theta^*=0,\ \ \dot{x}^*=\dot{\theta}^*=0 \qquad (۷۸-۲)$$

براي محاسبة مدل خطي سازي شده حول نقطة تعادل مي توان ژاكوبين توابع غيرخطي را محاسبه نمود كه البته بسيار دشوار است. در اينجا با يک روش تيزبينانه, مجدداً معادلة لاگرانژ را براي اجراي معادلة حالت تفاضلي سيستم بازنويسي مي كنيم. با توجه به نقطة تعادل سيستم، براي تقريب خطي فرض مي كنيم هم زاوية پاندول θ و هم ميزان جابجائي ارابه x بسيار كوچک است. علاوه بر آن سرعت زاويه اي پاندول و سرعت خطي ارابه نيز كوچک فرض مي شوند. در اينصورت از تقريبات زير مي توان در نوشتن لاگرانژين استفاده نمود:

$$sin\theta\approx\theta,\qquad cos\theta\approx 1-\frac{1}{2}\theta^2 \qquad (۷۹-۲)$$

لذا:

$$L=\frac{1}{2}M\dot{x}^2+\frac{1}{2}m(\dot{x}+l\dot{\theta})^2-2V_0-mg(1-\frac{1}{2}\theta^2) \qquad (۸۰-۲)$$

حال معادلة لاگرانژ را برروي لاگرانژين اعمال مي كنيم.

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i})-\frac{\partial L}{\partial q_i}=Q_i \qquad (۸۱-۲)$$

لذا:

$$\begin{cases}(M+m)\ddot{x}+m\,\ell\,\ddot{\theta}=F\\ m\,\ell\ddot{x}+m\,\ell^2\ddot{\theta}-mg\,\ell\,\theta=0\end{cases} \qquad (۸۲-۲)$$

با حل معادلات برحسب $\ddot{x}, \ddot{\theta}$ خواهيم داشت:

$$\begin{cases} \Delta\dot{v} = -\dfrac{mg}{M}\Delta\theta + \dfrac{\Delta F}{M} \\ \Delta\dot{\omega} = \dfrac{(M+m)g}{M\ell}\Delta\theta - \dfrac{\Delta F}{m\ell} \\ \Delta\dot{x} = \Delta v \\ \Delta\dot{\theta} = \Delta\omega \end{cases} \qquad (۲-۸۳)$$

که در اين مدل از متغيرهاي تفاضلي سيستم استفاده شده است.

۲-۶) نامعینی مدل

مدل سيستم در واقع يک ساختار مفهومي است که به منظور پيش بيني رفتار متغيرهاي خروجي سيستم براساس وروديهاي مشخص سيستم برحسب زمان توليد شده است. اينکه يک مدل واقعي است يا نه موضوع بحث قرار نمي گيرد، بلکه تنها خصوصيت مورد نظر مدل نحوة پيش بيني رفتار خروجي سيستم مي باشد که ميزان صحت مدل با اين معيار سنجيده مي شود. از طرف ديگر ايدة اصلي سيستمهاي کنترل توليد وروديهائي براي سيستم مي باشد، که رفتار خروجي سيستم رابه رفتار مطلوب نزديک کند. به اين ترتيب کاملاً مشهود است که طراحي کنترل کننده و موفقيت عملکرد آن کاملاً مرهون قابليت ساختار مدل در پيش بيني رفتار خروجي سيستم مي باشد. فلذا عملکرد قابل دستيابي توسط سيستم کنترل به کيفيت مدل مربوط شده و هر ميزان عملکرد مورد نياز سيستم دقيق تر و سخت گيرانه تر باشد، نياز به مدل دقيقتري براي سيستم بيشتر خواهد بود. از طرف ديگر افزايش دقت مدل با تغيير در ساختار آن و يا تعيين دقيق پارامترهاي بدست مي آيد که اين موضوع باعث افزايش پيچيدگي در عمليات مدلسازي مي گردد. براي مثال ساده ترين مدل يک مقاومت الکتريکي به صورت رابطة خطي بين ولتاژ و جريان عبوري از آن نمايش داده مي شود. اين درصورتي است که در فرکانسهاي بالا به هيچ وجه اين مدل قابليت پيش بيني خروجي سيستم را به صورت دقيق نداشته و عوامل ديگري نظير ظرفيت خازن و ميزان اندوکتانس سلفي و همچنين عوامل غير خطي ديگر در مدل آن بايستي لحاظ گردند. تعيين مدل با چنين مشخصاتي نيازمند صرف زمان بيشتر براي مدلسازي و انجام آزمايشات مختلف جهت تعيين پارامترهاي آن مي باشد، که بسيار پرهزينه و پيچيده مي باشد.

بدين ترتيب استفاده از مدلي که داراي حداقل پيچيدگي لازم براي رسيدن به عملکرد خاصي باشد همواره مورد توجه طراحان مي باشد. با اين توصيف توجه به عدم دقتها در مدل درحين عمليات طراحي عامل مهم در رسيدن به عملکرد مورد نظر مي باشد. اگر اين دقتها را به صورت

کلي "نامعيني" بناميم بايستي توجه کرد که در واقع سيستم واقعي داراي يک مدل واقعي يا بهترين مدل رياضي است که رفتار ورودي و خروجي را توصيف نمايد. اين درحالي است که براي طراحي کنترل کننده از يک مدل "مدل طراحي" يا يک نگاشت ساده تري از مدل واقعي استفاده مي شود. به عنوان مثال استفاده از يک مدل خطي براي يک سيستم غيرخطي و يا استفاده از يک مدل فضاي حالت خطي سازي شده حول يک نقطه تعادل در کلية نقاط عملکرد سيستم اين حالت را توصيف مي کند.

برخي از نامعيني ها در مدل, تغييرات پارامترهاي سيستم را دربرمي گيرند که به آن "نامعيني پارامتريک" گفته مي شود. کلية مدلهاي سيستمهاي فيزيکي داراي پارامترهاي فيزيکي همانند جرم, سختي فنر, مقاومت الکتريکي يا . . . مي باشند که اين پارامترها را در عمل با دقت اندازه گيري معيني مي توان تعيين نمود. از طرف ديگر در اثر تغيير شرايط عملکرد سيستم همچون درجه حرارت, فشار و . . . اين مقادير ممکن است مورد تغييرات جزئي قرار گيرند. تفاوت بين مقدار واقعي پارامترها با مقادير استفاده شده در مدل از نوع نامعيني پارامتريک شناخته مي شود.

برخي ديگر از نامعيني ها در مدل به علت صرفنظر کردن از عواملي واقعي در سيستم مي باشد، که به علت ساده سازي مدل از آنها صرفنظر شده است. به عنوان مثال وجود عوامل خازني يا سلفي در مقاومتها, ارتعاشات سازه اي در سيستمهاي غيرصلب, ديناميک ارتعاشي سيستمهاي هيدروليکي در اثر قابليت تراکم روغن و . . . از انواع اين نامعيني مي باشند. اين گونه نامعيني ها که به فرم نامعيني غيرساختار يافته[1] مشهور مي باشند، در عمل به وفور وجود داشته و از لحاظ مهندسي بسيار مشکل قابل کمي سازي مي باشند. با دو ديدگاه زماني و فرکانسي محدوده هايي براي اينگونه نامعيني ها تعيين مي گردد. که انجام آزمايشات مفصل و پيچيده و يا با قضاوت مهندسي صحيح از رفتار سيستم، مبناي اصلي براي تعيين اين مورد مي باشد.

نهايتاً برخي از نامعيني ها را مي توان در اثر وروديهاي ناخواستة اعمالي به سيستم يا "اثر اغتشاش" مدلسازي نمود. در سيستمهاي غيرخطي مدلسازي نامعيني به اين صورت بسيار مرسوم بوده و اختلاف بين مدل واقعي و مدل طراحي را در حداکثر اندازة وروديهاي اغتشاشي سيستم کمي سازي مي گردند. در برخي از موارد اين وروديهاي اغتشاشي داراي عوامل فيزيکي محرک آنها مي باشند. به عنوان مثال جريان دريا در حرکت اقيانوس پيماها و يا بادهاي مختلف اعمالي به اجسام پرنده از اين نوع مي باشند. در برخي از موارد عوامل فيزيکي مشخصي

[1] Unstructured uncertainty

براي آنها نمي توان يافت و تنها اختلاف بين مدل واقعي و مدل طراحي را توسط اين نوع وروديهاي اغتشاشي معين مي كنند. در هر دو صورت نمايش اين نوع وروديها به صورت سيگنالهاي مشخص همانند, فرآيندهاي اتفاقي با توزيع فركانسي مشخص و يا سيگنالهائي معين با دامنه مشخص و يا جمعي از چند ورودي سينوسي با پهناي باند مشخص و . . . انجام مي گيرد.

تا كنون روشهاي طراحي مختلفي مبتني بر نوع نامعيني تدوين گرديده است، كه عموماً به آنها روشهاي طراحي مقاوم[1] يا گفته مي شود. جالب توجه است كه روشهاي مقاوم داراي زمينه هاي تحقيقاتي مختلفي است كه منبعث از نحوة نمايش نامعيني بوده و به روشهاي طراحي كنترل كننده خطي و غيرخطي ختم مي گردند.

۲-۷) جمع بندي

اولين مرحله در طراحي كنترل كننده، شناخت سيستم يا فرآيند مي باشد. در اين فصل با استفاده از قوانين و اصول حاكم بر سيستمهاي الكتريكي، الكترومكانيكي، مكانيكي و هيدروليكي دستة قابل توجهي از سيستمهاي صنعتي را مورد تجزيه و تحليل قرار داده و مدل آنها را به فرم فضاي حالت بدست آورده ايم. فرم فضاي حالت با بهره گيري از متغير حالت مبناي اصلي روشهاي مدرن تحليل و طراحي در سيستمهاي كنترل مي باشد. با توجه به خصوصيت متغير حالت در فشرده سازي اطلاعات، اهميت استفاده از آن در مدلسازي سيستمهاي خطي بيان شده است. در تكميل اين بررسي مثالهايي از سيستمهاي مهم حرارتي، شيميايي و الكترومغناطيسي در بخش مسائل اين فصل معرفي مي گردند و با ارائة اصول فيزيكي حاكم، به مدلسازي آنها خواهيم پرداخت. براي مدلسازي سيستمهاي مكانيكي روش لاگرانژ كه مبتني بر معادلات انرژي در اين گونه سيستمها مي باشد به عنوان تكنيكي مؤثر و سريع معرفي شده است. همچنين روش عمومي خطي سازي سيستمهاي غير خطي مورد بحث و بررسي قرار گرفته است. در پايان با اشاره به اين موضوع كه كلية مدلهاي بدست آمده تنها تقريبي رياضي از سيستم واقعي مي باشند، كه ارتباط بين ورودي و خروجي را به فرم معادلات ديفرانسيل مشخص مي سازند، توجه خواننده را به عدم دقتها در مدلسازي معطوف ساخته و انواع نامعيني هاي مدلسازي معرفي شده اند.

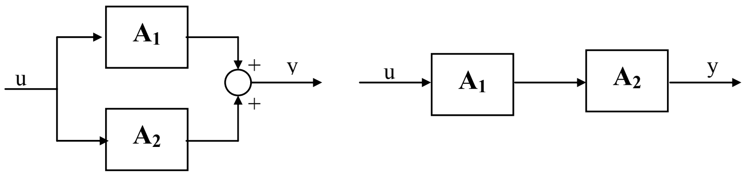
[1] Robust

مسائل

۲-۱) غالباً سيستمها از تركيب چند بلوک در دياگرام بلوكي تشكيل مي شوند, كه روشهاي ساده سازي توابع تبديل آنها قبلاً ارائه شده است. در سيستمهاي زير كه از تركيب سري و موازي دو سيستم مجزا به فرم فضاي حالت مدل شده اند, معادلة حالت نهائي سيستم را بدست آوريد. فرض كنيد هر بلوک بفرم زير مدل شده باشد.

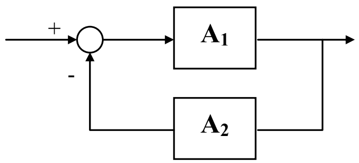
$$A_1:\begin{cases}\dot{x}_1 = A_1x_1 + B_1u_1\\ y_1 = C_1x_1 + D_1u_1\end{cases}\qquad A_2:\begin{cases}\dot{x}_2 = A_2x_2 + B_2u_2\\ y_2 = C_2x_2 + D_2u_2\end{cases}$$

متغير حالت سيستم كلي $x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$ بوده و ورودي و خروجي به ترتيب y,u مي باشند.



شكل (۲-۲۲) تركيب سري و موازي دو سيستم

۲-۲) مسئله ۲-۱ را براي تركيب فيدبک حل نمائيد.



شكل (۲-۲۳) تركيب فيدبک دو سيستم

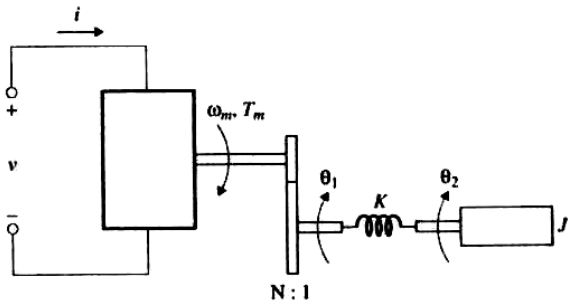
۲-۳) سرو موتور DC و هارمونيک درايو

فرض كنيد مطابق شكل زير، سمت بار در موتور DC انعطاف پذير بوده و با ضريب سختي k مدل شود. در اينصورت گشتاور انتقال يافته از مسير اين انعطاف پذيري معادل $K(\theta_1-\theta_2)$ مي باشد.

الف) مدل اين سيستم را همانند مثال سرو موتور DC تعيين نموده با اين تفاوت كه يكي از متغيرهاي حالت را $\Delta = \theta_1 - \theta_2$ فرض نمود و $\dot{\Delta} = \Omega$ را تعريف نمائيد. بدين ترتيب معادله حالت مربوط به **V** برحسب Δ و جريان بدست آوريد.

ب) پارامترهاي سرو موتور DC را براي اين مسئله نيز درنظر گرفته و با فرض K=500Nm/rad , ماتريسهاي معادله حالت را تعيين نمائيد.

پ) توسط Simulink يا Matlab و با درنظر گرفتن وروديها و شرايط اوليه مثال سرو موتور DC سيستم را شبيه سازي نموده و پاسخ متغيرهاي حالت و خروجيهاي سيستم را برحسب زمان رسم نمايد.



شكل (۲-۲۴) سرو موتور DC و هارمونيک درايو

۲-۴) کنترل سرعت غلطک

سيستم شکل زير را درنظر بگيريد, که در آن دو موتور DC يکسان همزمان با يكديگر به منظور به دوران در آوردن يک غلطک سنگين بکار گرفته شده اند. اين غلطک براي نورد ورقهاي فولادي استفاده شده و لذا گشتاور T_o را بهمراه حرکت تحمل مي كند. موتورها داراي ممان اينرسي روتور J_m بوده و محور خروجي آنها انعطاف پذير با ضريب سختي K مي باشند. همچنين از اثرات سلفي موتور صرفنظر شده است.

الف) معادلات حالت سيستم را با مراحل پيشنهادي زير بدست آوريد.

قانون دوم نيوتن را براي $\dot{\omega}_2, \dot{\omega}_1$ را با در نظر گرفتن گشتاورهاي T_2, T_1 موتور تدوين نموده و نيروهاي فنر را متناسب با $\theta_1 - \varphi_1, \theta_2 - \varphi_2$ درنظر بگيريد.

قانون دوم نيوتن را براي غلطک نوشته, دقت كنيد كه گشتاور انتقالي به غلطک با ضريب R/r افزايش يافته و سرعت غلطک معادل r/R سرعت خروجي موتورها مي باشد.

معادلات حالت را براي $\Delta_1 = \theta_1 - \varphi_1, \Delta_2 = \theta_2 - \varphi_2$ بازنويسي كنيد. دقت كنيد كه در اين معادله $\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_2 = \dfrac{-R}{r}\omega_o$ و لذا $\dot{\Delta}_2, \dot{\Delta}_1$ برحسب $\omega_o, \omega_2, \omega_1$ نوشته خواهند شد.

معادلة گشتاور موتور را برحسب ولتاژ اعمالي به آن نوشته, فرض نمائيد ثابت گشتاور موتورها K_m و مقاومت آرميچرها R_a باشد. متغيرهاي حالت سيستم عبارتند از Δ_2, Δ_1 و $\omega_0, \omega_2, \omega_1$ و سه ورودي سيستم T_0, u_2, u_1 مي باشند.

ب) ماتريس معادلات حالت را براي پارامترهاي عددي زير تعيين نمائيد.

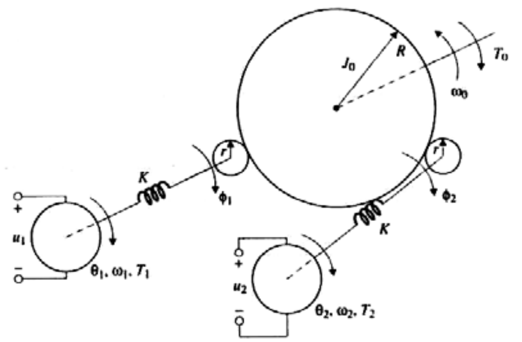
$$K_m = 6.0 \ \ Nm/A, R_a = 0.2 \ \ \Omega, J_m = 1 \ \ kgm^2$$

$$K = 7.5 \times 10^4 \, Nm/rad, J_0 = 10^4 \, kgm^2, R = 1 \ \ m, r = 0.07 \ \ m$$

پ) سيستم را براي شرايط اوليه

$$\omega_1(0) = \omega_2(0) = 66.68 rad/s, \omega_0(0) = 4.67, \Delta_1(0) = \Delta_2(0) = 0$$

و ورودي $u_1 = u_2 = 4V$ و T_o=1000Nm مشابه سازي نمائيد.

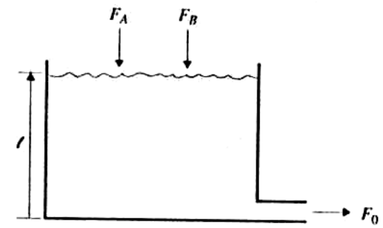


شكل (۲-۲۵) كنترل سرعت غلطک توسط دو موتور

۲-۵) كنترل غلظت و ارتفاع در مخزن

يک مخزن اختلاط دو مادة B,A را درنظر بگيريد (بعنوان مثال رنگ روغني و تينر) دبي جريان مادة B كنترل نمي شود ولي دبي مادة A و مادة خروجي هر دو كنترل مي شوند. مواد داخل

مخزن کاملاً بهم خورده و به صورت يکنواخت از تانک خارج مي شوند, يک کنترل کننده مورد نياز است که غلظت مخلوط و ارتفاع آن در مخزن را کنترل کند.



شکل (۲-۲۶) کنترل غلظت و ارتفاع مايع

الف) مدل سيستم را مطابق با مراحل پيشنهادي زير بدست آوريد.

با استفاده از قانون بقاي جرم و اختلاف دبي ورودي و خروجي در مخزن معادلة حالت را بدست آوريد.

همانند بند قبل معادلة ديفرانسيل مربوط به حجم مادة A ، V_A، را بدست آوريد. دقت کنيد با شرط مخلوط شدن يکنواخت مواد, غلظت مادة A برابر $C_A = V_A / V_T$ مي باشد و نرخ جريان خروجي مادة A برابر $C_A F_0$ مي باشد.

ب) سطح مخزن را معادل $A = 0.1m^2$ فرض نموده و معادلات را بازنويسي کنيد.

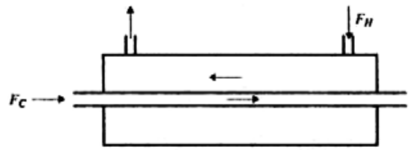
ج) سيستم فوق را براي پارامترهاي عددي زير شبيه سازي نمائيد.

$$\ell(0) = 0.2m, C_A(0) = 0.5, F_A = F_B = 2\times10^{-4} m^3/s, F_0 = 3\times10^{-4} m^3/s,\ 0 \le t \le 60s$$

دقت کنيد که بايستي $V_T(0)$ را از روي مقادير $C_A(0), \ell(0)$ تعيين نمود.

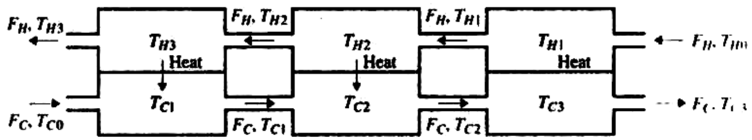
۲-۶) مبدل حرارتی

شکل زير يک مبدل حرارتي با جهت حرکت مخالف سيال سرد و گرم را نمايش مي دهد که انتقال حرارت از طريق هدايت صورت مي پذيرد. سيال گرم مطابق جهت نشان داده شده در شکل با دبي F_h به سمت چپ حرکت نموده و حرارت لازم را به سيال سرد که با دبي F_c به سمت راست حرکت مي کند از طريق لوله هاي مجاورتي منتقل مي کند.



شکل (۲-۲۷) مبدل حرارتی با جهت مخالف حرکت سيال

براي مدلسازي دقيق اين سيستم بايستي از معادلات ديفرانسيل پاره اي استفاده نمود. براي تعيين معادلات حالت سيستم سطوح انتقال حرارت را به فرم شکل زير تبديل مي کنيم.



شکل (۲-۲۸) تقسيم مبدل حرارتی به اجزاء محدود

الف) مدل سيستم را در مراحل پيشنهادي زير تعيين کنيد.

فرض کنيد $Q_{C_1} = \rho V_{c_1} T_{c_1}$ ميزان انرژي حرارتي موجود در مخزن سرد اول باشد, نرخ حرارت ورودي به تانک معادل $\rho F_c T_{c_0}$ و نرخ حرارت خروجي از تانک $\rho F_c T_{c_1}$ مي باشد. ميزان حرارت دقيق ورودي و خروجي به مخزن C_1 را محاسبه کنيد. علاوه بر آن ميزان انتقال حرارت از مخزن گرم H_3 به مخزن سرد C_1 را معادل $k\ (T_{h_3} - T_{c_1})$ درنظر گرفته. با نوشتن قانون اول ترموديناميک معادلة ديفرانسيل Q_{C_1} و سپس T_{C_1} را تدوين نمائيد. همين عمليات را به صورت مشابه براي کلية متغيرهاي حالت مخزن بازنويسي کنيد. متغيرهاي حالت سيستم در اين حالت شش درجه حرارت بوده و وروديها عبارتند از $F_1, F_2 . T_{h_0}, T_{c_0}$.

ب) معادلات حالت سيستم را براي مقادير عددي زير تعيين کنيد.

$$V = 0.2m^3, \rho = 10^3 kg/m^3, C_r = 4180 J/kg^oC, K = 2\times10^5 J/^\circ C\min$$

ج) سيستم را براي شرايط اوليه

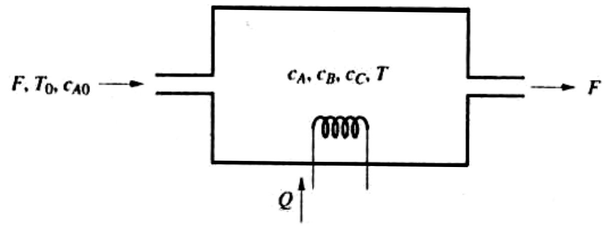
$$T_{c_1}(0) = T_{c_2}(0) = T_{c_3}(0) = T_{H_1}(0) = T_{H_2}(0) = T_{H_3}(0) = 20^\circ C$$

و ورودي هاي زير مشابه سازي نمائيد:

$$F_c = 0.05m^3/\min, F_H = 0.15m^3/\min, T_C = 20^0 C, T_{h_0} = 80^0 C$$

۲-۷) راكتور شيميائي

شكل مقابل مشخصات يک راكتور شيميائي CSTR را نمايش مي دهد. محلول شيميائي A با درجه حرارت T_0 و غلظت C_{A0} $(kg-moles/m^3)$ و با دبي F وارد راكتور مي شود. ميزان كنترل شده اي حرارت با توان Q وات وارد راكتور يا از آن خارج مي شود. در درجه حرارت مناسب محلول شيميائي به اجزاء B,C تجزيه شده $A \rightarrow B+C$ به نحوي كه با بهم زدن مناسب محلول همواره غلظتهاي A,B,C در حجم ثابت مخزن راكتور V، يكنواخت باقي مي مانند.



شكل (۲-۲۹) راكتور شيميائي

دانسيته و ظرفيت حرارتي مواد ثابت فرض مي شود و دبي خروجي سيال نيز F مي باشد. اصول شيميائي حاكم بر اين فرآيند را به ترتيب زير مي توان تعبير نمود.

- تجزيه مواد در راكتور با نرخ ثابت r (Kg-moles/sec) صورت مي پذيرد.
- هر مول A به يک مول B و يک مول C تجزيه مي گردد.
- حرارت توليد شده در اين تجزية شيميائي متناسب با نرخ r مي باشد كه در آن نرخ تجزيه از رابطه $r = V\,A\,C_A e^{-E/RT}$ تبعيت مي كند، كه در آن V حجم، C_A غلظت مادة A $(\frac{kg-moles}{m^3})$، T درجه حرارت برحسب كلوين و R,E,A ثوابت سيال مي باشند. نرخ ايجاد حرارت عبارتست از: $\Delta \mathrm{H} \cdot r$ كه در آن $\Delta \mathrm{H}$ يک ثابت مثبت مي باشد.

الف) براي راكتور شيميائي مدل فضاي حالت را با استفاده از مراحل پيشنهادي زير بدست آوريد:

قانون بقاي جرم را استفاده نمائيد. فرض كنيد $N_A(t)$ برابر مقدار كيلوگرم-مول موجود از مادة A در مخزن در زمان t باشد در فاصله زماني Δt , $F \cdot C_{A_o} \cdot \Delta t$ كيلوگرم مول از ماده

A وارد مخزن گرديده و $F \cdot C_A \cdot \Delta t$ كيلوگرم- مول از آن خارج مي شود. در اينصورت $r \,.\, \Delta T$ كيلوگرم مول از مادة A تبديل به مواد B,C گرديده لذا مي توان $N_A(t+\Delta t)$ را بر حسب $N_A(t)$ به علاوه مقدار خالص افزايش A در زمان t تا $t+\Delta t$ نوشت. معادلة ديفرانسيل مربوط به N_A را از معادلة قبل بدست آوريد. با توجه به اينكه $C_A = N_A / V$ با ثابت بودن حجمV معادلة حالت C_A را مي توان بدست آورد.

اين عمليات را براي C_CوC_B انجام دهيد. دقت كنيد هيچكدام از مواد B,C وارد مخزن راكتور نمي شوند. بلكه مقدار $r\,\Delta T$ كيلوگرم-مول از هر يک طي فرآيند شيميائي در زمان ΔT ايجاد مي شود و به ميزان $F\,C_C\Delta T, F\,C_B\Delta T$ از مخزن خارج مي شود.

قانون بقاي انرژي را اعمال كنيد. طبق اصل اول ترموديناميک, ميزان انرژي حرارتي موجود در مخزن برابر است با $H(t) = \rho\, V\, C_v T(t)$ در طول زمان ΔT, جريان ورودي $F\,\rho\,C_v T_o \Delta t$ ژول انرژي وارد شده درحاليكه $F\,\rho\,C_v T\,\Delta t$ ژول انرژي خارج مي شود تجزية شيميائي خود مقدار $r \cdot \Delta \mathrm{H} \cdot \Delta t$ ايجاد مي كند و $Q\Delta t$ نيز به صورت كنترل شده اضافه مي شود. لذا ميزان حرارت در زمان $H(t+\Delta t)$ را مي توان برحسب $H(t)$ به علاوة ميزان خالص انرژي داده شده به مخزن در زمان ΔT نوشته و با ميل دادن $\Delta t \rightarrow 0$ معادلة ديفرانسيل مربوط به $H(t)$ را بدست آورد.

ب) معادلات حالت سيستم را براي مقادير عددي زير تعيين كنيد واحد زمان را دقيقه فرض نمائيد.

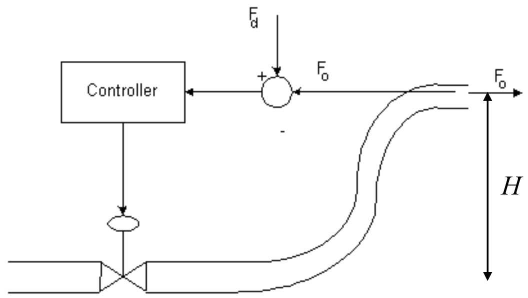
$$A = 2.68\times10^9\, mim^{-1}, E/R = 7553^0 k, \Delta \mathrm{H} = 2.09\times10^8 J/kg-moles,$$
$$\rho = 10^3 kg/m^3, C_v = 4180 J/kg^o K, V = 18\times10^{-3} m^3, F = 3.6\times10^{-3} m^3/\min,$$
$$C_{A_o} = 3kg-moles/m^3, T_0 = 293^0 k$$

پ) با استفاده از معادلات فوق, سيستم را براي شرايط اوليه $T_0 = 445^o K$ و $C_A(0) = 0.05 kg-moles/m^3$ و $Q = -1.2\times10^5 J/\min, C_B(0) = C_c(0) = 0$ (مقدار ثابت) و زمان $0 < t < 10$ دقيقه مشابه سازي نموده, و پاسخ متغيرهاي حالت سيستم برحسب زمان را رسم نمائيد.

۲-۸) كنترل جريان در خط لوله

يک قسمت از خط لوله انتقال آب را درنظر بگيريد كه دبي جريان توسط شير كنترلي اريفيس با سطح مقطع كنترل پذير **S=A.u** كنترل مي شود.

الف) مدل ديناميكي سيستم را با احتساب تأخير ناشي از خط انتقال به طول **L** و اختلاف ارتفاع **H** بدست آوريد.



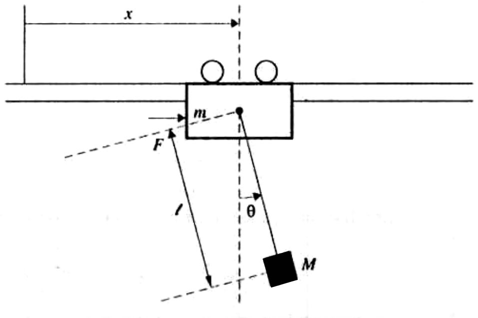
شکل (۲-۳۰) کنترل جريان در خط لوله

ب) فرض كنيد ضرايب ثابت شير برابر $A=4\times10^{-2}m, C=0.9$ و دانسيته سيال $\rho=10^3$ بوده و طول خط لوله $L=1000m$ اختلاف ارتفاع آن $H=100m$ باشد. مدل فضاي حالت را در اين حالت بدست آوريد.

ج) با فرض $F(0)=1m^3/s$ و فشار پشت شير P_0 معادل هد $L=1000m$ با تغيير ناگهاني مقطع اريفيس به صورت يک پله از مقدار 10^{-2} به 5×10^{-2} تغييرات دبي خروجي را مشابه سازي نمود و ترسيم نمائيد.

۲-۹) جرثقيل سقفی

جرثقيل سقفي نشان داده شده در شكل زير براي حمل و نقل جرم M از يک نقطه به نقطة ديگر استفاده مي شود. جرثقيل از يک ارابه به جرم m تشكيل شده است كه توسط نيروي F روي يک ريل حركت مي كند. هر بار M درانتهاي سيم بكسل جرثقيل به طول L به نوسان درمي آيد.



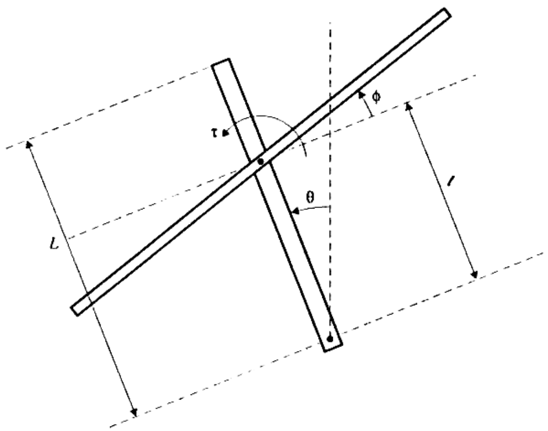
شكل (۲-۳۱) جرثقيل سقفی

با استفاده از رابطة لاگرانژ مدل سيستم را بدست آوريد. معادلات حالت را براي $\ell=10m, M=2000kg, m=500kg$ بدست آوريد. سيستم را با شرايط اوليه صفر و نيروي $F=1000N$ شبيه سازي نمائيد.

۲-۱۰) بندباز

يک بندباز حرفه اي از يک ميلة تعادل براي پايداري خود برروي يک بند استفاده مي كند. شكل زير نمايش ساده اي از حركت بندباز مي باشد كه در آن شخص بندباز به صورت يک ميلة بلند با جرم M_m كه در نقطة تماس با بند به صورت يک مفصل، مدل شده است . ممان اينرسي شخص بندباز حول نقطة دوران فرضي را J_m فرض مي كنيم. همچنين ميلة تعادل را به صورت يک ميله بلند با جرم M_e درنظر بگيريد كه آنهم در فاصله l از بند به بدن بند باز مفصل شده است. بندباز گشتاور τ را به اين ميلة تعادل كه داراي ممان اينرسي J_R است اعمال مي كند. مراكز جرم هر دو ميله را در وسط آن درنظر بگيريد. با استفاده از رابطة لاگرانژ معادلات ديناميكي سيستم را بدست آوريد. معادلات حالت سيستم را براي مقادير عددي زير تعيين كنيد.

$$M_m=75kg, J_m=3.2kgm^2, M_e=2kg, J_R=1.5kgm^2, L=1.8m, \ell=1m, \omega_\theta=\dot{\theta}, \omega_\varphi=\dot{\varphi}$$



شکل (۲-۳۲) مدل دینامیکی یک بند باز

۲-۱۱) کنترل غلظت و ارتفاع در مخزن

براي مخزن معرفي شده مسئله (۲-۵)

۱) نقطة تعادل سيستم F_o^*, F_A^* را با فرض دانستن مقادير C_A^*, ℓ^*, F_B^* محاسبه کنيد.

۲) مدل خطي سيستم را طول اين نقطة تعادل تعيين کنيد. فرض کنيد F_A, F_B, F_o وروديهاي سيستم و متغير مي باشند.

۳) مدل خطي سيستم را براي مقادير عددي مسئله ۲-۵ و مقادير زير تعيين کنيد

$$\ell^* = 0.2m, C_A^* = 0.8, F_B = 5\times10^{-5} m^3/s$$

۲-۱۲) مبدل حرارتی

براي مبدل حرارتي معرفي شده در مسئله (۲-۶):

۱) معادله تعادل درجه حرارت ها را برحسب مقادير $T_{ho}^*, T_{co}^*, F_A^*, F_c^*$ نوشته ولي نيازي به حل بستة آن نيست.

۲) معادلات را حول نقطة تعادل خطي سازي نمائيد.

۳) نقطة تعادل و معادلات خطي شده حالت را براي مقادير عددي ارائه شده در مسئله (۲-۶) بدست آوريد.

۲-۱۳) راکتور شیمیائی:

- براي راکتور شيميائي معرفي شده در مسئله (۲-۷) مقادير تعادل C_c^*, C_B^*, C_A^*, Q^* را برحسب مقادير $F^*, T_o^*, T^*, C_{Ao}^*$ بدست آوريد.
- مدل خطي سيستم را حول نقطة تعادل فوق تعيين کنيد. F, C_{Ao}, T_o, Q را به صورت متغيرهاي ورودي فرض کنيد.
- مدل خطي شده سيستم را براي مقادير عددي مسئله ۲-۷ و مقادير زير تعيين کنيد.

$$C_A = 3kg\ \text{moles}/m^3, T^* = 346^o K, F = 3.6\times10^{-3} m^3/\min$$

۲-۱۴) جرثقیل سقفی:

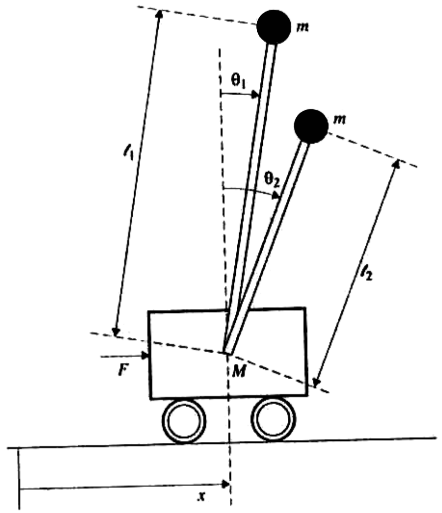
براي جرثقيل سقفي مسئله (۲-۹):
- براي نقطة تعادل واقع در مبدا (کليه متغيرهاي حالت صفر باشند) مدل خطي شده را تعيين کنيد.
- مدل خطي سيستم را براي پارامترهاي داده شده در مسئله (۲-۹) بدست آوريد.

۲-۱۵) بندباز:

براي مدل غير خطي بندباز مسئله (۲-۱۰):
- براي نقطة تعادل در مبدا (کلية متغيرهاي حالت صفر باشند) مدل خطي شده را تعيين کنيد.
- مدل خطي سيستم را براي پارامترهاي داده شده در مسئله ۲-۱۰ بدست آوريد.

۲-۱۶) پاندول دوتائی معکوس

شکل (۲-۳۳) پاندول دوتائي معکوس را نشان مي دهد که در آن جرم m به پاندولهائي به طول ℓ_1, ℓ_2 متصل شده اند و توسط اعمال نيروي F به ارابه به جرم M مي خواهيم تعادل هر دو پاندول را بدست آوريم.
با توجه به روش تعيين مستقيم مدل خطي توسط معادلة لاگرانژ مدل خطي سيستم را حول نقطة تعادل مبدا (کليه متغيرهاي حالت صفر باشند) بدست آوريد.
- معادلات حالت را براي M=m=1 و پارامترهاي ℓ_1, ℓ_2 بدست آوريد.

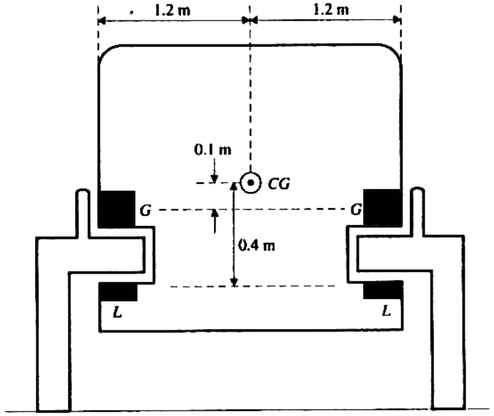


شكل (۲-۳۳) پاندول دوتائی معكوس

۲-۱۷) Maglev

با افزايش سرعت وسائل نقليه به بالاي ۲۵۰ km/h, چرخ هاي اينگونه وسايل به صورت اقتصادي عمل نكرده وسائل و مشكلات زيادي را از جمله نياز به مسطح بودن جاده و يا هم سطح بودن ريل ها را در وسايل نقليه ريلي ايجاد مي كند. براي قطارهاي فوق سريع كه تا سرعت ۵۷۰ km/h حركت مي كند از سيستم تعليق مغناطيسي استفاده مي شود. "Magnetically Levitated" شكل زير مدل ساده شده اي از اين سيستم را نشان مي دهد كه توسط آن حركتهاي عرضي وسيلة نقليه قابل بررسي مي باشد. در اين مدل حركت در صفحه (y,z و رول θ) درنظر گرفته شده و از حركتهاي طولي و yaw, pitch صرفنظر شده است. همانگونه كه در شكل فوق نشان داده شده است از دو جفت مغناطيس براي ايجاد نيروي عمودي و افقي ايجاد شده است. هر مغناطيس نيروي معادل $\frac{k\,i^2}{S^2}$ توليد مي كند كه i جريان كنترل شدة سلف مغناطيس و S فاصلة هوايي مغناطيس و ريل مي باشد. ريلها در هر دو طرف داراي ارتفاع $Z_G(t)$ نسبت به خط تعادل ريل گذاري مي باشد و در برخي نقاط مي تواند بين دو ريل اختلاف ارتفاع مشاهده شود. باد نيروي اغتشاشي F_w را در فاصله موثر نشان داده شده

در شكل زير اعمال نموده و فرض مي كنيم كلية حركات بسيار كوچك بوده و حالت عمومي حركت قطار فوق سريع برروي ريل در شكل زير نشان داده شده است.

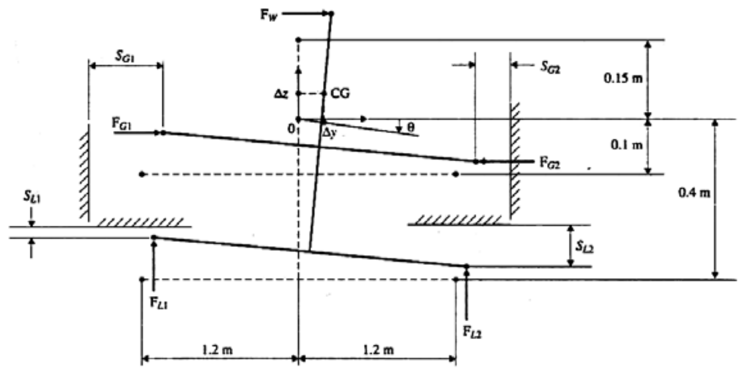


شكل (۲-۳۴) مقطعی از یک وسیله نقلیه دارای سیستم تعلیق مغناطیسی

مدل سيستم را با مراحل پيشنهادي زير بدست آوريد.

- نيروهاي مغناطيس را در حالت تعادل F_{L1}^*, F_{L2}^* براي واگن به جرم $M = 4000kg$, $F_v = 0$ بدست آوريد.
- با فرض اينكه نيروهاي مغناطيسي $5.4\times10^{-3} i^2/s^2$ باشد، مقدار تعادل جريان i^* را در هر قسمت تعليق مغناطيسي به گونه اي تعيين كنيد كه $S^* = 0.014$
- مرحلة ۲ را براي نيروهاي $5000N = F^*_{G2} = F^*_{G1}$, S^* داده شده در مرحلة دو تكرار كنيد.
- قانون دوم نيوتن را براي $\ddot{\theta}, \ddot{y}, \ddot{z}$ برحسب نيروهاي جزئي $\Delta F_{G2}, \Delta F_{G1}, \Delta F_{L2}, \Delta F_{L1}$ و نيروي باد F_w و ارتفاع ريل Z_G بنويسيد و در آن ممان اينرسي واگن را حول مركزجرم آن معادل ۲۵۰۰ kgm^2 درنظر بگيريد.
- نيروهاي كنترلي را معادل $u = i^2$ درنظر بگيريد و نيروهاي مغناطيسي را حول مقادير نقطة تعادل خطي سازي كنيد تا برحسب مقادير $\Delta F, \Delta S, \Delta u$ به صورت خطي تعبير شود.

رابطة خطي براي Δs را برحسب $\theta, \Delta y, \Delta z, Z_G$ (θ كوچك) بدست آوريد و نتيجه را در معادلات بدست آمده در مرحلة چهار قراردهيد و معادلات حالت را براي شش متغير حالت بدست آوريد.



شكل (۲-۳۵) دياگرام فواصل هوائی و نيرو ها- نمايش حالت تعادل با خطوط نقطه چين.

مناسبتر است از متغيرهاي ميانگين زير در مدل استفاده نمائيم.

$$\Delta u_{Lc} = \frac{1}{2}(\Delta u_{L1} + \Delta u_{L2}) \quad \Delta u_{Gc} = \frac{1}{2}(\Delta u_{G1} + \Delta u_{G2})$$

$$\Delta u_{LD} = \frac{1}{2}(\Delta u_{L1} - \Delta u_{L2}) \quad \Delta u_{GD} = \frac{1}{2}(\Delta u_{G1} + \Delta u_{G2})$$

- معادلات حالت را براي وروديهاي جديد فوق تعيين كنيد.

۲-۱۸)

در اين مسئله مي خواهيم خطي سازي يک سيستم غير خطي را حول مسير حركت آن بدست آوريم. در بسياري از مسائل كه نقطة تعادل واحدي وجود نداشته باشد مي توان سيستم را حول مسيري كه در معادلة حالت صدق مي كند, خطي سازي نمائيم. سيستم غير خطي زير را درنظر بگيريد.

$$\dot{x} = f(x,u)$$
$$y = h(x,u)$$

فرض نمائيد $y^*(t), u^*(t), x^*(t)$ مسير نامي, ورودي و خروجي نامي سيستم باشند كه در معادلة حالت فوق صدق مي كنند متغيرهاي افزايشي را مطابق زير تعريف كنيد.

$$\Delta x(t) = x(t) - x^*(t) \quad \Delta u(t) = u(t) - u^*(t) \quad \Delta y(t) = y(t) - y^*(t)$$

۱) با فرض كوچک بودن متغيرهاي تغييرات $\Delta y, \Delta u, \Delta x$, معادلات حالت را براي اين متغيرها با استفاده از بسط تيلور لحظه اي پيدا كنيد. نشان دهيد در حالت عمومي سيستم متغير با زمان خواهد بود.

۲) سيستم غير خطي زير را درنظر بگيريد.

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 - x_2^3 + x_2 u$$
$$y = x_1$$

ابتدا مسير $x^*(t)$ را براي زمان $0 \le t \le 5$ با شرايط اوليه $u(t) = \tau, x_2(0) = 0$ و $x_1(0) = 1$ بدست آوريد همچنين المانهاي ماتريس سيستم خطي سازي شده را برحسب زمان بدست آوريد.

مراجع

[1] Bélanger, Pierre., *Control engineering : a modern approach,* Saunders College Pub., c1995.

[2] Bishop, Robert H., Modern control systems analysis and design using MATLAB and SIMULINK*,* Addison Wesley, c1997.

[3] D'Azzo, John Joachim. And Constantine H. Houpis, *Linear control system analysis and design : conventional and modern,* McGraw-Hill, c1995.

[4] Dorf, Richard C. and H. Bishop, *Modern control system,* Upper Saddle River, NJ : Prentice Hall, 2001.

[5] Gajic, Zoran, and M. Leli´c, *Modern control systems engineering,* Prentice Hall, c1996.

[6] Kilian, Christopher T., *Modern control technology : components and systems*, Delmar Thomson Learning, 2000.

[7] Ogata, Katsuhiko., *Modern control engineering*, 4th ed., Prentice Hall, 2001.

[8] Paraskevopoulos, P. N., *Modern control engineering*, Marcel Dekker, c2002.

[9] دكتر علي خاكي صديق، *اصول كنترل مدرن*، انتشارات دانشگاه تهران، ۱۳۷٤.

فصل سوم: تئوری سیستمهای خطی

۳–۱) مقدمه

موضوع مورد بحث در اين فصل تئوري سيستمهاي خطي غير متغير با زمان (LTI) است. يكـي از انگيزه هاي مهم بررسي تئوري سيستمهاي خطي اينست كه در همسايگي نقاط تعادل، كلية سيستمهاي فيزيكي را مي توان با يك مدل خطي تقريـب زد. امّـا دليـل اصـلي بررسـي دقيـق سيستمهاي خطي اينست كه تنها در مورد اينگونه سيستمها تئوري كامـل و كـاربردي تـدوين شده است. بدين دليل است كه در بسياري از كاربردهاي صنعتي از كلية عوامل غيـر خطـي در فاز طراحي كنترل كننده صرف نظر مي شود. در اين حالت همانگونه كه در فصل قبـل نمـايش داده شد، يك مدل خطي غير متغير با زمان مبناي طراحي كنترل كننده قـرار مـي گيـرد و در عمل عوامل غير خطي تنها در مشابه سازي سيستم حلقـه بسـته بـه منظـور بررسـي عملكـرد كنترل كننده استفاده مي شوند. جالب توجه است كه مدلهاي خطي در اغلب مـوارد منجـر بـه استنباط مناسبي از رفتار سيستم شده و كنترل كننده هاي قابل قبـولي بـراي سيسـتم، توليـد مي كنند.

۳–۲) خصوصیات سیستمهای خطی

سيستم خطي غير متغير با زمان LTI را با معادلات حالت بفرم ماتريسي زير درنظر بگيريد.

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \qquad (۱\text{-}۳)$$

كه در آن بعد ماتريس x برابر n, بعـد ورودي u برابـر r و بعـد خروجـي y برابـر m مـي باشـد. درحالت غير متغير با زمان ماتريسهاي *A, B, C, D* داراي عناصر ثـابتي (غيـر متغيـر بـا زمـان) مي باشند. فرض كنيد شرايط اوليـه $x(0) = x_0$ باشـد. مـي تـوان نشـان داد بـا وجـود شـرايط

فصل سوم

تئوري سيستمهاي خطي

Lipshitz پاسخ سيستم x(t) که از شرايط اوليه x_0 شروع مـي شـود وجـود داشـته و يکتاسـت. پاسخ سيستم را با توجه به خصوصيت " خطي بودن" سيستم به دو جزء مي توان تقسيم نمود.

$$x(t)=x_h(t)+x_p(t) \tag{۲-۳}$$

يا با نمادگذاري ديگري

$$x(t)=x_{zi}(t)+x_{zs}(t) \tag{۳-۳}$$

که در آن x_h يا x_{zi} مربوط به پاسخ همگن يا بـدون ورودي "Zero-input" مـي باشـد کـه بـا توجه به تعريف بايستي معادلة زير را ارضاء نمايد.

$$\begin{matrix} zi \\ u=0 \end{matrix} \quad \begin{cases} \dot{x}_{zi}=Ax_{zi} \\ y_{zi}=Cx_{zi} \end{cases} \tag{۴-۳}$$

با شرايط اوليه $x_{zi}(0)=x_o$

از طرفي x_p مربوط به پاسخ خصوصي يا با شرايط اوليـه صـفر "Zero-State" مـي باشـد. ايـن پاسخ بايستي معادلة زير را ارضاء کند.

$$\begin{matrix} zs \\ x_{zs}(0)=0 \end{matrix} \quad \begin{cases} \dot{x}_{zs}=Ax_{zs}+Bu \\ y_{zs}=Cx_{zs}+Du \end{cases} \tag{۵-۳}$$

طبق خواص خطي بودن پاسخ سيستمهاي LTI مي توان خواص خطي بودن در اجزاء پاسـخ را نيز به صورت زير تعيين نمود.

الف) خطي بودن پاسخ همگن "zi"

فرض کنيد پاسخ $x_1(t)$ مربوط به شرايط اولية $x_1(0)=x_{10}$ و $x_2(t)$ پاسخ مربوط بـه شـرايط اولية $x_2(0)=x_{20}$ باشد. طبق خاصيت خطي سيستم درصورتي که شرايط اوليه $\alpha x_{10}+\beta x_{20}$ باشد پاسخ سيستم برابر است با :

$$x(t)=\alpha x_1(t)+\beta x_2(t) \tag{۶-۳}$$

اثبات:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha\dot{x}_1+\beta\dot{x}_2=\alpha Ax_1+\beta Ax_2 \\ &= A(\alpha x_1+\beta x_2) \\ &= Ax \end{aligned}$$

لذا x(t) پاسخ با شرايط اوليه مزبور مي باشد.

$$\begin{aligned} x(0) &= \alpha x_1(0)+\beta x_2(0) \\ &= \alpha x_{10}+\beta x_{20} \end{aligned}$$

با توجه به يکتائي جواب چون اين يک جواب براي معادله بدون ورودي است, تنها پاسخ موجود با شرط اولية فوق است.

ب) خطي بودن پاسخ خصوصي "zs"

فرض کنيد $x_1(t)$ پاسخ خصوصي مربوط بـه ورودي $u_1(t)$ بـوده و $x_2(t)$ پاسـخ خصوصـي مربوط به $u_2(t)$ باشد. در اينحالت اگر ورودي $u(t)=\alpha u_1(t)+\beta u_2(t)$ به سيستم اعمال شود پاسخ سيستم برابر است با:

$$x(t)=\alpha x_1(t)+\beta x_2(t)$$

اثبات: مجدداً از خصوصيت خطي سيستم استفاده مي شود.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha\dot{x}_1+\beta\dot{x}_2 \\ &= \alpha(Ax_1+Bu_1)+\beta(Ax_2+Bu_2) \\ &= A(\alpha x_1+\beta x_2)+B(\alpha u_1+\beta u_2) \\ &= Ax+B(\alpha u_1+\beta u_2) \end{aligned}$$

لذا x(t) پاسخ سيستم با ورودي $\alpha x_1+\beta x_2$ مي باشد از طرفي شرط اوليه نيز صفر است:

$$x(0)=\alpha x_1(0)+\beta x_2(0)=0+0=0$$

مجدداً با توجه به يکتائي پاسخ اين تنها پاسخ مي باشد.

ج) خاصيت روبهم گذاري

مهمترين خاصيت سيستمهاي خطي در حل معادلات حالت اين خصوصـيت مـي باشـد. پاسـخ کامل يک سيستم خطي که داراي شرايط اوليه x(0) و ورودي u(t) مي باشد از جمـع دو پاسـخ همگن و خصوصي تعيين مي شود.

$$x(t)=x_{zi}(t)+x_{zs}(t) \tag{۷-۳}$$

با توجه به اين خاصيت منطقي است که براي تعيين پاسخ کامل معادلات حالـت يـک بـه يـک اجزاء پاسخ را يعني پاسخ همگن و پاسخ خصوصي را بدست آوريم، که در بخشهاي آتي به ايـن مهم مي پردازيم.

۳-۳) حل معادلات حالت سيستمهاي LTI

۳-۳-۱) حل پاسخ همگن يا بدون ورودي

– ماتريس انتقال حالت $\phi(t)$

سيستم خطي بدون ورودي را درنظر بگيريد.

$$\begin{cases} \dot{x} = A(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \qquad (۳\text{-}۸)$$

از اين معادله مشتق مي گيريم.

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= A\dot{x} = A^2 x \\ \dddot{x} &= A^2\dot{x} = A^3 x \\ &\vdots \\ x^{(k)} &= A^k x \\ x^{(k)}(0) &= A^k x(0) = A^k x_0 \end{aligned} \qquad (۳\text{-}۹)$$

كه در آن $x^{(k)}$ مشتق k ام می باشد. اين معادله نشان مي دهد كه $x^{(k)}(0)$ براي كلية توانهاي محدود وجود خواهد داشت.

حال با استفاده از سري تيلور پاسخ x(t) را برحسب مشتقات آن در زمان صفر تعبير مي كنيم.

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0) + \dot{x}(0)t + \frac{1}{2!}\ddot{x}(0)t^2 + \cdots \frac{1}{k!}x^{(k)}(0)t^k + \cdots \\ &= x_0 + Ax_0 t + \frac{1}{2}A^2 x_0 t^2 + \cdots + \frac{1}{k}A^k x_0 t^k + \cdots \\ &= (I + At + \frac{1}{2}A^2 t^2 + \cdots + \frac{1}{k}A^k t^k + \cdots)x_0 \end{aligned} \qquad (۳\text{-}۱۰)$$

لذا پاسخ همگن بفرم سادة زير تعبير مي شود.

$$\boxed{\varphi(t) = e^{At} = I + At + \frac{1}{2}A^2 t^2 + \cdots + \frac{1}{K}A^k t^k + \cdots} \qquad (۳\text{-}۱۱)$$

كه در آن $\varphi(t)$ ماتريس انتقال حالت يا ماتريس نمائی[1] مي باشد. دقت كنيد علاوه بر خصوصيات مهم ماتريس انتقال حالت و فرم كاملاً مشابه e^{At} به صورت يک ماتريس با e^{at} به صورت اسكالر (كه در ادامه به صورت دقيق آنرا نشان خواهيم داد)، اين معادله از اهميت ديگري نيز برخوردار است. همانگونه كه قبلاً اشاره شد x_0 متغيري است كه كلية اطلاعات لازم براي بدست آوردن تابع زماني x(t) را در خود محفوظ دارد. اين معادله به روشني نشان مي دهد كه x(t) به عنوان يک تابع متغير با زمان و با بعد نامحدود براحتي از اطلاعات موجود در x_0 و مشخصات سيستم $\varphi(t) = e^{At}$ قابل محاسبه است.

علاوه بر آن به صورت برگشتي توسط كامپيوتر مي توان معادلة حالت را براي تعيين پاسخ همگن حل نمود. فرض كنيد زمان را به قسمتهاي كوچكي تقسيم كنيم.

$$\begin{aligned} & t = 0, t_1, t_2, t_3, t_4, \ldots, t_k, t_{k+1}, \ldots \\ & \Delta t = t_{k+1} - t_k \\ & x(t_1) = e^{A\Delta t}x(0) \\ & x(t_2) = e^{A\Delta t}x(t_1) \\ & \vdots \\ & x(t_{k+1}) = e^{A\Delta t}x(t_k) \end{aligned} \qquad (۳\text{-}۱۲)$$

در اينحالت تنها با محاسبة ماتريس انتقال براي يک بار، مي توان پاسخ را به صورت بازگشتي تعيين نمود.

– خصوصيات ماتريس انتقال حالت

Property I: $e^{A0} = \varphi(0) = I$

Property II: $e^{A(t_1+t_2)} = e^{At_1} \cdot e^{At_2} = e^{At_2} \cdot e^{At_1}$

يا:

$$\varphi(t_1 + t_2) = \varphi(t_1) \cdot \varphi(t_2) = \varphi(t_2) \cdot \varphi(t_1)$$

اثبات:

$$x(t_1) = e^{At_1}x(0)$$

$$x(t_1 + t_2) = e^{At_1} \cdot x(t_1) = e^{At_1} \cdot e^{At_2} \cdot x(0)$$

از طرفي:

$$x(t_1 + t_2) = e^{A(t_1+t_2)} \cdot x(0)$$

لذا:

$$e^{A(t_1+t_2)} = e^{At_1} \cdot e^{At_1}$$

طرف بعدي نيز به همين صورت تعيين مي شود.

[1] Exponential matrix

Property III: $(e^{At})^{-1} = e^{-At}$ يا $(\varphi(t))^{-1} = \varphi(-t)$

دقت كنيد:

$$e^{At}.e^{-At} = e^{At}.e^{A(-t)} = e^{A(t-t)} = e^{A(0)} = I$$

لذا ماتريس انتقال حالت همواره معكوس پذير مي باشد.

Property IV: $e^{A^T t} = (e^{At})^T$

اين خاصيت نيز با ترانهاده كردن ماتريسها طبق تعريف سري e^{At} (۳-۱۱) بسادگي اثبات مي شود.

Property V: $A \cdot e^{At} = e^{At} \cdot A$

اين خاصيت نيز با توجه به معادله زير در تعريف سري e^{At} اثبات مي شود.

$$A(A^k t) = A^{k+1} t = (A^k t)A$$

Property VI: $\frac{d}{dt} e^{At} = A \cdot e^{At}$ يا $\frac{d}{dt}\varphi(t) = A \cdot \varphi(t)$

اثبات:

$$\dot{x} = \frac{d}{dt}(\dot{x}) = \frac{d}{dt}(e^{At}x_0)$$
$$= \frac{d}{dt}(e^{At})x_0$$

از طرفي

$$\dot{x} = Ax = Ae^{At}x_0$$
$$\Rightarrow \frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}$$

۳-۳-۲) حل كامل معادلات حالت

براي تعيين حل كامل، معادلة حالت را بفرم زير بازنويسي مي كنيم.

$$\dot{x}(t) - Ax(t) = Bu(t)$$

دو طرف معادله را در e^{-At} ضرب مي كنيم:

$$e^{-At}\dot{x}(t) - e^{-At}Ax(t) = e^{-At}Bu(t)$$
$$\Rightarrow e^{-At}\dot{x}(t) - Ae^{-At}x(t) = e^{-At}Bu(t)$$
$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(e^{-At}x(t)\right) = e^{-At}Bu(t)$$

حال انتگرال گيري مي نمائيم:

$$\int_{t_0}^{t} \frac{d}{d\tau}\left[e^{-A\tau}x(\tau)\right]d\tau = \int_{t_0}^{t} e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau$$
$$e^{-At}x(t) - e^{-At_0}x(t_0) = \int_{t_0}^{t} e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau$$

با ضرب e^{At} در دو طرف معادله خواهيم داشت:

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

اگر از ماتريس انتقال حالت استفاده كنيم:

$$\boxed{x(t) = \underbrace{\varphi(t-t_0)x(t_0)}_{x_{zi}} + \int_{t_0}^{t} \underbrace{\varphi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau}_{x_{zs}}} \qquad (۱۳\text{-}۳)$$

همانطور كه مشخص است پاسخ كلي از دو جزء x_{zi}, x_{zs} تشكيل شده است كه قسمت همگن قبلاً بدست آمده است و پاسخ "zs" يا خصوصي نيز مطابق انتظار فرم انتگرال كانولوشن را دارد كه اين انتگرال كانولوشن با استفاده از تابع $\varphi(t-\tau)$ يا ماتريس انتقال محاسبه مي شود. از طرفي خروجي سيستم را مي توان از معادلة زير بدست آورد.

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

بنابر اين:

$$\boxed{y(t) = C\varphi(t-t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} C\varphi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau + Du(t)} \qquad (۱۴\text{-}۳)$$

مثال ۳-۱): پاسخ كامل سيستم زير را به ازاي $x_0 = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ و ورودي پلة واحد تعيين كنيد.

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}x(t) + \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}u(t)$$

الف) $\varphi(t)$ را تعيين مي كنيم.

$$A = \begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}, A^2 = \begin{bmatrix}1 & 0\\2 & 1\end{bmatrix}, A^3 = \begin{bmatrix}1 & 0\\3 & 1\end{bmatrix}, \ldots$$

لذا

$$e^{At} = I + At + \frac{1}{2}A^2t^2 + \frac{1}{3}A^3t^3 + \cdots$$
$$= \begin{bmatrix} 1+t+\frac{1}{2}t^2+\cdots & 0 \\ t+t^2+\frac{1}{2}t^3+\cdots & 1+t+\frac{1}{2}t^2+\cdots \end{bmatrix}$$

ب) پاسخ خصوصي

$$e^{-At}Bu(\tau) = e^{-At}\cdot\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\cdot 1 \quad \forall t \ge 0$$
$$= \begin{bmatrix} 1-t+\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{3}t^3+\cdots \\ 1-2t+\frac{3}{2}t^2-\cdots \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau = \begin{bmatrix} t-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{6}t^3-\cdots \\ t-t^2+\frac{1}{2}t^3-\cdots \end{bmatrix}$$

پاسخ كامل عبارتست از:

$$x(t) = e^{At}\left[x(0)+\int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau\right] = \cdots = \begin{bmatrix} 1+2t+t^2+\cdots \\ 1+3t+\frac{5}{2}t^2+\cdots \end{bmatrix}$$

۳–۴) روشهاي تعيين ماتريس انتقال حالت $\varphi(t)$

۳–۴–۱) روش تبديل لاپلاس

آقاي "Laub" معتقد است هر روشي كه براي محاسبات دستي مناسب است، براي پياده سازي كامپيوتري مناسب نمي باشد. روشهاي تبديل ماتريس انتقال حالت نيز از اين قاعده مستثني نمي باشند. همانگونه كه از مثال قبل مشاهده مي شود روش بسط سري e^{At} براساس تعريف، روش مناسبي براي محاسبات دستي نيست. خوشبختانه توسط تبديل لاپلاس پاسخ كامل سيستم خطي را در مي توان به صورت تحليلي تعيين نمود. سيستم خطي زير را در نظر بگيريد:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

با استفاده از تبديل لاپلاس

$$sx(s) - x(0) = Ax(s) + Bu(s)$$
$$(sI-A)x(s) = x(0) + Bu(s)$$
$$x(s) = \underbrace{(sI-A)^{-1}x(0)}_{x_{zi}} + \underbrace{(sI-A)^{-1}Bu(s)}_{x_{zs}} = \varphi(s)(x(0)+Bu(s))$$

اين پاسخ مشابه با حالت قبل از دو جزء x_{zs}, x_{zi} تشكيل شده است با اين تفاوت كه در حوزة فركانس s بيان شده است. با برقراري تساوي اين دو معادله خواهيم داشت:

$$\boxed{\varphi(t) = e^{At} = \mathbf{L}^{-1}\left((sI-A)^{-1}\right)} \qquad (۳-۱۵)$$

كه در آن $\mathbf{L}^{-1}$ معرف معكوس تبديل لاپلاس مي باشد.

مثال ۳–۲) پاسخ كامل به ورودي پلة واحد سيستم زير را تعيين كنيد:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u(t)$$

الف) تعيين ماتريس انتقال حالت در حوزة s

$$sI - A = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 3 & s+4 \end{bmatrix} \to (sI-A)^{-1} = \frac{1}{s^2+4s+3}\begin{bmatrix} s+4 & 1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} = \varphi(s)$$
$$e^{At} = \mathbf{L}^{-1}((sI-A) = \mathbf{L}^{-1}\frac{1}{(s+1)(s+3)}\begin{bmatrix} s+4 & 1 \\ -3 & s \end{bmatrix}$$
$$= \mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \frac{3}{s+1}+\frac{-1}{s+3} & \frac{1}{s+1}+\frac{-1}{s+3} \\ \frac{-3}{s+1}+\frac{3}{s+3} & \frac{-1}{s+1}+\frac{3}{s+3} \end{bmatrix}\right\}$$
$$\Rightarrow e^{At} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3e^{-t}-e^{-3t} & e^{-t}-e^{-3t} \\ 3e^{-3t}-3e^{-t} & 3e^{-3t}-e^{-t} \end{bmatrix}$$

ب) تعيين پاسخ كامل

$$x(s)=\varphi(s)x(0)+\varphi(s)\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{s}$$
$$=\varphi(s)x(0)+\frac{1}{s(s+1)(s+3)}\begin{bmatrix}1\\s\end{bmatrix}$$
$$=\varphi(s)x(0)+\frac{1}{6}\begin{bmatrix}\frac{2}{s}+\frac{-3}{s+1}+\frac{1}{s+3}\\ \frac{1}{s+1}+\frac{-1}{s+3}\end{bmatrix}$$
$$x(t)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}3e^{-t}-e^{-3t} & e^{-t}-e^{-3t}\\ 3e^{-t}-3e^{-3t} & 3e^{-t}-e^{-3t}\end{bmatrix}x(0)+\frac{1}{6}\begin{bmatrix}2-3e^{-t}+e^{-3t}\\ e^{-t}-e^{-3t}\end{bmatrix}\quad\forall t\geq 0$$

۳-۴-۲) مودهای دینامیکی

اگر فرم فركانسي $\varphi(s)$ را به شكل زير نمايش دهيم

$$\varphi(s)=(sI-A)^{-1}=\frac{Adj(sI-A)}{\det(sI-A)} \qquad (۳-۱۶)$$

كه اين معادله مبين روش كرامر در تعيين معكوس ماتريس مي باشد (براي اطلاعات بيشتر بـه ضميمة (۱) مراجعه شود)، اين معادله را مي توان برحسب ريشه هـاي دترمينـان مخـرج بسـط داد:

$$\varphi(s)=\frac{A_{11}}{s-s_1}+\frac{A_{12}}{(s-s_1)^2}+\cdots+\frac{A_{21}}{(s-s_2)}+\frac{A_{22}}{(s-s_2)^2}+\cdots \qquad (۳-۱۷)$$

كه در آن معادلة فوق به صورت كسرهاي جزئي[1] از ريشه هاي دترمينان نوشـته شـده و فـرض شده است كه در حالت كلي ريشه هاي دترمينان مي توانند تكراري باشند. حـال بـا اسـتفاده از تبديل معكوس لاپلاس خواهيم داشت.

$$\varphi(t)=A_{11}e^{s_1t}+A_{12}t\cdot e^{s_1t}+\cdots+A_{21}e^{s_2t}+A_{22}t\cdot e^{s_2t}+\cdots \qquad (۳-۱۸)$$

كه در آن $s_1,s_2,\ldots$ ريشه هاي معادلة زير مي باشند.

$$\det(s_iI-A)=0 \qquad (۳-۱۹)$$

[1] Partial fraction

اما اين معادله دقيقاً معادلة مقادير ويژة ماتريس A مي باشد. لـذا s_i مقـادير ويـژة مـاتريس A مي باشد و ماتريس انتقال از تركيب خطي توابع نمائي با توان مساوي با مقدار ويژة مـاتريس A تشكيل مي شود كه درصورت تكراري بودن ضريب زمان نيز گرفته اند.
در تئوري سيستمهاي خطي به مقادير ويژة ماتريس سيستم، مودهاي ديناميكي گفته مي شود. ويژگي خاص مود ديناميكي اينست كه اجزاء اصلي ديناميكي سيستم را معين مي كنـد. دقـت كنيد هر مقدار ويژه به صورت متناظر داراي بردار ويژه اي نيز مي باشد كه

$$Av_i=s_iv_i \qquad (۳-۲۰)$$

حال اين بردار ويژه سيستم، در ماتريس انتقال حالت نيز ويژگي را از خود بروز مي دهد.

$$e^{At}v_i=v_i+Av_it+\frac{1}{2!}A^2v_it^2+\cdots+\frac{1}{k!}A^kv_it^k+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^kv_it^k}{k!} \qquad (۳-۲۱)$$

اما:

$$A^2v_i=AAv_i=As_iv_i=s_iAv_i=s_i^{\,2}v_i$$
$$\vdots$$
$$A^kv_i=s_i^{\,k}v_i$$

بنابراين

$$e^{At}v_i=v_i+s_iv_it+\frac{1}{2}s_i^{\,2}v_it^2+\cdots\frac{1}{k}s_i^{\,k}t^k+\cdots$$
$$=(1+s_it+\frac{1}{2}s_i^{\,2}t^2+\cdots\frac{1}{k}s_i^{\,k}t^k+\cdots)v_i$$
$$=(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{s_i^{\,k}t^k}{k}).v_i$$
$$=e^{s_it}.v_i$$

لذا رابطة مشابه با بردار ويژه ماتريس سيستم در مورد ماتريس انتقال حالت نيز وجـود دارد كـه عبارتست از:

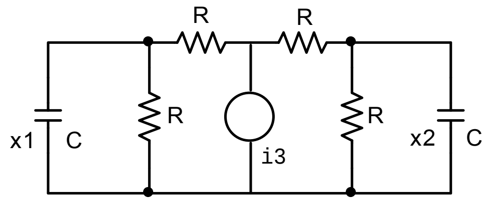
$$\boxed{\underset{\text{ماتريس}}{A}\cdot v_i=\underset{\text{اسكالر}}{s_i}v_i\rightarrow \underset{\text{ماتريس}}{e^{At}}v_i=\underset{\text{اسكالر}}{e^{s_it}}v_i} \qquad (۳-۲۲)$$

لذا v_i علاوه بر اينكه بردار ويژة ماتريس A مي باشد, بردار ويژة ماتريس e^{At} نيز مـي باشـد و همانگونه كه s_i مقدار ويژة سيستم مي باشـد، e^{s_it} نيـز مقـدار ويـژة مـاتريس انتقـال حالـت

سيستم مي باشد. اهميت فيزيکي اين خصوصيت رياضي بدين ترتيب است که پاسخ همگن يا بدون ورودي سيستم x_{zi} به شرايط اوليه اي که در جهت يک بردار ويژه قرار گيرد، $x_0 = v_i$، برابر است با $x(t) = e^{s_i t}.v_i$ يعني به ازاي اين شرايط خاص تنها مـود دينـاميکي s_i تحريـک شده و خروجي آن نيز در امتداد همان مود باقي مي ماند. بدين ترتيب در اين حالت x(t) در هر لحظه از زمان در امتداد v_i بوده و به اندازة $\left|e^{s_i t}\right|$ تقويت شده اسـت. لـذا بردارهـاي ويـژة v_i جهت هاي هندسي را در فضا نمايش مي دهند که به ازاي آن شرايط اوليه تنها مود دينـاميکي مربوطه تحريک شده و پاسخ تغيير جهت نمي دهد. به اين مودهاي ويژه بردارهاي مـودال[1] نيـز گفته مي شود.

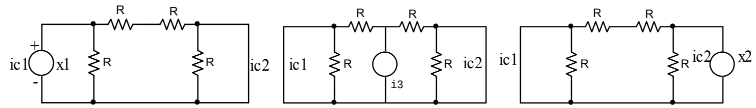
مثال ۳-۳): براي شبکة مدار زير مودهـاي دينـاميکي و بردارهـاي مـودال را بـه ازاي R=C=1 تعيين کنيد و پاسخ بدون ورودي سيستم را به شرايط اوليه معادل دو بـردار ويـژه آنـرا بدسـت آوريد.

در مدارها ولتاژ خازنها و جريان سلف معمولاً انتخاب مناسبي براي متغيرهاي حالت مي باشـند، چراکه شرايط اوليه مدار را مي توان توسط آنها معين نمود.



شکل (۳-۱) مدار الکتريکی مثال (۳-۳)

براي تعيين معادلات حالت مي توان به جاي خازنها از منبع ولتاژ استفاده نمود و از قاعدة جمع آثار با تقسيم مدار به سه مدار زير استفاده نمود.



[1] Modal Vectors

$$\begin{cases} i_{c1} = -\dfrac{3}{2R}x_1 + \dfrac{i_s}{2} + \dfrac{1}{2R}x_2 \\ i_{c2} = \dfrac{1}{2R}x_1 + \dfrac{i_s}{2} - \dfrac{3}{2R}x_2 \end{cases} \qquad \frac{dv}{dt} = \frac{i_c}{C}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = \dfrac{1}{C}i_{c1} = -\dfrac{3}{2RC}x_1 + \dfrac{1}{2RC}x_2 + \dfrac{1}{2C}i_s \\ \dot{x}_2 = \dfrac{1}{C}i_{c2} = \dfrac{1}{2RC}x_1 - \dfrac{3}{2RC}x_2 + \dfrac{1}{2C}i_s \end{cases}$$

به ازاي R=C=1 خواهيم داشت:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} i_s$$

براي محاسبة مقادير ويژه داريم:

$$\det(sI - A) = \det\begin{bmatrix} s+\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & s+\frac{3}{2} \end{bmatrix} = s^2 + 3s + 2 = (s+1)(s+2)$$

$s_1 = -1, s_2 = -2$

براي محاسبة بردارهاي ويژه داريم:

$$Av_i = s_i v_i \quad \text{يا} \quad \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix}$$

لذا:

$$\begin{cases} \dfrac{-3}{2}v_{11} + \dfrac{1}{2}v_{12} = -v_{11} \\ \dfrac{1}{2}v_{11} - \dfrac{3}{2}v_{12} = -v_{12} \end{cases} \Rightarrow v_{11} = v_{12} = 1$$

لذا بردار ويژه مي تواند هر اندازه اي داشته باشد ولي جهت آن 45^o است.

$$v_1 = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

بهمين ترتيب بردار ويژه دوم نيز محاسبه مي شود.

$$v_2 = \beta\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$$

لذا اگر شرايط اوليه $x(0)=\alpha\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ باشد پاسخ سيسستم برابر است با:

$$x(t)=e^{-t}\alpha.\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

لذا اگر شرايط اوليه $x(0)=\beta\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$ باشد پاسخ سيسستم برابر است با:

$$x(t)=e^{-2t}\beta.\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$$

از لحاظ فيزيكي, منطق مدار مودهاي ديناميكي آنرا بدين صورت توجيه مـي كنـد كـه اگـر در ابتدا هر دو ولتاژ خازنها با هم برابر باشند، $\alpha[1 \quad 1]^T$ و درصورتي كه $i_s=0$ باشد ولتاژها برابـر باقي مانده و هيچ جرياني از مقاومتهاي بالائي مدار عبور نخواهـد كـرد و لـذا هـر دو ولتـاژ بـه صورت متقارن با ثابت زماني RC=1 كاهش مي يابند.

مود دوم ديناميكي در حالتي اتفاق مي افتد كه ولتاژ اولية خازنها برابر ولـي بـا علامـت مخـالف است: $\beta[1 \quad -1]^T$. تقارن مدار سبب مي شود كه اين وضعيت درحـال كـاهش ولتـاژ نيـز بـاقي بماند يعني $x_2(t)=-x_1(t)$ اما اين بار با ثابت زماني 2 افت ولتاژ را مشاهده مي كنيم.

۳-۴-۳) روش كِيلي-هَميلتون[1]

معادلة تعيين مقادير ويژة A را معادلة مشخصه مي ناميم.

$$Q(\lambda)=\det(\lambda I-A)$$ (۲۳-۳)

و مقادير ويژه از برابري معادله مشخصه با صفر تعيين مي شود.

$$Q(\lambda)=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0=0$$ (۲۴-۳)

قضية .C.H بيان مي كند كه هر ماتريس در معادلة مشخصة خود صدق مي كند لذا

$$Q(A)=A^n+a_{n-1}A^{n-1}+\cdots+a_1A+a_0I=\mathbf{0}$$ (۲۵-۳)

كه در آن a_i ضرايب معادلة مشخصة ماتريس A مي باشند. از اين قضيه مـي تـوان اسـتفاده نمود تا هر تابع ماتريسي A را كه به صورت بسط چند جمله اي از A نمايش يافتـه اسـت را

[1] Caley-Hamilton

تعيين كنيم. فرض كنيد تابع $N(A)$ را كه به صورت بسط چند جمله اي از A نمايش يافته است را بخواهيم تعيين كنيم:

$$N(A)=A^m+c_{m-1}A^{m-1}+\cdots+c_1A+c_0I$$ (۲۶-۳)

$$N(\lambda)=\lambda^m+c_{m-1}\lambda^{m-1}+\cdots+c_1\lambda+c_0$$ (۲۷-۳)

با تقسيم چند جمله اي $N(\lambda)$ بر چند جمله اي مشخصة سيستم خواهيم داشت:

$$\frac{N(\lambda)}{Q(\lambda)}=F(\lambda)+\frac{R(\lambda)}{Q(\lambda)}$$ (۲۸-۳)

كه در آن $F(\lambda)$ خارج قسمت و $R(\lambda)$ باقيماندة تقسيم مستقيم مي باشند لذا

$$N(\lambda)=F(\lambda)Q(\lambda)+R(\lambda)$$ (۲۹-۳)

اما در $\lambda=\lambda_i$ معادلة مشخصه صفر است. بنابراين

$$\boxed{N(\lambda_i)=R(\lambda_i)}$$ (۳۰-۳)

به همين ترتيب براساس قضية .C.H براي ماتريس A نيز اين خاصيت برقرار است.

$$\boxed{N(A)=R(A)}$$ (۳۱-۳)

حال اگر تابع انتقال حالت را بخواهيم محاسبه كنيم

$$N(A)=e^{At}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^kt^k}{k}$$ (۳۲-۳)

كه يک سري بي نهايت مي باشد اما مي دانيم

$$A^n+a_{n-1}A^{n-1}+\cdots+a_1A+a_0=0$$

$$A^n=-a_0+(-a_1)A+\cdots+(-a_{n-1})A^{n-1}=f_1(A,\ldots,A^{n-1})$$

بهمين ترتيب

$$A^{n+1}=-a_0A-a_1A^2-\cdots-a_{n-1}A^n$$

$$=-a_0A-a_1A^2-\cdots-a_{n-2}A^{n-1}a_{n-1}(-a_0-a_1A-\cdots-a_{n-1})A^{n-1}$$

$$=b_0+b_1A+\cdots+b_{n-1}A^{n-1}=f_2(A,\ldots,A^{n-1})$$

لذا كلية ترمهاي بالاتر را مي توان برحسب $f(A,\ldots,A^{n-1})$ نمايش داد (از رابطـة باقيمانـده نيز همين نتيجه بدست مي آيد).

$$e^{At}=N(A)=\alpha_0(t)I+\alpha_1(t)A+\cdots+\alpha_k(t)A^k+\cdots+\alpha_{n-1}(t)A^{n-1}$$ (۳۳-۳)

كه در آن ضرايب α_i را مي توان طبق قضية .C.H از ضرايب باقيماندة تقسيم بدست آورد.

$$e^{At} = N(A) = R(A) \qquad (۳-۳۴)$$

مثال ۳-۴): ماتريس انتقال حالت را براي سيستم زير تعيين كنيد.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}$$

چون معادلة درجة دوم است باقيمانده بايستي حداكثر درجة اول باشد.

$$N(\lambda_i) = R(\lambda_i) = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda_i$$

كه در آن $N(\lambda_i) = e^{\lambda_i}$. اين معادله را براي هر دو مقدار ويژه باز نويسي مي كنيم:

$$\begin{cases} e^{-2t} = \alpha_0 + \alpha_1(-2) \\ e^{-3t} = \alpha_0 + \alpha_1(-3) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = e^{-2t} - e^{-3t} \\ \alpha_0 = 3e^{-2t} - 2e^{-3t} \end{cases}$$

$$e^{At} = N(A) = R(A) = \alpha_0 I + \alpha_1 A = \begin{bmatrix} \alpha_0 & 0 \\ 0 & \alpha_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 6\alpha_1 \\ -\alpha_1 & -5\alpha_1 \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \cdots = \begin{bmatrix} 3e^{-2t} - 2e^{-3t} & 6e^{-2t} - 6e^{-3t} \\ -e^{-2t} + 2e^{-3t} & 3e^{-3t} - 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

مثالهاي متنوعي در پيوست دو در اين باره حل شده است.

۳-۴-۴) روش سيلوستر[1]

در اين روش از بسط سيلوستر براي محاسبة توابع ماتريسي A و در اينجا ماتريس انتقال حالت $\varphi(t) = e^{At}$ استفاده مي شود. درحالتيكه مقادير ويژه متمايز باشند چندجمله اي N(A) را مي توان به فرم زير نمايش داد.

1 Silvester method

$$\begin{cases} e^{At} = N(A) = \sum_{i=1}^{n} N(\lambda_i) Z_i(\lambda) \\ Z_i(\lambda) = \dfrac{\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} (A - \lambda_j I)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} (\lambda_i - \lambda_j)} \end{cases} \qquad (۳-۳۵)$$

ماتريسي هاي Z_i را سازا[1] مي نامند. اين ماتريسها داراي ويژگي هاي زير مي باشند.

الف) متعامد بودن $\quad Z_i Z_j = 0 \qquad i \neq j$

ب) كامل بودن $\quad \sum_{i-1}^{n} Z_i = I$

ج) خودتواني $\quad \forall r \in \mathbb{N} \qquad Z_i^{\,r} = Z_i$

درحالتيكه مقادير ويژه متمايز نباشند نيز ميتوان ايـن روش را تعمـيم داد، كـه جزئيـات آن در ضميمة (۲) در بخش مسائل حل شدة فصل سوم و در مسئلة (۳-۷) آورده شده است.

مثال ۳-۵) مثال (۳-۴) را با روش سيلوستر حل نمائيد.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -3$$

$$z_1 = \frac{A - \lambda_2 I}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{1}{-2-(-3)} \begin{bmatrix} 0+3 & 6 \\ -1 & -5+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$z_2 = \frac{A - \lambda_2 I}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 0+2 & 6 \\ -1 & -5+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

با بكارگيري معادلة سيلوستر

$$\begin{aligned} \varphi(t) = e^{At} &= z_1 e^{\lambda_1 t} + z_2 e^{\lambda_2 t} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} e^{-2t} + \begin{bmatrix} -2 & -6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} e^{-3t} \\ &= \begin{bmatrix} 3e^{-2t} - 2e^{-3t} & 6(e^{-2t} - e^{-3t}) \\ -e^{-2t} + e^{-3t} & -2e^{-2t} + 3e^{-3t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

1 Consistent

۳–۵) ماتریس تبدیل سیستمهای خطی

نمايش فضاي حالت سيستمهاي خطي غير متغير با زمان را مي توان در حالـت SISO بـه فـرم تابع تبديل و درحالت MIMO به فرم ماتريس تبديل نمايش داد. سيستم خطي زيـر را در نظـر بگيريد:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

در نمايش تابع تبديل فرض مي شود كلية شرايط اوليه صـفر بـوده و پاسـخ خصوصـي يـا x_{zs} درنظر مي باشد. با اين فرض از معادلات فوق تبديل لاپلاس مي گيريم:

$$\begin{cases} sx(s) = Ax(s) + Bu(s) \rightarrow x(s) = (sI - A)^{-1} Bu(s) \\ y(s) = Cx(s) + Du(s) \end{cases}$$

$$y(s) = \left[C(sI - A)^{-1} B + D \right] u(s)$$

در اينحالت ماتريس تبديل عبارتست از:

$$\boxed{H(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = C(sI - A)^{-1} B + D} \qquad (۳-۳۶)$$

مثال ۳–۶) سيستم زير را در نظر بگيريد:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u$$

اين سيستم تک ورودي تک خروجي (SISO) مي باشد لذا تابع تبديل آن براحتي قابل محاسبه است.

$$\begin{aligned} H(s) &= C(sI - A)^{-1} B \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+4 \\ s-2 \end{bmatrix} = \frac{s+4}{s^2 + 3s + 2} \end{aligned}$$

مثال ۳–۷) براي موتور DC بادرنظر گرفتن خروجي θ توابع تبديل را بدست آوريد:

با استفاده از نتايج مثال (۲-۲) در مورد مدل موتور DC داريم:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4.438 \\ 0 & -12 & -24 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -7.396 \\ 20 & 0 \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

از دستور ss2zp يـا ss2tf نـرم افـزار Matlab اسـتفاده مـي كنـيم و توابـع تبـديل را محاسـبه مي كنيم.

$$\frac{\theta}{v} = \frac{88.76}{s(s + 21.526)(s + 2.474)}$$

$$\frac{\theta}{T_L} = \frac{-7.396(s + 24)}{s(s + 21.526)(s + 2.474)}$$

۳–۶) قطب ها و صفرهای انتقال

براي تعيين قطبها و صفرهاي سيستم مجـدداً معادلـة مـاتريس تبـديل (۳-۳۶) را بـاز نويسـي مي كنيم.

$$H(s) = C(sI - A)^{-1} B + D$$

اگر ماتريس B را به صورت ستوني با b_i نمايش دهيم و C را به صورت سطري با c_i نمايش دهيم خواهيم داشت:

$$B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_r \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} \qquad (۳-۳۷)$$

ماتريس انتقال حالت عبارتست از:

$$H(s) = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} (sI - A)^{-1} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_r \end{bmatrix} + D \qquad (۳-۳۸)$$

لذا هر عنصر اين ماتريس عبارتست از:

$$H(s)=\left[H_{ij}(s)\right]_{rxm}$$

$$H_{ij}(s)=\frac{c_i^T\,Adj(sI-A)b_j+d_{ij}\det(sI-A)}{\det(sI-A)} \qquad (۳۹\text{-}۳)$$

ماتريس Adj از حذف سطر i و ستون j تشكيل شده و لذا داراي حداكثر بعد n-1 مي باشد. لذا درجة چند جمله اي $c_i^T\,Adj(sI-A)b_j$ حداكثر از رتبة n-1 مي باشد. اين درحاليست كه رتبة مخرج $\det(sI-A)$ از مرتبة n مي باشد. اگر $D=0$ باشد تابع تبديل بدست آمده اكيداً سره[1] خواهد بود. درحالتيكه $D\neq 0$ باشد درجة صورت و مخرج با هم برابر است و تابع تبديل سره[2] خواهد شد. به هر حال در هيچ صورت تابع تبديل غير سره[3] نخواهيم داشت و اين منطبق با علّي بودن معادلات ديفرانسيل مي باشد.

اما قطبهاي تک تک عناصر ماتريس تبديل سيستم، ريشه هاي مخرج يعني ريشه هاي معادلة $\det(sI-A)$ مي باشند:

كلية قطبهاي سيستم، مقادير ويژة ماتريس A مي باشند.

اما معكوس اين عبارت صحيح نمي باشد. يعني ممكن است يكي از مقادير ويژه با عنصري درصورت تابع تبديل حذف شده و در قطبهاي سيستم ظاهر نشود. جالب توجه است كه ماتريسهاي $B,\ C,\ D$ در محل قطبها هيچ تأثيري ندارند و تنها مقادير ويژة ماتريس A در آن تأثير دارد. اما اين ماتريسها در محل صفرهاي سيستم تأثير بسزائي دارند.

نقطه اي را در يک تابع تبديل SISO صفر مي ناميم: s_0، كه در آن $H(s_0)=0$ باشد. اين تعريف را مي توان به صفر انتقال در سيستمهاي MIMO نيز تعميم داد. صفر انتقال عددي مختلط است $s_0\in\mathbb{C}$ كه در آن به ازاي يک بردار غير صفر $\exists w\neq 0$ مقدار عبارت زير صفر گردد.

$$\boxed{H(s_0)w=\mathbf{0}} \qquad (۴۰\text{-}۳)$$

اين معادله را بفرم ماتريسي مي نويسيم.

$$\left[C(s_0I-A)^{-1}B+D\right]w=\mathbf{0} \qquad (۴۱\text{-}۳)$$

فرض كنيد

$$\theta=(s_0I-A)^{-1}Bw \qquad (۴۲\text{-}۳)$$

[1] Strictly proper
[2] Proper
[3] Improper

در اينصورت به دو معادلة صفر مي رسيم.

$$\begin{cases}-(s_0I-A)\theta+Bw=\mathbf{0}\\ C\qquad \theta+Dw=\mathbf{0}\end{cases} \qquad (۴۳\text{-}۳)$$

يا

$$\begin{bmatrix}-s_0I+A & B\\ C & D\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta\\ w\end{bmatrix}=\mathbf{0} \qquad (۴۴\text{-}۳)$$

اين معادله تنها زماني جواب غير صفر دارد $w\neq 0$، كه ماتريس اصلي آن تكين[1] باشد, در اين حالت صفر انتقال s_0 از معادلة زير تعيين مي شود.

$$\det\begin{bmatrix}-s_0I+A & B\\ C & D\end{bmatrix}=\det\left\{s_0\begin{bmatrix}-I & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}\right\} \qquad (۴۵\text{-}۳)$$

اين مسئله بنام "مسئله مقدار ويژة تعميم يافته" مشهور است كه براي حل آن روشهاي عددي بسيار مناسبي وجود دارد.

مثال ۳–۸) براي سيستم خطي زير، قطبها و صفرهاي انتقال را پيدا كنيد:

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix},\ D=\begin{bmatrix}0\end{bmatrix}$$

پاسخ:

قطبها از مقادير ويژة ماتريس A محاسبه مي شوند كه قبلاً محاسبه شده اند.

$$\lambda_1=-1,\lambda_2=-2$$

محاسبة صفرهاي انتقال سيستم:

$$\det\left[\begin{array}{cc:c}-s_0 & 1 & 1\\ -2 & -3-s_0 & 1\\ \hdashline 1 & 0 & 0\end{array}\right]=\mathbf{0}$$

$$1\left[1-(-3-s_0)\right]+0+0=0$$

$$1+3+s_0=0$$

$$\Rightarrow \boxed{s_0=-4}$$

[1] Singular

۳–۷) تبديلهاي همانندي[1]

عليرغم نكات مثبت معادلات حالت در نمايش سيستمها در قياس با ماتريس تبديل H(s) يكي از نقايص اين نمايش منحصر به فرد نبودن آن مي باشد. يعني ممكن است براي يک سيستم واحد H(s) بتوان چند سري ماتريسهاي نمايش سيستم [A,B,C,D] تعيين نمود. تفاوت در نمايش به علت آزادي انتخاب متغيرهاي حالت در سيستم مي باشد. حتي تعداد متغيرهاي حالت مي تواند بيش از درجة سيستم اختيار شود. در بسياري از مواقع مناسب است متغيرهاي حالت يا سيستم مختصات مناسبي را اختيار نمود كه عمليات ماتريسي را ساده و تسريع نمايد. به عنوان مثال براي بدست آوردن e^{AT} اگر ماتريس A را قطري نمائيم. با سهولت بيشتري مي توان عمليات ماتريسي را دنبال نمود. تبديل مختصات در سيستمها توسط تبديلهاي همانندي صورت مي پذيرد. سيستم زير را درنظر بگيريد.

$$\begin{cases}\dot{x} = Ax + Bu\\ y = Cx + Du\end{cases}$$

تبديل همانندي T و متغير جديد z را به صورت زير تعريف مي كنيم. z تركيب خطي از x مي باشد، لذا T ماتريس ثابت و ناويژه اي خواهد بود. در اينحالت:

$$\begin{aligned} z &= T^{-1}x(t)\\ x(t) &= T\,z(t)\end{aligned} \qquad (۳-۴۶)$$

حال معادله حالت را با متغير حالت جديد تعيين مي كنيم.

$$\begin{cases}T\,\dot{z}(t) = AT\,z(t) + Bu(t)\\ y(t) = CT\,z(t) + Du(t)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dot{z}(t) = T^{-1}AT\,z(t) + T^{-1}Bu(t)\\ y(t) = CT\,z(t) + Du(t)\end{cases} \qquad (۳-۴۷)$$

لذا با استفاده از روابط فوق از يک معادله به معادلة ديگر مي توان رسيد.

– چرا اين تبديل را همانندي مي نامند؟

تابع تبديل سيستم را در مختصات جديد بدست مي آوريم:

[1] Similarity transformations

$$H_{new}(s) = CT(sI - T^{-1}AT)^{-1}T^{-1}B + D$$

دقت كنيد.

$$\begin{aligned} sI - T^{-1}AT &= sT^{-1}T - T^{-1}AT = T^{-1}(sI - A)T\\ (sI - T^{-1}AT)^{-1} &= [T^{-1}(sI - A)T]^{-1}\\ &= T^{-1}(sI - A)^{-1}T\end{aligned}$$

حاصل را در معادله قبل جايگذاري مي كنيم.

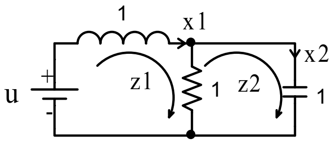
$$\begin{aligned} H_{new}(s) &= CTT^{-1}(sI - A)^{-1}TT^{-1}B + D\\ &= C(sI - A)^{-1}B + D = H_{old}(s)\end{aligned}$$

اين بدان معناست كه با اين تبديل مختصات ماتريس تبديل سيستم تغيير نمي كند. لذا كلية خصوصيات اصلي سيستم از جمله معادلة مشخصه، قطبها و صفرها با اين تبديل تغيير نمي كند و لذا به آن تبديل همانندي مي گويند.

دقت كنيد T^{-1} نيز همانند T تبديل همانندي ديگري است، و هر دو تبديل خصوصيات تبديل همانندي را دارند.

$$\begin{aligned} x &= T_1 z\\ z &= T_2 x\end{aligned} \qquad (۳-۴۸)$$

مثال ۳–۹) در مدار زير:



با درنظر گرفتن $L = R = C = 1$ درصورتيكه جريان سلف را x_1 و ولتاژ خازن را x_2 درنظر بگيريم معادلات حالت سيستم برابر است با:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}u(t)$$

در اين حالت خروجي، ولتاژ خازن مي باشد.

$$y(t) = \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}x(t)$$

حال اگر به جاي x_2, x_1 جريانهاي حلقه ها z_2, z_1 را به عنوان متغير حالت درنظر بگيريم.

$$\begin{bmatrix}\dot{z}_1\\ \dot{z}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1\\ z_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t)=\begin{bmatrix}0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1\\ z_2\end{bmatrix}$$

دو دستة معادلات ديناميكي بالا داراي يک بعد بوده و يک سيستم را توصيف مي كنند و از اينرو معادل مي باشند. تبديل همانندي بين دو نمايش را مي توان از رابطة زير تعيين نمود.

$$\begin{cases}x_1(t)=z_1(t)\\ x_2(t)=z_1(t)-z_2(t)\end{cases}$$

$$\Rightarrow x=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix}z \quad \text{يا} \quad z=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix}x$$

كه در اينجا استثنائاً $T=T^{-1}$ مي باشد يا $T^2=I$ است.

۳–۸) قطری سازی معادلات حالت (فرم جوردن)

۳–۸–۱) فرم قطری ماتریس

در حالت خاصي كه ماتريس A داراي n مقدار ويژة متمايز باشد و يا بتوان n بردار ويژة مستقل براي آن يافت، ماتريس A را مي توان به حالت قطري كامل تبديل نمود. فرض كنيد $v_n,\ldots,v_2,v_1$ بردارهاي ويژة ماتريس A باشند در اينصورت:

$$T=\begin{bmatrix}v_1 & v_2 & \cdots & v_n\end{bmatrix} \qquad (۴۹\text{-}۳)$$

ماتريس T تبديل همانندي است كه سيستم را به فرم قطري تبديل مي كند. در اين حالت:

$$x=T\cdot z=z_1v_1+z_2v_2+\cdots+z_nv_n \qquad (۵۰\text{-}۳)$$

معكوس ماتريس T نيز تبديل همانندي است كه آنرا مي توان به صورت بردارهاي سطري w_i نوشت:

$$T^{-1}=\begin{bmatrix}w_1^T\\ w_2^T\\ \vdots\\ w_n^T\end{bmatrix} \qquad (۵۱\text{-}۳)$$

با توجه به اينكه $T^{-1}T=I$ مي باشد داريم:

$$T^{-1}T=\begin{bmatrix}w_1^Tv_1 & w_1^Tv_2 & \cdots & w_1^Tv_n\\ \vdots & & & \vdots\\ w_n^Tv_1 & w_n^Tv_2 & \cdots & w_n^Tv_n\end{bmatrix}=I_{n\times n} \qquad (۵۲\text{-}۳)$$

اين بدان معناست كه اين بردارها متناظراً بر هم عمودند:

$$w_i^Tv_j=\begin{cases}1 & \text{if} \quad i=j\\ 0 & \text{if} \quad i\neq j\end{cases} \qquad (۵۳\text{-}۳)$$

مي توان نشان داد كه w_i نيز بردارهاي ويژه ماتريس A^T مي باشند كه متناظر با مقدار ويژة s_i مي باشند. حال نشان مي دهيم كه ماتريس $T^{-1}AT$ قطري مي باشد:

$$\begin{aligned}AT&=A\begin{bmatrix}v_1 & v_2 & \cdots & v_n\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}Av_1 & Av_2 & \cdots & Av_n\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}s_1v_1 & s_2v_2 & \cdots & s_nv_n\end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$T^{-1}A\,T=\begin{bmatrix}w_1^T\\ \vdots\\ w_n^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s_1v_v & s_2v_2 & \cdots & s_nv_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s_jw_i^Tv_j\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}s_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & s_2 & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & s_n\end{bmatrix} \qquad (۵۴\text{-}۳)$$

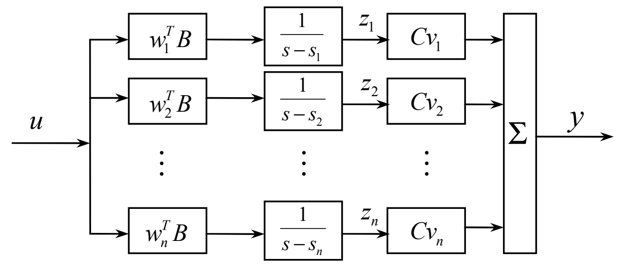
دقت كنيد:

$$T^{-1}B=\begin{bmatrix}w_1^TB\\ \vdots\\ w_n^TB\end{bmatrix}, \quad CT=\begin{bmatrix}Cv_1 & Cv_2 & \cdots & Cv_n\end{bmatrix} \qquad (۵۵\text{-}۳)$$

لذا معادلات حالت به فرم قطري را مي توان به صورت زير نوشت:

$$\begin{cases}\dot{z}=\begin{bmatrix}s_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & s_2 & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & s_n\end{bmatrix}z+\begin{bmatrix}w_1^TB\\ w_2^TB\\ \vdots\\ w_n^TB\end{bmatrix}u\\ y=\begin{bmatrix}Cv_1 & Cv_2\cdots & Cv_n\end{bmatrix}z+Du\end{cases} \qquad (۵۶\text{-}۳)$$

فرم جوردن در اينحالت به ساده ترين فرم ممكن نوشته مي شود. شكل بلـوكي (۳-۲) نمـايش تجزيه شدة سيستم مي باشد.



شكل (۳-۲) نمايش بلوكی سيستم به فرم قطری

مثال ۳–۱۰) موتور DC ضد هوائی:

به ازاي $y=\theta$ فرم قطري سيستم را بدست آوريد.

پاسخ: مقادير ويژة ماتريس سيستم را قبلاً بدست آورده ايم:

$$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = -2.474,\ \lambda_3 = -21.526$$

با استفاده از معادلات سيستم

$$T = \begin{bmatrix} 1 & -0.4042 & 0.0096 \\ 0 & 1 & -0.2062 \\ 0 & -0.5575 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0.4507 & 0.0833 \\ 0 & 1.1299 & 0.2329 \\ 0 & 0.6299 & 1.1299 \end{bmatrix}$$

مي توان نشان داد

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2.474 & 0 \\ 0 & 0 & -21.526 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1}B = \begin{bmatrix} 1.667 & -3.3330 \\ 4.6588 & -8.3564 \\ 22.5971 & -4.6584 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow CT = \begin{bmatrix} 1 & -0.4042 & 0.0096 \end{bmatrix}$$

۳–۸–۲) تبديل ماتريس سيستم با مقادير ويژة مختلط

اگر مقادير ويژة ماتريس سيستم A ، مختلط باشند بردارهاي ويژه مختلط بوده و فرم اسـتاندارد حالت قبل به صورت ماتريسهاي مختلط بدست مي آيد، كه فرم مناسبي براي محاسبات بعـدي نيست. در اينحالت با توجه به مزدوج بودن مقادير ويژة سيستمهاي حقيقي، مي توان معـادلات مربوط به دو مقدار ويژة مختلط را به صورت زير نوشت:

$$\begin{cases} \dot{z}_i = s_i z_i + (w_i^T B)u \\ \dot{z}_{i+1} = s_i^* z_{i+1} + ({w^*}_i^T B)u \end{cases} \qquad (۵۷-۳)$$

$$y = Cv_i z_i + Cv_i^* z_{i+1}$$

كه در آن s_i مزدوج مختلط s_i^* است. با توجه به حقيقي بودن معادلات حالت، نتيجـة ضـرب بردارهاي ويژه در مقادير اوليه بايستي حقيقي باقي بماند.

$$\begin{aligned} & z_i(0)v_i + z_{i+1}(0)v_i^* \in \mathbb{R} \\ & \Re(z_i(0))\Im(v_i) + \Im(z_i(0))\Re(v_i) - \\ & \Re(z_{i+1}(0))\Im(v_i) + \Im(z_{i+1}(0))\Re(v_i) = 0 \end{aligned} \qquad (۵۸-۳)$$

يا

$$\left[\Re(z_i(0)) - \Re(z_{i+1}(0))\right]\Im(v_i) + \left[\Im(z_i(0)) + \Im(z_{i+1}(0))\right]\Re(v_i) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Re(z_i(0)) = \Re(z_{i+1}(0)) \\ \Im(z_i(0)) = -\Im(z_{i+1}(0)) \end{cases} \Rightarrow z_{i+1}(0) = z_i^*(0) \qquad (۵۹-۳)$$

با مزدوج گيري از معادلة اول داريم:

$$\dot{z}_i^* = s_i^* z_i^* + (w_i^{*T} B)u \qquad (۶۰-۳)$$

چون z_{i+1}, z_i^* هر دو يک معادله را ارضاء مي كنند و $z_{i+1}(0) = z_i^*(0)$ ، بنابراين:

$$z_{i+1}(t) = z_i^*(t)\ \forall t \qquad (۶۱-۳)$$

حال اگر مقادير حقيقي و مختلط معادلات فوق را جداگانه بازنويسي كنيم:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(\Re z_i) = (\Re s_i)(\Re z_i) - (\Im s_i)(\Im z_i) + (\Re w^T{}_i B)u \\ \dfrac{d}{dt}(\Im z_i) = (\Im s_i)(\Re z_i) + (\Re s_i)(\Im z_i) + (\Im w^T{}_i B)u \\ \quad y = 2C(\Re v_i)(\Re z_i) - 2C(\Im v_i)(\Im z_i) \end{cases} \tag{۶۲-۳}$$

لذا دو معادلة غير مزدوج ولي مختلط را مي توان به صورت دو معادلة مزدوج حقيقي به فرم زير تعبير كرد.

بدين ترتيب با فرض $m+1$ مقدار ويژة مختلط مزدوج

$$\lambda_{1,2} = \sigma_1 \pm j\omega,\ \lambda_{3,4} = \sigma_3 \pm j\omega_3,\ \cdots \lambda_{m,m+1} = \sigma_m \pm j\omega_m$$

و مابقي مقادير ويژه به صورت حقيقي $\lambda_{m+2}, \lambda_{m+3}, ..., \lambda_n$ خواهيم داشت:

$$T = \left[\Re(v_i), \Im(v_1), \Re(v_3), \Im(v_3), ...\Re(v_m), \Im(v_m), v_{m+2}, v_{m+3}, ..., v_n\right] \tag{۶۳-۳}$$

ماتريس A بفرم قطري بلوكي[1] زير تبديل خواهد شد.

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & \omega_1 & & & & & & & & \cdots & 0 \\ -\omega_1 & \sigma_1 & & & & & & & & & \\ & & \sigma_3 & \omega_3 & & & & & & & \vdots \\ & & -\omega_3 & \sigma_3 & & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & & \\ & & & & & \sigma_m & \omega_m & & & & \\ & & & & & -\omega_m & \sigma_m & & & & \\ \vdots & & & & & & & \lambda_{m+2} & & & \\ & & & & & & & & \lambda_{m+3} & & \\ & & & & & & & & & \ddots & \\ 0 & & & \cdots & & & & & & & \lambda_n \end{bmatrix} \tag{۶۴-۳}$$

مثال ۳-۱۱)

سيستم زير را به فرم قطري حقيقي تبديل كنيد:

[1] Block diagonal matrix

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

مقادير ويژة ماتريس عبارتند از:

$$(\lambda I - A) = \lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0 \rightarrow \lambda_{1,2} = -1 \pm j$$

بردارهاي ويژه عبارتند از:

$$(\lambda_1 I - A)v_i = 0 \rightarrow v_{1,2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \pm j \end{bmatrix}$$

با توجه به مقادير ويژة ماتريس, تبديل همگن برابر است با:

$$T = \left[\Re(v_1), \Im(v_1)\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

لذا معادله حالت برابر است با:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + T^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow b_{new} = T^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

۳-۸-۳) فرم عمومی بلوکی- قطری جوردن

شكل ساختار ويژة ماتريس A درحالتيكه مقادير ويژة آن تكراري باشد پيچيده تر مي گردد. اگر ماتريسي داراي يک مقدار ويژه با تكرار K باشد، گاهي اوقات تنها مي توان يک بردار ويژة مستقل براي آن يافت و گاهي اوقات حتي تا K بردار ويژه براي ماتريس قابل محاسبه است. درصورتي كه تعداد بردارهاي ويژه كمتر از K باشد براي تشكيل تبديل همانندي مي بايست از "بردارهاي ويژة تعميم يافته" استفاده نمود.

فرض كنيد v_i^0 يک بردار ويژه ماتريس A متناظر با مقدار ويژة s_i باشد. اگر بردارهاي $v_i^1, v_i^2, ...$ مجموعه اي از بردارهاي ويژة تعميم يافته باشند، اين بردارها معادلات زير را ارضاء مي كنند.

$$\begin{aligned} (A - s_i I)v_i^1 &= v_i^0 \\ (A - s_i I)v_i^2 &= v_i^1 \\ &\vdots \\ (A - s_i I)v_i^{j+1} &= v_i^j \end{aligned} \tag{۶۵-۳}$$

این زنجیر بردارهاي ویژة تعمیم یافته ادامه مي یابد تا زمانیکه معادله جواب غیر صفر داشته باشد. اگر مقدار ویژة s_i، K بار تکرار شده باشد اما به عنوان مثال دو بردار ویژة مستقل بتوان محاسبه نمود, هر یک از این بردارها یک زنجیر از بردارهاي ویژة تعمیم یافته در امتداد خود تشکیل خواهند داد. مي توان نشان داد کلیة بردارهاي ویژة تعمیم یافته از یکدیگر مستقلند.
براي اینکه فرم قطري- بلوکي جوردن را تشکیل دهیم ماتریس T را از بردارهاي ویژة مستقل و تعمیم یافته به فرم زیر تشکیل مي دهیم. به عنوان مثال فرض کنید ماتریس A داراي دو مقدار ویژة s_2, s_1 باشد که s_1 پنج بار تکرار شده است و s_2 دوبار تکرار شده باشد و از مقدار ویژة s_1 دو بردار ویژة مستقل قابل محاسبه باشند. اگر آنها را v_{12}^0, v_{11}^0 بنامیم و زنجیر بردارهاي ویژة تعمیم یافته را براي هر یک بدست آوریم. به عنوان مثال:

$$v_{12}^0 \to v_{12}^1,\ v_{11}^0 \to v_{11}^1 \to v_{11}^2$$

همچنین:

$$v_{21}^0 \to v_{21}^1$$

در این صورت :

$$T = \begin{bmatrix} v_{11}^0 & v_{11}^1 & v_{11}^2 & v_{12}^0 & v_{12}^1 & v_{21}^0 & v_{21}^1 \end{bmatrix} \qquad (۳-۶۶)$$

و معکوس ماتریس T به صورت زیر قابل محاسبه است.

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} w_{11}^{0T} \\ w_{11}^{1T} \\ w_{11}^{2T} \\ w_{12}^{0T} \\ w_{12}^{1T} \\ w_{21}^{0T} \\ w_{21}^{1T} \end{bmatrix} \qquad (۳-۶۷)$$

همانند قبل مي توان نشان داد که T^{-1} بردارهاي ویژة ماتریس A^T مي باشند که زنجیر بردارهاي ویژة تعمیم یافته براي آنها نیز بدست آمده است.
حال فرم جوردن را تشکیل مي دهیم:

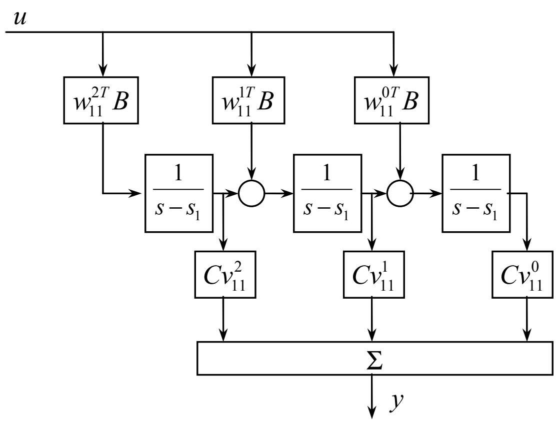
$$\Lambda = T^{-1}AT \qquad (۳-۶۸)$$

$$AT = \begin{bmatrix} s_1 v_{11}^0 & v_{11}^0 + s_1 v_{11}^1 & v_{11}^1 + s_1 v_{11}^2 & s_1 v_{12}^0 & v_{12}^0 + s_1 v_{12}^1 & s_2 v_{21}^0 & v_{21}^0 + s_2 v_{12}^1 \end{bmatrix} \qquad (۳-۶۹)$$

ماتریس به صورت قطري- بلوکي جوردن مي باشد که به مقدار زنجیرها یا رشته هاي بردارهاي ویژة تعمیم یافته بلوک در ماتریس ایجاد شده است. بلوکها در روي قطر اصلي خود حاوي مقدار ویژة (تکراري) بوده و روي قطر اصلي مطابق معادلة زیر حاوي قطر یک خواهند شد:

$$\Lambda = T^{-1}AT = \left[\begin{array}{ccc|cc|cc} s_1 & 1 & & & \cdots & & 0 \\ & s_1 & 1 & & & & \\ & & s_1 & & & & \vdots \\ \hline & & & s_1 & 1 & & \\ \vdots & & & 0 & s_1 & & \\ \hline & & & & & s_2 & 1 \\ 0 & & \cdots & & & 0 & s_2 \end{array}\right] \qquad (۳-۷۰)$$

فرم بلوک دیاگرام بلوکِ جوردن اول سیستم فوق در شکل (۳-۳) نشان داده شده است.



شکل (۳-۳) نمایش بلوکی سیستم به فرم بلوکی- جوردن

مثال ۳-۱۲)

سیستم پاندول معکوس خطي شده حول نقطة تعادل را بفرم زیر مي توان نمایش داد:

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&-9.8&0\\0&0&0&1\\0&0&19.6&0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\1\\0\\-1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}x$$

مقادير ويژة ماتريس برابر است با:

$$\lambda_{1,2}=0,\lambda_{3,4}=\pm4.4272$$

تنها يک بردار ويژة مستقل متناظر با $s_i=0$ وجود دارد که عبارتست از:

$$v_1^0=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

بدين ترتيب بردار ويژة تعميم يافته سيستم از رابطة زير تعيين مي شود:

$$(A-0I)v_1^1=v_1^0=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$v_1^1=\begin{bmatrix}\alpha\\1\\0\\0\end{bmatrix}$ به ازاي $\alpha=0$ خواهيم داشت: $v_1^1=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}$

بردارهاي ويژة مربوط به $\lambda_{3,4}=\pm4.4272$ نيز به ترتيب زير تعيين مي شوند و ماتريس تبديل همانندي به فرم زير خواهد بود:

$$T=\begin{bmatrix}1&0&1&1\\0&1&4.4272&-4.4272\\0&0&-2&-2\\0&0&-8.8544&8.8544\end{bmatrix}\rightarrow T^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0.5&0\\0&1&0&0.5\\0&0&-0.25&-0.0565\\0&0&-0.25&0.0565\end{bmatrix}$$

همانگونه که انتظار داشتيم: $T^{-1}AT=\Lambda=\left[\begin{array}{cc|cc}0&1&0&0\\0&0&0&0\\\hline 0&0&4.42&0\\0&0&0&-4.42\end{array}\right]$.

$$T^{-1}B=\begin{bmatrix}0\\0.5\\0.0565\\-0.0565\end{bmatrix},\ CT=\begin{bmatrix}1&0&1&1\\0&0&-2&-2\end{bmatrix}$$

مثال ۳-۱۳) سيستم زير را در نظر بگيريد:

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0&3\\0&-1&1&1\\0&0&0&1\\0&0&-1&-2\end{bmatrix}$$

مقادير ويژه:

$$|\lambda I-A|=\det\begin{bmatrix}\lambda&-1&0&-3\\0&\lambda+1&-1&-1\\0&0&\lambda&-1\\0&0&1&\lambda+2\end{bmatrix}=0$$

$$\lambda_{1,2,3}=-1,\ \lambda_4=0$$

تنها بردار ويژة متناظر با $\lambda_1=-1$ عبارتست از:

$$v_{11}^0=\begin{bmatrix}2&1&1&-1\end{bmatrix}^T$$

بردارهاي ويژة تعميم يافته:

$$(A-(-1)I)v_{11}^1=v_{11}^0$$

$$\Rightarrow v_{11}^1=\begin{bmatrix}-1&0&0&1\end{bmatrix}^T$$

بردار ديگري نيز که مستقل از v_{11}^1,v_{11}^0 باشد را مي توان بدست آورد:

$$v_{12}^0=\begin{bmatrix}1&-1&0&0\end{bmatrix}$$

بردار ويژة مربوط به $\lambda_4=0$ نيز عبارتست از:

$$v_{21}^{0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

لذا ماتريس تبديل همانندي عبارتست از:

$$T = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \Lambda = T^{-1}AT = \left[\begin{array}{cc|c|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

۳–۹) جمع بندی

در اين فصل با هدف بدست آوردن پاسخ سيستمهاي خطي در اثر شرايط اوليه و ورودي معين، خصوصيات سيستمهاي خطي مورد تجزيه و تحليل قرار گرفته است. بدين ترتيب پاسخ سيستم به دو بخش بدون ورودي و بدون شرايط اوليه تجزيه شده است و با توجه به برقراري اصل رويهم گذاري سيستمهاي خطي، پاسخ كامل سيستم با تعيين اين دو جزء به صورت مستقل بدست آمده است. در اين راستا ماتريس تبديل حالت يا ماتريس نمائي سيستم تعريف شده است و نشان داده شده است كه پاسخ بدون ورودي از ضرب اين ماتريس در بردار شرايط اوليه و پاسخ بدون شرايط اوليه از انتگرال كانولوشن اين ماتريس و بردار ورودي تشكيل مي شود. اين نمايش نه تنها پاسخ كلية سيستمهاي خطي را به صورت عمومي تعيين مي كند، اهميت بردار متغير حالت را در فشرده سازي اطلاعات ورودي در خود نشان مي دهد. در ادامه، خصوصيات اصلي ماتريس انتقال حالت و مشابهت آن با توابع نمائي نشان داده شده است و روشهاي مختلف تعيين تحليلي و عددي آن بررسي شده است. در پايان روشهاي نمايش سيستم به صورت غير مزدوج يا قطري را كه در تسريع عمليات عددي سيستمها حائز اهميت است، با معرفي تبديل همانندي تشريح نموده و در حالت عمومي فرم قطري، بلوكي– قطري و بلوكي– جوردن بدست آمده است.

مسائل

۳-۱) يک سيستم خطي غير متغير با زمان LTI که توسط دو متغير حالت تعريف مي شود بـه شرايط اوليه زير پاسخهائي بدون ورودي مطابق معادلات زير داده است.

$$x(0)=\begin{bmatrix}1\\0.5\end{bmatrix}\rightarrow y(t)=e^{-t}-0.5e^{-2t}$$ اگر

$$x(0)=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\rightarrow y(t)=0.5e^{-t}-e^{-2t}$$ اگر

با توجه به خاصيت خطي بودن سيستم فوق پاسخ سيستم را به شرايط اوليـه $x(0)=\begin{bmatrix}2\\0.5\end{bmatrix}$ بدست آوريد.

۳-۲) پاسخ يک سيستم خطي غيرمتغير با زمان LTI به ورودي پلّه واحد برابر است با:

$$x(0)=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\rightarrow\ y(t)=0.5-0.5e^{-t}+e^{-2t}$$

و درحالتيکه

$$x(0)=\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}\rightarrow y(t)=0.5-e^{t}+1.5e^{-2t}$$

پاسخ بدون شرايط اوليه سيستم فوق را به ورودي پله واحد بدست آوريد

۳-۳) يک الگوريتم براي محاسبهٔ ماتريس انتقال حالت e^{A} فرمول پده (Pade) مي باشـد کـه در آن e^{A} توسط تقريب زير محاسبه مي شود.

$$e^{A}=\varphi=(I-\frac{1}{2}A+\frac{1}{12}A^{2})^{-1}(I+\frac{1}{2}A+\frac{1}{12}A^{2})$$

بسط سري زير را براي φ درنظر بگيريد.

$$\varphi=I+C_1A+C_1A^{2}+\cdots$$

و ضرايب اين سري را با برابر قراردادن دو طرف معادله زير محاسبه کنيد:

$$(I-\frac{1}{2}A+\frac{1}{12}A^{2})\cdot\varphi=(I+\frac{1}{2}A+\frac{1}{12}A^{2})$$

به ازاي چه تواني از A در سري فوق مقدار φ از مقدار واقعي e^{A} فاصله مي گيرد؟

۳-۴) با استفاده از روش لاپلاس e^{At} را براي سيستمهاي زير بدست آوريد:

الف) $A=\begin{bmatrix}0&1\\-1&-2\end{bmatrix}$ ب) $A=\begin{bmatrix}-1&-2\\2&-1\end{bmatrix}$

۳-۵)

الف) با استفاده از روش لاپلاس e^{At} را براي سيستم زير بدست آوريد:

$$A=\begin{bmatrix}-1&1&0\\0&-1&-1\\0&1&-1\end{bmatrix}$$

ب) مقادير ماتريس انتقال حالت را براي زمانهاي t=1,2,4 بدست آوريد.

ج) با استفاده از دستور expm نرم افزار Matlab صحت محاسبات خود را تعيين کنيد.

د) به صورت عددي صحت معادلات فوق را براي سيستم فوق بدست آوريد.

$$e^{2A}=(e^{A})^{2},e^{4A}=\left(e^{2A}\right)^{2}$$

۳-۶) براي سيستم زير

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0&1\\-3&-4\end{bmatrix}x$$

الف) به ازاي $x(0)=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ پاسخ $x_2(t),x_1(t)$ را برحسب زمان رسم نمائيد.

ب) منحني هاي $x_1(t)$ را برحسب $x_2(t)$ رسم نمائيد (نمودار فاز).

ج) بردارهاي ويژه و مقادير ويژه سيستم فـوق را تعيـين نمـوده و مراحـل الـف) و ب) را بـراي شرايط اوليه منطبق با بردارهاي ويژه انجام دهيد.

۳-۷) مسئله ۳-۶ را براي سيستم زير تکرار کنيد.

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}x$$

۳-۸) براي سيستم زير

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}x$$

الف) ماتريس انتقال حالت e^{At} را محاسبه كنيد.

ب) به ازاي $x(0)=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ و $x_1(t)$ را برحسب $x_2(t)$ رسم نموده و نتيجه را توضيح دهيد.

۳-۹) ماتريس انتقال حالت سيستم زير را با استفاده از روش .C.H و سيلوستر تعيين كنيد.

الف) $\dot{x}=\begin{bmatrix}0&1\\-2&-3\end{bmatrix}x$ ب) $\dot{x}=\begin{bmatrix}-6&-11&-6\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}x$

۳-۱۰) با استفاده از بردارهاي مودال پاسخ سيستم زير را به شرايط اوليه زير محاسبه نمائيد.

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0&1\\-5&-6\end{bmatrix}x$$

الف) $x(0)=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$ **ب)** $x(0)=\begin{bmatrix}0.9032\\-1.6877\end{bmatrix}$

۳-۱۱) تابع تبديل سيستم زير را بدست آوريد و نتيجه را با دستور SS2tf نرم افزار Matlab مقايسه كنيد.

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u$$
$$y=\begin{bmatrix}1&0\end{bmatrix}x$$

۳-۱۲) مسئله ۳-۱۱ را براي سيستم زير تكرار كنيد:

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0&1\\-3&-4\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0&1\\-1&1\end{bmatrix}u$$
$$y=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}x$$

الف) صفرهاي انتقال سيستم فوق را با محاسبه معادلهٔ $\det(H(s_0))=0$ محاسبه كنيد.

ب) قطبهاي سيستم را نيز بدست آوريد.

ج) نتايج بدست آمده را توسط دستورات Matlab تأييد كنيد.

۳-۱۳) مسئله ۳-۱۲ را براي سيستم زير تكرار كنيد و علت اختلاف با حالت قبل را توضيح دهيد.

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}-3&-2\\1&0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}u$$
$$y=\begin{bmatrix}1&1\end{bmatrix}x$$

۳-۱۴) فرض كنيد s_0 قطب ماتريس تبديل سيستم H(s) نباشد.

الف) نشان دهيد اگر ورودي سيم برابر $e^{s_0t}wu_s(t)$ باشد كه در آن $u_s(t)$ پلهٔ واحد مي باشد, حتماً جزئي در خروجي سيستم معادل $H(s_0)we^{s_0t}$ وجود خواهد داشت.

(راهنمائي: از كسرهاي جزئي Partial Fraction استفاده نمائيد.)

ب) نتيجهٔ قسمت قبل را استفاده نموده و تفسيري براي صفر انتقال ارائه نمائيد.

۳-۱۵) سرو موتور DC و هارمونيك درايو

توابع تبديل سيستم سرو موتور DC و هارمونيك درايو كه در مسئله (۳-۲) فصل دوم به آن پرداخته ايم را براي $\frac{\theta_2}{v},\frac{\theta_1}{v}$ بدست آوريد.

۳-۱۶) كنترل سرعت غلطك

توابع تبديل $\frac{\omega_0}{u_1}, \frac{\omega_0}{u_2}$ و همچنين $\frac{\omega_0}{T_0}$ را براي سيستم غلطك كه در مسئله (۲-۴) فصل دوم به آن پرداخته شده است را بدست آوريد.

۳-۱۷) كنترل غلظت و ارتفاع در مخزن

براي سيستم خطي سازي شده مخزن كه در مسئله (۲-۱۱) فصل دوم بـه آن پرداختـه شـده است, توابع تبديل سيستم را به ازاي خروجيهاي $\Delta C_A, \Delta\ell$ به وروديهـاي $\Delta F_A, \Delta F_0, \Delta F_B$ تعيين كنيد.

۳-۱۸) مبدل حرارتی:

براي سيستم خطي سازي شدة مبدل حرارتي كه در مسئله (۲-۱۲) فصل دوم بـه آن پرداختـه شده است توابع تبديل ΔTc_3 را به وروديهاي ΔF_{H} (ورودي كنتـرل) و $\Delta \mathrm{T}_{c_0}, \Delta \mathrm{T}_{h_0}, \Delta F_c$ (وروديهاي اغتشاشي) بدست آوريد.

۳-۱۹) راكتور شيميائی:

براي سيستم خطي سازي شدة راكتور شيميائي كه در مسئله (۲-۱۳) فصل دوم به آن پرداخته شـده اسـت. توابـع تبـديل بـين ورودي كنتـرل ΔQ ورويهـاي اغتشـاش $\Delta C_{A_0}, \Delta F$ را بـه خروجيهاي $\Delta \mathrm{T}, \Delta C_A, \Delta C_B, \Delta C_c$ بدست آورده، قطبها و صفرهاي توابع تبديل را با قطبها و صفرهاي انتقال سيستم خطي سازي شده مقايسه كنيد.

۳-۲۰) جرثقيل سقفی:

براي سيستم خطي سازي شدة جرثقيل سقفي كه در مسئله (۲-۱۴) فصل دوم به آن پرداختـه شده است توابع تبديل $\frac{\theta}{F}, \frac{x}{F}$ را تعيين كنيد.

۳-۲۱) بندباز:

براي مدل خطي سازي شده از بندباز كه در مسئله (۲-۱۵) فصل دوم به آن پرداخته شده است توابع تبديل $\frac{\theta}{\tau}, \frac{\varphi}{\tau}$ را محاسبه كنيد.

۳-۲۲) پاندول دوتائی معكوس:

براي سيستم خطي سازي شده پاندول دوتائي معكوس كه در مسئله (۲-۱۶) فصـل دوم بـه آن پرداخته شده است، با فرض $\ell_2 = 1m, \ell_1 = 1.5m$ توابـع تبـديل $\frac{\theta_2}{F}, \frac{\theta_1}{F}, \frac{x}{F}$ را محاسـبه كنيد.

۳-۲۳) Maglev:

براي سيستم خطي سازي شـدة تعليـق مغناطيسـي كـه در مسـئله (۲-۱۷) فصـل دوم بـه آن پرداخته شده است توابع تبديل را براي هر سـه ورودي بـه خروجيهـاي $\Delta\theta, \Delta y, \Delta z$ تعيـين كنيد.

۳-۲۴) در بعضي مواقع از فرم قطري سيستم براي محاسبة e^{At} استفاده مي شود. فرض كنيـد تبـديل هماننـدي T وجـود دارد كـه در آن $T^{-1}AT = \Lambda$ بـه فـرم قطـري $\Lambda = diag\left[s_1, s_2, ..., s_n\right]$ تبديل مي شود.

الف) نشان دهيد $e^{\Lambda t} = diag\left[e^{s_1 t}, e^{s_2 t}, ..., e^{s_n t}\right]$

ب) نشان دهيد $e^{At} = Te^{\Lambda t}T-1$

ج) نتايج فوق را براي سيستم مثال (۳-۲) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$ به منظـور تعيـين e^{At} اعمـال نمائيد.

۳-۲۵) مسئله (۳-۲۴) را براي حالتي كه سيستم داراي مقادير ويژة تكراري است تعمـيم داده و e^{At} را براي مثال (۳-۱) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ بدست آوريد.

۳-۲۶) موتور DC و هارمونيک درايو:

براي سيستم سرو موتور DC و هارمونيک درايو مسئله (۲-۳) فصل دوم:

الف) معادلات حالت را به فرم قطري- جوردن و مختلط تبديل كنيد.

ب) معادلات حالت را به فرم بلوكي- جوردن حقيقي تبديل كنيد.

۳-۲۷) راکتور شیمیائی:
مدل خطي سازي شدة راكتور شيميائي در مسئله (۲-۱۳) فصل دوم تعيين شده است. اين مدل را به فرم جوردن تبديل كنيد.

۳-۲۸) سيستم زير را به فرم قطري جوردن تبديل نمائيد.

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&-4&0&5&0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}2.0625\\0.1250\\2.2500\\0.5000\\3.0000\end{bmatrix}u$$
$$y=\begin{bmatrix}0&0.6667&-0.6667&-0.6667&1.1667\end{bmatrix}x$$

۳-۲۹) كنترل سرعت غلطک:
بعضي مواقع ميسر است كه يک سيستم چند ورودي – چند خروجي MIMO را به تعدادي سيستم تک ورودي- تک خروجي SISO غير مزدوج تبديل نمود. سيستم غلطک معرفي شده در مسئله (۲-۴) فصل دوم را درنظر بگيريد.

دو ورودي جديد براي اين سيستم تعريف مي كنيم: ورودي ميانگين $u_c=\dfrac{u_1+u_2}{2}$ و ورودي تفاضلي $u_d=\dfrac{u_1-u_2}{2}$ بدين ترتيب $u_2=u_c-u_d\,,u_1=u_c+u_d$ مي باشد.

الف) ماتريس B را با اين تغيير در ورودي مجدداً تعيين نمائيد.
ب) دو خروجي جديد نيز تعريف مي كنيم $y_2=\omega_1-\omega_2\,,y_1=\omega_0$ با توجه به اين خروجيهاي جديد و ورودي بخش الف) ماتريس تبديل سيستم جديد را بدست آورده و نشان دهيد درحد خطاي محاسباتي به صورت قطري تبديل شده است.
ج) تبديل همانندي كه سيستم را به اين فرم تبديل مي نمائيد را تعيين نمائيد.

۳-۳۰) كنترل غلظت و ارتفاع مخزن:
براي سيستم خطي سازي شدة مخزن مسئله (۲-۱۱) فصل دوم:

الف) ماتريس تبديل همانندي T را كه متغير حالت $\begin{bmatrix}\Delta\ell\\\Delta V_A\end{bmatrix}$ را به $\begin{bmatrix}\Delta\ell\\\Delta C_s\end{bmatrix}$ تبديل مي كند را تعيين نمائيد. به گونه اي كه $\begin{bmatrix}\Delta\ell\\\Delta\ell_s\end{bmatrix}=T^{-1}\begin{bmatrix}\Delta\ell\\\Delta\ell_A\end{bmatrix}$. براي اين منظور از فرم پارامتريک معادلات حالت استفاده نموده و T را به صورت پارامتريک محاسبه كنيد.
ب) نشان دهيد با اين تبديل همانندي سيستم به فرم قطري جوردن تبديل مي شود.

۳-۳۱) نشان دهيد كه پاسخ سيستم خطي زير با شرايط اوليه $x(0)=C$ برابر است با $x(t)=e^{At}Ce^{Bt}$.

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+x(t)B$$

۳-۳۲) ماتريس انتقال حالت سيستم زير را با روشهاي تبديل لاپلاس C.H. و سيلوستر بدست آوريد.

الف) $\begin{bmatrix}-6&-11&-6\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-4&4\\0&-1&0\end{bmatrix}$

۳-۳۳) سيستمهاي زير را به فرم قطري تبديل كنيد و تبديل همانندي لازم را تعيين كنيد.

الف)
$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-6&-11&-6\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}u(t)$$
$$y(t)=\begin{bmatrix}1&0&1\end{bmatrix}x(t)$$

ب)
$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}-1&2&-1\\0&-2&0\\1&0&-2\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u(t)$$
$$y(t)=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&1&0\end{bmatrix}x(t)$$

ج)
$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}-2 & -25 & -50\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}u(t)$$
$$y(t)=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}x(t)$$

۳-۳۴) براي سيستمهاي زير ماتريس تبديل همانندي مناسب را كه آنها را به فرم قطري- جوردن , بلوكي حقيقي جوردن و بلوكي جوردن تبديل مي نمايد را پيدا كرده و سيستمها را به فرم جوردن بازنويسي كنيد.

الف) $A=\begin{bmatrix}1 & 3/5 & -4/5\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ ب) $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$

ج) $A=\begin{bmatrix}-2 & -4 & -8\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$ د) $A=\begin{bmatrix}-2 & 4 & 8\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$

ه) $\begin{bmatrix}-2 & 8 & 16 & -16 & -32\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$

۳-۳۵) اگر معادلة حالت سيستمي زير به فرم زير باشد:
$$\dot{x}(t)=\left[\begin{array}{c|c}A_{11} & A_{12}\\ \hline 0 & A_{22}\end{array}\right]x(t)$$
درصورتي كه ماتريس انتقال حالت سيستم را به صورت زير تجزيه كنيم:
$$\varphi(t)=\left[\begin{array}{c|c}\varphi_{11}(t) & \varphi_{12}(t)\\ \hline \varphi_{21}(t) & \varphi_{22}(t)\end{array}\right]x(t)$$
نشان دهيد:

الف) $\forall t \quad \varphi_{21}(t)=0$

ب) $\text{For } i=1,2 \qquad \dfrac{\partial}{\partial t}\varphi_{ii}(t)=A_{ii}\varphi_{ii}(t)$

۳-۳۶)

الف) پاسخ سيستم خطي زير را به شرايط اوليه $x(0)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}^T$ بدست آوريد.
$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -2 & -4 & -3\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}u(t)$$
$$y(t)=\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}x(t)$$

ب) براي اين مسئله نشان دهيد:
$$\varphi(t-\tau)=\varphi(t)\cdot\varphi(-\tau)=\varphi(-\tau)\cdot\varphi(t)$$

۳-۳۷) معكوس ماتريس زير را با استفاده از قضية C.H. بدست آوريد.
$$A=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 2\end{bmatrix}$$

۳-۳۸) ماتريس انتقال حالت را براي سيستمهاي زير محاسبه كنيد.

الف) $A=\begin{bmatrix}-1 & 1/2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ ب) $A=\begin{bmatrix}-3 & 2\\ 0 & -3\end{bmatrix}$

ج) $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -3 & -4\end{bmatrix}$ د) $A=\begin{bmatrix}3 & 5\\ 16/5 & 3\end{bmatrix}$

ه) $A=\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 2 & -2\end{bmatrix}$ و) $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & -3 & 3\end{bmatrix}$

ح) $A=\begin{bmatrix}-10 & 0 & -10 & 0\\ 0 & -0.7 & 9 & 0\\ 0 & -1 & -0.7 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ ز) $A=\begin{bmatrix}-5 & -6 & 0\\ 2 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{bmatrix}$

۳-۳۹) نشان دهيد

$$\begin{bmatrix}1/2 & 1/2 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 5/6 & -13/6 & -1/3\end{bmatrix}^k=\begin{bmatrix}\left(\frac{1}{2}\right)^k & 1-\left(\frac{1}{2}\right)^k & 0\\ 0 & 1 & 0\\ \left(\frac{1}{2}\right)^k-\left(-\frac{1}{3}\right)^k & 2-\left(-\frac{1}{3}\right)^k-\left(\frac{1}{2}\right)^k-1 & \left(-\frac{1}{3}\right)^k\end{bmatrix}$$

مراجع

[1] Bélanger, Pierre., *Control engineering: a modern approach,* Saunders College Pub., c1995.

[2] Boyd, Stephen P. and Craig H. Barratt., *Linear* controller design : *limits of performance,* Prentice Hall, c1991.

[3] Brogan, William L*., Modern control theory,* 3rd ed. Englewood Cliffs, N.J. : Prentice Hall, c1991.

[4] Callier, Frank M. and Charles A. Desoer, *Linear system theory*, Springer-Verlag, c1991.

[5] Chen, Chi-Tsong., *Linear system theory and design*, Oxford University Press, c1999.

[6] Kailath**,** Thomas., *Linear systems*, Prentice-Hall, c1980.

[7] Ogata, Katsuhiko., *Modern control engineering*, 4th ed., Prentice Hall, 2001.

[8] Rugh, Wilson J., *Linear system theory,* 2nd ed., Prentice Hall, c1996.

[9] Shinners, Stanley M., *Modern control system theory and design,* 2nd ed., J. Wiley, c1998.

[10] Zadeh, Lotfi Asker. and Charles A. Desoer, *Linear system theory*, R. E. Krieger Pub. Co., 1979.

[11] دكتر علي خاكي صديق، *اصول كنترل مدرن*، انتشارات دانشگاه تهران، ۱۳۷٤.

فصل چهارم

رؤيت پذيري و كنترل پذيري سيستمهاي LTI

فصل چهارم: رؤیت پذیری و کنترل پذیری سیستمهای LTI

۴-۱) رؤیت پذیری

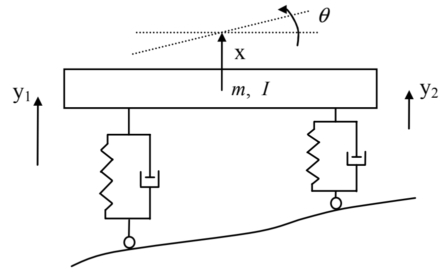
۴-۱-۱) مقدمه

همانگونه كه قبلاً اشاره شد, متغير حالت $x(t_f)$ در هر لحظة t_f كلية اطلاعات مـورد نيـاز از وروديهاي قبلي را در خود اندوخته است و پاسخ سيستم از زمان t_f به بعـد، بـا دانسـتن ايـن متغير مشخص مي شود. اين رابطه اي كه متغير حالت بـين ورودي و خروجـي برقـرار سـاخته است, عليرغم ساده سازي عمليات طراحي كنترل كننـده و امكـان اسـتفادة وسـيع كـامپيوتر و روشهاي عددي در آن, اين مشكل را دارد كه اولاً يكتا نبوده, ثانياً ارتباط يک به يكي بـا ورودي و خروجي نداشته باشد. به عنوان مثال اگر سيستمي را كه تنها بـا دو متغيـر حالـت مـي تـوان معادلات ديناميكي آنرا تحليل نمود, توسط سه متغير حالت نمايش دهيم، مسلماً ارتباط يك به يك متغير حالت به ورودي يا خروجي مخـدوش خواهـد شـد. بررسـي ارتبـاط متغيـر حالـت و خروجي را با "اپراتور رؤيت پذيري" مي سنجند. به همين ترتيـب ارتبـاط بـين ورودي و متغيـر حالت را با "اپراتور كنترل پذيري" بررسي مي نمائيم. در اين راستا مفاهيم مختلف يک به يک و پوشا بودن اين اپراتورهاي رياضي را در قالب تعابير فيزيكي قابل فهـم تعبيـر مـي كنـيم. بـراي روشن شدن اين تعابير اجازه دهيد با ذكر يک مثال, مفهوم رؤيت پذيري را مشخص كنيم.

مثال ۴-۱) سیستم تعلیق اتومبیل

مدل صفحه اي از يک اتومبيل را مطابق شكل (٤-١) درنظر بگيريد. براي تفسـير حركـت ايـن سيستم حداقل دو متغير حالت لازمست. اين دو متغير مي تواند كمّيـت هـا فيزيكـي مختلفـي باشند كه با توجه به تبديلهاي همانندي به يكديگر قابل تبديل مي باشند. بـه صـورت طبيعـي متغير جابجائي عمودي مركز خودرو x و حركت زاويه اي θ يا pitch، متغيرهاي مناسبي براي توصيف حركت مي باشند. از طرفي متغيرهاي y_1, y_2 جابجائي جلو و عقـب خـودرو در محـل چرخها نيز مي تواند به عنوان متغيرهاي حالت درنظر گرفته شوند. البته چون سيستم مكانيكي

است رستة معادلات حركت براي هر متغير حالت درجة دوم خواهـد بـود. بـدين ترتيـب فـرض كنيد بردار $\underset{\sim}{x} = \left[x,\ \dot{x},\ \theta,\ \dot{\theta}\right]^T$ به عنوان متغير حالت اختيار شود.



شكل (۴-۱) مدل صفحه ای از سیستم تعلیق خودرو

بحث رؤيت پذيري از نحوة اندازه گيري كمّيت ها فيزيكي y و ارتباط آن با x خبر مي دهد. بـه عنوان مثال فرض كنيد تنها يک سنسور اندازه گيري جابجائي آنهم در مركز جرم سيستم قـرار داده شده باشد. دراينصورت اين سنسور توانائي انـدازه گيـري جابجـائي x را دارد، امـا حركـات زاويه اي θ را نمي تواند مشخص كند. به تعبير ديگر اگر خودرو تنها حركت $\theta \neq 0$ يـا Pitch داشته باشد اما حركت عمودي نداشته باشد, عليرغم غير صفر بودن متغير حالـت $\underset{\sim}{x}$، خروجـي سيستم كاملاً صفر مي باشد.

حـال اگـر بجـاي انـدازه گيـري تنهـاي حركـت عمـودي در مركـز جـرم, حركـات y_1, y_2 را اندازه گيري كنيم, اين اطلاعات به صورت دقيـق ميـزان جابجـائي x و حركـت زاويـه اي θ را روشن مي سازد. ايدة رؤيت پذيري مسئله نحوه و محل اندازه گيري خروجـي y و توانـائي ايـن اطلاعات در تعيـين ديناميـک سيسـتم و متغيرهـاي حالـت سيسـتم $\underset{\sim}{x}$ را مـورد بررسـي قـرار مي دهد.

۴-۱-۲) تعریف رؤیت پذیری

تعریف رؤیت پذیری:
يـک سيسـتم LTI رؤيـت پـذير ناميـده مـي شـود، اگـر شـرايط اوليـة متغيرهـاي حالـت $x(0) = x_0$ را بتوان به صورت يكتا از اطلاعات مربـوط بـه y(t) و u(t) در محـدودة زمـاني $t \in [0,T] \quad T > 0$ تعيين نمود.

در تعريف فوق نكات زير مهم مي باشند: اولاً تنها تعيين x_0 لحاظ شده است اما با توجه به بحثهاي فصل گذشته با شناخت سيستم و تعيين ماتريس انتقال حالت $\varphi(t)$، درصورتي كه x_0 تعيين شود x(t) نيز براحتي و به صورت يكتا براي كلية زمانها ($\forall t$)، قابل تعيين خواهد بود. براي اينكه اين موضوع را نشان دهيم رابطة (۳-۱۳) را به ازاي $t_0 = 0$ بازنويسي مي كنيم:

$$x(t)=e^{At}x_0+\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)$$ (٤-١)

با مشخص بودن x_0 و اعمال $u(\tau)$ در معادلة فوق، $x(t)$ تعيين خواهد شد. دقت كنيد خروجي سيستم بر اساس معادلة (۳-١٤) درحالت كلّي برابر است با:

$$y(t)=Ce^{At}x_0+\int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)+Du(t)$$ (٤-٢)

قسمتهاي مربوط به خروجي با شرايط اولية صفر y_{zs}، مي توانند بدون اطلاع از شرايط اوليه محاسبه شوند، پس در بحث رؤيت پذيري وارد نشده و تنها پاسخ همگن يا y_{zi} در اين تعريف مبناي بررسي ها قرار مي گيرد.

$$y_{zi}(t)=Ce^{At}x_0$$ (٤-٣)

چراكه تنها اين جزء تابعي از x_0 مي باشد.

تعريف قبل با اينكه مفهوم رؤيت پذيري را كاملاً آشكار مي سازد، امّا ابزار مناسبي براي تعيين رؤيت پذيري نمي باشد. تعريف زير حالت رؤيت ناپذير را كه به صورت ساده تري قابل محاسبه است را معرفي مي نمايد.

تعريف متغير حالت رؤيت ناپذير:

متغير حالت $x^* \neq 0$ رؤيت ناپذير خوانده مي شود، اگر پاسخ همگن يا بدون ورودي $y_{zi}(t)$ با شرايط اولية $x(0)=x^*$ براي كلية زمانها $\forall t \geq 0$، كاملاً صفر باقي بماند.

از لحاظ رياضي در صورتي كه بتوان $x^* \neq 0$ يافت كه

$$\text{if}\ \ \exists x^* \neq 0 \ \ni\ y_{zi}(t)=Ce^{At}x^* \equiv 0 \ \ \forall t \geq 0$$

در اين صورت اين متغير حالت رؤيت ناپذير خواهد بود و در صورتي كه هيچ حالتي كه اين معادله را بر قرار كند وجود نداشته باشد، حالت رؤيت ناپذير وجود نخواهد داشت و سيستم رؤيت پذير خواهد بود.

مثال ۴-۲)

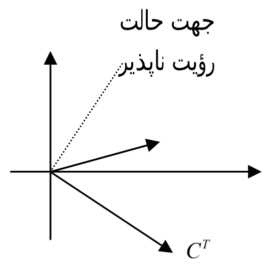
سيستم تعليق خودرو را در نظر بگيريد. هر متغير حالت با فرم عمومي زير رؤيت ناپذير است.

$$\forall \alpha,\beta \neq 0, \in \mathbb{R} \qquad x^*=\begin{bmatrix}0\\0\\\alpha\\\beta\end{bmatrix}$$

چرا كه اين متغير تنها حركت زاويه اي خودرو را ايجاد مي كند و در حركت خطي آن كه توسط y اندازه گيري مي شود تأثيري نداشته و لذا $y_{zi}(t)=0$ باقي خواهد ماند.
اين تعبير فيزيكي را به صورت رياضي نيز مي توان نشان داد. چون $C=[1\ \ 0\ \ 0\ \ 0]$ مي باشد، مي توان نشان داد كه براي كلية زمانها $\forall t$:

$$Ce^{At}x^*=[1\ \ 0\ \ 0\ \ 0]\cdot\varphi(t)\cdot\begin{bmatrix}0\\0\\\alpha\\\beta\end{bmatrix}\equiv 0$$

اگر از لحاظ هندسي به اين تعريف توجه كنيم، در صورتي كه بردارها را به صورت جهت هاي هندسي معين در فضاي n بعدي نمايش دهيم، تعبير معادلة $y=Ce^{At}x^*=0$ در اين فضاي هندسي آنست كه بردار y از ضرب داخلي بردارهاي C^T و $x(t)=e^{At}x^*$ تشكيل شده است. لذا حالت رؤيت ناپذير حالتي است كه اين ضرب داخلي صفر گردد يا بردارهاي مزبور بر هم عمود گردند.



شكل (۴-۲) نمايش هندسي حالت رؤيت ناپذير

اگر شرايط اولية خاصي وجود داشته باشد كه $x(t)$ عمود بر C^T گردد، سيستم رؤيت ناپـذير خواهد بود. اين تعبير هندسي براي حالت چند خروجي نيز به صورت زير قابل تعميم است. اگر بتوان بردار $x(0)$ خاصي را تعيين نمود كه بر كلية جهتهاي بردار y عمود باشد، در اينصورت سيستم رؤيت ناپذير است. براي بيان دقيق رابطة رياضي بين رؤيت پذيري و وجـود متغيرهـاي رؤيت ناپذير لازمست تعاريف زير را از جبر خطي يادآوری كنيم:

يك ماتريس حقيقي و متقـارن M، مثبـت معـين اسـت اگـر $x^T Mx > 0 \quad \forall x \neq 0$. يـك ماتريس مثبت معين M همواره ناويژه است، يعني همواره معكوس پذير است.

قضیهٔ ۴-۱) رؤیت پذیری

یک سیستم LTI (و به اختصار زوج (A,C)) رؤيت پذير است, اگر تنها اگر, هيچ متغير حالـت رؤيت ناپذير نداشته باشد.

اثبات:

شرط لازم: نشان مي دهيم وجود یک متغير رؤيت ناپذير براي برهم زدن شـرط رؤيـت پـذيري كافي است. فرض كنيد x^* متغير حالت رؤيت ناپذير مـي باشـد لـذا $Ce^{At}x^* = 0$ بـراي هـر $x(0) = x_1$ داريم:

$$y_1(t) = Ce^{At}x_1$$

اما از خاصيت خطي بودن پاسخ بـدون ورودي (zi) بـراي شـرايط اوليـه $x_2(0) = x_1 + \alpha x^*$ داريم:

$$y_2(t) = Ce^{At}x_1 + \alpha Ce^{At}x^* = Ce^{At}x_1 = y_1(t)$$

اما اين ممكن نيسـت چراكـه بـه ازاي دو شـرط اوليـه مخـالف $x_1(0) \neq x_2(0)$ خروجيهـاي سيستم برابر شده انـد $y_1(t) = y_2(t)$. ايـن شـرط يكتـائي را نقـض مـي كنـد لـذا بايسـتي $y_1(t) = y_2(t)$ مساوي صفر بوده و لذا سيستم رؤيت ناپذير است.

شرط كافي: درصورت نبود متغير رؤيت ناپذير سيستم بايستي رؤيت پـذير باشـد, فـرض كنيـد $x_1(0) = x_0 \neq 0$ خروجي اين سيستم به اين شرط اوليه برابر است با:

$$y(t) = Ce^{At}x_0$$

با $(Ce^{At})^T$ ضرب مي كنيم

$$(Ce^{At})^T y(t) = (Ce^{At})^T (Ce^{At})x_0$$

انتگرال مي گيريم:

$$\int_0^T (Ce^{At})^T y(t)dt = M(T)x_0$$

كه در آن:

$$M(T) = \int_0^T (Ce^{At})^T (Ce^{At})dt$$

اما ماتريس M(T) هم متقارن است و هم مثبت معين, $\forall T > 0$

$$x_0^T M(T)x_0 = \int_0^T x_0^T (Ce^{At})^T (Ce^{At})x_0 dt$$
$$= \int_0^T (Ce^{At}x_0)^T (Ce^{At}x_0)dt$$
$$= \int_0^T \| Ce^{At}x_0 \|^2 \, dt > 0$$

$\forall x_0 \neq 0$ تابع انتگرال فوق، نرم دو یک بردار غير صفر بوده و لذا بزرگتر از صفر اسـت. چـون M(t) مثبت معين است $M^{-1}(T)$ وجود دارد لذا:

$$x_0 = M^{-1}(T)\int_0^T (Ce^{At})^T y(t)dt$$

شرط اوليه x_0 به صورت يكتا از روي پاسخ y(t) بدست آمده است لـذا طبـق تعريـف سيسـتم رؤيت پذير است.

■

۴-۱-۳) تستهای رؤیت پذیری

تاكنون بدين نتيجه رسيديم كه x_0 را به گونه اي جستجو كنيم كه $Ce^{At}x_0$ را صفر كند. امـا اين جستجو معمولاً مشكل است و بهتر است از روشهاي جبر خطي و فضاهاي پوچي و . . . در اين جستجو بهره ببريم. مجدداً قضية كيلي– هميلتون[1] را يادآوري مي كنيم. سيستم خطـي A با معادلة مشخصة زير در نظر بگيريد:

$$s^n + a_{n-1}s^{n-1} + ... + a_1 s + a_0 = 0$$

دراينصورت ماتريس A در معادلة مشخصة خود صدق مي كند يعني:

$$A^n + a_{n-1}A^{n-1} + ... + a_1 A + a_0 I = \mathbf{0} \qquad (٤-٤)$$

[1] Caley - Hamilton

قضيهٔ ۴-۲) شرايط رؤيت پذيري

بردار x^* يک متغير رؤيت ناپذير است, اگر و تنها اگر

$$\mathbf{O}\;x^* = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} x^* = \mathbf{0} \qquad (۵\text{-}٤)$$

که در آن $\mathbf{O}$, ماتريس رؤيت پذيري[1] ناميده مي شود. درصورتي که $rank(\mathbf{O}) < n$ باشد مي توان $x^* \neq 0$ را پيدا نمود که در شرط فوق صدق کند.

اثبات:

شرط لازم: فرض کنيد x^* يک حالت رؤيت ناپذير است دراينصورت $Ce^{At}x^* = 0 \;\; \forall t \geq 0$
چون تابع $Ce^{At}x^*$ تحليلي است، مشتقات آن وجود داشته و با توجه به فرض فوق بايستي کلية مشتقات آن نيز صفر باشند.

$$Ce^{At}x^*\Big|_{t=0} = Cx^* = 0$$

$$\frac{d}{dt}Ce^{At}x^*\Big|_{t=0} = CAe^{At}x^*\Big|_{t=0} = CAx^* = 0$$

$$\frac{d^k}{dt^k}Ce^{At}x^*\Big|_{t=0} = CA^k e^{At}x^*\Big|_{t=0} = CA^k x^* = 0$$

که به ازاي $k = n-1$ دقيقاً رابطة فوق مي باشد.

شرط کافي: فرض کنيد شرط قضيه براي يک x^* خاص برقرار شود بايستي نشان دهيم :

$$\forall t \quad Ce^{At}x^* = 0$$

از معادلة (٤-۵) نتيجه مي گيريم:

$$Cx^* = CAx^* = CA^2x^* = \ldots = CA^{n-1}x^* = 0$$

از قضية .C.H داريم:

[1] Observability matrix

$$\begin{cases} A^n = -a_{n-1}A^{n-1} - a_{n-1}A^{n-2} - \cdots - a_1A - a_0I \\ CA^n x^* = -a_{n-1}CA^{n-1}x^* - \cdots - a_{n-1}CAx^* - a_0Cx^* = \mathbf{0} \end{cases}$$

دو طرف معادلة قبل را در A ضرب مي کنيم:

$$\begin{cases} A^{n+1} = -a_{n-1}A^n - a_{n-2}A^{n-1} - \cdots - a_1A^2 - a_0A \\ CA^{n+1}x^* = -a_{n-1}CA^n x^* - a_{n-2}A^{n-1}x^* - \cdots - a_0Ax^* = 0 \end{cases}$$

لذا اگر بهمين ترتيب ادامه دهيم کلية ضرايب $Ce^{At}x^* = 0$ خواهند شد.

■

مثال ۴-۳) آيا سيستم زير رؤيت پذير است:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}, \;\; C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det \mathbf{O} = 0 \rightarrow \text{not full rank}$$

سيستم رؤيت ناپذير است، امّا متغير رؤيت ناپذير چيست؟

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ a \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad \rightarrow x^* = a\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

اگر هر دو متغير حالت برابر باشند اندازه گيري انجام شده قادر به شناخت آن نخواهد بود.

مثال ۴-۴) موتور DC و ضد هوائي

رؤيت پذيري سيستم ضد هوائي را

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & NK_m/J_e \\ 0 & -NK_m/J_e & -R/L \end{bmatrix}$$

براي حالات زير تحقيق کنيد.

۱) تنها θ اندازه گيري شود: $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

۲) تنها ω اندازه گيري شود: $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

۳) هر دو اندازه گيري صورت گيرد: $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

حالت ۱)
$$\mathbf{O}=\begin{bmatrix}C\\CA\\CA^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&NK_m/J_e\end{bmatrix}\to \text{Full rank}$$
رؤيت پذير مي باشد.

حالت ۲)
$$\mathbf{O}=\begin{bmatrix}C\\CA\\CA^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&NK_m/J_e\\0&-N^2K_m^2/L\,J_e&-NK_mR/L\,J_e\end{bmatrix}\to \text{rank}(\mathbf{O})=2$$
رؤيت ناپذير مي باشد.

متغير رؤيت ناپذير $x^*=\begin{bmatrix}a&0&0\end{bmatrix}^T$ مي باشد.

حالت ۳)
$$\mathbf{O}=\begin{bmatrix}C\\CA\\CA^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&0\\0&0&NK_m/J_e\\0&0&NK_m/J_e\\0&-NK_m/LJ_e&-NK_mR/LJ_e\end{bmatrix}\to \text{rank}(\mathbf{O})=3$$
رؤيت پذير مي باشد.

همانگونه كه انتظار مي رود چون با اندازه گيري θ رؤيت پذير است با اندازه گيري همزمان ω,θ نيز حتماً رؤيت پذير خواهد بود.

قضية ۴-۳) شرط بردار ويژه

سيستم (A,C) رؤيت ناپذير است، اگر و تنها اگر بردار ويژه اي v_i در A وجود داشته باشد كه $Cv_i=0$ گردد.

اثبات:

شرط كافي: فرض كنيد $v_1,v_2,...v_n$ بردارهاي ويژه ماتريس A باشند. مي خواهيم نشان دهيم اگر $\exists i \ni Cv_i=0$ در آنصورت سيستم رؤيت ناپذير است. در اينحالت فرض كنيد $x(0)=v_i$ با توجه به اينكه $Cv_i=0$ است خواهيم داشت:

$$x(t)=e^{s_it}.v_i$$
$$y_{zi}=Cx(t)=e^{s_it}Cv_i=0 \qquad \forall t$$
لذا سيستم رؤيت ناپذير است.

شرط لازم: نشان مي دهيم اگر $Cv_i\neq 0 \quad \forall i$ در اينصورت هيچ متغير رؤيت ناپذير نمي تواند وجود داشته باشد. در اينجا اثبات را براي حالت خاص مقادير ويژة متمايز صورت مي دهيم.

اگر كلية مقادير ويژه متمايز باشند، بردارهاي ويژة متناظر مستقل خطي اند. لذا مجموعة بردارهاي $\{v_1,v_2,...,v_n\}$ كل فضاي R^n را پوشش[1] مي دهد. لذا هر بردار شرط اوليه را مي توان از تركيب خطي بردارهاي ويژه ايجاد نمود.
$$x(0)=a_1v_1+a_2v_2+\cdots+a_nv_n$$
$$\Rightarrow x(t)=a_1e^{s_1t}v_1+a_2e^{s_2t}v_2+\cdots+a_ne^{s_nt}v_n$$
$$\Rightarrow y(t)=Cx(t)=a_1Cv_1e^{s_1t}+a_2Cv_2e^{s_2t}+\cdots+a_nCv_ne^{s_nt}$$
كلية ترمهاي فوق با شرط $Cv_i\neq o$ غير صفر مي باشند. لذا $y(t)\neq 0$ و هيچ حالت رؤيت ناپذير در سيستم وجود نخواهد داشت، مگر آنكه كلية ضرايب $a_i=0$ كه در اينصورت $y(0)=0$ خواهد شد.

■

اگر بردار ويژه اي در شرط $Cv_i=0$ صدق كند به آن "مود رؤيت ناپذير" گفته مي شود. اين قضيه نشان مي دهد كه درصورتي كه مود رؤيت ناپذيري وجود داشته باشد، بردار ويژة اين مود حالت رؤيت ناپذير خواهد بود. ثانياً اگر مود رؤيت ناپذيري موجود نباشد هيچ حالت رؤيت ناپذيري وجود نداشته و لذا سيستم رؤيت پذير خواهد بود. در عمل بايستي كلية مقادير ويژه و بردارهاي ويژه سيستم را تعيين نموده تا بتوان رؤيت پذيري سيستم را توسط اين روش تعيين نمود.

اگر مقادير ويژة ماتريس A متمايز نبوده و مطابق فرم جوردن بتوان بردارهاي ويژة مستقل خطي را يافت، مسلماً تعداد اين بردارها $k\le n$ خواهد شد. درصورتي كه $\text{rank}\,[Cv_{i1}{}^0,Cv_{i2}{}^0,...Cv_{ik}{}^0]=k$ در اينحالت هيچ مود رؤيت ناپذيري وجود نخواهد

[1] Span

داشت. اگر در اينحالت براي يک مقدار ويـژة تكـراري بتـوان دو بـردار ويـژة مسـتقل يافـت در اينحالت شرط فوق تحقق نخواهد يافت و سيستم رؤيت ناپذير خواهد شد.

مثال ۴–۵) براي سيستم شبكه الكتريكي مثال (۳-٤) مودهاي رؤيت ناپذير را بيابيد.

$$A=\begin{bmatrix}\frac{-3}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{-3}{2}\end{bmatrix} C=\begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}$$

مود رؤيت ناپذير $\lambda_1=-1 \Rightarrow v_1=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \Rightarrow Cv_1=\begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=0$

مود رؤيت پذير $\lambda_2=-2 \Rightarrow v_2=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} \Rightarrow Cv_2=\begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\neq 0$

$\lambda=-1$ مربوط به مود رؤيت ناپذير مي باشد.

۴–۱–۴) زير فضاي رؤيت ناپذير

همانگونه كه تاكنون در مورد روشهاي تشخيص رؤيت پذيري بيان شد, رؤيت ناپـذيري مربـوط به نحوة تشكيل بردار $x(0)$ و يا بردار ويژه اي از مـاتريس A يـا e^A مـي شـود كـه $Cv_i=0$ گردد. بدين ترتيب مودهاي رؤيت پذيري و رؤيت ناپذير از يكديگر قابل تفكيـک بـوده و امكـان شناسائي حالتي كه توسط خروجي رؤيت پذير نيست با اين جداسازي قابل انجام است. مسـلماً زيرفضاي رؤيت پذير از پوشش فضايي بردارهـاي ويـژة مودهـاي رؤيـت پـذير تشـكيل شـده و زيرفضاي رؤيت ناپذير از پوشش فضايي بردارهاي ويژه مودهاي رؤيت ناپذير تشكيل مي شـوند. اين زيرفضاها با ماتريس رؤيت پذيري $\mathbf{O}$ نيز ارتباط دارند. مي توان نشان داد زيرفضاي رؤيـت ناپذير سيستم همان فضاي پوچي[1] ماتريس رؤيت پذيري $\mathbf{O}$ مي باشد.

$$\mathbf{O}=\begin{bmatrix}Cx\\CA\\ \vdots\\ CA^{n-1}\end{bmatrix}$$

[1] Null space

براي جداسازي فضاي رؤيت پذير و رؤيت ناپذير كافي است تبديل همانندي بيابيم كه مودهـاي رؤيت پذير را از مودهاي رؤيت ناپذير تفكيک كنند. اما اين همان تبديل همانندي است كـه در فرم عمومي جوردن به آن اشاره شده است. به عنوان مثال فـرض كنيـد سيسـتم A داراي سـه مقدار ويژه $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ باشد، كه مود مربوط به λ_2 در آن رؤيت ناپذير است. در اينصـورت بـا تشكيل تبديل همانندي زير:

$$T=\begin{bmatrix}v_1 & v_3 & \vdots & v_2\end{bmatrix}$$

مود رؤيت ناپذير   مودهاي رؤيت پذير

مي توان ماتريس A را به فرم قطري زير تبديل نمود.

$$T^{-1}AT=\Lambda=\left[\begin{array}{cc:c}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_3 & 0\\ \hdashline 0 & 0 & \lambda_2\end{array}\right]$$

در اينصورت متغيرهـاي اول و دوم $\mathbf{z}$ يعنـي z_1,z_2 كـه از تبـديل $z(t)=T\cdot x(t)$ بدسـت مي آيند مربوط به مودهاي رؤيت پذير بوده و متغير z_2 مربوط بـه رؤيـت ناپـذير مـي باشـند. درحالت كلي ماتريس سيستم تغيير يافته به فرم زير تبديل مي شود:

$$\dot z(t)=\left[\begin{array}{c:c}A'_{11} & 0\\ \hdashline A'_{21} & A'_{22}\end{array}\right]z(t)+\begin{bmatrix}B'_1\\B'_2\end{bmatrix}u$$

$$y(t)=\left[\begin{array}{c:c}C'_1 & 0\end{array}\right]z(t)+Du(t) \qquad (۶\text{-}٤)$$

$$\rightarrow z=\begin{bmatrix}z_1\\ \hline z_2\end{bmatrix}$$

كه به آن فرم كانونيكال رؤيت پذيري مي گوئيم، كه در آن z_1 مربوط به مودهاي رؤيـت پـذير بوده و z_2 مربوط به مودهاي رؤيت ناپذير مي باشند. مسـلماً تبـديل همانـندي يكتـا نبـوده و تبديلهاي ديگري نيز كه اينكار را انجام دهند، وجود دارد. ولي براي كلية تبديل هاي همانـندي از خواص T مي دانيم كه مودهاي رؤيـت پـذير و رؤيـت ناپـذير را بـه نمـايش ديگـري تبـديل مي كند، ولي تغييري در رفتار ديناميكي سيستم ايجاد نخواهد كرد.

مثال ۴–۶) زيرفضاي رؤيت پذير را در سيستم زير جدا كنيد:

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}-4&-3&0\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}u$$
$$y=\begin{bmatrix}1&3&2\end{bmatrix}x$$

- شرط رؤيت پذيري ۱:

$$\mathbf{O}=\begin{bmatrix}C\\CA\\CA^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&3&2\\-1&-1&0\\3&3&0\end{bmatrix}\begin{matrix}\\\leftarrow\\\leftarrow\end{matrix}\qquad \mathrm{rank}(\mathbf{O})=2$$

سيستم رؤيت ناپذير است.

- شرط بردار ويژه

$$\lambda_1=0\rightarrow v_1=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\Rightarrow Cv_1=2\neq 0\rightarrow$$ رؤيت پذير

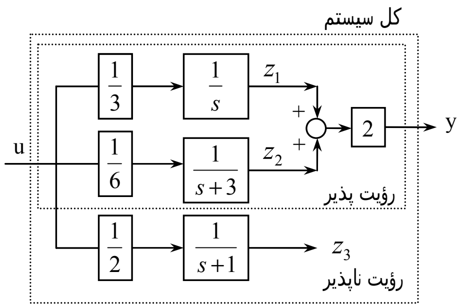
$$\lambda_2=-1\rightarrow v_2=\begin{bmatrix}-1\\1\\-1\end{bmatrix}\Rightarrow Cv_2=0\rightarrow$$ رؤيت ناپذير

$$\lambda_3=-3\rightarrow v_3=\begin{bmatrix}9\\-3\\1\end{bmatrix}\Rightarrow Cv_3=2\rightarrow$$ رؤيت پذير

$$T=\left[v_1\quad v_3\;\vdots\; v_2\right]=\left[\begin{array}{cc:c}0&9&-1\\0&-3&1\\1&1&-1\end{array}\right]\Rightarrow T^{-1}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}2&8&6\\1&1&0\\3&9&0\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}\dot{z}=T^{-1}AT\,x+T^{-1}Bu\\ y=CTx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dot{z}=\left[\begin{array}{cc:c}0&0&0\\0&-3&0\\ \hdashline 0&0&-1\end{array}\right]z+\dfrac{1}{6}\begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix}u\\ y=\begin{bmatrix}2&2&0\end{bmatrix}z\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dot{z}_1=\dfrac{1}{3}u\\ \dot{z}_2=-3z+\dfrac{1}{6}u\\ \dot{z}_3=-z_3+\dfrac{1}{2}u\end{cases}$$
$$y=2(z_1+z_2)$$



شکل (۴-۳)جداسازی زیر فضای رؤیت پذیر و رؤیت ناپذیر مثال (۴-۶)

مثال ۴-۷) زيرفضاي رؤيت پذير را در سيستم زير جدا كنيد:

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&2&1\\0&-1&0\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}u(t)$$
$$y(t)=\begin{bmatrix}0&0&1\end{bmatrix}x(t)$$

شرط رؤيت پذيري ۱:

$$\mathbf{O}=\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{rank}(\mathbf{O})=2$$

سيستم رؤيت ناپذير است.

شرط رؤيت پذيري ۲:

$$\lambda_1=0 \to v_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow Cv_1=0 \to$$ رؤيت ناپذير

$$\lambda_2=1 \to v_2=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow Cv_2=-1 \to$$ رؤيت پذير

$$\lambda_3=1 \to v^1{}_2=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow Cv_3=0 \to$$ رؤيت ناپذير

$$T=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow z=Tx,\ T^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \dot{z}=T^{-1}AT\cdot x+T^{-1}B\cdot u \\ y=CT\cdot x+D\cdot u \end{array} \Rightarrow \dot{z}=\left[\begin{array}{cc:c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 \end{array}\right]z+\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

۴-۱-۵) آشكار پذيري

در بسياري از حالتها، رؤيت ناپذيري مشكل جدي بهم نمي زند، در صورتي كه مودهاي رؤيت ناپذير كه برروي آنها هيچ نظارت خارجي وجود ندارد، پايدار باقي بمانند يا به تعبير ديگر هيچگاه به سمت ∞ ميل نكنند.

تعريف آشكار پذيري:

سيستمي را آشكارپذير مي گويند، اگر كلية مودهاي ناپايدار سيستم رؤيت پذير باشند.

توجه: مودهاي ناپايدار عبارتند از مودهايي هستند كه مقادير ويژة آنها داراي قسمت حقيقي غير منفي $\mathrm{Re}(\lambda)\geq 0$ باشد و يا در صفحة بستة سمت راست قرار گيرند. موضوع پايداري به صورت مجزا و كامل در فصل بعد تشريح خواهد شد.

شرط آشكارپذيري ضعيفتر از شرط رؤيت پذيري است. قطعاً يک سيستم رؤيت پذير آشكارپذير مي باشد. ولي سيستمهاي آشكارپذيري وجود دارند كه رؤيت پذير نمي باشند. تكيه بيشتر مهندسين در توجه به مودهاي ناپايدار سيستم و نحوة تأثير آن بر ديناميک كل سيستم مي باشد. لذا اگر شرط آشكارپذيري وجود داشته باشد حداقل مورد نياز براي طراحي كنترل كننده و رؤيتگر مناسب ايجاد خواهد شد.

۴-۲) كنترل پذيري

۴-۲-۱) تعريف كنترل پذيري

مفهوم كنترل پذيري بسيار مشابه با رؤيت پذيري است با اين تفاوت كه در اين ايدة مهم ارتباط ورودي u و متغير حالت x را بررسي مي كنيم. در واقع بررسي كنترل پذيري بدين معناست كه توانائي كنترل u (يا نحوة چيدمان عملگرها) در تأثيرگذاري در كلية عناصر متغير حالت $\underset{\sim}{x}$ را بررسي كنيم.

به عنوان مثال، سيستم تعليق خودرو مورد بحث در مثال (٤-١) را درنظر بگيريد. اگر براي كنترل ارتعاشات خودرو به تنهائي از عملگري كه نيروي F را مستقيماً در مركز جرم سيستم اعمال مي كند، استفاده كنيم مسلماً اين نيرو تنها باعث حركت عمودي سيستم x شده و تأثيري در حركت زاويه اي θ نخواهد داشت. لذا نصب يک عملگرد بدين ترتيب مطلوب نيست چراكه متغير θ در آن كنترل ناپذير خواهد شد و به هيچ عنوان نمي توان ارتعاشات غير مطلوب زاويه اي را بدين ترتيب حذف نمود. درحاليكه اگر به جاي يک عملگرد از دو عملگرد كه نيروي F_1,F_2 را در جلو و عقب خودرو اعمال مي كنند استفاده شود اين دو نيرو براحتي توانائي كنترل حركت θ,x را به صورت مستقل خواهند داشت. بدين ترتيب كنترل پذيري به

عملگرها و نحوة چيدمان آنها مرتبط مي باشد، درصورتي كه رؤيت پذيري به سنسورها و نحـوة چيدمان آنها مربوط مي شود.

تعريف كنترل پذيري

سيستمي را كنترل پذير مي گوئيم كه به ازاي هر متغير حالت x_1 در زمـان $T > 0$ تـابع u(t) در بازة زماني $0 < t \le T$ را بتوان چنان يافت كه سيستم از شرايط اولية $x_0 = 0$ در زمان صفر بتواند به شرايط x_1 در زمان T برسد.

اين تعريف به نظر محدود كننده است چرا كه از شرايط اولية صفر شروع كرده ايم $x_0 = 0$. اما اينگونه نيست چراكه مي توان نشان داد اگر سيستم شرايط ايـن تعريـف را ارضـاء كنـد، از هـر شرط اولية غيرصفري مي توان به شرايط مطلوب, x_1 در زمان غيرصفر T دسترسي پيدا كند:

$$x(t_0+T) = e^{AT}x(t_0) + \int_{t_0}^{t_0+T} e^{A(t_0+T-\tau)}Bu(\tau)d\tau \qquad (۷\text{-}٤)$$

با تغيير محدودة انتگرال گيري $\tau' = \tau - t_0$

$$\int_{t_0}^{t+T} e^{A(t_0+T-\tau)}Bu(\tau)d\tau = \int_0^T e^{(T-\tau')}Bu(t_0+\tau')d\tau' \qquad (۸\text{-}٤)$$

اگر $v(\tau') = u(t_0+\tau')$ قرار دهيم، اين انتگرال پاسخ بدون شرايط اوليـه[1] سيسـتم در زمـان t=T خواهد بود. لذا درصورتي كه سيستم كنترل پذير باشد، مي توان u(t) را به گونـه اي يافـت كه اين انتگرال به هر مقدار دلخواهي همگرا شده و لذا محدوديتي در تعريف وجود نـدارد. ايـن بدان معناست كه براي بررسي كنترل پذيري كافي است به پاسـخهاي بـدون شـرايط اوليـه يـا پاسخ خصوصي معادلات ديفرانسيل توجه كنيم.

[1] Zero state

۴-۲-۲) حالتهای کنترل ناپذیر و کنترل پذیری

تعريف: حالت كنترل ناپذير

حالت $x^* \ne 0$ را كنترل ناپذير مي ناميم اگر پاسخ خصوصي $x_{zs}(t)$ در كلية زمانها $\forall t$ و كلية وروديها u عمود بر حالت x^* باشد.

كه در آن عمود بودن دو بردار بدان معناست كه ضرب داخلي آنها صفر باشد. به صورت رياضـي اين شرط برابر است با:

$$\left.\begin{matrix}\forall t\\ \forall u\end{matrix}\right| \quad x^{*T}\int_0^t e^{A\tau}Bu(t-\tau)d\tau = \int_0^t x^{*T}e^{A\tau}Bu(t-\tau)d\tau = 0 \qquad (۹\text{-}٤)$$

اين تنها درصورتي برقرار خواهد شد كه

$$\boxed{\forall t \quad x^{*T}e^{A\tau}\cdot B = 0} \qquad (۱۰\text{-}٤)$$

همانگونه كه مشاهده مي شود اين شرط بسيار مشابه با $Ce^{A\tau}x^* = 0$ شـرط رؤيـت پـذيري است. در واقـع اگـر بـه جـاي B از B^T اسـتفاده شـود در واقـع ايـن شـرط ترانهـادة شـرط رؤيت پذيري است.

قضيۀ ۴-۴

يک سيستم LTI (يا زوج (A,B)) كنترل پذير است. اگر و تنها اگر, هيچ حالت كنترل ناپـذير نداشته باشد.

اثبات بسيار مشابه با قضية ۴-۱ مي باشد. ■

۴-۲-۳) تستهای کنترل پذیری:

تستهاي كنترل پذيري با توجه به دوگاني بحث شده بين رؤيـت پـذيري و كنتـرل پـذيري بـه صورت مشابه و به موازات تستهاي رؤيت پذيري قابل تعميم خواهنـد بـود. بـا توجـه بـه اينكـه ترانهادة معادلة كنترل پذيري $B^Te^{A^Tt}x^* = 0$ دقيقاً مشابه شرط رؤيت پـذيري بـراي سيسـتم دوگان زير است

$$\begin{cases}\dot{x} = A^Tx\\ y = B^Tx\end{cases} \qquad (۱۱\text{-}٤)$$

لذا کلية قضاياي رؤيت پذيري را مي توان به فرم مشابه به کنترل پذيري تعميم داد. بـه عنـوان مثال تست اول رؤيت پذيري بفرم زير مي باشد.

$$\begin{bmatrix} B^T \\ B^T A^T \\ B^T (A^T)^2 \\ \vdots \\ B^T (A^T)^{n-1} \end{bmatrix} x^* = 0 \qquad (۱۲\text{-}٤)$$

ياترانهادة آن

$$x^{*T}\begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = 0 \qquad (۱۳\text{-}٤)$$

لذا سيستم يا زوج (A,B) کنترل پذير است اگر $x^* \neq 0$ وجود نداشـته باشـد کـه در معادلـة فوق صدق نمايد يا به عبارت ديگر

$$\boxed{\operatorname{rank} \mathbb{C} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} B & AB & \ldots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = n} \qquad (۱۴\text{-}٤)$$

رتبة "ماتريس کنترل پذيري":$\mathbb{C}$ ، بايستي n باشد تا سيستم کنترل پذير باشد.

شرط بردارهاي ويژه نيز به صورت مشابه قابل پياده سازي است. بدين ترتيب که زوج (A,B) کنترل پذير نمي باشد اگر و تنها اگر، بردار ويژة w از ماتريس A^T وجود داشته باشـد کـه در معادلة $B^T w = 0$ صدق کند. اگر چنين بردار ويژه اي وجود داشته باشد w_i مـود مربوطـه را مود کنترل ناپذير مي ناميم.

مثال ۴-۸) براي سيستم زير شرط کنترل پذيري را چک نمائيد و حالت کنترل ناپذير را تعيين کنيد.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-3}{2} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

کنترل ناپذير $\mathbb{C} = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad \operatorname{rank}(\mathbb{C}) = 1 \rightarrow$

حالت کنترل ناپذير $\begin{bmatrix} a & -a \end{bmatrix}$ $\qquad \begin{bmatrix} a & -a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = 0$

از شرط بردار ويژه نيز همين نتيجه حاصل مي شـود: مـود کنتـرل ناپـذير 2- و حالـت کنتـرل ناپذير $\lambda_i(A^T) = -2 \rightarrow \omega_i = \begin{bmatrix} a \\ -a \end{bmatrix}$

۴-۲-۵) پايداري پذيري

مشابه با آشکارپذيري، مي توان پايداري پذيري را به صورت زير تعريف نمود:

تعريف پايداري پذيري

سيستمي پايداري پذير است، اگر کلية مودهاي ناپايدار آن کنترل پذير باشند.

اين شرط نيز از کنترل پذيري کامل ضعيف تر است و تنها کافي است مودهاي ناپايدار سيسـتم کنترل پذير باشد. بـدين ترتيـب سيسـتم هـاي پايـدار همـواره شـرط پايـداري پـذيري را دارا مي باشند. همچنين سيستم هاي کنترل ناپذيري موجودند که بـدليل اينکـه مودهـاي کنتـرل ناپذير آنها پايدارند، جزء دستة پايداري پذير قرار مي گيرند.

۴-۲-۶) زير فضاي کنترل پذير

مشابه با حالت رؤيت پذيري، زير فضاي کنترل پذير را مي توان با تشکيل تبديل همانندي کـه مودهاي کنترل پذير را در ابتدا و مودهاي کنترل ناپذير را در انتها در بر مي گيرند تشکيل داد.

$$T=\left[\begin{array}{c} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ \hline w_N \end{array}\right]\begin{array}{l} \rightarrow \text{مربوط به مودهاي کنترل پذير} \\ \\ x(t) \\ \rightarrow \end{array} \qquad (۴\text{-}۱۵)$$

با ضرب اين تبديل همانندي در متغير حالت مي توان زير فضاهاي کنترل پذير و کنترل ناپـذير را از يکديگر تفکيک نمود.

$$\dot{z}=\left[\begin{array}{c|c} A'_{11} & A'_{12} \\ \hline 0 & A'_{22} \end{array}\right]z+\left[\begin{array}{c} B'_1 \\ \hline 0 \end{array}\right]u(t) \qquad (۴\text{-}۱۶)$$

بدين ترتيب سيستمي پايداري است اگر تنها و اگر A'_{22} پايدار مجانبي باشد.

۴–۳) تجزیه کالمن سیستمهای LTI

همانگونه که تاکنون ذکر شد متغيرهاي حالت را مي توان در فرم قطري نمـايش سيسـتمها بـه چهار دسته زير تقسيم کرد.

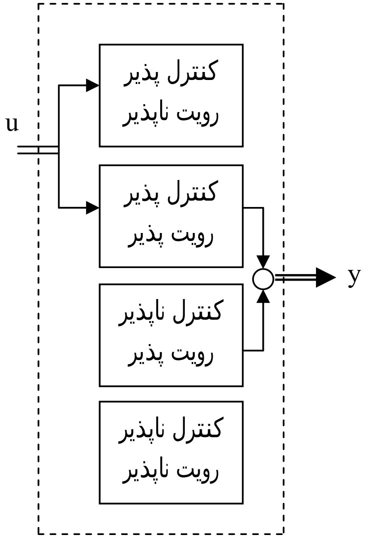
کنترل پذير و رؤيت پذير $(w_i^T B \neq 0, Cv_i \neq 0)$

کنترل ناپذير و رؤيت پذير $(w_i^T B = 0, Cv_i \neq 0)$

کنترل پذير و رؤيت ناپذير $(w_i^T B \neq 0, Cv_i = 0)$

کنترل ناپذير و رؤيت ناپذير $(w_i^T B = 0, Cv_i = 0)$

درصورتيکه اين متغيرهاي حالت را به چهار دستة فوق تقسيم کنيم, سيسـتم را مـي تـوان بـه اجزاء مختلف يا مودهاي مختلف خود تجزيه نمود. اين نوع تجزيه را تجزية "کـالمن" يـا تجزيـة "کانونيکال"مي ناميم. اين تجزيه را به صورت زير مي توان نشان داد.



شکل (۴-۴) تجزيهٔ کالمن سيستمهای LTI

مثال ۴–۹) سيستم زير را به صورت کالمن تجزيه کنيد.

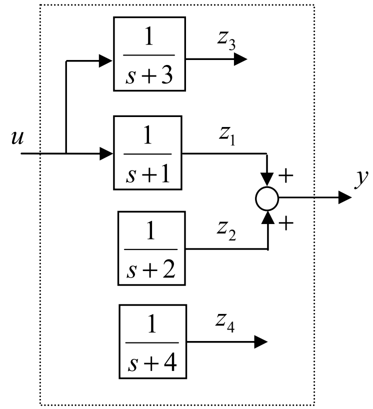
$$\dot{x}=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -4 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & -5 \end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t)=\begin{bmatrix} 7 & 6 & 4 & 2 \end{bmatrix}x(t)$$

تابع تبديل اين سيستم عبارتست از:

$$H(s)=C(sI-A)^{-1}B=\frac{s^3+9s^2+26s+24}{s^4+21s^3+35s^2+50s+24}$$

$$H(S)=\frac{(s+2)(s+3)(s+4)}{(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)}=\frac{1}{s+1} \quad !$$



شكل (۴-۵) نمايش تجزيهٔ كالمن مثال (۴-۹)

مودهاي ۲و۳و۴ با صفرهاي متناظر حذف شده اند و اين حالت را مودهاي پنهان[1] مـي نـاميم.
تبديلهاي همانندي را براي قطري كردن و تجزيه سيستم به فرم كالمن مي يابيم.

$$T=\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0\\ -1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 2\end{bmatrix}$$

$$T^{-1}=\begin{bmatrix} w_1\\ w_2\\ w_3\\ w_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1\\ 3 & 3 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

[1] Hidden mode

$$\dot{z}(t)=\begin{bmatrix} -1 & & & 0\\ & -2 & & \\ & & -3 & \\ 0 & & & -4\end{bmatrix}z(t)+\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t)=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}z(t)$$

از اينرو معادلات حالت بفرم قطري برابر است با:

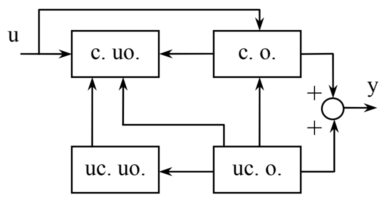
$\dot{z}_1=-z_1(t)+u(t)\rightarrow$ كنترل پذير و رؤيت پذير

$\dot{z}_2=-2z_2(t)\rightarrow$ كنترل ناپذير و رؤيت پذير

$\dot{z}_3=-3z_3(t)+u(t)\rightarrow$ كنترل پذير و رؤيت ناپذير

$\dot{z}_4=-4z_4(t)\rightarrow$ كنترل ناپذير و رؤيت ناپذير

نمايش بلوكي سيستم بفرم شكل (۴-۵) است. درحالت كلي و عـدم تمـايز مقـادير ويـژه، فـرم تجزية كالمن مي تواند به شكل كلي تري مطـابق شـكل (٤-٦) تبـديل شـود. در ايـن نمـايش مشاهده مي شود كه هيچ مسير مستقيمي از u به بلوكهاي كنترل ناپـذير و از بلوكهـاي رؤيـت ناپذير به خروجي y وجود ندارد، اما تعامل بين متغيرهاي حالت در همة بلوكها وجـود داشـته و اين بدليل وجود بلوكهاي جوردن است.



شكل (۴-۶) نمايش تجزيهٔ كالمن سيستمها در حالت كلّي

تابع تبديل سيستم تنها مشخصات بلوک كنترل پذير و رؤيت پذير را در خود جاي داده است و از تعامل بين متغيرهاي حالت رؤيت ناپذير و كنترل ناپذير اطلاعي بدست نخواهد داد.

مثال ۴-۱۰) موتور DC ضدهوائي

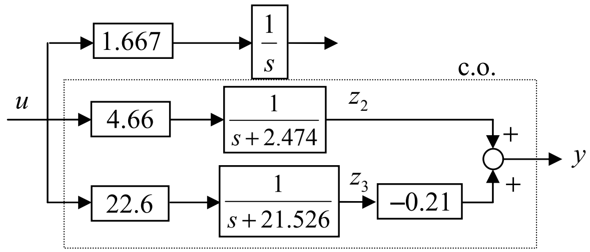
با فرض $C=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix}$, تجزية كانونيكال سيستم بدست آورده و نمايش دهيد.

قبلاً رؤيت ناپذير بودن سيستم و ماتريس تبديل همانندي را بدست آمـده اسـت, لـذا خـواهيم داشت:

$$T=\begin{bmatrix}1 & -0.4042 & 0.0096\\ 0 & 1 & -0.2062\\ 0 & -0.5575 & 1\end{bmatrix},\ \Lambda=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -2.474 & 0\\ 0 & 0 & -21.526\end{bmatrix}$$

$$CT=\begin{bmatrix}0 & 1 & -0.2062\end{bmatrix},\quad T^{-1}B=\begin{bmatrix}1.667\\ 4.66\\ 22.6\end{bmatrix}$$

لذا با بازنويسي معادلات حالت در متغير z مي توان بلوك دياگرام زير را رسم نمود.



شكل (۴-۷) تجزيۀ كالمن سيستم موتور DC

۴-۴) جمع بندی

در اين فصل مفاهيم كنترل پـذيري، رؤيـت پـذيري، پايـدار پـذيري و آشـكار پـذيري تشـريح شده اند. اپراتور كنترل پذيري در واقع به عنوان نگاشتي بـين توابـع بـي نهايـت بعـدي ورودي $u(t)$ و متغير حالت n بعدي $x(t_0)$، فشرده سازي اطلاعـات ورودي بـه مقـدار اوليـۀ متغيـر حالت را به عهده داشته و در صورتي كه رتبۀ اين نگاشـت كامـل باشـد سيسـتم كنتـرل پـذير ناميده مي شود. به صورت دوگان، اپراتور رؤيت پذيري بـه عنـوان نگاشـتي خطـي بـين متغيـر حالت n بعدي $x(t_0)$ و خروجي بي نهايت بعدي سيستم $y(t)$، عمل كرده و خاصيت رؤيـت پذيري در واقع تعداد و چيدمان لازم براي سنسورها را به منظور تعيين وضعيت سيسـتم در بـر مي گيرد. اين دو خصوصيت قبل از طراحي هـر نـوع كنتـرل مـدرن بـراي سيسـتمهاي خطـي بايستي مورد ارزيابي قرار گيرد. با اسـتفاده از تعـاريف و فضـاياي مربـوط بـه ايـن خصوصـيات روشهاي تحليل كنترل پذيري و رؤيت پذيري در سيستمهاي خطي ارائه گرديـده و ارتبـاط آن با وجود مودهاي پنهان يا حذف صفر و قطب در نمايش ماتريس تبديل سيستم به بحث كشيده

شده است. در انتها با ارائۀ روشـهاي تجزيـۀ سيسـتم بـه مودهـاي كنتـرل پـذير، رؤيـت پـذير، كنترل ناپذير و رؤيت ناپذير نحوۀ تفكيك اجزاء سيستم به فرم كالمن بيان شده است.

مسائل

۴-۱) سيستم خطي زير رادرنظر بگيريد:

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}u$$
$$y=\begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}x$$

الف) ماتريس انتقال حالت $\varphi(t)=e^{At}$ را محاسبه نمـوده و نشـان دهيـد بـردار x^* خاصـي وجود دارد كه در كلية زمانها $\forall t\geq 0$ رابطۀ زير را برقرار سازد.

$$Ce^{At}x^*=0$$

ب) نشان دهيد ماتريس رؤيت پذيري $\mathbf{O}$ نيز در رابطۀ زير صدق مي كند. $\mathbf{O}x^*=0$

ج) نشان دهيد بردار x^* بردار ويژه اي از A مي باشد كه $Cx^*=0$

۴-۲) سيستم خطي درجه دومي را درنظر بگيريد كه داراي مقـادير ويـژۀ مخـتلط مـي باشـد. نشان دهيد اين سيستم رؤيت ناپذير است, اگر و تنها اگر, ماتريس A كاملاً صفر باشد $\mathbb{C}=\mathbf{0}$

۴-۳) سيستم خطي زير را در نظر بگيريد:

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}u$$
$$y=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}x$$

الف) ماتريس انتقال حالت $\varphi(t)=e^{At}$ را محاسبه نموده و نشان دهيد بردار x^* خاصي وجود دارد كه در كلية زمانها $\forall t\geq 0$ رابطه زير را برقرار سازد.

$$x^*e^{At}B=0$$

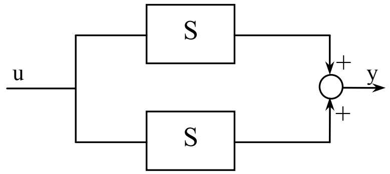
ب) نشان دهيد ماتريس كنترل پذيري $\mathbb{C}$ به گونه ايست كه $x^{*T}\mathbb{C}=0$

ج) نشان دهيد x^* يك بردار ويژه A^T است كه : $x^{*T}B=0$

۴-۴) سيستم زير را درنظر بگيريد كه از تركيب دو سيستم خطي معادل S تشكيل شده است كه اين سيستم S داراي n متغير حالت است كه از معادله زير تبعيت مي كند.

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

براي سيستم كل متغير حالت تركيبي را درنظر بگيريد كه n متغير اول آن مربوط به زير سيستم فوقاني و n متغير حالت بعدي مربوط به زير سيستم زيرين مي باشد. نشان دهيد كه اين سيستم رؤيت پذير نبوده و مودهاي رؤيت ناپذير را شناسائي كنيد. فرض كنيد سيستم S به تنهائي رؤيت پذير مي باشد.



شكل (۴-۸) تركيب موازی دو سيستم

(راهنمائي: براي چه شرايط اوليه اي پاسخ بدون ورودي $y_{zi}(t)$ متحد صفر مي گردد).

۵-۴) سيستم تركيبي مسئله ۴-۴ را درنظر بگيريد. نشان دهيد اين سيستم حتي درحاليكه زير سيستمهاي آن كنترل پذيرند, كنترل ناپذير مي باشد و مودهاي كنترل ناپذير آنرا تعيين كنيد.

(راهنمائي: چه بردار تركيبي از حالتها را مي توان از حالت صفر بدست آورد؟)

۶-۴) سرو موتور و هارمونيک درايو:

براي سيستم سرو موتور و هارمونيک درايو كه در مسئله (۲-۳) فصل دوم معرفي گرديده است كنترل پذيري سيستم را به ازاي شرايط ورودي – خروجي زير تعيين نموده و مودهاي كنترل ناپذير را درصورت وجود تعيين نمائيد.

الف) ورودي v خروجي θ_2

ب) ورودي v خروجي θ_1

ج) ورودي v خروجي θ_1, θ_2

نتايج بدست آمده را با نتيجه مسئله (۳-۱۵) فصل سوم مقايسه نمائيد.

۷-۴) كنترل سرعت غلطک:

براي سيستم غلطک معرفي شده در مسئله (۲-۴) فصل دوم:

الف) كنترل پذيري سيستم را به ازاي ورودي هاي ۱) u_1 ۲) u_2 ۳) u_1, u_2 تحقيق نموده و مودهاي كنترل ناپذير را درصورت وجود تعيين نمائيد.

ب) رؤيت پذيري سيستم را به ازاي خروجيهاي ۱) ω_0 ۲) ω_1 ۳) Δ_1 ۴) $\omega_0, \omega_1, \omega_2$ تحقيق نموده و مودهاي رؤيت ناپذير را درصورت وجود تعيين كنيد.

۸-۴) كنترل غلظت و ارتفاع مخزن

براي سيستم خطي سازي شدة مخزن كه در مسئله (۲-۱۱) فصل دوم معرفي گرديده است.

الف) كنترل پذيري سيستم را به ازاي وروديهاي ΔF_A تنها ΔF_0 تنها و $\Delta F_0, \Delta F_A$ تحقيق نموده و مودهاي كنترل ناپذير سيستم را درصورت وجود تعيين نمائيد.

ب) رؤيت پذيري سيستم را به ازاي خروجيهاي Δl تنها ΔC تنها و $\Delta C, \Delta l$ تحقيق نموده و مودهاي كنترل ناپذير سيستم را درصورت وجود تعيين نمائيد.

ج) نتايج بدست آمده را با توابع تبديل تعيين شده در مسئله (۳-۱۷) فصل سوم مقايسه نمائيد.

۹-۴) مبدل حرارتی

براي سيستم خطي سازي شدة مبدل حرارتي معرفي شده در مسئله (۲-۱۲) فصل دوم, رؤيت پذيري و كنترل پذيري سيستم را به ازاي ورودي ΔF_H و خروجي ΔT_c تحقيق نموده و مودهاي كنترل ناپذير و رؤيت ناپذير سيستم را درصورت وجود تعيين نمائيد. همچنين نتايج بدست آمده را با نتايج توابع تبديل بدست آمده در مسئله (۳-۱۸) فصل سوم مربوط سازيد.

۴-۱۰) راكتور شيميائی

براي سيستم خطي سازي شدة راكتور شيميائي كه در مسئله (۲-۱۳) فصل دوم معرفـي شـده است:

الف) كنترل پذيري را به ازاي ورودي ΔQ تحقيق نموده و مودهاي كنترل ناپذير را درصـورت وجود تعيين نمائيد و تغيير فيزيكي آنرا برحسب متغيرهاي سيستم بيان نمائيد.

(راهنمائي: پاسخ بدون شرايط اوليه $\Delta C_C, \Delta C_B, \Delta C_A$ را مقايسه كنيد)

ب) به منظور كاهش هزينه هاي اندازه گيري نحوة چيدمان بهينة سنسورهاي را توسط اپراتـور رؤيت پذيري مي توان تعيين نمود. فرض كنيد: ۱) ΔT به صـورت تنهـا ۲) $\Delta C_B, \Delta T$ با هم ۳) $\Delta C_C, \Delta C_B, \Delta T$ با هم اندازه گيري شوند. رؤيت پذيري را در اينحـالات تحقيـق نموده و مودهاي رؤيت ناپذير را تعيين كنيد.

۴-۱۱) جرثقيل سقفی

براي سيستم خطي سازي شده جرثقيل سقفي كه در مسئله (۲-۱۴) فصل دوم معرفي گرديده است.

الف) كنترل پذيري سيستم را بـه ازاي ورودي F بررسـي نمـوده و مودهـاي كنتـرل ناپـذير را درصورت وجود تعيين كنيد.

ب) رؤيت پذيري سيستم را به ازاي خروجيهاي ۱) Δx ۲) θ ۳) $\theta, \Delta x$ تحقيق نموده و مودهاي رؤيت ناپذير را تعيين نمائيد.

۴-۱۲) بندباز

براي مدل خطي سازي شده از بندباز معرفي شده در مسئله (۲-۱۵) فصل دوم

الف) كنترل پذيري سيستم را بررسي نموده و مودهاي كنترل ناپذير را تعيين كنيد.

ب) رؤيت پذيري سيستم را به ازاي خروجيهـاي ۱) φ ۲) θ ۳) θ, φ تحقيـق نمـوده و مودهاي رؤيت ناپذير را مشخص نمائيد.

۴-۱۳) پاندول دوتائی معكوس

براي مدل خطي سازي شدة پاندول دوتائي معكوس كه در مسئله (۲-۱۶) معرفي شده است, با فرض M=m=1Kg

الف) به صورت جبري نشان دهيد كه سيستم با ورودي F كنترل پذير است, اگـر تنهـا و اگـر, $\ell_1 \neq \ell_2$

ب) با فرض $\ell_1 = 1m, \ell_2 = 0.8m$ رؤيت پذيري سيستم را بـه ازاي خروجـي انـدازه گيـري شدة ۱) x ۲) θ_2, θ_1 ۳) θ_2, θ_1, x تحقيق نمائيد و مودهاي رؤيـت ناپـذير رادرصـورت وجود تعيين كنيد.

۴-۱۴) Maglev

براي مدل خطي سازي شده از سيستم تعليـق مغناطيسـي كـه در مسـئله (۲-۱۷) فصـل دوم معرفي شده است.

الف) فركانسهاي طبيعي سيستم را تعيين كنيد.

ب) كنترل پذيري را به ازاي وروديهاي زير تحقيق كنيد. ۱) كلية جريانهاي كنترلي ۲) كلية جريانهاي كنترل بجز Δi_{L_1} ۳) كلية جريانهاي كنترل بجـز Δi_{G_1}. ايـن تحقيـق بـه مـا كمـك مي كند كه كنترل پذير بودن سيستم را حتي درصورتي كه يكي از عملگرهـا از كـار مـي افتـد بررسي كنيم. مودهاي كنترل ناپذير رادرصورت وجود تعيين نمائيد.

ج) رؤيـت پـذيري را بـه ازاي شـرايط مختلـف انـدازه گيـري زيـر تحقيـق كنيـد: ۱) تمـام $\Delta S_{G_i}, \Delta S_{L_i}$ ۲) كلية موارد فوق بجز ΔS_{L_1} ۳) كلية موارد فوق بجز ΔS_{G_1}. مودهاي رؤيـت ناپذير را درصورت وجود تعيين كنيد.

د) با تغيير متغيرهاي ورودي به $\Delta u_{G_D}, \Delta u_{L_D}, \Delta u_{L_C}$ كنترل پذيري سيستم به ازاي تك تك وروديها به تنهائي را، مجدداً بررسي كنيد.

ه) براي اين سيستم رؤيت پذيري را به ازاي تـك تـك خروجيهـاي $\Delta\theta, \Delta y, \Delta z$ بـه تنهـائي بررسي كنيد و مودهاي رؤيت ناپذير را تعيين نمائيد.

۴-۱۵) اثبات كنيد اگر $\mathrm{rank}(B) = r$ آنگاه معادلة حالت سيسـتم $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ كه در آن x(t) بردار حالت n بعدي است و u(t) بردار m بعدي است كنتـرل پـذير اسـت اگـر و تنها اگر:

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-r}B \end{bmatrix} = n$$

۴-۱۶) اثبات كنيد اگر $\mathrm{rank}(C) = r$ آنگاه معادلة حالت سيستم

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y = Cx(t)$$

که در آن x بردار حالت n بعدي و u(t) بردار ورودي m بعدي و y بردار خروجي ℓ بعدي است. رؤيت پذير است, اگر تنها و تنها اگر

$$\text{rank}\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-r} \end{bmatrix} = n$$

۴-۱۷) نشان دهيد کنترل پذيري رؤيت پذيري سيستم تحت تبديل همانندي T تغيير ناپـذير است.

۴-۱۸) سيستم خطي زير را که در آن α يک پارامتر مجهول است را درنظر بگيريد.

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & -2 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mu(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

الف) مقدار α را به گونه اي تعيين کنيد که سيستم را رؤيت ناپذير سازد.

ب) مقدار α را به گونه اي تعيين کنيد که سيستم را کنترل ناپذير سازد.

۴-۱۹) سيستم با بعد n زير را درنظر بگيريد.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

رتبة ماتريس کنترل پذيري اين سيستم برابر $rank\mathbb{C} = n_1$ کـه در آن $(n_1 < n)$ مـي باشـد. فرض کنيد T_1 يک ماتريس با بعد $n \times n_1$ تشکيل شده از n_1 بردارهاي مستقل خطي $\mathbb{C}$ باشد و فرض کنيد T_2 يک ماتريس $n_1 \times n$ باشد که در معادلة $T_2 T_1 = I_{n_1 \times n_1}$ صـدق کنـد. نشـان دهيد که سيستم با بعد n_1 زير کنترل پذير است.

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = T_2 A T_1 z(t) + T_2 B u(t) \\ y(t) = C T_1 z(t) \end{cases}$$

۴-۲۰) رابطة لازم براي مسئله اي مشابه با مسئله ۴-۱۹ که در آن شرايط رؤيت پذيري مـورد نظر است را بررسي نمائيد.

۴-۲۱) سيستم زير را درنظر بگيريد:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \mu(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & \cdots & C_p \end{bmatrix} x(t) + Du(t) \end{cases}$$

کنترل پذيري سيستم را براي مقادير مختلف c,b,a بررسي نموده و مودهـاي کنتـرل ناپـذير را درحالت کنترل ناپذير تعيين نمائيد.

۴-۲۲) يک سيستم خطي با بعد n را که داراي m ورودي مي باشد و به فرم بلوکي – جـوردن زير نمايش داده شده است را درنظر بگيريد.

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} J_1 & & & & \\ & J_2 & & & \\ & & J_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & J_p \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_p \end{bmatrix} u(t)$$

اگر آخرين رديفهاي زير ماتريس B_i را با b_{il}^T معرفي نمائيم. اثبات کنيد کـه سيسـتم کـاملاً کنترل پذير است اگر و تنها اگر ,

۱- $\{b_{il}, b_{jl}, ..., b_{kl}\}$ يک مجموعة مستقل خطي مي باشد، اگر $J_i, J_j, ..., J_k$ بلوکهـاي جوردن با مقدار ويژة يکسان λ_i باشند.

۲- $b_{p_l} \neq 0$ اگر J_p تنها بلوک جوردن با مقدار ويژة λ_p باشد.

۴-۲۳) براي سيستم مسئله ۴-۲۲ فرض كنيد اولين ستونهاي زير ماتريس هاي C_i را بـا C_{il} نمايش دهيم. اثبات كنيد سيستم رؤيت پذير است، اگر تنها و اگر:

۱- $\{C_{il}, C_{jl}, ..., C_{kl}\}$ يـك مجموعـة مسـتقل خطـي مـي باشـد، اگـر $J_i, J_j, ..., J_k$ بلوكهاي جوردن با مقدار ويژة يكسان λ_i باشند.

۲- $C_{pl} \neq 0$ اگر J_p تنها بلوك جوردن با مقدار ويژة λ_p باشد.

۴-۲۴) سيستم خطي زير را درنظر بگيريد:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

الف) آيا اين سيستم كنترل پذير است؟

ب) بردارهايي كه زيرفضاي كنترل پذير سيستم را پوشش مي دهد را تعيين كنيد.

ج) سيستم را به فرم جداسازي شده در فضاهاي كنترل پذير و كنترل ناپـذير تبـديل كنيـد. و بلوك دياگرام آنرا رسم نمائيد.

د) آيا اين سيستم پايداري پذير است؟

مراجع

[1] Bélanger, Pierre., *Control engineering : a modern approach,* Saunders College Pub., c1995.

[2] Bishop, Robert H., Modern control systems analysis and design using MATLAB and SIMULINK, Addison Wesley, c1997.

[3] Brogan, William L., *Modern control theory,* 3rd ed. Englewood Cliffs, N.J. : Prentice Hall, c1991.

[4] Callier, Frank M. and Charles A. Desoer, *Linear system* theory, Springer-Verlag, c1991.

[5] Chen, Chi-Tsong., *Linear system theory and design*, Oxford University Press, c1999.

[6] Kailath**,** Thomas., *Linear systems*, Prentice-Hall, c1980.

[7] Kamen, Edward W. and J.K. Su, *Introduction to optimal estimation,* Springer, c1999.

[8] Klamka, Jerzy, *Controllability of dynamical systems,* Kluwer Academic Publishers, c1991.

[9] Ogata, Katsuhiko., *Modern control engineering*, 4th ed., Prentice Hall, 2001.

[10] Rugh, Wilson J., *Linear system theory,* 2nd ed., Prentice Hall, c1996.

[11] Shinners, Stanley M., *Modern control system theory and design,* 2nd ed., J. Wiley, c1998.

[12] Zadeh, Lotfi Asker. and Charles A. Desoer, *Linear system theory*, R. E. Krieger Pub. Co., 1979.

[13] دكتر علي خاكي صديق، *اصول كنترل مدرن*، انتشارات دانشگاه تهران، ١٣٧٤.

فصل پنجم

تحقق و پايداري سيستمهاي LTI

فصل پنجم: تحقق و پايداری سيستمهای LTI

۵–۱) تحقق سيستمهای LTI

تابع تبديل, نمايش يکتائي از ديناميک ورودي و خروجي يک سيستم LTI مي باشد, درصورتي که اين رابطة ديناميکي با تعداد نامحدودي معادلة حالت قابل تفسير و تعبير است. هـر يـک از معادلات حالت که مفسر ديفرانسيلي يک تابع تبديل باشد, يـک تحقـق بـراي آن تـابع تبـديل ناميده مي شود. به عنوان مثال:

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + u \\ y = x \end{cases} \qquad (۱\text{-}۵)$$

و

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + au \\ y = \dfrac{1}{a} x \end{cases} \qquad (۲\text{-}۵)$$

هر دو محقق کنندة يک تابع تبديل $\dfrac{1}{s+1}$ مي باشند.

> **تعريف تحقق:**
>
> يک معادلة حالت- خروجي $\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + D \end{cases}$ يک تحقق براي تابع تبديل H(s) است اگر $H(s) = C\ (sI - A)^{-1} B + D$.

حال مي توان ارتباط مشخصي بين H و اجزاء سيستم حالت بدست آورد و امکان وجود تحقق و يکتائي و عدم يکتائي آنرا بررسي نمود. مي توان نشان داد که معادلات حالت تحقق توابع تبديل

گويائي مي باشند كه سره يا اكيداً سره مي باشند. بدين معني كه در نمايش تابع تبـديلي آنهـا درجة صورت كوچكتر يا مساوي درجة مخرج است. با توجه به اينكه:

$$\lim_{s\to\infty} H(s) = D \qquad (۳\text{-}۵)$$

درصورتيكه $D \neq 0$ باشد تابع تبديل H(s) سره[1] خواهد بود. لذا تابع تبديل سره را مي توان با تقسيم مستقيم صورت و مخرج به فرم زير

$$H(s) = \hat{H}(s) + D \qquad (۴\text{-}۵)$$

تبديل نمود و تحقق $\hat{H}$ را مي توان با فرم كلي:

$$\begin{cases}\dot{x} = Ax + Bu\\ y = Cx\end{cases} \qquad (۵\text{-}۵)$$

بدست آورد. بنابراين بدون از دست دادن عموميت مسئله مي توان سيستمهاي مورد بحث را به سيستمهاي اكيداً سره[2] محدود نمود. در هر حـال قضـية وجـود تحقـق بـه صـورت زيـر بيـان مي شود.

قضية ۵-۱) وجود تحقق

يک ماتريس تبديل H(s) را مي توان به صورت معادلات فضاي حالـت تحقـق دارد, اگـر و تنهـا اگر, H(s) ماتريس گوياي سره (يا اكيداً سره) باشد.

۵-۲) تحقق كاهش ناپذير[3]

يكي از مشخصه هاي مهم تحقق, كاهش ناپذير بودن رتبة معادلات حالت مي باشـد. همانگونـه كه در اين بخش نشان داده خواهد شد اين مشخصه با خواص كنترل پـذيري و رؤيـت پـذيري سيستم در ارتباط است. ابتدا اجازه دهيد با يک مثال ايدة تحقق كاهش ناپذير را بررسي كنيم.

تحقق تابع تبديل $\frac{1}{s+1}$ را مي توان بفرم زير نوشت:

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = -x_1 + u\\ y = x_1\end{cases} \qquad (۶\text{-}۵)$$

تحقق ديگري براي سيستم نيز مي توان نوشت:

[1] Proper
[2] Strictly proper
[3] Minimal realization

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = -x_1 + x_2 + u\\ \dot{x}_2 = -2x_2\\ y = x_1 + x_2\end{cases} \qquad (۷\text{-}۵)$$

براي مشاهدة سريع اين برابري كافي است به تعريف تـابع تبـديل يـک سيسـتم رجـوع كنـيم. همانگونه كه قبلاً گفته شد تابع تبديل سيستم رابطة بين خروجـي و ورودي در حالـت شـرايط اوليه صفر (zs) مي باشد. با درنظر گرفتن معادلة حالت دوم, پاسخ شـرط اوليـه x_2 در كليـة زمانها صفر است چراكه در اين معادله u تاثير مستقيم ندارد. لذا با اين توصـيف هـر دو معادلـة حالت به يک تابع تبديل $\frac{1}{s+1}$ تبديل خواهند شد.

حال دقت كنيد كه براي تابع تبديل مرتبة اول $\frac{1}{s+1}$ يک تحقق با يک متغير حالت x_1 و يـک تحقق با دو متغير حالت x_2, x_1 تعيـين شـده اسـت. بـه تحققـي كـاهش ناپـذير يـا مينيمـال مي گوئيم كه با حداقل متغيرهاي حالت انجام پذيرد.

تعريف: تحقق كاهش ناپذير

تحقق يک تابع تبديل H(s) كاهش ناپذير يا مينيمال است اگر هيچ تحقق با تعـداد متغير حالت كمتر از آن نتوان يافت.

براي بررسي خواص تحقق هاي كاهش ناپذير لازمست پارامترهاي ماركوف و ماتريس هنكل را معرفي نمائيم.

كميتهـاي $\{CA^{i-1}b, \quad i = 1, 2, ...\}$ را "پارامترهـاي مـاركوف[1]" مـي نامنـد. ويژگـي خـاص پارامترهاي ماركوف اينست كه در تحقق هاي مختلف از يک تابع تبديل ايـن پارامترهـا تغييـر ناپذير باقي مي مانند. بدين ترتيب پارامترهاي ماركوف به صورت منحصر بفـرد از تـابع تبـديل قابل استخراج مي باشند. براي تعيين اين پارامترها از روي تـابع تبـديل مـي تـوان بسـط تـابع تبديل را برحسب توانهاي منفي s^{-i} بنويسيم.

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \sum_{i=0}^{\infty} h_i \, s^{-i} \qquad (۸\text{-}۵)$$

كه در آن

[1] Markov parameters

$$(sI-A)^{-1} = s^{-1}I + s^{-1}A + s^{-3}A^2 + \dots \qquad (۹-۵)$$

با مقايسة دو معادلة فوق مشخص مي شود كه پارامترهاي ماركوف همـان ضـرايب بسـط چنـد جمله اي فوق h_i مي باشند.

$$\text{پارامتر ماركوف} \rightarrow h_i = CA^{i-1}b \qquad (i = 1, 2, \dots) \qquad (۱۰-۵)$$

حال اگر تحقق هاي مختلفي را از يک تابع تبديل H(s) داشته باشيم مسلماً ضرايب بسط تواني فوق براي كلية تحقق ها بايستي يكسان باشند لذا

$$C_1 A_1^{\,i-1} B_1 = C_2 A_2^{\,i-1} B_2 \qquad (۱۱-۵)$$

يعني پارامترهاي ماركوف تغيير ناپذير بوده و به شكل تحقق مربوط نخواهند شد.

ماتريس هنكل[1] نيز با استفاده از پارامترهاي ماركوف به ترتيب زير تشكيل مي شود.

$$M(i,j) = \begin{bmatrix} h_i & h_{i+1} & \cdots & h_{i+j} \\ h_{i+1} & h_{i+2} & \cdots & h_{i+j+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_{i+j} & h_{i+j+1} & \cdots & h_{i+2j} \end{bmatrix} \qquad (۱۲-۵)$$

مسلماً ماتريس هنكل نيز كه از پارامترهاي تغيير ناپذير ماركوف تشكيل مي شـود خـود تغييـر ناپذير است و با نوع تحقق تغيير نمي كند. با اين مقدمه به ارتباط بين تحقق كـاهش ناپـذير و كنترل پذيري و رؤيت پذيري مي پردازيم.

قضية ۵-۲)

تحققي كاهش ناپذير است, اگر و تنها اگر, كنترل پذير و رؤيت پذير باشد.

اثبات:

شرط لازم: مي خواهيم نشان دهيم كاهش ناپذيري تحقق درصورتي از بـين خواهـد رفـت كـه سيستم كنترل پذير يا رؤيت ناپذير نباشد. اثبات دقيق ايـن موضـوع توسـط مـاتريس هنكـل و پارامترهاي ماركوف صورت مي گيرد اما در اينجـا از تجزيـة كـالمن يـک تحقـق بـه بلوكهـاي

[1] Hankel matrix

كنترل پذير و رؤيت پذير كه در بخش (٤-۵) فصل قبل به آن اشاره شـد اسـتفاده مـي كنـيم. درصورتي كه سيستم كنترل ناپذير يا رؤيت ناپذير باشد, بلوكهاي كنترل ناپذير و رؤيت ناپـذير را مي توان از سيستم حذف كرد، بدون اينكه تابع تبديل سيستم تغييري نمايد. لـذا بـا حـذف اين بلوكها دسترسي به تحققي با درجة پائين تر ممكن است و تحقق كاهش ناپذير نخواهد بود.

شرط كافي: با فرض كنترل پذيري و رؤيت پذيري مي خواهيم ثابت كنيم درجه اي پايينتر از n نمي توان داشت.

فرض كنيد ماتريس A داراي مقادير ويژة متمايز باشد در اينحالت مـاتريس A را مـي تـوان بـه فرم قطري كامل تبديل نمود و معادلات حالت تغيير يافته در اين مختصات همانگونه كـه قـبلاً بدست آمد، برابر است با:

$$\begin{cases} \dot{z}_i = s_i z_i + w_i^T B u & i = 1, 2, \dots, n \\ y = Cv_1 z_1 + Cv_2 z_2 + \cdots + Cv_n z_n + Du \end{cases} \qquad (۱۳-۵)$$

كه در آن مي توان نوشت:

لذا

$$z_i(s) = \frac{1}{s - s_i} w_i^T B u$$

$$y(s) = \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{s - s_i} (Cv_i)(w_i^T B) + D \right] u(s) \qquad (۱۴-۵)$$

اگر سيستم كنترل پذير و رؤيت پذير باشد با استفاده از تعريف داريم:

$$\forall i \in 1, \dots, n \qquad w_i^T B \neq 0, \;\; Cv_i \neq 0 \qquad (۱۵-۵)$$

لذا ضريب $\frac{1}{s - s_i}$ غير صفر بوده و در اينصورت تابع تبديل داراي n قطـب اسـت. (مسـاوي بـا تعداد متغيرهاي حالت) و چون قطبهاي سيستم حتمـاً بايسـتي جـزو مقـادير ويـژة A باشـند, حداقل درجة A بايستي حتماً n باشد و درجة پايينتري نمي تواند داشته باشد.

■

اين روش اثبات مطلب مهمي را روشن مي سازد:

ضريب $\frac{1}{s - s_i}$ تنها در موقعي صفر مي باشد (اگر و تنها اگر) كـه مـود i ام سيسـتم يـا كنتـرل ناپذير بوده $(w_i^T B = 0)$ و يا رؤيت ناپـذير باشـد $(Cv_i = 0)$. در اينصـورت عليـرغم اينكـه $(s - s_i)$ در $\det(sI - A)$ ديده مي شود در تابع تبديل سيستم ديده نخواهد شد. اين تنهـا

درصورتي امكان دارد كه اين قطب با يک صفر سيستم حذف گردد و لذا به اين مود, مود پنهان[1] گفته مي شود.
عدم حضور يک مقدار ويژة ماتريس A در قطبهاي تابع تبديل سيستم نشانگر وجود مود پنهان و يا عدم كنترل پذيري يا رؤيت پذيري در سيستم مي باشد. براي سيستمهاي SISO اين مهم در قطبهاي تكراري نيز تعميم مي يابد. يعني اگر مقدار ويژة تكراري A با تكرر r باشد, و در كمتر از اين تعداد در تابع تبديل ديده شود سيستم كنترل پذيري يا رؤيت پذيري خود را از دست داده است. اما اين موضوع هميشه براي سيستمهاي MIMO صادق نيست.

۵–۳) تحقق سيستمهاي SISO

در اين بخش روشهاي مختلف تحقق سيستمهاي تک ورودي- تک خروجي بررسي مي گردند. اساساً علت نامگذاري تفسير تابع تبديل به نمايش فضاي حالت با عنوان تحقق مربوط به زماني است كه پياده سازي كنترل كننده ها يا فيلترها بصورت الكترونيكي و توسط Op-Amp صورت مي پذيرفت. از Op-Amp هم به عنوان تقويت كننده, هم به عنوان انتگرال گير (با اضافه كردن يک خازن) و هم به عنوان جمع كننده و مقايسه كننده مي توان استفاده كرد.
لذا تحقق سيستمها توسط اين المانها به صورت بلوک دياگرام ارائه خواهد شد. اما امروزه نه تنها به علت پياده سازي بلكه به خاطر استفاده از تئوري كنترل مدرن براي طراحي و تنظيم كنترل كننده ها لازمست سيستمها را در فرم فضاي حالت بررسي كنيم. انواع مختلف روشهاي تحقق بسيار متنوع مي باشند، كه در بخشهاي بعدي به برخي از آنها مي پردازيم. بسته به نوع تحقق خواص مشخصي را از آنها مي توان انتظار داشت, كه بهترين خصوصيت در تحقق كاهش ناپذير بودن آنست. در اينجا فرض كنيد يک تابع تبديل اكيداً سره با مشخصات زير را بخواهيم به فرم ماتريسي $[A,B,C,D]$ محقق نمائيم.

$$H(s)=\frac{b_{n-1}s^{n+1}+b_{n-2}s^{n-2}+\ldots+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_0} \qquad (۱۶\text{-}۵)$$

لذا در حالت كلي ممكن است قطب و صفر مشتركي در اين تابع تبديل موجود باشد، كه به صورت مود پنهان در چند جمله اي هاي فوق قابل مشاهده مستقيم نباشد. درصورتي كه بخواهيم تحقق, كاهش ناپذير باشد لازمست ابتدا مودهاي پنهان را پيدا كرده و حذف نمائيم و سپس عمليات تحقق را صورت دهيم.

[1] Hidden mode

۵–۳–۱) تحقق كانونيكال كنترل پذيري

سيستم زير را در نظر بگيريد:

$$H(s)=\frac{b_{n-1}s^{n+1}+b_{n-2}s^{n-2}+\ldots+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_0}$$

در تحقق كانونيكال كنترل پذيري از متغيرهاي حالت به فرم زير استفاده مي كنيم.

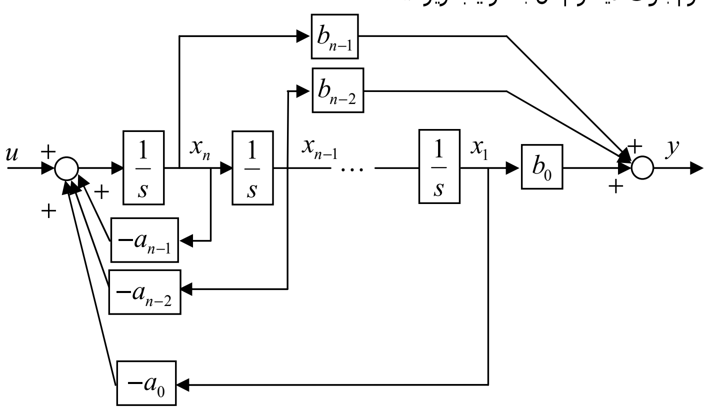
$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=x_3\\ \dot{x}_n=-a_{n-1}x_n-a_{n-2}x_{n-1}-\ldots-a_0x_n(t)+u(t)\\ y=+b_{n-1}x_n+b_{n-2}x_{n-1}+\ldots+b_1x_2+b_0x_1\end{cases} \qquad (۱۷\text{-}۵)$$

لذا در حالت ماتريسي خواهيم داشت:

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & & \vdots\\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \\ 0 & & \vdots & & 1\\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1}\end{bmatrix}\underset{\sim}{x}+\begin{bmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\\1\end{bmatrix}u \qquad (۱۸\text{-}۵)$$

$$y=\begin{bmatrix}b_0 & b_1\cdots & b_{n-1}\end{bmatrix}x$$

فرم بلوک دياگرام آن به ترتيب زير است:



شكل (۵-۱) بلوک دياگرام تحقق كانونيكال كنترل پذيري

همانگونه که از نام تحقق پيداست اين تحقق کنترل پذير است. براي بررسي اين مدعا، ماتريس کنترل پذيري را تشکيل مي دهم.

$$\mathbb{C}=\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & & * \\ \vdots & \vdots & 1 & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \vdots & & * \\ 1 & * & * & \cdots & * \end{bmatrix} \tag{۱۹-۵}$$

که در آن * عنصر غير صفر مي باشد. همانگونه که مشخص است برروي قطر فرعي اين ماتريس تماماً عناصر 1 قرار دارند. لذا رتبهٔ ماتريس کنترل پذيري برابر n بوده و اين سيستم کنترل پذير مي باشد. اما رؤيت پذير بودن اين تحقق بسته به آنست کـه سيسـتم مودهـاي پنهـان نداشـته باشد.

تحقق کانونيکال کنترل پذيري همواره کنترل پذير است و درصورتي که تابع تبديل مورد تحقق قطب و صفر مشترکي نداشته باشد, رؤيت پذير نيز خواهد بود.

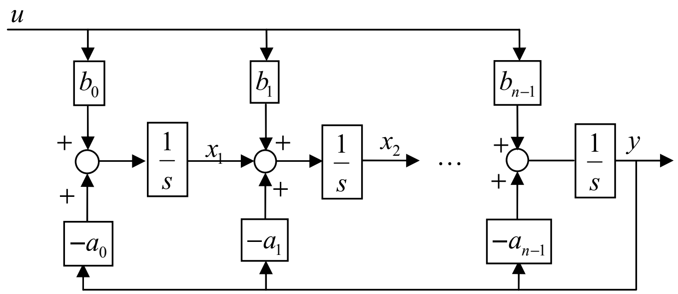
۵-۳-۲) تحقق کانونيکال رؤيت پذيري

اين تحقق به فرم زير مي باشد.

$$\dot{x}=\begin{bmatrix} 0 & 0\cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & -a_{n-2} \\ & & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}x+\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{bmatrix}u \tag{۲۰-۵}$$

$$y=\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}x$$

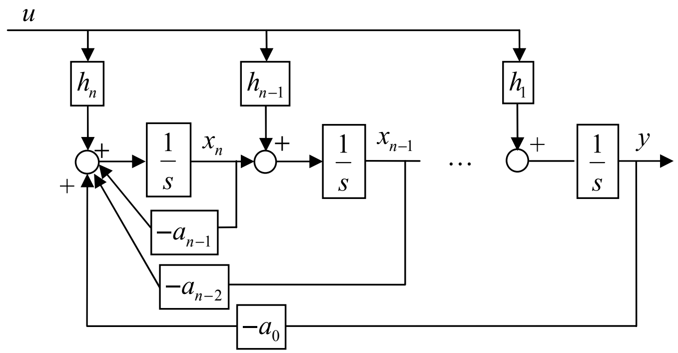
توجـه کنيـد کـه ايـن تحقـق دوگـان تحقـق کانونيکـال کنتـرل پـذيري اسـت کـه در آن $A_0=A_c^{\,T}, b_0=C_c^{\,T}, C_0=b_c^{\,T}$ لذا با توجه به خاصـيت دوگـاني سيسـتمهاي خطـي ايـن تحقق به صورت ذاتي رؤيت پذير مي باشد و درصورتي که تابع تبـديل سيسـتم قطـب و صـفر مشترک نداشته باشد کنترل پذير هم خواهد بود. (مينيمال مي گردد). شکل زير تحقـق رؤيـت پذيري به صورت کانونيکال را نشان مي دهد.



شکل ۵-۲ بلوک دياگرام تحقق کانونيکال رؤيت پذيری

۵-۳-۳) تحقق کانونيکال رؤيتگر

بلوک دياگرام اين تحقق مطابق شکل زير است.



شکل (۵-۳) بلوک دياگرام تحقق کانونيکال رؤيتگر

و يا به فرم ماتريسي زير:

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \cdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1}\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}h_1\\ h_2\\ \vdots\\ h_n\end{bmatrix}u \qquad (۲۱\text{-}۵)$$
$$y=\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}x$$

كه در آن h_i پارامترهاي ماركوف در سيستم مي باشند.

$$H(s)=\sum_{i=1}^{\infty}h_i s^{-i} \qquad (۲۲\text{-}۵)$$

و از رابطة زير قابل محاسبه مي باشند.

$$\begin{bmatrix}h_1\\ \vdots\\ h_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ a_{n-1} & 1 & & \vdots\\ \vdots & & 1 & 0\\ a_1 & a_2\cdots & a_{n-1} & 1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}b_{n-1}\\ b_{n-2}\\ \vdots\\ b_0\end{bmatrix} \qquad (۲۳\text{-}۵)$$

با محاسبة مستقيم ماتريس رؤيت پذيري مي توان نشان داد براي اين تحقق

$$\mathbf{O}=\begin{bmatrix}C\\ CA\\ \vdots\\ CA^{n-1}\end{bmatrix}=I \qquad (۲۴\text{-}۵)$$

لذا اين تحقق همواره رؤيت پذير مي باشد. همگن بودن ماتريس رؤيت پـذيري نـه تنهـا رؤيـت پذير سيستم را نشان مي دهد بلكه يكنواختي عددي در محاسبة متغير هاي حالت سيستم را از روي اطلاعات خروجي سيستم مشخص مي سازد. از طرف ديگر مـاتريس كنتـرل پـذيري ايـن تحقق عبارتست از

$$\begin{aligned}\mathbb{C}&=\begin{bmatrix}B & AB\cdots & A^{n-1}B\end{bmatrix}\\ &=M(1,n-1)\end{aligned} \qquad (۲۵\text{-}۵)$$

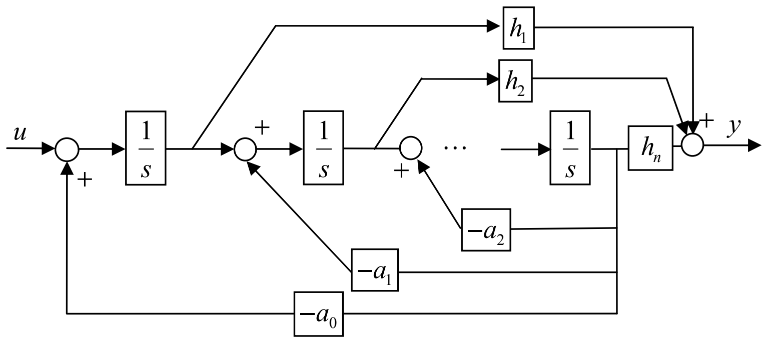
ماتريس هنكل با آرايه هاي n-1,1. همانند قبل تنها زماني سيستم كنترل پذير خواهد بـود كـه تابع تبديل H(s) داراي صفر و قطب مشترك نباشد.

۵-۳-۴) تحقق كانونيكال كنترلر

اين تحقق دوگان تحقق قبل مي باشد لذا

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & -a_0\\ 1 & 0 & 0 & -a_1\\ 0 & 1 & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 1 & -a_{n-1}\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}u \qquad (۲۶\text{-}۵)$$
$$y=\begin{bmatrix}h_1 & h_2\cdots & h_n\end{bmatrix}x$$

كه در آن h_i پارامترهاي ماركوف مي باشند. لذا ماتريس كنترل پذيري سيستم ماتريس واحـد بوده و ماتريس رؤيت پذيري آن ماتريس هنكل مي باشد. نماد بلوكي اين تحقـق بـه فـرم زيـر است:



شكل (۵-۴) بلوک دياگرام تحقق كانونيكال كنترلر

مثال ۵-۱) تحقق هاي مختلف تابع تبديل زير را بدست آوريد:

$$H(s)=\frac{s^2+1}{s^3+6s^2+11s+5}$$

نخست توجه كنيد قطب و صفرهاي سيستم متمايز بوده و لذا تحقـق هـاي بدسـت آمـده كـلاً كاهش ناپذير مي باشند.

الف) تحقق كانونيكال كنترل كننده

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-5&-11&-6\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1&0&1\end{bmatrix}x$$

ب) تحقق كانونيكال رؤيتگر

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0&0&-5\\0&0&-11\\0&1&-6\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}0&0&1\end{bmatrix}$$

ج) تحقق كانونيكال رؤيت پذيري

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-5&-11&-6\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\-6\\26\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1&0&1\end{bmatrix}y$$

كه در آن پارامترهاي ماركوف از رابطة زير تعيين شده اند.

$$\begin{bmatrix}h_1\\h_2\\h_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\6&1&0\\11&6&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-6\\26\end{bmatrix}$$

د) تحقق كانونيكال كنترل پذيري

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0&0&-5\\1&0&-11\\0&1&-6\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1&-6&26\end{bmatrix}x$$

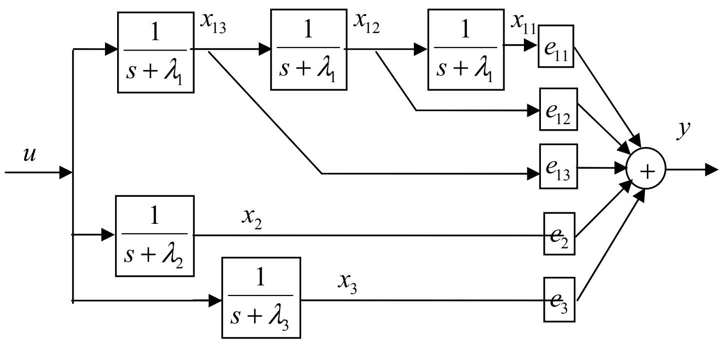
جالب توجه است كه ماتريسهاي D,C,B,A در اين تحقق ها كاملاً متفاوت مي باشند، كه اين مثال عدم يكتائي تحقق ها را به خوبي نشان مي دهد.

۵-۳-۵) تحقق كانونيكال جوردن

براي سادگي نمايش اين روش اجازه دهيد از يک مثال براي بيان اين تحقق استفاده كنيم. ايدة اصلي تحقق استفاده از فرم جوردن مي باشد. كه ضمن سادگي مشخصات اين سيستم را تعبير مي كند. اما فرم جوردن در توابع تبديل يعني جداسازي قطبها و اين عمل توسط كسرهاي جزئي انجام مي شود. به عنوان مثال تابع تبديل اكيداً سره درجة پنجمي را درنظر بگيريد كه داراي يک ريشة تكراري با تكرر ۳ مي باشد. اين تابع تبديل را با استفاده از كسرهاي جزئي به اجزاء خود تقسيم مي كنيم.

$$H(s)=\frac{e_{11}}{(s-\lambda_1)^3}+\frac{e_{12}}{(s-\lambda_1)^2}+\frac{e_{13}}{(s-\lambda_1)}+\frac{e_2}{s-\lambda_2}+\frac{e_3}{s-\lambda_3} \qquad (۲۷\text{-}۵)$$

بدين ترتيب به دو صورت مي توان اين تابع تبديل تجزيه شده را تحقق بخشيد. شكل زير نحوة تجزية اول آنرا نمايش مي دهد.



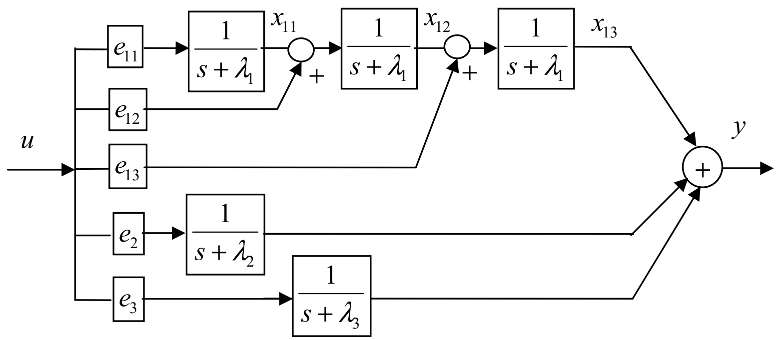
شكل (۵-۵) نمايش سيستم در تحقق كانونيكال جوردن رؤيت پذير

لذا در اينحالت:

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\\1\end{bmatrix}u \qquad (۲۸\text{-}۵)$$

$$y=\begin{bmatrix}e_{11} & e_{12} & e_{13} & e_2 & e_3\end{bmatrix}x$$

همانگونه که در شکل ملاحظه مي شود خروجي ايـن تحقـق از کليـة متغيرهـاي حالـت تـأثير پذيرفته است و لذا اين تحقق رؤيت پذير است. حال اگر به صورت ديگر اين تابع تبديل تجزيـه شده را تحقق بخشيم مي توان ديد:



شکل (۵-۶) نمايش سيستم در تحقق کانونيکال جوردن کنترل پذير

در اينحالت ضرايب کسرهاى جزئي در نزد ورودي بـاقي مانـده و تحقـق بـه فـرم زيـر حاصـل مي شود.

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}e_{11}\\e_{12}\\e_{13}\\e_2\\e_3\end{bmatrix}u \qquad (۲۸\text{-}۵)$$

$$y=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}x$$

مثال ۵-۲)

سيستم زير را به فرم کانونيکال جوردن محقق کنيد.

$$H(s)=\frac{s^2-2s+1}{s^3+4s^2+5s+2}=\frac{(s-1)^2}{(s+1)^2(s+2)}$$
$$=\frac{4}{(s+1)^2}+\frac{-8}{(s+1)}+\frac{9}{(s+2)}$$

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}u$$
$$y=\begin{bmatrix}4 & -8 & 9\end{bmatrix}x$$

يا

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}4\\-8\\9\end{bmatrix}u$$
$$y=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\end{bmatrix}x$$

۵-۴) تحقق سيستمهای يک ورودی- چند خروجی SIMO

ماتريس تبديل يک سيستم SIMO يک بردار ستوني از توابع تبديل مي باشد, که مخـرج کليـه توابع تبديل يکسان مي باشند.

$$G(s)=\frac{1}{d(s)}\begin{bmatrix}b_1(s)\\b_2(s)\\ \vdots\\ b_m(s)\end{bmatrix} \qquad d(s)=(sI-A) \qquad (۲۹\text{-}۵)$$

براي بدست آوردن تحقق اين گونه سيستمها کافي است تحقق تک تک اجزاء بدست آمده و بـا يکديگر به فرم ماتريسي ترکيب شوند. ماتريس حالت ايـن تحقـق هـا يکسـان اسـت چـرا کـه $d(s)$ در کلية توابع تبديل تکراري است. از طرف ديگر تنها فرمهـاي کنتـرل کننـده, کنتـرل پذيري و کنترل پذيري جوردن براي ترکيب سيستمها مناسب مي باشـد, چراکـه ورودي کليـة سيستمها يکسان است. لذا تحقق ها به فرم زير خواهند بود.

الف) کانونيکال کنترل پذيری

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1 & \cdots & & 0\\ 0 & 0 & 1 & & \vdots\\ \vdots & \vdots & & & 1\\ -a_0 & -a_1 & -a_1 & \dots & -a_{n-1}\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}b_{10} & b_{11} & \cdots & b_{1\,n-1}\\ b_{20} & b_{21} & \cdots & b_{2\,n-1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ b_{m0} & b_{m1} & \cdots & b_{m\,n-1}\end{bmatrix}x \qquad \begin{matrix}\leftarrow b_1\\ \leftarrow b_2\\ \\ \leftarrow b_m\end{matrix} \tag{۳۰-۵}$$

ب) کانونيکال کنترل کننده

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0\\ 1 & 0 & & 0 & -a_1\\ \vdots & 1 & & & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1}\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1n}\\ h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ h_{m1} & h_{m2} & \cdots & h_{mn}\end{bmatrix}x \tag{۳۱-۵}$$

که در آن h_{ji} پارامترهاي مارکوف مربوط به b_j مي باشد.

ج) کانونيکال جوردن

بازهم مثال پنج حالته قبل را جهت سادگي نمايش درنظر مي گيريم:

$$\dot{x}=\left[\begin{array}{ccc|cc}\lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3\end{array}\right]x+\left[\begin{array}{c}0\\ 0\\ 1\\ \hline 1\\ \hline 1\end{array}\right]u$$

$$y=\begin{bmatrix}e_{111} & e_{112} & e_{113} & e_{12} & e_{13}\\ e_{211} & e_{212} & e_{213} & e_{22} & e_{23}\\ \vdots & & & & \vdots\\ e_{m11} & e_{m12} & e_{m13} & e_{m2} & e_{m3}\end{bmatrix} \tag{۳۲-۵}$$

نکته: دقت کنيد که اگر در يکي از توابع تبديل مربوط به ماتريس تبديل سيستم حذف و صفر قطبي امکانپذير باشد براي آنکه بتوان کلية تحقق ها را با يکديگر ترکيب نمود لازمست کـه از حذف صفر و قطب اجتناب نموده و ماتريس A را به ازاي کلية قطبها (واقعـي و پنهـان) تحقـق دهيم.

مثال ۵-۳)

تحقق کانونيکال کنترل کننده را براي سيستم زير تعيين کنيد.

پاسخ: صفر و قطبهاي حذف شده را بازسازي مي کنيم.

$$H(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{(s^2+1)(s+1)}\\ \dfrac{s}{(s+1)(s+2)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{s+2}{(s^2+1)(s+1)(s+2)}\\ \dfrac{s(s^2+1)}{(s^2+1)(s+1)(s+2)}\end{bmatrix}$$

$$d(s)=s^4+3s^3+3s^2+3s+2$$

لذا تحقق زير را مي توان براحتي بدست آورد.

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\-2&-3&-3&-3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}2&1&0&0\\0&1&0&1\end{bmatrix}\begin{matrix}\to s+2\\ \to s^3+0s^2+s+0\end{matrix}$$

سؤال: آيا تحقق فوق کاهش ناپذير است؟

۵-۵) تحقق سيستمهای چند ورودی- تک خروجی MISO

ماتريس تبديل چنين سيستمي يک بردار سطري از توابع تبديل گويا خواهد بود.

$$H(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{B_1(s)}{a_1(s)} & \dfrac{B_2(s)}{a_2(s)} & \cdots & \dfrac{b_r(s)}{a_r(s)}\end{bmatrix} \qquad (۵-۳۳)$$

درحالت کلي بايستي کلية چند جمله ايهاي مخرج يکسان باشند. درصورتي که به علت حذف صفر و قطب مسترک در تعدادي از آنهااين حالت ديده نشود مي توان با مخرج مشترک گيري فرم استاندارد زير را تعيين نمود.

$$H(s)=\frac{1}{a(s)}\begin{bmatrix}b_1(s) & b_2(s) & \cdots & b_r(s)\end{bmatrix} \qquad (۵-۳۴)$$

بحث تحقق در اينحالت نيز کاملاً مشابه حالت SIMO مي باشد با اين تفاوت که چون کلية سيستمها داراي يک خروجي مي باشند، از فرمهاي رؤيت پذير و رؤيتگر بايستي استفاده نمود.

الف) تحقق کانونيکال رؤيت پذيری

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0&0\cdots&0&-a_0\\1&0&&-a_1\\0&1&&\vdots\\\vdots&&&\vdots\\0&0&1&-a_{n-1}\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}b_{10}&&b_{r0}\\b_{11}&&b_{r1}\\\vdots&&\vdots\\b_{1\,n-1}&\cdots&b_{r\,n-1}\end{bmatrix}u \qquad (۵-۳۵)$$

$$y=\begin{bmatrix}0&\cdots&0&1\end{bmatrix}x$$

ب) تحقق کانونيکال رؤيت گر

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0&0\\0&0&1&\cdots&0&0\\0&0&0&\ddots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&\cdots&0&1\\-a_0&-a_1&-a_2&\cdots&\cdots&-a_{n-1}\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}h_{11}&\cdots&h_{r1}\\h_{12}&&h_{r2}\\\vdots&&\vdots\\h_{1n}&\cdots&h_{rn}\end{bmatrix}u \qquad (۵-۳۶)$$

$$y=\begin{bmatrix}1&0&\cdots&0\end{bmatrix}$$

ج) تحقق جوردن فرم رؤيت پذير

$$\dot{x}=\left[\begin{array}{ccc|c|c}\lambda_1&1&0&0&0\\0&\lambda_1&1&0&0\\0&0&\lambda_1&0&0\\\hline 0&0&0&\lambda_2&0\\\hline 0&0&0&0&\lambda_3\end{array}\right]x+\begin{bmatrix}e_{11}^1&e_{11}^2&\cdots&e_{11}^r\\e_{12}^1&e_{12}^2&&e_{12}^r\\e_{13}^1&e_{13}^2&&e_{13}^r\\e_2^1&e_3^2&&e_2^r\\e_3^1&e_3^2&\cdots&e_3^r\end{bmatrix}u \qquad (۵-۳۷)$$

$$y=\left[\begin{array}{ccc|c|c}0&0&1&1&1\end{array}\right]x$$

۵-۶) تحقق سيستم های چند ورودی و چند خروجی MIMO

ماتريس تبديل يک سيستم MIMO را به صورت زير درنظر بگيريد.

$$G(s)=\left[Gij(s)\right]_{m\times r} \qquad (۵-۳۸)$$

که m تعداد خروجي و r تعداد ورودي سيستم مي باشد. با توجه به اينکه ورودي و خروجي اين سيستم هيچکدام واحد نمي باشند، مانند حالتهاي قبل نمي توان به سادگي با فرض يک ماتريس ثابت A تحقق هاي اجزاء را با يکديگر ترکيب نمود. در اينجا بايستي براي سطرهاي ماتريس G(s) (يا ستونهاي آن) تحقق هاي را بدست آورده و سپس کل تحقق هاي سطري را با بلوک کردن ماتريسهاي A در آن ترکيب نمود. در اينحالت مسلماً تحقق بدست آمده کاهش ناپذبر نبوده و مي بايست با استفاده از روش جوردن يا روشهاي ديگر نسبت به کاهش مرتبة آن پرداخت. روشهاي زيادي در اين زمينه وجود دارد که در زير به ارائة يک روش متداول آن مي پردازيم. فرض کنيد سيستم r ورودي و m خروجي را به صورت سطري بازنويسي کنيم.

$$G(s)=\begin{bmatrix} \dfrac{b_{11}(s)}{a_1(s)} & \dfrac{b_{12}(s)}{a_1(s)} & \cdots & \dfrac{b_{1r}(s)}{a_1(s)} \\ \vdots & & & \vdots \\ \dfrac{b_{m1}(s)}{a_m(s)} & \dfrac{b_{m2}(s)}{a_m(s)} & \cdots & \dfrac{b_{mr}(s)}{a_m(s)} \end{bmatrix} \qquad (۳۹\text{-}۵)$$

فرم تحقق بدست آمده بصورت زير است.

$$\dot{x}=\begin{bmatrix} A_1 & & & 0 \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_m \end{bmatrix} x+\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_m \end{bmatrix} \underset{\sim}{m} \qquad (۴۰\text{-}۵)$$

$$y=\begin{bmatrix} C_1 & \vdots & C_2 & \vdots & \cdots & \vdots & C_r \end{bmatrix} x$$

كه در آن A_i ها از تحقق سطرهاي ماتريس به فرم زير تعيين مي شوند.

$$A_i=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & -a_0^i \\ 1 & 0 & & \vdots \\ & 1 & & \\ \vdots & & & -a_0^i \\ 0 & \cdots & 1 & -a_0^i \end{bmatrix} \qquad (۴۱\text{-}۵)$$

$$B_i=\begin{bmatrix} b_0^{i1} & b_0^{i2} & \cdots & b_0^{ir} \\ b_1^{i1} & b_0^{i2} & \cdots & b_0^{ir} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{n-1}^{i1} & b_{n-1}^{i2} & \cdots & b_{n-1}^{ir} \end{bmatrix} \qquad (۴۲\text{-}۵)$$

$$C_i=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow \text{row i} \\ \\ \end{matrix} \qquad (۴۳\text{-}۵)$$

با توجه به حجم عمليات در اين روش و همچنين نياز به كاهش مرتبة تحقق, از روشهاي عددي مناسب در اين مرحله بايستي بهره جست. بدين منظور از دستور هاي sysic و unpck و از دستور minreal به منظور كاهش مرتبه مي توان استفاده نمود.

مثال ۵-۴):

$$G(s)=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+1} & \dfrac{2}{s+3} \\ \dfrac{1}{s+1} & \dfrac{1}{s+1} \end{bmatrix}$$

با استفاده از دستور sysic و unpck خواهيم داشت:

$$A=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix};\quad B=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1.4142 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix} -1 & -1.4142 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

با استفاده از دستورminreal سيستم كاهش مرتبه يافته به صورت زير تعيين مي شود:

$$A=\begin{bmatrix} -1.2857 & 0.3598 & -0.6003 \\ 0.3598 & -1.4531 & 0.7559 \\ -0.6003 & 0.7559 & -2.2612 \end{bmatrix};\quad B=\begin{bmatrix} -1.0690 & 1.0690 \\ 0.4760 & 0.1394 \\ 0.7941 & 1.3556 \end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix} 0 & -0.4351 & 1.5201 \\ 0 & 1.0505 & 0.6296 \end{bmatrix}$$

۵-۷) پايداري سيستمهاي LTI

پايداري سيستمهاي ديناميكي يكي از خصوصيتهاي مهم و مطلوب مهندسي است. چرا كه درصورت ناپايدار شدن درحالت كلي متغيرهايي از سيستم به سمت بي نهايت ميل مي كنند كه در عمل با بزرگ شدن اين متغيرها, حالت بحراني و خطرناكي در سيستم اتفاق خواهد افتاد. لذا دور شدن از ناپايداري يكي از ضروريات سيستمهاي كنترل مي باشد. تعاريف متعددي براي پايداري وجود دارد. اجازه دهيد در ابتدا با نگرش كلي بر معادلات ديناميكي (خطي و غيرخطي) تعاريفي چند از پايداري را ارائه نموده و سپس توجه خود را به سيستمهاي LTI معطوف سازيم.

۵-۷-۱) تعاريف پايداري

سيستم غيرخطي $\dot{x}=f(x,t)$ را درنظر گرفته و فرض كنيد x^* يک حالت تعادل براي سيستم است. در اينحالت $f(x^*,t)=0$ خواهد بود.

تعريف ۱: پايداري به مفهوم لياپانوف (پايداري لياپانوف)

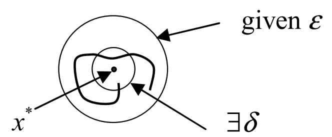
سيستم فوق را كه داراي يک پاسخ x(t) يا مسير[1] و نقطه تعادل x^* مي باشد را درنظر بگيريد. اين سيستم را پايدار لياپانوف مي گوئيم اگر:

$$\begin{aligned}&\forall t_0\in\mathbb{R},\ \forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0 \ni\\ &\|x(t_0)-x^*(t_0)\|\le\delta \ \Rightarrow\ \|x(t)-x^*(t)\|\le\varepsilon\end{aligned} \qquad (۴۴-۵)$$

در اينجا $\|\cdot\|$ نماد نرم يک بردار است، كه به صورت نرم اقليدسي مي تواند تعريف شود:

$$\|x(t)\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{N}x_i^2(t)} \qquad (۴۵-۵)$$

ايده اين تعريف اينست كه با درنظر گرفتن شرايط اوليه نزديک به نقطه تعادل مي توان پاسخ را تا حد دلخواه نزديک به نقطه تعادل تعيين نمود:



$$\forall t \ \|x(t)-x^*(t)\|<\delta$$

يا به عبارت ديگر مسير در دايره δ حول x^* باقي خواهد ماند. در اين تعريف، محدود بودن پاسخ لحاظ شده است ولي ميل كردن به نقطه تعادل منظور نشده است و اين موضوع از لحاظ عملي بسيار مهم است. لذا اين تعريف را مي توان به فرم زير تقويت نمود

تعريف ۲: پايداري مجانبی لياپانوف

پاسخ نامي $x^*(t)$ (يا نقطه تعادل) پايداري مجانبي است اگر

الف) پايداري لياپانوف بر قرار بوده و علاوه بر آن:

ب) $\forall t_0,\exists\rho(t_0)>0 \ni \|x(t_0)-x^*(t_0)\|<\rho\Rightarrow\lim_{t\to\infty}\|x(t)-x^*(t)\|=0$

[1] Trajectory

لذا در اين تعريف محدوده همگرائي براي نقطه تعادل با ρ تعيين مي شود. در حالي كه ρ كل صفحه $\mathbb{R}^n$ را شامل شود اين تعريف به حالت پايداري مجانبي فراگير[1] ناميده مي شود. براي سيستم هاي خطي غير متغير با زمان دو نوع پايداري ديگر تعريف مي شوند كه عموميت بيشتري دارند.

تعريف ۳: پايداري داخلی

يک سيستم LTI را پايدار داخلي مي نامند، اگر پاسخ سيستم بدون ورودي $x_{zi}(t)$ به ازاي كليه شرايط اوليه دلخواه به سمت صفر ميل كند.

تعريف ۴: پايداري ورودی- خروجی BIBO

يک سيستم LTI پايدار ورودي- خروجي (BIBO) ميباشد، اگر به ازاي ورودي محدود (BI) و شرايط اوليه صفر پاسخ بدون شرايط اولية سيستم ($y_{zs(t)}$) محدود (BO) باقي بماند.

همانگونه كه از تعريف پايداري در سيستمهاي LTI روشن است ديدگاه تعريف در پايداري داخلي كاملا منطبق بر نمايش سيستم به صورت معادلات حالت و يا ديدگاه كنترل مدرن مي باشد. در صورتي كه در تعريف دوم، شرايط اوليه صفر و ورودي- خروجي دلالت بر ديدگاه كلاسيک يا نمايش سيستم به صورت تابع تبديل دارد. لذا ترجيح عمومي تحليل پايداري سيستمهاي خطي بر پايداري داخلي بنيان گذارده مي شود.

۵-۷-۲) قضاياي پايداري سيستمهاي LTI

قضيۀ ۵-۳) پايداري داخلي

يک سيستم LTI پايدار داخلي است، اگر و تنها اگر، كليه مقادير ويژة ماتريس A در نيم صفحه باز سمت چپ (OLHP) قرار گيرند: ($\forall\lambda_i\to\mathrm{Re}(\lambda i)<0$)

اثبات: شرط كافي

همانگونه كه قبلا در حل معادلات حالت بيان شد در كلي ترين حالت پاسخ $x_{zi}(t)$ از تركيب خطي $t^k e^{\lambda_i t}$ تشكيل مي شود كه λ_i مقادير ويژة ماتريس A و k تكرر آن مي باشد. در صورتيكه $\mathrm{Re}(\lambda_i)<0$ باشد اين منحني نمائي به سمت صفر ميل خواهد نمود.

[1] Globally asymptotically stable

شـــرط لازم: حـال فـرض كنيـد يكـي از مقـادير ويـژة مـاتريس A در شـرط فـوق صـدق نكند $\mathrm{Re}(\lambda_i)\ge 0$ در اينحالت نشان مي دهيم سيستم پايداري داخلي نخواهد داشت. فـرض كنيد v_1 بردار ويژة مربوط به مود λ_1 باشـد. بـا شـرط اوليـه $x(0)=v_1$ پاسـخ بـدون ورودي سيستم برابر است با: $x_{zi}(t)=v_1e^{\lambda_1 t}$

اما اين منحني نمائي واگراست (چون $\mathrm{Re}(\lambda_1)\ge 0$). لذا پاسخ در اينحالت به سمت صفر ميل نخواهد كرد و بدين ترتيب پايداري داخلي وجود نخواهد داشت.

■

مشابه با مودهاي كنترل پذير و رؤيت پذير, مودهائي متناظر بـا مقـادير ويـژة مربوطـه بـه نـيم صفحه باز سمت چپ (OLHP)[1] را مودهاي پايدار مي نامنـد. اولـين قضـية پايـداري BIBO بـا شرط ديريشله ارتباط نزديک دارد.

قضية ۵–۴) شرط ديريشله (Dirchlete):

يک سيستم LTI تک ورودي– تک خروجي, پايدار BIBO است, اگر و تنها اگر, نرم يک پاسخ ضربه سيستم محدود باقي بماند $\|h(t)\|_1<\infty$ يا :

$$\int_0^\infty |h(t)|\,dt<\infty \tag{۴۶-۵}$$

اثبات: شرط كافي

با استناد به انتگرال كانولوشن پاسخ سيستم بـا شـرايط اوليـة صـفر (zs) بـه فـرم زيـر نوشـته مي شود.

$$y(t)=\int_0^t h(\tau)u(t-\tau)d\tau \tag{۴۷-۵}$$

با توجه به محدود بودن ورودي در شرط BIBO و داشتن $\|h(t)\|_\infty<\infty$

$$\begin{aligned}|y(t)|&\le\int_0^t |h(\tau)|\cdot|u(t-\tau)|\,d\tau\\ &\le M\int_0^t |h(\tau)|\,d\tau<\infty\end{aligned} \tag{۴۸-۵}$$

[1] Open left half plane

لذا $|y(t)|<\infty$ خواهد شد.

شرط لازم: از برهان خلف استفاده مي كنيم. فرض كنيد شرط $\|h(t)\|_\infty<\infty$ برقرار نباشد. در اينصورت هرگز y محدود باقي نخواهد ماند. براي اثبات اين امـر ورودي خاصـي را مطـابق زيـر تعريف مي كنيم.

$$u(t-\tau)=\begin{cases}+1 & \text{if } h(\tau)\ge 0\\ -1 & \text{if } h(\tau)<0\end{cases} \tag{۴۹-۵}$$

در اينحالت

$$h(\tau)u(t-\tau)=|h(\tau)| \tag{۵۰-۵}$$

و خروجي سيستم برابر خواهد بود با:

$$y(t)=\int_0^t |h(\tau)|\,d\tau \tag{۵۱-۵}$$

كه با عدم متناهي بودن فرم h(t) خروجي نيز نامتناهي خواهد شد.

■

درحالت MIMO كليه عناصر ماتريس انتقال بايستي داراي نرم يک محدود باشند:

$$\|h_{ij}(t)\|_1<\infty \tag{۵۲-۵}$$

در غير اينصورت براي ورودي خاص يـک خروجـي ممكـن اسـت نامحـدود گـردد. ايـن شـرط برحسب پاسخ ضربة سيستمها بيان شده است و مي توانـد بـه صـورت زيـر بـراي تـابع تبـديل سيستمها نيز تعميم يابد.

قضية ۵–۵)

يک سيستم SISO خطي غير متغير با زمان پايداري BIBO مي باشـد, اگـر و تنهـا اگـر, كليـه قطبهاي تابع تبديل آن در نيم صفحة باز سمت چپ قرار گيرند. $\forall p_i\to\mathrm{Re}(p_i)<0$.

اثبات: اين قضيه نيز كاملاً مشابه با اثبات قضية پايداري داخلي است كه بـا تفكيـک پاسـخ بـه مضارب $t^k e^{p_i t}$ صورت مي پذيرد.

■

در حالت MIMO نيز شرط لازم و كافي فوق بدين ترتيب تعمـيم مـي يابـد كـه كليـه عناصـر ماتريس تبديل بايستي داراي قطبهاي پايدار $\mathrm{Re}(p_i)<0$ باشند.

در تعريف پايداري داخلي و پايداري BIBO با اينكه با دو نگـرش مختلـف تعبيـر شـده انـد بـا يكديگر ارتباط منطقي دارند. اگر سيستمي پايدار داخلي باشد با توجـه بـه اينكـه خروجيهـا از

تركيب خطي متغيرهاي حالت محدود تشكيل مـي شـود حتمـاً پايـدار BIBO مـي باشـد. امـا معكوس آن هميشه صادق نيست. چراكه تحقق يک تابع پايـدار ممكـن اسـت شـامل مودهـاي پنهان باشد كه درصورتيكه اين مودها ناپايدار باشند، پايداري داخلي خدشه دار مـي شـود. امـا درصورتي كه تحقق انجام پذيرفته كاهش ناپذير باشد امكان حذف صـفر و قطـب بـراي عناصـر ماتريس تبديل وجود نخواهد داشت و مي تـوان از پايـداري BIBO پايـداري داخلـي را نتيجـه گرفت. به هر حال در تئوري سيستمهاي خطي، در اغلب موارد پايـداري داخلـي داراي اهميـت اصلي است.

۵-۷-۳) قضيهٔ پايداری لياپانوف و تحليل پايداری سيستمهای LTI

مهمترين قضية پايداري سيستمها توسط لياپانوف در سال ۱۹۲۷ ارائه شـده اسـت. ايـن قضـيه بسيار عمومي بوده و كليه سيستمهاي خطي و غيرخطي را شامل مـي شـود. مسـلماً بـه علـت عمومي بودن آن، روش محاسبة خيلي شـفافي در اختيـار كـاربر نخواهـد گذاشـت. مشخصـات دقيق تري از اين قضيه پايداري و اثبات آن در سيستمهاي كنترل غيرخطي ارائه مـي شـود. در اينجا با بيان عمومي اين قضيه، كاربرد آن را درسيستمهاي خطي بررسي مي كنيم.

قضيهٔ ۵-۶) پايداری مجانبی لياپانوف (روش دوم لياپانوف)

يک سيستم غيرخطي $\dot{x} = f(x)$ با نقطة تعـادل در مبـدا $x^* = 0$ را در نظـر بگيريـد. ايـن سيستم حول اين نقطه تعادل، پايدار مجانبي لياپانوف است، اگر يـک تـابع اسـكالر V(x) (تـابع انرژي) براي سيستم بتوان يافت كه در شرط زير صدق كند.

تابع V(x) تابع مثبت معين باشد: يعني

الف) V(x) در محدوده اي حول مبدا پيوسته و داراي مشتقهاي جزئي اول پيوسته باشد.

ب) $\forall x \neq 0 \rightarrow V(x) > 0$

ج) $\text{for } x = 0 \rightarrow V(x) = 0$

مشتق تابع V(x) منفي معين باشد: $\forall x \neq 0 \rightarrow \dot{V}(x) < 0$

اين قضيه به صورت محلي پايداري را نشان مي دهد، درصورتي كه عـلاوه بـر شـرايط فـوق در كليه نقاط $\mathbb{R}^n$ شرايط مثبت معين بودن تابع V(x) و منفي معـين بـودن تـابع $\dot{V}(x)$ برقـرار باشد به علاوه شرط غير محدود بودن شعاعي[1]:

[1] Radial unboundedness

$$\forall \|x\| \rightarrow \infty \Rightarrow V(x) \rightarrow \infty \qquad (۵۳\text{-}۵)$$

برقرار شود. پايداري به صورت فراگير برقرار خواهد بود.

مثال ۵-۵): پايداري لياپانوف سيستم زير را بررسي كنيد.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -2x_1 - 3x_2 - 2x_1^3 \end{cases}$$

يک تابع لياپانوف حدس مي زنيم كه $V(x) > 0$ باشد.

$$V(x) = \frac{1}{2}(x_1^4 + 2x_1^2 + x_1^2)$$

حال از اين تابع مشتق مي گيريم.

$$\dot{V}(x) = \frac{1}{2}(4x_1^3\dot{x}_1 + 4x_1\dot{x}_1 + 2x_1\dot{x}_2)$$

در اينجا معادلات حالت سيستم وارد مي شوند.

$$= \frac{1}{2}\left[4x_1^3(x_2) + 4x_1x_2 + 2x_2(-2x_1 - 3x_2 - 2x^3{}_1)\right]$$
$$= \cdots = -3x_2^2 < 0$$

ظاهراً اين تابع منفي معين است اما اينگونه نيست چراكه در نقاطي غير صفر مثلا $x = (1,0)$ تابع $\dot{V}(x) = 0$ مي باشد. البته اين مشكل بزرگي نبوده و معمولا درصـورتي بتـوان نشـان داد كه اين نقطه برروي مسير حركت سيستم قرار نمي گيرد، طبق تعميم قضية لياپانوف يـا قضـية لاسال مي توان پايداري را اثبات نمود. در هر حال سيستم فوق پايدار مجانبي بوده و همچنـين اين پايداري فراگير است.

حال توجه خود را به سيستمهاي خطي غير متغير با زمان معطوف مي نمائيم. در اينحالت:

$$\dot{x} = f(x) \rightarrow \dot{x} = Ax \qquad (۵۴\text{-}۵)$$

به صورت عمومي تابع لياپانوفي به فرم زير مي توان براي سيستم پيشنهاد داد.

$$V(x) = x^T P x \qquad (۵۵\text{-}۵)$$

و شرط پايداري را مي توان چک نمود.

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} = x^T A^T P x + x^T P A x \\ &= x^T (A^T P + PA) x \end{aligned} \qquad (۵۶\text{-}۵)$$

با فرض

$$(A^T P + PA) = -Q \qquad (۵۷\text{-}۵)$$

خواهيم داشت:

$$\dot{V}(x) = -x^T Qx \qquad (۵۸-۵)$$

اگر ماتريس Q مثبت معين بتوان يافت كه در معادلهٔ (۵-۵۷) صدق كند، مشتق تابع لياپانوف منفي معين بوده و سيستم پايدار مجانبي لياپانوف خواهد بود. لذا مي تـوان از ايـن خصوصـيت براي كليهٔ سيستمهاي خطي استفاده نمود.

قضيهٔ ۵–۷) معادلهٔ لياپانوف

سيستم خطي $\dot{x} = Ax$ را در نظر بگيريد. اگر به ازاي هر ماتريس مثبت معين $Q > 0$ بتـوان ماتريس P مثبت معين يافت كه درمعادلهٔ لياپانوف:

$$A^T P + PA = -Q$$

صدق كند، آنگاه سيستم پايدار مجانبي خواهد بود.

خلاصهٔ روش:

- ابتدا يك $Q > 0$ دلخواه انتخاب مي كنيم
- از معادلهٔ لياپانوف با فرض متقارن بودن P عناصر آنرا محاسبه مي كنيم.
- در صورتي كه P مثبت معين باشد سيستم خطي پايدار و در غير اينصورت سيسـتم ناپايدار است.

مثال ۵–۶): پايداري سيستم خطي زير را توسط روش لياپانوف بررسي نمائيد.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 - 2x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - 4x_2 \end{cases} \rightarrow A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$$

معادله لياپانوف را براي Q=I حل مي كنيم. با فرض P به صورت متقارن

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}$$

ضرايب P را از معادلهٔ لياپونوف به صورت زير تعيين مي كنيم:

$$A^T P + PA = -Q$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2p_{11} + 2p_{12} = -1 \\ -2p_{11} - 5p_{12} + p_{22} = 0 \\ -4p_{12} - 8p_{22} = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow p_{11} = \frac{23}{60},\ \ p_{12} = \frac{-7}{60},\ \ p_{22} = \frac{11}{60}$$

$$P = \begin{bmatrix} \frac{23}{60} & \frac{-7}{60} \\ \frac{-7}{60} & \frac{11}{60} \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{c} P_{11} > 0 \\ \det P = \dfrac{23 \times 11 - 49}{60^2} = \dfrac{204}{3600} = 5.6 \times 10^{-2} > 0 \end{array}$$

بنابراين P مثبت معين مي باشد و لذا سيستم خطي پايدار مجانبي مي باشد.

ارتباط پايدار مجانبي و پايدار داخلي در سيستمهاي خطي با آخرين قضيه اين فصل به صـورت زير مشخص مي شود.

قضيهٔ ۵–۸)

سيستم خطي غير متغير با زمان $\dot{x} = A(x)$ پايدار مجانبي است اگر و تنها اگر پايدار داخلـي باشد. يا

پايدار مجانبي = پايدار داخلي

۵–۸) جمع بندی

در.اين فصل با روشهاي تحقق سيستمهاي خطي و روشهاي تحليل پايداري آنها آشنا شده ايـم. تحقق سيستم به معناي نمايش يك سيستم به فرم فضاي حالت در صـورت معـين بـودن فـرم ماتريس حالت آن مي باشد. از آنجائي كه بر خلاف نمايش ماتريس حالـت، فـرم فضـاي حالـت سيستم يكتا نمي باشد، تحقق هاي بسياري براي يك ماتريس تبديل قابـل بيـان اسـت. از آن جمله تحقق هاي كنترل پذيري، رؤيت پذيري، رؤيتگر، كنترلر و تحقق جـوردن در ايـن فصـل

تشريح شده اند، و به خصوصيات اصلي آنها اشاره شده است. فرم جامع تحقـق در حالـت چنـد ورودي- چند خروجي نيز در انتها تشريح شده است.
تحليل پايداري سيستمهاي كنترل شرط اوليـه و مهـم در طراحـي هـر نـوع سيسـتم كنترلـي مي باشد. اين مهم توسط قضاياي مبسوط پايداري كه در اين فصل ارائـه شـده اسـت، بررسـي شده است. در ابتدا تعاريف پايداري سيستمهاي غير خطي و خطي را طرف توجه قرار داده ايـم و پس از ارائة قضية مهم لياپانوف در تحليل پايداري سيستمهاي غير خطي قضاياي منتج شـده براي سيستمهاي خطي ارائه شده است. پايداري داخلي كه مهمترين نوع پايـداري سيسـتمهاي خطي مي باشد، در انتها مورد تجزيه و تحليل دقيق قرار گرفته است.

مسائل

۵-۱) تحقق هاي كانونيكال كنترل پذيري و رؤيت پـذيري را بـراي سيسـتمهاي زيـر بدسـت آوريد و كنترل پذيري و رؤيت پذيري اين تحقق ها را بررسي كنيد.

الف) $H(s)=\dfrac{s+1}{s^3+s^2+s+1}$ **ب)** $H(s)=\dfrac{2s+3}{s^3-2s^2+s+2}$

ج) $H(s)=\dfrac{s^2+s+1}{s^3+s^2+s+1}$ **د)** $H(s)=\dfrac{2s^2+s+2}{s^3+s^2+s+1}$

۵-۲) موتور DC و هارمونيک درايو

تحقق هاي كانونيكال كنترل پذيري و رؤيت پذيري را براي تابع تبديل $\dfrac{\theta_2}{v}$ سيستم موتور DC و هارمونيک درايو كه در مسئله (۲-۳) معرفي شده است را تعيين نمائيد.

۵-۳) مبدل حرارتي

تحقق هاي كانونيكال كنترل پذيري و رؤيت پذيري را براي تابع تبديل $\dfrac{\Delta T_{c3}}{\Delta F_H}$ سيستم مبـدل حرارتي كه در مسئله (۲-۶) معرفي شده است را تعيين نمائيد.

۵-۴) سيستمي را كه از تركيـب سـري دو سيسـتم H_2, H_1 تشـكيل شـده اسـت را درنظـر بگيريد. با فرض اينكه:

$$H_1(s)=\frac{1}{(s-1)(s+1)};\ H_2(s)=\frac{2(s-1)}{s^2+s+1}$$

الف) تحقق هاي كانونيكال كنترل پذيري را براي سيستمهاي H_2, H_1 تعيين كنيد.

ب) اگر x_1 بردار حالت سيستم H_1 و x_2 بردار حالت H_2 باشد بـراي تركيـب فـوق بـا بـردار حالت $x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ تحقق هاي مربوطه با استفاده از قسمت الف) تعيين كنيد.

ج) آيا اين تحقق كاهش ناپذير است؟ درصورتي كه جواب منفي است مود يا مودهـاي كنتـرل ناپذير و يا رؤيت ناپذير را تعيين كنيد. آيا اين مودها را با اسـتفاده از مودهـاي پنهـان سيسـتم مي توان تاييد كرد.

۵-۵) مسئله ۵-۴ را مجددا حل نمائيد بـا فـرض اينكـه سيسـتمهاي H_2, H_1 جابجـا شـده باشند.

۵-۶) آيا سيستم تركيبي مسئله ۵-۴ پايدار داخلي است؟ چرا.

۵-۷) آيا سيستم تركيبي مسئله ۵-۵ پايدار داخلي است؟ چرا.

۵-۸) سيستم زير را درنظر بگيريد.

$$\dot{x}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}x+\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}u$$

$$t=\begin{bmatrix} 1 & -0.5 & 1 \end{bmatrix}x$$

الف) آيا اين سيستم پايدار داخلي است.

ب) تابع تبديل $\dfrac{y}{u}$ را محاسبه نموده و نشان دهيد اين سيستم پايدار BIBO مي باشد.

ج) فرض كنيد يک ورودي اغتشاشي به سيستم به فرم زير اعمال شود.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}w$$

نشان دهيد با اين ورودي تابع تبديل $\dfrac{y}{w}$ پايدار BIBO نمي باشد.

۵-۹) براي تابع تبديل زير:

$$G(s)=\frac{1}{s+1}$$

الف) يک تحقق کاهش ناپذير بيابيد.

ب) يک تحقق کنترل پذير و رؤيت ناپذير بيابيد.

ج) يک تحقق کنترل ناپذير و رؤيت پذير بيابيد.

د) يک تحقق کنترل ناپذير و رؤيت ناپذير بيابيد.

۵-۱۰)

الف) تحقق هاي کانونيکال کنترل کننده و کنترل پذيري تابع تبديل زير را بيابيد.

$$G(s)=\frac{2}{(s+2)(s+3)^2}$$

ب) تحقق هاي رؤيت کننده و رؤيت پذيري را براي سيستم زير پيدا کنيد.

$$G(s)=\frac{s^3+2s^2+2s+1}{(s+1)^2(s+2)}$$

ج) آيا تحقق هاي بدست آمده کاهش ناپذيرند، بلوک دياگرام اين تحقق ها را رسم نموده و به صورت کالمن تجزيه کنيد.

۵-۱۱) حداقل دو تحقق براي ماتريسهاي تبديل زير بيابيد و بررروي کاهش ناپذير بودن آن بحث کنيد.

الف) $G(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{s+1} & \dfrac{1}{s+2s+1}\end{bmatrix}$ **ب)** $G(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{s+2s+1}\\ \dfrac{1}{s+1}\end{bmatrix}$

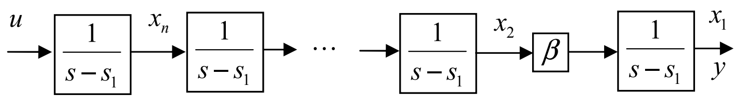
ج) $G(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{2s}{(s+1)^2(s+2)}\\ \dfrac{s^2+2s+2}{s(s+1)^2(s+3)}\end{bmatrix}$

د) $G(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{2s+3}{(s+1)^2(s+3)} & \dfrac{s^2+2s+2}{s(s+1)(s+3)^2}\end{bmatrix}$

۵-۱۲) يک تحقق کاهش ناپذير براي ماتريسهاي تبديل زير بيابيد.

الف) $G(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{s+2}{s+1} & \dfrac{2}{s+2}\\ \dfrac{s}{s+1} & \dfrac{s+1}{s+s}\end{bmatrix}$ **ب)** $G(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{s^2+1}{s^2} & \dfrac{2s+1}{s^2}\\ \dfrac{s+3}{s^2} & \dfrac{2}{s}\end{bmatrix}$

۵-۱۳) نمايش فضاي حالت سيستم نشان داده شده در بلوک دياگرام زير را پيدا کنيد.



۵-۱۴) تحقق هاي کانونيکال مختلف را براي سيستم $G(s)=\dfrac{1}{s^4}$ بيابيد.

۵-۱۵) نشان دهيد پارامترهاي مارکوف يک سيستم تحت تبديل همانندي تغيير ناپذيرند. همچنين نشان دهيد که ماتريس کنترل پذيري تحقق کانونيکال رؤيتگر، ماتريس هنکل $M[1,n-1]$ مي باشد.

۵-۱۶) سيستمهاي زير را درنظر بگيريد.

با استفاده از روش لياپانوف پايداري سيستم را به ازاي تغييرات $-\infty \le k < +\infty$ تحليل کنيد.

الف) $A = \begin{bmatrix} -1 & k \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ **ب)** $\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -k & -1 & 0 \end{bmatrix} x$

۵-۱۷) پايداري سيستم زير را با روش لياپانوف بررسي كنيد.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

۵-۱۸) سيستم زير را درنظر بگيريد.

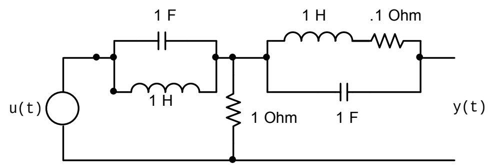
$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -10 & -4 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

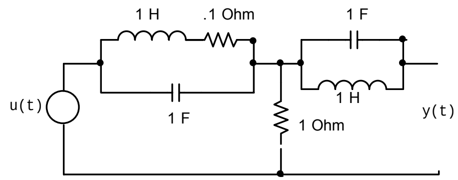
پايداري داخلي و BIBO سيستم را تحليل نموده و برروي آن بحث كنيد.

۵-۱۹) مدارهاي الكتريكي زير را درنظر بگيريد كه بـا جـايگزيني دو بخـش خـود بـا يكـديگر متناظرند.

الف)



ب)



پايداري داخلي و BIBO را در هر حالت بررسي نموده و برروي نتايج بحث نمائيد.

مراجع

[1] Bélanger, Pierre., *Control engineering : a modern approach,* Saunders College Pub., c1995.

[2] Brogan, William L., *Modern control theory,* 3rd ed. Englewood Cliffs, N.J. : Prentice Hall, c1991.

[3] Chen, Chi-Tsong., *Linear system theory and design*, Oxford University Press, c1999.

[4] Dragan, Vasile and Aristide Halanay, *Stabilization of linear systems,* Birkhauser, c1999.

[5] Kailath, Thomas., *Linear systems*, Prentice-Hall, c1980.

[6] Rugh, Wilson J., *Linear system theory,* 2nd ed., Prentice Hall, c1996.

[7] Shinners, Stanley M., *Modern control system theory and design,* 2nd ed., J. Wiley, c1998.

[8] دكتر علي خاكي صديق، *اصول كنترل مدرن*، انتشارات دانشگاه تهران، ۱۳۷٤.