ماتریس تعقیب مسائل:

درایه هاي این ماتریس نحوة تعقیب نه سیستم صنعتي را که در فصل دوم بـه مدلسـازي آنهـا پرداخته ایم را در فصول بعدي نشان مي دهد.

فهرست مسائل	فصل دوم	فصل سوم	فصل چهارم	فصل پنجم	فصل ششم	فصل هفتم
موتور DC و هامونیک درایو	۲-۳	۳-۱۵ ۳-۲۶	۴-۶	۵-۲	۶-۹ ۶-۲۰	۷-۱۰ ۷-۱۵ ۷-۲۴ ۷-۲۵
سرعت غلطک	۲-۴	۳-۱۶ ۳-۲۹	۴-۷	-	۶-۲۱ ۶-۲۹ ۶-۳۰	۷-۱۱ ۷-۱۶
غلظت مخزن	۲-۵ ۲-۱۱	۳-۱۷ ۳-۳۰	۴-۸	-	۶-۲۲ ۶-۳۱	-
مبدل حرارتی	۲-۶ ۲-۱۲	۳-۱۸	۴-۹	۵-۳	۶-۱۰ ۶-۳۲	۷-۳ ۷-۴ ۷-۲۷
رآکتور شیمیایی	۲-۷ ۲-۱۳	۳-۱۹ ۳-۲۷	۴-۱۰	-	۶-۱۱	۷-۵ ۷-۶ ۷-۲۸
جرثقیل سقفی	۲-۹ ۲-۱۴	۳-۲۰	۴-۱۱	-	۶-۱۳ ۶-۲۴	۷-۱۶ ۷-۲۹
بندباز	۲-۱۰ ۲-۱۵	۳-۲۱	۴-۱۲	-	۶-۱۲ ۶-۲۳	۷-۱۷ ۷-۳۰
پاندول دوتایی معکوس	۲-۱۶	۳-۲۲	۴-۱۳	-	۶-۲۵	۷-۱۲ ۷-۱۸ ۷-۳۱
سیستم تعلیق مغناطیسی	۲-۱۷	۳-۲۳	۴-۱۴	-	۶-۲۶ ۶-۱۴	۷-۱۹ ۷-۲۰ ۷-۳۲ ۷-۳۳

فصل ششم

طراحي كنترل كنندة فيدبك حالت

فصل ششم: فيدبک حالت

۶–۱) مقدمه

طراحي كنترل كنندة كلاسيک مبتني بر فيدبك خروجي و ساختار معيني از كنترل كننـده بـه عنوان مثال PID يا پيش فاز-پس فـاز اسـتوار اسـت. ايـن در حاليسـت كـه در ديـدگاه مـدرن اطلاعات ورودي- خروجي سيستم در متغيرهاي حالت سيستم فشرده شده است. لذا ايدة اصلي در طراحي كنتـرل كننـدة مـدرن اسـتفاده از *فيـدبك حالـت* مـي باشـد. در ايـن بخـش ابتـدا خصوصيات فيدبك حالت را مورد بررسي قرار داده و برخي از روشهاي طراحي كنترل كننـده را در فضاي حالت بررسي خواهيم نمود. در اين مسـير ابتـدا روش جايـابي قطـب و سـپس روش طراحي كنترل كنندة بهينه مورد بررسي قرار خواهند گرفت.

۶–۲) خصوصيات فيدبک حالت

سيستم خطي زير را درنظر بگيريد:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \qquad (۱-٦)$$

كه در آن x متغير حالت n بعدي, u ورودي r بعدي و y خروجي m بعدي مـي باشـد. هـدف از طراحي كنترل كننده را مي توان به صورت زير برشمرد.

- پايداري داخلي
- تنظيم يا رديابي
- حذف اثر اغتشاش
- كاهش اثر نويز
- عدم حساسيت به مدل

ميدانيم روش اصلي در ارضاء همزمان خصوصيتهاي فوق استفاده از حلقة فيدبک اسـت، كـه در كنترل مدرن, *فيدبک حالت* پيشنهاد مي گردد. با توجه به خواص متغيـر حالـت x، كـه كليـة اطلاعات ورودي در زمان قبل را به اطلاعات خروجي هاي آينده مرتبط مي سـازد، اگـر كنتـرل كننده u را تابعي از x درنظر بگيريم توانمندي لازم جهـت پايـدار سـازي سيسـتم همزمـان بـا تنظيم يا حذف اغتشاش را مي توان بدست آورد. در سيستمهاي خطي اين كنترل كننده را نيز تابعي خطي از x درنظر مي گيريم.

$$u = -Kx \qquad (۲-٦)$$

علامت منفي در اينجا تنها اشاره به مفهوم فيدبک منفي مي باشد، ولـي چـون متغيـر x يكتـا نيست بسته به تحقق هاي مختلف از يک سيستم مي تواند K مثبت يا منفي باشد و تنهـا بـه خاطر توجه به اهميت فيدبک منفي در پايدارسازي سيستمها از علامـت منفـي اسـتفاده شـده است. در اين نمايش K يک ماتريس $[K]_{r\times n}$ مـي باشـد، و كنتـرل كننـده از تركيـب خطـي متغيرهاي حالت سيستم تشكيل شده است. به منظور مقايسـة ايـن كنتـرل كننـده بـا كنتـرل كننده هاي كلاسيک با توجه به اين نكته كه متغيرهاي حالت سيستم معمولا هم موقيعت x و هم سرعت $\dot{x}$ را در بر ميگيرند، تركيب خطي آنها فرم تعميم يافته اي از كنترل كننـدة PD را تشكيل مي دهد، كه برروي كلية متغيرهاي حالت تركيب شده است. در اينجـا مـاتريس K را ماتريس "بهره حالت"[1] مي ناميم.

براي بررسي خواص اين كنترل كننده, ابتدا سيستم حلقـه بسـته را در فضـاي حالـت تشـكيل مي دهيم.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A - BK)x \\ y &= Cx \end{aligned} \qquad (۳-٦)$$

كه در آن $A_{cl} = A - BK$, نيز يک سيستم خطي غير متغير با زمان را نشان مـي دهـد. اگـر خاصيت پايداري داخلي سيستم مدنظر باشد، كافي است K را به گونه اي انتخـاب كنـيم كـه مقادير ويژة $A_{cl} = A - BK$ همگي در نيم صفحة باز سمت چپ قرار گيرند $(\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0)$. اين انتخاب علاوه بر ايجاد پايـداري داخلـي نشـان مـي دهـد كـه $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ يعنـي كليـة متغيرهاي حالت در حالت ماندگار به سمت صفر ميل مي كنند. لذا خروجي كه تركيب خطي از ورودي مي باشد نيز به سمت صفر ميل خواهد نمود.

$$y(t) = Cx(t) \rightarrow \lim_{t\to\infty} y(t) = 0 \qquad (۴-٦)$$

[1] State Gain Matrix

اين بدان معني است که تنظيم[1] نيز توسط اين کنترل کننده به صورت خودکار انجام مي پذيرد. امّا کلية متغير هاي حالت و خروجيهاي سيستم به سمت مبدا يا حالت صفر تنظيم مي شوند. اين در حاليست که در اغلب مسائل کاربردي سيستمهاي کنترل، تنظيم خروجيهاي سيستم به سمت متغيرهاي ثابت غيرصفر مدنظر مي باشد. اين مهم نيز با تغيير کوچکي در پياده سازي کنترل کننده حالت به صورت زير محقق مي شود.

فرض کنيد ورودي مرجع را با y_d نمايش دهيم که در آن:

$$y_d \neq 0$$ (۶-۵)

ابتدا مقدار ماندگار متغيرهاي حالت و وروديهاي لازم براي رسيدن به y_d را محاسبه مي کنيم. در حالت ماندگار

$$\dot{x} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 0 = Ax^* + Bu^* \\ y_d = Cx^* \end{cases}$$ (۶-۶)

اين دستگاه معادلات n + m معادله و n + r مجهول دارد و درحالتي جواب وجود خواهد داشت که ماتريس

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}$$ (۶-۷)

تکين نباشد (يا رتبة اين ماتريس حداقل برابر n + r باشد) اما با توجه به تعريف صفر انتقال اين بدان معناست سيستم نبايستي در مبدأ s=0، صفر انتقال داشته باشد.

دقت کنيد که با تعبير فيزيکي، اگر تعداد متغيرهاي کنترل r مساوي يا بيشتر از تعداد متغيرهائي که بايستي کنترل شوند يعني خروجيها y باشند $(r \geq m)$، اين ماتريس ناويژه بوده که از لحاظ فيزيکي مطابق انتظار مي باشد. چرا که سيستم داراي تعداد محرکهاي مساوي با خروجي بوده و حداقل براي کنترل هر خروجي يک متغير مستقل ورودي وجود دارد. درحالتيکه r = m باشد يک پاسخ يکتا در معادلة فوق صدق خواهد نمود و درحالتيکه r > m باشد بي نهايت پاسخ براي اين معادله وجود خواهد داشت.

اما اگر r < m باشد يعني تعداد وروديها کمتر از تعداد خروجيها شود، در حالت کلي پاسخ وجود نخواهد داشت. اين حالت در عمل به ندرت اتفاق مي افتد، که براي حل آن بايستي تعداد عملگرهاي سيستم اضافه شود.

حال فرض کنيد پاسخي براي اين دستگاه معادلات وجود داشته و آنرا بتوان بفرم زير نمايش داد.

[1] Regulation

$$\begin{aligned} x^* &= M_x y_d \\ u^* &= M_u y_d \end{aligned}$$ (۶-۸)

حال همانند معادلات غيرخطي سيستمها اگر متغير افزايشي را به صورت زير تعريف کنيم.

$$\begin{aligned} \Delta x(t) &= x(t) - x^* \\ \Delta u(t) &= u(t) - u^* \\ \Delta y(t) &= y(t) - y_d \end{aligned}$$ (۶-۹)

در اينحالت تعبير رياضي رسيدن به يک مقدار نامي غير صفر اينست که $y(t) = y_d$. لذا متغيرهاي افزايشي بايستي صفر گردند $\Delta y = 0$، و اين ايجاب مي کند Δx صفر گردد. لذا اگر سيستم جديد را برحسب متغيرهاي افزايشي بنا کنيم و فيدبک حالت را روي اين متغيرها پياده سازي نمائيم, با پايداري داخلي اين سيستم اطمينان خواهيم داشت که در حالت ماندگار متغيرهاي حالت و خروجي سيستم به مقادير مطلوب خود ميل خواهند نمود:

$$\Delta x \to 0, \Delta y \to 0 \Rightarrow y \to y_d$$ (۶-۱۰)

معادلات حالت سيستم افزايشي در اينحالت منطبق بر همان معادلات حالت قبل مي باشد، يعني:

$$\begin{aligned} \Delta\dot{x} &= A\Delta x + B\Delta u \\ \Delta y &= C\Delta x \end{aligned}$$ (۶-۱۱)

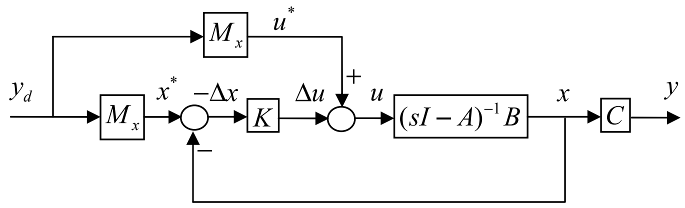
لذا کنترل کننده برابر است با

$$\Delta u = -K\Delta x$$ (۶-۱۲)

که با انتخاب مناسب K در حاليکه $A_{cl} = A - BK$ پايدار داخلي گردد، مقادير ماندگار مطلوب نيز بدست مي آيند. اما در سيستم اصلي کنترل کننده برابر است با:

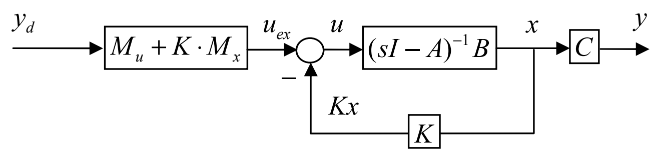
$$\begin{aligned} u(t) &= u^* + \Delta u \\ &= u^* - K\Delta x \\ &= u^* - K(x - x^*) \\ &= (M_u + KM_x)y_d - Kx \\ &= u_{ex} - Kx \end{aligned}$$ (۶-۱۳)

که در آن $u_{ex} = (M_u + KM_x)y_d$ بوده و با فرض وجود جواب M_k, M_u براحتي قابل محاسبه خواهد بود. لذا دياگرام بلوکي سيستم حلقه بسته براساس متغيرهاي افزايشي مطابق با شکل (۶-۱) است.



شکل (۶-۱) نحوهٔ پیاده سازی کنترل کنندهٔ تنظیم برای ورودی مرجع ثابت غیر صفر

ولي پس از طراحي K و محاسبة M_x, M_u نيازي به استفاده از متغيرهاي افزايشـي نبـوده و کنترل کننده براحتي به فرم شکل (٦-٢) نيز قابل پياده سازي است.



شکل (۶-۲) نحوهٔ پیاده سازی کنترل کنندهٔ تنظیم برای ورودی مرجع ثابت غیر صفر بدون استفاده از متغیر های افزایشی

که در آن بلوک $\boxed{M_u + KM_x}$ به فرم پيش خور[1] و از محاسبة عددي يـا تحليلـي M_x, M_u به صورت خارج خط[2] بدست آمـده و حلقـة فيـدبک کـاملا مثـل قبـل بـاقي خواهـد مانـد. در اينصورت:

$$\Delta\dot{x} = (A-BK)\Delta x$$

$$\begin{cases} x(t) = x^* + \Delta x(t) \\ u(t) = u^* + \Delta u(t) \\ y(t) = y_d + C\Delta x(t) \end{cases} \qquad (١٤\text{-}٦)$$

لذا براي طراحي کنترل کننده کافي است حالت تنظيم به سمت صفر را مدنظر گرفته با انتخاب مناسب K ماتريس $A_{cl} = A - BK$ را پايدارسازي نموده و اين کنترل کننـده را بـه همـراه معادلات فوق در سيستم اصلي پياده سازي نمائيم.

[1] Feed Forward
[2] Offline

موضوع تنظيم با فرم نهائي ارائه شده براحتي قابل تعميم به حالت رديابي[1] نيز مي باشد. با ايـن تفاوت که در آن $y_d = y_d(t)$ تابعي از زمان بوده که بايستي در حلقـة فيـدبک نيـز بـه روز[2] گردد.

مثال (۶-۱): سيستم ناپايدار زير را درنظر بگيريد.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

با درنظر گرفتن فيدبک حالت $u = -Kx = -(k_1x_1 + k_2x_2)$, قطبهاي سيستم حلقه بسته را تعيين نمائيد.

پاسخ:

$$A_{cl} = A - BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & 1+k_2 \\ -k_1 & -k_2 \end{bmatrix}$$

$$\det(sI - A_{cl}) = \det \begin{bmatrix} s-k_1 & -1-k_2 \\ k_1 & s+k_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$s^2 + (k_2 - k_1)s + k_1 = 0$$

قطبهاي سيستم حلقه بسته: $$s_1, s_2 = \frac{k_1 - k_2 \pm \sqrt{k_1^2 - 2k_1k_2 + k_2^2 - 4k_1}}{2}$$

محل قطبها کاملاً به k_2, k_1 مربوط بـوده، و درصـورتي کـه $0 < k_1 - k_2$ يـا $k_1 < k_2$ باشـد قطبهاي سيستم حلقه بسته پايدار خواهند ماند.

همانگونه که مشاهده گرديد قطبهاي سيستم توسط کنترل فيدبک حالـت کـاملاً قابـل تنظـيم مي باشند, آيا صفرهاي انتقال نيز اين خاصيت را دارند؟

قضيهٔ ۶-۱) تغيير ناپذيري صفرهای انتقال

فرض کنيد z يک صفر انتقال سيستم حلقه باز زير باشد.

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

[1] Tracking
[2] Update

کنترل فیدبک حالت $u=-Kx+u_{ex}$ را درنظر بگیرید. در اینحالت z صفر انتقال سیستم حلقه بسته نیز مي باشد (سیستمي که y را به u_{ex} ارتباط خواهد داد).

اثبات: همانگونه که از تعریف صفر انتقال داشتیم بایستي بردار $v=\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix}\neq 0$ وجود داشته باشد که:

$$\begin{bmatrix}-zI+A & B\\ C & D\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix}=0 \qquad (۱۵\text{-}٦)$$

معادلات حالت حلقه بسته نیز برابر است با:

$$\begin{cases}\dot{x}=Ax-BKx+Bu_{ex}\\ y=Cx-DKx+Du_{ex}\end{cases}$$

لذا صفر انتقال سیستم حلقه بسته (ξ) بایستي در معادلهٔ زیر صدق کند:

$$\forall v'=\begin{bmatrix}v_1'\\ v_2'\end{bmatrix}\neq 0 \qquad \begin{bmatrix}-\xi I+A-BK & B\\ C-DK & D\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1'\\ v_2'\end{bmatrix}=0 \qquad (۱٦\text{-}٦)$$

اما مي توان نشان داد که $z=\xi$. چرا که با انتخاب $\begin{bmatrix}v_1'=v_1\\ v_2'=v_2+Kv_1\end{bmatrix}$ خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix}-\xi I+A-BK & B\\ C-Dk & D\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\ v_2+kv_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(-\xi I+A)v_1+Bv_2-B\cancel{K}v_1+B\cancel{K}v_1\\ Cv_1+D\cancel{K}v_1+Dv_2+D\cancel{K}v_1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}(-\xi I+A)v_1+Bv_2\\ Cv_1+Dv_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\xi I+A & B\\ C & D\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix}=0\Rightarrow \xi=z$$

■

قضیهٔ ۶-۲) تغییر ناپذیری کنترل پذیری

سیستم حلقه بسته با فیدبک حالت ورودي u_{ex} کنترل پذیر است, اگر و تنها اگر, سیستم حلقه باز کنترل پذیر باشد.

اثبات: سیستم حلقه بسته با فیدبک حالت را درنظر بگیرید. فرض کنید سیستم حلقه باز کنترل پذیر باشد, لذا براي هر متغیر حالت x_f و زمان $T>0$, ورودي $u^*(t)$ وجود دارد که متغیرهاي حالت را از شرایط اولیه صفر $x(0)=0$ به $x_f(t)$ در زمان T برساند. فرض کنید این حالت را $x^*(t)$ بنامیم. در اینحالت $x^*(T)=x_f$.

حال ورودي $u_{ex}(t)=u^*(t)+Kx^*(t)$ لذا در اینحالت $x(t)=x^*(t), u(t)=u^*$ لذا در حالت حلقه بسته نیز $x(T)=x_f, x(t)=x^*(t)$ خواهد بود. لذا ورودي u_{ex} وجود دارد که متغیر حالت را از حالت صفر به x_f برساند. لذا سیستم حلقه بسته نیز کنترل پذیر خواهد بود.

اگر سیستم حلقه باز کنترل پذیر نباشد, هیچ نوع u وجود ندارد که مود کنترل ناپذیر از x را تحریک نماید, لذا کنترل فیدبک حالت نیز نمي تواند اینکار را انجام دهد. بدین ترتیب سیستم حلقه بسته نیز کنترل ناپذیر باقي مي ماند.

■

از لحاظ آنالیز مودال نیز مي توان نشان داد که مود کنترل ناپذیر تحت فیدبک حالت کنترل ناپذیر باقي خواهد ماند. فرض کنید s_i مود کنترل ناپذیر سیستم حلقه باز باشد. لذا $w_i^T B=0$ که در آن w_i^T بردار ویژه چپ ماتریس A (بردار ویژهٔ A^T) مي باشد حال در اینحالت براي سیستم حلقه بسته نیز:

$$w_i^T(A-BK)=s_i w_i^T-w_i^T BK=s_i w_i^T \qquad (۱۷\text{-}٦)$$

لذا s_i مقدار ویژهٔ سیستم حلقه بسته، یا همان بردار ویژهٔ سمت چپ w_i^T نیز مي باشد. چون ماتریس B نیز در سیستم حلقه بسته به همان شکل باقي مي ماند مود کنترل ناپذیر نیز ثابت باقي خواهد ماند. این تغییر ناپذیري نه تنها توسط کنترل فیدبک حالت بلکه با هرگونه آلگوریتم کنترلي حفظ خواهد شد.

۶-۳) طراحی کنترل کننده فیدبک حالت: جایابی قطب[1]

با توجه به مثال (٦-۱) براي یک سیستم رستهٔ دو مشاهده گردید که با انتخاب مناسب ضرایب ماتریس بهره k_2, k_1، مي توان قطبهاي حلقه بسته را به هر نقطه اي از فضاي S انتقال داد. این توانائي به علت استقلال خطي k_2, k_1 در تنظیم محل قطبهاي سیستم حلقه بسته مي باشد، که در حالت عمومي نیز براي سیستم هاي کنترل پذیر برقرار است. از طرف دیگر مشاهده شد که مسئله ردیابي و تنظیم سیستم به ورودي مرجع $y_d(t)$ قابل تبدیل به مسئلهٔ تنظیم حول صفر به علاوهٔ یک حلقه پیش خور مي گردد، که پایداري و سرعت پاسخ بستگي مستقیم به محل قطبهاي سیستم حلقه بسته در صفحه S دارد. اگر کلیهٔ قطبهاي سیستم حلقه بسته در نیم صفحه سمت چپ واقع شوند، سیستم پایداري داخلي خود را حفظ نموده و

[1] Pole Placement

نوع قطب (درجه یک یا دو) شکل پاسخ سیستم حلقه بسته را مشخص مي کند (نوساني یا غیر نوساني). از طرف دیگر محل قرارگیري قطبها نسبت به محور موهومي سرعت پاسخ را تعیین مي نمایند. بدین ترتیب جایابي قطب در عین سادگي یک روش مناسب براي طراحي کنترل کنندة سیستم است، که توسط آن مي توان کلیة خواص مورد انتظار از حلقة فیدبک حالت را بدست آورد.

لم ۶–۱)

فرض کنید (A,b) یک سیستم SISO کنترل پذیر و مرتبة n باشد. تبدیل همانندي ناویژه اي با ابعاد $T_{n\times n}$ وجود دارد که توسط آن سیستم به فرم کانونیکال کنترل پذیري زیر:

$$\left\{(A_c,b_c),\ A_c=T^{-1}AT,\ b_c=T^{-1}b\right\}$$

قابل نمایش خواهد بود.

نکته: (دقت کنید در اینجا یک تحقق عمومي را مي توان به یک تحقق کانونیکال کنترل پذیر تبدیل نمود.

اثبات: براي سیستم کنترل پذیر فوق خروجي را مساوي کلیة متغیرهاي حالت فرض کنید:

$$\begin{cases}\dot{x}=Ax+bu\\ y=I.x\end{cases} \qquad (۶-۱۸)$$

این تحقق کاهش ناپذیر است. چرا که مسلماً با دانستن کلیة متغیرهاي حالت به صورت خروجي سیستم رؤیت پذیرمي باشد. لذا ماتریس تبدیل سیستم $h(s)=\dfrac{y(s)}{u(s)}$ داراي مرتبة n مي باشد. براي این ماتریس تبدیل، مطابق روشهاي ذکر شده در فصل پنجم مي توان یک تحقق کانونیکال کنترل پذیري بدست آورد. این تحقق را به فرم زیر مي نویسیم.

$$\begin{cases}\dot{z}=A_cz+b_cu\\ y=Tz\end{cases} \qquad (۶-۱۹)$$

با توجه به اینکه تحققهاي ارائه شده برحسب x,z هر دو یک ماتریس تبدیل یکسان را محقق نموده اند لذا:

$$\forall t \quad e^{At}b=Te^{A_ct}b_c \qquad (۶-۲۰)$$

از این معادله و مشتقات آن در زمان t = 0 استفاده مي کنیم.

$$\begin{aligned} b&=Tb_c\\ Ab&=TA_cb_c\\ A^2b&=TA_c{}^2b_c\\ &\vdots\\ A^{n-1}b&=TA_c{}^{n-1}b_c \end{aligned} \qquad (۶-۲۱)$$

یا

$$\begin{bmatrix} b & Ab & \cdots & A^{n-1}b\end{bmatrix}=T\begin{bmatrix} b_c & A_cb_c & \cdots & A_c^{n-1}b_c\end{bmatrix}$$
$$\mathbb{C}=T\mathbb{C}_c \qquad (۶-۲۲)$$

که در آن $\mathbb{C}$ ماتریس کنترل پذیري در فرم اولیه و $\mathbb{C}_c$ ماتریس کنترل پذیري در فرم تحقق کانونیکال مي باشد. لذا

$$T=\mathbb{C}\mathbb{C}_c^{-1} \qquad (۶-۲۳)$$

که با فرض کنترل پذیري سیستم $\mathbb{C}_c^{-1}$ وجود خواهد داشت. از طرف دیگر ماتریس T ناویژه است چرا که از حاصل ضرب دو ماتریس $n\times n$, مرتبة کامل تشکیل شده است لذا تحقق کانونیکال کنترل پذیري براحتي از این تبدیل همانندي بدست خواهد آمد.

$$\begin{aligned} y&=x=Tz\\ z&=T^{-1}x\\ \Rightarrow \dot{z}&=T^{-1}ATz+T^{-1}bu \end{aligned} \qquad (۶-۲۴)$$

قضیهٔ ۶–۳) جایابی قطب SISO

اگر یک سیستم مرتبة n کنترل پذیر داده شده باشد (A,b)، و یک چند جمله اي $p(s)$ درجة n (که محل قطبهاي حلقه بسته را مشخص مي کند) نیز داده شده باشد, ماتریس بهرة k^T به صورت یکتا وجود دارد که معادلة مشخصة ماتریس $(A-bk^T)$ همان $p(s)$ گردد.

اهمیت قضیه در یکتائي پاسخ مي باشد. یعني به ازاي یک ورودي در سیستم SISO به صورت یکتا مي توان, ماتریس بهرة k^T را بدست آورد که جایابي قطب را بصورت دلخواه انجام دهد.

اثبات: با استفاده از لم ۶-۱ سیستم را به فرم کانونیکال کنترل پذیري مي نویسیم.

$$A_c=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & & 0\\ \vdots & \vdots & & & \vdots\\ 0 & & & & 1\\ -a_0 & -a_1 & & \cdots & -a_{n-1}\end{bmatrix},\quad b_c=\begin{bmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\\1\end{bmatrix}$$ (۲۵-٦)

حال k_c^T را یک بردار سطري با بعد n و ضرایب k_{ci} در نظر بگیرید در اینحالت:

$$A_c=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & & 0\\ \vdots & \vdots & & & \vdots\\ 0 & & & & 1\\ -a_0-k_{c1} & -a_1-k_{c2} & & \cdots & -a_{n-1}-k_{cn}\end{bmatrix}$$ (۲٦-٦)

چون ماتریس بفرم کانونیکال مي باشد معادلة مشخصة آن به صورت زیر است:

$$p_c(s)=s^n+(a_{n-1}+k_{cn})s^{n-1}+\cdots+(a_1+k_{c2})s+(a_0+k_{c1})$$ (۲۷-٦)

با برابر قراردادن $p_d(s)=p_c(s)$ ضرایب k_i را برحسب a_i و ضرایب معادلة مشخصة دلخواه $p_d(s)$ ، مي توان تعیین نمود. حال با استفاده از تبدیل همانندي لم ۶-۱ به مختصات اول برمي گردیم:

$$\forall T_{n\times n}\qquad A=TA_cT^{-1}, b=Tb_c$$ (۲۸-٦)

لذا:

$$T(A_c-b_ck_c^T)T^{-1}=A-bk^T$$ (۲۹-٦)

که درآن:

$$\boxed{k^T={k_c}^TT^{-1}}$$ (۳۰-٦)

دو معادلة مشخصة $A-bk^T, A_c-b_ck_c^T$ یکي مي باشند. چرا که تبدیلهاي استفاده شده همانندي مي باشد. به علت اینکه تنها یک k_c^T وجود دارد که هم ارزي معادلة مشخص $p_d(s)=p_c(s)$ را برقرار سازد، بهرة حلقة k^T نیز یکتا مي باشد.

■

با اینکه این قضیه یکتائي پاسخ را مشخص مي کند، اما شاید براي تعیین k^T روش عددي مناسبي نباشد در ادامه روشهاي عددي محاسبه k^T را براي سیستمهاي MIMO, SISO معرفي مي شوند.

۶-۳-۱) روش مستقیم براي تعیین ماتریس بهرهٔ فیدبک حالت

اولین روش به صورت مستقیم از فضاياي قبل استفاده مي کند. مشخص شد که $k^TT=k_c^T$ اگر هر دو طرف این معادله را در عناصر چند جمله اي ضرب کنیم داریم:

$$k^TT\begin{bmatrix}1\\ s\\ \vdots\\ s^{n-1}\end{bmatrix}=k_c^T\begin{bmatrix}1\\ s\\ \vdots\\ s^{n-1}\end{bmatrix}$$ (۳۱-٦)

سمت راست معادله از طریق زیر محاسبه مي شود.

$$k_{c1}+k_{c2}s+k_{c3}s^2+\cdots+k_{cn}s^{n-1}=p_{cl}(s)-p_o(s)$$ (۳۲-٦)

که در آن $p_o(s)$ معادلة مشخصة سیستم مدار باز و $p_{cl}(s)$ معادلة مشخصة سیستم مدار بسته است.

$$p_o(s)=\det(sI-A_c)=\det(sI-A)$$ (۳۳-٦)

که در آن A_c نمایش سیستم در فرم کانونیکال مي باشد. براي محاسبة سمت چپ معادله، لم ۶-۱ را درنظر آورید. T را مي توان از رابطة $T=\mathbb{C}\mathbb{C}_c^{-1}$ محاسبه نمود اما این عملیات بسیار مفصل و زمان گیر است. اجازه دهید از روشي که T را محقق نموده ایم براي محاسبة آن استفاده کنیم. در واقع سطرهاي T با استفاده از تحقق سطرهاي ماتریس تبدیل h(s) بدست مي آید که در آن خروجیها را $y=I\cdot x$ یا به فرم تبدیل یافته $y=T\cdot z$ مي باشد. به عنوان مثال اگر یکي از سطرهاي سیستم رستة ۴ به صورت $2s^3+3s^2+s+1$ باشد با استفاده از تحقق کانونیکال کنترل پذیري سطر C مربوطه به شکل $[2\quad 3\quad 1\quad 1]$ تحقق مي یابد. لذا حاصل ضرب $T\begin{bmatrix}1\\ s\\ \vdots\\ s^{n-1}\end{bmatrix}$ در سمت چپ از تحقق سطرهاي صورت ماتریس تبدیل h(s) بدست مي آید. یا با تعبیر دقیق ریاضي:

$$T\begin{bmatrix}1\\ s\\ \vdots\\ s^{n-1}\end{bmatrix}=\det(sI-A)h(s)=Adj(sI-A)b$$ (۳٤-٦)

لذا بدون حل $\mathbb{C}\mathbb{C}_c^{-1}$ مي توان معادلات مشخصه را هم ارز قرارداد.

$$p_{cl}(s)=\det(sI-A)+k^TAdj(sI-A)b$$ (۳۵-٦)

یا

$$p_{cl}(s)=p_o(s)+k^T Adj(sI-A)b \qquad (۳۶-۶)$$

جمع بندی روش:

- ابتدا دترمینان و Adj ماتریس $sI-A$ را محاسبه مي کنيم.
- معادلة مشخصة مورد نياز را براساس محل قطبهاي مورد نظر محاسبه مي کنيم.
- معادلة (۳۶-۶) را برقرار مي سازيم تا یک دستگاه معادلات خطي برحسب k_i بدست آید. با حل این دستگاه معادلات بهرة فیدبک حالت را بدست مي آوريم.
- مقادیر u^*, x^* را براساس ورودي مرجع غير صفر محاسبه مي کنيم.
- کنترل كننده نهائي را به فرم $u=u^*-k^T(x-x^*)$ پياده سازي مي کنيم.

همانگونه که مشاهده مي شود این روش مناسب براي محاسبات دستي است. روشهاي عددي با همان ایده ولي به صورت عددي پياده سازي مي شوند.

مثال (۶-۲) موتور DC و ضد هوائی

بهرة فیدبک حالت سیستم را به گونه اي بدست آورید که قطبهاي حلقـه بسـته سیسـتم را بـه نقاط $-24, -3\pm 3j$ جایابي گردند. معادلة کامل این کنترل کننده براي تنظـیم سیسـتم بـه مقدار مرجع $\theta=\theta_d$ را تعیین کرده و براي اینحالت تابع تبدیل سیستم حلقه بسـتة سیسـتم $\dfrac{\theta(s)}{\theta_d(s)}$ را بدست آورید.

پاسخ: براي سيستم فوق ماتريسهاي حالت عبارتند از:

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 4.438\\ 0 & -12 & -24\end{bmatrix}, b=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 20\end{bmatrix}$$

و قطبهاي سیستم حلقه بسته عبارتند از 0 ,2.424- ,21.576- . تابع تبديل حلقـه بـاز سیسـتم $p_o(s)$ ، عبارتست از:

$$\det(sI-A)=s(s+2.424)(s+21.576)=s^3+24s^2+53.37s$$

حال معادلة Adj را بدست مي آوريم.

$$Adj(sI-A)\cdot b=\begin{bmatrix}\times & \times & 4.438\\ \times & \times & 4.438s\\ \times & \times & s^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 20\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}88.76\\ 88.76s\\ 20s^2\end{bmatrix}$$

حال معادلة (۳۶-۶) را محاسبه مي كنيم.

$$p_d(s)=(s+24)(s+3\pm 3j)=s^3+30s^2+162s+432$$

$$p_d(s)\equiv(s^3+24s^2+53.37s)+\begin{bmatrix}k_1 & k_2 & k_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}88.76\\ 88.76s\\ 20s^2\end{bmatrix}$$

$$\equiv s^3+(24+20k_3)s^2+(52.058+88.76k_2)s+88.76k_1$$

این هم ارزي به سه معادله خطي منجر مي شود.

$$\begin{cases}24+20k_3=30 \rightarrow k_3=0.3\\ 53.37+88.76k_2=162 \rightarrow k_2=1.23\\ 88.76k_1=432 \rightarrow k_1=4.86\end{cases}$$

و در نتيجه بهره فيدبك حالت مقدار زير را خواهد داشت:

$$k=\begin{bmatrix}4.86 & 1.23 & 0.3\end{bmatrix}$$

حال براي محاسبة پاسخ به ورودي مرجع غير صفر u^*, x^* را محاسبه مي کنيم.

$$0=Ax^*+Bu^* \qquad \theta^*=\theta_d$$

$$\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 4.438\\ 0 & -12 & -24\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta_d\\ \omega^*\\ i^*\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 20\end{bmatrix}v^*\Rightarrow \omega^*=i^*=v^*=0$$

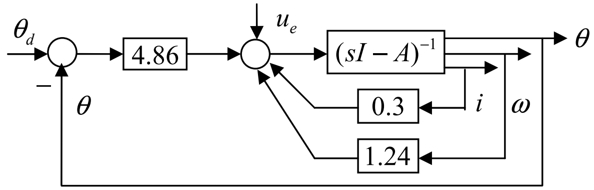
$$\Rightarrow v=v^*-k\Delta x=0-\begin{bmatrix}k_1 & k_2 & k_3\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}\theta\\ \omega\\ i\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\theta_d\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\right)$$

$$\Rightarrow v=-4.86(\theta-\theta_d)-1.24\omega-0.3i$$

بلوک دیاگرام پیاده سازي کنترل به صورت شکل (۳-۶) است. لـذا تـابع تبـديل سيسـتم مـدار بسته به شکل زیر است.

$$\frac{\theta}{\theta_d}=\frac{k}{(s+2s)(s+3\pm 3j)}$$

$$=\frac{k}{(s+24)(s^2+6s+18)}$$



شکل (۶-۳) بلوک دیاگرام پیاده سازی کنترل مثال (۶-۲)

چرا كه صفرهاي سيستم حلقة بسته معادل صفرهاي سيستم حلقه باز است و قطبهاي سيستم حلقه بسته به محل جايابي شده انتقال يافته است و مقدار DC تابع تبديل مدار بسته نيز با توجه به اينكه $\lim_{t\to\infty} y(t)=y_d(t)$، لذا $\lim_{s\to 0}\frac{y(s)}{y_d(s)}=1$ خواهد بود.

$$\lim_{s\to 0}\frac{\theta(s)}{\theta_d(s)}=\frac{k}{24\cdot 18}=1\Rightarrow k=432$$

$$\frac{\theta(s)}{\theta_d(s)}=\frac{432}{(s+24)(s^2+6s+18)}$$

مثال (۶-۳) پاندول معکوس

بهرة كنترل كنندة فيدبك حالتي را براي سيستم پاندول معكوس معرفي شده در مثال (۲-۵) با مقادير اوليه و مدل خطي سازي شدة مثال (۲-۹) طراحي كنيد كه قطبهاي سيستم حلقه بسته را بر روي $-4.43,-4.43,-2\pm 2j$ جايابي نمايد. قانون كنترلي لازم براي كنترل سيستم در حالت عمودي به سمت بالا را بيان نمائيد.

پاسخ:

مدل خطي سازي شدة سيستم عبارتست از:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ v \\ \theta \\ \omega \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 19.6 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ v \\ \theta \\ \omega \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}u$$

بدين ترتيب:

$$\det(sI-A)=\begin{vmatrix} s & -1 & 0 & 0 \\ 0 & s & 9.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -19.6 & s \end{vmatrix}=s^2(s^2-19.6)$$

لذا قطبهاي سيستم حلقه باز عبارتند از $0,0,\pm 4.43$. حال معادلة تعيين بهرة حالت را به ترتيب زير محاسبه مي كنيم.

$$\text{Adj }(sI-A)=\begin{bmatrix} \times & (s^2-19.6) & \times & -9.8 \\ \times & s(s^2-19.6) & \times & -9.8s \\ \times & 0 & \times & s^2 \\ \times & 0 & \times & s^3 \end{bmatrix}$$

$$k^T\text{Adj }(sI-A)b=\begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s^2-9.8 \\ s(s^2-9.8) \\ -s^2 \\ -s^3 \end{bmatrix}$$

$$=k_1(s^2-9.8)+k_2 s(s^2-9.8)-k_3 s^2-k_1 s^3$$

چند جمله اي مشخصة مطلوب سيستم عبارتست از:

$$p_{cl}(s)=(s+4.43)^2(s+2\pm 2j)$$

$$=s^4+12.86s^3+63.04s^2+149.3s+157.8$$

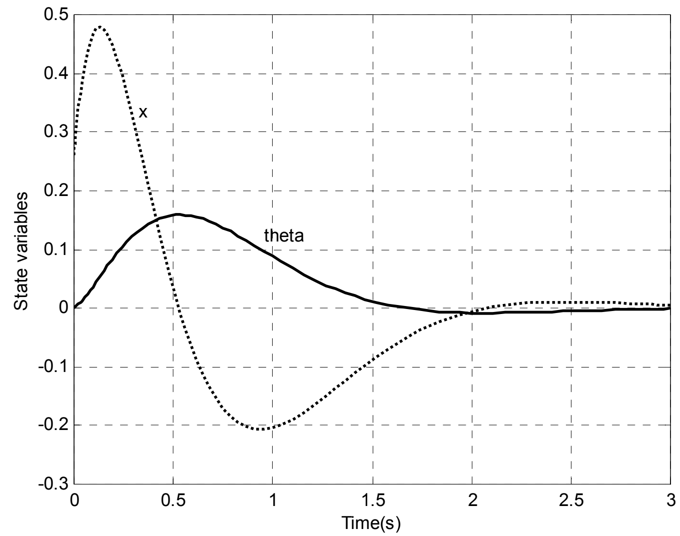
با حل معادلة (۶-۳۵) بهرة فيدبك حالت عبارتست از:

$$k=-16,\quad k_2=-15.2,\quad k_3=-98.6,\quad k_4=-28.1$$

با توجه به اينكه در حالت ماندگار كلية متغيرهاي حالت بر روي مبدأ قرار مي گيرند يا به عبارت ديگر $x^*=u^*=0$، قانون كنترل عبارتست از:

$$u=16x+15.2v+98.6\theta+28.1\omega$$

شكل (۶-۴) پاسخ سيستم حلقه بسته به شرايط اولية $\theta(0)=15^o=0.26\text{ rad}$ و $x(0)=v(0)=\omega(0)$ نشان مي دهد. همانگونه كه مشخص است اين سيستم ذاتاً ناپايدار به صورت كامل پايدار سازي شده است.



شکل(۶-۴) پاسخ زمانی سیستم حلقه بستهٔ پاندول معکوس به شرایط اولیهٔ غیر صفر

۶-۳-۲) روش بس و گیورا[1]

برخلاف روش قبل این روش با محاسبات عددي k,T را تعيين مي كند. فرض كنيد:

معادلهٔ مشخصه مطلوب: $p_d(s)=s^n+\alpha_{n-1}s^{n-1}+...+\alpha_0$

معادلهٔ مشخصه حلقه باز: $p_o(s)=a(s)=s^n+a_{n-1}s^{n-1}+...+a_0$

معادلهٔ مشخصه حلقه بسته: $p_{cl}(s)=a_{cl}(s)=\det(sI-A+bk^T)$

معادلهٔ آخر را مي توان با استفاده از قواعد جبر خطي بفرم زير نوشت:

$$=\det\{(sI-A)[I+(sI-A)^{-1}bk^T]\}$$
$$=\det(sI-A)\cdot\det[I+(sI-A)^{-1}bk^T]$$

لذا:

$$a_{cl}(s)=a(s)\cdot(1+k^T(sI-A)^{-1}b)$$
$$\boxed{a_{cl}(s)-a(s)=a(s)\cdot k^T(sI-A)^{-1}b} \qquad (۳۷-٦)$$

[1] Bass & Gura

كه در واقع هر دو طرف معادله چند جمله اي برحسب s مي باشند و با هم ارز قراردادن دو معادله ضرايب معادله و k^T را مي توان تعيين نمود. براي اينكار از ماتريس $(sI-A)^{-1}$ استفاده مي كنيم.

$$(sI-A)^{-1}=\frac{1}{a(s)}[s^{n-1}I+(A+a_{n-1}I)s^{n-2}+(A^2+a_{n-1}A+a_{n-2}I)s^{n-3}+...]$$

لذا:

$$\alpha_{n-1}-a_{n-1}=k^Tb$$
$$\alpha_{n-2}-a_{n-2}=k^TAb+a_{n-1}k^Tb$$
$$\alpha_{n-3}-a_{n-3}=k^TA^2b+a_{n-1}k^TAb+a_{n-2}k^Tb$$
$$\vdots$$

معادلات را به صورت زير بازسازي مي كنيم.

$$\alpha-a=k^T\mathbb{C}\Psi \qquad (۳۸-٦)$$

كه در آن:

$$\alpha=[\alpha_{n-1}\quad \alpha_{n-2}\ ...\quad \alpha_0]$$
$$a=[a_{n-1}\quad a_{n-2}\ ...\quad a_0]$$
$$\mathbb{C}=[b\quad Ab\ ...\quad A^{n-1}b]$$
$$\Psi=\begin{bmatrix}1 & a_{n-1} & a_{n-2}... & a_1\\ 0 & 1 & a_{n-1}... & a_2\\ \vdots & 0 & 1\cdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & a_{n-1}\\ 0 & 0 & 0... & 1\end{bmatrix}$$

$$\boxed{\Rightarrow k^T=(\alpha-a)\Psi^{-1}\mathbb{C}^{-1}} \qquad (۳۹-٦)$$

۶-۳-۳) روش تبدیل همانندی

مطابق با لم ۶-۱ تبديل همانندي ناويژه اي وجود دارد كه سيستم را به فرم كانونيكال كنترل پذيري (A_c,b_c) تبديل كند:

$$A_c=T^{-1}AT,b_c=T^{-1}b \qquad (٤٠-٦)$$

كه در آن $T=\mathbb{C}\mathbb{C}_c^{-1}$ و بهرهٔ كنترل فيدبک حالت از رابطهٔ زير محاسبه مي شود.

$$k^T=(\alpha-a)\cdot T^{-1} \qquad (٤١-٦)$$

از طرفي با مقايسهٔ روش قبل داريم: $k^T=(\alpha-a)(\mathbb{C}\Psi)^{-1}$

لذا $T=\mathbb{C}\Psi$ بوده از اين طريق نيز قابل محاسبه است. لذا $\Psi=\mathbb{C}_c^{-1}$ مي باشد.

و خوشبختانه با توجه به فرم كانونيكال ماتريس A معكوس ماتريس Ψ را به صورت تحليلي مي توان به فرم زير بدست آورد.

$$\Psi^{-1} = \mathbb{C}_c = \begin{bmatrix} b_c & A_c b_c \cdots & A_c^{n-1} b_c \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 1 & -a_{n-1} & \vdots \\ 0 & 1 & -a_{n-1} & a_{n-1}^2 - a_{n-2} & \\ 1 & -a_{n-1} & a_{n-1}^2 - a_{n-2} & -a_{n-1}^3 + 2a_{n-1}a_{n-2} - a_{n-3} & \cdots \end{bmatrix} \qquad (\text{٦-٤٢})$$

همچنين:

$$\mathbb{C} = \begin{bmatrix} b & Ab \cdots & A^{n-1} b \end{bmatrix} \qquad (\text{٦-٤٣})$$

و نهايتاً ماتريس بهره از محاسبة زير تعيين مي شود.

$$k^T = (\alpha - a)\Psi^{-1}\mathbb{C}^{-1} \qquad (\text{٦-٤٤})$$

در واقع اين روش منطبق با روش قبل است با اين تفاوت كه Ψ^{-1} نيز بـه صـورت پارامتريـک حل شده است. درصورت انجام محاسبات عددي توسط كامپيوتر مي توان Ψ را بدست آورده و Ψ^{-1} را از طريق عددي محاسبه نمود.

۶–۳–۴) فرمول آكرمن[1]

در اين روش بهرة فيدبک حالت از فرمول زير محاسبه مي شود.

$$k^T = q_n^T \alpha(A) \qquad (\text{٦-٤٥})$$

كه در آن $p_d(s) = \alpha(s)$ چند جمله اي مشخصة مطلوب است و q_n^T در واقع آخرين سـطر ماتريس كنترل پذيري $\mathbb{C}^{-1}$ مي باشد.

$$q_n^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \mathbb{C}_c^{-1} \qquad (\text{٦-٤٦})$$

در اين روش اطلاع صريحي از چند جمله اي مشخصة سيسـتم $a(s) = \det(sI - A)$ مـورد نياز نمي باشد و تنها ماتريس كنترل پذيري و معكوس آن مورد محاسبه قرار مـي گيـرد. بـراي نشان دادن صحت فرمول آكرمن آنرا براي n = 3 محاسبه و تأييد مي كنيم. تعميم اين اثبات به حالت عمومي n نيز براحتي قابل اجراست.

[1] Ackermann Formula

فرض كنيد:

$$\overline{A} = A - bk^T$$
$$\overline{A}^2 = (A - bk^T)^2 = A^2 - Abk^T - bk^T\overline{A}$$
$$\overline{A}^3 = (A - bk^T)^3 = A^3 - A^2bk^T - Abk^T\overline{A} - bk^T\overline{A}^2$$

لذا خواهيم داشت:

$$\overline{A}^3 + \alpha_2\overline{A}^2 + \alpha_1\overline{A} + \alpha \cdot I =$$
$$= \alpha_0 I + \alpha_1(A - bk^T) + \alpha_2(A^2 - Abk^T - bk^T\overline{A}) + A^3 - A^2bk^T - Abk^T\overline{A} - bk^T\overline{A}^2$$
$$= \alpha_0 I + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + A^3 - \alpha_1 bk^T - \alpha_2 Abk^T - A^2bk^T - Abk^T\overline{A} - bk^T\overline{A}^2$$

با بكارگيري قضية C.H. براي $\overline{A}$ داريم $\alpha(\overline{A}) = 0$ (هر مـاتريس در معادلـة مشخصـة خـود صدق مي كند). بنابراين:

$$\alpha(A) = b(\alpha_1 k^T + \alpha_2 k^T\overline{A} + k^T\overline{A}^2) + Ab(\alpha_2 k^T + k^T\overline{A}) + A^2bk^T$$
$$= \begin{bmatrix} b & Ab & A^2b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 k^T + \alpha_2 k^T\overline{A} + k^T\overline{A}^2 \\ \alpha_2 k^T + k^T\overline{A} \\ k^T \end{bmatrix}$$
$$= \mathbb{C} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 k^T + \alpha_2 k^T\overline{A} + k\overline{A}^2 \\ \alpha_2 k^T + k^T\overline{A} \\ k^T \end{bmatrix}$$

از رديف آخر معادله مي توان k^T را بدون نياز به محاسبة $\overline{A}$ و ضرايب بالاتر محاسبه نمود.

$$k^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbb{C}^{-1} \alpha(A) \qquad (\text{٦-٤٧})$$

كه اين همان معادلة قبل مي باشد:

$$\boxed{k^T = q_n^T \alpha(A)} \qquad (\text{٦-٤٨})$$

۶–۳–۵) روش مِين– مِرداخ[1]

در اين روش از معادله مشخصه استفاده نشده، بلكه مستقيماً مقادير ويژه ماتريس مورد استفاده قرار مي گيرد. فرض كنيد ماتريس A قطري بوده و مقادير ويـژه و ريشـه هـاي مطلـوب حلقـه

[1] Mayne-Murdoch

بسته آن به ترتيب $\{\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n\}$, $\{\mu_1,\mu_2,...,\mu_n\}$ باشند. معادلة تعيين بهرة فيدبک حالت يا معادلة (٦-٣٧) را درنظر بگيريد:

$$a_{cl}(s)-a(s)=a(s)k^T(sI-A)^{-1}b$$

يا

$$\frac{a_{cl}(s)}{a(s)}=1+\sum_{i=1}^{n}\frac{k_ib_i}{s-\lambda_i} \qquad (٦\text{-}٤٩)$$

اين بدان معناست که اگر $\frac{a_{cl}(s)}{a(s)}$ را به کسرهاي جزئي[1] بسط دهيم ضريب عبارت $(s-\lambda_i)^{-1}$ برابر k_ib_i مي باشد. از اين طريق k_i قابل محاسبه خواهد بود. اما ضرايب کسرهاي جزئي را به ترتيب زير مي توان محاسبه نمود.

$$k_ib_i=\frac{\prod_{j}(\lambda_i-\mu_j)}{\prod_{\substack{j\\ j\neq i}}(\lambda_i-\lambda_j)} \qquad (٦\text{-}٥٠)$$

اين فرمول نشان مي دهد که با افزايش فاصلة λ_i از μ_i بهرة فيدبک حالت افزايش مي يابد. اين روش را به حالت مقادير ويژه تکراري قابل تعميم است اما به لحاظ پيچيدگيهاي محاسباتي از آن کمتر استفاده مي شود.

نکته: در حالتيکه ماتريس A قطري نباشد، تبديل هماننديT که ماتريس را قطري مي سازد را تعيين نموده و بهرة فيدبک حالت به صورت $k^T=k_\Lambda^T T^{-1}$ محاسبه مي شود.

مثال (۶-۴)

سيستم زير را در نظر بگيريد:

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0&1\\20.6&0\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u(t)$$

[1] Partial Fraction

مقادير ويژه حلقه باز سيستم برابرند با ± 4.539 و لذا سيستم حلقه باز ناپايدار است, قطبهاي مطلوب سيستم حلقه بسته عبارتند از: $-1.8\pm j2.4$. با استفاده از روشهاي مختلف بهرة فيدبك حالت را تعيين كنيد:

پاسخ:

- روش مستقيم

$$\det(sI-A)=(s+4.539)(s-4.539)$$
$$=s^2+0\cdot s+(-20.6)$$
$$Adj(sI-A)b=\begin{bmatrix}\times&1\\\times&s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\s\end{bmatrix}$$
$$p_d(s)=(s+1.8\pm j2.4)=s^2+3.6s+9$$
$$\equiv s^3+0\cdot s+(-20.6)+\begin{bmatrix}k_1&k_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\s\end{bmatrix}$$
$$\equiv s^2+k_2s+(-20.6+k_1)\rightarrow\begin{cases}k_2=3.6\\-20.6+k_1=9\end{cases}$$
$$\boxed{\Rightarrow k_1=29.6,\ \ k_2=3.6}$$

- روش بس گيورا:

معادلات به صورت كانونيكال مي باشند لذا :

$$k^T=k_c^T=\alpha-a$$
$$\alpha(s)=p_d(s)=s^2+3.6s+9$$
$$a(s)=s^2-20.6$$
$$k_c^T=[\alpha_0-a_0\quad \alpha_1-a_1]=[29.6\quad 3.6]$$

- روش آكرمن:

$$\varphi_c=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},\varphi_c^{-1}=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$$
$$\alpha(A)=A^2+3.6A+9I=\begin{bmatrix}29.6&3.6\\74.16&26.6\end{bmatrix}$$
$$k^T=q_n^T\alpha(A)=\begin{bmatrix}1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}29.6&3.6\\74.16&26.6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}29.6&3.6\end{bmatrix}$$

- روش مين - مرداخ

با استفاده از بردارهاي ويژة سيستم:

$$T=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 4.539 & -4.539\end{bmatrix}\rightarrow T^{-1}=\frac{1}{9.08}\begin{bmatrix}4.539 & 1\\ 4.539 & -1\end{bmatrix}$$

$$\Lambda=\begin{bmatrix}4.539 & 0\\ 0 & -4.539\end{bmatrix},\ b_\Lambda=\begin{bmatrix}1/9.08\\ -1/9.08\end{bmatrix}$$

$$k_1=\frac{1}{b_1}\frac{(\lambda_1-\mu_1)(\lambda_1-\mu_2)}{(\lambda_1-\lambda_2)}=(4.539+1.8-j2.4)(4.539+1.8+j2.4)$$
$$=45.94$$

$$k_2=\frac{1}{b_2}\frac{(\lambda_2-\mu_1)(\lambda_2-\mu_2)}{(\lambda_2-\lambda_1)}=(-4.539+1.8-j2.4)(-4.539+1.8+j2.4)$$
$$=13.26$$

$$k^T=k_c^TT^{-1}=\frac{1}{9.08}\begin{bmatrix}45.94 & 13.26\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4.539 & 1\\ 4.539 & -1\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}29.6 & 3.6\end{bmatrix}$$

۶-۴)جایابی قطب سیستمهای چند ورودی – چند خروجی

تاكنون روشهاي تعيين ماتريس بهرة يكتا فيدبك حالت را براي سيستمهاي SISO بيان نموده ايم. در سيستمهاي MIMO ماتريس بهرة K منحصر بفرد نمي باشد. با ارائة مثال زير يكتا نبودن پاسخ را بررسي مي كنيم:

مثال (۶-۵)

بهرة فيدبك حالت را براي سيستم زير به گونه اي تعيين كنيد، كه قطبهاي حلقه بستة سيستم منطبق با $p_d(s)$ گردد.

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}u(t)$$

$$p_d(s)=a_c(s)=(s+1)^2=s^2+2s+1$$

توجه كنيد كه در اينحالت دو ورودي وجود دارد لذا ماتريس بهرة K , ۲*۲ مي باشد.

$$A-BK=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_{11} & k_{12}\\ k_{21} & k_{22}\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}-k_{11} & 1-k_{12}\\ -1-k_{21} & 2-k_{22}\end{bmatrix}$$

و لذا معادلة مشخصة سيستم حلقه بسته عبارتست از:

$$s^2+(k_{11}-2+k_{22})s-(1+k_{21})(-1+k_{12})+k_{11}(2-k_{22})$$

لذا دو معادله و چهارمجهول براي جايابي قطب وجود دارد.

$$\begin{cases}k_{11}-2+k_{22}=2\\ -(1+k_{21})(-1+k_{12})+k_{11}(2-k_{22})=1\end{cases}$$

لذا بي نهايت حالت براي ماتريس K متصور است از جمله

$$K_1=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix},K_2=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 3\end{bmatrix}$$

تعدد جوابها به ما اجازه مي دهد، كه علاوه بر جايابي قطب ها، مسائل ديگري را در انتخاب K در نظر گيريم، كه در روشهاي كنترل بهينه بعضي از اين روشها مورد بررسي قرار مي گيرد. در ادامة اين بخش دو روش تعيين ماتريس بهره را بيان مي كنيم، كه در آن K از حاصل ضرب دو بردار $K=f\cdot m^T \quad m_{1\times n}, f_{m\times 1},$ مي باشد. در اين دو روش بردار f كه توزيع ورودي كنترل بر روي عملگرها را مشخص مي كند، به اختيار طراح انتخاب مي شود.

۶-۴-۱) روش طيفي

با درنظر گرفتن $K=f\cdot m^T \quad m_{n\times 1}, f_{m\times 1},$ ، براي مجموعة قطب هاي مطلوب حلقه بسته $\{\mu_i\}$، بردار m^T را بدين ترتيب محاسبه مي كنيم.

$$m^T=\sum_{i=1}^{q}\delta_i v_i^T \tag{۶-۵۱}$$

كه در آن q تعداد قطبهائي است كه بايستي جايابي شوند و v_i^T بردارهاي ويژة معكوس متناظر با مقادير ويژة λ_i ماتريس A مي باشند. در واقع اگر بردارهاي ويژة ماتريس A را با w معرفي كنيم

$$v=w^{-1} \tag{۶-۵۲}$$

علاوه بر آن، δ_i فاكتورهاي وزني مي باشند كه از رابطة زير محاسبه مي شوند.

$$\delta_i = \frac{\prod_{j=1}^{q}(\lambda_i-\mu_i)}{p_i\prod_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{q}(\lambda_i-\lambda_j)} \qquad (\text{۵۳-۶})$$

که در آن اسکالرهاي p_i از ضرب داخلي زیر تعیین مي گردند.

$$p_i = < v_i^T Bf > \qquad (\text{۵٤-۶})$$

f برداري است دلخواه به شرطي که (A, Bf) کنترل پذیر باقي بماند.

مثال (۶-۶)

سیستم زیر را در نظر گرفته و با طراحي فیدبك حالت مناسب و قطبهاي مطلوب سیستم حلقه بسته را بر روي $-2,-2,-2$ جایابي نمائید.

$$A=\begin{bmatrix}-2 & -1 & 2\\ -1 & -2 & 2\\ -2 & 0 & 2\end{bmatrix} b=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

پاسخ:

مقادیر ویژه حلقه باز سیستم عبارتند از $\lambda_3=-2, \lambda_{1,2}=\pm j$ بردارهاي ویژه متناظر عبارتند از:

$$w=[w_1 \quad w_2 \quad w_3]=\begin{bmatrix}1+2j & 1-2j & 2\\ j & -j & -2\\ 2j & -2j & 1\end{bmatrix}$$

$$v=\begin{bmatrix}v_1^T\\ v_2^T\\ v_3^T\end{bmatrix}=w^{-1}=\frac{1}{10}\begin{bmatrix}5 & 2-j & -6-2j\\ 5 & 2+j & -6+2j\\ 0 & -4 & 2\end{bmatrix}\rightarrow 2- \text{ مربوط به مود}$$

قطبهاي مطلوب سیستم عبارتند از $3\times(-2)$ لذا تنها جایابي دو قطب مورد نظر است. $\mu_1=\mu_2=-2, \mu_3=\lambda_3=-2$ با انتخاب دلخواه $f=[1 \quad 1]^T$ بسادگي مي توان نشان داد زوج (A, Bf) کنترل پذیر است.

$$Bf=\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 1\end{bmatrix} \qquad \mathbb{C}=[Bf \quad ABf \quad A^2Bf]=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 3\\ 1 & 2 & 2\end{bmatrix}$$

$$\text{rank } \mathbb{C}=3$$

حال اسکالرهاي p_i را از ضرب داخلي بردارهاي $< v_i^T Bf >$ تعیین مي کنیم.

$$p_1=< v_1^T Bf >=\frac{-4-3j}{10}\rightarrow \delta_1=\frac{(\lambda_1-\mu_1)(\lambda_1-\mu_2)}{p_1(\lambda_1-\lambda_2)}=\frac{-7+24j}{5}$$

$$p_2=< v_2^T Bf >=\frac{-4+3j}{10}\rightarrow \delta_2=\frac{(\lambda_2-\mu_1)(\lambda_2-\mu_2)}{p_1(\lambda_2-\lambda_1)}=\frac{-7-24j}{5}$$

بنابراین بردار m^T به صورت زیر محاسبه مي شود.

$$m^T=\delta_1 v_1^T+\delta_2 v_2^T=\cdots=(-1.4 \quad 0.4 \quad 3.6)$$

و ماتریس فیدبک حالت عبارت است از:

$$K=fm^T=\begin{bmatrix}-1.4 & 0.4 & 3.6\\ -1.4 & 0.4 & 3.6\end{bmatrix}$$

براي تصدیق صحّت عملیات ماتریس سیستم حلقه بسته را تشکیل مي دهیم.

$$A-BK=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 2\\ 0.4 & -2.4 & -1.6\\ -0.6 & -0.4 & -1.6\end{bmatrix}$$

مقادیر ویژه ماتریس متناظر برابر است با $\lambda_{1,2,3}=-2$ که نشاندهندۀ صحت عملیات انجام شده است.

نکته ۱: با توجه به اختیاري بودن f ماتریس بهرۀ بدست آمده مسلماً یکتا نخواهد بود.

نکته ۲: اگر ماتریس حلقه باز سیستم داراي مقادیر ویژه تکراري باشند روش فوق قابل اعمال نبوده و بایستي از روشهاي تعمیم یافته استفاده نمود.

۶-۴-۲) روش نگاشتي

در این روش محاسبه مقادیر ویژه سیستم حلقه باز ضروري نمي باشد. با فرض:

معادله مشخصه دلخواه: $p_d(s)=s^n+d_1s^{n-1}+\cdots+d_n$

معادله مشخصه مدار باز: $p_0(s)=s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_n$

آنگاه چند جمله اي افزایشي $\delta(s)$ را بدین صورت تعریف مي کنیم.

$$\begin{aligned}\delta(s)&=p_d(s)-p_0(s)\\ &=(d_1-a_1)s^{n-1}+(d_2-a_2)s^{n-2}+\cdots+(d_n-a_n)\end{aligned} \qquad (\text{۵۵-۶})$$

اگر همانند قبل f را به گونه اي اختیار کنیم که (A, Bf) کنترل پذیر باشند آنگاه:

$$m = \left[\mathbb{C}^T\right]^{-1} X^{-1}\delta \qquad (۵۶\text{-}۶)$$

که در آن $\mathbb{C}$ ماتریس کنترل پذیري زوج (A, Bf) مي باشد.

$$\mathbb{C} = \begin{bmatrix} Bf & ABf & \cdots & A^{n-1}Bf \end{bmatrix} \qquad (۵۷\text{-}۶)$$

و

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-2} & a_{n-3} & & 1 & 0 \\ a_{n-1} & a_{n-2} & & a_1 & 1 \end{bmatrix} \qquad (۵۸\text{-}۶)$$

و مسلماً

$$\delta = \begin{bmatrix} d_1 - a_1 & d_2 - a_2 & \cdots & d_n - a_n \end{bmatrix}^T \qquad (۵۹\text{-}۶)$$

توجه کنید ماتریسهاي $X,\ \mathbb{C}$ هر دو ناويژه مي باشند و لذا با انتخاب هر f يک ماتريس بهره k قابل محاسبه است.

مثال (۶-۷)

سیستم قبل را درنظر بگیرید. $p_o(s) = s^3 + 2s^2 + s + 2$

$$\Rightarrow X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow X^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

با انتخاب $f = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ داریم

$$\mathbb{C} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}; \quad \left[\mathbb{C}^T\right]^{-1} = \begin{bmatrix} -0.4 & 0.6 & 0.4 \\ 0.4 & 0.4 & 0.6 \\ 0.6 & -0.4 & -0.6 \end{bmatrix}$$

براي قطبهاي مطلوب در $3\times(-2)$ داريم $p_d(s) = (s+2)^3 = s^3 + 6s^2 + 12s + 8$

و لذا

$$\delta = \begin{bmatrix} 4 & 11 & 6 \end{bmatrix}^T$$

با جايگذاري در معادلة $m = \left[\mathbb{C}^T\right]^{-1} X^{-1}\delta$

خواهيم داشت:

$$m = \cdots = \begin{bmatrix} -1.4 \\ 0.4 \\ 3.6 \end{bmatrix}$$

سرانجام ماتریس بهره فیدبک حالت عبارتست از:

$$k = fm^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -1.4 & 0.4 & 3.6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1.4 & 0.4 & 3.6 \\ -1.4 & 0.4 & 3.6 \end{bmatrix}$$

که منطبق بر نتیجه بدست آمده از روش طیفي است.

۶-۵) کنترل فیدبک حالت بهینه

Linear Quadratic Regulator (LQR)

۶-۵-۱) مقدمه:

عبارت LQR در واقع خلاصة ترم معرفي کنندة تنظيم کنندة خطي بهينه با شاخص عملکردي مربعي[1] مي باشد. روش خطي- مربعي (LQ) شايد مهمترين نتيجه کنترل مدرن در طراحي کنترل کننده هاي فيدبک حالت باشد. بسياري از مسائل مهندسي توسط اين روش حل گشته و روشهاي گوناگون عددي براي حل مسئله ابداع شده است. عليرغم روش جايابي قطب که معيار و مشخصه خاصي را براي جايابي قطبها بهينه نمي کنيم, در اين روش يک معيار يا مشخصه اي را به صورت تعريف مي کنيم:

$$J = \int_0^\infty \left[x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t) \right] dt \qquad (۶۰\text{-}۶)$$

که در آن ماتريسهاي R, Q ماتريسهاي مثبت نيمه معين بوده و در واقع فرم مربعي در المانهاي انتگرال فوق مشاهده مي شود.

[1] Optimal linear regulator for a quadratic performance index

$$\begin{aligned} x^T(t)Qx(t) = Q_{11}x_1^2 &+ 2Q_{12}x_1x_2 + \cdots + 2Q_{1n}x_1x_n \\ &+ Q_{22}x_2^2 + \cdots + 2Q_{2n}x_2x_n \\ &+ \cdots \\ &+ \ Q_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

اگر ماتريس Q مثبت نيمه معين باشد $Q \ge 0$، در اينحالت به ازاي کلية x ها خواهيم داشت: $x^TQx \ge 0$. اگر Q مثبت معين باشد $(Q>0)$ در اينصورت به ازاي همة $x \ne 0$ خواهيم داشت $x^TQx>0$.

اما چرا اين تابع مشخصه عملکردي مناسبي براي طراحي کنترل کننده فيدبک حالت مي باشد؟ دقت کنيد در مسئله عمومي تنظيم و تعقيب شاهد آن بوديم که کوچک شدن متغيرهاي حالت (و يا Δx در مسئله تعقيب) به صورت نمائي و با سرعت مناسب مدنظر است. در اين حال

$$J_1 = \int_0^\infty (x^TQx)dt \qquad (٦١-٦)$$

نرم يا عدد مثبتي را مشخص مي کند، که اندازة خطاي غير صفر متغيرهاي حالت را بهمراه فاکتور وزني مناسبي که به هر يک از المانهاي آن نسبت داده ايم، تعيين مي کند. اگر مقدار اين معيار کوچک شود، نمايانگر آنست که در حالت عمومي خطا داراي دامنة کوچک و سرعت نمائي زايل شدن زيادي مي باشد. از طرفي به علت مربعي بودن اين معيار در واقع متناسب با انرژي خطا خواهد بود. با درنظر گرفتن معيار کوچک شدن متغيرهاي حالت در تابع معادلة (٦٢-٦) توجهي به اندازة تلاش کنترل مورد نياز u نداشته، لذا مينيمم کردن J_1 منتج به داشتن تلاش کنترلي بزرگي خواهد شد. با در نظر گرفتن

$$J_2 = \int_0^\infty (u^TRu)dt \qquad (٦٢-٦)$$

به صورت عمومي انرژي سيگنال کنترل را نيز در معيار عملکرد وارد ساخته، و از بزرگ شدن بدون محدوديت u جلوگيري خواهيم کرد. لذا شاخص عملکرد:

$$J = \int_0^\infty (x^TQx + u^TRu)dt \qquad (٦٣-٦)$$

کاهش انرژي خطا در طول زمان را با لحاظ کردن اندازة انرژي تلاش کنترلي در اين بهينه سازي خواستار مي شود و لذا مصالحه اي بين انرژي خطا و انرژي سيگنال کنترلي متناسب با

مقادير R,Q انجام خواهد شد. بايستي دقت کرد که معيارهاي عملکردي سيستم حلقه بسته همانند

- پايداري داخلي
- تنظيم يا تعيقيب (کوچک بودن خطا)
- حذف اغتشاش
- حذف نويز
- عدم حساسيت به مدل

غالباً پيچيده تر از آن خواهد بود که در يک تابع J فشرده شود. اما اين معيار عملکرد با داشتن مشخصات عمومي مناسب از لحاظ رياضي نيز بسيار جذاب است, چرا که روشهاي بهينه سازي و حل مسئله به صورت مدرن براي اين معيار وجود دارد.

اجازه دهيد معادله لياپانوف ارائه شده در فصل پنجم و قضية (٥-٧) را به ازاي شرايط اين معيار طراحي معرفي نموده و پايداري سيستم را تحليل نمائيم.

۶–۵–۲) معادله ماتريسی لياپانوف

سيستم خطي $\dot{x} = Ax + Bu$ و کنترل فيدبک حالت $u = -kx$ را درنظر بگيريد. سيستم حلقه بسته به صورت زير مي باشد.

$$\dot{x} = (A - Bk)x \qquad (٦٤-٦)$$

حال مشخصة عملکردي J را براي اين سيستم محاسبه مي کنيم.

$$\begin{aligned} J &= \int_0^\infty \left[x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t) \right] dt \\ &= \int_0^\infty \left[x^TQx + (-kx)^T R(-kx) \right] dt \\ &= \int_0^\infty \left[x^T(Q + k^TRk)x \right] dt \end{aligned}$$

لذا با احتساب اين دو معادله مي توان صورت مسئله کنترل بهينه را به صورت زير نوشت:

سيستم حلقه بسته A_{cl} را تحت معادلة حالت $\dot{x} = A_{cl}x$ به نحوي طراحي کنيد که سيستم پايدار داخلي باشد و در آن معيار زير کمينه گردد.

$$J=\int_0^\infty x^T S\ x\ dt \qquad (٦٥-٦)$$

که در آن

$$S=Q+k^T Rk\ \ , A_{cl}=A-Bk$$

پاسخ این مسئله از ماتریس لیاپانوف معرفي شده در فصل قبل بدست مي آيد. چرا که در این مسئله موضوع پایداري داخلي بایستي مورد تحلیل قرار گیرد.

قضیهٔ ۶-۴) قضیهٔ معادلهٔ ماتریسی لیاپانوف

فرض کنید سیستم A پایدار داخلي بوده $(\forall\lambda_i\rightarrow \mathrm{Re}(\lambda_i)<0)$ و S ماتریس متقارن و مثبت معین یا مثبت نیمه معین باشد. در اینصورت به ازاي شرایط اولیه $x(0)=x_0$ خواهیم داشت:

$$J=\int_0^\infty x^T(t)\ S\ x(t)\ dt=x_0^T P\ x_0 \qquad (٦٦-٦)$$

که در آن ماتریس P از معادلهٔ ماتریسي لیاپانوف زیر محاسبه مي شود.

$$A^T P+PA=-S \qquad (٦٧-٦)$$

اثبات: با درنظر گرفتن $x(0)=x_0$ و با توجه به اینکه سیستم بدون ورودي است و $\dot{x}=Ax$ صادق است، خواهیم داشت:

$$x(t)=e^{At}x_0\Rightarrow J=\int_0^\infty x^T S\ x\ dt$$

$$J=\int_0^\infty x_0^T e^{A^T t} S\ e^{At} x_0\ \mathrm{dt}$$

$$J=x_0^T\int_0^\infty\left[e^{A^T t}S\ e^{At}dt\right]x_0$$

$$=x_0^T\ P\ x_0$$

که در آن

$$P=\int_0^\infty e^{A^T t}S\ e^{At}dt \qquad (٦٨-٦)$$

با توجه به پایداري A مي توان نتیجه گرفت e^{At} تنها ترمهاي نمائي منفي دارد و لذا انتگرال فوق محدود مانده و مي توان نشان داد متقارن است. چراکه

$$P^T=\int_0^\infty (e^{At})^T S^T (e^{A^T t})^T dt=\int_0^\infty e^{A^T t}S\ e^{At}dt=\ P \qquad (٦٩-٦)$$

از طرفي ماتریس P حداقل مثبت نیمه معین است.

$$x_0^T P\ x_0=J=\int_0^\infty x^T S\ x\ dt\geq 0 \qquad (٧٠-٦)$$

چراکه تابع داخل انتگرال خود مثبت نیمه معین است.

حال مي توان نشان داد که P با تعریف بدست آمده معادله لیاپانوف را ارضاء مي کند.

$$A^T P+PA=\int_0^\infty\left[A^T e^{A^T t}S\ e^{At}+e^{A^T t}S\ e^{At}A\right]dt \qquad (٧١-٦)$$

با توجه به خاصیت ماتریس انتقال:

$$\frac{d}{dt}\left[e^{At}\right]=Ae^{At}=e^{At}A$$

خاصیت جابجایي بین $A,\ e^{At}$ وجود دارد لذا:

$$\frac{d}{dt}\left[e^{A^T t}S\ e^{At}\right]=A^T e^{A^T t}S\ e^{At}+e^{A^T t}S\ e^{At}A$$

لذا:

$$A^T P+PA=\int_0^\infty\frac{d}{dt}\left[e^{A^T t}S\ e^{At}\right]dt$$

$$=e^{A^T t}S\ e^{At}\Big|_0^\infty=0-1\cdot S\cdot 1$$

$$=-S$$

لذا S در معادلهٔ لیاپانوف P صدق مي کند

$$A^T P+PA=-S$$

■

در واقع با توجه به قضیهٔ لیاپانوف و وجود P مثبت معین که در معادلهٔ فوق صدق کند، سیستم A پایدار داخلي است و عکس آن نیز صادق است. این موضوع را براي مقدار مشخص S در قضیهٔ زیر تدوین مي کنیم. قبل از معرفي قضیه، اجازه دهید نماد $S^{1/2}$ را به صورت زیر تعریف کنیم:

هر ماتریس متقارن مثبت معین یا مثبت نیمه معین را به صورت زیر مي توان نمایش داد.

$$S=(S^{1/2})^T S^{1/2} \qquad (٧٢-٦)$$

كه ماتريس $S^{1/2}$ مجذور ماتريس S ناميده مي شود. مسلماً براي محاسبه عددي $S^{1/2}$ بايستي از روشهاي مناسبي بهره جست كه تبديل S به فرم جوردن، يا استفاده از قضية كيلي- هميلتون، يا تبديل چولسكي و يا householder reflection روشهاي عددي مناسبي براي تعيين مجذور يک ماتريس مثبت معين مي باشند كه در نرم افزارهاي مهندسي همانند Matlab مورد استفاده قرار مي گيرد.

قضية ۶–۵) پايداري داخلي

فرض كنيد $P \ge 0$ وجود داشته باشد كه در معادلة ماتريسي لياپانوف صدق كند (بهمراه $S \ge 0$ در معادلة $A^T P + PA = -S$). همچنين فرض كنيد $(A, S^{1/2})$ آشكارپذير باشد (با اين تعبير كه خروجي $y = S^{1/2}x$ اختيار شود). در اينصورت سيستم $\dot{x} = Ax$ پايدار داخلي مي باشد.

اثبات: از قضية لياپانوف استفاده مي كنيم فرض كنيد تابع لياپانوف زير را درنظر بگيريد.

$$
\begin{aligned}
V &= x^T P x \to \\
\dot{V} &= \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} \\
&= x^T A^T P x + x^T P A x \\
&= x^T (A^T P x + PA) x = -x^T S\, x
\end{aligned}
$$

اما S به صورت مجذور قابل نمايش است لذا:

$$
\begin{aligned}
\dot{V} &= -x^T (S^{1/2})^T S^{1/2} x \\
&= -(S^{1/2}x)^T (S^{1/2}x) = -\| S^{1/2} x \|^2 \le 0
\end{aligned}
$$

با استفاده از قضية لياپانوف مشخص است كه سيستم

$$
\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ y = S^{1/2} x \end{cases}
$$

پايدار داخلي خواهد بود.

■

نكته: اگر S مثبت معين باشد $S^{1/2}$ ناويژه مي باشد. لذا $(A, S^{1/2})$ حتماً رؤيت پذير است چرا كه $x = (S^{1/2})^{-1} y$ به صورت يكتا از روي y قابل محاسبه است.

مثال (۶–۸)

براي سيستم زير:

$$
\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u
$$

كه توسط فيدبك حالت $u = -kx_1$ كنترل شده است مقدار شاخص عملكردِ زير

$$
J = \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u) dt
$$

را با شرط اوليه $x(0) = x_0$ و با فرض $Q = I$ محاسبه كنيد.

پاسخ: سيستم حلقه بسته را محاسبه مي كنيم.

$$
\dot{x} = (A - Bk)x = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k & 0 \end{bmatrix} \right) x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & -1 \end{bmatrix} x
$$

لذا معيار عملكردي J برابر است با

$$
\begin{aligned}
J &= \int_0^\infty x^T(t) \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k \\ 0 \end{bmatrix} r \begin{bmatrix} k & 0 \end{bmatrix} \right\} x(t) dt \\
&= \int_0^\infty x^T(t) \underbrace{\begin{bmatrix} 1 + rk^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{S} x(t) dt = x_0^T P x_0
\end{aligned}
$$

با فرض اينكه P معادله لياپانوف $A^T P + PA = -S$ را ارضاء كند:

$$
\begin{bmatrix} 0 & -k \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & -1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 + rk^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{cases} kp_{12} - kp_{12} = -1 - rk^2 \\ -kp_{22} + p_{11} - p_{12} = 0 \\ p_{12} - p_{22} + p_{12} - p_{22} = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} p_{11} = \dfrac{1}{2k} + \dfrac{1}{2} + (r+1)\dfrac{k}{2} + \dfrac{rk^2}{2} \\ p_{12} = \dfrac{1}{2k} + \dfrac{rk}{2} \\ p_{22} = \dfrac{1}{2k} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{rk}{2} \end{cases}
$$

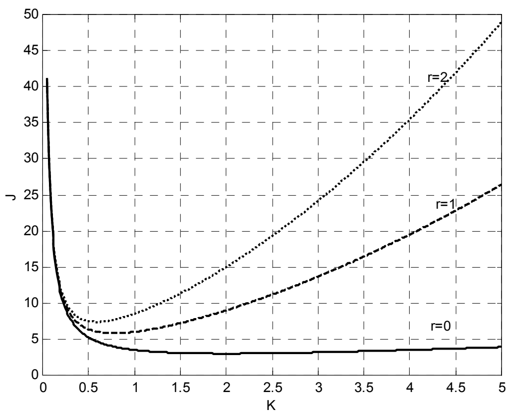
لذا معيار عملكردي را مي توان براحتي محاسبه نمود.

$$
\begin{aligned}
J &= x_0^T P\, x_0 \\
J &= p_{11} x_1^2(0) + 2 p_{12} x_1(0) x_2(0) + p_{22} x_2^2(0)
\end{aligned}
$$

که مي توان اين تابع را برحسب r هاي مختلف مطابق شکل (٦-٤) رسم کرد. براي تعيين محدودة پايداري k مي توان مثبت معين بودن P را بررسي نمود.

$$\forall k>0 \begin{cases} p_{11}>0 \\ p_{11}p_{22}-p_{12}^2=\dfrac{1}{2k}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{(3r+1)}{4}k+\dfrac{r}{2}k^2+\dfrac{r^2k^3}{4}>0 \end{cases}$$

لذا سيستم حلقه بسته پايدار داخلي است.



شکل (۶-۴) منحنی تغییرات شاخص عملکرد J برحسب بهرهٔ کنترل k

۶-۵-۳) طراحی کنترل کننده LQR

مسئله طراحي بهينة کنترل فيدبک حالت LQR به صورت زير تعريف مي شود:

سيستم خطي LTI زير را با شرايط اوليه $x(0)=x_0$ درنظر بگيريد.

$$\dot{x}=Ax+Bu \tag{٦-٧٣}$$

مي خواهيم کنترل فيدبک حالت $u=-kx$ را به گونه اي طراحي کنيم که معيار عملکرد زير را کمينه سازد.

$$J=\int_0^\infty \left[x^TQx+u^TRu\right]dt \tag{٦-٧٤}$$

که در آن ماتريسهاي R,Q متقارن بوده و $\boxed{Q\geq 0,\ R>0}$ مي باشند.

معادله سيستم حلقه بسته و معيار عملکرد آن به صورت زير خواهد بود.

$$\dot{x}=(A-Bk)x$$
$$J=\int_0^\infty x^T(t)(Qx+k^TR\,k)x(t)\,dt \tag{٦-٧٥}$$

براي اينکه مسئله جواب داشته باشد ابتدا بايستي کنترل کننده بتواند سيستم را پايدار سازد. لذا حداقل مودهاي ناپايدار بايستي پايدار پذير بوده و يا در حالت جامعتر سيستم بايستي کنترل پذير باشد.

قضيهٔ ۶-۶) کنترل کننده LQR

براي اينکه ماتريس بهره حلقه پايدار کننده k، بتواند معيار طراحي J را به ازاي کليه شرايط اوليه $x(0)$ کمينه سازد، بايستي در معادلة زير صدق کند.

$$k=R^{-1}B^TP \tag{٦-٧٦}$$

که در آن P در معادله ماتريسي ريکاتي صدق مي کند.

$$A^TP+PA-PBR^{-1}B^TP+Q=0 \tag{٦-٧٧}$$

اثبات: از بحثهاي قبل نتيجه گرفتيم که براي هر k پايدار ساز:

$$J(k)=x^T(0)P\,x(0)$$

که در آن P بايستي معادله ماتريسي لياپانوف را ارضاء نمايد.

$$(A-Bk)^TP+P(A-Bk)=-(Q+k^TPk)$$

براي اثبات قضيه از حساب تغييرات استفاده مي کنيم. فرض کنيد کنترل کننده k^* کنترل کننده بهينه اي باشد که J را مينيمم مي سازد و ماتريس P متناظر با k^* را P^* مي ناميم. در اينحالت

$$(A-Bk^*)^TP^*+P^*(A-Bk^*)=-Q-k^{*T}Rk^*$$

حال فرض کنيد بهره کنترل کننده را قدري مغشوش[1] کنيم. اگر کنترل کننده بهينه باشد، اين اغتشاش در k بايستي فقط در جهت افزايش J تاثير گذارد. اين تغييرات به صورت جزئي

[1] Perturbed

درنظر گرفته مي شود و لذا نقطة مينيمم به صورت محلي تعيين خواهد شد. لذا نقطة مينيمم جامع را با شرايط ديگري تعيين مي كنيم. حال فرض كنيد

$$k = k^* + \in \delta k$$

كه در آن $\in$ بسيار كوچک بوده و δk تغييرات جزئي k را نمايش مي دهد. با اين تغيير ماتريس P^* نيز مغشوش مي شود. تغييرات اين ماتريس را با استفاده از بسط تيلور برحسب درجات مختلف $\in$ به صورت زير مي نويسيم.

$$P = P^* + \in \delta P_1 + \in^2 \delta P_2 + \ldots$$

حال معادله لياپانوف را مجددا بازنويسي مي كنيم.

$$\begin{aligned} &(A - Bk^* - \in B\delta k)^T (P^* + \in \delta P_1 + \in^2 \delta P_2) \\ &+ (P^* + \in \delta P_1 + \in^2 \delta P_2)(A - Bk^* - \in B\delta k) = \\ &-Q - (k^* + \in \delta k)^T R (k^* + \in \delta k) \end{aligned}$$

با دسته بندي درجات مختلف $\in$ خواهيم داشت:

$$\begin{aligned} &(A-Bk^*)^T P^* (A-Bk^*) + \\ &\in \left[-\delta k^T B^T P^* + (A-Bk^*)^T \delta P_1 + \delta P_1 (A-Bk^*)^T - p^* B\delta k \right] + O(\in^2) \\ &= -Q - k^{*T} R k^* + \in \left[-\delta k^T R k^* - k^{*T} R \delta k \right] + O(\in^2) \end{aligned}$$

با هم ارز قراردادن ضرايب درجات مختلف $\in$ خواهيم داشت:

$$\begin{aligned} &O(0) \rightarrow \text{Lyapunov eq.} \\ &O(\in) \rightarrow \delta k^T (B^T P^* - Rk^*) + (P^*B - k^{*T}R)\delta k \\ &\qquad + (A-Bk^*)^T \delta P_1 + \delta P_1 (A-Bk^*) = 0 \end{aligned} \qquad (٧٨-٦)$$

حال معادله شاخص عملكرد را بازنويسي مي كنيم.

$$\begin{aligned} &J(k^* + \in \delta k) = x^T(0) P\, x(0) \\ &= x^T(0) P^* x(0) + \in x^T(0) \delta P_1 x(0) + \in^2 x^T(0) \delta P_2 x(0) + \ldots \end{aligned}$$

حال بايستي δP_1 صفر باشد چراكه درصورتي كه k^* بهينه باشد بايستي شاخص عملكردي آن برابر $x^T(0) P^* x(0)$ گردد و لذا ساير ترمها بايستي بزرگتر از صفر باشند.

$$\in x^T(0) \delta P_1\, x(0) + \in^2 x^T(0) \delta P_2\, x(0) + \cdots \ge 0 \qquad \forall x(0)$$

حال اگر $\delta P_1 \ne 0$ باشد, يک $x(0)$ خاص مي توان يافت كه توسط آن

$$x^T(0)\ \delta P_1\ x(0) \ne 0$$

اگر $\in$ را به اندازه كافي كوچک فرض كنيم $O(\in^2)$ و بالاتر را مي توان در مقابل $O(\in)$ صرفنظر نمود. حال اگر اينگونه باشد و ترم $\in x^T(0) \delta P_1 x(0)$ بر ساير ترمها غالب باشد. بادرنظر گرفتن $\in$ منفي اين ترم منفي مي شود و شرط فوق برهم مي خورد لذا براي آنكه همواره شرط فوق برقرار شود $\delta P_1 = 0$

اگر $\delta P_1 = 0$ باشد دراينصورت

$$\delta k^T (B^T P^* - Rk^*) + (P^*B - k^{*T}R)\delta k = 0$$

يا

$$\delta k^T (B^T P^* - Rk^*) + \left[\delta k^T (B^T P^* - Rk^*) \right]^T = 0$$

دقت كنيد P, R هر دو متقارن مي باشند. براي اينكه اين شرط به ازاي $\forall \delta k$ برقرار باشد شرط لازم آن اينست كه

$$B^T P^* - Pk^* = 0 \rightarrow \boxed{k^* = R^{-1} B^T p^*} \qquad (٧٩-٦)$$

با جايگذاري اين معادله در معادله ماتريسي لياپانوف خواهيم داشت (مجدداً از $P = P^T$ استفاده مي شود)

$$A^T P^* - P^* B R^{-1} B^T P^* + P^* A - P^* B R^{-1} B^T P^* = -Q - P^* B R^{-1} R R^{-1} B^T P^*$$

يا

$$\boxed{A^T P^* + P^* A - P^* B R^{-1} B^T P^* + Q = 0} \qquad (٨٠-٦)$$

■

تاكنون دريافتيم كه براي حل مسئله LQR بايستي معادله ريكاتي فوق را براي P حل نمائيم. سپس k را محاسبه نموده و $A - Bk$ را براي پايداري داخلي امتحان كنيم. چون معادلة ريكاتي معادله اي است غيرخطي, درحالت عمومي داراي جوابهاي بيشمار است. لذا بايستي تنها پاسخهاي پايدار ساز $(P > 0)$ را انتخاب نموده و براي آنها با مقايسة J نقطة مينيمم جامع را تعيين كنيم. اين مراحل بسيار دشوار و وقت گير است ولي خوشبختانه نياز به انجام كلية اين مراحل در عمل نمي باشد.

ابتدا فرض مي كنيم $(A, Q^{1/2})$ آشكار پذير باشد. مي توان نشان داد كه دراينصورت يک پاسخ مثبت نيمه معين P به بهره كنترلي k پايدار ساز منتج خواهد شد. اين كنترل كننده حتماً J را به صورت محلي مينيمم خواهد نمود. خوشبختانه نشانداده شده است كه معادله ريكاتي فقط و فقط يک پاسخ $(P > 0)$ مي تواند داشته باشد و لذا اين مينمم محلي, مينيمم جامع براي مسئله LQR مي باشد [10].

جمع بندي روش:

- براي تدوين مسئله تنظيم يا تعقيب به فرم LQR معادلات را به فرم افزايشي Δx نمايش مي دهيم و شاخص عملكرد را برحسب متغيرهاي حالت افزايشي Δx و ورودي Δu تعيين مي كنيم.
- مي دانيم معادلة ريكاتي مربوط به اين مسئله, تنها يک پاسخ $p \ge 0$ دارد, معادله (٦-٨٠) را براي رسيدن به اين پاسخ حل مي كنيم.
- با استفاده از معادله (٦-٧٩) ماتريس بهرة كنترل k را محاسبه مي كنيم.
- با دانستن بهره كنترل k, الگوريتم كنترل فيدبک حالت را به علاوة پيش خور u_{ex} مطابق با مراحل ارائه شده قبل در فرم نهائي كنترل كننده اعمال مي كنيم.

حل مسئله LQR منجر به تعيين پاسخ معادلة ريكاتي گرديد. خوشبختانه هم به صورت دستي و هم به صورت عددي روشهاي متنوع و بسيار مناسبي براي حل معادله ريكاتي تدوين شده است. در نرم افزار Matlab اين معادله توسط دستورات ARE, LQR قابل حل است.

مثال (۶-۹)

كنترل كننده LQR را براي سيستم $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$ و ضرايب شاخص عملكردي $R = \rho > 0, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ حل نمائيد:

پاسخ:

۱- ابتدا نشان مي دهيم كه $(A, Q^{1/2})$ آشكار پذير است.

$$Q^{1/2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank } \mathbf{O} = \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 2$$

۲- معادله ريكاتي را حل مي كنيم.

$$\boxed{A^T P^* + P^* A - P^* B R^{-1} B^T P^* + Q = 0}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$- \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rho^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

يا

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ p_{11} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & p_{12} \\ 0 & p_{22} \end{bmatrix} \frac{1}{\rho} \begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{\rho} {p_{12}}^2 + 1 = 0 \rightarrow p_{12} = \pm \rho^{1/2} \\ 2p_{12} - \dfrac{1}{\rho} {p_{22}}^2 = 0 \rightarrow p_{22} = \pm [2\rho p_{12}]^{1/2} \Rightarrow p_{22} \in \mathbb{R} \ \text{ if } \ p_{12} \ge 0 \\ p_{11} - \dfrac{1}{\rho} p_{12} p_{22} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow p_{12} = \sqrt{\rho} \rightarrow p_{22} = \sqrt{2} p^{3/4} \rightarrow p_{11} = \sqrt{2} p^{1/4}$$

$$\Rightarrow \mathrm{P} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}\rho^{1/4} & \rho^{1/2} \\ \rho^{1/2} & \sqrt{2}\rho^{3/4} \end{bmatrix}$$

۳- آيا $P \ge 0$ است؟

$$p_{11} > 0, \det P = \rho > 0 \Rightarrow P > 0$$

٤- حال معادله k را حل مي كنيم.

$$k = R^{-1} B^T P$$

$$= \frac{1}{\rho} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2}\rho^{1/4} & \rho^{1/2} \\ \rho^{1/2} & \sqrt{2}\rho^{3/4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p^{-1/2} & \sqrt{2} p^{-1/4} \end{bmatrix}$$

حال پايداري سيستم حلقه بسته را مي توان تعيين كرد.

$$A - Bk = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\rho^{-1/2} & -\sqrt{2}\rho^{-1/4} \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow s^2 + \sqrt{2}\rho^{-1/4} s + \rho^{-1/2} = 0$$

به ازاي $\rho > 0$ معادله مشخصه همواره پايدار است.

این یک معادله استاندارد مرتبة دو مي باشد $s^2+2\zeta\omega_0 s+\omega_0^2$ که در آن

$$\begin{cases}\xi=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ \omega_0=\rho^{-1/4}\end{cases}$$

لذا ضریب میرائي پاسخ $\sqrt{2}/2$ است که یک مصالحة بسیار مناسب بین سرعت و فراجهش مي باشد. از طرف دیگر ω_0 با ρ ارتباط معکوس دارد. لذا هر چه ρ را افزایش دهیم و شرط سخت گیرانه تري بر روي تلاش کنترلي قرار دهیم، پهناي باند سیستم حلقه بسته کوچکتر شدة یا سرعت پاسخ کاهش مي یابد.

مثال (۶-۱۰) موتور DC و ضد هوائی

براي سیستم موتور DC و ضد هوائي با فرض اغتشاش صفر $T_L=0$ مسئله تنظیم سیستم به پاسخ $\theta=\theta_d$ و شرایط ماندگار $\omega=i=v=0$ را به صورت کنترل بهینة LQR حل نماید. شاخص عملکرد را به صورت زیر فرض کنید:

$$J=\int_0^\infty[Q_{11}(\theta-\theta_d)^2+Q_{22}\omega^2+v^2]dt$$

الف) فرض کنید $Q_{22}=0$. بدین ترتیب Q_{11} را به گونه اي بیابید که با شرایط اولیه صفر $x=0$ و $\theta_d=1\,rad$ تلاش کنترل u به حد اشباع خود که 3 Volts درنظر گرفته مي شود نرسد.

ب) تاثیر $Q_{22}\neq 0$ را برروي پاسخهاي بدست آمده توسط مشابه سازي بررسي نمائید.

پاسخ:

ماتریسهاي A,B قبلاً داده شده اند با توجه به شاخص عملکردي فوق داریم:

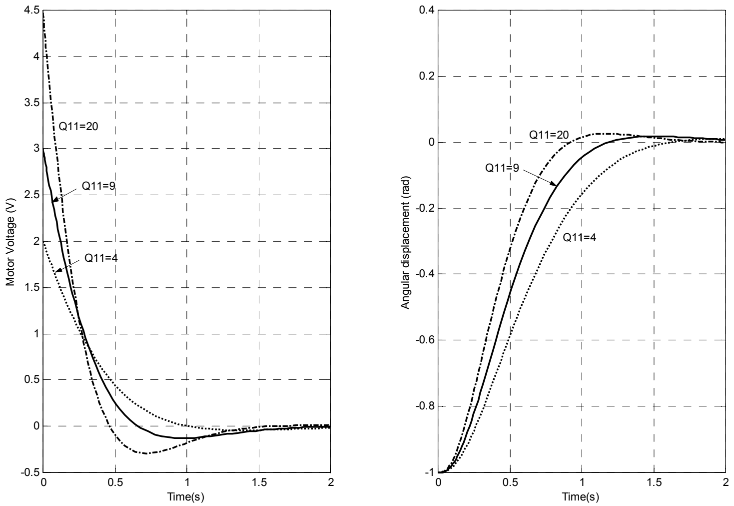
$$Q=\begin{bmatrix}Q_{11}&0&0\\0&Q_{22}&0\\0&0&0\end{bmatrix},\quad R=1$$

این مسئله را با دستور LQR نرم افزار Matlab به ازاي $Q_{22}=0$ و Q_{11}هاي مختلف حل نموده و پاسخ را مشابه سازي مي کنیم. دقت کنید که:

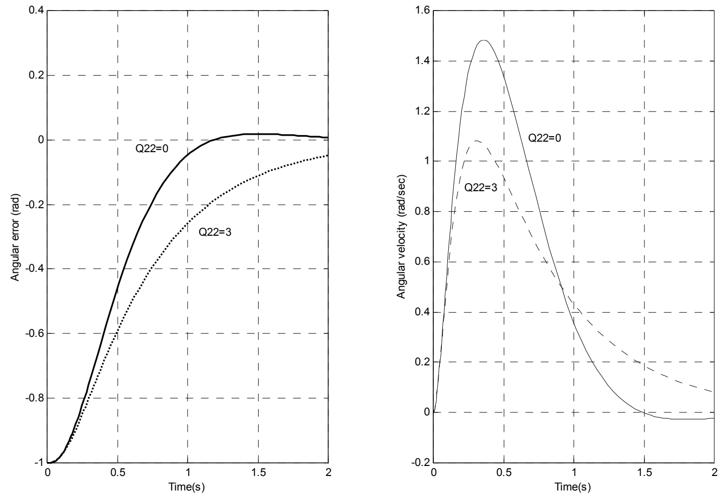
$$v=v^*-k^T(x-x^*)=k_1(\theta_d-\theta)-k_2\omega-k_3 i$$

مسئله را براي $Q_{11}=4,9,20$ حل نموده که پاسخ ها در شکل (٦-٥) رسم شده اند.

با افزایش Q_{11} اهمیت ترم R کمتر شده و پاسخهاي مربوط به ولتاژ از حد اشباع ۳ ولت افزایش مي یابد. از طرف دیگر با افزایش Q_{11} سرعت پاسخ نیز افزایش یافته ولي فراجهش نیز متناسباً افزایش مي یابد با توجه به منحني هاي بدست آمده به ازاي $Q_{11}=9$ ضریب بهرة $k^T=[3\quad 0.8796\quad 0.1529]$ بدست مي آید که نسبتاً مناسب است.



شکل (۶-۵) پاسخ سیستم حلقه بستهٔ سیستم موتور DC با کنترلر LQR



شکل (۶-۶)تاثیر Q_{22} در پاسخ حلقه بستهٔ سیستم موتور DC

حال با ثابت نگه داشتن $Q_{11}=9$ و افزایش Q_{22} از صفر به سه میزان خطاي ω کاهش یافته ولي به قیمت کاهش سرعت پاسخ. در واقع با اضافه نمودن این ضریب, ضریب بهرهٔ D در کنترل PD را افزایش مي دهیم که این به معناي افزایش ضریب استهلاک و کاهش سرعت پاسخ مي باشد. (دقت کنید Q_{22} مربوط به ω و Q_{11} مربوط به θ مي باشد).

۶-۵-۴) انتخاب مناسب ماتریسهای وزنی

همانگونه که در مثال قبل مشاهده شد افزایش یک ترم در Q تاثیر مستقیمي در پاسخ و تلاش کنترلي تولید شده توسط کنترل فیدبك حالت بهینه دارد. از طرفي پاسخ بهینه تنها شاخص عملکردي $J(Q,R)$ را که تابعي از R,Q مي باشد، بهینه مي کند. لذا با تغییر R,Q مي توان انتظار داشت پاسخ تغییر به سزائي داشته باشد. بدین ترتیب مسئله LQR حل بهینه را به ازاي پارامترهاي طراحي تولید میکند، و بهینه کردن جامع عملکرد که به صورت فیزیکي بهترین حالت در حل مسئله باشد را نبایستي انتظار داشت. لذا لازمست در انتخاب اولیه R,Q و سپس تنظیم آن توسط پاسخ مشابه سازي نکات زیر را درنظر گرفت.

اولین انتخاب R,Q که وزن مساوي بین کلیه متغیرهاي حالت برقرار مي کند را با نرمال کردن متغیرهاي حالت به شکل زیر مي توان پیدا نمود.

$$J=\int_0^\infty\left\{\left[\left(\frac{x_1}{x_{1_{\max}}}\right)^2+\left(\frac{x_2}{x_{2_{\max}}}\right)^2+\cdots\right]+\left[\left(\frac{u_1}{u_{1_{\max}}}\right)^2+\left(\frac{u_2}{u_{2_{\max}}}\right)^2+\cdots\right]\right\}dt \qquad (۸۱\text{-}۶)$$

که در آن

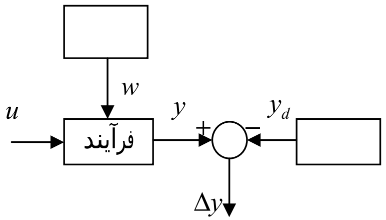
$$Q=\begin{bmatrix}\left(\frac{1}{x_{1_{\max}}}\right)^2 & 0 & 0\\ 0 & \left(\frac{1}{x_{2_{\max}}}\right)^2 & 0\\ 0 & 0 & \ddots\end{bmatrix},\quad R=\begin{bmatrix}\left(\frac{1}{u_{1_{\max}}}\right)^2 & 0 & 0\\ 0 & \left(\frac{1}{u_{2_{\max}}}\right)^2 & 0\\ 0 & 0 & \ddots\end{bmatrix} \qquad (۸۲\text{-}۶)$$

پس از اعمال این ضرایب در حل LQR و مشابه سازي سیستم حلقه بسته، به نسبت میزان کاهشي که در هر یک از متغیرهاي حالت x_i یا متغیر ورودي u_j مي خواهیم اعمال نمائیم، متناظراً ضریب Q_{ii} و یا R_{jj} آنرا افزایش مي دهیم.

۶-۶) رفع اغتشاش و ورودی مرجع ثابت

در بخش قبل حل مسئلهٔ عمومي تنظیم ارائه شد. در این بخش مسئله عمومي تنظیم را با کمي تغییر به گونه اي تعبیر مي شود، که رفع اغتشاش w و تعقیب ورودي مرجع ثابت و متغیر y_d را در خود جاي دهد. فرض کنید اغتشاش w مطابق شکل (۶-۷) و دینامیک زیر به سیستم اعمال شده و ورودي مرجع y_d باشد.

$$\begin{aligned}\dot{x}&=Ax+Bu+\Gamma w\\ \Delta y&=Cx-y_d\end{aligned} \qquad (۸۳\text{-}۶)$$



شکل (۶-۷) نمایش اعمال اغتشاش و ورودی مرجع به یک سیستم خطی

فرض کنيد ابتدا حالت ساده اي را درنظر بگيريم که ورودي مرجع و اغتشاش ثابتي به سيستم اعمال شود: $y_d = y_d^*, w = w^*$. در اينصورت معادلة $\dot{x} = 0$ را براي نقاط تعادل حل مي کنيم. لذا

$$\begin{aligned} Ax^* + Bu^* &= -\Gamma w^* \\ Cx^* &= y_d^* \end{aligned}$$ (٦-٨٤)

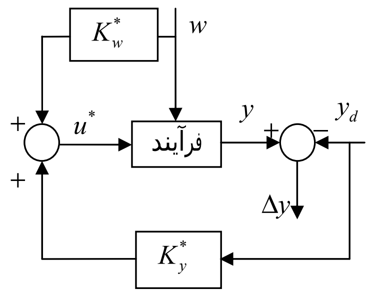
يا به عبارت ديگر:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^* \\ u^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\Gamma w^* \\ y_d^* \end{bmatrix}$$ (٦-٨٥)

بدين ترتيب اگر معادلة فوق جوابي داشته باشد و اين پاسخ يکتا باشد، مستلزم آنست که u^*, x^* ترکيب خطي از y_d^*, w^* باشند.

$$u^* = k_w^* w^* + k_y^* y_d^*$$ (۶-۸۶)

که در آن k_y^*, k_w^* ماتريسهاي بهره ثابتي مي باشند. لذا سيستم با اغتشاش w و ورودي مرجع y_d را به فرم پيش خور و مطابق شکل (٦-٨) مي توان کنترل نمود. اين کنترل کننده با محاسبة خارج خط[1] بهره هاي کنترلي k_w^*, k_y^* از معادلة (٦-٨٤) قادر خواهد بود به صورت کامل اغتشاش ثابت را حذف و ورودي مرجع ثابت را تعقيب نمايد.



شکل (۶-۸) سیستم کنترلی پیش خور برای حذف اغتشاش و تعقیب ورودی مرجع ثابت

روش ديگر نمايش اين معادله به صورت تابع تبديل مي باشد.

$$y(s) = P(s)u(s) + P_w(s)w(s)$$ (٦-٨٧)

[1] Offline

لذا اگر حالت ماندگاري وجود داشته باشد بايستي در معادله زير صدق کند.

$$y^* = P(0)u^* + P_w(0)w^*$$

و لذا

$$u^* = P^{-1}(0)[y_d^* - P_w(0)w^*]$$

و اين درحالتي قابل اجراست اگر $P^{-1}(0)$ وجود داشته باشد. اين شرط معادل شرط غير تکين بودن ماتريس

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}$$

مي باشد. و اين دقيقاً شرط عدم وجود صفر انتقال در نقطة $s = 0$ است.

توسط اين مکانيزم پيش خور علاوه بر وروديهاي مرجع ثابت مي توان هر ورودي مرجعي که به فرم عمومي $y_d^* e^{s^* t}$ (سينوسي يا کسينوسي با فرکانس s^*) را تعقيب نمايد. تنها تغييري که در محاسبات فوق صورت مي پذيرد جايگزين کردن $P_w(0), P(0)$ با مقدار $P_w(s^*), P(s^*)$ و اعمال ورودي $u(t) = u^* e^{s^* t}$ به جاي حالت قبل مي باشد. لذا توانمندي تعقيب وروديهاي سينوسي يا حذف اغتشاش سينوسي توسط اين روش مهيا است.

در ابتداي اين فصل مسئلة تعقيب ورودي مرجع غير صفر را بررسي کرديم. در اين بخش تأثير اعمال اغتشاش ثابت همزمان با برروي سيستم و تعميم عمليات را مطابق معادلات (٦-٨٤) و (٦-٨٥) بيان نموديم. بدين ترتيب تغيير اصلي در روش قبل اعمال نمي شود و با تعيين مقدار u^* يا u_{ex} و اعمال آن به صورت پيش خور طراحي تکميل مي شود. کنترل کننده نهائي علاوه بر ترم پيش خور بايستي به فيدبک حالت طراحي شده توسط جايابي قطب يا LQR، مجهز باشد.

مثال (۶-۱۱) موتور DC و ضد هوائی

براي اين سيستم با فرض گشتاور ورودي پلّه با دامنة $T_L = T_{Ls}u(t)$، موارد زير را محاسبه و اجرا نمايد.

الف) مقدار ولتاژ ثابت ورودي v_s را برحسب تابعي از T_{Ls} محاسبه نمائيد تا بتوان به ورودي مرجع $\theta = \theta_d$ رسيد.

ب) با استفاده از نتايج مثال قبل کنترل کننده اي را که معيار عملکرد زير را مينيمم نمايد محاسبه نمائيد.

$$J = \int_0^\infty [9(\theta - \theta_d)^2 + (v - v_s)^2] dt$$

پاسخ: ابتدا مقادير ماندگار را به ازاي $T_L = T_{Ls}u(t)$ محاسبه مي كنيم.

$$\begin{cases} \omega = 0 \\ 4.438i - 7.396T_L = 0 \\ -24i + 20v = 0 \end{cases}$$

با فرض $T_L = T_{Ls}$ در مقدار ماندگار خواهيم داشت:

$$i = i_s = \frac{7.396}{4.438}T_{Ls} = 1.667T_{Ls}$$

$$v = v_s = \frac{24}{20}i_s = 1.2i_s = 2.0T_{Ls}$$

لذا مقادير ماندگار ورودي و حالت عبارتند از:

$$\theta = \theta_d,\quad \omega = 0,\quad v_s = 2.0T_{Ls},\quad i = 1.667T_{Ls}$$

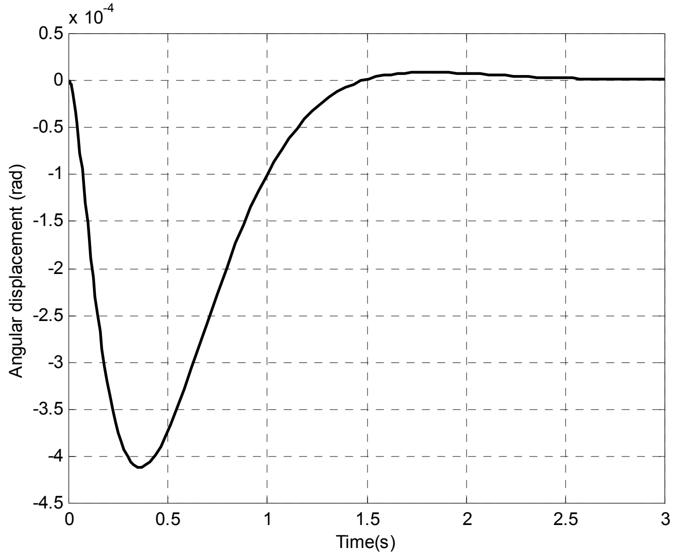
با استفاده از مثال قبل كنترل كننده LQR طراحي شده عبارتست از:

$$v - v_s = -3.0(\theta - \theta_d) - 0.879\omega - 0.1529(i - i_s)$$

كنترل كننده كامل علاوه بر ترمهاي فوق، ترم پيشخور حذف اغتشاش را نيز بايستي در بر گيرد.

$$\begin{aligned} v &= v_s - 3.0(\theta - \theta_d) - 0.879\omega - 0.153(i - 1.667T_{Ls}) \\ &= 2.0T_{Ls} - 3.0(\theta - \theta_d) - 0.879\omega - 0.153i + 0.255T_{Ls} \\ &= \underbrace{2.255T_{Ls}}_{\text{ترم پیش خور حذف اغتشاش}} - \underbrace{3.0(\theta - \theta_d)}_{\text{ورودي مرجع غير صفر}} - 0.879\omega - 0.1529i \end{aligned}$$

شكل (٦-۹) پاسخ سيستم حلقه بستة خطاي موقعيت زاويه اي $\theta(t) - \theta_d$ با ترم پيش خور حذف اغتشاش را به ورودي اغتشاش پلّة واحد $T_l = 0.01u_s(t)$ و شرايط اولية $\theta = \theta_d$ و $\omega = i = 0$ نشان مي دهد، كه در آن حذف كامل و سريع اغتشاش ثابت را شاهد مي باشيم.



شكل (۶-۹) پاسخ سيستم حلقه بستهٔ سيستم با ترم پيش خور حذف اغتشاش به ورودی اغتشاش پلّهٔ واحد

مطالب ارائه شده در اين بخش تا كنون با فرض ثابت بودن (يا نمائي بودن) اغتشاش و ورودي مرجع مي باشد. در حالت كلي فرض مي كنيم اين وروديها از يك بخش ثابت و يك بخش متغير تشكيل شده باشند:

$$w(t) = w^* + \Delta w(t)$$
$$y_d(t) = y_d^* + \Delta y_d(t)$$
(۸۸-٦)

با استفاده از معادلة (٦-۸۳) معادلة حالت متغيرهاي افزايشي به صورت زير بدست مي آيند.

$$\Delta\dot{x} = \dot{x} - \dot{x}^* = \cdots = A\Delta x + B\Delta u + \Gamma\Delta w$$
(۸۹-٦)

همچنين:

$$\Delta y = C\Delta x - \Delta y_d$$
(۹۰-٦)

چرا كه $Cx^* - y_d^* = 0$ است. حال با اضافه نمودن متغيرهاي حالت كمكي، $\Delta w(t),\ \Delta y_d(t)$ را به صورت پاسخ بدون ورودي سيستم پايدار زير مدلسازي مي نمائيم.

$$\dot{z}_w = A_w z_w$$
$$\Delta w = C_w z_w$$
(۹۱-٦)

و

$$\begin{aligned}\dot{z}_y &= A_y z_y \\ \Delta y_d &= C_y z_y\end{aligned} \qquad (۹۲-٦)$$

متغیرهاي z_w, z_y را متغیرهاي حالت ورودي مرجع و اغتشاش مي نامیم. با ترکیب این معادلات حالت با سیستم اصلي خواهیم داشت:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\Delta x \\ z_w \\ z_y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A & \Gamma C_w & 0 \\ 0 & A_w & 0 \\ 0 & 0 & A_y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta x \\ z_w \\ z_y\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}B \\ 0 \\ 0\end{bmatrix}\Delta u$$

$$\Delta y = \begin{bmatrix}C & 0 & -C_y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta x \\ z_w \\ z_y\end{bmatrix} \qquad (۹۳-٦)$$

این سیستم کنترل پذیر نیست، چرا که ورودي سیستم Δu در متغیرهاي حالت کمکي سیستم تأثیري ندارند. امّا با انتخاب مدلهاي پایدار براي A_w, A_y ، مودهاي کنترل ناپذیر پایدار بوده، پس در این حالت سیستم پایدار پذیر است. فیدبك حالت سیستم را با بهرة فیدبك زیر در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}\Delta u &= -\begin{bmatrix}k_x & k_w & k_z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta x \\ z_w \\ z_y\end{bmatrix} \\ &= -k_x \Delta x - k_w z_w - k_y z_y\end{aligned} \qquad (۹٤-٦)$$

بدین ترتیب معادلات حالت حلقه بستة سیستم عبارتست از:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\Delta x \\ z_w \\ z_y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A - Bk_x & \Gamma C_w - Bk_w & -Bk_y \\ 0 & A_w & 0 \\ 0 & 0 & A_y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta x \\ z_w \\ z_y\end{bmatrix} \qquad (۹۵-٦)$$

با توجه به بلوکي – بالا مثلثي بودن این ماتریس مقادیر ویژة ماتریس از ترکیب مقادیر ویژة ماتریسهاي $A - Bk_x, A_w, A_y$ تشکیل مي شود. و بدین ترتیب همانگونه که انتظار مي رفت مودهاي کنترل ناپذیر تغییر نمي یابند.

در صورتیکه:

- زوج (A, B) پایدار پذیر باشد و
- سیستمهاي A_w, A_y پایدار باشند.

سیستم (٦-۹۵) پایدار پذیر بوده و میتوان تنها با انتخاب مناسب k_x قطبهاي حلقه بستة سیستم اصلي را جابابي نمود. همچنین از روش کنترل بهینة LQ به منظور طراحي ماتریس بهرة $\begin{bmatrix}k_x & k_w & k_z\end{bmatrix}$ بهره جست.

جمع بندي روش:

- مقادیر ماندگار ورودي لازم براي رسیدن به ورودي مرجع ثابت و اغتشاش ثابت را بدست آورید. (در حالت سیگنالهاي نمائي هم، همانند قبل این محاسبات را تعمیم دهید.)
- نمایش فضاي حالت سیستم تعمیم یافته را با متغیرهاي حالت کمکي $z_{w,} z_y$ بدست آورید.
- با حل مسئلة LQ بهرة فیدبک بهینه را بدست آورید.

مثال (۶–۱۲) موتور DC و ضد هوائی

سیستم سرو DC مثال قبل را در نظر بگیرید که به آن گشتاور اغتشاشي زیر اعمال مي شود.

$$T_L = 0.01 e^{-t} u(t)$$

که در آن $u(t)$ پلّة واحد و این گشتاور مدل وزش ناگهاني باد به مجموعه مي باشد. همانند مثال (٦-١١) با فرض این اغتشاش، مسئله تنظیم سیستم به پاسخ $\theta = \theta_d$ و شرایط ماندگار $\omega = i = v = 0$ را به صورت کنترل بهینة LQR حل نماید. شاخص عملکرد را به صورت زیر فرض کنید:

$$J = \int_0^\infty [9(\theta - \theta_d)^2 + (v - v_s)^2] dt$$

پاسخ:

معادلات حالت سیستم را به علاوة معادله کمکي زیر براي مدلسازي اغتشاش در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned}\dot{z} &= -z \\ T_L &= z\end{aligned}$$

با اضافه نمودن این مجموعة معادلات به معادلات فضاي حالت سیستم خواهیم داشت:

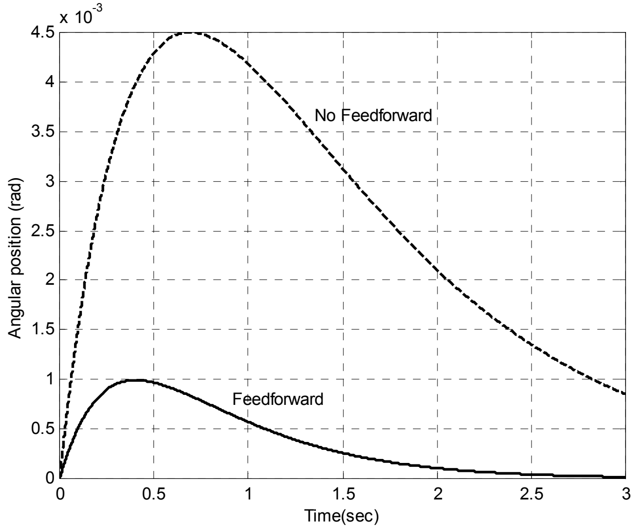
$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}e \\ \omega \\ i \\ z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4.438 & -7.396 \\ 0 & -12 & -24 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e \\ \omega \\ i \\ z\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 \\ 0 \\ 20 \\ 0\end{bmatrix} v$$

که همانند مثال (٦-١١) $e = \theta - \theta_d$ در نظر گرفته شده است. با توجه به شاخص عملکرد داریم:

$$Q = \mathrm{diag}\begin{bmatrix}9 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}; \quad R = 1$$

با استفاده از دستور lqr نرم افزار Matlab بهرة كنترل بهينة سيستم به صورت زير بدست مي آيد:

$$k = \begin{bmatrix}3 & 0.8796 & 0.1529 & -1.8190\end{bmatrix}$$



شكل(۶-۱۰) پاسخ حلقه بستهٔ سيستم سرو DC به ورودي اغتشاش با در نظر گرفتن پيش خور رفع اغتشاش و بدون آن

با مشابه سازي سيستم حلقه بسته پاسخ سيستم به اين گشتاور اغتشاشي در صورت اعمال كنترل پيش خور و بدون آنرا در شكل (٦-١٠) مشاهده مي كنيد. شرايط اولية انتخاب شده براي انجام اين مشابه سازي برابر است با:

$$e(0) = \omega(0) = i(0) = 0; \quad z(0) = 0.01$$

رفتار سيستم حلقه بسته با اعمال پيش خور جبران سازي اغتشاش، به مراتب بهتر از حالت بدون پيش خور بوده و همچنين سه ضريب بهره فيدبك بهينه حالت اين مثال دقيقاً مشابه حالت بدون پيش خور در مثال (٦-١١) مي باشد. اين امر اتفاقي نبوده و با توجه به بلوكي مثلثي بودن ماتريس سيستم حلقه بستة سيستم قابل اثبات است، كه در مسائل اين بخش به آن خواهيم پرداخت.

مثال (۶-۱۳) قطار:

معادلات سيستم قطار را كه در مثال (٢-٤) فصل دوّم معرفي شده است را در نظر بگيريد. اين سيستم را در يك مسير افقي مي خواهيم به سرعت $25\ \mathrm{m/s}$ برسانيم. سرعت مطلوب لكوموتيو را برابر $v_d(t) = 25(1-e^{-t/40})$ با حداكثر خطاي $\pm 2\ \mathrm{m/s}$، حداكثر نيروي رانش مجاز را برابر $120\ \mathrm{kN}$ و حداكثر نيروهاي كوپلينگ فنر و دمپر آنرا به ترتيب $75000\ \mathrm{N}$ و $50000\ \mathrm{N}$ در نظر بگيريد. مسئلة كنترل بهينه را براي يك قطار با چهار واگن طرح و حل نمائيد.

پاسخ:

ابتدا بايستي نقطة تعادل سيستم را در غياب نيروي اصطكاك و بر روي مسير مسطح بدست آوريم. با توجه به فيزيك مسئله مشخص است كه در حالت تعادل كلية سرعتها برابر $25\ \mathrm{m/s}$ و هيچ نيروئي به سيستم اعمال نمي شود. حالت ماندگار متغيرهاي $x_2, x_3, \cdots, x_N,$ به گونه ايست كه در حالت تعادل هيچ نيرويي به كوپلينگها اعمال نمي شود. همچنين متغير حالت x_1 كه جابجائي مطلق لكوموتيو را مشخص مي سازد در اين مسئله استفاده نمي شود، چرا كه در تعيين سرعتها و نيرو ها تأثير گذار نيست. لذا با استفاده از متغير هاي افزايشي زير

$$\Delta x_i = x_i - x_0, \quad i = 2,3,4,5$$
$$\Delta v_i = v_i - 25, \quad i = 1,2,3,4,5$$

معادلات حالت زير را با استفاده از معادلة (٢-٣٨) فصل دوم براي سيستم مي توان بدست آورد:

$$\begin{cases}\Delta\dot{x}_i = \Delta v_{i-1} - \Delta v_i, & i = 2,3,4,5\\ \Delta\dot{v}_1 = -12.5\Delta x_2 - 0.75\Delta v_1 + 0.75\Delta v_2 + 0.005F_1 & \\ \Delta\dot{v}_i = 62.5\Delta x_i - 62.5\Delta x_{i+1} + 3.75\Delta v_{i-1} - 7.5\Delta v_i + 3.75\Delta v_{i+1} & i = 2,3,4\\ \Delta\dot{v}_5 = 62.5\Delta x_5 + 3.75\Delta v_4 - 3.75\Delta v_5 & \end{cases}$$

در اينجا F_1 نيروي رانش لكوموتيو است. معادله خطاي سرعت لكوموتيو به صورت زير مي باشد.

$$\begin{aligned} v_1 - v_d &= 25 + \Delta v_1 - (25 - 25e^{-t/40}) \\ &= \Delta v_1 + z \end{aligned}$$

كه در آن $z = 25e^{-t/40}$ در معادلة كمكي زير صدق مي كند:

$$\dot{z} = -\frac{1}{40}z, \quad z(0) = 25.$$

براي انتخاب شاخص عملكرد روابط زير را يادآوري مي كنيم:

$$\text{Coupler spring force} = K(x_i - x_{i0}) = K\Delta x_i$$
$$\text{Damper force} = D(v_{i-1} - v_i) = D(\Delta v_{i-1} - \Delta v_i)$$

با در نظر گرفتن $K = 2.5\times 10^6$ N/m و $D = 1.5\times 10^5$ N/m/s، انتخاب اوّل ماتريسهاي وزني را با در نظر گرفتن فرم نرماليزة متغير هاي حالت به صورت زير مشخص مي كنيم.

$$J = \int_0^\infty \left\{ \sum_{i=1}^{5}\left(\frac{K\Delta x_i}{75000}\right)^2 + \sum_{i=1}^{5}\left(\frac{D(\Delta v_{i-1}-\Delta v_i)}{50000}\right)^2 + \left(\frac{\Delta v_1 + z}{2}\right)^2 + \left(\frac{F_1}{120}\right)^2 \right\} dt$$
$$= \int_0^\infty \left\{ \sum_{i=1}^{5}(3.34\Delta x_i)^2 + \sum_{i=1}^{5}(3(\Delta v_{i-1}-\Delta v_i))^2 + \left(0.5(\Delta v_1 + z)\right)^2 + \left(\frac{F_1}{120}\right)^2 \right\} dt$$

با در نظر گرفتن متغير نهائي حالت و ماتريس وزني Q به فرم زير:

$$x^T = [\Delta x_2 \quad \Delta x_3 \quad \Delta x_4 \quad \Delta x_5 \quad \Delta v_1 \quad \Delta v_2 \quad \Delta v_3 \quad \Delta v_4 \quad \Delta v_5 \quad z]; \quad x^T Q x$$

خواهيم داشت:

$$Q = \begin{bmatrix} 3.34^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3.34^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3.34^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3.34^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3^2+0.5^2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2\times 3^2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2\times 3^2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2\times 3^2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5^2 \end{bmatrix}$$

و ماتريس وزني ورودي عبارتست از

$$R = \left(\frac{1}{120}\right)^2$$

با استفاده از دستور lqr نرم افزار Matlab بهرة بهينة فيدبك حالت به صورت زير تعيين مي شود:

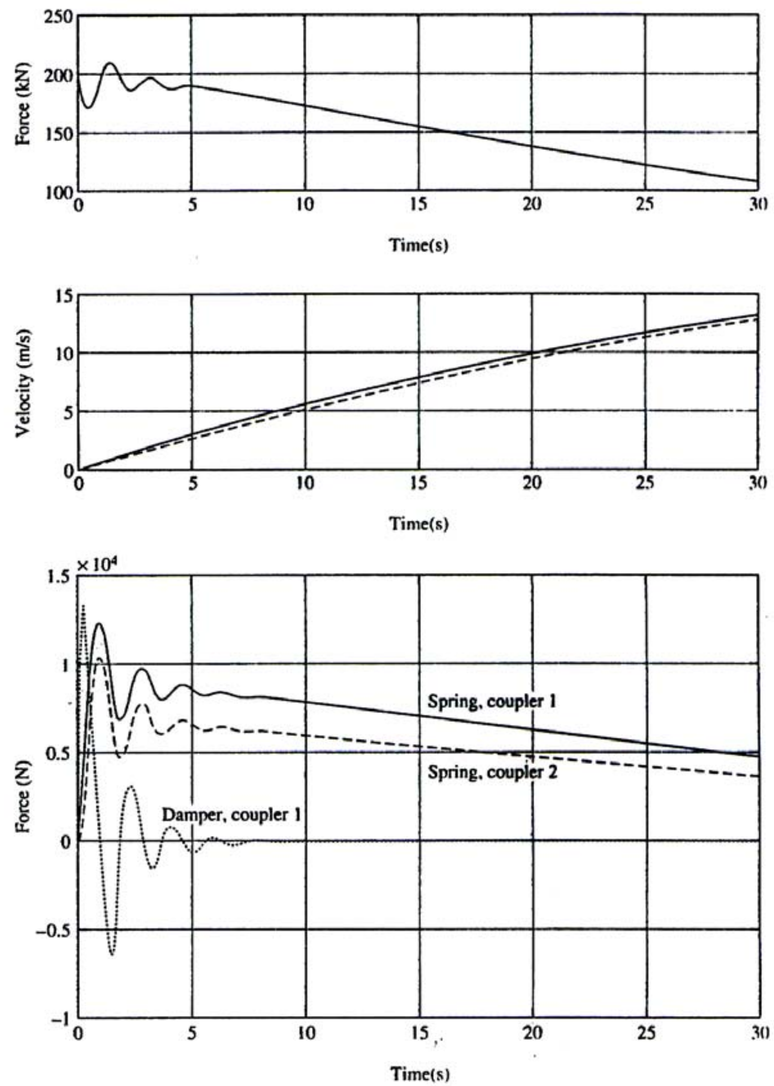
$$k = [54.53 \quad 17.28 \quad -1.303 \quad -4.361 \quad 191.7 \quad -40.8 \quad -34.21 \quad -29.70 \quad -27.34 \quad 52.09]$$

شكل (۶-۱۱) پاسخ سيستم حلقه بسته را با شرايط اولية صفر نشان مي دهد. خطاي سرعت لكوموتيو به خوبي زير سطح مجاز 2 m/s باقي مانده و نيروهاي كوپلينگ نيز كاملاً زير سطح مجاز مي باشند. امّا نيروي رانش مورد نياز بيش از ميزان مجاز طراحي است. با انجام چند مرحلي محاسبة بازگشتي بهرة فيدبك حالت با افزودن R، براحتي مي توان گزينة بهينة طراحي را كه كلية محدوديتها را ارضاء نمايد تعيين كرد. با انتخاب $R = 35/120^2$ خواهيم داشت:

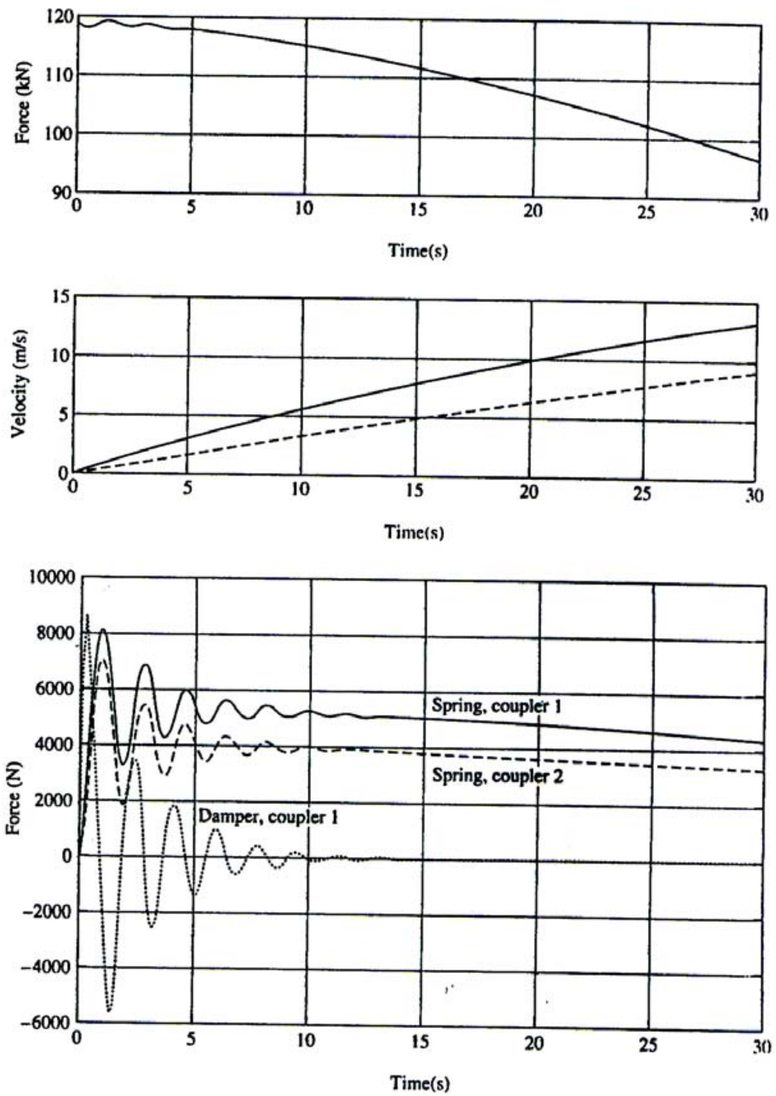
$$k = [0.4559 \quad 0.3331 \quad 0.2170 \quad 0.1069 \quad 11.54 \quad -0.2622 \quad -0.3371 \quad -0.3865 \quad -0.4110 \quad 5.373]$$

شكل (٦-١٢) پاسخ سيستم حلقه بسته را با اين بهرة فيدبك نشان مي دهد. نيروهاي كوپلينگ و نيروي رانش در اين حالت نسبت به حالت قبل كاهش يافته و كاملاً در محدودة مجاز قرار دارند. اما خطاي سرعت لكوموتيو بيش از 2 m/s شده است. كاهش خطاي سرعت با محدوديتهاي نيروي رانشي و نيروهاي كوپلينگ، به نظر ميسر نمي آيد. لذا يا بايستي به خطاي بيشتر رضايت داد و يا مسير آهسته تري را تعقيب تمود، به عنوان مثال:

$$v_d(t) = 25(1 - e^{-t/\tau}); \quad \tau > 40 \ \text{sec}$$



شکل(۶-۱۱) پاسخ حلقه بستهٔ سیستم قطار و تعقیب ورودی مرجع متغیر با زمان با در نظر گرفتن پیش خور (اولین بهرهٔ فیدبک حالت)



شکل(۶-۱۲) پاسخ حلقه بستهٔ سیستم قطار و تعقیب ورودی مرجع متغیر با زمان با در نظر گرفتن پیش خور (بهرهٔ فیدبک حالت نهائی)

۶-۷) فیدبک انتگرال حالت

همانگونه که قبلاً بیان نمودیم فیدبك حالت به علت اینکه از ترکیب خطي حالات در فیدبک استفاده مي کند, معمولا فاقد ترم انتگرال گیر است و لذا مقادیر ماندگار خطا یا تاثیر اغتشاش برروي خطاي ماندگار را نمي تواند به سمت صفر میل دهد. از طرف دیگر با توجه با ماهیت اغتشاش ورودي در سیستم، تخمین میزان آن براي استفاده در روش پیش خور به سهولت انجام نمي گیرد. براي اضافه نمودن ترم انتگرال حالت نیز مانند بخش قبل مي توان با تغییر معادلات حالت, متغیرهاي حالت جدیدي را تعریف کنیم، که انتگرال خطاهاي مورد نظر را در برگرفته و با اعمال کنترل فیدبک حالت به صورت اتوماتیک از خواص کنترل کننده انتگرال گیر نیز استفاده نمود. خوشبختانه به علت اینکه محاسبات عددي توسط کامپیوتر انجام مي شود این افزایش متغیرهاي حالت, تلاش زیادي را در حل مسئلة طراحي در روشهاي جایابي قطب و یا LQR اضافه نمي کند.
معادله حالت اولیه سیستم را درنظر بگیرید.

$$\dot{x} = Ax + Bu + \Gamma w \qquad (۶\text{-}۹۶)$$

به این معادلات به تعداد مورد نیاز (m)، انتگرال گیر نیز اضافه مي کنیم.

$$\dot{z} = Cx - y_d \qquad (۶\text{-}۹۷)$$

لذا معادلات حالت تعمیم یافته عبارتند از:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} \Gamma \\ 0 \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} y_d \qquad (۶\text{-}۹۸)$$

قضیهٔ ۶-۷ شرایط وجود جواب فیدبک انتگرال حالت

فرض کنید (A,B) کنترل پذیر باشد, در اینصورت زوج

$$\left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}\right)$$

کنترل پذیر باقي مي ماند, اگر و تنها اگر, سیستم اصلي (A,B,C) داراي صفر انتقال در مبداء $s=0$ نباشد.

اثبات:

ماتریس سیستم تعمیم یافته در این حالت بلوکي – مثلثي است، لذا مقادیر ویژة ماتریس آن برابر مقادیر ویژة ماتریس A یا $s_1, s_2, \ldots, s_n$ به علاوة m قطب در $s=0$ است. با فرض اینکه بردارهاي $w_1^T, w_2^T, \ldots, w_n^T$ بردارهاي ویژة سمت چپ ماتریس A باشد، آنگاه:

$$\begin{bmatrix} w_i^T & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_i^T A & 0 \end{bmatrix} = s_i \begin{bmatrix} w_i^T & 0 \end{bmatrix} \qquad (۶\text{-}۹۹)$$

که $\begin{bmatrix} w_i^T & 0 \end{bmatrix}$ بردار ویژة ماتریس $\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix}$ متناظر با مود s_i مي باشد.
براي تحلیل کنترل پذیربودن این مود از تست بردار ویژه بهره مي گیریم:

$$\begin{bmatrix} w_i^T & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} = w_i^T B \neq 0 \qquad (۶\text{-}۱۰۰)$$

این عبارت به علت کنترل پذیر بودن سیستم اصلي غیر صفر است. مقادیر ویژة مودهاي $s=0$ در عبارت زیر صدق مي کنند.

$$\begin{bmatrix} w_{i1}^T & w_{i2}^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix} = 0 \qquad (۶\text{-}۱۰۱)$$

یا

$$\begin{bmatrix} w_{i1}^T & w_{i2}^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} = 0 \qquad (۶\text{-}۱۰۲)$$

فرض کنید یکي از این مودها کنترل ناپذیر باشند، با توجه به تست بردار ویژه خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} w_{i1}^T & w_{i2}^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = 0 \qquad (۶\text{-}۱۰۳)$$

این عبارت معادل اینست که ماتریس $\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}$ نقص رتبه یافته که با توجه به قضایاي فصل سوّم معادل داشتن صفر انتقال بر روي مبدأ $s=0$ است. به صورت معکوس، اگر معادلة (۶-۱۰۳) صادق باشد معادلات (۶-۱۰۲) و (۶-۱۰۱) نیز صادق بوده و این بدان معناست که در صورت وجود صفر انتقال بر روي مبدأ $s=0$ مود کنترل ناپذیر وجود خواهد داشت.

■

با داشتن شرط کنترل پذیري امکان پایدار سازي کنترل فیدبک فوق را مي توان بررسي نمود. با درنظر گرفتن

$$u = u_f - \begin{bmatrix} k_x & k_z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}$$

که در آن u_f ترم پیش خور مي باشد که از ترکیب خطي ω, y_d بدست خواهد آمد. با فرض اینکه $\begin{bmatrix} k_y & k_z \end{bmatrix}$ پایدار باشد درحالت ماندگار خواهیم داشت:

$$\left\{\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_x & k_z \end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix} x^* \\ z^* \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u_f^* - \begin{bmatrix} \Gamma \\ 0 \end{bmatrix} w^* + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} y_d^* \qquad (۱۰٤-٦)$$

ماتريس سمت چپ داراي مقادير ويژه اكيداً منفي است، لذا ناويژه خواهد بود (هيچ مقدار ويژه ای در $s=0$ ندارد). لذا جواب يكتائي براي x^*, z^* از اين معادله بدست مي آيد.

از طرف ديگر اين جواب در معادلة خروجي $Cx^* = y_d$ بايستي صدق كند. لذا $y^* = y_d^*$. از لحاظ عملي مي توان گفت هر u_f^* ثابتي سيستم را به یک سطح ماندگاري خواهد رساند كه در آن $y = y_d$. بدين ترتيب استفاده از ترم پيش خور انتخابي مي باشد، چراكه وجود ترمهاي انتگرال گير سبب خواهد شد حالت ماندگار به حالت دلخواه برسد. اما با اعمال u_f سرعت اين انتقال افزايش مي يابد. در هر حال هر گونه عدم قطعيتي در محاسبة u_f، توسط كنترل انتگرال گير جبران مي شود. اين نوع فيدبك حالت در واقع تعميم سيستمهاي نوع يك[1] براي سيستمهاي MIMO مي باشد.

جمع بندی روش:

ابتدا m انتگرال گير در معادلات حالت اضافه مي كنيم كه از خطاي $y-y_d$ فيدبك بگيرند.
توسط روش جايابي يا LQR كنترل كننده پايدار سازي براي سيستم جديد طراحي مي كنيم.
در اين طراحي خروجي كلية انتگرالها در شاخص عملكرد جايگذاري شده و شرط وجود پاسخ رؤيت پذير بودن كلية متغيرهاي حالت انتگرال گيرها z نسبت به خروجي مجازي $Q^{1/2}x$ است.
درصورت نياز مي توان یک كنترل كننده پيش خور نيز اضافه نمائيم. (اين حالت انتخابي است)

مثال (۶-۱۴) سيستم تعليق فعال اتومبيل:

معادلات سيستم تعليق فعال اتومبيل را كه در مثال (۲-۳) فصل دوّم معرفي شده است را در نظر بگيريد. فرض كنيد نوسانات جاده اي با فرآيند وينر به شكل زير مدلسازي شوند $\dot{y}_R = w(t)$.

الف) معادلات حالت سيستم را به ازاي متغيرهاي حالت زير بازنويسي كنيد.

$$l_1 = x_1 - x_2, l_2 = x_1 - y_R, v_1, v_2$$

[1] Type one

ب) كنترل فيدبك حالتي براي اين سيستم به گونه اي طراحي كنيد كه ضمن تضمين $l_1 = l_{1d}$ قطبهاي حلقه بستة سيستم را بر روي $-3\pm 3j, -25\pm 25j, 5$ جايابي كند.

ج) پاسخ سيستم را از حالت تعادل به ورودي ضربة $w(t) = 0.1\delta(t)$ و $l_{1d} = 0.1$ مشابه سازي كنيد.

پاسخ:

معادلات حالت سيستم را با اضافه نمودن يك انتگرال گير بدست مي آوريم.

$$\dot{l}_1 = v_1 - v_2$$
$$\dot{l}_2 = v_1 - w$$
$$\dot{v}_1 = -10l_1 - 2(v_1 - v_2) + 0.00334u$$
$$\dot{v}_2 = 60l_1 + 12(v_1 - v_2) - 660(-l_1 + l_2) - 0.02u$$
$$\dot{x} = l_1 - l_{1d}$$

يا به فرم ماتريسي:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ v_1 \\ v_2 \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -10 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 720 & -660 & 12 & -12 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ v_1 \\ v_2 \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.00334 \\ -0.02 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} w - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} l_{1d}$$

با استفاده از دستور place نرم افزار Matlab بهرة فيدبك حالت را براي سيستم به صورت زير بدست مي آوريم:

$$k^T = \begin{bmatrix} 5.15\times 10^4 & -2.52\times 10^4 & 6.23\times 10^3 & -1.31\times 10^3 & 5.10\times 10^4 \end{bmatrix}$$

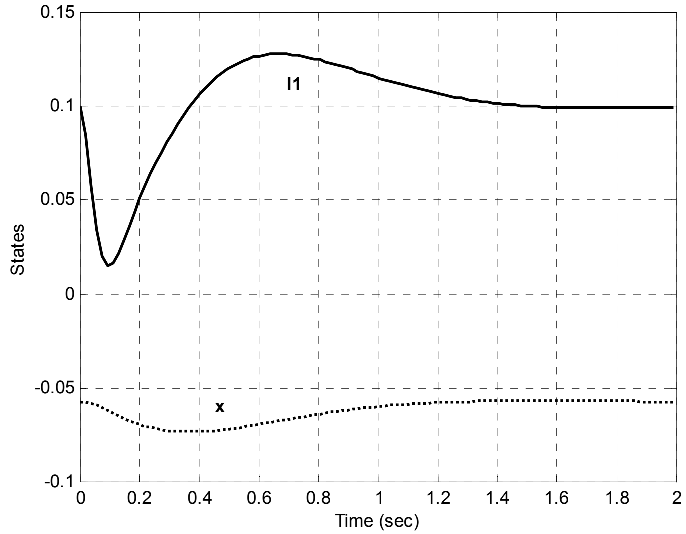
مي توان براحتي نشان داد كه در حالت تعادل $l_1 = l_2 = l_{1d}$، $v_1 = v_2 = 0$ و نهايتاً $u = 3000l_{1d}$ در حالي كه متغير x هر مقداري مي تواند داشته باشد. لذا قانون كنترلي عبارتست از:

$$u = -k_1 l_1 - k_2 l_2 - k_3 v_1 - k_4 v_1 - k_5 x$$

در نقطة تعادل داريم:

$$3000l_{1d} = -k_1 l_{1d} - k_2 l_{1d} - k_5 x^* \Rightarrow$$
$$x^* = -0.574 l_{1d}$$

شكل (٦-١٣) پاسخ سيستم حلقه بسته را به شرايط اولية تعادل ورودي جادة ضربه $w(t) = 0.1\delta(t)$ نشان مي دهد. با توجه به وجود فيدبك انتگرال حالت، پس از اعمال ورودي ضربه حالت ماندگار هر دو متغير نشان داده شده به حالت اولية خود باز مي گردد.



شکل(۶-۱۳) پاسخ حلقه بستۀ سيستم تعليق فعال اتومبيل با استفاده از فيدبک انتگرال حالت

۶-۸) جمع بندي

در اين فصل اصول طراحي فيدبك حالت با دو روش جايابي قطب و كنترل بهينة LQR ارائه شده است. همچنين اهداف عمومي طراحي كنترلر براي سيستمهاي صنعتي را بر شمرده، و حفظ پايداري سيستم به علاوه مسئله تنظيم و يا تعقيب، به صورت دقيق تعريف شده است. علاوه بر آن نشان داده شده است كه مسئلة تعقيب را با استفاده از تعميم روش تنظيم قابل دستيابي است. لذا در ادامه، حل مسئلة تنظيم توسط دو روش جايابي قطب و كنترلر بهينة LQR ارائه شده است و آلگوريتمهاي مختلف حل عددي اين مسائل نيز تشريح شده اند. در پايان به منظور بررسي روشهاي رفع اغتشاش ثابت و متغير در سيستمهاي كنترل به تعميم روش فوق و اضافه نمودن ترم پيش خور رفع اغتشاش و همچنين فيدبك انتگرال حالت پرداخته شده است. در كلية بخشها با ارائة مثالهاي صنعتي نحوه عملي تنظيم كنترل كنندة فيدبك حالت و بررسي عملكرد سيستم حلقه بسته با مشابه سازيهاي كامپيوتري محقق شده است.

مسائل

۶-۱) سيستم زير را درنظر بگيريد.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x$$

الف) تابع تبديل $\frac{y}{u}$ را محاسبه كنيد.

ب) با فرض $u = -\begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} x + u_{ex}$ معادلات حالت را با ورودي u_{ex} بازنويسي كنيد.

ج) تابع تبديل $\frac{y}{u_{ex}}$ را محاسبه نموده و نشان دهيد صفر اين تابع تبديل همانند صفر تابع تبديل $\frac{y}{u}$ است.

۶-۲) مسئله ۶-۱ را براي سيستم زير تكرار كنيد.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

۶-۳) نشان دهيد سيستم مسئله ۶-۱ كنترل پذير بوده و تحت تلاش كنترلي تعريف شده در آن مسئله، كنترل پذير باقي مي ماند.

۶-۴) مسئله ۶-۳ را براي سيستم مسئله ۶-۲ مجددا حل كنيد.

۶-۵) سيستم زير را درنظر بگيريد.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix} x$$

الف) نشان دهيد سيستم فوق كنترل ناپذير است و مود كنترل ناپذير آنرا تعيين كنيد.

ب) با فرض فیدبک حالت $u=-[k_1 \quad k_2]x+u_{ex}$ معادلات حالت را به ازاي ورودي u_{ex} بازنويسي كنيد.

ج) نشان دهيد سيستم بدست آمده در بند ب) به ازاي كليه مقادير k_2,k_1 كنترل ناپذير باقي مي ماند. همچنين مود كنترل ناپذير را بدست آورده و با قسمت الف) مقايسه كنيد.

د) تابع تبديل $\frac{y}{u_{ex}}$ را بدست آوريد و نشان دهيد به ازاي كليه مقادير c_1,c_2,k_2,k_1 حذف صفر و قطب در اين تابع تبديل ديده خواهد شد.

۶-۶) سيستم معرفي شده در مسئله (۶-۱) را درنظر بگيريد و بهره فيدبک حالت را به گونه اي تعيين كنيد كه قطبهاي سيستم حلقه بسته در محل $s_{1,2}=-1$ قرار گيرد. از روشهاي زير به منظور تعيين بهرة فيدبك استفاده كنيد.

الف) روش مستقيم

ب) فرمول آكرمن

ج) روش بس-گيورا

۶-۷) مسئله قبل را براي سيستم معرفي شده در مسئله (۶-۲) مجددا حل نمائيد.

۶-۸) سيستم زير را درنظر بگيريد.

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & -1 & 2\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u$$

الف) كنترل پذيري سيستم را چک كنيد.

ب) بهره فيدبک حالت لازم را براي جايابي قطبهاي حلقه بسته برروي $s_1=-2$ و $s_{2,3}=-1\pm j$ بدست آوريد.

ج) قسمت ب را با استفاده از روش بس- گيورا و فرمول آكرمن محاسبه كنيد.

۶-۹) موتور DC و هارمونيک درايو

براي سيستم موتور DC و هارمونيک درايو معرفي شده در مسئله (۲-۳) فصل دوم:

الف) بهره فيدبک حالت لازم براي جايابي قطب سيستم حلقه بسته را بر روي $-5,-4$ و $-150\pm j150,-21.52$ تعيين كنيد.

ب) برخلاف حالت قبل كه جابجايي نسبي كمي را براي قطبهاي حلقه بسته شامل مي شود، بهره فيدبک حالت لازم براي جايابي قطب سيستم حلقه بسته برروي $-5,-2.47,0$ و $-150\pm j150,-21.52$ را تعيين نموده و اين بهره فيدبک را با حالت قبل مقايسه كنيد.

ج) با استفاده از بهره فيدبک حالت الف) قانون كنترلي لازم براي تنظيم خروجي سيستم $\theta_2=\theta_d$ را بيابيد و تابع تبديل $\frac{\theta_2}{\theta_d}$ را محاسبه كنيد.

د) پاسخ پلة واحد تابع تبديل $\frac{\theta_2}{\theta_d}$ را بيابيد و رسم كنيد.

۶-۱۰) مبدل حرارتي

سيستم مبدل حرارتي را كه در مسئله (۲-٦) فصل دوم معرفي شده است را درنظر بگيريد. قطبهاي سيستم عبارتند از:

$$-0.9531\pm j0.1278,-1.2875,-0.5252\pm j0.1278,-0.1914$$

قطبهاي سيستم داراي نسبت استهلاک مناسبي مي باشند اما از سرعت لازم برخوردار نمي باشند. با فرض اينكه ورودي سيستم برابر ΔF_H تغييرات درجه حرارت سيال گرم نسبت به حالت ماندگار خود باشد:

الف) بهره فيدبک حالت لازم براي جايابي قطبهاي حلقه بسته سيستم برروي:

$$-0.9531\pm j0.1278,-1.2872-0.5252\pm j0.5252,-0.7$$

ب) با توجه به مدل خطي سازي شده سيستم (مسئله (۲-۱۲) فصل دوم) تلاش كنترلي لازم براي رسيدن به حالت دلخواه $\Delta T_{c3}=\Delta T_d$ را با استفاده از بهره فيدبک حالت فوق تعيين كنيد.

ج) تابع تبديل $\frac{\Delta Tc_3}{\Delta T_d}$ را تعيين نموده و پاسخ پلّه واحد آنرا بدست آوريد.

۶-۱۱) راكتور شيميائي

راكتور شيميائي معرفي شده در مسئله (۲-۷) فصل دوم را كه در مسئله (۲-۱۳) خطي سازي شده است را درنظر بگيريد. در مسئله (۵-٤) فصل پنجم نشان داده شده است كه معادلات ديفرانسيل مربوط به $\Delta T,\Delta T_c$ تشكيل يک تحقق كاهش ناپذير را براي ورودي ΔQ و خروجي ΔT مي دهد.

الف) با استفاده از اين تحقق كاهش ناپذير بهره فيدبک حالت و تلاش كنترلي لازم براي جايابي قطبها برروي $-0.5\pm j0.5$ و تنظيم $\Delta T=\Delta T_d$ بدست آوريد.

ب) سیستم حلقه بسته قبل تشکیل معادله حالت جدیدي را مي دهد که در آن ΔT_d ورودي است. معادلات حالت این سیستم را با استفاده از مدل درجه چهار مسئله (۲-۱۳) بدست آورده و مودهاي کنترل ناپذیر آنرا تعیین کنید.

ج) این کنترل خطي محاسبه شده را برروي مدل خطي سیستم که در مسئله (۲-۷) معرفي شده است اعمال کنید و پاسخ سیستم را به پلّه با دامنه $40^o K, 20^o K, 10^o K$ به ΔT_d بدست آورید. پاسخ کنترل خطي اعمال شده به سیستم غیرخطي را تحلیل کنید.

۶-۱۲) بندباز

مدل بندباز که در مسئله (۲-۱۰) فصل دوم معرفي شده است و در مسئله (۲-۱۵) خطي سازي شده است را درنظر بگیرید.

الف) با استفاده از این مدل خطي سازي شده سیستم بهره فیدبک لازم براي جایابي قطبهاي حلقه بسته سیستم برروي $-0.5 \pm j0.5, -12, -11$ را تعیین کنید.

ب) این کنترل خطي را برروي مدل غیرخطي سیستم اعمال نموده و پاسخ سیستم را به ازاي شرایط اولیه $\theta(0)=\theta_0, \theta_0 = 0.5, 1, 1.5 \text{ rad}, \phi(0)=\dot{\phi}(0)=\dot{\theta}(0)=0$ مشابه سازي نموده و برروي پاسخها بحث کنید.

۶-۱۳) جرثقیل

مدل جرثقیل سقفي در مسئله (۲-۹) فصل دوم معرفي شده و در مسئله (۲-۱٤) خطي سازي شده است.

الف) با استفاده از مدل خطي سازي شده سیستم بهره فیدبک حالت لازم براي جایابي سیستم برروي $-2 \pm j2, -2, -1$ را بدست آورده و تلاش کنترلي لازم براي تنظیم $x = x_d$ را تعیین کنید. پاسخ پله واحد را براي سیستم بدست آورید.

ب) سرعت پاسخ سیستم را با جایابي قطب برروي $-8 \pm j8, -8, -4$ افزایش دهید و بهره فیدبک حالت را بدست آورید.

ج) مدل غیرخطي سیستم را با اعمال فیدبک حالت فوق تعمیم داده و پاسخ پلّه سیستم را به x_d برابر $10 \text{ m}, 1 \text{ m}$ مشابه سازي کنید.

د) پاسخ پلّه سیستم را به ازاي بهره فیدبک حالت بند ب) مشابه سازي نموده و با حالت قبل مقایسه نمائید میزان تلاش کنترلي را نیز در این دو حالت تعیین نموده و مقایسه نمائید.

۶-۱۴) Maglev

در مسئله (۲-۱۷) مدل فضاي حالت سیستم تعلیق مغناطیسي براساس وروديهاي جدیدي بازنویسي شده است. از لحاظ فیزیکي کاملاً منطقي است که کنترل ارتفاع Δz توسط Δu_{LC} کنترل چرخش رول $\Delta \theta$ توسط Δu_{LD} و کنترل حرکت عرضي Δy توسط Δu_{GD} صورت گیرد.

الف) بردارهاي ویژه سیستم خطي سازي شده را تعیین نموده و متناظر با $\Delta z, \Delta y, \Delta \theta$ دسته بندي کنید.

ب) با استفاده از روش جایابي قطب از Δu_{LC} براي جایابي قطب Δz به میزان $-x \pm jx$ و $x = 100, 150, 20 \text{ rad/sec}$ استفاده نمائید.

ج) از Δu_{LD} براي جایابي قطب چرخش (رول) θ به $x, -1.5x \pm j1.5x$ مطابق بر بند ب) استفاده نمائید.

د) از u_{GD} براي جایابي قطب حرکت عرضي Δy به $x, -0.5x \pm j0.5x$ منطبق بر بند ب) استفاده نمائید.

ه) پاسخ سیستم $(\Delta y, \Delta \theta, \Delta z)$ را به وروديهاي $\Delta u_{G2}, \Delta u_{G1}, \Delta u_{L2}, \Delta u_{L1}$ و شرایط اولیه $\Delta z(0)=1,\ \Delta \theta(0)=1,\ \Delta y(0)=1$ و سایر متغیرهاي حالت برابر صفر در سه مشابه سازي مستقل به ازاي x هاي مختلف بدست آورده و پاسخها را ترسیم نمائید.

۶-۱۵)

سیستم معرفي شده در مسئله (۶-۱) را درنظر بگیرید. با درنظر گرفتن $u=0$ معادله ماتریسي لیاپانوف متناظر با $J=\int_0^\infty y^2(t)dt$ را به ازاي $x(0)=x_0$ معین نموده و حل نمائید. از پاسخ این معادله پایداري سیستم را تحلیل نمائید.

۶-۱۶)

فیدبک خروجي $u=-ky$ را براي سیستم معرفي شده در مسئله (۶-۲) بکار برده ایم.

الف) معادلات حالت حلقه بسته را در اینحالت بنویسید.

ب) معادله ماتریسي لیاپانوف متناظر با $J=\int_0^\infty y^2(t)dt$ را به صورت تابعي از k معین کنید.

ج) تابع $J(k)$ را برحسب k رسم نموده و نقطه بهینه آنرا به ازاي $x(0)=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ و $x(0)=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ بدست آورید. با استفاده از معادله ماتریسي لیاپانوف نشان دهید که مقدار بهینهٔ k در هر مورد منجر به پایدار سازي سیستم حلقه بسته خواهد شد.

۶-۱۷)

معادله ماتریسي لیاپانوف براي سیستم زیر به ازاي $Q=I$ حل نموده و نشان دهید این سیستم ناپایدار است.

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & -2\end{bmatrix}$$

۶-۱۸)

سیستم زیر را درنظر بگیرید.

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u$$
$$y=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}x$$

به صورت تحلیلي بهره فیدبک حالتي را بدست آورید که شاخص عملکردي زیر را بهینه سازد.

$$\int_0^\infty \left[y^2(t)+\rho u^2(t)\right]dt, \rho>0$$

۶-۱۹)

سیستم زیر را درنظر بگیرید.

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u$$
$$y=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}x$$

الف) آشکار پذیري و پایداري پذیري این سیستم را بررسي نمائید.

ب) به صورت تحلیلي بهره فیدبک حالتي را که شاخص عملکردي زیر را بهینه مي سازد تعیین نماید.

$$\int_0^\infty \left[y^2(t)+\rho u^2(t)\right]dt, \rho>0$$

۶-۲۰) موتور DC و هارمونیک درایو

درنظر است کنترل کننده بهینه اي براي سیستم موتور DC و هارمونیک درایو طراحي کنیم که حداکثر سرعت پاسخ را با توجه به محدودیتهاي اشباع ولتاژ موتور و حداکثر نیروي پیچشي فنر ایجاد نماید. به صورت دقیق مي خواهیم به ازاي پاسخ پله واحد $\theta_d=1^{\text{rad}}$ دامنه ولتاژ ورودي سیستم به $5\ \text{V}$ نرسیده و حداکثر $|\theta_1-\theta_2|=|\Delta|<0.03^{\text{rad}}$ گردد.

الف) مقدار حالت ماندگار متغیرهاي حالت را به ازاي $\theta_2=\theta_d$ محاسبه نموده و معادلات حالت افزایشي را برحسب متغیرهاي $\Delta x=x-x^*$ بازنویسي کنید.

ب) به ازاي شاخص عملکردي $J=\int_0^\infty\left[Q_{11}\Delta^2+Q_{33}(\theta_2-\theta_d)^2+Rv^2\right]dt$ و مقدار اولیه $R=\frac{1}{5^2},\ Q_{33}=1,\ Q_{11}=\frac{1}{(0.03)^2}$ بهره فیدبک حالت بهینه را تعیین کنید.

ج) پاسخ سیستم حلقه بسته را به ازاي شرایط اولیه صفر و ورودي پلّهٔ واحد $\theta_d=1$ تعیین کنید.

د) با انجام عملیات بازگشتي ضرایب Q,R را به گونه اي تنظیم کنید که محدودیتهاي طراحي را ارضاء نماید.

۶-۲۱) کنترل سرعت غلطک

کنترل بهینه اي براي سیستمهاي سرعت غلطک مي خواهیم طراحي کنیم که زاویه پیچش محورهاي موتورها از 0.02^{rad} تجاوز ننموده و حداکثر ولتاژ ورودي به موتورها به ۱۸۰ V محدود گردد. فرض کنید گشتاور بار $T_L=0$ باشد. کنترل بهینه بایستي سرعت پاسخ ω_0 را به ازاي $\omega_d=2.0\,\text{rad/s}$ حداکثر نموده درحالیکه محدودیتهاي فوق را ارضاء نماید. شاخص عملکردي زیر را در بهینه سازي فوق استفاده نمائید.

$$\int_0^\infty\left[Q_{33}\Delta w_0{}^2+Q_{44}\Delta_1^2+Q_{55}\Delta_2^2+R_{11}u_1^2+R_{22}u_2^2\right]dt$$

الف) ضرایب اولیه زیر را در طراحي کنترل بهینه در مرحله اول استفاده نمائید.

$$Q_{33}=\frac{1}{(2)^2},Q_{44}=Q_{55}=\frac{1}{(0.02)^2},R_{11}=R_{22}=\frac{1}{(180-u_i^*)^2}$$

و بهره فیدبک بهینه را تعیین نمائید.

ب) پاسخ بدون شرایط اولیه zs را به ازاي $u_1^*=u_2^*,\omega_d=2.0\,\text{rad/s}$ تعیین کنید. ضرایب ماتریسهاي وزني را آنقدر افزایش دهید تا محدودیتهاي فوق در پاسخهاي مشابه سازي شده ارضاء گردند و بهره حالت را در این حالت بدست آورید.

ج) طراحي قبل را به ازاي تنها يک ورودي u_1 تکرار کنيد. توجه نمائيد که در اينحالت مدل را بايستي محدود به يک ورودي سازيد. براي انجام مقايسه مناسب حد اشباع u_1 را تا V ۳۶۰ درنظر بگيريد. پاسخ سيستم را در اين دو حالت مقايسه نمائيد.

۶-۲۲) کنترل غلظت مخزن

مدل خطي سازي شده مخزن در مسئله (۲-۱۱) فصل دوّم را درنظر بگيريد.

الف) مقادير ماندگار متغيرهاي حالت را به ازاي مقادير زير محاسبه کنيد.

$$\Delta C_A^{\ *} = 0.1,\ \Delta \ell^* = 0,\ \Delta F_B^{\ *} = 1\times 10^{-5}$$

ب) مي خواهيم از حالت ماندگار معرفي شده در مسئله (۲-۱۳) به شرايط فوق تغيير حالت دهيم. به شرطي که $|\Delta F_0|, |\Delta F_A| < 0.5\times 10^{-4},\ \ |\Delta \ell(t)| \le 0.02$ شاخص عملکردي زير را درنظر بگيريد.

$$J = \int_0^\infty [Q_{11}\Delta \ell^2 + R_{11}\Delta F_A^2 + R_{22}\Delta F_0^2]dt$$

با فرض $Q_{11} = \dfrac{1}{0.02^2}$ ، $R_{11} = R_{22} = \dfrac{1}{(0.05\times 10^{-4})^2}$ به عنوان انتخاب اول بهره فيدبک حالت بهينه را تعيين کنيد و معادله تلاش کنترلي را براي $\Delta F_0, \Delta F_A$ بدست آوريد. اين تلاش کنترلي بايستي يک ترم پس خور ΔF_B را نيز شامل شود.

ج) با انجام شبيه سازي هاي لازم و تنظيم ضرايب ماتريسهاي وزني R, Q کنترل کننده اي را تعيين کنيد که سرعت پاسخ را حداکثر نموده و محدوديتهاي فوق را ارضاء نمايد.

۶-۲۳) بندباز

کنترل کننده اي براساس جايابي قطب براي مدل سيستم بندباز در مسئله (۶-۱۲) طراحي شده است. کنترل کننده بهينه اي طراحي کنيد که با شرايط اوليه $\theta(0) = 0.5\text{rad}$ محدوديتهاي زير را ارضاء کند:

$$|\theta(t)| \le 0.5\text{rad},\ \ |\varphi(t)| \le 0.5\text{rad},\ |\dot{\varphi}(t)| \le 0.5\text{rad/sec},\ |\tau(t)| \le 75Nm$$

الف) با استفاده از مدل خطي سازي شده سيستم کنترل بهينه اي را طراحي کنيد که شاخص عملکرد زير را بهينه کند.

$$J = \int_0^\infty [Q_{11}\theta^2 + Q_{33}\varphi^2 + Q_{44}\dot{\varphi}^2 + R_{11}\tau^2]dt$$

و به عنوان انتخاب اول مقادير $Q_{11} = Q_{33} = Q_{44} = \dfrac{1}{0.25}, R_{11} = \dfrac{1}{75^2}$ را انتخاب نموده و ماتريس بهره حالت را تعيين کنيد.

ب) با تنظيم ضرايب ماتريسهاي وزني، ماتريس بهره حالتي را تعيين کنيد که محدوديتهاي طراحي را ارضاء کند.

ج) کنترل کننده نهائي را به ازاي شرايط اوليه مسئله (۶-۱۲) برروي مدل غيرخطي سيستم پياده سازي نموده و نتايج را تحليل کنيد.

۶-۲۴) جرثقيل

کنترل کننده اي براساس روش جايابي قطب براي سيستم جرثقيل در مسئله (۶-۱۳) طراحي شده است. چون در طراحي براساس اين روش حداکثر اندازة ورودي کنترل $|\text{F}|$ در مسير طراحي وارد نمي شود، با استفاده از روش بهينه کنترل کننده اي را مي خواهيم طراحي کنيم که $|\theta| \le 0.2\text{rad}, |F| \le 1500\text{N}$.

الف) با استفاده از مدل خطي سيستم کنترل کننده اي را طراحي کنيد که سيستم را به x_d تنظيم کند و با اين کنترل کننده شاخص عملکردي زير را بهينه کند:

$$J = \int_0^\infty [Q_{11}(x - x_d)^2 + Q_{33}\theta^2 + R_{11}F^2]\text{dt}$$

در اين بهينه سازي ضرايب انتخابي زير را درنظر بگيريد.

$$Q_{11} = \frac{1}{10^2}, Q_{33} = \frac{1}{0.2^2}, R_{11} = \frac{1}{1500^2}$$

و بهره فيدبک حالت بهينه را تعيين کنيد.

ب) R_{11}, Q_{33} را به گونه اي تنظيم کنيد که براي $\theta(0) = 0, y_d = 10\text{m}$ و سرعتهاي خطي و زاويه اي برابر صفر، محدوديتهاي فوق ارضاء شود و درعين حال سرعت پاسخ x حداکثر گردد.

ج) کنترل تعيين شده را برروي مدل غيرخطي جرثقيل مشابه سازي نموده و پاسخ سيستم را تحليل نمائيد.

۶-۲۵) پاندول دوتائی معکوس

مدل خطي براي سيستم پاندول معکوس در مسئله (۲-۱۶) فصل دوم ارائه شده است.

الف) با توجه به ناپايدار بودن سيستم حتماً به حداقل کنترل کنندة فيدبکي نياز داريم که سيستم را پايدار سازي نمايد. با فرض $\ell_2 = 0.5\text{m}, \ell_1 = 1\text{m}$ مسئله LQ با شاخص عملکردي زير را حل کنيد.

$$J = \int_0^\infty F^2 dt$$

ب) پاسخ حالتهاي $\theta_2(t),\theta_1(t)$ و ورودي $F(t)$ را به ازاي شراي اوليه $\theta_1(0)=1\text{rad}$ بدست آوريد. مقدار حداكثر نيروي كنترلي $\theta_2(0)=-0.1\text{rad}$ و ساير متغيرهاي حالت صفر $v(0)=x(0)=\omega_1(0)=\omega_2(0)=0$ و همچنين توان مورد نياز كه بايستي اعمال شود $F(t)\cdot v(t)$ را در اينحالت بدست آوريد.

ج) در فصل چهارم نشان داده شده است (مسئلة ٤-١٣) كه اگر $\ell_1=\ell_2$ باشد سيستم كنترل ناپذير است. لذا بايستي انتظار داشته باشيم كه كنترل سيستم درحالتيكه $\ell_1\simeq\ell_2$ باشد مشكل گردد. قسمتهاي الف) و ب) را به ازاي $\ell_2=0.9\text{m},\ell_1=1\text{m}$ مجددا حل كنيد.

د) از لحاظ عملي بازة حركتي x محدود است و مناسب است به عنوان مثال آنرا در بازة $\pm 4\text{m}$ محدود كنيم. با فرض $\ell_2=0.9\text{m},\ell_1=1\text{m}$ و شرايط اوليه بند ب) كنترل بهينه اي طراحي كنيد كه شاخص عملكري $J=\int_0^\infty\left[Q_{11}x^2+F^2\right]dt$ را كمينه نموده و با تنظيم Q_{11} محدوديت فوق را ارضاء سازيد. در اين حالت حداكثر توان مورد نياز چه ميزان است؟

۶-۲۶) Maglev

مدل خطي سازي شده سيستم تعليق مغناطيسي در مسئله (۲-۱۷) فصل دوم ارائه شده است. مي خواهيم كنترل كننده بهينه اي طراحي كنيم كه علاوه بر پايدار سازي سيستم محدوديتهاي فاصله هوائي مغناطيسها و ريل را ارضاء نمايد. معمولا فاصله هوائي مجاز تنها حدود 14mm مي باشد. كنترل كنندة بهينه اي طراحي كنيد كه فاصله هاي هوائي بين $\pm 6^{\text{mm}}$ باقي مانده و علاوه بر آن

$$|\Delta u_{L1}|,|\Delta u_{L2}|\le 700,|\Delta u_{G1}|,|\Delta u_{G2}|\le 170$$

الف) با فرض شاخص عملكردي زير

$$J=\int_0^\infty[\alpha(\Delta S_{L1}{}^2+\Delta S_{L2}{}^2+\Delta S_{G1}{}^2+\Delta S_{G2}{}^2)^2+r(\Delta u_{L1}{}^2+\Delta u_{L2}{}^2+\Delta u_{G1}{}^2+\Delta u_{G2}{}^2)]dt$$

ضرايب ماتريس Q را با محاسبة محدوديتهاي واقع بر متغيرهاي حالت برحسب تابعي از فاصله هوائي ارائه شده تعيين نمائيد. مقادير r را مرتبا افزايش دهيد تا بهره حالت به اعداد مشخصي همگرا شود.

ب) براي مقدار مناسبي از r كه همگرائي فوق به شكل قابل قبولي درآمده باشد مشابه سازي هاي بند ه) مسئله (۶-۱۴) را با اين كنترل كننده بهينه تكرار كنيد.

۶-۲۷)

سيستم زير را درنظر بگيريد:

$$\dot{x}_1=x_1+u$$
$$y=x_1$$

الف) ميزان ورودي ثابت u^* را به گونه اي بيابيد كه در اثر آن خروجي ماندگار سيستم y_d^* گردد.

ب) درصورتيكه $y_d=y_d^*+Ae^{-t}$ مدنظر باشد, قانون كنترلي كه با اين شرايط شاخص عملكرد زير را كمينه كند را پيدا كنيد.

$$J=\int_0^\infty[(y-y_d)^2+(u-u^*)^2]dt$$

۶-۲۸) مسئله ۶-۲۷ را به ازاي $y_d^*(t)=B\sin t$ تكرار كنيد.

۶-۲۹) كنترل سرعت غلطك

در مسئله (۶-۲۱) كنترل بهينه اي براي سيستم غلطك طراحي شده است و پاسخ سيستم به ازاي ورودي پلّه براي ω_0 امتحان شده است. درصورتيكه بخواهيم دامنة سرعت بصورت تدريجي افزايش يابد، سيستم را به گونه اي طراحي و تعميم بخشيد كه اين امر ميسر شود. به عبارت ديگر فرض كنيد $\omega_d(t)=25-25e^{-t/\tau}$ در اينصورت چه تغييري در قانون كنترلي بايستي صورت پذيرد و ميزان τ ثابت نيز بايستي به شرح زير تعيين شود.

الف) بهره فيدبک حالت بهينه را براي شاخص عملكرد زير تعيين كنيد.

$$J=\int_0^\infty\left\{[Q_{33}[\Delta\omega_0(t)-z(t)]^2+Q_{44}\Delta_1^2+Q_{55}\Delta_2^2+R_{11}u_1^2+R_{22}u_2^2\right\}dt$$

كه در آن $z(t)=-25e^{-t/\tau}$ و متغيرهاي افزايشي برحسب مقدار ماندگار $\omega_0=25^{\text{rad/s}}$ تعريف شده اند. ضرايب متناظر با مسئله (۶-۲۱) را براي R,Q درنظر گرفته و $\tau=10\text{ s}$ درنظر بگيريد.

ب) پاسخ سيستم را به ازاي شرايط اوليه صفر تعيين كنيد و ميزان متغيرهاي $\Delta_2,\Delta_1,u_2,u_1$ را نسبت به محدوده هاي تعيين شده در مسئله (۶-۲۱) مقايسه كنيد. با تغيير مقدار τ در قسمت قبل عمليات طراحي را تكرار نمائيد تا محدوديتهاي طراحي ارضاء شوند.

۶-۳۰) كنترل سرعت غلطك

در اين مسئله طراحي كنترلر به انضمام پيش خور اغتشاش را براي سيستم كنترل سرعت غلطك بررسي مي كنيم.

الف) مقدار ماندگار متغیرهاي حالت و ورودي را به ازاي $\Delta_1^* = \Delta_2^*, T_0 = T_0^*, \omega_0 = \omega_d$ محاسبه کنید. مقادیر u_2^*, u_1^* را به صورت تابعي از T_0^*, ω_d تعیین کنید.

ب) مقادیر ماندگار را به ازاي $T_0 = 0, \omega_0 = 25^{\text{rad/s}}$ بدست آورید. گشتاور ورودي $T_0 = 10^{\text{N.m}}$ را به سیستم اعمال کنید و پاسخ سیستم را به کنترل بهینه طراحي شده در مسئله (۶-۲۱) با شرایط فوق بدست آورید. در این قسمت u_2^*, u_1^* را تغییر داده و پیش خور اغتشاش را اعمال نکنید. مقادیر حداکثر $\omega_0(t), \Delta_2, \Delta_1$ را در اینحالت تعیین کنید.

ج) قسمت ب را تکرار کنید با این تفاوت که در اینحالت پیش خور اغتشاش را نیز به سیستم اضافه کنید. بدین ترتیب که تغییرات پله اي به u_2^*, u_1^* به فرم تعیین شده در بند الف) اعمال کرده و پاسخ را با حالت بدون پیش خور اغتشاش مقایسه کنید.

۶-۳۱) کنترل غلظت مخزن

مدل خطي سازي شده غلظت مخزن (مسئلة ۲-۱۱) را درنظر بگیرید.

الف) با استفاده از این مدل خطي مقادیر ماندگار $\Delta F_A^*, \Delta F_0^*$ را که براي حذف اغتشاش ΔF_B^* مورد نیاز است را تعیین کنید. $\Delta F_A^*, \Delta F_0^*$ را برحسب تابعي از ΔF_B^* تعیین نموده و نشان دهید که اعمال پیش خور اغتشاش به این فرم نه تنها درحالت ماندگار بلکه درحالت گذرا نیز اغتشاش را به کلي حذف مي کند.

ب) فرض کنید $\Delta F_B = 0,\ \Delta C_{Ad}(t) = \Delta C_{Ad}^*(1-e^{-t/50})$ کنترل بهینه را براي شاخص عملکردي زیر

$$J = \int_0^\infty [Q(\Delta C_A(t) - \Delta C_{Ad}(t))^2 + R\Delta F_0^2 + R\Delta F_A^2]dt$$

به ازاي $Q = \frac{1}{0.8^2}, R = \frac{1}{(10^{-4})^2}$ تعیین نموده و قانون کنترل را مشخص کنید. R را به گونه اي تنظیم کنید به گونه اي که به ازاي شرایط $\Delta C_{Ad}^* = 0.1,\ \Delta\ell(0) = \Delta V_A(0) = 0$ خطاي $\Delta C_A(t) - \Delta C_{Ad}$ کمینه گردد و $|\Delta F_0(t)|, |\Delta F_A(t)|$ کمتر از مقدار $0.5\times10^{-4}\ \text{m}^3/s$ باقي بماند.

۶-۳۲) مبدل حرارتی

در مسئله (۶-۱۰) یک کنترل کننده براساس روش جایابي قطب براي مدل خطي سازي شده مبدل حرارتي طراحي شده است و اغتشاش اصلي وارد بر سیستم ΔT_{C0} یا درجه حرارت سیال ورودي است.

الف) براي حالتي که سیستم در ابتدا در حالت ماندگار نامي خود قرار دارد و کنترل کنندة طراحي شده برروي سیستم اعمال شده است، ΔT_{C3} را به ازاي تغییر پله اي T_{C0} به اندازه 2^0C تعیین کنید.

ب) حال کنترل کنندة پیش خور را به صورت زیر به سیستم اعمال کنید. ابتدا با استفاده از مدل خطي سازي شده مقدار ماندگار و متغیر افزایشي ΔF_H^* را همانند قبل به ازاي مقدار ماندگار $\Delta T_{C3}^* = 0$ محاسبه کنید اما در اینحالت $\Delta T_{C0}^* \neq 0$ درنظر بگیرید. معادله خطي بدست آمده براي ΔF_H^* را برحسب ΔT_{C0}^* به عنوان پیش خور به قانون کنترل اضافه نموده و پاسخ سیستم را در اینحالت مجددا مشابه سازي نمائید.

مراجع

[1] Anderson, Brian D. O. and John B. Moore, *Optimal control: linear quadratic methods*, Prentice Hall, c1990.

[2] Bélanger, Pierre., *Control engineering : a modern approach,* Saunders College Pub., c1995.

[3] Boyd, Stephen P. and Craig H. Barratt., *Linear* controller design : *limits of performance,* Prentice Hall, c1991.

[4] Brogan, William L*., Modern control theory,* 3rd ed. Englewood Cliffs, N.J. : Prentice Hall, c1991.

[5] Bryson, Arthur E., Applied linear optimal control : examples and algorithms, Cambridge University Press, 2002.

[6] Chen, Chi-Tsong., *Linear system theory and design*, Oxford University Press, c1999.

[7] D'Azzo, John Joachim. And Constantine H. Houpis, *Linear control system analysis and design : conventional and modern,* McGraw-Hill, c1995.

[8] Dorf, Richard C. and H. Bishop, *Modern control system,* Upper Saddle River, NJ : Prentice Hall, 2001.

[9] Hager, William W. and Panos M. Pardalos, *Optimal control: theory, algorithms, and applications,* Kluwer Academic Pubs., c1998.

[10] Kailath**,** Thomas., *Linear systems*, Prentice-Hall, c1980.

[11] Rugh, Wilson J., *Linear system theory,* 2nd ed., Prentice Hall, c1996.

[12] Shinners, Stanley M., *Modern control system theory and design,* 2nd ed., J. Wiley, c1998.

[13] Tewari, Ashish., Modern control design with MATLAB and SIMULINK, John Wiley, c2002.

[14] Zadeh, Lotfi Asker. and Charles A. Desoer, *Linear system theory*, R. E. Krieger Pub. Co., 1979.

[15] دكتر علي خاكي صديق، *اصول كنترل مدرن*، انتشارات دانشگاه تهران، ١٣٧٤.

فصل هفتم: طراحی رؤیتگر حالت

۷–۱) مقدمه

همانگونه که در فصل قبل به تفصیل بیان شد، در کلیة روشهاي طراحي کنترل کننده فیـدبک حالت فرض براین است که کلیه متغیرهاي حالت در دسترس مي باشند. درصورتي که در عمل براي اندازه گیري هر یک از متغیرهاي حالت لازمست یک سنسور و سیستم اندازه گیري تعبیه نمود که مستلزم هزینه زیادي است.

همانگونه که در معادلات حالت سیستم مشاهده مي شود:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \qquad (۱-۷)$$

تنها برخي از متغیرهاي حالت و یا ترکیب خطـي آنهـا انـدازه گیـري مـي شـوند و یـا در فـرم کلاسیک تنها فیدبک خروجي در دسترس است. بدین ترتیـب بـه نظـر مـي رسـد کـه کـاربرد فیدبک حالت بشدت تحت الشعاع قرار مي گیرد. اما این مشکل در بسیاري از مواقع قابـل حـل است. راه حل منطقي آن, تخمین متغیرهاي حالت از روي خروجیها اسـت کـه در صـورتي کـه سیستم رؤیت پذیر باشد، امکانپذیر است. این عملیات تخمین توسـط سیسـتم دینـامیکي بنـام "رؤیتگر حالت" صورت مي پذیرد, که ورودي این سیستم دینـامیکي جدیـد، خروجـي سیسـتم اصلي است و خروجي رؤیتگر، متغیرهاي حالت تخمین زده شده مي باشند. دراینصورت امکـان استفادة عمومي از فیدبک حالت حتي در مواردي که کلیة متغیرهاي حالت اندازه گیـري نشـود امکان پذیر است. با اینکه تئوري تخمین متغیرهاي حالت با انگیزة اسـتفاده در فیـدبك حالـت بسط داده شده است، امّا استفاده از این تئوري به این کاربرد محدود نشده و امروزه در بسـیاري از کاربردهاي مهندسي نظیر پیش بیني وقوع خطا و جبرانسازي آن مورد اسـتفاده قـرار گرفتـه است.

۷–۲) یک رؤیتگر مقدماتی

با سیستم خطي زیر شروع مي کنیم.

فصل هفتم

طراحي رؤيتگر حالت

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{۲-۷}$$

اگر اين مدل را به صورت ديناميكي در كنار سيستم اصلي مشابه سازي كنيم مي توان تخميني از متغير حالت بدست آورد. اگر تخمين حالت را با $\hat{x}$ نمايش دهيم ساده ترين معادلة تخمين به صورت طبيعي برابر است با:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu \tag{۳-۷}$$

كه در آن فرض برآنست كه $\hat{x}$ بتواند متغير حالت را تعقيب كند. خطاي تخمين را با e معرفي مي كنيم.

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t) \tag{٤-۷}$$

ديناميک خطا را با مشتق گيري از اين معادله مي توان تعيين كرد.

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) \\ &= Ax + Bu - A\hat{x} - Bu \\ &= A(x - \hat{x}) \\ &= Ae \end{aligned} \tag{۵-۷}$$

در اينصورت تغييرات زماني خطا به صورت زير است.

$$e(t) = e^{At} \cdot e(0) \tag{٦-۷}$$

اگر سيستم پايدار باشد اين خطا به سمت صفر ميل مي كند و لذا در حالت مجانبي $\hat{x}$ متغير حالت x را تعقيب مي كند. اما اگر سيستم A ناپايدار باشد در حالت كلّي خطا واگرا مي شود و يا درحالت خاصي كه شرايط اوليه $x, \hat{x}$ به گونه اي باشد كه مودهاي ناپايدار تحريک نشوند, خطا همگرا مي شود.

ايدة اصلي رؤيتگر استفاده از ديناميک اصلي سيستم در تخمين حالت مي باشد. اما ايراد اصلي اين روش آنست كه اعمال كنترلي بر ديناميک خطا وجود نداشته و درحالتيكه سيستم A ديناميک مناسبي نداشته باشد, به روند مطلوبي براي تخمين متغيرهاي حالت نخواهيم رسيد. اشكال ديگري كه به اين روش وارد است نياز به اطلاع دقيق از ديناميک اصلي سيستم (ماتريسهاي A, B) مي باشد. هيچگاه در مدلسازي به صورت كامل نمي توان ديناميک سيستم را مدلسازي نمود. در اين روش هرگونه خطاي مدلسازي دقيقاً در تخمين حالت تأثير گذار بوده و سيستم رؤيتگر را از حالت مطلوب جدا مي كند. راه حل اصلي اين موارد استفاده از يک نوع فيدبک اطلاعات در سيستم رؤيتگر است.

۷-۳) رؤيتگر مرتبهٔ- كامل

حال سيستم خطي كامل زير را با معادله خروجي در نظر بگيريد.

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \tag{۷-۷}$$

معادله تخمين حالت را با فيدبكي از اطلاعات خروجي تكميل مي سازيم.

$$\boxed{\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + G(y - C\hat{x})} \tag{۸-۷}$$

كه در آن ماتريس G يک ماتريس n*m (n تعداد متغيرهاي حالت و m تعداد خروجيها) مي باشد و به عنوان ماتريس بهره رؤيتگر ناميده مي شود. در اين معادله يک ترم اصلاحي $G(y - C\hat{x})$ به رؤيتگر مقدماتي اضافه شده است در اينصورت اگر $\hat{x} = x$ باشد:

$$y - C\hat{x} = y - Cx = 0 \tag{۹-۷}$$

لذا ترم اصلاحي هيچ تاثيري نخواهد داشت از طرف ديگر درصورتي كه $C\hat{x} \neq y$ (به هر علت نظير كامل نبودن مدل, دقيق نبودن تخمين و . . .) ترم اصلاحي به صورت مثبت به معادله ديناميكي اضافه شده كه در نتيجه ديناميک خطا را پايدارتر و مطابق خواست طراح سرعت همگرائي خطا به سمت صفر را تنظيم مي كند. اين موضوع در قضية بعد اثبات شده است.

قضية (۷–۱) رؤيتگر مرتبه كامل:

فرض كنيد (A, C) رؤيت پذير باشد. دراينصورت ماتريس بهره رؤيتگر G را مي توان يافت كه $\hat{x}(t)$ به صورت جانبي به سمت $x(t)$ ميل كند.

$$\hat{x}(t) \to x(t)$$

اثبات: با فرض تعريف خطا به صورت $e = x - \hat{x}$ ديناميک خطا را محاسبه مي كنيم.

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \dot{x} - \dot{\hat{x}} \\ &= Ax + Bu - A\hat{x} - Bu - G(y - C\hat{x}) \\ &= A(x - \hat{x}) - G(Cx - C\hat{x}) \\ &= (A - GC)(x - \hat{x}) \\ &= (A - GC)e \end{aligned} \tag{۱۰-۷}$$

اين مسئله دوگان طراحي كنترل كننده مي باشد، كه در آن مسئله دوگان به صورت $\dot{x} = A^T x + C^T u$ تنظيم شده است. لذا مطابق با قضاياي طراحي كنترل كننده (جايابي قطب و LQR) مي توان G^T را با شرايط فوق الذكر در آن قضايا به صورت يكتا براي اينكه كلية مقادير ويژه ماتريس $A - GC$ در نيم صفحة سمت چپ قرار گيرد، بدست آورد.

■

اين اثبات علاوه بر تأييد وجود يكتائي جواب G روش محاسبه عمومي آنرا نيز معرفي مي كند. بدين ترتيب كه با توجه به دوگاني مسئله حل رؤيتگر و كنترل كننده كليـة روشـهاي محاسـبة k را به صورت دوگان به حل G^T مي توان تعميم داد.

خلاصه روش:

- مسئله جايابي قطب را براي سيسـتم دوگـان $\dot{x} = A^T x + C^T u$ بـه گونـه اي حـل كنيد كه معادله مشخصة مربوط به خطا از $p_d(s)$ تبعيت نموده و يا قطبهـاي ايـن سيستم در محلهاي از پيش تعيين شده قرار دهد.
- براي تخمين متغيرهاي حالت, به صورت موازي با سيستم اصلي, سيسـتم دينـاميكي زير را اجرا كنيد.

$$\boxed{\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + G(y - C\hat{x})}$$

مثال (۷-۱) موتور DC و ضد هوائی:

فرض كنيد در سيستم ضدهوائي ارائه شـده در فصـل دوّم، θ مـورد انـدازه گيـري قـرار گيـرد. مي خواهيم مقادير i,ω را تخمين زده، درحالتيكه اغتشاش ثابت T_L بـه سيسـتم اعمـال شود. ديناميک خطاي تخمين را كمي سريعتر اصلي سيستم درنظر بگيريد:

$$p_d(s) = (s+5 \pm j5)(s+7 \pm j7).$$

معادله رؤيتگر را به صورت عددي براي شرايط زير حل نمائيد.

$$v(t) = \sin(t),\quad T_L = 1\,N,\quad \theta(0) = 1\,rad,\quad \omega(0) = 1\,rad/s,\quad i(0) = 0,\quad \hat{x}(0) = 0$$

پاسخ:

الف) ابتدا معادلة حالت سيستم را براي اغتشاش ثابت به فرم زير تغيير مي دهيم.

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\theta\\ \omega\\ i\\ z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 4.438 & -7.396\\ 0 & -12 & -24 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta\\ \omega\\ i\\ z\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 20\\ 0\end{bmatrix}v$$

$$y = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta\\ \omega\\ i\\ z\end{bmatrix}$$

ب) ماتريس رؤيت پذيري را تشكيل داده و رتبة آنرا تعيين مي كنيم.

$$rank(\mathbf{O}) = rank\begin{bmatrix}C\\ CA\\ CA^2\\ CA^3\end{bmatrix} = 4$$

لذا سيستم رؤيت پذير است.

ج) سيستم دوگان را با A^T , C^T تشكيل داده و جايابي قطب را انجام مي دهيم.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -12 & 0\\ 0 & 4.439 & -24 & 0\\ 0 & -7.396 & 0 & 0\end{bmatrix}x + \begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}u \quad : \text{سيستم دوگان}$$

اين مسئله را به صورت دستي نيز مي توان حل نمود:

$$(sI - A^T) = \begin{bmatrix}s & 0 & 0 & 0\\ -1 & s & 12 & 0\\ 0 & -4.438 & s+24 & 0\\ 0 & 7.396 & 0 & s\end{bmatrix}$$

$$\det(sI - A^T) = s^2(s^2 + 24s + 53.256)$$

با توجه به شكل C^T كه تنها در سه سطر اول مقدار دارد تنها ستون اول را محاسبه كينم.

$$Adj(sI - A^T) = \begin{bmatrix}s(s^2 + 24s + 53.256) & \times & \times & \times\\ s(s+24) & \times & \times & \times\\ 4.438s & \times & \times & \times\\ -7.396(s+24) & \times & \times & \times\end{bmatrix}$$

$$\det(sI - A^T) + G^T Adj(sI - A^T)C = s^4 + 24s^3 + 53.256s^2$$
$$+ g_1(s^3 + 24s^2 + 53.256s) + g_2(s^2 + 24s) + g_3(4.438s) + g_4(-7.396s - 177.5)$$

و

$$p_d(s) = (s + 5 \pm j5)(s + 7 \pm j7)$$
$$= s^4 + 24s^3 + 288s^2 + 1680s + 4900$$

با هم ارز قراردادن معادلات خواهيم داشت:

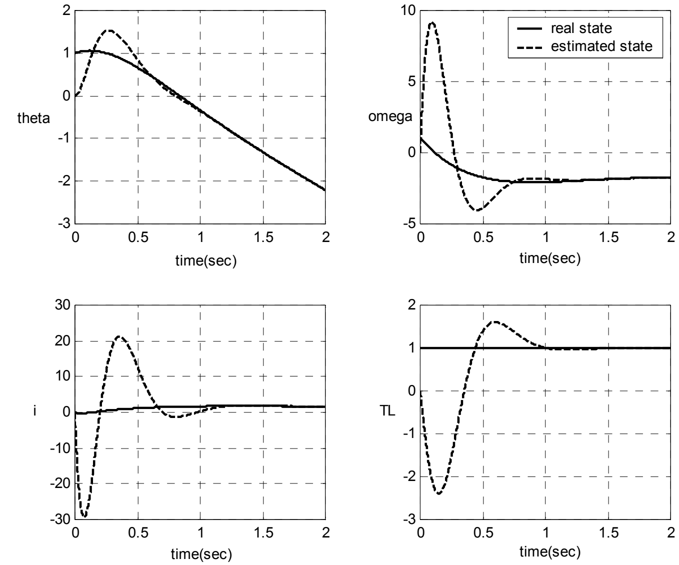
$$\begin{cases} 24+g_1=24 \\ 53.256+24g_1+g_2=288 \\ 53.256g_1+24g_2+4.438g_3-7.396g_{41}=1680 \\ -177.5g_4=4900 \end{cases}$$

$$\Rightarrow G^T=\begin{bmatrix}0 & 234.7 & -937.6 & -27.60\end{bmatrix}$$

معادله رؤيتگر به صورت زير خلاصه مي شود.

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\hat{\theta} \\ \hat{\omega} \\ \hat{i} \\ \hat{z}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4.438 & -7.396 \\ 0 & -12 & -24 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{\theta} \\ \hat{\omega} \\ \hat{i} \\ \hat{z}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 \\ 0 \\ 20 \\ 0\end{bmatrix}N+\begin{bmatrix}0 \\ 234.7 \\ -937.6 \\ -27.6\end{bmatrix}(\theta-\hat{\theta})$$

معادله فوق را با شرايط اوليه ذکر شده در مسئله به صورت عددي براي دو ثانيه حل کـرده کـه پاسخ به صورت زير است:



شکل (۷-۱) مقايسۀ منغير هاى حالت واقعى و تخمين زده شده توسط رؤيتگر حالت

پاسخها همگي با سرعت خوبي به متغيرهاي حالت همگرا مي شوند.

۷-۴) رؤيتگر بهينه (فيلتر کالمن)

۷-۴-۱) طراحى رؤيتگر بهينه

طراحي رؤيتگر براساس جايابي قطب سرعت همگرا شـدن خطـا بـه سـمت صـفر را بـا تنظـيم قطبهاي $(A-GC)$ تعيين مي کند. اين درحالتي اسـت کـه خطـائي در مدلسـازي سيسـتم وجود نداشته باشد. اگر مدلسازي داراي خطا باشد، آنگاه:

$$\begin{cases} \dot{x}=Ax+Bu+w \\ y=Cx+v \end{cases} \qquad (۷-۱۱)$$

از يک نظر w را مي توان خطاي مدلسازي سيستم فرض نمود، که به صورت مستقيم با معادله سيستم جمع شده است. از طرفـي انـدازه گيـري خروجيهـا نيـز داراي نـويز انـدازه گيـري v مي باشد. بدين ترتيب w را نويز فرآيند و v را نويز اندازه گيري مي توان درنظر گرفت. معادله رؤيتگر همانند قبل است.

$$\dot{\hat{x}}=A\hat{x}+Bu+G(y-C\hat{x}) \qquad (۷-۱۲)$$

لذا معادله خطا عبارتست از:

$$\dot{e}=(A-GC)e+w-Gv \qquad (۷-۱۳)$$

طراحي رؤيتگر بهينه را به دو صورت مي توان تعبير نمود که در يک ديدگاه (ديدگاه کالمن) با توجه به وجود منابع اتفاقي w,v فرآيندهاي سيستم را به صورت تصـادفي تعبيـر نمـوده و بـا اعمال شرايط آماري براي w,v سعي خواهيم نمود واريانس خطاي تخمين را کمينه کنيم. در اين ديدگاه فرض مي شود $w(t),v(t)$ فرآيندهاي تصادفي گوسي به صورت نويز سفيد باشند، که کواريانس آنها به ترتيب W,V مي باشد. رؤيتگر بهينه در اين ديدگاه واريانس خطا را کـه خود يک فرآيند تصادفي گوسي مي باشد، با شاخص کمينه سازي اميد رياضي نـرم دو خطـاي تخمين بهينه مي سازد.

$$J=E\left\{\int_0^\infty e^T(t)\cdot e(t)dt\right\} \qquad (۷-۱٤)$$

لذا اين خطا که خود تابع شناخت مشخصات آماري عدم دقت در مدلسازي يا نويز فرآينـد W و نويز اندازه گيري V مي باشد, در اين حالت کمينه شده و مصالحه اي بـين سـرعت پاسـخ و ميزان استفاده از اطلاعات اوليه برقرار مي کند.

تفصيل بيشتر اين ديدگاه نياز به مقدمات فرآيندهاي تصادفي دارد که در جاي ديگري بايسـتي تشريح گردد و از حوصله اين کتاب خارج اسـت. امـا خوشـبختانه مـي تـوان بـدون کاسـتن از

عموميت مسئله از اين ديدگاه دوري گزيد و مسئله را به صورت كاملاً معين و غيرتصادفي نيز بررسي نمود.

مجدداً معادلهٔ خطا (۷-۱۳) را در نظر بگيريد. فراموش نكنيم كه در سيستمهاي كنترل هدف از تخمين متغيرهاي حالت استفاده از آن در حلقه فيدبک حالت مي باشد. لذا با فرض طراحي كنترل كنندهٔ حالت بردار بهرهٔ كنترل را كه با k^T معرفي كرده ايم، در نظر بگيريد. در اينحالت فرض كنيد فرآيند تصادفي $w(t)$ را با يک تابع ضربه با دامنهٔ w_0 مدل سازي كنيم $w(t)=w_0\delta(t)$ و همچنين براي نويز اندازه گيري $v(t)=v_0\delta(t)$. دقت كنيد كه نويز سفيد و $\delta(t)$ در حوزهٔ فركانسي داراي محتواي فركانسي يكسان مي باشند و بدين ترتيب توابع ضربه جايگزين مناسبي براي نويز سفيد مي باشد. در هر دو صورت v_0, w_0 با كواريانس $v(t), w(t)$ با رابطهٔ زير ارتباط دارد.

$$\begin{aligned} V &= \mathrm{Cov}(v(t)) = v_0^2 \\ W &= \mathrm{Cov}(w(t)) = w_0^2 \end{aligned} \qquad (۱۵-۷)$$

در اينصورت از لحاظ انرژي سيگنال و محتواي فركانسي اين دو تعبير از $v(t), w(t)$ يكسان بوده و به يک موضوع منتج خواهد شد. با اين تفاوت كه با در نظر گرفتن توابع ضربه معادلات حالت سيستم كاملاً معين بوده و نيازي به تحليل آماري نتايج وجود ندارد. حال اگر تأثير هر يک از ترمهاي نويز فرآيند و نويز اندازه گيري را كه با توابع δ به صورت غيرتصادفي ارائه شده اند را برروي خطاي تخمين بررسي كنيم, نويز فرآيند به صورت ورودي در معادله ظاهر شده در صورتي كه نويز اندازه گيري در خروجي ظاهر مي شود و اثر آن را در شرايط اوليهٔ e مي توان اعمال نمود. لذا با قدري ساده سازي رياضي مي توان نوشت:

تأثير w بر پاسخ به صورت zs مي باشد: $e_{zs}(t)=e_w(t)$

تأثير v بر پاسخ به صورت zi مي باشد: $e_{zi}(t)=e_v(t)$

لذا براساس اصل روبهم گذاري معادلهٔ خطا به صورت عمومي زير قابل نمايش است.

$$e(t)=e_w(t)+e_v(t) \qquad (۱۶-۷)$$

اگر بخواهيم خطاي تخمين را مينيمم كنيم مي توان آنرا در شاخص عملكرد بهينه سازي به صورت زير كمينه كرد.

$$\begin{aligned} J &= \int_0^\infty ({e_w}^T e_w + {e_v}^T e_v)\,dt \\ J &= \int_0^\infty (e^T e)\,dt \end{aligned} \qquad (۱۷-۷)$$

كه تفاوت آن با ديدگاه قبل تنها در عدم وجود نماد آماري اميد رياضي يا واريانس مي باشد كه در اينحالت به علت غيرتصادفي بودن فرآيند، مقدار نرم دو خطا به صورت كامل درج شده است. اين شاخص عملكرد در واقع سرعت پاسخ خطا و همچنين پاسخ خطا به مقادير اولية زياد را به صورت مصالحه كمينه مي سازد.

خوشبختانه اين مسئله نيز دوگان مسئله LQR بوده و به نامهاي LQE[1] يا LQG[2] مشهور است و پاسخ آن نيز با حل يک معادلهٔ ريكاتي دوگان حل LQR بدست مي آيد.

قضيهٔ (۷-۲)رؤيتگر بهينه، فيلتر كالمن:

فرض كنيد (A,C) آشكارپذير باشد و همچنين (A,w_0) پايدارپذير باشد, دراينصورت براي $(V\neq 0)$ $v_0>0$ ماتريس بهرهٔ رؤيتگر بهينه كه شاخص عملكرد واريانس خطا را مينيمم كند از معادلهٔ زير بدست مي آيد:

$$\boxed{G = PC^T V^{-1}} \qquad (۱۸-۷)$$

كه در آن P حل مثبت معين معادله ريكاتي جبري- ماتريسي زير است.

$$\boxed{AP + PA^T - PC^T V^{-1} CP + W = 0} \qquad (۱۹-۷)$$

كه در آن $V=v_0^2$ (يا $(V=Cov(v(t))$) و $W=w_0^2$ (يا $(W=Cov(w(t))$) مي باشد.

۷-۴-۲) فيلتر كالمن: تئوري موفق در كاربردهاي مختلف

فيلتر كالمن در عمل يكي از موفق ترين روشهاي تخمين مي باشد. بحث مبسوطي را در اين زمينه در كتب مربوط به كنترل ديجيتال مي توان يافت كه رؤيتگرهاي متغير با زمان و بهينه را مورد بررسي قرار مي دهد. فيلتر كالمن در سال ۱۹۹۴ به عنوان موفق ترين يا كارآمدترين تئوري در ميان تئوريهاي متنوع كنترل در انجمن علمي IEEE برگزيده شد. اين تئوري كه توسط كالمن در سال ۱۹۶۰ به سختي به عنوان تز دكتري پذيرفته شد و چند بار براي چاپ در مجلات مورد داوري مردود شناخته شد, پس از ۳۵ سال و پس از بكارگيري موفق در كاربردهاي مختلف تئوري تخمين, ناوبري و هدايت, پردازش سيگنال، پردازش تصوير و پيش

[1] Linear Quadratic Estimator
[2] Linear Quadraic Gaussian

بيني و رفع خطا[1] به اين درجه اعتبار نائل گرديد. اما دلايل اين موفقيت در دو اصل اين تئوري نهفته است كه به آن مي پردازيم.

۱) عدم نياز به مدل دقيق و مقاوم بودن

اگر در فرمول بندي مسئله دقت كنيم، با توجه به وجود W,V و در نظر گرفتن نويز فرآيند يا عدم قطعيت آن و نويز اندازه گيري رؤيتگر بهينه اي با توجه به اين عدم قطعيتها طراحي مي شود كه واريانس خطاي تخمين را كمينه كند. حال درصورتي كه W را بزرگتر از V درنظر بگيريم، اين بدان معناست كه اطلاعات ما از مدل كم بوده ولي فيدبک اطلاعاتي كه از خروجي مي گيريم دقيق است. بدين ترتيب با عدم تكيه به مدل و با اعمال درجة اعتبار بيشتر نسبت به اطلاعات ورودي، تخمينگر بهينه به خوبي عمل خواهد نمود. از طرف ديگر اگر خروجيها با نويز بسيار همراه بوده و يا از درجة اعتبار زيادي برخوردار نباشند، درصورتي كه بتوان مدل مناسبي براي فرآيند استخراج نمود، باز هم به تخمين متغيرهاي حالت سيستم و يا فيلتر كردن بهينة خروجيها نائل خواهيم شد.

۲) عدم محدوديت در اجرا

همانگونه كه بيان شد حل رؤيتگر بهينه، دوگان كنترل بهينه است. اما از لحاظ پياده سازي با يكديگر اختلاف اساسي دارند. در كنترل كننده بهينه محصول محاسبات بهره فيدبك حالت k مي باشد كه به صورت $u=-kx$ برروي سيستم واقعي بايستي پياده سازي شود. از طرف ديگر عملگرها عموماً داراي محدوديت دامنه و فركانس عملكرد مي باشند و لذا نمي توان بهرة فيدبك را به اندازه دلخواه بزرگ نمود و بدين ترتيب سرعت عملكرد پاسخ را نمي توان به شكل مطلوب و بدون محدوديت تنظيم نمود. درصورتي كه در پياده سازي فيلتر كالمن, كلية عمليات لازم براي تحقق فيلتر برروي ميكروپروسسور يا كامپيوتر صورت ميگيرد و لذا هيچ گونه محدوديت فيزيكي در افزايش بهره رؤيتگر G و تنظيم سرعت همگرائي خطاي تخمين وجود ندارد. لذا در اين طراحي تنها مصالحه بين e_v, e_w صورت گرفته كه از ماهيت عدم قطعيت در مدل و يا اطلاعات خروجي بدست آمده، لذا با كمي تنظيم معمولا طراحي فيلتر كالمن به صورت بهينه پاسخگوي كاربردهاي متعددي مي باشد.

[1] Fault detection and diagnosis

مثال (۷-۲) قطار:
سيستم قطار معرفي شده در فصل دوم را درنظر بگيريد. مي خواهيم بررسي كنيم كه متغيرهاي حالت سيستم را با تعداد نسبتاً كمي از خروجيها تخمين بزنيم. فرض كنيد تنها دو متغير سرعت لوكوموتيو اول و فاصله نسبي آن با لوكوموتيو ثانويه را اندازه گيري مي كنيم $v_1, \Delta x_2$ متغيرهاي حالت را براي شرايط سرعت نامي 25m/s در مسير هموار افقي بررسي مي كنيم

الف) ماتريس رؤيت پذيري را با در نظر گرفتن ماتريس خروجي زير بدست مي آوريم.

$$C=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

سيستم رؤيت پذير است. $\text{rank}\ (\mathbf{O})=9=n$

ب) فرض كنيد اندازه گيري سرعت با دقت $\pm 1m/s$ و فاصله نسبي با دقت $\pm 0.02m$ اندازه گيري مي شود، لذا V را مي توان به صورت زير انتخاب كرد.

$$V=\begin{bmatrix}(0.02)^2&0\\0&1^2\end{bmatrix}$$

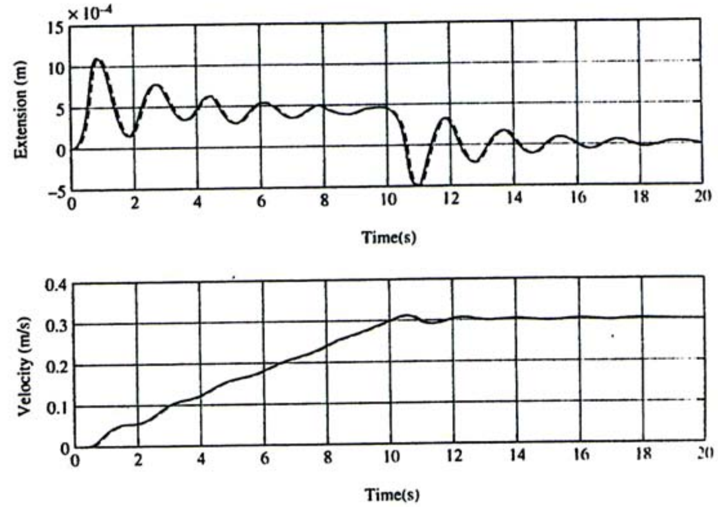
از طرفي نامعيني موجود در مدل و اغتشاشات وارد بر سيستم به صورت نيروهاي باد و جانبي و غيره در معادلات وارد مي شوند، كه اين تنها معادله پنجم حالت را تحت تاثير قرار مي دهد با فرض حداكثر اغتشاشات $3\ kN$ مي توان W را به صورت زير درنظر گرفت.

$$W=diag\begin{bmatrix}0&0&0&0&9&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

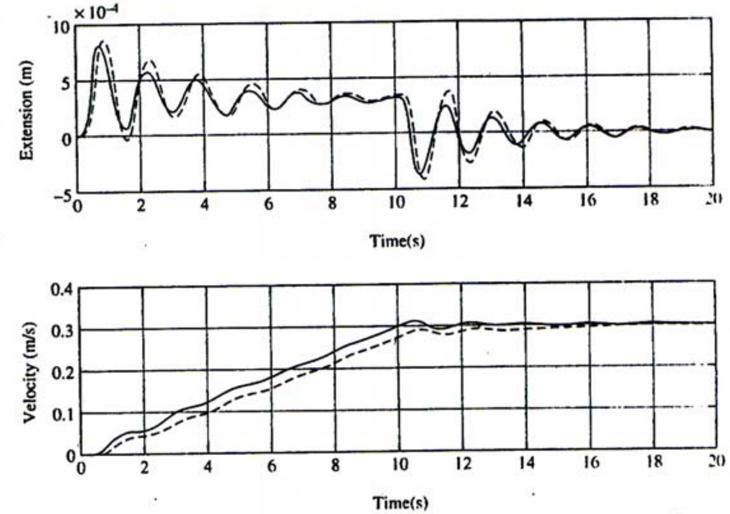
حال فيلتر كالمن را با دستور "lqe" در Matlab محاسبه مي كنيم: ماتريس بهره رؤيتگر 2*9 خواهد بود.

$$G^T=\begin{bmatrix}21.00&41.138&0.4889&0.0587&352.3&107.88&12.15&-5.6&-7.96\\0.1409&0.0086&-0.0031&-0.0014&4.703&0.9010&0.258&0.204&0.203\end{bmatrix}$$

ج) مشابه سازي وضعيت رؤيتگر براي سيستم در حالتيكه $F(t)=10KN,\ \ \Delta x_i=\Delta v_i=0$ در مدت ۱۰ ثانيه و علاوه بر آن نيروي KN ۲ براي مدت چهار ثانيه به صورت اغتشاش بر آن وارد شود را شبيه سازي مي كنيم. معادله رؤيتگر را براي سيستم حل نموده و پاسخ زير بدست مي آيد. حال اگر پارامترهاي مدل را نيز به صورت نامعيني وارد سازيم پاسخها همگرا مي شوند ولي با دقتي كمتر از دقت بدست آمده در اين پاسخها.



شکل (۷-۲) مقایسهٔ متغیر های حالت واقعی و تخمین زده شده توسط فیلتر کالمن



شکل (۷-۳) مقایسهٔ متغیر های حالت واقعی و تخمین زده شده توسط فیلتر کالمن بدون داشتن اطلاع از ورودی اغتشاش 2 KN و با نامعینی پارامتریک مدل

۷-۵) رؤیتگر لوئنبرگر

در برخي از موارد يک يا چند متغير حالت به صورت مستقيم اندازه گيري مي شوند. با فرض کوچک بودن نويز اندازه گيري و با اعتبار بودن اطلاعات اندازه گيري شده, ديگر نيازي به تخمين مجدد اين متغير ها نمي باشد. اما عملاً با توجه به عملکرد فوق العادة فيلتر کالمن درصورتي که پروسسور محاسباتي قدرت و توان لازم را داشته باشد, حتي متغيرهاي اندازه گيري شده نيز تخمين زده مي شوند تا نويز اندازه گيري در آنها حذف شود. به هر حال درصورتي که نياز نداشته باشيم کلية متغيرهاي حالت را تخمين بزنيم, از نوع رؤيتگر لوئنبرگر يا کاهش مرتبه يافته استفاده مي کنيم. فرض کنيد تعداد m متغير حالت که به صورت زير مرتب شده اند، اندازه گيري شده و n-m آنها اندازه گيري مستقيم نمي شوند.

$$x=\begin{bmatrix}x_m\\ \hline x_u\end{bmatrix}\begin{matrix}\to m\\ \to n-m\end{matrix}$$

در اينحالت مي توان سيستم اصلي را مطابق با اين دسته بندي, تفکيك نمود.

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}\dot{x}_m\\ \dot{x}_u\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{mm} & A_{mu}\\ A_{um} & A_{uu}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_m\\ x_u\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}B_m\\ B_u\end{bmatrix}u \qquad (۷\text{-}۲۰)$$

$$y=\begin{bmatrix}I & \vdots & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_m\\ x_u\end{bmatrix}$$

دقت کنيد بدون کاهش عموميت مسئله درصورتي که C به فرم فوق نباشد با يک تبديل همانندي مي توان به فرم فوق رسيد. حال کافي است تنها قسمت x_u را تخمين بزنيم: $\hat{x}_u$. فرض کنيم $x_m, u, A_{mm}, \ldots$ و کلية پارامترهاي مدل سيستم فوق به جز x_u شناخته شده و در دسترس باشند. در اين صورت مي توان نوشت:

$$\dot{x}_u=A_{uu}x_u+A_{um}x_m+B_u \qquad (۷\text{-}۲۱)$$

از طرفي مي توان z را به صورت زير تعريف کرد.

$$A_{mu}x_u=\dot{x}_m-A_{mm}x_m-B_m u=z \qquad (۷\text{-}۲۲)$$

معادله (۷-۲۱) به عنوان معادلة حالت متغير x_u مي باشد و x_m, u در آن به عنوان ورودي و شناخته شده مي باشند. همچنين متغير z بدون نياز به سمت چپ معادله (۷-۲۲) از روي $\dot{x}_m, u, x_m$ قابل محاسبه است. لذا از ايده اصلي رؤيتگر در اين طراحي نيز بهره مي بريم.

$$\dot{\hat{x}}=A_{uu}\hat{x}_u+A_{um}x_m+B_u u+G(z-A_{mu}\hat{x}_u) \qquad (۷\text{-}۲۳)$$

دقت كنيد ابعاد G در اين معادله $(n-m)\times m$ خواهد بود كه از $n\times m$ كـوچكتر بـوده و ايـن معادله از لحاظ پياده سازي در كامپيوتر به مراتب سـاده تـر اسـت. حـال ايـن معادلـه را بسـط مي دهيم:

(۲۴-۷)
$$\dot{\hat{x}} = A_{uu}\hat{x}_u + A_{um}x_m + B_u u + G(\dot{x}_m - A_{mm}x_m - B_m u - A_{mu}\hat{x}_u)$$

كلية ترمهاي اين معادله كاملاً معلوم است، اما به علـت وجـود $\dot{x}_m$ بـه صـورت مسـتقيم قابـل محاسبه نيست لذا $\dot{x}_m$ را جايگزين مي كنيم. از متغير جديد ψ استفاده مي كنيم كه در آن:

(۲۵-۷)
$$\psi = \hat{x}_u - Gx_m \to \hat{x}_u = \psi + Gx_m$$

حال

(۲۶-۷)
$$\begin{aligned}\dot{\psi} + G\cancel{\dot{x}}_m &= A_{uu}\psi + A_{uu}Gx_m + A_{um}x_m + B_u + G\cancel{\dot{x}}_m \\ &-GA_{mm}x_m - GB_m u - GA_{mu}\psi - GA_{mu}Gx_m\end{aligned}$$

و با دسته بندي معادلات

(۲۷-۷)
$$\begin{aligned}\dot{\psi} &= (A_{uu} - GA_{mu})\psi + \\ &(A_{uu}G + A_{um} - GA_{mm} - GA_{mu}G)x_m + (B_u - GB_m)u\end{aligned}$$

لذا از اين معادله ابتدا ψ را تخمين زده و سپس $\hat{x}_u$ را از معادله زير حساب مي كنيم.

(۲۸-۷)
$$\hat{x}_u = \psi + Gx_m$$

مثال (۷–۳) پاندول معكوس:

مدل پاندول معكوس فصل دوم را درنظر بگيريد كه در آن تنهـا ω سـرعت زاويـه اي پانـدول اندازه گيري نمي شود. با يک رؤيتگر لوئنبرگر آنرا تخمين بزنيد.

پاسخ:

ابتدا مدل سيستم را تفكيك مي كنيم:

$$\frac{d}{dt}\left[\begin{array}{c}x\\v\\\theta\\\hline\omega\end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c}0&1&0&0\\0&0&-9.8&0\\0&0&0&1\\\hline 0&0&19.6&0\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}x\\v\\\theta\\\hline\omega\end{array}\right] + \left[\begin{array}{c}0\\1\\0\\\hline -1\end{array}\right]u$$

در اينحالت

$$A_{mm} = \begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&-9.8\\0&0&0\end{bmatrix} \quad A_{mu} = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \quad B_m = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$A_{um} = \begin{bmatrix}0&0&19.6\end{bmatrix} \quad A_{uu} = [0] \quad B_u = [-1]$$

لذا ماتريس رؤيتگر ۱*۳ مي باشد. معادله (۲-۲۷) را درنظر بگيريد ، ماتريس سيسـتم خطـا در آن عبارتست از:

$$A_{uu} - GA_{mu} = 0 - \begin{bmatrix}g_1 & g_2 & g_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = -g_3$$

براي اينكه مقدار ويژه معادلـة خطـا 4- باشـد لازمسـت $-g_3 = -4$ يـا $g_3 = 4$ باشـد. در جايابي قطبهاي سيستم خطا مقادير g_2, g_1 بي تأثيرند. لذا بهرة ماتريس تخمين را برابر مقدار زير انتخاب مي كنيم.

$$G = \begin{bmatrix}0 & 0 & 4\end{bmatrix}$$

لذا معادله تخمين ω عبارت است از:

$$\dot{\hat{\omega}} = \begin{bmatrix}0&0&19.6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\v\\\theta\end{bmatrix} - u + \begin{bmatrix}0&0&4\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}\dot{x}\\\dot{v}\\\dot{\theta}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}v\\-9.8\theta\\0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}u - \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\hat{\omega}\right)$$

$$\dot{\hat{\omega}} = 19.6\theta - u + 4\dot{\theta} - \hat{\omega}$$

اگر از معادله (۷-۲۷) استفاده كنيم.

$$\dot{\psi} = (0-4)\psi + \begin{bmatrix}0&0&19.6\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0&0&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&4\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}x\\v\\\theta\end{bmatrix} + (-1)u$$

يا

$$\begin{cases}\dot{\psi} = -4\psi + 3.6\theta - u \\ \hat{\omega} = \psi + 4\theta\end{cases}$$

اين معادله بر معادله قبل بسيار ترجيح دارد چرا كه اگر $\dot{\theta}$ به طور دقيق در دسترس بود ديگـر احتياجي به تخمين $\hat{\omega}$ نمي بود.

۷–۶) سيستم حلقه بسته فيدبک حالت – رؤيتگر حالت

با توجه به مطالب فصل ششم و اين فصل تـاكنون روشـهاي طراحـي كنتـرل فيـدبک حالـت و رؤيتگر حالت را به صورت جايابي قطب و بهينه تدوين شده است. به صـورت شـهودي بـه نظـر مي آيد كه به علت اينكه متغيرهاي حالت تخمين زده شده بـا سـرعت دلخـواه بـه متغيرهـاي

حالت واقعي همگرا مي شوند، بدون هيچ مسئله اي مي توان آنها را در فيدبک حالت بـه جـاي متغير حالت اصلي استفاده کرد. بدين ترتيب:

$$u=-k\hat{x} \tag{۲۹-۷}$$

براي بررسي دقيق و رياضي اثرات تلفيق فيدبك حالت و رؤيتگر حالت، فـرض کنيـد رؤيتگـر و فيدبک حالت مستقلاً طراحي و G,k بدست آمده اند در اينصورت:

$$\begin{aligned}&\dot{x}=Ax+Bu\\&u=-k\hat{x}, \qquad \hat{x}=x-e\end{aligned} \tag{۳۰-۷}$$

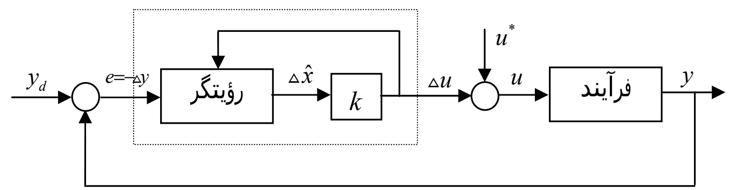
$$\Rightarrow\begin{cases}\dot{x}=Ax-Bkx+Bke\\ \dot{e}=(A-GC)e\end{cases} \tag{۳۱-۷}$$

با درنظر گرفتن سيستمي که هر دو معادله را همزمان در بر گيرد:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{e}\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{c|c}A-Bk & Bk\\ \hline 0 & A-GC\end{array}\right]\begin{bmatrix}x\\ e\end{bmatrix} \tag{۳۲-۷}$$

خوشبختانه اين ماتريس به صورت بلوکي بالا مثلثي است, لذا مقـادير ويـژه مـاتريس نهـائي بـا توجه به ويژگـي ايـن مـاتريس، برابـر مقـادير ويـژه بلوکهـاي قطـري آن يعنـي $(A-Bk)$ و $(A-GC)$ مي باشد. اين بدان معناست که مقادير ويژه طراحي شده بـه صـورت مسـتقل در کنترل کننده فيدبک حالت $(A-Bk)$ و رؤيتگر حالت $(A-GC)$ در سيستم تلفيـق شـده تغيير نمي کنند, لذا خصوصيات اصلي پاسخ مثل پايداري و سرعت آن نيز تغيير نخواهـد کـرد. توجه کنيد که در رؤيتگر هيچ تغييري بوجود نمي آيد، ولي در کنترل کننده مشخصـات اصـلي تغيير محسوسي نمي کند و بسته به تأثير ترم Bke در معادلة کنتـرل کننـده وجـود خطـاي تخمين تاثير کمي بر روي شکل پاسخ خواهد داشت.

شکل زير بلوک دياگرام پياده سازي سيستم حلقه بسته توام فيدبک حالت- رؤيتگر حالت را بـه نمايش مي گذارد.



شکل (۷-۴) پياده سازی حلقهٔ فيدبک حالت –رؤيتگر حالت

بدين ترتيب خواهيم داشت:

$$\begin{aligned}\Delta\dot{\hat{x}}&=A\Delta\hat{x}+B\Delta u+G(\Delta y-C\Delta\hat{x})\\&=A\Delta\hat{x}+B(-k\Delta\hat{x})+G(\Delta y-C\Delta\hat{x})\end{aligned} \tag{۳۳-۷}$$

يا

$$\begin{cases}\Delta\dot{\hat{x}}=(A-Bk-GC)\Delta\hat{x}+G\Delta y\\ \Delta u=-k\Delta\hat{x}\end{cases} \tag{۳٤-۷}$$

لذا توابع تبديل $\Delta y(s)$ به $\Delta u(s)$ عبارت است از:

$$\Delta u(s)=-k(sI-A+Bk+GC)^{-1}G\Delta y(s) \tag{۳۵-۷}$$

که Δy همان خطاي فيدبک مي باشد، $\Delta y=-e$:

$$\frac{\Delta u(s)}{e(s)}=k(sI-A+Bk+GC)^{-1}G \tag{۳٦-۷}$$

درصورتي که تعدادي از متغيرهاي حالت نيز مستقيما انـدازه گيـري شـوند بـه همـين ترتيـب مي توان از رؤيتگر لوئنبرگر يا کاهش مرتبه يافته استفاده نمود.

مثال (۷-۴) موتور DC و ضد هوائی:

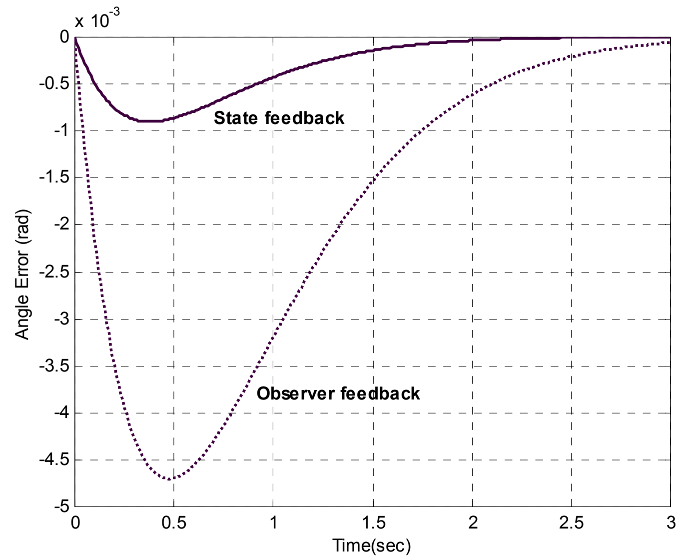
مطابق مثالهاي قبل که در آن کنترل کننده فيدبک حالت رؤيتگر مرتبـه کامـل طراحـي شـده است، اگر گشتاور اغتشاشي $T_L=0.01e^{-t}$ بـه سيسـتم اعمـال گـردد درحاليکـه $\theta=\theta_d$ و $\omega=i=0$ است، پاسخ سيستم حلقه بسته فيدبک حالت – رؤيتگر حالت را بدسـت آوريـد و با حالت فيدبک حالت بدون رؤيتگر (دردسترس بودن x) مقايسه نمائيد.

پاسخ: از مثالهاي قبل ماتريس هاي بهرة کنترل کننده و رؤيتگر مطابق زير بديت آمده اند.

$$K=\begin{bmatrix}3 & 0.8796 & 0.1529 & -1.8190\end{bmatrix}$$

$$G^T=\begin{bmatrix}-1 & 265.7 & -112.7 & -20.66\end{bmatrix}$$

سيستم را درحالت فيدبک حالت و فيدبک حالت – رؤيتگر شبيه سازي نموده ايم که پاسخهاي شکل (۷-۵) بدست مي آيد. پاسخ سيستم فيدبك حالت بدون استفاده از رؤيتگر در ايـن مثـال به مراتب بهتر از استفاده از متغيرهاي حالت تخمين زده شده در فيدبك مـي باشـد. امّـا دقـت کنيد چون محدوديتي در جايابي قطبها در رؤيتگر نداريم با تبديل رؤيتگر به فيلتـر کـالمن, يـا دور کردن قطبهاي رؤيتگر از محور $j\omega$ مي توان پاسخ را تا حد دلخواه به حالت فيدبک حالت نزديک نمود.



شکل (۷-۵) پاسخ سيستم حلقه بستهٔ موتور DC با فيدبک حالت و فيدبک-رؤيتگر حالت

اگر بخواهيم تابع تبديل کنترل کننده را بدست آوريم از معادله زير مي توان استفاده نمود.

$$\begin{aligned}\frac{\Delta u(s)}{e(s)} &= k(sI - A + Bk + GC)^{-1}G \\ &= \cdots \\ &= \frac{92.8(s+21.6)(s+2.438 \pm j1.17)}{(s+1.33)(s+11.47)(s+7.127 \pm j12.14)}\end{aligned}$$

بدين ترتيب مي توان با ديدگاه کلاسيک نيز پاسخهاي فوق را تحليل نمود. مسلماً با بزرگ شدن بهرهٔ رؤيتگر قطبهاي سيستم کنترل کننده از محور $j\omega$ دور شده، ميزان خطاي تخمين کاهش يافته و نتيجهٔ فيدبك حالت-رؤيتگر حالت دقيق تر و نزديک تر به حالت بدون رؤيتگر خواهد شد.

۷-۷) سيستم حلقه بستهٔ فيدبک حالت – رؤيتگر حالت با اغتشاش ثابت

فرض کنيد به سيستم اغتشاشي ثابت ولي با دامنهٔ غيرمشخص اعمال شود. بدين ترتيب مقادير ماندگار يا نقطهٔ تعادل سيستم جابجا خواهد شد و ميزان مقادير ماندگار مشخص نمي باشد. مي توان به صورت عمومي اين مسئله را با افزايش متغير حالت به شکل استاندارد حل فيدبک حالت– رؤيتگر حالت تبديل نمود. ابتدا, معادله افزايشي سيستم را حول نقطه تعادل $y = y_d =$ ثابت بدست مي آوريم. اگر جواب ماندگار براي اينحالت وجود داشته باشد فرم معادله افزايشي به صورت زير است.

$$\begin{cases}\Delta\dot{x} = A\Delta x + B\Delta u \\ \Delta y = C\Delta x\end{cases} \qquad (۳۷\text{-}۷)$$

حال Δu را بر حسب $u - u^*$ بسط داده که در آن u^* ثابت بوده ولي مقدار آن معين نمي باشد لذا مي توان تغييرات آنرا برابر صفر قرار داد.

$$\begin{cases}\Delta\dot{x} = A\Delta x - Bu^* + Bu \\ \dot{u}^* = 0 \\ \Delta y = C\Delta x\end{cases} \qquad (۳۸\text{-}۷)$$

يا

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\Delta x \\ u^*\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}A & -B \\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta x \\ u^*\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}B \\ 0\end{bmatrix}u \\ \Delta y &= \begin{bmatrix}C & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta x \\ u^*\end{bmatrix}\end{aligned} \qquad (۳۹\text{-}۷)$$

حال رؤيتگر حالت را براي اين سيستم تدوين مي کنيم. درصورتي که سيستم فوق رؤيت پذير باشد تعريف رؤيتگر حالت امکان پذير است. اما چون اين مسئله دوگان کنترل پذيري سيستم است، مي توان شرط رؤيت پذيري سيستم را عدم وجود صفر انتقال در $s = 0$ ناميد. حال تلفيق رؤيتگر- فيدبک حالت را با فرض ارضاء شرط فوق بررسي مي کنيم.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\Delta\hat{x} \\ \hat{u}^*\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}A & -B \\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta\hat{x} \\ \hat{u}^*\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}B \\ 0\end{bmatrix}u + \begin{bmatrix}G_1 \\ G_2\end{bmatrix}(\Delta y - C\Delta\hat{x}) \\ u &= \hat{u}^* + \Delta u = \hat{u}^* - k\Delta\hat{x}\end{aligned} \qquad (۴۰\text{-}۷)$$

که در آن k از سیستم خطي قبل محاسبه مي شود. با اعمال u در معادلـه تخمـين خـواهيم داشت.

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\Delta\hat{x} = (A-Bk-G_1C)\Delta\hat{x}+G_1\Delta y \\ \dfrac{d}{dt}\hat{u}^* = -G_2C\Delta\hat{x}+G_2\Delta y \end{cases} \qquad (۴۱\text{-}۷)$$

$$u=\hat{u}^*-k\Delta\hat{x}$$

لذا به فرم ماتریسي خواهیم داشت

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\Delta\hat{x}\\ \hline u^*\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{c|c}A-Bk-G_1C & 0\\ \hline -G_2C & 0\end{array}\right]\begin{bmatrix}\Delta\hat{x}\\ \hline u^*\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}G_1\\ \hline G_2\end{bmatrix}\Delta y \qquad (۴۲\text{-}۷)$$

$$u=\begin{bmatrix}-k & \vdots & I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta\hat{x}\\ \hline u^*\end{bmatrix}$$

جالب توجه است که ماتریس A سیستم فوق به صورت بلوکي تکـين مـي باشـد. (داراي بلـوک ستوني 0 به انـدازه r) مـي باشـد. ایـن بـدان معناسـت کـه عـلاوه بـر n مقـدار ویـژه مـاتریس $(A-Bk-G_1C)$ سیستم فوق داراي r مقدار ویژه صفر یا تعداد r انتگـرال گیـر $1/s$ است. در عمل این بدان معناست که همانند کنترل کلاسیک, در اینجا به صورت اتوماتیک براي رفـع اغتشاش ثابت, از سیستم نوع یك[1] یا انتگرال گیر در حلقة فیدبک استفاده مي شود.

مثال (۷-۵) موتور DC و ضد هوائی:

فرض کنید موتور DC مثال قبل را تحت بار اغتشاشي ثابت و نامشـخص قـرار دهـيم. تغييـرات ولتاژ در اینحالت را ± 0.5 و تغییرات θ را حدود ± 0.05 rad درنظر بگیرید. براي این سیستم یک فیدبک حالت- رؤیتگر حالت بهینه طراحي و پیاده سازي کنید.

پاسخ: معادلة سیستم را بفرم اغتشاش ثابت بازنویسي مي کنیم.

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\Delta x\\ \hline u^*\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{c|c}A & -B\\ \hline 0 & 0\end{array}\right]\begin{bmatrix}\Delta x\\ \hline u^*\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}B\\ \hline 0\end{bmatrix}u$$

$$\Delta y=\left[\begin{array}{c|c}C & 0\end{array}\right]\begin{bmatrix}\Delta x\\ \hline u^*\end{bmatrix}$$

رؤیتگر بهینه را براي $W=diag(0\quad 0\quad 0\quad (0.5)^2),\ V=(0.03)^2$ طراحي مي کنیم

1 type one

$$A_n=\left[\begin{array}{ccc|c}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 4.458 & 0\\ 0 & -12 & -24 & -20\\ \hline 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right],\ B=\begin{bmatrix}0\\0\\20\\ \hline 0\end{bmatrix}$$

$$C=\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$$

با استفاده از دستور lqe در Matlab:

$$G^T=\begin{bmatrix}G_1^T & G_2^T\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7.174 & 19.60 & 4.823 & -17.67\end{bmatrix}$$

کنترل کننده بهینه را قبلا در مثالهاي قبل بدست آورده ایم.

$$K=\begin{bmatrix}3 & 0.876 & 0.1529\end{bmatrix}$$

ماتریس حلقه بسته:

$$A-Bk-G_1C=\cdots=\begin{bmatrix}-7.174 & 1 & 0\\ -19.06 & 0 & 4.438\\ -64.82 & -29.59 & -27.06\end{bmatrix}$$

لذا معادله تخمین گر بهینه برابر است با:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\Delta\hat{\theta}\\ \Delta\hat{\omega}\\ \Delta\hat{i}\\ \hat{u}^*\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{ccc|c}-7.174 & 1 & 0 & 0\\ -19.06 & 0 & 4.438 & 0\\ -64.82 & -29.59 & -27.06 & 0\\ \hline -17.67 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]\begin{bmatrix}\Delta\hat{\theta}\\ \Delta\hat{\omega}\\ \Delta\hat{i}\\ \hat{u}^*\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}7.174\\ 19.06\\ 4.823\\ -17.76\end{bmatrix}\Delta y$$

$$u=\begin{bmatrix}-3 & -0.8796 & -0.1529 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta\hat{\theta}\\ \Delta\hat{\omega}\\ \Delta\hat{i}\\ \hat{u}^*\end{bmatrix}$$

تابع تبدیل کنترل کننده در اینحالت عبارتست از:

$$\frac{u(s)}{\Delta y(s)}=\frac{-52.69(s+3.958\pm j5.494)(s+21.92)}{s(s+5.971\pm j6.531)(s+22.29)}$$

و چون $\Delta y=\theta-\theta_d=-e$:

$$\frac{u(s)}{e(s)}=-\frac{u(s)}{\Delta y(s)}$$

براحتي مي توان پاسخ این کنترل کننده را مشابه سازي نمود.

۷-۸) جمع بندی

روش مدرن کنترل سيستمهاي صنعتي مبتني بر فيدبك حالت مي باشد. اين در حاليست كه معمولاً در اين سيستمها كلية حالتهاي سيستم در دسترس نبوده و تنها خروجيهاي خاصي از سيستم مورد اندازه گيري واقع مي شوند. در اين فصل ايدة تخمين متغيرهاي حالت از روي خروجيهاي سيستم بسط داده شده است. رؤيتگر حالت به عنوان سيستم ديناميكي كه مبتني بر مشخصات سيستم و اطلاعات خروجي تشكيل مي شود، نياز طراح را به اندازه گيري كلية متغيرهاي حالت مرتفع مي سازد و متغيرهاي تخمين زده شده را در حلقة فيدبك استفاده مي نمايد. علي رغم اينكه رؤيتگر حالت بدين منظور در ادبيات كنترل مدرن معرفي شده است، به خاطر ويژگيهاي منحصر بفرد خود، مورد مقبوليت و استفاده در بسياري از كاربردهاي ديگري كه به نوعي فيلتر سازي يا پيش بيني مورد نياز است، قرار گرفته است. حل مسئلة رؤيتگر حالت، خوشبختانه دوگان حل مسئلة فيدبك حالت بوده، فلذا كلية روشهاي تشريح شده در تعيين بهرة فيدبك حالت، به صورت متناظر در حل مسئلة رؤيتگر حالت نيز مورد استفاده قرار مي گيرد. بدين ترتيب روشهاي جايابي قطب و رويتگر بهينة فيدبك حالت كه به فيلتر كالمن مشهور است تشريح شده اند. در ادامه رويتگرهاي با كاهش مرتبه يا لوئنبرگر نيز مورد بررسي قرار گرفته است. در پايان با تركيب رؤيتگر حالت و فيدبك حالت خصوصيات استفاده از متغير حالت تخمين زده شده در حلقة فيدبك بررسي شده است و با ارائه مثالهاي صنعتي همانند فصول قبل، نحوة تنظيم پارامترهاي كنترل كننده و رؤيتگر و همچنين بررسي عملكرد سيستم حلقه بسته صورت پذيرفته است.

مسائل

۷-۱) سيستم زير رادرنظر بگيريد.

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$
$$y=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}x$$

یک رؤيتگر درجه دو براي اين سيستم چنان طراحي كنيد كه قطبهاي آن بر روي $-3\pm j\sqrt{3}$ قرار گيرند. با فرض ورودي پله واحد و شرايط اوليه $x(0)=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$ توسط مشابه سازي كامپيوتري پاسخ متغيرهاي حالت اصلي و تخمين زده شده را به ازاي $\hat{x}(0)=0$ بدست آورده و مقايسه كنيد.

۷-۲) مسئله ۷-۱ را براي سيستم زير تكرار كنيد.

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}u$$
$$y=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}x$$

۷-۳) مبدل حرارتی

مدل مبدل حرارتي خطي سازي شده در مسئله (۲-۱۲) فصل دوم ارائه شده است. فرض كنيد تنها درجه حرارت خروجي ΔT_{c3} اندازه گيري مي شود و ساير متغيرهاي حالت را مي خواهيم تخمين بزنيم.

الف) با فرض $\Delta F_c, \Delta F_H, \Delta T_{c0}=\Delta T_{H0}=0$ اندازه گيري مي شوند. رؤيتگري را براساس روش جايابي قطب براي سيستم طراحي كنيد كه قطبهاي آن $-1.1, -1, -0.8\pm j0.8, -1\pm j$ باشد.

ب) با استفاده از مدل خطي سازي شده متغيرهاي حالت را براي شرايط زير تعيين كنيد.

$$\Delta T_{c0}(t)=\Delta T_{H0}(t)=0,\ \Delta F_H(t)=0.05\mathrm{m}^3/\mathrm{s},\ \Delta F_c(t)=-0.01\mathrm{m}^3/\mathrm{s}$$
$$\Delta T_{c1}(t)=\Delta T_{c2}(t)=\Delta T_{c3}(0)=7^0 C, \Delta T_{H1}(0)=\Delta T_{H2}(0)=\Delta T_{H3}(0)=-10^0 C$$

همچنين پاسخ متغيرهاي تخمين زده شده را با استفاده از $\Delta F_H(t), \Delta F_c(t), \Delta F_{c3}(t)$ شبيه سازي نموده و با مقادير بدست آمده از مدل مقايسه كنيد.

۷-۴) مبدل حرارتی
مسئله ۷-۳ را تکرار کنید با این تفاوت که فرض کنید جریان اغتشاشي ΔF_c به صورت مستقیم اندازه گیري نمي شود. فرض کنید از فرم $\Delta F_c(t) = A + Be^{-t}$ پیروي کند، که در آن A, B ضرایب ثابتي مي باشند. بدین ترتیب $\Delta F_c(t)$ را توسط مدل درجه دوم زیر مدلسازي مي کنیم.

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} z$$

$$\Delta F_c(t) = z_1 + z_2$$

با اضافه نمودن این معادلات حالت به معادلات حالت اصلي سیستم و اضافه نمودن دو قطب رؤیتگر برروي $-0.9, -0.8$ رؤیتگر مسئله ۷-۳ را تعمیم دهید. براي مشابه سازي از $z_2 = 0.01, z_1 = -0.01$ استفاده نمائید تا علاوه بر تخمین متغیرهاي حالت قبل ΔF_c را نیز تخمین زنید.

۷-۵) راکتور شیمیائی
مدل خطي سازي شده راکتور شیمیائي در مسئله (۲-۱۳) فصل دوم ارائه شده است. با توجه به مشکل بودن اندازه گیري روي خط غلظت مواد در پروسه، معمولاً با نمونه گیري مواد این اندازه گیري با تناوب خاصي در آزمایشگاه صورت مي گیرد. در فاصله بین دو اندازه گیري لازمست میزان غلظت با استفاده از متغیرهاي دیگر اندازه گیري شده همانند درجه حرارت تخمین بزنیم.

الف) فرض کنید $\Delta C_{A0}, \Delta Q, \Delta \mathrm{T}$ اندازه گیري شده و $\Delta F = \Delta \mathrm{T}_0 = 0$ باشد. با استفاده از مدل خطي سازي شده سیستم نشان دهید $\Delta C_C, \Delta C_B$ قابل تخمین نمي باشند.

ب) در مسئله (۵-۵) فصل پنجم نشان داده شده است که در معادله اول مربوط به $\Delta \dot{T}, \Delta \dot{C}_A$ تشکیل یک تحقق کاهش ناپذیر را به ورودي ΔQ و خروجي $\Delta \mathrm{T}$ مي دهد. نشان دهید با اضافه نمودن ورودي ΔC_{A0} این موضوع باقي خواهد ماند.

ج) رؤیتگر مناسبي براي این سیستم طراحي کنید که متغیرهاي $\Delta C_A, \Delta \mathrm{T}$ را تخمین زده و قطبهاي این رؤیتگر برروي $-0.8 \pm j0.8$ قرارگیرد.

د) سیستم را با شرایط زیر مشابه سازي کنید.

$$\Delta Q(t) = 10^4 J/\min,\ \Delta C_{A0}(t) = 0.01\ \mathrm{Kg},$$
$$\Delta C_A(0) = 0.5 \mathrm{Kg\ moles/m^3}, \Delta T(0) = -10^0 C$$

رؤیتگر بند ج) را با ورودیهاي حاصل از این شبیه سازي $\Delta C_{A0}, \Delta Q, \Delta \mathrm{T}$ و شرایط اولیه صفر اجرا نموده و متغییرهاي حالت اصلي و تخمیني را با یکدیگر مقایسه و تحلیل کنید.

۷-۶) راکتور شیمیائی
با توجه به مسئله ۷-۵ مشاهده مي شود معمولا $\Delta C_{A0}(t)$ در بسیاري از موارد در دسترس نمي باشد. مي خواهیم رؤیتگر را به گونه اي تعمیم دهیم که ΔC_{A0} را از روي فرم $Ae^{-0.3t}$ تخمین بزند. یک رؤیتگر تعمیم یافته درجه سه با افزودن یک قطب بر روي ۱- براي این سیستم طراحي کنید. مشابه سازي سیستم را مطابق با بند د) مسئله (۷-۵) تکرار کنید ولي با درنظر گرفتن $\Delta C_{A0}, \Delta C_{A0}(t) = 0.01e^{-0.3t}$ را نیز در اینحالت تخمین زده و مقایسه کنید.

۷-۷) یک رؤیتگر بهینه براي سیستم زیر طراحي کنید.

$$\dot{x} = ax + u + w$$
$$y = x + v$$

بهره رؤیتگر را برحسب پارامتر a و ماتریسهاي وزني V, W طراحي کنید و تغییرات آنرا برحسب تابعي از پارامترهاي طراحي بررسي و تحلیل نمائید. (درنظر داشته باشید $a, V > 0, W \geq 0$ مي تواند مثبت یا منفي باشد.) تابع تبدیل $\hat{x}/y$ را بدست آورید.

۷-۸) طراحي یک مشتق گیر را مي توان از دیدگاه طراحي رؤیتگر بررسي نمود. سیگنال $x(t)$ و سیستم زیر را که مشتق گیري را مدل مي کند درنظر بگیرید.

$$\dot{x} = z$$
$$\dot{z} = w$$
$$y = x + v$$

در این مدل $z(t)$ مشتق $x(t)$ مي باشد. با فرض $V > 0, W = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & w_0^2 \end{bmatrix}$ یک رؤیتگر بهینه براي این سیستم طراحي کنید.
و بدینوسیله تابع تبدیل $\hat{x}/y$ را که در عمل بایستي مشتق گیر باشد تعیین کنید و تأثیر پارامترهاي V, w_0 را که در آن بررسي و تحلیل نمائید.

۷-۹) از یک رؤیتگر براي بازیابي یک سیگنال سینوسي نویزي با فرکانس مشخص مي توان استفاده نمود.

الف) نشان دهيد سيستم هارمونيک اسيلاتور زير:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix} x$$

$$y = x_1$$

به گونه ايست که y(t) يک سيگنال سينوسي با فرکانس ω است و فاز آن بستگي به $x(0)$ دارد .

ب) با درنظر گرفتن $V > 0, W = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ به عنوان پارامترهاي طراحي، رؤيتگر بهينه اي طراحي کنيد و تابع تبديل $\hat{x}/y$ را بدست آورده و تغييرات آنرا نسبت به پارامترهاي V,W تعيين کنيد.

۷-۱۰) موتور DC و هارمونيک درايو

براي سيستم موتور DC و هارمونيک درايو معرفي شده در مسئله (۲-۳) فصل دوم مي خواهيم دقت تخمين متغيرهاي حالت را براي حالتهاي مختلف اندازه گيري بررسي نمائيم. فرض کنيد i, ω_2, θ_2 با دقتهاي نسبي بترتيب $\pm 0.005A,\ \pm 0.05^{\mathrm{rad/s}}, \pm 0.001^{\mathrm{rad}}$ اندازه گيري شوند. اغتشاش ورودي سيستم را به صورت گشتاور در خارجي مدل مي نمائيم، که مستقيما برروي شفت موتور اعمال مي شود. با اضافه نمودن بردار زير به سمت راست معادلات حالت اين گشتاور اغتشاش را مدل وارد مي سازيم.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ w \\ 0 \end{bmatrix}$$

الف) رؤيتگر بهينه اي براي سيستم طراحي کنيد که i, ω_2, θ_2 را به عنوان متغيرهاي اندازه گيري شده و ماتريسهاي وزني زير را شامل شود:

$$V = \mathrm{diag}\begin{bmatrix} 0.001^2 & 0.05^2 & 0.005^2 \end{bmatrix}$$

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & w_0 & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & w_0 & 0 \end{bmatrix}, w_0 = 5$$

ب) سيستم رؤيتگر را با $w(t) = 5\delta(t)$ درحالي مشابه سازي کنيد که شرايط اوليه متغيرهاي حالت و متغيرهاي تخمين شده صفر باشند.

ج) قسمتهاي قبل را با درنظر گرفتن ω_2 به عنوان تنها متغير اندازه گيري شده تکرار کنيد و اهميت اندازه گيري سرعت زاويه اي را در اين مسئله تحليل کنيد.

۷-۱۱) کنترل سرعت غلطک

سيستم مربوط به کنترل سرعت غلطک را که در مسئله (۲-۴) فصل دوم معرفي شده است را درنظر بگيريد. سرعت غلطک با دقت $\pm v_0$ اندازه گيري مي شود. اغتشاشات خارجي را توسط گشتاور خارجي T_0 که به فرم ضربه با دامنه $10^5\delta(t)$ مدل شده است را نيز درنظر بگيريد.

الف) با درنظر گرفتن ماتريسهاي وزني زير رؤيتگر بهينه اي را طراحي کنيد که $\omega_2, \omega_1, \omega_0$ در آن خروجي باشند.

$$V = \mathrm{diag}\begin{bmatrix} \mathrm{v}_0^2 & v_0^2 & v_0^2 \end{bmatrix}, v_0 = 1.0\mathrm{rad/sec}$$

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 10^{-4} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T 10^{10} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 10^{-4} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ب) سيستم رؤيتگر را با شرايط زير مشابه سازي کنيد. شرايط اوليه رؤيتگر را يکسان درنظر گرفته و آنها را مقايسه کنيد.

$$T_0(t) = 10^5\delta(t),\ \omega_1(0) = \omega_2(0) = 66.68 \text{ rad/sec},\ \omega_0(0) = 4.67\text{rad/sec}$$

$$\Delta_1(0) = \Delta_2(0) = 0,\ u_1(t) = u_2(t) = 400v$$

ج) قسمتهاي قبل را با $v_0 = 0.01 \text{ rad/sec}, v_0 = 0.1 \text{ rad/sec}$ مجدداً مشابه سازي نمائيد. اين تغيير در پارامتر طراحي به معناي افزايش دقت اندازه گيري است نتايج بدست آمده را تحليل کنيد.

۷-۱۲) پاندول دوتائی معکوس

مدل خطي سازي شده پاندول معکوس دوتائي در مسئله (۲-۱۶) فصل دوم ارائه شده است. با فرض $\ell_2 = 0.5\mathrm{m}, \ell_1 = 1\mathrm{m}$ رؤيتگر بهينه اي طراحي کنيد که در آن x, θ_2, θ_1 را به صورت متغيرهاي اندازه‌گيري شده شامل شود. خطاي اندازه‌گيري را به ترتيب $\pm 0.001^{\mathrm{m}}, \pm 0.001^{\mathrm{rad}}, \pm 0.001^{\mathrm{rad}}$ درنظر بگيريد. همچنين به عنوان خطاي مدلسازي گشتاور خروجي ضربه با دامنه w_0 را که مستقيما بر پاندولها اعمال مي شوند درنظر بگيريد اين مدل در واقع فرم $W = diag(w_0^2\ w_0^2)$ را براي ماتريس وزني پيشنهاد مي کند. رؤيتگر بهينه را به ازاي مقادير مختلفي از w_0 طراحي کنيد و با محاسبه مقادير ويژه سيستم رؤيتگر $(A - GC)$ حداقل بهرة کنترلي را درنظر بگيريد، که مقادير ويژه بدست آمده داراي قسمت حقيقي کوچکتر از -2 و يا ثابت زماني کمتر از 0.5 ثانيه داشته باشند.

۷-۱۳) براي سيستم معرفي شده در مسئله ۷-۲ يک رؤيتگر کاهش يافته (لوئنبرگر) با درجة يک و مقدار ويژه -2 طراحي کنيد.

۷-۱۴) خروجي سيستم معرفي شده در مسئله ۷-۱ از ترکيب خطي دو متغير حالت تشکيل شده است $y = x_1 + x_2$

الف) متغير جديدي تعريف مي کنيم که در آن $y = z_1, z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$ با درنظر گرفتن تبديل همانندي $x = Tz$ به فرم $T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ x & x \end{bmatrix}$ سطر دوم T^{-1} را به گونه اي اختيار کنيد که T معکوس پذير باشد. بدين ترتيب $y = z_1$ خواهد بود.

ب) حال براي سيستم تغيير فرم يافته با تبديل همانندي T يک رؤيتگر کاهش يافته لوئنبرگر با درجه واحد طراحي کنيد که قطب آن برروي -4 جايابي کند. با استفاده از $\hat{z}_2, z_1$ تخمين متغيرهاي حالت اصلي سيستم $\hat{x}_2, \hat{x}_1$ را بدست آوريد.

۷-۱۵) موتور DC و هارمونيک درايو

براي سيستم موتور DC و هارمونيک درايو معرفي شده در مسئله (۲-۵) فصل دوم

الف) با فرض اندازه گيري θ_2 يک رؤيتگر کاهش يافته درجه چهار با قطب هاي $-10 \pm j10$ و $-200 \pm j200$ طراحي کنيد.

ب) با فرض اندازه گيري ω_2, i, θ_2 رؤيتگر کاهش يافته درجه با قطبهاي $-10 \pm j10$ طراحي کنيد. (توجه: بي نهايت ماتريس بهره رؤيتگر مي توان يافت که اينکار را انجام مي دهند.)

ج) سيستم و رؤيتگر طراحي شده را با شرايط زير مشابه سازي نمائيد. کلية شرايط اولية ديگر را برابر صفر درنظر بگيريد.

$$v = 2V,\ \omega_2(0) = 5 \text{ rad/sec}$$

۷-۱۶) جرثقيل

مدل خطي سازي شده جرثقيل در مسئله (۲-۱۴) فصل دوم ارائه شده است.

الف) يک رؤيتگر کاهش يافته با درجه سه براي سيستم به گونه اي طراحي کنيد که x متغير خروجي اندازه گيري شده باشد و قطبهاي سيستم خطا برروي $-10, -10 \pm j10$ جايابي گردند.

ب) رؤيتگر کاهش يافته ديگري با درجه دو به ازاي اندازه گيري θ, x به گونه اي طراحي کنيد که قطبهاي سيستم خطا برروي $-10 \pm j10$ جايابي گردند.

ج) با فرض $\theta(0) = 0.5^{\text{rad}}, F = 0$ و ساير متغيرهاي سيستم و رؤيتگر برابر صفر، رفتار ديناميکي سيستم و رؤيتگرهاي فوق را مشابه سازي نموده و نتايج را مقايسه نمائيد.

۷-۱۷) بندباز

براي مدل خطي سازي شده بندباز با درنظر گرفتن ϕ, θ به عنوان خروجيهاي اندازه گيري شده رؤيتگر کاهش يافته با درجه دو طراحي کنيد و سرعتهاي زاويه اي را توسط آن تخمين بزنيد. براي اين رؤيتگر قطبهاي سيستم خطا را برروي $-20 \pm j20$ جايابي کنيد.

۷-۱۸) پاندول دوتائی معکوس

با فرض $\ell_2 = 0.5^{\text{m}}, \ell_1 = 1^{\text{m}}$ براي سيستم خطي سازي شدة پاندول دوتائي معکوس با استفاده از روش بهينه و با فرض اندازه گيري θ_2, θ_1, x رؤيتگر کاهش يافته اي طراحي کنيد. براي اين منظور فرض کنيد $V = v^2 \cdot I,\ W = I$ با تنظيم v_0 طي چند مرحله طراحي و سعي و خطا رؤيتگري را نهائي کنيد که کليه مقادير ويژه سيستم خطا کمتر از -2 جايابي گردند.

۷-۱۹) Maglev

الف) براي سيستم تعليق مغناطيسي معرفي شده در مسئلة (۲-۱۷) فصل دوم، رؤيتگر حالت لوئنبرگر طراحي کنيد که با فرض اندازه گيري $\Delta S_{G2}, \Delta S_{G1}, \Delta S_{L2}, \Delta S_{L1}$ متغيرهاي حالت ديگر سيستم را تخمين بزند و محل قطبهاي سيستم خطاي اندازه گيري را برروي $-300 \pm j300$ جايابي نمايد.

ب) توسط مشابه سازي متغيرهاي حالت اصلي و تخمين زده شده را براي ورودي صفر و شرايط زير تعيين نموده و در مقايسه نمائيد. شرايط اوليه ساير متغيرهاي حالت برابر صفر

$\Delta z(0) = 1, \Delta\theta(0) = 1, \Delta y(0) = 1$

۷-۲۰) Maglev

در عمل سنسورهاي سيستمها دچار عيب مي شوند، ولي خوشبختانه اين عيب ها قابل شناسائي مي باشند. فرض کنيد اندازه گيري ΔS_{L1} دچار اشکال شده و ديگر مقادير قابل قبولي

از آن سنسور در دسترس نباشد. مي خواهيم رؤيتگر را به گونه اي تغيير دهيم تا اين مشكل را مرتفع سازد.

الف) براي مدل Maglev رؤيتگر لوئنبرگري طراحي كنيد كه با فرض اندازه گيري $\Delta S_{G2}, \Delta S_{G1}, \Delta S_{L2}$ قطب سيستم خطا را برروي $-300, -300 \pm j300$ جايابي كند.

ب) سيستم و رؤيتگر جديد را براي شرايط داده شده در مسئله ۷-۱۹ مشابه سازي كنيد و با يكديگر مقايسه كنيد.

ج) راهكار عملي به كارگيري اين رؤيتگر را در شرايط معيوب شدن سنسور ΔS_{L1} به گونه اي تعيين كنيد كه گذر از حالت رؤيتگر مرتبه دوّم به مرتبهٔ سوّم به نرمي صورت پذيرد.

۷-۲۱)

در مسئله ۶-۶ فصل ششم، براي سيستم معرفي شده در مسئله ۶-۱، فيدبک براساس روش جايابي قطب طراحي شده است. همچنين يک رؤيتگر مرتبه دو براي اين سيستم در مسئله ۷-۱ طراحي شده است.

الف) با استفاده از اين رؤيتگر و كنترلر طراحي شده سيستم حلقه بسته متشكل از رؤيتگر حالت- فيدبک حالت را با يكديگر تلفيق كنيد و معادلات حالت تلفيق را تعيين كنيد.

ب) تابع تبديل $\frac{u}{y}$ را براي اينحالت تعيين كنيد.

۷-۲۲)

مسئله ۷-۲۱ را براي رؤيتگر طراحي شده در مسئله ۷-۲ و كنترلر متناظر آن كه در مسئله ۶-۷ طراحي شده است تكرار كنيد.

۷-۲۳)

براي سيستم معرفي شده در مسئله ۷-۱ مي خواهيم مسئله تنظيم سيستم را به ورودي مرجع غير صفر با خطاي ماندگار صفر بررسي كنيم. براي نيل به اين مقصود لازمست حالت ماندگار ورودي u^* را تعيين و به سيستم اعمال كنيم. در اين مسئله مي خواهيم موضوع تخمين u^* را به علاوه تخمين متغيرهاي افزايشي Δx به صورت همزمان را تحليل كنيم.

الف) يک رؤيتگر مرتبه سه براي تخمين $\Delta x, u^*$ طراحي كنيد.

ب) با استفاده از بهره فيدبک حالت طراحي شده در مسئله (۶-۶) كنترل كننده زير را تكميل كنيد.

$$u = \hat{u}^* + k^T \hat{x}$$

ج) تابع تبديل سيستم $\frac{u}{e}$ را با فرض $e = y_d - y = -\Delta y$ را تعيين كنيد و نشان دهيد كه اين تابع تبديل شامل يک انتگرال گير مي باشد.

۷-۲۴) موتور DC و هارمونيک درايو

كنترل بهينه اي براي سيستم موتور DC و هارمونيک درايو در مسئله (۶-۲۰) طراحي شده است. همچنين رؤيتگر بهينه اي نيز در مسئله (۷-۱۰) ارائه شده است. اين رؤيتگر براي سيستم با متغيرهاي افزايشي نيز معتبر مي باشد، كه متناظر با $\theta_2 = \theta_d$ تعيين شده باشد. با فرض اندازه گيري i, ω_2, θ_2 لازمست مقادير ماندگار ورودي v و متغيرهاي حالت براي توليد $\Delta v, \Delta i, \Delta\omega_2, \Delta\theta_2$ را تعيين كنيم. خوشبختانه نشان داده شده است كه بجز مقدار ماندگار θ_2 ساير مقادير برابر صفر مي باشند.

الف) معادلات حالت سيستم حلقه بسته با استفاده از رؤيتگر حالت را بدست آورد.

ب) فرم تابع تبديل سيستم به صورت $v = H_1 e + H_2\omega + H_3 i$ با فرض $e = \theta_d - \theta_2$ توابع تبديل H_3, H_2, H_1 را تعيين كنيد.

ج) پاسخ با شرايط اوليه صفر به ورودي پلّه واحد $\theta_d = 1^{\text{rad}}$ را در حالات

- فيدبک حالت
- رؤيتگر حالت- فيدبك حالت

را مشابه سازي و مقايسه كنيد.

۷-۲۵) موتور DC و هارمونيک درايو

كنترل كننده فيدبک حالت براي اين سيستم بر اساس روش جايابي قطب در مسئله (۶-۹) و دو رؤيتگر حالت با درجه چهار و دو در مسئله (۷-۱۵) طراحي شده است.

الف) رؤيتگر حالت را براي تنظيم حالت $\theta_2 = \theta_d$ تعميم دهيد.

ب) معادلات حالت سيستم حلقه بسته را به ازاي رؤيتگرهاي حالت فوق و فيدبک حالت مسئله (۶-۹) بدست آوريد (هر دو رؤيتگر مورد توجه مي باشند).

ج) پاسخ سيستم حلقه بسته را در هر دو حالت به ازاي شرايط اوليه صفر مشابه سازي و مقايسه كنيد.

۷-۲۶) کنترل سرعت غلطک

کنترلر بهينه اي براي سيستم مزبور در مسئله (۶-۳۱) طراحي شده است و رؤيتگر بهينه اي نيز در مسئله (۷-۱۱) طراحي شده است.

الف) رؤيتگر بهينه طراحي شده را براي متغيرهاي افزايشي متناظر با $\omega_0 = \omega_d^*$ سرعت مرجع ثابت غلطک تعميم دهيد. توجه کنيد که نسبت R/r که سرعت ω_0 را به ω_2, ω_1 مرتبط کند دقيقاً شناخته شده است، لذا از رابطه $\omega_1^* = \omega_2^* = (R/r)\omega_0^*$ قابل اطمينان است.

ب) معادلات حالت سيستم حلقه بسته را با استفاده از کنترلر و رؤيتگر مزبور بدست آوريد. فرض کنيد $\omega_d(t)$ ورودي مرجع سيستم دقيقا اندازه گيري مي شود.

ج) پاسخ سيستم حلقه بسته را به شرايط اوليه صفر ورودي $\omega_d(t) = 25 - 25e^{-t/\tau}$ به ازاي $\tau = 10^{\sec}$ براي حالت فيدبک حالت کامل و فيدبک حالت – رؤيتگر حالت مشابه سازي و مقايسه نمائيد.

۷-۲۷) مبدل حرارتی

کنترل کننده فيدبک حالتي براي سيستم مزبور در مسئله (۶-۱۰) طراحي شده و رؤيتگر حالت سيستم در مسئله (۷-۳) ارائه شده است، که بايستي به ازاي ورودي ماندگار ΔF_H^* تعميم يابد.

الف) معادله $\Delta \dot{F}_H^* = 0$ را به معادلات افزايشي حالت سيستم اضافه نمائيد. با فرض ΔT_{c3}^* به عنوان خروجي اندازه گيري شده، رؤيتگر حالت مرتبه هفتمي طراحي کنيد که علاوه بر متغيرهاي حالت، ΔF_H^* را نيز تخمين بزند. قطب سيستم خطي همانند مسئله (۷-۳) جايابي کند به انضمام قطب اضافي در -5 جايابي شود.

ب) فرض کنيد کنترل کننده به صورت $\Delta F_H = \Delta F_H^* - k\Delta\hat{x}$ پياده سازي شود که در آن k بهره فيدبک حالت بدست آمده در مسئله (۶-۱۰) باشد. تابع تبديل $\Delta F_H / e$ را درحالتيکه $e = \Delta T_{c3d} - \Delta T_{c3}$ باشد محاسبه کنيد.

ج) پاسخ $\Delta T_{c3}(t)$ را به ازاي شرايط زير و ورودي پلّه ΔF_c با دامنة $0.01^{m^3/s}$ مشابه سازي کنيد.

$$\Delta T_{c3d} = 5^0 c, \Delta F_c = 0.01\mathrm{m(t)}$$

۷-۲۸) راکتور شيميائی

مي خواهيم کنترلر طراحي شده در مسئله (۶-۱۱) را به گونه اي تعميم دهيم که اغتشاش ثابت نامعين را نيز شامل شود.

الف) با اضافه نمودن معادله حرکت $\Delta\dot{Q} = 0$ به دو معادله حالت سيستم ، سيستم تعميم يافته را تعيين کنيد.

ب) با فرض اندازه گيري ΔT، يک رؤيتگر کاهش يافته لوئنبرگر براي تخمين $\Delta Q^*, \Delta C_A$ طراحي کنيد که قطبهاي سيستم خطا برروي $-0.8 \pm j0.8$ جايابي گردد.

ج) رؤيتگر را به گونه اي بازنويسي کنيد که نياز به تعيين مشتقات متغيرهاي حالت نداشته باشد. معادلات حالت کنترلر را به فرم

$$\Delta Q = \Delta\hat{Q}^* - k\begin{bmatrix}\Delta T\\ \Delta\hat{C}_A\end{bmatrix}$$

را با بهره کنترل کننده طراحي شده در مسئلة (۶-۱۱) بازنويسي کنيد.

د) تابع تبديل کنترل کننده $\frac{\Delta Q}{\Delta T_d}$ را تعيين کنيد.

ه) کنترل کننده بدست آمده را برروي مدل غيرخطي سيستم مشابه سازي نموده و پاسخهاي سيستم را به ورودي پله ΔT برابر $40^o K, 20^o K, 10^o K$ بدست آوريد.

۷-۲۹) جرثقيل

کنترلر بهينه طراحي شده براي سيستم جرثقيل در مسئله (۶-۲۴) و دو رؤيتگر لوئنبرگر طراحي شده در مسئله (۷-۱۶) رادرنظر بگيريد.

الف) رؤيتگر لوئنبرگر را براي مقادير متناظر با $x = x_d$ تعميم دهيد.

ب) دو سيستم حلقه بسته با فيدبک حالت مسئله (۶-۲۴) و رؤيتگرهاي (۷-۱۶) تلفيق کنيد.

ج) پاسخ سيستم را با شرايط اوليه صفر ورودي مرجع پلّه $x_d = 5m$ به ازاي فيدبک حالت به تنهائي و فيدبک حالت –رؤيتگر حالت با دو سيستم قسمت ب) به دست آورده و با يکديگر مقايسه نمائيد.

د) کنترلر متناظر با رؤيتگر مرتبه سه را برروي سيستم غيرخطي به ازاي $x_d = 1m$، $x_d = 10m, x_d = 5m$ مشابه سازي نموده و نتايج را مقايسه و تحليل کنيد.

۷-۳۰) بندباز

الف) کنترلر بهينه مسئله (۶-۲۳) را با رؤيتگر لوئنبرگر مسئله (۷-۱۷) تلفيق نموده و سيستم حلقه بسته را براساس رؤيتگر فوق بدست آوريد.

ب) کنترلر فوق را برروي مدل غيرخطي سيستم به ازاي شرايط اوليه ارائه شده در مسئله (۶-۱۳) مشابه سازي نموده و پاسخها را بدست آورده و تحليل نمائيد.

۷-۳۱) پاندول دوتائی معکوس

کنترلر بهینه طراحي شده براي سیستم در مسئله (۶-۲۵) و رؤیتگر مسئله (۷-۱۸) رادرنظر بگیرید.

الف) کنترلر رؤیتگر فوق را با هم ترکیب نموده و سیسیتم حلقه بسته را تشکیل دهید.

ب) پاسخ سیستم را به ازاي شرایط اولیه زیر $\theta_1(0)=0.1\text{rad},\ \theta_2(0)=-0.1\text{rad}$ و $\omega_1(0)=\omega_2(0)=x(0)=v(0)=0$ به ازاي فیدبک حالت به تنهائي و فیدبک حالت-رؤیتگر حالت مشابه سازي نمائید.

۷-۳۲) Maglev

کنترلر فیدبک حالت طراحي شده براي این سیستم در مسئله (۶-۲۶) را با رؤیتگر حالت مسئله (۷-۱۹) تلفیق کنید.

الف) پاسخ سیستم را به ازاي شرایط زیر:

$$1)\Delta z(0)=1 \qquad 2)\ \Delta\theta(0)=1 \qquad 3)\Delta y(0)=1$$

و سایر متغیرهاي حالت و تخمین برابر صفر مشابه سازي نمائید.

ب) ماتریس تبدیل سیستم را به ازاي ورودیهاي فاصله هوائي و متغیرهاي ورودي به عنوان خروجي محاسبه کنید.

۷-۳۳) Maglev

مقادیر نامي u_{L1},u_{G2},u_{G1} انتخابي هستند اما معمولاً به دقت قابل اندازه گیري نمي باشند.

الف) سه معادله $\Delta\dot{u}_{L1}=\Delta\dot{u}_{L2}=\Delta\dot{u}_{G2}=0$ را به معادلات حالت اضافه نموده و رؤیتگر لوئنبرگر درجه پنجمي براي سیستم تعمیم یافته طراحي کنید که قطبهاي سیستم خطا را برروي $-250\pm j250,-300\pm j300,-300$ جایابي نمائید.

ب) کنترلر بهینه اي براي سیستم تعمیم یافته مطابق با مسئله (۶-۲۶) طراحي کنید.

ج) سیستم حلقه بسته در اینحالت را با شرایط اولیه مسئله (۷-۳۲) مشابه سازي کنید.

د) ماتریس تبدیل سیستم را به ازاي ورودي فاصله هوائي و متغیرهاي ورودي به عنوان خروجي سیستم محاسبه کنید وجود قطب سیستم برروي مبداء $s=0$ را تأیید کنید.

مراجع

[1] Anderson, Brian D. O. and John B. Moore, *Optimal control: linear quadratic methods*, Prentice Hall, c1990.

[2] Bélanger, Pierre., *Control engineering : a modern approach,* Saunders College Pub., c1995.

[3] Boyd, Stephen P. and Craig H. Barratt., *Linear* controller design : *limits of performance,* Prentice Hall, c1991.

[4] Bryson, Arthur E., Applied linear optimal control : examples and algorithms, Cambridge University Press, 2002.

[5] Chen, Chi-Tsong., *Linear system theory and design*, Oxford University Press, c1999.

[6] Hager, William W. and Panos M. Pardalos, *Optimal control: theory, algorithms, and applications,* Kluwer Academic Pubs., c1998.

[7] Kailath**,** Thomas., *Linear systems*, Prentice-Hall, c1980.

[8] Kamen, Edward W. and J.K. Su, *Introduction to optimal estimation,* Springer, c1999.

[9] Shinners, Stanley M., *Modern control system theory and design,* 2nd ed., J. Wiley, c1998.

[10] Tewari, Ashish., Modern control design with MATLAB and SIMULINK, John Wiley, c2002.

[11] Zarchan, Paul and Howard Musoff, *Fundamentals of Kalman filtering : a practical approach,* American Institute of Aeronautics and Astronautics, c2000.

[12] دکتر علي خاکي صدیق، *اصول کنترل مدرن*، انتشارات دانشگاه تهران، ۱۳۷۴.