Subject:
Year. Month. Date.

جزوه ریاضی عمومی ۲ — به نام خدا

فصل اول : توابع چند متغیره :

حد و پیوستگی :

$X=(x,y,\dots,n)$ ، نقطه دلخواهی از فضای $\mathbb{R}^n$ ، تابع $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ را در نظر بگیرید، می‌نویسیم

$\lim\limits_{X\to X_0} f(X)=L$ که $X=(x,y,\dots,n)$ هرگاه :

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0;\ 0<|\underbrace{(x,y,\dots,n)}_{X}-\underbrace{(x_0,y_0,\dots,n_0)}_{X_0}|<\delta \Rightarrow |f(x,y,\dots,n)-L|<\varepsilon$$

اگر $X_0=(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ ، داریم: $|X=(x,y)-X_0=(x_0,y_0)|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$

همچنین اگر $X_0=(x_0,y_0,z_0)\in\mathbb{R}^3$ باشد، خواهیم داشت

$$|(x,y,z)-(x_0,y_0,z_0)|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$$

$|u|=\sqrt{u^2}$ $|u|\le\sqrt{u^2+v^2}$

یادآوری چند نامساوی مهم که در حل سوالات کمک خواهند کرد :

1) $|u|\le\sqrt{u^2+v^2}$ $\left(\sqrt{u^2}\le\sqrt{u^2+v^2}\right)$ 3) $|\sin u|\le 1$

2) $|u\pm v|\le|u|+|v|$ 4) $|\sin u|\le|u|$

مثال) ثابت کنید

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(x+y)^2}{2|x|+|y|}=0$$

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0;\ 0<|\underbrace{(x,y)-(0,0)}_{\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}}|<\delta \rightarrow \left|\frac{(x+y)^2}{2|x|+|y|}-0\right|<\varepsilon$$

$$\rightarrow \frac{(x+y)^2}{2|x|+|y|}<\varepsilon \xrightarrow[\text{پس } (x+y)^2\le(|x|+|y|)^2]{\text{از نامساوی ۲: } x+y\le|x|+|y|} \frac{(|x|+|y|)^2}{|x|+|y|}<\varepsilon \Rightarrow$$

PAPCO

$$|x|+|y|<\varepsilon \xrightarrow[|y| \le \sqrt{x^2+y^2}]{\sqrt{x^2}=|x| \le \sqrt{x^2+y^2} \ \text{از نتیجه ۱}} \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2+y^2}<\varepsilon \implies$$

$$2\sqrt{x^2+y^2}<\varepsilon \implies \sqrt{x^2+y^2}<\frac{\varepsilon}{2}$$

پس برای اینکه حکم ثابت شود باید $\delta \le \frac{\varepsilon}{2}$ اختیار شود.

بچه ها اگر یادتون باشه در ریاضی ۱ می‌گفتیم تابع f را در نقطهٔ $x_0 \in R$ پیوسته گوییم هرگاه:
مقدار تابع در آن نقطه با حد تابع برابر باشد. $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

تعریف پیوستگی توابع چند متغیره: تابع f را در نقطهٔ $X_0 \in R^n$ پیوسته گوییم هرگاه

$$\lim_{X \to X_0} f(X) = f(X_0) \quad \text{s.t} \quad X=(x,y,\dots,n) \ , \ X_0=(x_0,y_0,\dots,n_0)$$

مثال ۱) امتحان نیمسال اول (۹۳): پیوستگی تابع زیر را در مبدأ $(0,0)$ بررسی کنید.

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{\sin^2(x-y)}{|x|+|y|} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

$$1) \ \underset{(x,y)\to(0,0)}{f(0,0)} = (0,0) \xrightarrow{\text{طبق تعریف ضابطه مقدار تابع در مبدأ موجود و برابر صفر است}}$$

حال می‌خواهیم به کمک تعریف حد ثابت کنیم حد تابع در مبدأ برابر صفر است

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta>0 \ ; \ 0<|X-X_0| = \underbrace{|(x,y)-(0,0)|}_{\left(\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}<\delta\right)} < \delta \longrightarrow |f(x,y)-0|<\varepsilon$$

$$\left|\frac{\sin^2(x-y)}{|x|+|y|}\right|<\varepsilon \implies \frac{\sin^2(x-y)}{|x|+|y|}<\varepsilon \implies \frac{|\sin(x-y)| \cdot |\sin(x-y)|}{|x|+|y|}<\varepsilon$$

$$\xrightarrow{|\sin u| \le u \quad \text{نتیجه ۴}} \frac{|x-y| \cdot |x-y|}{|x|+|y|}<\varepsilon \xrightarrow{|x-y| \le |x|+|y| \ \text{نتیجه ۳}} \frac{\cancel{(|x|+|y|)}(|x|+|y|)}{\cancel{|x|+|y|}}<\varepsilon$$

$\implies$

$$\Rightarrow |x|+|y|<\varepsilon \xrightarrow[\sqrt{y^2}=|y|\le\sqrt{x^2+y^2}]{\sqrt{x^2}=|x|\le\sqrt{x^2+y^2}} \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2+y^2}<\varepsilon \Rightarrow$$

$$2\sqrt{x^2+y^2}<\varepsilon \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2}<\frac{\varepsilon}{2}$$

بنابراین کافیست حد $\frac{\varepsilon}{2} > \delta$ انتخاب شود تا حد تابع در مبدأ برابر صفر شود.

$$f(0,0)=\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$$

نکته کلیدی: معمولاً به دو طریق برای پیوستگی سؤال می‌آید:

نوع سؤالات اول از طریق تعریف اثبات می‌شود.

نوع سؤالات دوم (آن سؤالاتی که به صورت xy ، x^2y ، y^2x ، ... و جمله‌ای مانند این در صورت سؤال باشد

و این نوع توابع معمولاً پیوسته نیستند و به صورتی که در زیر خواهد آمد نتیجه می‌گیریم توابع به این صورت پیوسته نیستند.

قضیه: اگر تابع f در نقطه (x_0,y_0) حدی برابر L داشته باشد ($\lim_{X=(x,y)\to(x_0,y_0)} f(X)=L$)

آنگاه از هر مسیر به نقطه (x_0,y_0) نزدیک شویم تابع f به عدد L نزدیک می‌شود.

نتیجه بسیار مهم که سؤالات از نوع دوم را به وسیله این نتیجه می‌توان حل کرد: اگر حداقل دو مسیر پیدا کنیم به طوری که حد تابع f در نقطه (x_0,y_0) روی این دو مسیر با هم برابر نباشد، آنگاه می‌توان نتیجه گرفت که تابع f در (x_0,y_0) حد ندارد.

تذکر خیلی مهم: اگر جواب حد روی مسیرهایی که استفاده می‌کنیم یکسان شود نمی‌توان نتیجه گرفت که تابع f در آن نقطه حد دارد. (وجود حد را باید از تعریف حد اثبات کنیم.)

مثال خرداد ۹۳) پیوستگی تابع مقابل را در مبدأ بررسی کنید:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^3}{x^4+2y^6} & ,(x,y)\neq(0,0)\\[2mm] 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

حل) مسیر $y=(mx^2)^{\frac{1}{3}}$ را در نظر بگیرید:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^3}{x^4+2y^6}=\lim\frac{x^2\left((mx^2)^{\cancel{\frac{1}{3}}}\right)^{\cancel{3}}}{x^4+2\left((mx^2)^{\cancel{\frac{1}{3}}}\right)^{\cancel{6}\,2}}=\lim\frac{m\cancel{x^4}}{\underbrace{x^4+2m^2x^4}_{\cancel{x^4}(1+2m^2)}}=\frac{m}{1+2m^2}$$

به دلیل این که حاصل حد به مقدار m بستگی دارد (به ازای مقادیر مختلف m، جواب حد متفاوت است

بنابراین تابع f در نقطه $(0,0)$ حد ندارد، لذا در این نقطه پیوسته نیست.

تمرین: پیوستگی تابع $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ را در نقطه $(0,0)$ بررسی کنید.

حل) مسیر $y=mx^2$ را در نظر بگیرید

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim\frac{x^2(mx^2)}{x^4+(mx^2)^2}=\lim\frac{mx^4}{x^4(1+m^2)}=\frac{m}{1+m^2}$$

به دلیل اینکه حاصل حد به مقدار m بستگی دارد (به ازای مقادیر مختلف m، جواب حد متفاوت است

بنابراین تابع f در نقطه $(0,0)$ حد ندارد، لذا در این نقطه پیوسته نیست

تمرین: در مورد پیوستگی و یا عدم پیوستگی تابع زیر در مبدأ بحث کنید:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(x+y^2)^2+x^2}{(x+y^2)^2-x^2} & (x,y)\neq(0,0)\\[2mm] 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

حل: $y=(mx)^{\frac{1}{2}}$

$$\lim \frac{(x+y^2)^2+x^2}{(x+y^2)^2-x^2}=\frac{\left(x+\left((mx)^{\cancel{\frac{1}{2}}}\right)^{\cancel{2}}\right)^2+x^2}{\left(x+\left((mx)^{\cancel{\frac{1}{2}}}\right)^{\cancel{2}}\right)^2-x^2}$$

$$=\frac{(x+mx)^2+x^2}{(x+mx)^2-x^2}=\frac{x^2(1+m^2)+x^2}{x^2(1+m^2)-x^2}=\lim\frac{\cancel{x^2}(1+m^2+1)}{\cancel{x^2}(1+m^2-1)}=\frac{2+m^2}{m^2}$$

چون حاصل حد به مقدار m بستگی دارد (به ازای مقادیر مختلف m، جواب متفاوت است) بنابراین تابع f در نقطهٔ (0,0) حد ندارد، لذا در این نقطه پیوسته نیست.

تمرین: حد $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2-5y^2}{x^2+y^2}$ را در صورت وجود بیابید.

حل: $y=mx$

$$\lim\frac{x^2-5m^2x^2}{x^2+m^2x^2}=\lim\frac{\cancel{x^2}(1-5m^2)}{\cancel{x^2}(1+m^2)}=\frac{1-5m^2}{1+m^2}$$

چون جواب به مقدار m بستگی دارد، بنابراین حد موجود نیست.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مشتقات جزئی

اگر از تابع چند متغیره نسبت به یکی از متغیرهای مستقل مشتق بگیریم (سایر متغیرها را ثابت فرض کنیم)، به آن مشتق جزئی تابع گوییم. برای مثال، می‌خواهیم از تابع دو متغیره $f=f(x,y)$ نسبت به متغیر x در نقطه‌ی (x_0,y_0) مشتق بگیریم. در این صورت با فرض ثابت بودن $y=y_0$ همانند مشتق تک متغیره از تابع $f(x,y_0)$ نسبت به x مشتق می‌گیریم و آن را با نماد $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ نمایش می‌دهیم و آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

تعریف) مشتقات جزئی مرتبه اول تابع $Z=f(x,y)$ نسبت به متغیرهای x و y در نقطه‌ی (x_0,y_0) را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$f_x(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

مشتق f نسبت به x را با نمادهای $\frac{\partial f}{\partial x}$ ، f_x ، f'_x ، D_1f و D_xf نمایش می‌دهیم.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}=f_y(x_0,y_0)$$

مشتق f نسبت به y را با نمادهای $\frac{\partial f}{\partial y}$ ، f_y ، f'_y ، D_2f و D_yf نمایش می‌دهند.

مثال: هرگاه

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-xy}{x+y} & ; (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ; (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

الف) $f_x(0,0)$ و $f_y(0,0)$ را بیابید.

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\frac{\frac{(\Delta x)^2-(\Delta x)(0)}{\Delta x+0}-0}{\Delta x}$$

$\frac{\Delta x(\Delta x-1)}{\Delta x}\times\frac{1}{\Delta x}$ ، $\lim\frac{(\Delta x-1)}{\Delta x}$ ، H.P $\frac{1}{1}=1$

$f(1)=\frac{x-1}{x}=\frac{1}{1}=1$

PAPCO

$$f_y(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(0,\Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = \lim \frac{\frac{(0)^2 - (0)(\Delta y)}{\Delta y} - 0}{\Delta y} = \frac{0}{\Delta y} = 0$$

ب) $f_x(1,2)$ را برای هر $(x,y) \neq (0,0)$ بخواهد بیابید.

برای محاسبه $f_x(1,2)$ در قسمت ب) می‌توانیم y را عدد ثابت فرض کنیم و از تابع نسبت به متغیر x مشتق بگیریم

داریم:

$$f_x(x,y) = \frac{(2x-y)(x+y) - (1)(x^2-xy)}{(x+y)^2} \Rightarrow f_x(1,2) = \frac{1}{9}$$

$e^u \to u'e^u$

مثال) مشتقات جزئی مرتبه اول تابع $u = e^{\frac{x}{y}} + e^{\frac{z}{y}}$ را بیابید.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{y} e^{\frac{x}{y}} , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} e^{\frac{x}{y}} - \frac{z}{y^2} e^{\frac{z}{y}} , \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{y} e^{\frac{z}{y}}$$

مشتقات جزئی مرتبه بالاتر: تابع دو متغیره $z = f(x,y)$ مفروض است چنانچه از مشتقات جزئی مرتبه اول $\frac{\partial f}{\partial x}$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$ مجدداً نسبت به متغیرهای x و y مشتق بگیریم مشتقات جزئی مرتبه دوم حاصل می‌شود. برای مثال اگر بخواهیم از $\frac{\partial f}{\partial x}$ نسبت به x مشتق بگیریم داریم

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) = f_{xx}(x_0,y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\Delta x, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

اگر بخواهیم از $\frac{\partial f}{\partial x}$ نسبت به y مشتق بگیریم داریم

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy}(x_0,y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0+\Delta y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

حال اگر بخواهیم از $\frac{\partial f}{\partial y}$ نسبت به x مشتق بگیریم داریم:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx}(x_0, y_0) = \lim \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0+\Delta x, y_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

مثال مشتقات جزئی مرتبه اول و مرتبه دوم تابع $z = \ln(x^2+y^2)$ را بیابید.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2} \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{y^2+x^2}$$

حال برای محاسبه مشتقات جزئی مرتبه دوم بدین صورت عمل می‌کنیم

از $\frac{\partial z}{\partial x}$ نسبت به x مشتق می‌گیریم:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right) = \frac{2(x^2+y^2) - 2x(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

از $\frac{\partial z}{\partial y}$ نسبت به x مشتق می‌گیریم:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2y}{y^2+x^2}\right) = \frac{-(2x)(2y)}{(x^2+y^2)^2}$$

از $\frac{\partial z}{\partial x}$ نسبت به y مشتق می‌گیریم

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right) = \frac{-4xy}{(x^2+y^2)^2}$$

Subject:

Year. Month. Date. ۵

$u' f(u) - f(u).u$

مشتقات جزئی توابع مرکب (قاعده زنجیره‌ای ۲):

$y' = g'(x) \cdot f'(g(x))$ ⟵ $y = f(g(x))$

هرگاه $y = f(u)$ که در آن $u = g(x)$ قبلاً داشتیم:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

$\frac{du}{dx}$: $d(g(x))$، $g'(x)$

$\frac{dy}{du}$: $\frac{d(f(g(x)))}{d(g(x))}$، $f'(g(x))$

حال مطلب فوق را برای توابع با بیش از یک متغیر می‌توان تعمیم داد. به عنوان یک حالت

چنانچه $z = f(u,v)$ که در آن $u = g(x,y)$ و $v = h(x,y)$ آنگاه: (ترکیب)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial u} \times \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial v} \times \dfrac{\partial v}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{\partial z}{\partial u} \times \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial z}{\partial v} \times \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{cases}$$

مثال ۱) هرگاه $z = \ln(u^2+v)$ که در آن $u = e^{2x+y^2}$ و $v = x^2+y^3$ آنگاه $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ را بیابید.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \times \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \times \frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{2u}{u^2+v}\right) \cdot \left(\overbrace{(2e^{2x})(e^{y^2})}^{2e^{2x}}\right) + \frac{1}{u^2+v}(2x)$$

$$= \frac{4u e^{2x+y^2} + 2x}{u^2+v} = \frac{4e^{4x+2y^2} + 2x}{e^{4x+2y^2} + x^2 + y^3}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \times \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \times \frac{\partial v}{\partial y} = \left(\frac{2u}{u^2+v}\right) \cdot \underbrace{e^{2x}(\overbrace{e^{y^2}}^{2ye^{y^2}})'}_{2ye^{2x+y^2}} + (3y^2)\left(\frac{1}{u^2+v}\right)$$

$$= \frac{4uye^{2x+y^2} + 3y^2}{u^2+v} = \frac{4(e^{2x+y^2})y \cdot e^{2x+y^2} + 3y^2}{e^{4x+2y^2} + x^2 + y^3}$$

$u=\tan^{-1}x \Rightarrow u'=\frac{1}{1+x^2}$

Subject: $\frac{u'}{1+u^2} \Leftarrow y=\tan^{-1}u$

Year. Month. Date. ( )

$u=(x^2+y^2)^{\frac12} \rightarrow u'=\frac12 (x^2+y^2)^{-\frac12}(2x)$

تمرین ۸۷

مثال ۲: هرگاه $z=f(u,v)$ ، $u=\sqrt{x^2+y^2}$ و $v=\operatorname{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right)$ ، آنگاه

نشان دهید:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2+\frac{1}{u^2}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2$$

حل:

به کمک مشتق زنجیره‌ای می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{-y}{x^2+y^2}$$

$$u=(x^2+y^2)^{\frac12} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{\cancel{2}}(x^2+y^2)^{-\frac12}(\cancel{2}x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$v=\operatorname{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x}=\left(\frac{y}{x}\right)'\cdot\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}=\frac{-y}{\cancel{x^2}}\cdot\frac{1}{\frac{x^2+y^2}{\cancel{x^2}}}=\frac{x^2}{x^2+y^2}$$

می‌دانیم $y=\tan^{-1}u \Rightarrow y'=\frac{u'}{1+u^2}$

$$\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{-y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{x}{x^2+y^2}$$

$$u=(x^2+y^2)^{\frac12} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y}=\frac12(x^2+y^2)^{-\frac12}(2y)=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$v=\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y}=\left(\frac{y}{x}\right)'\cdot\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}=\frac{1}{\cancel{x}}\cdot\frac{x^2}{y^2+x^2}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{-y}{x^2+y^2}\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{x}{x^2+y^2}\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2$$

$$=\frac{x^2}{x^2+y^2}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2+\frac{y^2}{(x^2+y^2)^2}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2+\frac{y^2}{x^2+y^2}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2+\frac{x^2}{(x^2+y^2)^2}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2$$

$$=1\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2+\frac{1}{x^2+y^2}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2=\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2+\frac{1}{u^2}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 \ \blacksquare$$

Subject:
Year. Month. Date. (۶)

مثال: با فرض تمرین $z = x f(x+y) + y g(x+y)$ حاصل عبارت $z_{xx} - 2z_{xy} + z_{yy}$

اثبات: فرض کنید $v = x+y$ در این صورت $z = x f(v) + y g(v)$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial x}$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) - 2\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial y}$$

$\frac{\partial f}{\partial x}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1.\, f(v) + x.\left(\frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}\right) + 0 \times g(v) + y\left(\frac{\partial g}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_{(v)} + x\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right) + y\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial v}\right) + \left(1.\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right).x\right) + y\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \qquad \frac{\partial^2 g}{\partial v \partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(f(v)) = \frac{\partial y}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right) = \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial x} = z_{xx} = f_v \cdot \cancel{v_x} + f_v + x \cdot f_{vv} \cdot \cancel{v_x} + y\, g_{vv} \cdot \cancel{v_x}$$

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$z_{xx} = 2f_v + x f_{vv} + y\, g_{vv}$$

$$z_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{\partial f}{\partial v}\right) + x\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)\right) + \frac{\partial g}{\partial v} +$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right) = f_v + x f_{vv} + g_v + y . g_{vv}$$

$$y.\left(\frac{\partial\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$z = x\,f(v) + y\,g(v) \;;\; v = (x+y)$

به همین صورت

$$Z_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) =$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x\cdot\left(\frac{\partial f(v)}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right) + g(v) + y\left(\frac{\partial g(v)}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

$$= x\,f_v + g(v) + y\,g_v$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = x\cdot\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)\right) + \frac{\partial}{\partial y}(g(v)) + 1\,g_v + y\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)\right)$$

$$f_{vv} = \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial g(v)}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$= x\cdot f_{vv} + 2g_v + y\,g_{vv}$$

$$Z_{xx} - 2Z_{xy} + Z_{yy} = \cancel{2f_v} + \cancel{xf_{vv}} + \cancel{y\,g_{vv}} - \cancel{2f_v} - \cancel{2xf_{vv}} - \cancel{2g_v} - \cancel{2y\,g_{vv}}$$

$$+ \cancel{x\,f_{vv}} + \cancel{2g_v} + \cancel{y\,g_{vv}} = 0$$

Subject:

Year. Month. Date. ۷۱

امتحان خرداد ۹۳

مثال: اگر $z = f(x^2-y) + g(x^2+y)$ به طوری که f و g توابعی مشتق پذیر باشند

نشان دهید: $z_{xx} - \frac{1}{x} z_x = 4x^2 z_{yy}$

فرض کنیم $v = x^2 - y$ $\quad u = x^2+y$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) - \frac{1}{x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 4x^2 \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f(v)}{\partial x} + \frac{\partial g(u)}{\partial x} = \frac{\partial f(v)}{\partial v}\cdot \overbrace{\frac{\partial v}{\partial x}}^{2x} + \frac{\partial g}{\partial u}\cdot \overbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}^{2x}$$

$$2f_v + 2x\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(v)}{\partial v}\right)\right) + 2\frac{\partial g}{\partial u} + 2x\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)\right)$$

$$2f_v + 2x\left(\underbrace{\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)}{\partial v}}_{\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial v}} \cdot \underbrace{\frac{\partial v}{\partial x}}_{2x}\right) + 2g_u + 2x\left(\underbrace{\frac{\partial\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)}{\partial u}}_{\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial u}} \cdot \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{2x}\right)$$

$$= 2f_v + 4x^2 f_{vv} + 2g_u + 4x^2 g_{uu}$$

$$\frac{1}{x}\left[f_v \cdot 2x + g_u \cdot 2x\right] = 2f_v + 2g_u$$

$$2f_v + 4x^2 f_{vv} + 2g_u + 4x^2 g_{uu} - 2f_v - 2g_u = 4x^2(f_{vv} + g_{uu})$$

$$z_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(\frac{\partial f(v)}{\partial y} = \left(\frac{\partial f(v)}{\partial v}\cdot \overbrace{\frac{\partial v}{\partial y}}^{-1}\right)\right) + \left(\frac{\partial g(u)}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u}\cdot \overbrace{\frac{\partial u}{\partial y}}^{1}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right) = f_{vv} + g_{uu}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial v} = \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)}{\partial v}\cdot \frac{\partial v}{\partial y}(-1) \qquad \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial u} = \frac{\partial\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)}{\partial u}\cdot \frac{\partial u}{\partial y}$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$$\Rightarrow 4x^2 (Z_{yy}) = Z_{xx} - \frac{1}{x} Z_x$$

مشتقات جزئی توابع ضمنی : تابعی به شکل $F(x,y,z)=0$ را تابع ضمنی دو متغیره می‌نامیم. ثابت می‌شود که در تابع $F(x,y,z)$ اگر $F_z \neq 0$ در این صورت z تابعی مشتق پذیر نسبت به متغیرهای x و y است و به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$Z_x = -\frac{\overset{\frac{\partial F}{\partial x}}{F_x}}{\underset{\frac{\partial F}{\partial z}}{F_z}} \quad , \quad Z_y = -\frac{F_y}{F_z}$$

تمرین) فرض کنید z تابعی مشتق پذیر برحسب دو متغیر x و y باشد و $F(xy, z-2x)=0$ و $F_z \neq 0$

حاصل عبارت $xZ_x - yZ_y$ را بیابید.

حل)

فرض کنید $u=xy$ و $v=z-2x$ در این صورت $F(u,v)=0$ می‌باشد در نتیجه

$$Z_x = -\frac{\overset{\frac{\partial F}{\partial x}}{F_x}}{\underset{\frac{\partial F}{\partial z}}{F_z}} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\overset{y}{\frac{\partial u}{\partial x}} + \frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial z}} = -\frac{y\frac{\partial F}{\partial u} - 2\frac{\partial F}{\partial v}}{0 + (1)\frac{\partial F}{\partial v}}$$

$$= \frac{2\frac{\partial F}{\partial v} - y\frac{\partial F}{\partial u}}{\frac{\partial F}{\partial v}} = \frac{2F_v - yF_u}{F_v}$$

$$Z_y = -\frac{\overset{\frac{\partial F}{\partial y}}{F_y}}{F_z} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\overset{x}{\frac{\partial u}{\partial y}} + \frac{\partial F}{\partial v}\cdot\overset{0}{\frac{\partial v}{\partial y}}}{\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\underset{0}{\frac{\partial u}{\partial z}} + \underbrace{\frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial z}}_{F_v}} = -\frac{xF_u + 0}{F_v}$$

$$x\frac{(2F_v - yF_u)}{F_v} - y\frac{xF_u}{F_v} = \frac{2xF_v - \cancel{xyF_u} + \cancel{xyF_u}}{F_v} = 2x$$

P4PCO

$\left(\frac{1}{y}\right)' = \frac{-y'(1)}{y^2}$

Subject:

Year. Month. Date. ۸

در کلاس حل شود

تمرین: خرداد ۹۳) اگر z تابعی از x و y باشد و $F\left(z-\frac{1}{x}, z+\frac{1}{y}\right)=0$ نشان دهید:

$$y^2 z_y + x^2 z_x = 1$$

حل) فرض کنیم $u = z - \frac{1}{x}$ ، $v = z + \frac{1}{y}$

$$z_y = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial z}} = -\frac{F_u\cdot(0) + \frac{-1}{y^2}F_v}{F_u\cdot(1) + F_v\cdot(1)}$$

$$= \frac{\frac{1}{y^2}F_v}{F_u + F_v}$$

$$z_x = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}}{F_u + F_v} = \frac{-F_u\cdot\frac{1}{x^2} +}{F_u + F_v}$$

$$\cancel{y^2}\left(\frac{1}{\cancel{y^2}}\,\frac{F_v}{F_u+F_v}\right) + \cancel{x^2}\left(\frac{1}{\cancel{x^2}}\cdot\frac{F_u}{F_u+F_v}\right) = \frac{F_v+F_u}{F_u+F_v} = 1$$

حال می‌خواهیم رابطهٔ مشتق ضمنی را تعمیم دهیم:

تعریف: اگر تابع‌های $F_1, F_2, \dots, F_n$ توابعی مشتق‌پذیر از $x_1, x_2, \dots, x_n$ باشند آنگاه ژاکوبین

توابع F_i ها برحسب x_i ها به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\frac{\partial(F_1, F_2, \dots, F_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{x_1} & \frac{\partial F_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

قضیه: اگر $F_1, \dots, F_n$ توابع مشتق پذیر با مشتق پیوسته برحسب $x_1, \dots, x_n$ و $y_1, \dots, y_m$

در همسایگی نقطه p باشند، (یعنی: $\begin{cases} F_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0 \\ \vdots \\ F_n(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0 \end{cases}$) و اگر $\frac{\partial(F_1, F_2, \dots, F_n)}{\partial(y_1, \dots, y_m)} \neq 0$

آنگاه داریم

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_j} = - \frac{\dfrac{\partial(F_1, \dots, F_n)}{\partial(y_1, \dots, y_{j-1}, x_j, y_{j+1}, \dots, y_m)}}{\dfrac{\partial(F_1, \dots, F_n)}{\partial(y_1, \dots, y_m)}}$$

مثال ۱) فرض کنید $F(x+\frac{z}{y}, y+\frac{z}{x})=0$ که در آن z تابعی برحسب x و y است. نشان دهید:

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z - xy$$

حل:

شرط لازم و کافی برای اینکه رابطه $F(u,v)=0$ برقرار باشد آن است که

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = 0$$

$$\xrightarrow[v = y + \frac{z}{x} = g(x,y)]{u = x + \frac{z}{y} = g(x,y)} \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} 1 + \frac{z_x}{y} & \frac{y z_y - z}{y^2} \\ \frac{z_x \cdot x - z}{x^2} & 1 + \frac{z_y}{x} \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{z_x}{y}\right)\left(1 + \frac{z_y}{x}\right) - \left(\frac{z_x \cdot x - z}{x^2}\right)\left(\frac{y z_y - z}{y^2}\right) = 0$$

$$\rightarrow 1 + \frac{z_y}{x} + \frac{z_x}{y} + \frac{z_x z_y}{yx} - \frac{xy\, z_x z_y - x z\, z_x - z y\, z_y + z^2}{x^2 y^2} = 0$$

PAPCO

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2y^2}\left(x^2y^2 + x^2y\,z_x + xy^2 z_y + y\,z\,z_y + x\,z\,z_x - z^2\right) = 0$$

$$\Rightarrow x(xy+z)\,z_x + y(xy+z)\,z_y = z^2 - x^2y^2 \Rightarrow x z_x + y z_y = z - xy$$

$$\cancel{(xy+z)}(x z_x + y z_y) = (z-xy)\cancel{(z+xy)}$$

تمرین خرداد ۹۳ (۱۳) اگر z تابعی از x و y باشد $F\left(z-\frac{1}{x}, z+\frac{1}{y}\right) = 0$ نشان دهید

$$y^2 z_y - x^2 z_x = 1$$

$$v = z + \frac{1}{y} \quad , \quad u = \overset{g(x,y)}{z} - \frac{1}{x}$$

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} \Longleftrightarrow F(u,v) = 0$$

$$\xrightarrow[v = z + \frac{1}{y}]{u = z - \frac{1}{x}} \begin{vmatrix} z_x + \frac{1}{x^2} & z_y \\ z_x & z_y - \frac{1}{y^2} \end{vmatrix} = 0$$

$$\left(z_x + \frac{1}{x^2}\right)\left(z_y - \frac{1}{y^2}\right) - z_x z_y = 0 \Rightarrow \cancel{z_x z_y} - z_x\frac{1}{y^2} + \frac{1}{x^2} z_y$$

$$-\frac{1}{x^2y^2} \cancel{- z_x z_y} = 0 \Rightarrow x^2y^2\left(\frac{1}{x^2} z_y - z_x\frac{1}{y^2} = \frac{1}{x^2y^2}\right) \Rightarrow y^2 z_y - x^2 z_x = 1$$

دیفرانسیل کامل:

تعریف: فرض کنید $z = f(x,y)$، در این صورت دیفرانسیل کامل این تابع از رابطهٔ زیر بدست می‌آید:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

همچنین دیفرانسیل کامل تابع $u=f(x,y,z)$ از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz .$$

مثال) هرگاه $z = y\tan(x^2) - 2xy$ مطلوبست محاسبه dz.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy\left(1+\tan^2(x^2)\right) - 2y \quad ; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \tan(x^2) - 2x$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = \left(2xy\left(1+\tan^2(x^2)\right) - 2y\right)dx + \left(\tan(x^2) - 2x\right)dy$$

دیفرانسیل های مرتبه بالاتر نیز قابل تعریف هستند. فرض کنیم $z=f(x,y,z)$ در این صورت می‌توان نوشت:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y}\right)z$$

در این صورت:

$$d^2z = d(dz) = \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y}\right)z$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dx\,dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2$$

و همین طور

$$d^nz = \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y}\right)^n z .$$

مشتق گیری سوئی: مشتق $z=f(x,y)$ در نقطه $P(x_0,y_0,z_0)$ در جهت بردار یکه $\vec{v}=(a,b)$

را با $D_{\vec{v}}f(p)$ نمایش داده و بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$D_{\vec{v}}f(x_0,y_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+ah,\,y_0+bh)-f(x_0,y_0)}{h}$$

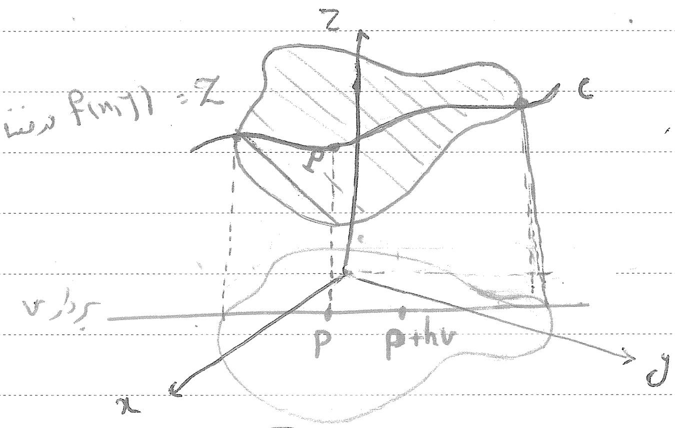
تذکر: با توجه به تعریف فوق، اگر $\vec{i}=\vec{v}$ باشد، مشتق جهتی f برابر $\frac{\partial f}{\partial x}$ است و اگر $\vec{j}=\vec{v}$ باشد

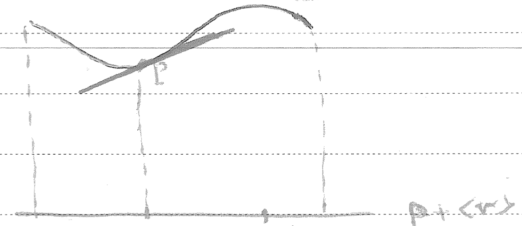
$$D_{\vec{v}}(f)=\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{f(x_0+ah,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}$$

آنگاه $D_{\vec{v}}f=\frac{\partial f}{\partial y}$.

تعبیر هندسی: صفحه گذرنده از نقطه P و موازی بردار $\vec{v}$ و عمود بر صفحه xy را در نظر بگیرید.

محل تلاقی این صفحه با نمودار f، منحنی C است که شیب خط مماس بر منحنی C در نقطه P برابر $D_{\vec{v}}f(p)$ است.





Subject:
Year. Month. Date. ( )

بردار نابلا (دل)

بردار $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$ را بردار نابلا یا دل گوییم.

اگر تابع F، یک تابع برداری به صورت $\vec{F} = F_1\vec{i} + F_2\vec{j} + F_3\vec{k}$ باشد، آنگاه می‌توان این تابع را در بردار نابلا به دو صورت نقطه‌ای و برداری ضرب کرد، یعنی:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(F_1, F_2, F_3) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

به $\vec{\nabla}\cdot\vec{F}$ دیورژانس تابع $\vec{F}$ گوییم.

$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\vec{k}$$

به $\vec{\nabla}\times\vec{F}$ کرل تابع $\vec{F}$ گوییم $\vec{\nabla}\times\vec{F} = \mathrm{Curl}\,\vec{F}$.

تعریف گرادیان (بردار): اگر F یک تابع عددی به صورت $F = F(x, y, z)$ باشد، داریم:

$$\vec{\nabla}F = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right)$$

که به این بردار، بردار گرادیان F گوییم. (نکته مهم: بردار هادی خط یا بردار نرمال صفحه (دارد) بر بردار گرادیان ~~خط یا صفحه~~ (آن) عمود است) $*_2$

مشتق جهت‌دار: اگر f در نقطه P مشتق‌پذیر باشد، آنگاه f در این نقطه در هر جهتی مشتق‌پذیر است و

$$D_{\vec{v}}f = \vec{\nabla}f\cdot\vec{v}$$

($\vec{v}$ بردار یکه می‌باشد).

* منظور از بردار هادی خط: نقطه $P_0(x_0, y_0, z_0)$ واقع بر خط d و بردار هادی $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ موازی با خط داده شده است، در این صورت معادله خط از رابطه زیر به دست می‌آید:
$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$$

$*_2$ می‌دانیم معادله صفحه از حاصلضرب داخلی یک بردار در صفحه (واقع) یعنی $\overrightarrow{P_0P} = (x-x_0)\vec{i} + (y-y_0)\vec{j} + (z-z_0)\vec{k}$ و $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ بردار عمود بر صفحه داده شده است (که به آن بردار نرمال صفحه گوییم) به دست می‌آید $\vec{v}\cdot\overrightarrow{P_0P} = a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$

مثال) مشتق جهتی تابع $f(x,y,z)=y^2+\ln(x^2+z^2)$ را در جهت بردار کرل میدان برداری $\vec F = x^2y\,\vec i - 3xy\,\vec j + (z-2)\,\vec k$ در نقطه‌ی $(1,2,1)$ بیابید.

$$\operatorname{curl}\vec F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2y & -3xy & z-2 \end{vmatrix} = \left(\cancel{\frac{\partial(z-2)}{\partial y}} + \cancel{\frac{\partial 3xy}{\partial z}},\ -\cancel{\frac{\partial(z-2)}{\partial x}} + \cancel{\frac{\partial x^2y}{\partial z}},\ -\frac{\partial 3xy}{\partial x} - \frac{\partial x^2y}{\partial y}\right)$$

$$= (0,0,-3y-x^2) \xrightarrow[(1,2,1)]{\text{در نقطه}} (0,0,-6-1)$$

حال این بردار را یکه می‌کنیم

$$\vec e_v = \frac{(0,0,(-7))}{\sqrt{0+0^2+(-7)^2}=7} = (0,0,-1)$$

$$\vec\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = \left(\frac{2x}{x^2+z^2}, 2y, \frac{2z}{x^2+z^2}\right) \xrightarrow{(1,2,1)} \left(\frac{2}{2}, 2(2), \frac{2}{2}\right) = (1,4,1)$$

حال داریم مشتق جهتی از رابطه‌ی $D_{\vec v}(f)=\vec\nabla f\cdot\vec e_v$ به دست می‌آید در نتیجه

$$D_{\vec v}(f) = (1,4,1)\cdot(0,0,-1) = -1$$

تمرین: مشتق جهتی تابع $f(x,y,z)=x^2+\ln(y^2+z^2)$ را در جهت کرل میدان برداری $\vec F(x,y,z)=2xy\,\vec i - y^2x\,\vec j + (z+3)\,\vec k$ در نقطه‌ی $(1,1,0)$ بیابید. تحویل جلسه‌ی ۱۵

$$\operatorname{curl}\vec F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xy & -y^2x & z+3 \end{vmatrix} = (0,0,-y^2-2x) \xrightarrow{(1,1,0)} \operatorname{curl}\vec F = (0,0,-3)$$

حال این بردار را یکه می‌کنیم.

$$\vec e_v = \frac{(0,0,-3)}{3} = (0,0,-1)$$

Subject: در جهت بردار
Year. Month. Date. ( )

مشتق (فصل مشترک)

$$\vec{\nabla} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = \left(2x, \frac{2y}{y^2+z^2}, \frac{2z}{y^2+z^2}\right) \xrightarrow{(1,1,0)} \vec{\nabla} f = (2,2,0)$$

مشتق جهتی از رابطه: $D_{\vec{v}} f = \vec{\nabla} f \cdot \vec{e}_v$ بدست می‌آید، در نتیجه

$$D_{\vec{v}} f = (2,2,0) \cdot (0,0,-1) = 0$$

مثال ۱۰) مشتق سوئی تابع $f(x,y,z) = x^2 - yz + z^2 x$ را در امتداد بردار قائم بر رویه $\cos x - x^2 y + e^{xz} + yz = 4$ در نقطه $(0,1,2)$ بدست آورید.

حل) می‌دانیم بردار قائم بر رویه $g = \cos x - x^2 y + e^{xz} + yz - 4 = 0$ همان بردار $\vec{\nabla} g$ است؛

بنابراین:
$$\vec{v} = \vec{\nabla} g = \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z}\right) = \left(-\sin x + 2xy + ze^{xz}, -x^2 + z, xe^{xz} + y\right)$$

$$\xrightarrow{(0,1,2)} (2,2,1) \quad ; \quad \vec{e}_v = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{(2,2,1)}{\sqrt{2^2+2^2+1}} = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$\nabla f = (2x + z^2, -z, -y + 2zx) \xrightarrow{(0,1,2)} (4, -2, -1+0) = (4,-2,-1)$$

$$D_{\vec{v}} f = \vec{\nabla} f \cdot \vec{v} = (4,-2,-1)\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) = 1$$

تمرین) مشتق سوئی (جهتی) تابع $f(x,y,z) = 3x - 5y + 2z$ را در جهت عمود بر سطح $g: x^2 + y^2 + z^2 = 9$ در نقطه ای به مختصات $P_0(2,2,1)$ بدست آورید:

بردار قائم بر سطح g است که $\frac{\nabla g}{|\nabla g|_{(a,b,c)}}$ بردار یکه می‌شود

$$\vec{v} = \vec{\nabla} g = (2x, 2y, 2z) \underset{(2,2,1)}{\Rightarrow} (4,4,2) = \vec{v} \Rightarrow \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{(4,4,2)}{\sqrt{4^2+4^2+1}} = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$$\nabla f = (3, -5, 2)$$

$$D_{\vec{v}} f = \vec{\nabla} f \cdot \vec{v} = (3,-5,2)\left(\frac{4}{6}, \frac{4}{6}, \frac{2}{6}\right) = \frac{12}{3} - \frac{20}{6} + \frac{4}{3} = -\frac{4}{3}$$

کاربردهای مشتقات جزئی

۱) معادله صفحه مماس و خط قائم بر سطح: از آنجایی که بردار گرادیان f عمود بر رویه $f(x,y,z)=0$ است (در صورت مشتق‌پذیری)، بنابراین این بردار را می‌توان بعنوان بردار نرمال صفحه مماس و بردار هادی خط قائم بر رویه انتخاب کرد.

مثال ۱: تمرین جزوه ۲۸۷ معادلات صفحه مماس و خط قائم بر سطح $\cos(\pi x)-x^2y+e^{xz}+yz-4=0$ را در نقطه $(0,1,2)$ بیابید.

$$f=\cos(\pi x)-x^2y+e^{xz}+yz-4 \longrightarrow \vec{\nabla} f=(-\pi\sin x-2xy+ze^{xz},\ -x^2+z,\ xe^{xz}+y)$$

$$\xrightarrow{\text{صفحه}} \underbrace{\vec{\nabla} f}_{(2,2,1)}\ \cdot \underbrace{(x-0,\ y-1,\ z-2)}_{\vec{P_0P}}=0 \Rightarrow 2x+2y-2+z-2=0 \Rightarrow$$

معادله صفحه مماس

$$2x+2y+z=4$$

معادله خط قائم $\dfrac{(x-0)}{2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{1}$

تمرین: معادله صفحه مماس و خط قائم بر رویه $\sqrt{x}+e^x\cos y=1+ze^x$ را در نقطه $(1,\pi,-1)$ بیابید.

$$f=\sqrt{x}+e^x\cos y-1-ze^x \Rightarrow \vec{\nabla} f=\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+e^x\cos y-ze^x\right)\vec{i}-e^x\sin y\,\vec{j}-e^x\vec{k}$$

$$\xrightarrow{(1,\pi,-1)} \vec{\nabla} f=\frac{1}{2}\vec{i}-e\vec{k}$$

بنابراین بردار هادی خط قائم و بردار نرمال صفحه مماس، برابر است با:

$$\vec{V}=\left(\frac{1}{2},0,-e\right)$$

معادله صفحه مماس: $\frac{1}{2}x-ez=\frac{1}{2}+e$

معادله خط قائم:
$$\begin{cases} x=\frac{1}{2}t+1 \\ y=\pi \\ z=-et-1 \end{cases}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

« معادله صفحه مماس و خط مماس بر تقاطع دو سطح »: اگر خم C محل تلاقی دو سطح به معادله‌های $g_1(x,y,z)=0$ و $g_2(x,y,z)=0$ باشد، آنگاه $\vec{v}=\vec{\nabla} g_1 \times \vec{\nabla} g_2$ بردار مماس بر خم C میباشد. بنابراین بردار $\vec{v}$ را میتوان بعنوان بردار هادی خط مماس و بردار نرمال صفحه مماس بر تقاطع دو سطح در نظر گرفت.

مثال ۱) معادله صفحه مماس و خط مماس بر منحنی $C:\begin{cases}3x^2+2y^2+z^2=49\\ x^2+y^2-2z^2=10\end{cases}$ را در نقطه $(3,-3,2)$ بدست آورید.

$$\begin{cases} f: 3x^2+2y^2+z^2-49=0 \longrightarrow \vec{\nabla} f=(6x,4y,2z) \xrightarrow{(3,-3,2)} \vec{\nabla} f=(18,-12,4) \\ g: x^2+y^2-2z^2-10=0 \longrightarrow \vec{\nabla} g=(2x,2y,-4z) \xrightarrow{(3,-3,2)} \vec{\nabla} g=(6,-6,-8) \end{cases}$$

$$\vec{\nabla} f \times \vec{\nabla} g=\begin{pmatrix}18 & -12 & 4\\ 6 & -6 & -8\end{pmatrix}=(120,168,-36)=\vec{v} \longrightarrow$$

بردار $\vec{v}$ هم نقش بردار هادی خط مماس و هم بردار نرمال صفحه مماس بر منحنی مورد نظر را دارد.

بنابراین: $\frac{x-3}{120}=\frac{y+3}{168}=\frac{z-2}{-36}$: معادله خط مماس

معادله صفحه مماس : $120(x-3)+168(y+3)-36(z-2)=0 \longrightarrow 10x+14y-3z=-18$.

تعیین نقاط بحرانی تابع دو متغیره ($f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$)

تعریف: نقطه p را نقطه بحرانی f گوییم هرگاه $\vec{\nabla} f(p)=0$ و اگر $\vec{\nabla} f(p)$ وجود نداشته باشد p را نقطه تکین گوییم.

بنابه تعریف، برای بدست آوردن نقاط بحرانی $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ کافیست دستگاه زیر را حل کنیم:

$$\begin{cases} f_x=0\\ f_y=0\end{cases}$$

برای تعیین نوع نقطه بحرانی ابتدا دترمینان ماتریس هسی را تشکیل میدهیم:

$$\Delta_H=\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy}\\ f_{yx} & f_{yy}\end{vmatrix}$$

پس با توجه به حالات زیر نوع نقطه را تعیین می‌کنیم:

① اگر $\Delta_H(p)>0$ و $f_{xx}(p)<0$، آنگاه نقطه p ماکزیمم نسبی f است.

② اگر $\Delta_H(p)>0$ و $f_{xx}(p)>0$، آنگاه نقطه p مینیمم نسبی f است.

③ اگر $\Delta_H(p)<0$ آنگاه p نقطه زینی است.

④ اگر $\Delta_H(p)=0$ آزمون سکوت می‌کند.

مثال ۲: اکسترمم های نسبی تابع $f(x,y)=x^3+y^3+3y^2-3x-9y+3$ و نوع آنها را بیابید.

$$\begin{cases} f_x=0 \Rightarrow 3x^2-3=0 \Rightarrow x=\pm 1 \\ f_y=0 \Rightarrow 3y^2+6y-9=0 \Rightarrow y=1,-3 \end{cases}$$

پس تابع f دارای چهار نقطه بحرانی است: $(-1,1)$ و $(-1,-3)$ و $(1,1)$ و $(1,-3)$

حال می‌خواهیم نوع آنها را تعیین کنیم:

$$\Delta^{\text{ماتریس هسین}} = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y+6 \end{vmatrix}$$

$$\Delta(-1,1) = \begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 12 \end{vmatrix} = -72<0 \rightarrow$$ نقطه $(-1,1)$ نقطه زین اسب است

$$\Delta(-1,-3) = \begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -12 \end{vmatrix} = 72>0 \xrightarrow{f_{xx}=-6<0}$$ نقطه $(-1,-3)$ ماکزیمم نسبی است

$$\Delta(1,1) = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 12 \end{vmatrix} = 72>0 \xrightarrow{f_{xx}=6>0}$$ نقطه $(1,1)$ مینیمم نسبی است

$$\Delta(1,-3) = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -12 \end{vmatrix} = -72<0 \rightarrow$$ نقطه $(1,-3)$ زین اسب است

Subject:

Year. Month. Date. ( )

مثال (۶) ۹۳: اکسترمم‌های نسبی و نقاط زینی تابع $f(x,y) = x^۲ - ۴xy + y^۳ + ۴y$ را در صورت وجود بیابید.

$$\begin{cases} f_x = ۰ \longrightarrow ۲x - ۴y = ۰ \Rightarrow ۲x = ۴y \Rightarrow x = ۲y \\ f_y = ۰ \longrightarrow -۴x + ۳y^۲ + ۴ = ۰ \Rightarrow -۴(۲y) + ۳y^۲ + ۴ = ۰ \end{cases}$$

$$۳y^۲ - ۸y + ۴ = ۰$$

$$\Delta = b^۲ - ۴ac = ۰ \Rightarrow \Delta = (-۸)^۲ - ۴(۳)(۴) = ۴ \qquad ۶۴ - ۴۸ = \qquad \sqrt{\Delta} = ۴$$

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{۲(۳)} = \frac{۸ \pm ۴}{۶} \to \frac{۱۰}{۶} = \frac{۱۰}{۶} = \frac{۵}{۳}, \quad \frac{۶}{۶} = ۱$$

$$y = \frac{۵}{۳} \to x = \frac{۱۰}{۳}$$

$$y = ۱ \to x = ۲$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{yy} \\ f_{yx} & f_{xy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۲ & ۶y \\ -۴ & -۴ \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$\Delta\left(\frac{۱۰}{۳}, \frac{۵}{۳}\right) = -۸ + ۴\left(۶\left(\frac{۱۰}{۳}\right)\right) = ۷۲ > ۰ \xrightarrow{f_{xx} = ۲ > ۰}$$ نقطه $\left(\frac{۱۰}{۳}, \frac{۵}{۳}\right)$ مینیمم نسبی است

$$\Delta(۲,۱) = -۸ + ۲۴(۱) = ۱۶ > ۰ \xrightarrow{f_{xx} > ۰}$$ نقطه $(۲,۱)$ مینیمم نسبی است

P4PCO

Subject:
Year.   Month.   Date. ۱۳

تمرین: فرض کنید خم C فصل مشترک استوانه‌های $x^2+y^2=2$ و $x^2+z^2=2$ باشد:

الف) معادله خط مماس بر C در نقطه $A(1,-1,1)$ را بیابید.

ب) مشتق سویی تابع $f(x,y,z)=xyz+x^2y^2z^2$ را در راستای خط مماس الف بدست آورید.

الف)
$$h: x^2+y^2-2=0 \longrightarrow \vec{\nabla} h=(2x,2y,0) \xrightarrow{(1,-1,1)} \vec{\nabla} h=(2,-2,0)$$
$$g: x^2+z^2-2=0 \longrightarrow \vec{\nabla} g=(2x,0,2z) \xrightarrow{(1,-1,+1)} \vec{\nabla} g=(2,0,2)$$

$$\vec{\nabla} h \times \vec{\nabla} g = (-4,-4,4)$$

بردار هادی خط مماس بدست آمد: $\vec{v}=(-4,-4,4)$

$$\frac{x-1}{-4}=\frac{y+1}{-4}=\frac{z-1}{4}$$: معادله خط مماس

ب)
$$\vec{v}=(-4,-4,4) \longrightarrow \vec{e}_v=\left(\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$f(x,y,z)=xyz+x^2y^2z^2 \longrightarrow \vec{\nabla} f=(yz+2xy^2z^2,\ xz+2yx^2z^2,\ xy+2zx^2y^2)$$

$$\xrightarrow{(1,-1,1)} \vec{\nabla} f=(1,-1,1)$$

$$D_v f=\vec{\nabla} f\cdot \vec{e}_v=(1,-1,1)\cdot\left(\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

تمرین: هرگاه $f=e^{xy}+z^2$ و C خم حاصل از برخورد دو رویه $z=\sqrt{x^2+y^2}$ و $x+y=2-z$ باشد، ابتدا مشتق تابع f در نقطه $A(0,1,1)$ روی خم C و در جهت بردار یکه مماس بر خم

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$\vec{\nabla} f \cdot \vec{e}_v$ $\quad (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} \, 2x$ را بیابید

$\vec{v}$ همان بردار هادی خط مماس بر خم C است.

$g: z - \sqrt{x^2+y^2} = 0$

$h: x + y - 2 + z = 0$

$$\nabla g \times \nabla h = \left(\left(\frac{-2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{-2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}, 1 \right) \times (1, 1, 1) \right)_{(0,1,1)}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{-1}{\sqrt{1}} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (\underbrace{-1-1}_{-2}, -(0-1), 0+1)$$

$$= (-2, 1, +1) \longrightarrow \frac{(-2, 1, 1)}{\sqrt{2^2+1+1}} = \sqrt{6}$$

$$\nabla f = (y e^{xy}, x e^{xy}, 2z)_{(0,1,1)} = (1, 0, 2)$$

$$\vec{\nabla} f \cdot \vec{e}_v = (1, 0, +2)\left(\frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) = \frac{-2}{\sqrt{6}} + \frac{2}{\sqrt{6}} = 0$$

P4PCO

فصل دوم

« توابع برداری »

توابع برداری: فرض کنیم $p=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in R^n$ اگر X_1 و X_2 و ... و X_m توابعی برحسب p باشند

تابع

$$\begin{cases} f: R^n \longrightarrow R^m \\ f(p) = (X_1(p),\ X_2(p),\ \dots,\ X_m(p)) \end{cases}$$

با فرض اینکه $1<m$ باشد، را یک تابع برداری می‌نامیم.

مثال ۱:

$$f: R^2 \longrightarrow R^3$$

$$f(x,y) = 4xy\,\vec{i} + \frac{2x}{x-y}\,\vec{j} - 2x^2\,\vec{k}$$

معادلات پارامتری منحنی: منحنی پارامتری مسیر حرکت یک جسم در صفحه یا در فضای سه‌بعدی می‌باشد. منحنی‌ها حالت خاصی

~~از توابع برداری~~ می‌باشند. به طوری که اگر منحنی در صفحه واقع باشد آنگاه تابع برداری آن به صورت

$$\begin{cases} \vec{R}: R \longrightarrow R^2 \\ \overrightarrow{R(t)} = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} \end{cases}$$

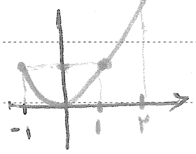
و چنانچه در فضا واقع باشد تابع برداری آن به صورت

$$\vec{R}: R \longrightarrow R^3$$

$$\overrightarrow{R(t)} = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k}$$

مثال ۲: معادله پارامتری و برداری منحنی $\begin{cases} y=x^2 \\ -1\le x\le 2 \end{cases}$ را بنویسید.

حل: کافی است $x=t$ بگیریم در نتیجه $y=t^2$. بنابراین معادله پارامتری آن به صورت زیر است:



$$\begin{cases} x=t \\ y=t^2 \end{cases} \quad -1\le t\le 2$$

و در این صورت معادله برداری آن به صورت زیر است:

$$\overrightarrow{R(t)} = t\,\vec{i} + t^2\,\vec{j}\ ;\ -1\le t\le 2.$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

حد و پیوستگی

منحنی $\vec{R}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k}$ مفروض است. چنانچه $\lim_{t\to t_0} x(t)$ ، $\lim_{t\to t_0} y(t)$ و $\lim_{t\to t_0} z(t)$ موجود باشد آنگاه $\lim_{t\to t_0} \vec{R}(t)$ موجود است و از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\lim_{t\to t_0} \vec{R}(t) = \lim_{t\to t_0} x(t)\,\vec{i} + \lim_{t\to t_0} y(t)\,\vec{j} + \lim_{t\to t_0} z(t)\,\vec{k}$$

چنانچه $\lim_{t\to t_0} \vec{R}(t) = \vec{R}(t_0)$ آنگاه $\vec{R}(t)$ را در t_0 پیوسته گوییم.

مثال) هرگاه $\vec{R}(t) = 2\cos t\,\vec{i} + 2\sin t\,\vec{j} + \frac{1}{4} t\,\vec{k}$ آنگاه $\lim_{t\to \frac{\pi}{2}} \vec{R}(t)$ را بیابید.

$$\lim_{t\to \frac{\pi}{2}} \vec{R}(t) = \lim_{t\to \frac{\pi}{2}} 2\cos t\,\vec{i} + \lim_{t\to \frac{\pi}{2}} 2\sin t\,\vec{j} + \lim_{t\to \frac{\pi}{2}} \frac{1}{4} t\,\vec{k}$$

$$= 2\vec{j} + \frac{\pi}{8}\vec{k}$$

مشتق: منحنی $\vec{R}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k}$ مفروض است. مشتق $\vec{R}(t)$ را با $\frac{d\vec{R}}{dt}$ یا $\vec{R}'(t)$ نشان داده و چنانچه $x'(t)$ ، $y'(t)$ و $z'(t)$ موجود باشند از رابطه زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\vec{R}'(t) = x'(t)\,\vec{i} + y'(t)\,\vec{j} + z'(t)\,\vec{k}$$

مثال) هرگاه $\vec{R}(t) = \cos t\,\vec{i} + 2e^{2t}\,\vec{j} + \ln t\,\vec{k}$ آنگاه $\vec{R}'(t)$ و $\vec{R}''(t)$ را بیابید.

$$\vec{R}'(t) = -\sin t\,\vec{i} + 4e^{2t}\,\vec{j} + \frac{1}{t}\,\vec{k}$$

$$\vec{R}''(t) = -\cos t\,\vec{i} + 8e^{2t}\,\vec{j} - \frac{1}{t^2}\,\vec{k}$$

بردارهای سرعت و شتاب

فرض کنید ذره‌ای روی منحنی C به معادله $\overrightarrow{R(t)} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ در حرکت باشد سرعت

لحظه‌ای ذره در زمان t را با نماد $\overrightarrow{V(t)}$ نشان داده و به صورت زیر حساب می‌کنیم:

$$\overrightarrow{V(t)} = \overrightarrow{R'(t)} = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k}$$

بردار سرعت را بردار مماس نیز می‌نامیم زیرا $\overrightarrow{R'(t)}$ در هر لحظه t بر منحنی C مماس می‌باشد.

اندازه بردار سرعت را تندی می‌نامیم یعنی:

$$\text{تندی} = |\overrightarrow{V(t)}| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}$$

شتاب لحظه‌ای ذره در زمان t را با نماد $\overrightarrow{a(t)}$ نشان داده به صورت زیر حساب می‌کنیم.

$$\overrightarrow{a(t)} = \overrightarrow{R''(t)} = x''(t)\vec{i} + y''(t)\vec{j} + z''(t)\vec{k}$$

اندازه بردار شتاب را بزرگی شتاب می‌نامیم یعنی

$$\text{بزرگی شتاب} = |\overrightarrow{a(t)}| = \sqrt{(x''(t))^2 + (y''(t))^2 + (z''(t))^2}$$

«معادلات خط مماس و صفحه قائم»

منحنی C مفروض است معادلات خط مماس و صفحه قائم بر منحنی را تحت دو حالت زیر می‌توان نوشت:

حالت اول: نمایش برداری منحنی C داده شده باشد در این صورت چون $\overrightarrow{R'(t)}$ (بردار سرعت) در هر لحظه t

بر منحنی C مماس می‌باشد لذا $\overrightarrow{R'(t)}$ بردار هادی خط مماس و بردار نرمال صفحه قائم بر منحنی در لحظه t

می‌باشد

Subject:

Year. Month. Date. ( )

مثال) اگر $\vec{R}(t) = (1+t,\ 2\cos(2t),\ -2\sin(2t))$ معادلات خط مماس و صفحه قائم بر این خم را در لحظه $t=0$ بیابید.

حل) با توجه به اینکه $\vec{R'}(t) = (1,\ -4\sin(2t),\ -4\cos(2t))$

لذا $\vec{R'}(0) = (1, 0, -4)$ بردار هادی خط مماس و بردار نرمال صفحه قائم بر منحنی در لحظه $t=0$ می‌باشد.

از طرفی $\vec{R}(0) = (1, 2, 0)$ نقطه‌ای واقع بر منحنی در لحظه $t=0$ می‌باشد. بنابراین معادله صفحه قائم و خط مماس بر منحنی در این نقطه به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{z-0}{-4} \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-1 = \dfrac{-z}{4} \\ y = 2 \end{cases}$$ معادله خط مماس

معادله صفحه قائم $(1,0,-4)\cdot(x-1,\ 0,\ z-0) = (x-1) - 4(z-0) = 0 \Rightarrow x - 4z = 1$

حالت دوم) منحنی C محل برخورد دو رویه $f(x,y,z)=0$ و $g(x,y,z)=0$ باشد در

این صورت $\vec{\nabla} f \times \vec{\nabla} g$ بردار هادی خط مماس و بردار نرمال صفحه قائم می‌باشد.

مثال) معادلات خط مماس و صفحه قائم بر منحنی $\begin{cases} x^2+4y^2+z^2=9 \\ z = 4-(x^2+y^2) \end{cases}$ را در نقطه $p(1,1,2)$

واقع بر منحنی به دست آورید.

حل) فرض کنیم $f(x,y,z) = x^2+4y^2+z^2-9=0$ و $g(x,y,z) = x^2+y^2+z-4=0$ در این صورت:

$$\vec{\nabla} f = 2x\,\vec{i} + 8y\,\vec{j} + 2z\,\vec{k} \Rightarrow \vec{\nabla} f(1,1,2) = 2\vec{i} + 8\vec{j} + 4\vec{k}$$

$$\vec{\nabla} g = 2x\,\vec{i} + 2y\,\vec{j} + \vec{k} \Rightarrow \vec{\nabla} g = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$$

بنابراین بردار نرمال صفحه قائم و بردار هادی خط مماس در نقطه p به صورت زیر است:

$$\vec{\nabla} f \times \vec{\nabla} g = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 8 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 6\vec{j} - 12\vec{k}$$

معادله صفحه قائم بر منحنی در نقطه P به صورت زیر است:

$$6(y-1)-12(z-2)=0 \Rightarrow 6y-12z=-18 \Rightarrow y-2z=-3$$

همچنین معادله خط مماس بر منحنی در نقطه P به صورت زیر است:

$$\begin{cases} \dfrac{y-1}{6}=\dfrac{z-2}{-12} \\ x=1 \end{cases}$$

طول قوس: اگر $\vec{R}(t)=(x(t),y(t),z(t))$ معادله مسیر خم C باشد، طول این خم از نقطه t_0 تا t_1 از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$ds=|\vec{dr}|=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,dt \longrightarrow$$

$$S=\int_{t_0}^{t_1} ds=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}$$

مثال: طول منحنی C به معادله $\vec{R}(t)=t\vec{i}+(\sin t-\cos t)\vec{j}+(\sin t+\cos t)\vec{k}$ را بدست آورید.

$$\vec{R'}(t)=(1,\ \cos t+\sin t,\ \cos t-\sin t) \longrightarrow$$

$$|\vec{R'}(t)|=\sqrt{1^2+(\cos t+\sin t)^2+(\cos t-\sin t)^2}=\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow L=\int_0^{\pi}\sqrt{3}\,dt=\sqrt{3}t\Big|_0^{\pi}=\sqrt{3}\pi$$

$T(t)=\dfrac{R'(t)}{|R'(t)|}$

انحنا (خمیدگی): میزان تغییرات بردار یکه مماس نسبت به طول قوس خم C انحنا گوییم ($K=\left|\dfrac{dT}{ds}\right|$)

(در واقع انحنا معیاری است که مقدار انحراف خم C در یک نقطه را از خط مماس بر آن بیان می‌کند)

Subject:
Year. Month. Date. ( )

می‌توان ثابت کرد که انحنا از رابطه $k=\frac{|R'(t)\times R''(t)|}{|R'(t)|^3}$ بدست می‌آید

اگر با حرکت در مسیر خم، تغییرات در راستای بردار مماس ساعتگرد باشد، انحنا مثبت است و اگر تغییرات بردار مماس در جهت پادساعتگرد باشد، علامت انحنا منفی خواهد بود، و نیز اگر حرکت روی خط مستقیم باشد انحنا صفر است.

— به معکوس انحنا، شعاع انحنا گوییم.

مثال خرداد ۹۳، اگر $\vec{R(t)} = (t\sin t+\cos t,\ t\cos t-\sin t,\ \frac{\sqrt{2}}{2}t^2)$ مطلوب است محاسبه انحنای منحنی در $t=\frac{\pi}{2}$

$R'(t) = (\cancel{\sin t} + t\cos t - \cancel{\sin t},\ \cancel{\cos t} - t\sin t - \cancel{\cos t},\ \sqrt{2}\,t)$

$\vec{R}'(\frac{\pi}{2}) = (0,\ -\frac{\pi}{2},\ \frac{\sqrt{2}\pi}{2})$

$R''(t) = (\cos t - t\sin t + \cancel{\cos t} - \cancel{\cos t},\ -\sin t - \sin t - t\cos t + \sin t,\ \sqrt{2})$

$R''(t) = (\cos t - t\sin t,\ -(\sin t + t\cos t),\ \sqrt{2})$

$R''(\frac{\pi}{2}) = (-\frac{\pi}{2},\ -1,\ \sqrt{2})$

$R'(t)\times R''(t) \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\pi}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\pi \\ -\frac{\pi}{2} & -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \left(-\frac{\sqrt{2}\pi}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\pi,\ -\left(0 - \frac{\sqrt{2}}{2}\pi\cdot(-\frac{\pi}{2})\right),\ -\frac{\pi^2}{4}\right)$

$\underbrace{\quad}_{}$ $-\frac{\sqrt{2}}{4}\pi^2$

$k = \frac{|R'\times R''|}{|R'(t)|} = \frac{\sqrt{0^2 + (\frac{-\sqrt{2}}{4})^2\pi^4 + (\frac{\pi^2}{4})^2}}{\ } = \frac{\frac{1}{4}\pi^4}{\pi^3} = \frac{1}{4}\pi \quad \frac{1}{4}\frac{\pi}{} = \frac{2}{16}\pi^4 = \frac{2}{16}\pi^4 + \frac{\pi^4}{16}$

$R'(t) = \sqrt{0^2 + \frac{\pi^2}{4} + \frac{2}{4}\pi^2} = \sqrt{\pi^2} = \pi$

PAPCO

تمرین) در خانه)

مثال) منحنی C به معادلهٔ $\vec{R}(t) = (\sin t - \cos t\,,\ t\,,\ \sin t + \cos t)$ و $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ مفروض است. بردار مماس یکه ($\vec{T}$) و مقدار انحنای منحنی را در $t = \frac{\pi}{2}$ بدست آورید:

$$\vec{R'}(t) = (\cos t + \sin t\,,\ 1\,,\ \cos t - \sin t) \xrightarrow{t=\frac{\pi}{2}} \vec{R'}(\tfrac{\pi}{2}) = (1, 1, -1) \longrightarrow |R'(\tfrac{\pi}{2})| = \sqrt{3}$$

$$\vec{R''}(t) = (-\sin t + \cos t\,,\ 0\,,\ -\sin t - \cos t) \xrightarrow{t=\frac{\pi}{2}} \vec{R''}(\tfrac{\pi}{2}) = (-1, 0, -1).$$

$$\vec{R'} \times \vec{R''} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1, 2, 1) \longrightarrow |R' \times R''| = \sqrt{6}$$

بردار $\vec{T}$ را می‌توان از رابطهٔ $\vec{T} = \frac{\vec{R'}(t)}{|R'(t)|}$ بدست آورد:

$$\vec{T} = \frac{\vec{R'}(\frac{\pi}{2})}{|R'(\frac{\pi}{2})|} = \frac{(1, 1, -1)}{\sqrt{3}} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\,,\ +\frac{1}{\sqrt{3}}\,,\ \frac{-1}{\sqrt{3}}\right).$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

در ریاضی ۱ با انتگرال توابع تک متغیره آشنا شدیم $\int f(x)dx$ حال انتگرال توابع دو متغیره تعریف می‌کنیم $\iint f(x,y)dxdy$

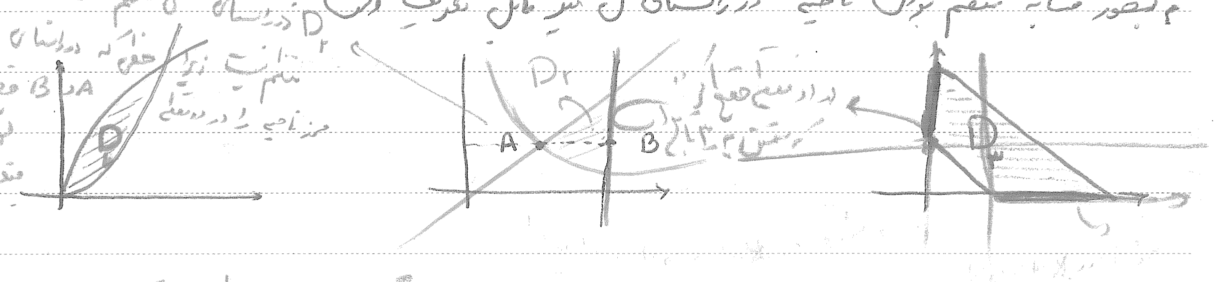
Subject:
Year. Month. Date. ۱۸

فصل سوم — انتگرال دوگانه

در این فصل قصد داریم انتگرال $\iint_D f(x,y)\,dA$ را محاسبه کنیم که $f(x,y)$ تابعی پیوسته بر ناحیه D می‌باشد، به D ناحیه انتگرال‌گیری می‌گوییم که این ناحیه باید منظم باشد.

تعریف: ناحیه D را در راستای x منظم گوییم، هرگاه هر خطی از درون ناحیه موازی محور xها رسم کنیم، مرز ناحیه را در دو نقطه قطع کند و نه بیشتر (این دو نقطه باید متعلق به دو تابع باشند و نه بیشتر).

به طور مشابه منظم بودن ناحیه در راستای y نیز قابل تعریف است.



ناحیه D_2 در هر دو راستا نامنظم است.

نکته: اگر ناحیه‌ای در هر دو راستا نامنظم باشد، ناحیه را می‌توان به چند ناحیه منظم تبدیل کرد.

$(D = D_1 \cup D_2 \cup \dots)$ در این صورت داریم: $\iint_D = \iint_{D_1} + \iint_{D_2} + \dots$

نحوه نوشتن حدود انتگرال دوگانه در مختصات دکارتی

① تعیین اینکه ناحیه D در کدام راستا منظم است و رسم خط فرضی موازی آن راستا.

② حدود انتگرال بیرونی را از روی محور مختصاتی می‌نویسیم که خط فرضی با آن عمود می‌باشد. بدین صورت که ناحیه D را بر این محور مختصات تصویر کرده، کمترین و بیشترین مقدار آن متغیر را از روی محور مختصات می‌نویسیم.

PAPCO

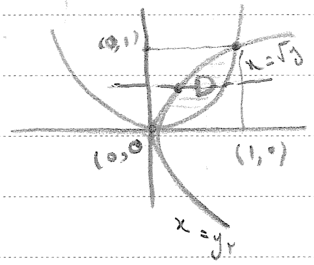
Subject:
Year. Month. Date. ( )

۳) برای حدود انتگرال داخلی می‌نویسیم خط فرضی در هنگام ورود به ناحیه چه تابعی را قطع کرده و در هنگام خروج از آن چه تابعی را قطع کرده است.

تذکر ۱: حدود انتگرال بیرونی حتماً باید عدد باشد و حدود انتگرال داخلی یا عدد است و یا تابعی از متغیر بیرونی.

تذکر ۲: به ترتیب نوشتن dx و dy نیز توجه شود.

مثال ۴: مطلوب است محاسبه $\iint_D x\, dA$ که D محصور بین $y=x^2$ و $x=y^2$ می‌باشد.



$x=\sqrt{y}$

$$\begin{cases} y=x^2 \\ y^2=x \end{cases} \longrightarrow x^4=x \longrightarrow \begin{matrix} x=0 \longrightarrow y=0 \\ x=1 \longrightarrow y=1 \end{matrix}$$

$\longrightarrow y=\sqrt{x}$

$$\int_0^1 \int_{y^2}^{\sqrt{y}} x \, dx\, dy = \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} \Big|_{y^2}^{\sqrt{y}} \right) dy$$

$$= \int_0^1 \frac{y}{2} - \frac{y^4}{2}\, dy = \frac{y^2}{4} - \frac{y^5}{10} \Big|_0^1 = \left(\frac{1\times5}{4\times5} - \frac{1\times2}{10\times2}\right) = \frac{5-2}{20} = \frac{3}{20}$$

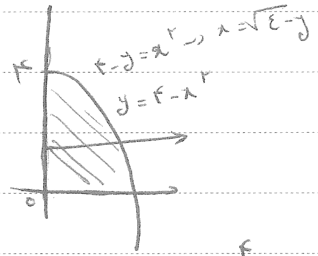
تعویض ترتیب انتگرال‌گیری

گاهی اوقات محاسبه تابع اولیه‌ی تابع f با ترتیب معینی که داده اند نسبت به یکی از متغیرها مشکل و یا غیرقابل حل است، در این حالت باید ترتیب انتگرال‌گیری را عوض کنیم.

برای این کار ناحیه انتگرال‌گیری (D) را رسم کرده و سپس راستای انتگرال‌گیری را عوض می‌کنیم و حدود آن‌ها را در راستای جدید بازنویسی می‌کنیم.

مثال) حاصل انتگرال $\int_0^2\int_0^{4-x^2} \frac{xe^{2y}}{4-y}\,dy\,dx$ را بدست آورید (با تعویض حدود انتگرال‌گیری)

حل) برای حل بهتر انتگرال ابتدای انتگرال‌گیری را عوض می‌کنیم. خود مسأله حدود انتگرال‌ها را در ابتدای آن نوشته است



پس با خط موازی را در راستای محور x در نظر می‌گیریم و به حل انتگرال می‌پردازیم.

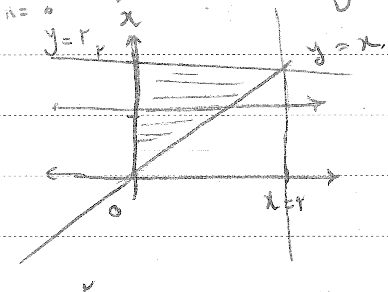
$$\int_{y=0}^{4}\int_{x=0}^{\sqrt{4-y}} \frac{xe^{2y}}{4-y}\,dx\,dy = \int_{y=0}^{4} \frac{x^2}{2}\cdot\frac{e^{2y}}{4-y}\Big|_{x=0}^{\sqrt{4-y}} dy =$$

$$\int_0^4 \left(\frac{e^{2y}}{2}-0\right)dy = \frac14 e^{2y}\Big|_0^4 = \frac14 e^8 - \frac14 e^0 = \frac14(e^8-1).$$

مثال) انتگرال دوگانه زیر را محاسبه کنید.

$$\int_{x=0}^{2}\int_{x}^{2} y^2\sin(xy)\,dy\,dx = \int_0^2\int_0^y y^2\sin(xy)\,dx\,dy$$

$\int a\sin(ax)\,dx = \cancel{a}\cdot\frac{1}{\cancel{a}}(-\cos ax)$



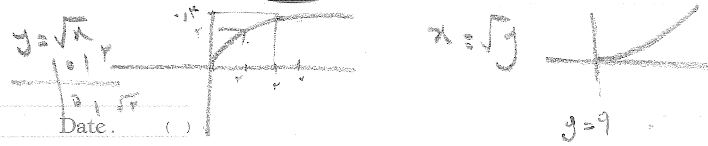
$$= \int_0^2 y^{2}\cdot\frac1y(-\cos xy)\Big|_0^y = -\int_0^2 y(\cos y^2-1)\,dy$$

$$= -\int_0^2 y\cos y^2\,dy + \int_0^2 y\,dy = \underbrace{-\frac12\int_0^4 \cos u\,du}_{-\sin u} + \frac{y^2}{2}\Big|_0^2 = -\frac12\sin y^2\Big|_0^2 + \frac{y^2}{2}\Big|_0^2$$

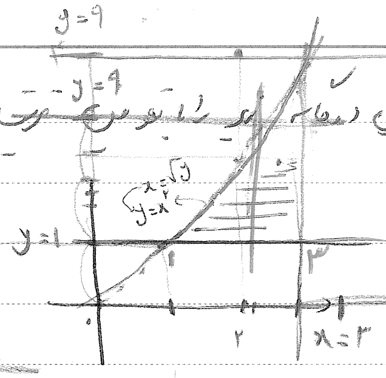
$y^2=u \Rightarrow du=2y\,dy$
$du=\frac12 y\,dy$

$$= -\frac12\sin 4 + \cancel{\frac{4}{2}}.$$

$y=\sqrt{x}$ $\quad x=\sqrt{y}$



مثال) انتگرال دوگانه زیر را با تعویض ترتیب انتگرال‌گیری محاسبه کنید.



$$\int_1^9 \int_{x=\sqrt{y}}^{3} \frac{e^{x^2-2x}}{x+1}\,dx\,dy \qquad x=\sqrt{y} \rightarrow y=x^2$$

x	0 1 2
y	0 1 4

$$=\int_1^3 \int_1^{x^2} \frac{e^{x^2-2x}}{x+1}\,dy\,dx = \int_1^3 \frac{e^{x^2-2x}}{x+1}\, y\,dx \Big|_1^{x^2} =$$

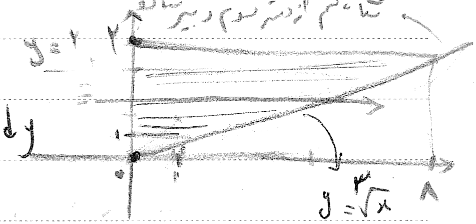
$$\int_1^3 \frac{e^{x^2-2x}}{\cancel{x+1}}\underbrace{(x^2-1)}_{(x-1)\cancel{(x+1)}}\,dx = \int_1^3 e^{\overbrace{x^2-2x}^{x(x-2)}}(x-1)\,dx = \frac{1}{2}\int_1^3 e^u\,du$$

$u=x^2-2x$

$du = 2x-2 = 2(x-1)\,dx$

$$=\frac{1}{2}e^u\Big|_1^3 = \frac{1}{2}e^{x^2-2x}\Big|_1^3 = \frac{1}{2}(e^3-e^{-1}) \qquad \frac{du}{2}=(x-1)\,dx$$

تمرین) حاصل انتگرال $\displaystyle\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{x}}^{2} \frac{dy\,dx}{y^4+1}$ را بعد از تعویض انتگرال‌گیری بیابید.



$$\int_{x=0}^{x=8}\int_{y=\sqrt[3]{x}}^{y=2} \frac{1}{y^4+1}\,dy\,dx = \int_0^2\int_0^{y^3}\frac{1}{y^4+1}\,dx\,dy \qquad y=\sqrt[3]{x}$$

x	0 1 8
y	0 1 2

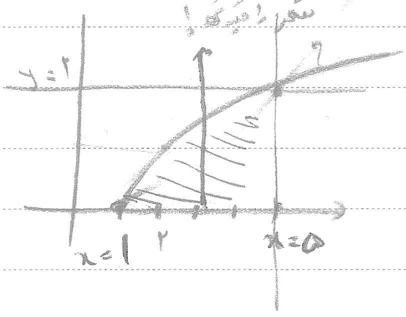
$$=\int_0^2 \frac{1}{y^4+1}\,x\Big|_0^{y^3} dy = \int_0^2 \frac{y^3}{y^4+1}\,dy = \frac{1}{4}\int_0 \frac{1}{u}\,du = \frac{1}{4}\ln u\Big|_0^2$$

$$=\frac{1}{4}\ln(y^4+1)\Big|_0^2 = \frac{1}{4}\ln(17) - \frac{1}{4}\cancel{\ln 1} = \frac{1}{4}\ln 17. \qquad (u=y^4+1 \rightarrow du = 4y^3\,dy \rightarrow \frac{du}{4}=y^3\,dy)$$

تمرین: انتگرال زیر را بعد از تعویض ترتیب انتگرال‌گیری حل کنید.

$$\int_{y=0}^{y=2}\int_{x=1+y^2}^{5} y\,e^{(x-1)^2}\,dx\,dy$$

تغییر ترتیب!



$=$

$x=1+y^2$

$y^2=x-1$

$y=\sqrt{x-1}$

x	1	2	5
y	0	1	2

$$=\int_1^5\int_0^{\sqrt{x-1}} y\,e^{(x-1)^2}\,dy\,dx=\frac{1}{2}\int_1^5 y^2 e^{(x-1)^2}\Big|_0^{\sqrt{x-1}}dx=$$

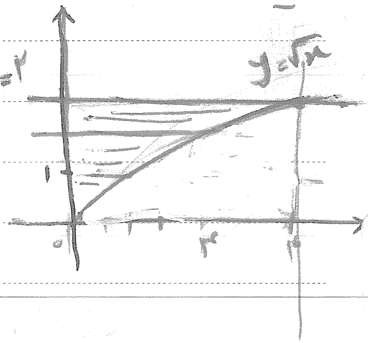
$$\frac{1}{2}\int_1^5(\sqrt{x-1})^2 e^{(x-1)^2}dx=\frac{1}{4}\int_1^5 du\cdot e^u=\frac{1}{4}\left(e^u\Big|_1^5\right)=\frac{1}{4}e^{(x-1)^2}\Big|_1^5$$

$u=(x-1)^2 \Rightarrow du=2(x-1)(1)\,dx$, $\frac{du}{2}=(x-1)dx$

$$=\frac{1}{4}\left(e^{16}-e^{1}\right)$$

تمرین: حاصل انتگرال $\int_0^4\int_{\sqrt{x}}^{2}\cos(y^3)\,dy\,dx$ را بیابید.

$$\int_{x=0}^{4}\int_{y=\sqrt{x}}^{2=y}\cos y^3\,dy\,dx=\int_0^2\left(\int_0^{y^2}\cos y^3\,dx\right)dy$$



$$=\int_0^2\cos y^3\,x\Big|_0^{y^2}=\int_0^2 y^2\cos y^3\,dy$$

$u=y^3\to du=3y^2dy\to\frac{du}{3}=y^2dy$

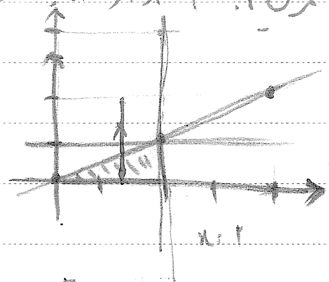
$$=\frac{1}{3}\int_0^8\cos u\,du=\frac{1}{3}\sin y^3\Big|_0^2=\frac{1}{3}\sin 8$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

تمرین ۱: ۳۲۵، ۹۴: جواب انتگرال زیر را با عوض ترتیب انتگرال‌گیری محاسبه کنید:

$$\int_{y=0}^{y=1}\int_{x=2y}^{x=2} \cos(x^2)\,dx\,dy =$$



$x=2y$

x	0	2	4
y	0	1	2

$$= \int_{0}^{2}\int_{y=0}^{\frac{x}{2}} \cos x^2\,dy\,dx = \int_0^2 \left(\cos x^2 y \Big|_0^{\frac{x}{2}}\right) = \int_0^2 x.\cos\frac{x^2}{2} - 1\,dx$$

$$\overset{(*)}{=} \sin 2 - x\Big|_0^2 = \sin 2 - 2.$$

حل انتگرال (*)

$$\int_0^2 x.\cos\frac{x^2}{2}\,dx \qquad u = \frac{x^2}{2} \Rightarrow du = \frac{2x}{2}\,dx$$

$$\int_0^2 \cos u\,du = \sin u\Big|_0^2 = \sin\frac{x^2}{2}\Big|_0^2 = \sin 2 - \cancel{\sin 0}$$

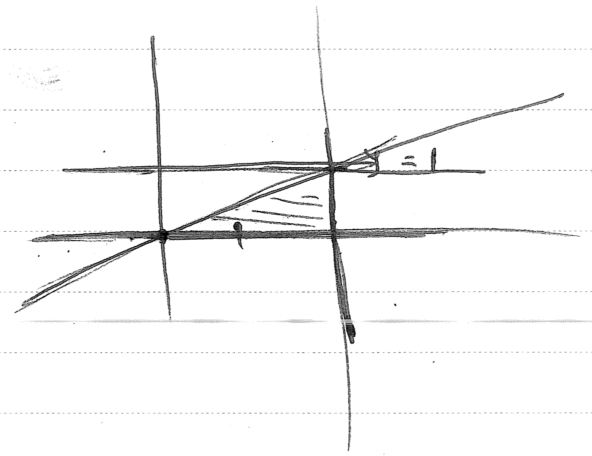
$$\int_0^1 \int_{2y}^{2} \cos(x^2)\,dx\,dy$$

$x = 2y$

$x = 2$

$y = 0$

$y = 1$



تغییر متغیر: دو متغیر جدید u و v را در نظر بگیرید، در این صورت تابع زیر انتگرال و حدود انتگرال را

برحسب متغیرهای جدید در می‌آوریم، همچنین در این حالت باید دقت شود $dA = |J|\, du\, dv$

$J = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ لذا خواهیم داشت:

$$\iint_D f(x,y)\, dx\, dy = \iint_{D'} f(x(u,v), y(u,v))\, |J|\, du\, dv$$

که D' تصویر ناحیه D در صفحه u و v تحت نگاشت $(u,v) = T(x(u,v), y(u,v))$ می‌باشد.

تذکر: معمولاً ما u و v را برحسب x و y داریم، در این مواقع می‌توان از رابطه زیر ژاکوبین را محاسبه کرد:

$$\frac{1}{J} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}$$

مثال ۱: انتگرال $\iint e^{\frac{y-x}{y+x}}\, dA$ که در آن D چهارضلعی با رئوس در نقاط $A(1,0)$،

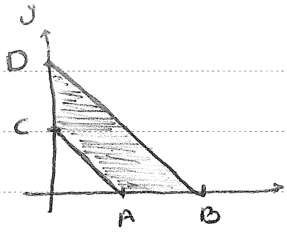
$B(2,0)$، $C(0,1)$ و $D=(0,2)$ می‌باشد را محاسبه کنید.

حل:
در حل این مسأله از تغییر متغیرهای $u = y-x$ و $v = y+x$ استفاده می‌کنیم

$$\frac{1}{J} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \Rightarrow |J| = \frac{1}{2}$$

ناحیه انتگرال‌گیری را به مختصات جدید u و v می‌بریم، برای این کار کافیست چهار رأس نقطه

تحت $u = y-x$ و $v = y+x$ بنگاریم

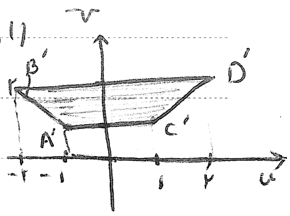


$A(1,0)\xrightarrow[u=y-x]{v=y+x}\begin{cases}v=1\\u=-1\end{cases}\longrightarrow A'(-1,1)$

$B(2,0)\xrightarrow[u=y-x]{v=y+x}\begin{cases}v=2\\u=-2\end{cases}\longrightarrow B'(-2,2)$

$C(0,1)\xrightarrow[u=y-x]{v=y+x}\begin{cases}v=1\\u=1\end{cases}\quad C'(1,1)$

$D(0,2)\xrightarrow[u=y-x]{v=y+x}\begin{cases}v=2\\u=2\end{cases}\quad D'(2,2)$



ناحیه در دستگاه uv منظم است، خط فرض را موازی u ، در نظر گرفته و به حل انتگرال می‌پردازیم

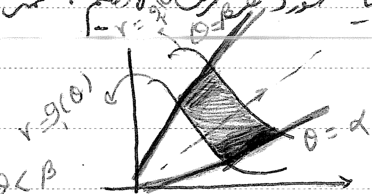
$$\int_{v=1}^{2}\int_{u=-v}^{v} e^{\frac{u}{v}}\cdot\frac{1}{2}\,du\,dv=\frac{1}{2}\int_{1}^{2} v\cdot e^{\frac{u}{v}}\Big|_{u=-v}^{v}dv=\frac{1}{2}\int_{1}^{2} v(e^{1}-e^{-1})\,dv$$

$$=\left(\frac{e^{1}-e^{-1}}{2}\right)\cdot\frac{v^{2}}{2}\Big|_{1}^{2}=\frac{e^{1}-e^{-1}}{2}\left(\frac{4}{2}-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}\sinh 1.$$

تغییر متغیر قطبی (امتحانی) گاهی اوقات لازم است برای حل راحت‌تر شدن، انتگرال را در مختصات قطبی حل کنیم، یعنی به جای x و y به ترتیب $r\cos\theta$ و $r\sin\theta$ قرار دهیم در این صورت داریم:

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=r\ ,\quad dA=r\,dr\,d\theta\ ,\quad x^{2}+y^{2}=r^{2}$$

نحوه نوشتن حدود انتگرال دوگانه در مختصات قطبی: نیم خط از مبدأ رو به بیرون رسم می‌کنیم که از درون ناحیه انتگرال‌گیری عبور کند. برای حدود θ، نیم خط را در ناحیه مورد نظر حرکت می‌دهیم، کمترین و بیشترین زاویه‌ای ممکن را که نیم خط با جهت مثبت محور xها می‌سازد، حدود θ در نظر می‌گیریم. برای حدود r می‌بینیم که نیم خط در هنگام ورود به ناحیه چه تابعی را قطع کرده و در هنگام خروج از آن چه تابعی را.



$\alpha<\theta<\beta$

$g_1(\theta)<r<g_2(\theta)$

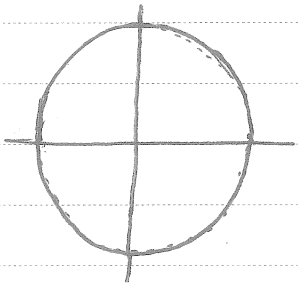
Subject:
Year. Month. Date. 22

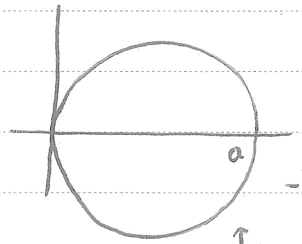
قبل از اینکه ادامه بحث را مطالعه کنید، توصیه می‌شود با برخی اشکال قطبی زیر آشنا شوید.

$x^2+y^2=a^2$

$r=a$

$0\le\theta\le 2\pi$

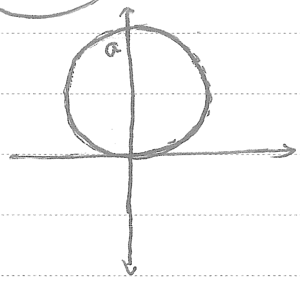




$x^2+y^2=ax$

$r=a\cos\theta$

$-\frac{\pi}{2}\le\theta<\frac{\pi}{2}$



$x^2+y^2=ay$

$r=a\sin\theta$

$0\le\theta\le\pi$

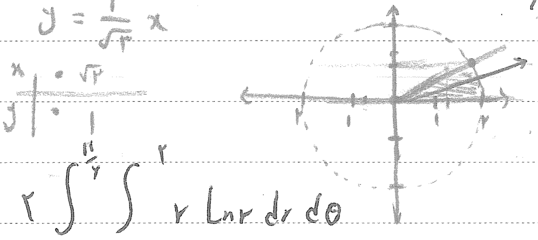
مثال ۱) انتگرال زیر را در مختصات قطبی حل کنید.

$$\int_0^1\int_{\sqrt{3}y}^{\sqrt{4-y^2}} \ln(x^2+y^2)\,dx\,dy$$

$x=\sqrt{4-y^2} \Rightarrow x^2=4-y^2 \Rightarrow x^2+y^2=4 \Rightarrow r^2=4 \Rightarrow 0\le r\le 2$

$x=\sqrt{3}y \Rightarrow y=\frac{1}{\sqrt{3}}x \Rightarrow \tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}\cancel{x}}{\cancel{x}}=\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{6}$

$0\le\theta\le\frac{\pi}{6}$



$$I=\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{6}}\int_{r=0}^{2}\ln(r^2)\cdot r\,dr\,d\theta = 2\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{6}}\int_{r=0}^{2} r\ln r\,dr\,d\theta$$

برای محاسبه $I_1=\int_0^2 r\ln r\,dr$ از روش جزء به جزء استفاده می‌کنیم

$u=\ln r \rightarrow du=\frac{1}{r}dr$

$dv=r\,dr \quad v=\frac{r^2}{2}$

$I_1=\frac{r^2}{2}\ln r-\int\frac{r^2}{2}\cdot\frac{1}{r}dr=\frac{r^2}{2}\ln r-\int\frac{r}{2}dr$

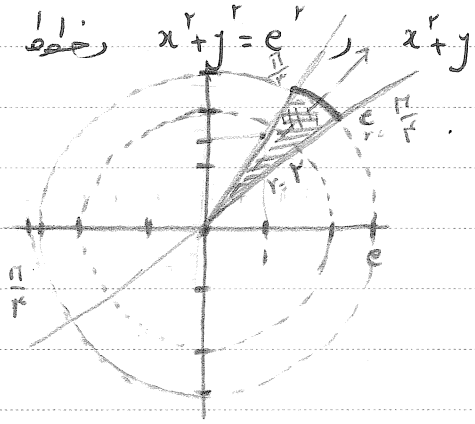
$=\frac{r^2}{2}\ln r-\frac{r^2}{4}\Big|_0^2=(2\ln 2-1)$

PAPCO

$$I = 2\int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{2^2}{2}\ln 2 - 1\right) d\theta = 2(2\ln 2 - 1)\,\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{3}(2\ln 2 - 1)$$

مثال: انتگرال دوگانه $\iint_D \frac{\ln\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}\, dA$ را حل کنید که D ناحیه محصور به دایره‌های $x^2+y^2=4$ و $x^2+y^2=e^2$ و خطوط $y=x$ و $y=\sqrt{3}x$ در ربع اول می‌باشد.

x	0	1	2
y	0	$\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}$



$y = x \Rightarrow r\sin\theta = r\cos\theta \Rightarrow \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = 1 \Rightarrow \tan\theta = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$

$y = \sqrt{3}x \Rightarrow r\sin\theta = \sqrt{3}\, r\cos\theta \Rightarrow \tan\theta = \sqrt{3} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \int_2^e \frac{\ln r}{r^2} \times r\, dr\, d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \int_2^e \frac{\overbrace{\ln r}^{=u}}{r}\, dr\, d\theta$$

$\sqrt{r^2} = r$

$u = \ln r \Rightarrow du = \frac{1}{r}dr$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{2}(\ln r)^2 \Big|_2^e\right) d\theta = 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\ln r)^2}{2}\Big|_2^e = 2(1 - 2\ln 2)\,\theta \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= 2(1 - 2\ln 2)\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$$

۲۵/۳/۹۴

مثال: انتگرال مقابل را با تغییر متغیر در مختصات قطبی حل کنید.

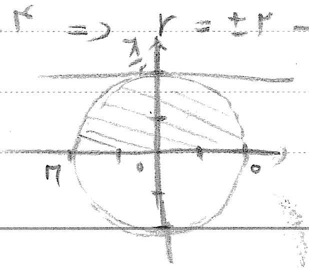
$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} \frac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy$$

$x = \sqrt{4-y^2} \Rightarrow x^2 = 4 - y^2 \Rightarrow x^2+y^2 = 4 \Rightarrow r = \pm 2 \to r = 2$

$x = 0 \quad 2\cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0$

$y = 2 \to r\sin\theta = 2 \Rightarrow \sin\theta = \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

$y = 0 \to r\sin\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0$



Subject:
Year. Month. Date. 23

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 \frac{2\cancel{r}\cos\theta\,(r\sin\theta)^2}{\sqrt{\cancel{r^2}}}\,|\cancel{r}|\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 r^3 \cos\theta \sin^2\theta \, dr\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^4}{4}\Big|_0^2 \cos\theta \cdot \sin^2\theta \, d\theta =$$

$u = \sin\theta \rightarrow du = \cos\theta\, d\theta$

$$4\int_0^{\frac{\pi}{2}} u^2\,du = 4\left(\frac{u^3}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) = 4\ \frac{\sin^3\theta}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 4\left(\frac{1}{3} - 0\right) = \frac{4}{3}$$

۹۴/۰۳/۲۵

مثال ۱) انتگرال مقابل را با تغییر متغیر در مختصات قطبی حل کنید:

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} e^{-(x^2+y^2)}\,dy\,dx$$

$y = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow y^2 + x^2 = 1 \Rightarrow r^2 = 1$

$y = 0 \quad r\cos\theta = 0 \Rightarrow r = 0$

$x = 1 \Rightarrow r\cos\theta = 1 \Rightarrow \cos\theta = 1 \Rightarrow \theta = 0$

$x = 0 \Rightarrow r\cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 |r|\, e^{-r^2}\, dr\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-u}\,du\,d\theta =$$

$u = r^2 \Rightarrow du = 2r\,dr$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} -e^{-u}\Big|_0^1 d\theta = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\left(e^{-r^2}\Big|_0^1\right)}_{(e^{-1} - e^{0})} d\theta = (1-e^{-1}) \cdot \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta}_{\frac{\pi}{2}(1-e^{-1})} =$$

PAPCO

Subject:

Year. Month. Date. ( )

محاسبهٔ مساحت رویه‌ها: فرض کنید سطح S به معادلهٔ $z=f(x,y)$ نسبت به محور zها منتظم باشد (یعنی هر خط موازی با محور z رویه را حداکثر در یک نقطه قطع کند) و فرض کنید تصویر رویهٔ S بر صفحه xy ناحیهٔ D باشد، آنگاه مساحت سطح S که با نماد σ نشان داده می‌شود، عبارت است از:

$$\sigma = \iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy$$

همینطور رویهٔ S با معادلهٔ $y=g(x,z)$ در با حوزه تعریف D_1 داده شده باشد مساحت سطح S عبارت است از:

$$\sigma = \iint_{D_1} \sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\, dx\, dz$$

و اگر رویهٔ S با معادلهٔ $x=h(y,z)$ در با حوزه تعریف D_2 داده شده باشد، مساحت سطح S عبارت است از:

$$\sigma = \iint_{D_2} \sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\, dy\, dz$$

مثال ۹۱/۱/۲۱ مساحت قسمتی از صفحه $z=2x$ که درون سهمیگون $z=x^2+y^2$ واقع است را بیابید؟

$$① \; z=2x \quad z_x=2,\; z_y=0$$

$$② \; \begin{cases} z=x^2+y^2 \\ z=2x \end{cases} \quad x^2+y^2=2x$$

$$\Rightarrow x^2-2x+y^2=0$$

$$\Rightarrow x^2-2x+1-1+y^2=0$$

$$\Rightarrow (x-1)^2+y^2=1 \quad \text{دایره به شعاع ۱ و مرکز } (1,0)$$

$$r^2=1 \Rightarrow r=\pm 1$$

$$\theta = (0, 2\pi)$$

$$\iint \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\, dA = \iint \sqrt{1+2^2+0^2}\, dA =$$

$$\iint \sqrt{5}\, dA = \sqrt{5}\iint dA = \sqrt{5}\,(\text{مساحت دایره به شعاع ۱})$$

$$= \sqrt{5}\times \pi r^2 = \sqrt{5}\times \pi (1)^2 = \sqrt{5}\,\pi$$

مثال ۱/ ۶ر ۹۳ مساحت قسمتی از رویه $x^2+y^2+z^2=36$ که درون استوانه $x^2+y^2=9$ واقع است را بیابید.

$$z^2=36-x^2-y^2 \Rightarrow z=\pm\sqrt{36-x^2-y^2}$$

$$z_x=\frac{-2x}{2\sqrt{36-x^2-y^2}} \quad ; \quad z_y=\frac{-2y}{2\sqrt{36-x^2-y^2}}$$

$$\iint_D \sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{36-x^2-y^2}}\,dA=\iint_D \sqrt{\frac{36}{36-x^2-y^2}}\,dA=$$

$$\iint_D \frac{6}{\sqrt{36-x^2-y^2}}\,dA=6\int_0^{2\pi}\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{\underset{36-r^2}{36-x^2-y^2}}}|r|\,dr\,d\theta=$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{36-r^2}}|r|.\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}$$

$$u=36-r^2 \Rightarrow du=2r\,dr \quad \frac{du}{2}=r\,dr \qquad \frac{1}{2}\int_0^3 \frac{1}{u^{\frac{1}{2}}}\,du=\frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\Big|_0^3=(36-r^2)^{\frac{1}{2}}\Big|_0^3=(27)^{\frac{1}{2}}-(36)^{\frac{1}{2}}$$

$$12\int_0^{2\pi}(27)^{\frac{1}{2}}-(36)^{\frac{1}{2}}\,d\theta=$$

$$12(3\sqrt{3}-6)(2\pi)$$

Subject :

Year . Month . Date . ( )

محاسبه انتگرال سه‌گانه در مختصات دکارتی (x,y,z)

برای نوشتن حدود $dv = dz \, . \, dA$ بدین صورت عمل می‌کنیم:

تعیین حدود z: خطی فرضی موازی محور zها (در شکل سه‌بعدی) رسم می‌کنیم تا ببینیم که این خط در هنگام ورود به ناحیه R و در هنگام خروج از آن چه رویه‌هایی را قطع می‌کند. (اگر هنگام ورود $z=g_1(x,y)$ و در هنگام خروج از ناحیه R، $z=g_2(x,y)$ را قطع کند) در این صورت $g_1(x,y) \le z \le g_2(x,y)$

تعیین حدود x,y: ناحیه R را بر صفحه xy تصویر می‌کنیم و حدود این دو را از روی تصویر ناحیه دقیقاً همانند انتگرال دوگانه بدست می‌آوریم.

در حالت کلی برای نوشتن حدود اولین متغیر، خطی موازی محور آن متغیر در شکل سه‌بعدی رسم می‌کنیم و برای حدود دو متغیر دیگر، ناحیه را بر صفحه آن دو متغیر تصویر کرده و حدود آنها را از روی تصویر، همانند انتگرال دوگانه بدست می‌آوریم.

در حالت کلی برای نوشتن حدود اولین متغیر، خطی موازی محور آن متغیر در شکل سه‌بعدی رسم می‌کنیم و برای حدود دو متغیر دیگر، ناحیه را بر صفحه آن دو متغیر تصویر کرده و حدود آنها را از روی تصویر، همانند انتگرال دوگانه می‌نویسیم.

تذکر: برای بدست آوردن تصویر R بر صفحه xy، باید در یک دستگاه، متغیر z را از معادلات رویه‌ها حذف کنیم.

تذکر: برای بدست آوردن تصویر R بر صفحه xy، باید در یک دستگاه، متغیر z را از معادلات رویه‌ها حذف کنیم.

مثال ۱) اگر ناحیهٔ R محصور به صفحات $x=0$ و $y=0$ و $z=0$ و $x+y+z=1$ باشد، مطلوب است

محاسبهٔ انتگرال $\iiint_R (1+x+y+z)\, dV$

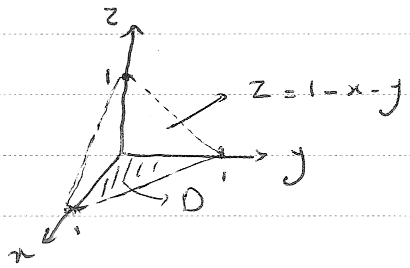
حل)

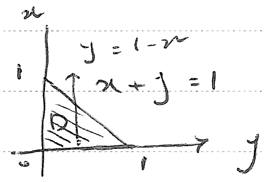
R در جهت محور z ها منظم کنیم در این صورت خطی فرضی موازی محور z ها رسم می‌نماییم این خط

هر ناحیهٔ R را در دو نقطه قطع می‌کند که معادلات آن $z=0$ ، $z=1-x-y$ می‌باشد، بنابراین

$0 \le z \le 1-x-y$. حال چون R را در جهت محور z ها منظم کرده‌ایم باید تصویر آن را در صفحه

xy بدست آوریم . ناحیهٔ R و D تصویر آن در صفحهٔ xy آمده است.





$0 \le y \le 1-x$

$0 \le x \le 1$

در این صورت $R = \{(x,y,z) \mid 0 \le x \le 1 ,\ 0 \le y \le 1-x ,\ 0 \le z \le 1-x-y\}$

در نتیجه $\iiint_R (1+x+y+z)\, dV = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} (1+x+y+z)\, dz\, dy\, dx$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} \Big[(1+x+y)z + \frac{z^2}{2} \Big]_0^{1-x-y} dy\, dx$$

$$1-\cancel{x}-\cancel{y}+\cancel{x}-x^2-xy+\cancel{y}-xy-y^2$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} \Big[\underbrace{(1+x+y)(1-x-y)}_{1-2xy-x^2-y^2 \,=\, 1-(x+y)^2} + \frac{(1-x-y)^2}{2} \Big] dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \Big[y - \frac{(x+y)^3}{3} - \frac{(1-x-y)^3}{6} \Big]_0^{1-x} dx = \int_0^1 \Big(1-x-\frac{1}{3}-\frac{x^3}{3}+\frac{(1-x)^3}{6}\Big) dx$$

$$= \frac{2}{3}x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{(1-x)^4}{24} \Big]_0^1 = \frac{7}{24}$$

Subject:

Year. Month. Date. 25

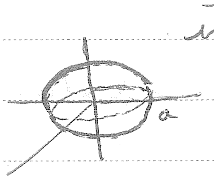
فصل چهارم

انتگرال سه گانه

الف) رویه های درجه دوم استاندارد

ب) رویه های درجه دوم غیراستاندارد (۱۳۲ تا ۱۳۶ مراجعه شود به جزوه دانشگاه آزاد)

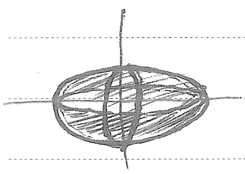
انواع رویه ها



① کره: معادله کره به مرکز مبدا و شعاع a به فرم $x^2+y^2+z^2=a^2$ می باشد

نکته: حجم کره به شعاع a برابر است با $V=\frac{4}{3}\pi a^3$

② بیضوی: اگر معادله رویه ای به صورت $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ باشد،



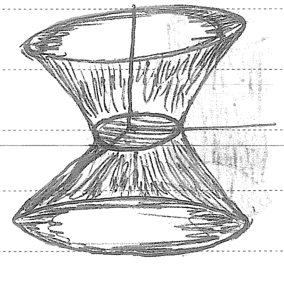
رویه مورد نظر بیضوی (بیضی گون) نامیده می شود. مرکز این بیضوی مبدأ مختصات

تقاطع آن با محور xها نقاط $x=\pm a$ و با محور yها $y=\pm b$ و با محور z نیز $z=\pm c$ است.

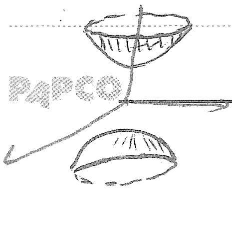
نکته ۲) حجم بیضوی به معادله $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ برابر است با $V=\frac{4}{3}\pi abc$

③ هذلولی گون:

الف) معادله $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ مربوط به هذلولی گون یک پارچه ای است که محور آن محور zها است



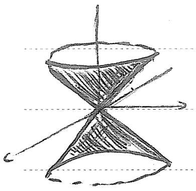
(محور هذلولیون در جهت متغیری است که علامت منفی دارد.



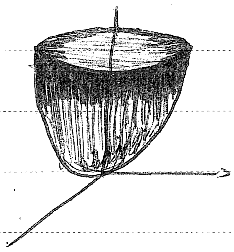
ب) معادله $-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ معادله هذلولیون دوپارچه است

که محور آن محور zها است. (محور هذلولیون دوپارچه در جهت متغیری است که علامت آن در معادله مثبت است.

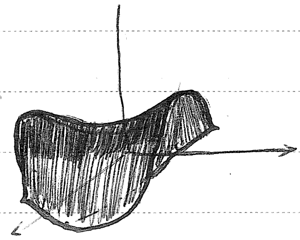
Subject:
Year. Month. Date. ( )



۴) مخروط : معادله مخروطی که محور آن محور z هاست بصورت $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$ می‌باشد.



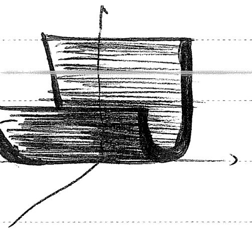
۵) سهموی : معادله $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$ مربوط به کلوی (سهمی‌گون) است که رأس آن در مبدأ مختصات قرار دارد و در جهت محور z هاست. (جهت سهموی در جهت متغیری است که توان آن یک باشد.)



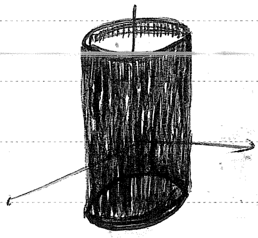
۶) زین اسبی : معادله به نام $\frac{-x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$ معادله سهمی‌گون هذلولوی / زین اسبی است.

۷) استوانه : رویه‌ای است که یکی از سه متغیر x، y یا z را نداشته باشد و حداقل یکی از متغیرها، درجه‌اش دو باشد. جهت استوانه در جهت متغیری است که در معادله نیست. مثلاً $x^2+y^2=a^2$، استوانه‌ای است که مقطع آن دایره است و چون در معادله z موجود نیست، بنابراین استوانه در جهت محور z هاست.

استوانه سهموی : $z=x^2$



استوانه بیضوی : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$



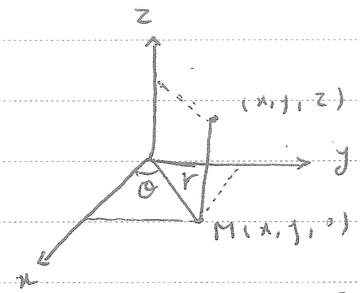
تغییر متغیر در مختصات استوانه‌ای

در حالتی که تغییر متغیر در مختصات استوانه‌ای مورد نظر باشد داریم:

$x = r\cos\theta \quad , \quad y = r\sin\theta \quad , \quad z = z$

که در آن $r=\sqrt{x^2+y^2}$ فاصله نقطه از مبدأ $M(x,y,0)$ در صفحه xy تا مبدأ مختصات

و θ زاویه شعاع OM با محور x هاست.



در این صورت داریم:

$$J=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial\theta} & \frac{\partial x}{\partial z}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial\theta} & \frac{\partial y}{\partial z}\\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial\theta} & \frac{\partial z}{\partial z}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta & 0\\ \sin\theta & r\cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=r$$

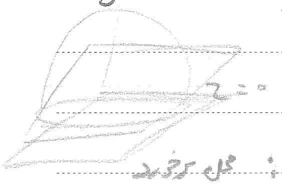
پس

$$\iiint_R F(x,y,z)\,dv=\iiint_{R'} F(r,\theta,z)\,r\,dr\,d\theta\,dz$$

$r^2\sin\theta$

مثال (۸۶) مطلوبست محاسبه $\iiint_R x\,dv$ که در آن ناحیه محصور به رویه $x^2+y^2+z^2=4$

و صفحه $z=0$ است. (حذف)



محل برخورد:

$$\begin{cases} z=\sqrt{4-(x^2+y^2)}\\ z=0\end{cases} \Rightarrow x^2+y^2=4 \quad ; \quad 0\le z\le\sqrt{4-r^2}$$

برای r و θ به سراغ صفحه xy می‌رویم:

$x^2+y^2=4 \Rightarrow r^2=4 \Rightarrow r=2 \Rightarrow 0\le r\le 2 \;,\; 0\le\theta\le 2\pi$

$$M=\int_0^{2\pi}\int_{r=0}^{2}\int_{z=0}^{\sqrt{4-r^2}} r\,dz\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^2 rz\Big|_{z=0}^{\sqrt{4-r^2}}dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^2 4r-r^3\,dr\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi} 2r^2-\frac{r^4}{4}\Big|_0^2\,d\theta=\int_0^{2\pi}4\,d\theta=8\pi$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال: ۱۰ / ۱۸ / ۹۲ ، مطلوبست محاسبه $\iiint_R \frac{x}{9x^2+4y^2}$ که در آن R ناحیه ایجاد شده

توسط بیضوی $\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{3^2}+z^2=1$ میباشد.

$$\frac{x}{2}=r\cos\theta \Rightarrow x=2r\cos\theta$$

$$\frac{y}{3}=r\sin\theta \rightarrow y=3r\sin\theta$$

$$0\le\theta\le 2\pi \qquad 0\le r\le 1 \qquad |J|=2\times 3\times r$$

$$z=\pm\sqrt{1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}}$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{-\sqrt{1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}}}^{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}}}\frac{x}{9x^2+4y^2}\,dz\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^1\frac{x}{9x^2+4y^2}\times 2\left(\sqrt{1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}}\right)dA=$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1\frac{\cancel{2}x}{9x^2+4y^2}\times\sqrt{\frac{36-9x^2-4y^2}{\cancel{36}\ 6\times 3}}\,dA=\int_0^{2\pi}\frac{1}{3}\int_0^1\frac{2r\cos\theta\cdot\overbrace{\sqrt{36-36r^2}}^{6\sqrt{1-r^2}}}{\underbrace{9(4r^2\cos^2\theta)+4(9r^2\sin^2\theta)}_{\cancel{36r^2}}}\cancel{6}r\,dr\,d\theta$$

$$=\frac{2}{3}\int_0^{2\pi}\cos\theta\cdot\int_0^1\sqrt{1-r^2}\,dr\,.$$

$r=\sin t \Rightarrow \sqrt{1-\sin^2 t}=\cos t$

$dr=\cos t\,dt$

$\int_0^1 \cos t\cdot\cos t\,dt=\int_0^1\cos^2 t\,dt$

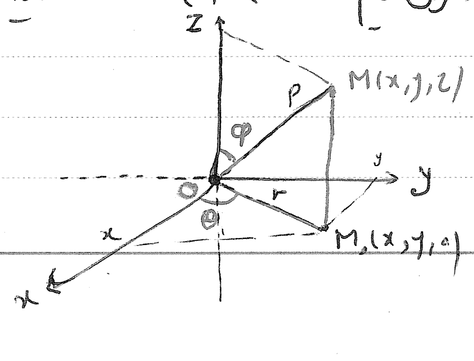
تغییر متغیر در مختصات کروی:

ارتباط بین مختصات کروی و دکارتی عبارت است از:

$$\begin{cases}x=\rho\sin\varphi\cos\theta\\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta\\ z=\rho\cos\varphi\end{cases}$$

که در آن $\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ فاصله نقطه $M(x,y,z)$ تا مبدأ مختصات و φ زاویه OM با محور z

است و فرض میکنیم $0\le\varphi\le\pi$ و θ زاویه تصویر OM بر صفحه xy یعنی OM_1 با محور xهاست.



P4PCO

تغییر متغیر در مختصات بیضوی: اگر بیضی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ را داشته باشیم، از تغییر متغیر $\begin{cases} x = ar\cos\theta \\ y = br\sin\theta \end{cases}$ استفاده کنیم، در این صورت خواهیم داشت: $J = abr$ و $dA = abr\,dr\,d\theta$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=r^2$$

ژاکوبین تغییر متغیر در مختصات کروی عبارت از:

$$J=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\varphi,\theta)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial\rho} & \frac{\partial x}{\partial\varphi} & \frac{\partial x}{\partial\theta} \\ \frac{\partial y}{\partial\rho} & \frac{\partial y}{\partial\varphi} & \frac{\partial y}{\partial\theta} \\ \frac{\partial z}{\partial\rho} & \frac{\partial z}{\partial\varphi} & \frac{\partial z}{\partial\theta} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \cos\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi \\ \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \end{vmatrix}$$

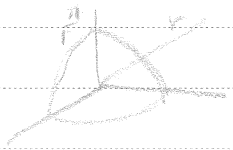
$$=\rho^2\sin\varphi$$

لذا

$$\iiint_R f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\iiint_{R'} F(\rho,\varphi,\theta)\,\rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta .$$

مثال ۹۲) انتگرال سه‌گانه زیر را حل کنید؟

$$\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} x^2+y^2\,dz\,dy\,dx$$



$$z=\sqrt{1-x^2-y^2} \Rightarrow z^2=1-x^2-y^2 \Rightarrow x^2+y^2+z^2=1$$

چون همه حدود از مثبت شروع می‌شود یک هشتم کره را داریم

$$0<\theta<2\pi \longrightarrow 0<\theta<\frac{\pi}{2}$$

$$0<\varphi<2\pi \longrightarrow 0<\varphi<\frac{\pi}{2}$$

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\rho=1 \qquad -1<\rho\leq 1 \longrightarrow$$

چونکه یک هشتم است $0\leq\rho\leq 1$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 |\rho^2\sin\varphi|\,d\rho\,d\theta\,d\varphi = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 \rho^4\sin\varphi\,d\rho\,d\theta\,d\varphi$$

$$\rho^2\sin^2\varphi\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\varphi\sin^2\theta$$

$$2\rho^2(\sin^2\varphi)\underbrace{\cancel{(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}}_{1}$$

حذف

مختصات کروی: حداقل باید سه معادله در سؤال داشته باشیم که از ۲ (دو) معادله از درجه دو باشد

یکی از درجه یک باشد تا از مختصات کروی استفاده کنیم در غیر این صورت

از مختصات استوانه‌ای استفاده کنیم

Subject:

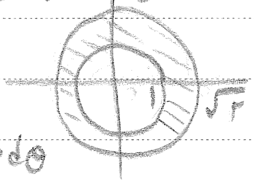
Year. Month. Date. ( )

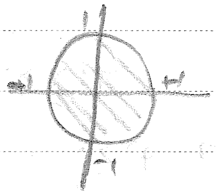
مثال ۹۲) مطلوبست محاسبه $\iint_R \frac{x}{x^2+y^2}\, dv$ که در آن R ناحیه محصور بین دو کره

به مرکز مبدأ و شعاع های ۱ و ۲ می باشد را بیابید؟ $\rightarrow z = \pm\sqrt{1-x^2-y^2}$

$x^2+y^2+z^2=1 \longrightarrow z^2 = 1-x^2-y^2$

$x^2+y^2+z^2=2 \longrightarrow z^2 = 2-x^2-y^2 \Rightarrow z = \pm\sqrt{2-x^2-y^2}$





$$\int_0^{2\pi}\int\int \rho^2 \sin\varphi \, d\rho\, d\varphi\, d\theta$$

چون صدر $2\pi \geq \theta \geq 0$ است و محصور بین دو کره است پس $0 \leq \varphi \leq \pi$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_1^{2} \frac{\cancel{r}\cos\theta \cancel{\sin\varphi}}{\cancel{r^2 \sin^2\varphi}}\, \cancel{r^2 \sin\varphi}\, d\rho\, d\varphi\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{r^2}{2}\Big]_1^2 \cos\theta\, d\varphi\, d\theta = \frac{3}{2}\left(\int_0^{2\pi} \cos\theta\, d\theta\right)\cdot\left(\int_0^{\pi} d\varphi\right)$$

$$= \frac{3\pi}{2}\left[\sin\varphi \Big|_0^{2\pi}\right] \overset{\text{چون صفر}}{=} 4\cdot\frac{3}{4}\pi\left[\sin\frac{\pi}{2} - 0\right] = 4\pi$$

۰ و ۲π هر دو چون Sinφ صفر شود پس ناحیه را به ۴ قسمت تقسیم می کنیم

سوال دکترا (۹۲) مطلوبست محاسبه $\iiint_R x\, e^{(x^2+y^2+z^2)^2}\, dv$ که R محدود به کره های

$x^2+y^2+z^2=1$ و $x^2+y^2+z^2=4$ و مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ است؟

$$1 \le x^2+y^2+z^2 \le 4 \Rightarrow 1 \le \rho \le 2$$

$$z=\sqrt{\underbrace{x^2+y^2}_{\rho^2 \sin\varphi}} \Rightarrow \rho\cos\varphi = \rho\sin\varphi \Rightarrow \tan\varphi = 1 \Rightarrow 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$$

کروی

$x^2+y^2 = \rho^2 \sin\varphi$

$z = \rho\cos\varphi$

$x = \rho\cos\theta\sin\varphi$

$y = \rho\sin\theta\sin\varphi$

$|J| = \rho^2\sin\varphi$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_1^2 \rho\cos\theta\sin\varphi\, e^{\rho^4}\cdot\rho^2\sin\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{4}\int_1^2 4\rho^3 e^{\rho^4}\sin^2\varphi\cos\theta\, d\rho\, d\varphi\, d\theta =$$

$$\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{\rho^4}\Big]_1^2 \sin^2\varphi\cos\theta\, d\varphi\, d\theta =$$

$$\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(e^{16}-e)\sin^2\varphi\cos\theta\, d\varphi\, d\theta =$$

$$\left(\frac{e^{16}-e}{4}\right)\int_0^{2\pi}\cos\theta\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\cos2\varphi}{2}\, d\varphi\right)d\theta = \frac{e^{16}-e}{4}\cdot\int_0^{2\pi}\cos\theta\, d\theta$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} 1-\cos2\varphi\, d\varphi = \frac{1}{2}\left(\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2}\sin2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{1}{2}+0\right)\right)$$

$$\left(\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}\right)$$

$$\frac{e^{16}-e}{4}\left(\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}\right)\int_0^{2\pi}\cos\theta\, d\theta = e^{16}-e$$

$4\sin\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$ $\quad$ $\sin\theta\Big|_0^{2\pi}$

Subject: جلسه بیست و سوم

Year. Month. Date. ( )

هردو نیم‌سال ۹۳ + ۹۴ سؤال ۷ ۱۳۹۲/۳/۶

کاربرد محاسبه حجم: فرمول محاسبه حجم ناحیه R به صورت $\iiint_R dv$ بدست می‌آید.

مثال ۱) حجم ناحیه داخل استوانه $x^2+y^2=2y$ که توسط کره $x^2+y^2+z^2=4$ محدود شده است را بیابید.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\sin\theta}\int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-r^2}} r\,dz\,dr\,d\theta$$

$$x^2+y^2=2y \Rightarrow r^2=2r\sin\theta$$

$$\Rightarrow r=2\sin\theta$$

$$\Rightarrow 0\le r\le 2\sin\theta \Rightarrow$$

برای محاسبه r و θ به سراغ صفحه xy می‌رویم

$$x^2+y^2=4 \Rightarrow r=\pm 2$$

از طرفی $r=2\sin\theta$ $\Rightarrow$ $2=2\sin\theta \Rightarrow \sin\theta=1$

$$-2=2\sin\theta \Rightarrow \theta=\pm\frac{\pi}{2}$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\sin\theta}\int_{-\sqrt{4-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}} r\,dz\,dr\,d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\sin\theta} rz\Big|_{-\sqrt{4-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}}\,dr\,d\theta$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\sin\theta} \underbrace{2r\sqrt{4-r^2}\,dr}_{\text{جواب انتگرال } (*)}\,d\theta = \frac{8}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left((-\cos^3\theta)+1\right)d\theta$$

(*)

$$\int_0^{2\sin\theta} 2r\sqrt{4-r^2}\,dr = \int_0 -\sqrt{u}\,du = -\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\Bigg|_0^{2\sin\theta} = -\frac{(4-4\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+\frac{4^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}$$

$$u=4-r^2 \Rightarrow du=-2r\,dr$$

$$-\frac{2}{3}(\underbrace{4-4\sin^2\theta}_{4(1-\sin^2\theta)})^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}(8)=\frac{8}{3}(-\cos^3\theta+1)$$

$$=-\frac{8}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\,d\theta+\overbrace{\frac{8}{3}\theta\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}}^{+\frac{8}{3}\pi} = -\frac{4}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}1+\cos 2\theta\,d\theta = \theta\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}+\frac{\sin 2\theta}{2}\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\cos^2\theta=\frac{1+\cos 2\theta}{2}$$

$$=(\pi-0)\times\frac{-4}{3}+\frac{8}{3}\pi=-\frac{4}{3}\pi+\frac{8}{3}\pi=\frac{4}{3}\pi \;\blacksquare$$

مثال (۹۴،۰۳،۲۵) حجم ناحیه محصور به صفحات xy و $x+y+z=3$ و استوانه $x^2+y^2=1$ را محاسبه کنید.

$$r^2=1 \Rightarrow r=1 \longrightarrow 0\le r\le 1 \quad \xRightarrow{\text{استوانه}} \quad 0<\theta<2\pi$$

$$z=3-x-y \qquad 0\le z<3-x-y$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{1}\int_0^{3-x-y} r\,dz\,dr\,d\theta$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{1} \left. z \right|_0^{3-x-y} (r)\,dz\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^{1} 3-(\cos\theta+\sin\theta)\,dr\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(3r-(\cos\theta+\sin\theta)r\right)\Big|_0^1=\int_0^{2\pi} 3-(\cos\theta+\sin\theta)\,d\theta$$

$$=3\theta\Big|_0^{2\pi}-(\sin\theta-\cos\theta)\Big|_0^{2\pi}=6\pi-(\cancel{-1+1})=6\pi$$

۲۰

مثال: حجم ناحیه محصور به سطوح $z=\sqrt{x^2+y^2}$ و $x^2+y^2+z^2=1$ و $x^2+y^2+z^2=4$ را بیابید.

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \Rightarrow \rho^2=1 \Rightarrow \rho=1\\ x^2+y^2+z^2=4 \Rightarrow \rho^2=4 \Rightarrow \rho=2\\ z=\sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow \rho\cos\varphi=\sqrt{\rho^2\sin^2\varphi}=\rho\sin\varphi \Rightarrow \sin\varphi=\cos\varphi \Rightarrow \end{cases}$$

$$\tan\varphi=1 \Rightarrow \varphi=\frac{\pi}{4}$$

از اینجا حجم جسم به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$V=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_1^{2}\rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\,\frac{\rho^3}{3}\Big|_1^2\,d\varphi\,d\theta$$

$$=\frac{1}{3}(8-1)\int_0^{2\pi}(-\cos\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{7}{3}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\underbrace{\int_0^{2\pi}d\theta}_{2\pi}=\frac{14}{3}(1-\sqrt{2})\pi$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال) حجم ناحیه داده شده به وسیله سطوح $y=1-z^2$ و $y=1-x^2$ و $y=0$ را بیابید

$$\begin{cases} y=1-x^2 \Rightarrow x=\pm 1 \\ y=0 \end{cases}$$

$$z=\pm\sqrt{1-y} \Rightarrow \int_{-1}^{1}\int_{0}^{1-x^2}\int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} dz\,dy\,dx =$$

$$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1-x^2}\left(\sqrt{1-y}-(-\sqrt{1-y})\right)dy\,dx=\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1-x^2}2\sqrt{1-y}\,dy\,dx=$$

$$1-y=u \Rightarrow du=-y$$

$$=\int_{-1}^{1}-2\cdot\frac{2}{3}\left[(1-y)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{1-x^2}dx=$$

$$-\frac{4}{3}\int_{-1}^{1}\left(1-(1-x^2)\right)^{\frac{3}{2}}-\cancel{(1-0)^{\frac{3}{2}}}\,dx=-\frac{4}{3}\int_{-1}^{1}\Big(\underbrace{1-(1-x^2)}_{+x^2}\Big)^{\frac{3}{2}}dx-\frac{4}{3}x\Big|_{-1}^{1}$$

$$=-\frac{4}{3}\int_{-1}^{1}(x^2)^{\frac{3}{2}}dx-\cancel{\frac{4}{3}x\Big|_{-1}^{1}}^{\frac{8}{3}}=-\frac{4}{3}\left(\cancel{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}\right)-\frac{8}{3}=-\frac{2}{3}-\frac{8}{3}=-\frac{10}{3}$$

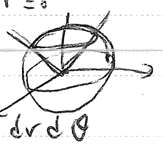
$$x^3=\frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^{1}$$

$$\frac{1}{4}-\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

$$-\frac{2}{3}-\frac{8}{3}$$

تمرین) حجم قسمتی از کره $x^2+y^2+z^2=2$ که به مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ محدود شده است را بدست آورید.

$$V=\iiint_R dV \qquad \begin{cases} z^2=x^2+y^2 \\ z^2=2-x^2-y^2 \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2=1 < \begin{matrix} r=1 \\ r=0 \end{matrix},\ 0\le\theta\le 2\pi$$



$$V=\iint_{x^2+y^2\le 1}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}}dz\,dy\,dx=\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_r^{\sqrt{2-r^2}}r\,dz\,dr\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^1\left(r\sqrt{2-r^2}-r^2\right)dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\left[-\frac{1}{3}(2-r^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}r^3\Big|_0^1\right]d\theta=$$

$$-\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\left((1+1)-(2)^{\frac{3}{2}}\right)d\theta=-\frac{1}{3}(2-2\sqrt{2})\int_0^{2\pi}d\theta \Rightarrow V=\frac{2\sqrt{2}-2}{3}\times 2\pi$$

$$=\frac{4\pi}{3}(\sqrt{2}-1)$$

"فصل پنجم"

انتگرال توابع برداری روی خم:

در این بخش می‌خواهیم $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ را محاسبه کنیم که C خم قطعه‌قطعه هموار، $\vec{r}(t)$ معادله پارامتری خم C و $\vec{F}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ تابع برداری پیوسته است.

نکته ① با توجه به اینکه $d\vec{r} = \vec{r}'(t)\,dt = \dfrac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|}|\vec{r}'(t)|\,dt$، همچنین می‌دانیم که $\vec{T}(t) = \dfrac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|}$

المان طول روی خم C است $(ds = |d\vec{r}|)$ ← $r'(t)\,dt$ ← $\int ds = L$ طول خم C است

و $ds = |\vec{r}'(t)|\,dt$. بنابراین می‌توان نوشت: $d\vec{r} = \vec{T}\,ds$ پس:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C \vec{F} \cdot \vec{T}\,ds \quad \text{on the otherhand} \quad \int \vec{F}_{(x,y,z)} \cdot d\vec{r} = \int \vec{F}(\vec{R}(t)) \cdot \vec{R}'(t)\,dt$$

نکته ② اگر C− همان خم C باشد که فقط جهت حرکت آنها خلاف هم باشند، داریم

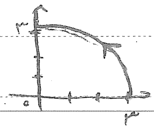
$$\int_{-C} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

تذکر: فرض کنیم $\vec{F} = F_1\vec{i} + F_2\vec{j} + F_3\vec{k}$ و $d\vec{r} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}$ در نتیجه بجای

$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ می‌توان نوشت:

$$\int_C F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz$$

مثال ۱) انتگرال خط $\int_C (x+2y)\,dx + xy\,dy$ را محاسبه کنید که در آن C یک منحنی با معادله



$x^2 + y^2 = 9$ واقع در ربع اول می‌باشد.

حل) معادلات پارامتری منحنی C عبارتست از: $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ ، $x = 3\cos t$; $y = 3\sin t$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$$\int (x+2y)\,dx + xy\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left((3\cos t + 6\sin t)(-3\sin t) + (9\sin t\cdot\cos t)(3\cos t)\right) dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-9\sin t\cos t - 18\sin^2 t + 27\sin t\cdot\cos^2 t)\,dt = \frac{9}{2}(1-\pi)$$

تمرین ۱) انتگرال خط $\int_{(0,0)}^{(1,0)} (x+y)\,dx + (x^2-y)\,dy$ را روی منحنی C با معادلات پارامتری

به صورت $x=t^2$ و $y=t^3-t^2$ حل کنید.

حل:

با توجه به کرانه‌های انتگرال و شکل پارامتری منحنی، می‌توان نتیجه گرفت که $t\in[0,1]$. حال می‌نویسیم:

$$\int_{(0,0)}^{(1,0)} (x+y)\,dx + (x^2-y)\,dy = \int_{t=0}^{t=1} \left((t^2+t^3-t^2)2t + (t^4-t^3+t^2)(3t^2-2t)\right)dt$$

$$= \int_0^1 (3t^6-5t^5+7t^4-2t^3)\,dt = \frac{52}{105}$$ ▨

مثال ۲) (خرداد ۹۴): انتگرال خط $\oint_C \frac{x}{x^2+y^2}\,dx - \frac{y}{x^2+y^2}\,dy$ را حل کنید که در آن C

$x=3\cos t$
$y=3\sin t$
معادلات پارامتری $0\le t\le 2\pi$

دایره با معادله $x^2+y^2=9$ است.

$$\int \frac{x}{x^2+y^2}\,dx - \frac{y}{x^2+y^2}\,dy = \int\left(\left(\frac{3\cos t}{9}\right)(-3\sin t) - \frac{3\sin t}{9}(3\cos t)\right)dt$$

$$= \int_0^{2\pi} -\cos t\sin t - \sin t\cos t\,dt = -2\int_0^{2\pi}\cos t\sin t\,dt$$

$u=\sin t \Rightarrow du=\cos t\,dt$

$$= 2\int_0^{2\pi}\sin u\,du = 2(\cos u)\Big|_0^{2\pi} = 2\cos(\sin t)\Big|_0^{2\pi} = 2(1-1)=0$$

یا $8(\cos(\sin t))\Big|$

$8\cos(\sin t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 8(\cos 1 - 1)$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. 32

کاربردهای انتگرال خط توابع برداری

محاسبه کار:

در انتگرال خط $\int_C \vec{F}.d\vec{r}$ ، اگر $\vec{F}$ بردار نیرو باشد که سبب حرکت جسم در فضای سه بعدی

از نقطه $R(a)$ تا نقطه $R(b)$ روی منحنی C با معادله برداری

$$\vec{R(t)} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{K} \qquad a \le t \le b$$

گردد، کار انجام شده توسط نیروی $\vec{F}$ عبارت است از:

$$w = \int_C \vec{F}.d\vec{r}$$

(خرداد ۹۲)

مثال) کار انجام شده توسط میدان $\vec{F} = (e^{\sin x} + 4y^2 - 1)\vec{i} + (4x + e^{y^3})\vec{j}$ روی مسیر $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ، c

در جهت مثلثاتی را بدست آورید. (قضیه استوکس)

حل) معادلات پارامتری مسیر C به صورت زیر است.

$$x = a r \cos t \ , \ y = b r \sin t \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

$$\int_0^{2\pi} F(r(t))\, R'(t)\, dt = \int_0^{2\pi} -e^{\sin(\cos t)} a \sin t \ - \ \dots$$ (چون محاسبه انتگرال دشوار است)

(با ید از قضیه استوکس استفاده کرد که در بخش بعدی توضیح داده شود.) و سؤال همانجا حل خواهد شد.

مثال) کار نیروی $\vec{F}(x,y,z) = (x^2 - y)\vec{i} + (y^2 - z)\vec{j} + (z^2 - x)\vec{k}$ را روی مسیر از نقطه $(0,0,0)$

تا نقطه $(1,1,1)$ محاسبه کنید. $\vec{R(t)} = t\vec{i} + t\vec{j} + t\vec{K} \ ; \quad 0 \le t \le 1$

$$w = \int_{c_1} \vec{F}.d\vec{r} = \int_{c_1} (x^2 - y)\,dx + (y^2 - z)\,dy + (z^2 - x)\,dz =$$

$$\int_0^1 (t^2 - t)(1)\,dt + (t^2 - t)\,dt + (t^2 - t)\,dt = 3\int_0^1 (t^2 - t)\,dt$$

$$= 3\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2}\right)\Big|_0^1 = 3\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

شار گذرنده از یک منحنی در صفحه:

آهنگ وارد شدن یا آهنگ خارج شدن یک سیال به ناحیه محصور به منحنی بسته واقع در صفحه xy عبارتست از

$$\text{شار گذرنده } \vec{F} \text{ از منحنی } C = \oint \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds$$

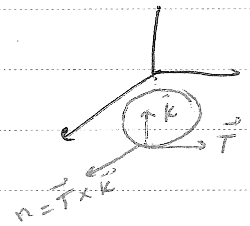
که در آن $\vec{n}$ بردار یکه قائم برونسوی (به طرف خارج) بر منحنی C است و روی انتگرال خود دایره

جهت دار $\circlearrowleft$ را گذاشتیم تا یادآور شویم که انتگرالگیری روی منحنی بسته C در خلاف جهت عقربه های

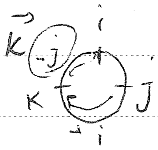
ساعت (جهت مثلثاتی) انجام می‌گیرد. داریم

$$\vec{F}(x,y) = M(x,y)\,\vec{i} + N(x,y)\,\vec{j}$$

با توجه به اینکه منحنی بسته C در صفحه xy قرار دارد، داریم: $\vec{n} = \vec{T}\times\vec{k}$ پس می‌توان نوشت:



$$\vec{n} = \vec{T}\times\vec{k} = \left(\frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{ds}\vec{j}\right)\times\vec{k}$$



$$= \frac{dy}{ds}\vec{i} - \frac{dx}{ds}\vec{j}$$

در نتیجه فرمول شار به صورت زیر در می‌آید:

$$\text{شار} = \oint_C \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds = \oint_C (M\vec{i} + N\vec{j})\cdot\left(\frac{dy}{ds}\vec{i} - \frac{dx}{ds}\vec{j}\right)ds$$

$$= \oint_C M\,dy - N\,dx$$

مثال۱: شار میدان $\vec{F}(x,y) = -y^2\vec{i} + x^2\vec{j}$ گذرنده از مسیر بسته به صورت نیم دایره $0\le t\le \pi$

$\vec{R}(t) = (\cos t)\,\vec{i} + (\sin t)\,\vec{j};\ 0\le t\le \pi$ را بیابید.

$$\text{شار} = \oint_C M\,dy - N\,dx = \int_{C_1} -y^2\,dy - x^2\,dx = \int_0^{\pi} [-\sin^2 t(\cos t) - \cos^2 t(-\sin t)]\,dt = \int_0^{\pi} (\sin^2 t \cos t - \cos^2 t \sin t)\,dt =$$

$$\left(\frac{\sin^3 t}{3} - \frac{\cos^3 t}{3}\right)\Big|_0^{\pi} = +\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right) = +\frac{2}{3}$$

$$(0+\tfrac{1}{3})-(-\tfrac{1}{3})$$

تذکر: در اکثر سؤالات معمولاً برای محاسبه کار انجام شده (دایره‌ای) از قضیه استوکس و برای محاسبه شار خروجی از میدان از قضیه دیورژانس استفاده می‌کنیم (محاسبه دومی برای ترم تابستان حذف است).

انتگرال‌های منحنی الخط مستقل از مسیر

تعریف: اگر تابع برداری $\vec{F}(x,y,z) = M(x,y,z)\vec{i} + N(x,y,z)\vec{j} + \overset{(x,y,z)}{P}\vec{k}$ در فضا داده شده باشد آنگاه $\vec{F}$ را یک تابع برداری پایستار می‌نامیم هرگاه تابع عددی $f(x,y,z)$ موجود باشد به طوری که $\vec{F}(x,y,z) = \nabla f(x,y,z)$.

در این حالت تابع عددی $f(x,y,z)$ را تابع پتانسیل میدان برداری $\vec{F}(x,y,z)$ می‌نامیم.

قضیه: فرض کنید مؤلفه‌های تابع برداری $\vec{F}$ پیوسته و نیز مشتقات جزئی مرتبه اول و دوم آن‌ها نیز پیوسته باشند و نیز فرض کنید میدان برداری $\vec{F}$ یک میدان برداری پایستار با تابع پتانسیل $f(x,y,z)$ باشد آنگاه $\mathrm{Curl}\,\vec{F} = 0$. و همچنین اگر منحنی C با معادله برداری $\vec{R}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ باشد آنگاه مقدار انتگرال منحنی الخط $\vec{F}$ در طول منحنی C از نقطه $\vec{R}(a)$ تا نقطه $\vec{R}(b)$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

از مسیر C مستقل است و از رابطه زیر حساب می‌شود:

$$\int_C F\,dR = f(\overrightarrow{R(b)}) - f(\overrightarrow{R(a)})$$

که در آن $f(x,y,z)$ تابع پتانسیل بر منحنی C است.

مثال) اگر $\vec{F}(x,y) = (3+2xy)\vec{i} + (x^2-3y^2)\vec{j}$ و منحنی C با معادله برداری

$$\vec{R}(t) = e^t \sin t\,\vec{i} + e^t \cos t\,\vec{j} \; ; \quad 0 \le t \le \pi$$

داده شده باشد، انتگرال $\int_C \vec{F}\,d\vec{R}$ را محاسبه کنید.

حل) اولاً داریم $\overrightarrow{\mathrm{Curl}\,F} = 0$ زیرا

$$\overrightarrow{\mathrm{Curl}\,F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3+2xy & x^2-3y^2 & 0 \end{vmatrix} = (0-0)\vec{i} - \vec{j}(0-0) + \vec{k}(2x-2x) = 0$$

حال برای یافتن تابع پتانسیل تابع برداری $\vec{F}$ باید داشته باشیم $\nabla f = \vec{F}$ یا

$$\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} = (3+2xy)\vec{i} + (x^2-3y^2)\vec{j}$$

پس:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 3+2xy \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2-3y^2 \end{cases}$$

با انتگرال‌گیری از روابط فوق، تابع پتانسیل تابع برداری $\vec{F}$ به صورت زیر بدست می‌آید:

$$f(x,y) = 3x + x^2y - y^3$$

از طرفی $\overrightarrow{R(0)} = 0\vec{i} + \vec{j} = (0,1)$ ، $R(\pi) = 0\vec{i} + -e^{\pi}\vec{j} = (0, -e^{\pi})$

نتیجتاً می‌توان نوشت:

$$\int_C F\cdot dR = f(\overrightarrow{R(\pi)}) - f(\overrightarrow{R(0)}) = f(0,-e^{\pi}) - f(0,1) = -e^{3\pi}+1$$

جلسه آخر

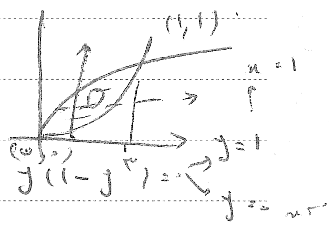
قضیه گرین: فرض کنید C یک منحنی بسته ساده پیوسته مشتق پذیر و جهت دار (در جهت مثبت) در صفحه xy باشد و نیز فرض کنید خطوط موازی محورهای مختصات در بیش از دو نقطه آن را قطع نکند. در تابع برداری $\vec{F}(x,y) = M(x,y)\,\vec{i} + N(x,y)\,\vec{j}$، M و N، مشتق‌های جزئی مرتبه اول آنها در تمامی نقاط روی منحنی C و ناحیه D محصور به منحنی C پیوسته باشند، آنگاه

$$\text{کار} = \oint_C \vec{F}\cdot d\vec{R} = \underbrace{\oint_C M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy}_{\text{طرف اول قضیه گرین}} = \underbrace{\iint \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\,dy}_{\text{طرف دوم قضیه گرین}}$$

تابستان ۹۳

مثال ۱) با استفاده از قضیه گرین انتگرال $\oint_C (2xy - x^2)\,dx + (x+y)^2\,dy$ را روی منحنی مرز ناحیه محدود به منحنی‌های $y = x^2$ و $x = y^2$ ($y = \sqrt{x}$) را حساب کنید.

$$\begin{aligned} y &= x^2 \\ x &= y^2 \end{aligned} \Rightarrow x = y^4 \Rightarrow y - y^4 = 0 \Rightarrow y(1 - y^3) = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow x = 1,\quad y = 0 \Rightarrow x = 0$$



$$\oint_C (\overbrace{2xy - x^2}^{M})\,dx + (\overbrace{x+y}^{N})^2\,dy =$$

$$\iint_D \left(\frac{\partial (x+y)^2}{\partial x} - \frac{\partial (2xy - x^2)}{\partial y}\right) dx\,dy = \iint_D 2(x+y) - 2x \; dx\,dy$$

$$2x + 2y - \cancel{2x}$$

$$= \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} 2y \; dy\,dx = \int_0^1 \left(\frac{\cancel{2} y^2}{\cancel{2}} \Big|_{x^2}^{\sqrt{x}} \right) dx =$$

$$\int_0^1 x - x^4 \, dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{3}{10}$$

سوال خرداد ۹۴) به کمک قضیه گرین انتگرال زیر $\oint_C (3y - e^{\sin x})\,dx + (7x + \sqrt{y^4+1})\,dy$ را حل کنید

که در آن C دایره با معادله $x^2+y^2=9$ است.

$$\oint_C (3y - e^{\sin x})\,dx + (7x + \sqrt{y^4+1})\,dy =$$

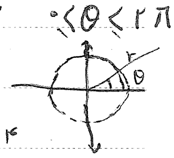
$$\iint_D \left(\frac{\partial (7x + \sqrt{y^4+1})}{\partial x} - \frac{\partial (3y - e^{\sin x})}{\partial y} \right) dx\,dy$$

$$= \iint_D (7-3)\,dx\,dy = 4\iint_D dA = 4\int_0^{2\pi}\int_{-3}^{3} dr\,d\theta =$$

$$8\int_0^{\pi}\int_0^{3} dr\,d\theta = 24\pi .$$

سوال) درستی قضیه گرین را برای تابع برداری $\vec{F} = (x-y)\vec{i} + (x+y)\vec{j}$ در دایره $x^2+y^2=4$ بررسی کنید.

$$\iint \left(\frac{\partial (x+y)}{\partial x} - \frac{\partial (x-y)}{\partial y} \right) dx\,dy \qquad D = \{ -2<r<2 ,\ 0<\theta<2\pi$$



$r^2=4$
$r=\pm 2$

$$\iint 1 - (-1)\,dx\,dy = 2\iint_D 1\,dx\,dy = 2\int_0^{2\pi}\int_{-2}^{2} r\,dr\,d\theta$$

$$4\int_0^{2\pi} \cancel{\frac{r^2}{2}}\Big|_0^{2} = 4(2\theta)\Big|_0^{2\pi} = 8\pi .$$

$\int F(r(t)) \cdot r'(t)\, dt$ — طرف دوم قضیه گرین

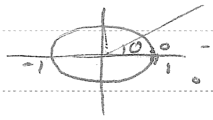
$x = 2\cos t$
$y = 2\sin t \Rightarrow 0 \le t \le 2\pi$ $\quad r(t) = 2\cos t\, \vec{i} + 2\sin t\, \vec{j}$
$r'(t) = -2\sin t\, \vec{i} + 2\cos t\, \vec{j}$

$$\int F(r(t))\, r'(t)\, dt = \int_0^{2\pi} (2\cos t - 2\sin t,\ 2\cos t + 2\sin t) \cdot (-2\sin t,\ 2\cos t)\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (-4\sin t \cos t + 4\cos^2 t + 4\sin t \cdot \cos t)\, dt = \int_0^{2\pi} 4\, dt = 4t \Big|_0^{2\pi} = 8\pi.$$

مثال) کار انجام شده توسط میدان $\vec{F} = (\overbrace{e^{\sin x} + 4y^2 - 1}^{M})\, \vec{i} + (\overbrace{4x + e^{y^2}}^{N})\, \vec{j}$

روی مسیر $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ را در جهت مثبت بیابید. $0 \le \theta \le 2\pi$ $\quad 0 \le r \le 1$



$$\iint \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA = \iint (4 - 8y)\, dA = 2\int_0^{\pi}\int_0^1 (4 - (8)(br\sin\theta))\, abr\, dr\, d\theta$$

$$= 2ab \int_0^{\pi}\int_0^1 4r - 8br^2 \sin\theta\, dr\, d\theta = \int_0^{\pi} \frac{4r^2}{2} - 8b\frac{r^3}{3}\sin\theta \Big|_0^1 d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} 2 - \frac{8}{3} b \sin\theta\, d\theta = 2ab\left(2\theta + \frac{8}{3} b\cos\theta \Big|_0^{\pi}\right)$$

$$= 2ab\left(2\pi - \frac{8}{3}b - \frac{8}{3}b\right) = 4ab\left(\pi - \frac{16}{3}b\right)$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

تمرین: درستی قضیه گرین را برای تابع برداری $\vec{F} = (x-y)\vec{i} + (x+y)\vec{j}$

و بیضی $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ بررسی کنید؟

$$\int F.dr = \iint \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) \underbrace{dx\,dy}_{dA}$$

$$= \iint (1-(-1))\, dA \overset{1}{=} 2\iint dA = 2\pi ab$$

$x = a\cos\theta$

$y = b\sin\theta$

$J = ab r,$

$$2\int_0^{2\pi}\int_0^1 ab r\, dr\, d\theta$$

$$= \frac{ab r^2}{2}\Big|_0^1 = \int_0^{2\pi} \frac{ab}{2}\, d\theta = \frac{ab}{2}\theta\Big|_0^{2\pi} = \frac{ab}{2}\pi \times 4 = 2\pi ab$$

2

$$\oint F.dr = \int_0^{2\pi} F(r(t)) . r'(t)\, dt$$

$x = a\cos t, \quad y = b\sin t$

$r(t) = a\cos t\, \vec{i} + b\sin t\, \vec{j}$

$r'(t) = a\sin t\, \vec{i} + b\cos t\, \vec{j}$

$$= \int_0^{2\pi} (a\cos t - b\sin t,\ a\cos t + b\sin t) . (-a\sin t,\ b\cos t)\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{2}{1}a^2\sin t\cos t + ab\sin^2 t + ab\cos^2 t + b^2\frac{2}{2}\sin t\cos t\right) dt$$

$$= \frac{-a^2}{2}\int_0^{2\pi} \sin 2t\, dt + \frac{b^2}{2}\int_0^{2\pi} \sin 2t\, dt + \int_0^{2\pi} ab(\underbrace{\sin^2 t + \cos^2 t}_{1})\, dt$$

$$= ab(2\pi) = 2\pi ab.$$

P4PCO

انتگرال تابع برداری روی سطح S ($\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds$)

در این بخش می‌خواهیم انتگرال $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma$ را محاسبه کنیم که $\vec{F}:R^3\to R^3$ تابع برداری پیوسته روی سطح S و $\vec{n}$ بردار یکه عمود بر سطح S است.

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \iint F_1\,dy\,dz + F_2\,dx\,dz + F_3\,dx\,dy$$

روش حل مسائل انتگرال تابع برداری روی سطح S.

مرحله اول: بدست آوردن تصویر سطح S روی یکی از صفحات مختصات.

مرحله دوم: محاسبه $d\sigma$ از رابطه $d\sigma = \dfrac{|\vec{\nabla} g|}{|\vec{\nabla} g\cdot p|}\,dA$

مرحله سوم: محاسبه بردار $\vec{n}$ از رابطه $\vec{n} = \dfrac{\vec{\nabla} g}{|\vec{\nabla} g|}$

مرحله چهارم: محاسبه انتگرال دوگانه $\iint \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma$ که حدود آن را از روی تصویر S می‌نویسیم.

قضیه: با توجه به اینکه می‌دانیم دیورژانس F ($\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}+\frac{\partial F_3}{\partial z}$) است. اگر تابع $\vec{F}:R^3\to R^3$ بر روی سطح S و درون آن دارای مشتقات جزئی پیوسته باشد و $\vec{n}$ بردار یکه بر سطح S باشد

$$\oiint F\cdot n\,d\sigma = \iiint_R \mathrm{div}\,F\,dV$$

که R حجم محصور توسط سطح S است.

Subject:

Year. Month. Date. ( )

مثال ۱) با این فرض که $\vec{F} = x^3\vec{i} + 3yz^2\vec{j} + (3y^2z + x^2)\vec{k}$ که میدان برداری بوده و سطح S سطح خارجی کره $x^2+y^2+z^2=a^2$ باشد مطلوبست محاسبه $\oiint \vec{F}.\vec{n}\, d\sigma$ که در آن $\vec{n}$ بردار یکانی قائم بر کره بسمت خارج را باشد.

حل ۱) چون سطح S بسته و تابع برداری F، دارای مشتقات جزئی پیوسته درون سطح S است، بنابراین می‌توانیم از قضیه دیورژانس استفاده کنیم،

قضیه دیورژانس ، $\oiint \vec{F}.\vec{n}\, d\sigma = \iiint_R \operatorname{div} \vec{F}\, dv$

$$\operatorname{div} F = 3x^2 + 3z^2 + 3y^2$$

از مختصات کروی استفاده می‌کنیم:

$$\iiint 3(x^2+y^2+z^2)\, dv = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{a} 3\rho^2 . \rho^2 \sin\varphi\, d\rho\, d\theta\, d\varphi$$

$$= 3\int_0^{\pi} \sin\varphi\, d\varphi . \int_0^{2\pi} d\theta . \int_0^{a} \rho^4\, d\rho = 3\times 2\times 2\pi . \frac{a^5}{5} = \frac{12\pi a^5}{5}$$

Subject:
Year. Month. Date. 37

(مثال)

فرض کنید V ناحیه محدود از بالا به کره $x^2+y^2+z^2=25$ و از پایین به صفحه $z=3$ و $\vec{n}$

بردار یکه قائم رو به خارج از ناحیه V باشد اگر $\vec{F}=xz\vec{i}+yz\vec{j}+\vec{k}$ باشد آنگاه $\oiint_S F.n\,d\sigma$

را محاسبه کنید $\oiint_S F.n\,d\sigma = ?$

سطح شامل دو سطح S_1 ($z=3$) و سطح S_2 (سطح کره) است.

ابتدا انتگرال تابع F روی سطح S_1 را محاسبه می‌کنیم:

$$g: z-3=0 \Rightarrow \vec{\nabla} g=(0,0,1) \rightarrow |\vec{\nabla} g|=1 \quad , \vec{P}=(0,0,1)$$

$$d\sigma = \frac{|\vec{\nabla} g|}{|\vec{\nabla} g\cdot P|}\,dA = dA$$

به دلیل اینکه $\vec{n}$ برونسو است، با توجه به شکل باید رو به پایین باشد یعنی مؤلفه سوم $\vec{n}$ منفی است،

در نتیجه $\bar{n} = -\frac{\vec{\nabla} g}{|\nabla g|} = (0,0,-1)$

$$\vec{F}.\vec{n}\,d\sigma = (xy,\ yz,1)(0,0,-1)\,dA = -dA$$

حال حدود انتگرال را از روی تصویر بر صفحه xy بدست آوریم.

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=25 \\ z=3 \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2=16$$

$$\iint F.n\,d\sigma = \iint_D -dA = -A_D = -\pi(4)^2 = -16\pi$$

اکنون انتگرال تابع F را روی سطح S_2 بدست آوریم:

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$$g: z-\sqrt{25-x^2-y^2}=0 \Rightarrow \vec{\nabla} g=\left(\frac{x}{\sqrt{25-x^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{25-x^2-y^2}}, 1\right)=\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1\right)$$

$$\vec{p}=(0,0,1) \Rightarrow \vec{\nabla} g \cdot \vec{p}=1$$

با توجه به شکل ، بردار برونسوی نیم کره باید رو به بالا باشد ، بنابراین مؤلفه سوم $\vec{n}$ مثبت است.

$$\vec{n}\cdot d\vec{\sigma}=\frac{\vec{\nabla} g}{|\vec{\nabla} g|}\cdot\frac{|\vec{\nabla} g|}{|\vec{\nabla} g\cdot p|}\,dA=\frac{|\vec{\nabla} g|}{|\vec{\nabla} g\cdot p|}\,dA=\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1\right)dA$$

$$F.n\,d\sigma=(xz, yz, 1)\cdot\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1\right)dA=(x^2+y^2+1)\,dA$$

$$\Rightarrow \iint \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma=\iint(x^2+y^2+1)\,dA$$

چون تصویر بر صفحه xy دایره $x^2+y^2=4$ است لذا از تغییر متغیر قطبی کمک می‌گیریم:

$$\iint x^2+y^2+1\,dA=\int_0^{2\pi}\int_0^4(r^2+1)\,r\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\cdot\int_0^4 r^3+r\,dr$$

$$=\left(\theta\Big|_0^{2\pi}\right)\cdot\left(\frac{r^4}{4}+\frac{r^2}{2}\right)\Big|_0^4=144\pi$$

$$\oiint_S=\iint_{S_1}+\iint_{S_2}=-16\pi+144\pi=128\pi.$$ بنابراین

PAPCO

قضیه استوکس: اگر سطح S سطحی باشد که توسط خم بسته C محدود شده است و بردار $\vec F$ دارای مشتقات جزئی پیوسته مرتبه اول درون سطح S باشد، آنگاه:

$$\oint_C F\cdot dr = \iint_S \text{curl}\,\vec F\cdot \vec n\, d\sigma$$

مثال) درستی قضیه استوکس را برای تابع برداری $F=(x+y,\ z,\ y)$ و سطح S که بخشی از سطح $x^2+y^2-z^2=1$ محدود به صفحه $z=\sqrt{5}$ است تحقیق کنید.

$$\oint_C F\cdot dr$$

$$x^2+y^2=4 \Rightarrow x=2\cos t \quad y=2\sin t$$

$$r(t)=2\cos t\,\vec i+2\sin t\,\vec j+\sqrt{5}\,k$$

$$r'(t)=(-2\sin t,\ +2\cos t)$$

$$\int F(r(t))\cdot dr = \int (2\cos t+2\sin t,\ \sqrt{5},\ 2\sin t)\cdot r'(t)\,dt$$

$$=\int (2\cos t+2\sin t)\cdot(-2\sin t)+(2\cos t)\sqrt{5}+0$$

$$=\int_0^{2\pi} -4\cos t\cdot\sin t - 4\underbrace{\sin^2 t}_{\frac{1-\cos 2t}{2}} + 2\sqrt{5}\cos t\ dt$$

$$=\Big[\cos 2t - 2t+\sin 2t + 2\sqrt{5}\sin t\Big]_0^{2\pi} = -2\times 2\pi = -4\pi$$

$$\text{Curl}\,F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x+y & z & y \end{vmatrix} = (0,\ 0,\ -1)$$

$$\vec n\cdot d\sigma = \frac{\vec\nabla g}{\cancel{|\nabla g|}}\cdot\frac{\cancel{|\vec\nabla g|}}{|\vec\nabla g\cdot p|} = \frac{(0,0,1)}{1}$$

$g = z-$ $p=(0,0,1)$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$$\iint_S -1 \, dA = -\int_0^{2\pi}\int_0^{2} dr\, d\theta = -4\pi$$

$$x^2+y^2=4 \quad \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 < r < 2 \end{cases} \xrightarrow[z=\sqrt{5}]{\text{محدوده صفحه}}$$

قطع شده $(\frac{2}{-})$ صفر جایگزین شود.

تمرین: درستی قضیه استوکس را برای تابع برداری $F=(x+y, y, z)$ و سطح S که به صورت

از سطح $x^2+y^2-z^2=-1$ محدود به صفحه $z=2$ را تحقیق کنید (دقیقاً شبیه بالا)

$$\int F.dr = \int$$

$$x^2+y^2=-1+4=3 \Rightarrow r(t)=(\sqrt{3}\cos t, \sqrt{3}\sin t, 2), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$r'(t)=(-\sqrt{3}\sin t, \sqrt{3}\cos t, 0)$$

$$\int F.dr=\int\left(\sqrt{3}(\cos t+\sin t), \sqrt{3}\sin t, 2\right)\left(-\sqrt{3}\sin t, \sqrt{3}\cos t, 0\right)dt$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(-3\cos t.\sin t - 3\sin^2 t + 2\sqrt{3}\cos t.\sin t\right)dt$$

$$\int_0^{2\pi} -\frac{3}{2}\sin 2t - 3\left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right) + \sqrt{3}\sin 2t \;)\; dt$$

$$=-\frac{3}{2}\int_0^{2\pi}\sin 2t - \frac{3}{2}\int_0^{2\pi} t + \int_0^{2\pi}\cos 2t\, dt + \int_0^{2\pi}\sqrt{3}\sin 2t\, dt$$

$$=+\frac{3}{4}\cos 2t\Big|_0^{2\pi} - \frac{3}{4}t^2\Big|_0^{2\pi} + \frac{\sin 2t}{2}\Big|_0^{2\pi} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2t\Big|_0^{2\pi}$$

دقیقاً مطابق بالا $\iint \text{curl}F.\vec{n}\,d\sigma$ را حساب می‌کنیم.