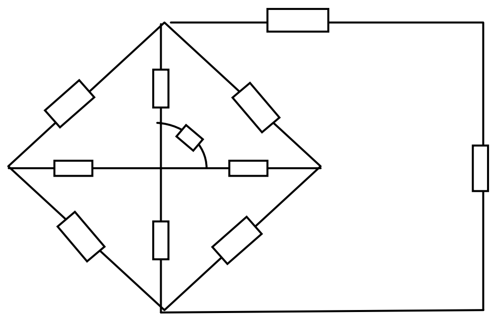
۱- الف- بعضی از جریان های شاخه های مدار نشان داده شده است جریان های i_z, i_y, i_x, i_t را تعیین کنید .

ب- جریان چند شاخه را می توان به صورت دلخواه انتخاب کرد وجریان بقیه شاخه ها را برحسب آن ها بیان نمود؟

پ- اگر بخواهیم i_z, i_y, i_x, i_t متغیرهیمستقل جریان باشند کدام یک از جریانهای شاخه های دیگر را هم می توان به عنوان متغیر مستقل جریان درنظر گرفت؟



حل : برای حل باید kcl را در گروه های زیر نوشت :

گره ۲ $kcl: -2+1 = i_w \rightarrow i_w = -1A$

گره ۴ $kcl: i_y - 3 + 5 = 0 \rightarrow i_y = -2A$

گره ۵ $kcl: i_t + 13 = 0 \rightarrow i_t = -13A$

گره ۳ $kcl: -1-13 = -3 + i_z \rightarrow i_z = -11A$

گره ۷ $kcl: i_x = -2-2 \rightarrow i_x = -4A$

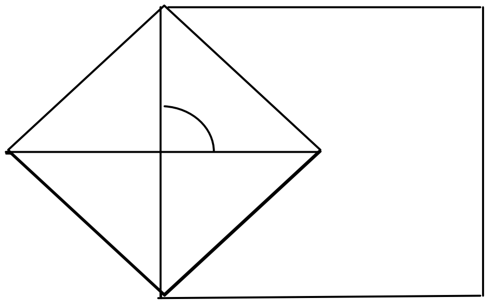
ب) تعداد متغیرهای مستقل جریان :

۱+ تعداد گره ها – تعداد شاخه ها = تعداد متغیرهای مستقل جریان

۵= ۱+۷-۱۱ = تعداد متغیرهای مستقل جریان

پ) بعد از رسم گراف جریان های داده شده جریان های بعدی باید به گونه ای انتخاب شوند که هیچ گره ای وجود نداشتهباشد که تمام شاخه های آن رنگ شده باشد.

یعنی جریان های (۲-۱)، (۲-۳)، (۴-۳) یا (۴-۱) را می توان به عنوان متغیر مستقل انتخاب کرد.



۲- الف- در مدار سؤال قبل ولتاژ چند شاخه را می توان به صورت دلخواه انتخاب کرد وولتاژ بقیه شاخه ها را برحسب آن بیان نمود؟

ب- فرض کنید جهت های قرار دادی متناظر به کار رفته وعددهای اداه شده در شکل قبل ولتاژ شاخه ها با شند آیا این ولتاژ ها برای مشخص کردن ولتاژ تمام شاخه ها کافی است؟

پ- ولتاژ کدام شاخه ها را می توان به مجموع ولتاژ های داده شده اضافه کرد یا یکدسته متغیر مستقل ولتاژ شاخه بدست آید ؟

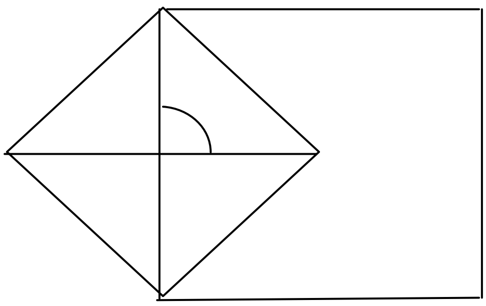
الف) باید تعداد متغیرهای مستقل ولتاژ را ازفرمول زیر محاسبه کنیم.

۶ = ۱ - ۷ = ۱- تعداد گره ها = تعداد متغیرهای مستقل ولتاژ

ب) فقط ۵ متغیر مستقل ولتاژ مطرح شده که برای حل مدار حداقل به ۶ متغیر مستقل مورد نیاز است.

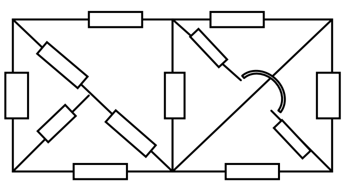
پ) همانند قسمت (پ) سؤال قبل باید گراف شکل را رسم کنیم با این تفاوت که در این مسئله شاخه های پررنگ نباید تشکیل یک حلقه را بدهند.

یعنی شاخه های (۶-۱)، (۷-۶)، (۶-۳) را می توان انتخاب کرد.



۳- در مدار شکل فرض کنید $i_3 = 5\ A\ , i_2 = -4\ A\ , i_1 = 3\ A$

الف- جریان i_4 را حساب کنی.



ب- آیا می توان جریان شاخه دیگری از این مدار را محاسبه کرد؟

پ- اکنون فرض کنید $i_5 = 3A$ و $i_4 = 4A$ آیا می توان جریان بقیه شاخه ها را محاسبه کرد؟

حل الف) $i_4 + i_2 + i_1 = i_3 \rightarrow i_4 = i_3 - i_2 - i_1$ kcl در گره مرکب

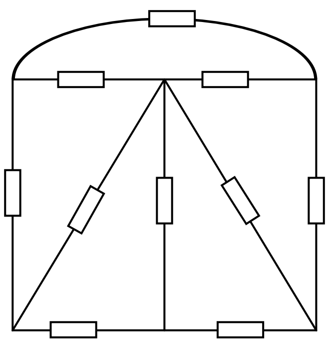
$$i_4 = 5 + 4 - 3 \Rightarrow i_4 = 6A$$

ب) خیر زیرا گره مرکب دیگری نمی توان یافت که شامل یک جریان مجهول باشد.

پ) ۶= ۱+ ۷-۱۲ = ۱= تعداد گره ها – تعداد شاخه ها : تعداد متغیر مستقل جریان شاخه ها

یعنی با داشتن ۶ جریان از جرینهای شاخه ها می توان جریان بقیه شاخه ها را محاسبه کرد. ولی با توجه به قسمت (الف) چون یک گره مرکب شامل جریانهای i_4, i_3, i_2, i_1 داریم پس جریان های i_1 تا i_4 مستقل نیستند.

۴- در مدار شکل فرض کنید جهت های متناظر ولتاژ وجریان انتخاب شده اند درستی قضیه تلگان، یعنی $\sum_{k=1}^{10} v_k i_k = 0$ را به دو طریق اثبات کنید، یعنی :



الف) با انتخاب یکدسته متغیرهای مستقل جریان شاخه :

ب) با انتخاب یکدسته متغیرهای مستقل ولتاژ شاخه:

حل الف) ۵= ۱+ ۶- ۱۰ = تعداد متغیرهای مستقل جریان

با منظور کردن (i_1, i_2, i_3, i_4, i_6) به عنوان متغیر مستقل جریان داریم :

گره ۱ $kcl : i_1 + i_6 + i_7 = 0 \rightarrow i_7 = -i_1 - i_6$

گره ۲ $kcl : i_1 = i_2 + i_3 + i_4 + i_5 \rightarrow i_5 = i_1 - i_2 - i_3 - i_4$

گره ۳ $kcl : i_2 + i_{10} + i_6 = 0 \rightarrow i_{10} = -i_2 - i_6$

گره۴ $kcl: i_8 + i_7 + i_3 = 0 \to i_8 = -i_7 - i_3 \to i_8 = i_1 + i_6 - i_3$

گره۵ $kcl: i_5 + i_9 = i_8 \to i_9 = i_8 - i_5 \to i_9 = i_1 + i_6 - i_3 - i_1 + i_2 + i_3 + i_4$
$\to i_9 = i_2 + i_4 + i_6$

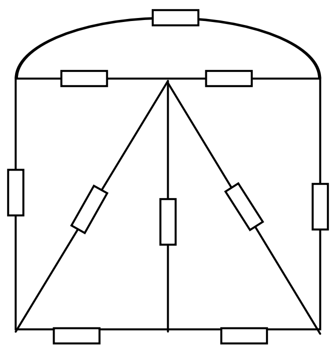
$$
\begin{aligned}
\sum_{k-1}^{10} v_k i_k \to \quad & v_1 i_1 + v_2 i_2 + v_3 i_3 + v_4 i_4 + v_5 i_5 + v_6 i_6 + v_7 i_7 + v_8 i_8 + v_9 i_9 + v_{10} i_{10} \\
& = v_1 i_1 + v_2 i_2 + v_3 i_3 + v_4 i_4 + v_5 (i_1 - i_2 - i_3 - i_4) + v_6 i_6 + v_7 (-i_1 - i_6) + v_8 (i_1 + i_6 - i_3) \\
& + v_9 (i_2 + i_4 + i_6) + v_{10} (-i_2 - i_6) = 0 \\
& i_1 (v_1 + v_5 - v_7 + v_8) + i_2 (v_2 - v_5 + v_9 - v_{10}) + i_3 (v_3 - v_5 - v_8) + i_4 (v_4 - v_5 + v_9) \\
& + i_6 (v_6 - v_7 + v_8 + v_9 - v_{10}) = 0
\end{aligned}
$$

ضرایب جملات فوق همگی صفر می باشند چون مجموع پتانسیل های درون یک حلقه است.

پس قضیه تلگان برقرار است.

ب) تعداد متغیرهای مستقل ولتاژ شاخه ها برابر است با :　　　۵= ۱- ۶= ۱- تعداد گره ها

بنابراین ($v_1, v_2, v_3, v_4 . v_5$) را به عنوان متغیر مستقل ولتاژ انتخاب می کنیم :



حلقه۱ $kcl: v_6 - v_2 - v_1 = 0 \to v_6 = v_2 + v_1$

حلقه۲ $kcl: -v_7 + v_1 + v_3 = 0 \to v_7 = v_1 + v_3$

حلقه۳ $kcl: -v_4 + v_2 - v_{10} = 0 \to v_{10} = v_2 - v_4$

حلقه۴ $kcl: -v3 + v5 + v8 = 0 \to v8 = v3 - v5$

حلقه۵ $kcl: -v_5 + v_4 + v_9 = 0 \to v_9 = v_5 - v_4$

$$\sum_{i=1}^{10} v_k i_k = 0 \to$$

$$
\begin{aligned}
& v_1 i_1 + v_2 i_2 + v_3 i_3 + v_4 i_4 + v_5 i_5 + v_6 i_6 + v_7 i_7 + v_8 i_8 + v_9 i_9 + v_{10} i_{10} = 0 \\
& v_1 i_1 + v_2 i_2 + v_3 i_3 + v_4 i_4 + v_5 i_5 + (v_1 + v_2) i_6 + (v_1 + v_3) i_7 + (v_3 - v_5) i_8 \\
& + (v_5 - v_4) i_q + (v_2 - v_4) i_{10} = 0 \\
& v_1 (i_1 + i_6 + i_7) + v_2 (i_2 + i_6 + i_{10}) + v_3 (i_3 + i_7 + i_8) + v_4 (i_4 - i_q - i_{10}) \\
& + v_5 (i_5 - i_8 + i_q) = 0
\end{aligned}
$$

چون هر کدام از ضرایب ولتاژها، مجموع جریان های مربوط به گره ای از مدار می باشد بنابراین مجموع برابر صفر است.

۵- در مدار نشان داده شده در شکل مسئله ۴ همه ی حلقه های ممکن را مشخص کنید.

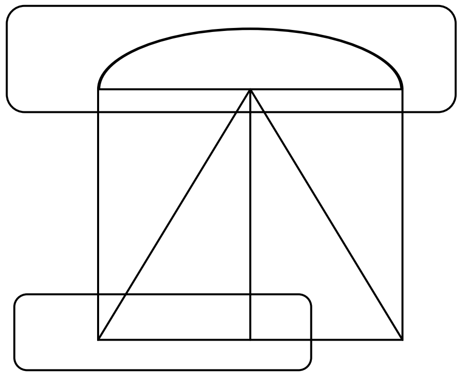
(۵-۹-۱۰-۲)، (۷و۸-۵-۱)، (۴-۱۰-۲)، (۹-۴-۵)، (۸-۵-۳)، (۷-۳-۱)، (۱-۲-۶)

(۱۰-۹-۸-۳-۲)، (۶-۷-۳-)، (۷-۸-۹-۴-۱)، (۶-۱۰-۴-۱)، (۸-۹-۴-۳)

(۷-۳-۴-۱۰-۶)، (۷-۸-۹-۱۰-۲-۱)، (۶-۷-۸-۵-۲)، (۵-۹-۱۰-۶-۱)

(۷-۸-۹-۱۰-۶)، (۷-۶-۵-۴-۱۰-۶)، (۷-۳-۵-۹-۱۰-۶)

۶- در مدار نشان داده شده در شکل مسأله ۴ نشان دهید که :



$kcl : i_3 + i_5 + i_7 + i_4 = i_{10}$

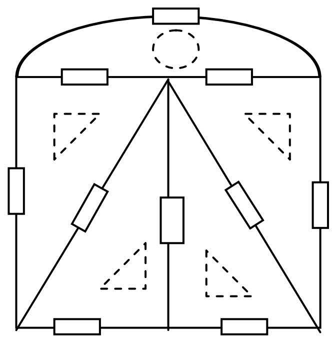
$kcl : i_3 + i_5 + i_7 + i_9 = 0$

۷- الف- حلقه ای را که شاخه دورنی نداشته باشد. مش گویند. مش های مدار شکل مسأله ۴ را تعیین کنید kvl را برای هر یک ازآنها بنویسید.

ب- اکنون یک حاقه دلخواه را در نظر بگیرید. kvl را در آن حلقه بنویسید. نشان دهید که معادله ی kvl این حلقه از ترکیب خطی معادلات kvl مش ها بدست می آید.

پ- از مطالب بیان شده در قسمت، چه نتیجه کلی می توان گرفت؟

الف)



برای مش ۱ $kvl : v_6 - v_2 - v_1 = 0$

برای مش ۲ $kvl : v_1 + v_3 - v_7 = 0$

$kvl: v_2 - v_{10} - v_4 = 0$ برای مش ۳

$kvl: -v_3 + v_5 + v_8 = 0$ برای مش ۴

$kvl: -v_5 + v_4 + v_9 = 0$ برای مش ۵

ب) حلقه شامل مش ۲و ۴ را در نظر گرفته ومعادله kvl مربوط به آن را می نویسیم:

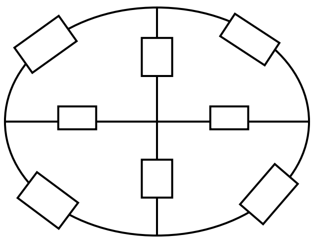
$$kvl: -v_7 + v_1 + v_5 + v_8 = 0$$

حال kvl مربوط به مش ۲و۴و را باهم ترکیب می کنیم:

$$\begin{cases} v_1 + v_3 - v_7 = 0 \\ -v_3 + v_5 + v_8 = 0 \end{cases} \rightarrow v_1 + v_5 + v_8 - v_7 = 0$$

پ) kvlمربوط به هر حلقه از ترکیب خطی kvl های مش های تشکیل دهنده ی آن حلقه حاصل می شود.

۸- مطالب مطرح شده در مسائل ۴و۵و۷ در مورد مدار شکل زیر تکرار کنید.

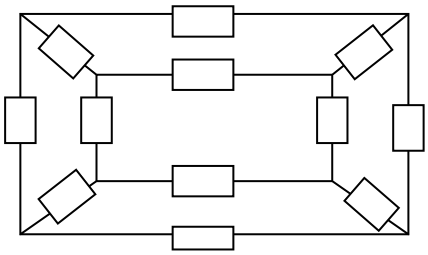


حل) با توجه به مسائل قبل.

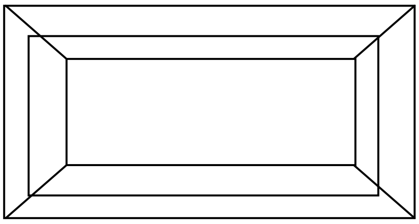
۹- الف- در مدار شکل آیا جریان های i_4, i_3, i_2, i_1 مستقل از هم هستند؟ جریان های i_8, i_7, i_6, i_5 چطور؟

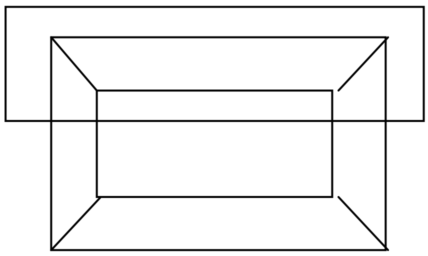
ب- تعداد متغیرهای مستقل ولتاژ شاخه چند تاست؟ به متغیرهای ولتاژ $v_9, v_7, i_4, i_3, i_2, i_1$ کدام ولتاژ ها را اضافه کنیم تا یکدسته متغیر مستقل ولتاژ شاخه تشکیل دهند؛ یعنی بتوان ولتاژ هر شاخه ی دیگر را برحسب ترکیب خطی آنها نوشت:

پ- تعـداد متغیرهـای مسـتقل جریـان چنـد تاسـت؟ بـه متغیرهـای جریـان i_1, i_2, i_4 و i_6 کدام جریان ها را اضافه کنیم تا یکدسته متغیر مستقل جریان شاخه تشکیل دهند؛ یعنی بتوان جریان هر شاخه ی دیگر را برحسب ترکیب خطی آنها نوشت:



حل الف)



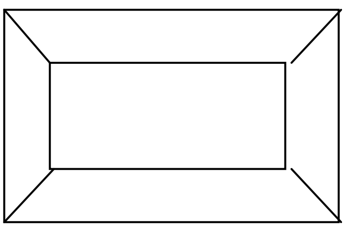


هر دودسته از جریان ها هر کدام به یک گره مرکب وصل اند پس مستقل نیستند.

حل ب) تعداد متغیرهای مستقل ولتاژ = تعداد گره −۱= ۸−۱ =۷

شش متغیر ولتاژ را که در صورت سؤال مطرح شده در گراف مدار پـر رنـگ مـی کنـیم متغیـر هفتم باید طوری انتخاب شود که شامل هیچ حلقه پررنگی نباشد.

پس به جز v_8 و v_{10} بقیه شاخه ها را می توان به عناون متغیر هفتم انتخاب نمود.

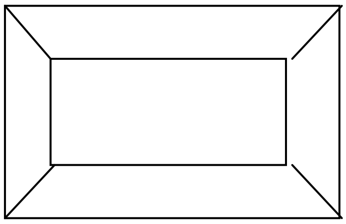


پ)

تعداد متغیرهای مستقل جریان = ۱۲ −۸ +۱ =۵

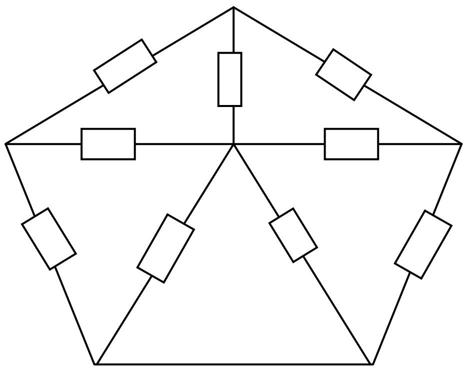
چهار متغیر داده شده درصورت سؤال را پر رنگ کرده، متغیر پنجم را باید به گونه ای انتخاب کنیم که تشکیل گره ساده یا مرکب دهد.

بنابراین متغیر پنجم نمی توانند i_{11}, i_9 و i_3 انتخاب شود.



۱۰-الف- در مدار شکل جریان شاخه هایی را که می توانید حساب کنید بدست آورید:

ب- دسته ای از شاخه ها را مشخص کنید که اگر جریان هر کدام از آنها معلوم باشد، جریان تمام شاخه های مدار را بتوان با توجه به مقادیر داده شده در شکل بدست آورد.



حل الف)

گره ۲ $kcl: 1 = 3 + i_1 \rightarrow i_1 = -2A$

گره ۳ $kcl: i_1 = i_6 + 1 \rightarrow i_6 = -3A$

گره ۴ $kcl: 1 = 2 + i_3 \rightarrow i_3 = -1A$

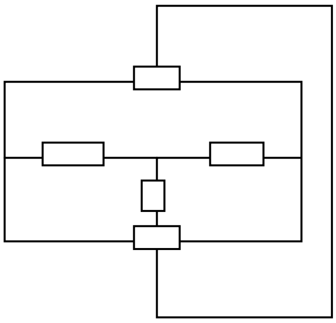
سایر گروه ها دارای دومجهول بوده وقابل حل نمی باشد.

ب)

تعداد متغیرهای مستقل جریان = ۱۰ -۶+۱ =۵

چهار متغیر جریان معلوم است بنابراین با توجه به حل قسمت الف) جریانهای i_6, i_3, i_1 به چهار متغیر جریان معلوم ووابسته اند پس آنها را نمی شود به عنوان متغیر پنجم انتخاب نمود.

۱۱- قوانین کبرشهف را نه تنها در تمام مدارهای با عنصر دو سرنوشت بلکه می توان در مدار با عناصر سه سر وچهار سر است با انتخاب متغیرهای مناسب ولتاژ وجریان قوانین kcl و kvl را دراین مدار بنویسید.



گره ۱ $kcl : i_3 = i_5 + i_6$

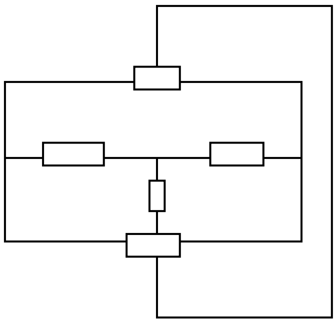
گره ۲ $kcl : i_5 + i_8 = i_9$

گره ۳ $kcl : i_4 = i_7 + i_8$

گره ۴ $kcl : i_{10} = i_{11}$

گره ۵ $kcl : i_1 = i_2$

گره ۶ $kcl : i_1 = i_{12}$



برای حلقه ۱ $kvl : v_3 + v_5 - v_8 = 0$

برای حلقه ۲ $kvl : v_8 + v_4 + v_7 = 0$

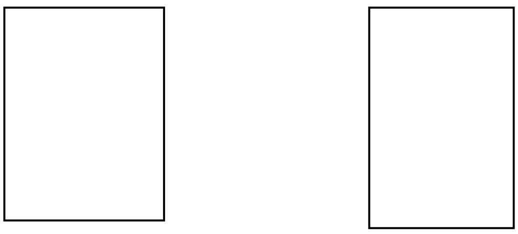
برای حلقه ۳ $kvl : -v_5 - v_6 - v_4 = 0$

برای حلقه ۴ $kvl : -v_1 - v_9 = 0$

برای حلقه ۵ $kvl : -v_2 - v_8 = 0$

۱۲- فرض کنید یک مدار را بتوانیم به قسمت هایی چنان تقسیم کنیم که این قسمت ها توسط شاخه هایی با جریان های $i_1, i_2, \cdots, i_m$ به هم وصل شده باشند نشان دهید. $i_1, i_2, \cdots, i_m = 0$

برای گره مرکب $kcl : i_1, i_2, \cdots, i_m = 0$



۱۳- در مدار شکل همهی شاخه ها از منبع ولتاژ وجریان نابسته تشکیل شده اندو ولتـاژ وجریـان تمام شاخه ها را بدست آورید. ویقین کنید که کدام منبع توان تحویل می گیرد ونشان دهید اصل بقاء توان برقرار است.

برای گره A $kcl: i_1 + i_2 = 0 \to i_1 = -i_2 = -1A$

برای گره B $kcl: i_2 = i_3 \to i_3 = 1A$

برای گره E $kcl: i_1 + i_4 = i_5 \to -1 + i_4 = 3 \to i_4 = 4A$

برای گره D $kcl: i_5 + i_6 + i_7 = 0 \to 3 + i_6 + 2 = 0 \to i_6 = -5A$

برای حلقه ۱ $kcl: -v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 0 \to -1 + v_2 + 2 + 4 = 0 \Rightarrow v_2 = -5v$

برای حلقه ۲ $kcl: -v_4 + v_6 - v_5 = 0 \to v_5 = -4 + 3 \Rightarrow v_5 = -1v$

برای حلقه ۳ $kcl: -v_6 + v_7 = 0 \to v_6 = v_7 \Rightarrow v_7 = 3v$

حال به محاسبه توان شاخه می پردازیم :

$p_{AB} = p_1 = v_1 i_1 = (1)(-1) = -1w$ توان نحویل می دهد.

$p_{AB} = p_2 = v_2 i_2 = (-5)(1) = -5w$ توان نحویل می دهد.

$p_{BC} = p_3 = v_3 i_3 = (2)(1) = 2w$ توان تحویل می گیرد.

$p_{CE} = p \ = v_4 i_4 = (4)(4) = 16w$ توان تحویل می گیرد.

$p_{ED} = p_5 = v_5 i_5 = (-1)(3) = -3w$ توان نحویل می دهد.

$p_{CD} = p_6 = v_6 i_6 = (3)(-5) = -15w$ توان نحویل می دهد.

توان تحویل می گیرد. $p_{CD} = p_7 = v_7 i_7 = (3)(2) = 6w$

با جمع مقادیر بدست آمده اصل بقاء توان قابل اثبات است:

$$\sum_{k=1}^{7} p_k = \sum_{i=1}^{7} v_k i_k = 0$$

۱۴- در مدار شکل توان تحویل داده شده به هریک از چهار جعبه نشان داده شده راتعیین کنید.

درستی اصل بقاء توان را دراین مدار بررسی کنید.

گره ۱ $kcl: i_1 + i_4 = 0 \rightarrow i_4 = -2A$

گره ۲ $kcl: i_1 = i_2 + i_3 \rightarrow i_2 = i_1 - i_3 = 2 - 3 = -1A$

حلقه ۱ $kcl: -v_4 + v_1 + v_3 = 0 \rightarrow -2 + v_1 + 4 = 0 \Rightarrow v_1 = -2v$

حلقه ۲ $kcl: -v_3 + v_2 = 0 \rightarrow v_2 = v_3 \Rightarrow v_3 = 4v$

$$p_1 = v_1 i_1 = (-2)(2) = -4w$$

$$p_2 = v_2 i_2 = (4)(-1) = -4w$$

$$p_3 = v_3 i_3 = (4)(3) = 12w$$

$$p_4 = v_4 i_4 = (2)(-2) = -4w$$

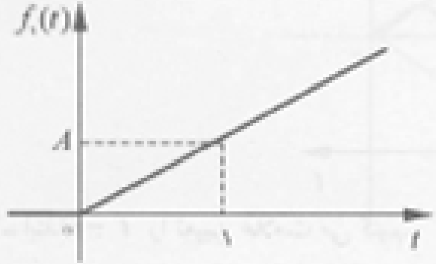
طبق اصل بقای توان داریم :

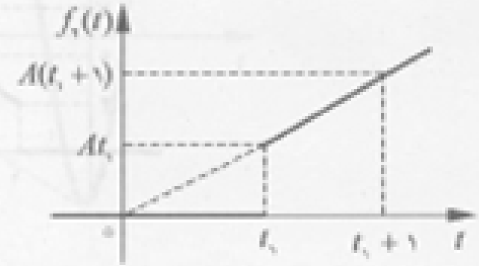
$$\sum_{k=1}^{4} p_k = -4 - 4 + 12 - 4 = 0$$

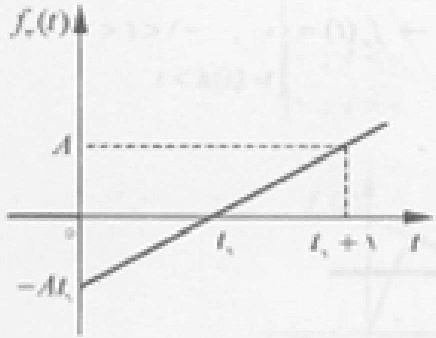
مسئله ۱

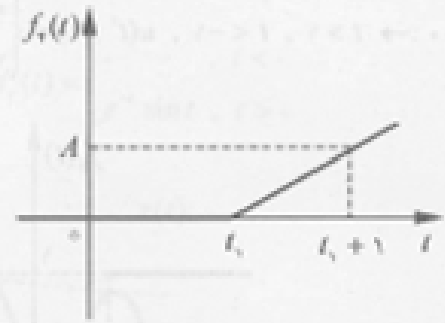
- شکل موجهای $f_1(t) = Atu(t)$ ، $f_2(t) = Atu(t-t_1)$ ، $f_3(t) = A(t-t_1)u(t)$ ، $f_4(t) = A(t-t_1)u(t-t_1)$ را رسم کنید.
- ارتباط بین آنها را توضیح دهید.

حل :









نمودار $f_2(t)$ همان نمودار $f_1(t)$ به ازای $t > t_1$ می باشد. نمودار $f_3(t)$ همان نمودار $f_1(t)$ است با این تفاوت که به اندازه $-At_1$ به سمت پایین جابجا شده است و نمودار $f_4(t)$ نمودار جابجا شده $f_1(t)$ به سمت راست به اندازه t_1 می باشد.

مسئله ۲

- شکل موجهای زیر را رسم کنید.

الف) $f_a(t) = u(t-2) + 2(t+1)u(t-1)$

ب) $f_b(t) = u(t^2-1)$

پ) $f_c(t) = (t-1)u(t+1) + (t+1)u(t-1)$

ت) $f_d(t) = r(t)\sin t$

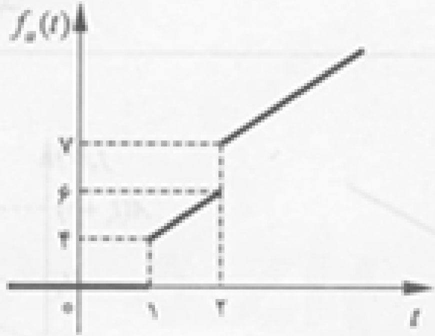
ث) $f_e(t) = e^{-t}\sin t\,u(t)$

ج) $f_g(t) = u(1-t^2)$

حل: الف ـ می توان نوشت:

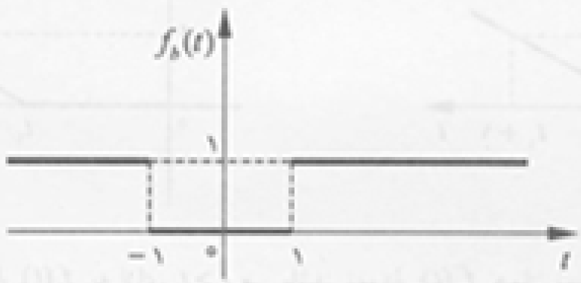
$$u(t-2)=\begin{cases}0 \ , \ t<2\\ 1 \ , \ t>2\end{cases} \quad , \quad u(t-1)=\begin{cases}0 \ , \ t<1\\ 1 \ , \ t>1\end{cases}$$

$$\rightarrow f_a(t)=\begin{cases}0+2(t+1)(0) \ , \ t<1\\ 0+2(t+1)(1) \ , \ 1<t<2\\ 1+2(t+1)(1) \ , \ t>2\end{cases} \quad \rightarrow f_a(t)=\begin{cases}0 \quad , \ t<1\\ 2t+2 \ , \ 1<t<2\\ 2t+3 \ , \ t>2\end{cases}$$



ب ـ ابتدا t^2-1 را تعیین علامت می کنیم.

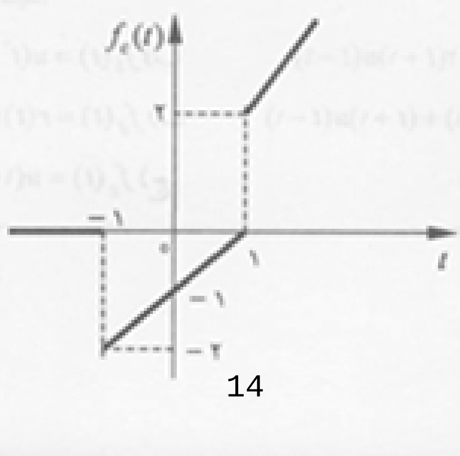
$$t^2-1>0 \rightarrow t>1 \ , \ t<-1 \ , \ u(t^2-1)=\begin{cases}0 \ , \ t^2-1<0\\ 1 \ , \ t^2-1>0\end{cases} \rightarrow f_a(t)=\begin{cases}1 \ , \ t<-1\\ 0 \ , \ -1<t<1\\ 1 \ , \ t>1\end{cases}$$



پ ـ می توان نوشت.

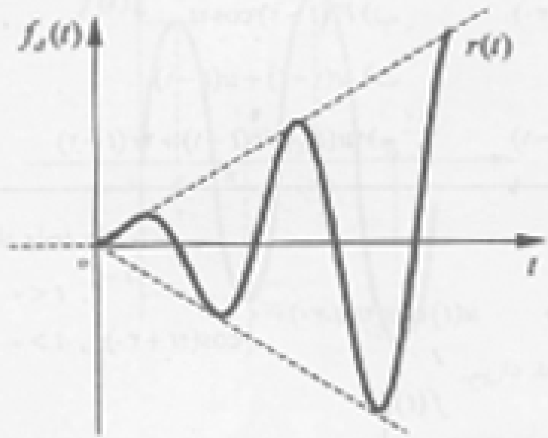
$$u(t-1)=\begin{cases}0 \ , \ t<1\\ 1 \ , \ t>1\end{cases} \quad , \quad u(t+1)=\begin{cases}0 \ , \ t<-1\\ 1 \ , \ t>-1\end{cases}$$

$$\rightarrow f_c(t)=\begin{cases}(t-1)(0)+(t+1)(0) \ , \ t<-1\\ (t-1)(1)+(t+1)(0) \ , \ -1<t<1\\ (t-1)(1)+(t+1)(1) \ , \ t>1\end{cases} \quad \rightarrow f_c(t)=\begin{cases}0 \quad , \ t<-1\\ t-1 \ , \ -1<t<1\\ 2t \quad , \ t>1\end{cases}$$



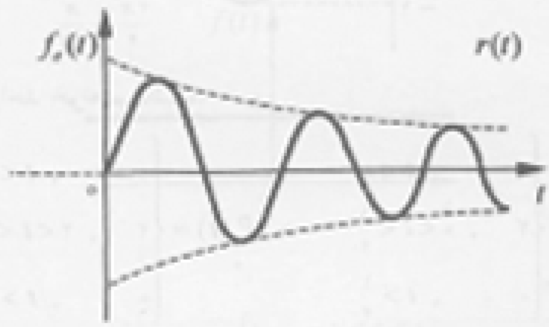
ت ـ با توجه به تعریف تابع شیب واحد داریم:

$$r(t)=\begin{cases}0 & , t<0\\ t & , t>0\end{cases} \quad \rightarrow \quad f_d(t)=\begin{cases}0 & , t<0\\ t\sin t & , t>0\end{cases}$$



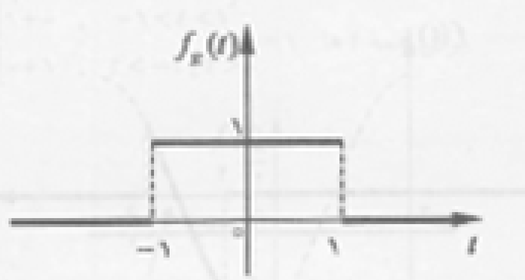
ث ـ با توجه به تعریف تابع پله واحد داریم:

$$u(t)=\begin{cases}0 & , t<0\\ 1 & , t>0\end{cases} \quad \rightarrow \quad f_e(t)=\begin{cases}0 & , t<0\\ e^{-t}\sin t & , t>0\end{cases}$$



ج ـ ابتدا $1-t^2$ را تعیین علامت می کنیم:

$$1-t^2>0 \rightarrow -1<t<1 \quad , f_g(t)=\begin{cases}0 & , \quad t<-1\\ 1 & , \quad -1<t<1\\ 0 & , \quad t>1\end{cases}$$



مسئله ۳

شکل موجهای زیر را رسم کنید.

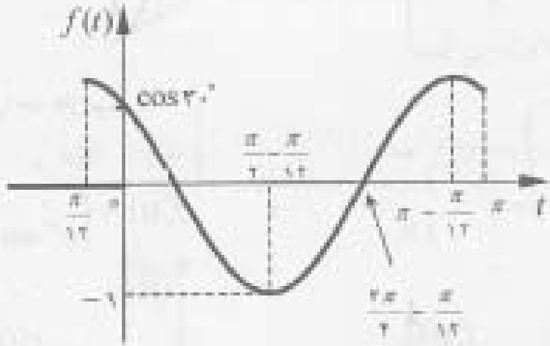
الف) $u(t)\cos(2t+30)$ ب) $P_{\frac{1}{2}}(t-2)\cos 2t$

پ) $e^{-t}\sin t\,u(t)$ ت) $u(1-t)+u(t-1)$

ث) $u(1-t^2)+u(t^2-1)$ ج) $2u(t)-4r(t-1)+4r(t-2)$

حل: الف ـ بنابر تعریف تابع پله واحد داریم:

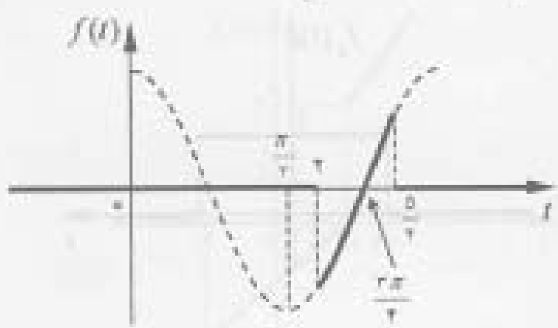
$$u(t)=\begin{cases}0 & , t<0\\ 1 & , t>0\end{cases} \rightarrow u(t)\cos(2t+30)=\begin{cases}0 & , t<0\\ \cos(2t+30) & , t>0\end{cases}$$



ب ـ بنابر تعریف تابع پالس واحد خواهیم داشت:

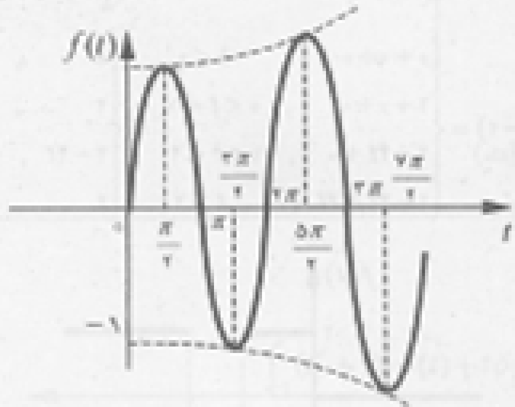
$$P_{\frac{1}{2}}(t)=\begin{cases}0 & , t<0\\ 2 & , 0<t<\frac{1}{2}\\ 0 & , t>\frac{1}{2}\end{cases} \rightarrow P_{\frac{1}{2}}(t)=\begin{cases}0 & , t<2\\ 2 & , 2<t<2+\frac{1}{2}\\ 0 & , t>2+\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$\rightarrow P_{\frac{1}{2}}(t-2)\cos 2t=\begin{cases}0 & , t<2\\ 2\cos 2t & , 2<t<\frac{5}{2}\\ 0 & , t>\frac{5}{2}\end{cases}$$



پ ـ بنابر تعریف تابع پله واحد داریم:

$$e^{at}\sin t\,u(t)=\begin{cases}0 & , \ t<0\\ e^{at}\sin t & , \ t>0\end{cases}$$



ت ـ بنابر تعریف تابع پله واحد داریم:

$$1-t>0 \to t<1 \to u(1-t)=\begin{cases}1 , & t<1\\ 0 , & t>1\end{cases} \quad , \quad t-1>0 \to t>1 \to u(t-1)=\begin{cases}0 , & t<1\\ 1 , & t>1\end{cases}$$

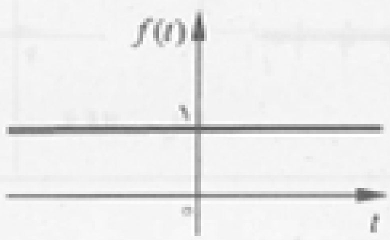
$$\to u(1-t)+u(t-1)=\begin{cases}1+0 & , \ t<1\\ 0+1 & , \ t>1\end{cases} \to u(1-t)+u(t-1)=1 \ \text{برای همه } t \text{ ها}$$

ث ـ همانند قسمت (پ) داریم:

$$1-t^2>0 \to -1<t<1 \to u(1-t^2)=\begin{cases}1 , & -1<t<1\\ 0 , & t<-1 , t>1\end{cases}$$

$$t^2-1>0 \to t<-1 \ , \ t>1 \to u(t^2-1)=\begin{cases}0 , & -1<t<1\\ 1 , & t<-1 \ , \ t>1\end{cases}$$

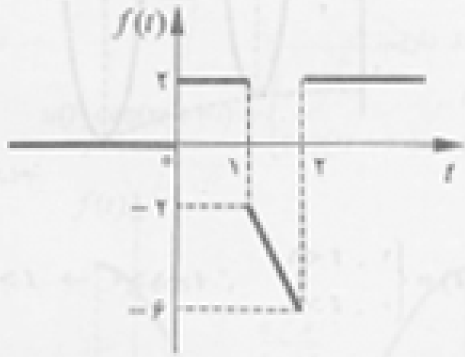
$$\to u(1-t^2)+u(t^2-1)=\begin{cases}1+0 & , \ -1<t<1\\ 0+1 & , \ t<-1 , t>1\end{cases}=1 \ \text{برای همه } t \text{ ها}$$



ج ـ با استفاده از تعریف توابع پله و شیب واحد خواهیم داشت:

$$u(t)=\begin{cases}0 \ , & t<0\\ 1 \ , & t>0\end{cases} \ , \quad r(t-1)=\begin{cases}0 \ , & t<1\\ t \ , & t>1\end{cases} \ , \quad r(t-2)=\begin{cases}0 \ , & t<2\\ t \ , & t>2\end{cases}$$

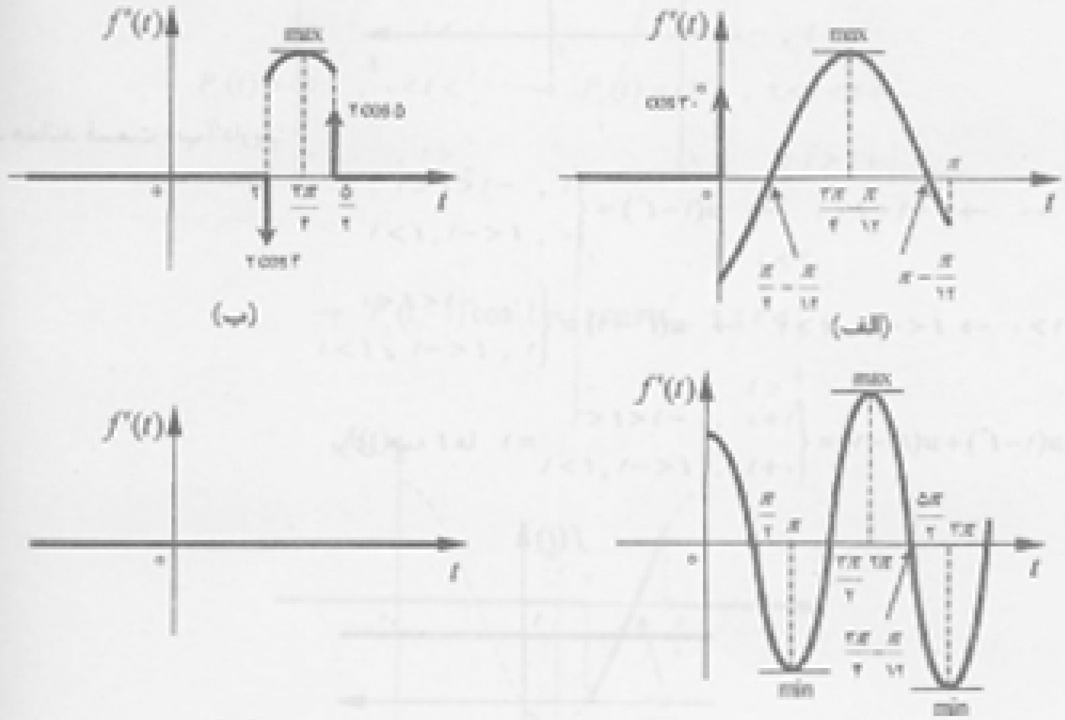
$$\rightarrow 2u(t)-2r(t-1)+2r(t-2)=\begin{cases}0+0+0 \ , & t<0\\ 2+0+0 \ , & 0<t<1\\ 2-2t+0 \ , & 1<t<2\\ 2-2t+2t \ , & t>2\end{cases}=\begin{cases}0 \ , & t<0\\ 2 \ , & 0<t<1\\ 2-2t \ , & 1<t<2\\ 2 \ , & t>2\end{cases}$$



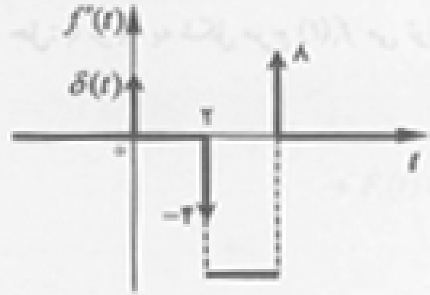
مسئله ۴

مشتق شکل موجهای مسئله ۳ را تعیین کرده و رسم کنید.

حل:



(الف) (ب) (پ) (ت)



(ج)

(ث)

مسئله ۵

الف) ؟ $\int_{-\infty}^{۳}(t^{۳}+۲)[\delta(t)+۴\delta(t-۲)]\,dt=?$

ب) ؟ $\int_{-\infty}^{۳}t^{۲}[\delta(t)+\delta(t+۲/۵)+\delta(t-۵)]\,dt=?$

حل: الف)

$$\int_{-\infty}^{۳}(t^{۳}+۲)[\delta(t)+۴\delta(t-۲)]\,dt=\int_{-\infty}^{۳}(t^{۳}+۲)\delta(t)\,dt+\int_{-\infty}^{۳}(t^{۳}+۲)\delta(t-۲)\,dt$$

$$=(t^{۳}+۲)\Big|_{t=0}+۴(t^{۳}+۲)\Big|_{t=۲}=۵۲$$

ب)

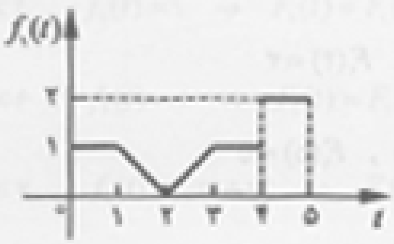
$$\int_{-\infty}^{۳}t^{۲}[\delta(t)+\delta(t+۲/۵)+\delta(t-۵)]\,dt=\int_{-\infty}^{۳}t^{۲}\delta(t)\,dt+\int_{-\infty}^{۳}t^{۲}\delta(t+۲/۵)\,dt+\int_{-\infty}^{۳}t^{۲}\delta(t-۵)\,dt$$

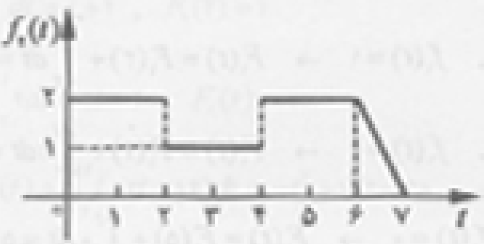
$$=t^{۲}\Big|_{t=0}+t^{۲}\Big|_{t=-۲/۵}+0=۶/۲۵$$

مسئله ۶

شکل موجهای زیر را بر حسب توابع ویژه بنویسید.

مشتق و انتگرال آنها را تعیین کنید.





شکل مسئلهٔ ۶

حل: با توجه به شکل موج $f_1(t)$ می توان نوشت:

$$f_1(t)=\begin{cases} 0 & , \quad t<0 \\ 1 & , \quad 0<t<1 \\ 2-t & , \quad 1<t<2 \\ t-2 & , \quad 2<t<3 \\ 1 & , \quad 3<t<4 \\ 2 & , \quad 4<t<5 \\ 0 & , \quad t>5 \end{cases}$$

$$\rightarrow f_1(t)=(1)\left[u(t)-u(t-1)\right]+(2-t)\left[u(t-1)-u(t-2)+u(t-2)\right]+(t-2)\left[u(t-2)-u(t-3)\right]$$

$$+(1)\left[u(t-3)-u(t-4)\right]+(2)\left[u(t-4)-u(t-5)\right]$$

$$=\left[u(t)-u(t-1)\right]+\left[-(t-1)u(t-1)+u(t-1)+(t-2)u(t-2)\right]$$

$$+\left[(t-2)u(t-2)-(t-3)u(t-3)-u(t-3)\right]$$

$$+\left[u(t-3)-u(t-4)\right]+\left[2u(t-4)-2u(t-5)\right]$$

$$=u(t)-(t-1)u(t-1)+2(t-2)u(t-2)-(t-3)u(t-3)+u(t-4)-2u(t-5)$$

$$\rightarrow f_1(t)=u(t)-r(t-1)+2r(t-2)-r(t-3)+u(t-4)-2u(t-5)$$

$$\rightarrow f_1'(t)=\delta(t)-u(t-1)+2u(t-2)-u(t-3)+\delta(t-4)-2\delta(t-5)$$

برای محاسبه انتگرال $f_1(t)$، باید از $f_1(t)$ در ازای تک تک بازه ها انتگرالگیری کنیم.

$$t<0\ ,\quad f_1(t)=0 \quad\rightarrow\quad F_1(t)=0 \quad , \quad F_1(0)=0$$

$$0<t<1\ ,\quad f_1(t)=1 \quad\rightarrow\quad F_1(t)=F_1(0)+\int_0^t dt=t \quad , \quad F_1(1)=1$$

$$1<t<2\ ,\quad f_1(t)=2-t \quad\rightarrow\quad F_1(t)=F_1(1)+\int_1^t (2-t)dt=-\frac{t^2}{2}+2t-\frac{1}{2} \quad , \quad F_1(2)=\frac{3}{2}$$

$$2<t<3\ ,\quad f_1(t)=t-2 \quad\rightarrow\quad F_1(t)=F_1(2)+\int_2^t (t-2)dt=\frac{t^2}{2}-2t+\frac{7}{2} \quad , \quad F_1(3)=2$$

$$3<t<4\ ,\quad f_1(t)=1 \quad\rightarrow\quad F_1(t)=F_1(3)+\int_3^t dt=t-1 \quad , \quad F_1(4)=3$$

$$4<t<5\ ,\quad f_1(t)=2 \quad\rightarrow\quad F_1(t)=F_1(4)+\int_4^t 2dt=2t-5 \quad , \quad F_1(5)=5$$

$$t>5\ ,\quad f_1(t)=0 \quad\rightarrow\quad F_1(t)=F_1(5)+\int_5^t 0\, dt=5+0=5$$

$$\rightarrow F_1(t)=\begin{cases} t & , \quad t<0 \\ -\frac{1}{2}t^2+2t-\frac{1}{2} & , \quad 1<t<2 \\ -\frac{1}{2}t^2-2t+\frac{7}{2} & , \quad 2<t<3 \\ t-1 & , \quad 3<t<4 \\ 2t-5 & , \quad 4<t<5 \\ 5 & , \quad t>5 \end{cases}$$

حال به شکل موج $f_2(t)$ توجه کنید. می توان نوشت:

$$f_2(t)=\begin{cases} 0 & , \quad t<0 \\ 2 & , \quad 0<t<2 \\ 1 & , \quad 2<t<4 \\ 2 & , \quad 4<t<6 \\ -2t+14 & , \quad 6<t<7 \\ 0 & , \quad t>7 \end{cases}$$

$$\rightarrow f_2(t)=(2)\left[u(t)-u(t-2)\right]+(1)\left[u(t-2)-u(t-4)\right]+(2)\left[u(t-4)-u(t-6)\right]$$

$$+(-2t+14)\left[u(t-6)-u(t-7)\right]$$

$$=2u(t)-u(t-2)+u(t-4)-2(t-6)u(t-6)+2(t-7)u(t-7)$$

$$=2u(t)-u(t-2)+u(t-4)-2r(t-6)+2r(t-7)$$

$$\rightarrow f_2'(t)=2\delta(t)-\delta(t-2)+\delta(t-4)-2u(t-6)+2u(t-7)$$

در ادامه انتگرال $f_2(t)$ را بدست خواهیم آورد.

$t<0 \;,\; f_2(t)=0 \;\rightarrow\; F_2(t)=0 \;,\; F_2(0)=0$

$0<t<2 \;,\; f_2(t)=2 \;\rightarrow\; F_2(t)=F_2(0)+\int_0^t 2dt=2t \;,\; F_2(2)=4$

$2<t<4 \;,\; f_2(t)=1 \;\rightarrow\; F_2(t)=F_2(2)+\int_2^t dt=t+2 \;,\; F_2(4)=6$

$4<t<6 \;,\; f_2(t)=2 \;\rightarrow\; F_2(t)=F_2(4)+\int_4^t 2dt=2t-2 \;,\; F_2(6)=10$

$6<t<7 \;,\; f_2(t)=-2t+14 \;\rightarrow\; F_2(t)=F(6)+\int_6^t(-2t+14)dt=-t^2+14t-38 \;,\; F_2(7)=11$

$t>7 \;,\; f_2(t)=0 \;\rightarrow\; F_2(t)=F_2(7)+\int_7^t 0\,dt=11$

$$\rightarrow F_1(t)=\begin{cases}0 & , \quad t<0\\ 2t & , \quad 0<t<2\\ t+2 & , \quad 2<t<4\\ 2t-2 & , \quad 4<t<6\\ -t^2+14t-38 & , \quad 6<t<7\\ 11 & , \quad t>7\end{cases}$$

مسئله ۷

نشان دهید $\delta(2t)=\frac{1}{2}\delta(t)$

حل: بنا بر تعریف تابع ضربه واحد داریم :

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(2t)d(2t)=1$$

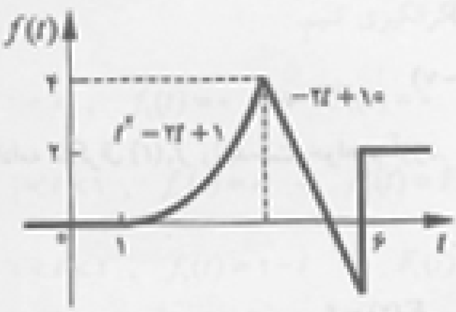
$$\rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}2\delta(2t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1$$

$$\rightarrow 2\delta(2t)=\delta(t) \quad \rightarrow \quad \delta(2t)=\frac{1}{2}\delta(t)$$

مسئله ۸

شکل موج نشان داده شده را برحسب ترکیب خطی از توابع پله، شیب و سهمی واحد بیان کنید.



شکل مسئلهٔ ۸

حل: می توان نوشت:

$$f(t)=(t^2-2t+1)\left[u(t-1)-u(t-3)\right]+(-2t+10)\left[u(t-3)-u(t-6)\right]+(2)u(t-6)$$

$$=\left[(t-1)^2u(t-1)-(t-3)^2u(t-3)+(-4t+8)u(t-3)\right]$$

$$=(t-1)^2u(t-1)-(t-3)^2u(t-3)-6(t-3)u(t-3)-2(t-6)u(t-6)$$

$$=2p(t-1)-2p(t-3)-6r(t-3)-2r(t-6)$$

مسئلهٔ ۹

مشتق توابع زیر را بیابید.

الف- $\left(1-te^{-t}\right)u(t)$ ب- $\cos 2t\,u(t)$ ج- $e^{-t}u(t)$

حل:

الف) $f(t)=\left(1-te^{-t}\right)u(t) \;\rightarrow\; f'(t)=\left(1-te^{-t}\right)'u(t)+\left(1-te^{-t}\right)u'(t)$

$$=(t-1)e^{-t}u(t)+\left(1-te^{-t}\right)\delta(t)$$

$$=(t-1)e^{-t}u(t)+\left(1-te^{-t}\right)\Big|_{t=0}\delta(t)$$

$$=(t-1)e^{-t}u(t)+\delta(t)$$

ب) $f(t)=\cos 2t\,u(t) \;\rightarrow\; f'(t)=-2\sin 2t\,u(t)+\cos 2t\,\delta(t)$

$$=-2\sin 2t\,u(t)+\cos 2t\Big|_{t=0}\delta(t)$$

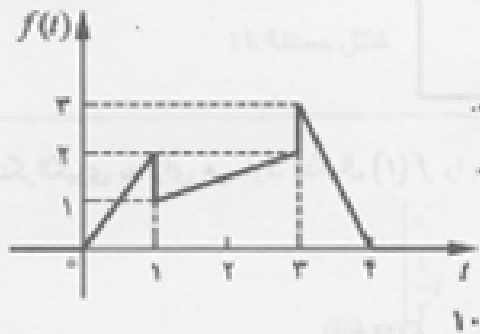
$$=-2\sin 2t\,u(t)+\delta(t)$$

ج) $f(t)=e^{-t}u(t) \;\rightarrow\; f'(t)=-e^{-t}u(t)+e^{-t}\delta(t)$

$$=-e^{-t}u(t)+e^{-t}\Big|_{t=0}\delta(t)$$

$$=-e^{-t}u(t)+\delta(t)$$

مسئلهٔ ۱۰



شکل مسئلهٔ ۱۰

شکل موج $f(t)$ را بر حسب توابع پله و شیب بنویسید.

شکل موج مشتق و انتگرال $f(t)$ را تعیین و رسم کنید.

حل: با توجه به شکل مسئله می توان نوشت:

$$f(t)=\begin{cases} 0 & , \quad t<0 \\ 2t & , \quad 0<t<1 \\ \frac{1}{2}t+\frac{1}{2} & , \quad 1<t<3 \\ -3t+12 & , \quad 3<t<4 \\ 0 & , \quad t>4 \end{cases}$$

$$\rightarrow f(t)=\left[u(t)-u(t-1)\right]+\left(\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\right)\left[u(t-1)-u(t-3)\right]+(-3t+12)\left[u(t-3)-u(t-4)\right]$$

$$=\left[2tu(t)-2(t-1)u(t-1)-2u(t-1)\right]$$

$$+\left[\frac{1}{2}(t-1)u(t-1)+u(t-1)-\frac{1}{2}(t-3)u(t-3)-2u(t-3)\right]$$

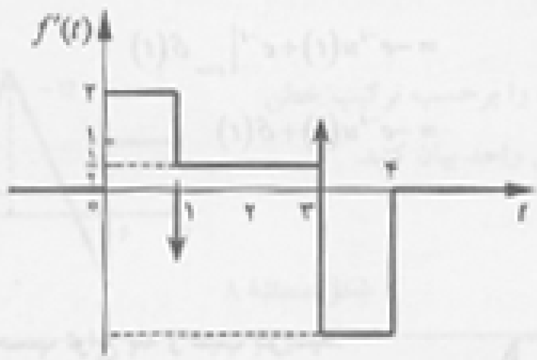
$$+\left[-3(t-3)u(t-3)+3u(t-3)-3(t-4)u(t-4)\right]$$

$$=2tu(t)-\frac{3}{2}(t-1)u(t-1)-u(t-1)-\frac{7}{2}(t-3)u(t-3)+u(t-3)-3(t-4)u(t-4)$$

$$=2r(t)-\frac{3}{2}r(t-1)-u(t-1)-\frac{7}{2}r(t-3)+u(t-3)-3r(t-4)$$

حال مشتق $f(t)$ را بدست آورده و آن را رسم می کنیم.

$$f'(t)=2u(t)-\frac{3}{2}u(t-1)-\delta(t-1)-\frac{7}{2}u(t-3)+\delta(t-3)-3u(t-4)$$



با انتگرالگیری به ازای هر بازه، انتگرال $f(t)$ را بدست آورده و رسم خواهیم کرد.

$t<0 \;,\; f_1(t)=0 \;\rightarrow\; F(t)=0 \;,\; F(0)=0$

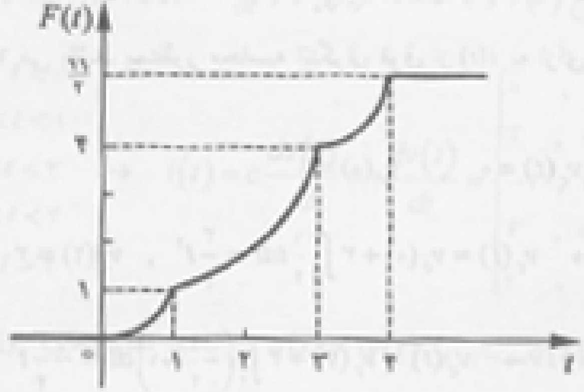
$0<t<1 \;,\; f(t)=2t \;\rightarrow\; F(t)=F(0)+\int_0^t 2t\,dt=t^2 \;,\; F(1)=1$

$1<t<3 \;,\; f(t)=\frac{1}{2}t+\frac{1}{2} \;\rightarrow\; F(t)=F(1)+\int_1^t\left(\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\right)dt=\frac{t^2}{4}+\frac{t}{2}+\frac{1}{4} \;,\; F(3)=4$

$3<t<4 \;,\; f(t)=-3t+12 \;\rightarrow\; F(t)=F(3)+\int_3^t(-3t+12)dt=-\frac{3}{2}t^2+12t-\frac{37}{2} \;,\; F(4)=\frac{11}{2}$

$$t>۲\ ,\quad f(t)=۰ \quad \rightarrow \quad F(t)=F(۴)+\int_{۴}^{t}۰\,dt=\frac{۱۱}{۲}$$

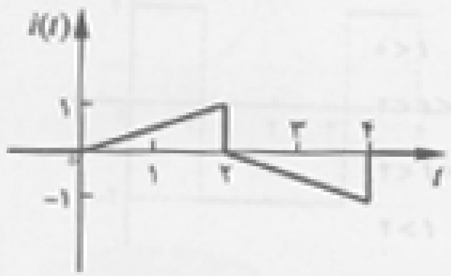
$$F(t)=\begin{cases} ۰ & ,\ t<۰ \\ t^۲ & ,\ ۰<t<۱ \\ \frac{t^۲}{۲}+\frac{t}{۲}+\frac{۱}{۲} & ,\ ۱<t<۲ \\ -\frac{۳}{۲}t^۲+۱۲t-\frac{۳۷}{۲} & ,\ ۳<t<۴ \\ \frac{۱۱}{۲} & ,\quad t>۴ \end{cases}$$



مسئله ۱۱

الف- شکل موج نشان داده شده را توسط توابع پله و شیب بنویسید.

ب- اگر $i(t)$ جریان خازنی به ظرفیت $\frac{۱}{۲}F$ و ولتاژ اولیه صفر باشد، شکل موج ولتاژ دو سر خازن و معادلهٔ ریاضی آن را بدست آورید.



شکل مسئلهٔ ۱۱

حل: الف ـ می توان نوشت :

$$i(t)=\begin{cases} ۰ & ,\quad t<۰ \\ \frac{۱}{۲}t & ,\ ۰<t<۲ \\ -\frac{۱}{۲}t+۱ & ,\ ۲<t<۴ \\ ۰ & ,\quad t>۴ \end{cases}$$

$$\rightarrow i(t)=\frac{۱}{۲}t\left[u(t)-u(t-۲)\right]+(-\frac{۱}{۲}t+۱)\left[u(t-۲)-u(t-۴)\right]$$

$$=\left[\frac{۱}{۲}tu(t)-\frac{۱}{۲}(t-۲)u(t-۲)-u(t-۲)\right]+\left[-\frac{۱}{۲}(t-۲)u(t-۲)+\frac{۱}{۲}(t-۴)u(t-۴)+u(t-۴)\right]$$

$$=\frac{۱}{۲}tu(t)-(t-۲)u(t-۲)-u(t-۲)+\frac{۱}{۲}(t-۴)u(t-۴)+u(t-۴)$$

$$=\frac{۱}{۲}r(t)-r(t-۲)-u(t-۲)+\frac{۱}{۲}r(t-۴)+u(t-۴)$$

ب – برای محاسبه ولتاژ دو سر خازن از رابطه $v_c(t)=v_c(۰)+\frac{۱}{c}\int_۰^t i_c(t)dt$ استفاده خواهیم کرد. با توجه به مسئله، $c=\frac{۱}{۲}$ و $v_c(۰)=۰$ می باشد. بمنظور محاسبه انتگرال فوق از $i(t)$ به ازای تک تک بازه ها انتگرالگیری خواهیم کرد.

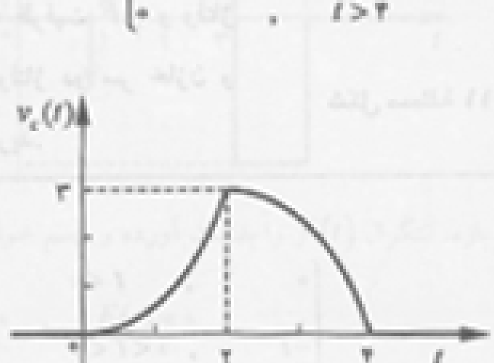
$$t<۰\ ,\quad i(t)=۰\ \rightarrow\ v_c(t)=۰\ ,\quad v_c(۰)=۰$$

$$۰<t<۲\ ,\quad i(t)=\frac{۱}{۲}t\ \rightarrow\ v_c(t)=v_c(۰)+۲\int_۰^t\frac{۱}{۲}t\,dt=\frac{۲}{۴}t^۲\ ,\quad v_c(۲)=۲$$

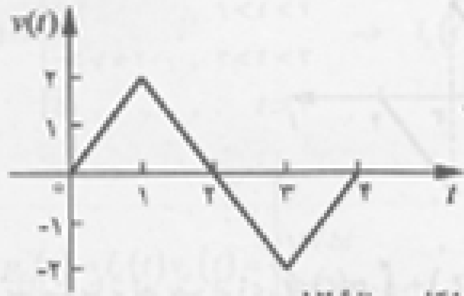
$$۲<t<۴\ ,\quad i(t)=-\frac{۱}{۲}t+۱\ \rightarrow\ v_c(t)=v_c(۲)+۲\int_۲^t\left(-\frac{۱}{۲}t+۱\right)dt=-\frac{۲}{۴}t^۲+۲t\ ,\quad v_c(۴)=۰$$

$$t>۴\ ,\quad i(t)=۰\ \rightarrow\ v_c(t)=v_c(۴)+۰=۰$$

$$\rightarrow v_c(t)=\begin{cases}۰ & ,\quad t<۰\\ \frac{۲}{۴}t^۲ & ,\quad ۰<t<۲\\ -\frac{۲}{۴}t^۲+۲t & ,\quad ۲<t<۴\\ ۰ & ,\quad t>۴\end{cases}$$



مسئله ۱۲



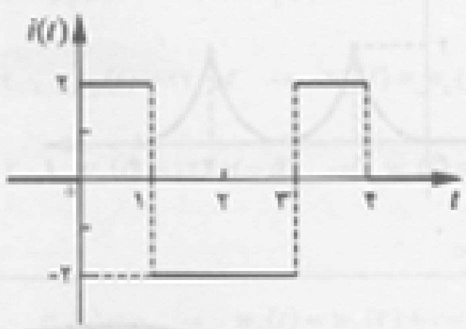
شکل مسئلهٔ ۱۲

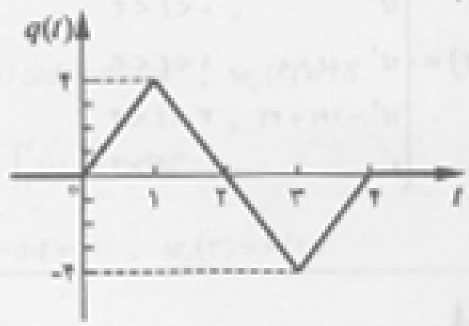
شکل موج ولتاژ یک خازن ۲ فارادی نشان داده شده است شکل موج جریان، بار، توان و انرژی را رسم کنید.

حل: با توجه به شکل موج $v(t)$ و با استفاده از رابطه $i_c(t)=c\dfrac{dv_c(t)}{dt}$ داریم:

$$v(t)=\begin{cases}0 & , \quad t<0\\ 2t & , \quad 0<t<1\\ -2t+4 & , \quad 1<t<3\\ 2t-8 & , \quad 3<t<4\\ 0 & , \quad t>4\end{cases} \rightarrow \quad i(t)=c\frac{dv(t)}{dt}=2\frac{dv(t)}{dt}=\begin{cases}0 & , \quad t<0\\ 4 & , \quad 0<t<1\\ -4 & , \quad 1<t<3\\ 4 & , \quad 0<t<4\\ 0 & , \quad t>4\end{cases}$$

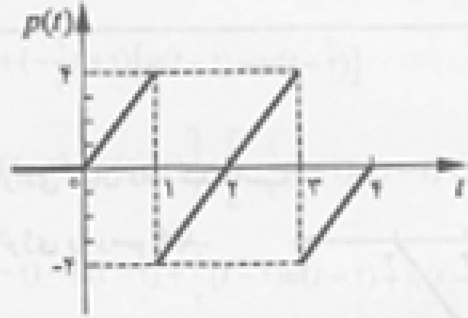
همچنین می دانیم که $q(t)=cv(t)$ ، بنابراین $q(t)=2v(t)$ می باشد. نمودارهای جریان و بار خازن در شکل زیر رسم شده اند.





در ادامه با استفاده از رابطه $p(t)=i(t)v(t)$ نمودار توان را رسم خواهیم کرد.

$$p(t)=i(t)v(t)=\begin{cases}(0)(0) & , \quad t<0\\ (2t)(2) & , \quad 0<t<1\\ (-2t+4)(2) & , \quad 1<t<3\\ (2t-8)(2) & , \quad 3<t<4\\ (0)(0) & , \quad t>4\end{cases} =\begin{cases}0 & , \quad t<0\\ 4t & , \quad 0<t<1\\ 4t-8 & , \quad 1<t<3\\ 4t-16 & , \quad 3<t<4\\ 0 & , \quad t>4\end{cases}$$



در نهایت بنا برتعریف انرژی $w(t)=w(t_0)+\int_{t_0}^{t} p(t)\,dt$ نمودار انرژی را رسم می کنیم.

$$t<0\ ,\quad p(t)=0 \;\rightarrow\; w(t)=0\ ,\quad w(0)=0$$

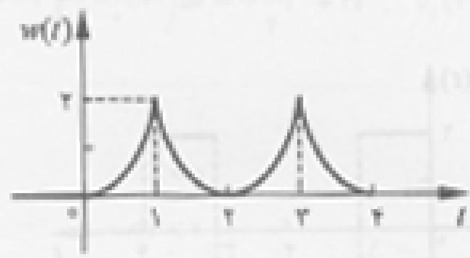
$$0<t<1\ ,\quad p(t)=4t \;\rightarrow\; w(t)=w(0)+\int_0^t 4t\,dt=2t^2\ ,\quad w(1)=2$$

$$1<t<3\ ,\quad p(t)=4t-8 \;\rightarrow\; w(t)=w(1)+\int_1^t (4t-8)\,dt=2t^2-8t+8\ ,\quad w(3)=2$$

$$3<t<4\ ,\quad p(t)=4t-16 \;\rightarrow\; w(t)=w(3)+\int_3^t (4t-16)\,dt=2t^2-16t+32\ ,\quad w(4)=0$$

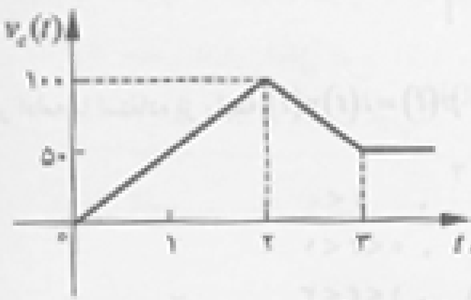
$$t>4\ ,\quad p(t)=0 \;\rightarrow\; w(t)=w(0)=0$$

$$\rightarrow w(t)=\begin{cases} 0 & ,\quad t<0 \\ 2t^2 & ,\; 0<t<1 \\ 2t^2-8t+8 & ,\; 1<t<3 \\ 2t^2-16t+32 & ,\; 3<t<4 \\ 0 & ,\quad t>4 \end{cases}$$



مسئله ۱۳

شکل موج ولتاژ دو سر یک خازن $5\ mF$ نشان داده شده است. توان و انرژی ذخیره شده خازن را تعیین و شکل موج آنها را رسم کنید.

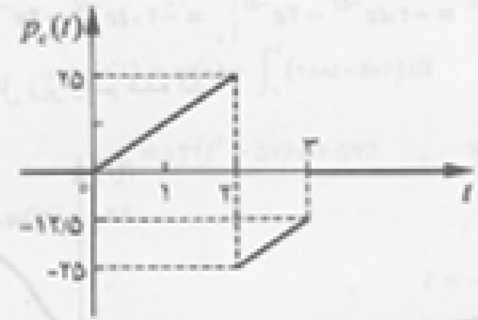


شکل مسئلة ۱۳

حل: با استفاده از رابطه $i_c(t)=c\frac{dv_c(t)}{dt}$ و $p(t)=i(t)v(t)$ و با توجه به شکل مسئله داریم :

$$v_c(t)=\begin{cases}0 & , \quad t<0\\ 50t & , \quad 1<t<2\\ -50t+200 & , \quad 2<t<3\\ 50 & , \quad t>3\end{cases} \rightarrow \quad i_c(t)=5\times10^{-3}\frac{dv(t)}{dt}=\begin{cases}0 & , \quad t<0\\ 0.25 & , \quad 1<t<2\\ -0.25 & , \quad 2<t<3\\ 0 & , \quad t>3\end{cases}$$

$$\rightarrow \quad p_c(t)=i_c(t)v_c(t)=\begin{cases}0 & , \quad t<0\\ 12.5t & , \quad 0<t<2\\ 12.5t-50 & , \quad 2<t<3\\ 0 & , \quad t>3\end{cases}$$



برای محاسبه انرژی از رابطه $w(t)=w(t_0)+\int_{t_0}^{t}p(t)dt$ استفاده خواهیم کرد.

$$t<0 \;,\quad p_c(t)=0 \quad\rightarrow\quad w_c(t)=0 \;,\quad w_c(0)=0$$

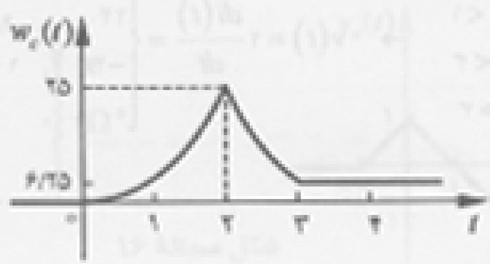
$$0<t<2 \;,\quad p_c(t)=12.5t \quad\rightarrow\quad w_c(t)=w_c(0)+\int_0^t 12.5t\,dt=6.25t^2 \;,\quad w_c(2)=25$$

$$2<t<3 \;,\quad p_c(t)=12.5t-50 \quad\rightarrow\quad w_c(t)=w_c(2)+\int_2^t(12.5t-50)\,dt$$

$$=6.25t^2-50t+100 \;,\quad w_c(3)=6.25$$

$$t>3 \;,\quad p_c(t)=0 \quad\rightarrow\quad w_c(t)=w_c(3)+0=6.25$$

$$\rightarrow \quad w_c(t)=\begin{cases}0 & , \quad t<0\\ 6.25t^2 & , \quad 0<t<2\\ 6.25t^2-50t+100 & , \quad 2<t<3\\ 6.25 & , \quad t>3\end{cases}$$



مسئله ۱۴

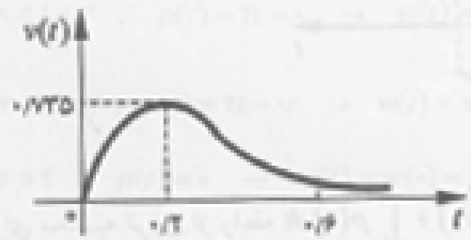
در یک سلف $L=0/1\ H$ و $v(t)=10te^{-5t}$ و $i(t)=0\ (t\le 0)$

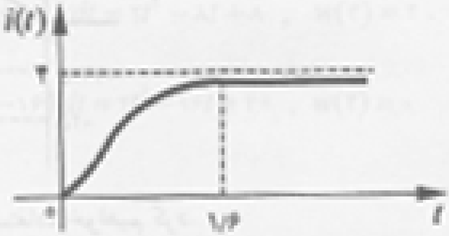
شکل موج ولتاژ و جریان گذرنده از سلف را رسم کنید.

حل: برای $t\le 0$ ، $i(t)=0$ می باشد بنابراین $i(0)=0$ بوده و برای $t>0$ ، با استفاده از رابطه $i(t)=i(t_0)+\frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v(t)\,dt$ جریان را محاسبه می کنیم.

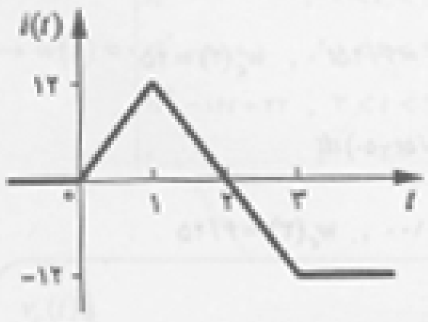
$$i(t)=i(0)+\frac{1}{0/1}\int_0^t 10te^{-5t}=-20te^{-5t}-4e^{-5t}\Big|_0^t=-20te^{-5t}-4e^{-5t}+4$$

شکل موجهای جریان و ولتاژ در شکل زیر رسم شده اند.





مسئله ۱۵



شکل مسئله ۱۵

جریان یک سلف با $L=2\ H$ و $i(0)=0$ داده شده است.

توان تحویل داده شده به سلف و انرژی ذخیره شده در آن را برای $t>0$ تعیین و رسم کنید.

شکل موج کشتش و انتگرال $f(t)$ را تعیین و رسم کنید.

حل: با استفاده از رابطه $v_L(t)=L\frac{di_L(t)}{dt}$ و با توجه به شکل موج $i(t)$ داریم.

$$i(t)=\begin{cases}0 & , \quad t<0\\ 12t & , \quad 0<t<1\\ -12t+24 & , \quad 1<t<3\\ -12 & , \quad t>3\end{cases}\ \rightarrow\ v(t)=2\frac{di(t)}{dt}=\begin{cases}0 & , \quad t<0\\ 24 & , \quad 0<t<1\\ -24 & , \quad 1<t<3\\ 0 & , \quad t>3\end{cases}$$

$$p(t)=v(t)i(t) \quad \rightarrow \quad p(t)=\begin{cases} ۰ & , \quad t<۰ \\ ۲۸۸t & , \quad ۰<t<۱ \\ ۲۸۸t-۵۷۶ & , \quad ۱<t<۳ \\ ۰ & , \quad t>۳ \end{cases}$$

در نهایت با استفاده از رابطه $w(t)=w(t_۰)+\int_{t_۰}^{t} p(t)dt$ داریم:

$$t<۰ \;,\quad p(t)=۰ \quad \rightarrow \quad w(t)=۰ \quad , \quad w(۰)=۰$$

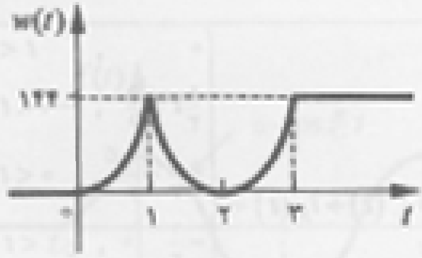
$$۰<t<۱ \;,\quad p(t)=۲۸۸t \quad \rightarrow \quad w(t)=w(۰)+\int_{۰}^{t} ۲۸۸t\,dt=۱۴۴t^۲ \quad , \quad w(۱)=۱۴۴$$

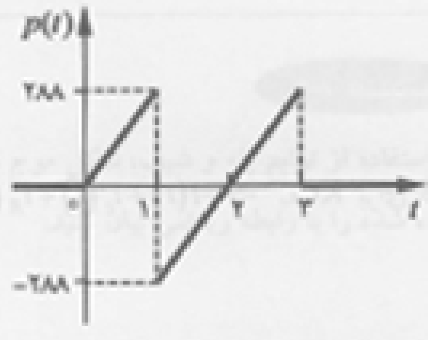
$$۱<t<۳ \;,\quad p(t)=۲۸۸t-۵۷۶ \quad \rightarrow \quad w(t)=w(۱)+\int_{۱}^{t}(۲۸۸t-۵۷۶)dt$$

$$=۱۴۴t^۲-۵۷۶t+۵۷۶ \quad , \quad w(۳)=۱۴۴$$

$$t>۳ \;,\quad p(t)=۰ \quad \rightarrow \quad w(t)=w(۳)=۱۴۴$$

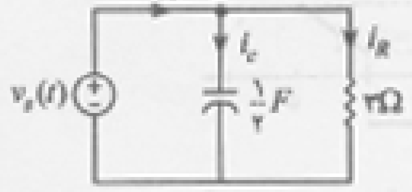
$$\rightarrow \quad w(t)=\begin{cases} ۰ & , \quad t<۰ \\ ۱۴۴t^۲ & , \quad ۰<t<۱ \\ ۱۴۴t^۲-۵۷۶t+۵۷۶ & , \quad ۱<t<۳ \\ ۱۴۴ & , \quad t>۳ \end{cases}$$

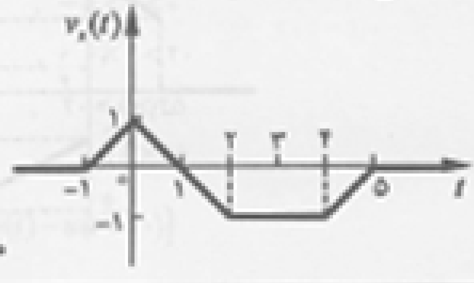




مسئله ۱۶

شکل موج $i(t)$ را رسم کنید.





شکل مسئله ۱۶

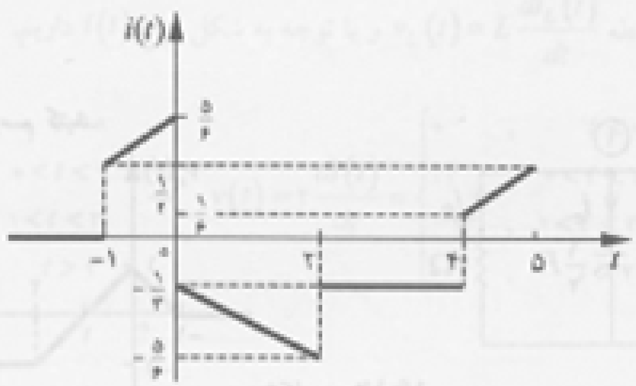
حل: با توجه به شکل موج منبع ولتاژ داریم:

$$v_s(t)=\begin{cases}0 & ,\ t<-1\\ t+1 & ,\ -1<t<0\\ -t+1 & ,\ 1<t<2\\ -1 & ,\ 2<t<4\\ t-5 & ,\ 4<t<5\\ 0 & ,\ t>5\end{cases}\quad\rightarrow\quad i_R(t)=\frac{v_R(t)}{R}=\frac{v_s(t)}{2}=\begin{cases}0 & ,\ t<-1\\ \frac{1}{2}(t+1) & ,\ -1<t<0\\ \frac{1}{2}(-t+1) & ,\ 0<t<2\\ -\frac{1}{2} & ,\ 2<t<4\\ \frac{1}{2}(t-5) & ,\ 4<t<5\\ 0 & ,\ t>5\end{cases}$$

$$i_c(t)=c\frac{dv_c(t)}{dt}=\frac{1}{2}\frac{dv_s(t)}{dt}=\begin{cases}0 & ,\ t<-1\\ \frac{1}{2} & ,\ -1<t<0\\ -\frac{1}{2} & ,\ 0<t<2\\ 0 & ,\ 2<t<4\\ \frac{1}{2} & ,\ 4<t<5\\ 0 & ,\ t>5\end{cases}$$

در نهایت با استفاده از KCL خواهیم داشت:

$$\text{برای گره ①}\ \text{KCL}\ \rightarrow -i(t)+i_c(t)+i_R(t)=0\ \rightarrow i(t)=i_c(t)+i_R(t)=\begin{cases}0 & ,\ t<-1\\ \frac{1}{2}t+\frac{5}{6} & ,\ -1<t<0\\ -\frac{t}{2}-\frac{1}{6} & ,\ 0<t<2\\ -\frac{1}{2} & ,\ 2<t<4\\ \frac{t}{2}-\frac{7}{6} & ,\ 4<t<5\\ 0 & ,\ t>5\end{cases}$$



مسئله ۱۷

مقاومت غیرخطی با مشخصه $i = e^{2v} - 1$ به دوسربک منبع ولتاژ $v_s(t) = \cos\omega t$ وصل شده است. چه فرکانس هایی در جریان گذرنده از مقاومت وجود دارد.

حل: ابتدا جریان گذرنده از مقاومت را بدست می آوریم.

$$i = e^{2v} - 1 = e^{2\cos\omega t} - 1$$

حال با استفاده از بسط $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \ , \ |x| \le 1$ داریم:

$$i = \left(1 + 2\cos\omega t + 2\cos^2\omega t + \frac{4}{3}\cos^3\omega t + \frac{2}{3}\cos^4\omega t + \dots\right) - 1$$

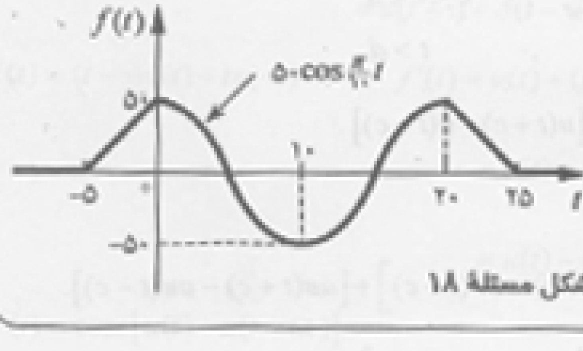
حال با استفاده از روابط تبدیل حاصلضرب به مجموع در مثلثات داریم:

$$i = \Big[1 + 2\cos\omega t + 2\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos 2\omega t\right) + \frac{4}{3}\left(\tfrac{3}{4}\cos\omega t + \tfrac{1}{4}\cos 3\omega t\right)$$
$$+ \frac{2}{3}\left(\tfrac{3}{8}\cos\omega t + \tfrac{1}{2}\cos 2\omega t + \tfrac{1}{8}\cos 4\omega t\right) + \dots\Big] - 1$$

بنابراین همه فرکانسهایی که مضرب صحیح و مثبتی از ω اند در جریان گذرنده از مقاومت وجود دارد.

مسئله ۱۸

با استفاده از توابع پله و شیب، شکل موج نشان داده شده را با رابطه ریاضی بیان کنید.



شکل مسئله ۱۸

حل: با توجه به شکل موج نشان داده شده داریم:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t < -5 \\ 10t + 50 & , \quad -5 < t < 0 \\ 50\cos\frac{\pi}{10}t & , \quad 0 < t < 20 \\ -10t + 250 & , \quad 20 < t < 25 \\ 0 & , \quad t > 25 \end{cases}$$

$$\rightarrow f(t) = (10t + 50)\left[u(t+5) - u(t)\right] + 50\cos\frac{\pi}{10}t\left[u(t) - u(t-20)\right]$$

$$+(-10t+250)\left[u(t-20)-u(t-25)\right]$$

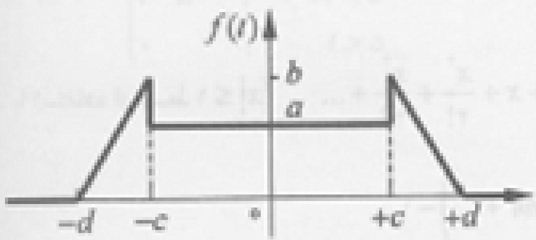
$$=\left[10(t+5)u(t+5)-10tu(t)-50tu(t)\right]+\left[\left(50\cos\tfrac{\pi}{20}t\right)u(t)-\left(50\cos\tfrac{\pi}{20}t\right)u(t-20)\right]$$

$$+\left[-10(t-20)u(t-20)+50u(t-20)+10(t-25)u(t-25)\right]$$

$$\rightarrow f(t)=10r(t+5)-10r(t)+50\left(-1+\cos\tfrac{\pi}{20}t\right)\left[u(t)-u(t-20)\right]-10r(t-20)+10r(t-25)$$

مسئله ۱۹

شکل موج نشان داده شده را بر حسب توابع پله و شیب بیان کنید.



شکل مسئلهٔ ۱۹

حل: با توجه به شکل موج نشان داده شده می توان نوشت:

$$f(t)=\begin{cases} 0 & , \quad t<-d \\ \frac{b}{d-c}t+\frac{db}{d-c} & , \quad -d<t<-c \\ a & , \quad -c<t<c \\ -\frac{b}{d-c}t+\frac{db}{d-c} & , \quad c<t<d \\ 0 & , \quad t>d \end{cases}$$

$$\rightarrow f(t)=\left(\frac{b}{d-c}t+\frac{db}{d-c}\right)\left[u(t+d)-u(t+c)\right]+q\left[u(t+c)-u(t-c)\right]$$

$$+\left(-\frac{b}{d-c}t+\frac{db}{d-c}\right)\left[u(t-c)-u(t-d)\right]$$

$$=\left[\frac{b}{d-c}(t+d)u(t+d)-\frac{b}{d-c}(t+c)u(t+c)-bu(t+c)\right]+\left[au(t+c)-au(t-c)\right]$$

$$+\left[-\frac{b}{d-c}(t-c)u(t-c)+bu(t-c)+\frac{b}{d-c}(t-d)u(t-d)\right]$$

$$\rightarrow f(t)=\frac{b}{d-c}r(t+d)-\frac{b}{d-c}r(t+c)+(a-b)u(t+c)+(b-a)u(t-c)$$

$$-\frac{b}{d-c}r(t-c)+\frac{b}{d-c}r(t-d)$$

مسئله ۲۰

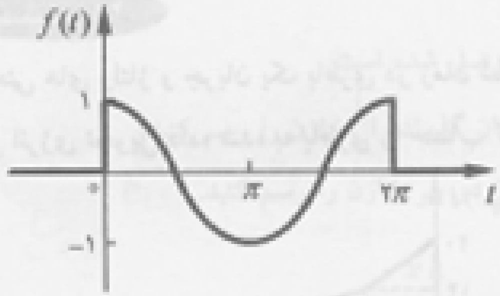
مشتق شکل موجهای زیر را تعیین کنید.

الف- $(t-2)u(t-1)$

ب- $tu(t-1)$

پ- $(t-1)u(t)-tu(-t)$

ت- $f(t)$



شکل مسئلهٔ ۲۰

حل:

الف) $f(t)=(t-2)u(t-1) \quad \rightarrow \quad f'(t)=u(t-1)+(t-2)\delta(t-1)$

$$=u(t-1)+(t-2)\Big|_{t=1}\delta(t-1)$$

$$=u(t-1)-\delta(t-1)$$

ب) $f(t)=tu(t-1) \quad \rightarrow \quad f'(t)=u(t-1)+t\delta(t-1)$

$$=u(t-1)+t\Big|_{t=1}\delta(t-1)$$

$$=u(t-1)+\delta(t-1)$$

ج) $f(t)=(t-1)u(t)-tu(-t) \quad \rightarrow \quad f'(t)=u(t)+(t-1)\delta(t)-u(-t)-t\delta(-t)$

$$=u(t)+(t-1)\Big|_{t=0}\delta(t)-u(-t)-t\Big|_{t=0}\delta(-t)$$

$$=u(t)-u(-t)-\delta(t)$$

ت) $f(t)=\cos t\big[u(t)-u(t-2\pi)\big]$

$$\rightarrow \quad f'(t)=-\sin t\big[u(t)-u(t-2\pi)\big]+\cos t\big[\delta(t)-\delta(t-2\pi)\big]$$

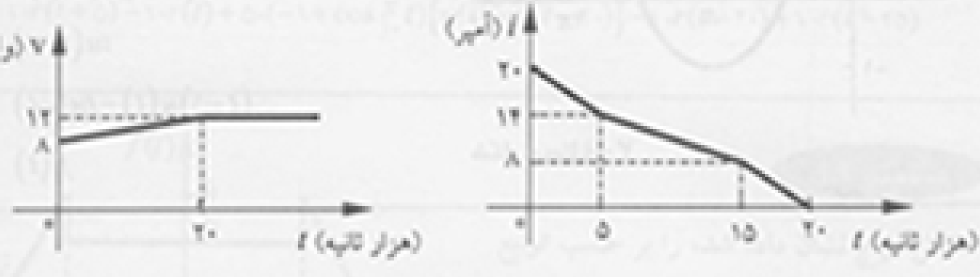
$$=-\sin t\big[u(t)-u(t-2\pi)\big]+\cos t\Big|_{t=0}\delta(t)-\cos t\Big|_{t=2\pi}\delta(t-2\pi)$$

$$=-\sin t\big[u(t)-u(t-2\pi)\big]+\delta(t)-\delta(t-2\pi)$$

مسئله ۲۱

منحنی های ولتاژ و جریان یک باطری در زمان شارژ شدن نشان داده شده است.

کل انرژی تحویل داده شده به باطری را حساب کنید.



شکل مسئله ۲۱

حل: با توجه به نمودارهای داده شده داریم:

$$v(t)=\begin{cases}0 & , \quad t<0\\ \frac{t}{5000}+8 & , \quad 0<t<20000\\ 12 & , \quad t>20000\end{cases} \quad , \quad i(t)=\begin{cases}0 & , \quad t<0\\ \frac{-6}{5000}t+20 & , \quad 0<t<5000\\ \frac{-6}{10000}t+17 & , \quad 5000<t<15000\\ \frac{-8}{5000}t+32 & , \quad 15000<t<20000\\ 0 & , \quad t>20000\end{cases}$$

بنابر تعریف توان خواهیم داشت:

$$p(t)=v(t)i(t)=\begin{cases}\left(\frac{t}{5000}+8\right)i(t) & , \quad 0<t<20000\\ 0 & , \quad \text{سایر زمانها}\end{cases}$$

و در نهایت با استفاده از رابطه $w(t_0,t)=\int_{t_0}^{t}p(t)dt$ داریم:

$$\text{کل } w=w(0,20000)=\int_0^{20000}\left(\frac{t}{5000}+8\right)i(t)dt$$

$$=\int_0^{5000}\left(\frac{t}{5000}+8\right)\left(\frac{-6t}{5000}t+20\right)dt+\int_{5000}^{15000}\left(\frac{t}{5000}+8\right)\left(\frac{-6t}{10000}+17\right)dt$$

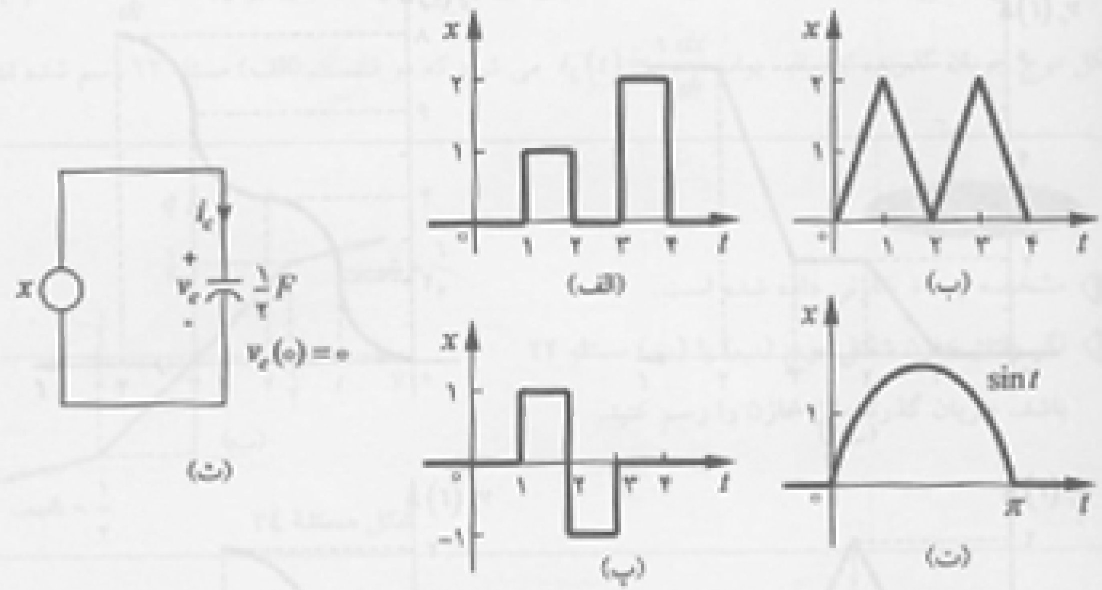
$$+\int_{15000}^{20000}\left(\frac{t}{5000}+8\right)\left(\frac{-8t}{5000}+32\right)dt=2076/7\ KJ$$

مسئله ۲۲

خازنی با $v_c(0)=0$ و $C=\frac{1}{2}F$ به دو سر منبع x وصل شده است.

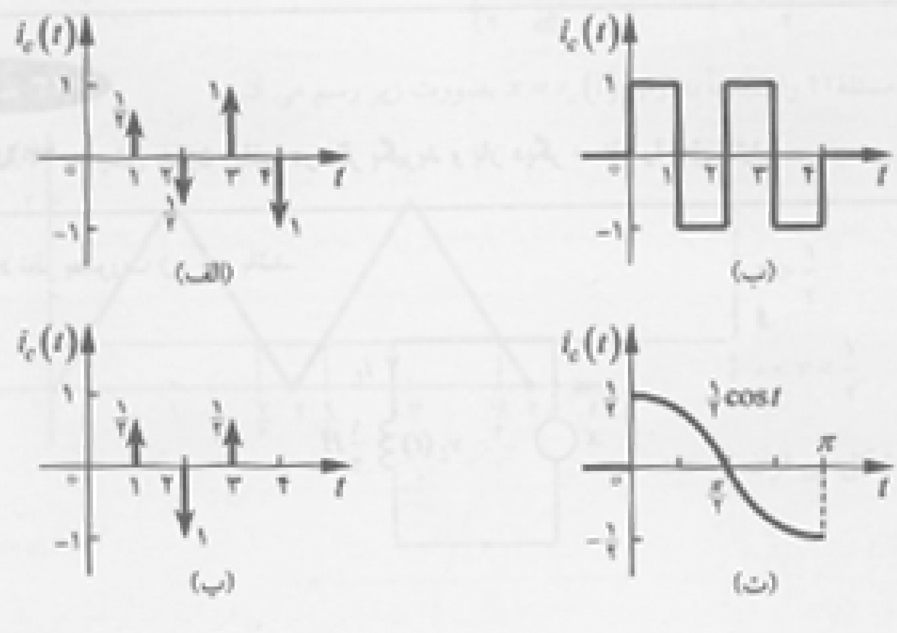
الف) اگر منبع از نوع ولتاژ باشد، شکل موج جریان گذرنده از خازن را رسم کنید.

ب) اگر منبع از نوع جریان باشد، شکل موج ولتاژ دو سر خازن را رسم کنید.



شکل مسئلهٔ ۲۲

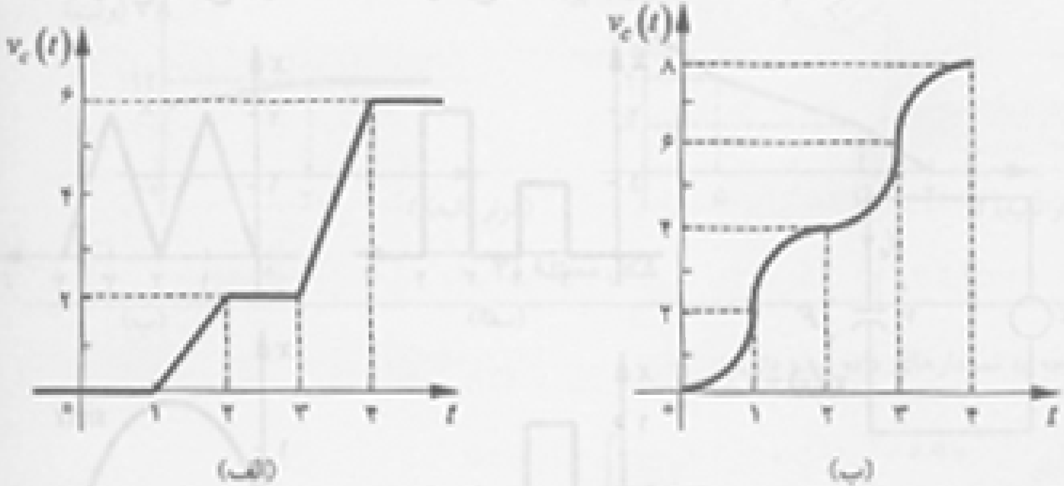
حل: الف- اگر منبع از نوع ولتاژ باشد ، آنگاه ولتاژ خازن برابر ولتاژ منبع خواهد شد و بنا بر رابطه $i_c(t)=c\frac{dv_c(t)}{dt}$ ، شکل موج جریان گذرنده از خازن با استفاده از رابطه $i_c(t)=\frac{1}{2}\frac{dx}{dt}$ بدست می آید.

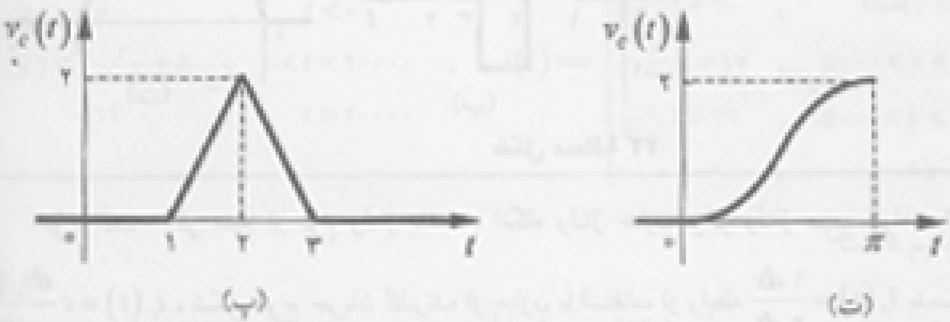


ب ـ اگر منبع از نوع جریان باشد، آنگاه جریان خازن برابر جریان منبع خواهد شد و بنا بر رابطه

$$v_C(t) = v_C(t_0) + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(t)\,dt$$

شکل موج ولتاژ دو سر خازن برابر $v_c(t) = 2\int_{t_0}^{t} x(t)\,dt$ ،یعنی اینکه دو برابر انتگرال شکل موج x خواهدشد.

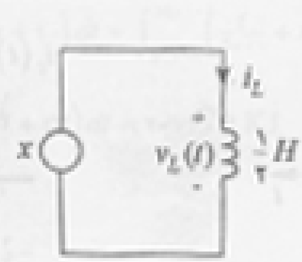




مسئله ۲۳

در مسئلهٔ ۲۲ به جای خازن سلف در نظر بگیرید و بار دیگر مسئله را حل کنید.

حل: مدار مورد نظر بصورت زیر می باشد.



الف ـ اگر منبع از نوع ولتاژ باشد، آنگاه ولتاژ سلف برابر ولتاژ منبع خواهد شد و بنابر رابطه

$$i_L(t)=i_L(t_0)+\frac{1}{L}\int_{t_0}^{t}v_L(t)dt$$

شکل موج جریان گذرنده ازسلف برابر $i_L(t)=2\int_{t_0}^{t}x(t)dt$ ، یعنی اینکه دو برابرانتگرال شکل موج x خواهد شد که در قسمت (ب) مسئله ۲۲ رسم شده اند.

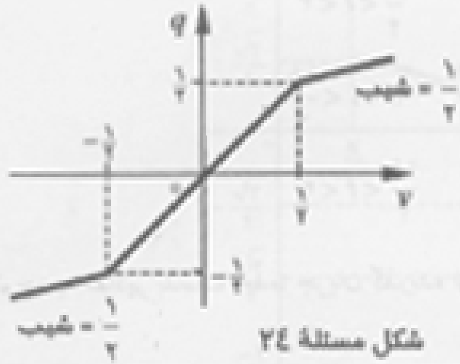
ب ـ اگرمنبع از نوع جریان باشد،آنگاه جریان سلف برابرجریان منبع خواهد شدوبنابر رابطه $v_L(t)=L\frac{di_L(t)}{dt}$

شکل موج جریان گذرنده از سلف برابر $i_L(t)=\frac{1}{2}\frac{dx}{dt}$ می شود که در قسمت (الف) مسئله ۲۲ رسم شده اند.

مسئله ۲۴

مشخصه $q-v$ خازنی داده شده است.

اگر ولتاژ خازن شکل موج (ب) یا (ت) مسئله ۲۲ باشد، جریان گذرنده از خازن را رسم کنید.

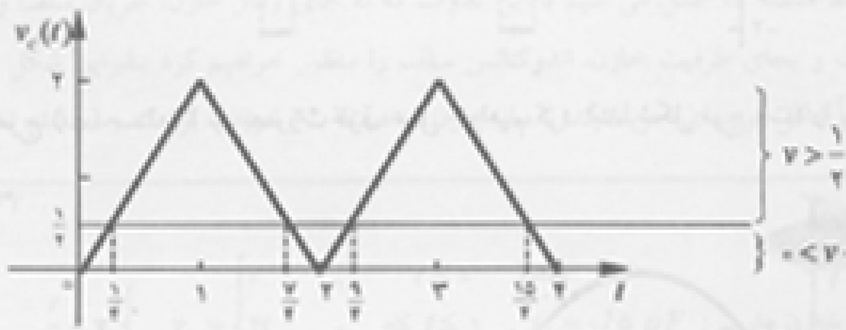


شکل مسئلة ۲٤

حل: با توجه به مشخصهٔ $q-v$ داده شده داریم :

$$c=\begin{cases}1 & , \quad 0<v<\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & , \quad v>\frac{1}{2}\end{cases}\quad\rightarrow\quad i_c(t)=c\frac{dv(t)}{dt}=\begin{cases}\frac{dv_c(t)}{dt} & , \quad 0<v<\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\frac{dv_c(t)}{dt} & , \quad v>\frac{1}{2}\end{cases}$$

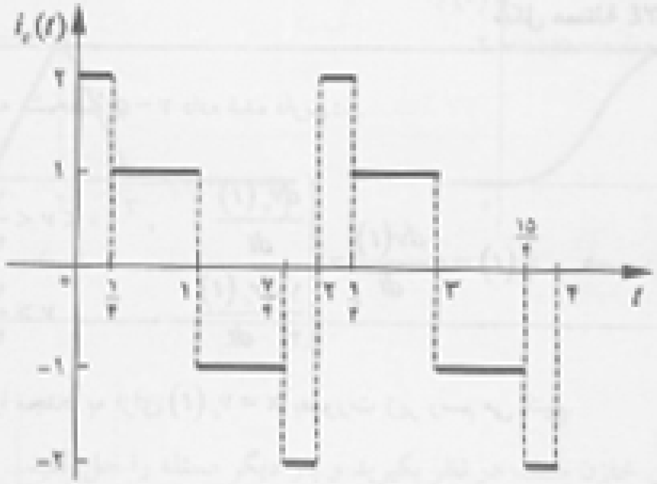
شکل(ب) مسئلة۲۲ را مجدداً به ازای $x=v_c(t)$ بصورت زیر رسم می کنیم.



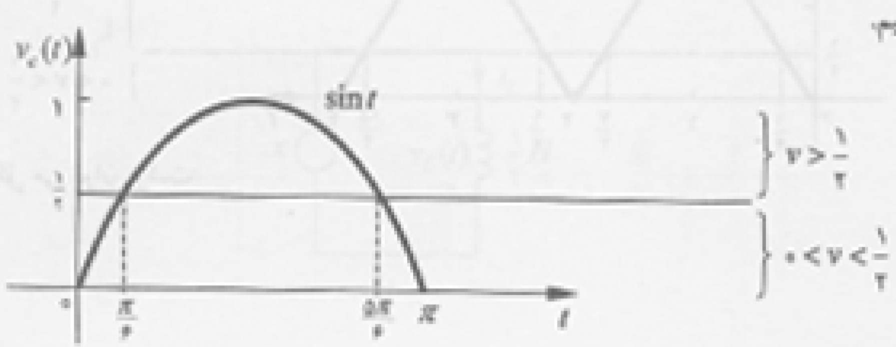
با توجه به شکل می توان نوشت:

$$i_c(t)=\begin{cases}\dfrac{dv_c(t)}{dt}=2 & , \quad 0<t<\dfrac{1}{4}\\[2mm] \dfrac{1}{2}\dfrac{dv_c(t)}{dt}=1 & , \quad \dfrac{1}{4}<t<1\\[2mm] \dfrac{1}{2}\dfrac{dv_c(t)}{dt}=-1 & , \quad 1<t<\dfrac{7}{4}\\[2mm] \dfrac{dv_c(t)}{dt}=-2 & , \quad \dfrac{7}{4}<t<2\\[2mm] \dfrac{dv_c(t)}{dt}=2 & , \quad 2<t<\dfrac{9}{4}\\[2mm] \dfrac{1}{2}\dfrac{dv_c(t)}{dt}=1 & , \quad \dfrac{9}{4}<t<3\\[2mm] \dfrac{1}{2}\dfrac{dv_c(t)}{dt}=-1 & , \quad 3<t<\dfrac{15}{4}\\[2mm] \dfrac{dv_c(t)}{dt}=-2 & , \quad \dfrac{15}{4}<t<4\end{cases}$$

با توجه به مقادیر بدست آمده، جریان گذرنده از خازن در این حالت در شکل زیر رسم شده است.

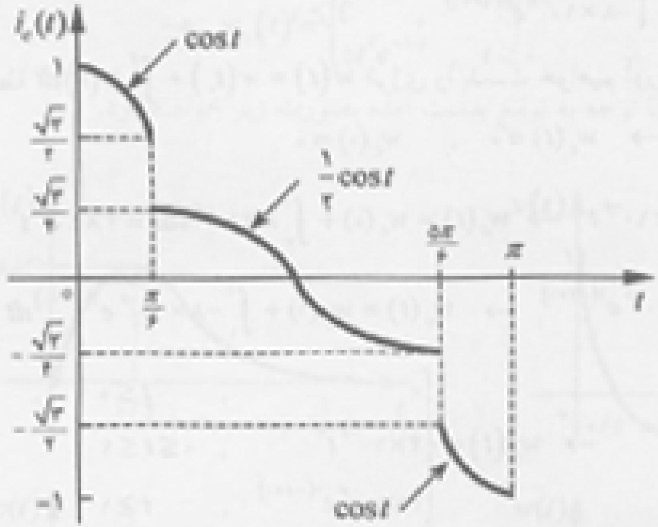


برای شکل موج (ت) مسئله۲۲ نیز بصورت فوق عمل خواهیم کرد. ابتدا شکل موج (ت) را به همراه خط $v=\frac{1}{2}$ رسم می کنیم.



$$i_c(t)=\begin{cases}\dfrac{dv_c(t)}{dt}=\cos t & , \quad 0<t<\dfrac{\pi}{6}\\ \dfrac{1}{2}\dfrac{dv_c(t)}{dt}=\dfrac{1}{2}\cos t & , \quad \dfrac{\pi}{6}<t<\dfrac{5\pi}{6}\\ \dfrac{1}{2}\dfrac{dv_c(t)}{dt}=\cos t & , \quad \dfrac{5\pi}{6}<t<\pi\end{cases}$$

بنابراین در این حالت شکل موج جریان گذرنده از خازن بصورت زیر خواهد بود.



مسئله ۲۵

- **فرض کنید شکل مسئلهٔ ۲۴ مشخصه $\phi - i$ یک سلف است.**
- **اگر جریان گذرنده از سلف بصورت شکل موجهای شکل (ب)یا (ت) مسئلهٔ ۲۲ باشد ولتاژ دو سر سلف را رسم کنید.**

حل: همانند مسئلهٔ ۲۴ عمل می کنیم با این تفاوت که به جای ولتاژ خازن، جریان سلف و بجای جریان خازن، ولتاژ سلف و بجای ظرفیت خازن، اندوکتانس سلف را منظور خواهیم کرد بنابراین شکل موجهای ولتاژ دو سر سلف دقیقاً شکل موجهای جریان گذرنده از خازن در مسئلهٔ ۲۴ خواهند بود که رسم شده اند.

مسئله ۲۶

- برای یک خازن داریم : $C=0/5\,\mu F$ ، $v_c=\begin{cases}0 & , \quad t\le 0\\ 4t & , \quad 0\le t\le 1\\ 4e^{-2(t-1)} & , \quad t\ge 1\end{cases}$
- $i_c(t)$ و $p_c(t)$ و $w_c(t)$ را بدست آورید.
- در چه زمانهایی انرژی در خازن ذخیره و در چه زمانهایی انرژی از خازن گرفته می شود.

حل: با توجه به ولتاژ داده شده داریم:

$$i_c(t)=c\frac{dv_c(t)}{dt}=۰/۵\times۱۰^{-۶}\frac{dv_c(t)}{dt}=\begin{cases}۰ & , \quad t\le ۰\\ ۲\times۱۰^{-۶} & , \quad ۰\le t\le ۱\\ -۲\times۱۰^{-۶}e^{-t+۱} & , \quad t\ge ۱\end{cases}$$

$$p_c(t)=v_c(t)i_c(t)=\begin{cases}۰ & , \quad t\le ۰\\ ۸\times۱۰^{-۶}t & , \quad ۰\le t\le ۱\\ -۸\times۱۰^{-۶}e^{۲(-t+۱)} & , \quad t\ge ۱\end{cases}$$

در ادامه با استفاده از رابطهٔ $w(t)=w(t_0)+\int_{t_0}^{t}p(t)dt$ انرژی را بدست خواهیم آورد.

$$t\le ۰ \ , \quad p_c(t)=۰ \quad \rightarrow \quad w_c(t)=۰ \quad , \quad w_c(۰)=۰$$

$$۰\le t\le ۱ \ , \ p_c(t)=۸\times۱۰^{-۶}t \quad \rightarrow w_c(t)=w_c(۰)+\int_۰^t ۸\times۱۰^{-۶}t\,dt=۴\times۱۰^{-۶}t^۲ \ , \ w_c(۱)=۴\times۱۰^{-۶}$$

$$t\ge ۱ \ , \quad p_c(t)=-۸\times۱۰^{-۶}e^{۲(-t+۱)} \quad \rightarrow \quad w_c(t)=w_c(۱)+\int_۱^t -۸\times۱۰^{-۶}e^{۲(-t+۱)}dt=۴\times۱۰^{-۶}e^{۲(-t+۱)}$$

$$\rightarrow \quad w_c(t)=\begin{cases}۰ & , \quad t\le ۰\\ ۴\times۱۰^{-۶}t^۲ & , \quad ۰\le t\le ۱\\ ۴\times۱۰^{-۶}e^{۲(-t+۱)} & , \quad t\ge ۱\end{cases}$$

در زمانهایی که $p_c(t)>۰$ باشد یعنی در $۰\le t\le ۱$ خازن انرژی ذخیره کرده و در زمانهایی که $p_c(t)<۰$ باشد یعنی به ازای $t\ge ۱$ از خازن انرژی گرفته می شود.

مسئله ۲۷

- برای یک سلف داریم: $L=۱۰۰\ mH$ ، $i(t)=\begin{cases}۰ & , \quad t\le ۰\\ ۱۰te^{-۵t} & , \quad t\ge ۰\end{cases}$
- منحنی های i ، v ، p و w را رسم کنید.
- در چه زمانهایی انرژی در سلف ذخیره شده و در چه زمانهایی انرژی از آن گرفته می شود.
- حداکثر انرژی ذخیره شده در سلف چیست.

حل: ابتدا v ، p و w را بدست می آوریم.

$$v_L(t)=L\frac{di_c(t)}{dt} \quad \rightarrow \quad v(t)=۰/۱\frac{di(t)}{dt}=\begin{cases}۰ & , \quad t\le ۰\\ e^{-۵t}-۵te^{-۵t} & , \quad t\ge ۰\end{cases}$$

$$p(t)=v(t)i(t)=\begin{cases}(۰)(۰) & , \ t\le ۰\\ \left(۱۰te^{-۵t}\right)\left(e^{-۵t}-۵te^{-۵t}\right) & , \ t\ge ۰\end{cases}=\begin{cases}۰ & , \ t\le ۰\\ ۱۰te^{-۱۰t}-۵۰t^۲e^{-۱۰t} & , \ t\ge ۰\end{cases}$$

برای محاسبهٔ انرژی از رابطهٔ $w(t) = w(t_۰) + \int_{t_۰}^{t} p(t)\,dt$ استفاده خواهیم کرد.

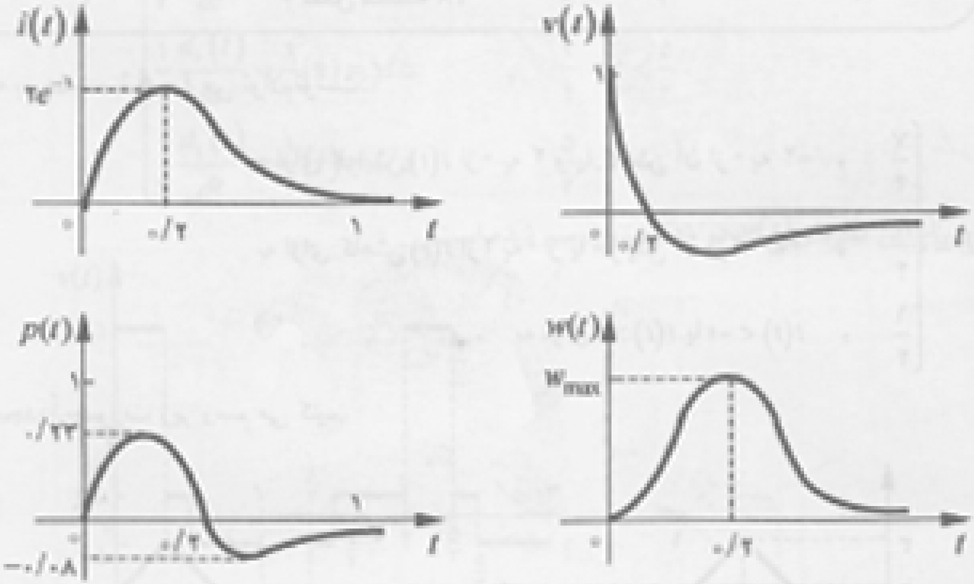
$$t \le ۰ \;,\quad p(t) = ۰ \;\rightarrow\; w(t) = ۰ \;,\quad w(۰) = ۰$$

$$t \ge ۰ \;,\quad p(t) = ۱۰te^{-۱۰t} - ۵۰t^۲e^{-۱۰t} \;\rightarrow\; w(t) = w(۰) + \int_۰^t \left(۱۰te^{-۱۰t} - ۵۰t^۲e^{-۱۰t}\right) dt$$

$$= -te^{-۱۰t} - \frac{۱}{۱۰}e^{-۱۰t}\Big|_۰^t + ۵t^۲e^{-۱۰t} + te^{-۱۰t} + \frac{۱}{۱۰}e^{-۱۰t}\Big|_۰^t = ۵t^۲e^{-۱۰t} \quad t \ge ۰$$

$$\rightarrow\; w_c(t) = \begin{cases} ۰ & , \; t \le ۰ \\ ۵t^۲e^{-۱۰t} & , \; t \ge ۰ \end{cases}$$

نمودارهای i ، v ، p و w با توجه به توابع بدست آمده بصورت زیر خواهند بود.



از آنجا که $p(t)$ مشتق $w(t)$ است و در ۰/۲ برابر صفرند. لذا حداکثر مقدار $w(t)$ به ازای $t = ۰/۲$ بدست خواهند آمد.

$$\frac{dw}{dt} = ۰ \;\rightarrow\; ۱۰te^{-۱۰t}(۱ - ۵t) = ۰ \;\rightarrow\; t = ۰/۲$$

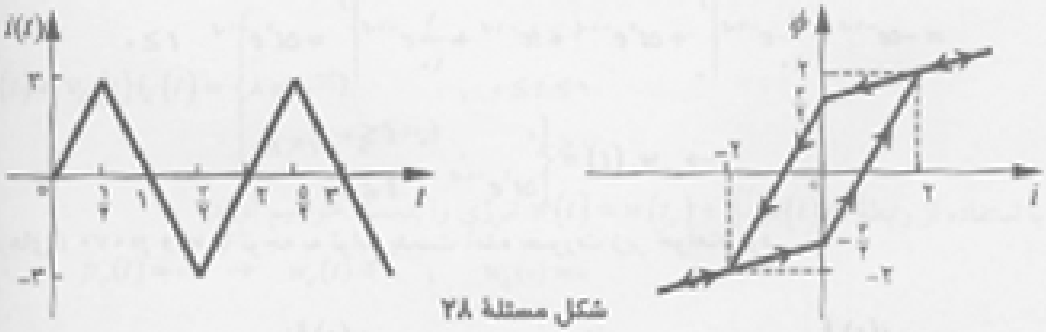
$$w_{max} = w(۰/۲) = ۵t^۲e^{-۱۰t}\Big|_{t=۰/۲} = ۰/۰۲۷ \text{ J}$$

می دانیم که اگر $p(t) > ۰$ باشد انرژی در خازن ذخیره شده و اگر $p(t) < ۰$ باشد انرژی از خازن گرفته میشود. بنابراین به ازای $۰ < t < ۰/۲$ انرژی در خازن ذخیره شده و به ازای $t > ۰/۲$ انرژی از خازن گرفته می شود.

مسئله ۲۸

مشخصهٔ $\phi - i$ و جریان $i(t)$ گذرندهٔ از یک سلف داده شده اند.

$v(t)$ را تعیین و ترسیم کنید.

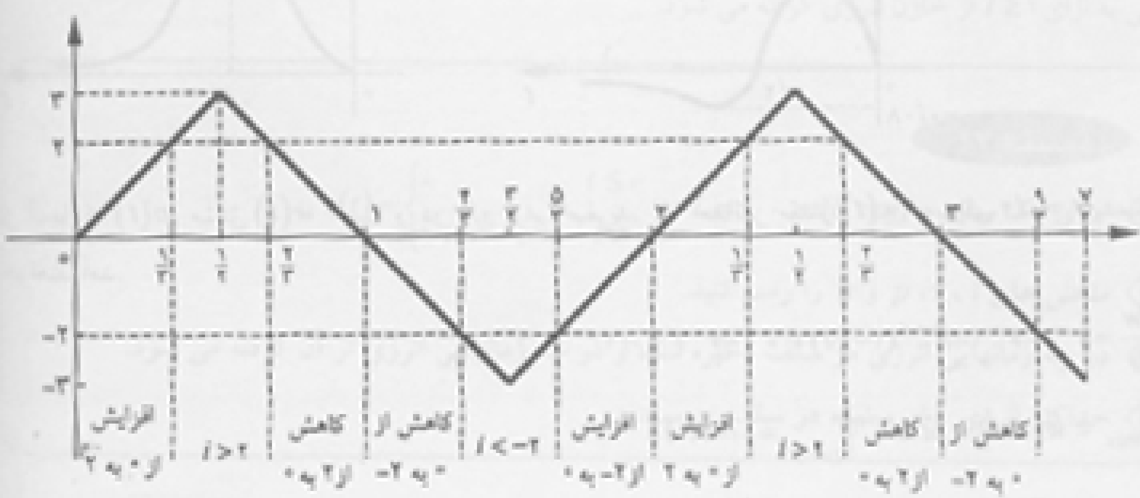


شکل مسئلهٔ ۲۸

حل: با توجه به مشخصهٔ $\phi - i$ می توان نوشت:

$$L=\begin{cases} \frac{7}{4} \quad , & \text{به ازای افزایش } i(t) \text{ از ۰ به ۲ و یا کاهش آن از ۰ به ۲-} \\ \frac{1}{4} \quad , & \text{به ازای کاهش } i(t) \text{ از ۲ به ۰ و یا افزایش آن از ۲- به ۰} \\ \frac{1}{4} \quad , & \text{به ازای } i(t)>2 \text{ یا } i(t)<-2 \end{cases}$$

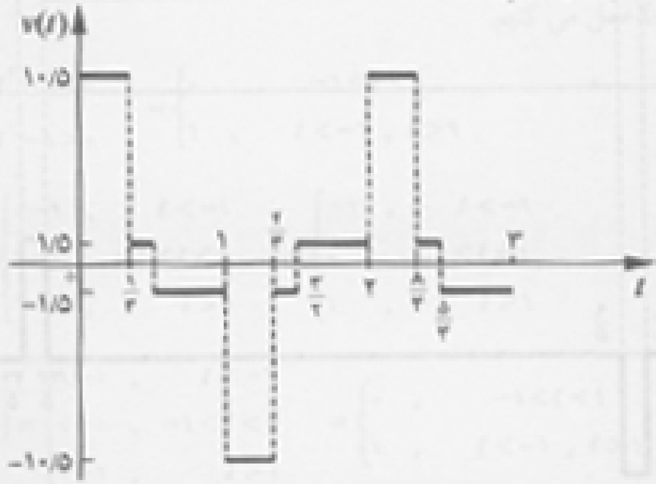
مشخصهٔ $\phi - i$ را مجدداً بصورت زیر رسم می کنیم.



بنابراین با استفاده از رابطهٔ $v_L(t)=L\frac{di_L(t)}{dt}$ ، ولتاژ دو سر سلف بصورت زیر حاصل خواهد شد.

$$v(t)=\begin{cases}\frac{۷}{۴}\frac{d_i(t)}{dt}=\frac{۷}{۴}(۶)=۱۰/۵ & , \quad ۰<t<\frac{۱}{۳}\\ \frac{۱}{۴}\frac{d_i(t)}{dt}=\frac{۱}{۴}(۶)=۱/۵ & , \quad \frac{۱}{۳}<t<\frac{۱}{۲}\\ \frac{۱}{۴}\frac{d_i(t)}{dt}=\frac{۱}{۴}(-۶)=-۱/۵ & , \quad \frac{۱}{۲}<t<\frac{۲}{۳}\\ \frac{۱}{۴}\frac{d_i(t)}{dt}=\frac{۱}{۴}(-۶)=-۱/۵ & , \quad \frac{۲}{۳}<t<۱\\ \frac{۷}{۴}\frac{d_i(t)}{dt}=\frac{۷}{۴}(-۶)=-۱۰/۵ & , \quad ۱<t<\frac{۴}{۳}\\ \frac{۱}{۴}\frac{d_i(t)}{dt}=\frac{۱}{۴}(-۶)=-۱/۵ & , \quad \frac{۴}{۳}<t<\frac{۳}{۲}\\ \frac{۱}{۴}\frac{d_i(t)}{dt}=\frac{۱}{۴}(۶)=۱/۵ & , \quad \frac{۳}{۲}<t<\frac{۵}{۳}\\ \frac{۱}{۴}\frac{d_i(t)}{dt}=\frac{۱}{۴}(۶)=۱/۵ & , \quad \frac{۵}{۳}<t<۲\end{cases}$$

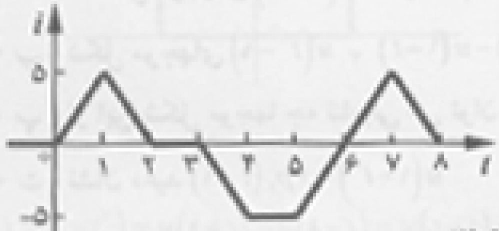
بنابراین نمودار $v(t)$ در شکل زیر رسم شده است.

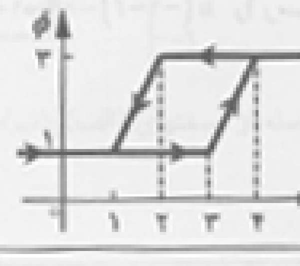


مسئله ۳۹

مشخصهٔ یک سلف و جریان آن نشان داده شده اند.

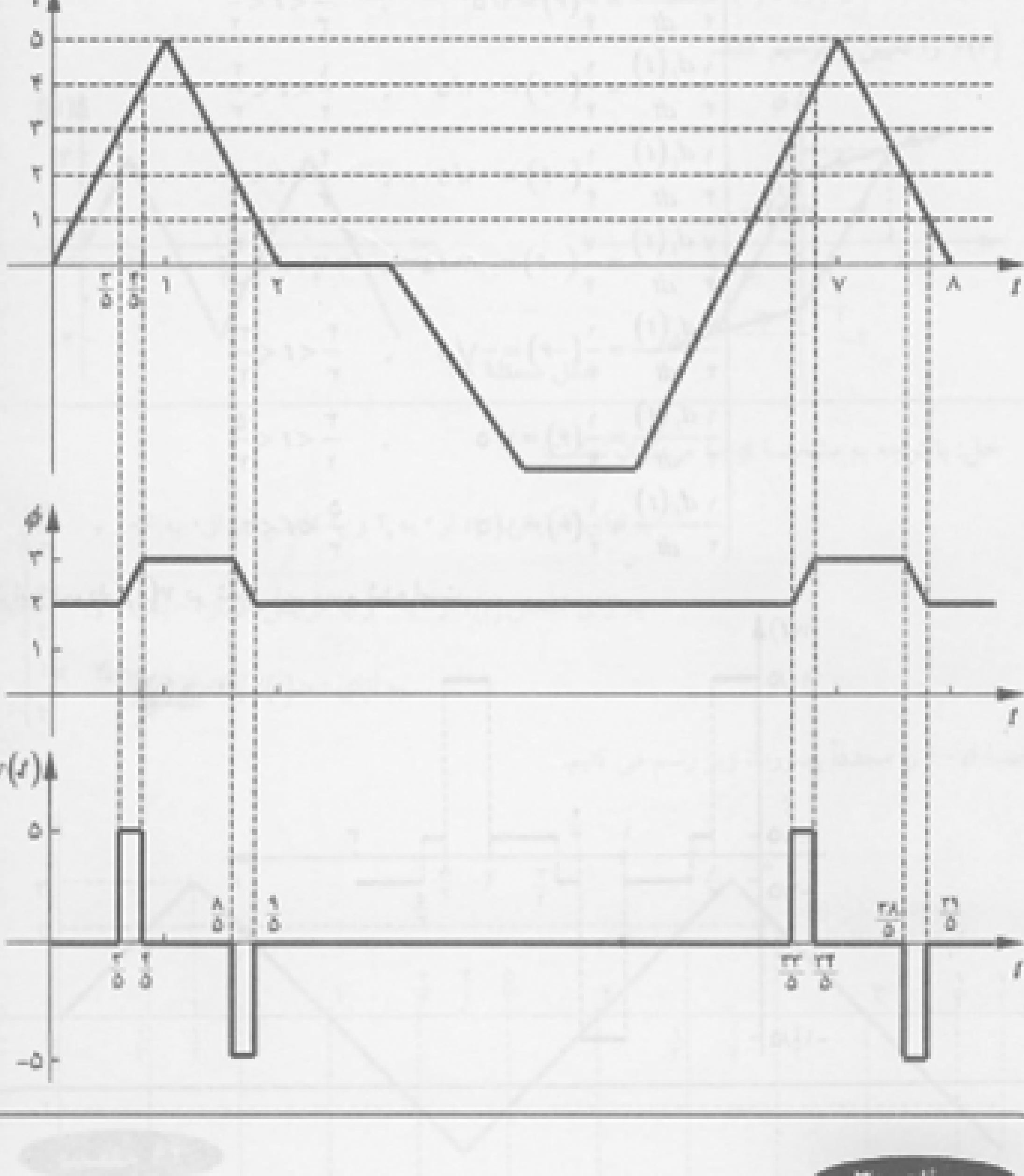
ولتاژ دو سر سلف را رسم کنید.





شکل مسئلهٔ ۳۹

حل: با توجه به نمودارهای داده شده ابتدا ϕ را رسم می کنیم،سپس با استفاده از رابطهٔ $v(t)=\frac{d\phi}{dt}$، ولتاژ دو سر سلف را رسم خواهیم کرد.



مسئله ۳۰

الف- شکل موجهای $u(۱-t^۲)$ ، $u(t+۱)-u(t-۱)$ و $u(۱-t)-u(-۱-t)$ را رسم کنید.

ب- شکل موجهای $u(t^۲-۱)$ ، $u(۱+t)-u(۱-t)$ و $u(-۱-t)-u(-۱+t)$ را رسم کنید.

پ- از این شکل موجها چه نتایجی می توان استخراج کرد.

ت- نشان دهید $u(۱-t^۲)=۲p_۱(t+۱)$

ث- نشان دهید. $\delta(۱-t^۲)=\frac{۱}{۲}\delta(t+۱)+\frac{۱}{۲}\delta(t-۱)$

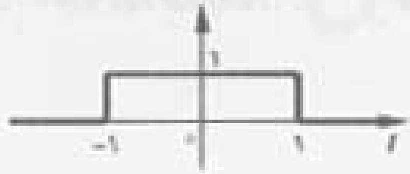
حل: الف ـ با توجه به تعریف تابع پله واحد می توان نوشت.

$$u(1-t^2)=\begin{cases}0 , & 1-t^2<0\\ 1 , & 1-t^2>0\end{cases}=\begin{cases}0 , & t<-1 , t>1\\ 1 , & -1<t<1\end{cases}$$

$$u(t+1)-u(t-1)=\begin{cases}0-0 , & t<-1\\ 1-0 , & -1<t<1\\ 1-1 , & t>1\end{cases}=\begin{cases}0 , & t<-1 , t>1\\ 1 , & -1<t<1\end{cases}$$

$$u(1-t)-u(-1-t)=\begin{cases}1-1 , & t<-1\\ 1-0 , & -1<t<1\\ 0-0 , & t>1\end{cases}=\begin{cases}0 , & t<-1 , t>1\\ 1 , & -1<t<1\end{cases}$$

بنابراین شکل موجهای هر سه یکسان بوده و بصورت زیر می باشد.



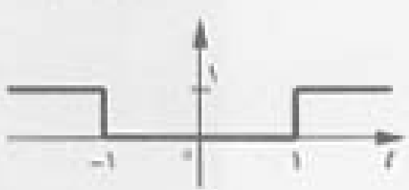
ب ـ همانند قسمت (الف) عمل می کنیم.

$$u(t^2-1)=\begin{cases}0 , & t^2-1<0\\ 1 , & t^2-1>0\end{cases}=\begin{cases}0 , & -1<t<1\\ 1 , & t<-1 , t>1\end{cases}$$

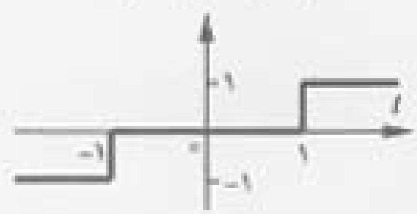
$$u(1+t)-u(1-t)=\begin{cases}0-1 , & t<-1\\ 1-1 , & -1<t<1\\ 1-0 , & t>1\end{cases}=\begin{cases}-1 , & t<-1\\ 0 , & -1<t<1\\ 1 , & t>1\end{cases}$$

$$u(-1-t)+u(-1+t)=\begin{cases}1+0 , & t<-1\\ 0+0 , & -1<t<1\\ 0+1 , & t>1\end{cases}=\begin{cases}0 , & -1<t<1\\ 1 , & t<-1 , t>1\end{cases}$$

$u(t^2-1)$, $u(-1-t)+u(-1+t)$



$u(1+t)-u(1-t)$



پ ـ نتایج حاصله از قسمتهای (الف)و(ب)عبارتند از:

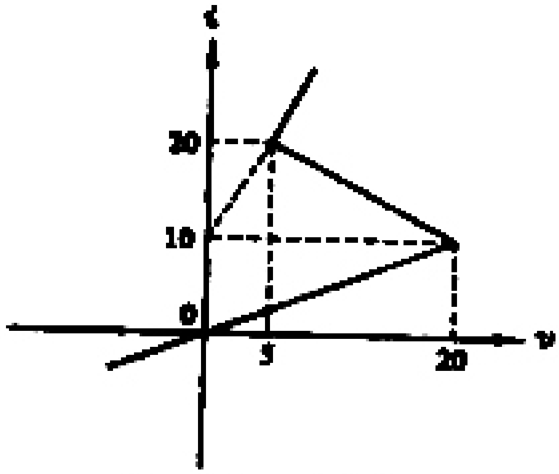
الف) $u(1-t^2)=u(t+1)-u(t-1)=u(1-t)-u(-1-t)$

مدارهای ساده

۱- مشخصهٔ vi یک مقاومت غیرخطی در شکل (مسالهٔ ۳-۱) داده شده است. این مشخصه را به صورت زیر می‌نویسیم :

$$v=a_0+a_1 i+b_1|i-I_1|+b_2|i-I_2|$$

ضرایب a_0 , a_1 , b_1 , b_2 , I_1 و I_2 را معین کنید.



شکل (مسالهٔ ۳-۱)

حل :

معادلهٔ v برحسب i بصورت زیر خواهد بود:

$$v=\begin{cases} 2i & i<10 \\ -\dfrac{3}{2}i+35 & 10<i<20 \\ \dfrac{1}{2}i-5 & i>20 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} I_1=10 \\ I_2=20 \end{vmatrix}$$

: $i<10$

$$2i=a_0+a_1 i-b_1(i-10)-b_2(i-20)$$

$$2i=a_0+10b_1+20b_2+(a_1-b_1-b_2)i \quad \Rightarrow \begin{cases} a_1-b_1-b_2=2 \\ a_0+10b_1+20b_2=0 \qquad (I) \end{cases}$$

$$-\frac{3}{2}i+35=a_0+a_1 i+b_1(i-10)-b_2(i-20) \qquad ;10<i<20$$

$$-\frac{3}{2}i+35=a_0-10b_1+20b_2+(a_1+b_1-b_2)i \quad \Rightarrow \quad a_1+b_1-b_2=-\frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{2}i-5=a_0+a_1 i+b_1(i-10)+b_2(i-20) \qquad ;i>20$$

$$\frac{1}{2}i-5=a_0-10b_1-20b_2+(a_1+b_1+b_2)i \Rightarrow a_1+b_1+b_2=\frac{1}{2}$$

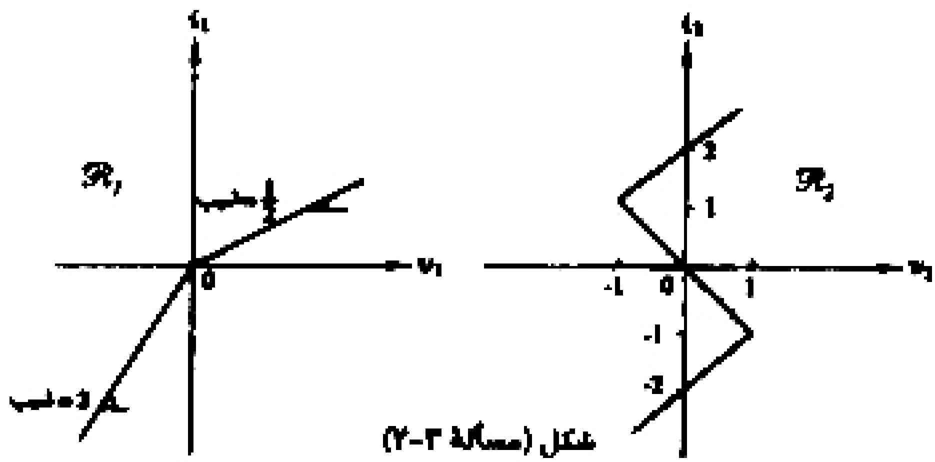
باحل دستگاه سه معادلهٔ سه مجهولی زیر مقادیر a_1 ، b_1 و b_2 بدست می‌آیند:

$$\begin{cases} a_1-b_1-b_2=2 \\ a_1+b_1-b_2=-\frac{3}{2} \\ a_1+b_1+b_2=\frac{1}{2} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} a_1=\frac{5}{4} \\ b_1=-\frac{7}{4} \\ b_2=1 \end{array} \right.$$

با قرار دادن مقادیر فوق در رابطهٔ (I) ، مقدار a_0 بدست می‌آید:

$$a_0+10b_1+20b_2=a_0-\frac{70}{4}+20=0 \Rightarrow a_0=-\frac{5}{2}$$

۲- مشخصهٔ مقاومتهای غیرخطی $\mathcal{R}_1$ و $\mathcal{R}_2$ در شکل (مسالهٔ ۳-۲) داده شده‌اند. مشخصه‌های اتصال سری و اتصال موازی آنها را رسم کنید.

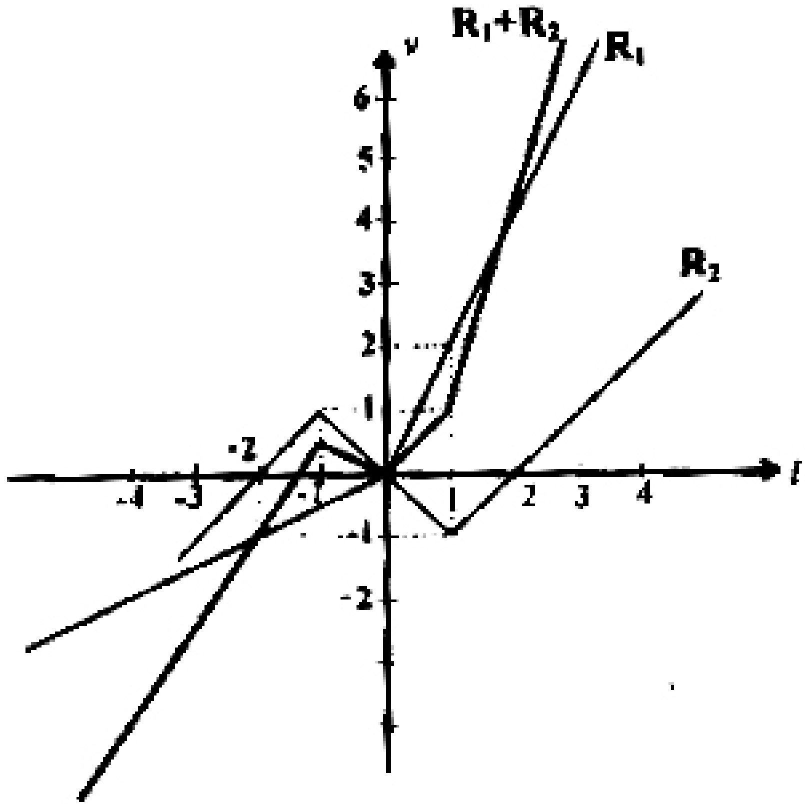


شکل (مسالهٔ ۳-۲)

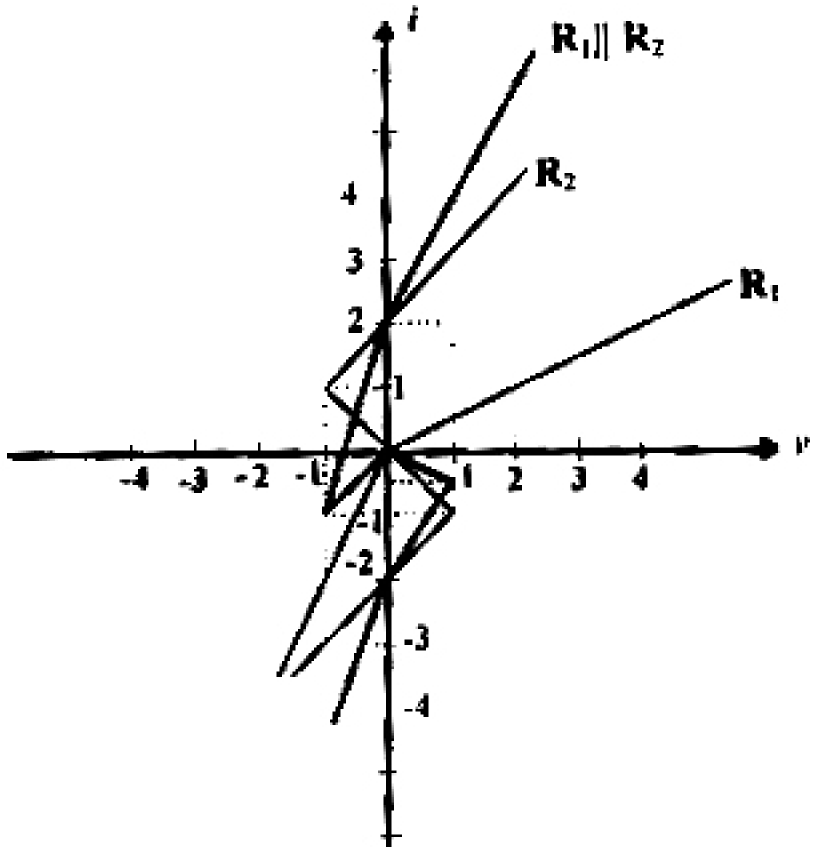
حل :

اتصال سری :

مشخصه‌های مقاومتهای $\mathcal{R}_1$ و $\mathcal{R}_2$ را در یک محور مختصات v بر حسب i بصورت زیر رسم می‌کنیم و مقادیر ولتاژ مقاومتها را به ازای هر i با هم جمع می‌کنیم تا مشخصه اتصال سری بدست آید:



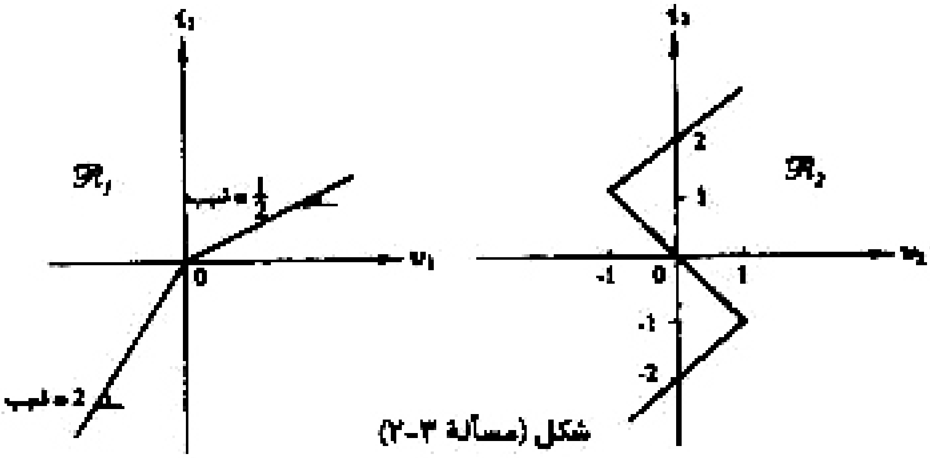
اتصال موازی : مشخصه‌های مقاومتهای R_1 و R_2 را در یک محور مختصات i بر حسب v بصورت زیر رسم می‌کنیم و مقادیر جریان های مقاومتها رابه ازای هر v با هم جمع می‌کنیم تامشخصه اتصال موازی بدست آید:



۳- مقاومتهای غیر خطی $\mathcal{R}_1$ و $\mathcal{R}_2$ با مشخصه‌های خود در صفحهٔ vi داده شده‌اند.

الف - مشخصهٔ اتصال سری آنها را رسم کنید. ب- مشخصهٔ اتصال موازی آنها را رسم کنید.

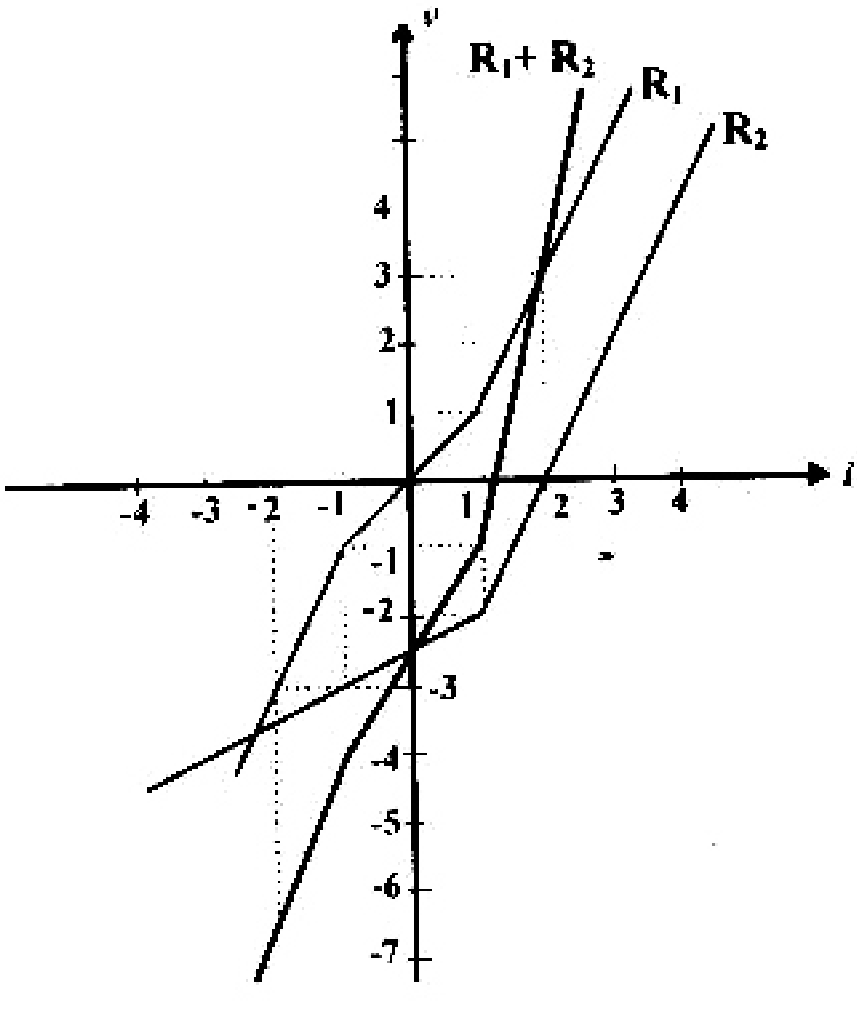
پ - اگر سرهای مقاومت $\mathcal{R}_1$ یا سرهای مقاومت $\mathcal{R}_2$ را بر عکس ببندیم، چه تغییری در قسمتهای (الف) یا (ب) حاصل می‌شود؟



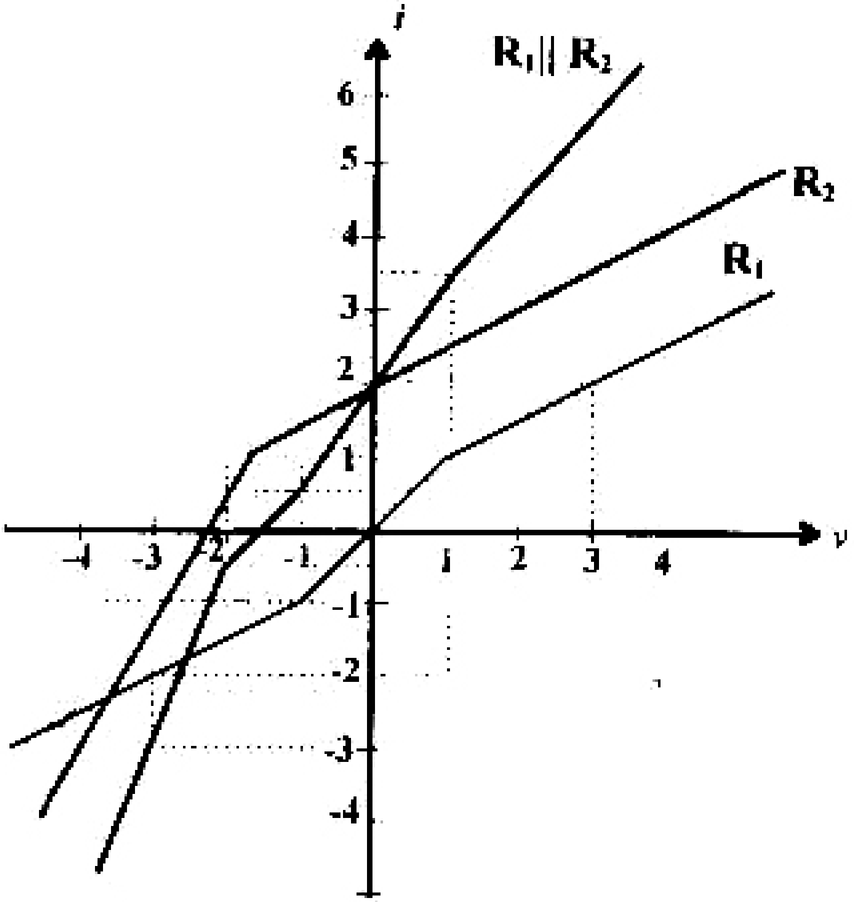
شکل (مسألهٔ ۳-۲)

حل:

(الف)

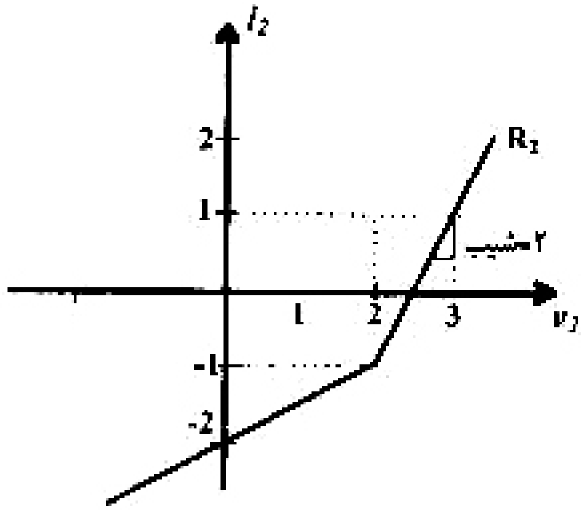


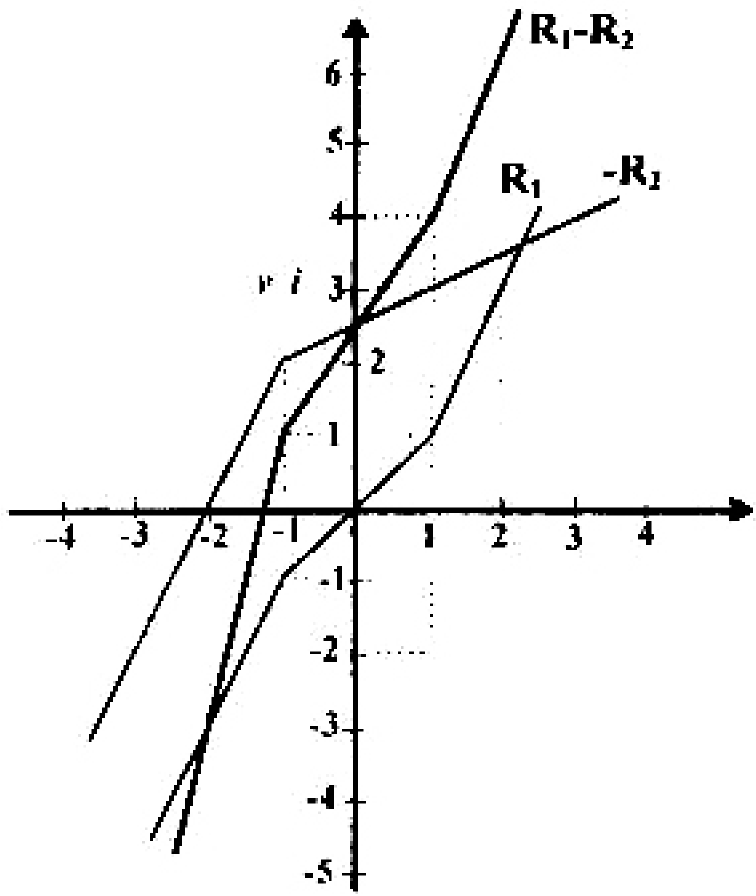
ب)

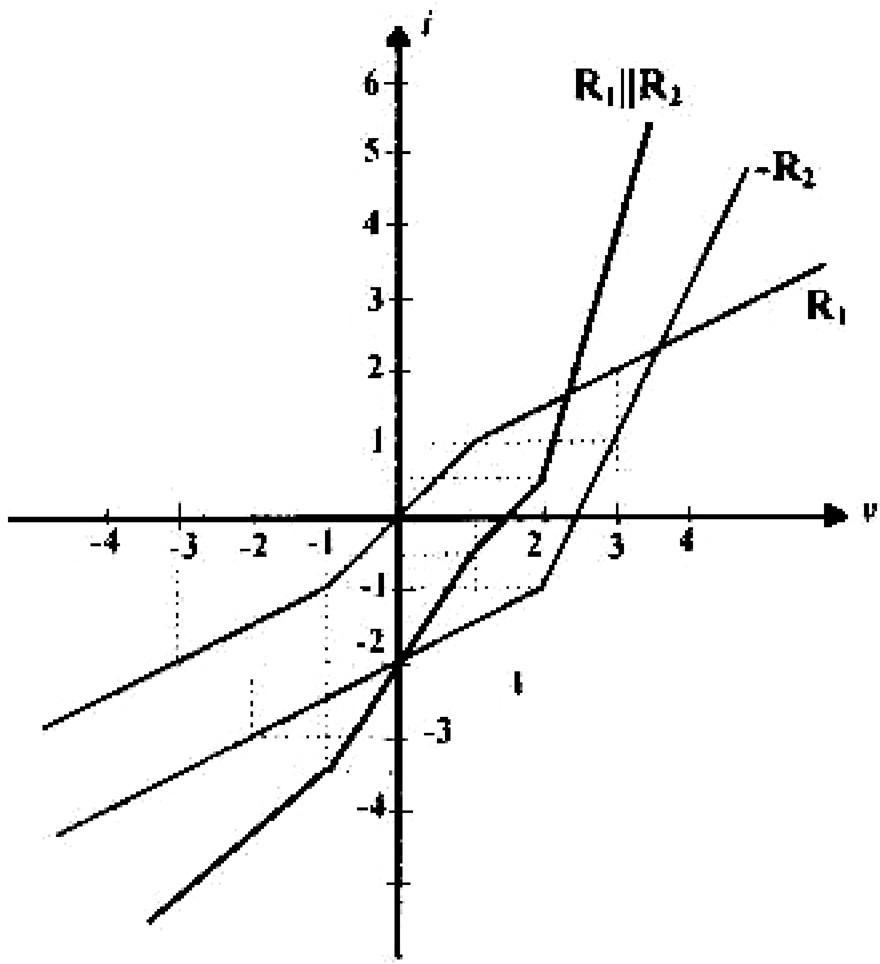


پ) چون مشخصهٔ مقاومت $\mathcal{R}_1$ نسبت به مبداء متقارن است، لذا $\mathcal{R}_1$ دوطرفه است و برعکس بستن آن تاثیری بر مشخصه‌های اتصال موازی و سری نخواهد گذاشت، ولی $\mathcal{R}_2$ چون دو طرفه نیست، به همین علت برعکس بستن آن سبب خواهد شد که مشخصه‌های اتصال سری یا موازی به شکل زیر تغییر کنند:

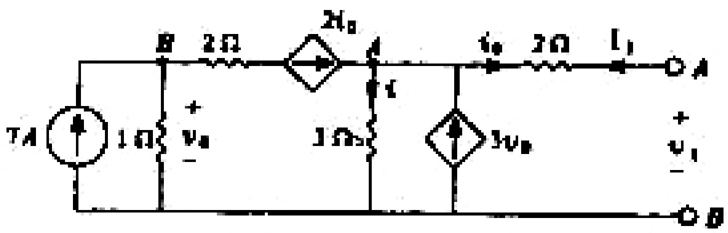
اگر $\mathcal{R}_2$ را در اتصال سری یا موازی برعکس ببندیم، کافیست که مشخصهٔ آن را نسبت به مبداء قرینه کنیم $\begin{bmatrix} i \to -i \\ v \to -v \end{bmatrix}$ و سپس مشخصه اتصال سری یا موازی را بدست می‌آوریم:




R1-R2
R1
-R2


R1||R2
-R2
R1

۴- مدار معادل تونن دیده شده در سرهای A و B مدار شکل (مسالهٔ ۳-۴) رابه دست آورید.



شکل (مسالهٔ ۳-۴)

حل :

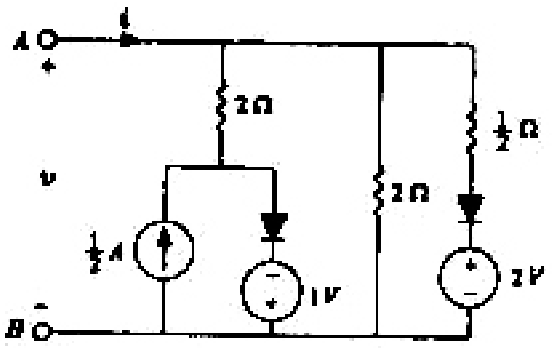
$$\begin{cases} KCL\ (A):\ 2i_0+3v_0-i-i_0=0 \quad \rightarrow \quad i=i_0+3v_0 \\ KCL\ (B):7=\dfrac{v_0}{1^{\Omega}}+2i_0 \quad \rightarrow \quad v_0=7-2i_0 \end{cases} \rightarrow \quad i=i_0+3(7-2i_0)=21-5i_0 \qquad (I)$$

$$KVL:\ -V_T+2I+3i=0 \quad \rightarrow \quad V_T=2I_T+3i \qquad (II)$$

با جایگذاری رابطهٔ (I) در (II) خواهیم داشت:

$$\begin{cases} V_T=2I_T+3(21-5i_0)=2I_T+63-15i_0 \\ i_0=-I_T \end{cases} \rightarrow V_T=17I_T+63 \quad \rightarrow \quad \begin{vmatrix} R_{Th}=17^{\Omega} \\ V_{Th}=63^{V} \end{vmatrix}$$

۵- مشخصهٔ یک قطبی شکل (مسالهٔ ۳-۵) رادر صفحهٔ vi رسم کنید(دیودها ایده‌آل هستند).



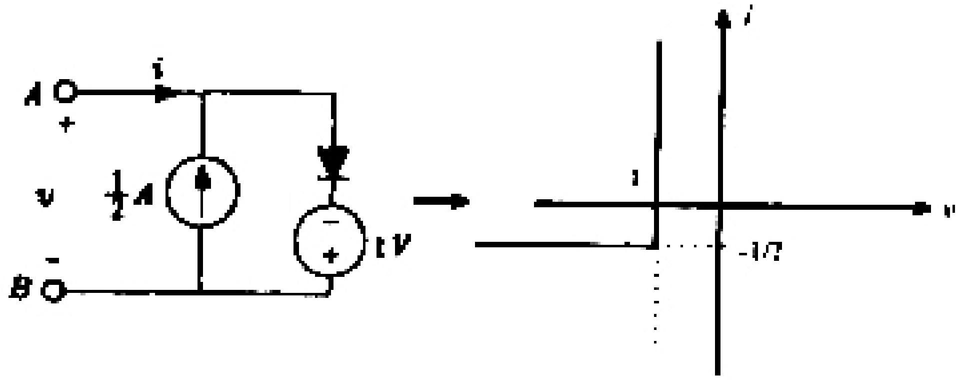
شکل (مسألهٔ ۳-۵)

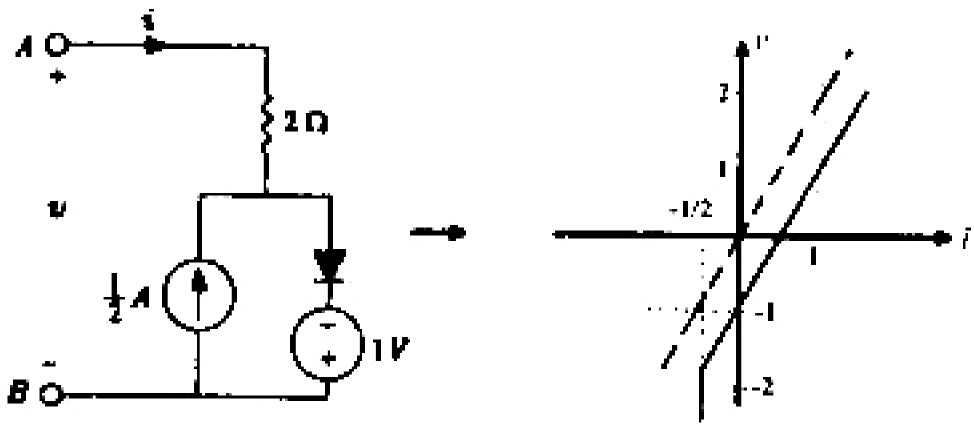
حل :

این یک قطبی از سه شاخهٔ موازی تشکیل یافته است. لذا ابتدا مشخصه تک تک شاخه‌ها را بدست می‌آوریم و سپس آنها را موازی می‌کنیم (به ازای هر ولتاژ، جریانهایشان را جمع می‌کنیم.):

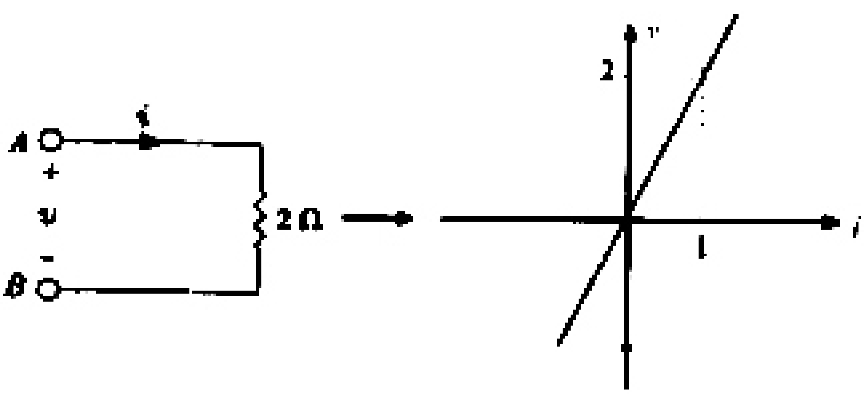
شاخهٔ 1: این شاخه خود از دو شاخهٔ موازی که با مقاومت 2 اهمی سری شده‌اند، تشکیل یافته است. لذا

ابتدا مشخصهٔ دو شاخهٔ موازی را بدست می‌آوریم :

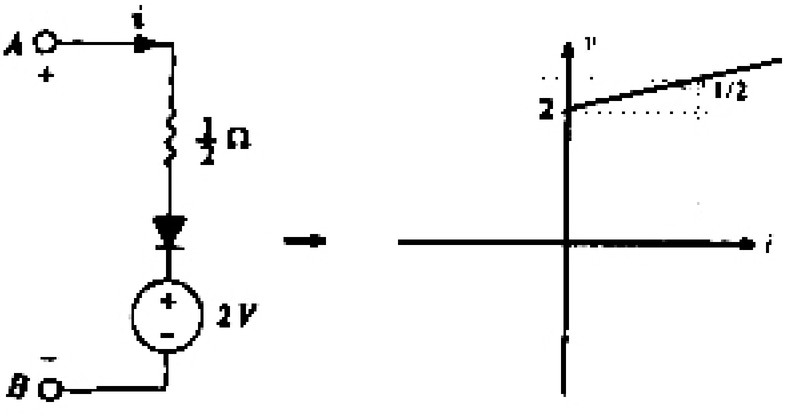




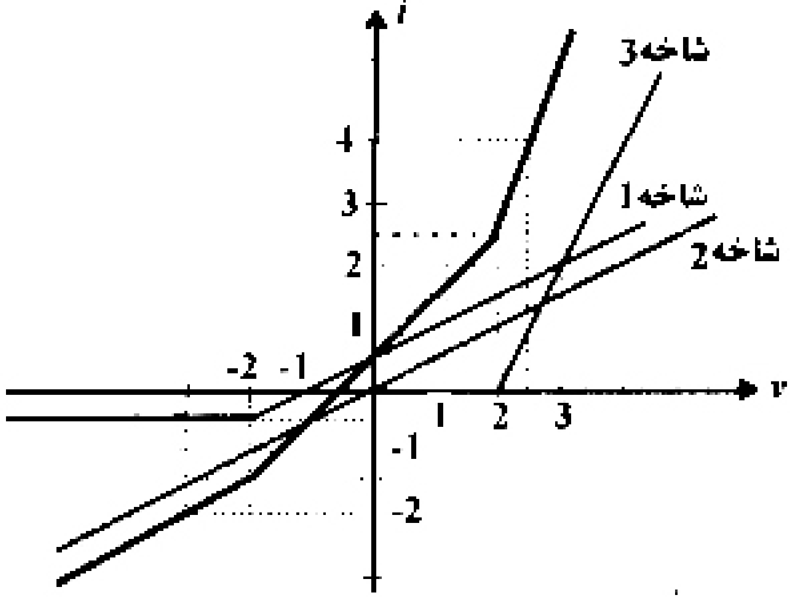
شاخهٔ 2:



شاخهٔ 3:



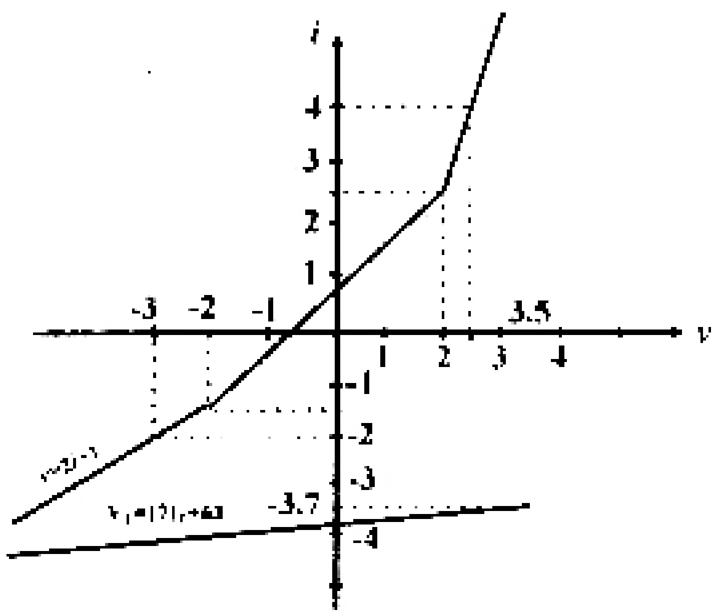
منحنی های بدست آمده برای هر سه شاخه را در یک محور مختصات i برحسب v رسم کرده و با هم جمع می‌کنیم



۶- دو مدار مسالهٔ ۴ و ۵ را در سرهای A و B نظیر به نظیر به هم وصل می‌کنیم. ولتاژ دو سر اتصال را تعیین کنید.

حل :

برای یافتن ولتاژ دوسر اتصال AB، مشخصه vi مدار شکل مسأله ۳-۴ راکه با توجه به معادل تونن یافته‌ایم، یک خط راست خواهد بود که آنرا با مشخصه vi مدار شکل مسألهٔ ۳-۵ قطع می‌دهیم:



$$\begin{cases} v = 2i+1 \\ v = 17i+63 \end{cases} \rightarrow \quad v = -\frac{109}{15} = -7.27^{V}$$

۷- در مدار غیرخطی شکل (مسالهٔ ۳-۷) مشخصهٔ انتقال خروجی v_{out} رابرحسب ورودی $i_s(t)$ تعیین کنید.

$$\begin{cases} \mathcal{R}_1: & i_1 = ۲v_1^۲ \\ \mathcal{R}_۲: & i_۲ = v_۲^۳ \end{cases}$$

شکل (مساله ۳-۷)

حل :

از قانون KCL داریم :

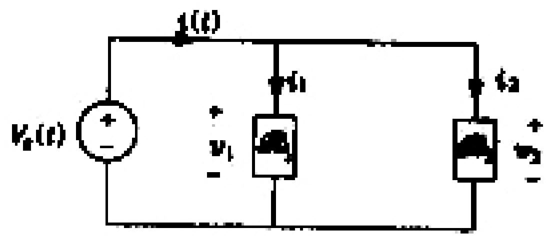
$$\begin{cases} i_s = i_1 + i_2 \\ i_2 = \dfrac{v_{out}}{2} \end{cases} \quad \Rightarrow i_s = 2v_1^2 + \frac{v_{out}}{2} \quad (I)$$

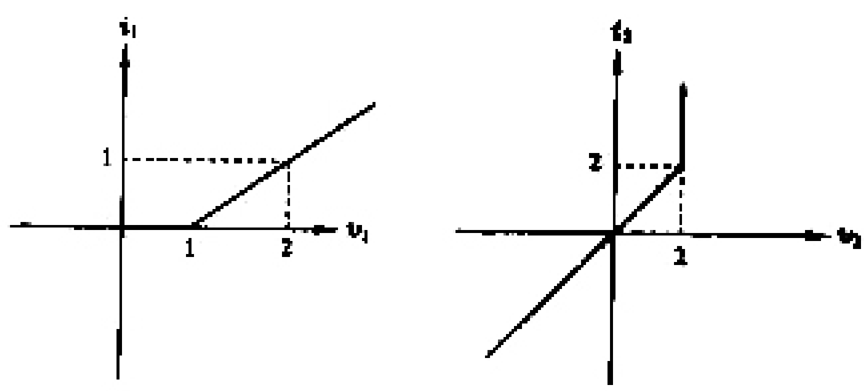
از قانون KVL داریم :

$$\begin{cases} v_1 = v_2 + v_{out} \\ i_2 = v_2^3 \rightarrow v_2 = \sqrt[3]{i_2} = \sqrt[3]{\dfrac{v_{out}}{2}} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad v_1 = \sqrt[3]{\frac{v_{out}}{2}} + v_{out} \qquad (II)$$

باجایگذاری رابطهٔ (II) در (I):
$$i_s = \left[\sqrt[3]{\frac{v_{out}}{2}} + v_{out} \right]^2 + \frac{v_{out}}{2}$$

۸- در مدار شکل (مسالهٔ ۳-۸) $\mathcal{R}_1$ و $\mathcal{R}_2$ دو مقاومت غیرخطی هستند که مشخصه‌های آنها داده شده است.





مشخصهٔ مقاومت $\mathcal{R}_1$ مشخصهٔ مقاومت $\mathcal{R}_2$

شکل (مسالهٔ ۳-۸)

الف – مشخصهٔ اتصال موازی این دو مقاومت غیرخطی را تعیین کنید.

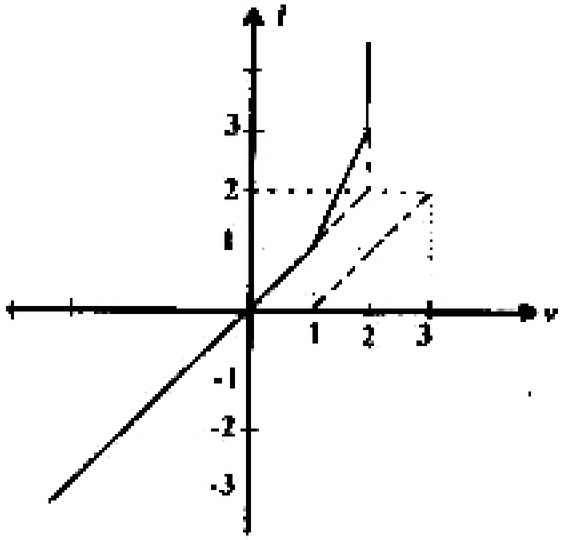
ب – به ازای $v(t)=1.5$ و $v_s(t)=\cos t$ جریان $i(t)$ را حساب کنید.

پ – آیا می‌توان به جای $v_s(t)$ منبعی به صورت $v_s(t)=4\cos t$ قرار داد؟ چرا؟

ت – دو مدار طرح کنید که مشخصه‌های آنها مانند مشخصه‌های $\mathcal{R}_1$ و $\mathcal{R}_2$ باشند.

حل :

الف)



ب) از روی مشخصه اتصال موازی این دو مقاومت خواهیم داشت:

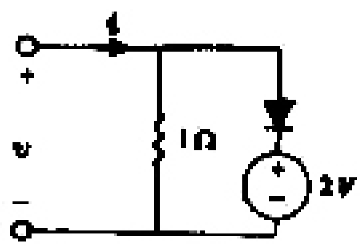
$$v_s(t)=1.5^V \Rightarrow i=2A$$

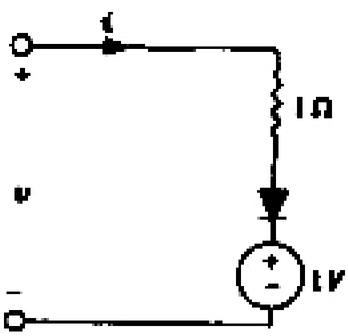
با توجه به اینکه : $i=v \qquad v\le 1$

و $-1\le \cos t\le 1$ بنابراین : $i(t)=v_s(t)=\cos t$

پ – خیر، زیرا وقتی $v_s(t)\ge 2^V$ می‌شود، مدار جریان بینهایت از منبع ولتاژ می‌کشد و باعث می‌شود که منبع ولتاژ بسوزد.

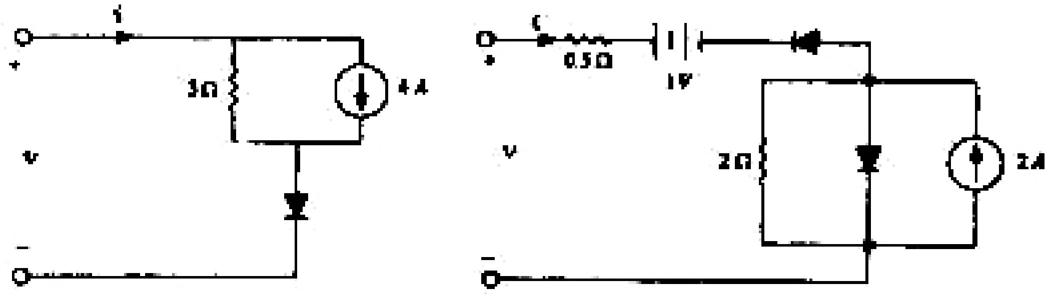
ت – مشخصهٔ $\mathcal{R}_1$:





۹ -الف - مشخصه‌های i-v مدارهای شکل (مسالهٔ ۳-۹) را رسم کنید.

ب - دوگان مدارهای نشان داده شده در شکل‌های (مسالهٔ ۳-۹ الف و ب) را تعیین کنید.

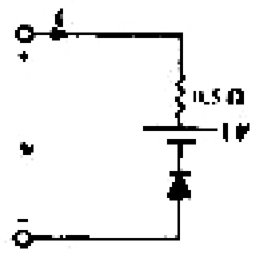


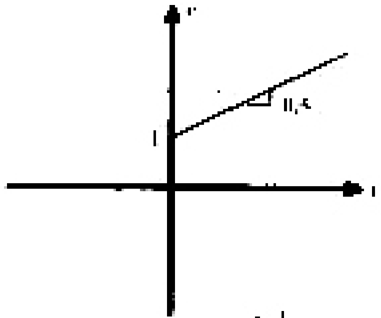
(ب) (الف)

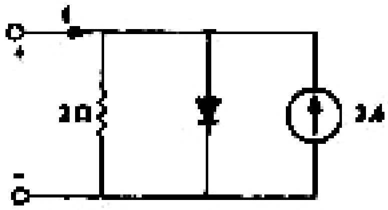
شکل (مسالهٔ ۳-۹)

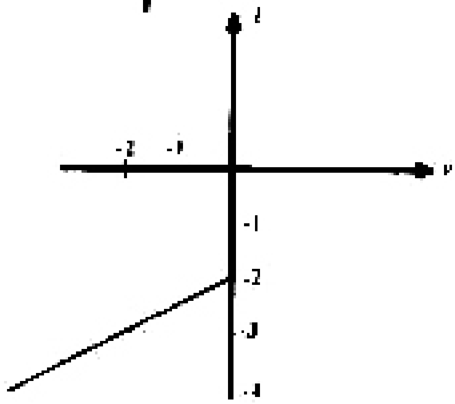
حل :

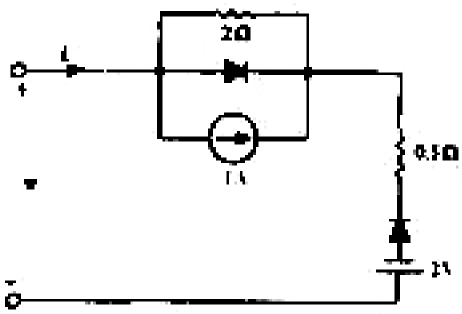
الف) این مدار را می‌توان متشکل از دو مدار زیر در نظر گرفت که بطور سری بهم متصل شده‌اند:



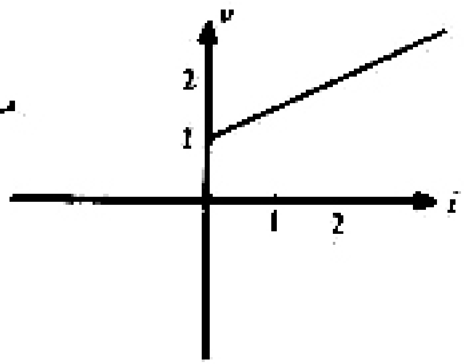




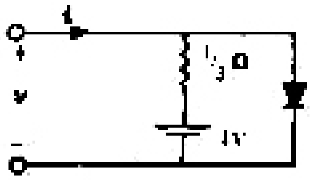


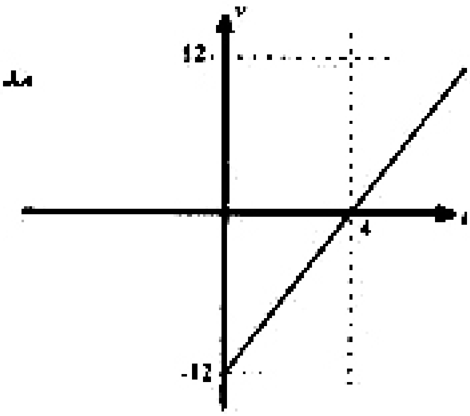


مدار دوگان .

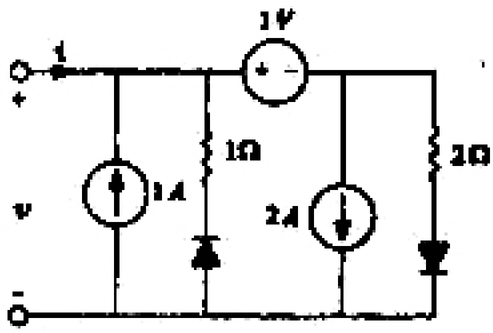


مدار دوگان :



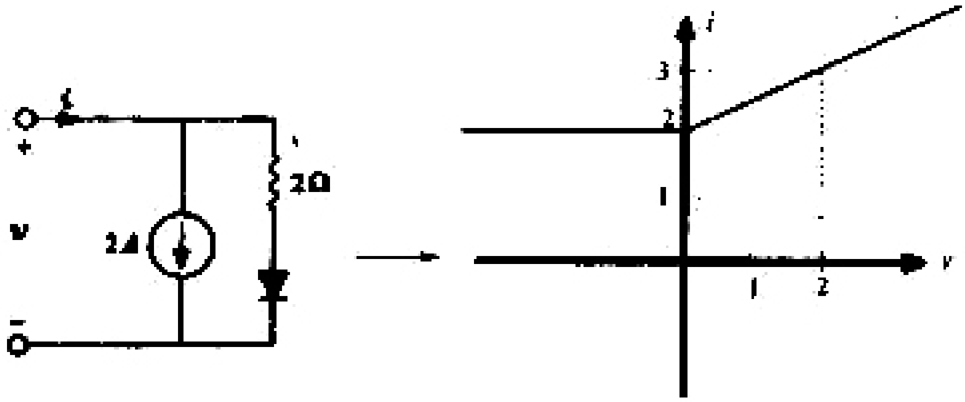


۱۰ - مشخصه‌های vi مدار شکل (مسألهٔ ۳-۱۰) را رسم کنید.

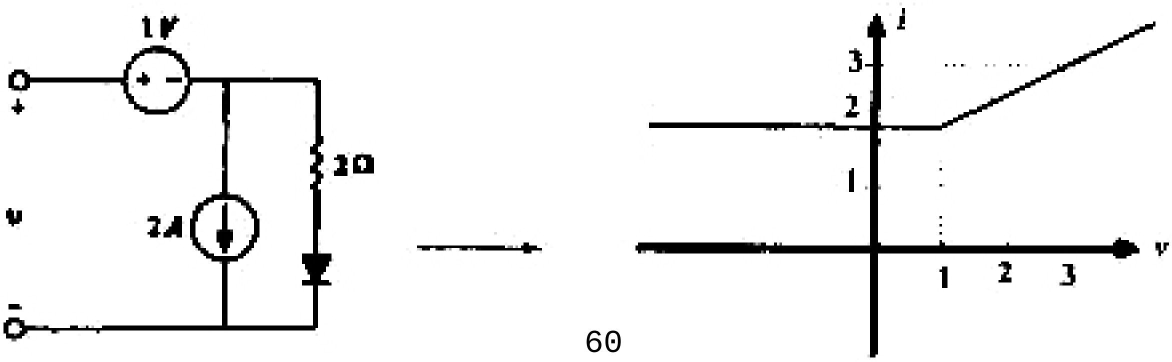


شکل (مسألهٔ ۳-۱۰)

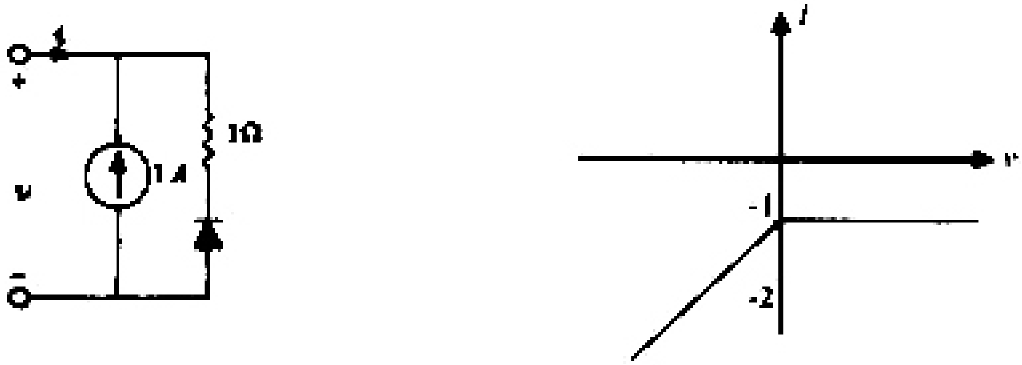
حل :



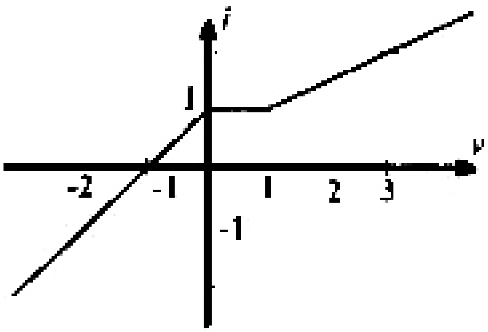
اتصال سری مشخصه فوق را با منبع ولتاژ یک ولتی بدست می‌آوریم :



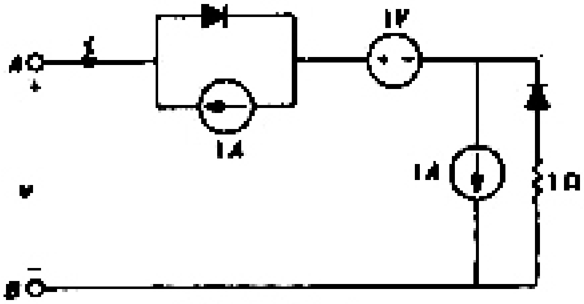
اتصال موازی مشخصه فوق را با مشخصه دو شاخهٔ موازی زیر بدست می‌آوریم :



مشخصه کلی بصورت زیر می‌باشد:



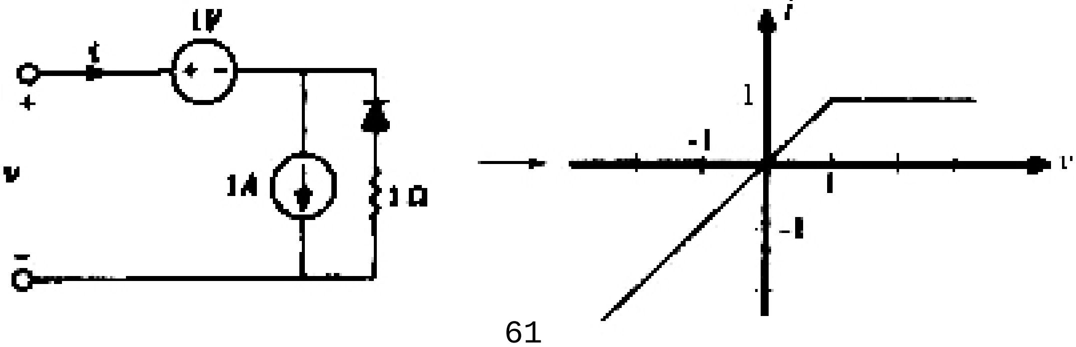
۱۱– مشخصهٔ vi دو سر مدار شکل (مسالهٔ ۳-۱۱) را رسم کنید و برای $v(t)=2\cos\frac{\pi t}{2}$ شکل موج $i(t)$ را برای یک پریود رسم کنید.



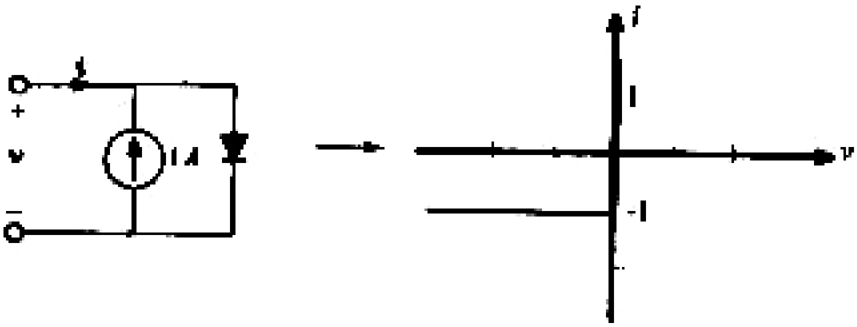
شکل (مسالهٔ ۳-۱۱)

حل :

مشخصهٔ vi مدار زیر، به شکل زیر می‌باشد:



از اتصال سری مشخصه فوق با مشخصهٔ مدار زیر، مشخصه کلی مدار بدست می‌آید:

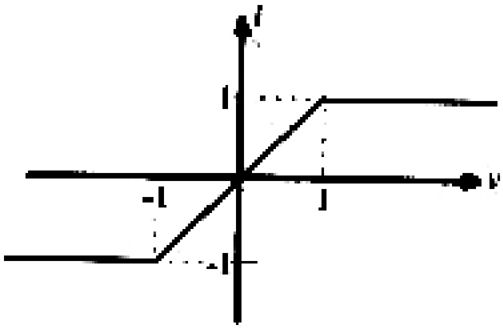


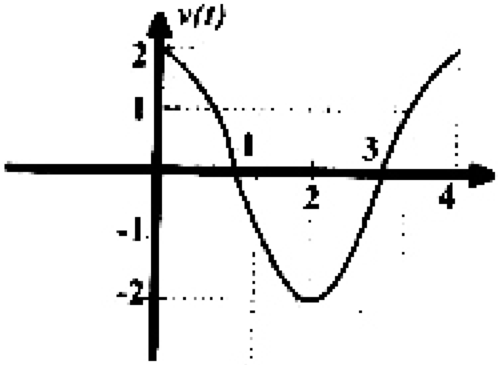
مشخصهٔ کلی مدار:

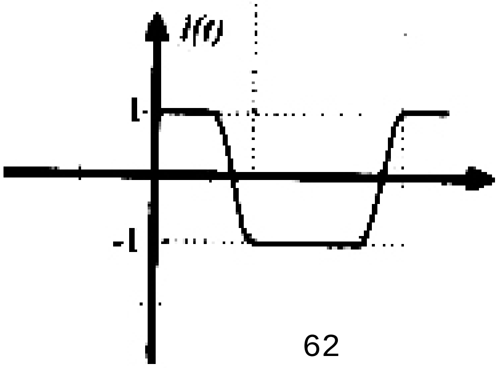
$$i(t)=\begin{cases}1 & v>1\\ v & -1<v<1\\ -1 & v<-1\end{cases}$$

$$v(t)=2\cos\frac{\pi t}{2}\Rightarrow$$

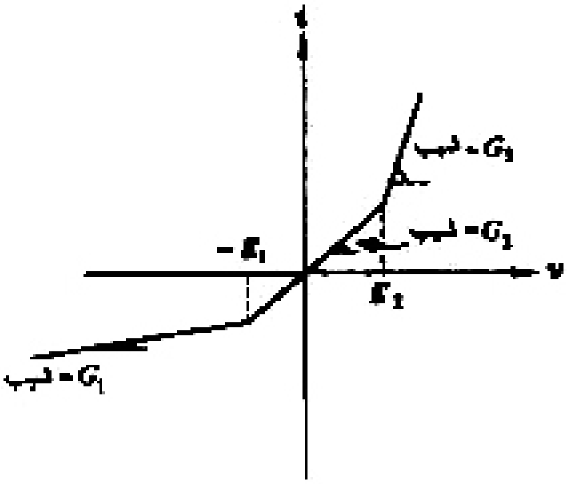
$$\omega=\frac{\pi}{2}\rightarrow T=\frac{2\pi}{\omega}=4$$







۱۲- مداری طراحی کنید که مشخصهٔ vi آن به صورت نشان داده شده در شکل (مسالهٔ ۳-۱۲) باشد.

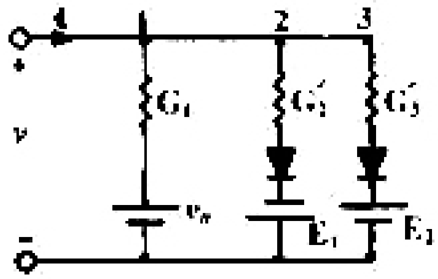


شکل (مسالهٔ ۳-۱۲)

حل:

شمای کلی مدار بصورت زیر خواهد بود:

همانطوریکه دیده می‌شود این مدار از سه شاخهٔ موازی تشکیل یافته است که مشخصه‌های هر یک از این شاخه‌ها بصورت زیر است:

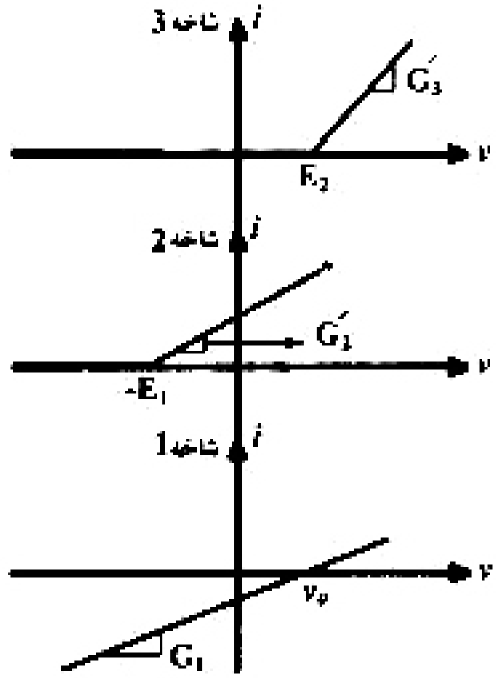


از جمع سه مشخصهٔ مقابل، مشخصهٔ داده شده در مسئله بدست می‌آید، بطوریکه:

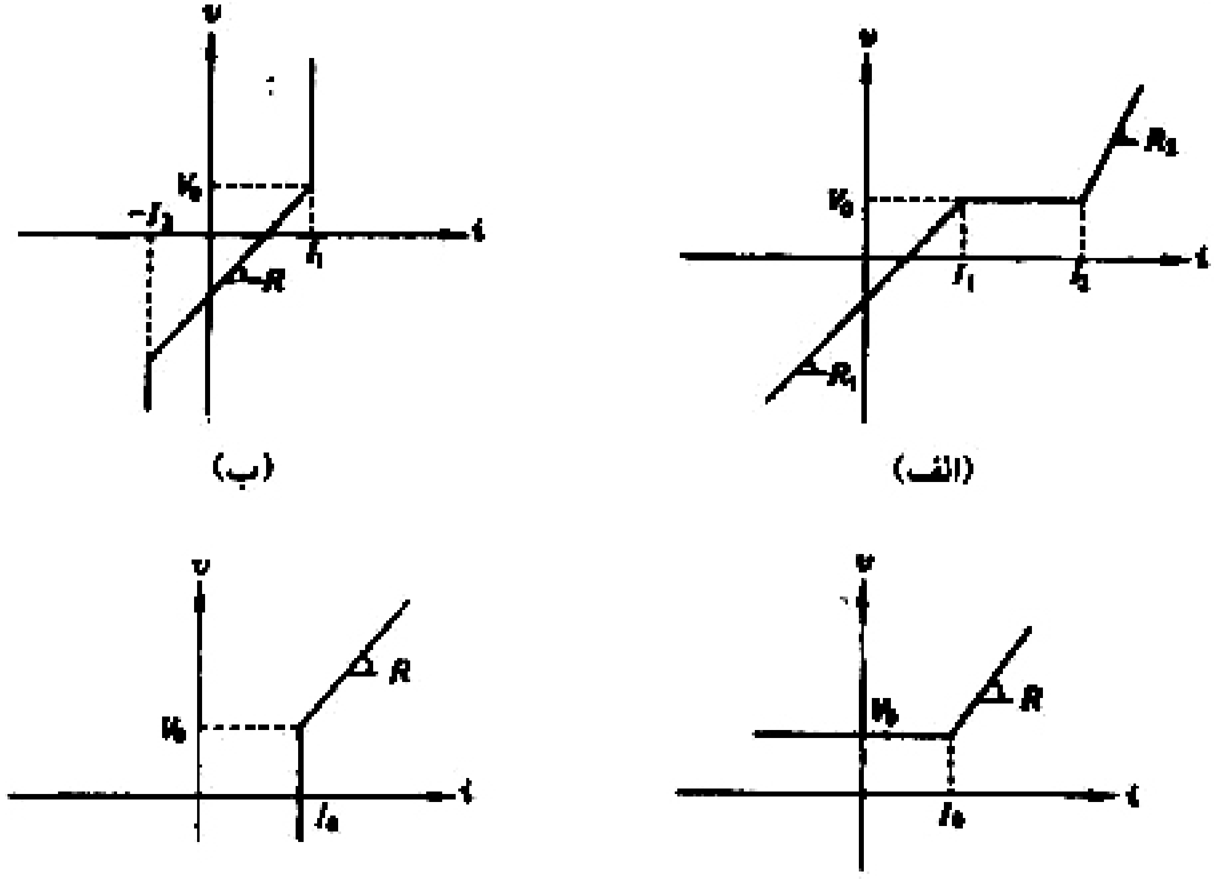
$$G_2 = G_1 + G_2'$$

و

$$G_3 = G_1 + G_2' + G_3'$$



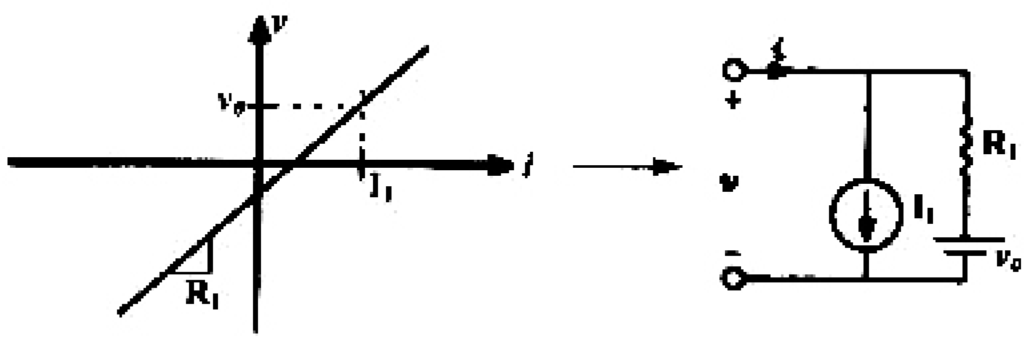
۱۳ـ مدارهایی طراحی کنید که مشخصه‌های iv آنها به صورت نشان داده شده در شکل (مسالهٔ ۳-۱۳) باشد.



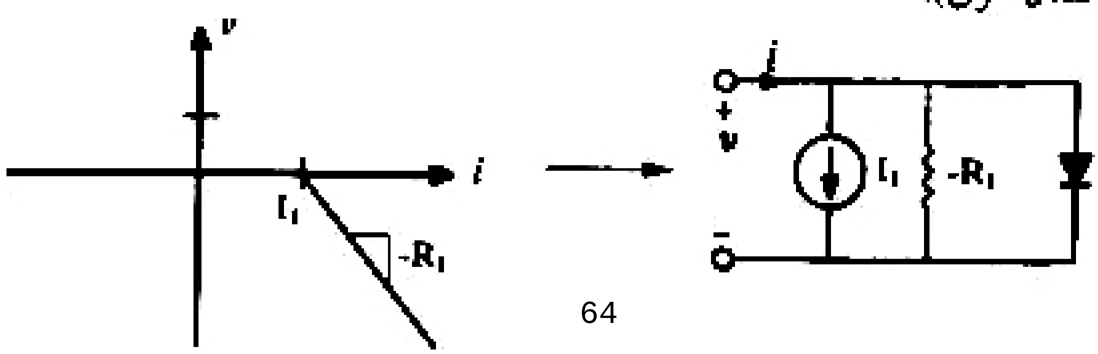
شکل (مسألهٔ ۳-۱۳)

حل:

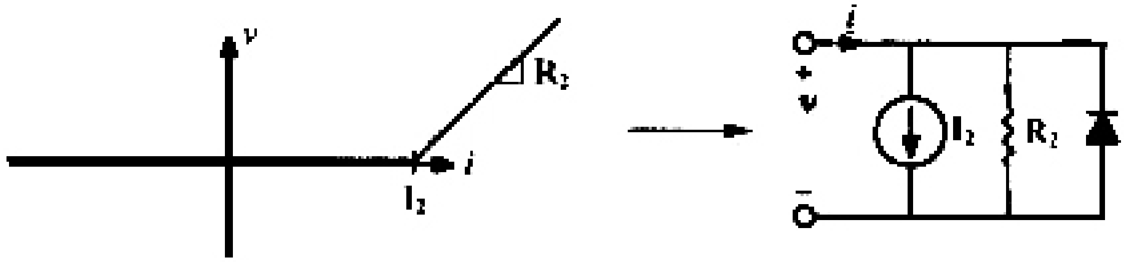
الف)



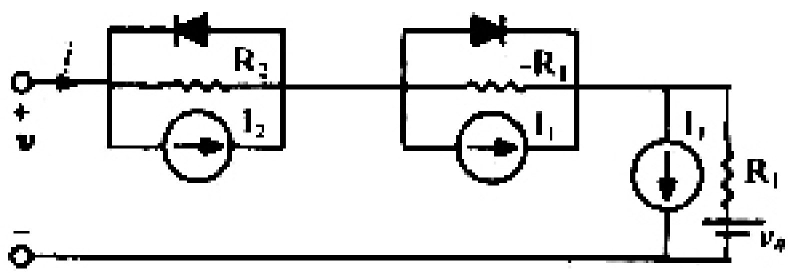
بعلاوهٔ (اتصال سری):



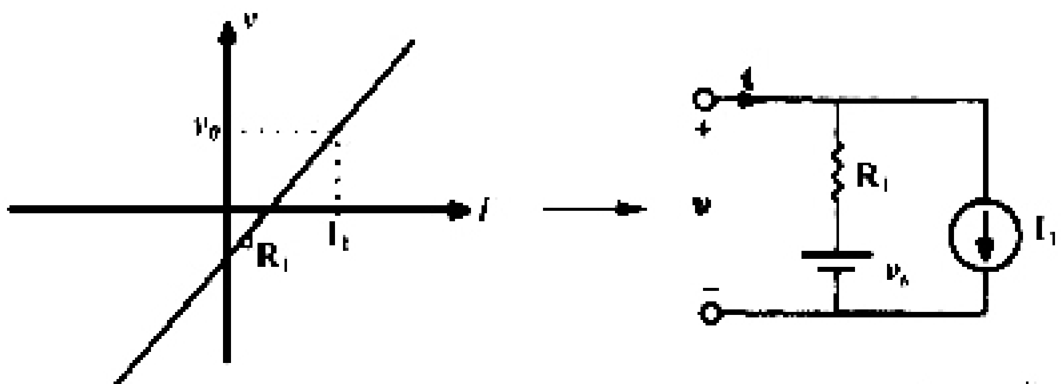
بعلاوه (اتصال سری):



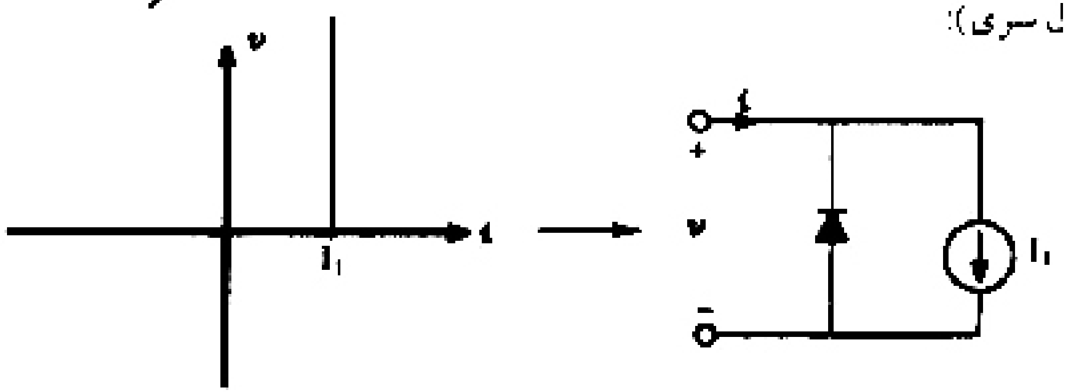
مدار نهایی :



ب)

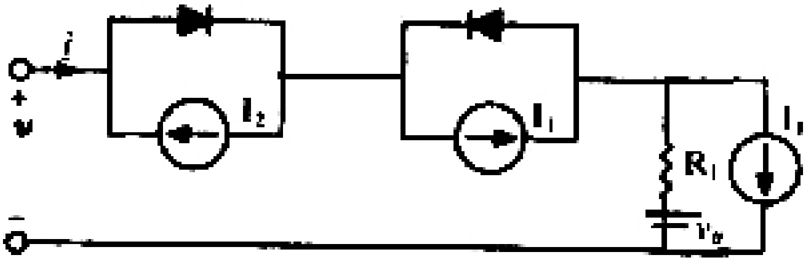


بعلاوه (اتصال سری):

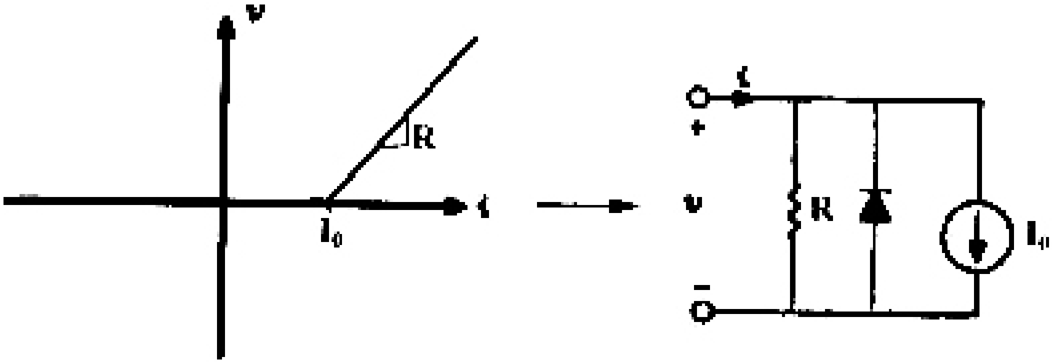


بعلاوه (اتصال سری):

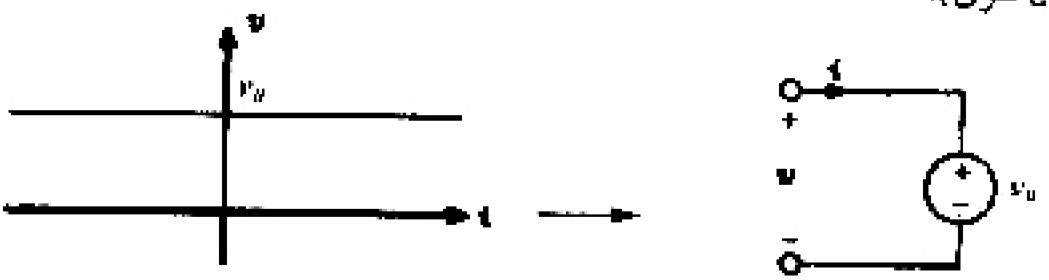
مدار نهایی:



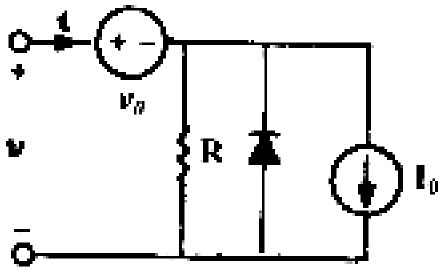
پ)



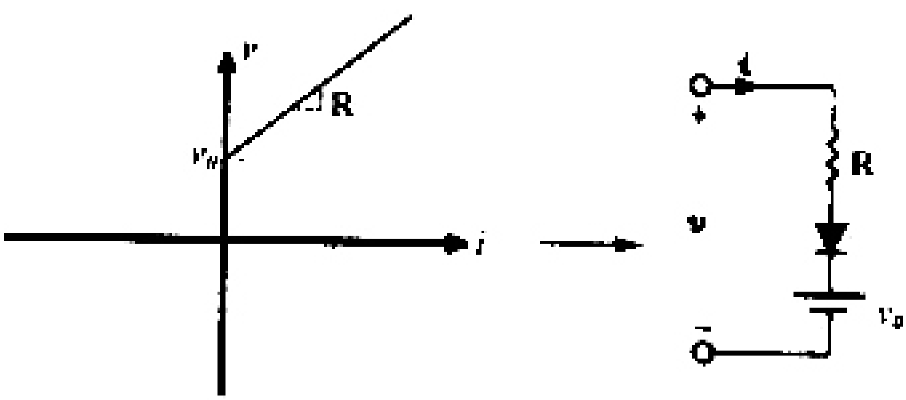
بعلاوه (اتصال سری):



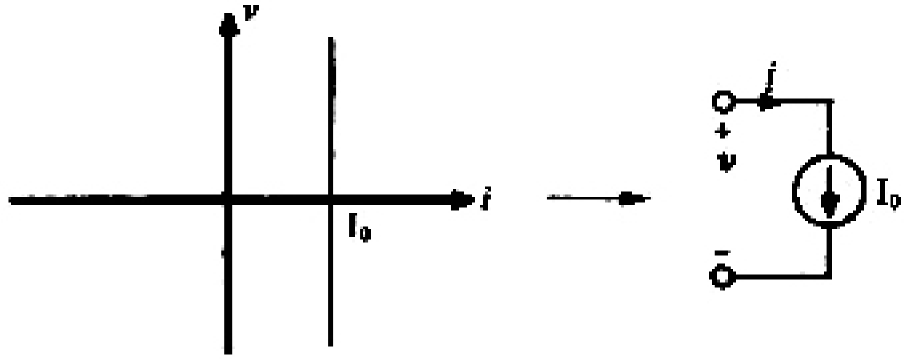
مدار نهایی:



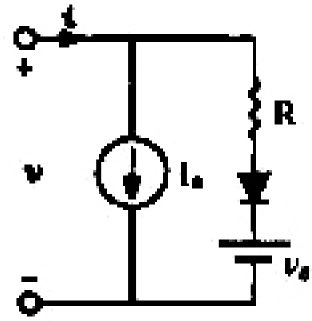
ت)



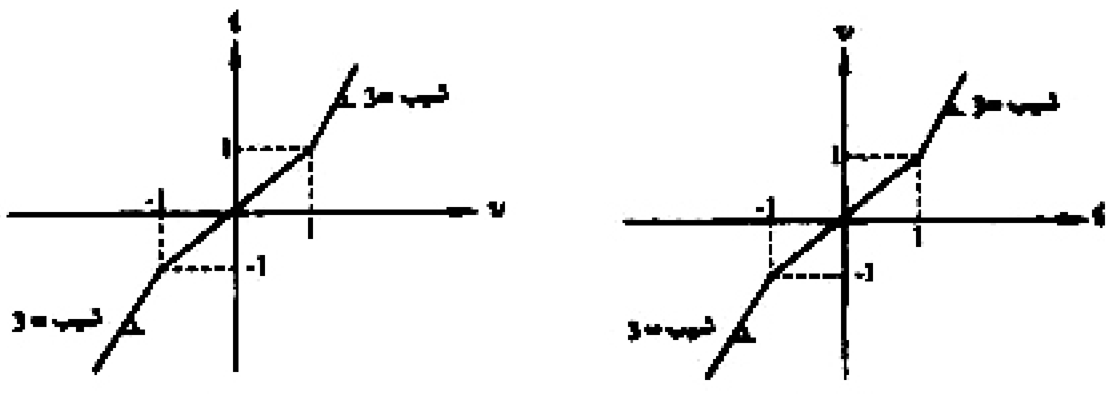
بعلاوه (اتصال سری):



مدار نهایی :



۱۴ – مدارهایی طراحی کنید که مشخصه‌های داده شده در شکل (مسألهٔ ۳-۱۴) را داشته باشند.

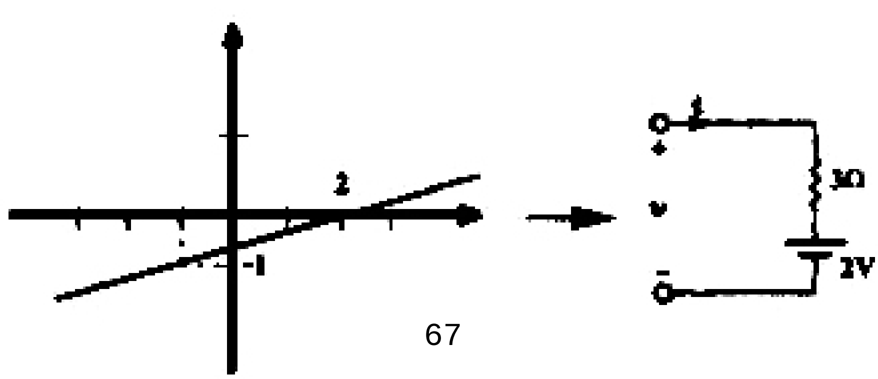


(ب) (الف)

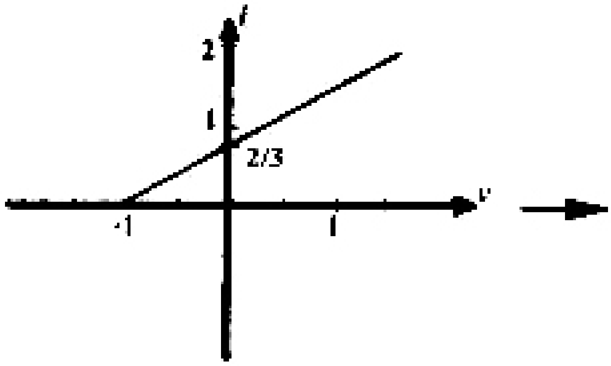
شکل (مسألهٔ ۳-۱٤)

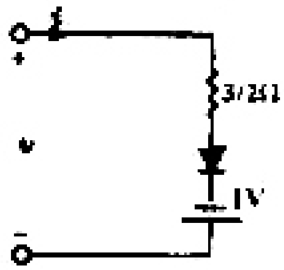
حل :

(الف)

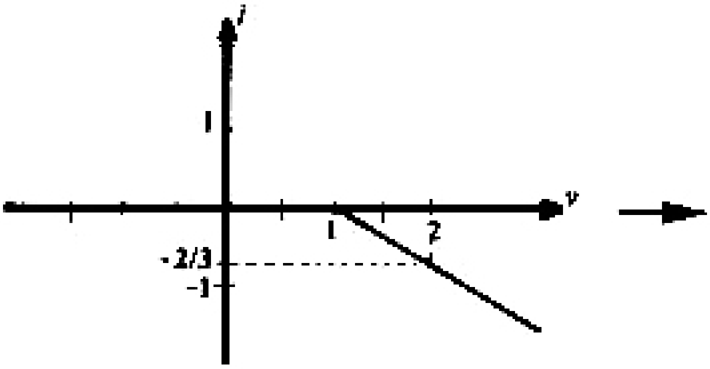


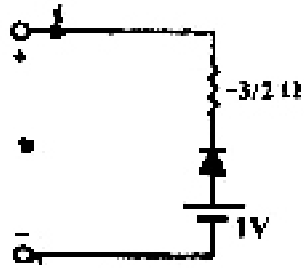
بعلاوة (اتصال موازی):



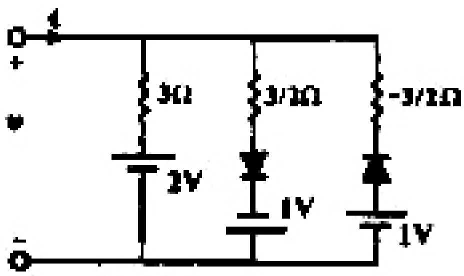


بعلاوة (اتصال موازی):

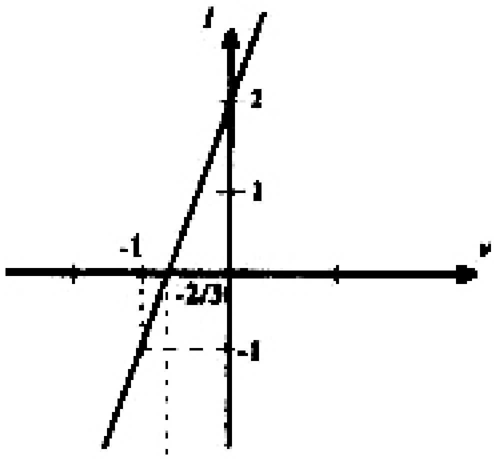


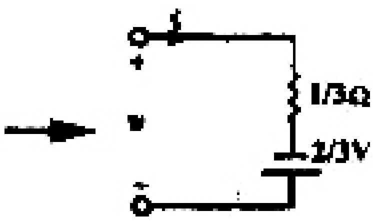


مدار نهایی:

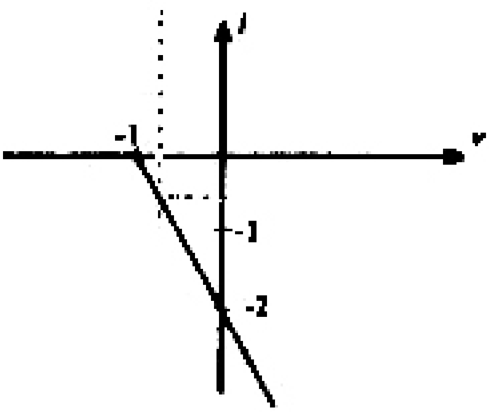


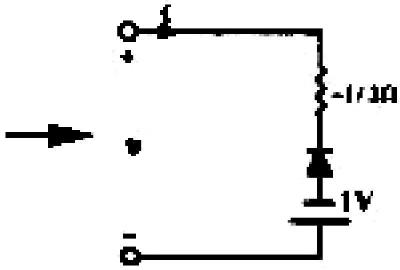
ب)



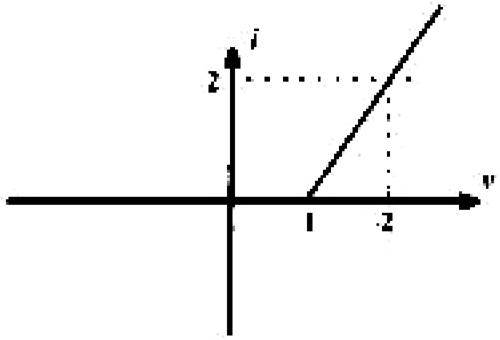


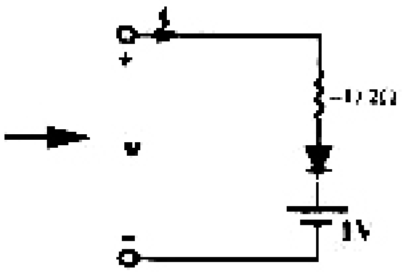
بعلاوة (اتصال موازی):



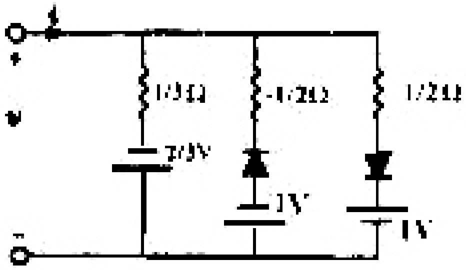


بعلاوه (اتصال موازی):

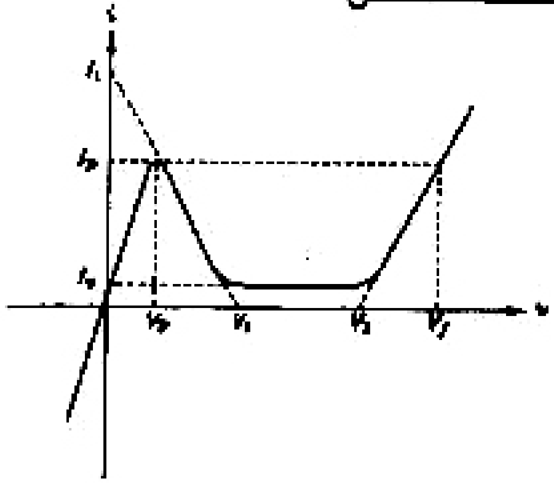




مدار نهایی:



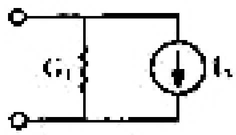
۱۵ - مشخصهٔ یک مقاومت غیرخطی در شکل (مسالهٔ ۳-۱۵) نشان داده شده است (دیود تونلی). این مشخصه را به چهار قسمت خطی تکه‌ای تقسیم کنید و برای هر ناحیه از تغییرات ولتاژ، مدار معادلی برحسب یک مقاومت خطی و یک منبع جریان موازی با آن تعیین کنید.



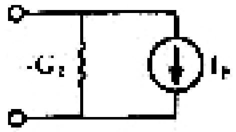
شکل (مسألهٔ ۳-۱۵)

حل :

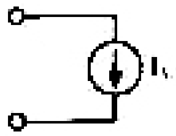
$v < v_p$



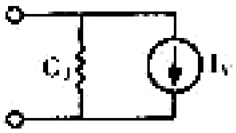
$v_p < v < v_1$



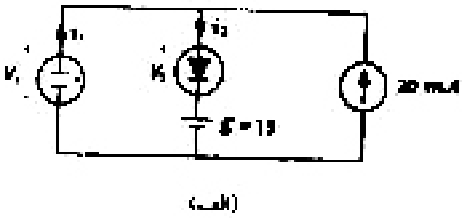
$v_1 < v < v_2$



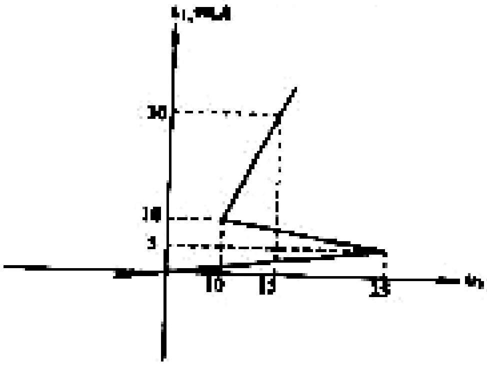
$v > v_2$



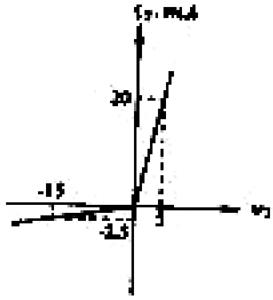
۱۶ـ مدار نشان داده شده در شکل (مسالهٔ ۳-۱۶الف) را در نظر بگیرید که درآن لامپ گازدار و دیود پیوندی pn بامشخصه‌های تکه‌ای به ترتیب در شکلهای (ب)و (پ) مدل سازی شده‌اند با استفاده از روش خط بار، ولتاژ V و جریان i را در هر یک از نقاط کار مدار، تعیین کنید.



(الف)



(ب)

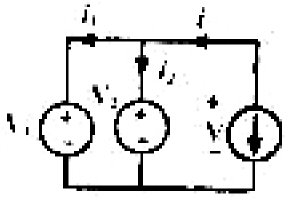


(پ)

شکل (مسالهٔ ۳-۱۶)

حل :

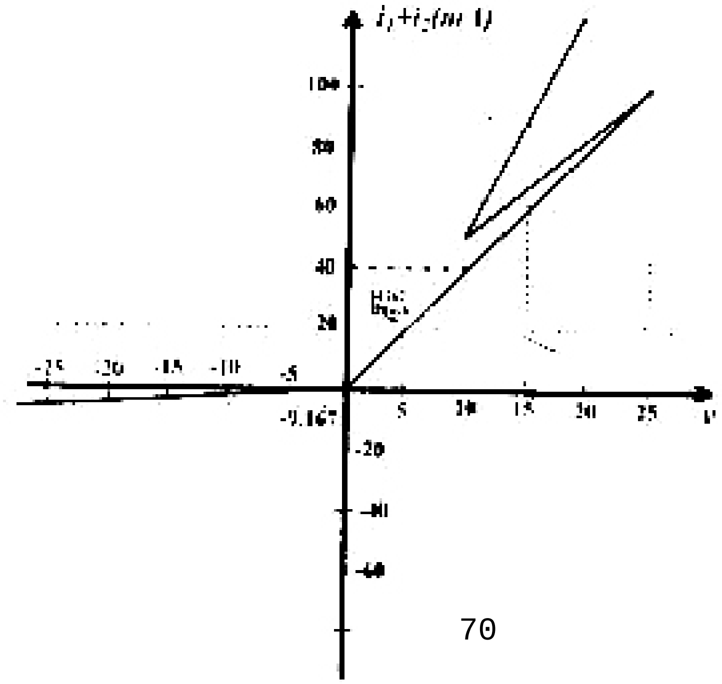
$$i_2=\begin{cases}4V_2 & V_2>0\\ \frac{1}{6}V_2 & V_2<0\end{cases}$$



$$i_1=\frac{1}{5}V_1 \quad 0<V_1<25$$

با استفاده از خاصیت جمع آثار ابتدا منبع ولتاژ E را اتصال کوتاه می‌کنیم و نقطهٔ کار لامپ گازدار و دیود پیوندی ناشی از منبع جریان را بدست می‌آوریم:

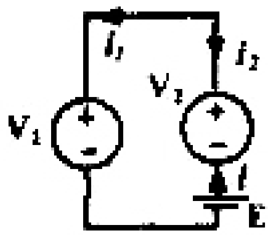
بارسم منحنی i_1+i_2 و قطع دادن آن باخط 20^{mA}، ولتاژ نقطهٔ کار بدست می‌آید.



$V=4.762$

$$V_1=V=4.762^V \Rightarrow \begin{cases} i_1=0.95^{mA} \\ i_2=19.05^{mA} \end{cases}$$

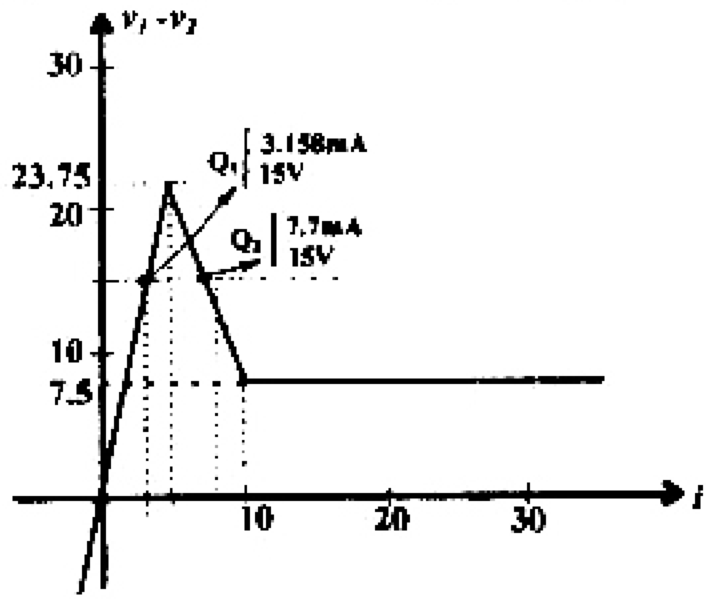
باقطع دادن خط $V=4.762$ بامنحنی‌های (ب)و (پ) مقادیر جریان i_1 و i_2 بدست می‌آیند.



حال، منبع جریان را مدار باز می‌کنیم و اثر منبع ولتاژ را در نقاط کار لامپ گازدار و دیود پیوندی می‌یابیم:

$KVL: v_1 - v_2 = E = 15^V$

با رسم کردن منحنی $v_1 - v_2$ و قطع دادن آن باخط 15^V مقدار جریان نقطهٔ کار بدست می‌آید:



با قطع دادن خط $i=3.158^{mA}$ با هر یک از منحنی‌های (ب)و (پ)مقادیر ولتاژ نقاط کار بدست می‌آید:

$v_1=15.8^V$

$v_2=0.8^V$

بار دیگر برای خط $i=7.7^{mA}$ خواهیم داشت:

$v_1=16.9^V \quad v_2=1.925^V$

نتایج حاصله از دو منبع را با هم جمع می‌کنیم تا نقاط کار کلی لامپ گازدار و دیودپیوندی بدست آید:

نقاط کارلامپ‌گازدار

$$\left| \begin{array}{l} I_1=3.158^{mA}+0.95^{mA}=4.108^{mA} \\ V_1=4.762+15.8=20.562^V \\ I_2=7.7^{mA}+0.95^{mA}=8.65^{mA} \\ V_2=4.762+16.9=21.662^V \end{array} \right.$$

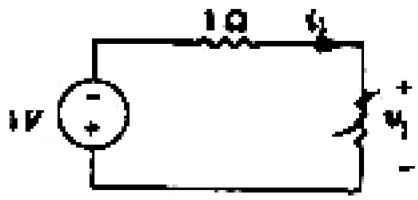
$$\left\{\begin{aligned} I_1 &= 19.05^{mA} + 3.158^{mA} = 22.208^{mA} \\ V_1 &= 4.762 + 0.8 = 5.562^{V} \\ I_2 &= 7.7^{mA} + 19.05^{mA} = 26.75^{mA} \\ V_2 &= 4.762 + 1.925 = 6.687^{V} \end{aligned}\right.$$

نقاط کار دیود پیوندی

۱۷ – مقاومت غیرخطی داده شده در مدار شکل (مسألهٔ ۳-۱۷) بارابطهٔ خطی تکه‌ای زیر توصیف می‌شود:

$$i_1 = -2 + 5v_1 - 2|v_1 + 1| + 2|v_1 - 2|$$

این مدار را تحلیل کرده و جریان i_1 و ولتاژ v_1 راتعیین کنید.

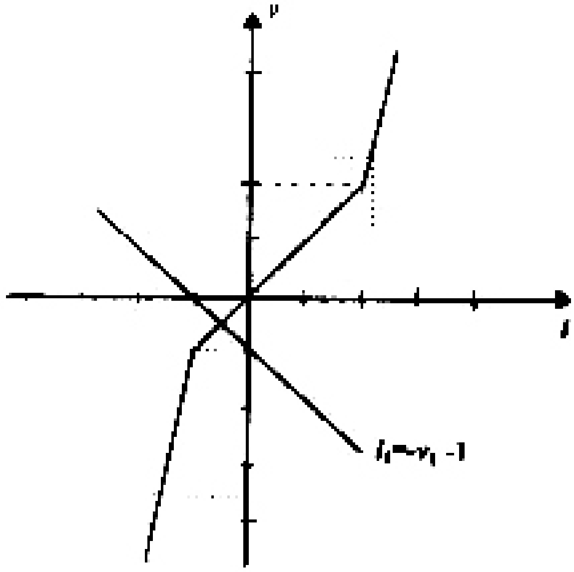


شکل (مسألهٔ ۳-۱۷)

حل:

$$KVL: 1; 1 + i_1 + v_1 = 0 \Rightarrow i_1 = -v_1 - 1$$

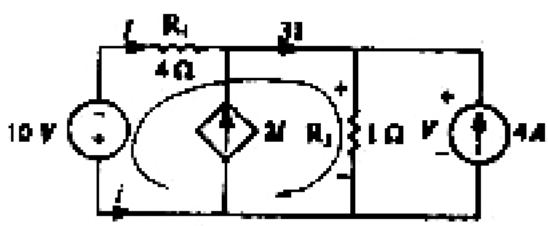
منحنی مشخصهٔ مقاومت غیرخطی رارسم کرده و باخط فوق قطع می‌دهیم:



$$i_1 = \begin{cases} 5v_1 + 4 & v_1 < -1 \\ v_1 & -1 < v_1 < 2 \\ 5v_1 - 8 & v_1 > 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} i_1 = v_1 \\ i_1 = -v_1 - 1 \end{cases} \Rightarrow \left| \begin{aligned} v_1 &= -\frac{1}{2} \\ i_1 &= -\frac{1}{2} \end{aligned} \right.$$

۱۸ – در مدار شکل (مسألهٔ ۳-۱۸) توانی که هر یک از منابع تحویل می‌دهند چیست؟اصل بقای انرژی را تحقیق کنید.



شکل (مسألهٔ ۳-۱۸)

حل:

$$KVL: 10 + 4I + 3I + 4 = 0 \Rightarrow I = -\frac{14}{7} A$$

$$p_V = VI = 10 \times \left(-\frac{14}{7}\right) = -\frac{140}{7}\ W$$

$$P_{R1}=R_1 I^2=4\times\frac{196}{49}=\frac{784}{49}$$

$$P_{R2}=R_2 i^2=4$$

$$i=3I+4=-2$$

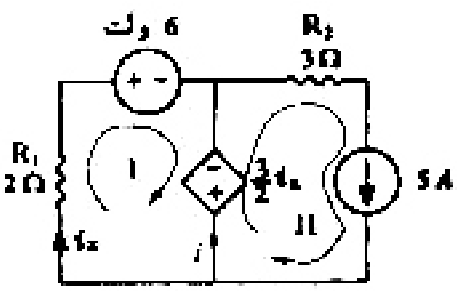
$$v=R_2 i=-2$$

$$P_I=v\times(-4)=-2\times(-4)=8$$

$$P_{2I}=v\times(-2I)=-2\times\frac{28}{7}=-\frac{56}{7}$$

اصل بقاء انرژی: $P_V+P_{R1}+P_{R2}+P_I+P_{2I}=-\frac{140}{7}+\frac{784}{49}4+8-\frac{56}{7}=0$

۱۹ - در مدار شکل (مسالهٔ ۳-۱۹) تعیین کنید کدام عنصر توان تحویل می‌دهد و کدام عنصر توان تحویل می‌گیرد و اصل بقای انرژی را بررسی کنید.



شکل (مسالهٔ ۳-۱۹)

حل:

$$KVL\ (I):\ 2i_x+6-\frac{3}{2}\ i_x=0\ \Rightarrow i_x=-12A$$

توان تحویل می‌دهد $P_V=6\times i_x=-72\ W$

توان تحویل می‌گیرد $P_{R_1}=R_1 i_x^2=288\ W$ $\qquad i=5-i_x=17\ A$

توان تحویل می‌دهد $P_1=\frac{3}{2}\ i_x\times i=\frac{3}{2}\times(-12)\times(17)=-306$ منبع ولتاژ کنترل شده با جریان

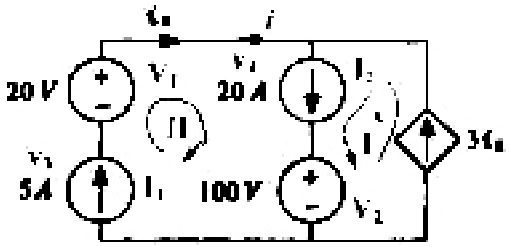
$P_{R_2}=R_2\times5^2=3\times25=75\ W$ توان تحویل می‌گیرد

$$KVL\ (II):\ \frac{3}{2}\ i_x+15-v=0\ \rightarrow\ v=15-18=-3$$

توان تحویل می‌گیرد $P_I=v\times(-5)=-3\times(-5)=15$ منبع جریان

اصل بقاء انرژی: $P_V+P_{R_1}+P_{R_2}+P_1+P_I=-72+288-306+75+15=0$

۲۰- در مدار شکل (مسالهٔ ۳-۲۰) آیا می‌توانید توانی را که هر عنصر تحویل می‌دهد، حساب کنید؟ در صورتی که منبع جریان وابسته به منبع ولتاژ وابسته‌ای با همان جهت تبدیل شود، بار دیگر این مساله را حل کنید.



شکل (مسألهٔ ۳-۲۰)

حل:

خیر، فقط می‌توان توان تحویلی منابع ولتاژ را به صورت زیر بدست آورد، زیرا ولتاژ دو سر منابع جریان مجهول است.

$P_{V_1} = 20 \times (-5) = -100\ W$ توان تحویل می‌دهد

$P_{V_2} = 100 \times 20 = 2000\ W$ توان تحویل می‌گیرد

اگر منبع جریان وابسته به شکل زیر به منبع ولتاژ وابسته تبدیل شود، خواهیم داشت:

$v = 3i_x = 3 \times 5 = 15V$

$i = 20 - 5 = 15\ A$

توان منبع ولتاژ وابسته $P_v = 15 \times (-15) = -225\ W$

$KVL\ (I): -v - v_4 + v_2 = 0 \Rightarrow v_4 = v_2 - v = 100 - 15 = 85$

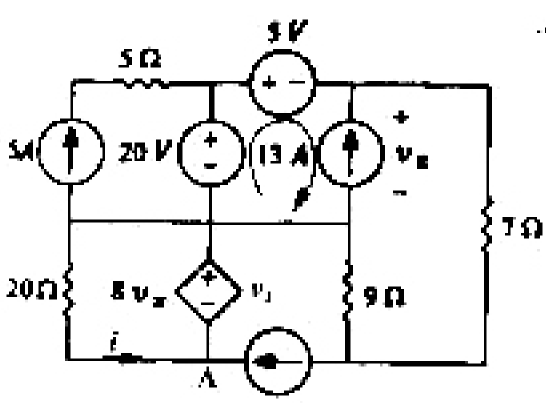
$P_{I_2} = v_4 \times (-I_2) = 85 \times (-20) = -1700\ W$

$KVL\ (II): -V_3 - V_1 - V_4 + V_2 = 0 \Rightarrow V_3 = V_2 - V_1 - V_4 = 100 - 20 - 85 = -5V$

$P_{I_1} = v_3 \times (-I_1) = -5 \times (-5) = 25\ W$

توانهای منابع ولتاژ نابسته نیز مثل حالت اول بدست می‌آیند.

۲۱- توانی که منبع وابسته در مدار شکل (مسالهٔ ۳-۲۱) تحویل می‌دهد یا تحویل می‌گیرد راحساب کنید.



حل:

$KVL: -20 + 5 + v_x = 0 \Rightarrow v_x = 15V$

شکل (مسألهٔ ۳-۲۱)

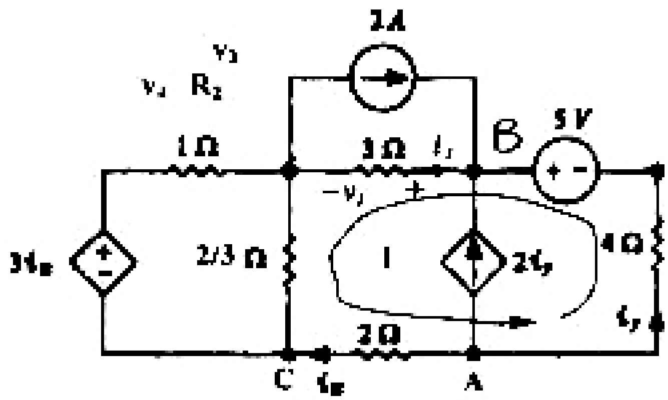
$v_1 = 8 i_1 = 8 \times 15 = 120\ V$

$$i = \frac{v_1}{20} = \frac{120}{20} = 6\ A$$

KCL درگره A : $i_1 = 12 + 6 = 18\ A$

توان تحویل می‌دهد W $P = v_1 \times (-i_1) = 120 \times (-18) = -2160$ توان منبع وابسته

۲۲ – در مدار شکل (مسالهٔ ۳–۲۲) انرژی تحویل داده شده توسط منابع نابسته را از هر راهی که مناسب می‌دانید محاسبه کنید.



شکل (مسالهٔ ۳-۲۲)

حل :

بااستفاده از تبدیل تونن به نرتن مدار به شکل زیر تبدیل می‌شود:

KCL درگره A : $i_x + 2i_y + i_y = 0 \quad \Rightarrow \quad i_x = -3i_y$

KCL درگره B : $i_1 = 3i_y + 2$

KCL درگره C : $i_2 \pm 2i_x = -6i_y$

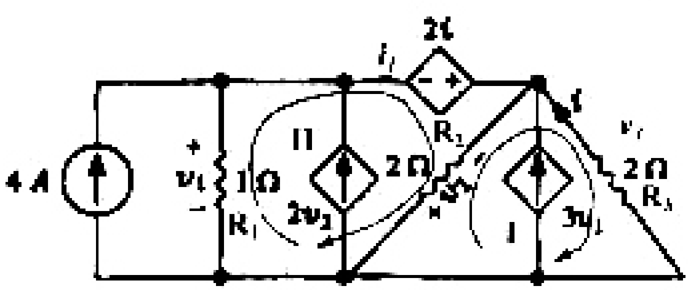
KVL درمش I : $4i_y - 5 + 3(3i_y + 2) + \frac{2}{3}(-6i_y) - 2(-3i_y) = 0 \quad \Rightarrow \quad i_y = -\frac{1}{15}\ A$

توان تحویل می‌گیرد W $P_V = 5 \times (-i_y) = 5 \times \frac{1}{15} = \frac{1}{3}$ منبع ولتاژ

$$i_1 = 3 \times \left(-\frac{1}{15}\right) + 2 = \frac{9}{5}\ A \quad \Rightarrow \quad v_1 = 3i_1 = \frac{27}{5}\ V$$

توان تحویل می‌دهد W $P_I = v_1 \times (-2) = -\frac{54}{5}$ منبع جریان

۲۳ – در مدار شکل (مسالهٔ ۳–۲۳) توانی راکه هر منبع تحویل می‌دهد به دست آورید و مشخصاً" تعیین کنید که کدام یک توان تحویل می‌دهند و کدام یک توان تحویل می‌گیرند. اصل بقای انرژی را نیز تحقیق کنید



شکل (مسالهٔ ۳-۲۳)

حل :

رابطهٔ KCL را در گره مرکب A و B می‌نویسیم :

$$4+2v_2-v_1=-3v_1-i-\frac{v_2}{2} \quad \Rightarrow \quad 2v_1+2.5v_2=-4-i \qquad (I)$$

KVL در حلقهٔ (I) : $v_2=2i$ $\qquad (II)$

KVL در حلقهٔ (II) : $v_1=-2i-v_2=-4i$ $\qquad (III)$

با جایگذاری روابط (II) و (III) در (I) خواهیم داشت:

$$-8i+5i=-4-i \Rightarrow i=2A \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} v_1=-8V \\ v_2=4V \end{cases}$$

توان منبع جریان نابسته $= v_1\times(-4)=32\ W$ توان تحویل می‌گیرد

توان منبع جریان وابسته $2v_2$ $= v_1\times(-2v_2)=64\ W$ توان تحویل می‌دهد

$v_3-2i=4V \quad , \quad i_1=4+2v_2-v_1=20A$

توان منبع جریان وابستهٔ $3v_1$ $=(-v_3)\times(-3v_1)=-96\ W$ توان تحویل می‌دهد

توان منبع ولتاژ وابسته $2i$ $=2i\times(-i_1)=-80\ W$ توان تحویل می‌دهد

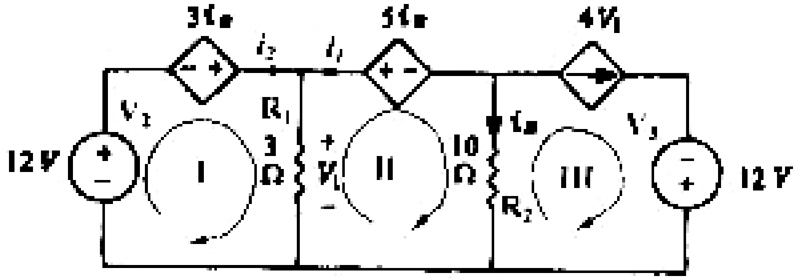
توان تحویل می‌گیرند.

$$P_{R_1}=\frac{v_1^2}{1\Omega}=64\ W \quad , \quad P_{R_2}=\frac{v_2^2}{2\Omega}=8\ W \quad , \quad P_{R_3}=\frac{v_3^2}{2\Omega}=8\ W$$

اصل بقاء انرژی : $32+64-96-80+64+8+8=0$

۲۴ – الف – در مدار شکل (مسألهٔ ۳-۲۴) توانی که هر منبع تحویل می‌دهد یا تحویل می‌گیرد چقدر است؟

ب – آیا اصل بقای انرژی در این مدار برقرار است؟ درستی بیان خود را نشان دهید.



شکل (مسألهٔ ۳-۲۴)

حل :

الف)

$$I \text{ در مش } KVL: -12-3i_x+V_1=0 \Rightarrow V_1=3i_x+12$$
$$II \text{ در مش } KVL: -V_1+5i_x+10i_x=0 \Rightarrow V_1=15i_x$$
$$\Rightarrow \begin{cases} i_x=1A \\ V_1=15V \end{cases}$$

$$i_1=i_x+4V_1=1+60=61\ A \quad , \quad i_2=i_1+\frac{V_1}{3}=66\ A$$

$P_{V_2}=V_2(-i_2)=12\times(-66)=-792\ W$ توان تحویل می‌دهد.

$P_{V_3}=V_3(-4V_1)=12\times(-60)=-720\ W$ توان تحویل می‌دهد.

$3i_x$ توان منبع ولتاژ وابستهٔ $=3i_x(-i_2)=3\times(-66)=-198\ W$ توان تحویل می‌دهد

$5i_x$ توان منبع ولتاژ وابستهٔ $=5i_x(i_1)=5\times61=305\ W$ توان تحویل می‌گیرد.

III در مش $KVL:\ V_4=-V_3-10i_x=-12-10=-22\ V$

$4V_1$ توان منبع جریان وابسته $=V_4\times(-4V_1)=-22\times(-60)=1320\ W$ توان تحویل می‌گیرد.

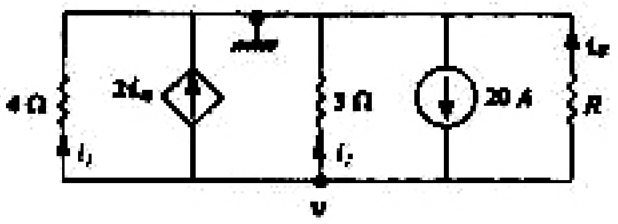
$P_{R_1}=\frac{V_1^2}{3\Omega}=75\ W \quad , \quad P_{R_2}=R_2 i_x^2=10\ W$ توان تحویل می‌گیرند.

ب - $-792-720-198+305+1320+75+10=0$

پس اصل بقاء انرژی برقرار است.

۲۵ - در مدار شکل (مسالهٔ ۳-۲۵) مقاومت R را چنان تعیین کنید که ولتاژ v برابر ۲۴ ولت باشد.

حل :



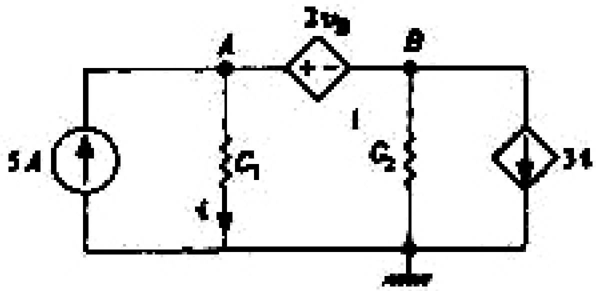
شکل (مسالهٔ ۳-۲۵)

$$i_1=\frac{v}{4}=6\ A$$
$$i_2=\frac{v}{3}=8\ A$$

$$KCL:\ i_1+i_2+2i_x+i_x=20 \Rightarrow 3i_x=6 \Rightarrow i_x=2A$$

$$R=\frac{v}{i_x}=\frac{24}{2}=12\ \Omega$$

۲۶- در مدار شکل (مسالهٔ ۳-۲۶) ولتاژ گره‌های A و B را حساب کنید (v_B ولتاژ گره B است).



شکل (مسالهٔ ۳-۲۶)

حل:

رابطهٔ KCL در گره مرکب A و B:

$$i + G_2 v_B + 3i = 5 \Rightarrow G_2 v_B + 4i = 5 \qquad (I)$$

رابطهٔ KVL در مش وسط:

$$-\frac{i}{G_1} + 2v_B + G_2 v_B = 0 \Rightarrow i = G_1(2+G_2)\,v_B \qquad (II)$$

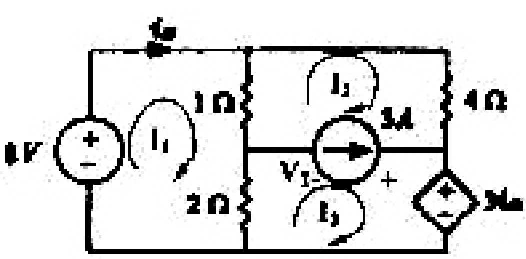
با جایگذاری رابطهٔ (II) در (I) خواهیم داشت:

$$G_2 v_B + 4G_1(2+G_2)\,v_B = 5$$

$$v_B = \frac{5}{G_2 + 4G_1(2+G_2)} \qquad i = \frac{5G_1(2+G_2)}{G_2+4G_1(2+G_2)}$$

$$v_A = \frac{i}{G_1} = \frac{5(2+G_2)}{G_2+4G_1(2+G_2)}$$

۲۷- مدار شکل (مسالهٔ ۳-۲۷) را با روش تحلیل مش حل کنید و جریانهای مش ها را به دست آورید.



شکل (مسالهٔ ۳-۲۷)

حل:

KVL در مش I_1:

$$-8 + I_1 - I_2 + 2(I_1 - I_3) = 0$$

$$3I_1 - I_2 - 2I_3 = 8 \qquad (I)$$

KVL در مش I_2:

$$4I_2 + V_1 + I_2 - I_1 = 0$$

KVL در مش I_3:

$$i_x = I_1 \Rightarrow 3I_1 - V_1 + 2(I_3 - I_1) = 0$$

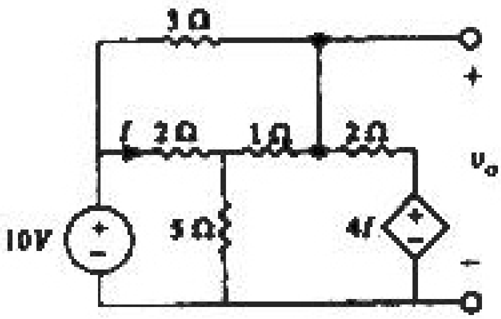
باجمع دو رابطهٔ فوق داریم:

$$\begin{cases}5I_2+2I_3=0\\ I_3-I_2=3\end{cases}\Rightarrow \left|\begin{array}{l} I_2=-\frac{6}{7}A\\ I_3=\frac{15}{7}A\end{array}\right.$$

با جایگذاری مقادیر I_2 و I_3 در رابطهٔ I داریم:

$$3I_1+\frac{6}{7}-\frac{30}{7}=8 \Rightarrow I_1=\frac{80}{21}\ A$$

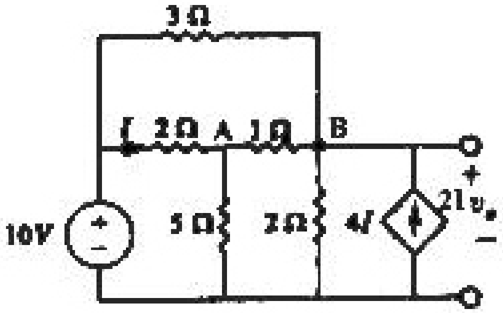
۲۸- ولتاژ خروجی v_o در مدار شکل (مسالهٔ ۳-۲۸) را به دست آورید.



شکل (مسألهٔ ۳-۲۸)

حل:

با استفاده از تبدیل تونن به نرتن، مدار را به صورت زیر رسم می‌کنیم:



می‌دانیم: $I=\frac{10-e_A}{2}$

KCL درگره B:

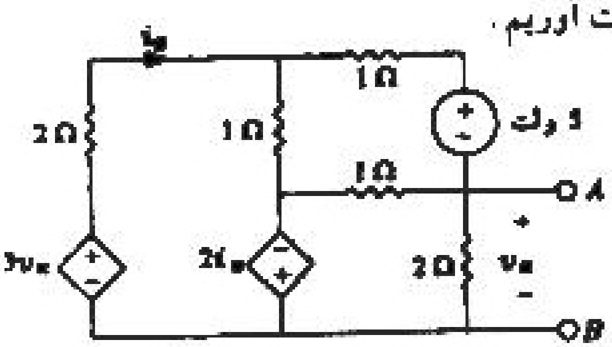
$$e_B-e_A+\frac{e_B}{2}+\frac{e_B-10}{3}=2I=10-e_A \Rightarrow e_B=v_o=\frac{80}{11}\ V$$

۲۹- درمدار شکل (مسالهٔ ۳-۲۹) می‌خواهیم v_x و i_x را بدست آوریم.

الف- با استفاده از روش تحلیل مش، این کار را انجام دهید.

ب- با استفاده از روش تحلیل گره، این کار را انجام دهید.

پ- اگر از دو سر A و B به مدار نگاه کنیم، مدار معادل تونن را به دست آورید.



شکل (مسألهٔ ۳-۲۹)

حل: الف) باتوجه به مدار داریم: $i_x=I_1$ و $v_x=2I_3$

حال، روابط KVL رابترتیب درمشهای I_1 ، I_2 و I_3 می‌نویسیم:

$$-3v_x+2I_1+I_1-I_2-I_2-2I_1=0 \quad \rightarrow \quad I_1-I_2-6I_3=0$$

$$I_2-I_1+I_2+5+I_2-I_3=0 \quad \rightarrow \quad I_1-3I_2+I_3=5$$

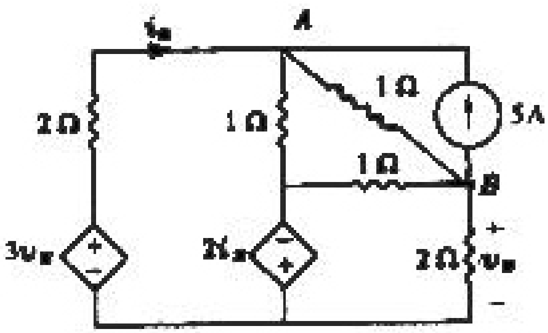
$$I_3-I_2+2I_3+2i_x=0 \quad \rightarrow \quad 3I_3-I_2+2I_1=0$$

با حل سه معادلهٔ سه مجهولی فوق مقادیر زیر بدست می‌آید:

$$I_3=\frac{5}{37} \quad \Rightarrow \quad v_x=2I_3=\frac{10}{37}$$

$$i_x=I_1=-\frac{45}{37}\ A$$

ب – با استفاده از تبدیل تونن به نرتن مدار را بصورت زیر رسم می‌کنیم:



با توجه به مدار داریم:

$$v_x=e_B \quad , \quad i_x=\frac{3e_B-e_A}{2}$$

$$\frac{e_A-3v_x}{2}+e_A-(-2i_x)+e_A-e_B=5 \quad \rightarrow \quad \frac{e_A-3e_B}{2}+e_A+3e_B-e_A+e_A-e_B=5$$

$$\rightarrow \quad 3e_A+e_B=10 \qquad (I)$$

$$e_B-e_A+\frac{e_B}{2}+e_B-(-2i_x)=-5 \quad \rightarrow \quad e_B-e_A+\frac{e_B}{2}+e_B+3e_B-e_A=-5$$

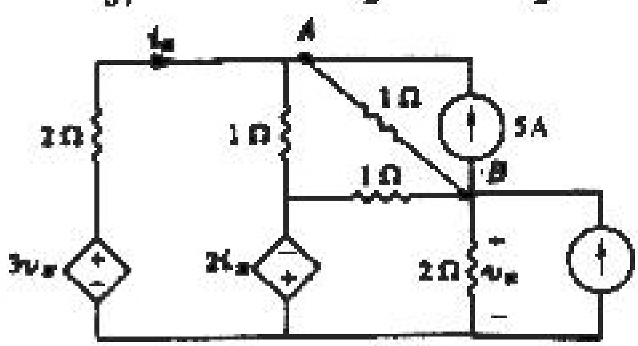
$$\rightarrow \quad -4e_A+11e_B=-10 \qquad (II)$$

باحل دو معادلهٔ دو مجهولی فوق داریم:

$$e_B=v_x=\frac{10}{37}\ V$$

$$e_A=\frac{120}{37} \quad \rightarrow \quad i_x=\frac{3e_B-e_A}{2}=\frac{\frac{30}{37}-\frac{120}{37}}{2}=-\frac{45}{37}\ A$$

پ – مدار رابصورت زیر در نظر می‌گیریم:



با جایگذاری روابط (VII) و (VI) در رابطهٔ (V) خواهیم داشت:

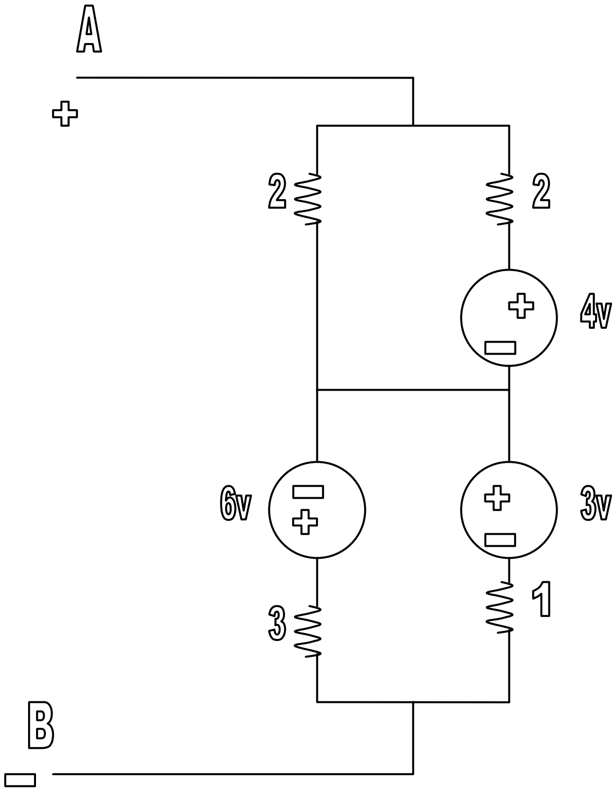
$$e_B - e_A + \frac{3}{5}e_B - 2 = 4 - 2e_A \quad \rightarrow \quad e_A + \frac{8}{5}e_B = 6 \quad (VIII)$$

با حل دو معادلهٔ دو مجهولی (I) و $(VIII)$ بدست می‌آوریم:

$$e_A = -2V \quad \text{و} \quad e_B = 5V$$

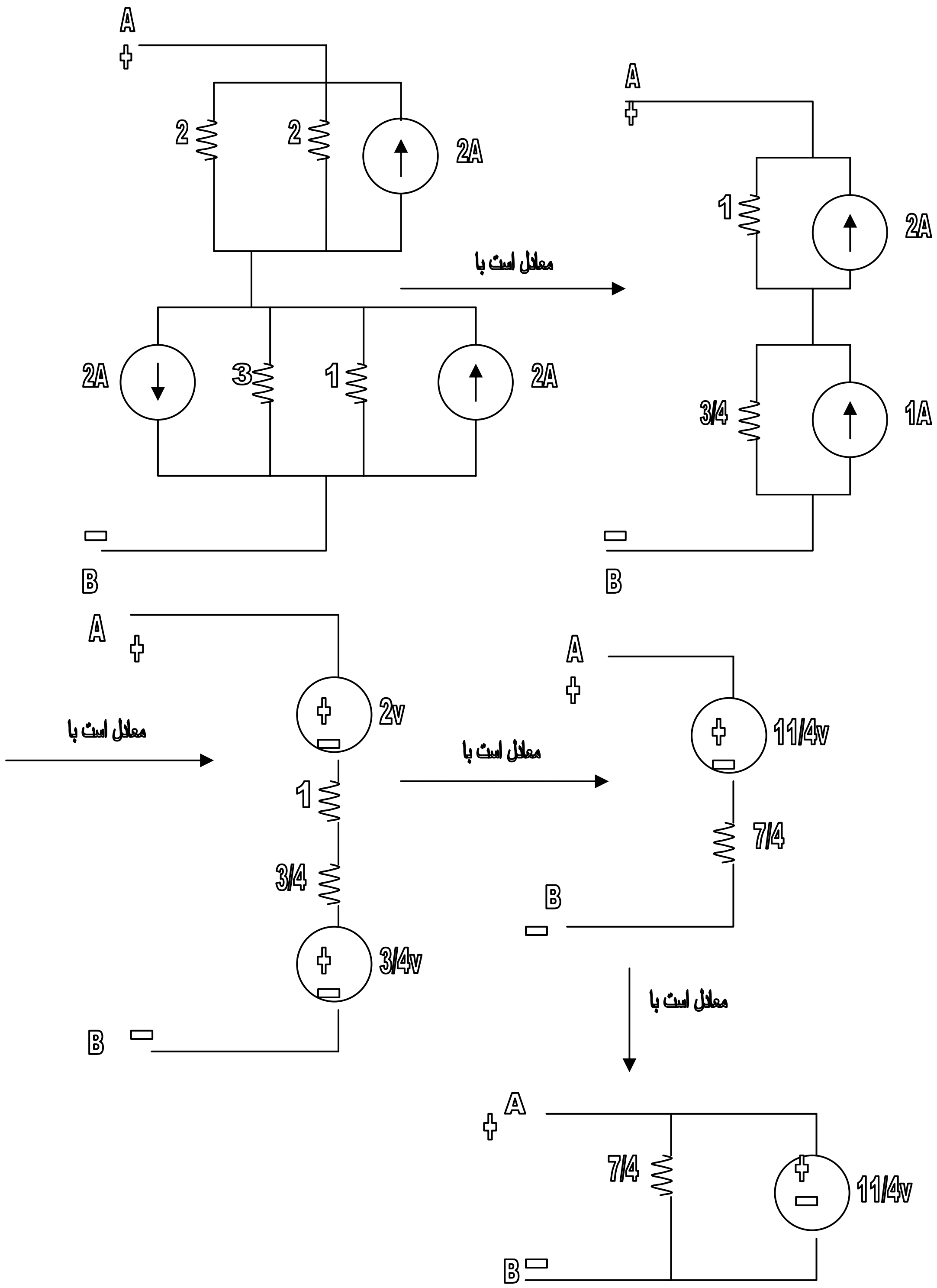
$$v_y = 2 - (-2) = 4V \quad \text{و} \quad i_x = -\frac{e_B}{2} = -\frac{5}{5} = -1A$$

۹۱-با انجام متوالی تبدیل منابع مدار داده شده در شکل را به صورت اتصال موازی یک مقاومت و یک منبع جریان دراورید و مقادیر انها را مشخص کنید

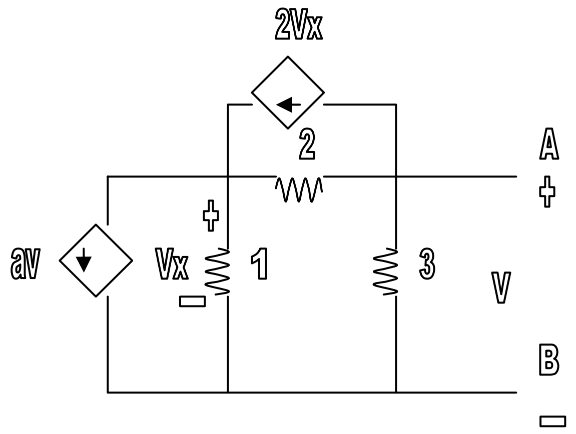


حل:با استفاده از تبدیلات متوالی داریم:

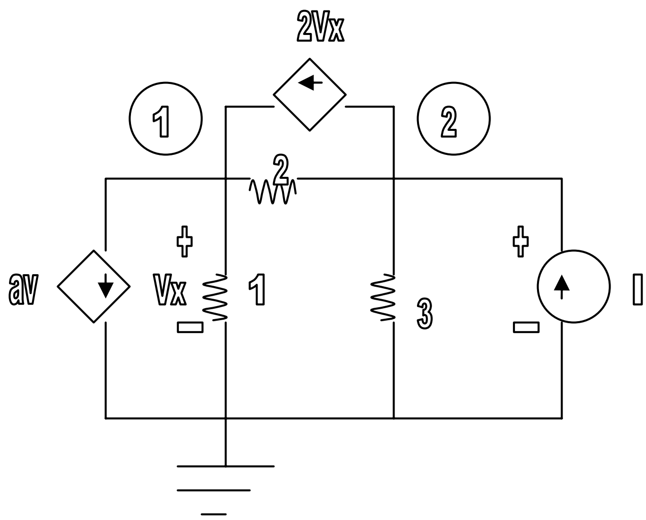
cp



۹۲_به ازای a=1/6,2/9,1 مدار معادل تونن دو سر A,B را تعیین کنید



حل:بدین منظور منبع جریان ازمایش I را به دو سر A,B وصل کرده و با استفاده از روش تحلیل گره V را بدست می اوریم



$Vx=e1\ ,\ V=e2$

$ae2+e1/1-2e1+e1-e2=0$<------------------ kcl برای گره ۱

$-I+2e1+(e1-e2)/2+e2/3=0$<------------------ Kclبرای گره ۲

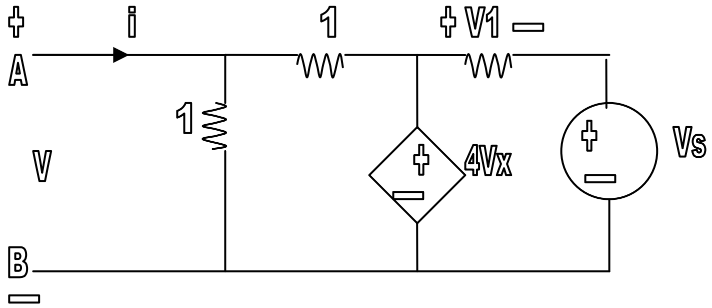
$-e1+(2a-1)e2=0\ ,\quad 9e1+5e2=6I\}$<--------

$$\longrightarrow\quad V = e2 = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 9 & 6I \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 2a-1 \\ 9 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{3}{9a-2}\, I$$

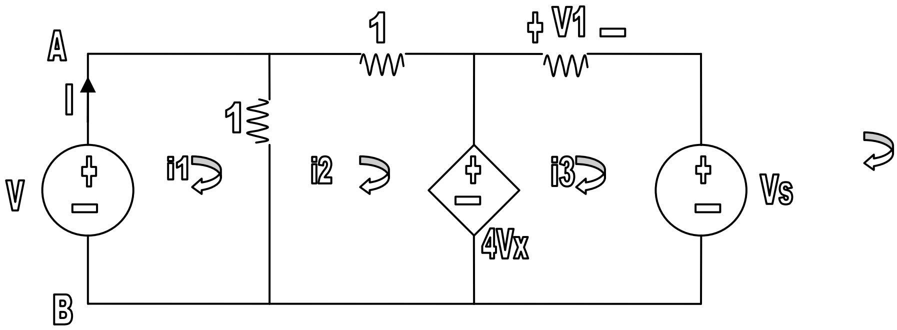
e oc=0 , Rth=3/(9a-2)={ -6 , a=1/6<-------------
a=2/9, بینهایت
3/7 , a=1 }

۹۳-معادله تونن دو سرA,B را در دو حالات زیر بدست اورید

Vx=V1:الف <----
Vx=-V1: ب<----



حل:با اتصال منبع ولتاژ V ازمایشی به دو سرA,B و با استفاده از روش تحلیل مش جریان گذرنده از منبع



ولتاژفوق بدست میاوریم

kvlبرای مش ۱: $-V1+(i1-i2)=0$	$i1-i2=V\}$
Kvl برای مش ۲: $(i2-i1)+i2+4(2i3)=0$	$i1-2i2=8i3$<-----------
Kvlبرای مش ۳: $-4(2i3)+2i3+V3=0$	$\{\ i3=Vs/6$

→ {I1-i2=V   -i1=-2V+4/3Vs   i1=I   V=1/2I+2/3 Vs

I1-2i2=4/3Vs

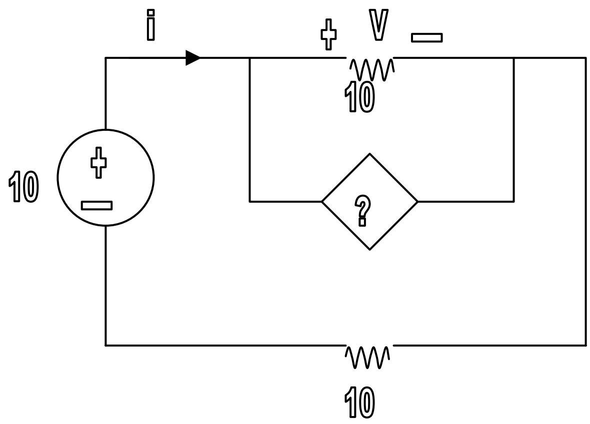
Rth=1/2 ,Vth=2/3 Vs<-----------

ب: در این حالت Vx=-V1=-2i3 می باشد.بنابر این داریم:

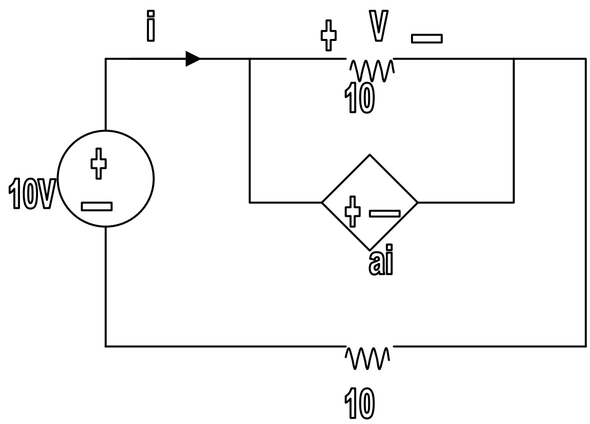
{i1-i2=V
-i1=-2V+4/5 Vs , i1=I<----------I1-2i2=4/5 Vs
I3=-Vs/10}

V=1/2 I-2/5Vs ----→ Rth=1/2 ,Vth=-2/5Vs --<--------

۹۴-می خواهیم i=-1A شود.چه نوع منبع وابسته ای به جای"?" قرار دهیم.همه حالت ها را بررسی کنید

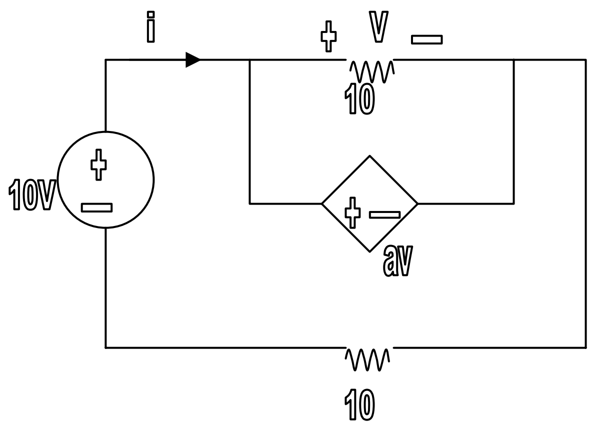


حل:حالت اول:منبع ولتاژ کنترل شده با جریان:



$-10+ai+10i=0$, $i=-1 \longrightarrow -10-a-10=0 \longrightarrow a=-20$

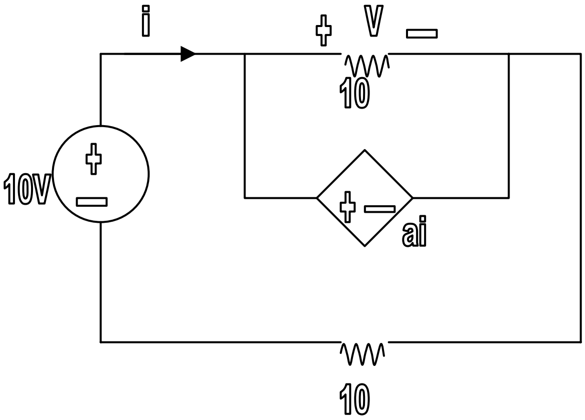
حالت دوم:منبع جریان کنترل شده با ولتاژ:



Kvl→ $-10+V+10i=0 \longrightarrow -10+V-10=0 \longrightarrow V=20v$

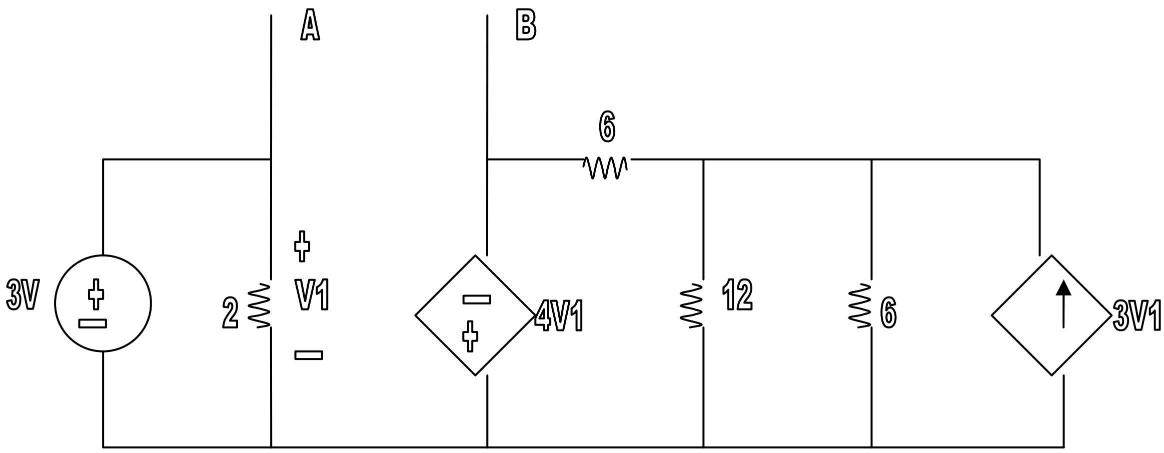
Kvl→ $-i+V/10+ai=0 \rightarrow 1+20/10-a=0 \longrightarrow a=3$

حالت سوم: منبع جریان کنترل شده با جریان :همهنند قسمت قبل V=20v خواهد شد

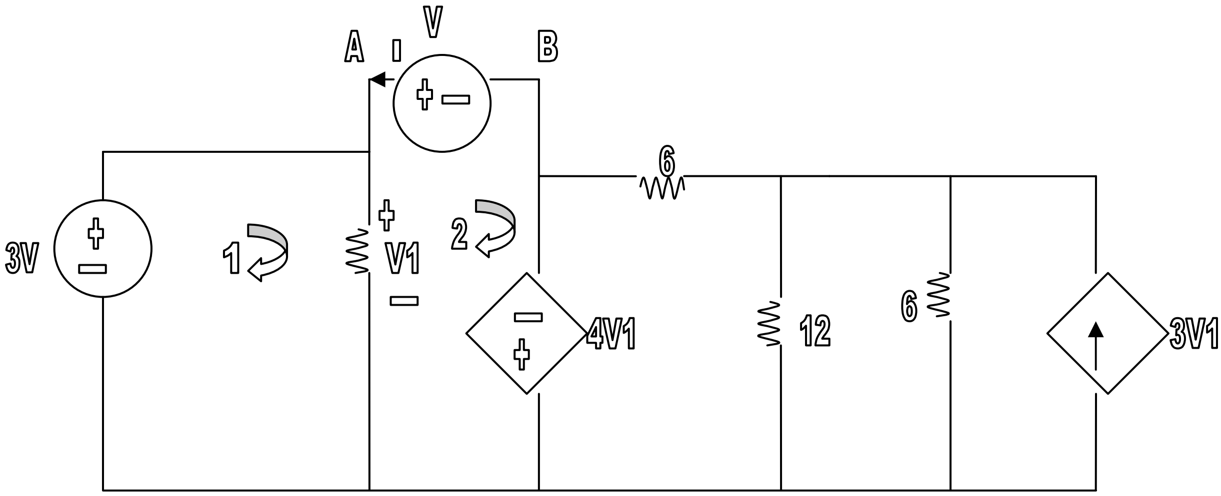


Kcl--→ -i+V/10+ai=0 --→ 1+20/10 –a=0 ---→ a=3

۹۵-معادله تونن دو سر A,B را بدست اورید



حل:بدین منظور منبع ولتاژ V ازمایش را به دو سر A,B وصل کرده و خواهیم داشت

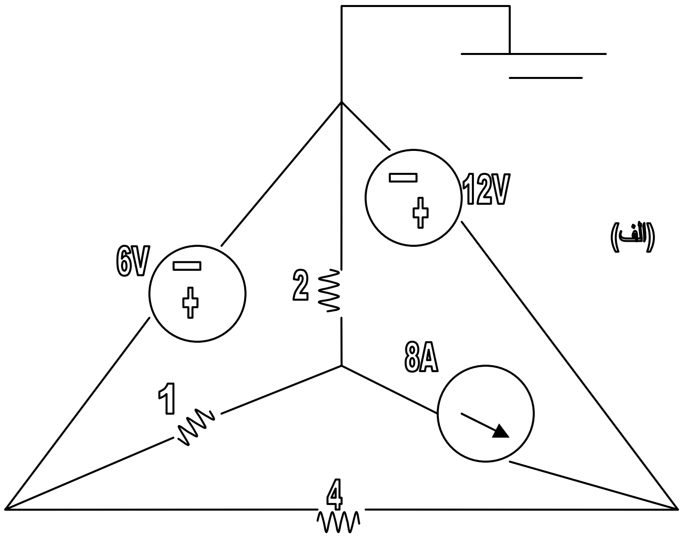


۱ برای مش kvl :---→-3+V1=0-→V1=3

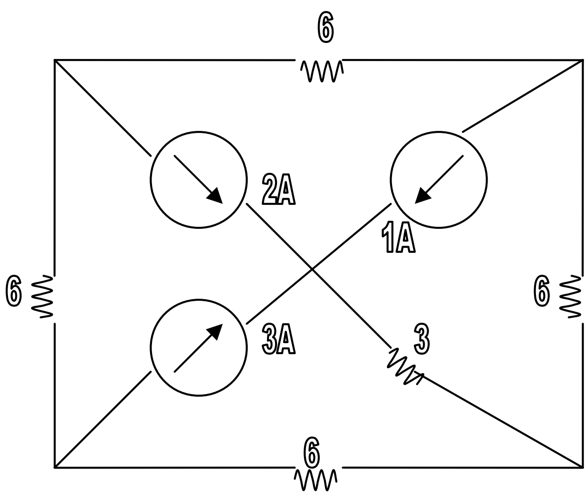
۲ برای مش Kvl:---→-3+V-12=0 --→ V=15 --→ Rth=0 , e oc=15v

۹۶-از روش های تحلیل گره و مش هر کدام که راحت تر باشد استفاده کرده و مدارات زیر را تحلیل کنید

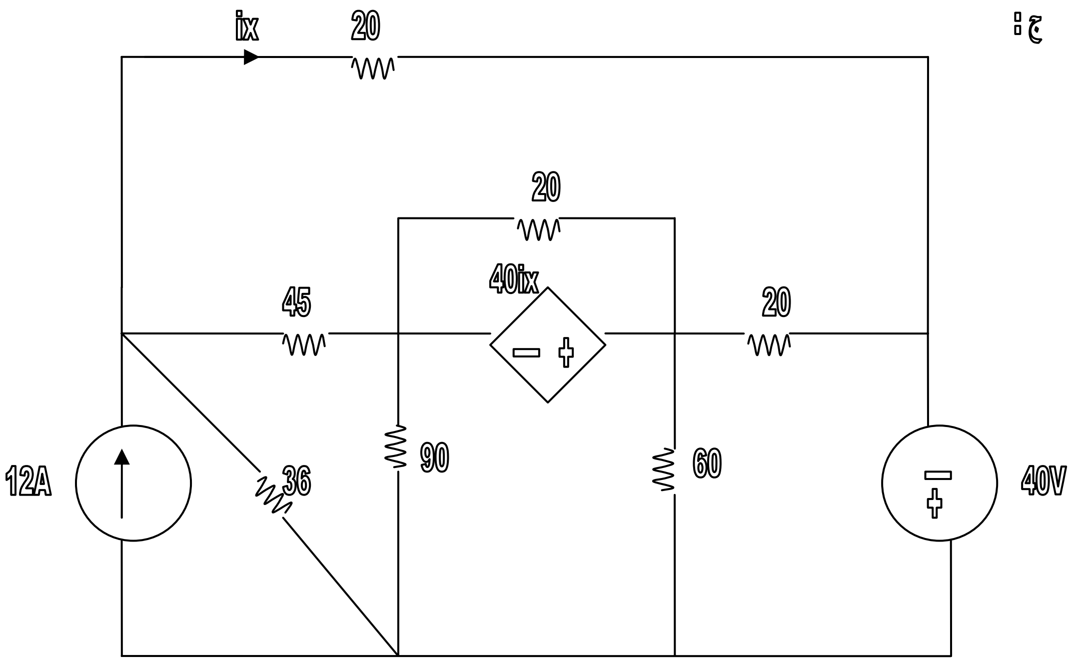
(الف)



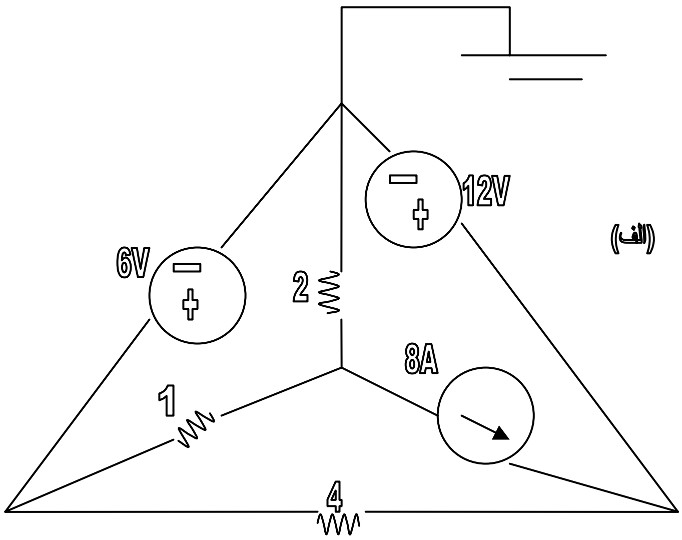
(ب)



ج :



حل:الف-برای تحلیل مدار (الف) از روش تحلیل گره استفاده خواهیم کرد

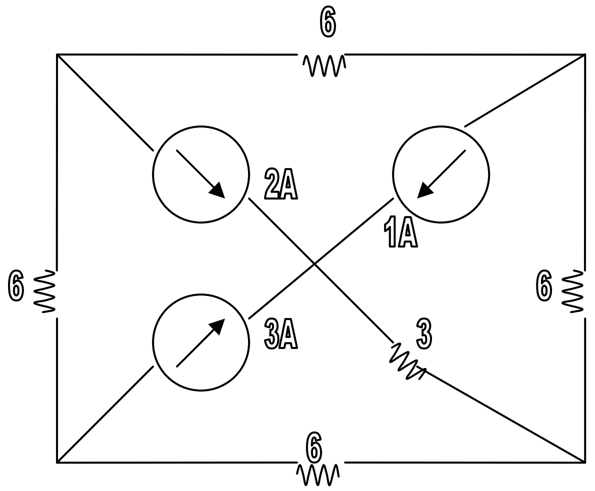


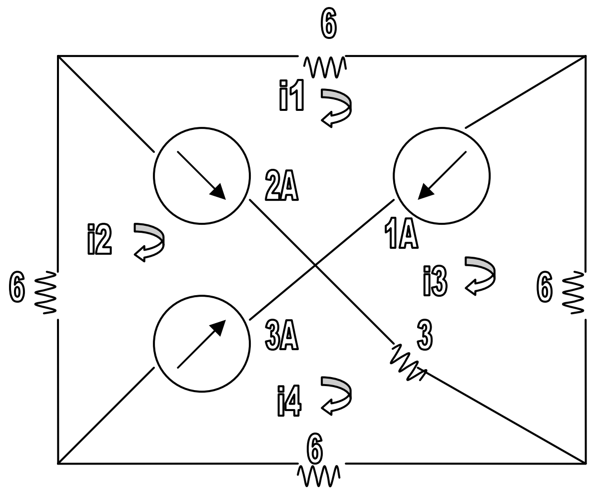
E1=6v , e2=12v

برای گره۳ Kcl:----→ (e3-6)/1 +e3/2 +8=0 --→ e3=-4/3 v

ب :برای تحلیل مدار (ب) از روش تحلیل مش استفاده خواهیم کرد

(ب)





I2-i1=2 , i1-i4=1 i3-i2=1 ---→ i3-i1=5

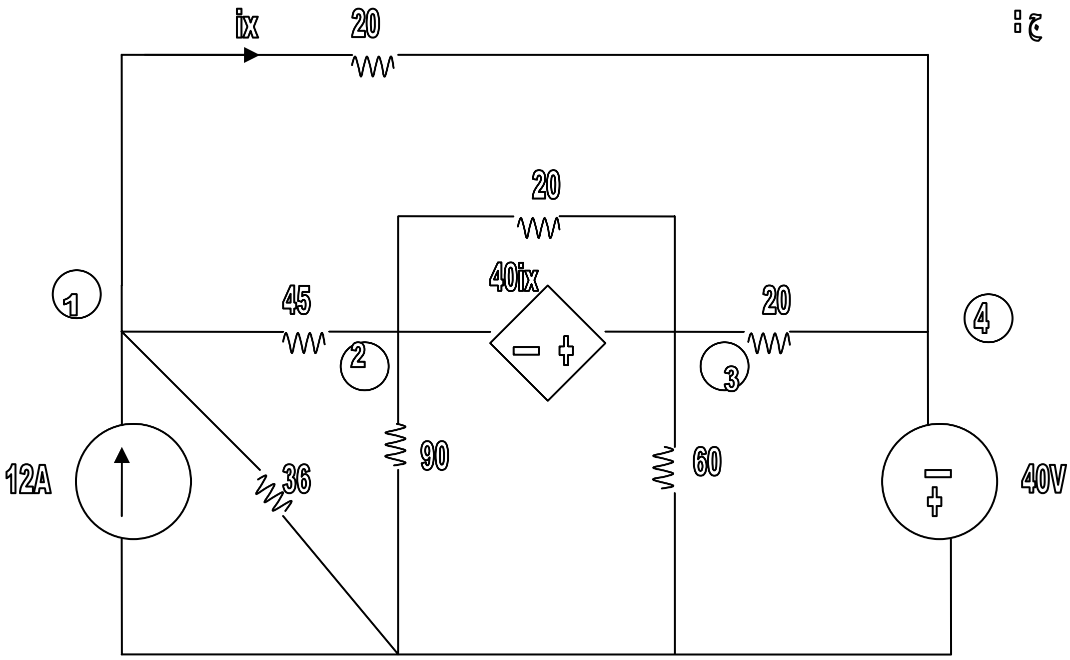
برای حلقه شامل تمامی مش ها Kvl ---→ -6i1 – 6i4 -6i3 – 6i2=0 --→ i1 + i2 + i3 + i4 =0

----→ i1 + (i1 + 2) + (i1 + 5) + (i1 – 1) = 0 --→ i1 = - 3/2 A

I2 = i1 + 2 = 1/2 A , i3 = i1 + 5 = 7/2 A , i4 = i1 – 1 = - 5/2 A

ج :برای تحلیل این مدار روش تحلیل گره را بکار خواهیم برد

ج :



$E4 = -40\ V$, $ix = (e1 + 40)/20$, $e3 - e2 = 4\,ix = 40\,((e1 + 40)/20)$

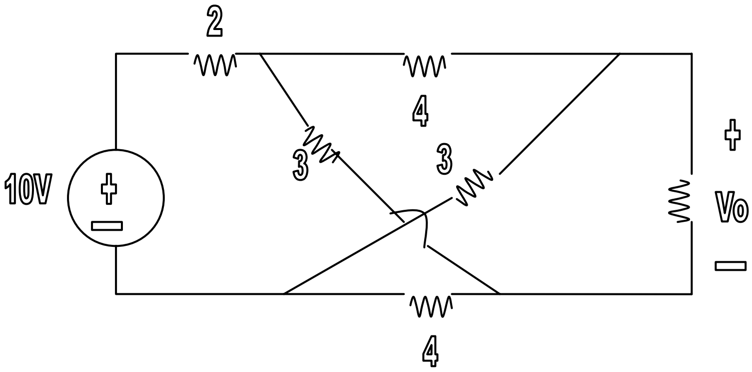
برای گره ۱ Kcl ---→ $-12 + (e1 + 40)/20 + (e1 - e2)/45 + e1/36 = 0$

برای گره مرکب شامل ۲و ۳ Kcl --→ $(e2 - e1)/45 + e2/90 + e3/60 + (e3 + 40)/20 = 0$

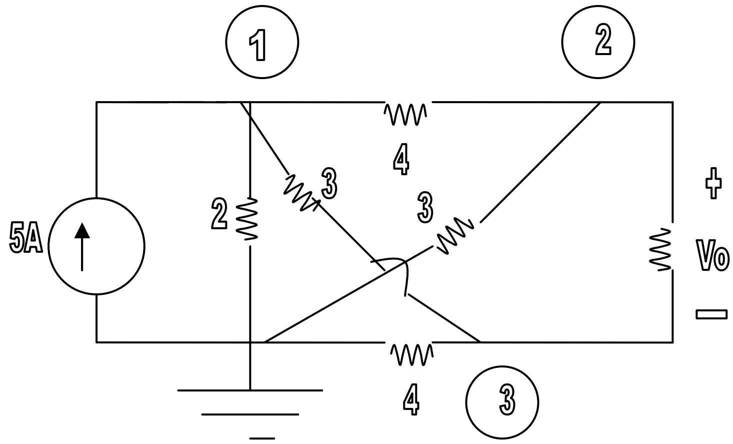
$$\left\{\begin{array}{l} -2e1 - e2 + e3 = 80 \\ 9e1 - 2e2 = 900 \\ 4e1 - 6e2 - 12e3 = 0 \end{array}\right\}$$

---------→ -→ $e1 = 67.1\ V$, $e2 = -148\ V$, $e3 = 66.3\ V$

۹۷ - $Vo = ?$



حل :با استفاده از روش تحلیل گره و تبدیل تونن نرتن داریم :



برای گره ۱ Kcl $\rightarrow$ $-5 + e_1/5 + (e_1 - e_3)/3 + (e_1 - e_2)/4 = 0 \dashrightarrow 13 e_1 - 3e_2 - 4e_1 = 60$

برای گره ۲ Kcl $\rightarrow$ $(e_2 - e_1)/4 + e_2/3 + (e_2 - e_3)/2 = 0 \rightarrow -3 e_1 + 13 e_2 - 6e_3 = 0$

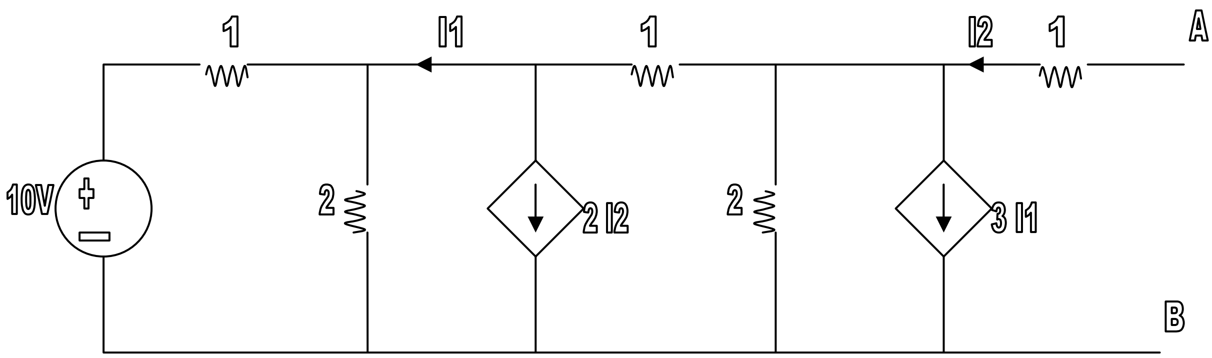
برای گره 3 Kcl $\rightarrow$ $e_3/4 + (e_3 - e_1)/3 + (e_3 - e_2)/2 = 0 \rightarrow -4e_1 - 6e_2 + 13 e_3 = 0$

$$\begin{vmatrix} 13 & -3 & -4 \\ -3 & 13 & -6 \\ -4 & -6 & 13 \end{vmatrix} = 1260$$

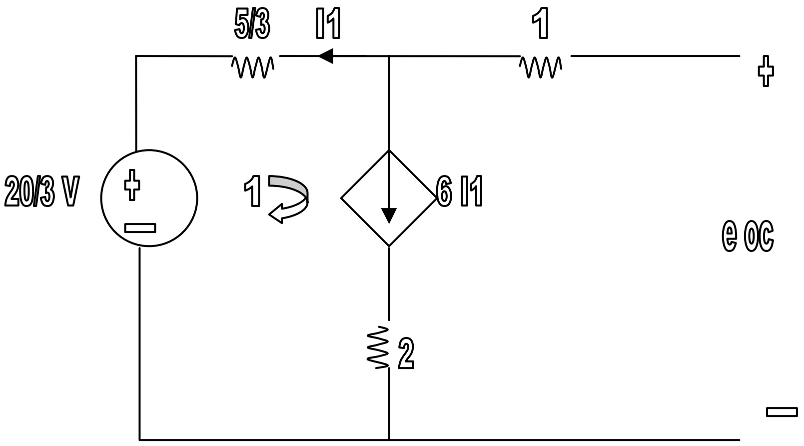
$$\dashrightarrow V_o = e_2 - e_3 = \begin{vmatrix} 13 & 60 & -4 \\ -3 & 0 & -6 \\ -4 & 0 & 13 \end{vmatrix} -1/1260 \begin{vmatrix} 13 & -3 & -4 \\ -3 & 13 & 0 \\ -4 & -6 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\dashrightarrow V_o = 3780/1260 - 4200/1260 = -1/3 \text{ V}$$

مسیله ۹۸-
الف : ولتاز مدار باز e oc را تعیین کنید
ب : جریان اتصال کوتاه i sc را تعیین کنید
ج : مقاومت دو سر A , B را مستقلا تعیین کنید
درستی رابطه e oc=Req I sc را بررسی کنید



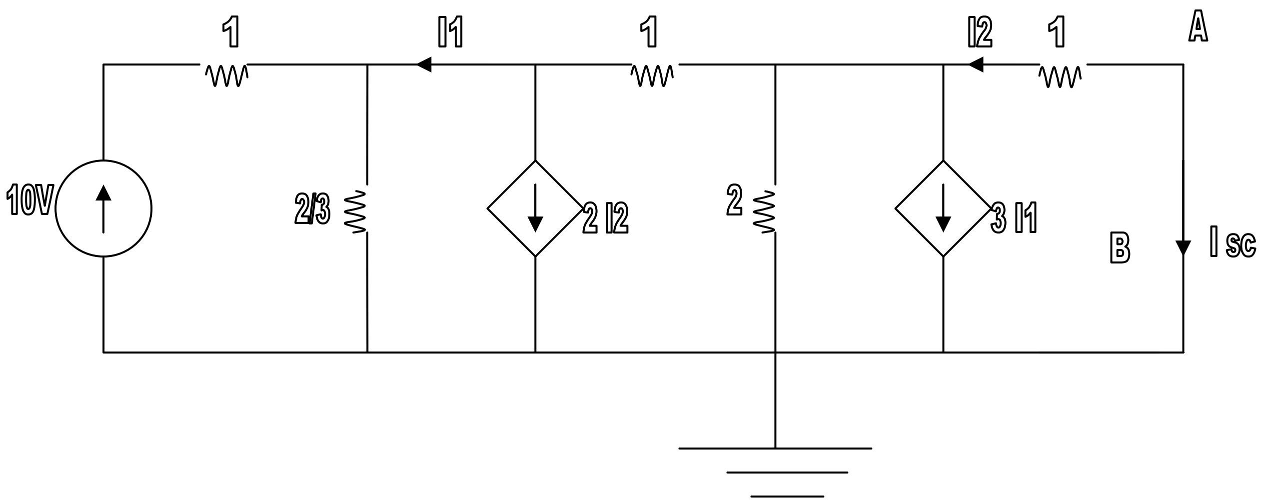
حل : الف- از تبدیل تونن به نرتن و برعکس استفاده خواهیم کرد.همچنین در حالت مدار باز I2=0 خواهد بود بنابر این داریم:



برای مش ۱ Kvl -→-20/3 -5/3 I1 -6 I1 -2 I1 =0 -→ I1 = -20/29

E oc = -6I1 -2 I1 = -8 I1 = 160/29 V

ب:با استفاده از تبدیل تونن به نرتن وبرعکس و با بکارگیری روش تحلیل گره داریم :



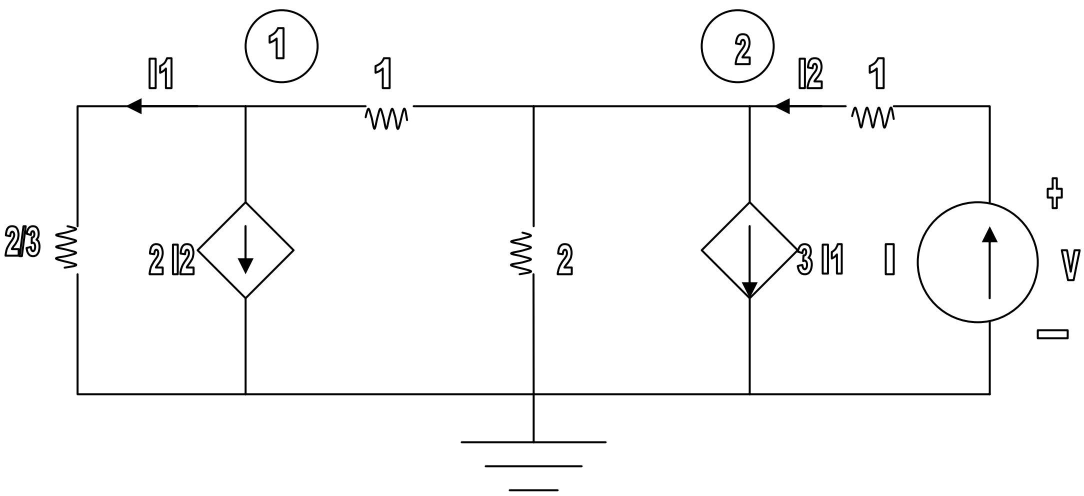
$I2 = -e2/1 = -e2 \quad , \quad I1 = (e1)/(2/3) - 10 = 3e1/2 - 10$

برای گره ۱ Kcl→ $3e1/2 - 10 + 2(-e2) + (e1 - e2)/1 = 0 \rightarrow 5\,e1 - 6\,e2 = 20$

برای گره ۲ Kcl→ $(e2 - e1)/1 + e2/2 + 3(3e1/2 - 10) + e2/1 = 0 \rightarrow 7\,e1 + 5\,e2 = 60$

$$\rightarrow I\,sc = -I2 = e2 = \begin{vmatrix} 5 & 20 \\ 7 & 60 \end{vmatrix} / \begin{vmatrix} 5 & -6 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} = 160/67\ A$$

ج: بدین منظور منبع جریان I را به دو سر A , B وصل کرده و منابع نابسته را برابر صفر قرار میدهیم و با استفاده از روش تحلیل گره ولتاژ دو سر A , B را بدست خواهیم اورد



$I = I2 \quad , \quad I1 = 3e1/2$

برای گره ۱ Kcl → $3e1/2 + 2\,I + (e1 - e2)/1 = 0 \rightarrow 5\,e1 - 2e2 = -4\,I$

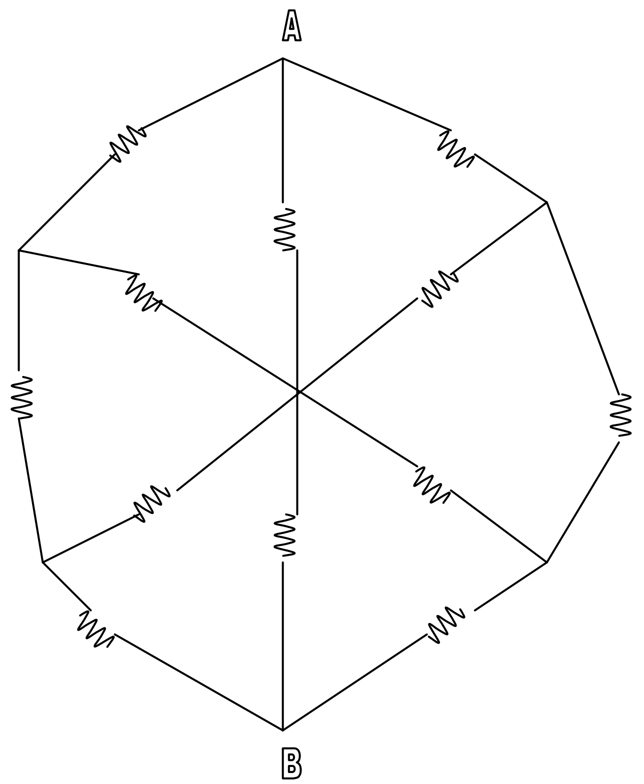
برای گره ۲ Kcl → $(e2 - e1)/1 + e2/2 + 3\,(3e1/2) - I = 0 \rightarrow 7e1 + 3\,e2 = 2$

$$e2 = \begin{vmatrix} 5 & -4I \\ 7 & 2I \end{vmatrix} / \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}$$

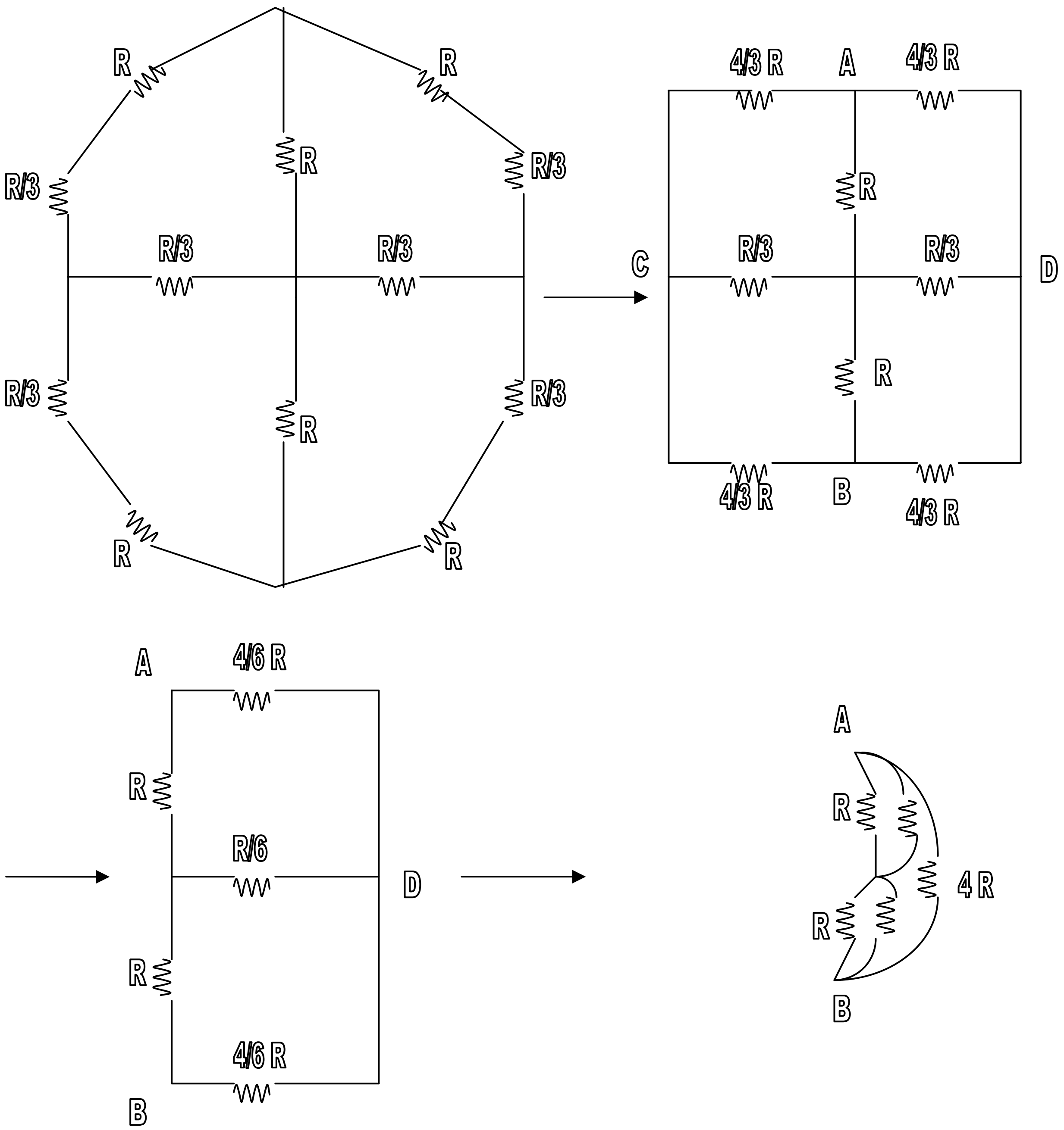
$\rightarrow \;=38I/29\;,\; V = e2 + I = 67/29\, I \;\rightarrow\quad Req = V/I = 67/29$

با توجه به مقادیر بدست امده واضح است که رابطه $e_{oc} = R_{eq} I_{sc}$ برقرار است

مسیله ۹۹-تمامی مقاومت ها R هستند . مقاومت دو سر A , B چیست.



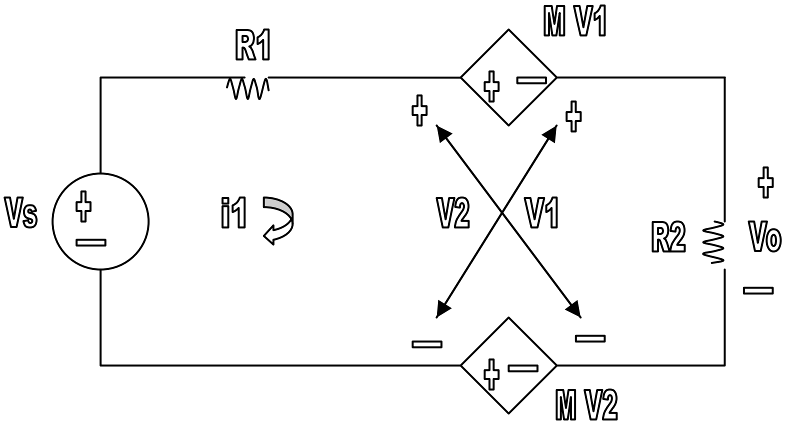
حل : با استفاده از تبدیل مثلث به ستاره و برعکس خواهیم داشت :



$$R_{ab} = [\,(R \parallel R) + (R \parallel R)\,] \parallel 4R = 4/5\,R$$

مسیله ۱۰۰- Vo = ?

S



حل : با توجه به شکل مسیله داریم :

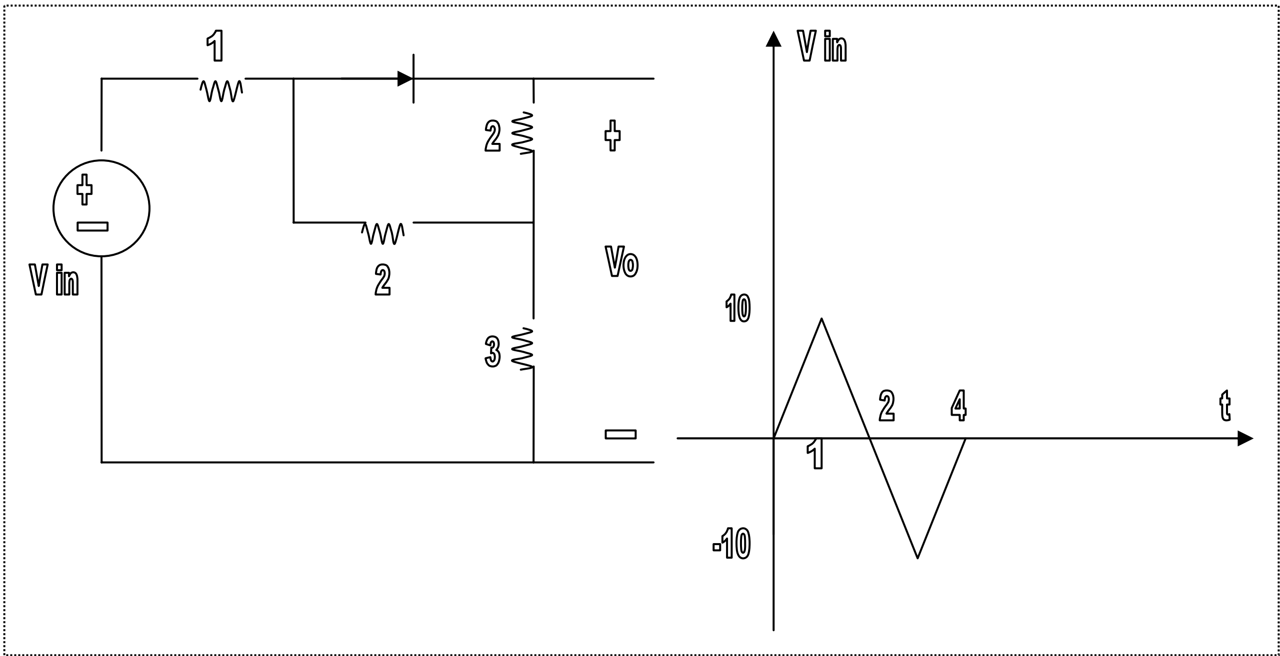
$V1= \mu V1 + i1 R2 \rightarrow V1= R2/(1-\mu) i1$, $V2 = \mu V2 + I R2 \rightarrow V2= R2/(1+\mu) i1$

برای مش ۱ Kvl $\rightarrow - Vs + i1 R1 + \mu V1 + i1R2 – \mu V2 =0$

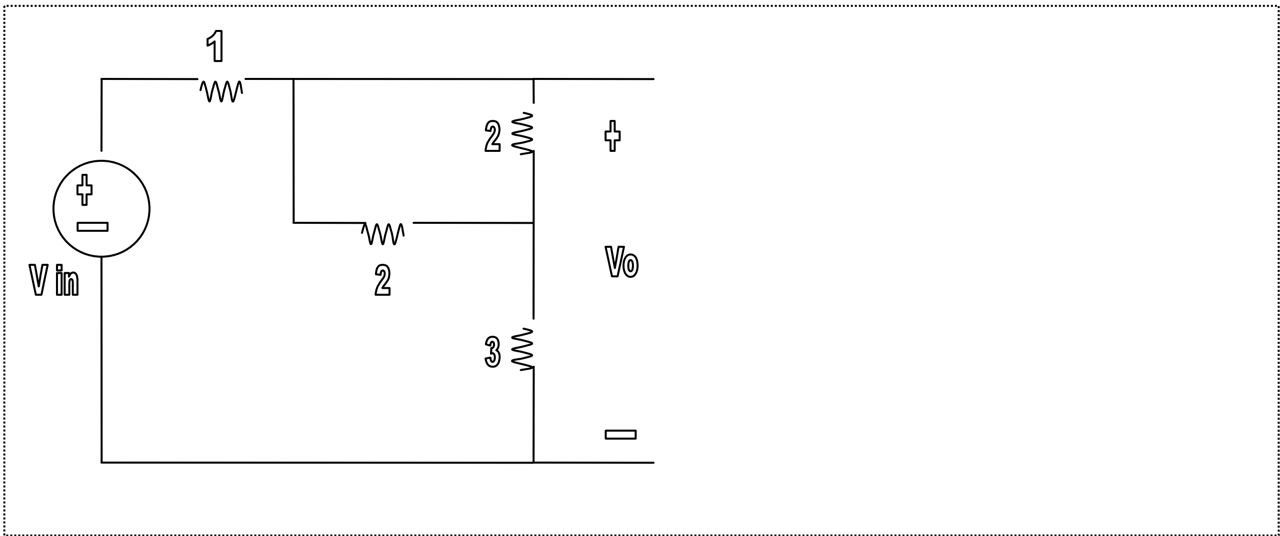
$-Vs + i1 R1 + (\mu R2)/(1-\mu) i1 + i1R2 – \mu R2/(1+\mu) i1 =0$

$i1 = Vs/(R1 + R2 + 2\mu*\mu/(1 –\mu*\mu)R*R) \rightarrow Vo= R2i1 = R2/(R1 +R2 + 2\mu*\mu/(1-\mu*\mu)R*R)Vs$

۱۰۱-شکل موج خروجی Vo را تعیین کنید

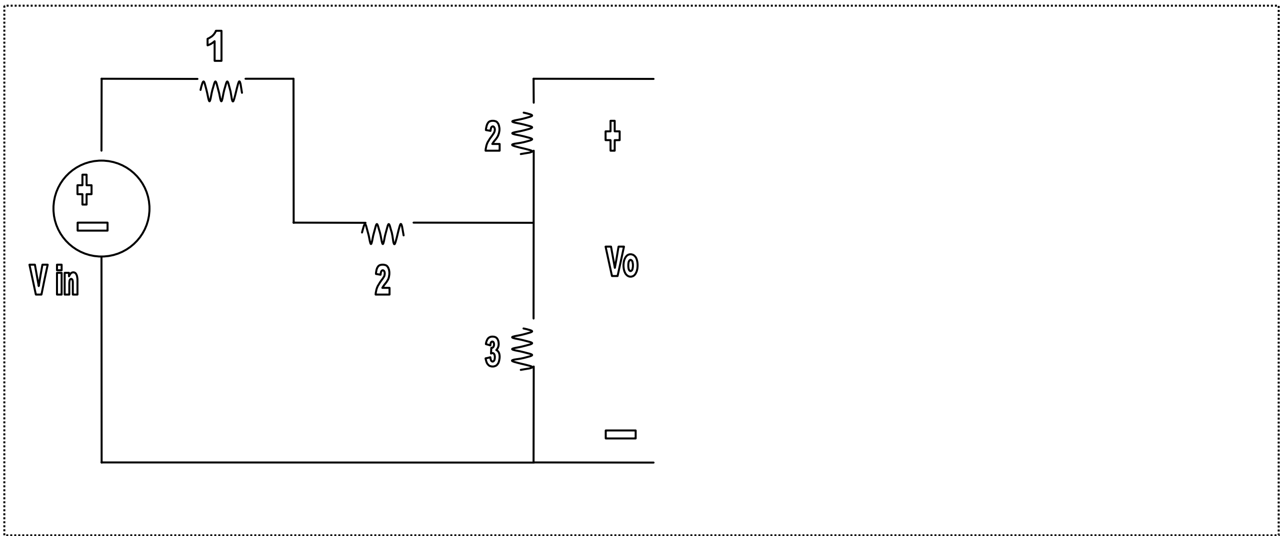


حل : به ازای $V\ in > 0$ و یا $0 < t < 2$ دیود اتصال کوتاه است



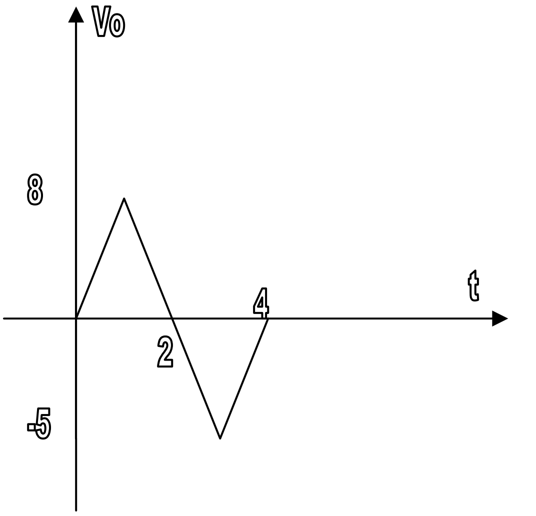
$$Vo =([(2 \parallel 2) + 3] / [1 +(2\parallel2) + 3]) V\ in = 4/5\ V\ in$$

و به ازای $Vin < 0$ و یا $2 < t < 4$ دیود مدار باز است

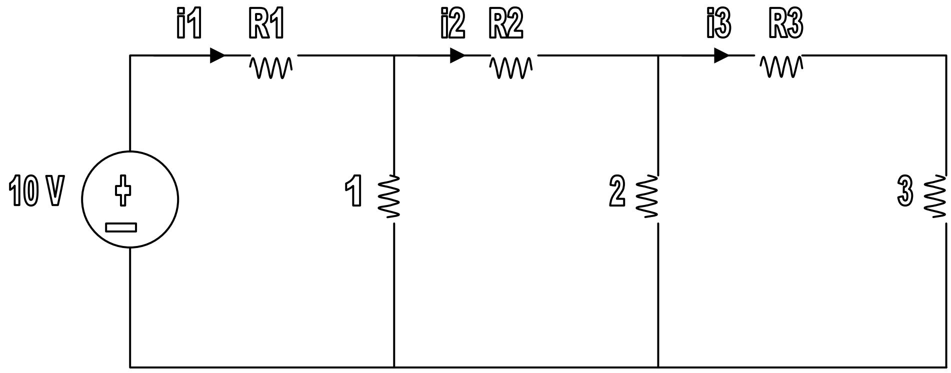


$$Vo = [3 /(1 + 2 + 3)]\ V\ in = 1/2\ Vin$$

بنابر این شکل موج Vo به صورت زیر می باشد



۱۰۲- R1 , R2 , R3 را چنان انتخاب کنید که $i1/9 = i2/3 = i3/1$ باشد



حل : با توجه به شکل و با استفاده از قاعده تقسیم جریان داریم :

$i3 = 2/(2+3 + R2)\ \ i2 = 2/(5+ R3)\ i2 \rightarrow 2/(5+ R3) +1/3 \rightarrow R3 =1$

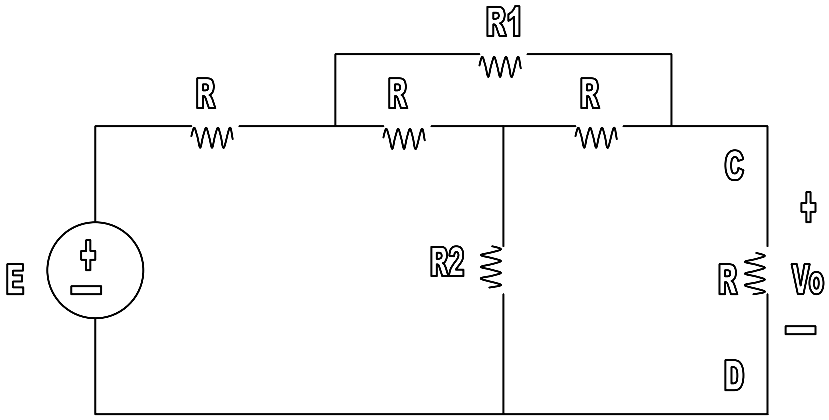
$i2 = 1/(2+ 4/3 + R2)\ i1 = 1/(7/3 + R2)\ i1 \rightarrow 1/(7/3+ R2) =1/3 \rightarrow R2 =2/3$

از انجا که مقدار معینی برای i1 در نظر گرفته نشده لذا R1 هر مقداری را می تواند داشته باشد

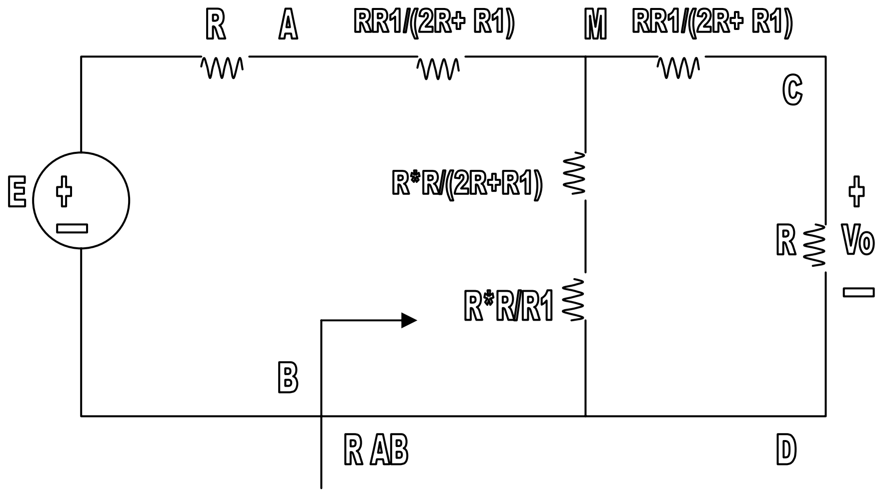
۱۰۳-

الف- اگر $R1R2 = R*R$ انگاه نشان دهید مقاومت سمت راست دوسر A , B برابر R بوده و
$Vo = 1/2 [R/(R + R1)] E$

ب- مدار معادل تونن سمت چپ نقاط C , D چیست



حل: الف- با استفاده از تبدیل مثلث به ستاره و با توجه به اینکه $R1\ R2 = R*R$ داریم :



$$R\,AB = RR1/(2R+R1) + [\,R*R/(2R+R1) + R*R/R1\,] \,||\, [\,R + RR1/(2R+R1)]$$

$$= RR1/(2R+R1) + [\,(2R1R*R + 2R*R)/(R1(2R+R1))] \,||\, [(2R1R+2R*R)/(2R+R1)]$$

$$= RR1/(2R+R1) + 2R*R/(2R+R1) = R(2R+R1)/(2R+R1) = R$$

در ادامه با استفاده از قانون تقسیم ولتاژ خواهیم داشت :

$$E\,AB = R\,AB/(R + R\,AB)\,E = R/(R+R)\,E = E/2$$

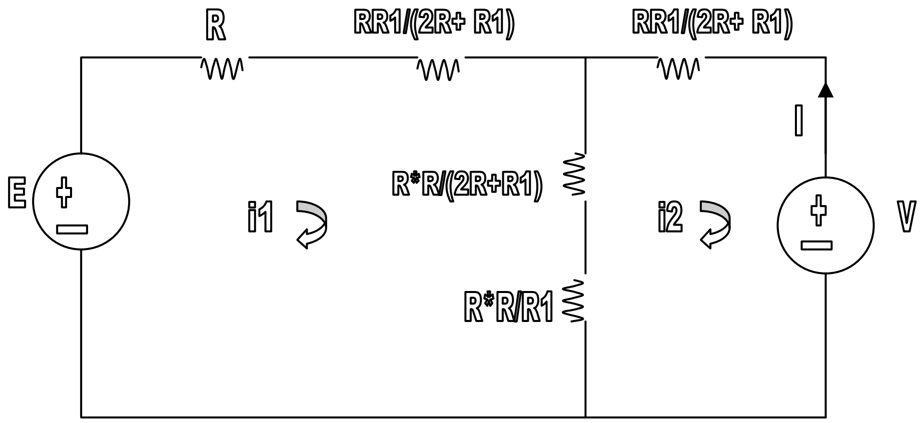
$$E\,MB = R\,MB/(R\,AM + R\,MB)\,E\,AB =$$

$$= [2R*R/(2R+R1)] / [\,RR1/(2R+R1) + 2R*R/(2R+R1)\,]\,E/2 = R/(2R+R1)\,E$$

$$Vo = R\,CD/(R\,MC + R\,CD)\,E\,MB =$$

$$= R/[RR1/(2R+R1) + R]\;*[R/(2R+R1)\,E] = 1/2\,R/(R+R1)\,E$$

ب- بدین منظور منبع ولتاژ ازمایشی V را به دو سر C , D و به جای Rوصل کرده و با استفاده از تحلیل مش جریان گذرنده از ان را محاسبه خواهیم کرد



Kvl برای مش ۱ → $-E + [\,R+ RR1/ (2R + R1)]i1 +[R*R/(2R+R1) +R*R/R1](i1-i2)=0$

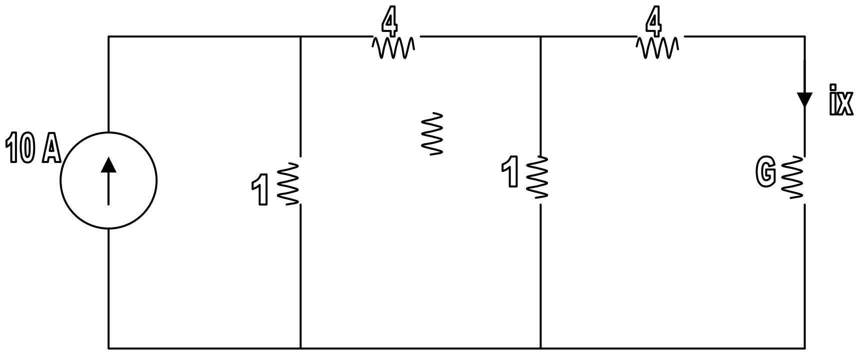
Kvl برای مش ۲ → $[R*R/ (2R + R1) +R*R/R1](i2-i1) + RR1/(2R +R1)\, i2 +V =0$

$$\left\{ \begin{array}{l} [(2R*R*R +4\, R*RR1 + 2RR1*R1) / (R\,(2R+R1))]i1 + R*R /R1\; i2 =E \\ (2R*R*R + 2R*RR1) /(R1(2R+R1))\; i1 -(2R*R*R + 2R*RR1 + RR1*R1) /(R1(2R+R1))\; i2=V \end{array} \right.$$

$$i2 = -\frac{\begin{vmatrix} \dfrac{2\,R*R*R + 4\,R*R\,R1 + 2\,R\,R1*R1}{R1\,(2R+R1)} & E \\ \dfrac{2\,R*R*R + 2\,R*R\,R1}{R1\,(2R+R1)} & V \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \dfrac{2\,R*R*R + 4\,R*R\,R1 + 2R\,R1^{2}}{R1\,(2R+R1)} & -\dfrac{R*R}{R1} \\ \dfrac{2\,R*R*R + 2\,R*R\,R1}{R1\,(2R+R1)} & -\dfrac{2\,R*R*R + 2\,R*R\,R1^{2}}{R1\,(2R+R1)} \end{vmatrix}} = \frac{V}{R} - \frac{E}{R+R1}$$

$\rightarrow\;\; V = RI + R / (R+R1)\, E \;\rightarrow\;\; Rth = R \;,\;\; e\,oc = R /(R+R1)\, E$

۱۰۴- اگر $ix = 5A$ باشد انگاه $G = ?$ رسانا یی ها بر حسب مهو هستند



حل : با توجه به شکل مدار داریم :

G bc = H 4G/(4+ G) = (4+ 5G) / (4+G) →

→ G ac = [4* (4+5G) / (4+G)] / [4+ (4+5G)/(4+G)] = (16+ 20G) /(20+ 9G)

حال بنا بر قاعده تقسیم جریان می توان نوشت :

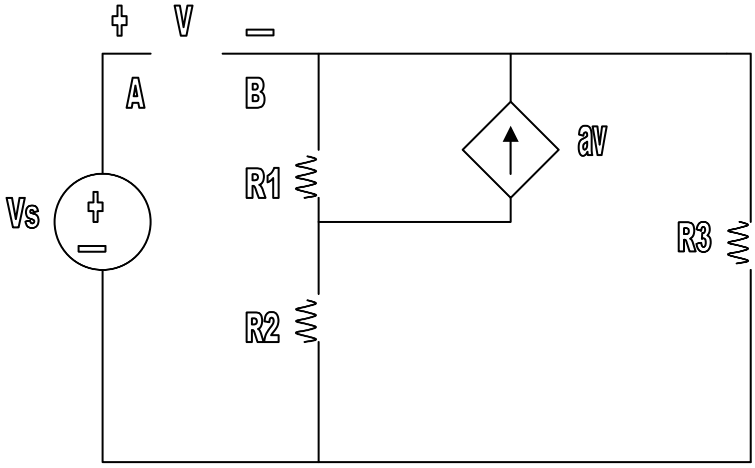
i = [(16 + 20G) / (20 + 9G)] / [1 + (16 + 20G) / (20 + 9G)] 10=

→ =(16 + 20G) / (36 + 29G) 10

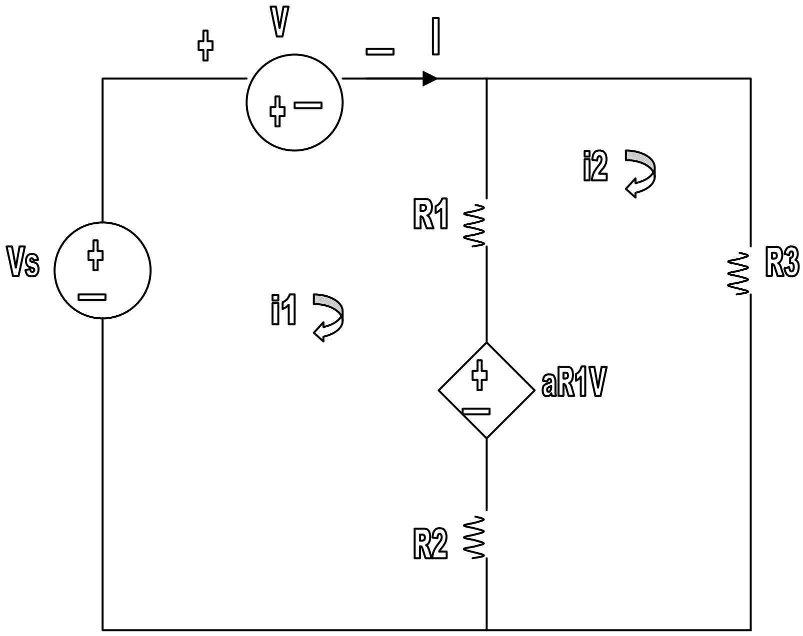
ix = [4G/(4+G)] / [1+ 4G /(4+G)]*I =[4G/(4+ 5G)] * [(16+20G)/ (36+29G)] *10

ix = 5 → [4G / (4+G)]* [(16+20G) / (36 + 29G)] = 1/2 → G = 12 (مهو)

۱۰۵- معادله تونن نرتن دو سر B , A را تعیین کنید



حل : بدین منظور منبع ولتاز ازمایشی V را به دو سر A ,B وصل کرده و با بکار بردن تبدیل تونن به نرتن و با استفاده از روش تحلیل مش جریان شاخه AB را بدست خواهیم اورد



$$v = V \quad , \quad I = i1$$

برای مش ۱ kvl → $-Vs + V + R1(i1 - i2) + aR1V + R2\,(i1 - i2) = 0$

برای مش ۲ kvl → $R2(\,i2 - i1\,) - aR1V + R1(\,i2 - i1\,) + R3i2 = 0$

→ $\{\ (R1 + R2\,)\,i1 - (R1 - R2)\,i2 = Vs - (\,1 + aR1)\,V$

$-(\,R1 + R2\,)\,i1 + (R1 + R2 + R3)\,i2 = aR1V\ \}$

R1R3

R1R3

R1R3

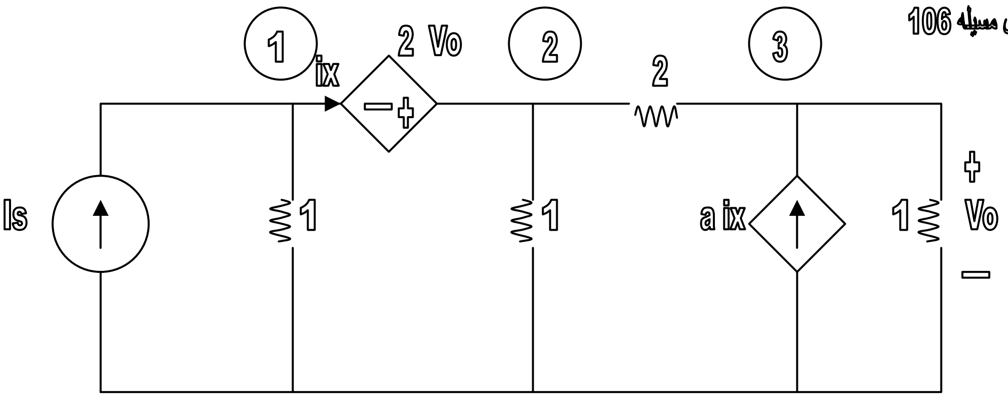
$$\rightarrow I = i_1 = \frac{\begin{vmatrix} V_s - (1+a\,R_1) & -(R_1+R_2) \\ a\,R_1\,V & \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_1+R_2 & -(R_1+R_2) \\ -(R_1+R_2) & \end{vmatrix}}$$

$$\frac{(R_1+R_2+R_3)\,V_s - (R_1+R_2+R_3+a\,R_1\,R_3)\,V}{(R_1+R_2)\,R_3}$$

$$\rightarrow V = \frac{(R_1+R_2)\,R_3}{\quad} I - \frac{R_1+R_2+R_3}{R_1+R_2+R_3+a\,R_1\,R_3} V_s$$

$$\rightarrow R_{th} = \frac{(R_1+R_2)\,R_3}{R_1+R_2+R_3+a\,R_1\,R_3} \qquad e_{oc} = \frac{R_1+R_2+R_3}{R_1+R_2+R_3+a\,R_1\,R_3} V_s$$

شكل مسئله 106



۱۰۶- Vo را به ازای بدست اورید
اگر a=1 شود ایا می توان Vo را حساب کرد

حل : با استفاده از روش تحلیل گره داریم :

$ix = Is - e1/1$, $Vo = e3$, $e2 - e1 = 2Vo = 2e3 \rightarrow e1 - e2 + 2e3 = 0$

kvl برای گره ۳ $\rightarrow (e3 - e2) / 2 + a(Is - e1) + e3/1 = 0 \rightarrow 2ae1 - e2 + 3e2 = 2aIs$

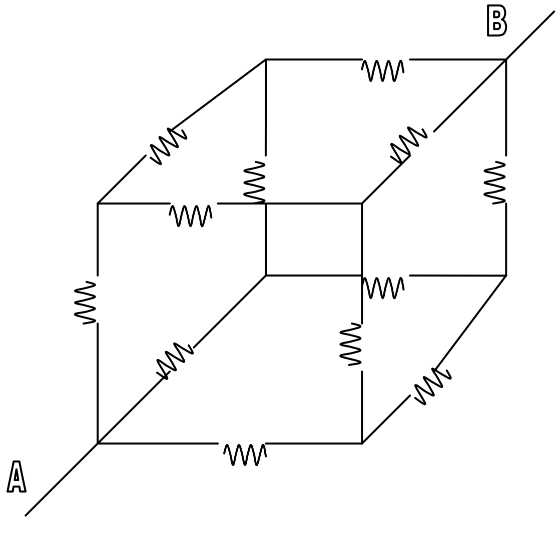
Kcl برای گره مرکب شامل گره های ۱ و ۲ $\rightarrow IS + e1/1 + e2/1 + (e2 - e3) /2 = 0$

$\rightarrow 2e1 + 3e2 - e3 = 2\ Is$

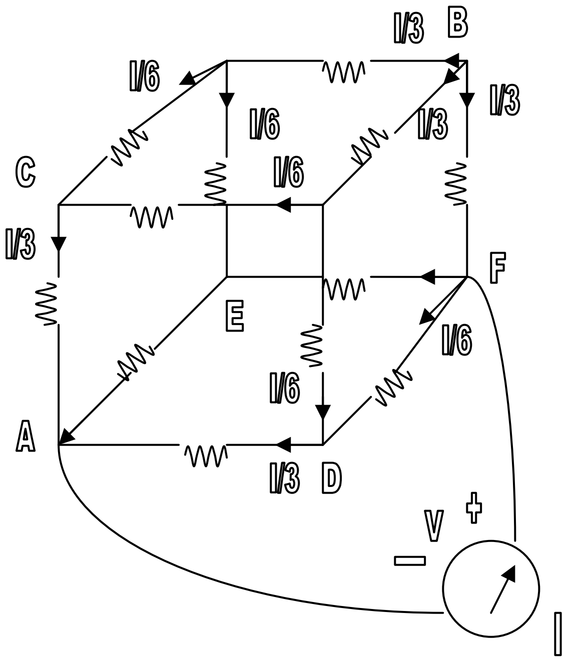
$$\longrightarrow Vo = e3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2a & -1 & 2aIs \\ 2 & 3 & 2\ Is \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2a & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}}$$

اگر a=1 باشد واضح است که V0 نا معین شده و نمی توان ان را حساب کرد

۱۰۷-مقاومت معادل دو سر A , B را تعیین کنید.(مقاومت هر یال برابرR است)



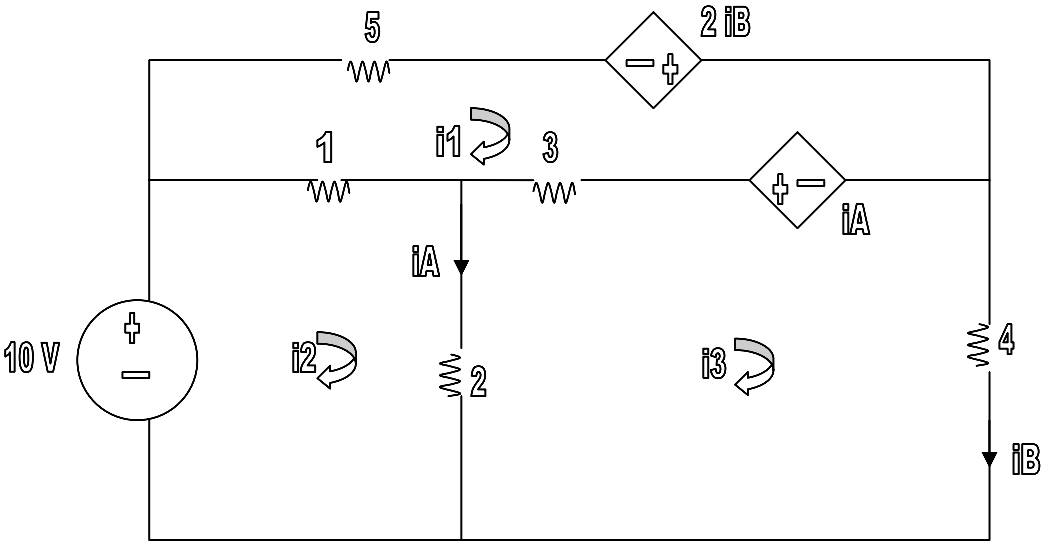
حل : بدین منظور منبع جریان ازمایشی I را به دو سر A , B وصل کرده و با توجه به تقارن مدار جریان شاخه ها را تعیین خواهیم کرد



با نوشتن معادله kvl در حلقه ABFEA داریم :

$$-V + I/3\ R + I/6\ R + I/3\ R = 0\ ,\ \rightarrow\ V = 5/6\ IR\ \rightarrow\ Req = V / I = 5/6\ R$$

۱۰۸- مدار شکل مسیله ۱۰۸ را به روش مش تحلیل کنید و ia , ib را بدست اورید



حل : با توجه به شکل مسیله داریم :

$iA = i2 - i3$, $iB = i3$

۱ برای مش kvl → $5\,i1 - 2(i3) - (i2 - i3) + 3(i1 - i2) + (i1 - i2) = 0$

۲ برای مش kvl → $-10 + (i2 - i1) + 2(i2 - i3) = 0$

۳ برای مش kvl → $2(i3 - i2) + 3(i3 - i1) + (i2 - i3) + 4\,i3 = 0$

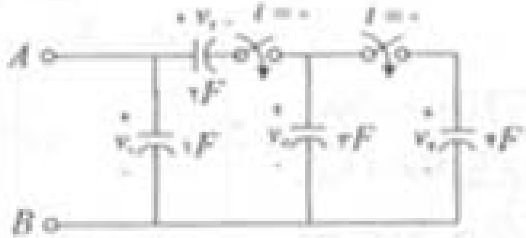
$$\rightarrow \begin{cases} 9\,i1 - 2\,i2 - 4\,i3 = 0 \\ -i1 + 3\,i2 - 2\,i3 = 10 \\ -3\,i1 - i2 + 8\,i3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 9 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & -2 \\ -3 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 130 \longrightarrow i2 = 1/130 \begin{vmatrix} 9 & 0 & -4 \\ -1 & 10 & -2 \\ 3 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 60/13\ A$$

$$i3 = 1/130 \begin{vmatrix} 9 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 10 \\ -3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 15/13\ A$$

→ $iA = i2 - i3 = 60/13 - 15/13 = 45/13\ A$, $iB = i3 = 15/13\ A$

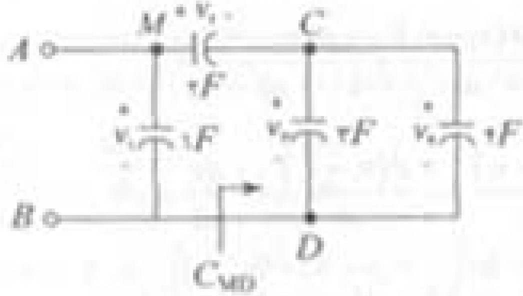
مسئله ۱



$v_1(0^-)=1V$ ، $v_2(0^-)=2V$ ، $v_3(0^-)=3V$ و $v_4(0^-)=4V$ در لحظه $t=0$ کلیدها بسته می شوند. ظرفیت خازن معادل دو سر A و B چیست.

شکل مسئله ۱

حل : بعد از بسته شدن کلید ها مدار به صورت زیر خواهد بود.



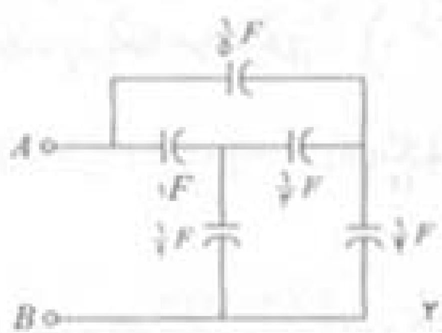
$$q_{\text{کل}} = C_1v_1(0^-)+C_2v_2(0^-)+C_3v_3(0^-)+C_4v_4(0^-) = 1+4+9+16 = 30 \rightarrow q_1+q_{MD}=30$$

$$v_1 = v_{MD} \rightarrow \frac{q_1}{C_1}=\frac{q_{MD}}{C_{MD}} \rightarrow \frac{q_1}{1}=\frac{q_{MD}}{\frac{(3+4)\times 2}{2+3+4}} \rightarrow q_{MD}=\frac{14}{9}q_1 \rightarrow C_{MD}=\frac{14}{9}F$$

$$\rightarrow \begin{cases} q_1+q_{MD}=30 \\ q_{MD}=\frac{14}{9}q_1 \end{cases} \rightarrow q_1=\frac{270}{23} \rightarrow v_{AB}(0)=v_1=\frac{q_1}{C_1}=\frac{270}{23}V$$

$$C_{AB}=C_1+C_{MD}=1+\frac{14}{9}=\frac{23}{9}F$$

مسئله ۲

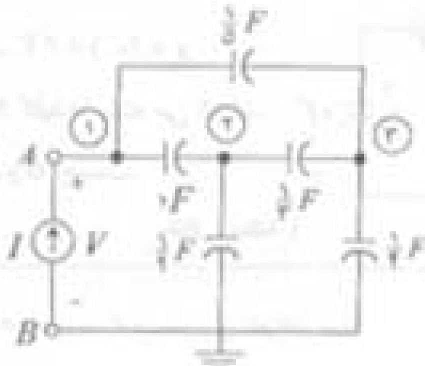


$C_{AB}=?$ (خازنها دارای بار اولیه نمی باشند)

خازنهای فوق را با مقاومت هایی که رسانایی آنها همان ظرفیت خازنها باشد تعویض می کنیم؟ $R_{AB}=?$.

شکل مسئله ۲

حل : بدین منظور منبع جریان آزمایش I را به دو سر A و B وصل کرده و ولتاژ دو سر آن را بدست می آوریم.



$$\text{KCL برای گره ۱} \rightarrow -I+\frac{d(v_1-v_2)}{dt}+\frac{1}{5}\frac{d(v_1-v_3)}{dt}=0$$

$$\text{KCL برای گره ۲} \rightarrow \frac{d(v_2-v_1)}{dt}+\frac{1}{3}\frac{d(v_2-v_3)}{dt}+\frac{1}{2}\frac{dv_2}{dt}=0$$

$$\text{KCL برای گره ۳} \rightarrow \frac{1}{5}\frac{d(v_3-v_1)}{dt}+\frac{1}{3}\frac{d(v_3-v_2)}{dt}+\frac{1}{4}\frac{dv_3}{dt}=0$$

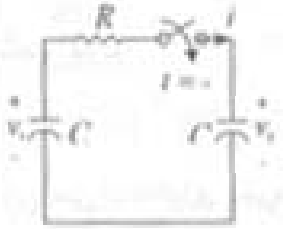
$$\rightarrow \begin{cases} 6\frac{dv_1}{dt}-5\frac{dv_2}{dt}-\frac{dv_3}{dt}=5I \\ 6\frac{dv_1}{dt}-11\frac{dv_2}{dt}+2\frac{dv_3}{dt}=0 \\ 12\frac{dv_1}{dt}+20\frac{dv_2}{dt}-47\frac{dv_3}{dt}=0 \end{cases} \rightarrow \frac{dV}{dt}=\frac{dv_1}{dt}=\frac{\begin{vmatrix} 5I & -5 & -1 \\ 0 & -11 & 2 \\ 0 & 20 & -47 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 & -5 & -1 \\ 6 & -11 & 2 \\ 12 & 20 & -47 \end{vmatrix}}=\frac{53}{24}I$$

$$\rightarrow I=\frac{24}{53}\frac{dV}{dt} \rightarrow C_{AB}=\frac{24}{53}F$$

حال اگربجای خازنهامقاومتهایی که رسانایی آنها همان ظرفیت خازنها باشدتعویض کنیم،واضح است که معادلات بصورت زیر تغییر خواهند کرد.

$$\begin{cases} 6v_1-5v_2-v_3=5I \\ 6v_1-11v_2+2v_3=0 \\ 12v_1+20v_2-47v_3=0 \end{cases} \rightarrow V=v_1=\frac{53}{24}I \rightarrow R_{AB}=\frac{V}{I}=\frac{53}{24}\Omega$$

مسئله ۳



شکل مسئله ۳

$v_1(0^-)=V_1$ و $v_2(0^-)=V_2$

الف- $i(t)$ برای $t \ge 0$ و انرژی تلف شده درفاصله $(0,T)$ راحساب کنید.

ب- $v_1,v_2=?$ حد v_1 و v_2 برای $t \to \infty$ راتعیین کنید.برای $t \to \infty$ انرژی ذخیره شده در خازنها و انرژی تلف شده در مقاومت را نیز حساب کنید. چه رابطه ای میان انرژی ها وجود دارد.

پ- اگر $R \to 0$ چه اتفاقی رخ می دهد و توجیه مقادیر بدست آمده در قسمت (ب) چیست.

حل: الف ـ با توجه به مقادیر اولیه داده شده و با توجه به شکل مسئله داریم:

$$i(0)=\frac{v_1(0)-v_2(0)}{R}=\frac{V_1-V_2}{R} \quad , \quad \frac{dv_1}{dt}=-\frac{i}{c} \quad , \quad \frac{dv_2}{dt}=\frac{i}{c}$$

$$KVL \to -v_1+iR+v_2=0 \to -v_1-\frac{1}{c}\int(-i)\,dt+iR+v_2+\frac{1}{c}\int i\,dt=0$$

$$\to \frac{di}{dt}+\frac{2}{Rc}i=0 \to i(t)=ke^{-\frac{2}{Rc}t}$$

$$i(0)=\frac{V_1-V_2}{R} \to \frac{V_1-V_2}{R}=k \to i(t)=\frac{V_1-V_2}{R}e^{-\frac{2}{Rc}t} \ , \ t \ge 0$$

$$W_R(0,T)=\int_0^T Ri^2(t)\,dt=\int_0^T R\left(\frac{V_1-V_2}{R}\right)^2 e^{-\frac{4}{Rc}t}\,dt=\frac{C(V_1-V_2)^2}{4}\left(1-e^{-\frac{4}{Rc}T}\right)$$

ب ـ با توجه به شکل مسئله داریم:

$$v_1=V_1+\frac{1}{C}\int_0^t(-i)\,dt=V_1-\frac{V_1-V_2}{RC}\int_0^t e^{-\frac{2}{Rc}t}\,dt=\frac{V_1-V_2}{2}e^{-\frac{2}{Rc}t}+\frac{V_1+V_2}{2} \to \lim_{t\to\infty} v_1=\frac{V_1+V_2}{2}$$

$$v_2=V_2+\frac{1}{C}\int_0^t i\,dt=V_2+\frac{V_1-V_2}{RC}\int_0^t e^{-\frac{2}{Rc}t}\,dt=\frac{V_2-V_1}{2}e^{-\frac{2}{Rc}t}+\frac{V_1+V_2}{2} \to \lim_{t\to\infty} v_2=\frac{V_1+V_2}{2}$$

$$W_{C_1}(\infty)=\frac{1}{2}C\left(\lim_{t\to\infty} v_1\right)^2=\frac{1}{8}C(V_1+V_2)^2 \quad , \quad W_{C_2}(\infty)=\frac{1}{2}C\left(\lim_{t\to\infty} v_2\right)^2=\frac{1}{8}C(V_1+V_2)^2$$

انرژی تلف شده در مقاومت به ازای $t \to \infty$ برابراست با:

$$W_R(0,\infty)=\lim_{T\to\infty}\frac{C(V_1-V_2)^2}{4}\left(1-e^{-\frac{4}{Rc}T}\right)=\frac{1}{4}C(V_1-V_2)^2$$

انرژی ذخیره شده اولیه در خازنها برابر است با :

$$W_{C1}(0)+W_{C2}(0)=\frac{1}{2}CV_1^2+\frac{1}{2}CV_2^2$$

همچنین داریم :

$$W_{C1}(\infty)+W_{C2}(\infty)+W_R(0,\infty)=\frac{1}{2}C(V_1+V_2)^2+\frac{1}{2}C(V_1-V_2)^2=\frac{1}{2}CV_1^2+\frac{1}{2}CV_2^2$$

و این یعنی اینکه انرژی ذخیره شده درخازنها در ابتدای کار برابر انرژی نهایی ذخیره شده درخازنها بعلاوهٔ انرژی تلف شده در مقاومت می باشد.(اصل بقای انرژی)

پ ـ با قرار دادن $R\to 0$ داریم :

$$i(t)=0\ ,\ v_1(t)=v_2(t)=\frac{V_1+V_2}{2}\ ,\ W_R(0,\infty)=0$$

در این حالت انرژی تلف شده به صورت انرژی حرارتی مقاومت R نخواهد بود و این اتلاف انرژی بواسطه جریان ضربه ای بعد از بسته شدن کلید می باشد که در ادامه آن را بدست خواهیم آورد. بدین منظور انتگرال $i(t)$ را در فاصله ۰ تا t حساب می کنیم.

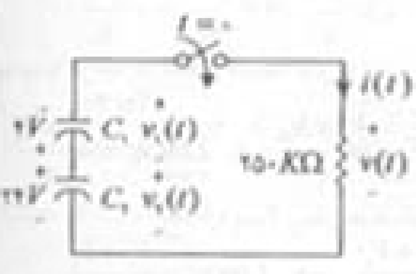
$$\int_0^t i(t')dt'=\int_0^t\frac{V_1-V_2}{R}e^{-\frac{t'}{2RC}}dt'=2C(V_1-V_2)\left(1-e^{-\frac{t}{2RC}}\right)$$

واضح است که اگر $R\to 0$ شود ، آنگاه $\int_0^t i(t')dt'=2C(V_1-V_2)$ شده و بنابر خاصیت تابع ضربه،

$$i(t)=2C(V_1-V_2)\delta(t)$$

می باشد که یک جریان ضربه با شدت $2C(V_1-V_2)$ در لحظه $t=0$ است.

مسئله ۴



شکل مسئله ٤

$v_1(0^-)=-4\,V$ ، $v_2(0^-)=24\,V$ ، $C_1=5\mu F$ و $C_2=20\mu F$.

الف- برای $t\geq 0^+$ ، $v_1(t)$ ، $v_2(t)$ ، $v(t)$ و $i(t)$ را بیابید.

ب- انرژی ذخیره شده اولیه در خازنهای C_1 و C_2 را تعیین کنید.

پ- انرژی تلف شده در مقاومت $250K\Omega$ راتعیین کنید.آیا همه انرژی اولیه خازنها به مقاومت تحویل داده میشود.توضیح دهید.

حل : الف ـ با توجه به شکل مسئله $i(0)=\frac{v_1(0)+v_2(0)}{250K\Omega}=\frac{20V}{250K\Omega}=80\mu A$ بوده و با نوشتن KVL در تنها حلقه مدار داریم .

$$-v_1 - v_2 + v = ۰ \;\rightarrow\; -۲۴ - \frac{۱}{۲۰\times ۱۰^{-۶}}\int_۰^t i(t)\,dt + ۴ - \frac{۱}{۵\times ۱۰^{-۶}}\int_۰^t i(t)\,dt + ۲۵۰\times ۱۰^{۳}\, i(t) = ۰$$

$$\rightarrow\; \frac{di(t)}{dt} + i(t) = ۰ \;\rightarrow\; i(t) = Ke^{-t}$$

$$i(۰) = ۸۰\ \mu A \;\rightarrow\; K = ۸۰\times ۱۰^{-۶} \;\rightarrow\; i(t) = ۸۰\times ۱۰^{-۶} e^{-t}$$

$$v(t) = ۲۵۰\times ۱۰^{۳}\, i(t) = ۲۰e^{-t}$$

$$v_1(t) = V_۰ + \frac{۱}{C}\int_۰^t -i(t')\,dt' = -۴ - \frac{۱}{۵\times ۱۰^{-۶}}\int_۰^t ۸۰\times e^{-t}dt = -۲۰ + ۱۶e^{-t}$$

$$v_2(t) = v(t) - v_1(t) = ۲۰e^{-t} - \left(-۲۰ + ۱۶e^{-t}\right) = ۲۰ + ۴e^{-t}$$

ب - انرژی ذخیره شده اولیه در خازنها بصورت زیر بدست می آید.

$$W_1(۰) = \frac{۱}{۲}C_1 v_1^2(۰) = \frac{۱}{۲}\times ۵\times ۱۰^{-۶}\times (۴)^2 = ۴\times ۱۰^{-۵}\ W$$

$$W_2(۰) = \frac{۱}{۲}C_2 v_2^2(۰) = \frac{۱}{۲}\times ۲۰\times ۱۰^{-۶}\times (۲۴)^2 = ۵۷۶\times ۱۰^{-۵}\ W$$

پ - انرژی کل ذخیره شده در مقاومت بصورت زیر بدست می آید.

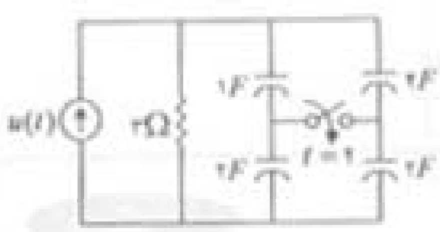
$$W(۰,t) = \int_۰^t Ri^2(t) = ۲۵۰\times ۱۰^{۳}\int_۰^t \left(۸۰\times ۱۰^{-۶}e^{-t}\right)^2 = ۸۰\times ۱۰^{-۵}\left(۱ - e^{-۲t}\right)$$

$$W(۰,\infty) = \lim_{t\to\infty} ۸۰\times ۱۰^{-۵}\left(۱ - e^{-۲t}\right) = ۸۰\times ۱۰^{-۵}\ W$$

بنابراین همه انرژی ذخیره شده اولیه خازنها به مقاومت تحویل داده نمی شود.

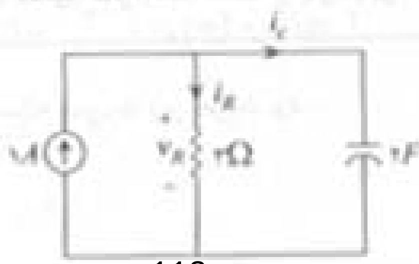
مسئله ۵

ولتاژ اولیه خازنها صفر است. ولتاژ مقاومت ۳ اهمی را برای تمام $t > ۰$ حساب کنید.



شکل مسئله ۵

حل: در فاصله $۲ > t > ۰$، کلید باز بوده، بنابراین $C_{eq} = \frac{۱\times ۲}{۱+۲} + \frac{۲\times ۲}{۲+۲} = ۲F$ و مدار بصورت زیر خواهد بود.



می دانیم که خازن ابتدا اتصال کوتاه بوده و در نهایت مدار باز خواهد شد. بنابراین داریم :

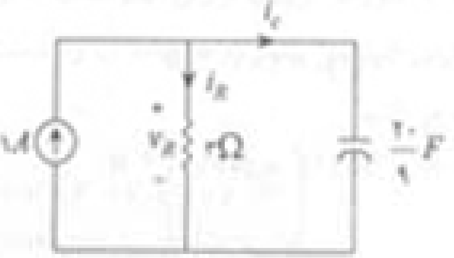
$$v_R(0)=0\ ,\ \ v_R(\infty)=2V\ ,\ \ T=RC=6$$

$$\rightarrow\ v_R(t)=\left(v_R(0)-v_R(\infty)\right)e^{-\frac{t}{6}}+v_R(\infty)=(0-2)e^{-\frac{t}{6}}+2=2\left(1-e^{-\frac{t}{6}}\right)$$

و یا با فرض $v_x(t)=a+be^{-\frac{t}{6}}$ و با اعمال شرایط فوق داریم:

$$\begin{cases} v_R(0)=0 \ \rightarrow\ a+b=0 \\ v_R(\infty)=2 \ \rightarrow\ a+0=2 \end{cases} \rightarrow\ a=2\ ,\ b=-2\ \rightarrow\ v_R(t)=2\left(1-e^{-\frac{t}{6}}\right)$$

و برای $t>2$ ، کلید بسته بوده بنابراین $C_{eq}=\dfrac{(1+4)\times(2+2)}{(1+4)+(2+2)}=\dfrac{20}{9}$ و مدار بصورت زیر خواهد بود.



$$v_R(2)=2\left(1-e^{-\frac{t}{6}}\right)\Big|_{t=2}=0.77\ ,\ \ v_R(\infty)=2V\ ,\ \ T=RC=\frac{20}{3}$$

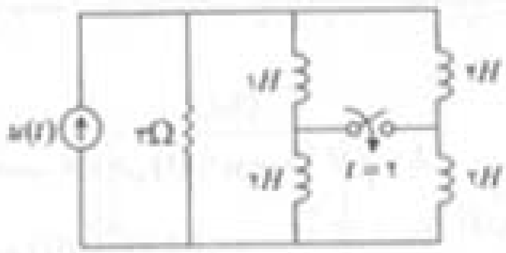
$$\rightarrow\ v_R(t)=\left(v_R(2)-v_R(\infty)\right)e^{-\frac{(t-2)}{T}}+v_R(\infty)=(0.77-2)e^{-\frac{(t-2)}{\frac{20}{3}}}+2=2-1.23e^{-0.15(t-2)}$$

$$\rightarrow\ v_R(t)=\begin{cases} 2\left(1-e^{-\frac{t}{6}}\right) & ,\ 0\le t<2 \\ 2-1.23e^{-0.15(t-2)} & ,\ t\ge 2 \end{cases}$$

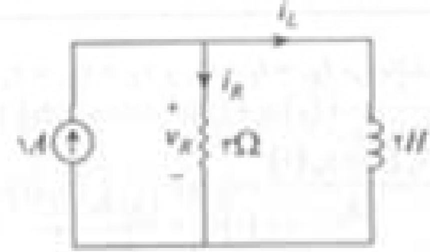
مسئله ۶

در شکل مسئله ۵ همه خازنها را با سلفهایی با اندوکتانس مساوی ظرفیت خازنها تعویض کرده و فرض کنید جریان اولیه همه سلفها صفر باشد. مسئله را بار دیگر حل کنید.

حل : در این حالت شکل مسئله بصورت زیر خواهد بود.



برای ۲ > t > ۰، کلید بازمی باشد، بنابراین $L_{eq} = \frac{(1+2)\times(4+2)}{(1+2)+(4+2)} = 2H$ بوده ومداربصورت زیر خواهد بود.

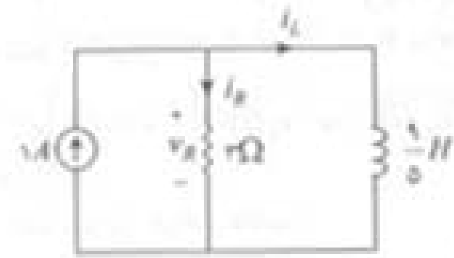


می دانیم که سلف در ابتدا مدار باز بوده و در نهایت اتصال کوتاه خواهد شد. بنابراین داریم:

$$v_R(0) = 3V \quad , \quad v_R(\infty) = 0 \quad , \quad T = \frac{L}{R} = \frac{2}{3}$$

$$\rightarrow \quad v_R(t) = \left(v_R(0) - v_R(\infty)\right)e^{-\frac{t}{T}} + v_R(\infty) = (3-0)e^{-\frac{t}{\frac{2}{3}}} + 0 = 3e^{-\frac{3}{2}t}$$

برای ۲ < t ، کلید بسته شده بنابراین $L_{eq} = \frac{1\times 4}{1+4} + \frac{2\times 2}{2+2} = \frac{9}{5}$ بوده و مدار بصورت زیر خواهد شد.

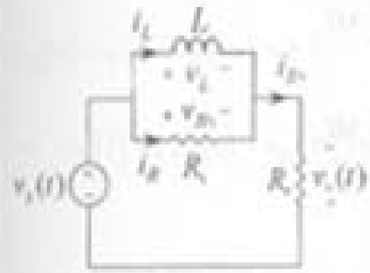


$$v_R(2) = 3e^{-1/5t}\Big|_{t=2} = 3e^{-3} = 0/15 \quad , \quad v_R(\infty) = 0V \quad , \quad T = \frac{L}{R} = \frac{3}{5}$$

$$\rightarrow \quad v_R(t) = \left(v_R(2) - v_R(\infty)\right)e^{-\frac{(t-2)}{T}} + v_R(\infty) = 0/15e^{-\frac{5}{3}(t-2)}$$

$$\rightarrow \quad v_R(t) = \begin{cases} 3e^{-\frac{3}{2}t} & , \quad 0 \le t < 2 \\ 0/15e^{-\frac{5}{3}(t-2)} & , \quad t \ge 2 \end{cases}$$

مسئله ۷



شکل مسئله ۷

- معادله دیفرانسیلی بر حسب خروجی $v_o(t)$ بنویسید. ($L=\frac{9}{4}H$ و $R_1=6\Omega$ و $R_2=3\Omega$ و $v_s(t)=e^{-\frac{3t}{2}}u(t)$)
- $i_L(0)$ را چنان تعیین کنید که خروجی $v_o(t)$ برای تمام زمانها صفر باشد.

حل: با توجه به شکل $v_L=v_{R_1}=v_s-v_o$ و $i_{R_2}=i_L+i_{R_1}$ می باشد. بنابراین داریم:

$$i_{R_2}-i_R-i_L=0 \rightarrow \frac{v_o(t)}{R_2}-\frac{v_s(t)-v_o(t)}{R_1}-i_L(0)-\frac{1}{L}\int_0^t\left(v_s(t)-v_o(t)\right)dt=0$$

$$\rightarrow \frac{dv_o(t)}{6dt}-\frac{d\left(v_s(t)-v_o(t)\right)}{2R_1dt}-\frac{4}{9}\left(v_s(t)-v_o(t)\right)=0$$

$$\rightarrow \frac{dv_o(t)}{dt}+2v_o(t)=\frac{2}{3}\frac{dv_s(t)}{dt}+2v_s(t)=\frac{2}{3}\left(-\frac{3}{2}\right)e^{-\frac{3t}{2}}+2e^{-\frac{3t}{2}} \rightarrow \frac{dv_o(t)}{6dt}+2v_o(t)=0\ ,\ t\geq 0$$

با توجه به مدار واضح است که مقدار اولیه $v_o(t)$ به مقدار اولیه $i_L(t)$ و $v_s(t)$ بستگی دارد که بنا بر قاعده تقسیم ولتاژ و جریان و قاعده جمع آثار آن را بدست می آوریم.

$$v_o(0)=\frac{R_2}{R_1+R_2}v_s(0)+R_2\left(\frac{R_1}{R_1+R_2}\right)i_L(0)=\frac{2}{3}v_s(0)+2i_L(0)=\frac{2}{3}+2i_L(0)$$

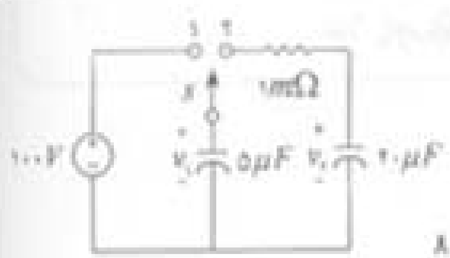
جواب آخرین معادله دیفرانسیل بدست آمده برابر است با:

$$v_o(t)=Ke^{-2t}\ ,\ v_o(0)=\frac{2}{3}+2i_L(0) \rightarrow v_o(t)=\left[\frac{2}{3}+2i_L(0)\right]e^{-2t}$$

می خواهیم که همواره $v_o(t)=0$ باشد بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{2}{3}+2i_L(0)=0 \rightarrow i_L(0)=-\frac{1}{3}A$$

مسئله ۸



شکل مسئله ۸

- کلید S برای $t<0$ در وضعیت ۱ بوده و در $t=0$ به وضعیت ۲ می رود. v_1 و v_2 را برای $t>0$ حساب کنید.

حل : از آنجا که کلید a به ازای $t<0$ در وضعیت ۱ است لذا $v_1(0)=100\,V$ و $v_2(0)=0\,V$ بوده و به ازای $t>0$ مدار بصورت زیر خواهد شد.

با نوشتن KVL برای تنها حلقه مدار داریم :

$$-v_1+v_R+v_2=0$$

$$\to\ -\left(v_1(0)+\frac{1}{5\times10^{-6}}\int_0^t -i(t')dt'\right)+1\times10^{6}\,i(t)+v_2(0)+\frac{1}{20\times10^{-6}}\int_0^t i(t')dt'=0$$

$$\to\ \frac{1}{5}i(t)+\frac{di(t)}{dt}+\frac{1}{20}i(t)=0\ \ \to\ \ \frac{di(t)}{dt}+\frac{1}{4}i(t)=0$$

$$\to\ i(t)=Ke^{-0.25t}\ ,\ i(0)=\frac{v_1(0)-v_2(0)}{1\times10^{6}}=100\,\mu A\ \to\ K=10^{-4}\ \to\ i(t)=10^{-4}e^{-0.25t}$$

$$\to\ v_1(t)=v_1(0)+\frac{1}{C_1}\int_0^t -i(t')dt'=100+\frac{1}{5\times10^{-6}}\int_0^t -10^{-4}e^{-0.25t'}dt$$

$$=100+80\left(e^{-0.25t}-1\right)=20+80e^{-0.25t}$$

$$v_2(t)=v_2(0)+\frac{1}{C_2}\int_0^t i(t')dt'=0+\frac{1}{20\times10^{-6}}\int_0^t -10^{-4}e^{-0.25t'}dt'=20\left(1-e^{-0.25t}\right)$$

روش دوم : در این روش ولتاژ نهایی دو سر خازنها را بدست خواهیم آورد. به ازای $t\to\infty$ ، $v_1=v_2$ خواهد شد (زیرا باید $i=0$ شود). بنابراین داریم.

$$\frac{q_1}{C_1}=\frac{q_2}{C_2}\ \to\ \frac{q_1}{5}=\frac{q_2}{20}\ \to\ q_2=4q_1$$

از طرفی بنابر اصل بقای بار داریم :

$$q_1+q_2=C_1v_1(0)=500\,\mu c\ \to\ q_1+4q_1=500\,\mu c\ \to\ q_1=100\,\mu c$$

$$\to\ v_1(\infty)=v_2(\infty)=\frac{q_1}{C_1}=\frac{100\,\mu c}{5\,\mu F}=20\,V$$

و ثابت زمانی مدار برابر است با :

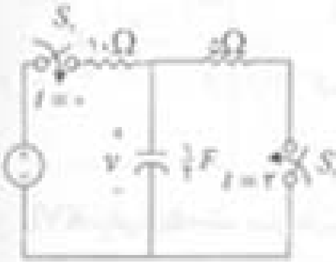
$$T=RC=1\times10^{6}\,\frac{5\times20}{5+20}\times10^{-6}=4$$

$$\to\ v_1(t)=\left(v_1(0)-v_1(\infty)\right)e^{-\frac{t}{T}}+v_1(\infty)=(100-20)e^{-\frac{t}{4}}+20=80e^{-0.25t}+20$$

$$\rightarrow v_c(t)=\left(v_c(0)-v_c(\infty)\right)e^{-\frac{t}{T}}+v_c(\infty)=(0-20)e^{-\frac{t}{4}}+20=20\left(1-e^{-0/25t}\right)$$

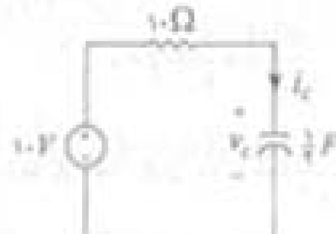
مسئله ۹

$v_c(0)=0$ ، $i_c(t)=?$ برای $t>0$.



شکل مسئله ۹

حل: برای $0\le t<2$ مدار بصورت زیر خواهد بود.

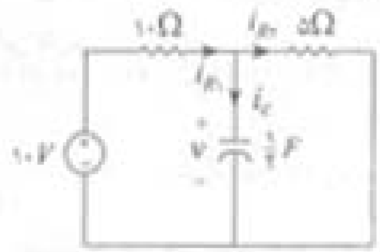


می دانیم که خازن ابتدا بصورت اتصال کوتاه و در نهایت بصورت مدار باز عمل می کند. بنابراین داریم:

$$i_c(0)=\frac{10}{10}=1A \quad , i_c(\infty)=0 \ , T=RC=10\left(\frac{1}{2}\right)=5$$

$$\rightarrow i_c(t)=\left(i_c(0)-i_c(\infty)\right)e^{-\frac{t}{T}}+i_c(\infty)=e^{-\frac{t}{5}}=e^{-0/2t}$$

و برای $t\ge 2$ مداربصورت زیر خواهد شد.



$$i_c\left(2^+\right)=i_c\left(2^-\right)+i_{R_2}\left(2^+\right)=i_c\left(2^-\right)+\frac{v_c\left(2^-\right)}{5}=i_c\left(2^-\right)+\frac{10-10i_c\left(2^-\right)}{5}$$

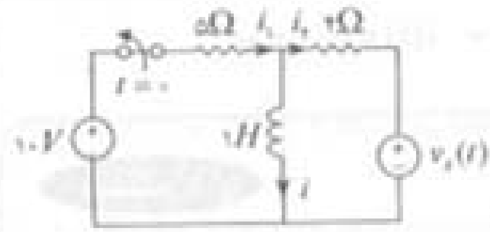
$$=e^{-0/2(2)}+\frac{10-10\left(e^{-0/2(2)}\right)}{5}=0/351$$

$$i_c(\infty)=0 \quad , \quad T=RC=\frac{10\times 5}{10+5}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{3}$$

$$\rightarrow i_c(t)=\left(i_c(۲)-i_c(\infty)\right)e^{-\frac{t-۲}{\tau}}+i_c(\infty)=\left(-۰/۳۵۱-۰\right)e^{-\frac{۴}{۵}(t-۲)}+۰=-۰/۳۵۱\,e^{-۰/۸(t-۲)}$$

$$\rightarrow i_c(t)=\begin{cases} e^{-۰/۴t}\ ,\ ۰\le t<۲ \\ -۰/۳۵۱\,e^{-۰/۸(t-۲)}\ ,\ t\ge ۲ \end{cases}$$

مسئله ۱۰

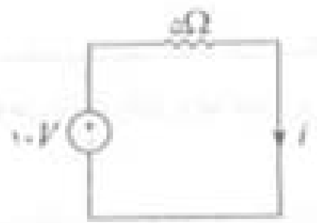


الف ـ $v_s(t)=۱۰e^{-۲t}u(t)$ ، $i(t)=?$ برای $t>۰$.

ب ـ $v_s(t)=۱۰e^{-۴t}u(t)$ ، $i(t)=?$ برای $t>۰$.

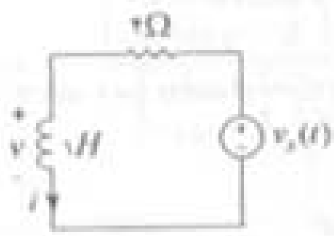
شکل مسئله ۱۰

حل : الف ـ قبل از باز شدن کلید $v_s(t)=۰$ بوده و سلف اتصال کوتاه است. بنابراین مدار بصورت زیر خواهد بود.



$$\rightarrow\quad i(۰)=\frac{۱۰}{۵}=۲A$$

و برای $t>۰$ کلید باز بوده و مدار بصورت زیر می باشد.



$$-v-v_R+v_S=۰\rightarrow\ -\frac{di}{dt}-۴i+v_s=۰\rightarrow\ \frac{di}{dt}+۴i=۱۰\,e^{-۲t}\ ,t>۰$$

که در ادامه با محاسبه پاسخ عمومی و خصوصی معادله فوق، آن را حل خواهیم کرد.

$$s+۴=۰\rightarrow s_1=-۴\ \rightarrow i_h(t)=k_1e^{-۴t}\qquad \text{(پاسخ عمومی)}$$

$$i_p(t)=k_2\,e^{-۲t}\rightarrow\ -۲k_2\,e^{-۲t}+۴k_2\,e^{-۲t}=۱۰\,e^{-۲t}\rightarrow\ ۲k_2=۱۰\rightarrow\ k_2=۵$$

$$\rightarrow\ i(t)=i_h(t)+i_p(t)=k_1\,e^{-۴t}+۵\,e^{-۲t}$$

در نهایت با اعمال مقدار اولیه جریان، k_1 را نیز بدست می آوریم.

$$i(0)=2 \rightarrow k_1+5=2 \rightarrow k_1=-3 \rightarrow i(t)=5e^{-2t}-3e^{-4t}$$

ب ـ در این حالت واضح است که $i(t)$ از حل کامل معادله $i(0)=2$ ، $\frac{di}{dt}+4i=10e^{-4t}$ بدست می آید. پاسخ عمومی معادله $i_h(t)=k_1e^{-4t}$ می باشد. با توجه به معادله دیفرانسیل ملاحظه می شود که $10e^{-4t}$ از پاسخ عمومی بدست می آید. بنابراین پاسخ خصوصی را بصورت زیر در نظر می گیریم.

$$i_p(t)=k_1te^{-4t} \rightarrow \left(k_1e^{-4t}-4k_1te^{-4t}\right)+4k_1e^{-4t}=10e^{-4t} \rightarrow k_1e^{-4t}=10e^{-4t} \rightarrow k_1=10$$

$$\rightarrow i(t)=ke^{-4t}+10te^{-4t}\ ,\ i(0)=2 \rightarrow k_1=2 \rightarrow i(t)=(10+2t)e^{-4t}$$

مسئله ۱۱

◁ $i_s(t)=(10\sin 2t)u(t)$ ، $v(t)=?$ برای $t>0$.

شکل مسئله ۱۱

حل : با فرض اینکه ولتاژ اولیه خازن برابر صفر باشد خواهیم داشت :

$$i_c+i_R=i_s \rightarrow \frac{1}{2}\frac{dv}{dt}+\frac{v}{4}=i_s \rightarrow \frac{dv}{dt}+\frac{1}{2}v=20\sin 2t$$

$$\rightarrow v_h(t)=ke^{-\frac{1}{2}t}\ ,\ v_p(t)=A\sin 2t+B\cos 2t$$

$$\rightarrow (2A\cos 2t-2B\sin 2t)+\left(\frac{1}{2}A\sin 2t+\frac{1}{2}B\cos 2t\right)=20\sin 2t$$

$$\begin{cases}\frac{1}{2}A-2B=20\\ 2A+\frac{1}{2}B=0\end{cases} \rightarrow A=\frac{40}{17}\ ,\ B=-\frac{160}{17}$$

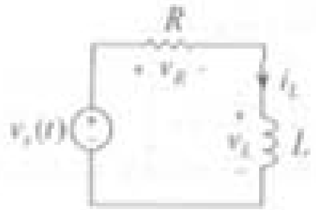
$$v(t)=v_h(t)+v_p(t)=Ke^{-\frac{1}{2}t}+\frac{40}{17}\sin 2t-\frac{160}{17}\cos 2t$$

$$v(0)=0 \rightarrow K-\frac{160}{17}=0 \rightarrow K=\frac{160}{17} \rightarrow v(t)=\frac{160}{17}e^{-\frac{t}{2}}+\frac{40}{17}\sin 2t-\frac{160}{17}\cos 2t$$

مسئله ۱۲

φ را چنان تعیین کنید که هیچگونه پاسخ گذرایی در جریان i_L حاصل نشود.

$v_s(t) = v_m \cos(\omega t + \varphi)$



شکل مسئله ۱۲

حل: ابتدا i_L را بدست می آوریم.

$$v_L + v_R = v_s \rightarrow L\frac{di_L}{dt} + Ri_L = v_m \cos(\omega t + \varphi) = v_m \cos\varphi \cos\omega t - v_m \sin\varphi \sin\omega t$$

$$\rightarrow i_L(t) = \underbrace{Ke^{-\frac{R}{L}t}}_{\text{پاسخ عمومی}} + \underbrace{A\cos\omega t + B\sin\omega t}_{\text{پاسخ خصوصی}}$$

با فرض اینکه جریان اولیه سلف برابر صفر باشد داریم:

$$i_L(0) = 0 \rightarrow K + A = 0 \rightarrow K = -A$$

و شرط اینکه پاسخ گذرا نداشته باشیم این است که $K = 0$ و یا $A = 0$ باشد. با جایگذاری پاسخ خصوصی در معادله دیفرانسیل داریم:

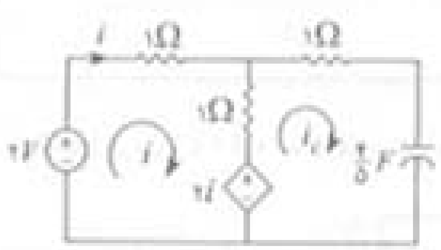
$$L(-A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t) + R(A\omega\cos\omega t + B\omega\sin\omega t) = v_m \cos\varphi\cos\omega t - v_m \sin\varphi\sin\omega t$$

$$\rightarrow \begin{cases} R_A + L\omega B = v_m \cos\varphi \\ -L\omega A + RB = -v_m \sin\varphi \end{cases} \rightarrow A = \frac{\begin{vmatrix} v_m\cos\varphi & L\omega \\ -v_m\sin\varphi & R \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R & L\omega \\ -L\omega & R \end{vmatrix}} = \frac{(R\cos\varphi + L\omega\sin\varphi)v_m}{R^2 + L^2\omega^2}$$

$$A = 0 \rightarrow R\cos\varphi + L\omega\sin\varphi = 0 \rightarrow \tan\varphi = -\frac{R}{L\omega} \rightarrow \varphi = \tan^{-1} - \frac{R}{L\omega}$$

مسئله ۱۳

$i(t) = ?$ ، $t \geq 0$. (ولتاژ اولیه خازن برابر صفر است)



شکل مسئله ۱۳

حل : ذکر این نکته ضروری است که منبع ولتاژ ثابت در $t=0$ وارد مدار می شود.

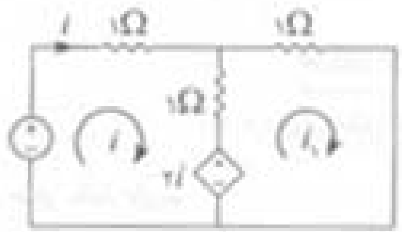
① برای مش KVL $\rightarrow -2+i+(i-i_1)+2i=0 \rightarrow i_1=4i-2$

② برای مش KVL $\rightarrow -2i+(i_1-i)+i_1+v_c(0)+\frac{5}{4}\int i_1 dt=0$

$\rightarrow -2i+(4i-2-i)+i+\frac{5}{4}\int(4i-2)=0 \rightarrow i+\int\left(i-\frac{1}{2}\right)=0 \rightarrow \frac{di}{dt}+i=\frac{1}{2}$

$\rightarrow i(t)=\underbrace{K_1e^{-t}}_{\text{پاسخ عمومی}}+\underbrace{K_2}_{\text{پاسخ خصوصی}}$

با جایگذاری پاسخ خصوصی در معادله دیفرانسیل $K_2=\frac{1}{2}$ خواهد شد. در ادامه $i(0)$ را بدست خواهیم آورد. از آنجا که $v_c(0)=0$ می باشد لذا در $t=0$ خازن اتصال کوتاه بوده و مدار بصورت زیر خواهد بود.



① برای مش KVL $\rightarrow -2+i+(i-i_1)+2i=0 \rightarrow 4i-i_1=2$

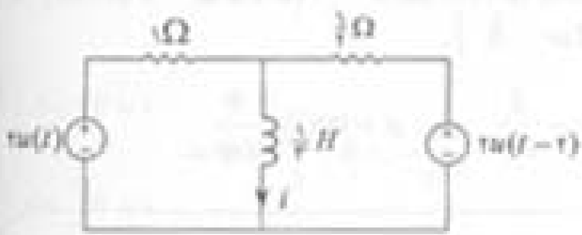
$\rightarrow i=\frac{4}{5}A$

② برای مش KVL $\rightarrow -2i+(i_1-i)+i_1=0 \rightarrow -3i+2i_1=0$

$i(0)=\frac{4}{5} \rightarrow K_1+\frac{1}{2}=\frac{4}{5} \rightarrow K_1=\frac{3}{10} \rightarrow i(t)=\frac{3}{10}e^{-t}+\frac{1}{2} \quad , t\geq 0$

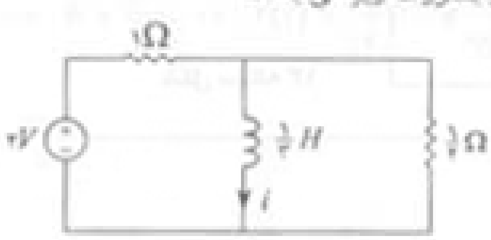
مسئله ۱۴

$i(t)$ را برای $t\geq 0$ محاسبه و رسم کنید.



شکل مسئله ۱٤

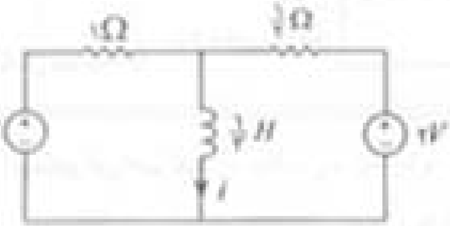
حل : برای $0\leq t<2$ مدار بصورت زیر می باشد.



از آنجا که سلف در $t=0$ بصورت مدار باز و در $t=\infty$ بصورت اتصال کوتاه عمل می کند لذا $i(0)=0$ و $i(\infty)=\frac{2V}{1\Omega}=2A$ همچنین ثابت زمانی سیستم $T=\frac{L}{R}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1\times\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}}=1$ می باشد بنابراین داریم.

$$i(t)=\big(i(0)-i(\infty)\big)e^{-\frac{t}{T}}+i(\infty)=(0-2)e^{-t}+2=2-2e^{-t}$$

برای $t\geq 2$ مدار بصورت زیر می باشد.



ابتدا مقادیر ابتدایی و نهایی $i(t)$ را بدست خواهیم آورد.

$$i(2)=2-2e^{-2}=1/73A \quad , \quad i(\infty)=\frac{2V}{1\Omega}+\frac{2V}{\frac{1}{2}\Omega}=6A$$

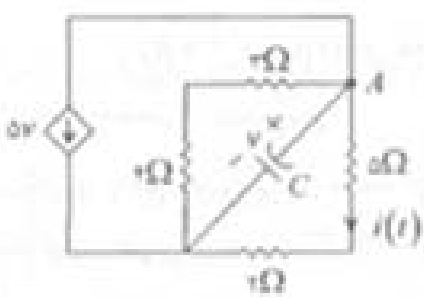
همانند قسمت قبل $T=1$ می باشد بنابراین داریم.

$$i(t)=\big(i(2)-i(\infty)\big)e^{-\frac{(t-2)}{T}}+i(\infty)=(1/73-6)e^{-\frac{(t-2)}{1}}+6=6-4/27e^{-(t-2)}$$

$$\rightarrow \quad i(t)=\begin{cases}2-2e^{-t} & , \quad 0\leq t<2\\ 6-4/27e^{-(t-2)} & , \quad t\geq 2\end{cases}$$

مسئله ۱۵

$C=2mF$ ، $v_c(0^-)=3V$ ، $i(t)=?$ برای $t>0$.



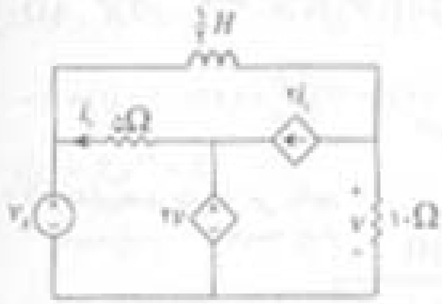
شکل مسئله ۱۵

حل : با نوشتن KCL برای گره A داریم.

$$5v+\frac{v}{3+2}+\frac{v}{5+2}+2\times 10^{-3}\frac{dv}{dt}=0 \quad\rightarrow\quad \frac{dv}{dt}+1321\,v=0 \quad\rightarrow\quad v(t)=Ke^{-1321t}$$

$$v(0)=-v_c(0)=-3 \quad\rightarrow\quad K=-3 \quad\rightarrow\quad v(t)=-3e^{-1321t}$$

$i = \frac{v}{۷} \rightarrow i(t) = -\frac{۴}{۷}e^{-۱۲۲t}\ ,\ t > ۰$

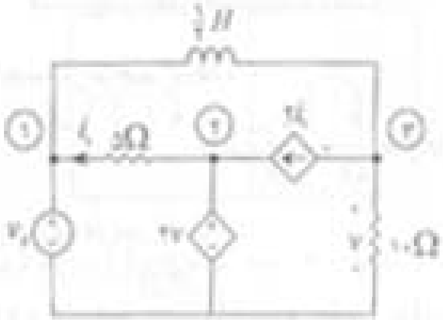


مسئله ۱۶

$v_s(t) = u(t)$ ، $i_L(۰) = ۰$ ، $v(t) = ?$.

شکل مسئله ۱۶

حل : بدین منظور از تحلیل گره استفاده خواهیم کرد.



$v_۱ = ۱V\ ,\ v_۲ = ۲V\ ,\ v_۳ = V\ ,\ i_L = \frac{۲v-۱}{۵}$

KCL برای گره ۳ $\rightarrow i_L(۰) + ۲\int_۰^t (v-۱)dt + ۲\left(\frac{۲v-۱}{۵}\right) + \frac{v}{۱۰} = ۰$

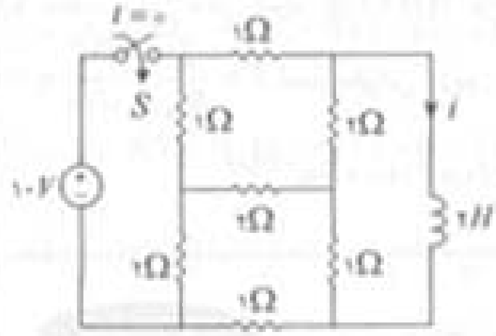
$\rightarrow ۲(v-۱) + \frac{۴}{۵}\frac{dv}{dt} + \frac{۱}{۱۰}\frac{dv}{dt} = ۰ \rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{۲۰}{۹}\frac{dv}{dt} = \frac{۲۰}{۹} \rightarrow v(t) = \underbrace{K_۱e^{-\frac{t}{\tau}}}_{\text{پاسخ عمومی}} + \underbrace{K_۲}_{\text{پاسخ خصوصی}}$

با جایگذاری پاسخ خصوصی در معادله دیفرانسیل $K_۲ = ۱$ بدست می آید و برای محاسبه $K_۱$ باید $v(۰)$ را بدست آوریم. می دانیم که سلف در $t = ۰$ بصورت مدار باز عمل می کند بنابراین KCL نوشته شده برای گره ۳ بصورت زیر تغییر می کند.

$۲\left(\frac{۲v(۰)-۱}{۵}\right) + \frac{v(۰)}{۱۰} = ۰ \rightarrow v(۰) = \frac{۴}{۹} \rightarrow K_۱ + ۱ = \frac{۴}{۹} \rightarrow K_۱ = -\frac{۵}{۹}$

$\rightarrow v(t) = ۱ - \frac{۵}{۹}e^{-\frac{۲۰}{۹}t}$

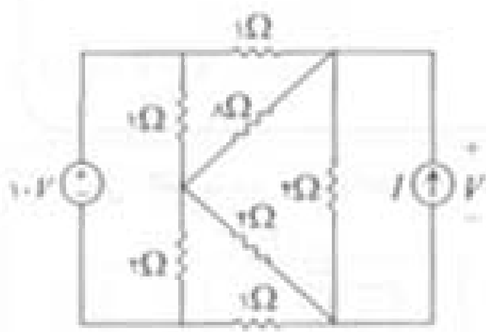
مسئله ۱۷



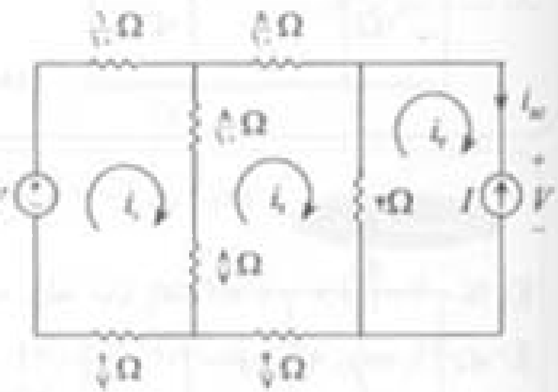
با در نظر گرفتن مقادیر i در لحظه های ۰ و ∞ جریان $i(t)$ را برای تمام $t>۰$ تعیین کنید. $(i_L(۰)=۰)$

شکل مسئله ۱۷

حل : بدین منظور معادل تونن دو سر سلف را بدست می آوریم و برای این کار با استفاده از تبدیل ستاره به مثلث و برعکس مدار را ساده می کنیم.



→



① برای مش KVL $\rightarrow -۱۰+\frac{i}{۱۰}+\frac{۸}{۱۰}(i-i)+\frac{۸}{۷}(i-i)+\frac{۲}{۷}i=۰$

② برای مش KVL $\rightarrow \frac{۸}{۷}(i-i)+\frac{۸}{۱۰}(i-i)+\frac{۸}{۱۰}i+V+\frac{۲}{۷}i=۰$

$$\rightarrow \begin{cases} ۱۶۳i - ۱۳۶i = ۷۰۰ \\ ۱۳۶i - ۲۳۲i = ۷۰V \end{cases} \rightarrow i = \frac{\begin{vmatrix} ۱۶۳ & ۷۰۰ \\ ۱۳۶ & ۷۰V \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} ۱۶۳ & -۱۳۶ \\ ۱۳۶ & -۲۳۲ \end{vmatrix}} = -۰/۶V+۴/۹ \quad , \quad i = -I$$

$$V = ۴(i-i) = ۴(-۰/۶V+۴/۹+I) \rightarrow I = ۰/۸۵V-۴/۹$$

$$\rightarrow i_{sc} = ۴/۹A \quad , \quad R_{th} = \frac{۱}{۰/۸۵} = ۱/۱۸\Omega$$

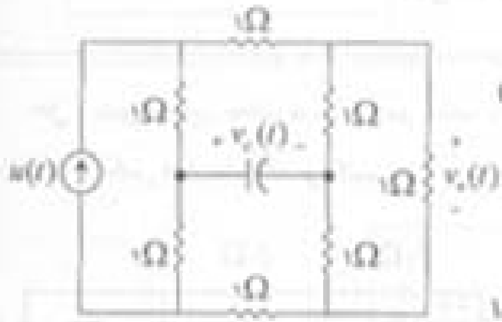
می دانیم سلف در ابتدا $(t=0)$ بصورت مدار باز بوده و در $t=\infty$ اتصال کوتاه خواهد بود. از آنجا که جریان اولیه سلف برابر صفر است لذا $i(0)=0$ بوده و $i(\infty)=i_{sc}=4/98$ همچنین ثابت زمانی مدار برابر $T=\frac{L}{R_{th}}=\frac{2}{1/18}=1/7$ است بنابراین داریم:

$$i(t)=\left(i(0)-i(\infty)e^{-\frac{t}{T}}+i(\infty)\right)=(0-4/9)e^{-\frac{t}{1/7}}+4/9=4/9-4/9e^{-0/588t}$$

مسئله ۱۸

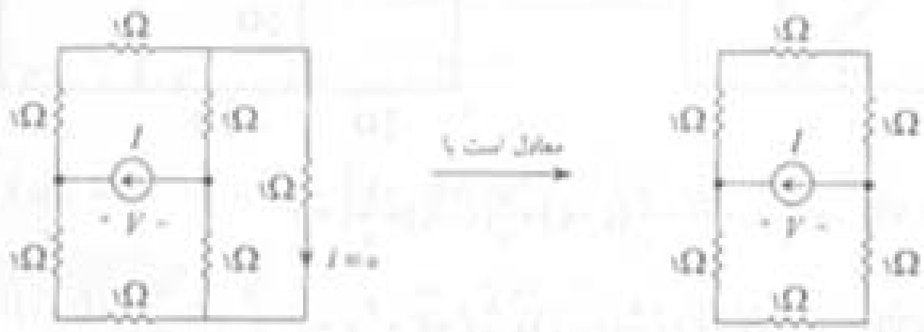
الف- $v_c(t)=?$ برای $t\geq 0$. (خازن بی بار است)

ب- $v_o(t)=?$ برای $t\geq 0$.



شکل مسئله ۱۸

حل: الف ـ بدین منظور ابتدا معادل تونن دو سر خازن را بدست می آوریم.



بنا بر تقارن، جریان از مقاومت سمت راست عبور نمی کند. پس داریم:

$$R_{th}=\frac{V}{I}=\frac{2\times 2}{2+2}=\frac{2}{2}\Omega$$

در ادامه ولتاژ مدار باز دو سر خازن را بدست خواهیم آورد.

$i_s = 1A$

① برای مش KVL $\rightarrow (i_1 - 1) + i_1 + (i_1 - i_2) + (i_1 - i_2) + i_1 + (i_1 - 1) = 0$

② برای مش KVL $\rightarrow (i_2 - i_1) + i_2 + (i_2 - i_1) = 0 \rightarrow \begin{cases} 3i_1 - i_2 = 1 \\ -2i_1 + 3i_2 = 0 \end{cases} \rightarrow i_1 = \frac{3}{7} \, , \, i_2 = \frac{2}{7}$

$$e_{oc} = (i_1 - 1) + i_1 + (i_1 - i_2) = 3i_1 - i_2 - 1 = \frac{9}{7} - \frac{2}{7} - 1 = 0$$

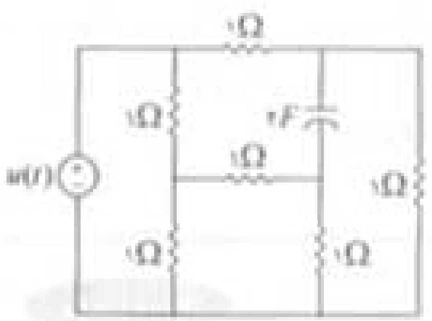
از آنجا که خازن بی بار است لذا $v_c(0) = 0$ همچنین $v_c(\infty) = e_{oc} = 0$ بنابراین داریم:

$$v_c(t) = \left(v_c(0) - v_c(\infty)\right)e^{-\frac{t}{T}} + v_c(\infty) = (0 - 0)e^{-\frac{t}{T}} + 0 = 0 \rightarrow v_c(t) = 0 \quad , \; t \geq 0$$

ب ـ از آنجا که ولتاژ دو سرخازن همواره برابر صفر است. لذا خازن نقشی نداشته و مدار فوق یک مدار مقاومتی ساده است. بنابراین داریم:

$$v_c(t) = i_2 = \frac{2}{7} V \quad , \; t \geq 0$$

مسئله ۱۹

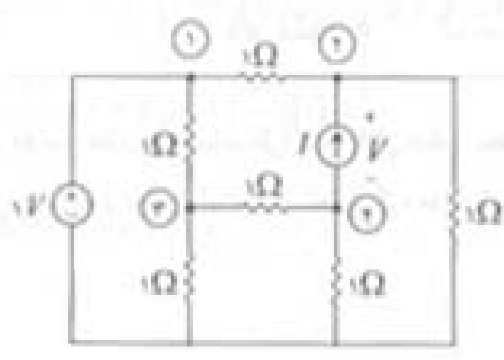


الف- ? = $v_c(t)$ ، $t \geq 0$ (ولتاژ اولیه خازن صفر است)

ب- اگر بجای خازن سلف $L = 2H$ با $i_L(0) = 0$ را قرار دهیم. $i_L(t)$ را به ازای $t \geq 0$ حساب کنید.

شکل مسئله ۱۹

حل : الف ـ ابتدا معادل تونن دو سرخازن را بدست خواهیم آورد. بدین منظور منبع جریان آزمایشی I را بجای خازن قرارداده و با استفاده از روش تحلیل گره ولتاژ دو سر آن را بدست خواهیم آورد.



$e_c = 1\,V$

$$\begin{aligned}
&\text{KCL}_{\text{برای گره ۲}} \rightarrow -I+e_2-1+e_2=0 \\
&\text{KCL}_{\text{برای گره ۳}} \rightarrow e_3-1+e_3+e_3-e_4=0 \\
&\text{KCL}_{\text{برای گره ۴}} \rightarrow I+e_4-e_3+e_4=0
\end{aligned}
\quad \rightarrow \quad
\begin{cases}
e_2=\frac{1}{2}I+\frac{1}{2} \\
3e_3-e_4=1 \\
-e_3+2e_4=-I
\end{cases}$$

$$\rightarrow e_4=-\frac{3}{5}I+\frac{1}{5} \rightarrow V=e_2-e_4=\frac{1}{2}I+\frac{1}{2}+\frac{3}{5}I-\frac{1}{5}=\frac{11}{10}I+\frac{3}{10} \rightarrow R_{th}=\frac{11}{10}\Omega\,,\, e_{oc}=\frac{3}{10}V$$

خازن ابتدا اتصال کوتاه و سپس مدار باز خواهد بود بنابراین :

$$v_c(0)=0\,,\; v_c(\infty)=\frac{3}{10}V\,,\, T=RC=\left(\frac{11}{10}\right)(2)=\frac{11}{5}\ \text{sec}$$

$$\rightarrow v_c(t)=\big(v(0)-v(\infty)\big)e^{-\frac{t}{T}}+v(\infty)=\frac{3}{10}-\frac{3}{10}e^{-\frac{5}{11}t}\,,\; t\geq 0$$

ب ـ می دانیم که سلف ابتدا بصورت مدار باز و در نهایت به صورت اتصال کوتاه عمل می کند. بنابراین داریم :

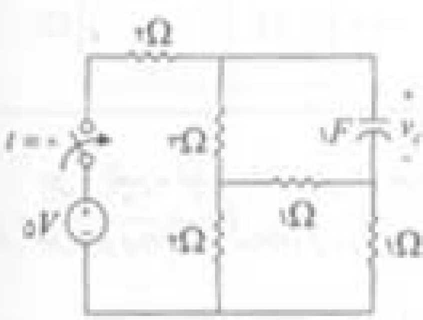
$$i_L(0)=0\,,\; i_L(\infty)=i_{sc}=\frac{e_{oc}}{R_{th}}=\frac{3}{11}A\,,\, T=\frac{L}{R}=\frac{2}{\frac{11}{10}}=\frac{20}{11}$$

$$\rightarrow i_L(t)=\big(i_L(0)-i_L(\infty)\big)e^{-\frac{t}{T}}+i_L(\infty)=\frac{3}{11}-\frac{3}{11}e^{-\frac{11}{20}t}\,,\quad t\geq 0$$

مسئله ۲۰

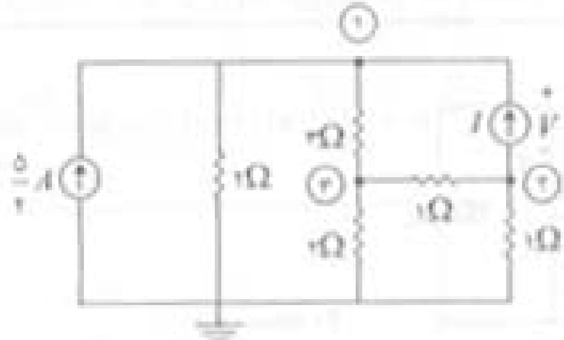
$v_c(t)=?\,,\; t\geq 0$ (ولتاژ اولیه خازن صفر است)

ولتاژ دو سر بقیه عناصر را برای $t\geq 0$ حساب کنید.



شکل مسئله ۲۰

حل : ابتدا معادل تونن دو سر خازن را حساب می کنیم. بدین منظور بجای خازن منبع جریان آزمایش I را قرار داده و با استفاده از تبدیل تونن به نرتن و با استفاده از تحلیل گره مدار را تحلیل می کنیم.



KCL برای گره ۱: $\rightarrow -\frac{۵}{۲}+\frac{e_1}{۲}+\frac{e_1-e_3}{۳}-I=۰$

KCL برای گره ۲: $\rightarrow I+e_2+e_2-e_3=۰$

KCL برای گره ۳: $\rightarrow \frac{e_3-e_1}{۳}+\frac{e_3}{۲}+e_3-e_2=۰$

$$\rightarrow \begin{cases} ۵e_1-۲e_3=۶I+۱۵ \\ -۲e_2+e_3=I \\ -۲e_1-۶e_2+۱۱e_3=۰ \end{cases} \rightarrow e_1=\frac{\begin{vmatrix} ۶I+۱۵ & ۰ & -۲ \\ I & -۲ & ۱ \\ ۰ & -۶ & ۱۱ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} ۵ & ۰ & -۲ \\ ۰ & -۲ & ۱ \\ -۲ & -۶ & ۱۱ \end{vmatrix}}=\frac{-۸۴I-۲۴۰}{-۷۲}=\frac{۸۴I}{۷۲}+\frac{۲۴۰}{۷۲}$$

$$e_2=\frac{۱}{-۷۲}\begin{vmatrix} ۵ & ۶I+۱۵ & -۲ \\ ۰ & I & ۱ \\ -۲ & ۰ & ۱۱ \end{vmatrix}=\frac{۳۹I-۳۰}{-۷۲}=-\frac{۳۹}{۷۲}I+\frac{۳۰}{۷۲}$$

$$V=e_1-e_2=\frac{۱۲۳}{۷۲}I+\frac{۲۱۰}{۷۲}=\frac{۴۱}{۲۴}I+\frac{۳۵}{۱۲}\rightarrow R_{th}=\frac{۴۱}{۲۴}\Omega\ ,\ e_{oc}=\frac{۳۵}{۱۲}v$$

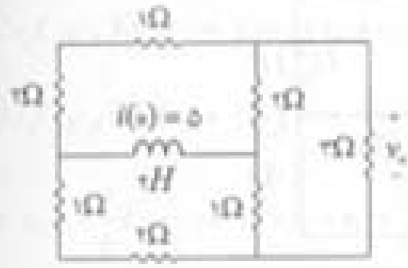
می دانیم که خازن در ابتدا $(t=۰)$ اتصال کوتاه و در نهایت $(t=\infty)$ مدار باز خواهد بود. بنابراین داریم:

$$v_c(۰)=۰\ ,\ v_c(\infty)=e_{oc}=\frac{۳۵}{۱۲}\ ,\ T=R_{th}C=\left(\frac{۴۱}{۲۴}\right)(۱)=\frac{۴۱}{۲۴}$$

$$\rightarrow v_c(t)=\left(v_c(۰)-v_c(\infty)\right)e^{-\frac{t}{T}}+v_c(\infty)=\frac{۳۵}{۱۲}-\frac{۳۵}{۱۲}e^{-\frac{۲۴}{۴۱}t}$$

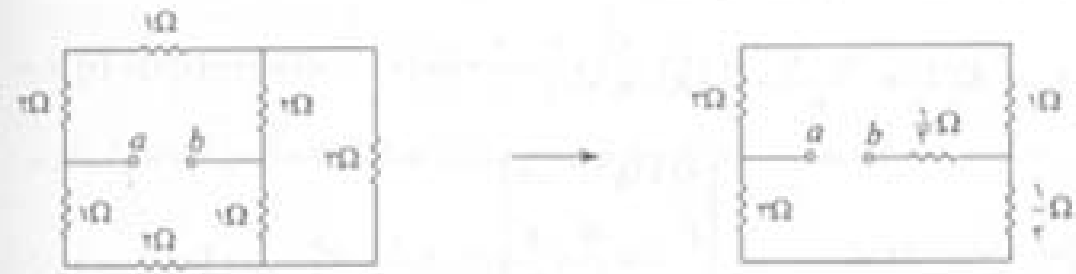
مسئله ۲۱

$v_o(t) = ?$ برای $t \geq 0$.



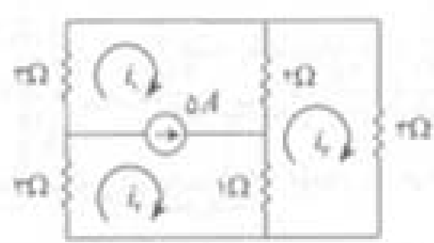
شکل مسئله ۲۱

حل: ابتدا مقاومت معادل دو سر سلف را جهت محاسبه ثابت زمانی سیستم بدست می آوریم. بدین منظور از تبدیل مثلث به ستاره استفاده خواهیم کرد.



$$\rightarrow R_{ab} = \left(\frac{1}{2} + 3\right) P (3+1) + \frac{1}{3} = \frac{11}{5}\Omega \rightarrow T = \frac{L}{R_{ab}} = \frac{2}{\frac{11}{5}} = \frac{10}{11}$$

حال $v_o(0)$ و $v_o(\infty)$ را حساب می کنیم. واضح است که در نهایت تمامی انرژی ذخیره شده در سلف تخلیه شده و لذا تمامی ولتاژها و جریانها منجمله $v_o(\infty)$ برابر صفر خواهند بود و برای محاسبه $v_o(0)$ می توان بجای سلف با مقدار اولیه $i(0) = 5$ منبع جریان ثابته $5A$ را قرار داد و این مدل سازی فقط برای $t = 0$ معتبر است.



$i_2 - i_1 = 5$

$$\text{برای مش ۳ KVL} \rightarrow 2(i_3 - i_1) + 3i_3 + (i_3 - i_2) = 0 \rightarrow \begin{cases} -i_1 + i_2 = 5 \\ 2i_1 + i_2 - 6i_3 = 0 \\ i_1 + i_2 + i_3 = 0 \end{cases}$$

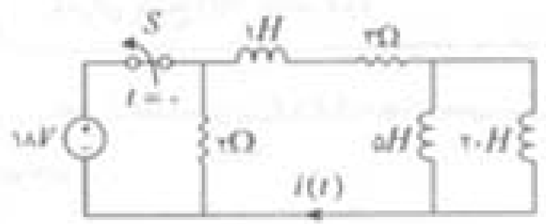
$$\text{برای حلقه شامل تمام مش ها KVL} \rightarrow 3i_1 + 3i_2 + 3i_3 = 0$$

$$\rightarrow\ i_1=-\frac{7}{3}\ ,\ i_2=\frac{8}{3}\ ,\ i_3=-\frac{1}{3}\ \rightarrow\ v_o(0)=3i_3(0)=3\left(-\frac{1}{3}\right)=-1V$$

$$\rightarrow v(t)=\left(v(0)-v(\infty)\right)e^{-\frac{t}{\tau}}+v(\infty)=(-1-0)e^{-\frac{t}{\frac{10}{11}}}+0=-e^{-\frac{11}{10}t}\ ,\ t\geq 0$$

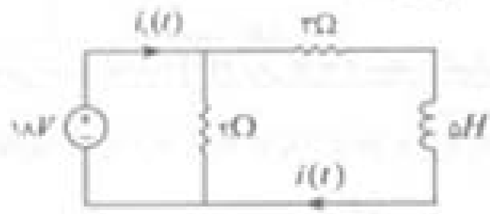
مسئله ۳۲

$i(t)=?$ برای $t>0$. (کلید S برای مدت طولانی بسته بوده)



شکل مسئله ۳۲

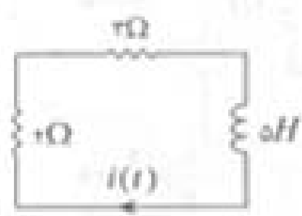
حل : دو سلف $20H$ و $5H$ موازی بوده و با سلف $1H$ سری اند. بنابراین $L_{eq}=1+\frac{5\times 20}{5+20}=5H$ بوده و مدار را بصورت زیر برای $t>0$ رسم می کنیم.



از آنجا که S به مدت طولانی بسته بوده لذا سلف $5H$ بصورت اتصال کوتاه عمل می کند. بنابراین داریم :

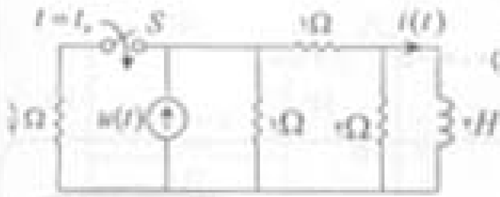
$$i_1(t)=\frac{18}{\frac{2\times 3}{2+3}}=15A\ ,\ i(t)=\frac{2}{2+3}i_1(t)=\frac{2}{5}(15)=6A\ \rightarrow\ i(0)=6A$$

برای $t>0$ کلید S باز شده و مدار بصورت زیر خواهد شد.



$$5i+5\frac{di}{dt}=0\ \rightarrow\ \frac{di}{dt}+i=0\ \rightarrow\ i(t)=Ke^{-t}\ ,i(0)=6\ \rightarrow\ K=6\ \rightarrow\ i(t)=6e^{-t}\ ,t>0$$

مسئله ۲۳



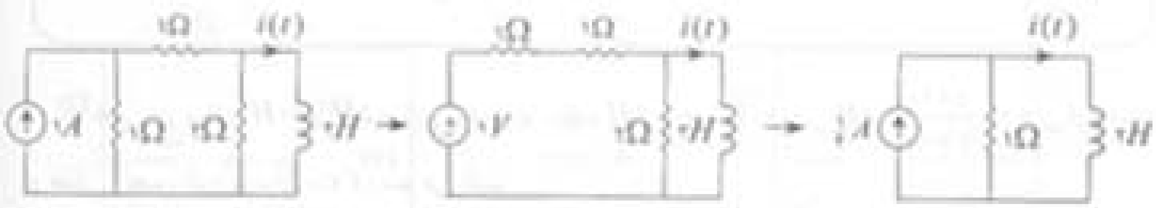
شکل مسئله ۲۳

الف- $i(t)=?$ ، $0<t<t_0$. (حالت اولیه صفر است)

ب- $i(t)=?$ برای $t\geq t_0$.

پ- t_0 را چنان تعیین کنید که برای $t>t_0$ قسمت گذرای پاسخ $i(t)$ حذف شود.

حل : الف ـ برای $0\leq t<t_0$ مدار بصورت زیر خواهد بود که با استفاده از تبدیل تونن به نرتن آن را ساده خواهیم کرد.



از آنجا که حالت اولیه مدار صفر است لذا $i(0)=0$ و در $t=\infty$ سلف اتصال کوتاه خواهد بود لذا $i(\infty)=\frac{1}{2}A$

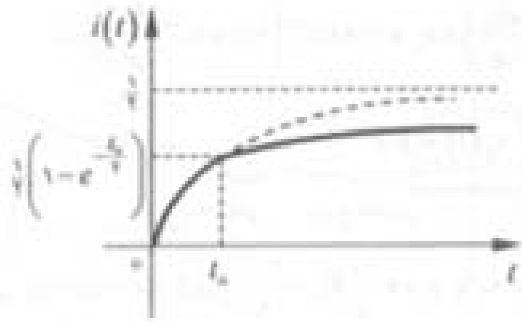
همچنین $T=\frac{L}{R}=1$ بنابراین داریم

$$\rightarrow i(t)=\left(i(0)-i(\infty)\right)e^{-\frac{t}{T}}+i(\infty)=\frac{1}{2}\left(1-e^{-\frac{t}{1}}\right)\quad,\quad 0\leq t<t_0$$

ب ـ در $t=t_0$ کلید S بسته شده و مدار بصورت زیر خواهد شد.

$$i(t_0)=\frac{1}{2}\left(1-e^{-\frac{t_0}{1}}\right)\quad,\quad i(\infty)=\frac{1}{2}A\quad,\quad T=\frac{L}{R}=\frac{1}{\frac{1}{4}}=4$$

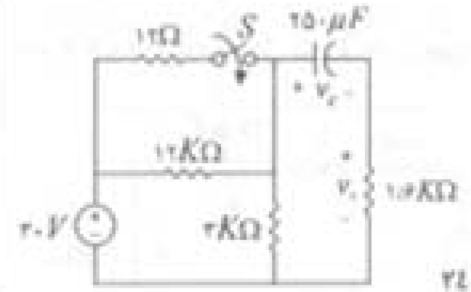
$$\rightarrow i(t)=\left(i(t_0)-i(\infty)\right)e^{-\frac{t-t_0}{T}}+i(\infty)=-\frac{1}{2}e^{-\frac{t_0}{1}}\cdot e^{-\frac{t-t_0}{4}}+\frac{1}{2}\quad,\quad t\geq t_0$$



پ ـ بدین منظور باید $e^{-\frac{t_0}{\tau}}=0$ شود که به ازای $t_0=\infty$ رخ می دهد.

مسئله ۳۴

کلید S در $t<0$ به مدت طولانی باز است و در $t=1$ بسته شده و دوباره در $t=2$ باز می شود. $v_c(t)$ و $v_o(t)$ را برای $t\geq 0$ محاسبه و رسم کنید.

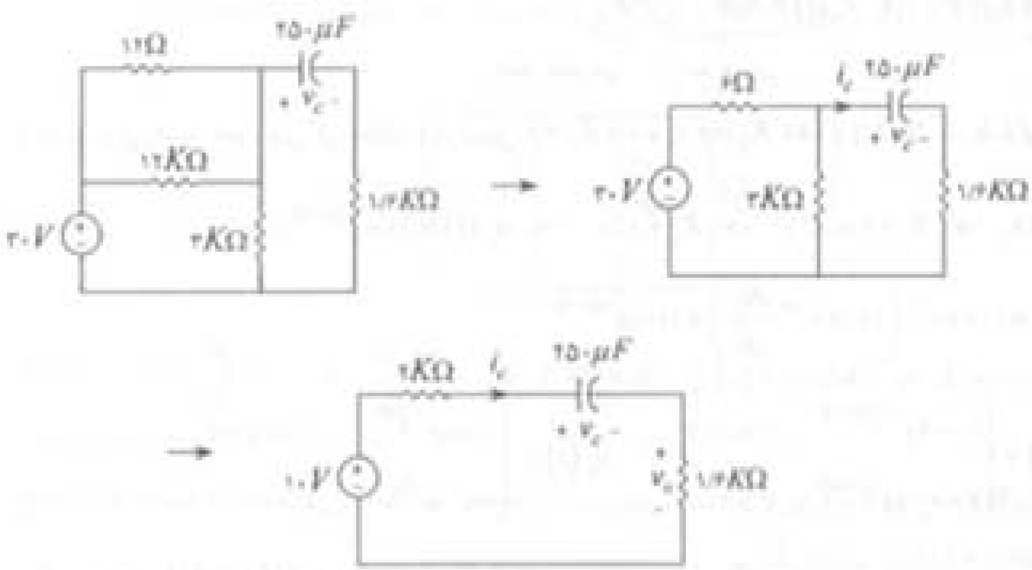


شکل مسئله ۳۴

حل : برای $t<1$ کلید S باز بوده و چون S برای مدت طولانی باز می باشد لذا خازن مدار باز می باشد. بنابراین داریم

$$v_o(1)=0\ ,\ \ v_c(1)=\frac{3}{12+3}30=6V$$

به ازای $1<t\leq 2$ کلید S بسته شده و مدار بصورت زیر خواهد بود.



$$\rightarrow\ -10+2\times10^{3}\left(250\times10^{-6}\frac{dv_c}{dt}\right)+v_c+1.6\times10^{3}\left(250\times10^{-6}\frac{dv_c}{dt}\right)=0$$

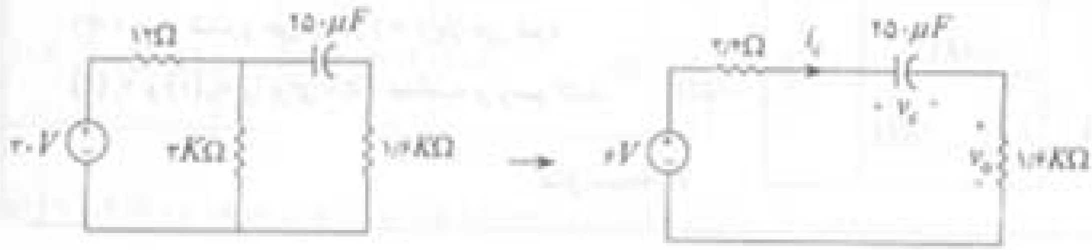
$$\rightarrow\ \frac{dv_c}{dt}+\frac{10}{9}v_c=\frac{100}{9}\ \rightarrow\ v_c(t)=\underbrace{K_1e^{-\frac{10}{9}(t-1)}}_{\text{پاسخ عمومی}}+\underbrace{K_2}_{\text{پاسخ خصوصی}}$$

با جایگذاری پاسخ خصوصی در معادله دیفرانسیل $0+\frac{10}{9}K_2=\frac{100}{9}$ و یا $K_2=10$ شده و با اعمال شرط اولیه داریم:

$$v_c(1)=6\ \rightarrow\ K_1+10=6\ \rightarrow\ K_1=-4\ \rightarrow\ v_c(t)=10-4e^{-\frac{10}{9}(t-1)}$$

$$\rightarrow\ v_o(t)=1.6\times10^{3}i_c(t)=1.6\times10^{3}\left(250\times10^{-6}\frac{dv_c}{dt}\right)=1.78e^{-\frac{10}{9}(t-1)}$$

در $2<t$ کلید S دوباره باز می شود و مدار بصورت زیر خواهد شد.



$$v_c(2)=10-4e^{-\frac{10}{9}(t-1)}=8.7\ V$$

$$-6+2.4\times10^{3}\left(250\times10^{-6}\frac{dv_c}{dt}\right)+v_c+1.6\left(250\times10^{-6}\frac{dv_c}{dt}\right)=0$$

$$\rightarrow\ \frac{dv_c}{dt}+v_c=6\ \rightarrow\ v_c(t)=\underbrace{K_1e^{-(t-2)}}_{\text{پاسخ عمومی}}+\underbrace{K_2}_{\text{پاسخ خصوصی}}$$

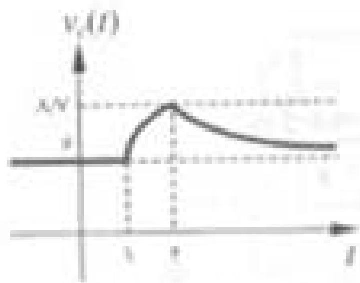
با جایگذاری پاسخ خصوصی در معادله دیفرانسیل $0+K_2=6$ و یا $K_2=6$ شده و با اعمال شرط اولیه داریم

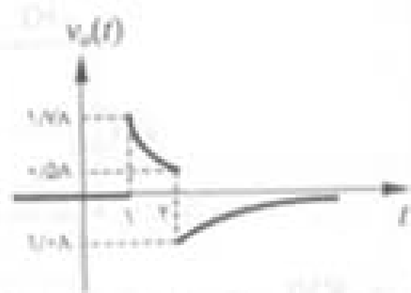
$$v_c(2)=8.7\ \rightarrow\ K_1+6=8.7\ \rightarrow\ K_1=2.7\ \rightarrow\ v_c(t)=2.7e^{-(t-2)}+6$$

$$\rightarrow\ v_o(t)=1.6\times10^{3}\left(250\times10^{-6}\frac{dv_c}{dt}\right)=1.08e^{-(t-2)}$$

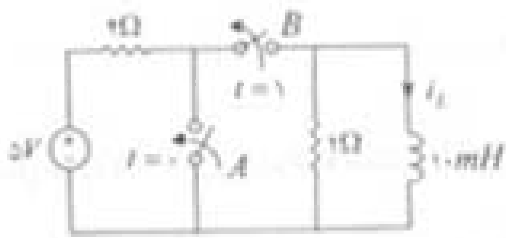
$$\rightarrow\ v_c(t)=\begin{cases}10-4e^{-\frac{10}{9}(t-1)} & ,\ 1<t\le2\\ 6+2.7e^{-(t-2)} & ,\ t>2\end{cases}\quad,\quad v_o(t)=\begin{cases}1.78e^{-\frac{10}{9}(t-1)} & ,\ 1<t\le2\\ -1.08^{-(t-2)} & ,\ t>2\end{cases}$$

شکل موجهای $v_o(t)$ و $v_c(t)$ در زیر رسم شده اند.





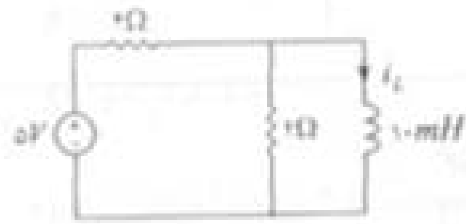
مسئله ۲۵



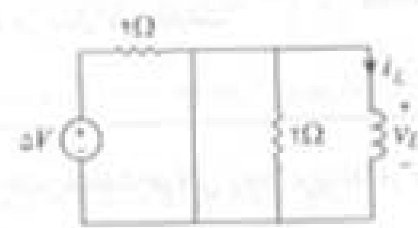
شکل مسئله ۲۵

$i_L(t)=?$ (کلید A در $t=۰$ بسته و کلید B در $t=۱$ باز می شود.)

حل : برای $t<۰$ مدار بصورت زیر خواهد بود.

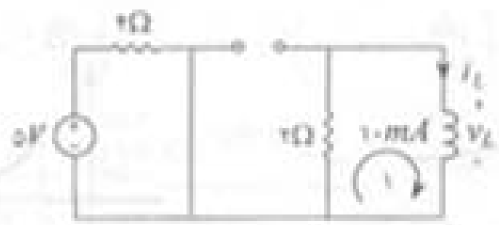


از آنجا که حالت فوق به مدت زیادی برقرار بوده و لذا در $t=۰$ سلف اتصال کوتاه می باشد بنابراین $i_L(۰)=\frac{۵}{۴}=۱/۲۵A$ بوده و برای $۰\le t<۱$ کلید A نیز بسته بوده و مدار بصورت زیر خواهد شد.



$$v_L=۰ \rightarrow L\frac{di_L}{dt}=۰ \rightarrow \frac{di_L}{dt}=۰ \rightarrow i_L(t)=K \ , \ i_L(۰)=۱/۲۵A \rightarrow K=۱/۲۵A$$
$$\rightarrow i_L(t)=۱/۲۵A$$

در $t=۱$ کلید B باز می شود و برای $t\ge۱$ مدار بصورت زیر خواهد شد. همچنین با توجه به قسمت قبل واضح است که $i_L(۱)=۱/۲۵A$ ، بنابراین داریم.

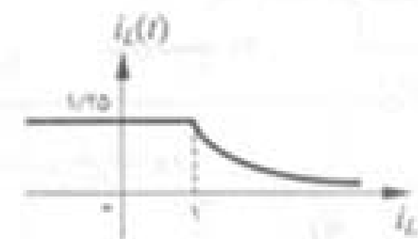


KVL برای مش ① $\to v_L + ۲i_L = ۰ \to ۱۰\times۱۰^{-۳}\dfrac{di_L}{dt} + ۲i_L = ۰ \to \dfrac{di_L}{dt} + ۲۰۰i_L = ۰$

$i_L(t) = Ke^{-۲۰۰(t-۱)}$ ، $i_L(۱) = ۱/۲۵ \to K = ۱/۲۵ \to i_L(t) = ۱/۲۵e^{-۲۰۰(t-۱)}$

$$\to i_L(t) = \begin{cases} ۱/۲۵A & , ۰ \le t < ۱ \\ ۱/۲۵e^{-۲۰۰(t-۱)} & , t \ge ۱ \end{cases}$$

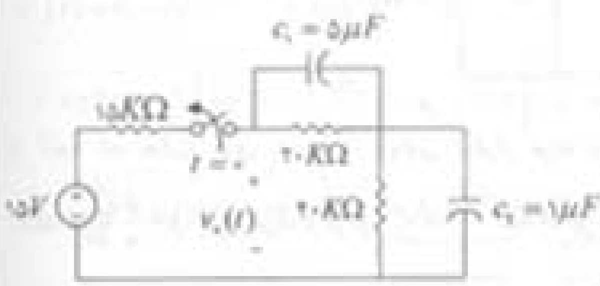
شکل موج $i_L(t)$ در زیر رسم شده است.



مسئله ۲۶

الف- ؟ = $v_o(t)$ ، $t \ge ۰$ (کلید برای مدت طولانی وصل بوده و در $t = ۰$ باز می شود)

ب- اگر کلید ۴۰ ms باز باشد چند درصد انرژی اولیه ذخیره شده در مدار در مقاومت ها تلف می شود.

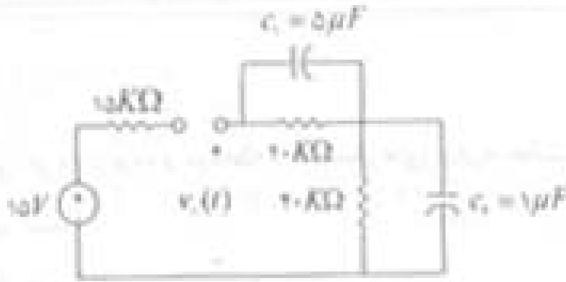


شکل مسئله ۲۶

حل : الف ـ از آنجا که کلید به مدت طولانی وصل بوده لذا هر دو خازن بصورت مدار باز عمل می کنند بنابراین در $t < ۰$ داریم.

$v_{c_1}(۰) = \dfrac{۲۰}{۱۵+۲۰+۴۰}۱۵V = ۴V$ ، $v_{c_2}(۰) = \dfrac{۴۰}{۱۵+۲۰+۴۰}۱۵V = ۸V$

به ازای $t \ge ۰$ کلید باز شده و مدار بصورت زیر خواهد شد.



واضح است که در $t = \infty$ انرژی ذخیره شده خازنها کاملاً تلف شده و $v_{c1}(\infty) = v_{c2}(\infty) = 0$ می شود همچنین با توجه به شکل فوق داریم:

$$T_1 = RC_1 = \left(20\times10^{3}\right)\left(5\times10^{-6}\right) = 0/1 \ , \ T_2 = RC_2 = \left(40\times10^{3}\right)\left(1\times10^{-6}\right) = 0/04$$

$$\rightarrow \ v_{c1}(t) = \left(v_{c1}(0) - v_{c1}(\infty)\right)e^{-\frac{t}{T_1}} + v_{c1}(\infty) = 4e^{-10t}$$

$$\rightarrow \ v_{c2}(t) = \left(v_{c2}(0) - v_{c2}(\infty)\right)e^{-\frac{t}{T_2}} + v_{c2}(\infty) = 8e^{-25t}$$

$$\rightarrow \ v_o(t) = v_{c1}(t) + v_{c2}(t) = 4e^{-10t} + 8e^{-25t}$$

ب-

انرژی اولیه ذخیره شده در مدار $= \frac{1}{2}C_1V_1^2(0) + \frac{1}{2}C_2V_2^2(0)$

$$= \frac{1}{2}\times5\times10^{-6}\times4^2 + \frac{1}{2}\times1\times10^{-6}\times8^2 = 72\times10^{-6}J$$

انرژی باقیمانده در خازنها $(t = 40ms)$ $= \frac{1}{2}C_1V_1^2(40ms) + \frac{1}{2}C_2V_2^2(40ms)$

$$= \frac{1}{2}\times5\times10^{-6}\times\left(4e^{-0/4}\right)^2 + \frac{1}{2}\times10^{-6}\times\left(8e^{-1}\right)^2 = 13/64\times10^{-6}J$$

انرژی تلف شده در مقاومت ها $= 72\times10^{-6} - 13/64\times10^{-6} = 58/36\times10^{-6}J$

درصد انرژی تلف شده در مقاومت ها $= \frac{58/36}{72}\times100 = 81/05\%$

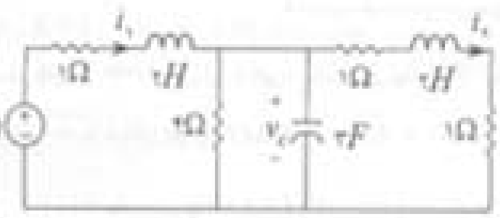
مسئله ۲۷

منبع برای مدت طولانی در مدار بوده و درلحظه $t=0$ متغیرهای مداریه حالت دایمی خود رسیده اند. کمیتهای زیر را حساب کنید.

الف- $v_c(0^+)$ ، $i_1(0^+)$ ، $i_2(0^+)$

ب- $\dfrac{dv_c(0^+)}{dt}$ ، $\dfrac{di_1(0^+)}{dt}$ ، $\dfrac{di_2(0^+)}{dt}$

پ- $\dfrac{d^2v_c(0^+)}{dt^2}$ ، $\dfrac{d^2i_1(0^+)}{dt^2}$ ، $\dfrac{d^2i_2(0^+)}{dt^2}$



شکل مسئله ۲۷

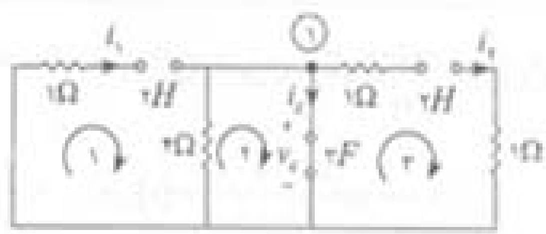
حل : الف ــ از آنجا که منبع به مدت طولانی در مدار بوده لذا سلف مانند اتصال کوتاه و خازن مانند مدار باز عمل می کند. بنابراین در $t=0^-$ مدار بصورت زیر می باشد.

از آنجا که منبع شامل تابع ضربه نیست لذا $\left(v_c(0^+)=v_c(0^-) ، i_2(0^+)=i_2(0^-) ، i_1(0^+)=i_1(0^-)\right)$ می باشد بنابراین داریم

$$i_1(0^+)=\frac{7}{(1+1)\|4+1}=3A \quad , \quad i_2(0^+)=\frac{4}{(1+1)+4}i_1=\frac{4}{6}3A=2A$$

$$v_c(0^+)=4(i_1-i_2)=4(3-2)=4V$$

ب ــ در $t=0^+$ ، $u(-t)=0$ می باشد بنابراین مدار بصورت زیر تغییر خواهد کرد.



برای حلقه شامل مش های ۱ و ۲ KVL $\rightarrow \quad i_1+2\dfrac{di_1(0^+)}{dt}+v_c(0^+)=0$

$$\rightarrow \frac{di_1(0^+)}{dt} = -\frac{i_1(0^+)+v_C(0^+)}{2} = -\frac{7}{2}$$

KVL برای حلقه شامل مشهای ۲ و ۳ $\rightarrow -2\left(i_1-i_2\right)+i_2+2\frac{di_2}{dt}+i_2=0$

$$\rightarrow \frac{di_2\left(0^+\right)}{dt} = 2i_1\left(0^+\right)-2i_2\left(0^+\right) = 6-6=0$$

KCL برای گره ۱ $\rightarrow -i_1+\frac{v_C}{2}+3\frac{dv_C}{dt}+i_2=0$

$$\rightarrow \frac{dv_C(0^+)}{dt} = \frac{1}{3}\left(i_1(0^+)-i_2(0^+)-\frac{v_C(0^+)}{2}\right) = \frac{1}{3}\left(3-2-\frac{2}{2}\right)=0$$

پ ـ با توجه به مدار رسم شده در قسمت (ب) داریم :

$$v_C = i_1+2\frac{di_1}{dt} \quad , \quad v_C = -i_2-2\frac{di_2}{dt}-i_2$$

$$i_C = 3\frac{dv_C}{dt} = 3\frac{d\left(i_1+2\frac{di_1}{dt}\right)}{dt} = 3\frac{di_1}{dt}+6\frac{d^2 i_1}{dt^2}$$

$$\rightarrow \frac{d^2 i_1(0^+)}{dt^2} = \frac{1}{2}\frac{dv_C(0^+)}{dt}-\frac{1}{2}\frac{di_1(0^+)}{dt} = 0-\frac{1}{2}\left(-\frac{7}{2}\right)=\frac{7}{4}$$

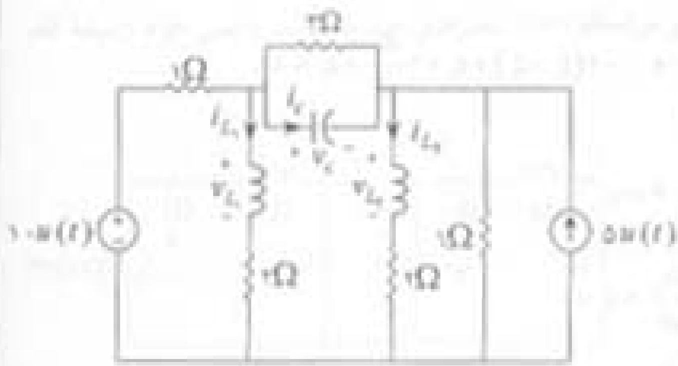
$$i_C = 3\frac{dv_C}{dt} = \frac{3d\left(-i_2-2\frac{di_2}{dt}-i_2\right)}{dt} = -6\frac{di_2}{dt}-6\frac{d^2 i_2}{dt^2}$$

$$\rightarrow \frac{d^2 i_2(0^+)}{dt^2} = -\frac{di_2(0^+)}{dt}-\frac{1}{6}\frac{dv_C(0^+)}{dt} = 0-0=0$$

$$v_{L_1} = 2\frac{di_1}{dt} = 2\frac{d\left(i_C+i_2\right)}{dt} = 2\frac{d\left(\frac{3dv_C}{dt}+i_2\right)}{dt} = 6\frac{d^2 v_C}{dt^2}+2\frac{d^2 i_2}{dt}$$

$$\rightarrow \frac{d^2 v_C(0^+)}{dt^2} = \frac{1}{3}\frac{di_1(0^+)}{dt}-\frac{1}{3}\frac{d^2 v_C(0^+)}{dt^2} = \left(\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{7}{2}\right)-0=-\frac{7}{6}$$

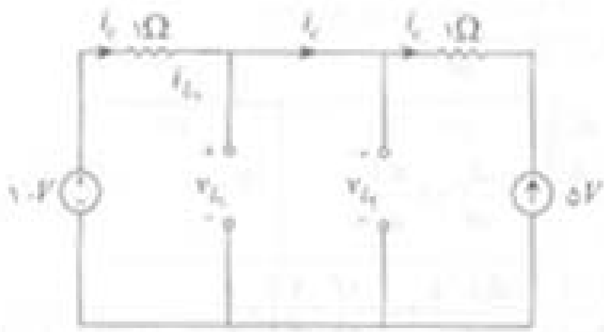
مسئله ۲۸



کمیتهای $i_c(0^+)$، $v_{L_1}(0^+)$، $v_{L_2}(0^+)$، $i_{L_1}(\infty)$، $i_{L_2}(\infty)$ و $v_c(\infty)$ را تعیین کنید.(تمام متغیرهای مدار برای $t \le 0$ صفر می باشند)

شکل مسئله ۲۸

حل : می دانیم که در ابتدا $(t = 0^+)$ خازن مانند اتصال کوتاه و سلف مانند مدار باز عمل می کند بنابراین مدار را می توان بصورت زیر رسم کرد.



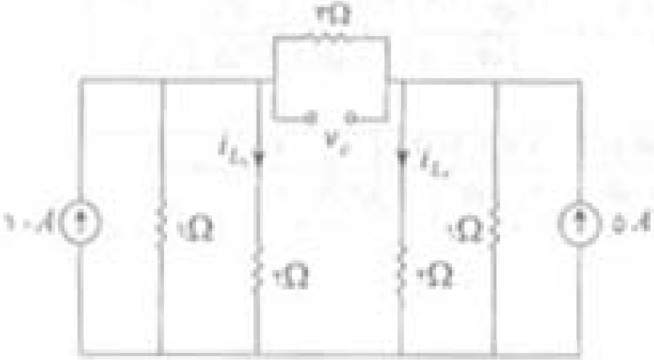
بنابراین داریم :

$$-۱۰+i_c(0^+)+i_c(0^+)+۵=0 \quad \rightarrow \quad i_c(0^+)=۲/۵A$$

$$v_{L_2}(0^+)=۵+\frac{۱\Omega}{۱\Omega+۱\Omega}۱۰V-\frac{۱\Omega}{۱\Omega+۱\Omega}۵V=۷/۵V$$

$$v_{L_1}(0^+)=۱۰+\frac{۱\Omega}{۱\Omega+۱\Omega}۵-\frac{۱\Omega}{۱\Omega+۱\Omega}۱۰=۷/۵V$$

در نهایت $(t=\infty)$ خازن مانند مدار باز و سلف مانند اتصال کوتاه عمل می کند بنابراین مدار بصورت زیرخواهد بود.



بنابر قاعده تقسیم جریان و قضیه جمع آثار و با توجه به شکل فوق می توان نوشت.

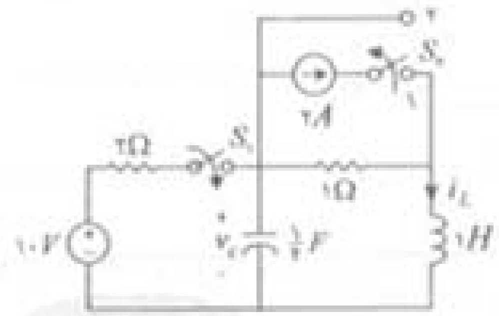
$$i_{L_1}(\infty)=\frac{\left[(1\|2)+3\right]\|1}{\left[(1\|2)+3\right]\|1+2}10A+\left(\frac{1\|2}{1\|2+(1\|2)+3}\right)\left(\frac{1}{1+2}\right)5A=\frac{110}{39}+\frac{10}{39}=\frac{120}{39}$$

$$i_{L_2}(\infty)=\frac{\left[(1\|2)+3\right]\|1}{\left[(1\|2)+3\right]\|1+2}5A+\left(\frac{1\|2}{1\|2+(1\|2)+3}\right)\left(\frac{1}{1+2}\right)10A=\frac{55}{39}+\frac{20}{39}=\frac{75}{39}A$$

$$v_c(\infty)=2\Omega\times\frac{\left[(1\|2)+3\right]\|1}{\left[(1\|2)+3\right]\|1+2}10A-2\Omega\times\frac{\left[(1\|2)+3\right]\|1}{\left[(1\|2)+3\right]\|1+2}5A=\frac{330}{39}-\frac{165}{39}=\frac{165}{39}$$

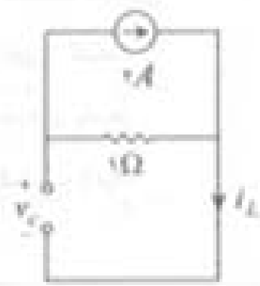
مسئله ۲۹

کمیتهای $i_L(0^+)$، $v_c(0^+)$، $\frac{dv_c(0^+)}{dt}$، $\frac{di_L(0^+)}{dt}$ و $i_L(\infty)$ و $v_c(\infty)$ را حساب کنید. (s_1 و s_2 به ترتیب به مدت طولانی باز و بسته بوده و در $t=0$ به ترتیب بسته و باز میشوند)



شکل مسئله ۲۹

حل: از آنجا که در $t=0^-$ به مدت طولانی s_1 باز و s_2 بسته است بنابراین مدار به حالت دایمی خود رسیده، خازن مدار باز و سلف اتصال کوتاه خواهد بود.



$i_L(0^-)=0 \quad , \quad v_c(0^-)=-\frac{2A}{1\Omega}=-2V$

در $t=0^+$ کلید s_1 بسته و s_2 باز شده و در حالت اولیه خازن اتصال کوتاه و سلف مدار باز خواهد بود. بنابراین داریم.

$v_c(0^+) = v_c(0^-) = -۲V \quad , \quad i_L(0^+) = i_L(0^-) = ۰$

$$i = i_c + i_L \rightarrow \frac{۱۰ - v_c}{۲} = c\frac{dv_c}{dt} + i_L \rightarrow \frac{۱۰ - v_c(0^+)}{۲} = c\frac{dv_c(0^+)}{dt} + i_L(0^+)$$

$$\rightarrow \frac{۱۰ - (-۲)}{۲} = \frac{۱}{۲}\frac{dv_c(0^+)}{dt} + ۰ \rightarrow \frac{dv_c(0^+)}{dt} = ۱۲$$

$$v_L = v_c - i_L \rightarrow \frac{di_L}{dt} = v_c - i_L \rightarrow \frac{di_L(0^+)}{dt} = v_L(0^+) - i_L(0^+) = -۲$$

در $(t = \infty)$ مدار به حالت دایمی خود خواهد رسید لذا خازن مدار باز و سلف اتصال کوتاه خواهد شد.

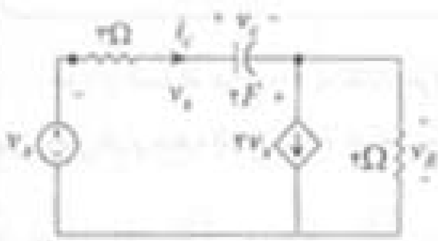
$$i_L(\infty) = \frac{۱۰}{۲+۱} = \frac{۱۰}{۳}A \quad , \quad v_c(\infty) = ۱ \times i_L(\infty) = \frac{۱۰}{۳}V$$

مسئله ۳۰

الف- معادله دیفرانسیل بر حسب v_c نوشته و پاسخ پله مدار را حساب کنید.

ب- $v_R(0)$ و $v_R(\infty)$ را با استفاده از قسمت (الف) بدست آورده و $v_R(t)$ را برای تمام t تعیین کنید.

پ- معادله دیفرانسیل بر حسب v_R نوشته و پاسخ پله آن را حساب کنید درستی جواب قسمت (ب) را تایید کنید.



شکل مسئله ۳۰

حل : الف ـ با توجه به شکل مدار داریم :

$v_R = v_s + v_x \quad , \quad v_x = -(۲i_c + v_c)$

$$\text{KCL} \rightarrow -i_c + ۲v_x + \frac{v_R}{۴} = ۰ \rightarrow -i_c - ۲(۲i_c + v_c) + \frac{v_s - (۲i_c + v_c)}{۴} = ۰$$

$$\rightarrow ۲۲i_c + ۱۳v_c = v_s \rightarrow ۲۲\left(۲\frac{dv_c}{dt}\right) + ۱۳v_c = v_s \rightarrow ۸۴\frac{dv_c}{dt} + ۱۳v_c = v_s$$

برای $v_s(t) = u(t)$ به ازای $t \geq ۰$ داریم.

$$۸۶\frac{dv_c}{dt}+۱۳v_c=۱ \;\rightarrow\; v_c(t)=\underbrace{K_۱e^{-\frac{۱۳}{۸۶}t}}_{\text{پاسخ عمومی}}+\underbrace{K_۲}_{\text{پاسخ خصوصی}}$$

با جایگذاری پاسخ خصوصی در معادله دیفرانسیل $K_۲=\frac{۱}{۱۳}$ بدست می آید و با فرض اینکه $v_c(۰)=۰$ باشد خواهیم داشت.

$$v_c(۰)=۰ \;\rightarrow\; K_۱+\frac{۱}{۱۳}=۰ \;\rightarrow\; K_۱=-\frac{۱}{۱۳} \;\rightarrow\; v_c(t)=\frac{۱}{۱۳}\left(۱-e^{-\frac{۱۳}{۸۶}t}\right)\;,\; t\geq ۰$$

ب ـ می دانیم که $i_c(t)=۲\frac{dv_c(t)}{dt}=\frac{۱}{۴۳}e^{-\frac{۱۳}{۸۶}t}$ می باشد در ادامه با توجه به نتایج قسمت قبل داریم

$$i_c(۰)=\frac{۱}{۴۳}\;,\; v_c(۰)=۰ \;\rightarrow\; v_x(۰)=-\left(۳i_c(۰)+v_c(۰)\right)=-\frac{۳}{۴۳}V$$

$$\rightarrow\; v_R(۰)=v_s(۰)+v_x(۰)=۱-\frac{۳}{۴۳}=\frac{۴۰}{۴۳}V$$

$$i_c(\infty)=۰\;,\; v_c(\infty)=\frac{۱}{۱۳} \;\rightarrow\; v_x(\infty)=-\left(۳i_c(\infty)+v_c(\infty)\right)=-\frac{۱}{۱۳}$$

$$\rightarrow\; v_R(\infty)=v_s(\infty)+v_x(\infty)=۱-\frac{۱}{۱۳}=\frac{۱۲}{۱۳}$$

واضح است که ثابت زمانی مدار تغییری نخواهد کرد بنابراین خواهیم داشت

$$\rightarrow\; v_R(t)=\left(v_R(۰)-v_R(\infty)\right)e^{-\frac{۱۳}{۸۶}t}+v_R(\infty)=\left(\frac{۴۰}{۴۳}-\frac{۱۲}{۱۳}\right)e^{-\frac{۱۳}{۸۶}t}+\frac{۱۲}{۱۳}=\frac{۴}{۵۵۹}e^{-\frac{۱۳}{۸۶}t}+\frac{۱۲}{۱۳}$$

پ ـ با توجه به شکل مسئله داریم

$$i_c=i_R+۳v_x=\frac{v_R}{۴}+۳\left(v_R-v_s\right)=\frac{۱۳v_R}{۴}-۳v_s$$

$$-v_s-v_x+v_R=۰ \;\rightarrow\; -v_s+\left(۳i_c+\frac{۱}{۲}\int i_c\,dt\right)+v_R=۰$$

$$\rightarrow\; -v_s+\left(\frac{۳۹}{۴}v_R-۹v_s\right)+\int\left(\frac{۱۳v_R}{۸}-\frac{۳}{۲}v_s\right)dt+v_R=۰ \;\rightarrow\; \frac{dv_R}{dt}+\frac{۱۳}{۸۶}v_R=\frac{۴۰}{۴۳}\frac{dv_s}{dt}+\frac{۶}{۴۳}v_s$$

برای $v_s(t)=u(t)$ به ازای $t>۰$ داریم.

$$\rightarrow\; \frac{dv_R(t)}{dt}+\frac{۱۳}{۸۶}v_R(t)=\frac{۴۰}{۴۳}\delta(t)+\frac{۶}{۴۳}u(t)=\frac{۶}{۴۳}\;,\; t>۰$$

$$\rightarrow\; v_R(t)=\underbrace{K_۱e^{-\frac{۱۳}{۸۶}t}}_{\text{پاسخ عمومی}}+\underbrace{K_۲}_{\text{پاسخ خصوصی}}$$

با جایگذاری پاسخ خصوصی در معادله دیفرانسیل $K_2 = \frac{۱۲}{۱۳}$ بدست آمده و با اعمال شرط اولیه داریم.

$$v_R(0^+) = \frac{۴۰}{۴۳} \rightarrow K_1 + \frac{۱۲}{۱۳} = \frac{۴۰}{۴۳} \rightarrow K_1 = \frac{۴۰}{۴۳} - \frac{۱۲}{۱۳} = \frac{۴}{۵۵۹}$$

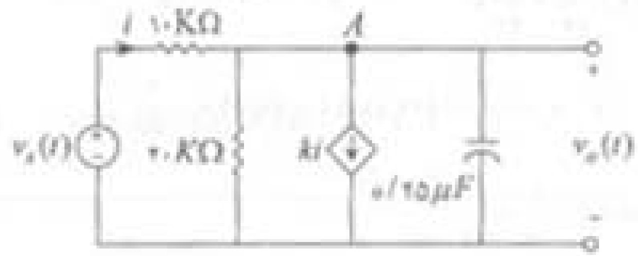
$$\rightarrow v_R(t) = \frac{۴}{۵۵۹} e^{-\frac{۱۳}{۸۴}t} + \frac{۱۲}{۱۳} \quad , \quad t > 0$$

که با نتیجه بدست آمده در قسمت (ب) یکسان است.

مسئله ۳۱

الف- معادله دیفرانسیلی بنویسید که $v_o(t)$ را به $v_s(t)$ ارتباط دهد.

ب- برای $v_s(t) = ۱۲u(t)$ و $K = ۰/۷۵$، ۱، ۱/۲۵، و ۱/۵ پاسخ حالت صفر $v_o(t)$ را حساب کنید.



شکل مسئله ۳۱

حل: الف- با توجه به شکل مسئله $i = \frac{v_s - v_o}{۱۰ \times ۱۰^۳}$ بوده و خواهیم داشت.

$$\text{KCL برای گره } A \rightarrow -\frac{v_s - v_o}{۱۰\times۱۰^۳} + \frac{v_o}{۴۰\times۱۰^۳} + K\left(\frac{v_s - v_o}{۱۰\times۱۰^۳}\right) + ۰/۲۵\times۱۰^{-۶}\frac{dv_o}{dt} = 0$$

$$\rightarrow \frac{dv_o}{dt} + ۱۰۰(۵ - ۴K)v_o = ۴۰۰(۱ - K)v_s$$

ب- می خواهیم پاسخ حالت صفر را بدست آوریم بنابراین $v_o(0) = 0$ بوده و با جایگذاری $v_s(t) = ۱۲u(t)$ و یا $v_s(t) = ۱۲ \, , \, t > 0$، $v_o(t)$ را به ازای $t > 0$ بدست خواهیم آورد.

$$K = ۰/۷۵ \rightarrow \frac{dv_o}{dt} + ۲۰۰v_o = ۱۲۰۰ \rightarrow v_o(t) = K_1e^{-۲۰۰t} + K_2 \rightarrow ۲۰۰K_2 = ۱۲۰۰ \rightarrow K_2 = ۶$$

$$v_o(0) = 0 \rightarrow K_1 + ۶ = 0 \rightarrow K_1 = -۶ \rightarrow v_o(t) = ۶\left(۱ - e^{-۲۰۰t}\right)$$

$$K = ۱ \rightarrow \frac{dv_o}{dt} + ۱۰۰v_o = 0 \rightarrow v_o(t) = K_1e^{-۱۰۰t} \rightarrow v_o(0) = 0 \rightarrow K_1 = 0 \rightarrow v_o(t) = 0$$

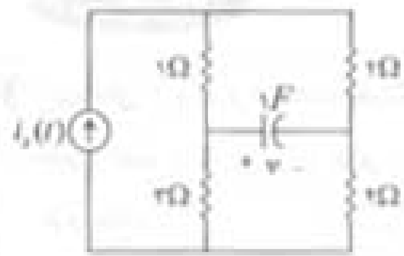
$$K = ۱/۲۵ \rightarrow \frac{dv_o}{dt} = -۱۲۰۰ \rightarrow v_o(t) = -۱۲۰۰t + K_1 \, , \, v_o(0) = 0 \rightarrow K_1 = 0 \rightarrow v_o(t) = -۱۲۰۰t$$

$$K = 1/5 \rightarrow \frac{dv_c}{dt} - 100v_c = -2400 \rightarrow v_c(t) = K_1 e^{-100t} + K_2 \rightarrow -100K_2 = -2400$$

$$\rightarrow K_2 = 24 \; , \; v_c(0) = 0 \rightarrow K_1 + 24 = 0 \rightarrow K_1 = -24 \rightarrow v_c(t) = 24\left(1 - e^{-100t}\right)$$

مسئله ۳۲

پاسخ پله و ضربه ولتاژ v حرف کوچک را بدست آورید.



شکل مسئله ۳۲

حل : با استفاده از روش تحلیل مش ابتدا پاسخ پله ولتاژ v را بدست خواهیم آورد.

$$i_1 = i_s(t) = u(t) \quad , \quad i_c = i_2 - i_3$$

KVL برای مش ② $\rightarrow \left(i_2 - u(t)\right) + 2i_2 - v_c = 0 \rightarrow 3i_2 - v_c = u(t)$

KVL برای مش ③ $\rightarrow 3\left(i_3 - u(t)\right) + v_c + 4i_3 = 0 \rightarrow 7i_3 + v_c = 3u(t)$

$$\begin{cases} -21i_2 + 7v_c = -7u(t) \\ 21i_3 + 3v_c = 9u(t) \end{cases} \rightarrow 21\left(i_3 - i_2\right) + 10v_c = 2u(t)$$

$$\rightarrow 21i_c + 10v_c = 2u(t) \rightarrow 21\frac{dv_c}{dt} + 10v_c = 2u(t) \rightarrow v_c(t) = \left(K_1 e^{-\frac{10}{21}t} + K_2\right)u(t)$$

با جایگذاری پاسخ خصوصی K_2 در معادله دیفرانسیل $10K_2 = 2$ و یا $K_2 = 0/2$ شده و از آنجا که پاسخ پله را می خواهیم حساب کنیم لذا حالت اولیه صفر بوده و $v_c(0) = 0$ می باشد بنابراین داریم

$$v_c(0) = 0 \rightarrow K_1 + 0/2 = 0 \rightarrow K_1 = -0/2$$

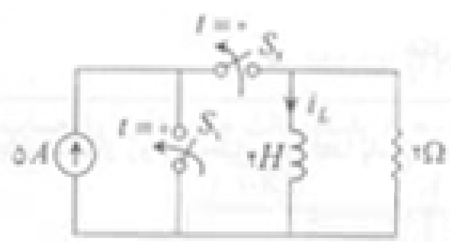
$$\rightarrow s(t) = 0/2\left(1 - e^{-\frac{10}{21}t} + K_1\right)u(t)$$

برای محاسبه پاسخ ضربه از پاسخ پله مشتق خواهیم گرفت.

$$s(t)=0/2\left(1-e^{-\frac{1}{21}t}+K_1\right)\ ,\ t>0\quad\rightarrow\quad h(t)=\frac{ds(t)}{dt}=\frac{2}{21}e^{-\frac{1}{21}t}\ ,\ t>0$$

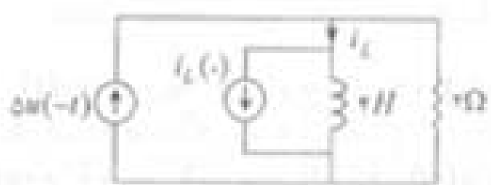
مسئله ۳۳

کلیدهای S_1 و S_2 برای مدت طولانی به ترتیب باز و بسته بوده و در $t=0$ بسته و باز می شوند مداری بدون کلید و با $i_L(0)=0$ برای $t>0$ رسم کرده تا برای $t>0$ دارای جواب یکسان برای i_L با مدار فوق باشد.



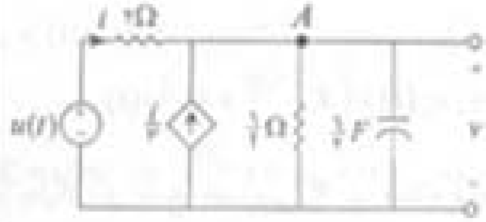
شکل مسئله ۳۳

حل : اگر بخواهیم یک سلف با جریان اولیه را بصورت بدون جریان اولیه رسم کنیم آن را بصورت یک سلف بدون جریان اولیه و موازی با یک منبع جریان ثابت با جریانی برابر جریان اولیه سلف رسم می کنیم و لذا مدار خواسته شده بصورت زیر می باشد.



مسئله ۳۴

پاسخ پله $v(t)$ را حساب کنید.



شکل مسئله ۳٤

حل : با توجه به شکل مسئله $i=\frac{u(t)-v}{2}$ بوده و خواهیم داشت.

$$\text{KCL برای گره } A\quad\rightarrow\quad -\frac{u(t)-v}{2}-\frac{1}{4}\left(\frac{u(t)-v}{2}\right)+\frac{v}{\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}\frac{dv}{dt}=0$$

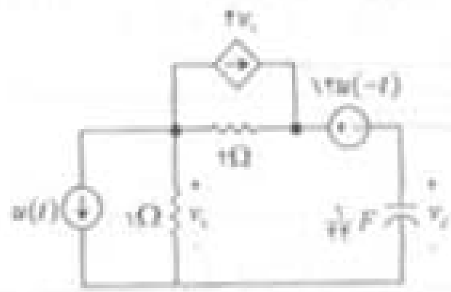
$$\rightarrow\ 3\frac{dv}{dt}+16v=4u(t)\ \rightarrow\ v(t)=\left(K_1e^{-\frac{16}{3}t}+K_2\right)u(t)$$

با جایگذاری پاسخ خصوصی K_2 در معادله دیفرانسیل $16K_2=4$ و یا $K_2=\frac{1}{4}$ شده و از آنجا که می خواهیم پاسخ پله را محاسبه کنیم لذا حالت اولیه صفر بوده و خواهیم داشت.

$$v_c(0)=0\ \rightarrow\ K_1+\frac{1}{4}=0\ \rightarrow\ K_1=-\frac{1}{4}\ \rightarrow\ s(t)=v(t)=\frac{1}{4}\left(1-e^{-\frac{16}{3}t}\right)u(t)$$

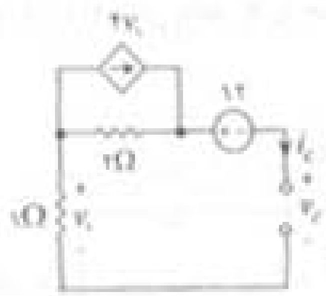
مسئله ۳۵

$v_c(t)$ را برای $t>0$ حساب کرده و آن را رسم کنید.



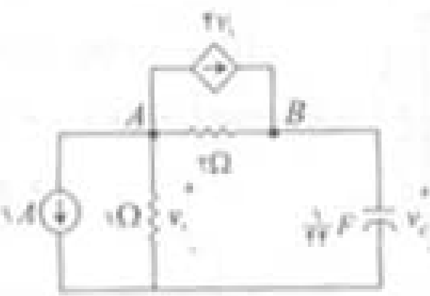
شکل مسئله ۳۵

حل : برای $t<0$، $u(-t)=1$ و $u(t)=0$ بوده ودر $t=0^-$ مدار به حالت دایمی خود رسیده و خازن مدار باز شده و مدار بصورت زیر خواهد شد.



$$\rightarrow\ v_c(0^-)=-12\ V$$

و برای $t>0$، $u(-t)=0$ و $u(t)=1$ شده و با استفاده از تحلیل گره خواهیم داشت.



$v_1=e_A$ ، $e_B=v_c$

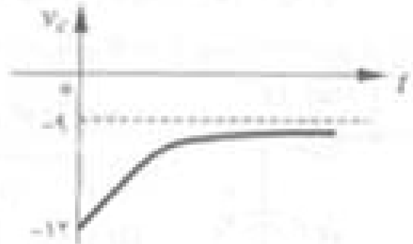
KCL برای گره A $\rightarrow\ 1+\frac{e_A}{1}+4e_A+\frac{e_A-v_c}{2}=0\ \rightarrow\ e_A=\frac{v_c-2}{11}$

KCL برای گره B $\rightarrow \dfrac{v_c - \dfrac{v_c - ۲}{۱۱}}{۲} - ۲\left(\dfrac{v_c - ۲}{۱۱}\right) + \dfrac{۱}{۲۲}\dfrac{dv_c}{dt} = ۰ \rightarrow \dfrac{dv_c}{dt} + ۴v_c = -۳۶$

$$\rightarrow v_c(t) = K_1 e^{-۴t} + K_۲$$

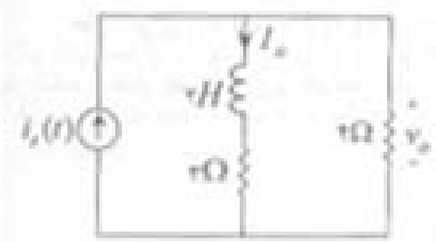
با جایگذاری پاسخ خصوصی $K_۲$ در معادله دیفرانسیل $۴K_۲ = -۳۶$ و یا $K_۲ = -۹$ خواهد شد و از آنجا هیچ جریان بی نهایتی از خازن نمی گذرد لذا $v_c(0^+) = v_c(0^-) = -۱۲$ شده و خواهیم داشت.

$$v_c(0^+) = -۱۲ \rightarrow K_1 - ۹ = -۱۲ \rightarrow K_1 = -۳ \rightarrow v_c(t) = -۹ - ۳e^{-۴t}\ ,\ t > ۰$$



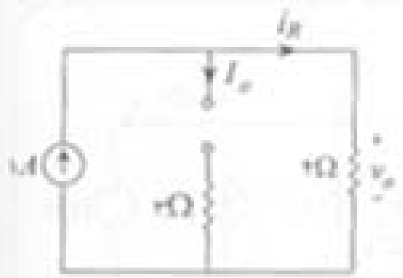
مسئله ۳۶

$i_s(t) = u(t)$ و $i_L(0) = I_0$ می باشد. v_o را حساب کنید.



شکل مسئله ۳۶

حل : در $t = 0^-$ ، $i_s(0^-) = 0$ بوده و لذا $I_o = \dfrac{v_o(0^-)}{۲}$ و یا $v_o(0^-) = ۲I_o$ بوده و برای $t = 0^+$ سلف مدار باز شده و خواهیم داشت.



$$\rightarrow -۱ + I_o + i_R = ۰ \rightarrow -۱ + I_o + \frac{v_o}{۲} = ۰$$

$$\rightarrow v_o(0^+) = ۲(۱ - I_o)$$

برای $t > ۰$ با توجه به شکل مسئله ۳۶ داریم

$$\text{KCL} \rightarrow -۱ + i_L + \frac{v_o}{۲} = ۰ \rightarrow i_L = ۱ - \frac{v_o}{۲}$$

$$\text{KVL} \rightarrow -۲i_L - v_L + v_o = ۰ \rightarrow -۲i_L - ۲\frac{di_L}{dt} + v_o = ۰$$

$$\rightarrow\ -2\left(1-\frac{v_c}{2}\right)-2\frac{d\left(1-\frac{v_c}{2}\right)}{dt}+v_c=0\ \rightarrow\ \frac{dv_c}{dt}+\frac{7}{2}v_c=6\ \rightarrow\ v_c(t)=K_1e^{-\frac{7}{2}t}+K_2\ ,\ t>0$$

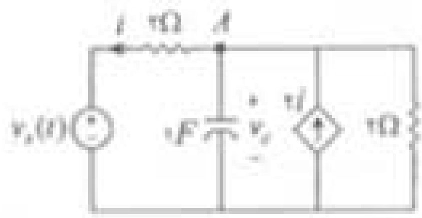
با جایگذاری پاسخ خصوصی K_2 در معادله دیفرانسیل $\frac{7}{2}K_2=6$ و یا $K_2=\frac{12}{7}$ خواهد شد و خواهیم داشت.

$$\rightarrow\ v_c\left(0^+\right)=2-2I_0\ \rightarrow\ K_1+\frac{12}{7}=2-2I_0\ \rightarrow\ K_1=\frac{16}{7}-2I_0$$

$$\rightarrow\ v_c(t)=\left(\frac{12}{7}+\left(\frac{16}{7}-2I_0\right)e^{-\frac{7}{2}t}\right)u(t)$$

مسئله ۳۷

پاسخ پله و ضربه ولتاژ دو سر خازن چیست.



شکل مسئله ۳۷

حل : ابتدا پاسخ پله را حساب می کنیم. با فرض $v_s(t)=u(t)=1\ ,\ t>0$ و با توجه به شکل مسئله $i=\frac{v_c-1}{2}$ بوده و خواهیم داشت.

$$\text{KCL برای گره } A\ \rightarrow\ \frac{v_c-1}{2}+\frac{dv_c}{dt}-2\left(\frac{v_c-1}{2}\right)+\frac{v_c}{2}=0\ \rightarrow\ \frac{dv_c}{dt}=-\frac{1}{2}$$

$$\rightarrow\ v_c(t)=-\frac{1}{2}t+K_1\ ,\ t>0$$

از آنجا که می خواهیم پاسخ پله را حساب کنیم لذا حالت اولیه صفر بوده، بنابراین داریم.

$$v_c(0)=0\ \rightarrow\ K_1=0\ \rightarrow\ s(t)=v_c(t)=-\frac{1}{2}t\,u(t)$$

در نهایت برای محاسبه پاسخ ضربه از پاسخ پله مشتق می گیریم.

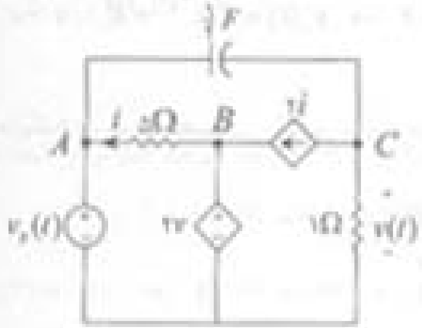
$$h(t)=\frac{ds(t)}{dt}=-\frac{1}{2}u(t)-\frac{1}{2}t\delta(t)$$

جمله $-\frac{1}{2}t\delta(t)$ متحد با صفر است زیرا برای $t=0$ ، $-\frac{1}{2}t$ صفر بوده و به ازای $t>0$ ، $\delta(t)=0$ می باشد بنابراین داریم.

$$h(t)=-\frac{1}{2}u(t)$$

مسئله ۳۸

پاسخ پله v را برای $t>0$ حساب کنید.



شکل مسئله ۳۸

حل: با فرض $t>0$ ، $v_s(t)=u(t)=1$ و با توجه به شکل مسئله $i=\frac{2v-1}{5}$ بوده و خواهیم داشت:

$$\text{KCL برای گره } ©\ \rightarrow\ \frac{1}{2}\frac{d(v-1)}{dt}+2\left(\frac{2v-1}{5}\right)+\frac{v}{1}=0$$

$$\rightarrow\ \frac{dv}{dt}+\frac{18}{5}v=\frac{4}{5}\ \rightarrow\ v(t)=K_1e^{-\frac{18}{5}t}+K_2\ ,\ t>0$$

با جایگذاری پاسخ خصوصی K_2 در معادله دیفرانسیل $\frac{18}{5}K_2=\frac{4}{5}$ ویا $K_2=\frac{2}{9}$ خواهد شد. همچنین در $t=0^+$ ، خازن اتصال کوتاه بوده بنابراین $v(0^+)=v_s=1$ بوده و داریم

$$v_s(0^+)=1\ \rightarrow\ K_1+\frac{2}{9}=1\ \rightarrow\ K_1=\frac{7}{9}\ \rightarrow\ v(t)=\left(\frac{2}{9}+\frac{7}{9}e^{-\frac{18}{5}t}\right)u(t)$$

مسئله ۳۹

در مسئله ۳۸ خروجی را به ازای $v_s(t)=4\left(u(t)-u(t-2)\right)$ حساب کنید.

حل: بنابر خاصیت خطی بودن و تغییر ناپذیری با زمان داریم.

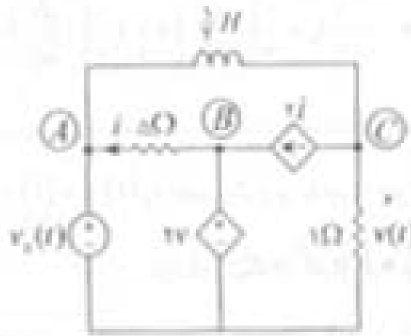
$$v_s(t)=u(t)\ \rightarrow\ v(t)=\left(\frac{2}{9}+\frac{7}{9}e^{-\frac{18}{5}t}\right)u(t)$$

$$v_{new}(t)=4\left(v(t)-v(t-2)\right)=4v(t)-4v(t-2)=\left(\frac{8}{9}+\frac{28}{9}e^{-\frac{18}{5}t}\right)u(t)-\left(\frac{8}{9}+\frac{28}{9}e^{-\frac{18}{5}(t-2)}\right)u(t-2)$$

مسئله ۴۰

اگر در مسئله ۳۸ خازن $\frac{1}{4}$ فارادی با سلف $\frac{1}{2}$ هانری تعویض شود $v(t)$ را حساب کنید.

حل : با انجام تعویض گفته شده مدار بصورت زیر تغییر خواهد کرد.



با فرض $t>0$ ، $v_s(t)=u(t)=1$ و با توجه به شکل مسئله $i=\frac{2v-1}{5}$ بوده و خواهیم داشت.

KCL برای گره C

$$\rightarrow i_L(0)+2\int(v-1)\,dt+2\left(\frac{2v-1}{5}\right)+\frac{v}{1}=0$$

$$\rightarrow 5i_L(0)+\int(10v-10)\,dt+9v-2=0$$

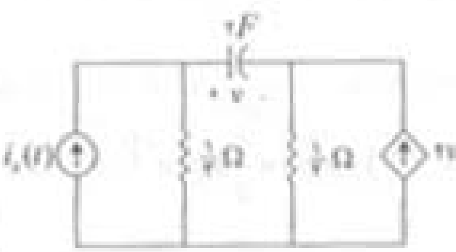
$$\rightarrow 10v-10+9\frac{dv}{dt}=0 \quad \rightarrow \frac{dv}{dt}+\frac{10}{9}v=\frac{10}{9} \quad \rightarrow v(t)=K_1e^{-\frac{10}{9}t}+K_2 \ ,\ t>0$$

با جایگذاری پاسخ خصوصی K_2 در معادله دیفرانسیل $\frac{10}{9}K_2=\frac{10}{9}$ و یا $K_2=1$ شده و همچنین در $t=0^+$ سلف همانند مدار باز عمل کرده بنابراین معادله KCL گره C بصورت زیر تغییر خواهد کرد.

$$2\left(\frac{2v(0^+)-1}{5}\right)+\frac{v_c(0^+)}{1}=0 \quad \rightarrow v_c(0^+)=\frac{2}{9}$$

$$\rightarrow K_1+1=\frac{2}{9} \quad \rightarrow K_1=-\frac{7}{9} \quad \rightarrow v(t)=\left(1-\frac{7}{9}e^{-\frac{10}{9}t}\right)u(t)$$

مسئله ۴۱

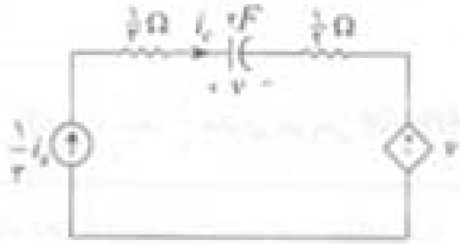


الف- معادله دیفرانسیل بر حسب v را بدست آورید.

ب- پاسخ پله و ضربه را جداگانه حساب کرده و ارتباط میان آنها را بررسی کنید.

شکل مسئله ۴۱

حل : **الف ـ** با استفاده از تبدیل تونن - نرتن داریم.



$$-\frac{1}{3}i_s+\frac{1}{3}i_c+v+\frac{1}{2}i_c+v=0 \ \to\ -\frac{1}{3}i_s+\frac{1}{3}\left(2\frac{dv}{dt}\right)+v+\frac{1}{2}\left(2\frac{dv}{dt}\right)+v=0$$

$$\to\ \frac{dv}{dt}+\frac{6}{5}v=\frac{i_s}{5}$$

ب ـ پاسخ پله به ازای $t>0$ و $i_s(t)=u(t)=1$ بصورت زیر بدست خواهد آمد.

$$\frac{dv}{dt}+\frac{6}{5}v=\frac{1}{5}\ ,\ t>0 \ \to\ v(t)=K_1e^{-\frac{6}{5}t}+K_2\ ,\ t>0$$

با جایگذاری پاسخ خصوصی K_2 در معادله دیفرانسیل $\frac{6}{5}K_2=\frac{1}{5}$ و یا $K_2=\frac{1}{6}$ شده همچنین در $t=0^+$ خازن اتصال کوتاه بوده بنابراین $v_c(0^+)=0$ شده و خواهیم داشت.

$$v_c(0^+)=0 \ \to\ K_1+\frac{1}{6}=0 \ \to\ K_1=-\frac{1}{6} \ \to\ s(t)=v(t)=\frac{1}{6}u(t)\left(1-e^{-\frac{6}{5}t}\right)$$

پاسخ ضربه را به ازای $i_s(t)=\delta(t)$ محاسبه خواهیم کرد. بدین منظور ابتدا $v(0^+)$ را بدست می آوریم. بدین منظور با فرض $v(0^-)=0$ از معادله دیفرانسیل در بازه 0^- تا 0^+ انتگرالگیری خواهیم کرد.

$$\frac{dv(t)}{dt}+\frac{6}{5}v(t)=\frac{1}{5}\delta(t)$$

$$\to\ \int_{0^-}^{0^+}\frac{dv(t)}{dt}+\frac{6}{5}\int_{0^-}^{0^+}v(t)=\frac{1}{5}\int_{0^-}^{0^+}\delta(t) \ \to\ v(0^+)-v(0^-)+0=\frac{1}{5}$$

$$v(0^-)=0 \ \to\ v(0^+)=\frac{1}{5}$$

صفر بودن انتگرال $\int_{0^-}^{0^+}v(t)$ به علت کراندار بودن تابع $v(t)$ است. همچنین به ازای $t>0$، $\delta(t)=0$ می باشد بنابراین معادله دیفرانسیل بصورت زیر تغییر خواهد کرد.

$$\frac{dv(t)}{dt}+\frac{6}{5}v(t)=0 \ \to\ v(0^+)=\frac{1}{5}\ ,\ t>0$$

$$\to\ v(t)=\left(Ke^{-\frac{6}{5}t}\right)u(t)\ ,\ v(0^+)=\frac{1}{5} \ \to\ K=\frac{1}{5} \ \to\ h(t)=v(t)=\frac{1}{5}u(t)e^{-\frac{6}{5}t}$$

در ادامه ارتباط میان $s(t)$ و $h(t)$ را مورد بررسی قرار می دهیم. با مشتق گیری از $s(t)$ داریم:

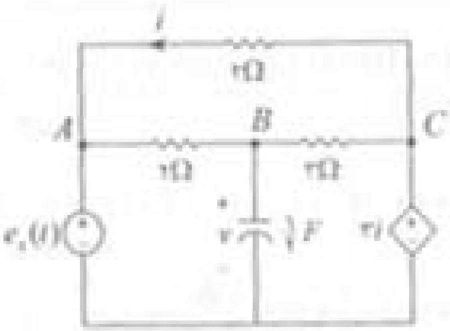
$$s(t)=\frac{1}{6}u(t)\left(1-e^{-\frac{6}{5}t}\right) \rightarrow \frac{ds(t)}{dt}=\frac{1}{6}\delta(t)\left(1-e^{-\frac{6}{5}t}\right)+\frac{1}{5}u(t)e^{-\frac{6}{5}t}$$

جمله $\frac{1}{6}\delta(t)\left(1-e^{-\frac{6}{5}t}\right)$ متحد با صفر است زیرا به ازای $t=0$، جمله $\left(1-e^{-\frac{6}{5}t}\right)$ برابر صفر بوده و به ازای $t>0$ جمله $\delta(t)$ برابر صفر می باشد بنابراین داریم:

$$\frac{ds(t)}{dt}=\frac{1}{5}u(t)e^{-\frac{6}{5}t} \rightarrow \frac{ds(t)}{dt}=h(t)$$

مسئله ۴۲

پاسخ پله و پاسخ ضربه v را حساب کنید. (خازن بدون ولتاژ اولیه است)



شکل مسئله ۴۲

حل: با جایگذاری $e_s(t)=u(t)=1,\ t>0$ و با توجه به شکل مسئله پاسخ پله را بصورت زیر محاسبه می کنیم.

$$i=\frac{e_s-1}{2},\ e_s=2i \rightarrow i=\frac{2i-1}{2} \rightarrow i=1$$

$$\text{KCL برای گره } B \rightarrow \frac{v-1}{2}+\frac{v-3(1)}{3}+\frac{1}{2}\frac{dv}{dt}=0 \rightarrow \frac{dv}{dt}+\frac{5}{2}v=3$$

$$\rightarrow v(t)=K_1e^{-\frac{5}{2}t}+K_2,\ t>0$$

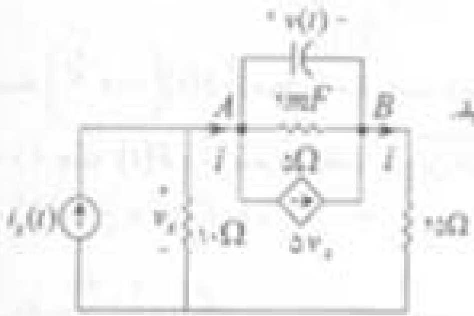
با جایگذاری پاسخ خصوصی K_2 در معادله دیفرانسیل $\frac{5}{2}K_2=3$ و یا $K_2=\frac{9}{5}$ شده همچنین در $t=0^+$ خازن اتصال کوتاه بوده بنابراین $v(0^+)=0$ شده و خواهیم داشت.

$$v(0^+)=0 \rightarrow K_1+\frac{9}{5}=0 \rightarrow K_1=-\frac{9}{5} \rightarrow s(t)=v(t)=\frac{9}{5}u(t)\left(1-e^{-\frac{5}{2}t}\right)$$

پاسخ ضربه مشتق پاسخ پله می باشد بنابراین داریم.

$$h(t)=\frac{ds(t)}{dt}=۲u(t)e^{-\frac{۵}{۲}t}$$

مسئله ۴۳



شکل مسئله ۴۳

پاسخ پله و پاسخ ضربه ولتاژ خازن $v(t)$ را حساب کنید.

همچنین v_x را نیز بدست آورید.

حل : با جایگذاری $i_s(t)=u(t)=۱\ ,\ t>۰$ و با توجه به شکل مدار پاسخ پله را بصورت زیر محاسبه می کنیم.

$$v=v_A-v_B=v_x-۲۵i=v_x-۲۵\left(۱-\frac{v_x}{۱۰}\right)\ \rightarrow\ v_x=۰/۲۹v+۷/۱۴$$

$$\text{KCL برای گره A}\ \rightarrow\ -۱+\frac{۰/۲۹v+۷/۱۴}{۱۰}+۵(۰/۲۹v+۷/۱۴)+\frac{v}{۵}+۲\times۱۰^{-۳}\frac{dv}{dt}=۰$$

$$\rightarrow\ \frac{dv}{dt}+۸۴۰v=-۱۷۷۰۰\ \rightarrow\ v(t)=K_1e^{-۸۴۰t}+K_2\ ,\ t>۰$$

با جایگذاری پاسخ خصوصی K_2 در معادله دیفرانسیل $۸۴۰K_2=-۱۷۷۰۰$ و یا $K_2=-۲۱/۰۷$ شده ، همچنین در $t=۰^-$ خازن اتصال کوتاه بوده لذا $v(۰^+)=۰$ بوده و خواهیم داشت.

$$v(۰^+)=۰\ \rightarrow\ K_1-۲۱/۰۷=۰\ \rightarrow\ K_1=۲۱/۰۷\ \rightarrow\ s(t)=v(t)=۲۱/۰۷u(t)\left(e^{-۸۴۰t}-۱\right)$$

همچنین $v_x(t)$ برابر خواهد شد با

$$v_x(t)=۰/۲۹v(t)+۷/۱۴=۰/۲۹\left[۲۱/۰۷\left(e^{-۸۴۰t}-۱\right)\right]+۷/۱۴\ ,\ t>۰$$

$$\rightarrow\ s_x(t)=v_x(t)=u(t)\left(۱/۰۳+۶/۱e^{-۸۴۰t}\right)$$

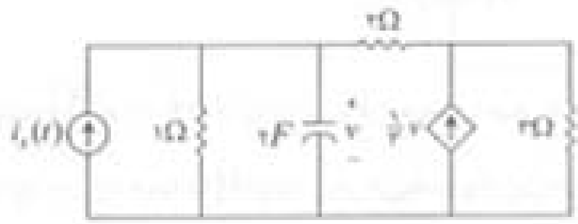
در ادامه برای محاسبه پاسخ ضربه از پاسخ پله مشتق می گیریم.

$$h(t)=\frac{ds(t)}{dt}=\frac{d}{dt}\left(۲۱/۰۷u(t)\left(e^{-۸۴۰t}-۱\right)\right)=-۱۷۷۰۰u(t)e^{-۸۴۰t}$$

$$h_x(t)=\frac{ds_x(t)}{dt}=\frac{d}{dt}\left(u(t)\left(۱/۰۳+۶/۱e^{-۸۴۰t}\right)\right)=-۵۱۲۴u(t)e^{-۸۴۰t}$$

مسئله ۴۴

پاسخ پله و پاسخ ضربه v را جداگانه حساب کنید و ارتباط میان آنها را عملاً نشان دهید.



شکل مسئله ۴۴

حل: با جایگذاری $i_s(t)=u(t)=1,\ t>0$ و با توجه به شکل مسئله داریم.

$$\text{KCL برای گره } \textcircled{B} \rightarrow \frac{v_B-v}{2}-\frac{1}{2}v+\frac{v_B}{2} \rightarrow v_B=v$$

$$\text{KCL برای گره } \textcircled{A} \rightarrow -1+\frac{v}{1}+2\frac{dv}{dt}+\frac{v-v}{2}=0 \rightarrow \frac{dv}{dt}+\frac{1}{2}v=\frac{1}{2}$$

$$\rightarrow v(t)=K_1e^{-t/2}+K_2\ ,\ t>0$$

با جایگذاری پاسخ خصوصی K_2 در معادله دیفرانسیل $\frac{1}{2}K_2=\frac{1}{2}$ و یا $K_2=1$ شده همچنین در $t=0^+$ خازن اتصال کوتاه بوده بنابراین $v(0^+)=0$ شده و خواهیم داشت.

$$v(0^+)=0 \rightarrow K_1+1=0 \rightarrow K_1=-1 \rightarrow s(t)=v(t)=u(t)\left(1-e^{-t/2}\right)$$

با جایگذاری $i_s(t)=\delta(t)$ معادله دیفرانسیل مورد نظر بصورت زیر تغییر خواهد کرد.

$$\frac{dv(t)}{dt}+\frac{1}{2}v(t)=\frac{1}{2}\delta(t)$$

با انتگرالگیری از دو طرف رابطه فوق از 0^- تا 0^+، مقدار $v(0^+)$ را بدست می آوریم. توجه کنید که $v(0^-)=0$ می باشد.

$$\int_{0^-}^{0^+}\frac{dv(t)}{dt}dt+\frac{1}{2}\int_{0^-}^{0^+}v(t)=\frac{1}{2}\int_{0^-}^{0^+}\delta(t) \rightarrow v(0^+)-v(0^-)+0=\frac{1}{2} \rightarrow v(0^-)=0 \rightarrow v(0^+)=\frac{1}{2}$$

می دانیم که به ازای $t>0$، $\delta(t)=0$ می باشد بنابراین معادله دیفرانسیل فوق را می توان بصورت زیر نوشت.

$$\frac{dv(t)}{dt}+\frac{1}{2}v(t)=0\ ,\ v(0^+)=\frac{1}{2}\ ,\ t>0 \rightarrow v(t)=Ke^{-t/2}\ ,\ t>0\ ,\ v(0^+)=\frac{1}{2} \rightarrow K=\frac{1}{2}$$

$$\rightarrow h(t)=v(t)=\frac{1}{2}u(t)e^{-t/2}$$

در ادامه به ارتباط بین پاسخ پله و ضربه می پردازیم. بدین منظور از پله مشتق می گیریم.

$$\frac{ds(t)}{dt}=\delta(t)\left(1-e^{-\frac{1}{2}t}\right)+\frac{1}{2}u(t)e^{-\frac{1}{2}t}$$

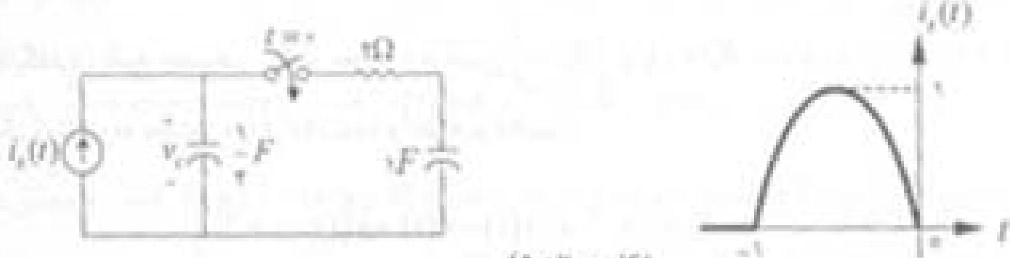
جمله $\delta(t)\left(1-e^{-\frac{1}{2}t}\right)$ به ازای $t\ge 0$ متحد با صفر است زیرا برای $t=0$ جمله $1-e^{-\frac{1}{2}t}$ برابر صفر بوده و به ازای $t>0$ ، جمله $\delta(t)$ برابر صفر می باشد بنابراین داریم.

$$\frac{ds(t)}{dt}=\frac{1}{2}u(t)e^{-\frac{1}{2}t}=h(t)$$

و این یعنی اینکه پاسخ ضربه مشتق پاسخ پله می باشد.

مسئله ۴۵

- ولتاژ $v_c(t)$ را برای تمام t محاسبه و رسم کنید. (خازنها بدون ولتاژ اولیه می باشند)
- آیا هیچگونه انرژی در مدار باقی می ماند و علت آن چیست.



شکل مسئله ۴۵

حل : با توجه به شکل موج $i_s(t)$ می توان نوشت

$$i_s(t)=\begin{cases}0 & , \ t\le -1\\ -\sin\pi t & , \ -1<t\le 0\\ 0 & , \ t>0\end{cases}$$

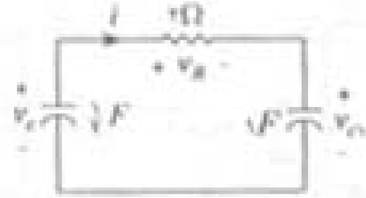
به ازای $t<0$ کلید باز بوده بنابراین داریم.

$$i_c(t)=i_s(t)\ ,\ t\le -1 \ \rightarrow\ v_c(t)=0 \ \rightarrow\ v_c(-1)=0$$

$$-1<t\le 0 \ \rightarrow\ v_c(t)=v_c(-1)+\frac{1}{c}\int_{-1}^{t} i_s(t)\,dt=v_c(-1)-2\int_{-1}^{t}\sin\pi t\,dt$$

$$=\frac{2}{\pi}(1+\cos\pi t)\ \rightarrow\ v_c(0)=\frac{2}{\pi}$$

به ازای $t>0$ جریان $i_s(t)$ برابر صفر شده و کلید بسته می شود بنابراین مدار بصورت زیر خواهد شد.



$$i = -\frac{1}{2}\frac{dv_c}{dt}$$

$$\text{KVL} \rightarrow -v_c + v_R + v_{C1} = 0 \rightarrow -v_c + 2\left(-\frac{1}{2}\frac{dv_c}{dt}\right) + v_{C1}(0) + \frac{1}{1}\int\left(-\frac{1}{2}\frac{dv_c}{dt}\right) = 0$$

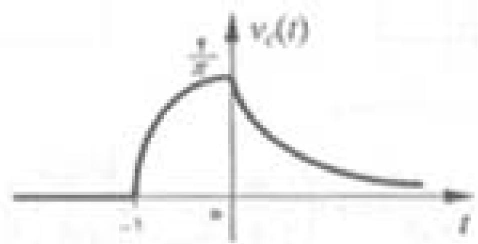
$$\rightarrow -\frac{dv_c}{dt} + \frac{d^2v_c}{dt^2} - \frac{1}{2}\frac{dv_c}{dt} \rightarrow \frac{d^2v_c}{dt^2} + \frac{3}{2}\frac{dv_c}{dt} = 0 \rightarrow \frac{dv_c}{dt} + \frac{3}{2}v_c = 0$$

$$\rightarrow v_c(t) = Ke^{-\frac{3}{2}t}\ ,\ t > 0$$

$$v_c(0) = \frac{4}{\pi} \rightarrow K = \frac{4}{\pi} \rightarrow v_c(t) = \frac{4}{\pi}e^{-\frac{3}{2}t}\ ,\ t > 0$$

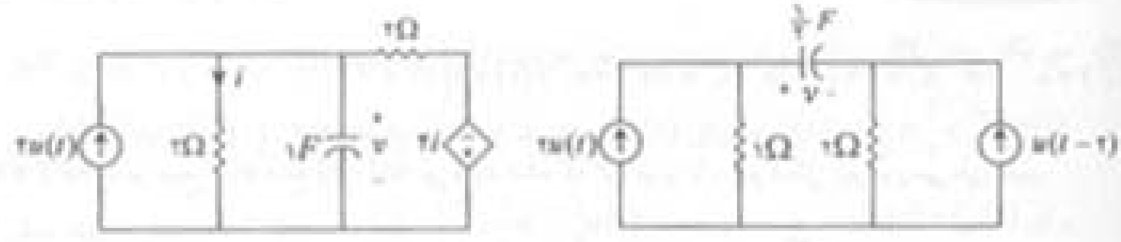
$$\rightarrow v_c(t) = \begin{cases} 0 & ,\ t \le -1 \\ \frac{2}{\pi}(1+\cos\pi t) & ,\ -1 < t \le 0 \\ \frac{4}{\pi}e^{-\frac{3}{2}t} & ,\ t > 0 \end{cases}$$

شکل موج $v_c(t)$ در شکل زیر رسم شده است.



مسئله ۴۶

در دو مدار شکل مسئله ۴۶ v را برای $t \ge 0$ حساب کنید. (ولتاژ اولیه خازن صفر است)



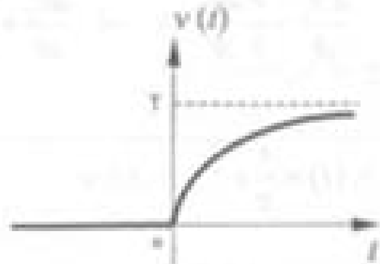
(الف) شکل مسئله ۴۶ (ب)

حل : الف ـ با توجه به شکل (الف) $i=\frac{v}{2}$ بوده و خواهیم داشت.

$$-4+\frac{v}{2}+\frac{dv}{dt}+\frac{v-\left(-2\frac{v}{2}\right)}{2}=0 \quad\rightarrow\quad \frac{dv}{dt}+2v=4 \quad\rightarrow\quad v(t)=K_1e^{-2t}+K_2\ ,\ t>0$$

با جایگذاری پاسخ خصوصی K_2 در معادله دیفرانسیل $2K_2=4$ و یا $K_2=2$ شده همچنین در $t=0^+$ خازن اتصال کوتاه بوده بنابراین داریم.

$$v(0^+)=0 \quad\rightarrow\quad K_1+2=0 \quad\rightarrow\quad K_1=-2 \quad\rightarrow\quad v(t)=2u(t)\left(1-e^{-2t}\right)\ ,\ t>0$$



ب ـ با توجه به شکل (ب) به ازای $0<t<2$ مدار بصورت زیر خواهد بود.

$$i_c=\frac{1}{2}\frac{dv}{dt}$$

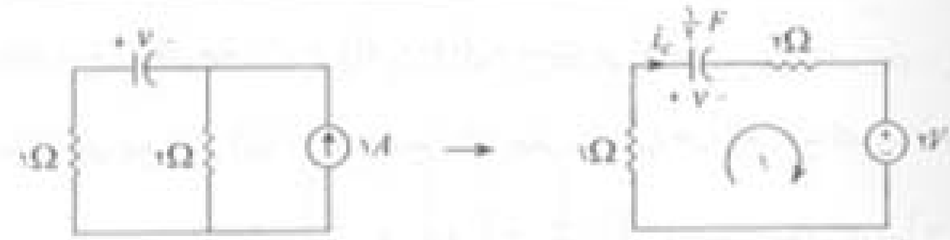
$$\text{KVL برای مش ۱} \quad\rightarrow\quad -2+\frac{1}{2}\frac{dv}{dt}+v+2\left(\frac{1}{2}\frac{dv}{dt}\right)=0 \quad\rightarrow\quad \frac{dv}{dt}+\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$$

$$\rightarrow\quad v(t)=K_1e^{-\frac{2}{3}t}+K_2\ ,\ t>0$$

با جایگذاری پاسخ خصوصی K_2 در معادله دیفرانسیل $\frac{2}{3}K_2=\frac{4}{3}$ و یا $K_2=2$ شده و همچنین خازن در $t=0^+$ اتصال کوتاه بوده بنابراین داریم.

$$v(0^+)=0 \quad\rightarrow\quad K_1+2=0 \quad\rightarrow\quad K_1=-2 \quad\rightarrow\quad v(t)=2\left(1-e^{-\frac{2}{3}t}\right)$$

در $t=2$ علاوه بر منبع $u(t)$ منبع $u(t-2)$ نیز وارد شده که اثر آن را با رسم شکل زیر بررسی می کنیم.



$$i_c=\frac{1}{2}\frac{dv}{dt}$$

KVL برای مش ۱ $\rightarrow \quad \frac{1}{2}\frac{dv}{dt}+v+2\frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dt}\right)+2=0 \quad \rightarrow \quad \frac{dv}{dt}+\frac{2}{3}v=-\frac{4}{3}$

$$\rightarrow \quad v(t)=K_1e^{-\frac{2}{3}(t-2)}+K_2 \quad , \quad t>2$$

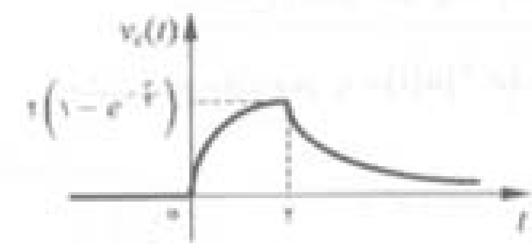
با جایگذاری پاسخ خصوصی K_2 در معادله دیفرانسیل $\frac{2}{3}K_2=-\frac{4}{3}$ و یا $K_2=-2$ شده همچنین از آنجا که فقط اثر منبع فوق را بررسی می کنیم لذا $v(2)=0$ بوده و داریم.

$$v(2)=0 \quad \rightarrow \quad K_1-2=0 \quad \rightarrow \quad K_1=2 \quad \rightarrow \quad v(t)=2e^{-\frac{2}{3}(t-2)}-2 \ , \ t>2$$

و بنا بر قاعده جمع آثار $v(t)$ برای $t>2$ بصورت زیر خواهد بود.

$$v(t)=2\left(1-e^{-\frac{2}{3}t}\right)+2e^{-\frac{2}{3}(t-2)}-2=2\left(1-e^{-\frac{4}{3}}\right)e^{-\frac{2}{3}t} \quad \rightarrow \quad v_c(t)=\begin{cases} 0 & , \ t<0 \\ 2\left(1-e^{-\frac{2}{3}t}\right) & , \ 0<t\leq 2 \\ 2\left(1-e^{-\frac{4}{3}}\right)e^{-\frac{2}{3}t} & , \ t>2 \end{cases}$$

شکل موج $v(t)$ در شکل زیر رسم شده است.



مسئله ۳۷

در یک مدار RC موازی برای ورودی منبع جریان $i_{s1}(t)$ و شرط اولیه $v_c(0)=V_0$ پاسخ کامل $v(t)=\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}e^{-2t}\right)u(t)$ و برای $i_{s2}(t)$ و شرط اولیه V_0 پاسخ کامل، $v(t)=\left(3e^{-2t}\right)u(t)$ و برای $i_{s1}(t)+i_{s2}(t)$ پاسخ حالت صفر $v(t)=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{-2t}\right)u(t)$ بدست آمده.پاسخ حالت صفر ناشی از $i_{s1}(t)$ چیست. مقادیر R و C و V_0 و $i_{s1}(t)$ و $i_{s2}(t)$ را تعیین کنید.

حل : ابتدا پاسخ ورودی صفر را برای $i_{o1}(t)+i_{o2}(t)$ بدست می آوریم.

پاسخ ورودی صفر برای $(i_{o1}+i_{o2})$ + پاسخ حالت صفر برای $(i_{o1}+i_{o2})$ = پاسخ کامل برای $(i_{o1}+i_{o2})$

پاسخ ورودی صفر برای $(i_{o1}+i_{o2})$ + $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{-2t}\right)u(t) = \left(3e^{-2t}\right)u(t) + \left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}e^{-2t}\right)u(t)$

$\rightarrow$ پاسخ ورودی صفر برای $(i_{o1}+i_{o2}) = \left(4e^{-2t}\right)u(t)$

واضح است که پاسخ ورودی صفر برای i_{o1} و i_{o2} یکسان می باشد بنابراین داریم.

پاسخ ورودی صفر برای i_{o1} = پاسخ ورودی صفر برای i_{o2} = $\left(2e^{-2t}\right)u(t)$

$\rightarrow$ پاسخ ورودی صفر برای i_{o1} − پاسخ کامل i_{o1} = پاسخ حالت صفر i_{o1}

$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}e^{-2t}\right)u(t)-\left(2e^{-2t}\right)u(t)=\frac{1}{2}\left(1-e^{-2t}\right)u(t)$$

از طرفی $v_c(0)=V_0$ می باشد که با توجه به پاسخ ورودی صفر $V_0=2$ خواهد شد. همچنین $T=RC=\frac{1}{2}$ می باشد که با انتخاب $R=\frac{1}{2}\Omega$ ، $C=1F$ خواهد شد.با دقت درپاسخ حالت صفر i_{o1} ملاحظه می شود که پاسخ پله یک مدار RC موازی است بنابراین $i_{s1}(t)=Iu(t)$ و لذا خواهیم داشت.

$$IR=\frac{1}{2}\ ,\ R=\frac{1}{2}\ \rightarrow\ I=1\ \rightarrow\ i_{s1}(t)=u(t)$$

همچنین می توان نوشت

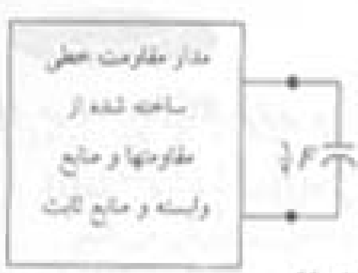
پاسخ ورودی صفر i_{o2} − پاسخ کامل i_{o2} = پاسخ حالت صفر i_{o2}

$=\left(3e^{-2t}\right)u(t)-\left(2e^{-2t}\right)u(t)=\left(e^{-2t}\right)u(t)=$ مشتق پاسخ حالت صفر i_{o1}

$$\rightarrow\ i_{s2}(t)=\frac{di_{s1}(t)}{dt}=\delta(t)$$

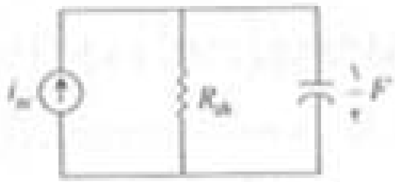
مسئله ۴۸

ولتاژ خازن $\frac{1}{2}F$ با مقدار اولیه صفر برابر $v_c(t)=2-2e^{-\frac{t}{4}}$ می باشد.اگرسلف $L=12H$ را به جای خازن وصل می کردیم ولتاژ دو سر سلف به چه صورتی درمی آمد.



شکل مسئله ۴۸

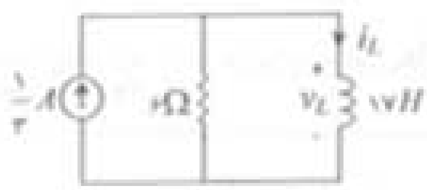
حل : ابتدا معادل تونن مدار مقاومت خطی را بدست می آوریم.(توجه کنید که فقط زمان $t>0$ را در نظر می گیریم)



$$v_c(t)=2\left(1-e^{-\frac{t}{2}}\right) \rightarrow R_{th}C=2\ ,\ C=\frac{1}{3}F \rightarrow R_{th}\left(\frac{1}{3}\right)=2 \rightarrow R_{th}=6\Omega$$

$$i_{sc}R_{th}=2 \rightarrow i_{sc}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}A$$

حال بجای خازن، سلف را قرار داده و از معادل تونن مدار مقاومت خطی استفاده می کنیم.



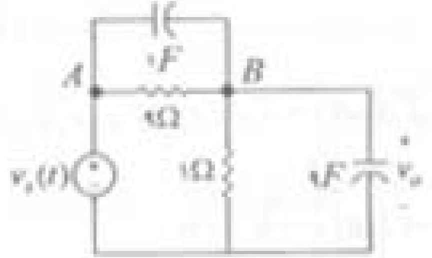
$$-\frac{1}{3}+\frac{v_L}{6}+\frac{1}{12}\int v_L\,dt=0 \rightarrow \frac{1}{6}\frac{dv_L}{dt}+\frac{1}{12}v_L=0 \rightarrow \frac{dv_L}{dt}+\frac{1}{2}v_L=0 \rightarrow v_L(t)=Ke^{-\frac{t}{2}}$$

در $t=0$ سلف مدار باز بوده بنابراین داریم

$$v_L(0)=\left(\frac{1}{3}A\right)(6\Omega)=2V \rightarrow K=2 \rightarrow v_L(t)=2e^{-\frac{t}{2}}$$

مسئله ۴۹

پاسخ پله v_o را برای تمام t تعیین و رسم کنید.



شکل مسئله ۴۹

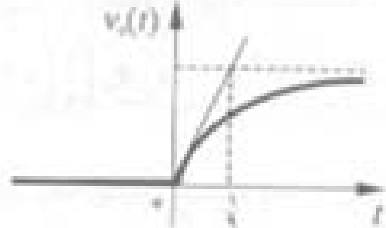
حل : برای تعیین پاسخ پله $v_s(t)=u(t)=1\ ,\ t>0$ قرار می دهیم در $t=0$ خازن ها اتصال کوتاه بوده لذا $v_o(0)=0$ می باشد و برای $t=\infty$ خازنها مدار باز شده ولذا با استفاده از قاعده تقسیم ولتاژ خواهیم داشت

$$v_o(\infty)=\frac{1}{9+1}1=\frac{1}{10}V$$

واضح است که دو مدار RC مجزا داریم. بنابراین ثابت زمانی ولتاژ v_o ، $T = RC = ۱\times۹ = ۹$ خواهد شد پس خواهیم داشت.

$$v_o(t) = \left(v_o(0) - v_o(\infty)\right)e^{-\frac{t}{T}} + v_o(\infty) = \frac{1}{10}\left(1 - e^{-\frac{t}{9}}\right) \ , \ t > 0 = \frac{1}{10}u(t)\left(1 - e^{-\frac{t}{9}}\right)$$

شکل موج $v_o(t)$ در شکل زیر رسم شده است.



مسئله ۵۰

ثابت کنید پاسخ ضربه v_c مشتق پاسخ پله v_c نمی باشد. ($i_R = v_R^2$)

شکل مسئله ۵۰

حل : ابتدا پاسخ پله v_c را بدست می آوریم. بدین منظور با فرض $t > 0$ ، $i_s(t) = u(t) = 1$ داریم.

$$-1 + \frac{dv_c}{dt} + v_c^2 = 0 \ \rightarrow \ \frac{dv_c}{1 - v_c^2} = dt \ \rightarrow \ \left(\frac{dv_c}{1 - v_c} + \frac{dv_c}{1 + v_c}\right) = 2dt$$

با انتگرالگیری از طرفین معادله دیفرانسیل بالا داریم.

$$\left(-\ln(1 - v_c) + \ln(1 + v_c)\right) = 2t + C$$

از طرفی می دانیم که خازن در $t = 0$ اتصال کوتاه خواهد بود. بنابراین $v_c(0) = 0$ بوده لذا خواهیم داشت.

$$v_c(0) = 0 \ \rightarrow \ \left(-\ln(1) + \ln(1)\right) = 0 + C \ \rightarrow \ C = 0 \ \rightarrow \ \ln\left(\frac{1 + v_c}{1 - v_c}\right) = 2t$$

$$\rightarrow \ \frac{1 + v_c}{1 - v_c} = e^{2t} \ \rightarrow \ s(t) = v_c(t) = \frac{e^{2t} - 1}{e^{2t} - 1}$$

در ادامه با جایگذاری $v_s(t) = \delta(t)$ پاسخ ضربه را محاسبه خواهیم کرد.

$$-\delta(t) + \frac{dv_c}{dt} + v_c^2 = 0 \ \rightarrow \ \frac{dv_c}{dt} + v_c^2 = \delta(t) \ , \ t \geq 0$$

حال با انتگرالگیری از 0^- تا 0^+، $v_c(0^+)$ را بدست خواهیم آورد.

$$\int_{0^-}^{0^+}\frac{dv_c}{dt}dt+\int_{0^-}^{0^+}v_c^2dt=\int_{0^-}^{0^+}\delta(t)\rightarrow v_c(0^+)-v_c(0^-)+0=1\rightarrow v_c(0^-)=0\rightarrow v_c(0^+)=1$$

واضح است که v_c^2 در بازه 0^- تا 0^+ کراندار می باشد و لذا $\int_{0^-}^{0^+}v_c^2dt=0$ شد ولی $\frac{dv_c}{dt}$ در بازه 0^- تا 0^+ کراندار نیست. بنابراین معادله دیفرانسیل فوق را می توان بصورت زیر نوشت.

$$\frac{dv_c}{dt}+v_c^2=0\ ,\ t\geq 0\ ,\ v_c(0^+)=1\ \rightarrow\ \frac{dv_c}{v_c^2}=-dt\ \rightarrow\ -\frac{1}{v_c}=-t+C\ ,\ v_c(0^+)=1$$

$$\rightarrow\ C=-1\ \rightarrow\ h(t)=v_c(t)=\frac{1}{t+1}$$

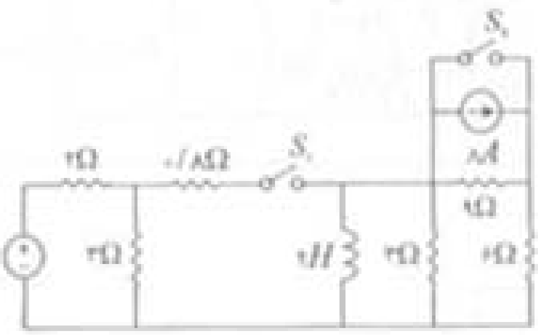
با گرفتن مشتق از پاسخ پله داریم.

$$\frac{ds(t)}{dt}=\frac{2e^{2t}(e^{2t}+1)-2e^{2t}(e^{2t}-1)}{(e^{2t}+1)^2}=\frac{4e^{2t}}{(e^{2t}+1)^2}\neq h(t)$$

بنابراین پاسخ ضربه مشتق پاسخ پله نمی باشد و این به علت غیر خطی بودن مدار است.

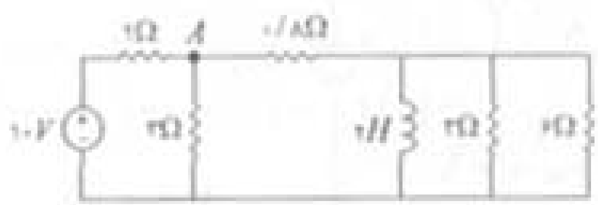
مسئله ۵۱

S_1 و S_2 برای مدت طولانی به ترتیب باز و بسته بوده اند. در $t=0$، S_1 را بسته و سپس در $t=1$ هردورا باز می کنیم. جریان گذرنده از سلف برای $0\leq t\leq 1$ و $t\geq 1$ چیست.



شکل مسئله ۵۱

حل: برای $0\leq t\leq 1$ کلید S_1 و S_2 هردو بسته اند ملاحظه می شود که همه جریان $8A$ از اتصال کوتاه ناشی از بسته بودن S_2 می گذرد بنابراین منبع جریان $8\,A$ عملاً از مدار خارج خواهد بود.



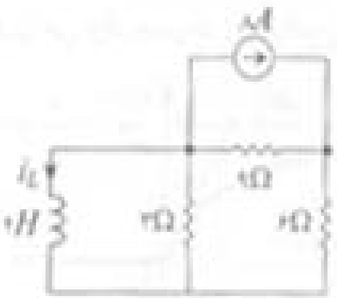
در $t=0^-$ سلف مدار باز بوده لذا $i_L(0^-)=0$ می باشد و در $t=\infty$ سلف اتصال کوتاه بوده بنابراین داریم.

$$v_A=\frac{3\|0/8}{3\|0/8+2}10V=2/4V\ \rightarrow\ i_L(\infty)=\frac{2/4}{0/8}=3A$$

معادل دو سر سلف $R=(3\|6)\|\left[(3\|6)+0/8\right]=1\Omega \rightarrow T=\frac{L}{R}=2$

$\rightarrow i_L(t)=\left(i_L(0)-i_L(\infty)\right)e^{-\frac{t}{T}}+i_L(\infty)=3\left(1-e^{-\frac{t}{2}}\right)$

برای $t>1$ ، k_1 و k_2 هر دو باز خواهند بود و مدار بصورت زیر می باشد.



با توجه به قسمت قبل $i_L(1)=3\left(1-e^{-\frac{1}{2}}\right)=1/18$ بوده و همچنین می دانیم که سلف در $t=\infty$ اتصال کوتاه خواهد بود بنابراین با استفاده از قاعده تقسیم جریان داریم

$i_L(\infty)=-\frac{9}{9+6}8=-4/8$

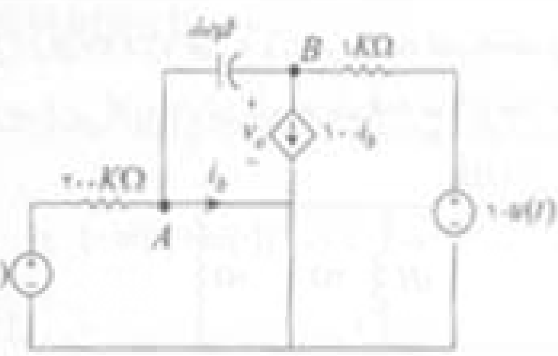
معادل دو سر سلف $R=(9+6)\|3=\frac{15}{6} \rightarrow T=\frac{L}{R}=\frac{2}{\frac{15}{6}}=\frac{12}{15}$

$\rightarrow i_L(t)=\left(i_L(1)-i_L(\infty)\right)e^{-\frac{(t-1)}{T}}+i_L(\infty)=5/98e^{-\frac{15}{12}(t-1)}-4/8$

$$\rightarrow i_L(t)=\begin{cases}3\left(1-e^{-\frac{t}{2}}\right) & , \ 0\le t\le 1\\ 5/98e^{-1/25(t-1)}-4/8 & , \ t>1\end{cases}$$

مسئله ۵۲

$v_c=?$



شکل مسئله ۵۲

حل :

KCL برای گره A : $\rightarrow i_b+\frac{0-10}{200\times10^3}=-0/001\times10^{-6}\frac{dv_c}{dt} \rightarrow i_b=5\times10^{-5}+10^{-9}\frac{dv_c}{dt}$

KCL برای گره $\textcircled{B}$ $\rightarrow 100\left(5\times10^{-5}+10^{-6}\frac{dv_o}{dt}\right)+10^{-6}\frac{dv_o}{dt}+\frac{v_o-10}{1\times10^{2}}=0$

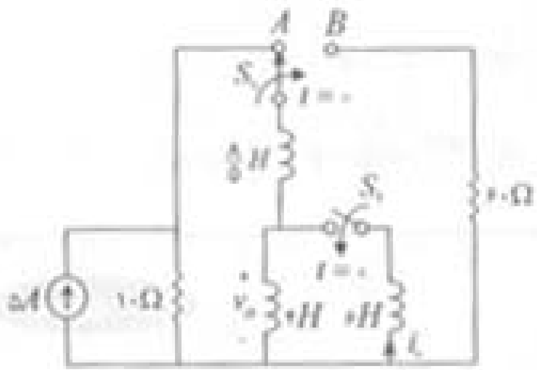
$$\rightarrow \frac{dv_o}{dt}+\frac{10^4}{101}v_o=\frac{5}{101}\times10^4 \rightarrow v_o(t)=K_1e^{-\frac{10^4}{101}t}+K_2\ ,\ t>0$$

با جایگذاری پاسخ خصوصی K_2 در معادله دیفرانسیل $\frac{10^4}{101}K_2=\frac{5}{101}\times10^4$ و با $K_2=5$ شده و همچنین در $t=0$ خازن اتصال کوتاه بوده بنابراین داریم.

$$v_o(0)=0 \rightarrow K_1+5=0 \rightarrow K_1=-5 \rightarrow v_o(t)=5u(t)\left(1-e^{-\frac{10^4}{101}t}\right)$$

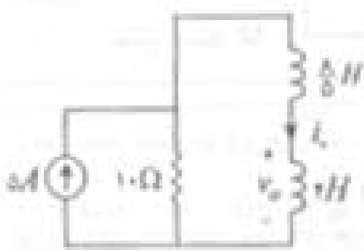
مسئله ۵۳

$v_o(t)$ و $i_o(t)$ را برای $t\geq0$ حساب کنید.
(به مدت طولانی S_1 در وضعیت A و S_2 باز می باشد).



شکل مسئله ۵۳

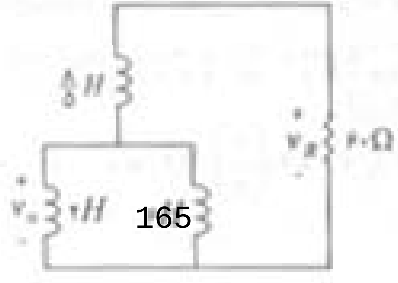
حل : برای $t<0$ مدار بصورت زیر می باشد.



در $t=0^-$ مدار به حالت دایمی رسیده و سلفها اتصال کوتاه خواهند بود بنابراین داریم.

$$i_{L_1}(0^-)=i_{L_2}(0^-)=5A\ ,\ i_{L_3}(0^-)=0\ ,\ v_o(0^-)=0\ ,\ i_o(0^-)=0$$

برای $t>0$ مدار بصورت زیر تغییر خواهد کرد.



از آنجا که هیچگونه ولتاژ نا معینی به دو سر سلفها وصل نمی شود لذا داریم.

$$i_{L1}(0^+)=i_{L1}(0^-)=5A\ ,\ i_{L2}(0^+)=i_{L2}(0^-)=5A\ ,\ i_c(0^+)=i_c(0^-)=0$$

بنابراین ولتاژ دو سر مقاومت $v_R=60(-5)=-300V$ بوده و خواهیم داشت.

$$v_o(0^+)=\frac{4\|6}{4\|6+\frac{8}{5}}v_R=\frac{12}{20}(-300)=-180V$$

می دانیم که در $t=\infty$ سلفها اتصال کوتاه شده ولذا $v_o(\infty)=0$ خواهد بود. در ادامه ثابت زمانی مدار را حساب خواهیم کرد.

$$T=\frac{L}{R}=\frac{4\|6+\frac{9}{5}}{R}=\frac{4}{60}=\frac{1}{15}$$

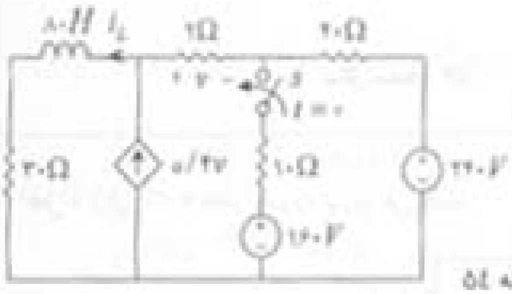
$$\rightarrow\ v_o(t)=\left(v_o(0^+)-v_o(\infty)\right)e^{-\frac{t}{T}}+v_o(\infty)=-180e^{-15t}\ ,\ t>0$$

$$i_c(t)=i_c(0)+\frac{1}{6}\int_0^t\left(-v_o(t)\right)dt=30\int_0^t e^{-15t}=-2e^{-15t}\Big|_0^t=2\left(1-e^{-15t}\right)\ ,\ t>0$$

مسئله ۵۴

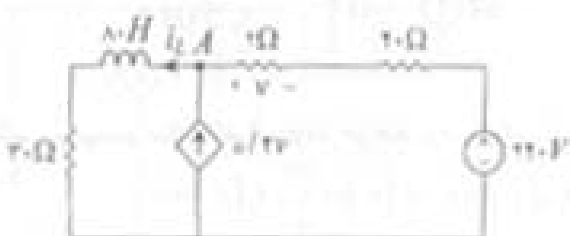
$i_L(t)$ را برای $t>0$ حساب کنید. بدست آورده و رسم کنید.

(S برای مدت طولانی باز بوده است)



شکل مسئله ۵۴

حل : به ازای $t<0$ کلید S باز بوده و مدار بصورت زیر می باشد.



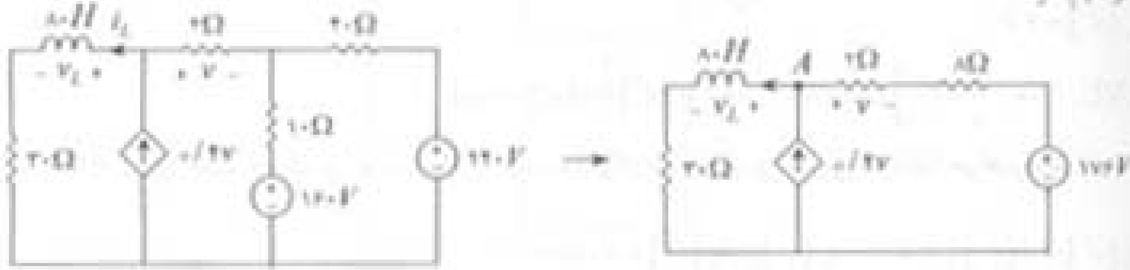
در $t=0^-$ مدار به حالت دایمی خود رسیده و سلف بصورت اتصال کوتاه عمل می کند بنابراین داریم

KCL برای گره A $\rightarrow\ i_L-0/4v+\frac{v}{2}=0\ \rightarrow\ v=-10i_L$

KVL برای حلقه بیرونی $\rightarrow\ -30i_L+v+20\left(\frac{v}{2}\right)+220=0\ \rightarrow\ -30i_L-21v=220$

$$\rightarrow \quad -۲۰ i_L + ۲۶۰ i_L = ۲۴۰ \quad \rightarrow \quad i_L(0^-) = \frac{۲۴۰}{۲۴۰} = ۱A$$

برای $t>0$ کلید S بسته شده و مدار بصورت زیر تغییر خواهد کرد که با استفاده از تبدیل تونن- نرتن آن را ساده خواهیم کرد.



KCL برای گره A $\rightarrow \quad i_L - ۰/۴v + \frac{v}{۲} = ۰ \quad \rightarrow \quad v = -۱۰ i_L$

KVL برای حلقه بیرونی $\rightarrow \quad -۳۰ i_L - v_L + v + ۸\left(\frac{v}{۲}\right) + ۱۷۶ = ۰$

$$\rightarrow \quad -۳۰ i_L - v_L + (-۱۰ i_L) + ۸\left(\frac{-۱۰ i_L}{۲}\right) + ۱۷۶ = ۰$$

$$\rightarrow \quad v_L + ۸۰ i_L = ۱۷۶ \quad \rightarrow \quad ۸۰\frac{di_L}{dt} + ۸۰ i_L = ۱۷۶ \quad \rightarrow \quad \frac{di_L}{dt} + i_L = \frac{۱۱}{۵}$$

$$\rightarrow \quad i_L(t) = K_1 e^{-t} + K_2 \ , \ t>0$$

با جایگذاری پاسخ خصوصی K_2 در معادله دیفرانسیل $K_2 = \frac{۱۱}{۵}$ شده ، همچنین از آنجا که هیچ ولتاژ بی نهایتی به دو سر سلف اعمال نشده است لذا خواهیم داشت.

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = ۱A \quad \rightarrow \quad K_1 + \frac{۱۱}{۵} = ۱ \quad \rightarrow \quad K_1 = -\frac{۶}{۵} \quad \rightarrow \quad i_L(t) = \frac{۱۱}{۵} - \frac{۶}{۵}e^{-t} \ , \ t>0$$

مسئله ۵۵

$v_c(t)$ و $i_L(t)$ را برای $t>0$ حساب کنید.

(برای مدت طولانی S_1 بسته و S_2 باز بوده است)

شکل مسئله ۵۵

حل: به ازای $t=0^-$ ، S_1 بسته و S_2 باز بوده و مدار به حالت دایمی خود رسیده است بنابراین سلف اتصال کوتاه و خازن مدار باز بوده و خواهیم داشت.

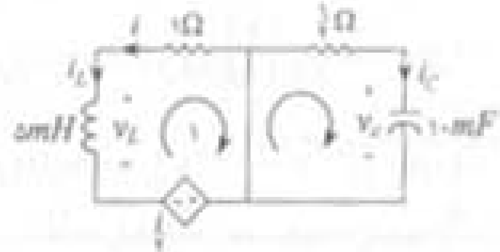
$v_c(0^-)=20V$

$$\text{KVL} \rightarrow \frac{i}{2}-i-\frac{1}{2}i+20=0 \rightarrow i_L(0^-)=i(0^-)=20A$$

و از آنجا که روی خازن جریان بی نهایت و یا روی سلف ولتاژ بی نهایت واقع نمی شود لذا خواهیم داشت.

$$v_c(0^+)=v(0^-)=20V \;,\; i_L(0^+)=i_L(0^-)=20A$$

برای $t>0$، S_1 باز و S_2 بسته خواهد شد و مدار زیر را خواهیم داشت.



$i=i_L$

① برای مش KVL $\rightarrow \frac{i_L}{2}-v_L-i_L=0 \rightarrow 5\times10^{-3}\frac{di_L}{dt}+\frac{i_L}{2}=0$

$$\rightarrow \frac{di_L}{dt}+100i_L=0 \rightarrow i_L(t)=Ke^{-100t} \;,\; t>0$$

$$\rightarrow i_L(0^+)=20A \rightarrow K=20 \rightarrow i_L(t)=20e^{-100t} \;,\; t>0$$

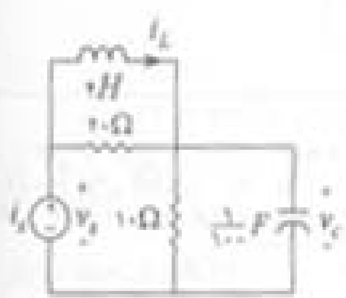
② برای مش KVL $\rightarrow \frac{1}{2}i_c+v_c=0 \rightarrow \frac{1}{2}\left(10\times10^{-3}\frac{dv_c}{dt}\right)+v_c=0$

$$\rightarrow \frac{dv_c}{dt}+200v_c=0 \rightarrow v_c(t)=Ke^{-200t}$$

$$v_c(0^+)=20V \rightarrow K=20 \rightarrow v_c(t)=20e^{-200t} \;,\; t>0$$

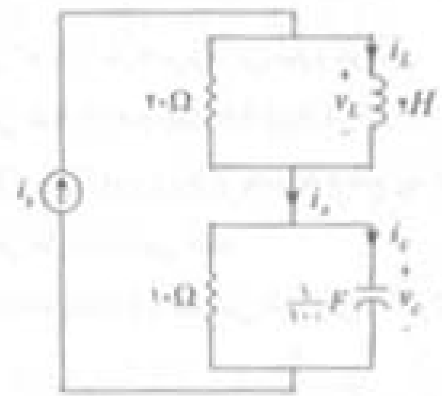
مسئله ۵۶

$v_c(t)$ و $i_L(t)$ و $v_s(t)$ را بیابید. $(i_s=30+40u(t))$



شکل مسئله ۵۶

حل : واضح است که یک مدار RC موازی با یک مدار RL موازی، سری شده است.



به ازای $t<0$ هر دو مدار به حالت دایمی خود یعنی $i_s(t)=30A$ رسیده اند. به عبارت دیگر سلف اتصال کوتاه و خازن مدار باز است بنابراین داریم.

$$i_L(0^+)=30A\ ,\ v_c(0^+)=(10\Omega)(30\Omega)=300\Omega$$

به ازای $t>0$، $i_s(t)=30+60u(t)=90A$ شده بنابراین داریم

$$\frac{v_L}{20}+i_L=90 \rightarrow \frac{4\frac{di_L}{dt}}{20}+i_L=90 \rightarrow \frac{di_L}{dt}+5i_L=450 \rightarrow i_L(t)=K_1e^{-5t}+K_2\ ,\ t>0$$

با جایگذاری K_2 در معادله دیفرانسیل $5K_2=450$ و یا $K_2=90$ شده ، و همچنین با اعمال شرط اولیه خواهیم داشت.

$$i_L(0^+)=30A \rightarrow 30=K_1+90 \rightarrow K_1=-60 \rightarrow i_L(t)=-60e^{-5t}+90\ ;\ t>0$$

در ادامه به محاسبه $v_c(t)$ خواهیم پرداخت.

$$\frac{v_c}{10}+i_c=90 \rightarrow \frac{v_c}{10}+\frac{1}{100}\frac{dv_c}{dt}=90 \rightarrow \frac{dv_c}{dt}+10v_c=9000 \rightarrow v_c(t)=K_3e^{-10t}+K_4\ ,\ t>0$$

با جایگذاری پاسخ خصوصی K_4 در معادله دیفرانسیل $10K_4=9000$ و یا $K_4=900$ شده ، و همچنین با اعمال شرط اولیه خواهیم داشت.

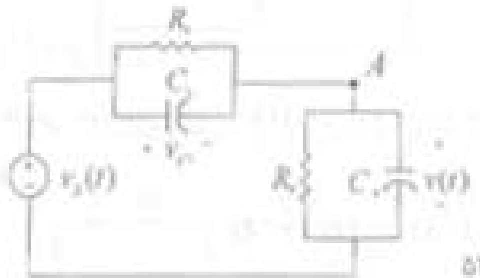
$$v_c(0^+)=300 \rightarrow K_3+900=300 \rightarrow K_3=-600 \rightarrow v_c(t)=-600e^{-10t}+900\ ,\ t>0$$

و در نهایت $v_s(t)$ را بدست خواهیم آورد.

$$v_s(t)=v_L+v_c=4\frac{di_L}{dt}+v_c=1200e^{-5t}-600e^{-10t}+900\ ,\ t>0$$

مسئله ۵۷

- الف- معادله دیفرانسیلی که v را به v_s مربوط می سازد بنویسید.
- ب- پاسخ پله v را تعیین کنید. ($v_{c_1}(0)=v_{c_2}(0)=0$)
- پ- چه رابطه ای بین R_1 و R_2 و C_1 و C_2 برقرار باشد تا v تابع پله شود.
- ت- جریان گذرنده از هر خازن را تعیین کنید.
- ث- اگرمنبع ولتاژ $v_s(t)$ با جریان $i_s(t)$ تعویض شود جواب سئوالات بالا به چه صورت درمی آید.



شکل مسئله ۵۷

حل : الف ـ با توجه به شکل مسئله داریم.

$v_{c_1}=v_s-v$

$$\text{KCL برای گره } A \;\rightarrow\; -\frac{v_s-v}{R_1}-C_1\frac{d(v_s-v)}{dt}+\frac{v}{R_2}+C_2\frac{dv}{dt}=0$$

$$\rightarrow\; \frac{dv}{dt}+\frac{R_1+R_2}{R_1R_2(C_1+C_2)}v=\frac{C_1}{C_1+C_2}\frac{dv_s}{dt}+\frac{1}{R_1(C_1+C_2)}v_s$$

ب ـ پاسخ پله با حل معادله دیفرانسیل فوق به ازای $t>0$ ، $v_s(t)=u(t)=1$ بدست خواهد آمد

$$\frac{dv}{dt}+\frac{R_1+R_2}{R_1R_2(C_1+C_2)}v=\frac{1}{R_1(C_1+C_2)} \;\rightarrow\; v(t)=K_1e^{-\frac{R_1+R_2}{R_1R_2(C_1+C_2)}}+K_2\;,\; t>0$$

باجایگذاری پاسخ خصوصی K_2 درمعادله دیفرانسیل $\frac{R_1+R_2}{R_1R_2(C_1+C_2)}K_2=\frac{1}{R_1(C_1+C_2)}$ ویا $K_2=\frac{R_2}{R_1+R_2}$ شده، و همچنین در $t=0$ هر دو خازن اتصال کوتاه شده ومقاومت ها را از مدار خارج خواهند کرد ولی می توان نوشت:

$$v_{c_1}(0^+)+v_{c_2}(0^+)=v_s(0^+)=1V \;\rightarrow\; v(0^+)=v_{c_2}(0^+)=\frac{C_1}{C_1+C_2}(1V)=\frac{C_1}{C_1+C_2}$$

$$\rightarrow\; K_1+\frac{R_2}{R_1+R_2}=\frac{C_1}{C_1+C_2} \;\rightarrow\; K_1=\left(\frac{C_1}{C_1+C_2}-\frac{R_2}{R_1+R_2}\right)$$

$$\rightarrow \ s(t)=v(t)=u(t)\left\{\frac{R_2}{R_1+R_2}+\left(\frac{C_1}{C_1+C_2}-\frac{R_2}{R_1+R_2}\right)e^{-\frac{R_1+R_2}{R_1R_2(C_1+C_2)}t}\right\}$$

پ ـ بدین منظور باید ضریب قسمت نمایی $s(t)$ برابر صفر شود و یا:

$$\frac{C_1}{C_1+C_2}-\frac{R_2}{R_1+R_2}=0 \ \rightarrow \ C_1R_1+C_1R_2=C_1R_2+C_2R_2 \ \rightarrow \ C_1R_1=C_2R_2$$

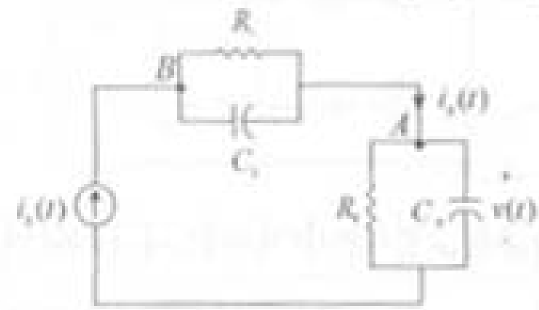
ت ـ با توجه به شکل مدار می توان نوشت.

$$i_{C_2}=C_2\frac{dv}{dt}=C_2\frac{dv(t)}{dt}=\frac{C_2(R_1+R_2)}{R_1R_2(C_1+C_2)}\left(\frac{R_2}{R_1+R_2}-\frac{C_1}{C_1+C_2}\right)u(t)e^{-\frac{R_1+R_2}{R_1R_2(C_1+C_2)}t}$$

$v_{C_1}=v_s-v_{C_2}=1-v_{C_2}\ ,\ t>0$

$$\rightarrow i_{C_1}=C_1\frac{d(1-v_{C_2})}{dt}=-C_1\frac{dv_{C_2}}{dt}=\frac{C_1(R_1+R_2)}{R_1R_2(C_1+C_2)}\left(\frac{C_1}{C_1+C_2}-\frac{R_2}{R_1+R_2}\right)e^{-\frac{R_1+R_2}{R_1R_2(C_1+C_2)}t}\ ,t>0$$

ث ـ در این حالت مدار بصورت زیر خواهد شد.



جریان ورودی دو قسمت RC و RL یکسان است بنابراین مدار بصورت دو مدار مرتبه اول مجزا عمل می کند.

KCL برای گره Ⓐ $\rightarrow \ \dfrac{v}{R_2}+C_2\dfrac{dv}{dt}=i_s \ \rightarrow \ \dfrac{dv}{dt}+\dfrac{v}{R_2C_2}=\dfrac{i_s}{C_2}$

$$i_s(t)=u(t)=1\ ,t>0 \ \rightarrow \ \frac{dv}{dt}+\frac{v}{R_2C_2}=\frac{1}{C_2} \ \rightarrow \ v(t)=K_1e^{-\frac{t}{R_2C_2}}+K_2$$

$$\frac{K_2}{R_2C_2}=\frac{1}{C_2}\ \rightarrow K_2=R_2\ ,\ v(0^+)=0\rightarrow K_1+R_2=0\rightarrow K_1=-R_2 \ \rightarrow v(t)=R_2u(t)\left(1-e^{-\frac{t}{R_2C_2}}\right)$$

واضح است که هیچ وقت ضریب قسمت نمایی صفر نشده و پاسخ $v(t)$ نمی تواند بصورت یک تابع پله باشد.

در ادامه جریان گذرنده از خازنها را حساب می کنیم.

$$i_{C_2}=C_2\frac{dv}{dt}=u(t)e^{-\frac{t}{R_2C_2}}\quad ,\ t>0$$

و به روشی مشابه $v_{C_2}(t) = Ru(t)\left(1 - e^{-\frac{t}{RC_2}}\right)$ بوده بنابراین داریم:

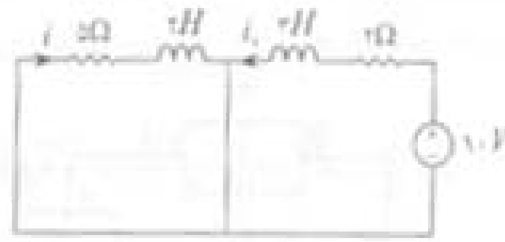
$i_{C_2} = C_2 \dfrac{dv_{C_2}}{dt} = u(t)e^{-\frac{t}{RC_2}} \quad , \ t > 0$

مسئله ۵۸

جریان i را برای تمام t محاسبه کنید. (S برای مدت طولانی بسته بوده است.)

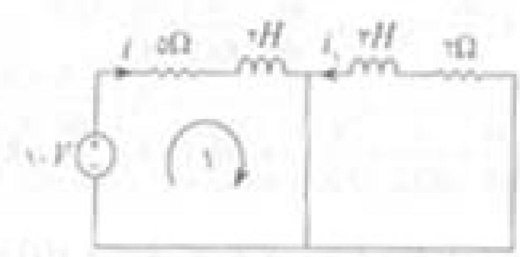
شکل مسئله ۵۸

حل: به ازای $t < 0$ ، $u(t) = 0$ و $u(-t) = 1$ و کلید S بسته می باشد بنابراین شکل مدار بصورت زیر خواهد بود.



واضح است که برای $t < 0$ ، $u(t) = 0$ بوده بنابراین $i(0^+) = i(0^-) = 0$ می باشد همچنین از آنجا که سلف H ۳ در حالت دایمی اتصال کوتاه شده لذا $i_1(0^+) = \frac{10}{2} = 5A$ خواهد بود.

به ازای $0 < t < \frac{1}{2}$ ، $u(t) = 1$ و $u(-t) = 0$ و کلید بسته بوده لذا مدار بصورت زیر خواهد بود.



KVL برای مش ① $\rightarrow \ -10 + 5i + 2\dfrac{di}{dt} = 0 \ \rightarrow \ \dfrac{di}{dt} + \dfrac{5}{2}i = 5 \ \rightarrow \ i(t) = K_1 e^{-\frac{5}{2}t} + K_2 \ , \ 0 < t < \frac{1}{2}$

$\frac{5}{2}K_2 = 5 \ \rightarrow \ K_2 = 2 \ , \ i(0^+) = 0 \ \rightarrow \ K_1 + 2 = 0 \ \rightarrow \ K_1 = -2$

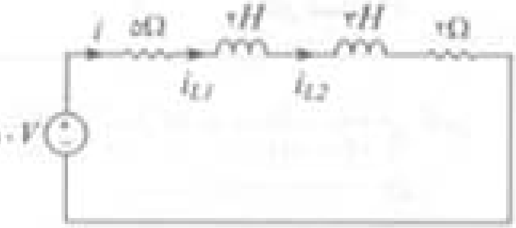
$$\rightarrow\ i(t)=۲\left(۱-e^{-\frac{۵}{۲}t}\right)\ ,\ ۰<t<\frac{۱}{۲}\ \rightarrow\ i\left(\tfrac{۱}{۲}^-\right)=۲\left(۱-e^{-\frac{۵}{۴}}\right)=۱/۴۳$$

برای محاسبه $i_L(t)$ می توان نوشت:

$$i_L(t)=Ke^{-\frac{R}{L}t}=Ke^{-\frac{۲}{۳}t}\ ,\ i_L\left(۰^+\right)=۵\ \rightarrow\ K=۵\ \rightarrow\ i_L(t)=۵e^{-\frac{۲}{۳}t}\ ,\ ۰<t<\frac{۱}{۲}$$

$$\rightarrow\ i\left(\tfrac{۱}{۲}^-\right)=۵e^{-\frac{۱}{۳}}=۳/۵۸$$

برای $t>\frac{۱}{۲}$ ، کلید باز شده و مدار بصورت زیر خواهد شد.



$$-۱۰+۵i+۲\frac{di}{dt}+۳\frac{di}{dt}+۲i=۰\ \rightarrow\ \frac{di}{dt}+\frac{۷}{۵}i=۲\ \rightarrow\ i(t)=K_۱e^{-\frac{۷}{۵}\left(t-\frac{۱}{۲}\right)}+K_۲\ ,t>\frac{۱}{۲}$$

با جایگذاری پاسخ خصوصی $K_۲$ در معادله دیفرانسیل $\frac{۷}{۵}K_۲=۲$ و یا $K_۲=\frac{۱۰}{۷}=۱/۴۳$ شده، و همچنین $i\left(\tfrac{۱}{۲}^+\right)$ را می توان بصورت زیر حساب کرد.

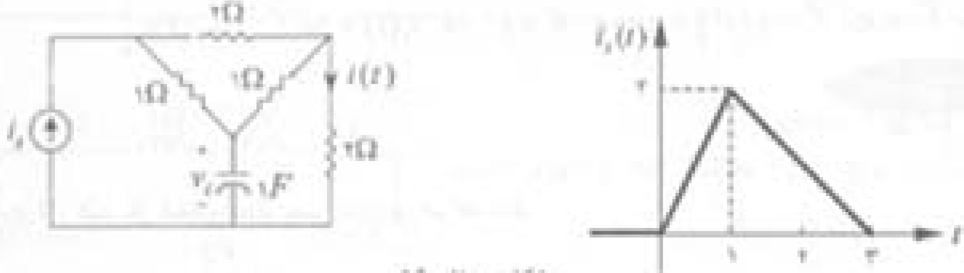
$$i\left(\tfrac{۱}{۲}^+\right)=\frac{\varphi\left(\tfrac{۱}{۲}^+\right)}{L}=\frac{L_۱i_{L۱}\left(\tfrac{۱}{۲}^+\right)+L_۲i_{L۲}\left(\tfrac{۱}{۲}^+\right)}{L_۱+L_۲}=\frac{۲i\left(\tfrac{۱}{۲}^-\right)+۳\left(-i\left(\tfrac{۱}{۲}^-\right)\right)}{L_۱+L_۲}=\frac{۲(۱/۴۳)-۳(۳/۵۸)}{۲+۳}=-۱/۵۷A$$

$$\rightarrow\ K_۱+۱/۴۳=-۱/۵۷\ \rightarrow\ K_۱=-۳\ \rightarrow\ i(t)=۱/۴۳-۳e^{-\frac{۷}{۵}\left(t-\frac{۱}{۲}\right)}$$

$$\rightarrow\ i(t)=\begin{cases}۰ & ,\ t<۰\\ ۲\left(۱-e^{-\frac{۵}{۲}t}\right) & ,\ ۰<t<\frac{۱}{۲}\\ ۱/۴۳-۳e^{-\frac{۷}{۵}\left(t-\frac{۱}{۲}\right)} & ,\ t>\frac{۱}{۲}\end{cases}$$

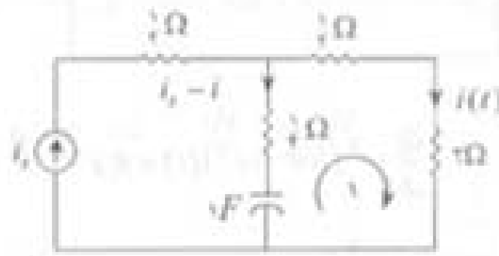
مسئله ۵۹

$i(t)$ را به ازای $t \geq 0$ محاسبه و رسم کنید. ($v_c(0^-)=2$)



شکل مسئله ۵۹

حل: ابتدا مدار را با استفاده از تبدیل مثلث به ستاره ساده می کنیم.



KVL برای مش ۱ $\rightarrow -\left(v_c(0^-)+\int(i_s-i)dt\right)-\frac{1}{4}(i_s-i)+\frac{1}{2}i+2i=0$

$$\rightarrow -(i_s-i)-\frac{1}{4}\frac{d(i_s-i)}{dt}+\frac{5}{2}\frac{di}{dt}=0 \quad \rightarrow \quad \frac{di}{dt}+\frac{4}{11}i=\frac{1}{11}\cdot\frac{di_s}{dt}+\frac{4}{11}i_s$$

به ازای $0 \leq t < 1$، $i_s(t)=2t$ بوده بنابراین خواهیم داشت.

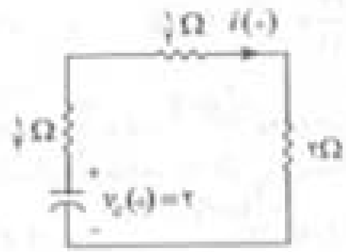
$$\frac{di}{dt}+\frac{4}{11}i=\frac{8}{11}t+\frac{2}{11} \quad \rightarrow \quad i(t)=\underbrace{Ke^{-\frac{4}{11}t}}_{\text{پاسخ عمومی}}+\underbrace{At+B}_{\text{پاسخ خصوصی}}$$

با جایگذاری پاسخ خصوصی در معادله دیفرانسیل داریم.

$$A+\frac{4}{11}(At+B)=\frac{8}{11}t+\frac{2}{11} \quad \rightarrow \quad \frac{4}{11}At+\left(A+\frac{4}{11}B\right)=\frac{8}{11}t+\frac{2}{11}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \frac{4}{11}A=\frac{8}{11} \\ A+\frac{4}{11}B=\frac{2}{11} \end{cases} \rightarrow A=2\ ,\ B=-5 \quad \rightarrow \quad i(t)=Ke^{-\frac{4}{11}t}+2t-5$$

در $t=0$ ، مدار بصورت زیر می باشد.



$$i(0)=\frac{v_c(0)}{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+2}=\frac{2}{\frac{11}{4}}=\frac{8}{11}$$

$$\to K-5=\frac{8}{11} \to K=\frac{63}{11} \to i(t)=\frac{63}{11}e^{-\frac{4}{11}t}+4t-5$$

و به ازای $1 \le t < 2$ ، $i_s(t)=2-t$ بوده بنابراین خواهیم داشت.

$$\frac{di}{dt}+\frac{4}{11}i=-\frac{4}{11}t+1 \to i(t)=\underbrace{Ke^{-\frac{4}{11}(t-1)}}_{\text{پاسخ عمومی}}+\underbrace{A(t-1)+B}_{\text{پاسخ خصوصی}}$$

با جایگذاری پاسخ خصوصی در معادله دیفرانسیل داریم.

$$\frac{4}{11}At+\frac{1}{11}(7A+4B)=-\frac{4}{11}t+1 \to \begin{cases}\frac{4}{11}A=-\frac{4}{11}\\ \frac{1}{11}(7A+4B)=1\end{cases} \to A=-1 \ , \ B=\frac{9}{2}$$

$$\to i(t)=Ke^{-\frac{4}{11}(t-1)}-t+\frac{11}{2}$$

$$\to i(1^+)=i(1^-)=\frac{63}{11}e^{-\frac{4}{11}t}+4t-5\Big|_{t=1}=0.98 \to K+\frac{9}{2}=0.98 \to K=-3.52$$

$$\to i(t)=-3.52e^{-\frac{4}{11}(t-1)}-t+\frac{11}{2}$$

و در نهایت به ازای $t \ge 2$ ، $i_s(t)=0$ بوده و داریم.

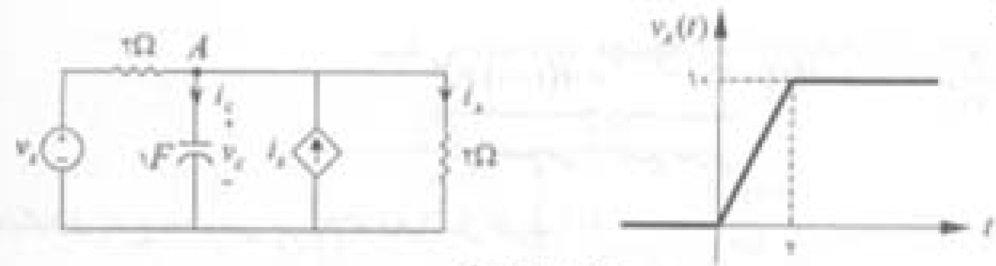
$$\frac{di}{dt}+\frac{4}{11}i=0 \to i(t)=Ke^{-\frac{4}{11}(t-2)}$$

$$\to i(2^+)=i(2^-)=-3.52e^{-\frac{4}{11}(t-1)}-t+\frac{11}{2}\Big|_{t=2}=2.85 \to K=0.02 \to i(t)=0.02e^{-\frac{4}{11}(t-2)}$$

$$\rightarrow i(t)=\begin{cases} ۰ \quad , \quad t<۰ \\ \frac{۶۳}{۱۱}e^{-\frac{۲}{۱۱}t}+۲t-۵ \quad , \quad ۰\le t<۱ \\ -۳/۵۹e^{-\frac{۲}{۱۱}(t-۱)}-t+\frac{۱۱}{۲} \quad , \quad ۱\le t<۲ \\ ۰/۰۲e^{-\frac{۲}{۱۱}(t-۲)} \quad , \quad t\ge ۲ \end{cases}$$

مسئله ۶۰

$v_c=?$



شکل مسئله ۶۰

حل : با توجه به شکل مسئله داریم

$$KCL \text{ برای گره } (A) \rightarrow \frac{v_c-v_s}{۲}+\frac{dv_c}{dt}-i_x+i_x=۰ \rightarrow \frac{dv_c}{dt}+\frac{۱}{۲}v_c=\frac{v_s}{۲}$$

به ازای $۰\le t<۲$ معادله دیفرانسیل فوق بصورت زیر خواهد شد.

$$\frac{dv_c}{dt}+\frac{۱}{۲}v_c=\frac{۵}{۲}t \rightarrow v_c(۰)=\underbrace{Ke^{-\frac{۱}{۲}t}}_{\text{پاسخ عمومی}}+\underbrace{At+B}_{\text{پاسخ خصوصی}}$$

با جایگذاری پاسخ خصوصی در معادله دیفرانسیل خواهیم داشت.

$$A+\frac{۱}{۲}(At+B)=\frac{۵}{۲}t \rightarrow \frac{A}{۲}t+\left(A+\frac{B}{۲}\right)=\frac{۵}{۲}t \rightarrow \begin{cases}\frac{A}{۲}=\frac{۵}{۲} \\ A+\frac{B}{۲}=۰\end{cases} \rightarrow A=۵ \ , \ B=-۱۰$$

$$\rightarrow v_c(t)=Ke^{-\frac{۱}{۲}t}+۵t-۱۰ \ , \ v_c(۰)=۰ \rightarrow K-۱۰=۰ \rightarrow K=۱۰$$

$$\rightarrow v_c(t)=۱۰e^{-\frac{۱}{۲}t}+۵t-۱۰$$

به ازای $t \geq ۲$ ، $i_s(t) = ۱۰$ بوده و معادله دیفرانسیل زیر بدست خواهد آمد.

$$\frac{dv_c}{dt} + \frac{۱}{۲}v_c = ۵ \rightarrow v_c(t) = \underbrace{K_۱ e^{-\frac{۱}{۲}(t-۲)}}_{\text{پاسخ عمومی}} + \underbrace{K_۲}_{\text{پاسخ خصوصی}}$$

با جایگذاری پاسخ خصوصی $K_۲$ در معادله دیفرانسیل $\frac{K_۲}{۲} = ۵$ و یا $K_۲ = ۱۰$ شده و خواهیم داشت.

$$v_c(۲^-) = v_c(۲^+) = ۱۰e^{-\frac{t}{۲}} + ۵t - ۱۰ \Big|_{t=۲} = ۳/۶۸ \rightarrow K_۱ + ۱۰ = ۳/۶۸ \rightarrow K_۱ = -۶/۳۲$$

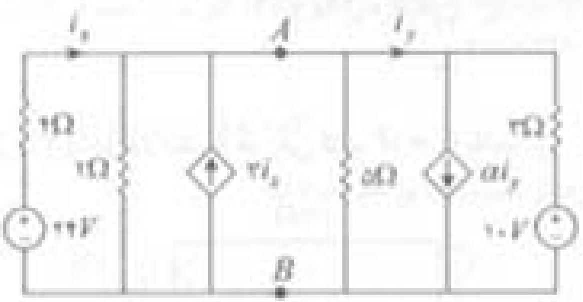
$$\rightarrow v_c(t) = -۶/۳۲e^{-\frac{t}{۲}} + ۱۰ \rightarrow v_c(t) = \begin{cases} ۰ \ , & t < ۰ \\ ۱۰e^{-\frac{t}{۲}} + ۵t - ۱۰ \ , & ۰ \leq t < ۲ \\ -۶/۳۲e^{-\frac{۱}{۲}(t-۲)} + ۱۰ \ , & t \geq ۲ \end{cases}$$

مسئله ۶۱

$v_{AB} = ۱۲$ ، $\alpha = ?$. الف- از تحلیل گره استفاده کنید.

ب- از معادل تونن دو سر A و B استفاده کنید.

پ- خازن c با ولتاژ اولیه $۲V$ را به دو سر A و B وصل می کنیم. $v_c(t)$ چیست.



شکل مسئله ۶۱

حل : الف ـ گره B را مبدا فرض کرده و با توجه به شکل مسئله خواهیم داشت.

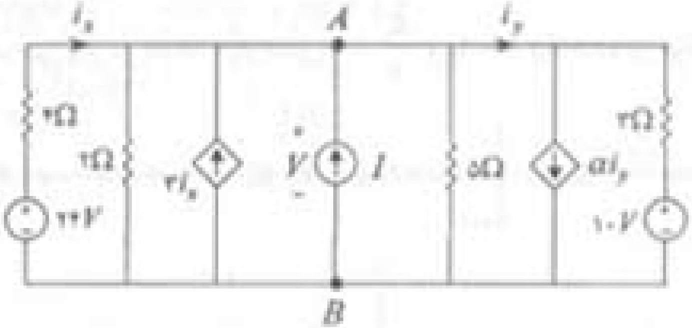
$$v_{AB} = ۱۲ \ , \ v_B = ۰ \rightarrow v_A = ۱۲ \rightarrow i_x = \frac{۲۴-۱۲}{۴} = ۳A$$

$$i_y = \alpha i_y + \frac{۱۲-۱۰}{۲} \rightarrow i_y = \frac{۲}{۲(۱-\alpha)}$$

KCL برای گره A $\rightarrow -i_x + \frac{۱۲}{۲} - ۲i_x + \frac{۱۲}{۵} + i_y = ۰$

$$\rightarrow \quad -۳+\frac{۱۲}{۲}-۹+\frac{۱۲}{۵}+\frac{۲}{۲(۱-\alpha)}=۰ \quad \rightarrow \quad \alpha=\frac{۲۲}{۲۷}$$

پ ـ بدین منظور منبع جریان آزمایش I را به دو سر A و B وصل کرده و ولتاژ دو سر آن را محاسبه خواهیم کرد.



$$i_x=\frac{۲۴-V}{۴} \quad , \quad i_y=\alpha i_y+\frac{V-۱۰}{۲} \quad \rightarrow \quad i_y=\frac{V-۱۰}{۲(۱-\alpha)}$$

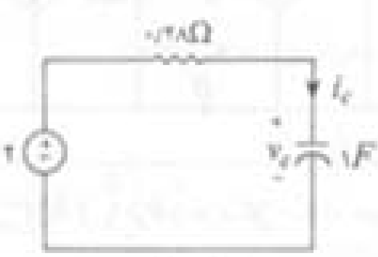
برای گره A ، KCL $\rightarrow \quad -\frac{۲۴-V}{۴}+\frac{V}{۲}-۲\left(\frac{۲۴-V}{۴}\right)+\frac{V}{۵}+\frac{V-۱۰}{۲(۱-\alpha)}-I=۰$

$$V=\frac{۶۰(۱-\alpha)}{۱۲۲-۱۰۲\alpha}I+\frac{۱۶۴۰-۱۴۴۰\alpha}{۱۲۲-۱۰۲\alpha} \quad \rightarrow \quad e_{oc}=v_{AB}=\frac{۱۶۴۰-۱۴۴۰\alpha}{۱۲۲-۱۰۲\alpha}=۱۲ \quad \rightarrow \quad \alpha=\frac{۱۷۶}{۲۱۶}=\frac{۲۲}{۲۷}$$

پ ـ بدین منظور معادل تونن دو سر A و B را بکار می بریم.

$$V=\frac{۶۰\left(۱-\frac{۲۲}{۲۷}\right)}{۱۲۲-۱۰۲\left(\frac{۲۲}{۲۷}\right)}I+\frac{۱۶۴۰-۱۴۴۰\frac{۲۲}{۲۷}}{۱۲۲-۱۰۲\frac{۲۲}{۲۷}}=۰/۲۸I+۱۲$$

بنابراین مدار مورد نظر بصورت زیر خواهد شد. فرض می کنیم $C=۱F$ باشد.



$$-۱۲+۰/۲۸\left(\frac{dv_c}{dt}\right)+v_c=۰ \quad \rightarrow \quad \frac{dv_c}{dt}+۳/۵۷v_c=۴۲/۸۶$$

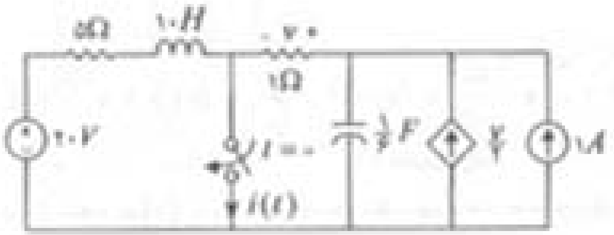
$$\rightarrow \quad v_c(t)=k_1e^{-t/۰/۲۸}+k_2 \quad , \quad t>۰$$

با جایگذاری پاسخ خصوصی k_2 در معادله دیفرانسیل $k_2=۱۲$ شده و با اعمال شرط اولیه خواهیم داشت.

$v_c(0)=2 \rightarrow k_1+12=2 \rightarrow k_1=-10 \rightarrow v_c(t)=12-10e^{\ldots}$, $t>0$

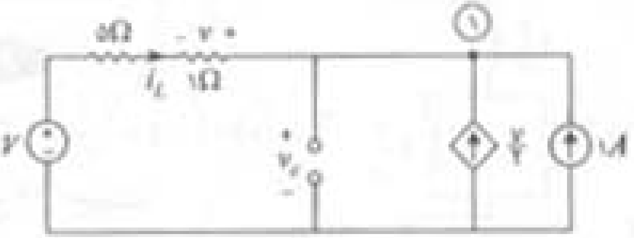
مسئله ۶۲

$i(t)=?$ برای $t>0$.



شکل مسئله ۶۲

حل: به ازای $t<0$ کلید باز بوده و در $t=0^-$ مدار به حالت دایمی خود رسیده بنابراین سلف اتصال کوتاه وخازن مدار باز خواهد بود.



$v=-i_L$

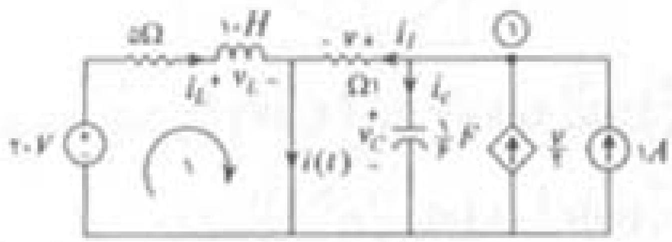
① KCL برای گره $\rightarrow -i_L-\left(\frac{-i_L}{2}\right)-1=0 \rightarrow -i_L(0^-)=-2A$

KVL برای مش ۱ $\rightarrow -20+5i_L+i_L+v_c=0 \rightarrow v_c(0^-)=20-6i_L(0^-)=32V$

و از آنجا که هیچ ولتاژ و یا جریانی با مقادیر بی نهایت به دو سر سلف و یاخازن اعمال نمی شود لذا خواهیم داشت.

$i_L(0^+)=i_L(0^-)=-2A$, $v_c(0^+)=v_c(0^-)=32V$

در $t=0$ کلید بسته شده و مدار بصورت زیر خواهد شد.



دو مدار مجزای مرتبه اول داریم که هر کدام را به طور جداگانه تحلیل می کنیم.

$v=v_c$

① KCL برای گره $\rightarrow \frac{v_c}{1}+\frac{1}{6}\frac{dv_c}{dt}-\frac{v_c}{2}-1=0 \rightarrow \frac{dv_c}{dt}-3v_c=6$

$\rightarrow \; v_c(t) = K_1 e^{-3t} + K_2$

$3K_2 = 6 \;\rightarrow\; K_2 = 2 \;,\; v_c(0^+) = 32 \;\rightarrow\; K_1 + 2 = 32 \;\rightarrow\; K_1 = 30$

$\rightarrow \; v_c(t) = 30e^{-3t} + 2$

KVL برای مش ① $\rightarrow \; -20 + 5i_L + 10\dfrac{di_L}{dt} = 0 \rightarrow \dfrac{di_L}{dt} + \dfrac{1}{2}i_L = 2 \;\rightarrow\; i_L(t) = K_1 e^{-\frac{1}{2}t} + K_2$

$\dfrac{1}{2}K_2 = 2 \;\rightarrow\; K_2 = 4 \;,\; i_L(0^+) = -2 \;\rightarrow\; K_1 + 4 = -2 \;\rightarrow\; K_1 = -6 \;\rightarrow\; i_L(t) = -6e^{-\frac{1}{2}t} + 4$

$\rightarrow \; i = i_L + i_c = i_L + \dfrac{v}{1} = i_L + v_c = 30e^{-3t} - 6e^{-\frac{1}{2}t} + 6$

مسئله ۶۳

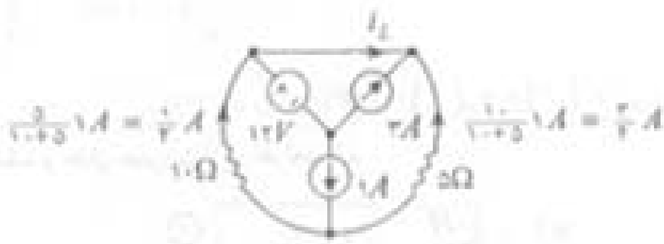
الف- $i_L(t) = ?$ برای $t > 0$ ($i_L(0) = 0$)

ب- نقش منبع $12V$ چیست.

پ- منبع $12V$ را با مقاومت غیرخطی $v_R = e^{-i_R}$ جابگزین می کنیم i_L را تعیین کنید.

شکل مسئله ۶۳

حل : **الف** ـ در $t = \infty$ ، سلف مانند اتصال کوتاه عمل می کند و مدار را می توان بصورت زیر در نظر گرفت. توجه کنید جریان شاخه ها را با استفاده از قاعده تقسیم جریان بدست آورده ایم.



$\rightarrow \; i_L(\infty) = -\left(3 + \dfrac{2}{3}\right) = -\dfrac{11}{3}A \qquad , \qquad T = \dfrac{L}{R} = \dfrac{2}{10+5} = \dfrac{2}{15}$

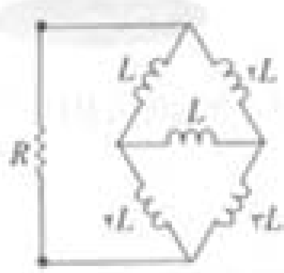
$\rightarrow \; i_L(t) = \left(i_L(0) - i_L(\infty)\right)e^{-\frac{t}{T}} + i_L(\infty) = \dfrac{11}{3}e^{-\frac{15}{2}t} - \dfrac{11}{3} \;,\; t > 0$

ب ـ ملاحظه می شودکه منبع ولتاژ $12V$ دارای جریان ثابت $4A$ بوده وتاثیری برروی ولتاژشاخه ها نداردبنابراین منبع ولتاژ فقط عامل اتصال دو گره است.

پ ـ با جایگذاری مقاومت غیر خطی واضح است که جریان آن ثابت و برابر $4A$ خواهد بود و ولتاژ آن هر چه شود تاثیری در مدار نخواهد داشت. بنابراین در این حالت نیز $i_L(t)$ مانند قسمت (الف) بدست خواهد آمد.

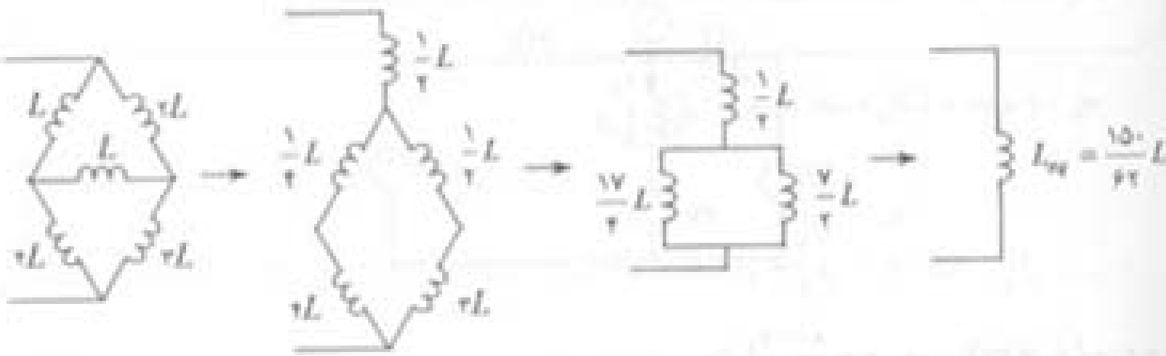
مسئله ۶۴

- ثابت زمانی مدار را تعیین کنید.
- منبع جریان پله واحد را به دو سر R وصل می کنیم. $v_R(t)$ را بدست آورید.



شکل مسئله ۶۴

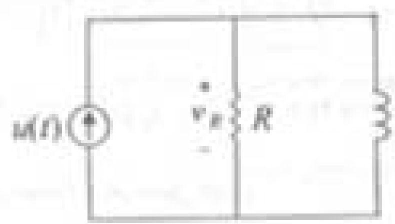
حل : برای محاسبه معادل سلف ها می توان از تبدیل مثلث به ستاره استفاده کرد.



$$L_{eq} = \frac{۱۵۰}{۶۲} L$$

$$\rightarrow T = \frac{L_{eq}}{R} = \frac{\frac{۱۵۰}{۶۲} L}{R} = \frac{۱۵۰}{۶۲} \frac{L}{R}$$

با وصل کردن منبع جریان پله واحد، مدار بصورت زیر خواهد شد.



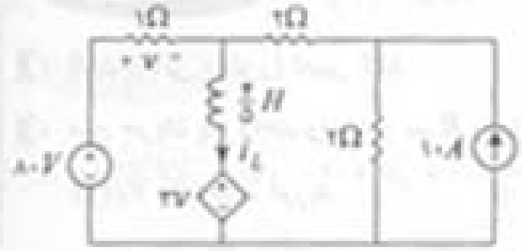
$$\frac{۱۵۰}{۶۲} L$$

در $t = ۰^+$ ، سلف مدار باز بوده و لذا $v_R(۰^+) = R$ و در $t = \infty$ سلف اتصال کوتاه خواهد شد و $v_R(\infty) = ۰$ خواهد بود بنابراین داریم.

$$v_R(t) = \left(v_R(۰) - v_R(\infty)\right) e^{-\frac{t}{T}} + v_R(\infty) = R e^{-\frac{۶۲}{۱۵۰}\frac{R}{L}t} \quad , t > ۰$$

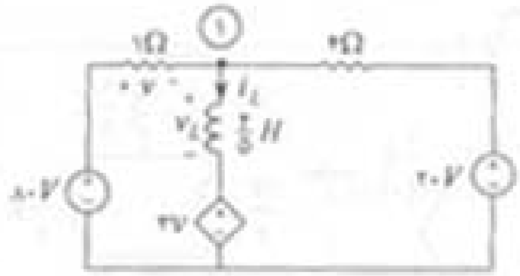
مسئله ۶۵

$i_L(t)=?$ برای $t>0$. $(i_L(0)=2)$



شکل مسئله ۶۵

حل : با استفاده از تبدیل تونن - نرتن مدار را بصورت زیر ساده می کنیم.



$$v = 80-(v_L+3v) \rightarrow v=\frac{80-v_L}{4}$$

KCL برای گره ① $\rightarrow -\frac{v}{1}+i_L+\frac{(v_L+3v)-80}{4}=0$

$$\rightarrow -\frac{(80-v_L)}{4}+i_L+\frac{1}{4}\left(v_L+3\left(\frac{80-v_L}{4}\right)-20\right)=0 \rightarrow \frac{5}{16}v_L+i_L=10$$

$$\rightarrow \frac{5}{16}\left(\frac{4}{5}\frac{di_L}{dt}\right)+i_L=10 \rightarrow \frac{di_L}{dt}+4i=40 \rightarrow i_L(t)=K_1e^{-4t}+K_2 \ , \ t>0$$

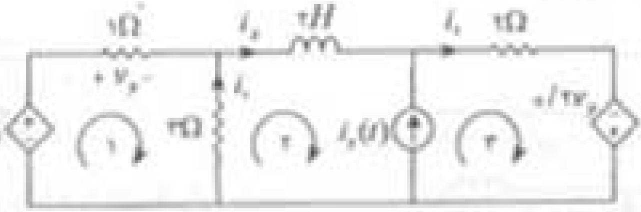
با جایگذاری پاسخ خصوصی در معادله دیفرانسیل داریم.

$$4K_2=40 \rightarrow K_2=10 \ , \ i_L(0)=2 \rightarrow K_1+10=2 \rightarrow K_1=-8$$

$$\rightarrow i_L(t)=-8e^{-4t}+10 \ , \ t>0$$

مسئله ۶۶

- معادله دیفرانسیلی بر حسب i_2 بنویسید.
- الف- پاسخ حالت صفر را برای ورودی $2e^{-0.5t}$ را بدست آورید.
- ب- پاسخ حالت صفر را برای ورودی $3\sin 2t$ بدست آورید.



شکل مسئله ۶۶

حل : با توجه به شکل مسئله داریم :

$$\frac{v_x}{1}+i_1=i_2 \;\rightarrow\; i_1=i_2-v_x \;,\; i_3=i_2+i_s$$

برای مش ۱ KVL $\;\rightarrow\; -2i_2+v_x-3(i_2-v_x)=0 \;\rightarrow\; v_x=\frac{5}{4}i_2 \;\rightarrow\; i_1=-\frac{1}{4}i_2$

برای حلقه شامل مش های ۲ و ۳ KVL $\;\rightarrow\; 3\left(-\frac{1}{4}i_2\right)+2\frac{di_2}{dt}+2(i_2+i_s)-0.2\left(\frac{5}{4}i_2\right)=0$

$$\rightarrow\; \frac{di_2}{dt}+0.5i_2=-i_s$$

الف ـ با جایگذاری $i_s=2e^{-0.5t}$ خواهیم داشت.

$$\frac{di_2}{dt}+0.5i_2=-2e^{-0.5t} \;\rightarrow\; i_2(t)=\underbrace{K_1e^{-0.5t}}_{\text{پاسخ عمومی}}+\underbrace{K_2te^{-0.5t}}_{\text{پاسخ خصوصی}}$$

با جایگذاری پاسخ خصوصی در معادله دیفرانسیل داریم.

$$K_2e^{-0.5t}-0.5K_2te^{-0.5t}+0.5K_2te^{-0.5t}=-2e^{-0.5t} \;\rightarrow\; K_2e^{-0.5t}=-2e^{-0.5t} \;\rightarrow\; K_2=-2$$

$$i_2(0)=0 \;\rightarrow\; K_1=0 \;\rightarrow\; i_2(t)=-2te^{-0.5t}$$

ب ـ با جایگذاری $i_s(t)=3\sin 2t$ داریم.

$$\frac{di_2}{dt}+0.5i_2=-3\sin 2t \;\rightarrow\; i_2(t)=\underbrace{Ke^{-0.5t}}_{\text{پاسخ عمومی}}+\underbrace{A\sin 2t+B\cos 2t}_{\text{پاسخ خصوصی}}$$

با جایگذاری پاسخ خصوصی در معادله دیفرانسیل A و B را بدست خواهیم آورد.

$$2A\cos 2t - 2B\sin 2t \;\rightarrow\; 0/1A\sin 2t + 0/1B\cos 2t = -3\sin 2t$$

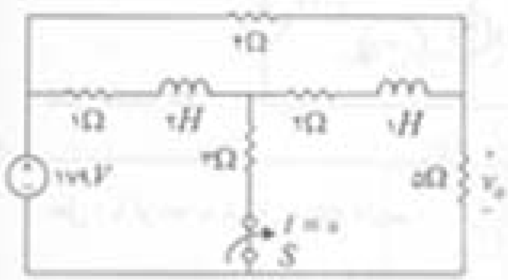
$$\rightarrow \begin{cases} 0/1A - 2B = -3 \\ 2A + 0/1B = 0 \end{cases} \rightarrow A = 0/077\ ,\ B = -1/54$$

$$i_s(0) = 0 \;\rightarrow\; K - 1/54 = 0 \;\rightarrow\; K = 1/54$$

$$\rightarrow i_s(t) = 1/54e^{-2t} + 0/77\sin 2t - 1/54\cos 2t\ ,\ t > 0$$

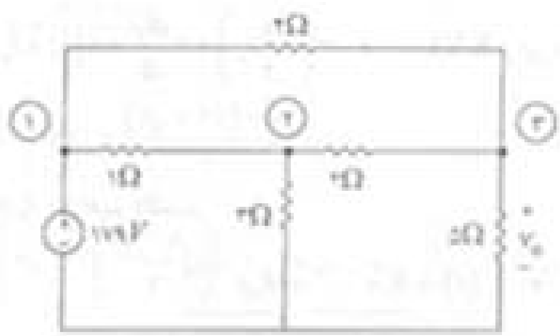
مسئله ۶۷

$v_o(t) = ?$ برای $t > 0$. (کلید S برای مدت طولانی بسته بوده است.)



شکل مسئله ۶۷

حل : به ازای $t < 0$ کلید S بسته بوده و در $t = 0^-$ مدار به حالت دایمی خود رسیده بنابراین سلفها اتصال کوتاه خواهند بود.



$e_1 = 179\ V$

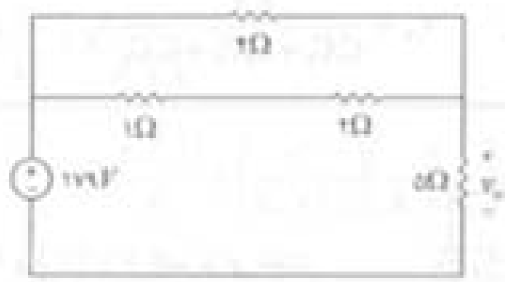
KCL برای گره ۲ $\rightarrow \dfrac{e_2 - 179}{1} + \dfrac{e_2}{3} + \dfrac{e_2 - e_3}{2} = 0$

KCL برای گره ۳ $\rightarrow \dfrac{e_3 - 179}{4} + \dfrac{e_3}{5} + \dfrac{e_3 - e_2}{2} = 0$

$$\rightarrow \begin{cases} 11e_2 - 3e_3 = 1074 \\ -10e_2 + 19e_3 = 895 \end{cases}$$

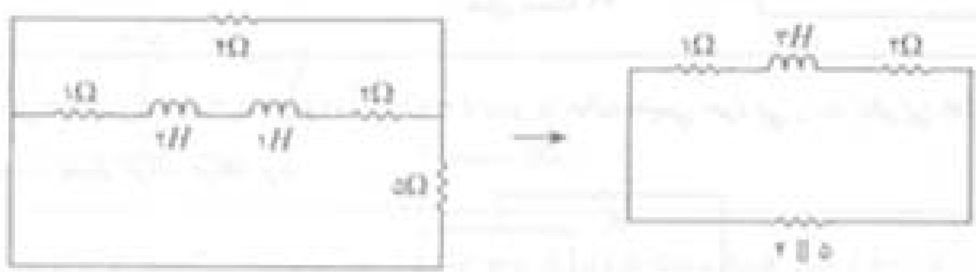
$$\rightarrow v_o(0^+) = v_o(0^-) = e_3 = 115\ V$$

برای $t > 0$ کلید S باز شده و در $t = \infty$ سلفها اتصال کوتاه شده و لذا مدار بصورت زیر خواهد شد.



$$\rightarrow\ v_o(\infty)=\frac{۵}{۵+(۱+۲)\parallel ۴}۱۷۹V=۱۳۳/۳$$

با صفر کردن منابع ثابت L_{eq} و R_{eq} را محاسبه می کنیم.

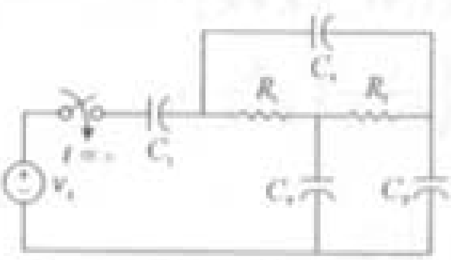


$$L_{eq}=۲+۱=۳H\ ,\ \ R_{eq}=(۴\parallel ۵)+۱+۲=\frac{۴۷}{۹}\ \ \rightarrow\ T=\frac{L_{eq}}{R_{eq}}=\frac{۲۷}{۴۷}$$

$$\rightarrow\ v_o(t)=\left(v_o(۰)-v_o(\infty)\right)e^{-\frac{t}{T}}+v_o(\infty)=-۱۸/۳e^{-\frac{۴۷}{۲۷}t}+۱۳۳/۳\ \ ,\ t>۰$$

مسئله ۶۸

ولتاژ تمام خازنها را در $t=۰^+$ بدست آورید. (ولتاژ اولیه خازن ها صفر است).



شکل مسئله ۶۸

حل : در $t=۰^+$ خازنها اتصال کوتاه خواهند شد. بنابراین $v_{c۴}(۰^+)=۰$ بوده و ولتاژ v_s بر روی سه خازن $C_۱$ و $C_۲$ و $C_۳$ خواهند افتاد و مقاومت ها عملاً از مدار خارج خواهند شد. پس خواهیم داشت.

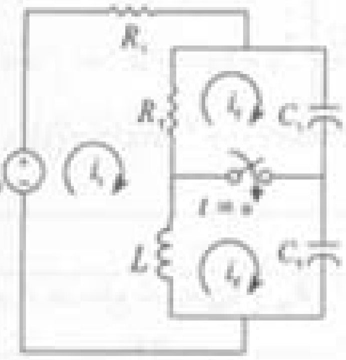
$$v_{c۱}(۰^+)=\frac{C}{C_۱+C}v_s=\frac{\frac{C_۲\times C_۳}{C_۲+C_۳}}{C_۱+\frac{C_۲\times C_۳}{C_۲+C_۳}}=\frac{C_۲C_۳}{C_۱C_۲+C_۲C_۳+C_۱C_۳}v_s$$

و به همین ترتیب می توان نوشت.

$$v_{C_2} = \frac{C_1C_3}{C_1C_2 + C_2C_3 + C_1C_3} v_s \quad , \quad v_{C_3} = \frac{C_1C_2}{C_1C_2 + C_2C_3 + C_1C_3} v_s$$

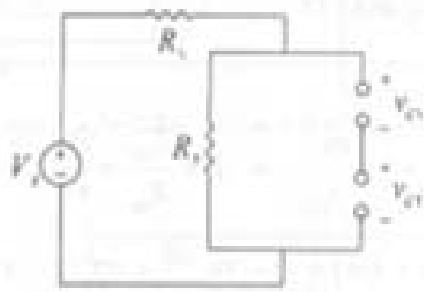
مسئله ۶۹

$i_1(0^+)$ و $i_2(0^+)$ و $i_3(0^+) = ?$ (کلید برای مدت طولانی باز بوده است)



شکل مسئله ۶۹

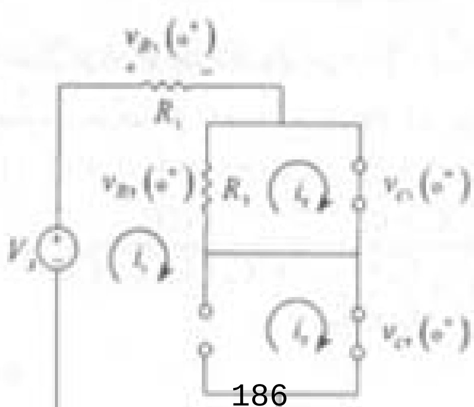
حل : به ازای $t < 0$ کلید باز بوده و در $t = 0^-$ مدار به حالت دایمی خود می رسد. بنابراین خازن ها مدار باز و سلف اتصال کوتاه خواهد بود.



$$v_{C_1} + v_{C_2} = v_{R_2} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v_s \quad \rightarrow \quad \begin{cases} v_{C_1}(0^+) = v_{C_1}(0^-) = \left(\dfrac{C_2}{C_1 + C_2}\right)\left(\dfrac{R_2}{R_1 + R_2}\right) v_s \\ v_{C_2}(0^+) = v_{C_2}(0^-) = \left(\dfrac{C_1}{C_1 + C_2}\right)\left(\dfrac{R_2}{R_1 + R_2}\right) v_s \end{cases}$$

$$v_{R_1}(0^+) = \frac{R_1}{R_1 + R_2} v_s$$

و به ازای $t > 0$ کلید بسته شده و در $t = 0^+$ خازن اتصال کوتاه و سلف مدار باز خواهد بود.

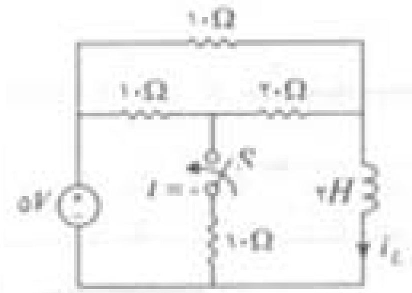


$$i_r\left(0^+\right)=0\ ,\ i_1\left(0^+\right)=\frac{v_{R_1}\left(0^+\right)}{R_1}=\frac{1}{R_1+R_2}v_s$$

$$v_{R_1}\left(0^+\right)=v_{C_1}\left(0^+\right)\ \rightarrow\ i_1\left(0^+\right)=\frac{v_{C_1}\left(0^+\right)}{R_1}=\left(\frac{C_2}{C_1+C_2}\right)\left(\frac{1}{R_1+R_2}\right)v_s$$

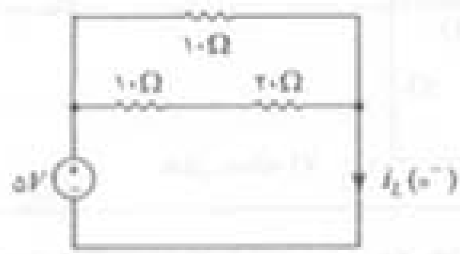
مسئله ۷۰

? = $i_L(t)$ برای $t\geq 0$ (کلید S به مدت طولانی باز بوده است).



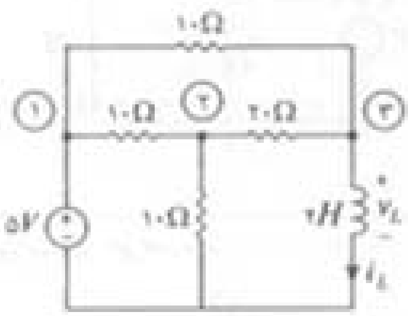
شکل مسئله ۷۰

حل : در $t=0^-$ چون کلید S بمدت طولانی باز بوده است پس می توان سلف رااتصال کوتاه درنظر گرفت.



$$i_L(0^-)=\frac{5}{10\parallel 30}=\frac{2}{3}A$$

در $t\geq 0$ کلید S بسته شده و مدار بصورت زیر خواهد بود.



$e_1=5V\quad ,\quad e_3=v_L$

$$\text{KCL برای گره ۳}\ \rightarrow\ i_L+\frac{v_L-e_2}{20}+\frac{v_L-5}{10}=0$$

$$\text{KCL برای گره ۲}\ \rightarrow\ \frac{e_2-v_L}{20}+\frac{e_2}{10}+\frac{e_2-5}{10}=0$$

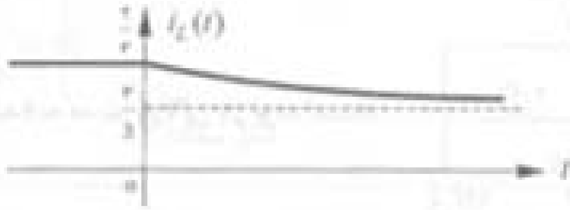
$$\rightarrow\begin{cases}20i_L+3v_L-e_2=10\\5e_2-v_L=10\end{cases}$$

$$\rightarrow\ 100i_L + 14v_L = 60\ \rightarrow\ \frac{di_L}{dt} + \frac{25}{7}i_L = \frac{15}{7}\ \rightarrow\ i_L(t) = K_1 e^{-\frac{25}{7}t} + K_2$$

با جایگذاری پاسخ خصوصی در معادله دیفرانسیل داریم:

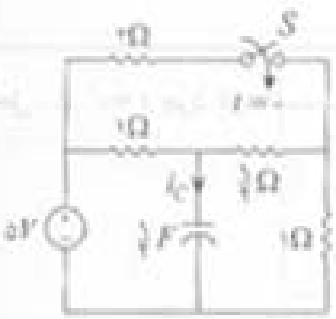
$$\frac{25}{7}K_2 = \frac{15}{7}\ \rightarrow\ K_2 = \frac{3}{5}$$

$$i_L(0) = \frac{2}{3}\ \rightarrow\ K_1 + \frac{3}{5} = \frac{2}{3}\ \rightarrow\ K_1 = \frac{1}{15}\ \rightarrow\ i_L(t) = \frac{1}{15}e^{-\frac{25}{7}t} + \frac{3}{5}$$



مسئله ۷۱

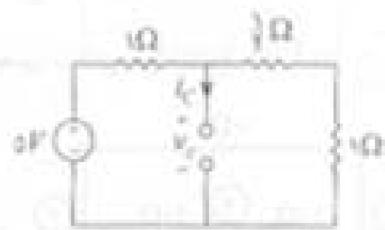
جریان گذرنده از خازن را برای $t > 0$ بدست آورید.
(کلید S بمدت طولانی باز بوده است)



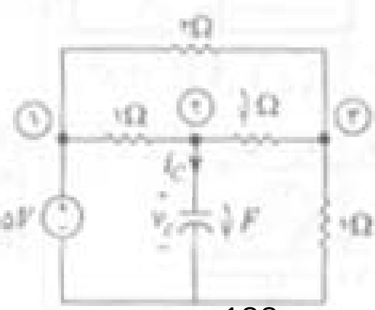
شکل مسئله ۷۱

حل : در $t = 0^-$ چون کلید S بمدت طولانی باز بوده است پس می توان خازن را مدار باز در نظرگرفت.

$$v_c(0^-) = \frac{1+\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}+1}5 = 3V$$



در $t = 0^+$ کلید S بسته شده و مدار بصورت زیر خواهد بود.



$e_1 = 5V \quad , \quad e_2 = v_c$

KCL برای گره ۲ $\rightarrow \quad \dfrac{v_c - 5}{1} + \dfrac{v_c - e_3}{1/2} + i_c = 0$

$$\rightarrow \quad \frac{dv_c}{dt} + \frac{26}{7} v_c = \frac{90}{7}$$

KCL برای گره ۳ $\rightarrow \quad \dfrac{e_3 - v_c}{1/2} + \dfrac{e_3}{1} + \dfrac{e_3 - 5}{2} = 0$

$$\rightarrow \quad v_c(t) = K_1 e^{-\frac{26}{7}t} + K_2 \qquad , \qquad \frac{26}{7} K_2 = \frac{90}{7} \quad \rightarrow \quad K_2 = \frac{45}{13}$$

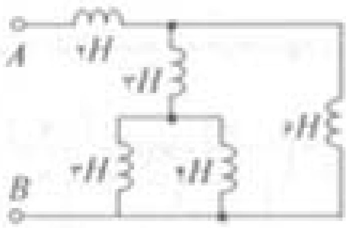
$$v_c(0) = 3 \quad \rightarrow \quad K_1 + \frac{45}{13} = 3 \quad \rightarrow \quad K_1 = -\frac{6}{13} \quad \rightarrow \quad v_c(t) = -\frac{6}{13} e^{-\frac{26}{7}t} + \frac{55}{13}$$

$$i_c(t) = C\frac{dv_c}{dt} = \frac{1}{2}\frac{dv_c}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{55}{13} - \frac{6}{13} e^{-\frac{26}{7}t}\right)$$

$$\rightarrow \quad i_c(t) = \frac{1}{2}\left(-\frac{26}{7}\right)\left(-\frac{6}{13} e^{-\frac{26}{7}t}\right) = \frac{6}{7} e^{-\frac{26}{7}t} \quad , \quad t > 0$$

مسئله ۷۲

$L_{AB} = ?$



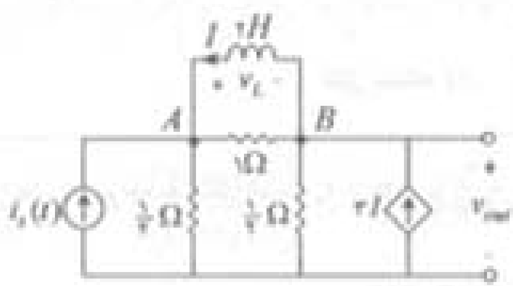
شکل مسئله ۷۲

حل : با توجه به شکل مدار می توان نوشت.

$$L_{AB} = \left[(3 \parallel 4) + 3\right] \parallel 6 + 2 = \left(\frac{12}{7} + 3\right) \parallel 6 + 2 = \frac{\frac{33}{7} \times 6}{\frac{33}{7} + 6} + 2 = \frac{116}{25} H$$

مسئله ۷۳

پاسخ پله و ضربه v_{out} را تعیین کنید.



شکل مسئله ۷۳

حل : با توجه به شکل $e_A = v_{out} + v_L$ و $e_B = v_{out}$، $I = -i_L$ بوده و خواهیم داشت.

$$\text{B}\ \text{برای گره}\ \text{KCL} \rightarrow -\left(-2i_L\right) + \frac{v_{out}}{\frac{1}{2}} - \frac{v_L}{1} - i_L = 0 \rightarrow v_{out} = \frac{1}{2}\left(v_L - 2i_L\right)$$

$$\text{A}\ \text{برای گره}\ \text{KCL} \rightarrow -i_s + \frac{\frac{1}{2}\left(v_L - 2i_L\right) + v_L}{\frac{1}{2}} + i_L + \frac{v_L}{1} = 0$$

$$\rightarrow 4v_L - i_L = i_s \rightarrow 4\left(2\frac{di_L}{dt}\right) - i_L = i_s \rightarrow \frac{di_L}{dt} - \frac{1}{8}i_L = \frac{i_s}{8}$$

به ازای $t > 0$ ، $i_s(t) = u(t) = 1$ خواهیم داشت.

$$\frac{di_L}{dt} - \frac{1}{8}i_L = \frac{1}{8}\ ,\ i_L\left(0\right) = 0 \rightarrow i_L(t) = \left(1 - e^{\frac{t}{8}}\right)\ ,\ t > 0$$

$$\rightarrow v_{out} = \frac{1}{2}\left(v_L - 2i_L\right) = \frac{1}{2}\left(2\frac{di_L}{dt} - 2i_L\right) = \frac{di_L}{dt} - i_L = \frac{1}{8}e^{\frac{t}{8}} + \left(1 - e^{\frac{t}{8}}\right)\ ,\ t > 0$$

$$\rightarrow v_{out} = u(t)\left(1 - \frac{7}{8}e^{\frac{t}{8}}\right)$$

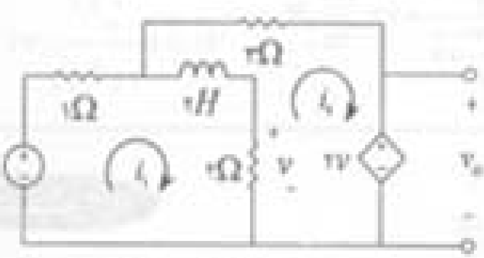
و پاسخ ضربه مشتق پاسخ پله خواهد بود زیرا مدار خطی و تغییر ناپذیر با زمان است.

$$i_s(t) = \delta(t) \rightarrow v_{out} = \delta(t)\left(1 - \frac{7}{8}e^{\frac{t}{8}}\right) + u(t)\frac{1}{8}\left(-\frac{7}{8}e^{\frac{t}{8}}\right) = \left(1 - \frac{7}{8}\right) + u(t)\frac{1}{8}\left(-\frac{7}{8}e^{\frac{t}{8}}\right)$$

$$= \frac{1}{8}u(t)\left(1 - \frac{7}{8}e^{\frac{t}{8}}\right)$$

مسئله ۷۴

- معادله دیفرانسیلی بر حسب v_o تشکیل دهید.
- پاسخ پله و ضربه v_o را حساب کنید.



شکل مسئله ۷۴

حل : با توجه به شکل مسئله $v_o = 2v$ و یا $v = \frac{v_o}{2}$ بوده و خواهیم داشت.

$$2\left(i_1 - i_2\right) = v = \frac{v_o}{2} \rightarrow i_1 = \frac{v_o}{4} + i_2$$

KVL برای حلقه شامل مشهای ۱و۲ $\rightarrow \quad -i_s + i_1 + 3i_2 + v_c = 0$

$$\rightarrow \quad -i_s + \frac{v_c}{4} + i_2 + 3i_2 + v_c = 0 \quad \rightarrow \quad i_2 = \frac{i_s}{4} - \frac{5v_c}{16}$$

KVL برای مش ۲ $\rightarrow \quad -v - 2\frac{d(i_1 - i_2)}{dt} + 3i_2 + v_c = 0$

$$\rightarrow \quad -\frac{v_c}{4} - 2\frac{d\left(\frac{v_c}{4}\right)}{dt} + 3\left(\frac{i_s}{4} - \frac{5v_c}{16}\right) + v_c = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dv_c}{dt} + \frac{7}{8}v_c = \frac{3}{2}i_s$$

با جایگذاری $i_s(t) = u(t) = 1 \ , \ t > 0$ پاسخ پله را بدست خواهیم آورد.

$$\frac{dv_c}{dt} + \frac{7}{8}v_c = \frac{3}{2} \quad \rightarrow \quad v_c(t) = K_1 e^{-\frac{7}{8}t} + K_2 \ , \ t > 0 \quad \rightarrow \quad \frac{7}{8}K_2 = \frac{3}{2}$$

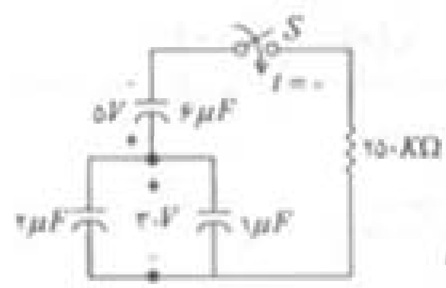
$$\rightarrow \quad K_2 = \frac{12}{7} \ , \ v_c(0) = 0 \quad \rightarrow \quad K_1 + \frac{12}{7} = 0 \quad \rightarrow \quad K_1 = -\frac{12}{7} \quad \rightarrow \quad v_c(t) = \frac{12}{7}u(t)\left(1 - e^{-\frac{7}{8}t}\right)$$

از آنجا که مدار خطی و تغییر ناپذیر با زمان است لذا پاسخ ضربه، مشتق پاسخ پله می باشد.

$$i_s(t) = \delta(t) \quad \rightarrow \quad v_c(t) = \frac{18}{7}u(t)e^{-\frac{7}{8}t}$$

مسئله ۷۶

- **کلید S در $t = 0$ بسته می شود. چند درصد انرژی اولیه ذخیره شده در خازنها در مقاومت تلف می شود.**
- **چرا با وجود مقاومت در مدار تمامی انرژی ذخیره شده در خازنها در مقاومت تلف نمی شود.**



شکل مسئله ۷۶

حل : انرژی اولیه ذخیره شده در خازنها برابر است با :

$$W_0 = \frac{1}{2}C_1V_1^2 + \frac{1}{2}C_2V_2^2 + \frac{1}{2}C_3V_3^2 = \frac{1}{2}\times 6\times 10^{-6}\times 5^2 + \frac{1}{2}\times 2\times 10^{-6}\times 30^2 + \frac{1}{2}\times 1\times 10^{-6}\times 30^2 = 1425\times 10^{-6}\,J$$

انرژی تلف شده در مقاومت برابر است با :

$$W_R = \frac{1}{2}C_{eq}V_{eq}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{(1+2)\times 6}{(1+2)+6}\right)(30-5)^2 = 625\times 10^{-6}\,J \quad \rightarrow \quad W_0 - W_R = 800\times 10^{-6}\,J$$

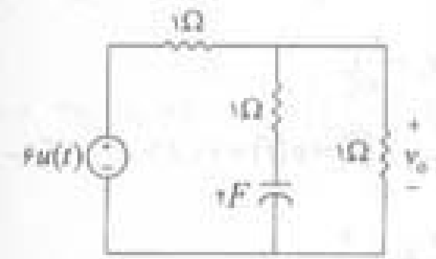
درصد انرژی اولیه ذخیره شده در خازنها که در مقاومت تلف می شود.

$\frac{۶۲۵}{۱۴۲۵} = ۴۳/۸۶\%$

مقدار اختلاف $W_a - W_0$ به علت انرژی تلف شده در دو خازن $۱\mu F$ و $۲\mu F$ بر اثر ایجاد جریان ضربه در حلقه شامل دو خازن و همچنین مختلف العلامه بودن پلاریته ولتاژهای اولیه $۳۰V$ و $۵V$ می باشد.

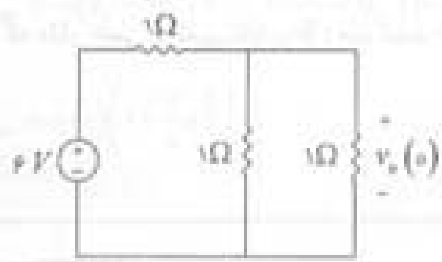
مسئله ۷۷

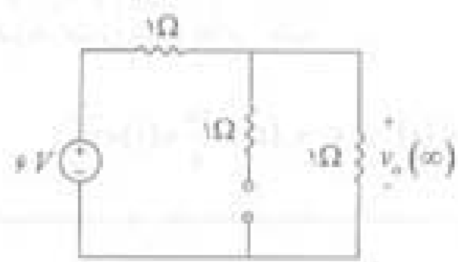
با محاسبه $v_o(0)$ و $v_o(\infty)$ و بدون نوشتن معادله دیفرانسیل، $v_o(t)$ را برای $t > 0$ تعیین کنید.



شکل مسئله ۷۷

حل : در $t = 0$ خازن اتصال کوتاه و در $t = \infty$ خازن مدار باز می باشد. بنابراین داریم:





$$v_o(\infty) = \frac{1\|1}{1\|1+1}6 = 2V \qquad v_o(\infty) = \frac{1}{1+1}6 = 3V$$

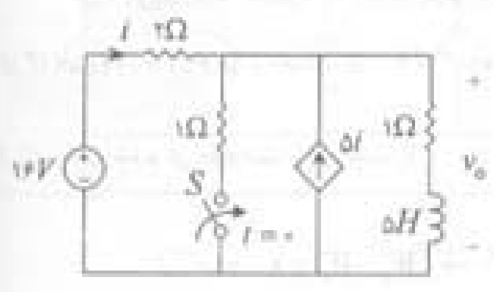
$$T = R_{\text{معادل در سر خازن}} \cdot C = (1\|1+1)(2) = \left(\frac{3}{2}\right)(2) = 3$$

$$v_o(t) = \left(v_o(0) - v_o(\infty)\right)e^{-\frac{t}{3}} + v_o(\infty) = -e^{-\frac{t}{3}} + 3 \ , \ t > 0$$

مسئله ۷۸

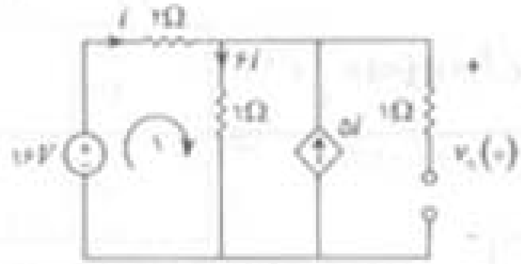
با محاسبه $v_o(0)$ و $v_o(\infty)$ و بدون نوشتن معادله دیفرانسیل، $v_o(t)$ را محاسبه کنید.

(کلید S برای مدت طولانی باز بوده است)



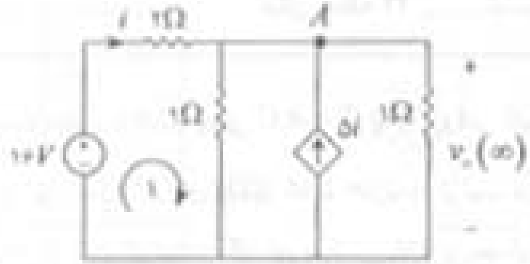
شکل مسئله ۷۸

حل : در $t=0$ سلف مدار باز بوده و مدار بصورت زیر خواهد بود.



برای مش ۱ $KVL \rightarrow -16+2i+6i=0 \rightarrow i=2 \rightarrow v_c(0)=6i=12V$

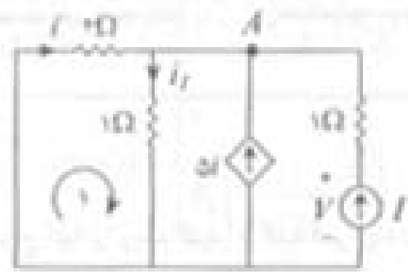
و در $t=\infty$ سلف اتصال کوتاه شده و مدار بصورت زیر می باشد.



برای مش ۱ $KVL \rightarrow -16+2i+v_c=0 \rightarrow i=\frac{16-v_c}{2}$

برای گره A $KCL \rightarrow -\frac{16-v_c}{2}+\frac{v_c}{1}-5\left(\frac{16-v_c}{2}\right)+\frac{v_c}{1}=0 \rightarrow v_c(\infty)=\frac{48}{5}V$

برای محاسبه ثابت زمانی سیستم باید مقاومت معادل دو سر سلف را بدست آوریم. بدین منظور منبع نابسته را برابر صفر قرار داده و منبع جریان آزمایش I را به جای سلف قرار می دهیم.



برای گره A $KCL \rightarrow -i+i_1-5i-I=0 \rightarrow i_1=6i+I$

برای مش ۱ $KVL \rightarrow 2i+(6i+I)=0 \rightarrow i=-\frac{I}{8}$

KVL برای حلقه بیرونی $\rightarrow 2\left(-\frac{I}{8}\right)-I+V=0 \rightarrow V=\frac{5}{4}I \rightarrow R=\frac{5}{4} \rightarrow T=\frac{L}{R}=\frac{5}{\frac{5}{4}}=4$

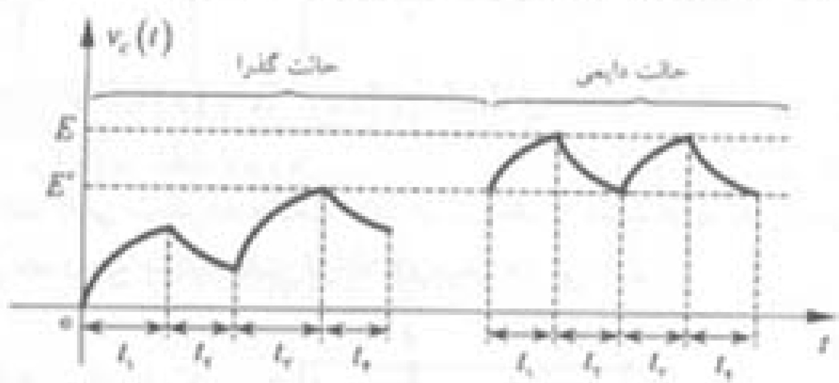
$$\rightarrow v_a(t)=\left(v_a(0)-v_a(\infty)\right)e^{-\frac{t}{4}}+v_a(\infty)=\frac{12}{5}e^{-\frac{t}{4}}+\frac{48}{5}$$

مسئله ۷۹

منبع E در $t=0$ به مدار وصل می شود. $v_c(t)$ و شکل موج آن را تعیین کنید. (عمل باز و بسته شدن کلید بطور متناوب با زمانهای t_1 و t_2 انجام می گیرد.)

شکل مسئله ۷۹

حل : وقتی کلید بازاست خازن با ثابت زمانی $T=RC$ شارژ ووقتی کلید بسته است خازن با ثابت زمانی $\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}C$ دشارژ می شود و این عمل شارژ و دشارژ شدن خازن به ترتیب در بازه های زمانی t_1 و t_2 تا زمانی که دریکی از اعمال شارژ $v_c=E$ شود که حالت گذرای مدارمی باشد و بعد از زمان فوق واضح است که حالت دایمی مدار بصورت یک موج دندان اره ای در یک محدوده معین ولتاژ خواهد بود.



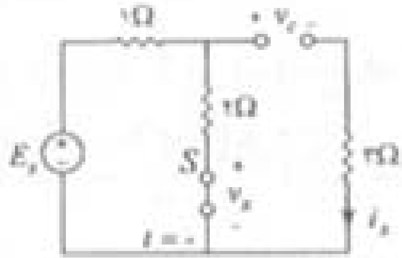
مسئله ۸۰

v_x و i_x را تعیین و شکل موج آنها را رسم کنید. (کلید S برای $t<0$ بسته بوده است.)

شکل مسئله ۸۰

(الف) (ب)

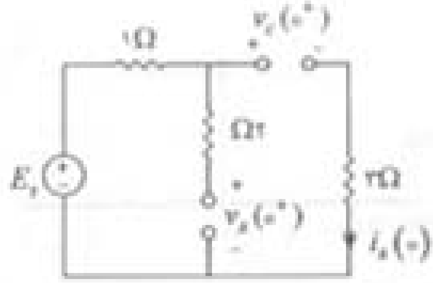
حل : الف ـ در $t=0^-$ کلید بسته و مدار به حالت دایمی خود رسیده و لذا خازن مدار باز خواهد بود.

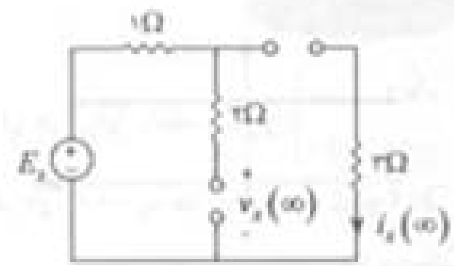


$$\rightarrow\ i_s(0^-)=0\ ,\ v_s(0^-)=0$$

$$v_c(0^+)=v_c(0^-)=\frac{2}{1+2}E_s=\frac{2}{3}E_s$$

در $t=0^+$ کلید باز شده و لذا خازن اتصال کوتاه و در $t=\infty$ مدار به حالت دایمی رسیده و لذا خازن مدار باز خواهد بود.





$$i_s(0^+)=\frac{E_s-v_c(0^+)}{1+3}=\frac{E_s-\frac{2}{3}E_s}{4}=\frac{E_s}{12}\ ,\ v_s(0^+)=3i_s(0^+)+v_c(0^+)=3\frac{E_s}{12}+\frac{2}{3}E_s=\frac{11}{12}E_s$$

$$i_s(\infty)=0\ ,\ v_s(\infty)=E_s$$

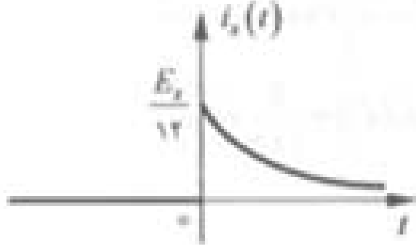
$$T=R_{\text{معادل دو سر خازن}}\cdot C=(1+3)(4)=16$$

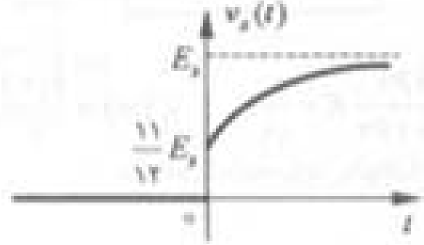
$$i_s(t)=\left(i_s(0)-i_s(\infty)\right)e^{-\frac{t}{T}}+i_s(\infty)=\frac{1}{12}E_se^{-\frac{1}{16}t}\ ,\ t>0$$

$$v_s(t)=\left(v_s(0)-v_s(\infty)\right)e^{-\frac{t}{T}}+v_s(\infty)=E_s\left(1-\frac{1}{12}e^{-\frac{1}{16}t}\right)\ ,\ t>0$$

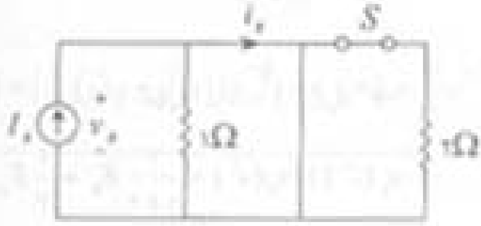
$$\rightarrow\ i_s(t)=\begin{cases}0 & ,\ t<0\\ \frac{1}{12}E_se^{-\frac{1}{16}t} & ,\ t>0\end{cases}\ ,\ v_s(t)=\begin{cases}0 & ,\ t<0\\ E_s\left(1-\frac{1}{12}e^{-\frac{1}{16}t}\right) & ,\ t>0\end{cases}$$

شکل موجهای $v_s(t)$ و $i_s(t)$ در شکل زیر رسم شده اند.





پ ـ در $t=0^-$ کلید به مدت طولانی بسته بوده و مدار به حالت دایمی خود رسیده و لذا سلف اتصال کوتاه خواهد بود.

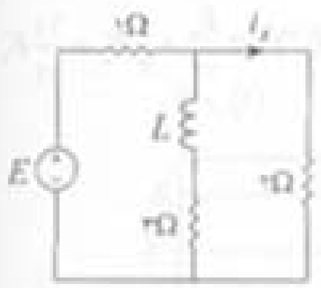


$$\rightarrow i_s(0^-)=I_s\ ,\ v_s(0^-)=0$$

مطابق شکل فوق واضح است که مقاومت 2Ω عملاً از مدار خارج است. لذا با باز بودن کلید S در $t>0$ تغییری در مدار رخ نخواهد داد بنابراین داریم:

$i_s(t)=I_s\ ,\ v_s(t)=0$

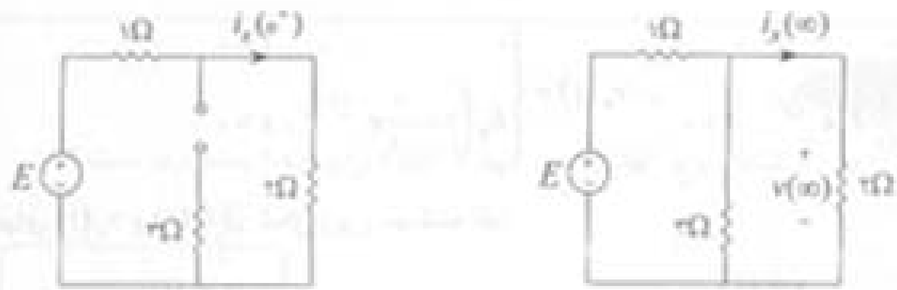
مسئله ۸۱



- $i_s(\infty)$ را تعیین کنید. (E در $t=0$ وصل می شود)
- به ازای چه مقدار L جریان $i_s(t)$ در $t=2sec$ به ۱۱۰٪ مقدار نهایی خود می رسد. ($i_L(0)=0$).

شکل مسئله ۸۱

حل : در $t=0^+$ سلف مدار باز و در $t=\infty$ سلف اتصال کوتاه خواهد بود.



$$v(\infty)=\frac{2\|3}{1+2\|3}E=\frac{6}{11}E\ ,\ i_s(\infty)=\frac{v(\infty)}{2}=\frac{3}{11}E\ ,\ i_s(0^+)=\frac{E}{1+2}=\frac{E}{3}$$

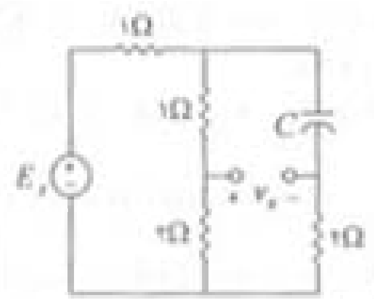
$$T=\frac{L}{R_{\text{معادل دو سر سلف}}}=\frac{L}{3+\frac{1\times2}{1+2}}=\frac{3}{11}L$$

$$i_s(t)=\left(i_s(0)-i_s(\infty)\right)e^{-\frac{t}{T}}+i_s(\infty)=\frac{9}{33}Ee^{\frac{-11t}{3L}}+\frac{3}{11}E\ ,\ t>0$$

$$i_s(2)=1/1\,i_s(\infty)\ \rightarrow\ \frac{9}{33}Ee^{\frac{-22}{3L}}+\frac{3}{11}E=1/1\left(\frac{3}{11}E\right)\ \rightarrow\ e^{\frac{-22}{3L}}=0/25$$

$$\rightarrow\ L=\frac{-22}{3\ln 0/25}=9/18H$$

مسئله ۸۲

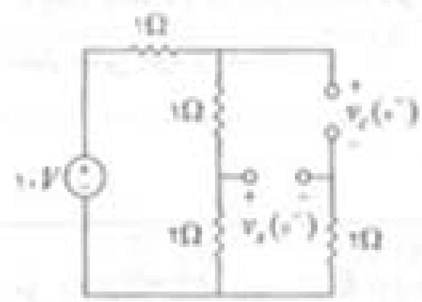


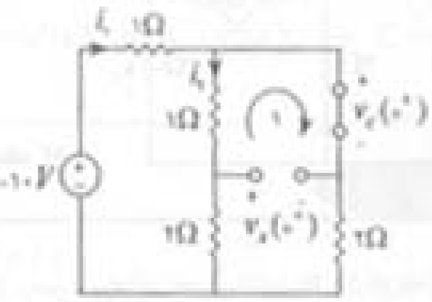
شکل مسئله ۸۲

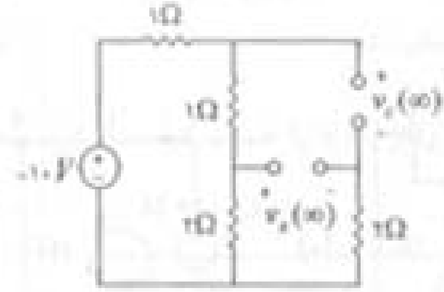
$E_s=\begin{cases}10\ , & t<0\\ -10\ , & t>0\end{cases}$ ، مقدار نهایی v_s را تعیین کنید.

C را چنان تعیین کنید که در $t=1$ ، v_s به ٪۹۰ مقدار نهایی خود برسد.

حل : در $t=0^-$ برای مدت طولانی $E_s=10V$ بوده و مدار به حالت دایمی خود رسیده لذا خازن مدار باز است. در $t=0^+$ ، $E_s=-10V$ شده و خازن اتصال کوتاه خواهد شد و در $t=\infty$ برای مدت طولانی $E_s=-10V$ بوده و خازن مدار باز می باشد.







با توجه به شکلهای فوق خواهیم داشت.

$$v_c(0^-)=\frac{1+2}{1+1+2}10V=\frac{15}{2}V\quad,\quad v_c(0^+)=v_c(0^-)=\frac{15}{2}V$$

$$i_1(0^+)=\frac{-10}{1+(1+2)P2}=-\frac{50}{11}A\quad,\quad i_2(0^+)=\frac{2}{1+2+2}\left(-\frac{50}{11}\right)=-\frac{20}{11}A$$

برای مش ۱ $KVL \to -i_2(0^+)+v_c(0^+)-v_o(0^+)=0 \to \frac{20}{11}+\frac{15}{2}-v_o(0^+)=0 \to v_o(0^+)=\frac{205}{22}$

$$v_o(\infty)=\frac{2}{1+1+2}(-10V)=-5V$$

$$T=R_{\text{معادل دو سر خازن}}\cdot C=\left[2+1P(1+2)\right]C=\frac{11}{4}C$$

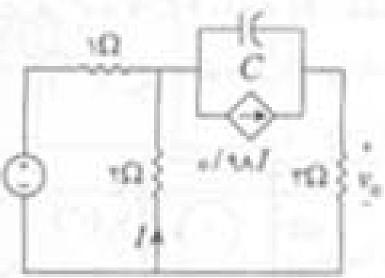
$$\to v_o(t)=\left(v_o(0^+)-v_o(\infty)\right)e^{-\frac{t}{T}}+v_o(\infty)=\frac{315}{22}e^{-\frac{4}{11C}t}-5\ ,\ t>0$$

$$\to v_o(t)=\begin{cases}5\ , & t<0\\ \frac{315}{22}e^{-\frac{4}{11C}t}-5\ , & t>0\end{cases}$$

$$v_o(1)=0/9v_o(\infty)\ \to\ \frac{315}{22}e^{-\frac{4}{11C}}-5=0/9(-5)\ \to\ C=10\text{۸}\,\mu F$$

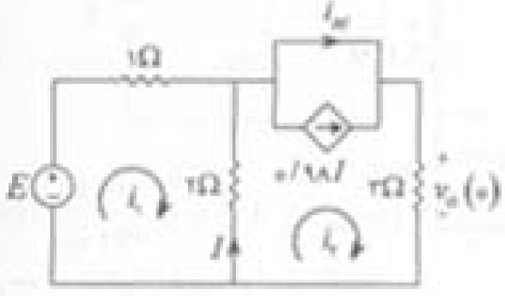
مسئله ۸۳

C چقدر باشد تا $v_o(t)$ در $t=100$ نانو ثانیه به ٪۹۰ مقدار نهایی خود برسد.

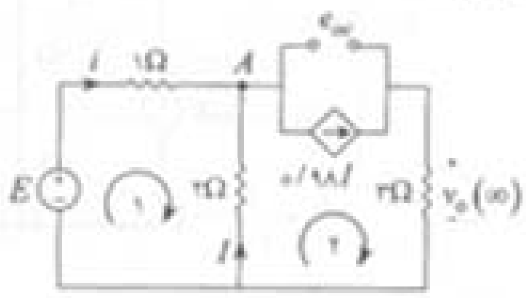


شکل مسئله ۸۳

حل : فرض کنیم که منبع ولتاژ E در $t=0$ به مدار وصل شود. در $t=0$ خازن اتصال کوتاه و در $t=\infty$ مدار باز می‌باشد.



(الف)



(ب)

برای شکل (الف) داریم:

$$\text{برای مش ۱ } KVL \rightarrow -E + i_1 + 2(i_1 - i_2) = 0$$

$$\text{برای مش ۲ } KVL \rightarrow 2(i_2 - i_1) + 3i_2 = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} 3i_1 - 2i_2 = E \\ 2i_1 - 5i_2 = 0 \end{cases} \rightarrow i_2 = \frac{2}{11}E = 0/18E \ , \ i_1 = \frac{5}{11}E = 0/45E$$

$$v_c(0) = 3i_2 = 0/54E \ , \ I = i_2 - i_1 = -0/27E$$

و با توجه به شکل (ب) خواهیم داشت.

$$\text{برای گره } (A) \ KCL \rightarrow -i - I + 0/98I = 0 \rightarrow i = -0/02I$$

$$\text{برای مش ۱ } KVL \rightarrow -E + (-0/02I) - 2I = 0 \rightarrow I = -0/49E$$

$$v_c(\infty) = 3(0/96I) = -1/45E$$

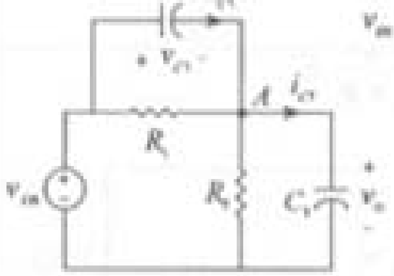
$$\text{برای مش ۲ } KVL \rightarrow 2I + e_{oc} + 3(0/98I) = 0 \rightarrow e_{oc} = -4/94I = 2/42E$$

$$T = R_{\text{دو سر خازن}} \cdot C = \frac{e_{oc}}{i_{sc}}C = \frac{2/42E}{0/44E}C = 5/5C$$

$$\rightarrow v_c(t) = (v_c(0) - v_c(\infty))e^{-\frac{t}{T}} + v_c(\infty) = 1/89Ee^{\frac{-0/18t}{C}} - 1/45E \ , \ t > 0$$

$$v_c(100ns) = 0/9v_c(\infty) \rightarrow 1/89Ee^{\frac{-18}{C} \times 10^{-9}} - 1/45E = 0/9(-1/45E) \rightarrow C = 7/01nF$$

مسئله ۸۴



$$v_{in} = \begin{cases} E(1 - e^{-\beta t}), & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

- ولتاژ $v_o(t)$ را برای $t > 0$ حساب کنید.
- حد $v_o(t)$ را برای $\beta \rightarrow \infty$ حساب کنید.
- در حالت خاص $R_1C_1 = R_2C_2$ ولتاژ $v_o(t)$ را حساب کنید.

شکل مسئله ۸۴

حل: با توجه به شکل مسئله داریم.

$$v_{in} = v_{C_1} + v_o \rightarrow v_{C_1} = v_{in} - v_o$$

(A) برای گره ۰ KCL $\rightarrow -i_{C_1} - \frac{v_{C_1}}{R_1} + i_{C_2} + \frac{v_{C_2}}{R_2} = 0$

$$\rightarrow -C_1 \frac{d(v_{in} - v_o)}{dt} - \frac{v_{in} - v_o}{R_1} + C_2 \frac{dv_o}{dt} + \frac{v_o}{R_2} = 0$$

$$\frac{dv_o}{dt} + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 (C_1 + C_2)} v_o = \frac{C_1}{C_1 + C_2} \frac{dv_{in}}{dt} + \frac{1}{R_1 (C_1 + C_2)} v_{in}$$

$$\rightarrow \frac{dv_o}{dt} + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 (C_1 + C_2)} v_o = \frac{E(C_1 \beta - 1)}{R_1 (C_1 + C_2)} e^{-\beta t} + \frac{E}{R_1 (C_1 + C_2)}$$

$$\rightarrow v_o(t) = \underbrace{K_1 e^{-\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 (C_1 + C_2)} t}}_{\text{پاسخ عمومی}} + \underbrace{K_2 e^{-\beta t} + K_3}_{\text{پاسخ خصوصی}}$$

با جایگذاری پاسخ خصوصی در معادله دیفرانسیل داریم:

$$\left(\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 (C_1 + C_2)} - \beta\right) K_2 e^{-\beta t} + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 (C_1 + C_2)} K_3 = \frac{E(C_1 R_2 \beta - 1)}{R_1 (C_1 + C_2)} e^{-\beta t} + \frac{E}{R_1 (C_1 + C_2)}$$

$$K_2 = \frac{E R_2 (C_1 R_1 \beta - 1)}{R_1 + R_2 - \beta R_1 R_2 (C_1 + C_2)} \quad , \quad K_3 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E$$

$$v_o(0) = 0 \rightarrow K_1 + K_2 + K_3 = 0 \rightarrow K_1 = -(K_2 + K_3)$$

$$v_o(t) = -\left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} E + \frac{E R_2 (C_1 R_1 \beta - 1)}{R_1 + R_2 - \beta R_1 R_2 (C_1 + C_2)}\right) e^{-\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 (C_1 + C_2)} t}$$

$$+ \frac{E R_2 (C_1 R_1 \beta - 1)}{R_1 + R_2 - \beta R_1 R_2 (C_1 + C_2)} e^{-\beta t} + \frac{R_2}{R_1 + R_2} E$$

به ازای $\beta \rightarrow \infty$ خواهیم داشت:

$$v_o(t) = -\left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} E + \frac{C_1 R_1 \beta}{-\beta R_1 R_2 (C_1 + C_2)}\right) e^{-\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 (C_1 + C_2)} t} + \frac{R_2}{R_1 + R_2} E$$

$$= -\left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} - \frac{C_1}{C_1 + C_2}\right) E e^{-\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 (C_1 + C_2)} t} + \frac{R_2}{R_1 + R_2} E$$

$$= -\left(\frac{R_2 C_2 - R_1 C_1}{(R_1 + R_2)(C_1 + C_2)}\right) E e^{-\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 (C_1 + C_2)} t} + \frac{R_2}{R_1 + R_2} E$$

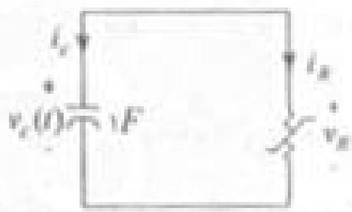
به ازای $R_1C_1 = R_2C_2$ ضریب جمله نهایی(پاسخ گذرا) برابر صفر شده و خواهیم داشت.

$$v_c(t)=\frac{R_2}{R_1+R_2}E$$

مسئله ۸۵

$v_c(t)$ را برای $t>0$ محاسبه و رسم کنید.

($v_c(0)=1$ و $i_R = v_R + v_R^3$)



شکل مسئله ۸۵

حل :

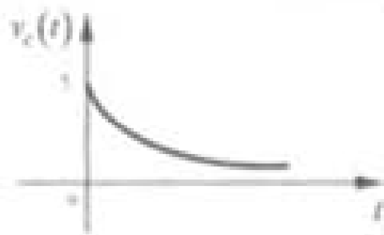
$$i_c=-i_R \rightarrow \frac{dv_c}{dt}=-\left(v_R+v_R^3\right)\ ,\ v_c=v_R \rightarrow \frac{dv_c}{dt}=-\left(v_c+v_c^3\right) \rightarrow \frac{dv_c}{v_c\left(1+v_c^2\right)}=-dt$$

$$\rightarrow \frac{dv_c}{v_c}-\frac{v_c dv_c}{1+v_c^2}=-dt \rightarrow \ln v_c-\ln\left(\frac{1+v_c^2}{2}\right)=-t+c \rightarrow \ln\frac{2v_c}{1+v_c^2}=-t+c$$

$$\rightarrow \frac{v_c}{1+v_c^2}=Ke^{-t}\ ,\ v_c(0)=1 \rightarrow \frac{1}{2}=K \rightarrow \frac{v_c}{1+v_c^2}=\frac{1}{2}e^{-t}$$

$$\rightarrow v_c(t)=e^t-\sqrt{e^{2t}-1}$$

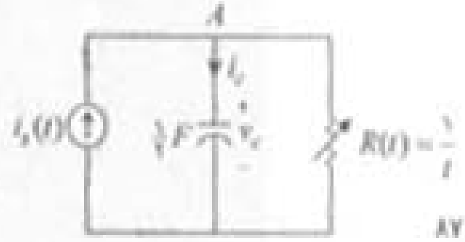
شکل موج $v_c(t)$ در شکل زیر رسم شده است.



مسئله ۸۷

$v_c(t)$ را برای $t>0$ تعیین و رسم کنید.

($i_s(t)=r(t)$ و حالت اولیه مدار صفر است)



شکل مسئله ۸۷

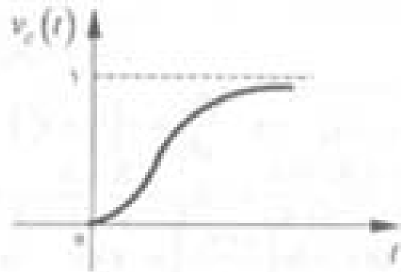
حل : ورودی مدار $i_s(t)=r(t)=\begin{cases} t\,, & t>0 \\ 0\,, & t<0 \end{cases}$ بوده و با توجه به شکل مدار داریم.

$$\text{KCL برای گره } Ⓐ \to -t+\frac{1}{2}\frac{dv_c}{dt}+\frac{v_c}{\frac{1}{t}}=0 \to \frac{dv_c}{dt}+2tv_c=2t$$

$$\to \frac{dv_c}{dt}=2t(1-v_c) \to \frac{dv_c}{1-v_c}=2t\,dt \to -\ln(1-v_c)=t^2+C \to 1-v_c=Ke^{-t^2}$$

$$\to v_c(t)=1-Ke^{-t^2}\,,\ v_c(0)=0 \to 1-K=0 \to K=1 \to v_c(t)=1-e^{-t^2}\,,\ t>0$$

شکل موج $v_c(t)$ در شکل زیر رسم شده است.



مسئله ۱

شکل مسئله ۱

الف- نشان دهید که به ازای تمام مقادیر مثبت عناصر و هر نوع شرایط اولیه، پاسخ $v(t)$ همیشه از نوع میرایی شدید خواهد بود.

ب- اگر L_1 و L_2 با خازنهای C_1 و C_2 تعویض شوند درستی بیان بالا را بار دیگر اثبات کنید.

پ- اگر تنها یکی از سلفها با خازن تعویض شود آیا بیان فوق باز هم معتبر خواهد بود.

حل : الف ــ با توجه به شکل مسئله داریم.

$$i_{L2}=\frac{v}{R_2} \rightarrow v_{L2}=L_2\frac{di_{L2}}{dt}=\frac{L_2}{R_2}\frac{dv}{dt} \ , \ v_{L1}=v_{R1}=v_{L2}+v=\frac{L_2}{R_2}\frac{dv}{dt}+v$$

$$\text{KCL برای گره } A \rightarrow L_1\frac{dv_{L1}}{dt}+\frac{v_{R1}}{R_1}+\frac{v}{R_2}=0$$

$$\rightarrow L_1\frac{d\left(\frac{L_2}{R_2}\frac{dv}{dt}+v\right)}{dt}+\frac{\frac{L_2}{R_2}\frac{dv}{dt}+v}{R_1}+\frac{v}{R_2}=0 \rightarrow \frac{d^2v}{dt^2}+\frac{R_1R_2L_1+L_2}{R_1L_1L_2}\frac{dv}{dt}+\frac{R_1+R_2}{R_1L_1L_2}v=0$$

$$\rightarrow 2\alpha=\frac{R_1R_2L_1+L_2}{R_1L_1L_2} \ , \ \omega_0=\sqrt{\frac{R_1+R_2}{R_1L_1L_2}} \qquad \alpha>\omega_0 \rightarrow \frac{R_1R_2L_1+L_2}{2R_1L_1L_2}>\sqrt{\frac{R_1+R_2}{R_1L_1L_2}}$$

$$\rightarrow 4(R_1+R_2)(R_1L_1L_2)<(R_1R_2L_1+L_2)^2$$

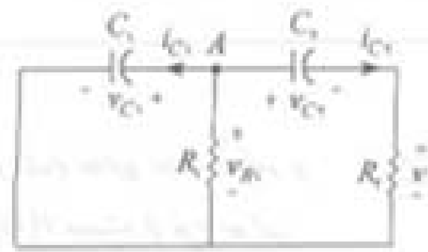
از طرفی واضح است که $R_1+R_2>R_2$ می باشد بنابراین داریم.

$$4R_1R_2L_1L_2<(R_1R_2L_1+L_2)^2 \rightarrow 4R_1R_2L_1L_2<R_1^2R_2^2L_1^2+2R_1R_2L_1L_2+L_2^2$$

$$\rightarrow R_1^2R_2^2L_1^2-2R_1R_2L_1L_2+L_2^2>0 \rightarrow (R_1R_2L_1-L_2)^2>0$$

نامساوی فوق که با فرض $\alpha>\omega_0$ بدست آمده همواره بر قرار است بنابراین $\alpha>\omega_0$ بوده و پاسخ ولتاژ $v(t)$ از نوع میرایی شدید خواهد بود.

ب ــ با جایگذاری C_1 و C_2 بجای L_1 و L_2 مدار بصورت زیر خواهد شد.



با توجه به شکل فوق داریم.

$$i_{C_2}=\frac{v}{R_2}\ \rightarrow\ v_{C_2}=v_{C_2}(0)+\frac{1}{C_2}\int\frac{v}{R_2}dt$$

$$\rightarrow\ v_{C_1}=v_{R_1}=v_{C_2}+v=v_{C_2}(0)+\frac{1}{C_2}\int\frac{v}{R_2}dt+v$$

$$\text{KCL برای گره } (A)\ \rightarrow\ C_1\frac{d\left(v_{C_2}(0)+\frac{1}{C_2}\int\frac{v}{R_2}dt+v\right)}{dt}+\frac{v_{C_2}(0)+\frac{1}{C_2}\int\frac{v}{R_2}dt+v}{R_1}+\frac{v}{R_2}=0$$

$$\rightarrow\ \frac{C_1}{R_2C_2}v+C_1\frac{dv}{dt}+\frac{v_{C_2}(0)}{R_1}+\frac{1}{R_1C_2}\int\frac{v}{R_2}dt+\frac{v}{R_1}+\frac{v}{R_2}=0$$

$$\rightarrow\ \frac{C_1}{R_2C_2}\frac{dv}{dt}+C_1\frac{d^2v}{dt^2}+\frac{1}{R_1R_2C_2}v+\frac{1}{R_1}\frac{dv}{dt}+\frac{1}{R_2}\frac{dv}{dt}=0$$

$$\rightarrow\ \frac{d^2v}{dt^2}+\left(\frac{1}{R_2C_2}+\frac{1}{R_1C_1}+\frac{1}{R_2C_1}\right)\frac{dv}{dt}+\frac{1}{R_1R_2C_1C_2}v=0$$

$$\rightarrow\ 2\alpha=\left(\frac{1}{R_2C_2}+\frac{1}{R_1C_1}+\frac{1}{R_2C_1}\right)\quad,\quad \omega_0=\sqrt{\frac{1}{R_1R_2C_1C_2}}$$

$$\alpha>\omega_0\ \rightarrow\ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_2C_2}+\frac{1}{R_1C_1}+\frac{1}{R_2C_1}\right)>\sqrt{\frac{1}{R_1R_2C_1C_2}}$$

$$\rightarrow\ \left(R_1C_1+R_2C_2+R_1C_2\right)^2>4\left(R_1R_2C_1C_2\right)$$

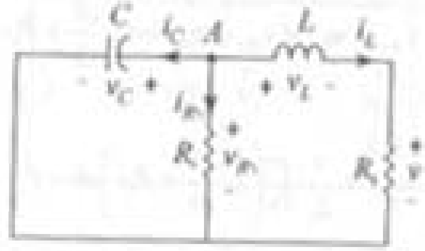
$$\rightarrow\ R_1^2C_1^2+R_2^2C_2^2+R_1^2C_2^2+2R_1R_2C_1C_2+2R_1R_2C_2^2+2R_1^2C_1C_2>4\left(R_1R_2C_1C_2\right)$$

$$\rightarrow\ \left(R_1^2C_1^2-2R_1R_2C_1C_2+R_2^2C_2^2\right)+R_1^2C_2^2+2R_1R_2C_2^2+2R_1^2C_1C_2>0$$

$$\rightarrow\ \left(R_1C_1-R_2C_2\right)^2+R_1^2C_2^2+2R_1R_2C_2^2+2R_1^2C_1C_2>0$$

از آنجا که مقادیر همه عناصر مثبت است لذا نامساوی فوق که با فرض $\alpha>\omega_0$ به دست آمده همواره برقرار می‌باشد. بنابراین پاسخ ولتاژ $v(t)$ همیشه از نوع میرای شدید است.

پ ـ فرض کنید به جای سلف L_2، خازن C را جایگزین کرده ایم. بنابراین داریم:



با توجه به شکل خواهیم داشت:

$$i_L = \frac{v}{R_2} \rightarrow v_L = L\frac{di_L}{dt} = \frac{L}{R_2}\frac{dv}{dt} \rightarrow v_C = v_{R_1} = v_L + v = \frac{L}{R_2}\frac{dv}{dt} + v$$

$$\text{A} \text{ برای گره } KCL \rightarrow L_1\frac{d\left(\frac{L}{R_2}\frac{dv}{dt} + v\right)}{dt} + \frac{\frac{L}{R_2}\frac{dv}{dt} + v}{R_1} + \frac{v}{R_2} = 0$$

$$\rightarrow \frac{d^2v}{dt^2} + \frac{R_1R_2C^2 + L}{R_1L}\frac{dv}{dt} + \frac{C}{L}(R_1 + R_2)v = 0$$

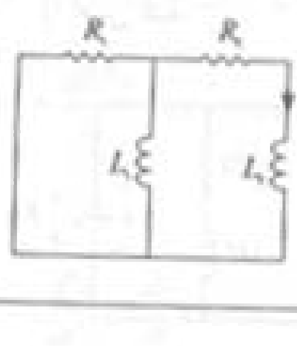
$$\rightarrow 2\alpha = \frac{R_1R_2C^2 + L}{R_1L}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{C}{L}(R_1 + R_2)}$$

$$\alpha > \omega_0 \rightarrow \frac{R_1R_2C^2 + L}{2R_1L} > \sqrt{\frac{C}{L}(R_1 + R_2)} \rightarrow \left(R_1R_2C^2 + L\right)^2 - 4R_1^2LC(R_1 + R_2) > 0$$

واضح است که نامساوی فوق که با فرض $\alpha > \omega_0$ بدست آمده همواره صحیح نبوده و لذا همیشه $\alpha > \omega_0$ نخواهد بود. پس پاسخ ولتاژ $v(t)$ همیشه میرایی شدید نمی باشد.

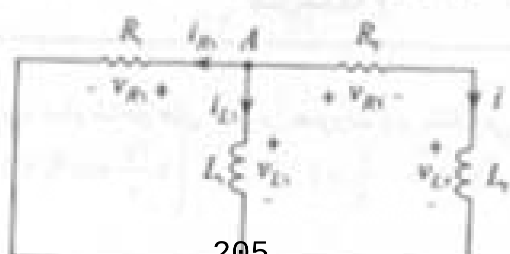
مسئله ۲

- **معادله دیفرانسیلی بر حسب i بدست آورید.**
- **ثابت کنید به ازای تمام مقادیر مثبت R_1 و R_2 و L_1 و L_2 ورودی صفر i همواره میرایی شدید است.**



شکل مسئله ۲

حل: ابتدا ولتاژ و جریان عناصر مدار را بصورت زیر مشخص می کنیم.



با توجه به شکل داریم.

$$v_{R_2} = R_2 i \ , \ v_{L_2} = L_2 \frac{di}{dt} \quad , \quad v_{R_1} = v_{L_1} = v_{R_2} + v_{L_2} = L_2 \frac{di}{dt} + R_2 i$$

برای گره A ، KCL

$$\rightarrow \frac{L_2 \frac{di}{dt} + R_2 i}{R_1} + \frac{1}{L_1} \int_0^t \left(L_2 \frac{di}{dt} + R_2 i \right) dt + i = 0$$

$$\rightarrow \frac{L_2}{R_1} \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R_2}{R_1} \frac{di}{dt} + \frac{L_2}{L_1} \frac{di}{dt} + \frac{R_2}{L_1} i + \frac{di}{dt} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R_1}{L_2} \left(1 + \frac{R_2}{R_1} + \frac{L_2}{L_1} \right) \frac{di}{dt} + \frac{R_1 R_2}{L_1 L_2} i = 0$$

$$\rightarrow 2\alpha = \frac{R_1}{L_2} \left(1 + \frac{R_2}{R_1} + \frac{L_2}{L_1} \right) = \frac{R_1^2 L_1 + R_1 R_2 L_1 + R_1 L_2}{R_1 L_1 L_2} \quad , \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{R_1 R_2}{L_1 L_2}}$$

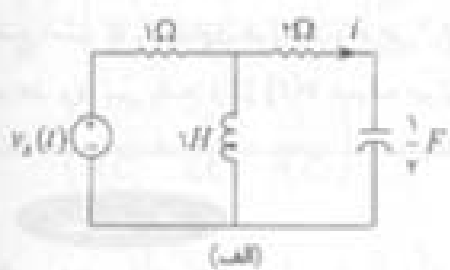
$$\alpha > \omega_0 \ \rightarrow \ \frac{R_1^2 L_1 + R_1 R_2 L_1 + R_1 L_2}{2 R_1 L_1 L_2} > \sqrt{\frac{R_1 R_2}{L_1 L_2}} \ \rightarrow \ \left(R_1^2 L_1 + R_1 R_2 L_1 + R_1 L_2 \right)^2 > 4 R_1^2 L_1 L_2$$

$$\rightarrow \left(R_1^2 L_1 - R_1 L_2 \right)^2 + R_2^2 L_1^2 + 2 R_1^2 R_2 L_1^2 + 2 R_1 R_2 L_1 L_2 > 0$$

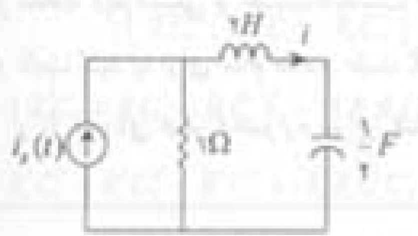
نامساوی فوق که با فرض $\alpha > \omega_0$ بدست آمده همواره برقرار است لذا پاسخ همواره میرایی شدید خواهد بود.

مسئله ۳

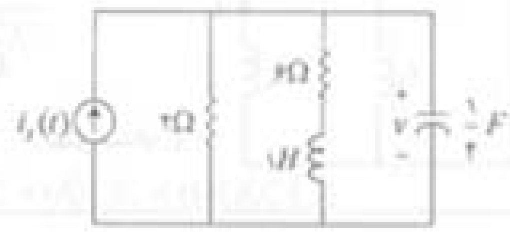
معادله دیفرانسیلی برای هر یک از مدار ها بر حسب متغیر مشخص شده بدست آورید. پاسخ پله هر مدار را تعیین کنید.



(الف)



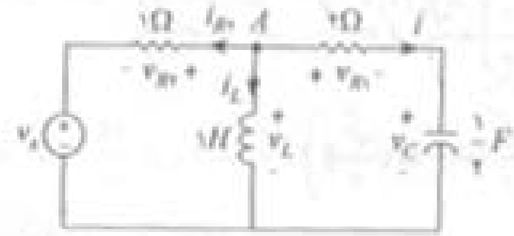
(پ)



(ب)

شکل مسئله ۳

حل : الف ـ ابتدا ولتاژ و جریان تمام شاخه های مدار را بصورت زیر نشان می دهیم.



$$v_{R_2}=۲i\ ,\ v_C=v_C(۰)+\frac{۱}{\frac{۱}{۲}}\int i dt=۲\int i dt\quad ,\quad v_A=v_{R_2}+v_C=۲i+۲\int i dt$$

$$\text{برای گره } A \text{ KCL} \rightarrow \frac{۲i+۲\int i dt-v_s}{۱}+i_L(۰)+\int\left(۲i+۲\int i dt\right)dt+i=۰$$

با دو بار مشتق گیری از معادله فوق داریم.

$$\rightarrow ۲\frac{d^۲i}{dt^۲}+۲\frac{di}{dt}-\frac{d^۲v_s}{dt^۲}+۲\frac{di}{dt}+۲i+\frac{d^۲i}{dt^۲}=۰ \rightarrow ۳\frac{d^۲i}{dt^۲}+۴\frac{di}{dt}+۲i=\frac{d^۲v_s}{dt^۲}$$

در ادامه با جایگذاری $v_s(t)=u(t)$ پاسخ پله مدار را بدست خواهیم آورد.

$$\rightarrow ۳\frac{d^۲i}{dt^۲}+۴\frac{di}{dt}+۲i=\delta'(t)$$

در $t=۰^-$ هیچ منبعی به مدار متصل نیست لذا $i(۰^-)=\frac{di(۰^-)}{dt}=۰$ می باشند و از $t=۰^+$ خازن اتصال کوتاه و سلف مدار باز است لذا $i(۰^+)=\frac{۱}{۱+۲}=\frac{۱}{۳}A$ می باشد. با انتگرال گیری از طرفین معادله فوق از ۰^- تا ۰^+ خواهیم داشت.

$$\rightarrow ۳\frac{di(۰^+)}{dt}-۳\frac{di(۰^-)}{dt}+۴i(۰^+)-۴i(۰^-)+۲\int_{۰^-}^{۰^+}i dt=\int_{۰^-}^{۰^+}\delta'(t)dt$$

$$\rightarrow ۳\frac{di(۰^+)}{dt}-۰+\frac{۴}{۳}-۰+۰=۰ \rightarrow \frac{di(۰^+)}{dt}=-\frac{۴}{۹}$$

بنابراین معادله دیفرانسیل فوق را می توان بصورت زیر معادل کرد.

$$\rightarrow ۳\frac{d^۲i}{dt^۲}+۴\frac{di}{dt}+۲i=۰\quad ,\quad i(۰^+)=\frac{۱}{۳}\quad ,\quad \frac{di(۰^+)}{dt}=-\frac{۴}{۹}$$

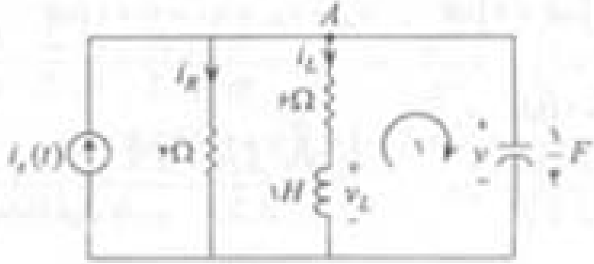
$$\text{معادله مشخصه}: ۳s^۲+۴s+۲=۰ \rightarrow s=-\frac{۲}{۳}\pm j\frac{\sqrt{۲}}{۳}$$

$$\rightarrow i(t)=e^{-\frac{۲}{۳}t}\left(A\sin\frac{\sqrt{۲}}{۳}t+B\cos\frac{\sqrt{۲}}{۳}t\right)\quad ,\quad i(۰^+)=\frac{۱}{۳} \rightarrow B=\frac{۱}{۳}$$

$$\frac{di(0^+)}{dt} = -\frac{4}{9} \quad \to \quad -\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{\sqrt{2}}{3}A = -\frac{4}{9} \quad \to \quad A = \frac{\sqrt{2}}{12}$$

$$\to \quad i(t) = e^{-\frac{3}{2}t}\left(\frac{\sqrt{2}}{12}\sin\frac{\sqrt{2}}{3}t + \frac{1}{3}\cos\frac{\sqrt{2}}{3}t\right)$$

پ ــ شکل مدار را مجدداً بصورت زیر رسم می کنیم.



با توجه به شکل می توان نوشت.

$$\text{A برای گره } KCL \to \quad -i_s + \frac{v}{4} + i_L + \frac{1}{4}\frac{dv}{dt} = 0 \quad \to \quad i_L = i_s - \frac{v}{4} - \frac{1}{4}\frac{dv}{dt}$$

$$\text{برای مش ۱ } KVL \quad \to \quad -\frac{di_L}{dt} - 6i_L + v = 0 \quad \to \quad -\frac{d\left(i_s - \frac{v}{4} - \frac{1}{4}\frac{dv}{dt}\right)}{dt} - 6\left(i_s - \frac{v}{4} - \frac{1}{4}\frac{dv}{dt}\right) + v = 0$$

$$\to \quad \frac{d^2v}{dt^2} + 7\frac{dv}{dt} + 10v = 4\frac{di_s}{dt} + 24i_s$$

به ازای $i_s(t) = u(t)$ پاسخ پله را محاسبه خواهیم کرد.

$$v\frac{d^2v}{dt^2} + 7\frac{dv}{dt} + 10V = 4\delta(t) + 24u(t)$$

در $t = 0^+$ خازن اتصال کوتاه و سلف مدار باز است لذا $v(0^+) = v(0^-) = 0$ خواهد بود. و با انتگرال گیری از معادله دیفرانسیل در فاصله 0^- تا 0^+ خواهیم داشت.

$$\frac{dv(0^+)}{dt} - \frac{dv(0^-)}{dt} + 7v(0^+) - 7v(0^-) + \int_{0^-}^{0^+} 10v = 4\int_{0^-}^{0^+}\delta(t) + 2\int_{0^-}^{0^+}u(t)\,dt$$

$$\to \quad \frac{dv(0^+)}{dt} - 0 + 0 - 0 + 0 = 4 + 0 \quad \to \quad \frac{dv(0^+)}{dt} = 4$$

بنابراین معادله دیفرانسیل فوق را می توان بصورت زیر نوشت.

$$\frac{d^2v}{dt^2} + 7\frac{dv}{dt} + 10v = 24 \;,\quad v(0^+) = 0 \;,\quad \frac{dv(0^+)}{dt} = 4 \;,\; t > 0$$

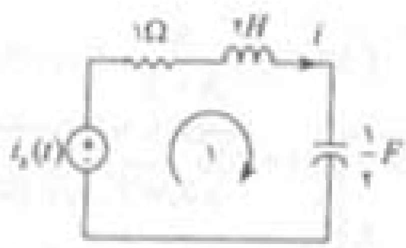
معادله مشخصه : $s^2+7s+10=0 \rightarrow s=-2,-5 \rightarrow v(t)=\underbrace{K_1e^{-2t}+K_2e^{-5t}}_{\text{پاسخ عمومی}}+\underbrace{K_3}_{\text{پاسخ خصوصی}}$

با جایگذاری پاسخ خصوصی در معادله دیفرانسیل $10K_3=24$ و یا $K_3=\frac{24}{10}$ شده و داریم.

$$\begin{cases} v(0^+)=0 & \rightarrow K_1+K_2+\frac{24}{10}=0 \\ \frac{dv(0^+)}{dt}=4 & \rightarrow -2K_1-5K_2=4 \end{cases} \rightarrow K_1=-\frac{8}{3} \ , \ K_2=\frac{4}{15}$$

$$\rightarrow v(t)=-\frac{8}{3}e^{-2t}+\frac{4}{15}e^{-5t}+\frac{24}{10} \ , \ t>0$$

پ ـ با استفاده از تبدیل تونن - نرتن مدار را بصورت زیر رسم می کنیم.



برای مش ۱ $KVL \rightarrow i+2\frac{di}{dt}+i(0)+\frac{1}{\frac{1}{2}}\int idt=i_s \rightarrow \frac{di}{dt}+2\frac{d^2i}{dt}+2i=\frac{di_s}{dt}$

با جایگذاری $i_s(t)=u(t)$ پاسخ پله مدار را بصورت زیر بدست می آوریم.

$$2\frac{d^2i}{dt}+\frac{di}{dt}+2i=\delta(t)$$

از آنجا که $i_s(t)=0 \ , \ t<0$ لذا $\frac{di(0^-)}{dt}=i(0^-)=0$ بوده و در $t=0^+$ خازن اتصال کوتاه و سلف مدار باز خواهد شد بنابراین $i(0^+)=0$ بوده و با انتگرال گیری از معادله دیفرانسیل در فاصله 0^- تا 0^+ خواهیم داشت.

$$2\frac{di(0^+)}{dt}-2\frac{di(0^-)}{dt}+i(0^+)-i(0^-)+\int_{0^-}^{0^+}2idt=\int_{0^-}^{0^+}\delta(t) \rightarrow 2\frac{di(0^+)}{dt}-0+0-0+0=1$$

$$\rightarrow \frac{di(0^+)}{dt}=\frac{1}{2}$$

همچنین در $t>0 \ , \ \delta(t)=0$ بوده بنابراین معادله دیفرانسیل فوق را می توان بصورت زیر نوشت.

$$2\frac{d^2i}{dt}+\frac{di}{dt}+2i=0 \ , \ i(0^+)=0 \ , \ \frac{di(0^+)}{dt}=\frac{1}{2} \ , \ t>0$$

معادله مشخصه : $2s^2 + s + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad s = -\frac{1}{4} \pm j\frac{\sqrt{15}}{4}$

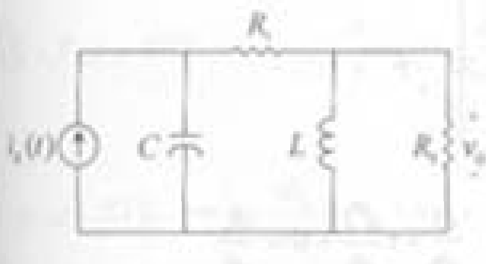
$$\rightarrow \quad i(t) = e^{-\frac{1}{4}t}\left(A\sin\frac{\sqrt{15}}{4}t + B\cos\frac{\sqrt{15}}{4}t\right)$$

$$\begin{cases} i(0^+) = 0 \quad \rightarrow \quad B = 0 \\ \frac{di(0^+)}{dt} = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad -\frac{1}{4}B + \frac{\sqrt{15}}{4}A = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad A = \frac{2\sqrt{15}}{15} \end{cases}$$

$$\rightarrow \quad i(t) = \frac{2\sqrt{15}}{15}e^{-\frac{1}{4}t}\sin\frac{\sqrt{15}}{4}t\ , \quad t > 0$$

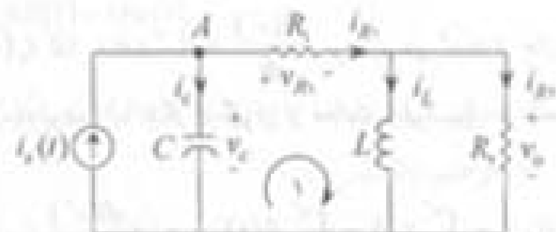
مسئله ۴

- معادله دیفرانسیل ارتباط دهنده v_o را به i_s بنویسید.
- شرایط اولیه را بر حسب ولتاژ اولیه V_o خازن و جریان اولیه I_o سلف مشخص کنید.
- به ازای $R_1 = R_2 = L = C = 1$ پاسخ پله را محاسبه کنید.



شکل مسئله ۴

حل : شکل فوق را مجدداً بصورت زیر رسم می کنیم.



$$i_{R_1} = i_L + i_{R_2} = \frac{1}{L}\int v_o dt + \frac{v_o}{R_2} \quad \rightarrow \quad v_{R_1} = R_1 i_{R_1} = \frac{R_1}{L}\int v_o dt + \frac{R_1}{R_2}v_o$$

$$v_c = v_{R_1} + v_o = \frac{R_1}{L}\int v_o dt + \frac{R_1 + R_2}{R_2}v_o$$

A برای گره KCL $\rightarrow \quad -i_s + C\frac{d}{dt}\left(\frac{R_1}{L}\int v_o dt + \frac{R_1 + R_2}{R_2}v_o\right) + \frac{R_1}{L}\int v_o dt + \frac{v_o}{R_2} = 0$

$$\rightarrow \quad -i_s + \frac{RC}{L}v_o + \frac{R_1+R_2}{R_2}C\frac{dv_o}{dt} + \frac{R_1}{L}\int v_o dt + \frac{v_o}{R_2} = ۰$$

$$\rightarrow \quad \frac{-di_s}{dt} + \frac{RC}{L}\frac{dv_o}{dt} + \frac{R_1+R_2}{R_2}C\frac{d^۲v_o}{dt^۲} + \frac{R_1}{L}v_o + \frac{۱}{R_2}\frac{dv_o}{dt} = ۰$$

$$\rightarrow \quad \frac{R_1+R_2}{R_2}C\frac{d^۲v_o}{dt^۲} + \left(\frac{۱}{R_2} + \frac{RC}{L}\right)\frac{dv_o}{dt} + \frac{R_1}{L}v_o = \frac{di_s}{dt}$$

برای محاسبه شرط اولیه $v_o(t)$ می توان نوشت.

$$i_{R_1} = i_L + \frac{v_o}{R_2} \quad \rightarrow \quad v_{R_1} = Ri_L + \frac{R_1}{R_2}v_o$$

$$\text{برای مش ۱ } KVL \quad \rightarrow \quad -v_c + v_{R_1} + v_o = ۰ \quad \rightarrow \quad -v_c + Ri_L + \frac{R_1}{R_2}v_o + v_o = ۰$$

$$\rightarrow \quad v_o(۰) = \frac{R_2}{R_1+R_2}\left(v_c(۰) - Ri_L(۰)\right) = \frac{R_2}{R_1+R_2}(V_o - RI_o)$$

در ادامه به ازای $R_1 = R_2 = L = C = ۱$ و $i_s(t) = u(t)$ پاسخ پله را محاسبه خواهیم کرد.

$$\rightarrow \quad ۲\frac{d^۲v_o}{dt^۲} + ۲\frac{dv_o}{dt} + v_o = \delta(t) \quad , \quad v_o(۰) = \frac{۱}{۲}(V_o - I_o)$$

با انتگرال گیری از معادله فوق در فاصله ۰^- تا ۰^+ خواهیم داشت.

$$۲\frac{dv_o(۰^+)}{dt} - ۲\frac{dv_o(۰^-)}{dt} + ۲v_o(۰^+) - ۲v_o(۰^-) + \int_{۰^-}^{۰^+} v_o dt = \int_{۰^-}^{۰^+}\delta(t)dt$$

$$۲\frac{dv_o(۰^+)}{dt} - ۰ + (V_o - I_o) - ۰ + ۰ = ۱ \quad \rightarrow \quad \frac{dv_o(۰^+)}{dt} = \frac{I_o - V_o + ۱}{۲}$$

همچنین به ازای $t > ۰$ ، $\delta(t) = ۰$ بوده بنابراین معادله دیفرانسیل فوق را می توان بصورت زیر نوشت.

$$۲\frac{d^۲v_o}{dt^۲} + ۲\frac{dv_o}{dt} + v_o = ۰ \quad , \quad v_o(۰^+) = \frac{V_o - I_o}{۲} \quad , \quad \frac{dv_o(۰^+)}{dt} = \frac{I_o - V_o + ۱}{۲}$$

$$\text{معادله مشخصه} : ۲s^۲ + ۲s + ۱ = ۰ \quad \rightarrow \quad s = -\frac{۱}{۲} \pm j\frac{۱}{۲} \quad \rightarrow \quad v_o(t) = e^{-\frac{۱}{۲}t}\left(A\sin\frac{۱}{۲}t + B\cos\frac{۱}{۲}t\right)$$

$$v_o(۰^+) = \frac{V_o - I_o}{۲} \quad \rightarrow \quad B = \frac{V_o - I_o}{۲} \quad , \quad \frac{dv_o(۰^+)}{dt} = \frac{I_o - V_o + ۱}{۲} \quad \rightarrow \quad -\frac{۱}{۲}B + \frac{۱}{۲}A = \frac{I_o - V_o + ۱}{۲}$$

$$\rightarrow \quad A = ۱ - \frac{V_o - I_o}{۲} \quad , \quad v_o(t) = e^{-\frac{۱}{۲}t}\left(\left(۱ - \frac{V_o - I_o}{۲}\right)\sin\frac{۱}{۲}t + \left(\frac{V_o - I_o}{۲}\right)\cos\frac{۱}{۲}t\right) \quad , \quad t > ۰$$

مسئله ۵

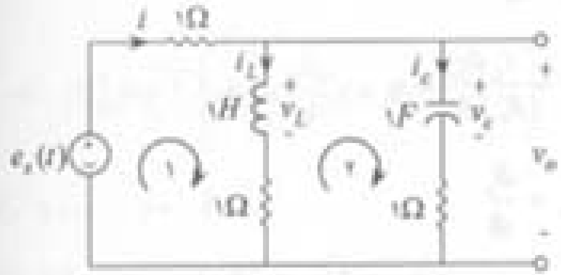
معادله دیفرانسیلی بنویسید که :

الف- v_c را به e_s ارتباط دهد.

ب- i_L را به e_s ارتباط دهد.

پ- v_o را به e_s ارتباط دهد.

ت- i را به e_s ارتباط دهد.



شکل مسئله ۵

حل : الف ـ با توجه به شکل فوق داریم

$$v_o = v_c + i_c = v_c + \frac{dv_c}{dt} \quad , \quad i = \frac{e_s - v_o}{1} = e_s - v_o = e_s - v_c - \frac{dv_c}{dt}$$

$$i = i_L + i_c \quad \to \quad i_L = i - i_c = e_s - v_c - \frac{dv_c}{dt} - \frac{dv_c}{dt} = e_s - v_c - 2\frac{dv_c}{dt}$$

برای مش ۱ $KVL \quad \to \quad -e_s + i - \frac{di_L}{dt} + i_L = 0$

$$\to \quad -e_s + e_s - v_c - \frac{dv_c}{dt} + \frac{de_s}{dt} - \frac{dv_c}{dt} - 2\frac{d^2v_c}{dt} + e_s - v_c - 2\frac{dv_c}{dt} = 0$$

$$\to \quad \frac{d^2v_c}{dt} + 2\frac{dv_c}{dt} + v_c = \frac{1}{2}\frac{de_s}{dt} + \frac{1}{2}e_s$$

ب ـ با توجه به شکل می توان نوشت.

$$v_o = v_L + i_L = \frac{di_L}{dt} + i_L \quad , \quad i = \frac{e_s - v_o}{1} = e_s - \frac{di_L}{dt} - i_L$$

$$v_o = i_L + i_c \quad \to \quad i_c = i - i_L = e_s - \frac{di_L}{dt} - 2i_L$$

برای حلقه شامل مشهای ۱ و ۲ $KVL \quad \to \quad -e_s + i + \int_0^t i_c dt + i_c = 0 \quad \to \quad -\frac{de_s}{dt} + \frac{di}{dt} + i_c + \frac{di_c}{dt} = 0$

$$\to \quad -\frac{de_s}{dt} + \frac{de_s}{dt} - \frac{d^2i_L}{dt} - \frac{di_L}{dt} + e_s - \frac{di_L}{dt} - 2i_L + \frac{de_s}{dt} - \frac{d^2i_L}{dt} - 2\frac{di_L}{dt} = 0$$

$$\to \quad \frac{d^2i_L}{dt} + 2\frac{di_L}{dt} + i_L = \frac{1}{2}\frac{de_s}{dt} + \frac{1}{2}e_s$$

پ ـ با توجه به قسمت (الف) می توان نوشت.

$$v_o = v_c + \frac{dv_c}{dt} \rightarrow \frac{dv_o}{dt} = \frac{dv_c}{dt} + \frac{d^2 v_c}{dt}$$

$$\frac{d^2 v_c}{dt} + 2\frac{dv_c}{dt} + v_c = \frac{1}{2}\frac{de_s}{dt} + \frac{1}{2}e_s \rightarrow \left(\frac{d^2 v_c}{dt} + \frac{dv_c}{dt}\right) + \left(\frac{dv_c}{dt} + v_c\right) = \frac{1}{2}\frac{de_s}{dt} + \frac{1}{2}e_s$$

$$\rightarrow \frac{dv_o}{dt} + v_o = \frac{1}{2}\frac{de_s}{dt} + \frac{1}{2}e_s$$

ت ـ با توجه به قسمت (ب) و (پ) می توان نوشت:

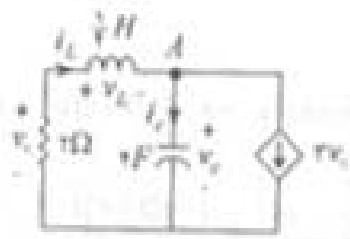
$$i = e_s - v_o \rightarrow v_o = e_s - i$$

$$\frac{dv_o}{dt} + v_o = \frac{1}{2}\frac{de_s}{dt} + \frac{1}{2}e_s \rightarrow \frac{d(e_s - i)}{dt} + e_s - i = \frac{1}{2}\frac{de_s}{dt} + \frac{1}{2}e_s \rightarrow \frac{di}{dt} + i = \frac{1}{2}\frac{de_s}{dt} + \frac{1}{2}e_s$$

مسئله ۶

معادله دیفرانسیلی بر حسب i_L تشکیل داده و پاسخ ورودی صفر را بیابید.

$(v_c(0) = 2V$ و $i_L(0) = 1A)$



شکل مسئله ۶

حل: با توجه به شکل داریم:

$$v_1 = -2i_L \;,\; v_c = v_1 - v_L = 2i_L - \frac{1}{2}\frac{di_L}{dt} \rightarrow v_c(0) = 2i_L(0) - \frac{1}{2}\frac{di_L(0)}{dt} \rightarrow \frac{di_L(0)}{dt} = 0$$

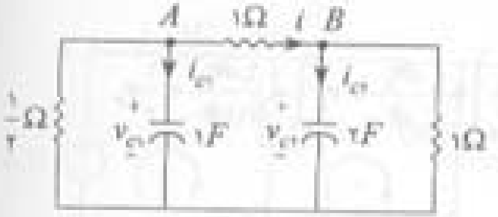
KCL برای گره Ⓐ: $\rightarrow -i_L + 4\frac{d}{dt}\left(2i_L - \frac{1}{2}\frac{di_L}{dt}\right) + 3(-2i_L) = 0 \rightarrow \frac{d^2 i_L}{dt} - 8\frac{di_L}{dt} + 7i_L = 0$

معادله مشخصه: $s^2 - 8s + 7 = 0 \rightarrow s = -1 \,,\, -7 \rightarrow i_L(t) = K_1 e^{-t} + K_2 e^{-7t}$

$$\begin{cases} i_L(0) = 1 \rightarrow K_1 + K_2 = 1 \\ \frac{di_L(0)}{dt} = 0 \rightarrow K_1 + 7K_2 = 0 \end{cases} \rightarrow K_1 = \frac{7}{6} \;,\; K_2 = -\frac{1}{6}$$

$$\rightarrow i_L(t) = \frac{7}{6}e^{-t} - \frac{1}{6}e^{-7t} \;,\; t > 0$$

مسئله ۷



شکل مسئله ۷

معادله معادله دیفرانسیلی بر حسب i تشکیل داده و پاسخ ورودی صفر را بدست آورید.
($v_{c2}(0)=2V$ و $v_{c1}(0)=1V$)

حل : با توجه به شکل مسئله و با استفاده از روش نمایش اپراتوری در معادلات دیفرانسیل داریم.

$$i=\frac{v_{c1}-v_{c2}}{1}=v_{c1}-v_{c2}$$

KCL برای گره Ⓐ $\rightarrow \frac{v_{c1}}{\frac{1}{2}}+\frac{dv_{c1}}{dt}+i=0 \rightarrow 2v_{c1}+\frac{dv_{c1}}{dt}+i=0 \rightarrow (2+D)v_{c1}+i=0$

KCL برای گره Ⓑ $\rightarrow \frac{v_{c2}}{1}+2\frac{dv_{c2}}{dt}-i=0 \rightarrow v_{c2}+2\frac{dv_{c2}}{dt}-i=0 \rightarrow (2D+1)v_{c2}-i=0$

$$\rightarrow v_{c1}=\frac{-i}{D+2}\quad,\quad v_{c2}=\frac{i}{2D+1}\quad,\ i=v_{c1}-v_{c2}=-\frac{i}{D+2}-\frac{i}{2D+1}=\frac{(-3D-3)i}{2D^2+5D+2}$$

$$\rightarrow \left(2D^2+5D+2\right)i=(-3D-3)i \quad\rightarrow\quad \left(2D^2+8D+5\right)i=0$$

$$\rightarrow 2\frac{d^2i}{dt^2}+8\frac{di}{dt}+5i=0$$

معادله مشخصه : $2s^2+8s+5=0 \quad\rightarrow\quad s=-2\pm\frac{\sqrt{6}}{2}=-0/77\ ,\quad -3/22$

$$\rightarrow \quad i(t)=K_1e^{-0/77t}+K_2e^{-3/22t}$$

$$i=v_{c1}-v_{c2}\quad\rightarrow\quad i(0)=v_{c1}(0)-v_{c2}(0)=1-2=-1\quad\rightarrow\quad K_1+K_2=-1$$

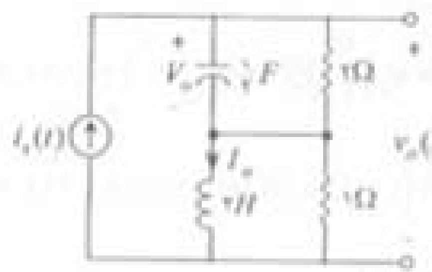
$$2v_{c1}(0)+\frac{dv_{c1}(0)}{dt}+i(0)=0\quad\rightarrow\quad 2+\frac{dv_{c1}(0)}{dt}-1=0\quad\rightarrow\quad \frac{dv_{c1}(0)}{dt}=-1$$

$$v_{c2}(0)+\frac{2dv_{c2}(0)}{dt}-i(0)=0\quad\rightarrow\quad 2+2\frac{dv_{c2}(0)}{dt}+1=0\quad\rightarrow\quad \frac{dv_{c2}(0)}{dt}=-\frac{3}{2}$$

$$i=v_{c1}-v_{c2}\quad\rightarrow\quad \frac{di}{dt}=\frac{dv_{c1}}{dt}-\frac{dv_{c2}}{dt}\quad\rightarrow\quad \frac{di(0)}{dt}=-1+\frac{3}{2}=\frac{1}{2}\quad\rightarrow\quad -0/77K_1-3/22K_2=\frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} K_1 + K_2 = -1 \\ -0.77K_1 - 3.22K_2 = \dfrac{1}{2} \end{cases} \rightarrow \; K_1 = -1.11 \;,\; K_2 = 0.11$$

$$\rightarrow \; i(t) = -1.11e^{-0.77t} - 0.11e^{-3.22t} \;,\; t > 0$$

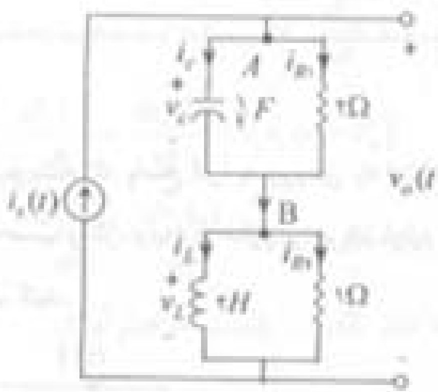


مسئله ۸

معادله دیفرانسیلی بر حسب v_o تشکیل داده و شرایط اولیه را بر حسب V_o و I_o و احیاناً $i_s(0)$ بدست آورید.

شکل مسئله ۸

حل : شکل فوق را مجدداً بصورت زیر رسم می کنیم



با توجه به شکل فوق و با استفاده از نمایش اپراتوری معادلات دیفرانسیل داریم:

A) برای گره KCL

$$\rightarrow \; -i_s + \frac{1}{2}\frac{dv_c}{dt} + \frac{v_c}{2} = 0 \;\rightarrow\; \frac{dv_c}{dt} + v_c = 2i_s \;\rightarrow\; (1+D)v_c = 2i_s$$

$$\rightarrow \; v_c = \frac{2}{1+D}i_s$$

B) برای گره KCL

$$\rightarrow \; -i_s + \frac{1}{2}\int v_L dt + \frac{v_L}{1} = 0 \;\rightarrow\; -\frac{di_s}{dt} + \frac{v_L}{2} + \frac{dv_L}{dt} = 0$$

$$\rightarrow \; 2\frac{dv_L}{dt} + v_L = 2\frac{di_s}{dt} \;\rightarrow\; (2D+1)v_L = 2Di_s \;\rightarrow\; v_L = \frac{2D}{(2D+1)}i_s$$

$$\rightarrow \; v_o = v_c + v_L = \frac{2}{D+1}i_s + \frac{2D}{2D+1}i_s = \frac{2(2D+1)+2D(D+1)}{(D+1)(2D+1)}i_s = \frac{2D^2+4D+2}{2D^2+3D+1}i_s$$

$$\rightarrow \left(2D^2+3D+1\right)v_o=\left(2D^2+4D+2\right)i_s \;\rightarrow\; 2\frac{d^2v_o}{dt^2}+3\frac{dv_o}{dt}+v_o=2\frac{d^2i_s}{dt^2}+4\frac{di_s}{dt}+2i_s$$

در ادامه به محاسبه شرایط اولیه می پردازیم.

$$v_L=Ri_{R_1}=\left(i_s-i_L\right) \;\rightarrow\; v_o=v_c+v_L=v_c+\left(i_s-i_L\right)$$

$$\rightarrow\; v_o(0)=v_c(0)+\left(i_s(0)-i_L(0)\right)=V_0+\left(i_s(0)-I_0\right)$$

$$\frac{dv_c}{dt}+v_c=2i_s \;\rightarrow\; \frac{dv_c(0)}{dt}=2i_s(0)-v_c(0)=2i_s(0)-V_0=2i_s(0)-V_0$$

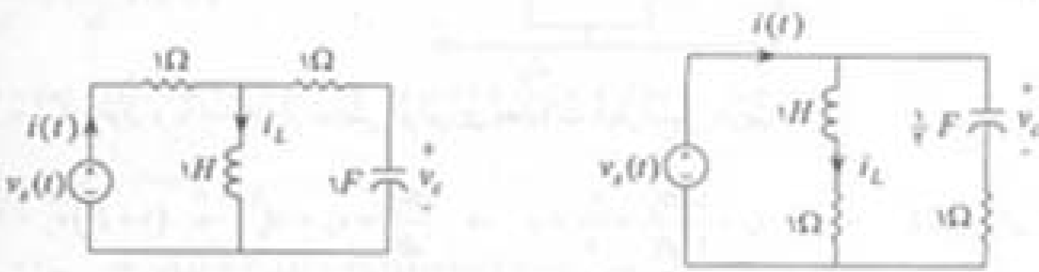
$$v_L=i_s-i_L=i_s-\frac{1}{2}\int v_L\,dt \;\rightarrow\; \frac{dv_L(0)}{dt}=\frac{di_s(0)}{dt}-\frac{v_L(0)}{2}$$

$$\rightarrow\; \frac{dv_L(0)}{dt}=\frac{di_s(0)}{dt}-\frac{1}{2}\left(i_s(0)-i_L(0)\right)=\frac{di_s(0)}{dt}-\frac{1}{2}\left(i_s(0)-I_0\right)$$

$$\rightarrow\; \frac{dv_o(0)}{dt}=\frac{dv_c(0)}{dt}+\frac{dv_L(0)}{dt}=\frac{di_s(0)}{dt}+\frac{3}{2}i_s(0)-V_0+\frac{1}{2}I_0$$

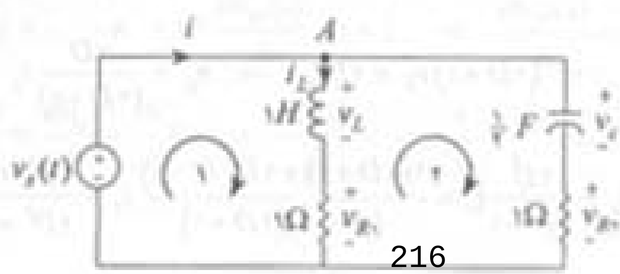
مسئله ۹

- معادله دیفرانسیلی بنویسید که پاسخ i را به ورودی v_s ارتباط دهد.
- شرایط اولیه را بر حسب ولتاژ اولیه V_0 خازن و جریان اولیه I_0 سلف مشخص کنید.
- پاسخ پله را حساب کنید.



(ب) شکل مسئله ۹ (الف)

حل : الف ـ با توجه به شکل زیر و با استفاده از روش نمایش اپراتوری معادلات دیفرانسیل داریم.



برای مش ۱ $KVL \;\to\; -v_s+\frac{di}{dt}+i_L=0 \;\to\; -v_s+Di_L+i_L=0 \;\to\; i_L=\frac{1}{D+1}v_s$

برای حلقه شامل مشهای ۱ و ۲ $KVL \;\to\; -v_s+2\int_0^t i_c\,dt+i_c=0 \;\to\; -\frac{dv_s}{dt}+2i_c+\frac{di_c}{dt}=0$

$$\to\; -Dv_s+2i_c+Di_c=0 \;\to\; i_c=\frac{D}{D+2}v_s$$

$$\to\; i=i_L+i_c=\frac{1}{D+1}v_s+\frac{D}{D+2}v_s=\frac{D+2+D(D+1)}{(D+1)(D+2)}v_s=\frac{D^2+2D+2}{D^2+3D+2}v_s$$

$$\to\; \left(D^2+3D+2\right)i=\left(D^2+2D+2\right)v_s \;\to\; \frac{d^2i}{dt^2}+3\frac{di}{dt}+2i=\frac{d^2v_s}{dt^2}+2\frac{dv_s}{dt}+2v_s$$

برای محاسبه شرایط اولیه داریم :

$$i_c=\frac{v_{R_0}}{1}=\frac{v_s-v_c}{1} \;\to\; i_c(0)=v_s(0)-v_c(0)=v_s(0)-V_0$$

$$\to\; i(0)=i_L(0)+i_c(0)=I_0+v_s(0)-V_0 \;\to\; \frac{di_L}{dt}=v_s-i_L \;\to\; \frac{di_L(0)}{dt}=v_s(0)-I_0$$

$$\frac{di_c}{dt}=\frac{dv_s}{dt}-2i_c \;\to\; \frac{di_c(0)}{dt}=\frac{dv_s(0)}{dt}-2\left(v_s(0)-V_0\right)$$

$$\to\; \frac{di(0)}{dt}=\frac{di_L(0)}{dt}+\frac{di_c(0)}{dt}=\frac{dv_s(0)}{dt}-v_s(0)-I_0+2V_0$$

در ادامه با جایگذاری $v_s(t)=u(t)$ پاسخ پله مدار (الف) را بدست خواهیم آورد.

$$v_s(t)=u(t)=1\;,\; t>0\;,\quad \frac{dv_s(t)}{dt}=\delta(t)=0\;,\; t>0\;,\quad \frac{dv_s^2(t)}{dt^2}=\delta'(t)=0\;,\; t>0$$

$$\to\; \frac{d^2i}{dt^2}+3\frac{di}{dt}+2i=2\;,\quad t>0$$

معادله مشخصه : $s^2+3s+2=0 \;\to\; s=-1,-2 \;\to\; v(t)=\underbrace{K_1e^{-t}+K_2e^{-2t}}_{\text{پاسخ عمومی}}+\underbrace{K_3}_{\text{پاسخ خصوصی}}$

با جایگذاری پاسخ خصوصی در معادله دیفرانسیل $2K_3=2$ و یا $K_3=1$ شده و با اعمال شرایط اولیه خواهیم داشت.

$$v_s(0^-)=\frac{dv_s(0^-)}{dt}=\frac{dv_s(0^+)}{dt}=0\;,\; v_s(0^+)=1$$

$$\to\; i(0^-)=I_0-V_0\;,\; i(0^+)=I_0-V_0+1\;,\; \frac{di(0^-)}{dt}=-I_0+2V_0$$

برای محاسبه $\frac{di(0^+)}{dt}$ از معادله دیفرانسیل در فاصله 0^- و 0^+ انتگرال می گیریم.

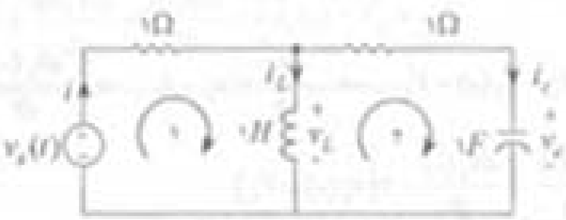
$$\frac{di(0^+)}{dt}-\frac{di(0^-)}{dt}+\left(3i(0^+)-3i(0^-)\right)+\int_{0^-}^{0^+}2i\,dt=\int_{0^-}^{0^+}\delta'(t)\,dt+\int_{0^-}^{0^+}2\delta(t)\,dt+\int_{0^-}^{0^+}2u(t)\,dt$$

$$\to\ \frac{di(0^+)}{dt}-\left(-I_0+2V_0\right)+3+0=0+2+0\ \to\ \frac{di(0^+)}{dt}=2V_0-I_0-1$$

$$\begin{cases} i(0^+)=I_0-V_0+1 \ \to\ K_1+K_2+1=I_0-V_0+1 \\ \frac{di(0^+)}{dt}=2V_0-I_0-2 \ \to\ -K_1-2K_2=2V_0-I_0-1 \end{cases}$$

$$\to\ K_1=I_0-1\ ,\ K_2=1-V_0\ \to\ i(t)=\left(I_0-1\right)e^{-t}+\left(1-V_0\right)e^{-2t}+1\ ,\ t>0$$

ب ـ با توجه به شکل زیر و با استفاده از نمایش اپراتوری معادلات دیفرانسیل داریم.



برای مش ۱ $KVL\ \to\ -v_s+\frac{di_L}{dt}+i=0\ \to\ -v_s+Di_L+i=0\ \to\ i_L=\frac{v_s-i}{D}$

برای حلقه شامل مشهای ۱ و ۲ $KVL\ \to\ -v_s+i+i_c+\int i_c\,dt+i_c=0\to\ -\frac{dv_s}{dt}+\frac{di}{dt}+\frac{di_c}{dt}+i_c=0$

$$\to\ i_c=\frac{D}{D+1}(v_s-i)$$

$$i=i_L+i_c=\frac{v_s-i}{D}+\frac{D}{D+1}(v_s-i)=\frac{D+1+D^2}{D(D+1)}(v_s-i)$$

$$\to\ \left(D^2+D\right)i=\left(D^2+D+1\right)(v_s-i)\ \to\ \left(2D^2+2D+1\right)i=\left(D^2+D+1\right)v_s$$

$$\to\ 2\frac{d^2i}{dt^2}+2\frac{di}{dt}+i=\frac{d^2v_s}{dt^2}+\frac{dv_s}{dt}+v_s$$

برای محاسبه شرایط اولیه داریم.

$$i=i_c+i_L\ \to\ i_c=i-i_L$$

برای حلقه شامل مشهای ۱ و ۲ $KVL\ \to\ -v_s+i+i_c+v_c=0\ \to\ -v_s+i+i-i_L+v_c=0$

$$\rightarrow\ i = \frac{1}{2}(i_L - v_c + v_s) \ \rightarrow\ i(0) = \frac{1}{2}(I_0 - V_0 + v_s(0))$$

$$\rightarrow\ \frac{di}{dt} = \frac{1}{2}\left(\frac{di_L}{dt} - \frac{dv_c}{dt} + \frac{dv_s}{dt}\right) = \frac{1}{2}\left(v_L - i_c + \frac{dv_s}{dt}\right) = \frac{1}{2}\left((v_s - i) - (i - i_L) + \frac{dv_s}{dt}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(v_s + i_L) + \frac{1}{2}\frac{dv_s}{dt} - i$$

$$\rightarrow\ \frac{di(0)}{dt} = \frac{1}{2}(v_s(0) + i_L(0)) + \frac{1}{2}\frac{dv_s(0)}{dt} - i(0)$$

$$\frac{di(0)}{dt} = \frac{1}{2}(v_s(0) + I_0) + \frac{1}{2}\frac{dv_s(0)}{dt} - \frac{1}{2}(I_0 - V_0 + v_s(0)) = \frac{1}{2}\left(V_0 + \frac{dv_s(0)}{dt}\right)$$

در ادامه با جایگذاری $v_s(t) = u(t)$ پاسخ پله را بدست خواهیم آورد.

$$v_s(t) = u(t) = 1\ ,\ t > 0\ ,\ \frac{dv_s(t)}{dt} = \delta(t) = 0\ ,\ t > 0\ ,\ \frac{dv_s^2(t)}{dt^2} = \delta'(t) = 0\ ,\ t > 0$$

$$\rightarrow\ 2\frac{d^2 i}{dt^2} + 2\frac{di}{dt} + i = 1\ ,\ t > 0$$

معادله مشخصه : $2s^2 + 2s + 1 = 0 \ \rightarrow\ s = -\frac{1}{2} \pm j\frac{1}{2} \ \rightarrow\ i(t) = \underbrace{e^{-\frac{1}{2}t}\left(A\sin\frac{t}{2} + B\cos\frac{t}{2}\right)}_{\text{پاسخ عمومی}} + \underbrace{C}_{\text{پاسخ خصوصی}}$

با جایگذاری پاسخ خصوصی C در معادله دیفرانسیل $C = 1$ شده و با اعمال شرایط اولیه خواهیم داشت.

$$v_s(0^-) = \frac{dv_s(0^-)}{dt} = \frac{dv_s(0^+)}{dt} = 0\ ,\ v_s(0^+) = 1$$

$$\rightarrow\ i(0^-) = \frac{1}{2}(I_0 - V_0)\ ,\ i(0^+) = \frac{1}{2}(I_0 - V_0 + 1)\ ,\ \frac{di(0^-)}{dt} = \frac{1}{2}V_0$$

با انتگرال گیری از طرفین معادله در فاصله 0^- تا 0^+ خواهیم داشت.

$$2\frac{di(0^+)}{dt} - 2\frac{di(0^-)}{dt} + \left(2i(0^+) - 2i(0^-)\right) + \int_{0^-}^{0^+} i\,dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta'(t)\,dt + \int_{0^-}^{0^+} \delta(t)\,dt + \int_{0^-}^{0^+} u(t)\,dt$$

$$\rightarrow\ 2\frac{di(0^+)}{dt} - V_0 + 1 + 0 = 0 + 1 + 0 \ \rightarrow\ \frac{di(0^+)}{dt} = \frac{1}{2}V_0$$

$$i(0^+) = \frac{1}{2}(I_0 - V_0 + 1) \ \rightarrow\ B + 1 = \frac{1}{2}(I_0 - V_0 + 1) \ \rightarrow\ B = \frac{1}{2}(I_0 - V_0 - 1)$$

$$\frac{di(0^+)}{dt}=\frac{V_0}{۲} \rightarrow -\frac{۱}{۲}B+\frac{۱}{۲}A=\frac{۱}{۲}V_0 \rightarrow A=\frac{۱}{۲}(I_0+V_0-۱)$$

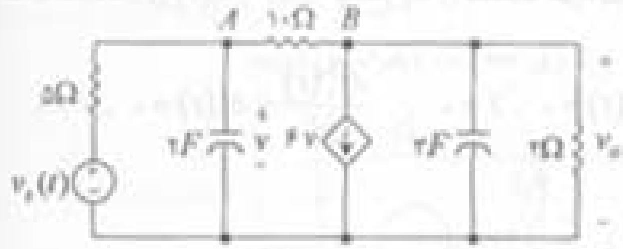
$$\rightarrow i(t)=e^{-\frac{۱}{۲}t}\left(\frac{۱}{۲}(I_0+V_0-۱)\sin\frac{t}{۲}+\frac{۱}{۲}(I_0-V_0-۱)\cos\frac{t}{۲}\right)+۱ \quad , \quad t>۰$$

مسئله ۱۰

الف- معادله دیفرانسیل v_0 بر حسب v_s را بنویسید.

ب- پاسخ پله و ضربه را تعیین کنید.

پ- فرض کنید متغیر های حالت را ولتاژهای خازنها انتخاب کنیم. معادلات حالت را بنویسید و آن را بصورت ماتریسی در آورید.



شکل مسئله ۱۰

حل : الف ـ با توجه به شکل مسئله داریم

$$KCL \text{ برای گره } Ⓑ \rightarrow \frac{v_0-v}{۱۰}+۶v+۳\frac{dv_0}{dt}+\frac{v_0}{۲}=۰ \rightarrow v=-\frac{۳۰}{۵۹}\frac{dv_0}{dt}-\frac{۶}{۵۹}v_0$$

$$KCL \text{ برای گره } Ⓐ \rightarrow \frac{v-v_s}{۵}+۲\frac{dv}{dt}+\frac{v-v_0}{۱۰}=۰ \rightarrow ۲۰\frac{dv}{dt}+۳v-v_0=۲v_s$$

$$\rightarrow ۲۰\frac{d}{dt}\left(-\frac{۳۰}{۵۹}\frac{dv_0}{dt}-\frac{۶}{۵۹}v_0\right)+۳\left(-\frac{۳۰}{۵۹}\frac{dv_0}{dt}-\frac{۶}{۵۹}v_0\right)-v_0=۲v_s$$

$$\rightarrow ۶۰۰\frac{d^2v_0}{dt^2}+۲۱۰\frac{dv_0}{dt}+۷۷v_0=-۱۱۸v_s$$

ب ـ با جایگذاری $v_s(t)=u(t)=۱ \ , \ t>۰$ و با فرض شرایط اولیه صفر پاسخ پله را محاسبه خواهیم کرد.

$$\rightarrow ۶۰۰\frac{d^2v_0}{dt^2}+۲۱۰\frac{dv_0}{dt}+۷۷v_0=-۱۱۸ \quad , \quad t>۰$$

معادله مشخصه : $۶۰۰s^2+۲۱۰s+۷۷=۰ \rightarrow s=-۰/۱۷۵\pm j۰/۳۱۲$

$$\rightarrow v_0(t)=\underbrace{e^{-۰/۱۷۵t}\left(A\cos ۰/۳۱۲t+B\sin ۰/۳۱۲t\right)}_{\text{پاسخ عمومی}}+\underbrace{C}_{\text{پاسخ خصوصی}}$$

با جایگذاری پاسخ خصوصی C در معادله دیفرانسیل $۷۷C=-۱۱۸$ و یا $C=\frac{-۱۱۸}{۷۷}=-۱/۵۳$ شده و با اعمال شرایط اولیه خواهیم داشت.

$$v_c(۰)=۰ \rightarrow A-۱/۵۳=۰ \rightarrow A=۱/۵۳$$

$$\frac{dv_c(۰)}{dt}=۰ \rightarrow -۰/۱۷۵A+۰/۳۱۲B=۰ \rightarrow B=۰/۸۶$$

$$\rightarrow v_c(t)=s(t)=e^{-۰/۱۷۵t}\left(۱/۵۳\cos ۰/۳۱۲t+۰/۸۶\sin ۰/۳۱۲t\right)-۱/۵۳ \quad , \quad t>۰$$

از آنجا که مدار خطی و تغییر ناپذیر با زمان است لذا با مشتق گیری از پاسخ پله، پاسخ ضربه بدست خواهد آمد.

$$h(t)=\frac{ds(t)}{dt}=۰/۱۷۵e^{-۰/۱۷۵t}\left(۱/۵۳\cos ۰/۳۱۲t+۰/۸۶\sin ۰/۳۱۲t\right)$$

$$+e^{-۰/۱۷۵t}\left(-(۱/۵۳)(۰/۳۱۲)\sin ۰/۳۱۲t+(۰/۸۶)(۰/۳۱۲)\cos ۰/۳۱۲t\right)=-۰/۶۲۸e^{-۰/۱۷۵t}\sin ۰/۳۱۲t$$

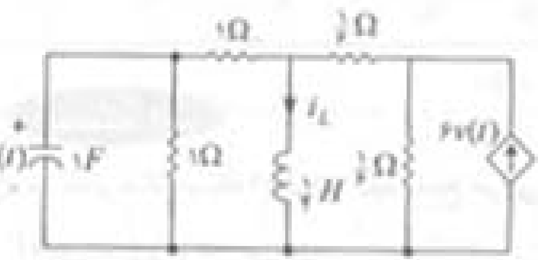
پ – با توجه به معادلات بدست آمده از KCL های قسمت (الف) داریم.

$$v=-\frac{۳۰}{۵۹}\frac{dv_c}{dt}-\frac{۶}{۵۹}v_s \rightarrow \frac{dv_c}{dt}=\frac{۱}{۵}v_c-\frac{۵۹}{۳۰}v \quad , \quad ۲۰\frac{dv}{dt}+۴v-v_c=۲v_s$$

$$\rightarrow \frac{dv}{dt}=\frac{۱}{۲۰}v_c-\frac{۴}{۲۰}v+\frac{۱}{۱۰}v_s \rightarrow \begin{bmatrix}\frac{dv_c}{dt}\\ \frac{dv}{dt}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{۱}{۵} & -\frac{۵۹}{۳۰}\\ \frac{۱}{۲۰} & -\frac{۴}{۲۰}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_c\\ v\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۰\\ \frac{۱}{۱۰}\end{bmatrix}v_s$$

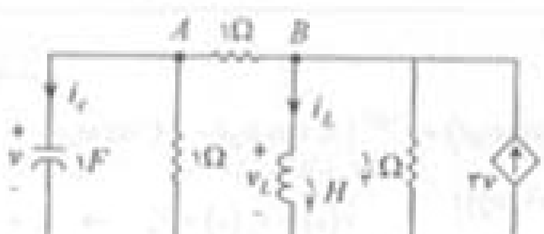
مسئله ۱۱

- معادله دیفرانسیلی بر حسب v بدست آورید.
- پاسخ ورودی صفر v را تعیین کنید.
  ($i_L(۰)=-۸A$ و $v_c(۰)=۱V$)



شکل مسئله ۱۱

حل : با استفاده از تبدیل تونن - نرتن مدار را بصورت زیر ساده می کنیم.



KCL برای گره A:
$$\frac{dv}{dt}+\frac{v}{1}+\frac{v-v_L}{1}=0 \rightarrow v_L=\frac{dv}{dt}+2v$$

KCL برای گره B:
$$\frac{v_L-v}{1}+\frac{1}{\frac{1}{4}}\int v_L dt+\frac{v_L}{\frac{1}{3}}-3v=0 \rightarrow \frac{dv_L}{dt}-\frac{dv}{dt}+4v_L+3\frac{dv_L}{dt}-3\frac{dv}{dt}=0$$

$$\rightarrow 4\frac{dv_L}{dt}+4v_L-4\frac{dv}{dt}=0$$

$$\rightarrow 4\frac{d}{dt}\left(\frac{dv}{dt}+2v\right)+4\left(\frac{dv}{dt}+2v\right)-4\frac{dv}{dt}=0 \rightarrow 4\frac{d^2v}{dt^2}+8\frac{dv}{dt}+8v=0 \rightarrow \frac{d^2v}{dt^2}+2\frac{dv}{dt}+2v=0$$

معادله مشخصه : $s^2+2s+2=0 \rightarrow s=-1\pm j \rightarrow v(t)=e^{-t}\left(A\cos t+B\sin t\right)$

KCL برای گره B در $t=0$:
$$\frac{v_L(0)-v(0)}{1}-i_L(0)+\frac{v_L(0)}{\frac{1}{3}}-3v(0)=0$$

$$\rightarrow v_L(0)-1-8+3v_L(0)-3=0 \rightarrow v_L(0)=3V$$

KCL برای گره A در $t=0$:
$$\frac{dv(0)}{dt}+\frac{v(0)}{1}+\frac{v(0)-v_L(0)}{1}=0 \rightarrow \frac{dv(0)}{dt}+1+\frac{1-3}{1}=0$$

$$\rightarrow \frac{dv(0)}{dt}=1 \quad , \quad \begin{cases} v(0)=1 \rightarrow A=1 \\ \frac{dv(0)}{dt}=1 \rightarrow -A+B=1 \rightarrow B=2 \end{cases}$$

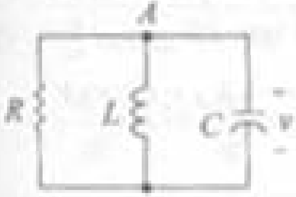
$$\rightarrow v(t)=e^{-t}\left(\cos t+2\sin t\right) \quad , \quad t>0$$

مسئله ۱۲

در مدار شکل مسئله۱۲ فرض کنید پاسخ میرایی ضعیف داریم و بصورت زیر نوشته می شود.

$$v(t)=\left(A_1+A_2\right)e^{-\alpha t}\cos\omega_d t+j\left(A_1+A_2\right)e^{-\alpha t}\sin\omega_d t$$

ثابت کنید A_1 مزدوج مختلط A_2 است. ($i_L(0)=I_0$ و $v_c(0)=V_0$)



شکل مسئله ۱۲

حل : می توان نوشت:

$$v(t)=e^{-\alpha t}\left(A_1\cos\omega_d t+jA_1\sin\omega_d t\right)+e^{-\alpha t}\left(A_2\cos\omega_d t-jA_2\sin\omega_d t\right)$$

$$=A_1e^{-(\alpha-j\omega_d)t}+A_2e^{-(\alpha+j\omega_d)t} \quad , \quad v(0)=v_c(0)=V_0 \rightarrow A_1+A_2=V_0$$

A) KCL برای گره ۰ $\rightarrow C\dfrac{dv}{dt}+i_L+\dfrac{v}{R}=0 \rightarrow \dfrac{dv}{dt}=-\dfrac{i_L}{C}-\dfrac{v}{RC} \rightarrow \dfrac{dv(0)}{dt}=-\left(\dfrac{I_0}{C}+\dfrac{V_0}{RC}\right)$

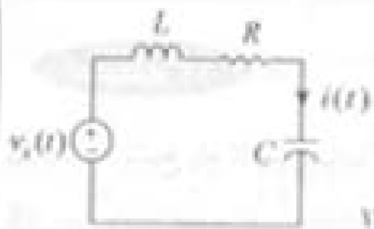
$$\rightarrow (\alpha-j\omega_d)A_1+(\alpha+j\omega_d)A_2=\frac{I_0}{C}+\frac{V_0}{RC}$$

$$\rightarrow (\alpha-j\omega_d)A_1+(\alpha+j\omega_d)(V_0-A_1)=\frac{I_0}{C}+\frac{V_0}{RC} \rightarrow A_1=\frac{V_0}{2}+j\frac{1}{2\omega_d}\left(\frac{I_0}{C}+\frac{V_0}{RC}-\alpha V_0\right)$$

$$\rightarrow A_2=V_0-A_1=\frac{V_0}{2}-j\frac{1}{2\omega_d}\left(\frac{I_0}{C}+\frac{V_0}{RC}-\alpha V_0\right)$$

بنابراین A_1 و A_2 مزدوج مختلط هم می باشند.

مسئله ۱۳



شکل مسئله ۱۳

$(i(t)=e^{-2t}+e^{-t}\cos 2t$ و $e_s(t)=-2e^{-2t}u(t)).R,L,C=?$

شرایط اولیه $i_L(0^-)$ و $v_c(0^-)$ را تعیین کنید.

حل : با توجه به شکل مسئله داریم:

$$-e_s+L\frac{di}{dt}+Ri+\frac{1}{c}\int idt=0 \rightarrow -\frac{de_s}{dt}+L\frac{d^2i}{dt^2}+R\frac{di}{dt}+\frac{1}{c}i=0$$

$$\rightarrow L\frac{d^2i}{dt^2}+R\frac{di}{dt}+\frac{1}{c}i=\frac{de_s}{dt} \rightarrow L\frac{d^2i}{dt^2}+R\frac{di}{dt}+\frac{1}{c}i=4e^{-2t} \;,\; t>0$$

معادله مشخصه : $Ls^2+Rs+\dfrac{1}{c}=0 \rightarrow s=\dfrac{-R\pm j\sqrt{4\frac{L}{C}-R^2}}{2L}=-\dfrac{R}{2L}\pm j\sqrt{\dfrac{1}{LC}-\dfrac{R^2}{4L^2}}$

$$\rightarrow i(t)=e^{-\frac{R}{2L}t}\left(A\cos\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}\,t+B\sin\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}\right)+Ke^{-2t}$$

$$\rightarrow -\frac{R}{2L}=-1 \rightarrow R=2L \;,\; \sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}=2 \rightarrow 4L-R^2C-16L^2C=0$$

با توجه به پاسخ خصوصی $K=1$ بوده و با جایگذاری پاسخ خصوصی در معادله دیفرانسیل داریم:

$$4Le^{-2t}-2Re^{-2t}+\frac{1}{c}e^{-2t}=4e^{-2t} \rightarrow 4L-2R+\frac{1}{c}=4 \;,\; \begin{cases} R=2L \\ 4L-2R+\dfrac{1}{c}=4 \end{cases} \rightarrow C=\frac{1}{4-4L}$$

$$4L - R^2C - 16LC = 0 \rightarrow 4L - \frac{4L^2}{9-3L} - \frac{16L^2}{9-3L} = 0 \rightarrow 20L = 36 - 12L \rightarrow L = \frac{9}{8}H$$

$$\rightarrow R = 2L = \frac{9}{4}\Omega \quad , \quad C = \frac{1}{9-3L} = \frac{1}{9-\frac{27}{8}} = \frac{8}{45}F$$

ازآنجا که جریان و یا ولتاژ بی نهایتی به المانهای مدار اعمال نمی شود لذا $i_L(0^-) = i_L(0^+)$, $v_c(0^-) = v_c(0^+)$ می باشد.

$$\rightarrow i(t) = e^{-2t} + e^{-t}\cos 2t \quad , \quad t > 0 \quad \rightarrow \quad i_L(0^-) = i_L(0^+) = e^{-2t} + e^{-t}\cos 2t\Big|_{t=0} = 2A$$

$$\frac{di(t)}{dt} = -2e^{-2t} - e^{-t}\cos 2t + 2e^{-t}\sin 2t \quad \rightarrow \quad \frac{di(0^+)}{dt} = -4$$

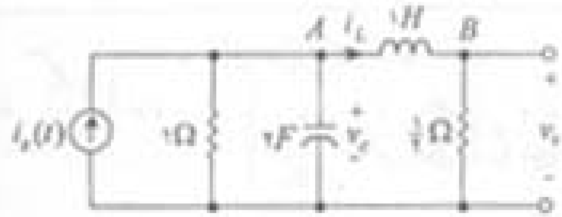
$$v_c(0^-) = v_c(0^+) = \frac{8}{45}\frac{di(0^+)}{dt} = -\frac{32}{45}V$$

مسئله ۱۴

الف- پاسخ پله v_o را حساب کنید.

ب- پاسخ ضربه v_o را حساب کنید.

$$(v_c(0) = 1\,V \ , \ i_L(0) = 1\,A)$$



شکل مسئله ۱٤

حل : الف ـ با توجه به شکل مدار داریم

$$KCL \text{ برای گره } (B) \rightarrow \int(v_o - v_c)dt + \frac{v_o}{\frac{1}{2}} = 0 \rightarrow \int(v_c - v_o)dt = 2v_o \rightarrow v_c = 2\frac{dv_o}{dt} + v_o$$

$$KCL \text{ برای گره } (A) \rightarrow -i_s + \frac{v_c}{1} + 2\frac{dv_c}{dt} + \int(v_c - v_o)dt = 0$$

$$\rightarrow -i_s + 2\frac{dv_o}{dt} + v_o + 2\frac{d\left(2\frac{dv_o}{dt} + v_o\right)}{dt} + 2v_o = 0 \rightarrow 4\frac{d^2v_o}{dt^2} + 4\frac{dv_o}{dt} + 3v_o = i_s$$

$$i_s(t) = u(t) = 1 \ , \ t > 0 \rightarrow 4\frac{d^2v_o}{dt^2} + 4\frac{dv_o}{dt} + 3v_o = 1 \ , \ t > 0$$

معادله مشخصه : $4s^2 + 4s + 3 = 0 \rightarrow s = -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\rightarrow \quad v_c(t) = \underbrace{e^{-\frac{t}{2}}\left(A\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + B\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)}_{\text{پاسخ عمومی}} + \underbrace{C}_{\text{پاسخ خصوصی}}$$

با جایگذاری پاسخ خصوصی C در معادله دیفرانسیل $3C = 1$ و یا $C = \frac{1}{3}$ شده و با اعمال شرایط اولیه داریم.

$$v_c(0) = \frac{1}{2}i_L(0) = \frac{1}{2}V \;\rightarrow\; A + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \;\rightarrow\; A = \frac{1}{6}$$

$$\frac{dv_c(0)}{dt} = \frac{1}{2}\frac{di_L(0)}{dt} = \frac{1}{2}v_L(0) = \frac{1}{2}\left(v_s(0) - v_c(0)\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \rightarrow -\frac{A}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}B = \frac{1}{4} \rightarrow B = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\rightarrow \quad v_c(t) = s(t) = e^{-\frac{t}{2}}\left(\frac{1}{6}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{\sqrt{3}}{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \frac{1}{3} \;,\; t > 0$$

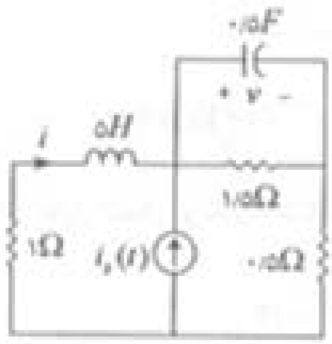
ب ـ با توجه به خطی وتغییرناپذیر با زمان بودن مداراز پاسخ پله مشتق گرفته و پاسخ ضربه را بدست می آوریم.

$$h(t) = \frac{ds(t)}{dt} = -\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}\left(\frac{1}{6}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{\sqrt{3}}{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + e^{-\frac{t}{2}}\left(-\frac{\sqrt{3}}{12}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{1}{2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

$$= \frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t - \sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

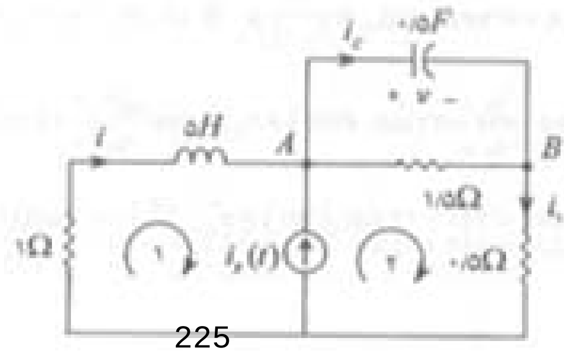
مسئله ۱۵

$i_s(t) = \left(1 + 2e^{-2t}\right)u(t)$ ، $v(t), i(t) = ?$ (شرایط اولیه صفراند)



شکل مسئله ۱۵

حل : با توجه به شکل زیر و با استفاده از نمایش اپراتوری معادلات دیفرانسیل داریم.



KCL برای گره B $\;\to\; -۰/۵\frac{dv}{dt} - \frac{v}{۱/۵} + i_s = ۰ \;\to\; i_s = ۰/۵\frac{dv}{dt} + \frac{v}{۱/۵}$

KVL برای حلقه شامل مش‌های ۱ و ۲ $\;\to\; i + ۵\frac{di}{dt} + v + ۰/۵\left(۰/۵\frac{dv}{dt} + \frac{v}{۱/۵}\right) = ۰$

$$\to\; i + ۵Di + v + ۰/۲۵Dv + \frac{۲}{۳}v = ۰ \;\to\; i = -\frac{۳D+۲۰}{۶۰D+۱۲}v$$

KCL برای گره A $\;\to\; -i_s - i + ۰/۵\frac{dv}{dt} + \frac{v}{۱/۵} = ۰ \;\to\; -i_s + \frac{۳D+۲۰}{۶۰D+۱۲}v + ۰/۵Dv + \frac{v}{۱/۵} = ۰$

$$\to\; \left(\frac{۳D+۲۰}{۶۰D+۱۲} + \frac{۱}{۲}D + \frac{۲}{۳}\right)v = i_s \;\to\; \left(۳۰D^۲ + ۴۹D + ۲۴\right)v = (۶۰D+۱۲)i_s$$

$$\to\; ۳۰\frac{d^۲v}{dt^۲} + ۴۹\frac{dv}{dt} + ۲۴v = ۶۰\frac{di_s}{dt} + ۱۲i_s = ۱۰۸ - ۳۲۴e^{-۲t}$$

معادله مشخصه: $۳۰s^۲ + ۴۹s + ۲۴ = ۰ \;\to\; s = -۰/۸۲ \pm j۰/۳۶$

$$\to\; v(t) = \underbrace{e^{-۰/۸۲t}\left(A\cos ۰/۳۶t + B\sin ۰/۳۶t\right)}_{\text{پاسخ عمومی}} + \underbrace{K_۱ + K_۲e^{-۲t}}_{\text{پاسخ خصوصی}}$$

با جایگذاری پاسخ خصوصی در معادله دیفرانسیل خواهیم داشت.

$$۱۲۰K_۲e^{-۲t} - ۹۸K_۲e^{-۲t} + ۲۴K_۲e^{-۲t} + ۲۴K_۱ = ۱۰۸ - ۳۲۴e^{-۲t}$$

$$\to\; ۱۲۰K_۲ - ۹۸K_۲ + ۲۴K_۲ = -۳۲۴ \;\to\; K_۲ = -۷ \;,\; ۲۴K_۱ = ۱۰۸ \;\to\; K_۱ = ۴/۵$$

در $t = ۰^+$ خازن اتصال کوتاه و سلف مدار باز خواهد بود بنابراین داریم.

$$v(۰^+) = ۰ \;,\; i_L(۰) = i_s(۰) = ۱۲ \;\to\; ۰/۵\frac{dv(۰)}{dt} = ۱۲ \;\to\; \frac{dv(۰)}{dt} = ۲۴$$

$$v(۰^+) = ۰ \;\to\; A + ۴/۵ - ۷ = ۰ \;\to\; A = ۲/۵$$

$$\frac{dv(۰)}{dt} = ۲۴ \;\to\; -۰/۸۲A + ۰/۳۶B - ۲K_۲ = ۰ \;\to\; B = -۳۳$$

$$\to\; v(t) = e^{-۰/۸۲t}\left(۲/۵\cos ۰/۳۶t - ۳۳\sin ۰/۳۶t\right) + ۴/۵ - ۷e^{-۲t} \;,\quad i = ۰/۵\frac{dv}{dt} + \frac{v}{۱/۵} - i_s$$

$$= ۰/۵\Big[-۰/۸۲e^{-۰/۸۲t}\left(۲/۵\cos ۰/۳۶t - ۳۳\sin ۰/۳۶t\right) + e^{-۰/۸۲t}\left(-۰/۹\sin ۰/۳۶t - ۱۱/۸۸\cos ۰/۳۶t\right)$$

$$+۱۴e^{-۲t}\Big] + \frac{۹}{۱/۵}\Big[e^{-۰/۸۲t}\left(۲/۵\cos ۰/۳۶t - ۴۴\sin ۰/۳۶t\right) + ۴/۵ - ۷e^{-۲t}\Big] - ۹ - ۳e^{-۲t}$$

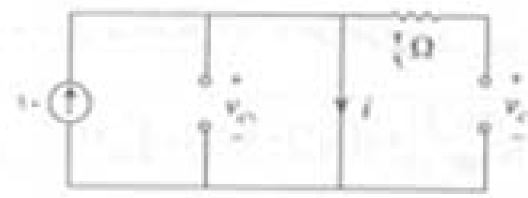
$$\rightarrow\ i(t) = e^{-۰/۸۲t}\left(-۱۶/۲۲\cos ۰/۳۶t - ۲/۱۷\sin ۰/۳۶t\right) - ۶ - ۶/۳e^{-۲t}$$

مسئله ۱۶

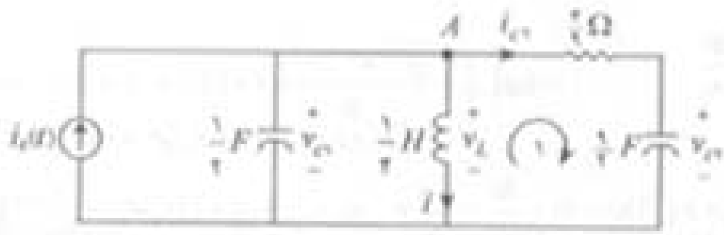
$i = ?$

شکل مسئله ۱۶

حل : به ازای $t < ۰$ ، $۱۰+۲u(t) = ۱۰$ بوده و در $t = ۰^-$ مدار به حالت دایمی خود می رسد. لذا خازن مدار باز و سلف اتصال کوتاه خواهد بود.



بنابراین $i(۰^-) = ۱۰A$ و $\frac{di(۰^-)}{dt} = ۰$ خواهد بود. مدار را مجدداً بصورت زیر رسم می کنیم.



با استفاده از نمایش اپراتوری معادلات دیفرانسیل داریم.

$$\text{برای مش ۱ } KVL \rightarrow -\frac{۱}{۲}\frac{di}{dt} + \frac{۴}{۹}i_{c۲} + \frac{۱}{\frac{۹}{۴}}\int i_{c۲}dt = ۰ \rightarrow -\frac{۱}{۲}\frac{d^۲i}{dt^۲} + \frac{۴}{۹}\frac{di_{c۲}}{dt} + \frac{۴}{۹}i_{c۲} = ۰$$

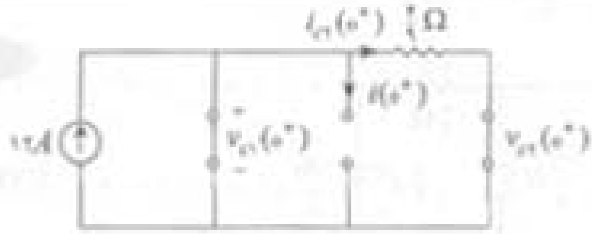
$$\rightarrow -\frac{۱}{۲}D^۲i + \frac{۴}{۹}Di_{c۲} + \frac{۴}{۹}i_{c۲} = ۰ \rightarrow i_{c۲} = \frac{۹}{۸}\frac{D^۲}{۲D+۱}i \quad , \quad v_{c۱} = v_L = \frac{۱}{۲}\frac{di}{dt}$$

$$\text{برای گره A } KCL \rightarrow -i_s + \frac{۱}{۲}\frac{dv_{c۱}}{dt} + i + i_{c۲} = ۰ \rightarrow -i_s + \frac{۱}{۸}\frac{d^۲i}{dt^۲} + i + i_{c۲} = ۰$$

$$\rightarrow -i_s + \frac{۱}{۸}D^۲i + i + \frac{۹}{۸}\frac{D^۲}{۲D+۱}i = ۰ \rightarrow \left(D^۳ + ۵D^۲ + ۸D + ۴\right)i = \left(۸D + ۴\right)i_s$$

$$i_s(t)=10+2u(t) \rightarrow \frac{d^3 i}{dt^3}+5\frac{d^2 i}{dt^2}+8\frac{di}{dt}+4i=16\delta(t)+8u(t)+40$$

در $t=0^+$ ، $i_s(t)=12$ و سلف مدار باز و خازنها اتصال کوتاه می باشند.



$$i(0^+)=i(0^-)=10A \rightarrow i_{C1}(0^+)=2A \rightarrow v_L(0^+)=\frac{4}{9}i_{C1}(0^+)+v_{C2}(0^+)=\frac{4}{9}(2)=\frac{8}{9}$$

$$v_L(0^+)=\frac{1}{4}\frac{di(0^+)}{dt} \rightarrow \frac{di(0^+)}{dt}=4v_L(0^+)=\frac{32}{9}$$

با انتگرال گیری از معادله دیفرانسیل در فاصله 0^- تا 0^+ خواهیم داشت.

$$\frac{d^2 i(0^+)}{dt^2}-\frac{d^2 i(0^-)}{dt^2}+5\left(\frac{di(0^+)}{dt}-\frac{di(0^-)}{dt}\right)+8\left(i(0^+)-i(0^-)\right)+\int_{0^-}^{0^+}4i$$

$$=16\int_{0^-}^{0^+}\delta(t)+\int_{0^-}^{0^+}\left(8u(t)+40\right)dt \rightarrow \frac{d^2 i(0^+)}{dt^2}-0+5\left(\frac{39}{9}-0\right)+8\left(10-10\right)+0=16+0$$

$$\rightarrow \frac{d^2 i(0^+)}{dt^2}=-\frac{51}{9}$$

بنابر این معادله دیفرانسیل فوق را می توان بصورت زیر نوشت.

$$\frac{d^3 i}{dt^3}+5\frac{d^2 i}{dt^2}+8\frac{di}{dt}+4i=48\ ,\quad i(0^+)=10\ ,\quad \frac{di(0^+)}{dt}=\frac{32}{9}\ ,\quad \frac{d^2 i(0^+)}{dt^2}=-\frac{51}{9}\ ,\quad t>0$$

معادله مشخصه : $s^3+5s^2+8s+4=0 \rightarrow (s+1)(s+2)^2=0 \rightarrow s=-1,-2$

$$\rightarrow i(t)=\underbrace{K_1e^{-t}+\left(K_2+K_3t\right)e^{-2t}}_{\text{پاسخ عمومی}}+\underbrace{K_4}_{\text{پاسخ خصوصی}}\ ,\ t>0$$

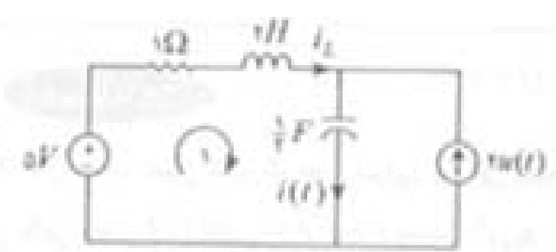
با جایگذاری پاسخ خصوصی در معادله دیفرانسیل $4K_4=48$ و یا $K_4=12$ شده وبا اعمال شرایط اولیه خواهیم داشت.

$$\begin{cases} i(0^+)=۱۰ \rightarrow K_۱+K_۲+۱۲=۱۰ \rightarrow K_۱+K_۲=-۲ \\ \dfrac{di(0^+)}{dt}=\dfrac{۳۲}{۹} \rightarrow -۹K_۱-۸K_۲+۹K_۳=۳۲ \\ \dfrac{d^۲i(0^+)}{dt^۲}=-\dfrac{۵۱}{۹} \rightarrow ۹K_۱+۳۶K_۲-۳۶K_۳=-۵۱ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} K_۱=\dfrac{۷۱}{۹} \\ K_۲=-\dfrac{۸۹}{۹} \\ K_۳=-\dfrac{۷۵}{۹} \end{cases}$$

$$\rightarrow i(t)=\frac{۷۱}{۹}e^{-t}+\left(-\frac{۸۹}{۹}-\frac{۷۵}{۹}t\right)e^{-۴t}+۱۲ \quad , \quad t>0$$

مسئله ۱۷

$i(t)=?$



شکل مسئله ۱۲

حل: به ازای $t<0$ ، $u(t)=0$ بوده ودر $t=0^-$ مدار به حالت دایمی خود رسیده بنابراین خازن مدار باز و سلف اتصال کوتاه خواهد بود. بنابراین $i(0^-)=0$ و $\frac{di(0^-)}{dt}=0$ می باشد. با توجه به شکل مسئله داریم:

$i_L=i-۲u(t)$

$$\text{KVL برای مش ۱} \rightarrow -۵+i-۲u(t)+۲\frac{d\left(i-۲u(t)\right)}{dt}+\frac{۱}{\frac{۱}{۲}}\int i\,dt=0$$

$$\rightarrow \frac{di}{dt}-۲\delta(t)+۲\frac{d^۲i}{dt^۲}-۴\delta'(t)+۲i=0 \rightarrow ۲\frac{d^۲i}{dt^۲}+\frac{di}{dt}+۲i=۲\delta(t)+۴\delta'(t)$$

در $t=0^+$ ، $u(t)=۱$ و خازن اتصال کوتاه می باشد بنابراین $i(0^+)=۲A$ بوده و همچنین با انتگرال گیری از 0^- تا 0^+ خواهیم داشت.

$$۲\frac{di(0^+)}{dt}-۲\frac{di(0^-)}{dt}+i(0^+)-i(0^-)+\int_{0^-}^{0^+} i\,dt=۲\int_{0^-}^{0^+}\delta(t)dt+۴\int_{0^-}^{0^+}\delta'(t)dt$$

$$\rightarrow ۲\frac{di(0^+)}{dt}-0+0+0=۲+0 \rightarrow \frac{di(0^+)}{dt}=۱$$

بنابراین معادله دیفرانسیل بدست آمده را می توان بصورت زیر نوشت

$$۲\frac{d^۲i}{dt^۲}+\frac{di}{dt}+۲i=0 \quad , \quad i(0^+)=0 \quad , \quad \frac{di(0^+)}{dt}=۱ \quad , \quad t>0$$

معادله مشخصه : $2s^2+s+2=0 \;\rightarrow\; s=-\frac{1}{4}\pm j\frac{\sqrt{15}}{4}$

$$\rightarrow\; i(t)=e^{-\frac{1}{4}t}\left(A\cos\frac{\sqrt{15}}{4}t+B\sin\frac{\sqrt{15}}{4}t\right) \;\rightarrow\; i(0^+)=2 \;\rightarrow\; A=2$$

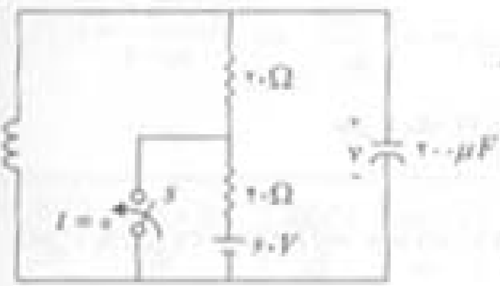
$$\frac{di(0^+)}{dt}=1 \;\rightarrow\; -\frac{1}{4}A+\frac{\sqrt{15}}{4}B=1 \;\rightarrow\; B=2\frac{\sqrt{15}}{3}$$

$$\rightarrow\; i(t)=e^{-\frac{1}{4}t}\left(2\cos\frac{\sqrt{15}}{4}t+2\frac{\sqrt{15}}{3}\sin\frac{\sqrt{15}}{4}t\right)\;,\; t>0$$

مسئله ۱۸

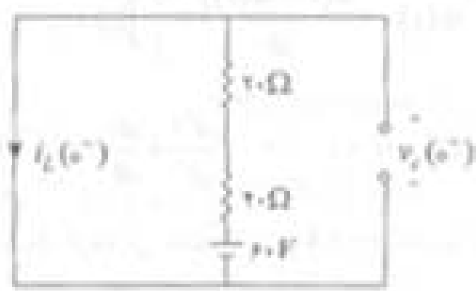
L را چنان تعیین کنید که مدار میرایی بحرانی باشد.

با این مقدار L، $v(t)$ را برای $t\geq 0$ بدست آورید.



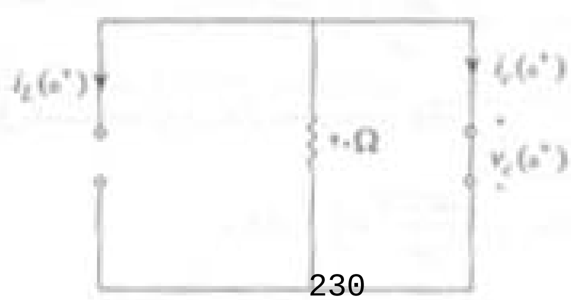
شکل مسئله ۱۸

حل : به ازای $t<0$ کلید باز بوده و در $t=0^-$ مدار به حالت دایمی خود می رسد. بنابراین سلف اتصال کوتاه و خازن مدار باز خواهد بود.



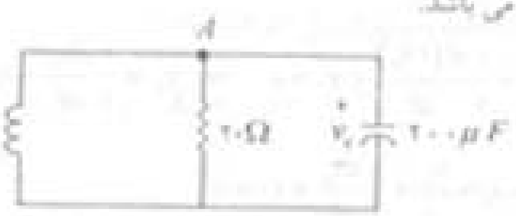
$$\rightarrow\; i_L(0^-)=\frac{40}{20+20}=1A \;,\; v_c(0^-)=0$$

در $t=0^+$ کلید بسته شده و خازن مدار باز و سلف اتصال کوتاه خواهد شد.



$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = 1A \rightarrow i_C(0^+) = -1A \rightarrow 200\times10^{-6}\,\frac{dv_c(0^+)}{dt} = -1 \rightarrow \frac{dv_c(0^+)}{dt} = -5000$$

برای $t \geq 0$ مدار بصورت زیر می باشد.



برای گره A ، KCL $\rightarrow \frac{1}{L}\int v_c\,dt + \frac{v_c}{20} + 200\times10^{-6}\frac{dv_c}{dt} = 0$

$$\rightarrow \frac{d^2v_c}{dt^2} + 250\frac{dv_c}{dt} + \frac{5000}{L}v_c = 0 \quad , \quad 2\alpha = 250 \rightarrow \alpha = 125 \; , \; \omega_0^2 = \frac{5000}{L} \rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{5000}{L}}$$

در حالت میرایی بحرانی $\alpha = \omega_0$ می باشد بنابراین داریم.

$$125 = \sqrt{\frac{5000}{L}} \rightarrow L = 0.32H$$

در ادامه به ازای L بدست آمده ولتاژ دو سر خازن را محاسبه خواهیم کرد.

$$\frac{d^2v_c}{dt^2} + 250\frac{dv_c}{dt} + 15625v_c = 0 \quad , \quad v_c(0^+) = 0 \quad , \quad \frac{dv_c(0^+)}{dt} = -5000$$

معادله مشخصه : $s^2 + 250s + 15625 = 0 \rightarrow (s+125)^2 = 0 \rightarrow s = -125$ (ریشه مضاعف)

$$\rightarrow v_c(t) = (K_1 + K_2t)e^{-125t} \quad , \quad v_c(0^+) = 0 \rightarrow K_1 = 0 \; , \; \frac{dv_c(0^+)}{dt} = -5000$$

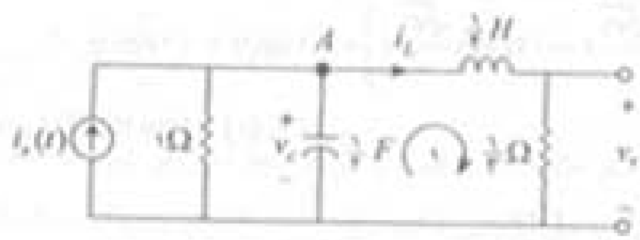
$$-125K_1 + K_2 = -5000 \rightarrow K_2 = -5000 \rightarrow v_c(t) = -5000te^{-125t} \; , \; t \geq 0$$

مسئله ۱۹

پاسخ v_o را محاسبه کنید. (حالت اولیه صفر است.)

الف- $i_s(t) = (\cos 2t)u(t)$ ب- $i_s(t) = (\sin 2t)u(t)$ پ- $i_s(t) = \delta(t)$

ت- چه رابطه ای بین پاسخهای قسمتهای الف، ب و پ وجود دارد.



شکل مسئله ۱۹

حل : با توجه به شکل مسئله داریم:

$$i_L = \frac{v_1}{\frac{1}{2}} = 2v_1$$

$$\text{برای مش ۱ } KVL \rightarrow -v_c + \frac{1}{2}\frac{d(2v_1)}{dt} + v_1 = 0 \rightarrow v_c = \frac{3}{4}\frac{dv_1}{dt} + v_1$$

$$\text{برای گره } \textcircled{A} \ KCL \rightarrow -i_s + \frac{v_c}{1} + \frac{1}{2}\frac{dv_c}{dt} + i_L = 0$$

$$\rightarrow -i_s + \frac{3}{4}\frac{dv_1}{dt} + v_1 + \frac{1}{2}\frac{d\left(\frac{3}{4}\frac{dv_1}{dt} + v_1\right)}{dt} + 2v_1 = 0 \rightarrow 3\frac{d^2v_1}{dt^2} + 10\frac{dv_1}{dt} + 24v_1 = 8i_s(t)$$

الف ـ به ازای ورودی $i_s(t) = (\cos 2t)u(t)$ داریم:

$$3\frac{d^2v_1}{dt^2} + 10\frac{dv_1}{dt} + 24V_1 = 8\cos 2t \quad , \quad t > 0$$

$$\text{معادله مشخصه}: 3s^2 + 10s + 24 = 0 \rightarrow s = -\frac{5}{3} \pm j\frac{\sqrt{47}}{3}$$

$$\rightarrow v_1(t) = \underbrace{e^{-\frac{5}{3}t}\left(A\cos\frac{\sqrt{47}}{3}t + B\sin\frac{\sqrt{47}}{3}t\right)}_{\text{پاسخ عمومی}} + \underbrace{K_1\sin 2t + K_2\cos 2t}_{\text{پاسخ خصوصی}}$$

با جایگذاری پاسخ خصوصی در معادله دیفرانسیل داریم:

$$(20K_1 - 20K_2)\sin 2t + (20K_1 + 20K_2)\cos 2t = 8\cos 2t \rightarrow \begin{cases} 20K_1 - 20K_2 = 0 \\ 20K_1 + 20K_2 = 8 \end{cases} \rightarrow K_1 = K_2 = 0.2$$

و با اعمال شرایط اول خواهیم داشت:

$$v_1(0) = 0 \rightarrow A + K_2 = 0 \rightarrow A = -K_2 = -0.2$$

$$\frac{dv_1(0)}{dt} = 0 \rightarrow -\frac{5}{3}A + \frac{\sqrt{47}}{3}B + 2K_1 = 0 \rightarrow B = -0.24$$

$$\rightarrow v_1(t) = e^{-\frac{5}{3}t}\left(-0.2\cos\frac{\sqrt{47}}{3}t - 0.24\sin\frac{\sqrt{47}}{3}t\right) + 0.2\sin 2t + 0.2\cos 2t$$

ب ـ به ازای ورودی $i_s(t) = (\sin 2t)u(t)$ داریم:

$$3\frac{d^2v_1}{dt^2} + 10\frac{dv_1}{dt} + 24v_1 = 8\sin 2t \quad , \quad t > 0$$

$$\rightarrow\ v_c(t)=e^{-\frac{5t}{2}}\left(A\cos\frac{\sqrt{71}}{2}t+B\sin\frac{\sqrt{71}}{2}t\right)+K_1\sin 4t+K_2\cos 4t$$

با جایگذاری پاسخ خصوصی در معادله دیفرانسیل خواهیم داشت.

$$\begin{cases}20K_1-20K_2=8\\20K_1+20K_2=0\end{cases}\ \rightarrow\ K_1=0/2\ ,\ K_2=-0/2$$

و با اعمال شرایط اول خواهیم داشت.

$$v_c(0)=0\ \rightarrow\ A+K_2=0\ \rightarrow\ A=-K_2=0/2$$

$$\frac{dv_c(0)}{dt}=0\ \rightarrow\ -\frac{5}{2}A+\frac{\sqrt{71}}{2}B+4K_1=0\ \rightarrow\ B=-0/024$$

$$\rightarrow\ v_c(t)=e^{-\frac{5t}{2}}\left(0/2\cos\frac{\sqrt{71}}{2}t+-0/024\sin\frac{\sqrt{71}}{2}t\right)+0/2\sin 4t-0/2\cos 4t$$

پ ـ به ازای ورودی $i_s(t)=\delta(t)$ داریم.

$$2\frac{d^2v_c}{dt^2}+10\frac{dv_c}{dt}+24v_c=\delta(t)$$

با انتگرال گیری از طرفین معادله بالا در فاصله 0^- تا 0^+ خواهیم داشت.

$$2\frac{d^2v_c(0^+)}{dt}-2\frac{d_c(0^-)}{dt}+10\left(v_c(0^+)-v_c(0^-)\right)+\int_{0^-}^{0^+}24V_c dt=\int_{0^-}^{0^+}\delta(t)$$

$$2\frac{dv_c(0^+)}{dt}-0+0+0=1\ \rightarrow\ \frac{d_c(0^+)}{dt}=\frac{1}{2}$$

بنابراین معادله دیفرانسیل فوق را می توان بصورت زیر نوشت.

$$2\frac{d^2v_c}{dt^2}+10\frac{dv_c}{dt}+24v_c=0\ \ ,\ v_c(0^+)=0\ \ ,\ \frac{dv_c(0^+)}{dt}=\frac{1}{2}$$

$$v_c(t)=e^{-\frac{5}{2}}\left(A\cos\frac{\sqrt{71}}{2}t+B\sin\frac{\sqrt{71}}{2}t\right)\quad ,\quad v_c(0^+)=0\ \rightarrow\ A=0$$

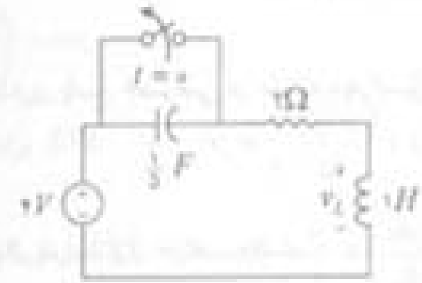
$$\frac{d_c(0^+)}{dt}=\frac{1}{2}\ \rightarrow\ -\frac{5}{2}A+\frac{\sqrt{71}}{2}B=\frac{1}{2}\ \rightarrow\ B=\frac{1}{\sqrt{71}}$$

$$\rightarrow\ v_c(t)=\frac{1}{\sqrt{71}}e^{-\frac{5t}{2}}\sin\frac{\sqrt{71}}{2}t\ \ ,\ t>0$$

ت ـ پاسخ حالت (ب) مشتق پاسخ حالت (الف) است و این از آنجا ناشی می شود که مدار خطی و تغییر ناپذیر با زمان بوده و ورودی حالت (ب) مشتق ورودی حالت (الف) است(برای زمانهای بزرگتر از صفر)

مسئله ۲۰

? = $v_L(t)$ برای $t \ge 0$. (کلید برای مدت طولانی بسته بوده است)

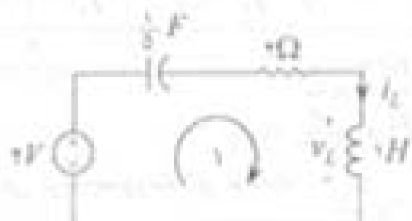


شکل مسئله ۲۰

حل: به ازای $t<0$ کلید بسته بوده و در $t=0^-$ مدار به حالت دایمی می رسد بنابراین سلف اتصال کوتاه خواهد بود.

$$i_L(0^-)=\frac{4}{2}=2A \quad , \quad v_L(0^-)=0 \quad \rightarrow \quad \frac{di_L(0^-)}{dt}=0$$

به ازای $t \ge 0$ کلید باز خواهد شد و مدار بصورت زیر می شود.



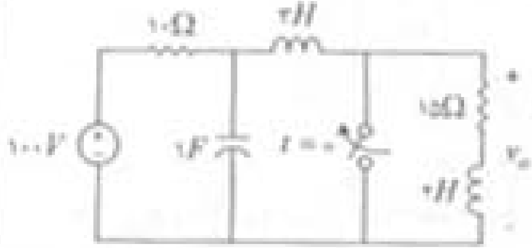
KVL برای مش ۱ $\rightarrow \quad -4+\frac{1}{\frac{1}{5}}\int i_L dt+2i_L+\frac{di_L}{dt}=0 \quad \rightarrow \quad \frac{d^2 i_L}{dt^2}+2\frac{di_L}{dt}+5i_L=0$

معادله مشخصه : $s^2+2s+5=0 \quad \rightarrow \quad s=-1\pm j2 \quad \rightarrow \quad i_L(t)=e^{-t}(A\cos 2t+B\sin 2t)$

$$\begin{cases} i_L(0)=2 \quad \rightarrow \quad A=2 \\ \frac{di_L(0)}{dt}=0 \quad \rightarrow \quad -A+2B=0 \quad \rightarrow \quad B=1 \end{cases} \quad \rightarrow \quad i_L(t)=e^{-t}(2\cos 2t+\sin 2t)$$

$$v_L(t)=\frac{di_L(t)}{dt}=-e^{-t}(2\cos 2t+\sin 2t)+e^{-t}(-4\sin 2t+2\cos 2t)=-5e^{-t}\sin 2t \quad , \quad t>0$$

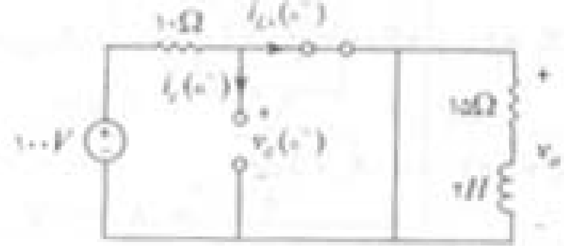
مسئله ۴۱



$v_o(t) = ?$ برای $t \ge 0$. (کلید برای مدت طولانی بسته بوده است)

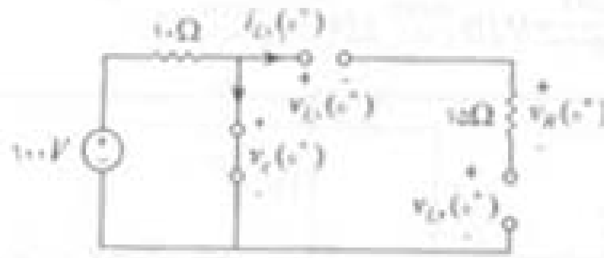
شکل مسئله ۴۱

حل : به ازای $t<0$ کلید به مدت طولانی بسته است پس در $t=0^-$ مدار به حالت دایمی رسیده ، خازن مدار باز و سلف اتصال کوتاه خواهد شد.



$i_{L_1}(0^-) = \frac{100}{10} = 10A$, $v_c(0^-) = 0$

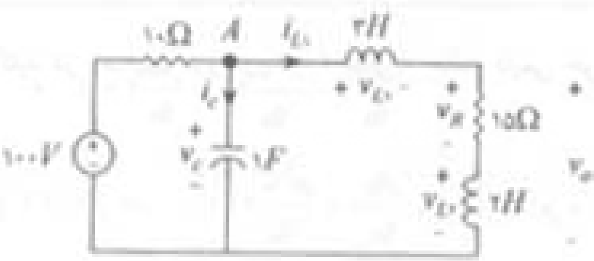
در $t=0^+$ کلید باز شده سلف مدار باز و خازن اتصال کوتاه خواهد بود.



$i_{L_1}(0^+) = i_{L_1}(0^-) = 10A$, $v_c(0^+) = v_c(0^-) = 0$, $-v_c(0^+) + v_{L_1}(0^+) + v_R(0^+) + v_{L_2}(0^+) = 0$

$$\to 0 + 3\frac{di_{L_1}(0^+)}{dt} + 15 i_{L_1}(0^+) + 2\frac{di_{L_1}(0^+)}{dt} = 0 \to \frac{di_{L_1}(0^+)}{dt} = -\frac{15\times 10}{5} = -30$$

به ازای $t>0$ مدار بصورت زیر خواهد بود.



$$v_c = v_{L_1} + v_R + v_{L_2} = 3\frac{di_{L_1}}{dt} + 15i_{L_1} + 2\frac{di_{L_1}}{dt} = 5\frac{di_{L_1}}{dt} + 15i_{L_1}$$

KCL برای گره a $\rightarrow \dfrac{v_c - 100}{10} + \dfrac{dv_c}{dt} + i_{L_1} = 0$

$$\rightarrow \frac{5\frac{di_{L_1}}{dt} + 15i_{L_1} - 100}{10} + \frac{d}{dt}\left(5\frac{di_{L_1}}{dt} + 15i_{L_1}\right) + i_{L_1} = 0 \rightarrow 10\frac{d^2 i_{L_1}}{dt^2} + 31\frac{di_{L_1}}{dt} + 5i_{L_1} = 20$$

معادله مشخصه : $10s^2 + 31s + 5 = 0 \rightarrow s = -2/93, -0/17$

$$\rightarrow i_{L_1}(t) = K_1 e^{-2/93t} + K_2 e^{-0/17t} + K_3$$

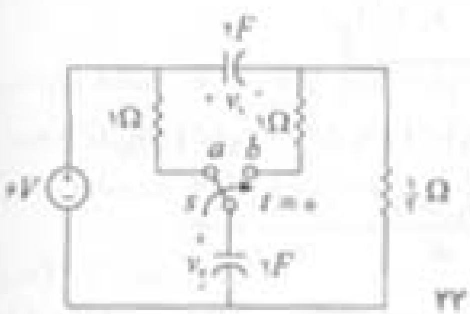
با جایگذاری پاسخ خصوصی K_3 در معادله دیفرانسیل $5K_3 = 20$ و یا $K_3 = 4$ شده و با اعمال شرایط اولیه خواهیم داشت.

$$\begin{cases} i_{L_1}(0^+) = 10 \rightarrow K_1 + K_2 + 4 = 10 \rightarrow K_1 + K_2 = 6 \\ \dfrac{di_{L_1}(0^+)}{dt} \rightarrow -2/93K_1 - 0/17K_2 = -30 \end{cases} \rightarrow K_1 = 10/5 \quad K_2 = -4/5$$

$$\rightarrow i_{L_1}(t) = 10/5e^{-2/93t} - 4/5e^{-0/17t} + 4$$

$$v_R(t) = 15i_{L_1}(t) + 2\frac{di_{L_1}(t)}{dt} = 96/2e^{-2/93t} - 65/97e^{-0/17t} + 60$$

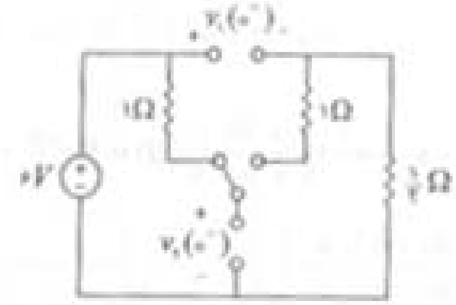
مسئله ۲۲



شکل مسئله ۲۲

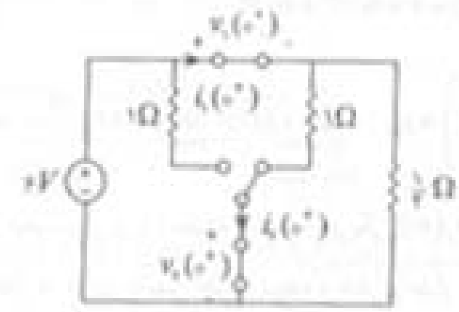
- $v_1(t)$ و $v_2(t)$ را برای $t > 0$ حساب کنید.
- برای $t \rightarrow \infty$ ، $v_1(t)$ و $v_2(t)$ را مشخص کنید.
- آیا می توانید بدون استفاده از معادله دیفرانسیل این مقادیر را تعیین کنید.

حل : به ازای $t < 0$ کلید در وضعیت a و در $t = 0^-$ مدار به حالت دایمی خود می رسد بنابراین خازنها مدار باز خواهند بود.



$v_1(0^-) = v_2(0^-) = 6V$

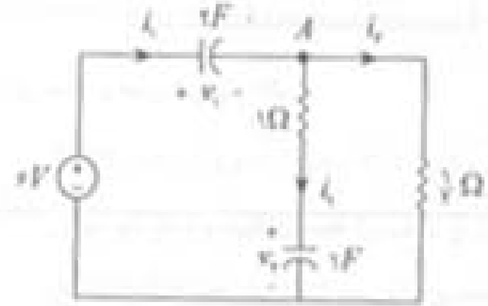
در $t = 0^+$ کلید به وضعیت b رفته و خازنها اتصال کوتاه خواهند شد.



$$v_1(0^+) = v_1(0^-) = 6V \ , \ v_2(0^+) = v_2(0^-) = 6V \ , \ i_1(0^+) = i_2(0^+) = \frac{6 - v_1(0^+) - v_2(0^+)}{1} = -6$$

$$2\frac{dv_1(0^+)}{dt} = i_1(0^+) = -6 \quad \to \quad \frac{dv_1(0^+)}{dt} = -3 \ , \ \frac{dv_2(0^+)}{dt} = i_2(0^+) = -6$$

به ازای $t > 0$ کلید در وضعیت b بوده و مدار بصورت زیر خواهد بود.



$$i_2 = \frac{dv_2}{dt} \ , \ \begin{cases} v_A = i_2 + v_2 = \dfrac{dv_2}{dt} + v_2 \\ v_A = \dfrac{1}{2} i_3 \end{cases} \quad \to \quad i_3 = 2\frac{dv_2}{dt} + 2v_2$$

$$v_1 = 6 - v_A = 6 - \frac{dv_2}{dt} - v_2 \quad \to \quad i_1 = 2\frac{dv_1}{dt} = -2\frac{d^2 v_2}{dt^2} - 2\frac{dv_2}{dt}$$

KCL برای گره A $\to \ -i_1 + i_2 + i_3 = 0 \ \to \ 2\frac{d^2 v_2}{dt^2} + 2\frac{dv_2}{dt} + 2\frac{dv_2}{dt} + 2v_2 + \frac{dv_2}{dt} = 0$

$$\rightarrow\ 2\frac{d^2v_1}{dt^2}+5\frac{dv_1}{dt}+2v_1=0$$

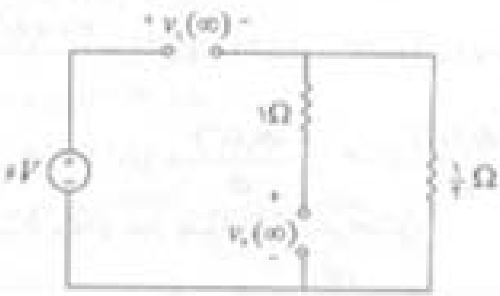
معادله مشخصه : $2s^2+5s+2=0\ \rightarrow\ s=-2,-\frac{1}{2}\ \rightarrow\ v_1(t)=K_1e^{-2t}+K_2e^{-\frac{1}{2}t}$

$$\begin{cases} v_1(0^+)=6\ \rightarrow\ K_1+K_2=6 \\ \frac{dv_1(0^+)}{dt}=-6\ \rightarrow\ -2K_1-\frac{1}{2}K_2=-6 \end{cases}\rightarrow K_1=2\ ,\ K_2=4\ \rightarrow\ v_1(t)=2e^{-2t}+4e^{-\frac{1}{2}t}$$

$$\rightarrow\ v_2(t)=6-\frac{dv_1(t)}{dt}-v_1(t)=6+2e^{-2t}-2e^{-\frac{1}{2}t}$$

$$\lim_{t\to\infty}v_1(t)=\lim_{t\to\infty}\left(2e^{-2t}+4e^{-\frac{1}{2}t}\right)=0\quad,\quad \lim_{t\to\infty}v_2(t)=\lim_{t\to\infty}\left(6+2e^{-2t}-2e^{-\frac{1}{2}t}\right)=6$$

در ادامه بدون استفاده از معادله دیفرانسیل و با استفاده از توجیه فیزیکی $v_1(\infty)$ و $v_2(\infty)$ را بدست خواهیم آورد. می دانیم که به ازای $t\to\infty$، مدار به حالت دایمی خود رسیده و خازنها مدار باز خواهند بود.

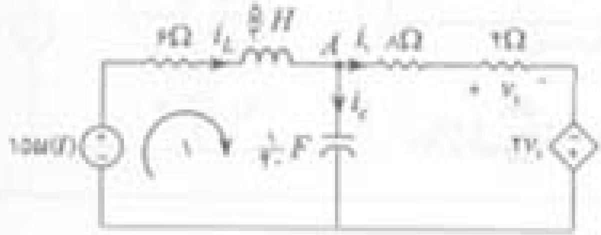


بنابراین جریان تمامی شاخه برابر صفر بوده و خواهیم داشت.

$v_1(\infty)=6V\ ,\ v_2(\infty)=0V$

مسئله ۲۳

$v_1=?$



شکل مسئله ۲۳

حل : به ازای $t<0$ ، $u(t)=0$ بوده و لذا ولتاژ اولیه خازن و جریان اولیه سلف برابر صفر خواهد بود. با توجه به شکل مسئله داریم.

$$i_1=\frac{v_1}{4}\ ,\ v_R=8i_1+v_1-4v_1=8\left(\frac{v_1}{4}\right)+v_1-4v_1=v_1$$

$$i_c=\frac{1}{20}\frac{dv_R}{dt}=\frac{1}{20}\frac{dv_1}{dt}\ ,\ i_L=i_c+i_1=\frac{1}{20}\frac{dv_1}{dt}+\frac{v_1}{4}$$

برای مش ۱ $KVL \rightarrow\ -15u(t)+6\left(\frac{1}{20}\frac{dv_1}{dt}+\frac{v_1}{4}\right)+\frac{5}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{20}\frac{dv_1}{dt}+\frac{v_1}{4}\right)+v_1=0$

$$\rightarrow\ 5\frac{d^2v_1}{dt^2}+68\frac{dv_1}{dt}+300v_1=1800\ ,\ t>0$$

معادله مشخصه : $5s^2+68s+300=0\ \rightarrow\ s=-6.8\pm j3.7$

$$\rightarrow\ v_1(t)=\underbrace{e^{-6.8t}\left(A\cos 3.7t+B\sin 3.7t\right)}_{\text{پاسخ عمومی}}+\underbrace{C}_{\text{پاسخ خصوصی}}$$

با جایگذاری پاسخ خصوصی C در معادله دیفرانسیل $300C=1800$ و یا $C=6$ خواهد شد همچنین با اعمال شرایط اول خواهیم داشت.

$$\begin{cases}v_1(0)=0\ \rightarrow\ A+6=0\ \rightarrow\ A=-6\\ \frac{dv_1(0)}{dt}=0\ \rightarrow\ -6.8A+3.7B=0\ \rightarrow\ B=11.03\end{cases}$$

$$\rightarrow\ v_1(t)=e^{-6.8t}\left(-6\cos 3.7t+11.03\sin 3.7t\right)+6\ ,\ t>0$$

مسئله ۲۴

شکل مسئله ۲۴

الف- $v_c(t)$ و $i_L(t)$ را حساب کنید. ($v_c(0)=1V$ و $i_L(0)=2A$)

ب- انرژی ذخیره شده درخازن و سلف را حساب کنید وشکل موجهای آنها را رسم کنید. نشان دهید مجموع این دو انرژی در هر لحظه مقداری ثابت است و برابر همان انرژی ذخیره شده اولیه در مدار است.

حل : الف ـ با توجه به شکل مسئله داریم:

$$v_L=v_c\ ,\ i_L+i_c=0\ \rightarrow\ \frac{1}{\frac{1}{4}}\int v_L dt+\frac{dv_c}{dt}=0\ \rightarrow\ 4\int v_c dt+\frac{dv_c}{dt}=0\ \rightarrow\ \frac{d^2v_c}{dt^2}+4v_c=0$$

معادله مشخصه : $s^2+4=0\ \rightarrow\ s=\pm j2\ \rightarrow\ v_c(t)=A\sin 2t+B\cos 2t$

$$v_c(0)=1 \rightarrow B=1$$

$$\frac{dv_c(0)}{dt}=i_c(0)=-i_L(0)=-2 \rightarrow 2A=-2 \rightarrow A=-1 \rightarrow v_c(t)=\cos 2t-\sin 2t$$

$$i_L(t)=i_L(0)+\frac{1}{\frac{1}{4}}\int_0^t v_L(t)dt=2+2\int_0^t v_c(t)dt=2+2\int_0^t(\cos 2t-\sin 2t)dt$$

$$=2+(2\sin 2t+2\cos 2t)\Big|_0^t=2\sin 2t+2\cos 2t$$

ب –

$$P_c(t)=v_c(t)i_c(t)=-v_c(t)i_L(t)=-(\cos 2t-\sin 2t)(2\cos 2t+2\sin 2t)$$

$$=-2(\cos^2 2t-\sin^2 2t)=-2\cos 4t$$

$$\rightarrow W_c(t)=\int_0^t p_c(t)dt=\int_0^t -2\cos 4t=-\frac{1}{2}\sin 4t\Big|_0^t=-\frac{1}{2}\sin 4t$$

$$P_L(t)=v_L(t)i_L(t)=v_c(t)i_L(t)=(\cos 2t-\sin 2t)(2\cos 2t+2\sin 2t)$$

$$=2(\cos^2 2t-\sin^2 2t)=2\cos 4t$$

$$\rightarrow W_L(t)=\int_0^t P_L(t)dt=\int_0^t 2\cos 4t dt=\frac{1}{2}\sin 4t\Big|_0^t=\frac{1}{2}\sin 4t$$

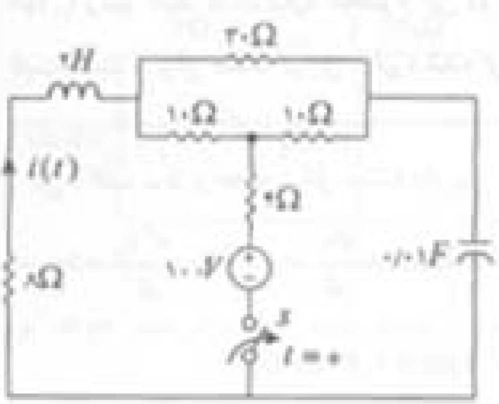
$$\rightarrow W_c(t)+W_L(t)=-\frac{1}{2}\sin 4t+\frac{1}{2}\sin 4t=0$$

و مجموع انرژی اولیه ذخیره شده در مدار با توجه به جهات قراردادی برابر است با:

$$\frac{1}{2}CV_0^2-\frac{1}{2}LI_0^2=\frac{1}{2}(1)(1)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)(2)^2=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$$

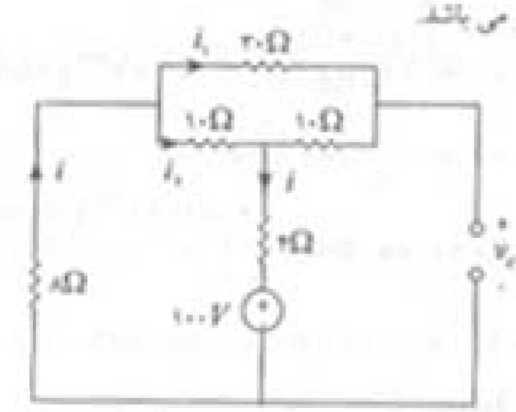
مسئله ۲۵

$i(t)=?$ (کلید S به مدت طولانی بسته بوده و در $t=0$ باز می شود.)



شکل مسئله ۲۵

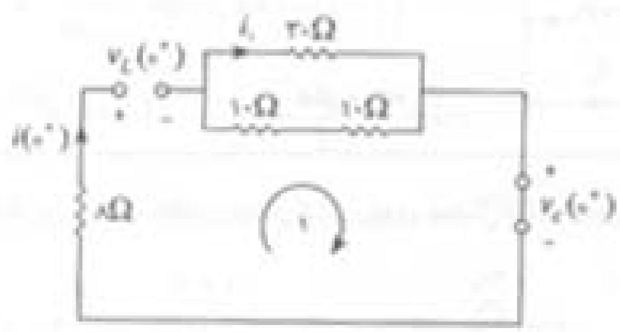
حل : به ازای $t < 0$ کلید S به مدت طولانی بسته بوده و مدار به حالت دایمی خود رسیده است بنابراین سلف اتصال کوتاه و خازن مدار باز می باشد.



$$t<0 \rightarrow i(t) = -\frac{100}{(10+30)\|10+4+8} = -5A$$

$$i(0^-) = -5A \;,\; i_L(0^-) = \frac{10}{10+10+30}(-5) = -1A \;,\; v_c(0^-) = -8i(0)-30i_L(0) = 70V$$

در $t = 0^+$ کلید باز شده، خازن اتصال کوتاه و سلف مدار باز خواهد بود.

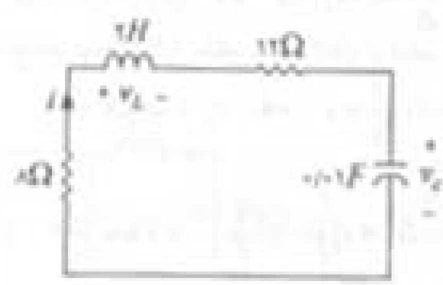


$$i(0^+) = i(0^-) = -5A \;,\; v_c(0^+) = v_c(0^-) = 70V$$

برای مش ۱ $KVL \rightarrow 8i(0^+) + v_L(0^+) + [30\|(10+10)]i(0^+) + v_c(0^+) = 0$

$$\rightarrow 8(-5) + v_L(0^+) + 12(-5) + 70 = 0 \rightarrow v_L(0^+) = 30 \rightarrow 2\frac{di_L(0^+)}{dt} = 30 \rightarrow \frac{di_L(0^+)}{dt} = 15$$

به ازای $t > 0$ کلید باز بوده و مدار بصورت زیر می باشد.



$$8i+2\frac{di}{dt}+12i+\frac{1}{0/01}\int i=0 \;\rightarrow\; \frac{d^2i}{dt^2}+10\frac{di}{dt}+50i=0$$

معادله مشخصه : $s^2+10s+50=0 \;\rightarrow\; s=-5\pm j5 \;\rightarrow\; i(t)=e^{-5t}\left(A\cos 5t+B\sin 5t\right)$

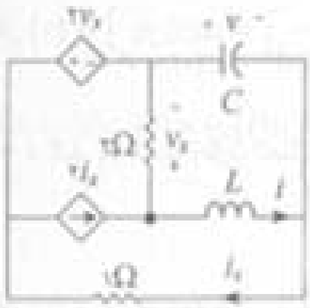
$$\begin{cases} i(0^+)=-5 \;\rightarrow\; A=-5 \\ \dfrac{di(0^+)}{dt}=15 \;\rightarrow\; -5A+5B=15 \;\rightarrow\; B=2 \end{cases} \;\rightarrow\; i(t)=e^{-5t}\left(-5\cos 5t+2\sin 5t\right),\; t>0$$

$$\rightarrow\; i(t)=\begin{cases} -5, & t<0 \\ e^{-5t}\left(-5\cos 5t+2\sin 5t\right), & t\geq 0 \end{cases}$$

مسئله ۲۶

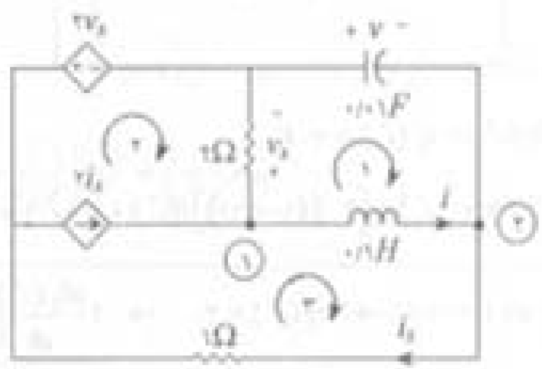
$i(t)=?$ و $v(t)$ برای $t>0$.

($i(0)=0$ و $v(0)=10V$ و $L=100mH$ و $C=10mF$)



شکل مسئله ۲۶

حل : با توجه به شکل زیر و با استفاده از روش اپراتوری در نمایش معادلات دیفرانسیل داریم



KCL برای گره ۲ $\;\rightarrow\; -0/01\frac{dv}{dt}-i+i_x=0 \;\rightarrow\; i_x=0/01Dv+i$

KVL برای مش ۱ $\;\rightarrow\; v_x+v-0/1\frac{di}{dt}=0 \;\rightarrow\; v_x=0/1Di-v$

KCL برای گره ۱ $\;\rightarrow\; -2\left(0/01Dv+i\right)+\frac{0/1Di-v}{2}+i=0 \;\rightarrow\; i=\frac{\left(0/02D+0/5\right)}{\left(0/05D-1\right)}v$

KVL برای حلقه شامل مش های ۱و ۲ و ۳ $\rightarrow ۲(۰/۱Di - v) + v + (۰/۰۱Dv + i) = ۰$

$$\rightarrow ۲\left(۰/۱D\frac{۰/۰۲D + ۰/۵}{۰/۰۵D - ۱}v - v\right) + v + \left(۰/۰۱Dv + \frac{۰/۹D + ۰/۵}{۰/۰۵D - ۱}v\right) = ۰$$

$$\rightarrow ۰/۰۰۴۵D^2v + ۰/۰۶Dv + ۱/۵v = ۰ \rightarrow ۴۵\frac{d^2v}{dt^2} + ۶۰۰\frac{dv}{dt} + ۱۵۰۰۰v = ۰$$

معادله مشخصه : $۴۵s^2 + ۶۰۰s + ۱۵۰۰۰ = ۰ \rightarrow s = -۶/۶۷ \pm j۱۷$

$$\rightarrow v(t) = e^{-۶/۶۷t}(A\cos ۱۷t + B\sin ۱۷t) \quad , \quad v(۰) = ۱۰ \rightarrow A = ۱۰$$

همچنین در $t = ۰$ خازن اتصال کوتاه و سلف مدار باز است بنابراین داریم:

$$۴i_x = \frac{v_x}{۹} \rightarrow v_x = ۴i_x$$

KVL برای حلقه بیرونی $\rightarrow ۴i_x + v + i_x = ۰ \rightarrow i_x = -\frac{v}{۵}$

و در نهایت با توجه به KCL نوشته شده برای گره ۲ داریم:

$$-۰/۰۱\frac{dv}{dt} + i + i_x = ۰ \rightarrow \frac{dv}{dt} = ۱۰۰(i + i_x) = ۱۰۰\left(i - \frac{v}{۹}\right)$$

$$\rightarrow \frac{dv(۰)}{dt} = ۱۰۰\left(i(۰) - \frac{v(۰)}{۹}\right) = ۱۰۰\left(۰ - \frac{۱۰}{۹}\right) = -\frac{۱۰۰۰}{۹} = -۱۱۱/۱$$

$$\rightarrow -۶/۰۷A + ۱۷B = -۱۱۱/۱ \rightarrow B = -۲/۶۱ \rightarrow v(t) = e^{-۶/۶۷t}(۱۰\cos ۱۷t - ۲/۶۱\sin ۱۷t)$$

از طرفی می توان نوشت:

$$i = ۰/۰۱\frac{dv}{dt} - i_x = ۰/۰۱\frac{dv}{dt} - \frac{v}{۹}$$

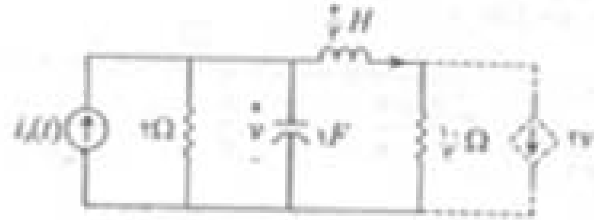
که با جایگذاری $v(t)$ در رابطه فوق داریم:

$$i(t) = ۲/۶۸\sin ۱۷t - te^{-۶/۶۷t}$$

مسئله ۳۷

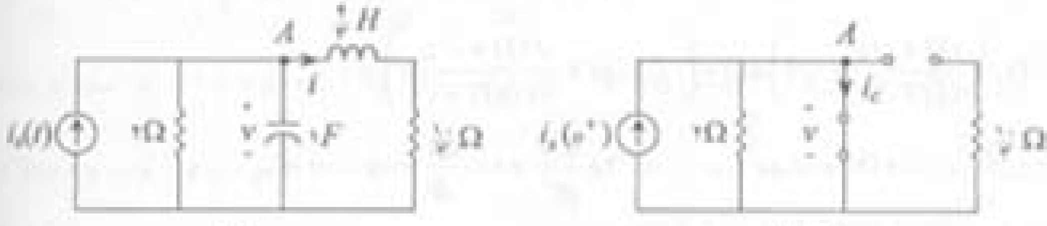
الف- معادله دیفرانسیلی برحسب v نوشته و شرایط اولیه را مشخص کنید. پاسخ پله را بدست آورید.

ب- اگر منبع جریان کنترل شده با ولتاژ را در مدار قرار دهیم، پاسخ ضربه v را بدست آورید.



شکل مسئله ۳۷

حل : الف ـ در این حالت مدار بصورت زیر است.



با فرض اینکه $i_s(t)$ در $t=0$ اعمال می شود، در $t=0^+$ خازن اتصال کوتاه وسلف مدار باز است بنابراین داریم.

$$v(0^+)=0 \quad , \quad \frac{dv(0^+)}{dt}=i_c(0^+)=i_s(0^+)$$

همچنین با توجه به شکل (ب) و با استفاده از روش نمایش اپراتوری معادلات دیفرانسیل خواهیم داشت:

$$v=\frac{2}{3}\frac{di}{dt}+\frac{10}{3}i=\frac{2}{3}Di+\frac{10}{3}i \;\rightarrow\; i=\frac{3}{2D+10}v$$

برای گره A $KCL \rightarrow -i_s+\frac{v}{2}+\frac{dv}{dt}+i=0 \rightarrow -i_s+\frac{v}{2}+Dv+\frac{3}{2D+10}v=0$

$$\rightarrow (2D^2+6D+4)v=(2D+5)i_s$$

$$\rightarrow 2\frac{d^2v}{dt^2}+6\frac{dv}{dt}+4v=2\frac{di_s}{dt}+5i_s \quad , \quad v(0^+)=0 \quad , \quad \frac{dv(0^+)}{dt}=i_s(0^+)$$

در ادامه با جایگذاری $i_s(t)=u(t)$ پاسخ پله مدار را بدست خواهیم آورد.

$$i_s(t)=u(t)=1 \;,\; t>0 \;,\; \frac{di_s(t)}{dt}=\delta(t)=0 \;,\; t>0$$

$$\rightarrow 2\frac{d^2v}{dt^2}+6\frac{dv}{dt}+4v=5 \quad , \quad v(0^+)=0 \quad , \quad \frac{dv(0^+)}{dt}=1$$

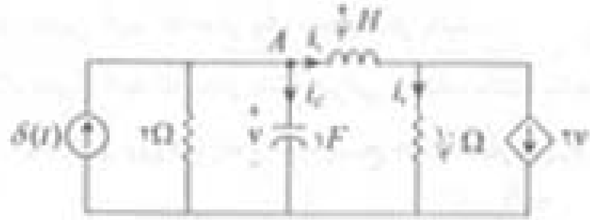
معادله مشخصه : $2s^2+6s+4=0 \rightarrow s=-1,-2 \rightarrow v(t)=\underbrace{K_1e^{-t}+K_2e^{-2t}}_{\text{پاسخ عمومی}}+\underbrace{K_3}_{\text{پاسخ خصوصی}}$

با جایگذاری پاسخ خصوصی در معادله دیفرانسیل $4K_3=5$ و یا $K_3=\frac{5}{4}$ شده و با اعمال شرایط اولیه خواهیم داشت.

$$\begin{cases} v(0^+)=0 \rightarrow K_1+K_2+\frac{5}{4}=0 \\ \frac{dv(0^+)}{dt}=1 \rightarrow -K_1-2K_2=1 \end{cases} \rightarrow K_1=-\frac{3}{2} \quad , \quad K_2=\frac{1}{4}$$

$$\rightarrow\ v(t) = -\frac{3}{2}e^{-t} + \frac{1}{4}e^{-3t} + \frac{5}{4}\quad ,\ t>0$$

ب ـ در این حالت مدار بصورت زیر خواهد بود که با استفاده از روش نمایش اپراتوری معادلات دیفرانسیل خواهیم داشت.



$$i_r = i_L - 2v\ ,\ v = \frac{4}{3}\frac{di_L}{dt} + \frac{10}{3}i_r = \frac{4}{3}\frac{di_L}{dt} + \frac{10}{3}(i_L - 2v) = \frac{4}{3}Di_L + \frac{10}{3}i_L - \frac{20}{3}v \ \rightarrow\ i_L = \frac{23}{4D+10}v$$

$$\text{Ⓐ برای گره } KCL \ \rightarrow\ -\delta(t) + \frac{v}{2} + \frac{dv}{dt} + i_L = 0 \ \rightarrow\ -\delta(t) + \frac{v}{2} + Dv + \frac{23}{4D+10}v = 0$$

$$\rightarrow\ (2D^2 + 6D + 14)v = (2D+5)\delta(t) \ \rightarrow\ 2\frac{d^2v}{dt^2} + 6\frac{dv}{dt} + 14v = 2\delta'(t) + 5\delta(t)$$

در $t=0$ جریان ضربه وارد شده و از آنجا که در این لحظه خازن اتصال کوتاه و سلف مدار باز خواهد بود لذا تمامی جریان ضربه از خازن خواهد گذشت (که در فاصله 0^- تا 0^+ خواهد بود) ودر $t=0^+$ جریان خازن برابر صفر خواهد شد پس خواهیم داشت.

$$v(0^+) = v(0^-) + \int_{0^-}^{0^+} i_c(t)dt = 0 + \int_{0^-}^{0^+}\delta(t)dt = 0 + 1 = 1V\quad ,\quad \frac{dv(0^+)}{dt} = i_c(0^+) = 0$$

همچنین به ازای $t>0$ ، $\delta'(t) = \delta(t) = 0$ خواهد بود بنابراین معادله دیفرانسیل فوق را می توان بصورت زیر نوشت.

$$2\frac{d^2v}{dt^2} + 6\frac{dv}{dt} + 14v = 0\quad ,\quad v(0^+) = 1V\quad ,\quad \frac{dv(0^+)}{dt} = 0$$

معادله مشخصه : $2s^2 + 6s + 14 = 0 \ \rightarrow\ s = -\frac{3}{2} \pm j\frac{\sqrt{19}}{2}$

$$\rightarrow\ v(t) = e^{-\frac{3}{2}t}\left(A\cos\frac{\sqrt{19}}{2}t + B\sin\frac{\sqrt{19}}{2}t\right)$$

$$\begin{cases} v(0^+) = 1 \ \rightarrow\ A = 1 \\ \frac{dv(0^+)}{dt} = 0 \ \rightarrow\ -\frac{3}{2}A + \frac{\sqrt{19}}{2}B = 0 \ \rightarrow\ B = \frac{3}{\sqrt{19}} \end{cases} \rightarrow\ v(t) = e^{-\frac{3}{2}t}\left(\cos\frac{\sqrt{19}}{2}t + \frac{3}{\sqrt{19}}\sin\frac{\sqrt{19}}{2}t\right),\ t>0$$

مسئله ۲۸

الف- معادله دیفرانسیلی بنویسید که v_c را به v_s ارتباط دهد. ($i_L(0) = I_0$ ، $v_c(0) = V_0$)

ب- β را چنان تعیین کنید که مدار یک نوسان ساز باشد.

پ- β را چنان تعیین کنید که مدار پاسخ میرایی ضعیف داشته باشد.

ت- به ازای $\beta = 500$ و ورودی پله واحد، پاسخ حالت صفر $v_c(t)$ را تعیین کنید.

شکل مسئله ۲۸

حل : الف ـ با توجه به شکل مسئله داریم.

$$i_b = \frac{v_s - v_c}{25}$$

$$KCL \text{ برای گره } A \rightarrow -\frac{v_s - v_c}{25} - \beta\frac{v_s - v_c}{25} + \frac{1}{\frac{1}{100}}\int v_c dt + \frac{dv_c}{dt} = 0$$

$$\rightarrow -\frac{(\beta+1)}{25}\frac{dv_s}{dt} - \frac{(\beta+1)}{25}\frac{dv_c}{dt} + 100v_c + \frac{d^2v_c}{dt^2} = 0$$

$$\rightarrow \frac{d^2v_c}{dt^2} + \frac{(\beta+1)}{25}\frac{dv_c}{dt} + 100v_c = \frac{(\beta+1)}{25}\frac{dv_s}{dt} \quad , \quad 2\alpha = \frac{\beta+1}{25} \rightarrow \alpha = \frac{\beta+1}{50}$$

$$\omega_0^2 = 100 \rightarrow \omega_0 = 10$$

ب ـ می دانیم که به ازای $\alpha = 0$ مدار نوسان ساز (بی اتلاف) خواهد شد.

$$\alpha = 0 \rightarrow \frac{\beta+1}{50} = 0 \rightarrow \beta = -1$$

پ ـ به ازای $\alpha < \omega_0$ پاسخ مدار میرایی ضعیف خواهد بود.

$$\alpha < \omega_0 \rightarrow \frac{\beta+1}{50} < 10 \rightarrow \beta < 499$$

ت ـ با جایگذاری $\beta = 500$ و $v_s(t) = u(t)$ پاسخ حالت صفر v_c را تعیین خواهیم کرد.

$$\beta = 500 \ , \ v_s(t) = u(t) \rightarrow \frac{d^2v_c}{dt^2} + \frac{501}{25}\frac{dv_c}{dt} + 100v_c = \frac{501}{25}\delta(t)$$

از آنجا که می خواهیم پاسخ حالت صفر را بیابیم لذا $v_c(0^+) = v_c(0^-) = 0$ و $\frac{dv_c(0^-)}{dt} = 0$ خواهد بود و با انتگرال گیری از معادله دیفرانسیل در فاصله 0^- تا 0^+ خواهیم داشت.

$$\frac{dv_c(0^+)}{dt}-\frac{dv_c(0^-)}{dt}+\frac{۵۰۱}{۲۵}\left(v_c(0^+)-v_c(0^-)\right)+۱۰۰\int_{0^-}^{0^+}v_c dt=\frac{۵۰۱}{۲۵}\int_{0^-}^{0^+}\delta(t)dt=0$$

$$\rightarrow \frac{dv_c(0^+)}{dt}-0+0+0=\frac{۵۰۱}{۲۵} \rightarrow \frac{dv_c(0^+)}{dt}=\frac{۵۰۱}{۲۵}$$

همچنین به ازای $t>0$ ، $\delta(t)=0$ می باشد. بنابراین معادله دیفرانسیل فوق را می توان بصورت زیر نوشت:

$$\rightarrow \frac{d^2v_c}{dt^2}+\frac{۵۰۱}{۲۵}\frac{dv_c}{dt}+۱۰۰v_c=0 \quad , \quad v_c(0^+)=0 \quad , \quad \frac{dv_c(0^+)}{dt}=\frac{۵۰۱}{۲۵}$$

معادله مشخصه : $s^2+\frac{۵۰۱}{۲۵}s+۱۰۰=0 \rightarrow s=-۹/۳۸\ ,\ -۱۰/۶۵ \rightarrow v_c(t)=K_1e^{-۹/۳۸t}+K_2e^{-۱۰/۶۵t}$

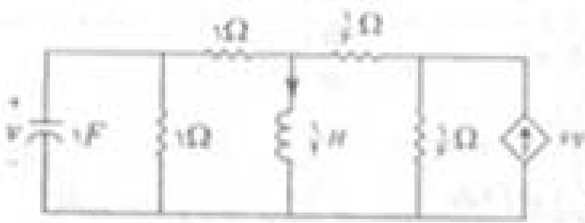
$$\begin{cases} v(0^+)=0 \rightarrow K_1+K_2=0 \\ \frac{dv(0^+)}{dt}=\frac{۵۰۱}{۲۵} \rightarrow -۹/۳۸K_1-۱۰/۶۵K_2=\frac{۵۰۱}{۲۵} \end{cases} \rightarrow K_1=۱۵/۷۸ \ , \ K_2=-۱۵/۷۸$$

$$\rightarrow v_c(t)=۱۵/۷۸e^{-۹/۳۸t}-۱۵/۷۸e^{-۱۰/۶۵t} \ , \ t>0$$

مسئله ۲۹

الف- معادله دیفرانسیلی بر حسب v بدست آورید. ($i_L(0)=I_0$ ، $v_c(0)=V_0$)

ب- پاسخ ورودی صفر v را برای $v_c(0)=۲V$ و $i_L(0)=-۲A$ بدست آورید.



شکل مسئله ۲۹

حل : الف ـ معادله دیفرانسیل خواسته شده مطابق حل مسئله ۱۱ بصورت زیر می باشد.

$$\frac{d^2v}{dt^2}+۲\frac{dv}{dt}+۲v=0$$

ب ـ با توجه به معادله دیفرانسیل فوق خواهیم داشت.

معادله مشخصه : $s^2+۲s+۲=0 \rightarrow s=-۱\pm j \rightarrow v(t)=e^{-t}\left(A\cos t+B\sin t\right)$

با توجه به حل مسئله ۱۱ شرط اولیه $\frac{dv(0)}{dt}$ بصورت زیر بدست می آید.

$$v_L(0)-۲-۴+۳v_L(0)-۶=0 \rightarrow v_L(0)=۳V \ , \ \frac{dv(0)}{dt}+۲+\frac{۲-۳}{۱}=0 \rightarrow \frac{dv(0)}{dt}=-۱$$

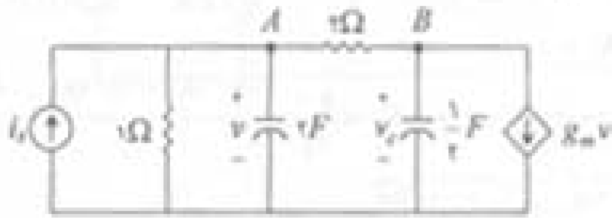
$$\begin{cases} v(0)=2 \rightarrow A=2 \\ \dfrac{dv(0)}{dt}=-1 \rightarrow -A+B=-1 \rightarrow B=1 \end{cases} \rightarrow v(t)=e^{-t}\left(2\cos t+\sin t\right)\ ,\ t>0$$

مسئله ۳۰

الف- g_m را چنان تعیین کنید که مدار میرایی شدید باشد.

ب- g_m را چنان تعیین کنید که $Q=1$ باشد.

پ- به ازای $g_m=\frac{5}{8}$ پاسخ $v(t)$ را برای شرط اولیه صفر و ورودی پله واحد تعیین کنید.



شکل مسئله ۳۰

حل :

$$Ⓐ\ \text{KCL برای گره}\ \rightarrow -i_s+\frac{v}{1}+2\frac{dv}{dt}+\frac{v-v_c}{2}=0 \rightarrow v_c=4\frac{dv}{dt}+3v-2i_s$$

$$Ⓑ\ \text{KCL برای گره}\ \rightarrow \frac{\left(\frac{4dv}{dt}+3v-2i_s\right)-v}{2}+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{4dv}{dt}+3v-2i_s\right)+g_m v=0$$

$$\rightarrow \frac{d^2v}{dt^2}+\frac{7}{4}v+\frac{1+g_m}{2}v=\frac{1}{2}\frac{di_s}{dt}+\frac{i_s}{2}$$

$$\rightarrow 2\alpha=\frac{7}{4} \rightarrow \alpha=\frac{7}{8}\ ,\ \omega_0^2=\frac{1+g_m}{2} \rightarrow \omega_0=\sqrt{\frac{1+g_m}{2}}$$

الف ـ به ازای $\alpha>\omega_0$ مدار میرایی شدید خواهد بود

$$\alpha>\omega_0 \rightarrow \frac{7}{8}>\sqrt{\frac{1+g_m}{2}} \rightarrow \frac{1+g_m}{2}<\frac{49}{64} \rightarrow g_m<\frac{17}{32}$$

ب ـ با توجه به تعریف ضریب کیفیت مدار (Q) داریم.

$$Q=\frac{\omega_0}{2\alpha}=1 \rightarrow \frac{\sqrt{\frac{1+g_m}{2}}}{\frac{7}{4}}=1 \rightarrow g_m=\frac{41}{8}$$

پ ـ با جایگذاری $i_s(t)=u(t)$ و $R_m=\frac{5}{8}$ خواهیم داشت.

$$\frac{d^2v}{dt^2}+\frac{7}{4}\frac{dv}{dt}+\frac{13}{16}v=\frac{1}{2}\delta(t)+\frac{1}{2}u(t)$$

از آنجا که شرایط اولیه صفر است لذا $v(0^+)=v(0^-)=0$ و $\frac{dv(0^-)}{dt}=0$ بوده و با انتگرال گیری از معادله فوق در فاصله 0^- تا 0^+ خواهیم داشت.

$$\frac{dv(0^+)}{dt}-\frac{dv(0^-)}{dt}+\frac{7}{4}\left(v(0^+)-v(0^-)\right)+\frac{13}{16}\int_{0^-}^{0^+}v\,dt=\frac{1}{2}\int_{0^-}^{0^+}\delta(t)\,dt+\frac{1}{2}\int_{0^-}^{0^+}u(t)\,dt$$

$$\rightarrow\ \frac{dv(0^+)}{dt}-0+0+0=\frac{1}{2}+0\ \rightarrow\ \frac{dv(0^+)}{dt}=\frac{1}{2}$$

همچنین برای $t>0$ ، $\delta(t)=0$ و $u(t)=1$ خواهد بود بنابراین معادله دیفرانسیل فوق را می توان بصورت زیر نوشت.

$$\frac{d^2v}{dt^2}+\frac{7}{4}\frac{dv}{dt}+\frac{13}{16}v=\frac{1}{2}\quad,\quad v(0^+)=0\quad,\quad\frac{dv(0^+)}{dt}=\frac{1}{2}\quad,\ t>0$$

معادله مشخصه : $s^2+\frac{7}{4}s+\frac{13}{16}=0\ \rightarrow\ s=-\frac{7}{8}\pm j\frac{\sqrt{3}}{8}$

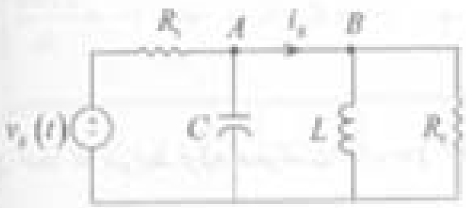
$$\rightarrow\ v(t)=\underbrace{e^{-\frac{7}{8}t}\left(A\cos\frac{\sqrt{3}}{8}t+B\sin\frac{\sqrt{3}}{8}t\right)}_{\text{پاسخ عمومی}}+\underbrace{C}_{\text{پاسخ خصوصی}}$$

با جایگذاری پاسخ خصوصی در معادله دیفرانسیل $\frac{13}{16}C=\frac{1}{2}$ و یا $C=\frac{8}{13}$ شد و با اعمال شرایط اولیه داریم.

$$\begin{cases}v(0^+)=0\ \rightarrow\ A+\frac{8}{13}=0\ \rightarrow\ A=-\frac{8}{13}\\[2mm]\frac{dv(0^+)}{dt}=\frac{1}{2}\ \rightarrow\ -\frac{7}{8}A+\frac{\sqrt{3}}{8}B=\frac{1}{2}\ \rightarrow\ B=\frac{4\sqrt{3}}{39}\end{cases}$$

$$\rightarrow\ v(t)=e^{-\frac{7}{8}t}\left(-\frac{8}{13}\cos\frac{\sqrt{3}}{8}t-\frac{4\sqrt{3}}{39}\sin\frac{\sqrt{3}}{8}t\right)+\frac{8}{13}\quad,\ t>0$$

مسئله ۳۱



معادله دیفرانسیلی بر حسب i_x را تشکیل داده و برای $R_1 = R_2 = C = L = 1$ پاسخ ضربه را حساب کنید.

شکل مسئله ۳۱

حل:

$v_C = v_L$

KCL برای گره (B): $-i_x + \frac{1}{L}\int v_c + \frac{v_c}{R_2} = 0 \rightarrow -\frac{di_x}{dt} + \frac{v_c}{L} + \frac{1}{R_2}\frac{dv_c}{dt} = 0$

$$\rightarrow -Di_x + \frac{v_c}{L} + \frac{Dv_c}{R_2} = 0 \rightarrow v_c = \frac{LR_2D}{LD+R_2} i_x$$

KCL برای گره (A): $\frac{v_C - v_S}{R_1} + C\frac{dv_c}{dt} + i_x = 0 \rightarrow R_1C\frac{dv_c}{dt} + v_c + R_1 i_x = v_s$

$$\rightarrow R_1CDv_c + v_c + R_1 i_x = v_s \rightarrow R_1CD\frac{LR_2D}{LD+R_2} i_x + \frac{LR_2D}{LD+R_2} i_x + R_1 i_x = v_s$$

$$\rightarrow \left(R_1R_2LCD^2 + L\left(R_1+R_2\right)D + R_1R_2\right) i_x = LDv_s + R_2 v_s$$

$$\rightarrow R_1R_2LC\frac{d^2 i_x}{dt^2} + L\left(R_1+R_2\right)\frac{di_x}{dt} + R_1R_2 i_x = L\frac{dv_s}{dt} + R_2 v_s$$

در ادامه به ازای $R_1 = R_2 = L = C = 1$ و $v_s(t) = \delta(t)$ پاسخ ضربه را محاسبه خواهیم کرد.

$$\frac{d^2 i_x}{dt^2} + 2\frac{di_x}{dt} + i_x = \delta'(t) + \delta(t)$$

$$\rightarrow \left(\frac{d^2 i_x}{dt^2} + \frac{di_x}{dt}\right) + \left(\frac{di_x}{dt} + i_x\right) = \delta'(t) + \delta(t)$$

$$\rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{di_x}{dt} + i_x\right) + \left(\frac{di_x}{dt} + i_x\right) = \frac{d\delta(t)}{dt} + \delta(t) \rightarrow \frac{di_x}{dt} + i_x = \delta(t)$$

با انتگرال گیری از طرفین معادله فوق در فاصله 0^- تا 0^+ خواهیم داشت.

$$i_x(0^+) - i_x(0^-) + \int_{0^-}^{0^+} i_x = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t) \rightarrow i_x(0^+) - 0 + 0 = 1 \rightarrow i_x(0^+) = 1$$

همچنین به ازای $t>0$ ، $\delta(t)=0$ بوده بنابراین معادله دیفرانسیل را می توان بصورت زیر بیان کرد.

$$\frac{di_x}{dt}+i_x=0\quad,\quad i(0^+)=1\quad,\quad t>0$$

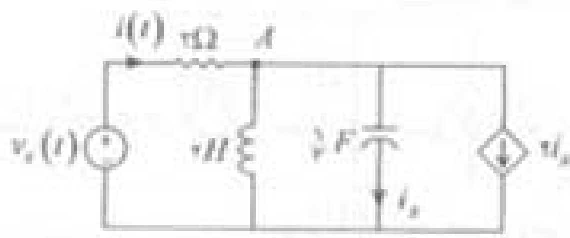
معادله مشخصه : $s+1=0 \;\rightarrow\; s=-1 \;\rightarrow\; i_x(t)=Ke^{-t}\quad,\quad i(0^+)=1 \;\rightarrow\; K=1$

$$\rightarrow\; i_x(t)=e^{-t}\quad,\quad t>0$$

مسئله ۳۲

پاسخ ضربه i را بدست آورید.

شرایط اولیه معادله دیفرانسیل i را با فرض $i_L(0)=I_0$ و $v_c(0)=V_0$ بدست آورید.



شکل مسئله ۳۲

حل : با توجه به شکل مسئله داریم.

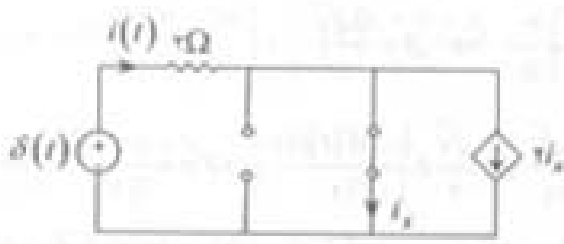
$$i=\frac{v_s-v_c}{2}\;\rightarrow\; v_c=v_s-2i\quad,\quad v_L=v_c=v_s-2i\quad,\quad i_x=\frac{1}{3}\frac{dv_c}{dt}-\frac{2}{3}\frac{di}{dt}$$

KCL برای گره A $\;\rightarrow\; -i+\frac{1}{2}\int(v_s-2i)dt+\left(\frac{1}{3}\frac{dv_s}{dt}-\frac{2}{3}\frac{di}{dt}\right)+2\left(\frac{1}{3}\frac{dv_s}{dt}-\frac{2}{3}\frac{di}{dt}\right)=0$

$$\rightarrow\; -i+\frac{1}{2}+\int(v_s-2i)dt+\frac{dv_s}{dt}-2\frac{di}{dt}=0\;\rightarrow\; -\frac{di}{dt}+\frac{v_s}{2}-i+\frac{d^2v_s}{dt^2}-2\frac{d^2i}{dt^2}=0$$

$$\rightarrow\; 2\frac{d^2i}{dt^2}+\frac{di}{dt}+i=\frac{d^2v_s}{dt^2}+\frac{v_s}{2}=\frac{d^2\delta(t)}{dt^2}+\frac{\delta(t)}{2}$$

در $t=0$ ولتاژ ضربه اعمال شده ، خازن اتصال کوتاه و سلف مدار باز خواهد بود.



بنابراین جریان ضربه $\frac{\delta(t)}{2}$ در $t=0$ از مقاومت 2Ω خواهد گذشت پس $\frac{\delta(t)}{2}$ قسمتی ازپاسخ ضربه خواهد بود

جریان ضربه گذرنده از خازن برابر است با :

$$۲i_x = i = \frac{\delta(t)}{۲} \rightarrow i_x = \frac{\delta(t)}{۴} \rightarrow v_c(۰^+) = v_c(۰^-) + \frac{۱}{\frac{۱}{۲}}\int_{۰^-}^{۰^+}\frac{\delta(t)}{۴}dt = \frac{۱}{۲}V$$

در $t = ۰^+$، $\delta(t) = ۰$ شده و مدار بصورت زیر خواهد بود.

$$\rightarrow i(۰^+) = \frac{-\frac{۱}{۲}}{۲} = -\frac{۱}{۴}$$

همچنین با انتگرال گیری از معادله دیفرانسیل در بازه ۰^- تا ۰^+ خواهیم داشت.

$$۲\frac{di(۰^+)}{dt} - ۲\frac{di(۰^-)}{dt} + i(۰^+) - i(۰^-) + \int_{۰^-}^{۰^+} i\,dt = \int_{۰^-}^{۰^+}\delta'(t)\,dt + \int_{۰^-}^{۰^+}\frac{\delta(t)}{۲}dt$$

$$\rightarrow ۲\frac{di(۰^+)}{dt} - ۰ - \frac{۱}{۴} - ۰ + ۰ = ۰ + \frac{۱}{۲} \rightarrow \frac{di(۰^+)}{dt} = \frac{۳}{۸}$$

بنابراین معادله دیفرانسیل فوق را می توان بصورت زیر بیان کرد.

$$۲\frac{di}{dt} + \frac{di}{dt} + i = ۰ \quad , \quad i(۰^+) = -\frac{۱}{۴}A \quad , \quad \frac{di(۰^+)}{dt} = \frac{۳}{۸}$$

معادله مشخصه : $۲s^2 + s + ۱ = ۰ \rightarrow s = -\frac{۱}{۴} \pm j\frac{\sqrt{۷}}{۴}$

$$\rightarrow i(t) = e^{-\frac{۱}{۴}t}\left(A\cos\frac{\sqrt{۷}}{۴}t + B\sin\frac{\sqrt{۷}}{۴}t\right) + \frac{\delta(t)}{۲}$$

$$\begin{cases} i(۰^+) = -\frac{۱}{۴} \rightarrow A = -\frac{۱}{۴} \\ \frac{di(۰^+)}{dt} = \frac{۳}{۸} \rightarrow -\frac{۱}{۴}A + \frac{\sqrt{۷}}{۴}B = \frac{۳}{۸} \rightarrow B = \frac{۵\sqrt{۷}}{۲۸} \end{cases}$$

$$\rightarrow i(t) = e^{-\frac{۱}{۴}t}\left(-\frac{۱}{۴}\cos\frac{\sqrt{۷}}{۴}t + \frac{۵\sqrt{۷}}{۲۸}\sin\frac{\sqrt{۷}}{۴}t\right) + \frac{\delta(t)}{۲} \quad , \quad t > ۰$$

با فرض $v_C(۰) = V_۰$ و $i_L(۰) = I_۰$ و با توجه به شکل مسئله خواهیم داشت.

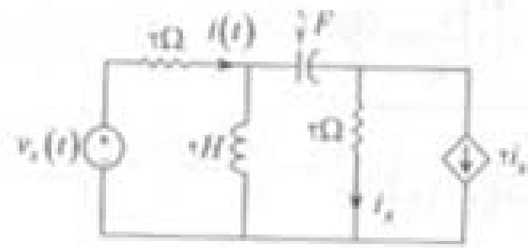
$$i = \frac{v_S - v_C}{۲} \rightarrow i(۰) = \frac{v_S(۰) - v_C(۰)}{۲} = \frac{v_S(۰) - v_۰}{۲} \quad , \quad i = i_L + ۲i_x \rightarrow i_x = \frac{i - i_L}{۲}$$

$$i=\frac{v_S-v_C}{2}\;\rightarrow\;\frac{di}{dt}=\frac{1}{2}\left(\frac{dv_s}{dt}-\frac{dv_C}{dt}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{dv_s}{dt}-2i_x\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{dv_s}{dt}-i+i_L\right)$$

$$\rightarrow\;\frac{di(0)}{dt}=\frac{1}{2}\left(\frac{dv_s(0)}{dt}-\frac{v_s(0)-V_0}{2}+I_0\right)$$

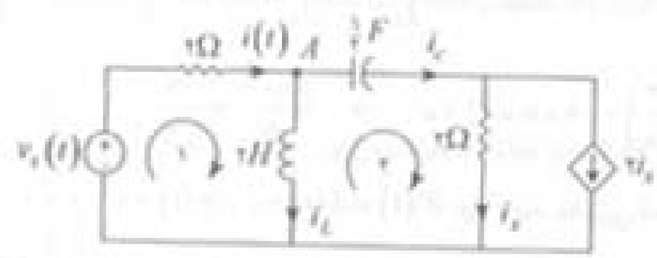
مسئله ۳۳

پاسخ پله و ضربه خروجی i را بدست آورید.



شکل مسئله ۳۲

حل : شکل مسئله را مجدداً بصورت زیر رسم می کنیم.



① برای مش KVL $\rightarrow\; -v_s+2i+2\frac{di_L}{dt}=0 \;\rightarrow\; -v_s+2i+2Di_L=0 \;\rightarrow\; i_L=\frac{v_S-2i}{2D}$

Ⓐ برای گره KCL $\rightarrow\; -i+i_L+i_c=0 \;\rightarrow\; -i+\frac{v_s-2i}{2D}+i_c=0 \;\rightarrow\; i_c=\frac{2Di+2i-v_s}{2D}$

$$\rightarrow\; i_c=3i_x \;\rightarrow\; i_x=\frac{1}{3}\left(\frac{2Di+2i-v_s}{2D}\right)$$

② برای مش KVL $\rightarrow\; -2\frac{d}{dt}\left(\frac{v_s-2i}{dt}\right)+\frac{1}{\frac{1}{4}}\int\frac{2Di+2i-v_s}{2D}+\frac{2}{3}\left(\frac{2Di+2i-v_s}{2D}\right)=0$

$$\rightarrow\; -2D\frac{v_s-2i}{dt}+\frac{4}{D}\frac{2Di+2i-v_s}{2D}+\frac{2}{3}\frac{2Di+2i-v_s}{2D}=0$$

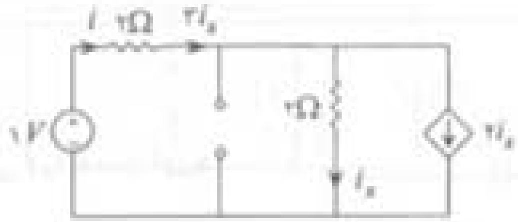
$$\rightarrow\; \left(16D^2+16D+12\right)i=\left(6D^2+2D+6\right)v_s$$

$$\rightarrow\; 16\frac{d^2i}{dt^2}+16\frac{di}{dt}+12i=6\frac{d^2v_s}{dt^2}+2\frac{dv_s}{dt}+6v_s$$

در ادامه با جایگذاری $v_s(t)=u(t)$ پاسخ پله را بدست خواهیم آورد.

$$16\frac{d^2 i}{dt^2}+16\frac{di}{dt}+12i=6\delta'(t)+2\delta(t)+6u(t)$$

در $t=0^+$ خازن اتصال کوتاه و سلف مدار باز خواهد بود بنابراین مدار بصورت زیر می باشد.



$$-1+2(3i_x)+2i_x=0 \;\rightarrow\; i_x=\frac{1}{8} \;\rightarrow\; i(0^+)=3i_x(0^+)=\frac{3}{8}$$

همچنین با انتگرال گیری از معادله دیفرانسیل در فاصله 0^+ تا 0^- خواهیم داشت.

$$\frac{16di(0^+)}{dt}-16\frac{di(0^-)}{dt}+16i(0^+)-16i(0^-)+12\int_{0^-}^{0^+} i=6\int_{0^-}^{0^+}\delta'(t)+2\int_{0^-}^{0^+}\delta(t)+6\int_{0^-}^{0^+}u(t)$$

$$\rightarrow\; 16\frac{di(0^+)}{dt}-0+16\left(\frac{3}{8}\right)-0+0=0+2+0 \;\rightarrow\; \frac{di(0^+)}{dt}=-\frac{1}{4}$$

می دانیم که به ازای $t>0$ ، $u(t)=1$ ، $\delta'(t)=\delta(t)=0$ می باشد بنابراین معادله دیفرانسیل را می توان بصورت زیر بیان کرد.

$$16\frac{d^2 i}{dt^2}+16\frac{di}{dt}+12i=6 \quad , \quad i(0^+)=\frac{3}{8} \quad , \quad \frac{di(0^+)}{dt}=-\frac{1}{4} \quad , \quad t>0$$

معادله مشخصه : $16s^2+16s+12=0 \;\rightarrow\; s=-\frac{1}{2}\pm j\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\rightarrow\; i(t)=\underbrace{e^{-\frac{1}{2}t}\left(A\cos\frac{\sqrt{2}}{2}t+B\sin\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)}_{\text{پاسخ عمومی}}+\underbrace{C}_{\text{پاسخ خصوصی}}$$

با جایگذاری پاسخ خصوصی در معادله دیفرانسیل $12C=6$ و یا $C=\frac{1}{2}$ شده و با اعمال شرایط اولیه داریم.

$$\begin{cases} i(0^+)=\frac{3}{8} \;\rightarrow\; A+\frac{1}{2}=\frac{3}{8} \;\rightarrow\; A=-\frac{1}{8} \\ \frac{di(0^+)}{dt}=-\frac{1}{4} \;\rightarrow\; -\frac{1}{2}A+\frac{\sqrt{2}}{2}B=-\frac{1}{4} \;\rightarrow\; B=-\frac{5\sqrt{2}}{16} \end{cases}$$

$$s(t)=i(t)=u(t)e^{-\frac{1}{2}t}\left(-\frac{1}{8}\cos\frac{\sqrt{7}}{2}t-\frac{5\sqrt{7}}{16}\sin\frac{\sqrt{7}}{2}t\right)+\frac{u(t)}{2}$$

از آنجا که مدار خطی و تغییرناپذیر با زمان است لذا پاسخ ضربه مشتق پاسخ پله خواهد بود.

$$h(t)=\frac{ds(t)}{dt}=\delta(t)e^{-\frac{1}{2}t}\left(-\frac{1}{8}\cos\frac{\sqrt{7}}{2}t-\frac{5\sqrt{7}}{16}\sin\frac{\sqrt{7}}{2}t\right)$$

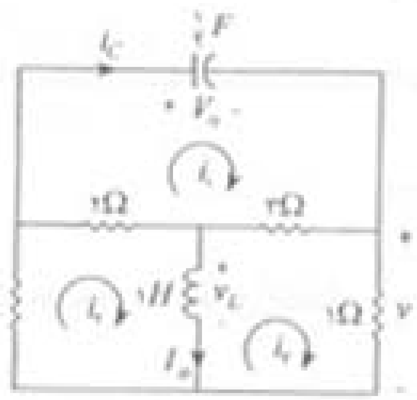
$$+u(t)\left[-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t}\left(-\frac{1}{8}\cos\frac{\sqrt{7}}{2}t-\frac{5\sqrt{7}}{16}\sin\frac{\sqrt{7}}{2}t\right)+e^{-\frac{1}{2}t}\left(\frac{\sqrt{7}}{16}\sin\frac{\sqrt{7}}{2}t-\frac{5}{16}\cos\frac{\sqrt{7}}{2}t\right)\right]+\frac{\delta(t)}{2}$$

$$=e^{-\frac{1}{2}t}\left(-\frac{1}{8}\cos\frac{\sqrt{7}}{2}t-\frac{5\sqrt{7}}{16}\sin\frac{\sqrt{7}}{2}t\right)\Bigg|_{t=0}\delta(t)+u(t)e^{-\frac{1}{2}t}\left(-\frac{1}{4}\cos\frac{\sqrt{7}}{2}t+\frac{7\sqrt{7}}{32}\sin\frac{\sqrt{7}}{2}t\right)+\frac{\delta(t)}{2}$$

$$\rightarrow\ h(t)=u(t)e^{-\frac{1}{2}t}\left(-\frac{1}{4}\cos\frac{\sqrt{7}}{2}t+\frac{7\sqrt{7}}{32}\sin\frac{\sqrt{7}}{2}t\right)+\frac{3}{8}\frac{\delta(t)}{2}$$

مسئله ۳۴

- الف- معادلات مش را نوشته و معادله دیفرانسیلی بر حسب متغیر v بدست آورید.
- ب- فرکانسهای طبیعی v را تعیین کنید.
- پ- معادلات دیفرانسیلی بر حسب ولتاژ دو سر خازن و جریان سلف تعیین کنید و فرکانسهای طبیعی آنها را نیز بدست آورید.



شکل مسئله ۳۴

حل: الف ـ با نوشتن معادلات KVL برای مشهای مدار داریم

$$KVL \text{ برای مش } 1 \ \rightarrow\ V_0+\frac{1}{\frac{1}{4}}\int i_1 dt+3(i_1-i_2)+2(i_1-i_3)=0$$

$$\rightarrow\ 4i_1+3\left(\frac{di_1}{dt}-\frac{di_2}{dt}\right)+2\left(\frac{di_1}{dt}-\frac{di_3}{dt}\right)=0$$

$$KVL \text{ برای مش } 2 \ \rightarrow\ 2i_2+2(i_2-i_1)+\frac{d(i_2-i_3)}{dt}=0$$

برای مش ۳ $KVL \rightarrow \dfrac{d(i_3 - i_2)}{dt} + 3(i_3 - i_1) + i_3 = 0$

با توجه به مدار $v = i_3$ می باشد و با استفاده از نمایش اپراتوری معادلات دیفرانسیل داریم.

$$\begin{cases}(5D+4)i_1 - 4Di_2 - 3Dv = 0\\ -4i_1 + (D+4)i_2 - Dv = 0\\ -3i_1 - Di_2 + (D+4)v = 0\end{cases} \rightarrow v = \frac{\begin{vmatrix}5D+4 & -4D & 0\\ -4 & D+4 & 0\\ -3 & -D & 0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}5D+4 & -4D & -3D\\ -4 & D+4 & -D\\ -3 & -D & D+4\end{vmatrix}} = \frac{0}{15D^2 + 44D + 32}$$

$$\rightarrow (15D^2 + 44D + 32)v = 0 \rightarrow 15\frac{d^2v}{d^2t} + 44\frac{dv}{dt} + 32v = 0$$

ب ـ فرکانسهای طبیعی v جوابهای معادله مشخصه معادله دیفرانسیل فوق می باشند.

معادله مشخصه : $15s^2 + 44s + 32 = 0 \rightarrow s = -1/33 \;,\; -1/6$

پ ـ با استفاده از دستگاه معادلات قسمت (الف) داریم.

$$i_c = i_1 = \frac{0}{15D^2 + 44D + 32} \rightarrow (15D^2 + 44D + 32)i_c = 0$$

$$i_c = \frac{1}{4}\frac{dv_c}{dt} = \frac{1}{4}Dv_C \rightarrow (15D^2 + 44D + 32)\frac{1}{4}Dv_C = 0 \rightarrow (15D^2 + 44D + 32)v_C = 0$$

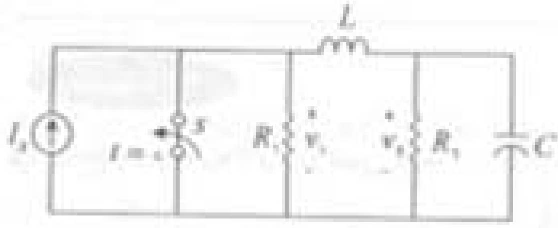
$\rightarrow 15\dfrac{d^2v_c}{d^2t} + 44\dfrac{dv_c}{dt} + 32v_c = 0 \rightarrow$ v_c فرکانسهای طبیعی $= -1/33 \;,\; -1/6$

$$i_L = i_1 - i_2 = \frac{0}{15D^2 + 44D + 32} - \frac{0}{15D^2 + 44D + 32} \rightarrow (15D^2 + 44D + 32)i_L = 0$$

$\rightarrow 15\dfrac{d^2i_L}{d^2t} + 44\dfrac{di_L}{dt} + 32i_L = 0 \rightarrow$ i_L فرکانسهای طبیعی $= -1/33 \;,\; -1/6$

نتیجه اینکه در یک مدار خطی و تغییر ناپذیر با زمان فرکانس های طبیعی متغیرهای تمامی شاخه ها یکسان بوده و اگر ورودی های مدار صفر باشد معادلات دیفرانسیل متغیر های مدار نیز یکسان خواهد بود.

مسئله ۳۵

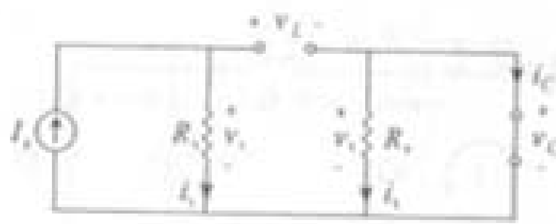


شکل مسئله ۳۵

$v_1(0^+)$ و $v_2(0^+)$ و $\frac{dv_1(0^+)}{dt}$ و $\frac{dv_2(0^+)}{dt}$ و $\frac{d^2v_2(0^+)}{dt^2}$ را حساب کنید (بدون حل مدار)

(کلید برای مدت طولانی بسته بوده است)

حل : به ازای $t < 0$ کلید بسته بوده بنابراین $i_L(0^-) = v_C(0^-) = v_1(0^-) = v_2(0^-) = 0$ می باشد در $t = 0^+$ کلید باز بوده و خازن اتصال کوتاه و سلف مدار باز می باشد بنابراین داریم.



$$\begin{cases} v_C(0^+) = v_C(0^-) = 0 \\ i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0 \end{cases} \rightarrow v_2(0^+) = 0 \quad , \quad v_1(0^+) = R_1 I_s$$

برای محاسبه $\frac{dv_1(0^+)}{dt}$ می توان نوشت.

$$i_1 = I_s - i_L \rightarrow v_1 = R_1(I_s - i_L) \rightarrow \frac{dv_1}{dt} = R_1\left(\frac{dI_s}{dt} - \frac{di_L}{dt}\right) = R_1(0 - \frac{v_L}{L})$$

$$v_L(0^+) = v_1(0^+) = R_1 I_s \rightarrow \frac{dv_1(0^+)}{dt} = -\frac{R_1^2}{L} I_s$$

برای محاسبه $\frac{dv_2(0^+)}{dt}$ داریم.

$$v_2 = v_C \rightarrow \frac{dv_2}{dt} = \frac{dv_C}{dt} = \frac{i_C}{C} \quad , \quad i_C(0^+) = -\frac{v_2(0^+)}{R_2} = 0 \rightarrow \frac{dv_2(0^+)}{dt} = \frac{i_C(0^+)}{C} = 0$$

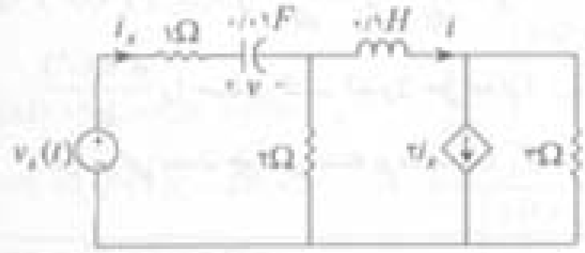
و در نهایت $\frac{d^2v_2(t)}{dt^2}$ را محاسبه خواهیم کرد.

$$\frac{dv_2}{dt} = \frac{i_C}{C} = \frac{i_L - i_2}{C} \rightarrow \frac{d^2v_2}{dt^2} = \frac{1}{C}\left(\frac{di_L}{dt} - \frac{di_2}{dt}\right) = \frac{1}{C}\left(\frac{v_L}{L} - \frac{di_2}{dt}\right)$$

$$v_L(0^+) = R_s I_s \quad , \quad \frac{di_L(0^+)}{dt} = R_s\frac{dv_s(0^+)}{dt} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d^2 v_L(0^+)}{dt^2} = \frac{R_s}{LC} I_s$$

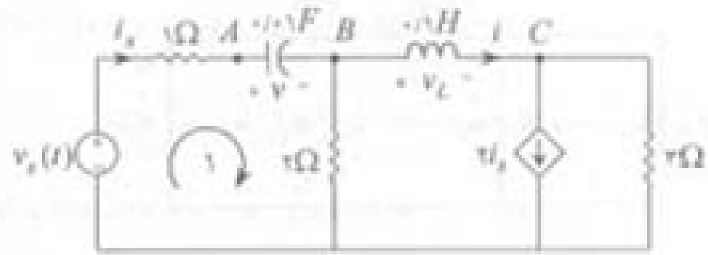
مسئله ۳۶

پاسخ پله و ضربه v و i را تعیین کنید.



شکل مسئله ۳۶

حل : مدار فوق را مجدداً بصورت زیر رسم می کنیم.



$$v_B - v_C = v_L \;\rightarrow\; 2i_1 - v_c = 0.1\frac{di}{dt} \;\rightarrow\; 2(i_s - i) - v_c = 0.1\frac{di}{dt} \;\rightarrow\; v_c = -0.1\frac{di}{dt} - 2i + 2i_s$$

برای گره C، KCL $\rightarrow -i + 2i_s + \frac{1}{3}\left(-0.1\frac{di}{dt} - 2i + 2i_s\right) = 0 \rightarrow i_s = \frac{1}{8}\left(0.1\frac{di}{dt} + 5i\right)$

$$\rightarrow i_s = \frac{1}{80}(D+50)i \quad , \quad i_1 = i_s - i = \frac{1}{80}(D-30)i$$

برای مش ۱، KVL $\rightarrow -v_s + \frac{1}{80}(D+50) + \frac{1}{0.01}\int\frac{1}{80}(D+50)i + \frac{2}{80}(D-30)i$

$$\rightarrow -80v_s + (D+50)i + \frac{100}{D}(D+50)i + (2D-60)i = 0$$

$$\left(3D^2 + 90D + 5000\right)i = 80Dv_S \;\rightarrow\; 3\frac{d^2 i}{dt^2} + 90\frac{di}{dt} + 5000i = 80\frac{dv_s}{dt}$$

به ازای $v_s(t) = u(t)$ پاسخ پله i را بدست خواهیم آورد

$$\rightarrow 3\frac{d^2 i}{dt^2} + 90\frac{di}{dt} + 5000i = 80\delta(t)$$

در $t=0^-$ سلف مدار باز است بنابراین $i(0^+)=0$ بوده و با انتگرال گیری در فاصله 0^- تا 0^+ در معادله دیفرانسیل داریم:

$$\frac{3di(0^+)}{dt}=80 \;\to\; \frac{di(0^+)}{dt}=\frac{80}{3}$$

می دانیم که به ازای $t>0$ ، $\delta(t)=0$ می باشد بنابراین معادله دیفرانسیل فوق را می توان بصورت زیر نوشت.

$$3\frac{d^2i}{dt^2}+90\frac{di}{dt}+5000i=0 \quad , \quad i(0^+)=0 \quad , \quad \frac{di(0^+)}{dt}=\frac{80}{3}$$

معادله مشخصه : $3s^2+90s+5000=0 \;\to\; s=-15\pm j38$

$$\to\; i(t)=e^{-15t}\left(A\cos 38t+B\sin 38t\right) \quad , t>0$$

$$\begin{cases} i(0^+)=0 \;\to\; A=0 \\ \dfrac{di(0^+)}{dt}=\dfrac{80}{3} \;\to\; -15A+38B=\dfrac{80}{3} \;\to\; B=0/702 \end{cases} \;\to\; i(t)=0/702e^{-15t}\sin 38t \quad , t>0$$

همچنین می توان نوشت.

برای مش ۱ $KVL \;\to\; -v_s+i_x+v+2i_x=0 \;\to\; v=-2i-i_x+v_s=-2(i_x-i)-i_x+v_s$

$$\to\; v=2i-3i_x+v_s=2i-\frac{3}{80}\left(\frac{di}{dt}+50i\right)+v_s=-\frac{3}{80}\frac{di}{dt}+\frac{1}{8}i+v_s$$

بنابراین پاسخ پله v عبارتست از :

$$v(t)=-\frac{3}{80}\left(-10/53e^{-15t}\sin 38t+26/67e^{-15t}\cos 38t\right)+\frac{0/701}{8}e^{-15t}\sin 38t+1$$

$$\to\; v(t)=e^{-15t}\left(-\cos 38t+0/48\sin 38t\right)+1 \quad , t>0$$

برای محاسبه پاسخ ضربه v و i از پاسخ پله آنها مشتق می گیریم.

$$v_s(t)=\delta(t) \;\to\; i(t)=(0/702)(-15)e^{-15t}\sin 38t+(0/702)(38)e^{-15t}\cos 38t$$

$$=e^{-15t}\left(26/68\cos 38t-10/53\sin 38t\right) \quad , t>0$$

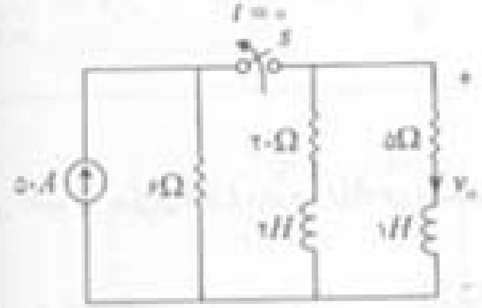
$$v_s(t)=\delta(t) \;\to\; v(t)=\frac{d}{dt}\left\{e^{-15t}\left(-\cos 38t+0/48\sin 38t\right)+1\right\}$$

$$=e^{-15t}\left(30/75\cos 38t+33/28\sin 38t\right) \quad , t>0$$

مسئله ۳۷

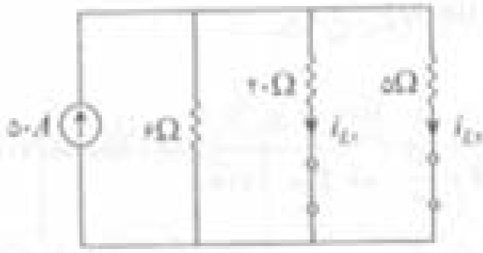
جریان گذرنده از سلفها و $v_o(t)$ را برای $t > 0$ حساب کنید.

(کلید S به مدت طولانی بسته بوده است)



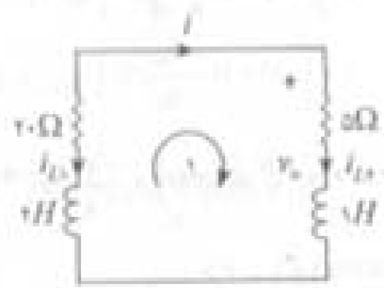
شکل مسئله ۳۷

حل : به ازای $t < 0$ کلید بسته بوده و در $t = 0^-$ مدار به حالت دایمی خود می رسد پس سلفها اتصال کوتاه خواهند بود.



$$i_{L_1}(0^-) = \frac{6 \| 5}{6 \| 5 + 20} 50A = 6A \quad , \quad i_{L_2}(0^-) = \frac{6 \| 20}{6 \| 20 + 5} 50A = 24A$$

به ازای $t > 0$ کلید باز بوده و مدار بصورت زیر خواهد بود.



$$KVL \text{ برای مش ۱} \rightarrow 2\frac{di}{dt} + 20i + 5i + \frac{di}{dt} = 0 \rightarrow \frac{di}{dt} + \frac{25}{3} i = 0 \rightarrow i(t) = Ke^{-\frac{25}{3}t}$$

برای محاسبه K باید $i(0^+)$ را بدست آوریم.

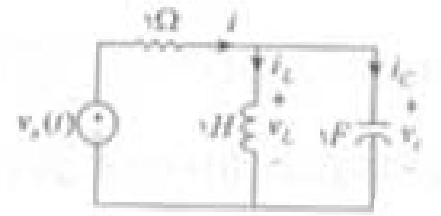
$$i(0^+) = \frac{\phi_{eq}}{L_{eq}} = \frac{L_1 i_{L_2}(0^-) - L_2 i_{L_1}(0^-)}{L_1 + L_2} = \frac{24 - 6 \times 2}{1+2} = 4A \rightarrow i(t) = 4e^{-\frac{25}{3}t}$$

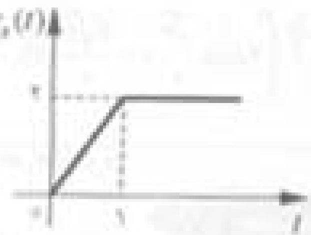
$$i_{L_2}(t) = i(t) = 4e^{-\frac{25}{3}t} \quad , \quad i_{L_1}(t) = -i(t) = -4e^{-\frac{25}{3}t}$$

$$v_o(t) = 5i(t) + \frac{di(t)}{dt} = 20e^{-\frac{25}{3}t} + 4\left(-\frac{25}{3}\right)e^{-\frac{25}{3}t} = -13/13e^{-\frac{25}{3}t}$$

مسئله ۳۸

$i = ?$





شکل مسئله ۳۸

حل : با توجه به شکل مسئله داریم.

$$v_L = v_C$$

$$i = i_c + i_L = \frac{dv_L}{dt} + \int v_L\,dt \;\rightarrow\; \frac{d^2 v_L}{dt^2} + v_L = \frac{di}{dt} \;\rightarrow\; \left(D^2+1\right)v_L = Di \;\rightarrow\; v_L = \frac{D}{D^2+1}i$$

KVL برای مش ۱ $\rightarrow\; -v_s + i + \dfrac{D}{D^2+1}i = 0 \;\rightarrow\; \left(D^2+D+1\right)i = \left(D^2+1\right)v_s$

$$\rightarrow\; \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{di}{dt} + i = \frac{d^2 v_s}{dt^2} - v_s$$

به ازای $0 < t < 1$، $v_s(t) = 2t$ بوده و خواهیم داشت.

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{di}{dt} + i = 2t$$

معادله مشخصه : $s^2 + s + 1 = 0 \;\rightarrow\; s = -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\rightarrow\; i(t) = \underbrace{e^{-\frac{1}{2}t}\left(A\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + B\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)}_{\text{پاسخ عمومی}} + \underbrace{K_1 t + K_2}_{\text{پاسخ خصوصی}}$$

با جایگذاری پاسخ خصوصی در معادله دیفرانسیل داریم.

$$K_1 t + K_1 + K_2 = 2t \;\rightarrow\; \begin{cases} K_1 = 2 \\ K_1 + K_2 = 0 \;\rightarrow\; K_2 = -2 \end{cases}$$

در $t = 0$ خازن اتصال کوتاه و سلف مدار باز است بنابراین داریم.

$$\begin{cases} i = \dfrac{v_s - v_c}{1} \rightarrow i(0) = v_s(0) - v_c(0) = 0 - 0 = 0 \rightarrow A - 2 = 0 \rightarrow A = 2 \\ \dfrac{di(0)}{dt} = \dfrac{dv_s(0)}{dt} - \dfrac{dv_c}{dt} = \dfrac{dv_s(0)}{dt} - i(0) = 2 - 0 = 2 \rightarrow -\dfrac{1}{2}A + \dfrac{\sqrt{3}}{2}B + 2 = 2 \rightarrow B = \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

$$i(t) = e^{\frac{-1}{2}t}\left(2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + 2t - 2 \;,\; 0 < t < 1$$

و به ازای $t > 1$ ، $v_s(t) = 2$ شده و معادله دیفرانسیل بصورت زیر تغییر خواهد کرد

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{di}{dt} + i = 2 \rightarrow i(t) = \underbrace{e^{\frac{-1}{2}(t-1)}\left(A\cos\frac{\sqrt{3}}{2}(t-1) + B\cos\frac{\sqrt{3}}{2}(t-1)\right)}_{\text{پاسخ عمومی}} + \underbrace{K}_{\text{پاسخ خصوصی}}$$

با جایگذاری پاسخ خصوصی در معادله دیفرانسیل $K = 2$ شده و با توجه به $i(t)$ در $0 < t < 1$ داریم

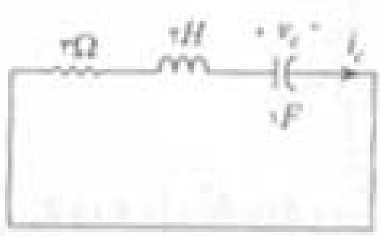
$$i(1) = 1/32 \rightarrow A + 2 = 1/32 \rightarrow A = -0/68$$

$$\frac{di(1)}{dt} = \frac{d}{dt}\left\{e^{\frac{-1}{2}t}\left(2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + 2t - 2\right\}_{t=1} = 0/92 \rightarrow -\frac{1}{2}A + \frac{\sqrt{3}}{2}B = 0/92$$

$$\rightarrow B = 0/68 \rightarrow i(t) = -0/68e^{\frac{-1}{2}(t-1)}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}(t-1) - \sin\frac{\sqrt{3}}{2}(t-1)\right) + 2 \;,\; t > 1$$

مسئله ۳۹

چه رابطه ای میان $v_c(0) = V_0$ و $i_L(0) = I_0$ وجود داشته باشد تا در پاسخ ورودی صفر $v_c(t)$ تنها یک فرکانس طبیعی با کوچکترین قدر مطلق ظاهر شود.



شکل مسئله ۳۹

حل : با توجه به شکل مدار داریم

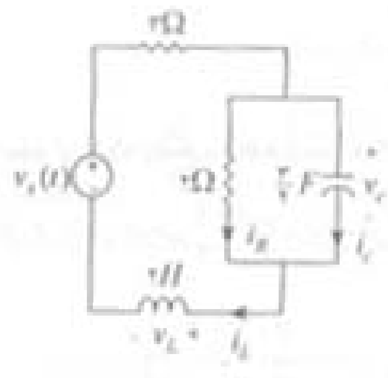
$$KVL \rightarrow 3i_c + 2\frac{di_c}{dt} + v_c = 0 \;,\; i_c = \frac{dv_c}{dt} \rightarrow 2\frac{d^2 v_c}{dt^2} + 3\frac{dv_c}{dt} + v_c = 0$$

معادله مشخصه : $2s^2 + 3s + 1 = 0 \rightarrow s = -1, -\frac{1}{2} \rightarrow v_c(t) = K_1 e^{-t} + K_2 e^{\frac{-1}{2}t}$

می خواهیم $v_c(t)$ فقط شامل جمله $K_2e^{-\frac{t}{2}}$ یعنی فرکانس طبیعی با کوچکترین قدرمطلق باشد پس باید $K_1 = 0$ شود.

$$\begin{cases} v_c(0) = V_0 \;\rightarrow\; K_1 + K_2 = V_0 \\ \dfrac{dv_c(0)}{dt} = i_c(0) = i_L(0) = I_0 \;\rightarrow\; -K_1 - \dfrac{1}{2}K_2 = I_0 \end{cases} \rightarrow\; K_1 = -V_0 - 2I_0 = 0 \;\rightarrow\; V_0 = -2I_0$$

مسئله ۴۰



شکل مسئله ۴۰

الف- معادله دیفرانسیلی برحسب v_c بنویسید و پاسخ پله را حساب کنید.

ب- شرایط اولیه ای بر حسب ولتاژ خازن و جریان سلف چنان پیدا کنید که پاسخ پله v_c فقط بزرگترین فرکانس طبیعی (از لحاظ قدر مطلق) را داشته باشد.

پ- شرایط اولیه را چنان پیدا کنید که پاسخ پله هیچ حالت گذرایی نداشته باشد.

حل : الف ـ با توجه به شکل مسئله داریم.

$$i_L = i_R + i_c = \frac{v_c}{2} + \frac{3}{2}\frac{dv_c}{dt}$$

$$KVL \;\rightarrow\; -v_s + 3i_L + v_c + 2\frac{di_L}{dt} = 0$$

$$\rightarrow\; -v_s + 3\left(\frac{v_c}{2} + \frac{3}{2}\frac{dv_c}{dt}\right) + v_c + 2\frac{d}{dt}\left(\frac{v_c}{2} + \frac{3}{2}\frac{dv_c}{dt}\right) = 0 \;\rightarrow\; 6\frac{d^2v_c}{dt^2} + 11\frac{dv_c}{dt} + 5v_c = 2v_s$$

با جایگذاری $v_s(t) = u(t) = 1 \;,\; t > 0$ پاسخ پله را حساب خواهیم کرد.

$$6\frac{d^2v_c}{dt^2} + 11\frac{dv_c}{dt} + 5v_c = 2 \;\;,\;\; t > 0$$

معادله مشخصه : $6s^2 + 11s + 5 = 0 \;\rightarrow\; s = -1 \,,\, -\frac{5}{6} \;\rightarrow\; v_c(t) = \underbrace{K_1e^{-t} + K_2e^{-\frac{5t}{6}}}_{\text{پاسخ عمومی}} + \underbrace{K_3}_{\text{پاسخ خصوصی}}$

با جایگذاری پاسخ خصوصی در معادله دیفرانسیل $5K_2 = 2$ و یا $K_2 = \frac{2}{5}$ شده و با فرض شرایط اولیه $v_c(0) = V_0$ و $i_L(0) = I_0$ خواهیم داشت:

$$\begin{cases} v_c(0) = V_0 \;\rightarrow\; K_1 + K_2 + \frac{2}{5} = V_0 \\ \frac{dv_c(0)}{dt} = \frac{2}{3} i_c(0) = \frac{2}{3} i_L(0) - \frac{2}{3} i_R(0) = \frac{2}{3} i_R(0) - \frac{2}{3}\frac{v_c(0)}{dt} = \frac{2I_0}{3} - \frac{V_0}{3} \;\rightarrow\; K_1 - \frac{5}{6}K_2 = \frac{2I_0}{3} - \frac{V_0}{3} \end{cases}$$

$$\rightarrow K_1 = -4I_0 - 3V_0 + 2 \;,\; K_2 = 4I_0 + 4V_0 - \frac{12}{5}$$

$$\rightarrow v_c(t) = \left(-4I_0 - 3V_0 + 2\right)e^{-t} + \left(4I_0 + 4V_0 - \frac{12}{5}\right)e^{-\frac{5}{6}t} + \frac{2}{5}$$

ب ـ برای اینکه پاسخ پله فقط شامل فرکانس طبیعی با بزرگترین قدرمطلق یعنی $s = -1$ باشد باید ضریب جمله شامل فرکانس طبیعی $s = -\frac{5}{6}$ برابر صفر شود.

$$4I_0 + 4V_0 - \frac{12}{5} = 0 \;\rightarrow\; I_0 + V_0 = \frac{3}{5}$$

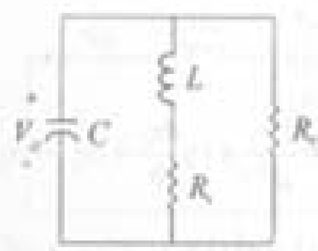
پ ـ اگر ضریب جملات نمایی (پاسخ گذرا) برابر صفر باشد، پاسخ گذرایی نخواهیم داشت.

$$\begin{cases} -4I_0 - 3V_0 + 2 = 0 \\ 4I_0 + 4V_0 - \frac{12}{5} = 0 \end{cases} \;\rightarrow\; I_0 = \frac{1}{5}A \;,\; V_0 = \frac{2}{5}V$$

مسئله ۴۱

R_1 را چنان تعیین کنید که مدار یک نوسان ساز شود.

$(L = C = 1$ و $R_1 = -2\Omega$ و $i_L(0) = 0$ و $v_c(0) = V_0)$



شکل مسئله ۴۱

حل: با جایگذاری مقادیر داده شده در شکل مسئله آن را مجدداً رسم می کنیم.

$$v_{R_2} = v_c \rightarrow i_{R_2} = \frac{v_{R_2}}{-2} = -\frac{v_c}{2} \quad ; \quad i_L = -i_c - i_{R_2} = -\frac{dv_c}{dt} + \frac{v_c}{2}$$

برای مش ۱ $KVL \rightarrow -v_c + v_L + v_{R_1} = 0 \rightarrow -v_c + \frac{di_L}{dt} + R_1 i_L = 0$

$$\rightarrow -v_c + \frac{d}{dt}\left(-\frac{dv_c}{dt} + \frac{v_c}{2}\right) - R_1\frac{dv_c}{dt} + R_1\frac{v_c}{2} = 0 \rightarrow \frac{d^2 v_c}{dt^2} + \left(R_1 - \frac{1}{2}\right)\frac{dv_c}{dt} + \left(1 - \frac{R_1}{2}\right)v_c = 0$$

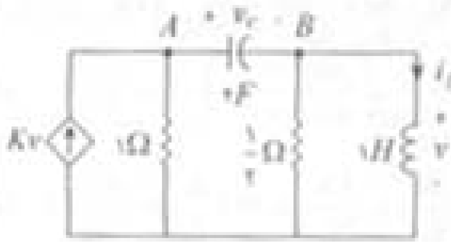
$$2\alpha = R_1 - \frac{1}{2} \rightarrow \alpha = \frac{R_1}{2} - \frac{1}{4} \quad , \quad \omega_0^2 = 1 - \frac{R_1}{2} \rightarrow \omega_0 = \sqrt{1 - \frac{R_1}{2}}$$

می دانیم اگر $\alpha = \omega_0$ باشد پاسخ $v_c(t)$ نوسانی بی اتلاف شده و مدار یک نوسان ساز خواهد شد.

$$\alpha = \omega_0 \rightarrow \frac{R_1}{2} - \frac{1}{4} = \sqrt{1 - \frac{R_1}{2}} \rightarrow R_1 = -\frac{5}{2}\Omega \ , \ \frac{3}{2}\Omega$$

مسئله ۴۲

معادله دیفرانسیلی بر حسب v بدست آورده و مکان ریشه های معادله مشخصه آن را با تغییر K تعیین کنید.
$(\, i_L(0) = I_0 \ , \ v_c(0) = V_0 \,)$



شکل مسئله ۴۲

حل : با توجه به شکل مسئله و با استفاده از نمایش اپراتوری معادلات دیفرانسیل داریم:

برای گره Ⓑ $KCL \rightarrow -2\frac{dv_c}{dt} + \frac{v}{\frac{1}{2}} + \int v\,dt = 0 \rightarrow -2\frac{d^2 v_c}{dt^2} + 2\frac{dv}{dt} + v = 0 \rightarrow v_c = \frac{2D+1}{2D^2}v$

$v_A = v_c + v$ ، برای گره Ⓐ $KCL \rightarrow -Kv + \frac{v_c + v}{1} + \frac{2dv_c}{dt} = 0$

$$\rightarrow -Kv + v_c + v + 2Dv_c = 0 \rightarrow -Kv + \frac{2D+1}{2D^2}v + v + \frac{4D^2+2D}{2D^2}v = 0$$

$$\rightarrow \left((6-2K)D^2 + 4D + 1\right)v = 0 \rightarrow (6-2K)\frac{d^2 v}{dt^2} + 4\frac{dv}{dt} + v = 0$$

معادله مشخصه : $(6-2K)s^2 + 4s + 1 = 0 \rightarrow s = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4(6-2K)}}{6-2K} = \frac{-4 \pm \sqrt{8K-8}}{3-K}$

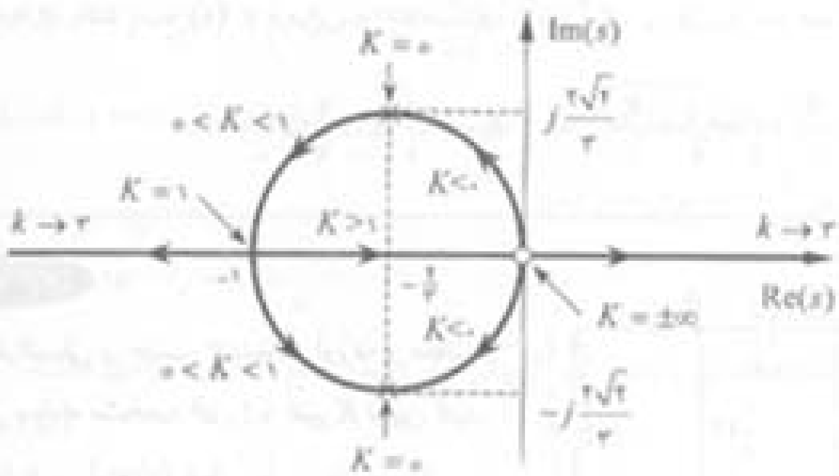
به ازای $8K-8>0$ و یا $K>1$ ریشه ها حقیقی و به ازای $8K-8<0$ و یا $K<1$ ریشه ها مختلط می باشد.

همچنین داریم

$$K=0 \;\rightarrow\; s=-\frac{2}{3}\pm j\frac{2\sqrt{2}}{3} \quad , \quad K=1 \;\rightarrow\; s=-1$$

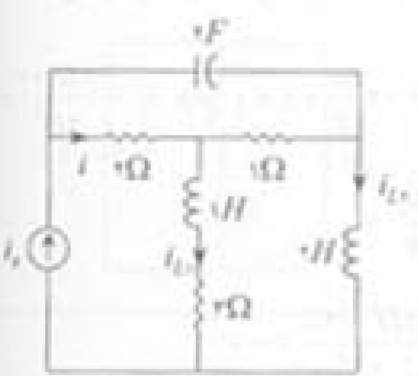
$$K\rightarrow\pm\infty \;\rightarrow\; s=0 \quad , \quad K\rightarrow 3 \;\rightarrow\; s\rightarrow\pm\infty \;\text{(حقیقی)}$$

بنابراین مکان هندسی ریشه ها را می توان بصورت زیر رسم کرد که در آن فلشها تغییر مکان هندسی ریشه ها را به ازای افزایش K از ۰ تا ∞ و از $-\infty$ تا ۰ نشان می دهند.



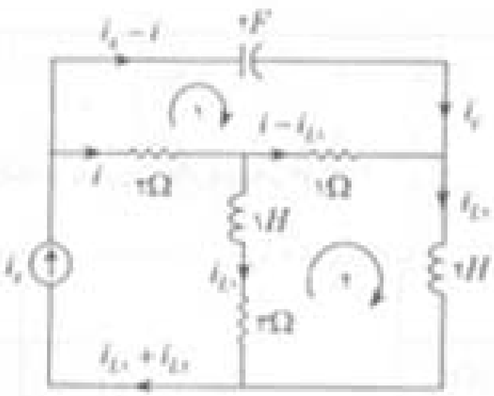
مسئله ۴۳

- معادله دیفرانسیلی بر حسب i تشکیل دهید.
- شرایط اولیه لازم را بر حسب $v_c(0)=V_0$ و $i_{L_1}(0)=I_{01}$ و $i_{L_2}(0)=I_{02}$ تعیین کنید.
- مدار از مرتبه چند است و چرا؟ نتیجه را با مرتبه معادله دیفرانسیل بدست آمده مقایسه و توجه کنید.



شکل مسئله ۴۳

حل : شکل مسئله را مجدداً بصورت زیر رسم می کنیم.



$$i_{L1} + i_{L2} = i_s \quad \rightarrow \quad i_{L2} = i_s - i_{L1}$$

KVL برای مش ۲ $\rightarrow \; -3i_{L1} - \frac{di_{L1}}{dt} + i - i_{L1} + 2\frac{d}{dt}(i_s - i_{L1}) = 0 \;\rightarrow\; 3\frac{di_{L1}}{dt} + 4i_{L1} = i + 2\frac{di_s}{dt}$

$$\rightarrow \quad (3D+4)i_{L1} = i + 2Di_s \quad i_{L1} = \frac{i+2Di_s}{3D+4}$$

KVL برای مش ۱ $\rightarrow \; \frac{1}{2}\int (i_s - i)\,dt - (i - i_{L1}) - 2i = 0$

$$\rightarrow \quad \frac{1}{2D}(i_s - i) - \left(i - \frac{i+2Di_s}{3D+4}\right) - 2i = 0 \;\rightarrow\; \left(18D^2 + 25D + 4\right)i = \left(4D^2 + 3D + 4\right)i_s$$

$$\rightarrow \quad 18\frac{d^2 i}{dt^2} + 25\frac{di}{dt} + 4i = 4\frac{d^2 i_s}{dt^2} + 3\frac{di_s}{dt} + 4i_s$$

شرایط اولیه لازم $i(0)$ و $\frac{di(0)}{dt}$ می باشند.

در $t=0$ برای مش ۱ KVL $\rightarrow \; v_c(0) - \left(i(0) - i_{L1}(0)\right) - 2i(0) = 0 \;\rightarrow\; i(0) = \frac{V_0 + I_{01}}{3}$

$$i = \frac{1}{3}(v_c + i_{L1}) \quad \rightarrow \quad \frac{di}{dt} = \frac{1}{3}\left(\frac{dv_c}{dt} + \frac{di_{L1}}{dt}\right)$$

با توجه به KVL نوشته شده برای مش ۲ و اینکه $\frac{dv_c}{dt} = \frac{1}{2}i_c$ خواهیم داشت.

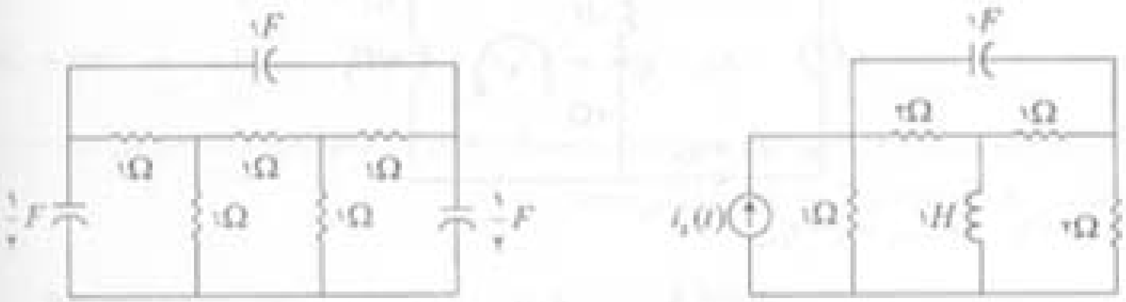
$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\left(i_{L2} - i + i_{L1}\right) + \frac{1}{3}\left(i + 2\frac{di_s}{dt} - 4i_{L1}\right)\right) = -\frac{3i}{54} - \frac{15}{54}i_{L1} + \frac{i_{L2}}{6} + \frac{2}{9}\frac{di_s}{dt}$$

$$\rightarrow \quad \frac{di(0)}{dt} = -\frac{V_0 + I_{01}}{54} - \frac{15}{54}I_{01} + \frac{I_{02}}{6} + \frac{2}{9}\frac{di_s(0)}{dt} = -\frac{V_0}{54} - 16\frac{I_{01}}{54} + \frac{I_{02}}{6} + \frac{2}{9}\frac{di_s(0)}{dt}$$

در نگاه اول با دیدن دو سلف و یک خازن تصور می شود که مدار مرتبه سه باشد ولی با کمی دقت ملاحظه میشود که $i_{L1} + i_{L2} = i_s$ بوده و این یعنی اینکه جریانهای سلفها به هم وابسته اند بنابراین تنها یکی از سلفها و خازن مرتبه مدار را تعیین می کنند و لذا مدار مرتبه دوم خواهد بود.

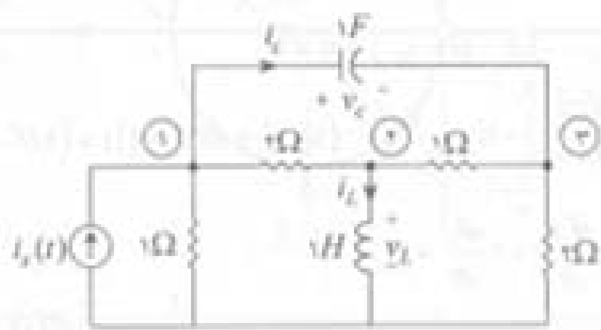
مسئله ۴۴

معادلات حالت را نوشته و بصورت ماتریس در آورید.



(ب) شکل مسئله ٤٤ (الف)

حل : الف ـ از آنجا که مدار مرتبه دو است لذا دو متغیر حالت ولتاژ خازن و جریان سلف را انتخاب خواهیم کرد.



$$v_2 = v_L = \frac{di_L}{dt}$$

$$\begin{cases} v_1 - v_3 = v_c \\ \text{KCL برای گره ۲} \rightarrow \dfrac{\dfrac{di_L}{dt} - v_1}{2} + \dfrac{\dfrac{di_L}{dt} - v_3}{1} + i_L = 0 \rightarrow v_1 + 2v_3 = 3\dfrac{di_L}{dt} + 2i_L \end{cases}$$

$$\rightarrow v_1 = \frac{di_L}{dt} + \frac{2}{3}i_L + \frac{2}{3}v_c \;, \; v_3 = \frac{di_L}{dt} + \frac{2}{3}i_L - \frac{1}{3}v_c$$

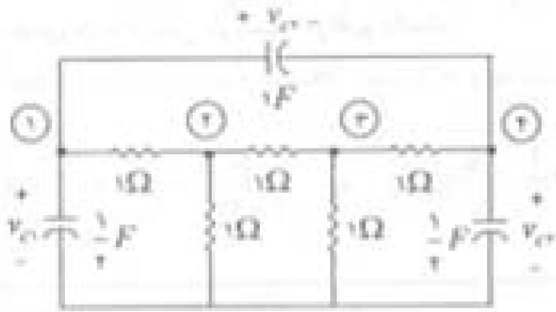
$$\begin{cases} \text{KCL برای گره ۱} \rightarrow -i_s + \dfrac{\dfrac{di_L}{dt} + \dfrac{2}{3}i_L + \dfrac{2}{3}v_c}{1} + \dfrac{\dfrac{di_L}{dt} + \dfrac{2}{3}i_L + \dfrac{2}{3}v_c - \dfrac{di_L}{dt}}{2} + \dfrac{dv_c}{dt} = 0 \\ \text{KCL برای گره ۳} \rightarrow -\dfrac{dv_c}{dt} + \dfrac{\dfrac{di_L}{dt} + \dfrac{2}{3}i_L - \dfrac{1}{3}v_c - \dfrac{di_L}{dt}}{1} + \dfrac{\dfrac{di_L}{dt} + \dfrac{2}{3}i_L - \dfrac{1}{3}v_c}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dv_c}{dt} + \dfrac{di_L}{dt} = -v_c - i_L + i_s \\ 2\dfrac{dv_c}{dt} - \dfrac{di_L}{dt} = -v_c + 2i_L \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{dv_c}{dt} = -\dfrac{2}{3}v_c + \dfrac{1}{3}i_L + \dfrac{1}{3}i_s \\ \dfrac{di_L}{dt} = -\dfrac{1}{3}v_c - \dfrac{4}{3}i_L + \dfrac{2}{3}i_s \end{cases}$$

معادلات حالات بدست آمده فوق را می توان بصورت ماتریسی نیز نوشت.

$$\begin{bmatrix} \dfrac{dv_c}{dt} \\ \dfrac{di_L}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{2}{3} & \dfrac{1}{3} \\ -\dfrac{1}{3} & -\dfrac{4}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_c \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{2}{3} \end{bmatrix} i_s$$

پ ـ شکل (ب) را مجدداً رسم می کنیم.



با نوشتن KVL برای حلقه بیرونی $-v_{C1} + v_{C2} + v_{C3} = 0$ شده بنابراین ولتاژ خازنها به هم وابسته است پس در تعیین مرتبه مدار یکی از خازنها را منظور نخواهیم کرد ولذا مدار مرتبه ۲ بوده و v_{C1} و v_{C3} را به عنوان متغیرهای حالت بر می گزینیم.

$v_1 = v_{C1}$, $v_4 = v_{C3}$, $v_{C2} = v_{C1} - v_{C3}$

$$\begin{cases} \text{KCL برای گره ۲} \rightarrow \dfrac{v_2 - v_{C1}}{1} + \dfrac{v_2 - v_3}{1} + \dfrac{v_2}{1} = 0 \rightarrow 3v_2 - v_3 = v_{C1} \\ \text{KCL برای گره ۳} \rightarrow \dfrac{v_3 - v_2}{1} + \dfrac{v_3}{1} + \dfrac{v_3 - v_{C3}}{1} = 0 \rightarrow -v_2 + 3v_3 = v_{C3} \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} v_2 = \dfrac{3v_{C1}}{8} + \dfrac{v_{C3}}{8} \\ v_3 = \dfrac{v_{C1}}{8} + \dfrac{3v_{C3}}{8} \end{cases}$$

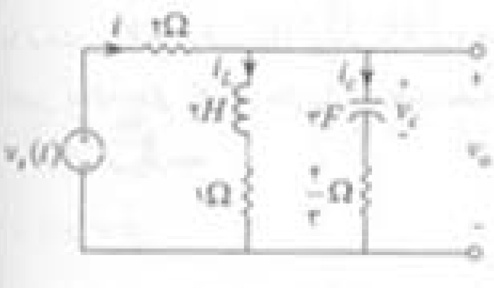
$$\begin{cases} \text{①} \; KCL \text{ برای گره } \rightarrow \; \dfrac{1}{2}\dfrac{dv_{c1}}{dt} + \dfrac{d\left(v_{c1} - v_{c2}\right)}{dt} + \dfrac{v_{c1} - \left(\dfrac{3v_{c1}}{8} + \dfrac{v_{c2}}{8}\right)}{1} = 0 \\[2ex] \text{②} \; KCL \text{ برای گره } \rightarrow \; \dfrac{1}{2}\dfrac{dv_{c2}}{dt} + \dfrac{d\left(v_{c2} - v_{c1}\right)}{dt} + \dfrac{v_{c2} - \left(\dfrac{v_{c1}}{8} + \dfrac{3v_{c2}}{8}\right)}{1} = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 3\dfrac{dv_{c1}}{dt} - 2\dfrac{dv_{c2}}{dt} = -\dfrac{5}{4}v_{c1} + \dfrac{1}{4}v_{c2} \\[2ex] -2\dfrac{dv_{c1}}{dt} + 3\dfrac{dv_{c2}}{dt} = \dfrac{1}{4}v_{c1} - \dfrac{5}{4}v_{c2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{dv_{c1}}{dt} = -v_{c1} - v_{c2} \\[2ex] \dfrac{dv_{c2}}{dt} = -\dfrac{7}{8}v_{c1} - \dfrac{13}{8}v_{c2} \end{cases}$$

و اگر معادلات حالت فوق را بصورت ماتریسی بنویسیم خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{dv_{c1}}{dt} \\[2ex] \dfrac{dv_{c2}}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\[1ex] -\dfrac{7}{8} & -\dfrac{13}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{c1} \\ v_{c2} \end{bmatrix}$$

مسئله ۴۵



شکل مسئله ٤٥

- الف - معادلات حالت را بنویسید.
- ب- v_o را بر حسب متغیرهای حالت بیان کنید.
- پ- معادله دیفرانسیلی بر حسب v_o تشکیل داده و شرایط اولیه را برحسب $v_c(0)$ و $i_L(0)$ تعیین کنید.
- ت - پاسخ ضربه v_o را تعیین کنید.

حل : الف- با توجه به شکل مسئله داریم:

$$i = i_c + i_L = \frac{dv_c}{dt} + i_L$$

$$v_o = v_c + \frac{2}{3}i_c = v_c + 2\frac{dv_c}{dt} \rightarrow \frac{dv_c}{dt} + i_L = \frac{v_s - \left(v_c + 2\dfrac{dv_c}{dt}\right)}{2} \rightarrow \frac{dv_c}{dt} = -\frac{v_c}{8} - \frac{i_L}{4} + \frac{v_s}{8} \quad (1)$$

$$v_o = v_L + i_L = 2\frac{di_L}{dt} + i_L \quad , \quad i = \frac{v_s - v_o}{2} \rightarrow \frac{dv_c}{dt} + i_L = \frac{v_s - v_o}{2}$$

$$\rightarrow\ -\frac{v_c}{8}-\frac{i_L}{4}+\frac{v_s}{8}+i_L=\frac{v_s-\left(2\frac{di_L}{dt}+i_L\right)}{2}\ \rightarrow\ \frac{di_L}{dt}=\frac{3v_c}{8}-\frac{3i_L}{4}+\frac{v_s}{8}\qquad(2)$$

$$(1)\ \text{و}\ (2)\ \rightarrow\ \begin{bmatrix}\frac{dv_c}{dt}\\ \frac{di_L}{dt}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{8} & -\frac{1}{4}\\ \frac{3}{8} & -\frac{3}{4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_c\\ i_L\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{8}\\ \frac{1}{8}\end{bmatrix}v_s$$

ب ـ با توجه به معادلات بدست آمده در قسمت (الف) داریم.

$$v_o=v_c+\frac{2}{3}i_c=v_c+\frac{2}{3}(i-i_L)=v_c+\frac{2}{3}\left(\frac{v_s-v_o}{2}-i_L\right)\ \rightarrow\ v_o=\frac{3}{4}v_c-\frac{1}{2}i_L+\frac{1}{4}v_s$$

پ ـ با توجه به معادلات بدست آمده در قسمت (الف) و با نمایش اپراتوری معادلات دیفرانسیل داریم.

$$v_o=v_c+2\frac{dv_c}{dt}=(1+2D)v_c\ \rightarrow\ v_c=\frac{v_o}{2D+1}\ \rightarrow\ i_c=3\frac{dv_c}{dt}=3Dv_c=\frac{3D}{2D+1}v_o$$

$$v_o=\frac{2di_L}{dt}+i_L=(2D+1)i_L\ \rightarrow\ i_L=\frac{1}{2D+1}v_o$$

$$i=i_c+i_L\ \rightarrow\ \frac{v_s-v_o}{2}=\frac{3D}{2D+1}v_o+\frac{1}{2D+1}v_o\ \rightarrow\ (8D+3)v_o=(2D+1)v_s$$

$$\rightarrow\ 8\frac{dv_o}{dt}+3v_o=2\frac{dv_s}{dt}+v_s$$

برای محاسبه شرایط اولیه می توان نوشت.

$$v_o=\frac{3}{4}v_c-\frac{1}{2}i_L+\frac{1}{4}v_s\ \rightarrow\ v_o(0)=\frac{3}{4}v_c(0)-\frac{1}{2}i_L(0)+\frac{1}{4}v_s(0)$$

ت ـ با جایگذاری $v_s(t)=\delta(t)$ پاسخ ضربه را بدست خواهیم آورد.

$$8\frac{dv_o}{dt}+3v_o=2\delta'(t)+\delta(t)\ \rightarrow\ v_o(t)=K_1u(t)e^{-\frac{3}{8}t}+K_2\delta(t)$$

با جایگذاری $v_o(t)$ در معادله دیفرانسیل داریم.

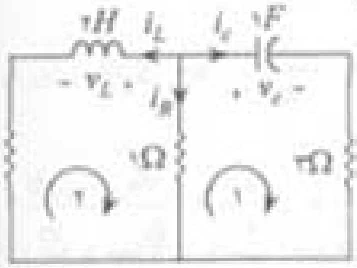
$$8K_1\delta(t)e^{-\frac{3}{8}t}-3K_1u(t)e^{-\frac{3}{8}t}+8K_2\delta'(t)+3K_1u(t)e^{-\frac{3}{8}t}+3K_2\delta(t)$$

$$=(8K_1+3K_2)\delta(t)+8K_2\delta'(t)=2\delta'(t)+\delta(t)$$

$$\rightarrow\ \begin{cases}8K_1+3K_2=1\\ 8K_2=2\end{cases}\ \rightarrow\ K_1=\frac{1}{32}\ ,\ K_2=\frac{1}{4}\ \rightarrow\ v_o(t)=\frac{1}{32}u(t)e^{-\frac{3}{8}t}+\frac{1}{4}\delta(t)$$

مسئله ۴۶

معادلات حالت را بنویسید و از روی آنها ثابت کنید $\frac{dE(t)}{dt} \le 0$ ($E(t)$ انرژی ذخیره شده در مدار است).



شکل مسئله ۴۶

حل : ولتاژ خازن و جریان سلف را به عنوان متغیر های حالت انتخاب می کنیم.

KVL برای مش ۱ $\to \; -i_R + v_c + 2i_c \; \to \; -i_R + v_c + 2\frac{dv_c}{dt} = 0 \; \to \; i_R = 2\frac{dv_c}{dt} + v_c$

$$i_c + i_L + i_R = 0 \; \to \; \frac{dv_c}{dt} + i_L + 2\frac{dv_c}{dt} + v_c = 0 \; \to \; \frac{dv_c}{dt} = -\frac{v_c}{3} - \frac{i_L}{3} \qquad (1)$$

KVL برای مش ۲ $\to \; -2i_L - v_L + i_R = 0 \; \to \; -2i_L - v_L - 2\frac{dv_c}{dt} + v_c = 0$

$$\to \; -2i_L - 2\frac{di_L}{dt} - 2\left(-\frac{v_c}{3} - \frac{i_L}{3}\right) = 0 \; \to \; \frac{di_L}{dt} = \frac{v_c}{8} - \frac{11 i_L}{8} \qquad (2)$$

(۱) و (۲) $\to \; \begin{bmatrix} \frac{dv_c}{dt} \\ \frac{di_L}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{8} & \frac{11}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_c \\ i_L \end{bmatrix}$

$$\frac{dE_c}{dt} = P_c(t) = v_c i_c = v_c \frac{dv_c}{dt} = v_c\left(-\frac{v_c}{3} - \frac{i_L}{3}\right) = -\frac{v_c^2}{3} - \frac{v_c i_L}{3}$$

$$\frac{dE_L}{dt} = P_L(t) = v_L i_L = 2\frac{di_L}{dt} \cdot i_L = 2\left(\frac{v_c}{8} - \frac{11 i_L}{8}\right) i_L = -\frac{v_c i_L}{3} - \frac{11 i_L^2}{8}$$

$$\to \; \frac{dE(t)}{dt} = \frac{dE_c(t)}{dt} + \frac{dE_L(t)}{dt} = -\frac{1}{3}\left(v_c^2 + 11 i_L^2\right) \le 0$$

مسئله ۴۷

شکل مسئله ۴۷

معادلات حالت را بنویسید.

نشان دهید $\frac{d\mathscr{E}(t)}{dt} < 0$.

($\mathscr{E}(t)$ انرژی ذخیره شده در مدار است).

حل : با انتخاب جریان سلفها به عنوان متغیر های حالت و با توجه به شکل مدار داریم.

$$\text{KVL برای مش ۱} \rightarrow -v_{L_1} + i + v_{L_2} = 0 \rightarrow i = v_{L_1} - v_{L_2} = 2\frac{di_{L_1}}{dt} - 3\frac{di_{L_2}}{dt}$$

$$\text{KCL برای گره } (A) \rightarrow \frac{v_{L_1}}{3} + i_{L_1} + 2\frac{di_{L_1}}{dt} - 3\frac{di_{L_2}}{dt} = 0 \rightarrow \frac{2\frac{di_{L_1}}{dt}}{3} + i_{L_1} + 2\frac{di_{L_1}}{dt} - 3\frac{di_{L_2}}{dt} = 0$$

$$\text{KCL برای گره } (B) \rightarrow \frac{v_{L_2}}{2} + i_{L_2} - 2\frac{di_{L_1}}{dt} + 3\frac{di_{L_2}}{dt} = 0 \rightarrow \frac{3\frac{di_{L_2}}{dt}}{2} + i_{L_2} - 2\frac{di_{L_1}}{dt} + 3\frac{di_{L_2}}{dt} = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} 8\frac{di_{L_1}}{dt} - 9\frac{di_{L_2}}{dt} = -3i_{L_1} \\ -4\frac{di_{L_1}}{dt} + 9\frac{di_{L_2}}{dt} = -2i_{L_2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{di_{L_1}}{dt} = -\frac{3}{4}i_{L_1} - \frac{1}{2}i_{L_2} \\ \frac{di_{L_2}}{dt} = -\frac{1}{3}i_{L_1} - \frac{4}{9}i_{L_2} \end{cases}$$

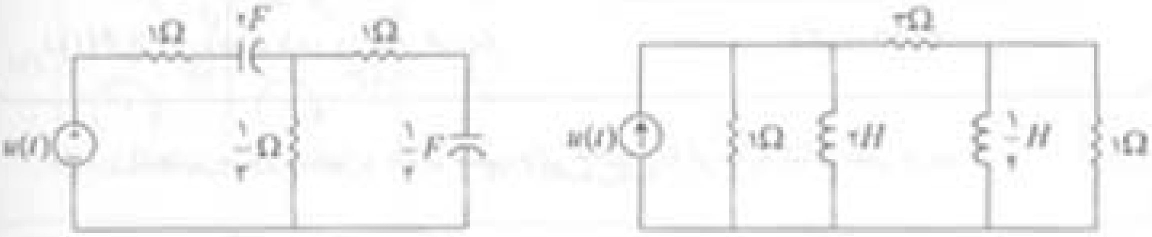
$$\frac{d\mathscr{E}_{L_1}(t)}{dt} = P_{L_1}(t) = v_{L_1}i_{L_1} = 2\frac{di_{L_1}}{dt}\cdot i_{L_1} = -\frac{3}{2}i_{L_1}^2 - i_{L_1}i_{L_2}$$

$$\frac{d\mathscr{E}_{L_2}(t)}{dt} = P_{L_2}(t) = v_{L_2}i_{L_2} = 3\frac{di_{L_2}}{dt}\cdot i_{L_2} = -i_{L_1}i_{L_2} - \frac{4}{3}i_{L_2}^2$$

$$\frac{d\mathscr{E}(t)}{dt} = -\frac{3}{2}i_{L_1}^2 - 2i_{L_1}i_{L_2} - \frac{4}{3}i_{L_2}^2 = -\frac{1}{6}\left((3i_{L_1} + 2i_{L_2})^2 + 4i_{L_2}^2\right) < 0$$

مسئله ۳۸

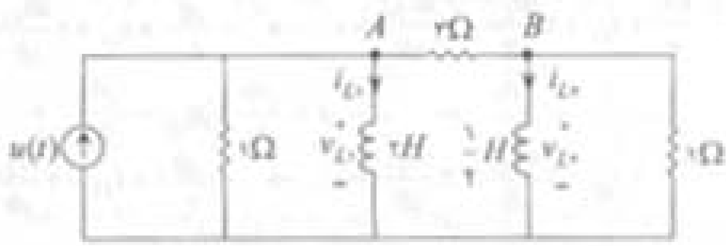
- معادلات حالت را نوشته و بصورت ماتریس درآورید.
- آیا معادلات ارتباط یا شباهتی با هم دارند و از آن چه نتیجه ای می توان گرفت.



(ب) (الف)

شکل مسئله ۴۸

حل : الف ـ مدار شکل (الف) را مجدداً بصورت زیر رسم می کنیم.



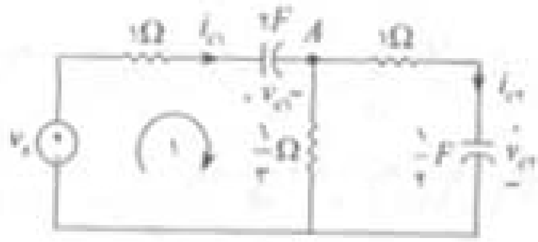
$$v_A = v_{L_1} = 2\frac{di_{L_1}}{dt}\ ,\quad v_B = v_{L_2} = \frac{1}{2}\frac{di_{L_2}}{dt}$$

$$\begin{cases} \text{برای گره } Ⓐ\ KCL \rightarrow -u(t)+\dfrac{\frac{2di_{L_1}}{dt}}{1}+i_{L_1}+\dfrac{\frac{2di_{L_1}}{dt}-\frac{1}{2}\frac{di_{L_2}}{dt}}{2}=0 \\ \\ \text{برای گره } Ⓑ\ KCL \rightarrow \dfrac{\frac{1}{2}\frac{di_{L_2}}{dt}}{1}+i_{L_2}+\dfrac{\frac{1}{2}\frac{di_{L_2}}{dt}-2\frac{di_{L_1}}{dt}}{2}=0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 16\dfrac{di_{L_1}}{dt}-\dfrac{di_{L_2}}{dt}=-4i_{L_1}+4u \\ 4\dfrac{di_{L_1}}{dt}-2\dfrac{di_{L_2}}{dt}=3i_{L_2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{di_{L_1}}{dt}=-\dfrac{2}{5}i_{L_1}-\dfrac{1}{10}i_{L_2}+\dfrac{2}{5}u \\ \dfrac{di_{L_2}}{dt}=-\dfrac{2}{5}i_{L_1}-\dfrac{8}{5}i_{L_2}+\dfrac{2}{5}u \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} \dfrac{di_{L_1}}{dt} \\ \dfrac{di_{L_2}}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{2}{5} & -\dfrac{1}{10} \\ -\dfrac{2}{5} & -\dfrac{8}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{L_1} \\ i_{L_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{2}{5} \\ \dfrac{2}{5} \end{bmatrix} u$$

پ ـ شکل (ب) را مجدداً بصورت زیر رسم می کنیم و ولتاژ خازنها را به عنوان متغیر های حالت بر می گزینیم.



$$v_s = i_{c2} + v_{c2} = \frac{1}{2}\frac{dv_{c2}}{dt} + v_{c2}$$

$$\begin{cases} \text{KCL برای گره } \textcircled{A}: & \rightarrow\ -2\dfrac{dv_{c1}}{dt} + \dfrac{\frac{1}{2}\frac{dv_{c2}}{dt} + v_{c2}}{\frac{1}{2}} + \dfrac{1}{2}\dfrac{dv_{c2}}{dt} \\[2ex] \text{KVL برای مش } \textcircled{1}: & \rightarrow\ -2\dfrac{dv_{c1}}{dt} + \dfrac{\frac{1}{2}\frac{dv_{c2}}{dt} + v_{c2}}{\frac{1}{2}} + \dfrac{1}{2}\dfrac{dv_{c2}}{dt} \end{cases}$$

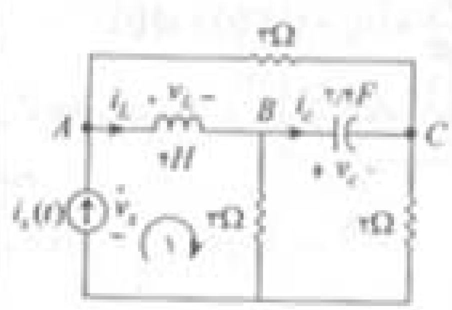
$$\rightarrow \begin{cases} 2\dfrac{dv_{c1}}{dt} - 2\dfrac{dv_{c2}}{dt} = 3v_{c2} \\[2ex] 2\dfrac{dv_{c1}}{dt} + \dfrac{dv_{c2}}{dt} = -2v_{c1} - 2v_{c2} + 2u \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{dv_{c1}}{dt} = -\dfrac{2}{5}v_{c1} - \dfrac{1}{10}v_{c2} + \dfrac{2}{5}u \\[2ex] \dfrac{dv_{c2}}{dt} = -\dfrac{2}{5}v_{c1} - \dfrac{8}{5}v_{c2} + \dfrac{2}{5}u \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} \dfrac{dv_{c1}}{dt} \\[2ex] \dfrac{dv_{c2}}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{2}{5} & -\dfrac{1}{10} \\[2ex] -\dfrac{2}{5} & -\dfrac{8}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{c1} \\ v_{c2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{2}{5} \\[2ex] \dfrac{2}{5} \end{bmatrix} u$$

ملاحظه می شود که ماتریسهای بدست آمده در قسمت های (الف) و (ب) یکسان می باشند و تنها تفاوت معادلات این است که بجای جریان سلف، ولتاژ خازن و به جای منبع جریان، منبع ولتاژ جایگزین شده است. نتیجه اینکه دو مدار فوق دوگان یکدیگرند.

مسئله ۴۹

- معادلات حالت را بنویسید.
- ولتاژ v_s را بر حسب متغیر های حالت بیان کنید.
- پاسخ ضربه را را حساب کنید.



شکل مسئله ۴۹

حل : با انتخاب ولتاژ خازن و جریان سلف به عنوان متغیر های حالت و با توجه به شکل زیر داریم

$$\text{B برای گره } KCL \rightarrow -i_L + \frac{v_B}{3} + i_c = 0 \rightarrow v_B = 3i_L - 3i_c = 3i_L - 0/3\frac{dv_c}{dt}$$

$$v_B - v_C = v_c \rightarrow v_C = v_B - v_c = 3i_L - 0/3\frac{dv_c}{dt} - v_c$$

$$v_A - v_B = v_L \rightarrow v_A = v_B + v_L = 3i_L - 0/3\frac{dv_c}{dt} + 4\frac{di_L}{dt}$$

$$\text{A برای گره } KCL \rightarrow -i_s + i_L + \frac{\left(3i_L - 0/3\frac{dv_c}{dt} + 4\frac{di_L}{dt}\right) - \left(3i_L - 0/3\frac{dv_c}{dt} - v_c\right)}{3} = 0$$

$$\rightarrow \frac{di_L}{dt} = -\frac{v_c}{4} - 3\frac{i_L}{4} + \frac{3i_s}{4}$$

$$\text{C برای گره } KCL \rightarrow -0/1\frac{dv_c}{dt} + \frac{3i_L - 0/3\frac{dv_c}{dt} - v_c}{3}$$

$$+ \frac{\left(3i_L - 0/3\frac{dv_c}{dt} - v_c\right) - \left(3i_L - 0/3\frac{dv_c}{dt} + 4\frac{di_L}{dt}\right)}{3} = 0 \rightarrow \frac{dv_c}{dt} = -\frac{v_c}{12} + \frac{5i_L}{4} - \frac{i_s}{6}$$

$$\text{برای مش ۱ } KVL \rightarrow v_s = 4\frac{di_L}{dt} + 3i_L - 0/3\frac{dv_c}{dt} = -\frac{3v_c}{5} - 3i_L + \frac{27v_s}{5}$$

در ادامه به محاسبه پاسخ ضربه i_L می پردازیم. $(i_s(t) = \delta(t))$

$$Dv_c = \frac{dv_c}{dt} = -\frac{v_c}{12} + \frac{5i_L}{4} - \frac{i_s}{6} \rightarrow v_c = \frac{15i_L - 2i_s}{12D + 1}$$

$$Di_L = \frac{di_L}{dt} = -\frac{v_c}{4} - \frac{3i_L}{4} + \frac{3}{4}i_s = -\frac{1}{4}\left(\frac{15i_L - 2i_s}{12D + 1}\right) - \frac{3i_L}{4} + \frac{3i_s}{4}$$

$$\left(48D^2 + 40D + 18\right)i_L = \left(36D + 5\right)i_s \rightarrow 48\frac{d^2 i_L}{dt^2} + 40\frac{di_L}{dt} + 18i_L = 36\delta'(t) + 5\delta(t)$$

در $t = 0^-$ سلف مدار باز بوده و لذا $i_L(0^-) = 0$ می باشد و با انتگرال گیری در فاصله 0^- تا 0^+ از معادله فوق داریم:

$$48\frac{di_L(0^+)}{dt} = 5 \rightarrow \frac{di_L(0^+)}{dt} = \frac{5}{48}$$

همچنین می دانیم که به ازای $t>0$ ، $\delta'(t)=\delta(t)=0$ می باشد پس معادله فوق را می توان بصورت زیر نوشت.

$$28\frac{d^2 i_L}{dt^2}+20\frac{di_L}{dt}+12 i_L=0 \;,\; i_L(0^+)=0 \;,\; \frac{di_L(0^+)}{dt}=\frac{5}{28}$$

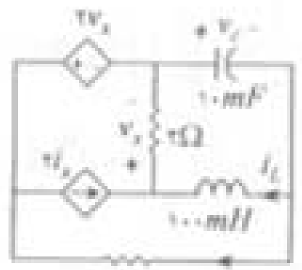
معادله مشخصه : $28s^2+20s+12 \rightarrow s=-\frac{1}{2},-\frac{1}{3} \rightarrow i_L(t)=K_1e^{-\frac{1}{2}t}+K_2e^{-\frac{1}{3}t} \;,\; t>0$

$$\begin{cases} i_L(0^+)=0 \rightarrow K_1+K_2=0 \\ \frac{di_L(0^+)}{dt}=\frac{5}{28} \rightarrow -\frac{1}{2}K_1-\frac{1}{3}K_2=\frac{5}{58} \end{cases} \rightarrow K_1=-\frac{5}{8} \;,\; K_2=\frac{5}{8}$$

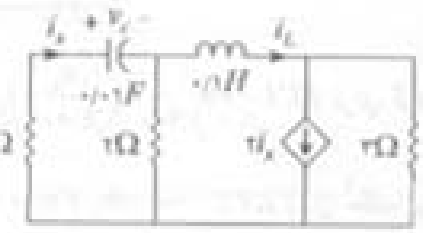
$$\rightarrow i_L(t)=\frac{5}{8}\left(e^{-\frac{t}{3}}-e^{-\frac{t}{2}}\right) \;,\; t>0$$

مسئله ۵۰

معادلات حالت را بنویسید.



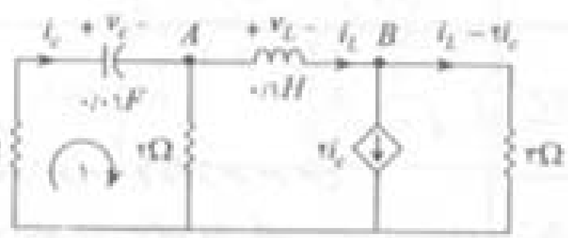
(ب)



(الف)

شکل مسئله ۵۰

حل : الف ـ مدار(الف) را مجدداً رسم کرده، جریان سلف و ولتاژ خازن را به عنوان متغیرهای حالت بر می گزینیم.



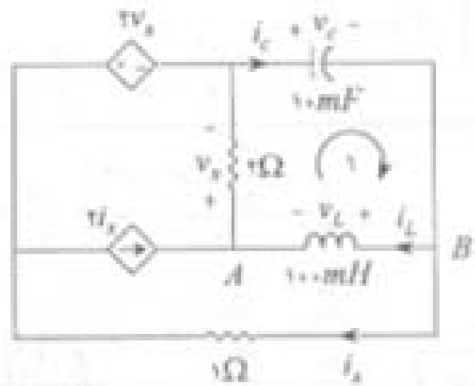
$v_B=3(i_L-2i_C)=3i_L-0/06\frac{dv}{}$ $\qquad$ $v_A=v_L+v_B=0/1\frac{di_L}{dt}+3i_L-0/06\frac{dv_C}{dt}$

$$\text{KCL برای گره } A \rightarrow -0.01\frac{dv_c}{dt}+\frac{0.1\frac{di_L}{dt}+2i_L-0.06\frac{dv_c}{dt}}{2}+i_L=0$$

$$\text{KVL برای مش ۱} \rightarrow 0.01\frac{dv_c}{dt}+v_c+0.1\frac{di_L}{dt}+2i_L-0.06\frac{dv_c}{dt}=0$$

$$\rightarrow \begin{cases} 8\frac{dv_c}{dt}+10\frac{di_L}{dt}=500\,i_L \\ 5\frac{dv_c}{dt}+10\frac{di_L}{dt}=300\,i_L+100\,v_c \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{dv_c}{dt}=\frac{200}{3}i_L-\frac{100}{3}v_c \\ \frac{di_L}{dt}=\frac{10}{3}i_c-\frac{80}{3}v_c \end{cases}$$

ب ـ با انتخاب ولتاژ خازن و جریان سلف به عنوان متغیر های حالت ، شکل (ب) را مجدداً بصورت زیر رسم می کنیم.



$$\begin{cases} \text{KCL برای گره } A \rightarrow -2i_x+\frac{v_x}{2}-i_L=0 \\ \text{KVL برای حلقه بیرونی} \rightarrow 2v_x+v_c+i_x=0 \end{cases} \rightarrow v_x=\frac{2}{9}i_L-\frac{4}{9}v_c \ , \ i_x=-\frac{4}{9}i_L-\frac{1}{9}v_c$$

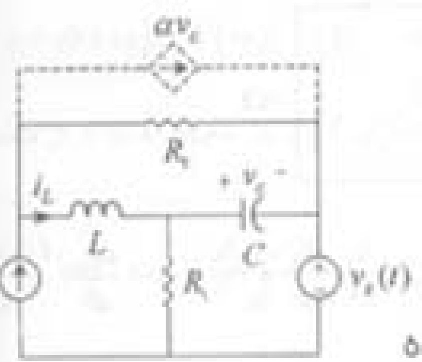
$$\text{KCL برای گره } B \rightarrow -10\times10^{-3}\frac{dv_c}{dt}+i_L-\frac{4}{9}i_L-\frac{1}{9}v_c=0 \rightarrow \frac{dv_c}{dt}=\frac{500}{9}i_L-\frac{100}{9}v_c$$

$$\text{KVL برای مش ۱} \rightarrow -\frac{2}{9}i_L-\frac{4}{9}v_c+v_c+100\times10^{-3}\frac{di_L}{dt}=0 \rightarrow \frac{di_L}{dt}=-\frac{50}{9}v_c-\frac{20}{9}i_L$$

مسئله ۵۱

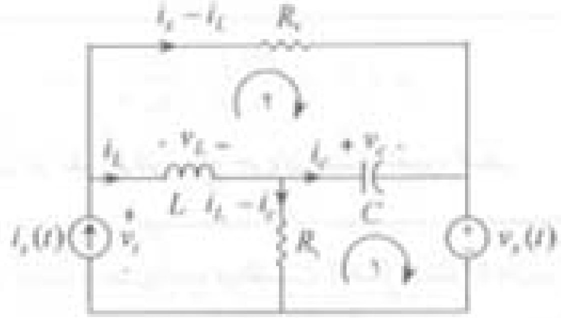
الف- معادلات حالت را بنویسید و ولتاژ دو سر منبع جریان i_s را بر حسب متغیر های حالت بیان کنید.

ب- اگرمنبع جریان وابسته اضافه شود، معادلات حالت را بار دیگر بنویسید.



شکل مسئله ۵۱

حل : الف ـ در این حالت مدار بصورت زیراست که با انتخاب ولتاژخازن وجریان سلف به عنوان متغیرهای حالت خواهیم داشت.



$$\text{برای مش ۱ } KVL \rightarrow -R_t(i_L - i_c) + v_c + v_s = 0 \rightarrow \frac{dv_c}{dt} = \frac{i_c}{C} = -\frac{v_c}{R_tC} + \frac{i_L}{C} + \frac{v_s}{R_tC}$$

$$\text{برای مش ۲ } KVL \rightarrow R_s(i_s - i_L) - v_c - L\frac{di_L}{dt} = 0 \rightarrow \frac{di_L}{dt} = -\frac{v_c}{L} - \frac{R_s}{L}i_L + \frac{R_s}{L}i_s$$

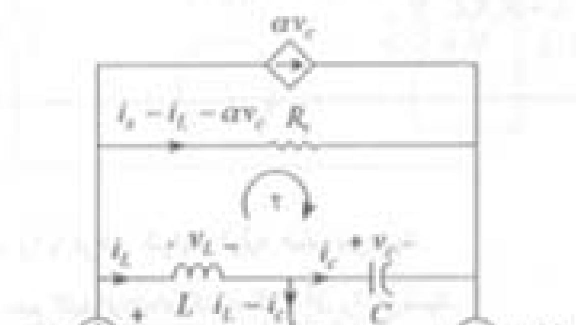
و برای محاسبه ولتاژ دو سر i_s داریم.

$$\text{برای مش بیرونی } KVL \rightarrow -v_1 + R_s(i_s - i_L) + v_s = 0 \rightarrow v_1 = -R_si_L + R_si_s + v_s$$

$$\rightarrow v_1 = -R_si_L + \left(L\frac{di_L}{dt} + v_c - R_si_L\right) + \left(R_tC\frac{dv_c}{dt} + v_c - R_ti_L\right)$$

$$\rightarrow v_1 = L\frac{di_L}{dt} + R_tC\frac{dv_c}{dt} + 2v_c - (R_t + 2R_s)i_L \rightarrow v_1 = -R_si_L + R_si_s + v_s$$

ب ـ در این حالت مدار بصورت زیر می باشد.



با انتخاب ولتاژ خازن و جریان سلف به عنوان متغیر های حالت خواهیم داشت.

$$\text{برای مش۱ } KVL \rightarrow -R_t\left(i_L - C\frac{dv_c}{dt}\right) + v_c + v_s = 0 \rightarrow \frac{dv_c}{dt} = -\frac{v_c}{R_tC} + \frac{i_L}{C} - \frac{v_s}{R_tC}$$

$$\text{برای مش ۲}\; KVL \rightarrow R_s\left(i_s - i_L - \alpha v_c\right) - v_c - L\frac{di_L}{dt} = 0 \rightarrow \frac{di_L}{dt} = -\frac{\left(1+\alpha R_s\right)}{L}v_c - \frac{R_s}{L}i_L + \frac{R_s}{L}i_s$$

مسئله ۵۲

Q مدار مسئله ۵۱ را بدون در نظر گرفتن منبع جریان وابسته تعیین کنید.

حل : با توجه به معادلات حالت بدست آمده در قسمت (الف) مسئله ۵۱ داریم.

$$\frac{di_L}{dt} = -\frac{v_c}{L} - \frac{R_s}{L}i_L + \frac{R_s}{L}i_s \quad \rightarrow \quad v_c = -L\frac{di_L}{dt} - R_s i_L + R_s i_s$$

$$\frac{dv_c}{dt} = -\frac{v_c}{R_1 C} + \frac{i_L}{C} + \frac{v_s}{R_1 C} \quad \rightarrow \quad -L\frac{d^2 i_L}{dt^2} - R_s\frac{di_L}{dt} + R_s\frac{di_s}{dt}$$

$$= \frac{L}{R_1 C}\frac{di_L}{dt} + \frac{R_s}{R_1 C}i_L + \frac{R_s}{R_1 C}i_s + \frac{i_L}{C} + \frac{v_s}{R_1 C}$$

$$\rightarrow \quad \frac{d^2 i_L}{dt^2} + \left(\frac{1}{R_1 C} + \frac{R_s}{L}\right)\frac{di_L}{dt} + \frac{1}{LC}\left(\frac{R_s}{R_1} + 1\right)i_L = \frac{R_s}{L}\frac{di_s}{dt} - \frac{R_s}{R_1 LC}i_s - \frac{1}{R_1 LC}v_s$$

$$2\alpha = \frac{1}{R_1 C} + \frac{R_s}{L} \quad \rightarrow \quad \alpha = \frac{L + R_1 R_s C}{2R_1 CL}\;,\; \omega_0^2 = \frac{1}{LC}\left(\frac{R_s}{R_1} + 1\right) \quad \rightarrow \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{R_1 + R_s}{R_1 LC}}$$

$$Q = \frac{\omega_0}{2\alpha} = \frac{\sqrt{\dfrac{R_1 + R_s}{R_1 LC}}}{\dfrac{L + R_1 R_s C}{R_1 CL}} = \frac{1}{L + R_1 R_s C}\sqrt{R_1 LC\left(R_1 + R_s\right)}$$

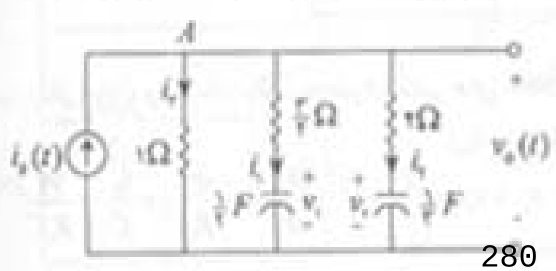
مسئله ۵۳

الف- معادلات حالت را با فرض شرایط اولیه صفر بنویسید.

ب- دوگان مدار را رسم کنید و معادلات حالت آن را بنویسید.

پ- آیا ارتباطی میان معادلات حالت بدست آمده در قسمت های (الف) و (ب) وجود دارد.

ت- پاسخ ضربه v_0 را تعیین کنید.



شکل مسئله ۵۳

حل : با توجه به شکل و با انتخاب ولتاژ خازنها به عنوان متغیر های حالت داریم.

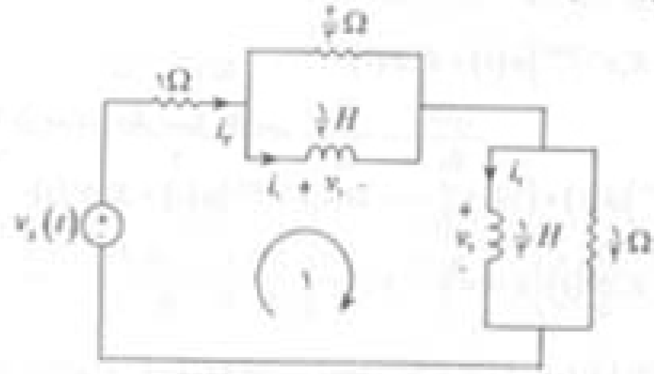
$$\begin{cases} v_a = v_1 + 4i_2 = v_1 + \dfrac{4}{3}\dfrac{dv_2}{dt} \\[2ex] v_a = v_2 + \dfrac{3}{2}i_1 = v_2 + \dfrac{3}{4}\dfrac{dv_1}{dt} \end{cases} \rightarrow \quad \frac{3}{4}\frac{dv_1}{dt} - \frac{4}{3}\frac{dv_2}{dt} = -v_1 + v_2$$

(A) برای گره KCL $\rightarrow \quad -i_s + \dfrac{v_1 + \dfrac{3}{4}\dfrac{dv_1}{dt}}{1} + \dfrac{1}{2}\dfrac{dv_1}{dt} + \dfrac{1}{3}\dfrac{dv_2}{dt} = 0$

$$\rightarrow \quad \frac{5}{4}\frac{dv_1}{dt} + \frac{1}{3}\frac{dv_2}{dt} = -v_1 + i_s \quad \rightarrow \begin{cases} 9\dfrac{dv_1}{dt} - 16\dfrac{dv_2}{dt} = -12v_1 + 12v_2 \\[2ex] 15\dfrac{dv_1}{dt} + 4\dfrac{dv_2}{dt} = -12v_1 + 12i_s \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \dfrac{dv_1}{dt} = -\dfrac{20}{23}v_1 + \dfrac{4}{23}v_2 + \dfrac{16}{23}i_s \\[2ex] \dfrac{dv_2}{dt} = \dfrac{6}{23}v_1 - \dfrac{15}{23}v_2 + \dfrac{9}{23}i_s \end{cases}$$

ب ـ دوگان مدار فوق بصورت زیر خواهد بود.



$$\begin{cases} i_s = \dfrac{v_1}{\frac{4}{3}} + i_1 = \dfrac{3}{4}\dfrac{di_1}{dt} + i_1 \\[2ex] i_s = \dfrac{v_2}{\frac{3}{4}} + i_2 = \dfrac{4}{3}\dfrac{di_2}{dt} + i_2 \end{cases} \rightarrow \quad \frac{3}{4}\frac{di_1}{dt} - \frac{4}{3}\frac{di_2}{dt} = -i_1 + i_2$$

برای مش ۱ KVL $\rightarrow \quad -v_s + \dfrac{3}{4}\dfrac{di_1}{dt} + i_1 + \dfrac{1}{2}\dfrac{di_1}{dt} + \dfrac{1}{3}\dfrac{di_2}{dt} = 0 \quad \rightarrow \quad \dfrac{5}{4}\dfrac{di_1}{dt} + \dfrac{1}{3}\dfrac{di_2}{dt} = -i_1 + v_s$

$$\rightarrow\ \begin{cases} 9\dfrac{di_1}{dt}-16\dfrac{di_2}{dt}=-12i_1+12i_2 \\[2mm] 15\dfrac{di_1}{dt}+4\dfrac{di_2}{dt}=-12i_1+12v_s \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{di_1}{dt}=-\dfrac{30}{23}i_1+\dfrac{4}{23}i_2+\dfrac{16}{23}v_s \\[2mm] \dfrac{di_2}{dt}=\dfrac{6}{23}i_1-\dfrac{15}{23}i_2+\dfrac{9}{23}v_s \end{cases}$$

پ ـ معادلات یکسان بوده با این تفاوت که بجای ولتاژ خازنها، جریان سلفها و بجای منبع جریان، منبع ولتاژ جایگزین شده است.

ت ـ با توجه به معادلات بدست آمده در قسمت(الف) و با استفاده از نمایش اپراتوری معادلات دیفرانسیل داریم

$$v_o=v_1+\frac{4}{3}\frac{dv_1}{dt}=\left(1+\frac{4}{3}D\right)v_1 \rightarrow v_1=\frac{3}{4D+3}v_o \ ,\ v_o=v_2+\frac{3}{4}\frac{dv_2}{dt} \rightarrow v_2=\frac{4}{3D+4}v_o$$

$$15\frac{dv_1}{dt}+4\frac{dv_2}{dt}=-12v_1+12i_s \rightarrow \frac{60D}{3D+4}v_o+\frac{12D}{4D+3}v_o=-\frac{48}{3D+4}v_o+12i_s$$

$$\left(23D^2+25D+12\right)v_o=\left(12D^2+25D+12\right)i_s$$

$$\rightarrow\ 23\frac{d^2v_o}{dt^2}+25\frac{dv_o}{dt}+12v_o=12\delta''(t)+25\delta'(t)+12\delta(t)$$

معادله مشخصه : $23s^2+25s+12=0 \rightarrow s=-1\ ,\ -0/52$

$$\rightarrow\ v_o(t)=\left(K_1e^{-t}+K_2e^{-0/52t}\right)u(t)+K_3\delta(t)$$

با جایگذاری $v_o(t)$ در معادله دیفرانسیل داریم

$$\frac{dv_o}{dt}=\left(K_1e^{-t}+K_2e^{-0/52t}\right)\delta(t)+\left(-K_1e^{-t}-0/52K_2e^{-0/52t}\right)u(t)+K_3\delta'(t)$$

$$=\left(K_1+K_2\right)\delta(t)+K_3\delta'(t)\ ,\ t=0$$

$$\frac{d^2v_o}{d^2t}=\left(K_1e^{-t}+K_2e^{-0/52t}\right)\delta'(t)+\left(-K_1e^{-t}-0/52e^{-0/52t}\right)\delta(t)+\left(-K_1e^{-t}-0/52e^{-0/52t}\right)\delta(t)$$

$$+\left(K_1e^{-t}+(0/52)^2K_2e^{-0/52t}\right)u(t)+K_3\delta''(t)$$

$$=\left(K_1+K_2\right)\delta'(t)+\left(-2K_1-1/04K_2\right)\delta(t)+K_3\delta''(t)\ ,\ t=0$$

$$23K_3\delta''(t)+\left(23K_1+23K_2+25K_3\right)\delta'(t)+\left(-11K_1+11/08K_2+12K_3\right)\delta(t)$$

$$=12\delta''(t)+25\delta'(t)+12\delta(t)$$

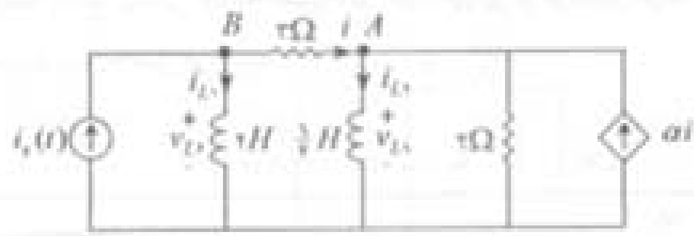
$$\rightarrow \begin{cases} 23K_0 = 12 \\ 23K_1 + 23K_2 + 35K_0 = 25 \\ -11K_1 + 11/08K_2 + 12K_0 = 12 \end{cases} \rightarrow K_0 = 0/52\ ,\ K_1 = 0/09\ ,\ K_2 = 0/2$$

$$\rightarrow v_o(t) = \left(0/09e^{-t} + 0/2e^{-0/5t}\right)u(t) + 0/52\delta(t)$$

مسئله ۵۴

معادلات حالت را نوشته و α را چنان تعیین کنید که مدار میرایی بحرانی باشد.

آیا می توان α را چنان تعیین کرد که مدار نوسانی باشد. در صورت مثبت بودن جواب این کار را انجام دهید.



شکل مسئله ۵۴

حل : با توجه به شکل مسئله و با انتخاب جریان سلفها به عنوان متغیرهای حالت داریم.

$$i = \frac{v_B - v_A}{3} = \frac{v_{L_1} - v_{L_2}}{3} = \frac{2\frac{di_{L_1}}{dt} - \frac{1}{2}\frac{di_{L_2}}{dt}}{3} = \frac{2}{3}\frac{di_{L_1}}{dt} - \frac{1}{6}\frac{di_{L_2}}{dt}$$

$$\text{(A)}\ \text{برای گره}\ KCL \rightarrow -\left(\frac{2}{3}\frac{di_{L_1}}{dt} - \frac{1}{6}\frac{di_{L_2}}{dt}\right) + i_{L_2} + \frac{\frac{1}{2}\frac{di_{L_2}}{dt}}{3} - \alpha\left(\frac{2}{3}\frac{di_{L_1}}{dt} - \frac{1}{6}\frac{di_{L_2}}{dt}\right) = 0$$

$$\text{(B)}\ \text{برای گره}\ KCL \rightarrow -i_s + i_{L_1} + \frac{2}{3}\frac{di_{L_1}}{dt} - \frac{1}{6}\frac{di_{L_2}}{dt} = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} 8(\alpha+1)\frac{di_{L_1}}{dt} - (2\alpha+5)\frac{di_{L_2}}{dt} = 12i_{L_2} \\ 4\frac{di_{L_1}}{dt} - \frac{di_{L_2}}{dt} = -6i_{L_1} + 6i_s \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{di_{L_1}}{dt} = -\frac{1}{2}(2\alpha+5)i_{L_1} - i_{L_2} + \frac{1}{2}(2\alpha+5)i_s \\ \frac{di_{L_2}}{dt} = -4(\alpha+1)i_{L_1} - 4i_{L_2} + 4(\alpha+1)i_s \end{cases}$$

برای محاسبه α ابتدا باید معادله مشخصه را با استفاده از رابطه $|SI - A| = 0$ بدست آورد که در آن ماتریس A ماتریس انتقالی معادلات حالت و I ماتریس واحد هم مرتبه با A می باشد.

$$SI - A = S\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}(2\alpha+5) & -1 \\ -2(\alpha+1) & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S+\frac{1}{2}(2\alpha+5) & 1 \\ 2(\alpha+1) & S+2 \end{bmatrix}$$

$$|SI - A| = 0 \rightarrow \left[S+\frac{1}{2}(2\alpha+5)\right](S+2) - 2(\alpha+1) = 0 \rightarrow S^2 + \left(\alpha+\frac{13}{2}\right)S + 6 = 0$$

$$S^2 + AS + \omega_0^2 = 0 \quad , \quad A = \alpha + \frac{13}{2} \quad , \quad \omega_0^2 = 6 \rightarrow \omega_0 = \sqrt{6}$$

شرط اینکه پاسخ میرایی بحرانی شود این است که ثابت میرایی برابر فرکانس تشدید گردد و یا:

$$\frac{A}{2} = \omega_0 \rightarrow \frac{\alpha + \frac{13}{2}}{2} = \sqrt{6} \rightarrow \alpha = -1.6$$

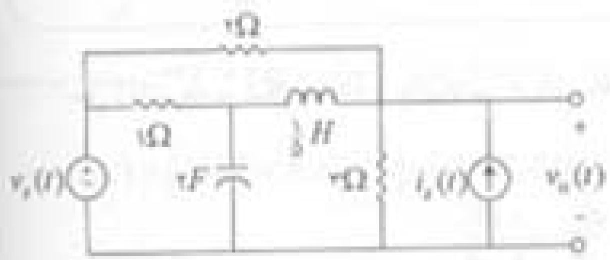
و برای اینکه پاسخ نوسانی داشته باشیم باید ثابت میرایی برابر صفر گردد و این امکان پذیر می باشد و α متناظر با آن بصورت زیر حاصل می شود

$$A = 0 \rightarrow \alpha + \frac{13}{2} = 0 \rightarrow \alpha = -6.5$$

مسئله ۵۵

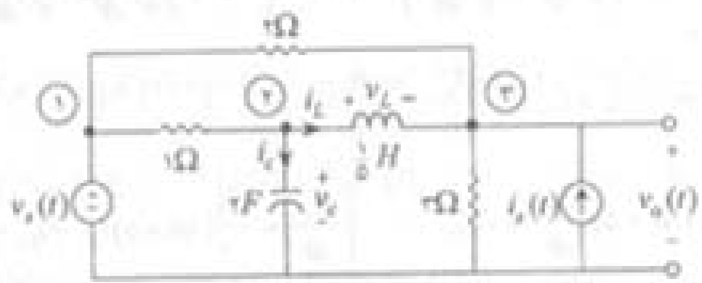
الف- معادلات حالت را بنویسید.

ب- v_0 را برحسب متغیر های حالت بیان کنید.



شکل مسئله ۵۵

حل: با انتخاب ولتاژ خازن و جریان سلف به عنوان متغیر های حالت داریم.



$$v_1 = v_s \ , \ v_2 = v_c \ , \ v_3 = v_c - v_L = v_c - \frac{1}{5}\frac{di_L}{dt}$$

$$\text{KCL برای گره ③} \rightarrow -i_L + \frac{v_c - \frac{1}{5}\frac{di_L}{dt}}{3} + i_s + \frac{v_c - \frac{1}{5}\frac{di_L}{dt} - v_s}{2} = 0$$

$$\rightarrow \quad \frac{di_L}{dt} = -6i_L + 5v_c - 6i_s - 3v_s$$

برای گره ② KCL
$$\rightarrow \quad \frac{v_c - v_s}{1} + 2\frac{dv_c}{dt} + i_L = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dv_c}{dt} = -\frac{1}{2}i_L - \frac{1}{2}v_c + \frac{1}{2}v_s$$

پ ـ با نوشتن KVL برای حلقه شامل خازن ، سلف و v_o داریم

$$-v_c + \frac{1}{5}\frac{di_L}{dt} + v_o = 0 \rightarrow \quad -v_c + \frac{1}{5}\left(-6i_L + 5v_c - 6i_s - 3v_s\right) + v_o = 0 \quad \rightarrow v_o = \frac{6}{5}i_L + \frac{6}{5}i_s + \frac{3}{5}v_s$$

مسئله ۵۶

مسیر فضای حالت را برای $i_L(0) = v_c(0) = 1$ و $\Delta t = 0.2$ ثانیه رسم کنید.

شکل مسئله ۵۶

حل :

$$\rightarrow \begin{cases} -v + 2\frac{di_L}{dt} + 3i_L = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{di_L}{dt} = \frac{v}{2} - \frac{3}{2}i_L \\ \frac{v}{2} + i_L + \frac{dv}{dt} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dv}{dt} = -\frac{v}{2} - i_L \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{dv}{dt} \\ \frac{di_L}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 & -1 \\ 0.5 & -1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ i_L \end{bmatrix}$$

$$\dot{X}(t) = AX(t) \quad , \quad \dot{X}(t) = \begin{bmatrix} \frac{dv}{dt} \\ \frac{di_L}{dt} \end{bmatrix} \quad , \quad A = \begin{bmatrix} -0.5 & -1 \\ 0.5 & -1.5 \end{bmatrix} \quad , \quad X(t) = \begin{bmatrix} v \\ i_L \end{bmatrix}$$

$$X\left[(K+1)\Delta t\right] = X(K\Delta t) + AX(K\Delta t)\Delta t \quad , \quad (K = 0, 1, 2, \ldots, N) = (I + \Delta tA)X(K\Delta t)$$

$$X(0.2K + 0.2) = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 0.2\begin{bmatrix} -0.5 & -1 \\ 0.5 & -1.5 \end{bmatrix}\right)X(0.2K) = \begin{bmatrix} 0.9 & -0.2 \\ 0.1 & 0.7 \end{bmatrix}X(0.2K)$$

$$X = \begin{bmatrix} v \\ i_L \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} v(0.2K + 0.2) \\ i_L(0.2K + 0.2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9 & -0.2 \\ 0.1 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(0.2K) \\ i_L(0.2K) \end{bmatrix}$$

$$K = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} v(0.2) \\ i_L(0.2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9 & -0.2 \\ 0.1 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7 \\ 0.8 \end{bmatrix}$$

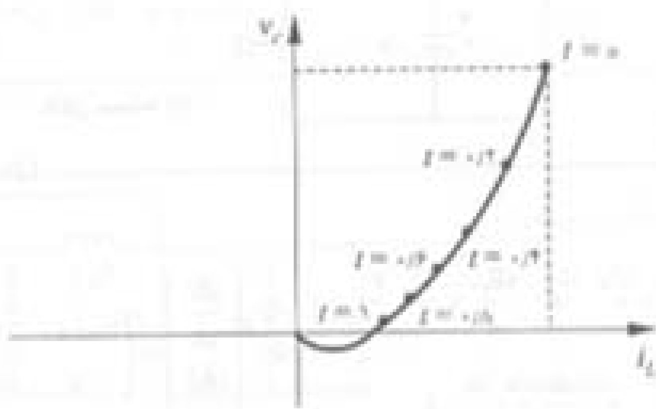
$$K=1 \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} v(0.4) \\ i_L(0.4) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.9 & -0.2 \\ 0.1 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.7 \\ 0.8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.47 \\ 0.63 \end{bmatrix}$$

$$K=2 \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} v(0.6) \\ i_L(0.6) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.9 & -0.2 \\ 0.1 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.47 \\ 0.63 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.39 \end{bmatrix}$$

$$K=3 \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} v(0.8) \\ i_L(0.8) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.9 & -0.2 \\ 0.1 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.39 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.19 \\ 0.25 \end{bmatrix}$$

$$K=4 \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} v(1) \\ i_L(1) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.9 & -0.2 \\ 0.1 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.19 \\ 0.25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.12 \\ 0.15 \end{bmatrix}$$

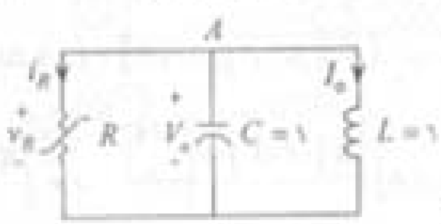
و اگر به همین ترتیب ادامه دهیم به حالت دایمی مدار می رسیم یعنی $\begin{bmatrix} v(\infty) \\ i_L(\infty) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ که در مسیر فضای حالت رسم شده در نظر گرفته شده است.



مسئله ۵۷

با شروع از حالت اولیه $I_0 = 1$ و $V_0 = 2$ مسیر فضای حالت را با فرض $\Delta t = 0.1$ رسم کنید.

$(i_R = -v_R + v_R^3)$



شکل مسئله ۵۷

حل : با توجه به شکل مسئله داریم.

$$v_L = v_R = V_0 \quad \rightarrow \quad i_R = -V_0 + V_0^3 \quad , \quad \frac{dI_0}{dt} = v_L = V_0$$

Ⓐ برای گره ۰ $KCL \rightarrow -V_0 + V_0^3 + \frac{dV_0}{dt} + I_0 = 0 \rightarrow \frac{dV_0}{dt} = V_0 - V_0^3 - I_0$

$$X_1(t) = \begin{bmatrix} V_0 \\ I_0 \end{bmatrix} \rightarrow \frac{d\,X_1(t)}{dt} = f_1(V_0, I_0) = \begin{bmatrix} V_0 - V_0^3 - I_0 \\ V_0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \frac{X_1((K+1)\Delta t) - X_1(K\Delta t)}{\Delta t} \approx \begin{bmatrix} V_0 - V_0^3 - I_0 \\ V_0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow X_1\left[(K+1)\Delta t\right] = \Delta t \begin{bmatrix} V_0(K\Delta t) - V_0^3(K\Delta t) - I_0(K\Delta t) \\ V_0(K\Delta t) \end{bmatrix} + X_1(K\Delta t)$$

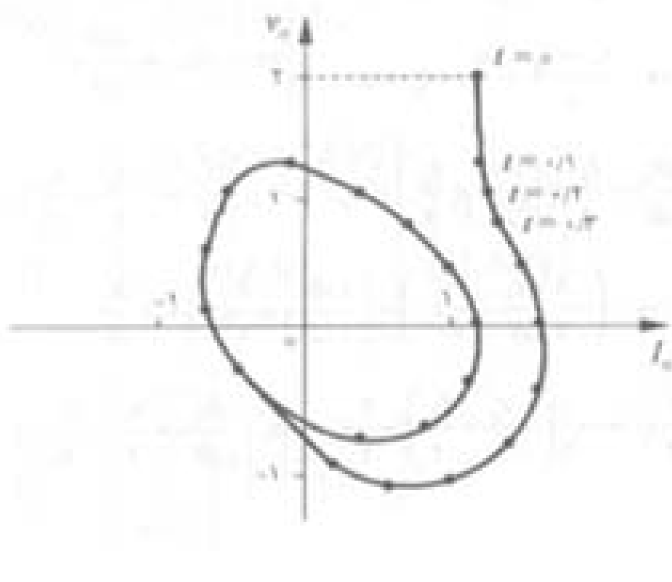
$$\rightarrow \begin{bmatrix} V_0(0.1K + 0.1) \\ I_0(0.1K + 0.1) \end{bmatrix} = 0.1 \begin{bmatrix} V_0(K\Delta t) - V_0^3(K\Delta t) - I_0(K\Delta t) \\ V_0(K\Delta t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_0(0.1K) \\ I_0(0.1K) \end{bmatrix}$$

$$K = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} V_0(0.1) \\ I_L(0.1) \end{bmatrix} = 0.1 \begin{bmatrix} 2 - 2^3 - 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.3 \\ 1.2 \end{bmatrix}$$

$$K = 1 \rightarrow \begin{bmatrix} V_0(0.2) \\ I_0(0.2) \end{bmatrix} = 0.1 \begin{bmatrix} 1.3 - (1.3)^3 - 1.2 \\ 1.3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.3 \\ 1.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.09 \\ 1.33 \end{bmatrix}$$

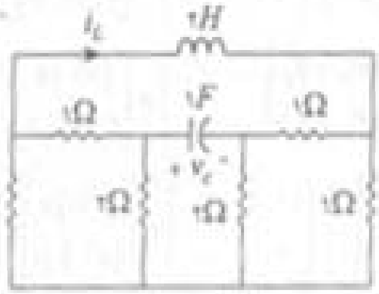
$$K = 2 \rightarrow \begin{bmatrix} V_0(0.3) \\ I_0(0.3) \end{bmatrix} = 0.1 \begin{bmatrix} 1.09 - (1.09)^3 - 1.33 \\ 1.09 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.09 \\ 1.33 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.94 \\ 1.44 \end{bmatrix}$$

همین ترتیب نقاط دیگر را بدست خواهیم آورد و مسیر فضای حالت را رسم می کنیم.



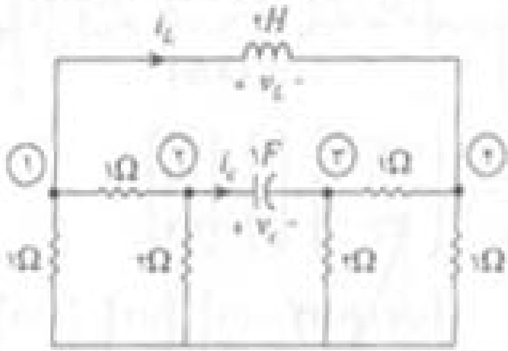
مسئله ۵۸

معادلات حالت را بنویسید.



شکل مسئله ۵۸

حل : با انتخاب ولتاژ خازن و جریان سلف به عنوان متغیر های حالت داریم.



$$\begin{cases} KCL \text{ برای گره } ① \rightarrow \dfrac{v_1}{1}+\dfrac{v_1-v_2}{1}+i_L=0 \\ KCL \text{ برای گره } ② \rightarrow \dfrac{v_2-v_1}{1}+\dfrac{v_2}{2}+i_c=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2v_1-v_2=-i_L \\ 2v_1-3v_2=\dfrac{2dv_c}{dt} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v_1=-\dfrac{1}{2}\dfrac{dv_c}{dt}-\dfrac{3}{4}i_L \\ v_2=-\dfrac{dv_c}{dt}-\dfrac{i_L}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} KCL \text{ برای گره } ④ \rightarrow \dfrac{v_4}{1}+\dfrac{v_4-v_3}{1}-i_L=0 \\ KCL \text{ برای گره } ③ \rightarrow \dfrac{v_3-v_4}{1}+\dfrac{v_3}{2}-i_c=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2v_4-v_3=i_L \\ 2v_4-3v_3=\dfrac{-2dv_c}{dt} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v_3=\dfrac{dv_c}{dt}+\dfrac{1}{2}i_L \\ v_4=\dfrac{1}{2}\dfrac{dv_c}{dt}+\dfrac{3}{4}i_L \end{cases}$$

$$v_2-v_3=v_c \rightarrow -\frac{dv_c}{dt}-\frac{i_L}{2}-\left(\frac{dv_c}{dt}+\frac{i_L}{2}\right)=v_c \rightarrow \frac{dv_c}{dt}=-\frac{v_c}{2}-\frac{i_L}{2}$$

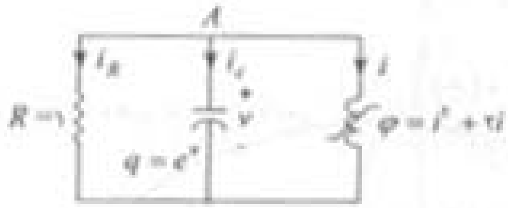
$$v_1-v_4=v_L=2\frac{di_L}{dt} \rightarrow \left(-\frac{1}{2}\frac{dv_c}{dt}-\frac{3}{4}i_L\right)-\left(\frac{1}{2}\frac{dv_c}{dt}+\frac{3}{4}i_L\right)=2\frac{di_L}{dt}$$

$$\rightarrow \frac{di_L}{dt}=-\frac{1}{2}\frac{dv_c}{dt}-\frac{3}{4}i_L=-\frac{1}{2}\left(-\frac{v_c}{2}-\frac{i_L}{2}\right)-\frac{3}{4}i_L \rightarrow \frac{di_L}{dt}=\frac{v_c}{4}-\frac{i_L}{2}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} \dfrac{dv_c}{dt} \\ \dfrac{di_L}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_c \\ i_L \end{bmatrix}$$

مسئله ۵۹

مسیر فضای حالت را رسم کنید. ($v_c(0)=i_L(0)=1$ و $\Delta t=0/1$)



شکل مسئله ۵۹

حل : ولتاژ خازن و جریان سلف را به عنوان متغیرهای حالت بر می گزینیم. با توجه به شکل مسئله داریم.

KCL برای گره Ⓐ $\rightarrow i_R+i_c+i=0 \rightarrow \dfrac{v}{1}+\dfrac{dq}{dt}+i=0 \rightarrow v+e^v\dfrac{dv}{dt}+i=0$

$$\rightarrow \frac{dv}{dt}=-\frac{v+i}{e^v} \qquad U_L=v \rightarrow \frac{d\phi}{dt}=v \rightarrow (2i+2)\frac{di}{dt}=v \rightarrow \frac{di}{dt}=\frac{v}{2i+2}$$

$$X(t)=\begin{bmatrix} v \\ i \end{bmatrix} \rightarrow \frac{dX(t)}{dt}=\begin{bmatrix} \dfrac{dv}{dt} \\ \dfrac{di}{dt} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\dfrac{v+i}{e^v} \\ \dfrac{v}{2i+2} \end{bmatrix} \rightarrow \frac{X((K+1)\Delta t)-X(K\Delta t)}{\Delta t} \approx \begin{bmatrix} -\dfrac{v+i}{e^v} \\ \dfrac{v}{2i+2} \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow X((K+1)\Delta t) \approx \begin{bmatrix} -\dfrac{v+i}{e^v} \\ \dfrac{v}{2i+2} \end{bmatrix} + X(K\Delta t)$$

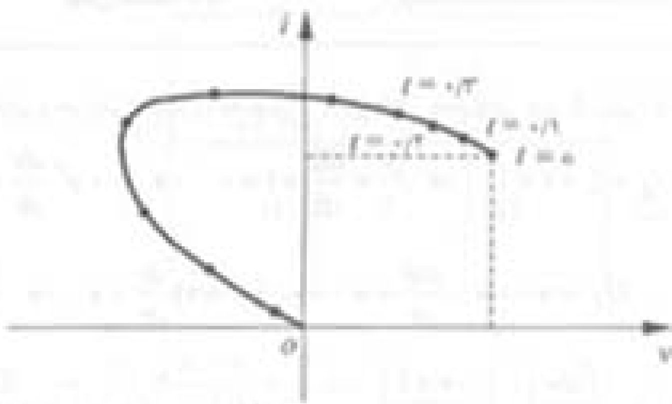
$$\rightarrow \begin{bmatrix} v(0/1K+0/1) \\ i(0/1K+0/1) \end{bmatrix} \approx 0/1 \begin{bmatrix} -\dfrac{v(K\Delta t)+i(K\Delta t)}{e^{v(K\Delta t)}} \\ \dfrac{v(K\Delta t)}{2i(K\Delta t)+2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v(0/1K) \\ i(0/1K) \end{bmatrix}$$

$$K=0 \rightarrow \begin{bmatrix} v(0/1) \\ i(0/1) \end{bmatrix} \approx 0/1 \begin{bmatrix} -\dfrac{1+1}{e^1} \\ \dfrac{1}{2+2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0/93 \\ 1/02 \end{bmatrix}$$

$$K=1 \rightarrow \begin{bmatrix} v(0.2) \\ i(0.2) \end{bmatrix} \approx 0.1 \begin{bmatrix} -\dfrac{0.93+1.02}{e^{0.93}} \\ \dfrac{0.93}{2(1.02)+2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.93 \\ 1.02 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.85 \\ 1.05 \end{bmatrix}$$

$$K=2 \rightarrow \begin{bmatrix} v(0.3) \\ i(0.3) \end{bmatrix} \approx 0.1 \begin{bmatrix} -\dfrac{0.85+1.05}{e^{0.85}} \\ \dfrac{0.85}{2(1.05)+2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.85 \\ 1.05 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.77 \\ 1.07 \end{bmatrix}$$

و اگر به همین صورت ادامه دهیم به حالت دایمی $\begin{bmatrix} v(\infty) \\ i_L(\infty) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ خواهیم رسید.



مسئله ۶۰

معادلات حالت را بنویسید و مسیر فضای حالت را برای شرایط اولیه زیر رسم کنید.

الف- $v_c(0)=2$ و $i_L(0)=0$

ب- $v_c(0)=2$ و $i_L(0)=2$

سعی کنید این مسئله را با کمک کامپیوتر حل کنید و مسیر فضای حالت را طوری رسم کنید که تمام مشخصه های آن دیده شوند.

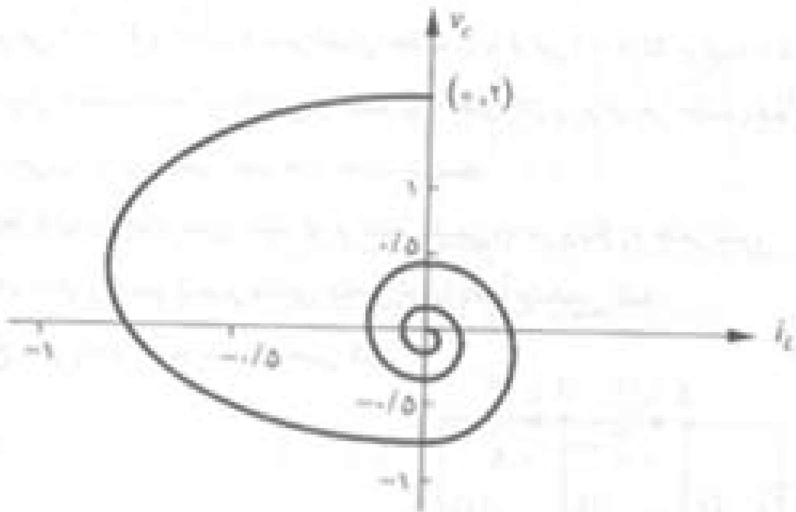
$$v_R = i_R + \frac{1}{3} i_R^3$$

شکل مسئله ۶۰

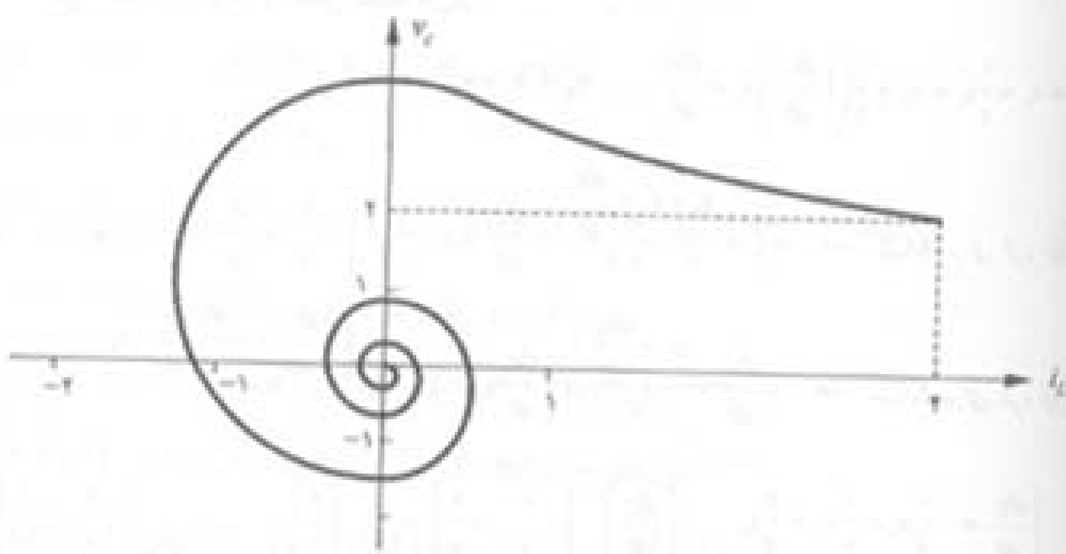
حل : الف ـ با انتخاب جریان خازن و ولتاژ سلف به عنوان متغیرهای حالت داریم.

$$\begin{cases} KVL \text{ برای حلقه مدار } \rightarrow \quad v_c + \dfrac{di_L}{dt} + i_R + \dfrac{1}{3} i_R^3 = 0 \\[2ex] i_R = i_c = i_L \quad \rightarrow \quad i_c = i_L \quad \rightarrow \quad \dfrac{1}{4}\dfrac{dv_c}{dt} = i_L \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{di_L}{dt} = -v_c - i_L - \dfrac{1}{3} i_L^3 \\[2ex] \dfrac{dv_c}{dt} = 4 i_L \end{cases}$$

که با درنظر گرفتن مقادیر اولیه $v_c(0) = 2$ و $i_L(0) = 0$ و با نقطه یابی مسیر فضای حالت بصورت زیر رسم خواهد شد.



ب ـ با توجه به دستگاه بدست آمده در قسمت (الف) و به ازای مقادیر اولیه $v_c(0) = 2$ و $i_L(0) = 4$ به روش تقریبی و با نقطه یابی مسیر فضای حالت بصورت زیر بدست خواهد آمد.



مسئله ۶۱

الف- معادلات حالت را برحسب متغیر های حالت v_1 و v_2 نوشته وآن را به شکل ماتریسی در آورید ماتریس A را مشخص کنید.

ب- مقادیر ویژه و بردار های ویژه ماتریس A را تعیین کنید.

پ- با فرض $v_1(0)=V_{01}$ و $v_2(0)=V_{02}$ پاسخ ورودی صفررا حساب کنید. و از روی آن ماتریس e^{At} را برای ماتریس A بدست آمده در قسمت الف تعیین کنید.

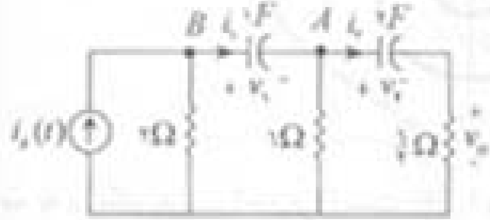
ت- با فرض $V_{01}=2$ و $V_{02}=3$ مسیرفضای حالت را با فرض $\Delta t=0/2$ برای $t=0$ تا $t=1$ حساب کنید و سپس با مقایسه جواب با نتایج قسمت پ خطای کار را برای هر حالت دقیقاً تعیین کنید.

ث- خروجی v_o را بر حسب متغیر های حالت بنویسید.

ج- شرایط اولیه را چنان تعیین کنید که فرکانس طبیعی ۱- در ولتاژ v_o ظاهر نشود.

چ- دوگان مدار را رسم کنید و مقادیر عناصر آن را دقیقاً مشخص کنید.

ح- پاسخ های پله و ضربه مدار را تعیین کنید.



شکل مسئله ۶۱

حل : الف ـ با توجه به شکل مسئله داریم

$$v_A = v_2 + \frac{1}{2}i_2 = v_2 + \frac{1}{2}\left(2\frac{dv_2}{dt}\right)v_2 + \frac{dv_2}{dt} \quad , \quad v_B = v_1 + v_A = v_1 + v_2 + \frac{dv_2}{dt}$$

$$\begin{cases} \text{KCL برای گره } Ⓑ \rightarrow -i_s + \dfrac{v_1 + v_2 + \dfrac{dv_2}{dt}}{2} + \dfrac{dv_1}{dt} = 0 \\ \text{KCL برای گره } Ⓐ \rightarrow -\dfrac{dv_1}{dt} + \dfrac{v_2 + \dfrac{dv_2}{dt}}{1} + 2\dfrac{dv_2}{dt} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2\dfrac{dv_1}{dt} + \dfrac{dv_2}{dt} = -v_1 - v_2 + i_s \\ -\dfrac{dv_1}{dt} + 3\dfrac{dv_2}{dt} = -v_2 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \dfrac{dv_1}{dt} = -\dfrac{3}{7}v_1 - \dfrac{2}{7}v_2 + \dfrac{6}{7}i_s \\ \dfrac{dv_2}{dt} = -\dfrac{1}{7}v_1 - \dfrac{2}{7}v_2 + \dfrac{2}{7}i_s \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} \dfrac{dv_1}{dt} \\ \dfrac{dv_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{3}{7} & -\dfrac{2}{7} \\ -\dfrac{1}{7} & -\dfrac{2}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{6}{7} \\ \dfrac{2}{7} \end{bmatrix} i_s \rightarrow A = \begin{bmatrix} -\dfrac{3}{7} & -\dfrac{1}{7} \\ -\dfrac{1}{7} & -\dfrac{2}{7} \end{bmatrix}$$

ب ـ مقادیر ویژه A جوابهای معادله $|SI-A|=0$ می باشند.

$$SI-A=S\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-\frac{3}{7}&-\frac{1}{7}\\-\frac{1}{7}&-\frac{3}{7}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s+\frac{3}{7}&\frac{1}{7}\\\frac{1}{7}&s+\frac{3}{7}\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow |SI-A|=\begin{bmatrix}s+\frac{3}{7}&\frac{1}{7}\\\frac{1}{7}&s+\frac{3}{7}\end{bmatrix}=s^2+\frac{6}{7}s+\frac{1}{7}=0 \quad\rightarrow\quad s=-\frac{3}{7}\pm\frac{\sqrt{2}}{7}$$

بنابراین بردارهای ویژه $\begin{bmatrix}-\frac{3}{7}+\frac{\sqrt{2}}{7}\\0\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}0\\-\frac{3}{7}+\frac{\sqrt{2}}{7}\end{bmatrix}$ خواهند بود.

پ ـ می دانیم که جوابهای معادله $|SI-A|=0$ فرکانسهای طبیعی مدار نیز می باشند و از آنجا که پاسخ ورودی صفر را می خواهیم لذا داشتن فرکانسهای طبیعی و شرایط اولیه کافی خواهد بود.

$$s=\frac{-3\pm\sqrt{2}}{7}=-0/23,-0/63$$

$$\rightarrow v_1(t)=K_1e^{-0/23t}+K_2e^{-0/63t}\ ,\ v_2(t)=K_3e^{-0/23t}+K_4e^{-0/63t}$$

با توجه به مقادیر اولیه داده شده و معادلات حالت داریم.

$$\begin{cases}v_1(0)=V_{01}\ \rightarrow\ K_1+K_2=V_{01}\\ \dfrac{dv_1(0)}{dt}=-\dfrac{3}{7}V_{01}-\dfrac{2}{7}V_{02}\ \rightarrow\ -0/23K_1-0/63K_2=-\dfrac{3}{7}V_{01}-\dfrac{2}{7}V_{02}\end{cases}$$

$$\rightarrow K_1=0/5V_{01}-0/71V_{02}\quad,\quad K_2=0/5V_{01}-0/71V_{02}$$

$$\begin{cases}v_2(0)=V_{02}\ \rightarrow\ K_3+K_4=V_{02}\\ \dfrac{dv_2(0)}{dt}=-\dfrac{1}{7}V_{01}-\dfrac{3}{7}V_{02}\ \rightarrow\ -0/23K_3-0/63K_4=-\dfrac{1}{7}V_{01}-\dfrac{3}{7}V_{02}\end{cases}$$

$$\rightarrow K_3=-0/35V_{01}+0/5V_{02}\ ,\ K_4=0/35V_{01}+0/5V_{02}$$

$$\rightarrow\quad\begin{cases}v_1(t)=(0/5V_{01}-0/71V_{02})e^{-0/23t}+(0/5V_{01}+0/71V_{02})e^{-0/63t}\\ v_2(t)=(-0/35V_{01}+0/5V_{02})e^{-0/23t}+(0/35V_{01}+0/5V_{02})e^{-0/63t}\end{cases}$$

$$\rightarrow\quad\begin{bmatrix}v_1(t)\\v_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0/5(e^{-0/23t}+e^{-0/63t})&0/71(e^{-0/63t}+e^{-0/23t})\\0/35(e^{-0/63t}-e^{-0/23t})&0/5(e^{-0/23t}+e^{-0/63t})\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_{01}\\V_{02}\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\; e^{At}=\begin{bmatrix} 0/5(e^{-0/226t}+e^{-0/631t}) & 0/707(e^{-0/226t}-e^{-0/631t}) \\ 0/35(e^{-0/226t}-e^{-0/631t}) & 0/5(e^{-0/226t}+e^{-0/631t}) \end{bmatrix}$$

ت ـ می خواهیم مسیر فضای حالت را با روش تقریبی و به ازای ورودی صفر بدست آوریم.

$$X(t)=\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \;\rightarrow\; \frac{dX(t)}{dt}=\begin{bmatrix} \dfrac{dv_1}{dt} \\ \dfrac{dv_2}{dt} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \\ -\frac{1}{7} & -\frac{3}{7} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\; \frac{X((K+1)\Delta t)-X(K\Delta t)}{\Delta t}\approx\begin{bmatrix} -\frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \\ -\frac{1}{7} & -\frac{3}{7} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\; \begin{bmatrix} v_1(0/2(K+1)) \\ v_2(0/2(K+1)) \end{bmatrix}\approx 0/2\begin{bmatrix} -\frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \\ -\frac{1}{7} & -\frac{3}{7} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1(0/2K) \\ v_2(0/2K) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} v_1(0/2K) \\ v_2(0/2K) \end{bmatrix}$$

$$K=0 \;\rightarrow\; \begin{bmatrix} v_1(0/2) \\ v_2(0/2) \end{bmatrix}\approx 0/2\begin{bmatrix} -\frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \\ -\frac{1}{7} & -\frac{3}{7} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1/675 \\ 2/686 \end{bmatrix}$$

$$K=1 \;\rightarrow\; \begin{bmatrix} v_1(0/4) \\ v_2(0/4) \end{bmatrix}\approx 0/2\begin{bmatrix} -\frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \\ -\frac{1}{7} & -\frac{3}{7} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/675 \\ 2/686 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1/675 \\ 2/686 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1/342 \\ 2/408 \end{bmatrix}$$

$$K=2 \;\rightarrow\; \begin{bmatrix} v_1(0/6) \\ v_2(0/6) \end{bmatrix}\approx 0/2\begin{bmatrix} -\frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \\ -\frac{1}{7} & -\frac{3}{7} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/342 \\ 2/408 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1/342 \\ 2/408 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1/107 \\ 2/143 \end{bmatrix}$$

$$K=3 \;\rightarrow\; \begin{bmatrix} v_1(0/8) \\ v_2(0/8) \end{bmatrix}\approx 0/2\begin{bmatrix} -\frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \\ -\frac{1}{7} & -\frac{3}{7} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/107 \\ 2/143 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1/107 \\ 2/143 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0/888 \\ 1/926 \end{bmatrix}$$

$$K=4 \;\rightarrow\; \begin{bmatrix} v_1(1) \\ v_2(1) \end{bmatrix}\approx 0/2\begin{bmatrix} -\frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \\ -\frac{1}{7} & -\frac{3}{7} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0/888 \\ 1/926 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0/888 \\ 1/926 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0/701 \\ 1/754 \end{bmatrix}$$

مقدار دقیق $\begin{bmatrix} v_1(0/2) \\ v_2(0/2) \end{bmatrix}$ با توجه به رابطه بدست آمده در قسمت (ب) برابر است با:

$$\begin{bmatrix} v_1(0/2) \\ v_2(0/2) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0/5(e^{-0/045}+e^{-0/126}) & 0/707(e^{-0/045}-e^{-0/126}) \\ 0/35(e^{-0/045}-e^{-0/126}) & 0/5(e^{-0/045}+e^{-0/126}) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1/677 \\ 2/702 \end{bmatrix}$$

پس در این حالت مقدار خطا برابر است با :

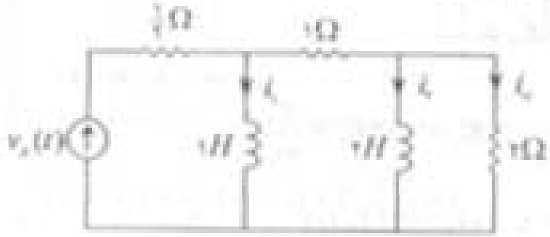
$$\rightarrow \begin{bmatrix} \Delta v_1(۰/۱) \\ \Delta v_2(۰/۱) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱/۶۷۷ - ۱/۶۷۵ \\ ۲/۷۰۲ - ۲/۶۸۶ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰/۰۰۲ \\ ۰/۰۱۶ \end{bmatrix}$$

با روشی مشابه مقدار خطا در سایر حالت ها را نیز می توان محاسبه کرد که این کار بر عهده شما خواننده محترم گذاشته می شود.

ث ـ با توجه به شکل مسئله داریم.

$$v_o = \frac{۱}{۲}\left(۲\frac{dv_2}{dt}\right) = \frac{dv_2}{dt} = -\frac{۱}{۷}v_1 - \frac{۳}{۷}v_2 + \frac{۲}{۷}i_s$$

چ ـ دوگان مدار بصورت زیر می باشد.



ح ـ با توجه به معادلات حالت بدست آمده در قسمت (الف) داریم.

$$v_o = \frac{۱}{۴}\left(۴\frac{dv_2}{dt}\right) = Dv_2 \quad \rightarrow \quad v_2 = \frac{v_o}{D}$$

$$\frac{dv_1}{dt} = -\frac{۳}{۷}v_1 - \frac{۲}{۷}v_2 + \frac{۶}{۷}i_s \quad \rightarrow \quad Dv_1 = -\frac{۳}{۷}v_1 - \frac{۲}{۷}\left(\frac{v_o}{D}\right) + \frac{۶}{۷}i_s \quad \rightarrow \quad v_1 = \frac{۶Di_s - ۲v_o}{D(۷D+۳)}$$

$$\frac{dv_2}{dt} = -\frac{۱}{۷}v_1 - \frac{۳}{۷}v_2 + \frac{۲}{۷}i_s \quad \rightarrow \quad D\left(\frac{v_o}{D}\right) = -\frac{۱}{۷}\left(\frac{۶Di_s - ۲v_o}{D(۷D+۳)}\right) - \frac{۳}{۷}\left(\frac{v_o}{D}\right) + \frac{۲}{۷}i_s$$

$$\rightarrow \left(۴۹D^2 + ۲۴D + ۷\right)v_o = \left(۱۴D^2 + ۱۵D\right)i_s \quad \rightarrow \quad ۴۹\frac{d^2v_o}{dt^2} + ۲۴\frac{dv_o}{dt} + ۷v_o = ۱۴\frac{d^2i_s}{dt^2} + ۱۵\frac{di_s}{dt}$$

و در ادامه با جایگذاری $i_s(t) = u(t)$ پاسخ پله را محاسبه خواهیم کرد

$$\rightarrow ۴۹\frac{d^2v_o}{dt^2} + ۲۴\frac{dv_o}{dt} + ۷v_o = ۱۴\delta'(t) + ۱۵\delta(t)$$

در $t = ۰^+$ خازنها اتصال کوتاه و $i_s(۰) = ۱A$ می باشد بنابراین جریان گذرنده از مقاومت $\frac{۱}{۲}$ اهم برابر است با :

$$i_o(۰^+) = \frac{۱\|۲}{۱\|۲ + \frac{۱}{۲}}۱A = \frac{۴}{۷} \quad \rightarrow \quad v_o(۰^+) = \frac{۱}{۲}i_o(۰^+) = \frac{۲}{۷}$$

و با انتگرال گیری از معادله دیفرانسیل در فاصله ۰^- تا ۰^+ داریم.

$$۴۹\frac{dv_0(0^+)}{dt}+۴۲\left(\frac{۲}{۷}\right)=۱۵ \rightarrow \frac{dv_0(0^+)}{dt}=\frac{۳}{۴۹}$$

می دانیم که برای $t>0$ ، $\delta'(t)=\delta(t)=0$ می باشد پس معادله دیفرانسیل فوق را می توان بصورت زیر نوشت.

$$۴۹\frac{d^2v_0}{dt^2}+۴۲\frac{dv_0}{dt}+۷v_0=0 \quad , \quad v_0(0^+)=\frac{۲}{۷} \quad , \quad \frac{dv_0(0^+)}{dt}=\frac{۳}{۴۹}$$

معادله مشخصه: $۴۹s^2+۴۲s+۷=0 \rightarrow s=-۰/۲۳ \, , \, -۰/۶۳$

$$\rightarrow v_0(t)=K_1e^{-۰/۲۳t}+K_2e^{-۰/۶۳t} \, , \, t>0$$

$$\begin{cases} v_0(0^+)=\frac{۲}{۷} \rightarrow K_1+K_2=\frac{۲}{۷} \\ \frac{dv_0(0^+)}{dt}=\frac{۳}{۴۹} \rightarrow -۰/۲۳K_1-۰/۶۳K_2=\frac{۳}{۴۹} \end{cases} \rightarrow K_1=۰/۶۱ \quad , \quad K_2=-۰/۳۲$$

$$\rightarrow v_0(t)=\left(۰/۶۱e^{-۰/۲۳t}-۰/۳۲e^{-۰/۶۳t}\right)u(t)$$

و با مشتق گیری از پاسخ پله، پاسخ ضربه را بصورت زیر بدست می آوریم.

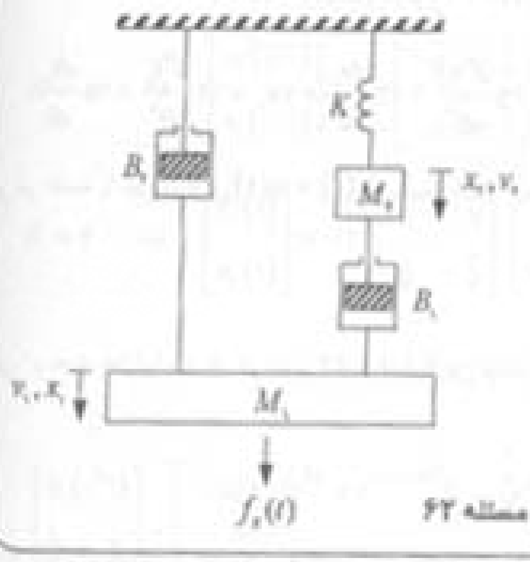
$$h(t)=\frac{dv_0(t)}{dt}=\left((۰/۶۱)(-۰/۲۳)e^{-۰/۲۳t}+(۰/۳۲)(-۰/۶۳)e^{-۰/۶۳t}\right)u(t)$$

$$+\left(۰/۶۱e^{-۰/۲۳t}-۰/۳۲e^{-۰/۶۳t}\right)\delta(t)=\left(-۰/۱۴e^{-۰/۲۳t}+۰/۲e^{-۰/۶۳t}\right)+۰/۲۹\delta(t)$$

مسئله ۶۲

الف- معادلات حرکت را به صورت دو معادله دیفرانسیلی (انتگرالی) بر حسب متغیر های v_1 و v_2 بنویسید.

ب- یک مدار الکتریکی رسم کنید که رفتار آن با رفتار سیستم مکانیکی فوق مشابه باشد. معادلات این مدار را بنویسید و شباهتها را دقیقاً نشان دهید.



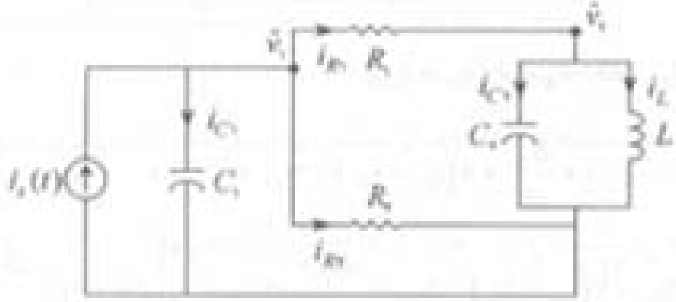
شکل مسئله ۶۲

حل : الف ـ با توجه به شکل مسئله و با صرفه نظر از نیروی گرانش داریم.

$$f_{B_1}+f_{B_2}+f_{M_1}=f_s \quad \rightarrow \quad B_1\left(v_1-v_2\right)+B_2\left(v_1-0\right)+M_1\frac{dv_1}{dt}=f_s$$

$$f_{B_1}=f_{M_2}+f_K \quad \rightarrow \quad B_1\left(v_1-v_2\right)=M_2\frac{dv_2}{dt}+K\int\left(v_2-0\right)dt$$

ب ـ مدار مشابه بصورت زیر می باشد.



$$i_{R_1}+i_{R_2}+i_{C_1}=i_s \quad \rightarrow \quad \frac{1}{R_1}\left(\hat{v}_1-\hat{v}_2\right)+\frac{1}{R_2}\left(\hat{v}_1-0\right)+C_1\frac{d\hat{v}_1}{dt}=i_s$$

$$i_{R_1}=i_{C_2}+i_L \quad \rightarrow \quad \frac{1}{R_1}\left(\hat{v}_1-\hat{v}_2\right)=C_2\frac{d\hat{v}_2}{dt}+\frac{1}{L}\int\left(\hat{v}_2-0\right)dt$$

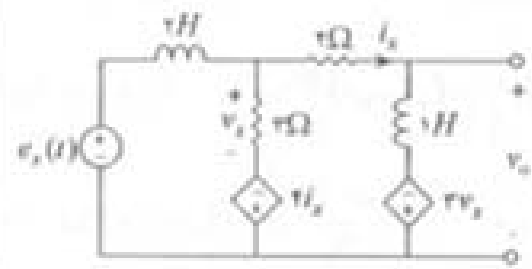
از آنجا که معادلات بدست آمده برای متغیرهای (v_2, v_1) و $(\hat{v}_2, \hat{v}_1)$ یکسان است لذا دو سیستم فوق معادل اند که شباهتها بصورت زیراند.

سیستم مکانیکی	سیستم الکتریکی
سرعت v	ولتاژ $\hat{v}$
نیرو f	جریان i
ضریب میرایی B	رسانایی $\frac{1}{R}$
جرم M	خازن C
فنر K	سلف $\frac{1}{L}$

مسئله ۶۳

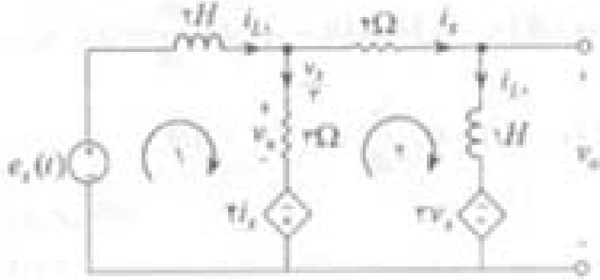
الف- معادلات حالت را نوشته و v_o را بر حسب متغیرهای حالت بیان کنید.

ب- معادله دیفرانسیل v_o بر حسب e_s را بدست آورید.



شکل مسئله ۶۳

حل : الف ـ با انتخاب جریان سلفها به عنوان متغیرهای حالت و با توجه به شکل زیر داریم



$$i_x = i_{L_2}\ ,\ \frac{v_x}{3} = i_{L_1} - i_x \ \rightarrow\ v_x = 3\left(i_{L_1} - i_{L_2}\right)$$

$$\text{برای مش ۱ } KVL \ \rightarrow\ -e_s + 2\frac{di_{L_1}}{dt} + 3\left(i_{L_1} - i_{L_2}\right) - 4i_{L_2} = 0 \ \rightarrow\ \frac{di_{L_1}}{dt} = -\frac{3}{2}i_{L_1} + \frac{7}{2}i_{L_2} + \frac{1}{2}e_s$$

$$\text{برای مش ۲ } KVL \ \rightarrow\ 4i_{L_2} - 3\left(i_{L_1} - i_{L_2}\right) + 4i_{L_2} + \frac{di_{L_2}}{dt} - 9\left(i_{L_1} - i_{L_2}\right) = 0 \rightarrow\ \frac{di_{L_2}}{dt} = 12i_{L_1} - 20i_{L_2}$$

$$v_o = \frac{di_{L_2}}{dt} - 3v_x = 12i_{L_1} - 20i_{L_2} - 9\left(i_{L_1} - i_{L_2}\right) = 3i_{L_1} - 11i_{L_2}$$

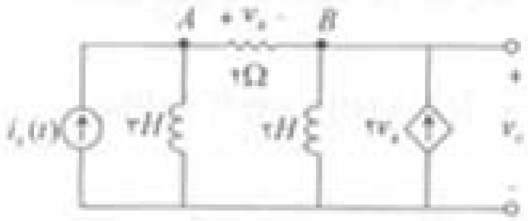
ب ـ با استفاده از نمایش اپراتوری معادلات دیفرانسیل و با بکارگیری معادلات حالت داریم

$$\begin{cases} \dfrac{di_{L_1}}{dt} = -\dfrac{3}{2}i_{L_1} + \dfrac{7}{2}i_{L_2} + \dfrac{1}{2}e_s \ \rightarrow\ (2D+3)i_{L_1} - 7i_{L_2} = e_s \\ \dfrac{di_{L_2}}{dt} = 12i_{L_1} - 20i_{L_2} \ \rightarrow\ 12i_{L_1} - (D+20)i_{L_2} = 0 \\ v_o = 3i_{L_1} - 11i_{L_2} \ \rightarrow\ 3i_{L_1} - 11i_{L_2} - v_o = 0 \end{cases}$$

$$v_o = \frac{\begin{vmatrix} 2D+3 & -7 & e_s \\ 12 & -(D+20) & 0 \\ 3 & -11 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2D+3 & -7 & 0 \\ 12 & -(D+20) & 0 \\ 3 & 11 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{3D - 72}{2D^2 + 43D - 24}e_s \rightarrow\ 2\frac{d^2v_o}{dt^2} + 43\frac{dv_o}{dt} - 24v_o = 3\frac{de_s}{dt} - 72e_s$$

مسئله ۶۴

معادله دیفرانسیل v_o بر حسب i_s را بدست آورید.



شکل مسئله ۶۴

حل : با توجه به شکل مسئله و با استفاده از نمایش اپراتوری معادلات انتگرالی - دیفرانسیل داریم.

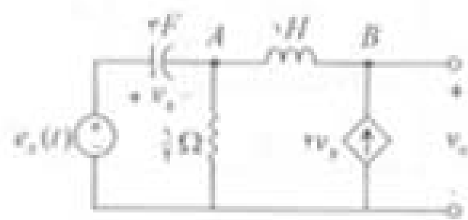
Ⓐ KCL برای گره $\rightarrow -i_s + \frac{1}{2}\int v_A dt + \frac{v_A - v_o}{2} = 0 \rightarrow -i_s + \frac{1}{2D}v_A + \frac{v_A - v_o}{2} = 0$

$$\rightarrow v_A = \frac{Dv_o + 2Di_s}{D+1} \quad , \quad v_x = v_A - v_B = \frac{Dv_o + 2Di_s}{D+1} - v_o = \frac{-v_o + 2Di_s}{D+1}$$

Ⓑ KCL برای گره $\rightarrow \frac{1}{2}\int v_o dt - 4v_x - \frac{v_x}{2} = 0 \rightarrow \frac{1}{2D}v_o - \frac{9}{2}\left(\frac{-v_o + 2Di_s}{D+1}\right) = 0$

$$(11D+2)v_o = 27D^2 i_s \rightarrow 11\frac{dv_o}{dt} + 2v_o = 27\frac{d^2 i_s}{dt^2}$$

مسئله ۶۵



معادله دیفرانسیلی که ارتباط e_s و v_o را توصیف می کند بدست آورید. چرا با وجود یک سلف و یک خازن معادله دیفرانسیل از مرتبه اول است.

شکل مسئله ۶۵

حل : با توجه به شکل مسئله و با بکارگیری نمایش اپراتوری معادلات انتگرال- دیفرانسیل داریم.

Ⓐ KCL برای گره $\rightarrow 2\frac{d}{dt}(v_A - e_s) + \frac{v_A}{\frac{1}{2}} \int(v_A - v_o)dt = 0$

$$\rightarrow 2D(v_A - e_s) + 2v_A \frac{v_A - v_o}{D} = 0 \rightarrow v_A = \frac{2D^2 e_s + v_o}{2D^2 + 2D + 1}$$

$$v_x = e_s - v_A = e_s - \frac{۲D^۲ e_s + v_o}{۲D^۲ + ۲D + ۱} = \frac{(۲D+۱)e_s - v_o}{۲D^۲ + ۲D + ۱}$$

B ، KCL برای گره $\rightarrow \int (v_A - v_o)\,dt - ۲v_x = ۰$

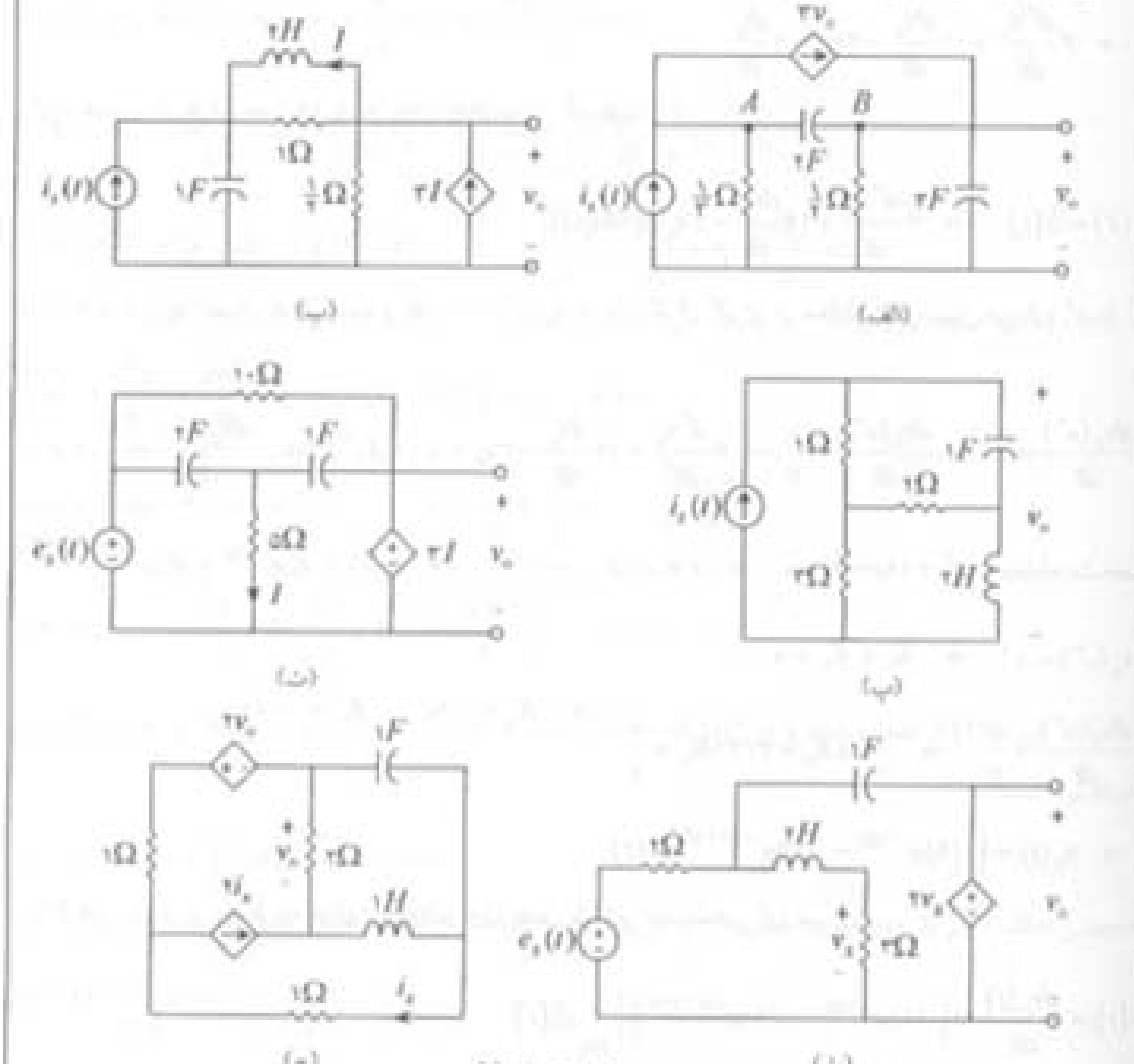
$$\frac{۱}{D}\left(v_o - \frac{۲D^۲ e_s + v_o}{۲D^۲ + ۲D + ۱}\right) - ۲\frac{(۲D+۱)e_s - v_o}{۲D^۲ + ۲D + ۱} = ۰ \rightarrow (۳D^۲ + ۴D)v_o = (۷D^۲ + ۲D)e_s$$

$$\rightarrow (۳D + ۴)v_o = (۷D + ۲)e_s \rightarrow ۳\frac{dv_o}{dt} + ۴v_o = ۷\frac{de_s}{dt} + ۲e_s$$

باتوجه به شکل مدارملاحظه می شود که جریان سلف برابر $۲v_o-$ است و v_oولتاژ دو سر خازن می باشد. بنابراین ولتاژ خازن و جریان سلف به هم وابسته اند. پس انتخاب یکی از آنها به عنوان متغیر حالت کافی بوده و لذا مدار مرتبه اول است.

مسئله ۶۶

معادله دیفرانسیل ارتباط دهنده خروجی v_o ورودی مدار های شکل مسئله ۶۶ و پاسخ ضربه هر یک را بدست آورید.



شکل مسئله ۶۶

حل : الف ـ با توجه به شکل مسئله و با بکارگیری نمایش اپراتوری معادلات دیفرانسیل داریم.

$$\text{برای گره } B \text{ ، } KCL \rightarrow 3\frac{dv_o}{dt}+\frac{v_o}{\frac{1}{2}}+2\frac{d(v_o-v_A)}{dt}-3v_o=0$$

$$\rightarrow 3Dv_o+2v_o+2D(v_o-v_A)-3v_o=0 \rightarrow v_A=\frac{5D-1}{2D}v_o$$

KCL برای گره Ⓐ $\rightarrow \quad -i_s + 3v_o + \frac{v_A}{\frac{1}{2}} + 2\frac{d(v_A - v_o)}{dt} = 0$

$$\rightarrow -i_s + 3v_o + 2\left(\frac{5D-1}{2D}v_o\right) + 2D\left(\frac{5D-1}{2D}v_o - v_o\right) = 0 \rightarrow \left(6D^2 + 19D - 3\right)v_o = 2Di_s$$

$$\rightarrow 6\frac{d^2v_o}{dt^2} + 19\frac{dv_o}{dt} - 3v_o = 2\frac{di_s}{dt}$$

برای محاسبه پاسخ ضربه، ابتدا پاسخ پله را بدست می آوریم.

$$i_s(t) = u(t) \rightarrow 6\frac{d^2v_o}{dt^2} + 19\frac{dv_o}{dt} - 3v_o = 2\delta(t)$$

در $t = 0^+$ خازنها اتصال کوتاه بوده و لذا $v_o(0^+) = 0$ و با انتگرال گیری از معادله دیفرانسیل در بازه 0^- تا 0^+ داریم.

$$6\frac{dv_o(0^+)}{dt} = 2 \rightarrow \frac{dv_o(0^+)}{dt} = \frac{1}{3} \rightarrow 6\frac{d^2v_o}{dt^2} + 19\frac{dv_o}{dt} - 3v_o = 0,\ v_o(0^+) = 0,\ \frac{dv_o(0^+)}{dt} = \frac{1}{3},\ t > 0$$

معادله مشخصه: $6s^2 + 19s - 3 = 0 \rightarrow s = 0.15\ ,\ -3.32 \rightarrow v_o(t) = K_1e^{0.15t} + K_2e^{-3.32t}$

$$\begin{cases} v_o(0^+) = 0 \rightarrow K_1 + K_2 = 0 \\ \frac{dv_o(0^+)}{dt} = \frac{1}{3} \rightarrow 0.15K_1 - 3.32K_2 = \frac{1}{3} \end{cases} \rightarrow K_1 = 0.95\ ,\ K_2 = -0.95$$

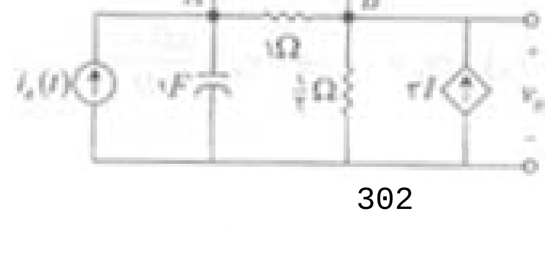
$$\rightarrow v_o(t) = \left(0.95e^{0.15t} - 0.95e^{-3.32t}\right)u(t)$$

و با گرفتن مشتق از پاسخ پله فوق پاسخ ضربه را بصورت زیر بدست می آوریم.

$$h(t) = \frac{dv_o(t)}{dt} = \left(0.95e^{0.15t} - 0.95e^{-3.32t}\right)\Big|_{t=0}\delta(t)$$

$$+\left((0.95)(0.15)e^{0.15t} - (0.95)(-3.32)e^{-3.32t}\right)u(t) \rightarrow h(t) = \left(0.14e^{0.15t} + 3.15e^{-3.32t}\right)u(t)$$

ب ـ با توجه به شکل مسئله و با بکارگیری نمایش اپراتوری معادلات انتگرال دیفرانسیل داریم.



$$I=\frac{1}{2}\int(v_o-v_A)dt=\frac{1}{2D}(v_o-v_A)$$

$$\text{Ⓑ برای گره KCL}\rightarrow\frac{1}{2D}(v_o-v_A)-2\left\{\frac{1}{2D}(v_o-v_A)\right\}+\frac{v_o-v_A}{1}+\frac{v_o}{\frac{1}{2}}=0\rightarrow v_A=\frac{2D-1}{D-1}v_o$$

$$\text{Ⓐ برای گره KCL}\rightarrow -i_s+\frac{d}{dt}v_A-I+\frac{v_A-v_o}{1}=0$$

$$\rightarrow -i_s+D\frac{2D-1}{D-1}v_o-\frac{1}{2D}\left(v_o-\frac{2D-1}{D-1}v_o\right)+\frac{2D-1}{D-1}v_o-v_o=0$$

$$\rightarrow\left(2D^2+D+1\right)v_o=(D-1)i_s\quad\rightarrow\quad 2\frac{d^2v_o}{dt^2}+\frac{dv_o}{dt}+v_o=\frac{di_s}{dt}-i_s$$

به ازای ورودی ضربه داریم:

$$\rightarrow 2\frac{d^2v_o}{dt^2}+\frac{dv_o}{dt}+v_o=\delta'(t)-\delta(t)=0\quad,\quad t>0$$

معادله مشخصه: $2s^2+s+1=0\ \rightarrow\ s=-\frac{1}{4}\pm\frac{\sqrt{7}}{4}i$

$$\rightarrow v_o(t)=e^{-\frac{1}{4}t}\left(A\cos\frac{\sqrt{7}}{4}t+B\sin\frac{\sqrt{7}}{4}t\right)\quad,\quad t>0$$

در $t=0$ ضربه $\delta(t)$ اعمال شده و از آنجا که خازن اتصال کوتاه می باشد لذا جریان کاملاً از خازن گذشته و خواهیم داشت.

$$v_c(0^+)=v(0^-)+\int_{0^-}^{0^+}\delta(t)dt=0+1=1$$

همچنین سلف مدار باز خواهد بود پس $I=0$ می باشد و با استفاده از قاعده تقسیم ولتاژ داریم:

$$v_o(0^+)=\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}v_c(0^+)=\frac{1}{3}V$$

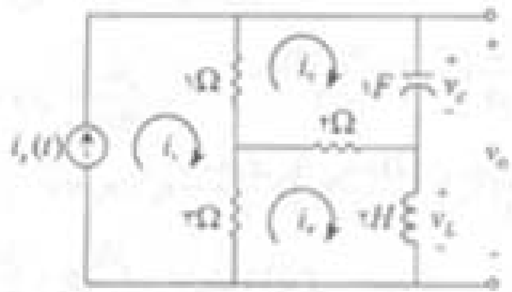
و با انتگرال گیری از معادله دیفرانسیل در فاصله 0^- تا 0^+ داریم:

$$2\frac{dv_o(0^+)}{dt}+\frac{1}{3}=-1\quad\rightarrow\quad\frac{dv_o(0^+)}{dt}=-\frac{2}{3}$$

$$\begin{cases}v_o(0^+)=\frac{1}{3} & \rightarrow\quad A=\frac{1}{3}\\[2mm] \frac{dv_o(0^+)}{dt}=-\frac{2}{3} & \rightarrow\quad -\frac{1}{4}A+\frac{\sqrt{7}}{4}B=-\frac{2}{3}\end{cases}\rightarrow\ B=-\frac{5}{9}\sqrt{7}$$

$$\rightarrow\ v_o(t) = e^{-\frac{1}{4}t}\left(\frac{1}{3}\cos\frac{\sqrt{3}}{6}t - \frac{5}{9}\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{6}t\right),\quad t>0$$

پ ـ با توجه به شکل مسئله و با بکارگیری نمایش اپراتوری معادلات انتگرال - دیفرانسیل داریم.



$i_1 = i_s$

$$\begin{cases} \text{برای مش ۲ } KVL \rightarrow (i_2 - i_s) + \int i_2\,dt + 2(i_2 - i_3) = 0 \rightarrow (i_2 - i_s) + \frac{1}{D} i_2 + 2(i_2 - i_3) = 0 \\ \text{برای مش ۳ } KVL \rightarrow 3(i_3 - i_s) + 2(i_3 - i_2) + 2\frac{di_3}{dt} = 0 \rightarrow 3(i_3 - i_s) + 2(i_3 - i_2) + 2Di_3 = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} (3D+1)i_2 - 2Di_3 = Di_s \\ -2i_2 + (2D+5)i_3 = 3i_s \end{cases} \rightarrow i_2 = \frac{\begin{vmatrix} Di_s & -2D \\ 3i_s & 2D+5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3D+1 & -2D \\ -2 & 2D+5 \end{vmatrix}} = \frac{2D^2+11D}{6D^2+13D+5} i_s$$

$$\rightarrow i_3 = \frac{\begin{vmatrix} 3D+1 & Di_s \\ -2 & 3i_s \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3D+1 & -2D \\ -2 & 2D+5 \end{vmatrix}} = \frac{11D+3}{6D^2+13D+5} i_s$$

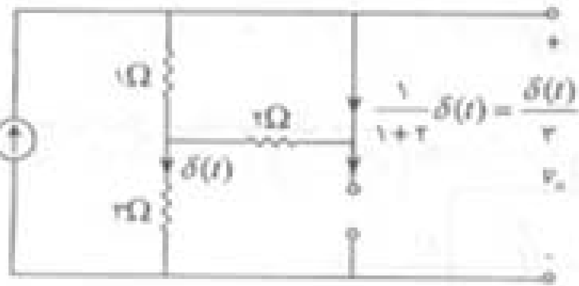
$$\rightarrow v_o = v_c + v_L = \int i_2\,dt + 2\frac{di_3}{dt} = \frac{1}{D}\left(\frac{2D^2+11D}{6D^2+13D+5}\right)i_s + 2D\left(\frac{11D+3}{6D^2+13D+5}\right)i_s$$

$$\rightarrow (6D^2+13D+5)v_o = (22D^2+8D+11)i_s \rightarrow 6\frac{d^2v_o}{dt^2} + 13\frac{dv_o}{dt} + 5v_o = 22\frac{d^2i_s}{dt^2} + 8\frac{di_s}{dt} + 11i_s$$

به ازای $i_s(t) = \delta(t)$ پاسخ ضربه v_o را بدست خواهیم آورد.

$$6\frac{d^2v_o}{dt^2} + 13\frac{dv_o}{dt} + 5v_o = 22\delta''(t) + 8\delta'(t) + 11\delta(t)$$

در $t=0$ ، خازن اتصال کوتاه و سلف مدار باز می باشد و ضربه $\delta(t)$ نیز وارد می شود



$\rightarrow\ v_o = ۲\left(\frac{\delta(t)}{۳}\right) + ۳\delta(t) = \frac{۱۱}{۳}\delta(t)$

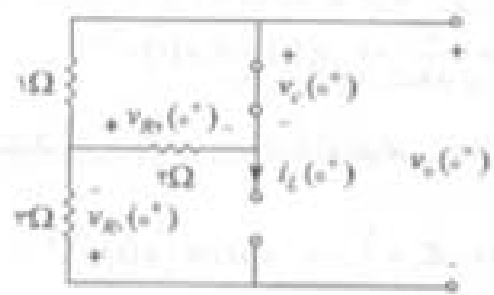
پس $v_o(t)$ شامل ضربه $\frac{۱۱}{۳}\delta(t)$ نیز می باشد و با توجه به معادله دیفرانسیل داریم.

معادله مشخصه : $۶s^2 + ۱۳s + ۵ = ۰ \rightarrow s = -\frac{۱}{۲}\ ,\ -\frac{۵}{۳} \rightarrow v_o(t) = K_1 e^{-\frac{t}{۲}} + K_2 e^{-\frac{۵t}{۳}} + \frac{۱۱}{۳}\delta(t)$

از آنجا که جریان ضربه $\frac{\delta(t)}{۳}$ از خازن عبور می کند و ولتاژ $\frac{۱۱}{۳}\delta(t)$ به دو سر سلف اعمال می شود خواهیم داشت.

$$v_C(0^+) = v_C(0^-) + \int_{0^-}^{0^+} \frac{\delta(t)}{۳} dt = ۰ + \frac{۱}{۳} = \frac{۱}{۳}V \quad , \quad i_L(0^+) = i_L(0^-) + \frac{۱}{۲}\int_{0^-}^{0^+} \frac{۱۱}{۳}\delta(t) dt = \frac{۱۱}{۶}$$

بنابراین در $t = 0^+$ مدار بصورت زیر خواهد بود.



$$v_o(0^+) = v_C(0^+) - v_{R_3}(0^+) - v_{R_2}(0^+) = v_C(0^+) - ۳i_L(0^+) - ۲\left(\frac{۱}{۱+۲} i_L(0^+)\right) = -۶/۳۹$$

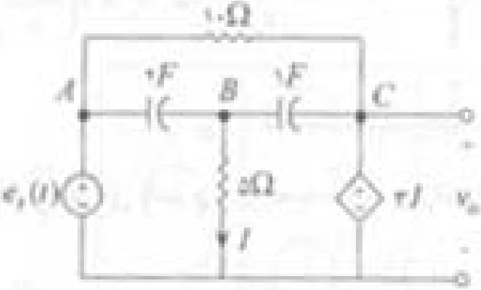
و با انتگرال گیری از معادله دیفرانسیل در فاصله 0^- تا 0^+ ، $\frac{dv_o(0^+)}{dt}$ را بدست می آوریم.

$$۶\frac{dv_o(0^+)}{dt} + ۱۳(-۶/۳۹) = ۱۱ \rightarrow \frac{dv_o(0^+)}{dt} = ۱۵/۶۸$$

$$\begin{cases} v_o(0^+) = -۶/۳۹ \rightarrow K_1 + K_2 = -۶/۳۹ \\ \frac{dv_o(0^+)}{dt} = ۱۵/۶۸ \rightarrow -\frac{۱}{۲}K_1 - \frac{۵}{۳}K_2 = ۱۵/۶۸ \end{cases} \rightarrow K_1 = ۴/۳۱\ ,\ K_2 = -۱۰/۷$$

$$\rightarrow\ v_o(t)=\left(4/31e^{-\frac{t}{6}}+10/7e^{-\frac{5t}{6}}\right)+\frac{11}{3}\delta(t)$$

ت ـ با توجه به شکل مسئله می توان نوشت.



$$v_A=e_s\ ,\ v_C=v_o\ ,\ v_o=3I\ \rightarrow\ I=\frac{v_o}{3}\ ,\ v_B=5I=\frac{5}{3}v_o$$

$$B \text{ برای گره } KCL\ \rightarrow\ 2\frac{d\left(\frac{5}{3}v_o-e_s\right)}{dt}+\frac{v_o}{3}+\frac{d\left(\frac{5}{3}v_o-v_o\right)}{dt}=0\ \rightarrow\ 4\frac{dv_o}{dt}+\frac{v_o}{3}=2\frac{de_s}{dt}$$

برای محاسبه پاسخ ضربه، ابتدا پاسخ پله را محاسبه خواهیم کرد.

$$e_s(t)=u(t)\ \rightarrow\ 4\frac{dv_o}{dt}+\frac{v_o}{3}=2\delta(t)$$

$$\text{معادله مشخصه}: 4s+\frac{1}{3}=0\ \rightarrow\ s=-\frac{1}{12}\ \rightarrow\ v_o(t)=K_1u(t)e^{-\frac{t}{12}}$$

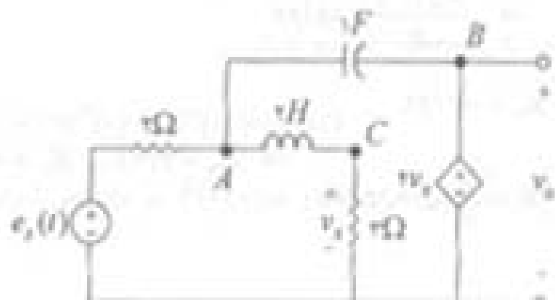
با انتگرال گیری از طرفین معادله دیفرانسیل در بازه 0^- تا 0^+ خواهیم داشت.

$$4v_o(0^+)=2\ \rightarrow\ v_o(0^+)=\frac{1}{2}\ \rightarrow\ K_1=\frac{1}{2}\ \rightarrow\ v_o(t)=\frac{1}{2}u(t)e^{-\frac{t}{12}}$$

در ادامه با گرفتن مشتق از پاسخ پله پاسخ ضربه را بدست خواهیم آورد.

$$h(t)=\frac{dv_o(t)}{dt}=-\frac{1}{12}\left(\frac{1}{2}u(t)e^{-\frac{t}{12}}\right)+\frac{1}{2}\delta(t)e^{-\frac{t}{12}}=-\frac{1}{24}u(t)e^{-\frac{t}{12}}+\frac{1}{2}\delta(t)$$

ث ـ با توجه به شکل مسئله و نمایش اپراتوری معادلات انتگرال- دیفرانسیل داریم.



$$v_B = v_C \quad , \quad 2v_B = v_o \;\rightarrow\; v_B = \frac{v_o}{2} \quad , \quad v_C = v_B = \frac{v_o}{2}$$

Ⓒ KCL برای گره $\rightarrow \frac{1}{2}\int\left(\frac{v_o}{2} - v_A\right)dt + \frac{\frac{v_o}{2}}{3} = 0 \;\rightarrow\; \frac{1}{2D}\left(\frac{v_o}{2} - v_A\right) + \frac{v_o}{6} = 0$

$$\rightarrow\; v_A = \frac{2D+3}{6}v_o$$

Ⓐ KCL برای گره $\rightarrow \frac{\frac{2D+3}{6}v_o - e_s}{2} + \frac{1}{2D}\left(\frac{2D+3}{6}v_o - \frac{v_o}{2}\right) + D\left(\frac{2D+3}{6}v_o - v_o\right) = 0$

$$\rightarrow\; \left(4D^2 - 4D + 5\right)v_o = 6e_s \;\rightarrow\; 4\frac{d^2v_o}{dt^2} - 4\frac{dv_o}{dt} + 5v_o = 6e_s$$

در ادامه به ازای $e_s(t) = \delta(t)$ پاسخ ضربه v_o را بدست خواهیم آورد.

$$4\frac{d^2v_o}{dt^2} - 4\frac{dv_o}{dt} + 5v_o = 6\delta(t)$$

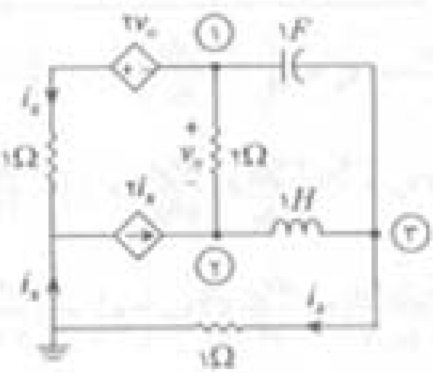
معادله مشخصه : $4s^2 - 4s + 5 = 0 \;\rightarrow\; s = -\frac{1}{2} \pm j \;\rightarrow\; v_o(t) = e^{-\frac{t}{2}}\left(A\cos t + B\sin t\right) \;,\; t > 0$

در $t = 0^-$ سلف مدار باز خواهد بود بنابراین $v_B = 0$ در نتیجه $v_o(0^+) = 0$ می باشد و با انتگرال گیری از معادله دیفرانسیل در فاصله 0^- تا 0^+، $\frac{dv_o(0^+)}{dt}$ را بدست خواهیم آورد.

$$4\frac{dv_o(0^+)}{dt} = 6 \;\rightarrow\; \frac{dv_o(0^+)}{dt} = \frac{3}{2}$$

$$\begin{cases} v_o(0^+) = 0 \rightarrow A = 0 \\ \frac{dv_o(0^+)}{dt} = \frac{3}{2} \rightarrow -\frac{1}{2}A + B = \frac{3}{2} \rightarrow B = \frac{3}{2} \end{cases} \rightarrow\; v_o(t) = \frac{3}{2}u(t)\sin t e^{-\frac{1}{2}t}$$

ج – با توجه به شکل مسئله و با بکارگیری نمایش اپراتوری معادلات انتگرال- دیفرانسیل داریم.



$$v_2 = i_s \;,\; v_1 = i_s - 2v_o \;\rightarrow\; v_2 - v_1 = 2v_o \;,\; v_1 - v_3 = v_o \;\rightarrow\; v_2 - v_3 = 3v_o$$

① KCL برای گره $\rightarrow\; i_s + \frac{v_o}{2} + \frac{d}{dt}(v_1 - v_2) = 0 \;\rightarrow\; v_2 + \frac{v_o}{2} + D(-2v_o) = 0$

$$\rightarrow\; v_2 = \left(2D - \frac{1}{2}\right)v_o$$

② KCL برای گره $\rightarrow\; \frac{d}{dt}(v_2 - v_1) + \int (v_2 - v_3)dt + \frac{v_2}{1} = 0$

$$\rightarrow\; D(2v_o) + \frac{1}{D}(3v_o) + \left(2D - \frac{1}{2}\right)v_o = 0$$

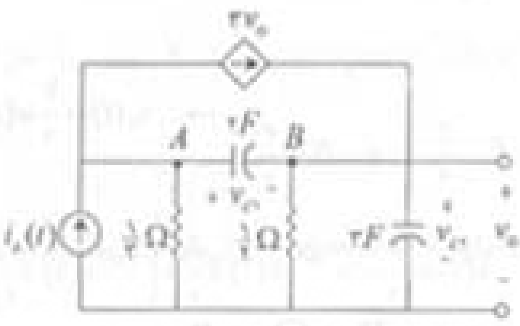
$$\rightarrow\; \left(8D^2 - D + 6\right)v_o = 0 \;\rightarrow\; 8\frac{d^2 v_o}{dt^2} - \frac{dv_o}{dt} + 6v_o = 0$$

از آنجا که هیچگونه منبع نابسته ای داده نشده لذا نمی توان پاسخ ضربه ای برای v_o بدست آورد.

مسئله ۶۷

معادلات حالت مدارهای مسئله ۶۶ را بنویسید و v_o را بر حسب ترکیب خطی متغیر های حالت بیان کنید.

حل : الف ـ با انتخاب ولتاژ خازنها به عنوان متغیرهای حالت داریم.

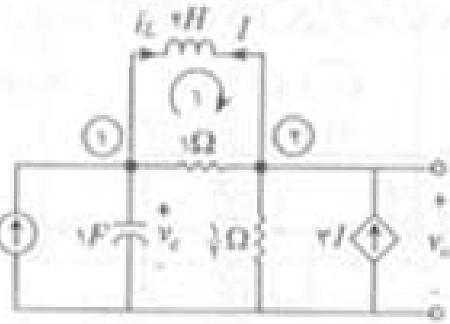


$$v_B = v_{C2} = v_o \;,\; v_A = v_{C1} + v_{C2} \;\rightarrow\; v_o = v_{C2}$$

Ⓐ KCL برای گره $\rightarrow\; -i_s + 3v_{C2} + \frac{v_{C1} + v_{C2}}{\frac{1}{2}} + 2\frac{dv_C}{dt} = 0 \;\rightarrow\; \frac{dv_{C1}}{dt} = -\frac{3}{2}v_{C1} - 3v_{C2} + \frac{1}{2}i_s$

Ⓑ KCL برای گره $\rightarrow\; -2\frac{dv_{C1}}{dt} + \frac{v_{C2}}{\frac{1}{3}} + 2\frac{dv_{C2}}{dt} - 3v_{C2} = 0 \;\rightarrow\; \frac{dv_{C2}}{dt} = -v_{C1} - \frac{5}{3}v_{C2} + \frac{1}{3}i_s$

ب ـ با انتخاب جریان سلف و ولتاژ خازن به عنوان متغیرهای حالت و با توجه به شکل (ب) داریم.

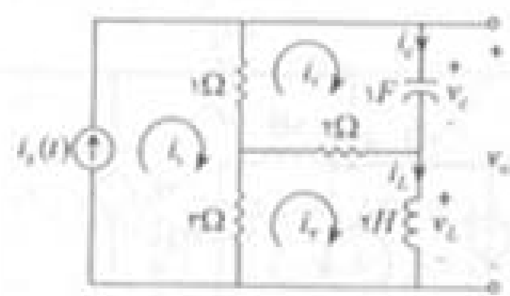


KCL برای گره ۲ $\rightarrow \frac{v_o - v_c}{1} + \frac{v_o}{\frac{1}{2}} - i_L - 2(-i_L) \rightarrow v_o = \frac{1}{3}v_c - \frac{2}{3}i_L$

KCL برای گره ۱ $\rightarrow -i_s + i_L + \frac{v_c - \left(\frac{1}{3}v_c - \frac{2}{3}\right)}{1} + \frac{dv_c}{dt} = 0 \rightarrow \frac{dv_c}{dt} = -\frac{2}{3}v_c - \frac{5}{3}i_L + i_s$

KVL برای مش ۱ $\rightarrow 2\frac{di_L}{dt} + \left(\frac{1}{3}v_c - \frac{2}{3}i_L\right) - v_c = 0 \rightarrow \frac{di_L}{dt} = \frac{1}{3}v_c + \frac{1}{3}i_L$

پ ـ با توجه به شکل (پ) و با انتخاب ولتاژ خازن و جریان سلف به عنوان متغیر های حالت داریم.



$i_1 = i_s \ , \ i_2 = i_c = \frac{dv_c}{dt} \ , \ i_3 = i_L \ , \ v_L = 2\frac{di_L}{dt}$

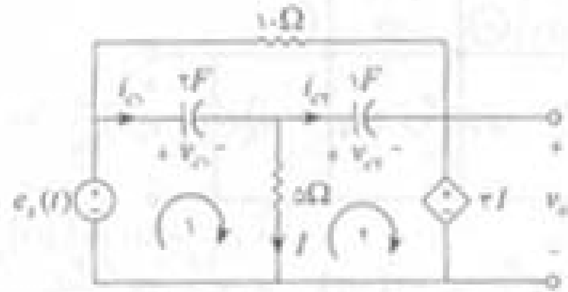
KVL برای مش ۲ $\rightarrow \left(\frac{dv_c}{dt} - i_s\right) + v_c + 2\left(\frac{dv_c}{dt} - i_L\right) = 0 \rightarrow \frac{dv_c}{dt} = -\frac{1}{3}v_c + \frac{2}{3}i_L + \frac{1}{3}i_s$

KVL برای مش ۳ $\rightarrow 3(i_L - i_s) + 2\left(i_L - \frac{dv_c}{dt}\right) + 2\frac{di_L}{dt} = 0$

$\rightarrow 3(i_L - i_s) + 2\left(i_L + \frac{1}{3}v_c - \frac{2}{3}i_L - \frac{1}{3}i_s\right) + 2\frac{di_L}{dt} = 0 \rightarrow \frac{di_L}{dt} = -\frac{1}{3}v_c - \frac{11}{6}i_L + \frac{11}{6}i_s$

$$v_o = v_c + v_L = v_c + 2\frac{di_L}{dt} = \frac{1}{2}v_c - \frac{11}{2}i_L + \frac{11}{2}i_s$$

ث ـ با توجه به اینکه مدار مرتبه اول است لذا انتخاب ولتاژ یکی از خازنها به عنوان متغیر حالت کافیست. که با انتخاب v_{c2} به عنوان متغیر حالت داریم.



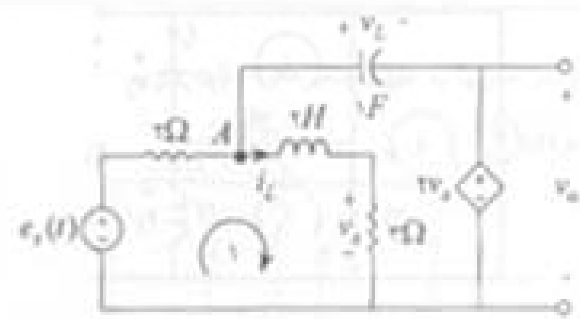
$$\text{KVL برای مش ۲} \rightarrow -5I + v_{c2} + 2I = 0 \rightarrow I = \frac{v_{c2}}{3}$$

$$\text{KVL برای حلقه شامل مش های ۱ و ۲} \rightarrow -e_s + v_{c1} + v_{c2} + 2\left(\frac{v_{c2}}{3}\right) = 0 \rightarrow v_{c1} = e_s - \frac{5}{3}v_{c2}$$

$$I = i_{c1} - i_{c2} \rightarrow \frac{v_{c2}}{3} = 2\frac{dv_{c1}}{dt} - \frac{dv_{c2}}{dt} = 2\frac{d}{dt}\left(e_s - \frac{5}{3}v_{c2}\right) - \frac{dv_{c2}}{dt} \rightarrow \frac{dv_{c2}}{dt} = -\frac{v_{c2}}{13} + \frac{1}{3}\frac{de_s}{dt}$$

$$v_o = 2I = \frac{2}{3}v_{c2}$$

ث ـ با انتخاب ولتاژ خازن و جریان سلف به عنوان متغیرهای حالت خواهیم داشت.



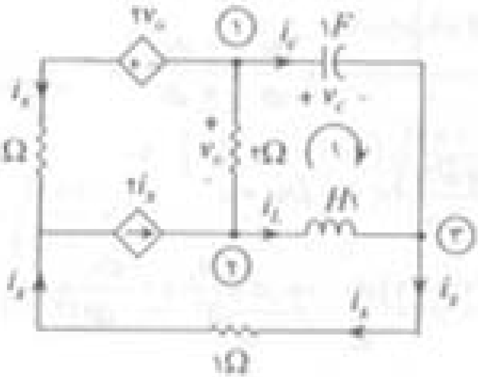
$$v_x = 3i_L \rightarrow v_o = 2v_x = 6i_L \quad , \quad v_A = v_o + v_c = 6i_L + v_c$$

$$\text{KCL برای گره } (A) \rightarrow \frac{6i_L + v_c - e_s}{2} + i_L + \frac{dv_c}{dt} = 0 \rightarrow \frac{dv_c}{dt} = -\frac{1}{2}v_c - 4i_L + \frac{1}{2}e_s$$

$$\text{KVL برای مش ۱} \rightarrow -v_A + 2\frac{di_L}{dt} + 3i_L = 0 \rightarrow -(6i_L + v_c) + 2\frac{di_L}{dt} + 3i_L = 0$$

$$\rightarrow \frac{di_L}{dt} = \frac{1}{2}v_c + \frac{3}{2}i_L$$

ج ـ با توجه به شکل مسئله و با انتخاب ولتاژ خازن و جریان سلف به عنوان متغیر های حالت داریم.



$i_x = i_c + i_L = \frac{dv_c}{dt} + i_L$

KCL برای گره ② $\to -2i_x - \frac{v_o}{2} + i_L = 0 \to -2\left(\frac{dv_c}{dt} + i_L\right) - \frac{v_o}{2} + i_L = 0$

$\to v_o = -4\frac{dv_c}{dt} + 2i_L$

KVL برای حلقه بیرونی $\to -i_x + 2v_o + v_c + i_x = 0 \to 2\left(-4\frac{dv_c}{dt} - 2i_L\right) + v_c = 0$

$\to \frac{dv_c}{dt} = \frac{1}{8}v_c - \frac{1}{2}i_L$

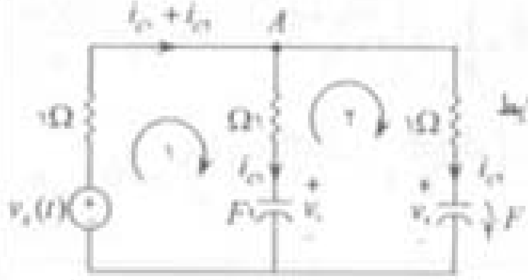
KVL برای مش ۱ $\to -\frac{di_L}{dt} - v_o + v_c = 0 \to -\frac{di_L}{dt} - \left(-4\frac{dv_c}{dt} - 2i_L\right) + v_c = 0$

$\to \frac{di_L}{dt} = \frac{3}{2}v_c \quad , \quad v_o = -4\frac{dv_c}{dt} - 2i_L = -\frac{v_c}{2}$

مسئله ۶۸

معادله دیفرانسیلی برحسب v_1 و v_2 تشکیل داده و شرایط اولیه را مشخص کنید.($v_1(0) = V_{01}$ و $v_2(0) = V_{02}$)

پاسخ پله v_1 و v_2 را بدست آورید.



شکل مسئله ۶۸

حل : با توجه به شکل مسئله و با بکارگیری نمایش اپراتوری معادلات دیفرانسیل داریم

$$\begin{cases} v_A = v_1 + \frac{1}{2}\frac{dv_1}{dt} = \left(\frac{1}{2}D + 1\right)v_1 \\ v_A = v_2 + \frac{dv_2}{dt} = (D+1)v_2 \end{cases} \to v_2 = \frac{\frac{1}{2}D + 1}{D+1}v_1$$

⑤ برای گره KCL $\rightarrow \dfrac{\left(\frac{1}{2}D+1\right)v_2 - v_g}{1} + \dfrac{dv_2}{dt} + \dfrac{1}{2}\dfrac{dv_2}{dt} = 0$

$$\rightarrow \left(\frac{1}{2}D+1\right)v_2 - v_g + D\frac{\frac{1}{2}D+1}{D+1}v_2 + \frac{1}{2}Dv_2 = 0$$

$$\rightarrow \left(2D^2+10D+4\right)v_2 = \left(4D+4\right)v_g \quad \rightarrow \quad 2\frac{d^2v_2}{dt^2} + 10\frac{dv_2}{dt} + 4v_2 = 4\frac{dv_g}{dt} + 4v_g$$

که شرایط اولیه آن عبارتند از :

$v_2(0) = V_{02}$

$$\begin{cases} \text{برای مش}1 \; KVL \;\rightarrow\; -v_g + \left(i_{C1} + i_{C2}\right) + i_{C1} + v_1 = 0 \;\rightarrow\; 2\dfrac{dv_1}{dt} - \dfrac{1}{2}\dfrac{dv_2}{dt} = -v_1 + v_g \\ \\ \text{برای مش}2 \; KVL \;\rightarrow\; -v_1 - i_{C1} + i_{C2} + v_2 = 0 \;\rightarrow\; -\dfrac{dv_1}{dt} + \dfrac{1}{2}\dfrac{dv_2}{dt} = v_1 - v_2 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \dfrac{dv_1}{dt} = -\dfrac{2}{3}v_1 + \dfrac{1}{3}v_2 + \dfrac{1}{3}v_g \\ \\ \dfrac{dv_2}{dt} = \dfrac{2}{3}v_1 - \dfrac{8}{3}v_2 + \dfrac{2}{3}v_g \end{cases} \quad \rightarrow \quad \frac{dv_2(0)}{dt} = \frac{2}{3}V_{01} - \frac{8}{3}V_{02} + \frac{2}{3}v_g(0)$$

به ازای $v_g(t) = u(t) = \begin{cases} 1 \;,\; t>0 \\ 0 \;,\; t<0 \end{cases}$ واضح است که $V_{01} = V_{02} = 0$ و $v_g(0) = 1$ بوده و پاسخ پله را می توان بصورت زیر محاسبه کرد.

$$2\frac{d^2v_2}{dt^2} + 10\frac{dv_2}{dt} + 4v_2 = 0 \quad , \quad v_2(0) = 0 \quad , \quad \frac{dv_2(0)}{dt} = \frac{2}{3} \quad , \quad t>0$$

معادله مشخصه : $2s^2 + 10s + 4 = 0 \;\rightarrow\; s = -\dfrac{5}{2} \pm \dfrac{\sqrt{17}}{2}$

$$\rightarrow v_2(t) = K_1 e^{\frac{-5+\sqrt{17}}{2}t} - K_2 e^{\frac{-5-\sqrt{17}}{2}t} \quad , \quad t>0$$

$$\begin{cases} v_2(0) = 0 \;\rightarrow\; K_1 + K_2 = 0 \\ \\ \dfrac{dv_2(0)}{dt} = \dfrac{2}{3} \;\rightarrow\; -\left(\dfrac{5+\sqrt{17}}{2}\right)K_1 + \left(-\dfrac{5-\sqrt{17}}{2}\right)K_2 = \dfrac{2}{3} \end{cases} \rightarrow K_1 = \frac{2\sqrt{17}}{13} \;,\; K_2 = \frac{2\sqrt{17}}{13}$$

$$\rightarrow v_2(t) = \frac{2\sqrt{3}}{13}\left(e^{\frac{-5+\sqrt{17}}{2}t} - e^{\frac{-5-\sqrt{17}}{2}t}\right)$$

در ادامه تمامی موارد فوق را برای v_1 تکرار می کنیم.

$$\begin{cases} \left(3D^2+10D+4\right)v_2 = \left(4D+4\right)v_g \\ v_1 = \dfrac{\frac{1}{4}D+1}{D+1}v_2 \;\rightarrow\; v_2 = \dfrac{D+1}{\frac{1}{4}D+1}v_1 \end{cases} \rightarrow \left(3D^2+10D+4\right)\frac{D+1}{\frac{1}{4}D+1}v_1 = 4\left(D+1\right)v_g$$

$$\rightarrow \left(3D^2+10D+4\right)v_1 = \left(D+4\right)v_g \;\rightarrow\; 3\frac{d^2v_1}{dt^2}+10\frac{dv_1}{dt}+4v_1 = \frac{dv_g}{dt}+4v_g$$

و شرایط اولیه عبارتند از :

$$v_1(0) = V_{01} \quad , \quad \frac{dv_1(0)}{dt} = -\frac{3}{2}V_{01}+\frac{1}{3}V_{02}+\frac{1}{3}v_g(0)$$

به ازای $v_g(t) = u(t) = \begin{cases} 1 \;,\; t>0 \\ 0 \;,\; t<0 \end{cases}$ واضح است که $V_{01} = V_{02} = 0$ و $v_g(0) = 1$ بوده و پاسخ پله را می توان بصورت زیر محاسبه کرد.

$$3\frac{d^2v_1}{dt^2}+10\frac{dv_1}{dt}+4v_1 = 0 \quad , \quad v_1(0) = 0 \quad , \quad \frac{dv_1(0)}{dt} = \frac{1}{3} \;,\; t>0$$

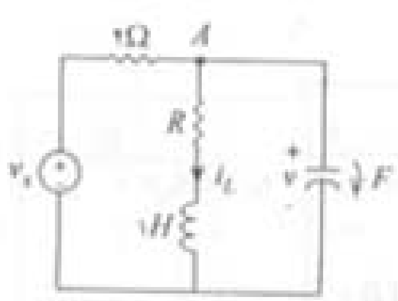
معادله مشخصه : $3s^2+10s+4 = 0 \;\rightarrow\; s = -\frac{5}{3} \pm \frac{\sqrt{13}}{3}$

$$\rightarrow v_1(t) = K_1e^{\frac{-5+\sqrt{13}}{3}t}+K_2e^{\frac{-5-\sqrt{13}}{3}t} \quad , \quad t>0$$

$$\begin{cases} v_1(0) = 0 \;\rightarrow\; K_1+K_2 = 0 \\ \dfrac{dv_1(0)}{dt} = \dfrac{1}{3} \;\rightarrow\; \left(\dfrac{-5+\sqrt{13}}{3}\right)K_1+\left(\dfrac{-5-\sqrt{13}}{3}\right)K_2 = \dfrac{1}{3} \end{cases} \rightarrow K_1 = \frac{\sqrt{13}}{26} \quad , \quad K_2 = -\frac{\sqrt{13}}{26}$$

$$\rightarrow v_1(t) = \frac{\sqrt{13}}{26}\left(e^{\frac{-5+\sqrt{13}}{3}t}-e^{\frac{-5-\sqrt{13}}{3}t}\right)$$

مسئله ۶۹



معادله دیفرانسیلی بر حسب v تشکیل دهید.

R را چنان تعیین کنید که مدار میرایی بحرانی باشد.

شکل مسئله ۶۹

حل : با توجه به شکل مسئله و با بکارگیری نمایش اپراتوری معادلات دیفرانسیل داریم.

$$v_A = v\ ,\ \ v_A = Ri_L + \frac{di_L}{dt} = (D+R)i_L \rightarrow \ i_L = \frac{1}{D+R}v$$

Ⓐ برای گره KCL $\rightarrow \ \frac{v-v_s}{2} + \frac{1}{D+R}v + \frac{1}{2}\frac{dv}{dt} = 0 \ \rightarrow \ \frac{v-v_s}{2} + \frac{1}{D+R}v + \frac{1}{2}DV = 0$

$$\rightarrow \ \left(D^2 + (R+1)D + R + 2\right)v = (D+2)v_s \ \rightarrow \ \frac{d^2v}{dt^2} + (R+1)\frac{dv}{dt} + (R+2)v = \frac{dv_s}{dt} + Rv_s$$

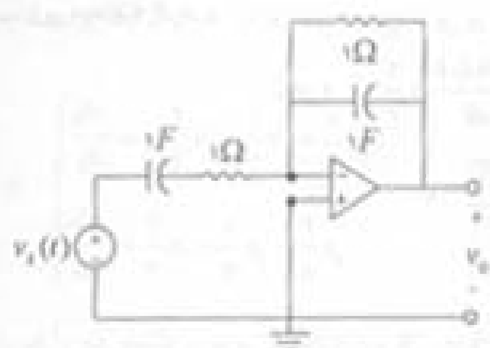
$$2\alpha = R+1 \ \rightarrow \ \alpha = \frac{R+1}{2}\ ,\ \ \omega_0^2 = R+2 \ \rightarrow \ \omega_0 = \sqrt{R+2}$$

به ازای $\alpha = \omega_0$ مدار میرایی بحرانی خواهد بود بنابراین داریم:

$$\alpha = \omega_0 \ \rightarrow \ \frac{R+1}{2} = \sqrt{R+2} \ \rightarrow \ R = 5\Omega$$

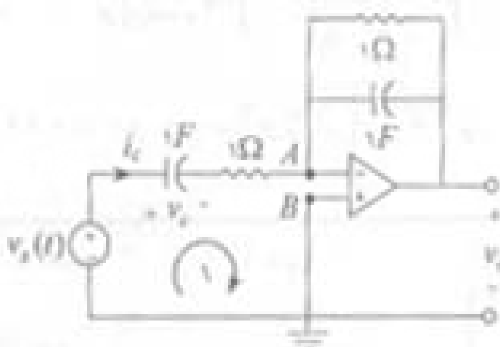
مسئله ۷۰

پاسخ پله و ضربه v_o را تعیین کنید.



شکل مسئله ۷۰

حل : با فرض اینکه آپ امپ ایده آل باشد، $v_A = v_B = 0$ شده و خواهیم داشت:



Ⓐ برای گره KCL $\rightarrow \ -i_c + \frac{0-v_o}{1} + \frac{d}{dt}(0-v_o) = 0 \ \rightarrow \ -i_c - v_o - Dv_o = 0$

$$\rightarrow \ i_c = -(D+1)v_o \ \rightarrow \ v_c = \int i_c dt \ \rightarrow \ v_c = -\frac{1}{D}(D+1)v_o$$

برای مش ۱ KVL $\rightarrow \ -v_s - \frac{1}{D}(D+1)v_o - (D+1)v_o = 0 \ \rightarrow \ \left(D^2 + 2D + 1\right)v_o = -Dv_s$

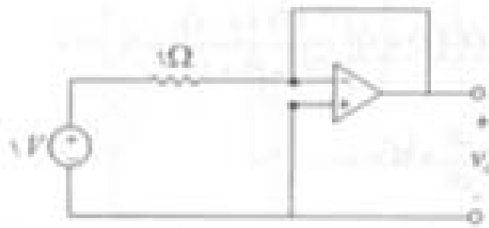
$$\rightarrow \quad \frac{d^2 v_o}{dt^2} + 2\frac{dv_o}{dt} + v_o = -\frac{dv_s}{dt}$$

حال با جایگذاری $v_s(t) = u(t) = 1$ ، $t > 0$ پاسخ پله را محاسبه خواهیم کرد.

$$\frac{d^2 v_o}{dt^2} + 2\frac{dv_o}{dt} + v_o = -\delta(t) = 0 \quad , \quad t > 0$$

معادله مشخصه : $s^2 + 2s + 1 = 0 \rightarrow s = -1, -1 \rightarrow v_o(t) = (K_1 + K_2 t)e^{-t} \quad , \quad t > 0$

در $t = 0^+$ خازنها اتصال کوتاه بوده و مدار بصورت زیر می باشد.



$$\rightarrow \quad v_o(0^+) = \frac{0}{1\Omega} 1V = 0$$

و با انتگرال گیری در فاصله 0^- تا 0^+ از معادله دیفرانسیل خواهیم داشت.

$$\frac{dv_o(0^+)}{dt} - \frac{dv_o(0^-)}{dt} + 2\left(v_o(0^+) - v_o(0^-)\right) + \int_{0^-}^{0^+} v_o = -\int_{0^-}^{0^+} \delta(t)dt \quad \rightarrow \quad \frac{dv_o(0^+)}{dt} = 1$$

در نهایت با اعمال شرایط اولیه K_1 و K_2 را محاسبه خواهیم کرد.

$$\begin{cases} v_o(0^+) = 0 \quad \rightarrow \quad K_1 = 0 \\ \dfrac{dv_o(0^+)}{dt} = -1 \quad \rightarrow \quad -K_1 + K_2 = -1 \quad \rightarrow \quad K_2 = -1 \end{cases} \quad \rightarrow \quad v_o(t) = -u(t)te^{-t}$$

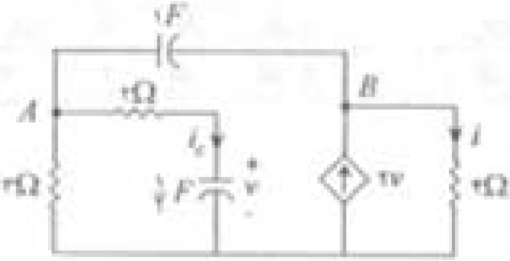
حال با مشتق گیری از پاسخ پله فوق، پاسخ ضربه را بدست می آوریم.

$$h(t) = \frac{dv_o(t)}{dt} = -te^{-t}\Big|_{t=0} \delta(t) - u(t)e^{-t} + u(t)te^{-t} = u(t)(t-1)e^{-t}$$

مسئله ۷۱

الف- معادله دیفرانسیلی بر حسب i بنویسید.

ب- معادلات حالت را بنویسید و خروجی i را بر حسب متغیرهای حالت بیان کنید.



شکل مسئله ۷۱

حل : الف ـ با توجه به شکل مسئله داریم.

$$i_c = \frac{1}{2}\frac{dv}{dt} = \frac{1}{2}DV \rightarrow v_A = 2i_c + v = (D+1)v \;,\; v_B = 4i$$

KCL برای گره Ⓑ $\rightarrow -2v + i + \frac{d}{dt}(v_B - v_A) = 0 \rightarrow -2v + i + D\big(4i - (D+1)v\big) = 0$

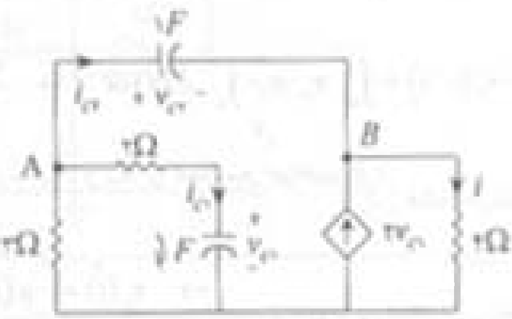
$$\rightarrow v = \frac{4D+1}{D^2+D+2}i$$

KCL برای گره Ⓐ $\rightarrow \frac{v_A}{3} + i_c + \frac{d}{dt}(v_A - v_B) = 0 \rightarrow \frac{(D+1)v}{3} + \frac{1}{2}Dv + D\big((D+1)v - 4i\big) = 0$

$$\frac{(D+1)}{3}\left(\frac{4D+1}{D^2+D+2}\right)i + \frac{1}{2}D\left(\frac{4D+1}{D^2+D+2}\right)i + D\left((D+1)\left(\frac{4D+1}{D^2+D+2}\right)i - 4i\right) = 0$$

$$\rightarrow \left(26D^2 - 29D + 2\right)i = 0 \rightarrow 26\frac{d^2i}{dt^2} - 29\frac{di}{dt} + 2i = 0$$

ب ـ با انتخاب ولتاژ خازنها به عنوان متغیرهای حالت داریم:



$$v_A = 2i_{C1} + v_{C1} = \frac{dv_{C1}}{dt} + v_{C1} \;,\; v_B = v_A - v_{C2} = \frac{dv_{C1}}{dt} + v_{C1} - v_{C2} = 4i$$

KCL برای گره Ⓐ $\rightarrow \dfrac{\frac{dv_{C1}}{dt} + v_{C1}}{3} + \frac{1}{2}\frac{dv_{C1}}{dt} + \frac{dv_{C2}}{dt} = 0 \rightarrow \frac{5}{6}\frac{dv_{C1}}{dt} + \frac{dv_{C2}}{dt} = -\frac{v_{C1}}{3}$

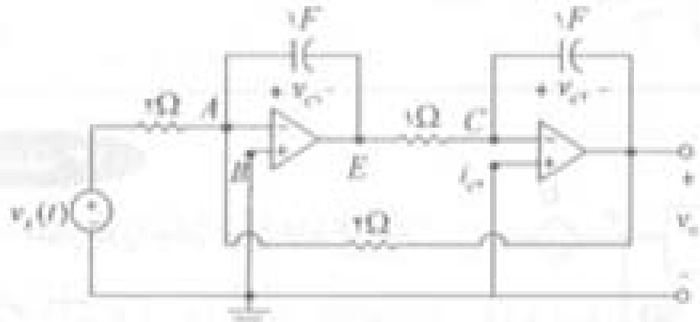
KCL برای گره Ⓑ $\rightarrow -2v_{C1} + \dfrac{\frac{dv_{C1}}{dt} + v_{C1} - v_{C2}}{4} - \frac{dv_{C2}}{dt} = 0 \rightarrow \frac{1}{4}\frac{dv_{C1}}{dt} - \frac{dv_{C2}}{dt} = \frac{7}{4}v_{C1} + \frac{v_{C2}}{4}$

$$\rightarrow \begin{cases} \dfrac{dv_{C1}}{dt} = \dfrac{17}{13}v_{C1} + \dfrac{3}{13}v_{C2} \\[2ex] \dfrac{dv_{C2}}{dt} = -\dfrac{37}{26}v_{C1} - \dfrac{5}{26}v_{C2} \end{cases}$$

$$v_B = \frac{dv_{C1}}{dt} - v_{C1} - v_{C2} \rightarrow 2i = \frac{17}{13}v_{C2} + \frac{3}{13}v_{C2} + v_{C1} - v_{C2} \rightarrow i = \frac{15}{26}v_{C1} - \frac{5}{26}v_{C2}$$

مسئله ۷۲

- معادله دیفرانسیل ارتباط دهنده v_o و v_s را بدست آورید.
- برای $v_s(t) = 4\cos 2t$ ، $v_o(t)$ را برای $t > 0$ بدست آورید. (شرایط اولیه را صفر در نظر بگیرید)



شکل مسئله ۷۲

حل : با فرض ایده آل بودن آپ-امپ ها $v_A = v_B = v_C = v_D = 0$ بوده و خواهیم داشت.

Ⓐ برای گره KCL $\rightarrow \frac{0 - v_s}{2} + \frac{0 - v_o}{4} + \frac{d}{dt}(0 - v_E) = 0 \rightarrow -\frac{v_s}{2} - \frac{v_o}{4} - Dv_E = 0$

$$\rightarrow v_E = -\frac{2v_s + v_o}{4D}$$

Ⓒ برای گره KCL $\rightarrow \frac{0 - v_E}{1} + \frac{d}{dt}(0 - v_o) = 0 \rightarrow \frac{2v_s + v_o}{4D} - Dv_o \rightarrow (4D^2 - 1)v_o = 2v_s$

$$\rightarrow 4\frac{d^2 v_o}{dt^2} - v_o = 2v_s$$

به ازای $v_s(t) = 4\cos 2t$ داریم:

$$4\frac{d^2 v_o}{dt^2} - v_o = 8\cos 2t$$

معادله مشخصه : $4s^2 - 1 = 0 \rightarrow s = \pm\frac{1}{2} \rightarrow v_o(t) = \underbrace{K_1 e^{-\frac{t}{2}} + K_2 e^{\frac{t}{2}}}_{} + \underbrace{(A\cos 2t + B\sin 2t)}_{\text{پاسخ خصوصی}}$

با جایگذاری پاسخ خصوصی در معادله دیفرانسیل داریم.

$$-17A\cos 2t - 17B\sin 2t = 8\cos 2t \quad \rightarrow \quad \begin{cases} -17A = 8 \;\rightarrow\; A = -\frac{8}{17} \\ -17B = 0 \;\rightarrow\; B = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_o(0) = 0 \;\rightarrow\; K_1 + K_2 - \frac{8}{17} = 0 \\ \frac{dv_o(0)}{dt} = 0 \;\rightarrow\; -\frac{1}{2}K_1 + \frac{1}{2}K_2 = 0 \end{cases} \rightarrow K_1 = K_2 = \frac{4}{17}$$

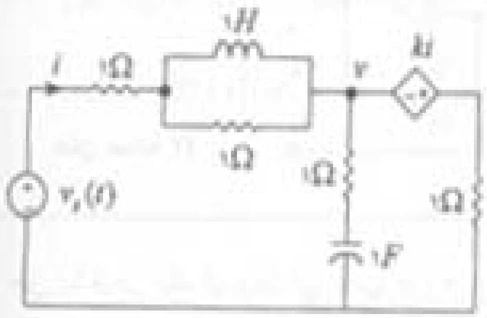
$$\rightarrow v_o(t) = \frac{4}{17}\left(e^{\frac{-1}{2}t} + e^{\frac{1}{2}t}\right) - \frac{18}{17}\cos 2t \quad , \quad t > 0$$

مسئله ۷۳

الف- مقدار K را چنان تعیین کنید که مدار نوسانی باشد.

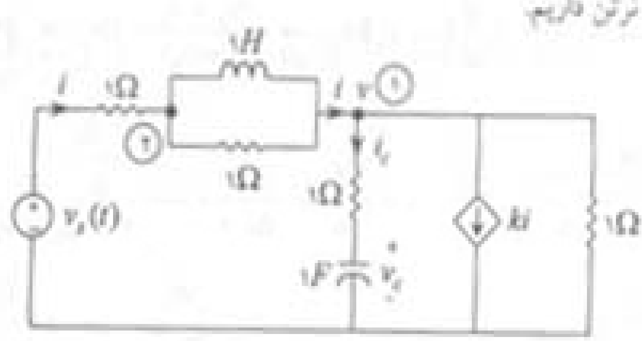
ب- به ازای چه مقدار K تمام فرکانسهای طبیعی در نیم صفحه چپ قرار می گیرند.

پ- با فرض شرایط اولیه صفر و $K = -3$ و $v_s(t) = u(t)$ ولتاژ v را تعیین کنید.



شکل مسئله ۷۳

حل : الف ـ با توجه به شکل مسئله و با بکارگیری نمایش اپراتوری معادلات انتگرال- دیفرانسیل و با استفاده از تبدیل تونن- نرتن داریم.



$$v_1 = v_s - i \quad ; \quad v = i_c + v_c = i_c + \int i_c = i_c + \frac{1}{D}i_c \;\rightarrow\; i_c = \frac{D}{D+1}v$$

KCL برای گره ۲ $\rightarrow -i + \frac{v_s - i - v}{1} + \int (v_s - i - v) = 0$

$$\rightarrow -i + v_s - i - v + \frac{1}{D}(v_s - i - v) = 0 \;\rightarrow\; i = \frac{D+1}{2D+1}(v_s - v)$$

① برای گره KCL $\rightarrow \quad -i+i_c+Ki+\frac{v}{1}=0 \rightarrow (K-1)\frac{D+1}{2D+1}(v_s-v)+\frac{D}{D+1}v+v=0$

$$\left\{(K-5)D^2+2(K-3)D+(K-2)\right\}v=\left\{(K-1)D^2+2(K-1)D+(K-1)\right\}v_s$$

$$\rightarrow (K-5)\frac{d^2v}{dt^2}+2(K-3)\frac{dv}{dt}+(K-2)v=(K-1)\frac{d^2v_s}{dt^2}+2(K-1)\frac{dv_s}{dt}+(K-1)v_s$$

می دانیم که به ازای $\alpha=0$ مدار نوسانی خواهد بود پس داریم.

$$2\alpha=\frac{2(K-3)}{K-5}=0 \rightarrow K=3$$

ب ـ ابتدا فرکانسهای طبیعی را بدست می آوریم.

معادله مشخصه : $(K-5)s^2+2(K-3)s+(K-2)=0$

$$\rightarrow s=\frac{-(K-3)\pm\sqrt{(K-3)^2-(K-5)(K-2)}}{(K-5)}=\frac{-(K-3)\pm\sqrt{\Delta'}}{(K-5)}$$

فرض کنیم که $\Delta'\geq 0$ باشد. در این صورت ریشه های معادله مشخصه حقیقی بوده و شرط اینکه در نیم صفحه چپ صفحه مختلط واقع شوند این است که هر دو منفی باشند.

$$\Delta'>0 \rightarrow (K-3)^2-(K-2)(K-5)\geq 0 \rightarrow K-1\geq 0 \rightarrow K\geq 1$$

$$s=\frac{-(K-3)\pm\sqrt{\Delta'}}{K-5}<0 \rightarrow \begin{cases}-(K-3)\pm\sqrt{\Delta'}<0\\ K-5>0\end{cases} \qquad \begin{cases}-(K-3)\pm\sqrt{\Delta'}>0\\ K-5<0\end{cases}$$

$$\begin{cases}-(K-3)\pm\sqrt{\Delta'}<0 \rightarrow \begin{cases}-(K-3)+\sqrt{(K-3)^2-(K-2)(K-5)}<0\\ \qquad \rightarrow -(K-2)(K-5)<0 \rightarrow K<2\,,\ K>5\\ -(K-3)+\sqrt{(K-3)^2-(K-2)(K-5)}<0 \rightarrow K\in\mathbb{R}\end{cases}\\ K-5>0 \rightarrow K>5\end{cases}$$

اشتراک تمامی بازه های بدست آمده مقادیری از K خواهند بود که به ازای آنها فرکانسهای طبیعی حقیقی بوده و در نیم صفحه چپ قرار دارند، یعنی $1\leq K<2$.

حال فرض می کنیم $\Delta'<0$ باشد و این یعنی اینکه فرکانسهای طبیعی مختلط اند و شرط اینکه این فرکانسها در نیم صفحه چپ قرار گیرند این است که قسمت حقیقی آنها منفی باشد.

$$\Delta'<0 \rightarrow K-1<0 \rightarrow K<1$$

$$\Delta' < 0 \;\rightarrow\; s = -\frac{K-3}{K-5} \pm j\frac{\sqrt{-\Delta'}}{K-5} \;\rightarrow\; -\frac{K-3}{K-5} < 0 \;\rightarrow\; \frac{K-3}{K-5} > 0 \;\rightarrow\; K < 3 \text{ یا } K > 5$$

اشتراک بازه های فوق مقادیری از K را بدست می دهند که به ازای آنها فرکانسهای طبیعی مختلط بوده و در نیم صفحه چپ واقع اند، یعنی $K < 3$.

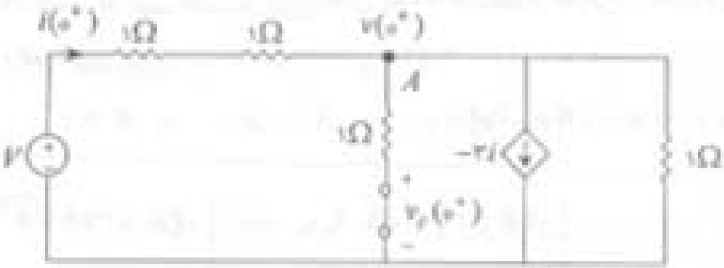
نتیجه کلی اینکه به ازای $1 \le K < 2$ و یا $K < 3$ فرکانسهای طبیعی در نیم صفحه چپ قرار دارند.

پ ـ با اعمال مفروضات داده شده داریم

$$8\frac{d^2v}{dt^2} + 12\frac{dv}{dt} + 5v = 4\delta'(t) + 8\delta(t) + 4u(t) = 4 \;,\; t > 0$$

$$\text{معادله مشخصه}: 8s^2 + 12s + 5 = 0 \;\rightarrow\; s = -\frac{3}{4} \pm j\frac{1}{4} \;\rightarrow\; v(t) = \underbrace{e^{-\frac{3}{4}t}\left(A\cos\frac{t}{4} + B\sin\frac{t}{4}\right)}_{\text{پاسخ عمومی}} + \underbrace{K_1}_{\text{پاسخ خصوصی}}$$

با جایگذاری پاسخ خصوصی در معادله دیفرانسیل $5K_1 = 4$ و یا $K_1 = \frac{4}{5}$ خواهد شد در $t = 0^+$ خازن اتصال کوتاه و سلف مدار باز خواهد بود بنابراین داریم



$$i(0^+) = \frac{1 - v(0^+)}{2} \;,\; v_c(0^+) = v_c(0^-) = 0$$

$$\text{A برای گره } KCL \;\rightarrow\; -\frac{1 - v(0^+)}{2} + \frac{v(0^+)}{1} - 2\left(\frac{1 - v(0^+)}{2}\right) + \frac{v(0^+)}{1} = 0 \;\rightarrow\; v(0^+) = \frac{1}{2}V$$

با انتگرال گیری از معادله دیفرانسیل در فاصله 0^- تا 0^+ خواهیم داشت.

$$8\frac{dv(0^+)}{dt} + 12v(0^+) = 8 \;\rightarrow\; \frac{dv(0^+)}{dt} = \frac{1}{4} \;\rightarrow\; \begin{cases} v(0^+) = \frac{1}{2} \;\rightarrow\; A + \frac{4}{5} = \frac{1}{2} \;\rightarrow\; A = -\frac{3}{10} \\ \frac{dv(0^+)}{dt} = \frac{1}{4} \;\rightarrow\; -\frac{3}{4}A + \frac{B}{4} = \frac{1}{4} \;\rightarrow\; B = \frac{1}{10} \end{cases}$$

$$\rightarrow\; v(t) = e^{-\frac{3}{4}t}\left(-\frac{3}{10}\cos\frac{t}{4} + \frac{1}{10}\sin\frac{t}{4}\right) + \frac{4}{5} \;,\; t > 0$$

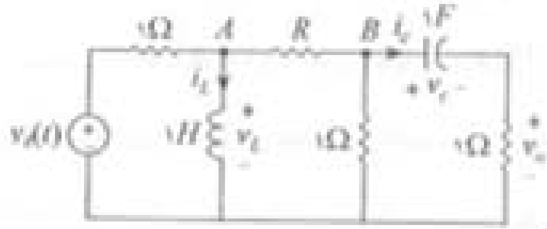
مسئله ۷۴

R را چنان تعیین کنید که مدار

الف- میرایی شدید باشد

ب- میرایی ضعیف باشد

پ- معادلات حالت را به ازای $R=2$ بنویسید و v_o را بر حسب متغیرهای حالت بیان کنید.



شکل مسئله ۷٤

حل : با توجه به شکل مسئله و بکارگیری نمایش اپراتوری معادلات دیفرانسیل داریم.

$$\frac{dv_c}{dt}=i_c=\frac{v_o}{1}=v_o \rightarrow v_B=v_c+v_o=v_c+\frac{dv_c}{dt}\ ,\ v_L=\frac{di_L}{dt}$$

برای گره B، KCL:
$$\frac{v_c+\frac{dv_c}{dt}-\frac{di_L}{dt}}{R}+\frac{v_c+\frac{dv_c}{dt}}{1}+\frac{dv_c}{dt}=0$$

برای گره A، KCL:
$$\frac{\frac{di_L}{dt}-v_s}{1}+i_L+\frac{\frac{di_L}{dt}-\left(v_c+\frac{dv_c}{dt}\right)}{R}=0$$

$$\rightarrow \begin{cases}\frac{dv_c}{dt}=-\frac{R+2}{2R+3}v_c-\frac{1}{2R+3}i_L+\frac{1}{2R+3}v_s\\ \frac{di_L}{dt}=\frac{1}{2R+3}v_c-\frac{2R+1}{2R+3}i_L+\frac{2R+1}{2R+3}v_s\end{cases}$$

معادله مشخصه: $|SI-A|=0 \rightarrow \begin{vmatrix} s+\frac{R+2}{2R+3} & \frac{1}{2R+3}\\ -\frac{1}{2R+3} & s+\frac{2R+1}{2R+3}\end{vmatrix}=0$

$$\rightarrow s^2+\frac{3R+3}{(2R+3)}s+\frac{R+1}{2R+3}=0$$

$$2\alpha=\frac{3R+3}{2R+3} \rightarrow \alpha=\frac{3(R+1)}{2(2R+3)}\ ,\ \omega_0^2=\frac{R+1}{2R+3} \rightarrow \omega_0=\sqrt{\frac{R+1}{2R+3}}$$

الف ـ به ازای $\alpha>\omega_0$ مدار میرایی شدید می باشد.

$$\alpha>\omega_0 \rightarrow \frac{3(R+1)}{2(2R+3)}>\sqrt{\frac{R+1}{2R+3}} \rightarrow 9(R+1)^2-4(2R+3)(R+1)>0$$

$$\rightarrow R^2-2R-3>0 \rightarrow (R-3)(R+1)>0 \rightarrow R<-1 \text{ یا } R>3$$

پ ـ به ازای $\alpha<\omega_0$ مدار میرایی ضعیف خواهد بود.

$$\alpha<\omega_0 \rightarrow \frac{3(R+1)}{2(2R+3)}<\sqrt{\frac{R+1}{2R+3}} \rightarrow (R-3)(R+1)<0 \rightarrow -1<R<3$$

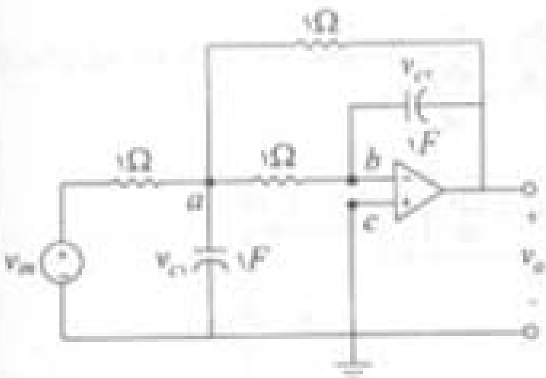
پ ـ با جایگذاری $R=3$ در معادلات حالت بدست آمده در قسمت (الف) داریم.

$$\frac{dv_c}{dt}=-\frac{5}{9}v_c-\frac{1}{9}i_L+\frac{1}{9}v_s \quad , \quad \frac{di_L}{dt}=\frac{1}{9}v_c-\frac{7}{9}i_L+\frac{7}{9}v_s$$

و در نهایت v_0 را بر حسب متغیر های حالت بدست خواهیم آورد.

$$v_o=i_c=\frac{dv_c}{dt} \rightarrow v_o=-\frac{5}{9}v_c-\frac{1}{9}i_L+\frac{1}{9}v_s$$

مسئله ۷۵



شکل مسئله ۷۵

- معادله دیفرانسیلی بنویسید که v_o را به v_{in} ارتباط دهد.(شرایط اولیه را V_{01} و V_{02} بگیرید.)
- پاسخ پله را تعیین کنید.

حل : با فرض ایده آل بودن آپ امپ ها $v_b=v_c=0$ بوده و خواهیم داشت.

$$\text{KCL برای گره } a \rightarrow \frac{d}{dt}(0-v_o)+\frac{0-v_a}{1}=0 \rightarrow v_a=-\frac{dv_o}{dt}$$

$$\text{KCL برای گره } b \rightarrow \frac{-\frac{dv_o}{dt}-v_{in}}{1}+\frac{d}{dt}\left(-\frac{dv_o}{dt}\right)+\frac{-\frac{dv_o}{dt}-v_o}{1}+\frac{-\frac{dv_o}{dt}}{1}=0$$

$$\frac{d^2v_o}{dt^2}+3\frac{dv_o}{dt}+v_o=-v_{in}$$

با توجه به شکل مسئله به راحتی می توان نوشت.

$$v_o(0^+)=V_{01} \quad , \quad v_a=-\frac{dv_o}{dt} \rightarrow \frac{dv_o(0)}{dt}=-V_{02}$$

در ادامه به ازای $v_{in}=u(t)=\begin{cases}1 \ , \ t>0\\ 0 \ , \ t<0\end{cases}$ داریم.

$$\frac{d^2v_o}{dt^2}+3\frac{dv_o}{dt}+v_o=-1 \quad , \quad v_o(0^-)=0 \quad , \quad \frac{dv_o(0^-)}{dt}=0$$

$$\text{معادله مشخصه}: s^2+3s+1=0 \rightarrow s=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2} \rightarrow v_o(t)=\underbrace{K_1e^{-\frac{3+\sqrt{5}}{2}t}+K_2e^{-\frac{3-\sqrt{5}}{2}t}}_{\text{پاسخ عمومی}}+\underbrace{K_3}_{\text{پاسخ خصوصی}}$$

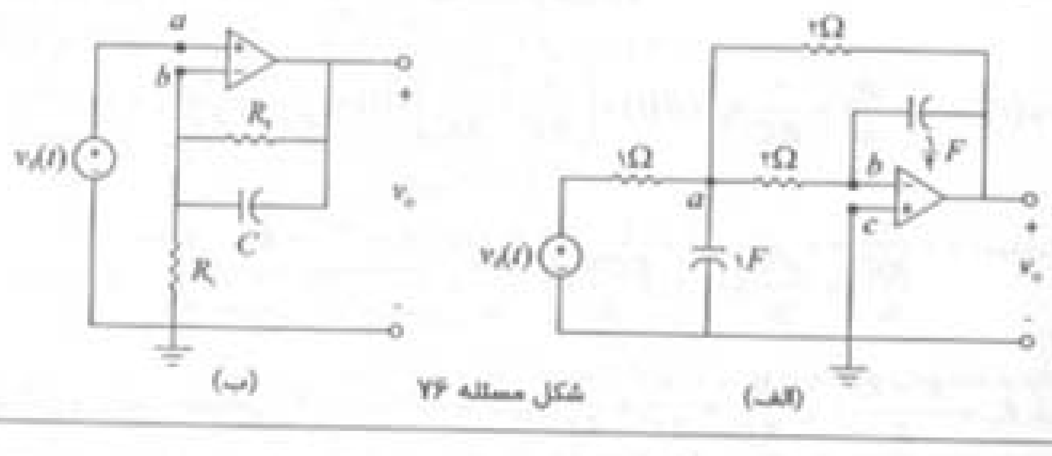
با جایگذاری پاسخ خصوصی در معادله دیفرانسیل $K_3=-1$ شده و در $t=0^+$ خازنها اتصال کوتاه می باشند بنابراین خواهیم داشت.

$$\rightarrow \begin{cases} v_o(0^+)=0 \rightarrow K_1+K_2-1=0 \\ \dfrac{dv_o(0^+)}{dt}=0 \rightarrow -\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}K_1-\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}K_2=0 \end{cases} \rightarrow K_1=\frac{5-3\sqrt{5}}{10} \ , \ K_2=\frac{5+3\sqrt{5}}{10}$$

$$\rightarrow v_o(t)=\frac{5-3\sqrt{5}}{10}e^{-\frac{3+\sqrt{5}}{2}t}+\frac{5+3\sqrt{5}}{10}e^{-\frac{3-\sqrt{5}}{2}t}-1 \ , \ t>0$$

مسئله ۷۶

پاسخ پله v_o را حساب کنید.



(ب) شکل مسئله ۷۶ (الف)

حل: الف ـ با فرض ایده آل بودن آپ امپ $v_b=v_c=0$ بوده خواهیم داشت.

$$\text{ⓑ برای گره } KCL \rightarrow \frac{0-v_a}{2}+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(0-v_o)=0 \rightarrow v_a=-\frac{1}{2}\frac{dv_o}{dt}$$

$$\text{ⓐ برای گره } KCL \rightarrow \frac{-\frac{1}{2}\frac{dv_o}{dt}-v_s}{1}+\frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{2}\frac{dv_o}{dt}\right)+\frac{-\frac{1}{2}\frac{dv_o}{dt}-v_o}{2}+\frac{-\frac{1}{2}\frac{dv_o}{dt}-0}{2}=0$$

$$\frac{d^2 v_o}{dt^2} + 2\frac{dv_o}{dt} + v_o = -2v_s = -2u(t) = -2 \ , \ t > 0$$

معادله مشخصه : $s^2 + 2s + 1 = 0 \ \rightarrow \ s = -1 \ , \ -1 \ \rightarrow \ v_o(t) = (K_1 + K_2 t)e^{-t} + K_3 \ , \ t > 0$

با جایگذاری پاسخ خصوصی K_3 در معادله دیفرانسیل $K_3 = -2$ و در $t = 0^+$ خازنها اتصال کوتاه خواهند بود بنابراین داریم.

$$\rightarrow \begin{cases} v(0^+) = v_b(0^+) = 0 \ \rightarrow \ K_1 - 2 = 0 \ \rightarrow \ K_1 = 2 \\ \dfrac{dv(0^+)}{dt} = v_a(0^+) = 0 \ \rightarrow \ -K_1 + K_2 = 0 \ \rightarrow \ K_2 = K_1 = 2 \end{cases}$$

$$\rightarrow \ v_o(t) = (2 + 2t)e^{-t} - 2 \ , \ t > 0 \ \rightarrow \ v_o(t) = \left(2(1+t)e^{-t} - 2\right)u(t)$$

ب ـ با فرض ایده آل بودن آپ امپ $v_a = v_b = v_s$ بوده و خواهیم داشت.

ⓑ KCL برای گره $\rightarrow \ \dfrac{v_s - v_o}{R_2} + C\dfrac{d}{dt}(v_s - v_o) + \dfrac{v_s}{R_1} = 0$

$$\frac{dv_o}{dt} + \frac{1}{R_2C}v_o = \frac{dv_s}{dt} + \left(\frac{1}{R_1C} + \frac{1}{R_2C}\right)v_s$$

در ادامه به ازای $v_s(t) = u(t)$ پاسخ پله را محاسبه خواهیم کرد.

$$v_s(t) = u(t) \ \rightarrow \ \frac{dv_o}{dt} + \frac{1}{R_2C}v_o = \delta(t) + \left(\frac{1}{R_1C} + \frac{1}{R_2C}\right)u(t) = \frac{1}{R_1C} + \frac{1}{R_2C} \ , \ t > 0$$

معادله مشخصه : $s + \dfrac{1}{R_2C} = 0 \ \rightarrow \ s = -\dfrac{1}{R_2C} \ \rightarrow \ v_o(t) = \underbrace{K_1 e^{-\frac{t}{R_2C}}}_{\text{پاسخ عمومی}} + \underbrace{K_2}_{\text{پاسخ خصوصی}} \ , \ t > 0$

با جایگذاری پاسخ خصوصی K_2 در معادله دیفرانسیل $\dfrac{K_2}{R_2C} = \dfrac{1}{R_1C} + \dfrac{1}{R_2C}$ و یا $K_2 = \dfrac{R_1 + R_2}{R_1}$ شده و در $t = 0^+$ خازن اتصال کوتاه بوده بنابراین داریم.

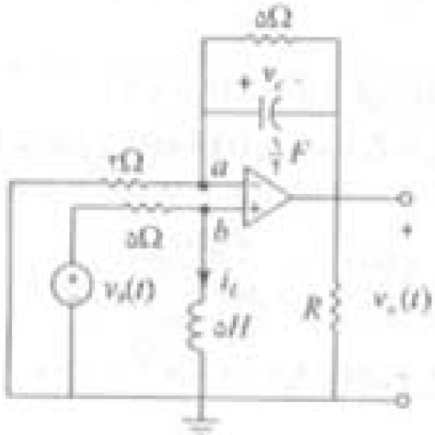
$$v_o(0^+) = v_b(0^+) = v_s(0^+) = 1 \ \rightarrow \ K_1 + \frac{R_1 + R_2}{R_1} = 1 \ \rightarrow \ K_1 = -\frac{R_2}{R_1}$$

$$\rightarrow \ v_o(t) = -\frac{R_2}{R_1}e^{-\frac{t}{R_2C}} + \frac{R_1 + R_2}{R_1} \ , \ t > 0$$

مسئله ۷۷

الف- معادله دیفرانسیلی بنویسید که v_o را به v_s ارتباط دهد. شرایط اولیه را مشخص کنید.

ب- v_oرا برای ورودی پله واحد و شرایط اولیه صفرتعیین کنید.نقش مقاومتR درتعیین خروجی چیست.



شکل مسئله ۷۷

حل : الف ـ با فرض ایده آل بودن آپ امپ و با بکارگیری نمایش اپراتوری معادلات دیفرانسیل داریم.

$$\text{KCL برای گره } (b) \rightarrow \frac{v_b - v_s}{۵} + i_L = ۰ \rightarrow \frac{۵\frac{di_L}{dt} - v_s}{۵} + i_L = ۰ \rightarrow \frac{۵Di_L - v_s}{۵} + i_L = ۰$$

$$\rightarrow i_L = \frac{v_s}{۵D + ۵} \quad , \quad v_a = v_b = ۵\frac{di_L}{dt} = ۵Di_L = \frac{Dv_s}{D+۱}$$

$$\text{KCL برای گره } (a) \rightarrow \frac{v_a - ۰}{۲} + \frac{v_a - v_o}{۵} + \frac{۱}{۲}\frac{d}{dt}(v_a - v_o) = ۰$$

$$\rightarrow \frac{\frac{Dv_s}{D+۱} - ۰}{۲} + \frac{\frac{Dv_s}{D+۱} - v_o}{۵} + \frac{۱}{۲}D\left(\frac{Dv_s}{D+۱} - v_o\right) = ۰$$

$$\left(۵D^۲ + ۷D + ۲\right)v_o = \left(۵D^۲ + ۷D\right)v_s \rightarrow ۵\frac{d^۲v_o}{dt^۲} + ۷\frac{dv_o}{dt} + ۲v_o = ۵\frac{d^۲v_s}{dt^۲} + ۷\frac{dv_s}{dt}$$

در ادامه به محاسبه شرایط اولیه می پردازیم با توجه به شکل مسئله داریم.

$$v_a = v_c + v_o \ , \ v_b = v_s - ۵i_L \ , \ v_a = v_b \rightarrow v_c + v_o = v_s - i_L \rightarrow v_o = -v_c - ۵i_L + v_s$$

$$\rightarrow v_o(۰^+) = -V_۰ - ۵I_۰ + v_s(۰)$$

$$\frac{dv_o}{dt} = -\frac{dv_c}{dt} - ۵\frac{di_L}{dt} + \frac{dv_s}{dt} = -۲i_c - v_b + \frac{dv_s}{dt}$$

$$\text{KCL برای گره } (a) \rightarrow \frac{v_s - ۵i_L - ۰}{۲} + \frac{v_s - ۵i_L - \left(-v_c - ۵i_L + v_s\right)}{۵} + i_c = ۰$$

$$\rightarrow\ i_x = \frac{5i_L - v_c}{2} - \frac{v_c}{5} \ \rightarrow\ \frac{dv_o}{dt} = -2\left(\frac{5i_L - v_c}{2} - \frac{v_c}{5}\right) - \left(v_c - 5i_L\right) + \frac{dv_s}{dt} = \frac{2}{5}v_c + \frac{dv_s}{dt}$$

$$\rightarrow\ \frac{dv_o(0^+)}{dt} = \frac{2}{5}V_0 + \frac{dv_s(0)}{dt}$$

ب ـ با جایگذاری $v_s(t) = u(t)$ و $V_0 = I_0 = 0$ داریم.

$$5\frac{d^2 v_o}{dt^2} + 7\frac{dv_o}{dt} + 2v_o = 5\delta'(t) + 7\delta(t) = 0\ ,\ t > 0 \quad ,\quad v_o(0) = 1 \quad ,\quad \frac{dv_o(0)}{dt} = 1$$

معادله مشخصه : $5s^2 + 7s + 2 = 0 \ \rightarrow\ s = -1\ ,\ -\frac{2}{5} \ \rightarrow\ v_o(t) = K_1 e^{-t} + K_2 e^{-\frac{2}{5}t}\ ,\ t > 0$

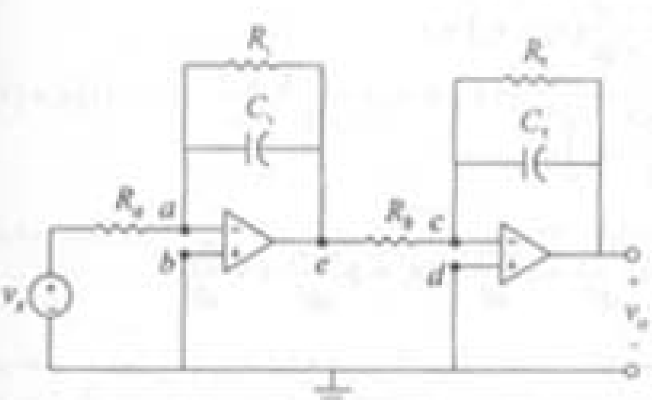
$$\begin{cases} v_o(0) = 1 \ \rightarrow\ K_1 + K_2 = 1 \\ \qquad\qquad \rightarrow\ K_1 = -\frac{2}{3}\ ,\ K_2 = \frac{5}{3} \ \rightarrow\ v_o(t) = \left(-\frac{2}{3}e^{-t} + \frac{5}{3}e^{-\frac{2}{5}t}\right)u(t) \\ \frac{dv_o(0)}{dt} = 0 \rightarrow\ -K_1 - \frac{2}{5}K_2 = 0 \end{cases}$$

از آنجا که آپ امپ را ایده آل درنظر گرفته ایم. لذا مقاومت خروجی آن برابرصفر بوده و R نقشی درتعیین $v_o(t)$ نخواهد داشت.

مسئله ۷۸

معادله دیفرانسیل v_o بر حسب v_s چیست.

پاسخ پله v_o را بدست آورید.



شکل مسئله ۷۸

حل : با فرض ایده آل بودن آپ امپ ها $v_a = v_b = 0$ و $v_c = v_d = 0$ بوده و خواهیم داشت.

$$KCL \text{ برای گره } (a) \ \rightarrow\ \frac{0 - v_s}{R_a} + \frac{0 - v_e}{R_1} + C_1\frac{d}{dt}\left(0 - v_e\right) = 0 \ \rightarrow\ \frac{-v_s}{R_a} - \frac{v_e}{R_1} - C_1 D v_e = 0$$

$$\rightarrow\ v_e = -\frac{R_1}{R_1 R_a C_1 D + R_a}v_s$$

(c) KCL برای گره ۰ $\rightarrow \dfrac{0-v_x}{R_b}+\dfrac{0-v_o}{R_2}+C_2\dfrac{d}{dt}(0-v_o)=0 \rightarrow v_o=-\dfrac{R_2}{R_2R_bC_2D+R_b}v_x$

$$\rightarrow v_o=\frac{R_1R_2}{(R_1R_aC_1D+R_a)(R_2R_bC_2D+R_b)}v_s$$

$$\left(R_1R_2R_aR_bC_1C_2D^2+R_aR_b\left(R_1C_1+R_2C_2\right)D+R_aR_b\right)v_o=R_1R_2v_s$$

$$R_1R_2R_aR_bC_1C_2\frac{d^2v_o}{dt^2}+R_aR_b\left(R_1C_1+R_2C_2\right)\frac{dv_o}{dt}+R_aR_bv_o=R_1R_2v_s$$

در ادامه با جایگذاری $t>0$ ، $v_s(t)=u(t)=1$ پاسخ پله را بدست خواهیم آورد.

$$R_1R_2R_aR_bC_1C_2\frac{d^2v_o}{dt^2}+R_aR_b\left(R_1C_1+R_2C_2\right)\frac{dv_o}{dt}+R_aR_bv_o=R_1R_2 \quad , t>0$$

معادله مشخصه: $R_1R_2R_aR_bC_1C_2s^2+R_aR_b\left(R_1C_1+R_2C_2\right)s+R_aR_b=0$

$$\rightarrow R_aR_b\left(R_1C_1s+1\right)\left(R_2C_2s+1\right)=0 \rightarrow s=-\frac{1}{R_1C_1},-\frac{1}{R_2C_2}$$

$$\rightarrow v_o(t)=\underbrace{K_1e^{-\frac{t}{R_1C_1}}+K_2e^{-\frac{t}{R_2C_2}}}_{\text{پاسخ عمومی}}+\underbrace{K_3}_{\text{پاسخ خصوصی}} \quad , t>0$$

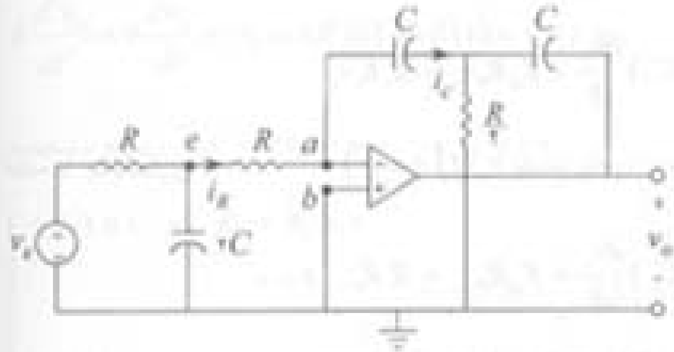
با جایگذاری پاسخ خصوصی K_3 در معادله دیفرانسیل $R_aR_bK_3=R_1R_2$ و یا $K_3=\dfrac{R_1R_2}{R_aR_b}$ شده و با اعمال شرایط اولیه، K_1 و K_2 را نیز بدست خواهیم آورد.

$$\begin{cases} v_o(0)=0 \rightarrow K_1+K_2+\dfrac{R_1R_2}{R_aR_b}=0 \\ \dfrac{dv_o(0)}{dt}=0 \rightarrow \dfrac{K_1}{R_1C_1}+\dfrac{K_2}{R_2C_2}=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} K_1=-\dfrac{R_1R_2}{R_aR_b}\left(\dfrac{R_1C_1}{R_1C_1-R_2C_2}\right) \\ K_2=\dfrac{R_1R_2}{R_aR_b}\left(\dfrac{R_2C_2}{R_1C_1-R_2C_2}\right) \end{cases}$$

$$\rightarrow v_o(t)=\frac{R_1R_2}{R_aR_b}\left\{\left(-\frac{R_1C_1}{R_1C_1-R_2C_2}\right)e^{-\frac{t}{R_1C_1}}+\left(\frac{R_2C_2}{R_1C_1-R_2C_2}\right)e^{-\frac{t}{R_2C_2}}+1\right\}u(t)$$

مسئله ۷۹

- معادله دیفرانسیل v_o بر حسب v_s چیست.
- در حالتی که بین این مسئله و مسئله ۷۸، روابط $R_1 = R_2 = \infty$ و $R_aC_1 = R_bC_2 = RC$ بر قرار باشند نتایج را مقایسه کنید. آیا مدار این مسئله مزیتی به مدار مسئله ۷۸ دارد.



شکل مسئله ۷۹

حل : با فرض ایده آل بودن آپ امپ $v_a = v_b = 0$ و $i_R = i_c$ بوده و با توجه به شکل مسئله $v_e = Ri_R$ خواهد بود.

$$\text{برای گره } e \ KCL \rightarrow \frac{Ri_R - v_s}{R} + 2C\frac{d}{dt}(Ri_R) + i_R = 0 \rightarrow \frac{Ri_R - v_s}{R} + 2RCDi_R + i_R = 0$$

$$\rightarrow i_R = \frac{v_s}{2R^2CD + 2R}$$

$$\text{برای گره } d \ KCL \rightarrow C\frac{dv_d}{dt} + \frac{v_d}{\frac{R}{2}} + C\frac{d}{dt}(v_d - v_o) = 0$$

$$\rightarrow CDv_d + \frac{2v_d}{R} + CD(v_d - v_o) = 0 \rightarrow v_d = \frac{RCD}{2RDC + 2}v_o$$

$$i_c = -C\frac{dv_d}{dt} = -CDv_d = -\frac{RC^2D^2}{2RCD + 2}v_o$$

$$i_R = i_c \rightarrow \frac{v_s}{2R^2CD + 2R} = -\frac{RC^2D^2}{2RCD + 2}v_o \rightarrow RC^2D^2v_o = -v_s \rightarrow R^2C^2\frac{d^2v_o}{dt} = -v_s$$

حال روابط داده شده را در معادله دیفرانسیل بدست آمده در مسئله ۷۸ اعمال می کنیم.

$$R_aC_1R_bC_2\frac{d^2v_o}{d^2t} + R_aR_b\left(\frac{C_1}{R_2} + \frac{C_2}{R_1}\right)\frac{dv_o}{dt} + \frac{R_aR_b}{R_1R_2}v_o = v_s$$

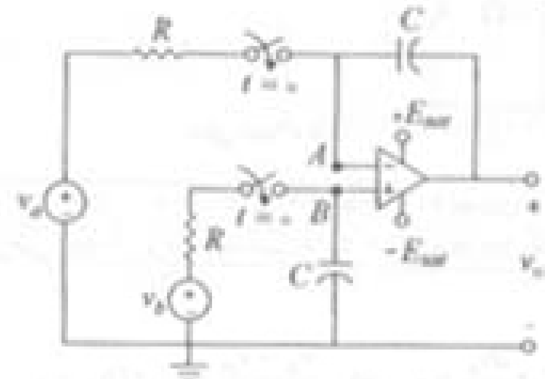
$$R_1 \rightarrow \infty \ , \ R_2 \rightarrow \infty \ , \ R_aC_1 = R_bC_2 = RC \rightarrow R^2C^2\frac{d^2v_o}{dt^2} = v_s$$

بنابراین با مفروضات فوق ملاحظه می شود که دو معادله دیفرانسیل یکسان است و فقط علامت v_s در دو معادله مخالف یکدیگر می باشد. پس هر دو مدار یک کار را انجام می دهند، و چون در مدار مسئله ۷۹ فقط از یک آپ امپ استفاده شده لذا مدار مسئله ۷۹ بهتر می باشد.

مسئله ۸۰

الف- v_o را بر حسب v_a و v_b حساب کنید. (ولتاژ اولیه خازنها صفر است.)

ب- اگر $v_a = 25mV$ و $v_b = 5mV$ و $R = 50K\Omega$ و $C = 32nF$ و $E_{sat} = 20V$ باشد چند ثانیه طول می کشد تا آپ امپ اشباع شود.



شکل مسئله ۸۰

حل : الف ـ با فرض ایده آل بودن آپ امپ ها $v_B = v_A$ بوده و با بکارگیری نمایش اپراتوری معادلات دیفرانسیل خواهیم داشت.

$$\text{(B) برای گره } KCL \rightarrow \frac{v_B - v_b}{R} + C\frac{dv_B}{dt} = 0 \rightarrow \frac{v_B - v_b}{R} + CDv_B = 0$$

$$\rightarrow v_B = v_A = \frac{1}{RCD+1}v_b$$

$$\text{(A) برای گره } KCL \rightarrow \frac{v_A - v_a}{R} + C\frac{d}{dt}(v_A - v_o) = 0$$

$$\rightarrow \frac{\frac{1}{RCD+1}v_b - v_a}{R} + CD\left(\frac{1}{RCD+1}v_b - v_o\right) , \quad RCD(RCD+1)v_o = (RCD+1)(v_a - v_b)$$

$$\rightarrow Dv_o = \frac{v_a - v_b}{RC} \rightarrow \frac{dv_o}{dt} = \frac{v_a - v_b}{RC} , \quad v_o(0) = 0$$

ب ـ با جایگذاری مقادیر داده شده داریم.

$$\frac{dv_o}{dt} = \frac{25\times10^{-3} - 5\times10^{-3}}{50\times10^{3}\times32\times10^{-9}} = 25 \rightarrow v_o(t) = v_o(0) + \int_0^t 25dt = 25t$$

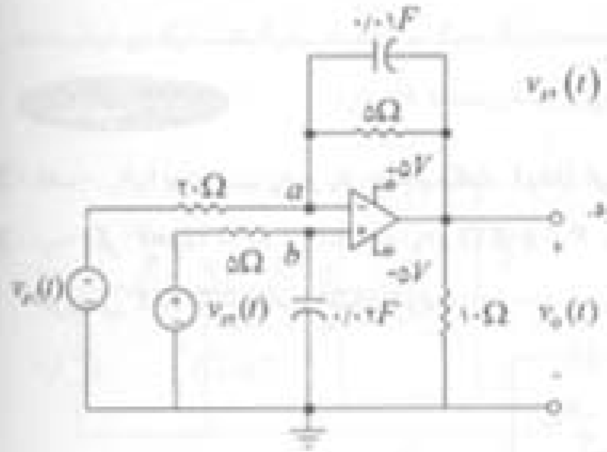
به ازای $v_o(t) = E_{sat} = 20$ آپ امپ اشباع می شود. بنابراین خواهیم داشت.

$$25t = 20 \;\rightarrow\; t = \frac{20}{25} = 0/8\,sec$$

مسئله ۸۱

$v_o(t)$ را برای $v_{s1}(t) = 20u(t)$ و $v_{s2}(t) = 16u(t)$ تعیین کنید.

پس از چند میلی ثانیه آپ امپ اشباع می شود.



شکل مسئله ۸۱

حل : با فرض ایده آل بودن آپ امپ ها $v_b = v_a$ بوده و با بکارگیری نمایش اپراتوری معادلات دیفرانسیل خواهیم داشت.

KCL برای گره b:
$$\frac{v_b - v_{s2}}{5} + 0/02\frac{dv_b}{dt} = 0 \;\rightarrow\; \frac{v_b - v_{s2}}{5} + 0/02Dv_b = 0$$

$$\rightarrow\; v_b = v_a = \frac{v_{s2}}{0/1D+1}$$

KCL برای گره a:
$$\frac{v_a - v_{s1}}{20} + \frac{v_a - v_o}{5} + 0/01\frac{d}{dt}\left(v_a - v_o\right) = 0$$

$$\rightarrow\; \frac{\frac{v_{s2}}{0/1D+1} - v_{s1}}{20} + \frac{\frac{v_{s2}}{0/1D+1} - v_o}{5} + 0/01D\left(\frac{v_{s2}}{0/1D+1} - v_o\right) = 0$$

$$\rightarrow\; \left(0/02D^2 + 0/6D + 4\right)v_o = -\left(0/1D+1\right)v_{s1} + \left(0/2D+5\right)v_{s2}$$

$$\rightarrow\; 0/02\frac{d^2v_o}{dt^2} + 0/6\frac{dv_o}{dt} + 4v_o = -2\delta(t) - 20u(t) + 3/2\delta(t) + 80u(t)$$

$$\rightarrow\; 0/02\frac{d^2v_o}{dt^2} + 0/6\frac{dv_o}{dt} + 4v_o = 60 \;,\; t>0$$

معادله مشخصه : $0/02s^2 + 0/6s + 4 = 0 \;\rightarrow\; s = -10, -20$

$$\rightarrow\; v_o(t) = \underbrace{K_1e^{-10t} + K_2e^{-20t}}_{\text{پاسخ عمومی}} + \underbrace{K_3}_{\text{پاسخ خصوصی}} \;,\; t>0$$

با جایگذاری پاسخ خصوصی درمعادله دیفرانسیل $40 = 4K_p$ و یا $K_p = 10$ خواهد شد. در $t = 0^+$ خازنها اتصال کوتاه خواهند بود بنابراین $v_o(0^+) = v_a = v_b = 0$ بوده و با انتگرال گیری از معادله دیفرانسیل در بازه 0^- تا 0^+ خواهیم داشت.

$$0/02\frac{dv_o(0^+)}{dt} = -4+3/2 \quad \rightarrow \quad \frac{dv_o(0^+)}{dt} = -40$$

$$\rightarrow \begin{cases} v_o(0^+) = 0 \quad \rightarrow \quad K_1 + K_2 + 10 = 0 \\ \dfrac{dv_o(0^+)}{dt} = -40 \quad \rightarrow \quad -10K_1 - 20K_2 = -40 \end{cases} \rightarrow K_1 = -24 \;,\; K_2 = 14$$

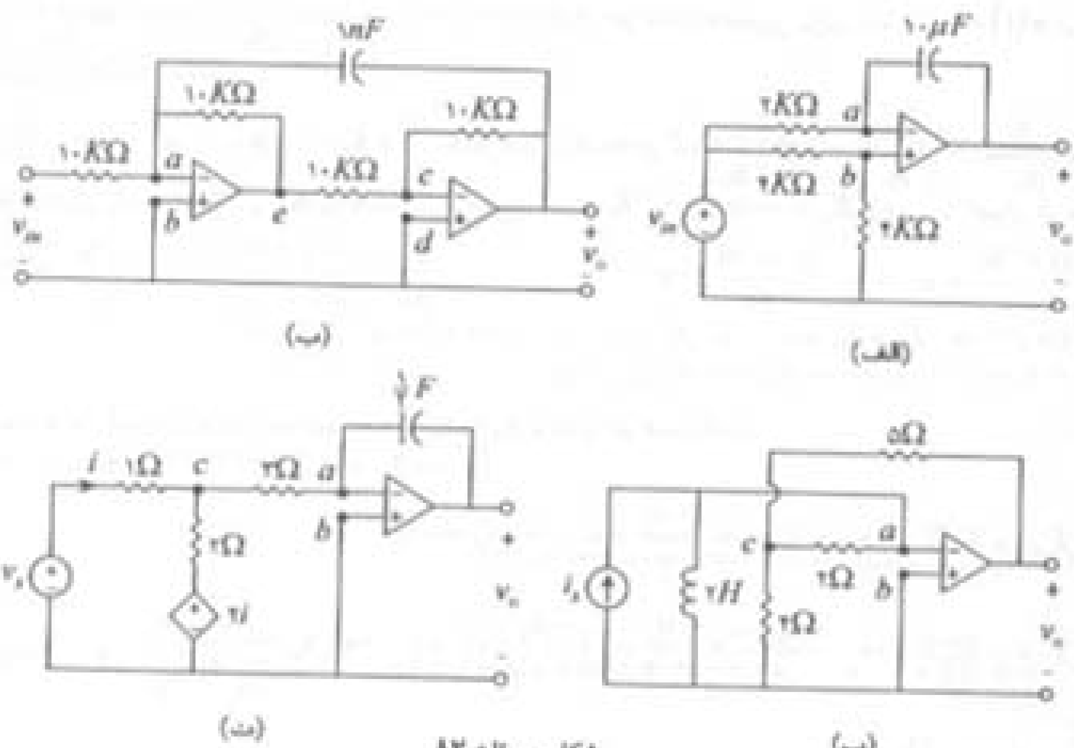
$$\rightarrow v_o(t) = -24e^{-10t} + 14e^{-20t} + 10 \;,\; t > 0$$

به ازای $v_o(t) = E_{sat} = 5V$ آپ امپ اشباع می شود بنابراین داریم.

$$-24e^{-10t} + 14e^{-20t} + 10 = 5 \quad \rightarrow \quad t = 0/142 \text{ sec} = 142 \, m\text{sec}$$

مسئله ۸۲

در مدار های شکل مسئله۸۲ پاسخ پله را بدست آورید.



شکل مسئله ۸۲

حل : الف ـ با فرض ایده آل بودن آپ امپ $v_b = v_a$ بوده و خواهیم داشت.

$$\text{ⓑ برای گره } KCL \rightarrow \frac{v_b - v_{in}}{4\times10^3} + \frac{v_b}{4\times10^3} = 0 \rightarrow v_b = v_a = \frac{v_{in}}{2}$$

$$\text{ⓐ برای گره } KCL \rightarrow \frac{\frac{v_{in}}{2} - v_{in}}{2\times10^3} + 10\times10^{-6}\frac{d}{dt}\left(\frac{v_{in}}{2} - v_o\right) = 0 \rightarrow \frac{dv_o}{dt} = \frac{1}{2}\frac{dv_{in}}{dt} - 25v_{in}$$

$$\rightarrow \frac{dv_o}{dt} = \frac{1}{2}\delta(t) - 25u(t) \rightarrow v_o(t) = \frac{1}{2}u(t) - 25tu(t) = \left(\frac{1}{2} - 25t\right)u(t)$$

ب ـ با فرض ایده آل بودن آپ امپ ها $v_a = v_b = v_c = v_d = 0$ بوده و خواهیم داشت.

$$\text{ⓐ برای گره } KCL \rightarrow \frac{0 - v_{in}}{10\times10^3} + \frac{0 - v_d}{10\times10^3} + 1\times10^{-6}\frac{d}{dt}(0 - v_o) \rightarrow v_d = -\left(v_{in} + 10^{-2}\frac{dv_o}{dt}\right)$$

$$\text{ⓒ برای گره } KCL \rightarrow \frac{0 + \left(v_{in} + 10^{-2}\frac{dv_o}{dt}\right)}{10\times10^3} + \frac{0 - v_o}{10\times10^3} = 0$$

$$\rightarrow \frac{dv_o}{dt} - 10^2 v_o = 10^2 v_{in} = 10^2 u(t) = 10^2 \ , \ t > 0$$

در $t = 0^+$ خازن اتصال کوتاه بوده بنابراین $v_o(0^+) = v_a = 0$ خواهدشدهمچنین برای $t > 0$ ، $u(t) = 1$ می باشد بنابراین خواهیم داشت.

معادله مشخصه: $s - 10^2 = 0 \rightarrow s = 10^2 \rightarrow v_o(t) = K_1 e^{10^2 t} + K_2 \ , \ t > 0$

با جایگذاری پاسخ خصوصی K_2 در معادله دیفرانسیل $-10^2 K_2 = 10^2$ و یا $K_2 = -1$ شده و با اعمال شرط اولیه داریم.

$$v_o(0^+) = 0 \rightarrow K_1 + K_2 = 0 \rightarrow K_1 = 1 \rightarrow v_o(t) = \left(1 - e^{10^2 t}\right)u(t)$$

پ ـ با فرض ایده آل بودن آپ امپ ها $v_a = v_b = 0$ بوده و خواهیم داشت.

$$\text{ⓐ برای گره } KCL \rightarrow -i_x + 0 + \frac{0 - v_c}{2} = 0 \rightarrow v_c = -2i_x$$

$$\text{ⓒ برای گره } KCL \rightarrow \frac{-2i_x - 0}{2} + \frac{-2i_x - 0}{4} + \frac{-2i_x - v_o}{5} = 0 \rightarrow v_o = -\frac{19}{2}i_x$$

$$\rightarrow v_o(t) = -\frac{19}{2}u(t)$$

ت ـ با فرض ایده آل بودن آپ امپ ها $v_a = v_b = 0$ بوده و خواهیم داشت.

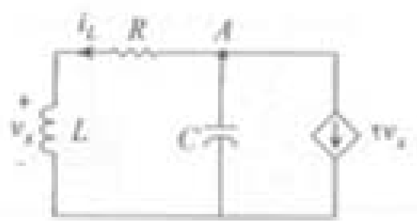
$$i = \frac{v_s - v_c}{1} = v_s - v_c$$

KCL برای گره c: $$-(v_s - v_c) + \frac{v_c - 2(v_s - v_c)}{2} + \frac{v_c - 0}{3} = 0 \rightarrow v_c = \frac{12}{17} v_s$$

KCL برای گره b: $$\frac{0 - \frac{12}{17}v_s}{3} + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(0 - v_o) = 0 \rightarrow \frac{dv_o}{dt} = -\frac{8}{17}v_s = -\frac{8}{17}u(t)$$

$$\rightarrow v_o(t) = -\frac{8}{17}u(t)$$

مسئله ۸۳



R را چنان تعیین کنید که مدار مانند یک نوسان ساز رفتار نماید. فرکانس نوسانات را نیز تعیین کنید.

شکل مسئله ۸۳

حل :

$$v_s = L\frac{di_L}{dt} \quad , \quad v_c = Ri_L + L\frac{di_L}{dt}$$

KCL برای گره A: $$i_L + C\frac{dv_c}{dt} + 2v_s = 0 \rightarrow i_L + C\frac{d}{dt}\left(Ri_L + L\frac{di_L}{dt}\right) + 2L\frac{di_L}{dt} = 0$$

$$\rightarrow \frac{d^2 i_L}{dt^2} + \left(\frac{RC+2L}{LC}\right)\frac{di_L}{dt} + \frac{1}{LC}i_L = 0 \qquad 2\alpha = \frac{RC+2L}{LC} \rightarrow \alpha = \frac{RC+2L}{2LC}$$

به ازای $\alpha = 0$ مدار یک نوسان ساز می باشد بنابراین داریم.

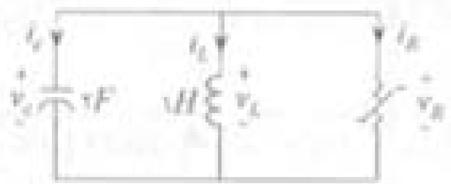
$$\alpha = 0 \rightarrow RC + 2L = 0 \rightarrow R = -\frac{2L}{C}$$

در ادامه فرکانسهای نوسانات را به ازای $\alpha = 0$ بدست خواهیم آورد.

$\alpha = 0 \rightarrow \frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{1}{LC}i_L = 0 \rightarrow$ معادله مشخصه : $s^2 + \frac{1}{LC} = 0 \rightarrow s = \pm j\frac{1}{\sqrt{LC}}$

مسئله ۸۴

معادلات حالت مدار را بنویسید. ($i_R = -2v_R + v_R^3$ و $i_L(0) = I_0$ و $v_c(0) = V_0$)



شکل مسئله ۴۸

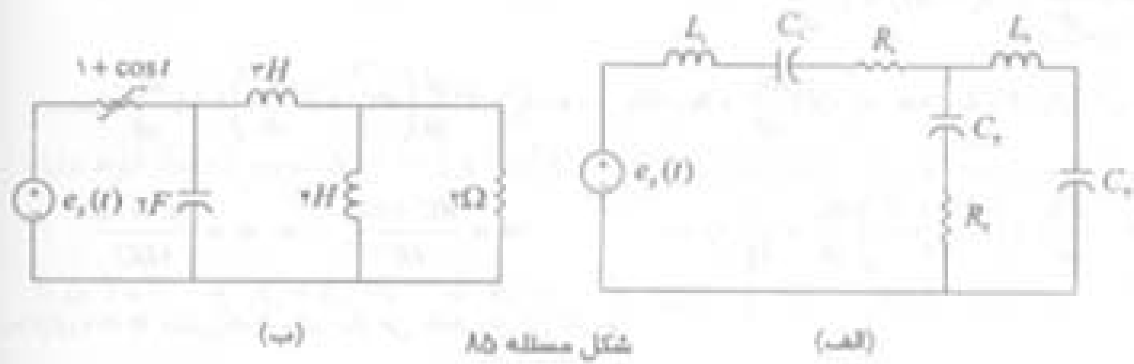
حل : با انتخاب ولتاژ خازن و جریان سلف به عنوان متغیر حالت و با توجه به شکل مسئله داریم.

$$v_L = v_c \quad \rightarrow \quad \frac{di_L}{dt} = v_c$$

$$i_c = -i_R - i_L \quad \rightarrow \quad 2\frac{dv_c}{dt} = 2v_R - v_R^3 - i_L \quad \rightarrow \quad \frac{dv_c}{dt} = 2v_c - \frac{1}{2}v_L^3 - \frac{1}{2}i_L$$

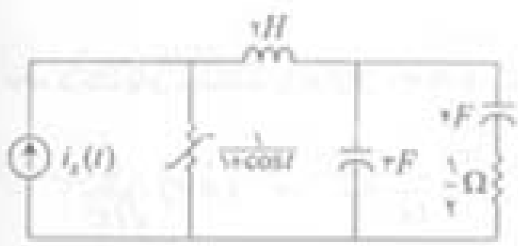
مسئله ۸۵

دوگان مدار های شکل مسئله ۸۵ را رسم کنید.

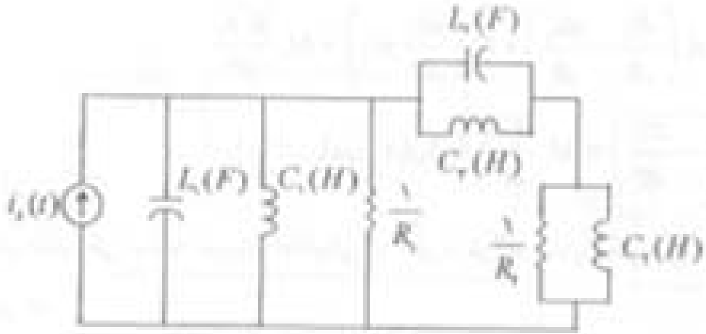


شکل مسئله ۸۵

حل :



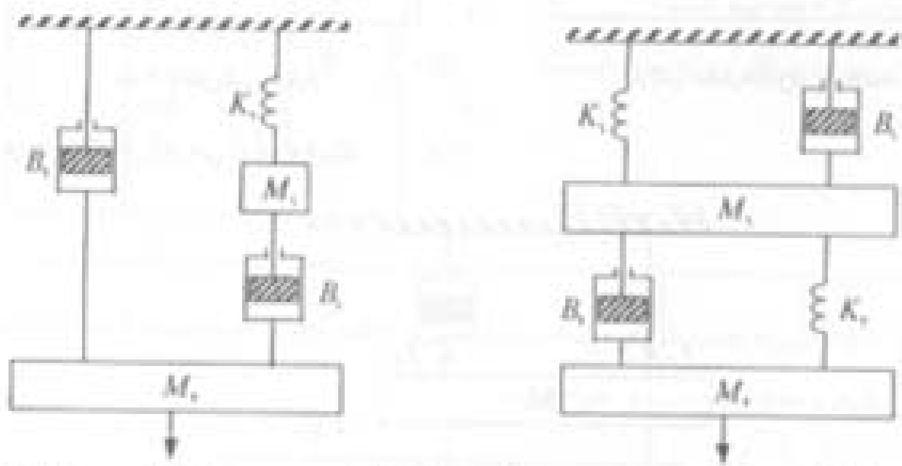
دوگان مدار (ب)



دوگان مدار (الف)

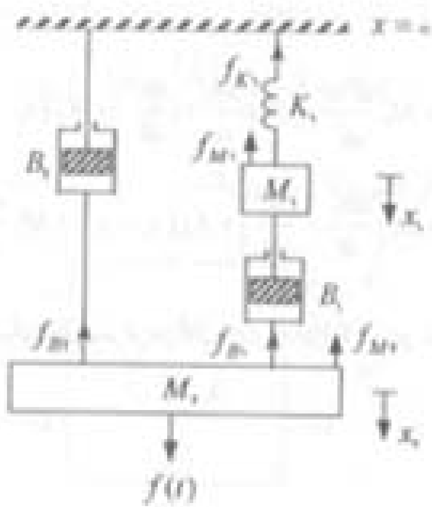
مسئله ۸۶

معادلات حرکت سیستمهای مکانیکی را نوشته و برای هر کدام دو مدار الکتریکی مشابه رسم کنید.



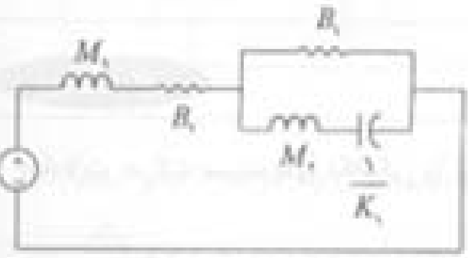
(الف) $f(t)$ شکل مسئله ۸۶ $f(t)$ (ب)

حل : الف ـ با توجه به شکل زیر می توان نوشت.

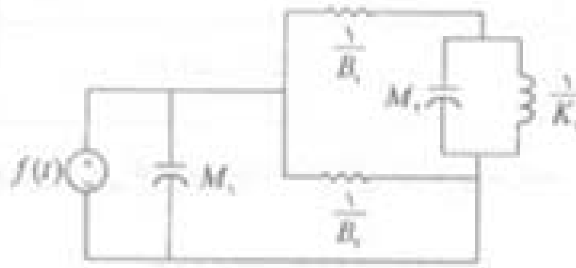


$$\begin{cases} f = f_{B_1} + f_{B_2} + f_{M_2} \rightarrow f(t) = B_1\left(\dfrac{dx_2}{dt} - \dfrac{dx_1}{dt}\right) + B_2\left(\dfrac{dx_2}{dt} - 0\right) + M_2\dfrac{d^2 x_2}{dt^2} \\ f_{B_1} = f_{M_1} + f_{K_1} \quad \rightarrow B_1\left(\dfrac{dx_2}{dt} - \dfrac{dx_1}{dt}\right) = M_1\dfrac{d^2 x_1}{dt^2} + K_1\left(x_1 - 0\right) \end{cases}$$

مدار الکتریکی مشابه سیستم مکانیکی به همراه دوگان مدار الکتریکی، دو مدار الکتریکی مشابه سیستم مکانیکی فوق اند.

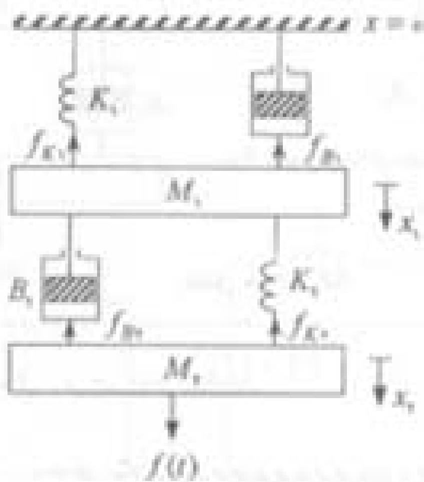


دوگان مدار الکتریکی مشابه



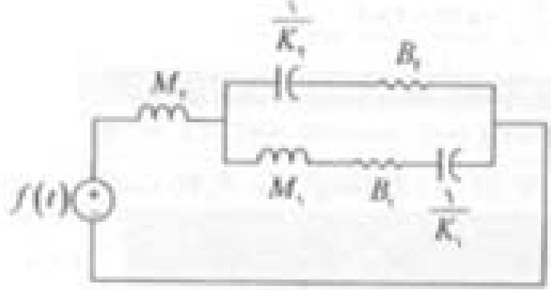
مدار الکتریکی مشابه

ب ـ با توجه به شکل زیر می توان نوشت.

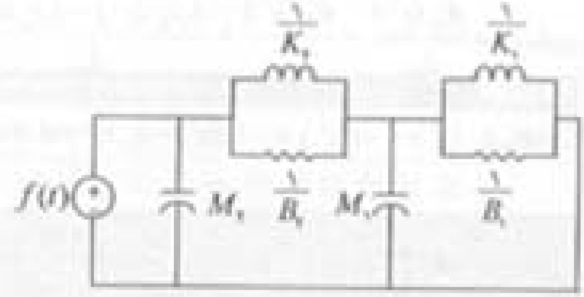


$$\begin{cases} f = f_{M_2} + f_{B_2} + f_{K_2} \rightarrow f(t) = M_2\dfrac{d^2 x_2}{dt^2} + B_2\left(\dfrac{dx_2}{dt} - \dfrac{dx_1}{dt}\right) + K_2\left(x_2 - x_1\right) \\ f_{B_2} + f_{K_2} = f_{M_1} + f_{K_1} + f_{B_1} \rightarrow B_2\left(\dfrac{dx_2}{dt} - \dfrac{dx_1}{dt}\right) + K_2\left(x_2 - x_1\right) = M_1\dfrac{d^2 x_1}{dt^2} + K_1\left(x_1 - 0\right) + B_1\left(\dfrac{dx_1}{dt} - 0\right) \end{cases}$$

مدار الکتریکی مشابه سیستم مکانیکی به همراه دوگان مدار الکتریکی، دو مدار الکتریکی مشابه سیستم مکانیکی فوق اند.



دوگان مدار الکتریکی مشابه

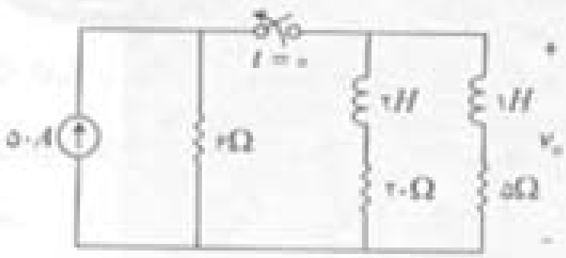


مدار الکتریکی مشابه

مسئله ۸۷

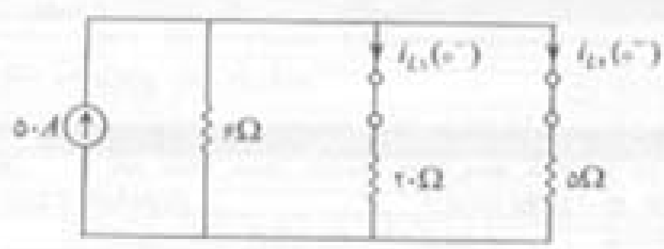
- جریان گذرنده از سلفها را در لحظات 0^- و 0^+ بدست آورید.
- v_o را برای $t \geq 0$ محاسبه کنید.

(کلید برای مدت طولانی بسته بوده است)



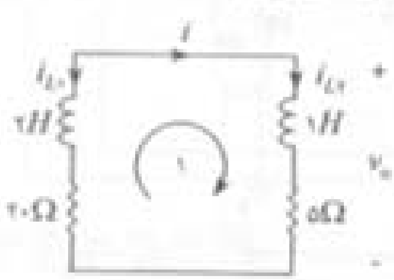
شکل مسئله ۸۷

حل : در $t=0^-$ کلید به مدت طولانی بسته بوده و مدار به حالت دایمی خود رسیده است. پس سلفها اتصال کوتاه می باشند و مدار بصورت زیر خواهد بود.



$$i_{L_1}(0^-)=\frac{6\,\|\,5}{6\,\|\,5+20}50A=6A \quad , \quad i_{L_2}(0^-)=\frac{6\,\|\,20}{6\,\|\,20+5}50A=24A$$

و به ازای $t>0$ کلید باز بوده و مدار بصورت زیر می باشد.



$$i_L(0^+)=\frac{\phi_{eq}(0^+)}{L_{eq}}=\frac{\phi_{eq}(0^-)}{L_{eq}}=\frac{L_1 i_{L_1}(0^-)-L_2 i_{L_2}(0^-)}{L_{eq}}=\frac{۱\times۲۴-۲\times۶}{۱+۲}=۴A$$

$$\rightarrow\ i_{L_1}(0^+)=-i(0^+)=-۴A\quad,\quad i_{L_2}(0^+)=i(0^+)=۴A$$

در ادامه به محاسبه $v_o(t)$ خواهیم پرداخت.

$$\text{برای مش ۱}\ KVL\ \rightarrow\ ۲۰i+۲\frac{di}{dt}+\frac{di}{dt}+۵i=۰\ \rightarrow\ ۳\frac{di}{dt}+۲۵i=۰\ \rightarrow\ i(t)=Ke^{-\frac{۲۵}{۳}t}\ ,\ t\geq ۰$$

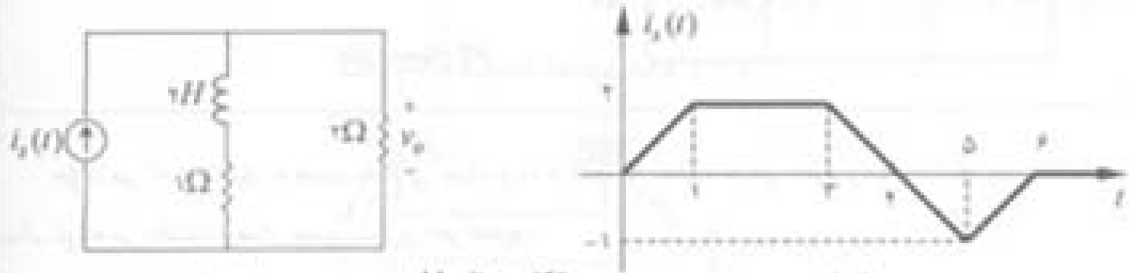
$$i(0^+)=۴\ \rightarrow\ K=۴\ \rightarrow\ i(t)=۴e^{-\frac{۲۵}{۳}t}\ ,\ t\geq ۰$$

$$v_o(t)=\frac{di}{dt}+۵i=۴\left(-\frac{۲۵}{۳}\right)e^{-\frac{۲۵}{۳}t}+۵(۴)e^{-\frac{۲۵}{۳}t}=-۱۳/۳e^{-\frac{۲۵}{۳}t}\ ,\ t\geq ۰$$

مسئله ۸۸

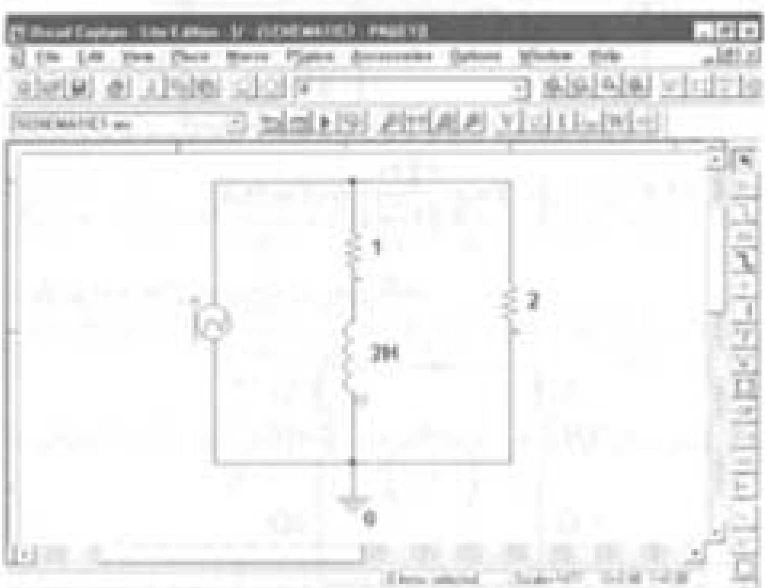
الف- با استفاده از اسپایس ولتاژ v_o را رسم کنید.

ب- خازن $C=\frac{۱}{۲}F$ را با مقاومت ۲Ω موازی کرده قسمت (الف) را تکرار کنید.

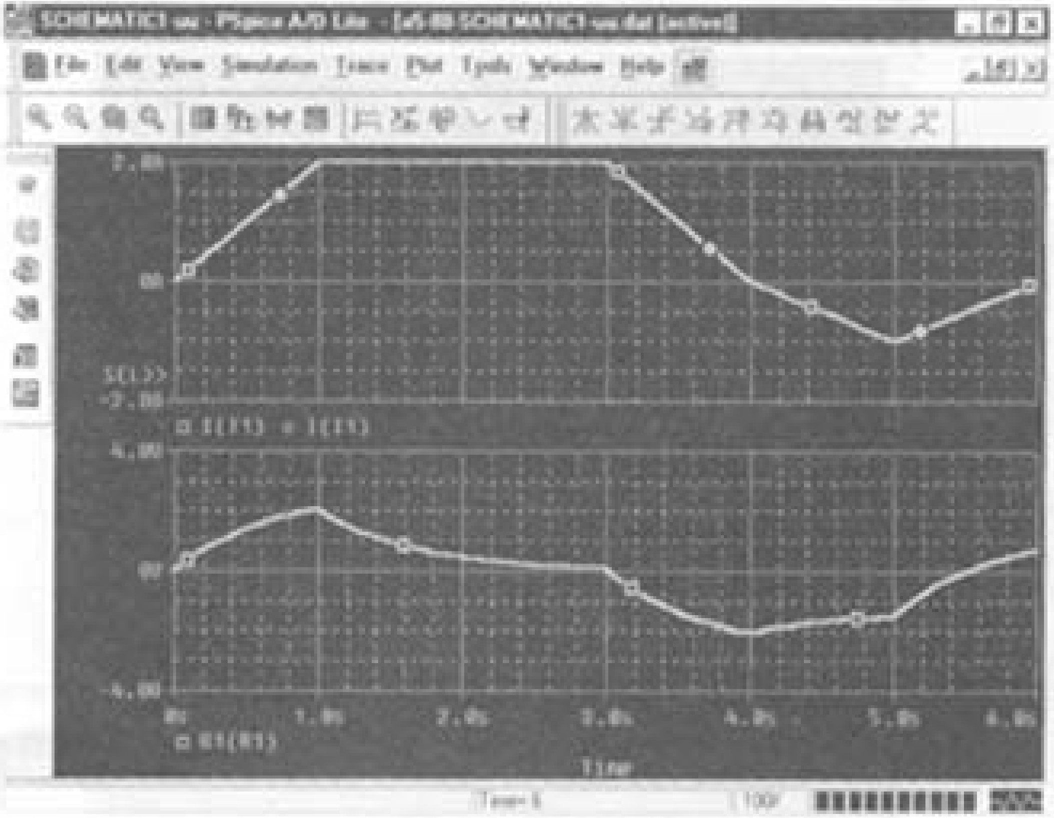


(الف) شکل مسئله ۸۸ (ب)

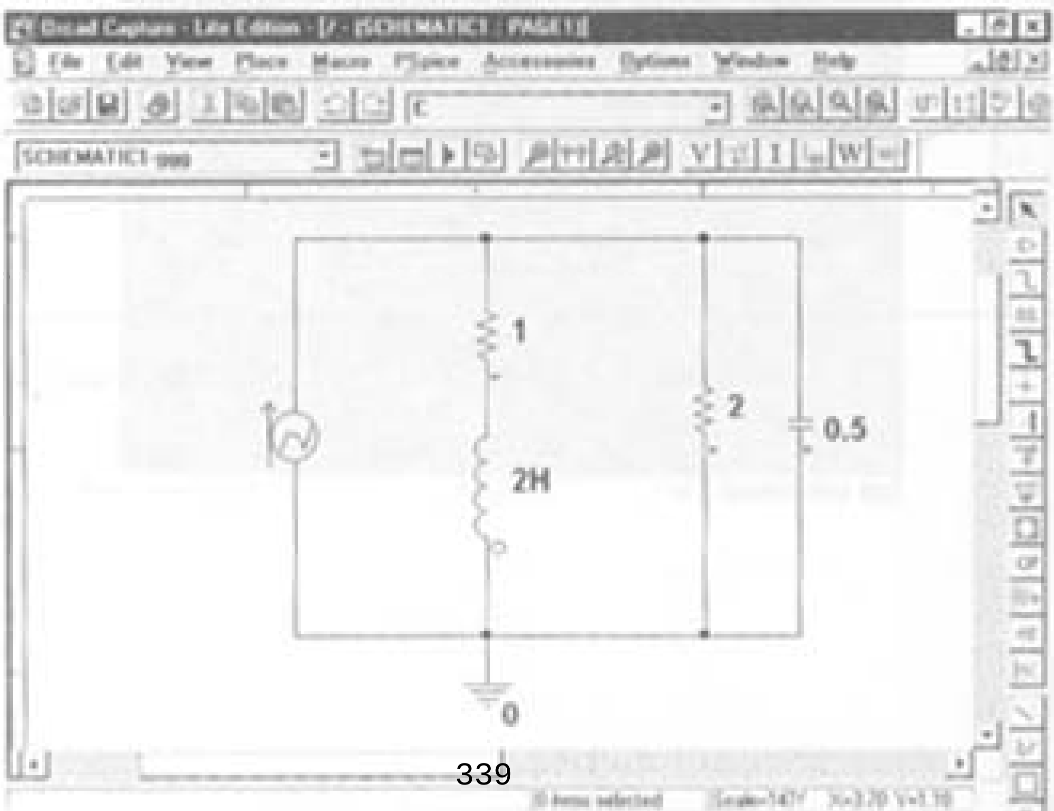
حل: الف ـ ابتدا شماتیک زیر را رسم می کنیم.

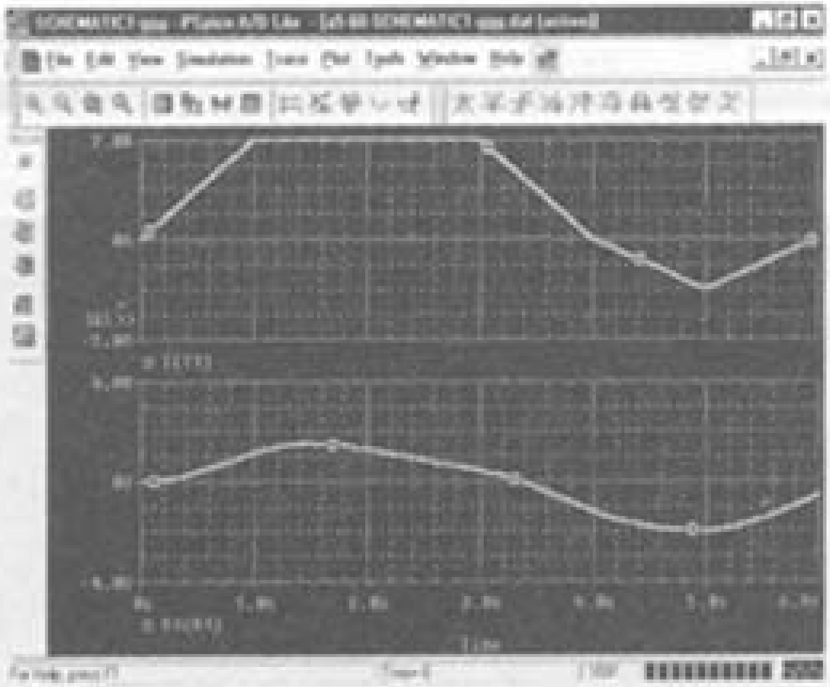


با اجرای شماتیک زیر بصورت ***Time domain*** و دادن مشخصات داده شده، شکل موجهای i_L و v_c بصورت زیر بدست خواهند آمد.



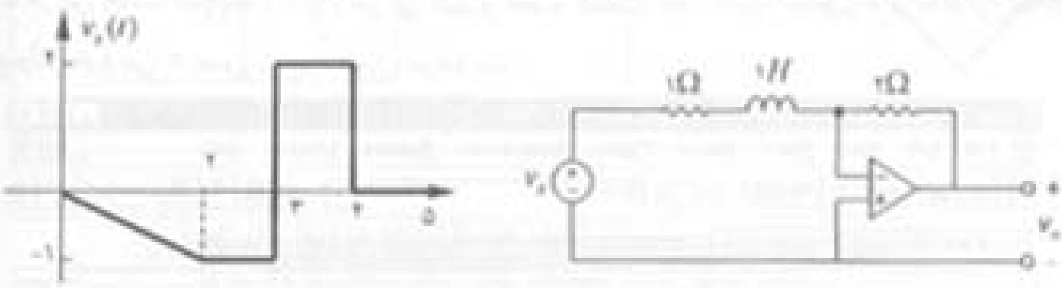
ب ـ در این حالت شماتیک زیر را رسم می کنیم و همانند قسمت (الف) اجرا خواهیم کرد که با این کار شکل موج ولتاژ خروجی v_c بصورت زیر حاصل خواهد شد.





مسئله ۸۹

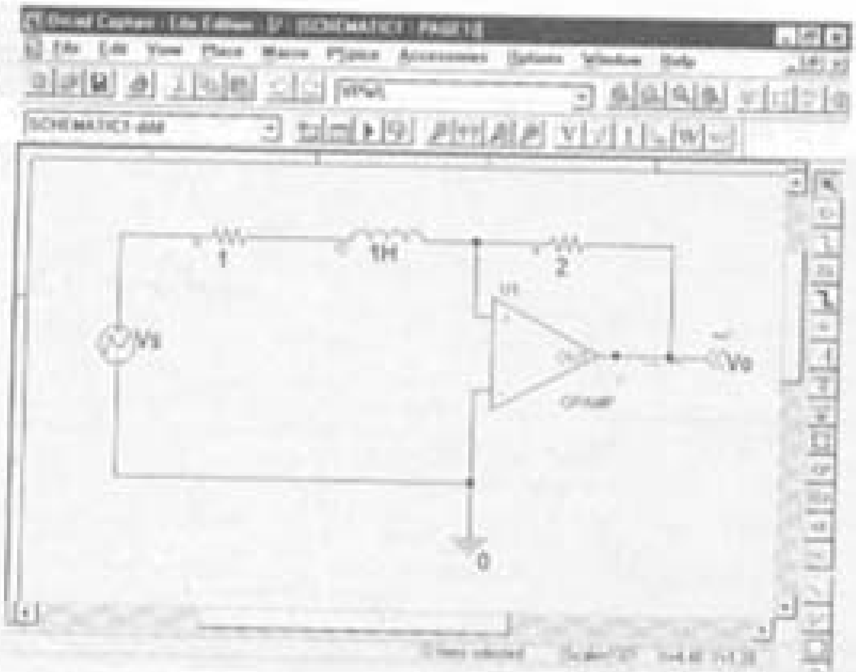
با استفاده از اسپایس v_o را برای $0 < t < 5$ رسم کنید. (آپ- امپ ایده آل است).



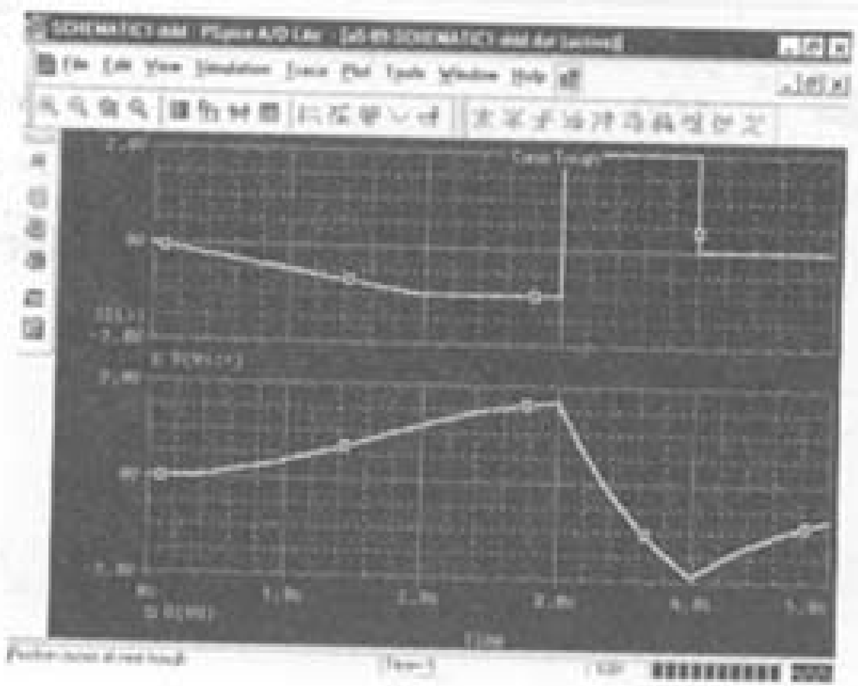
(الف) (ب)

شکل مسئله ۸۹

حل : ابتدا شماتیک زیر را رسم می کنیم، که مشخصات v_s به آن داده شده است.

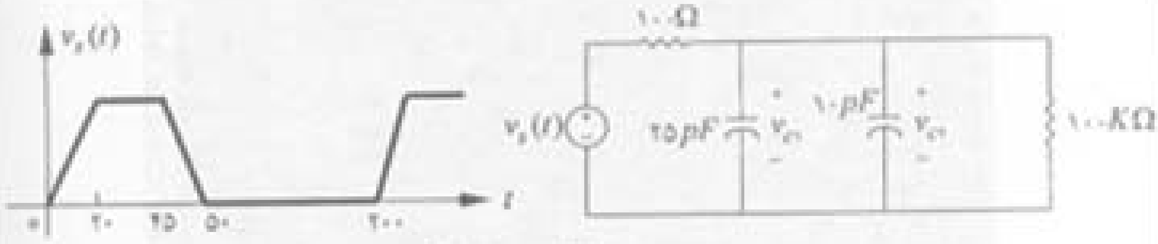


که با اجرای شماتیک فوق بصورت ***Time domain*** شکل موجهای v_s و v_o بصورت زیر رسم خواهند شد.



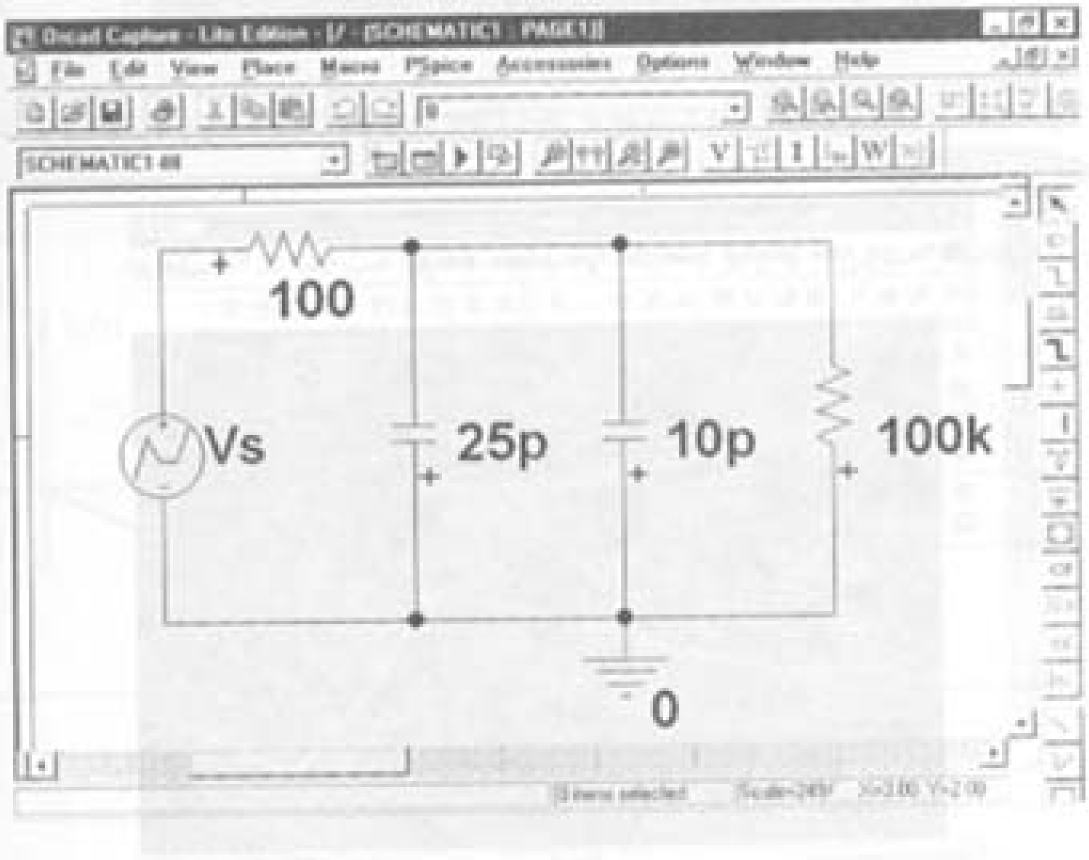
مسئله ۹۰

شکل موجهای v_{c1} و v_{c2} را برای $0 < t < 200\ \text{nsec}$ با استفاده از اسپایس رسم کنید.

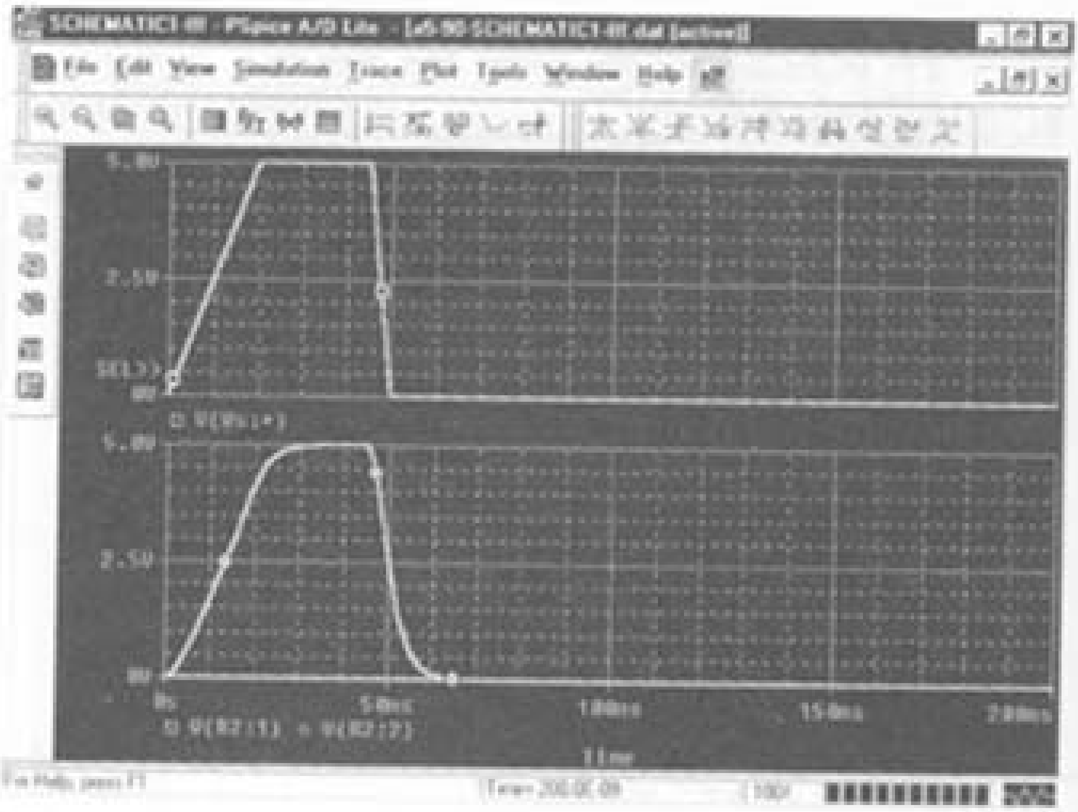


شکل مسئله ۹۰

حل : بدین منظور شماتیک زیر را رسم کرده و مشخصات لازم را اعمال می کنیم.



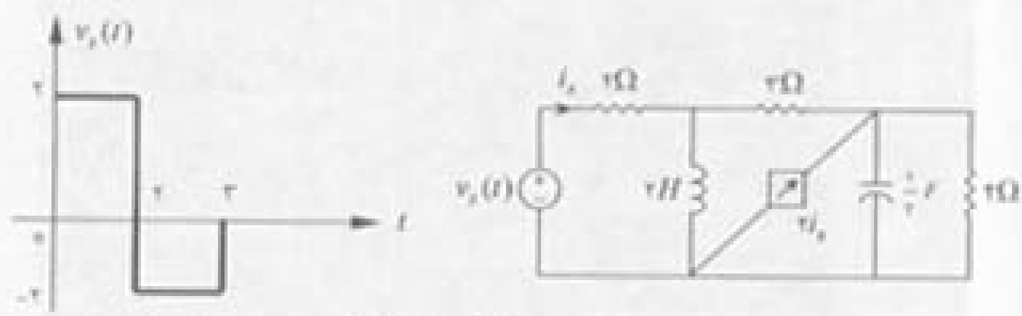
با اجرای شماتیک فوق بصورت ***Time domain*** شکل موجهای ولتاژ خازنها که یکسان می باشند بصورت زیر بدست خواهد آمد.



مسئله ۹۱

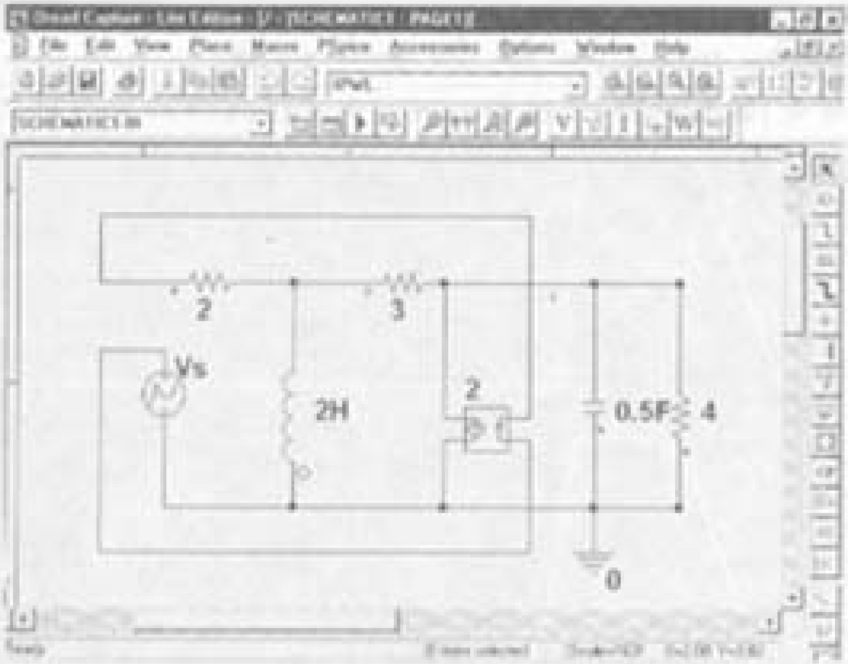
الف- شکل موج ولتاژ خازن v_c را با استفاده از اسپایس رسم کنید.

ب- اگر منبع جریان پله واحدی موازی با مقاومت ۴Ω اضافه شود قسمت (الف) را تکرار کنید.

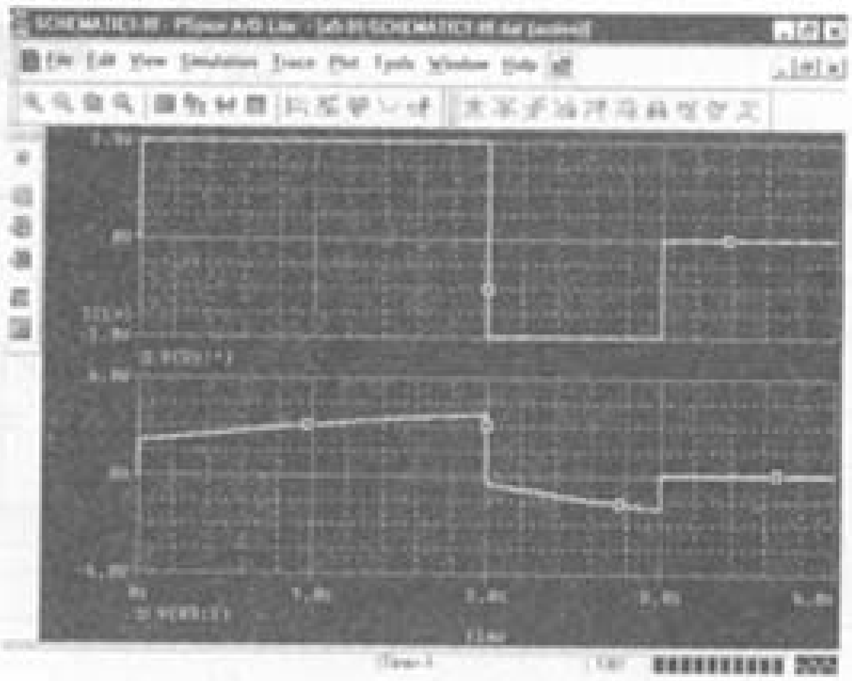


(ب) شکل مسئله ۹۰ (الف)

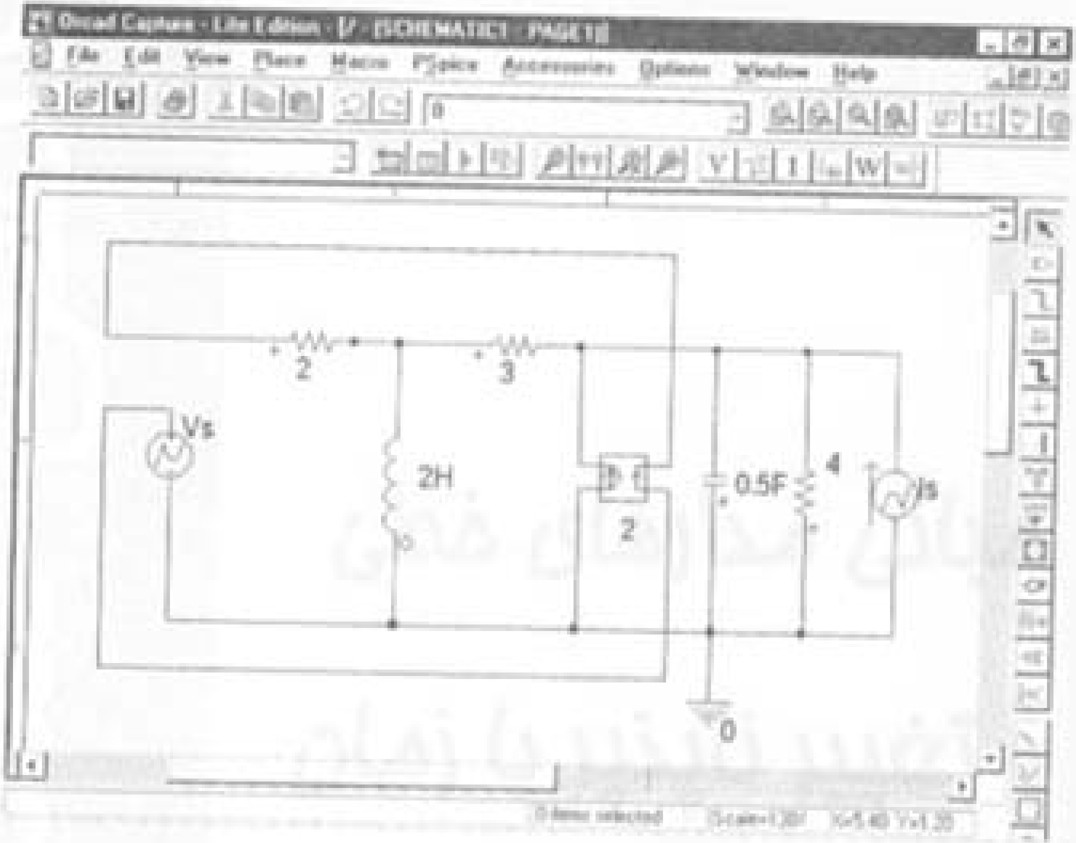
حل : الف ـ بدین منظور شماتیک زیر را رسم می کنیم. که مشخصات v_s نیز در آن اعمال شده است

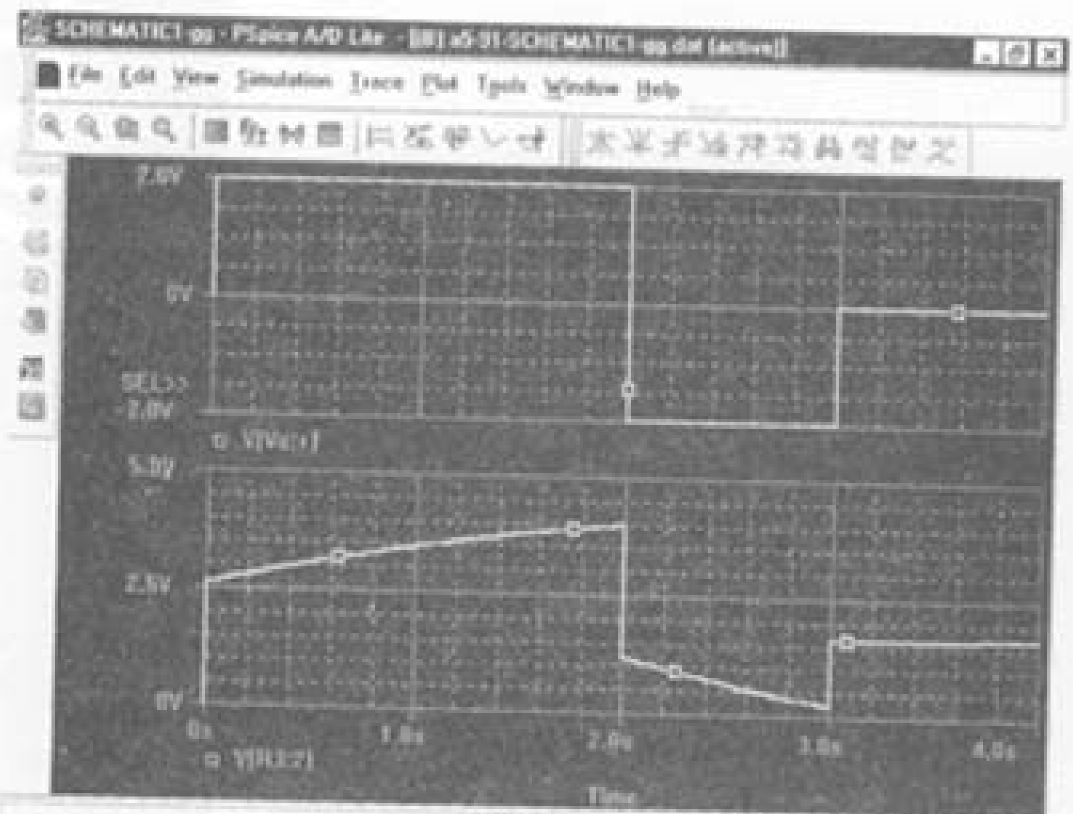


با اجرای شماتیک فوق بصورت ***Time domain*** شکل موجهای v_2 و ولتاژ دو سر خازن بصورت زیر بدست خواهند آمد.



ب ـ با اضافه کردن منبع جریان گفته شده و اجرای مجدد قسمت (الف) شکل موجهای v_2 و ولتاژ دو سر خازن در این حالت بصورت زیر حاصل خواهند شد.

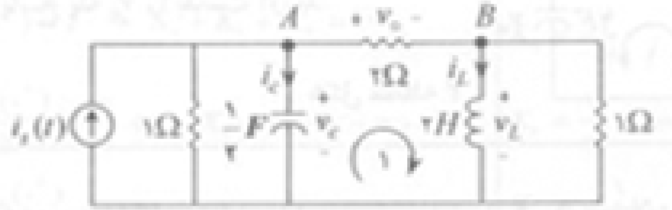

Orcad Capture - Lite Edition
File Edit View Place Macro PSpice Accessories Options Window Help
2
3
Vs
2H
2
0.5F
4
Is
0


File Edit View Simulation Trace Plot Tools Window Help
7.0V
0V
SEL>>
-7.0V
V(Vs:+)
5.0V
2.5V
0V
0s
1.0s
2.0s
3.0s
4.0s
V(R3:2)
Time

مسئله ۱

معادلات گره را نوشته ومعادله دیفرانسیلی برحسب v_o بدست آورید و شرایط اولیه را مشخص کنید.

$(i_L(0)=I_0 \text{ و } v_c(0)=V_0)$



شکل مسئله ۱

حل : با نوشتن معادلات گره و با استفاده از نمایش اپراتوری معادلات انتگرال- دیفرانسیل خواهیم داشت.

$$\text{KCL برای گره } (B) \rightarrow -\frac{v_o}{2}+i_L+\frac{2\frac{di_L}{dt}}{1}=0 \rightarrow -\frac{v_o}{2}+(1+2D)i_L \rightarrow i_L=\frac{1}{2(2D+1)}v_o$$

$$\text{KCL برای گره } (A) \rightarrow -i_s+\frac{v_c}{1}+\frac{1}{2}\frac{dv_c}{dt}+\frac{v_o}{2}=0 \rightarrow -i_s+\left(1+\frac{D}{2}\right)v_c+\frac{v_o}{2}=0$$

$$\rightarrow v_c=\frac{2i_s-v_o}{D+2}$$

$$\text{KVL برای مش ۱} \rightarrow -v_c+v_o+2\frac{di_L}{dt}=0 \rightarrow -\frac{2i_s-v_o}{D+2}+v_o+2D\left(\frac{1}{2(2D+1)}v_o\right)=0$$

$$\rightarrow \left(3D^2+9D+3\right)v_o=\left(4D+2\right)i_s \rightarrow 3\frac{d^2v_o}{dt^2}+9\frac{dv_o}{dt}+3\frac{dv_o}{dt}=4\frac{di_s}{dt}+2i_s$$

برای محاسبه شرایط اولیه می توان نوشت

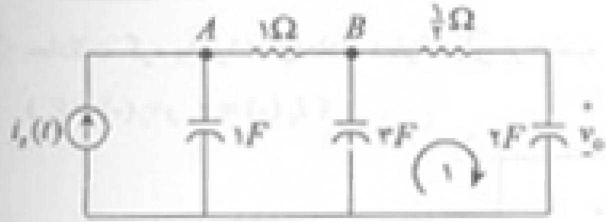
$$\text{KCL برای گره } (B) \rightarrow -\frac{v_o}{2}+i_L+\frac{v_L}{1}=0 \rightarrow -\frac{v_o}{2}+i_L+\frac{v_c-v_o}{1}=0 \rightarrow v_o=\frac{2}{3}(v_c+i_L)$$

$$\rightarrow v_o(0)=\frac{2}{3}(V_0+I_0)$$

$$\frac{dv_o}{dt}=\frac{2}{3}\left(\frac{dv_c}{dt}+\frac{di_L}{dt}\right)=\frac{2}{3}\left(2i_c+\frac{v_L}{2}\right)=\frac{2}{3}\left(2\left(i_s-\frac{v_c}{1}-\frac{v_o}{2}\right)+\frac{v_c-v_o}{2}\right)=\frac{4}{3}i_s-v_c-v_o$$

$$\rightarrow \frac{dv_o(0)}{dt}=\frac{4}{3}i_s(0)-V_0-\frac{2}{3}(V_0+I_0)=\frac{4}{3}i_s(0)-\frac{5}{3}V_0-\frac{2}{3}I_0$$

مسئله ۲



- معادله دیفرانسیلی بر حسب v_o بنویسید.
- پاسخ پله v_o را بدست آورید.

شکل مسئله ۲

حل : با توجه به شکل مسئله و با استفاده از نمایش اپراتوری معادلات انتگرال- دیفرانسیل داریم.

$$\text{KVL برای مش ۱} \rightarrow -v_B + \frac{1}{2}\left(2\frac{dv_o}{dt}\right) + v_o = 0 \rightarrow v_B = \frac{dv_o}{dt} + v_o$$

$$\text{KCL برای گره B} \rightarrow 3\frac{d}{dt}\left(\frac{dv_o}{dt} + v_o\right) + 2\frac{dv_o}{dt} + \frac{\frac{dv_o}{dt} + v_o - v_A}{1} = 0$$

$$\rightarrow v_A = 3\frac{d^2v_o}{dt^2} + 6\frac{dv_o}{dt} + v_o$$

$$\text{KCL برای گره A} \rightarrow -i_s + \frac{d}{dt}\left(3\frac{d^2v_o}{dt^2} + 6\frac{dv_o}{dt} + v_o\right) + \frac{\left(3\frac{d^2v_o}{dt^2} + 6\frac{dv_o}{dt} + v_o\right) - \left(\frac{dv_o}{dt} + v_o\right)}{1} = 0$$

$$\rightarrow 3\frac{d^3v_o}{dt^3} + 9\frac{d^2v_o}{dt^2} + 6\frac{dv_o}{dt} = i_s$$

در ادامه با جایگذاری $i_s(t) = u(t) = 1 \;,\; t > 0$ پاسخ پله v_o را محاسبه خواهیم کرد.

$$3\frac{d^3v_o}{dt^3} + 9\frac{d^2v_o}{dt^2} + 6\frac{dv_o}{dt} = 1$$

$$\text{معادله مشخصه}: 3s^3 + 9s^2 + 6s = 0 \rightarrow s = 0, -1, -2 \rightarrow v_o(t) = \underbrace{K_1 + K_2e^{-t} + K_3e^{-2t}}_{\text{پاسخ عمومی}} + \underbrace{K_4t}_{\text{پاسخ خصوصی}}$$

عدد ثابت K_4 را نمی توان به عنوان پاسخ خصوصی منظور کرد زیرا از پاسخ عمومی بدست می آید. بنابراین K_4t را به عنوان پاسخ خصوصی منظور می کنیم که باجایگذاری آن در معادله دیفرانسیل $6K_4 = 1$ ویا $K_4 = \frac{1}{6}$ خواهد شد. در ادامه شرایط اولیه را منظور می کنیم. در $t = 0^+$ خازنها اتصال کوتاه خواهند بود بنابراین داریم.
(در $t = 0^-$ همه مقادیر را صفر در نظر بگیرید.)

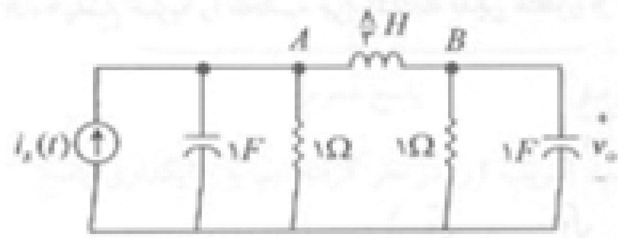
$$\to v_o(0^+) = 0 \ , \ v_B = \frac{dv_o}{dt} + v_o \ \to \ \frac{dv_o(0^+)}{dt} = v_B(0^+) - v_o(0^+) = 0 - 0 = 0$$

$$v_A = 2\frac{d^2 v_o}{dt^2} + 6\frac{dv_o}{dt} + v_o \ \to \ \frac{d^2 v_o(0^+)}{dt^2} = \frac{1}{2}\left(v_A(0^+) - 6\frac{dv(0^+)}{dt} - v_o(0^+)\right) = \frac{1}{2}(0-0-0) = 0$$

$$\begin{cases} v_o(0^+) = 0 \ \to \ K_1 + K_2 + K_3 = 0 \\ \dfrac{dv_o(0^+)}{dt} = 0 \ \to \ -K_2 - 2K_3 + \dfrac{1}{6} = 0 \\ \dfrac{d^2 v_o(0^+)}{dt^2} = 0 \ \to \ K_2 + 4K_3 = 0 \end{cases} \ \to \ \begin{cases} K_1 = -\dfrac{1}{4} \\ K_2 = \dfrac{1}{3} \\ K_3 = -\dfrac{1}{12} \end{cases} \ \to \ v_o(t) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{3}e^{-t} - \frac{1}{12}e^{-2t} + \frac{t}{6}$$

مسئله ۳

- معادله دیفرانسیلی بر حسب v_o بنویسید.
- پاسخ پله و ضربه v_o را بدست آورید.



شکل مسئله ۳

حل : با توجه به شکل مسئله می توان نوشت.

$$\text{KCL برای گره } B \ \to \ \frac{1}{\frac{8}{3}}\int (v_o - v_A)\,dt + \frac{v_o}{1} + \frac{dv_o}{dt} = 0 \ \to \ v_A = \frac{8}{3}\frac{d^2 v_o}{dt^2} + \frac{8}{3}\frac{dv_o}{dt} + v_o$$

$$\text{KCL برای گره } A \ \to \ -i_s + \frac{d}{dt}\left(\frac{8}{3}\frac{d^2 v_o}{dt^2} + \frac{8}{3}\frac{dv_o}{dt} + v_o\right) + \frac{\frac{8}{3}\frac{d^2 v_o}{dt^2} + \frac{8}{3}\frac{dv_o}{dt} + v_o}{1}$$

$$+ \frac{1}{\frac{8}{3}}\int\left(\frac{8}{3}\frac{d^2 v_o}{dt^2} + \frac{8}{3}\frac{dv_o}{dt} + v_o - v_o\right)dt = 0 \ \to \ 8\frac{d^3 v_o}{dt^3} + 16\frac{d^2 v_o}{dt^2} + 14\frac{dv_o}{dt} + 6v_o = 3i_s$$

برای محاسبه پاسخ پله، $i_s(t) = u(t) = 1 \ , \ t > 0$ را جایگزین می کنیم.

$$8\frac{d^3 v_o}{dt^3} + 16\frac{d^2 v_o}{dt^2} + 14\frac{dv_o}{dt} + 6v_o = 3 \ , \ t > 0$$

معادله مشخصه : $8s^3 + 16s^2 + 14s + 6 = 0 \ \to \ s = -1, -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\to v_o(t) = \underbrace{K_1 e^{-t} + e^{-\frac{1}{2}t}\left(K_2 \cos\frac{\sqrt{2}}{2}t + K_3 \sin\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)}_{\text{پاسخ عمومی}} + \underbrace{K_4}_{\text{پاسخ خصوصی}}$$

با جایگذاری پاسخ خصوصی در معادله دیفرانسیل $6K_4 = 3$ و یا $K_4 = \frac{1}{2}$ شده و با اعمال شرایط اولیه داریم.

$$\begin{cases} v_o(0) = 0 \;\rightarrow\; K_1 + K_2 + \frac{1}{2} = 0 \\ \frac{dv_o(0)}{dt} = 0 \;\rightarrow\; -K_1 - \frac{1}{2}K_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}K_3 = 0 \;\rightarrow\; K_1 = -\frac{1}{2}\;,\; K_2 = 0\;,\; K_3 = -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{d^2 v_o(0)}{dt^2} = 0 \;\rightarrow\; K_1 - \frac{K_2}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}K_3 = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow s(t) = v_o(t) = -\frac{1}{2}e^{-t} - \frac{\sqrt{3}}{3}e^{-\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{1}{2}\;,\quad t > 0$$

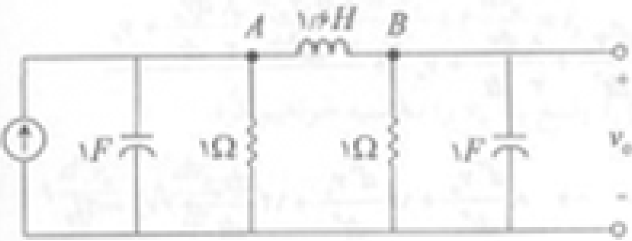
در ادامه پاسخ ضربه را محاسبه می کنیم که بدین منظور از پاسخ پله، مشتق می گیریم.

$$h(t) = \frac{ds(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{2}e^{-t} - \frac{\sqrt{3}}{3}e^{-\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{\sqrt{3}}{6}e^{-\frac{1}{2}t}\left(-\sqrt{3}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + \sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

مسئله ۴

$v_o = ?$. ($i_s(t) = 2e^{-t}u(t)$ و شرایط اولیه صفر است).



شکل مسئله ٤

حل : با توجه به شکل مسئله و با استفاده از نمایش اپراتوری معادلات انتگرال- دیفرانسیل داریم.

$$\text{Ⓐ} \text{ برای گره } KCL \;\rightarrow\; \frac{1}{1/6}\int(v_o - v_B)\,dt + \frac{v_o}{1} + \frac{dv_o}{dt} = 0 \;\rightarrow\; \frac{1}{1/6D}(v_o - v_B) + v_o + Dv_o = 0$$

$$\rightarrow\; v_B = \left(1/6D^2 + 1/6D + 1\right)v_o$$

$$\text{Ⓑ} \text{ برای گره } KCL \;\rightarrow\; -i_s + \frac{dv_B}{dt} + \frac{v_B}{1} + \frac{1}{1/6}\int(v_B - v_o)\,dt = 0$$

$$\rightarrow\ -i_s + D\left(1/6D^2 + 1/6D + 1\right)v_o + \left(1/6D^2 + 1/6D + 1\right)v_o + \frac{1}{1/6D}\left(1/6D^2 + 1/6D\right)v_o = 0$$

$$\rightarrow\ \left(8D^3 + 16D^2 + 18D + 10\right)v_o = 5i_s \ \rightarrow\ 8\frac{d^3 v_o}{dt^3} + 16\frac{d^2 v_o}{dt^2} + 18\frac{dv_o}{dt} + 10v_o = 5i_s$$

با جایگذاری $i_s(t) = 2e^{-t}\ ,\ t > 0$ داریم.

$$8\frac{d^3 v_o}{dt^3} + 16\frac{d^2 v_o}{dt^2} + 18\frac{dv_o}{dt} + 10v_o = 10e^{-t}\ ,\ t > 0$$

معادله مشخصه : $8s^3 + 16s^2 + 18s + 10 = 0 \ \rightarrow\ s = -1, -\frac{1}{2} \pm j$

$$\rightarrow\ v_o(t) = \underbrace{K_1 e^{-t} + e^{-\frac{1}{2}t}\left(K_2 \cos t + K_3 \sin t\right)}_{\text{پاسخ عمومی}} + \underbrace{K_4 t e^{-t}}_{\text{پاسخ خصوصی}}$$

برای اینکه پاسخ خصوصی از پاسخ عمومی حاصل نشود ضریب t را در نظر گرفته ایم. با جایگذاری پاسخ خصوصی در معادله دیفرانسیل داریم.

$$8K_4\left(3e^{-t} - te^{-t}\right) + 16K_4\left(-2e^{-t} + te^{-t}\right) + 18\left(e^{-t} - te^{-t}\right) + 10te^{-t} = 10e^{-t}$$

$$10K_4 e^{-t} = 10e^{-t} \ \rightarrow\ 10K_4 = 10 \ \rightarrow\ K_4 = 1$$

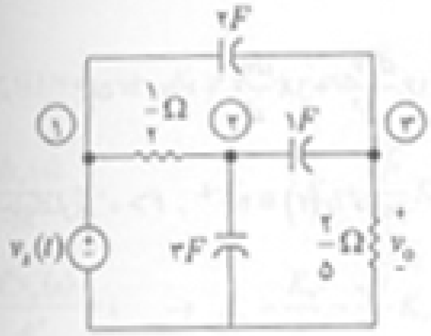
شرایط اولیه صفر بوده و در $t = 0^+$ خازن اتصال کوتاه و سلف مدار باز می باشد بنابراین داریم.

$$\begin{cases} v_o(0^+) = 0 \ \rightarrow\ K_1 + K_2 = 0 \\ \dfrac{dv_o(0^+)}{dt} = 0 \ \rightarrow\ -K_1 - \dfrac{1}{2}K_2 + K_3 + 1 = 0 \ \rightarrow \\ \dfrac{d^2 v_o(0^+)}{dt^2} = 0 \ \rightarrow\ K_1 - \dfrac{3}{4}K_2 - K_3 - 2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} K_1 = \dfrac{2}{5} \\ K_2 = -\dfrac{2}{5} \\ K_3 = -\dfrac{3}{5} \end{cases}$$

$$\rightarrow\ v_o(t) = \frac{2}{5}e^{-t} - e^{-\frac{1}{2}t}\left(\frac{2}{5}\cos t + \frac{3}{5}\sin t\right) + te^{-t}\ ,\ t > 0$$

مسئله ۵

معادله دیفرانسیلی بنویسید که v_o را به v_s ارتباط دهد.
پاسخ پله را حساب کنید.



شکل مسئله ۵

حل : با توجه به شکل مسئله و با استفاده از نمایش اپراتوری معادلات دیفرانسیل داریم.

$$KCL \text{ برای گره } ② \rightarrow \frac{v_x - v_s}{\frac{1}{2}} + 2\frac{dv_x}{dt} + \frac{d(v_x - v_o)}{dt} = 0$$

$$\rightarrow 2v_x - 2v_s + 2Dv_x + D(v_x - v_o) = 0 \rightarrow v_x = \frac{Dv_o + 2v_s}{3D+2}$$

$$KCL \text{ برای گره } ③ \rightarrow \frac{d}{dt}(v_o - v_x) + 2\frac{d}{dt}(v_o - v_s) + \frac{v_o}{\frac{2}{5}} = 0$$

$$\rightarrow D\left(v_o - \frac{Dv_o + 2v_s}{3D+2}\right) + 2D(v_o - v_s) + \frac{5}{2}v_o = 0 \rightarrow \left(11D^2 + 16D + 5\right)v_o = \left(8D^2 + 6D\right)v_s$$

$$\rightarrow 11\frac{d^2v_o}{dt^2} + 16\frac{dv_o}{dt} + 5v_o = 8\frac{d^2v_s}{dt^2} + 6\frac{dv_s}{dt}$$

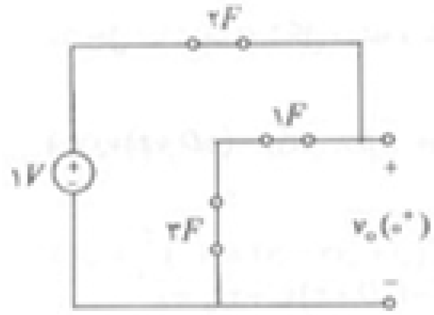
و برای محاسبه پاسخ پله $v_s(t) = u(t)$ را جایگذاری می کنیم.

$$11\frac{d^2v_o}{dt^2} + 16\frac{dv_o}{dt} + 5v_o = 8\delta'(t) + 6\delta(t)$$

ازآنجا که آخرین درجه مشتق توابع ویژه ازدرجه مشتقات v_o کمتر است لذا پاسخ v_o شامل تابع ویژه ای نخواهد بود.

معادله مشخصه : $11s^2 + 16s + 5 = 0 \rightarrow s = -1, -\frac{5}{11} \rightarrow v_o(t) = \left(K_1e^{-t} + K_2e^{-\frac{5}{11}t}\right),\ t > 0$

در $t = 0^+$ خازنها اتصال کوتاه خواهند بود و مدار بصورت زیر خواهد شد.



$$\rightarrow\ v_o(0^+)=\frac{2}{2+\frac{1\times 3}{1+3}}1V=\frac{8}{11}V$$

با انتگرال گیری از معادله دیفرانسیل در فاصله 0^- تا 0^+ داریم.

$$11\frac{dv_o(0^+)}{dt}+16\left(\frac{8}{11}\right)=6\ \rightarrow\ \frac{dv_o(0^+)}{dt}=-\frac{62}{121}$$

$$\begin{cases} v_o(0^+)=\frac{8}{11}\ \rightarrow\ K_1+K_2=\frac{8}{11} \\ \frac{dv_o(0^+)}{dt}=-\frac{62}{121}\ \rightarrow\ -K_1-\frac{5}{11}K_2=-\frac{62}{121} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} K_1=\frac{1}{3} \\ K_2=\frac{13}{33} \end{cases} \rightarrow v_o(t)=\frac{1}{3}e^{-t}+\frac{13}{33}e^{-\frac{5}{11}t},\ t>0$$

روش دوم : در این روش $v_o(t)=\left(K_1e^{-t}+K_2e^{-\frac{5}{11}t}\right)u(t)$ در نظر گرفته شده و با جایگذاری در معادله دیفرانسیل K_1 و K_2 بدست خواهند آمد که قدری طولانی تر می باشد.

$$11\frac{d^2}{dt^2}\left\{(K_1e^{-t}+K_2e^{-\frac{5}{11}t})\,u(t)\right\}+16\frac{d}{dt}\left\{(K_1e^{-t}+K_2e^{-\frac{5}{11}t})\,u(t)\right\}+5(K_1e^{-t}+K_2e^{-\frac{5}{11}t})\,u(t)$$

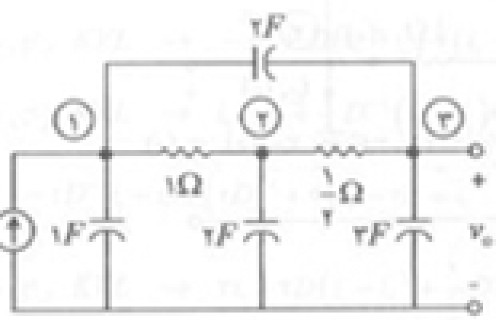
$$=8\delta'(t)+6\delta(t)$$

$$\rightarrow 11(K_1+K_2)\delta'(t)+\left\{\frac{363}{31}K_1+\frac{330}{31}K_2\right\}\delta(t)=8\delta'(t)+6\delta(t)\ \rightarrow \begin{cases} K_1+K_2=\frac{8}{11} \\ \frac{363}{31}K_1+\frac{330}{31}K_2=6 \end{cases}$$

$$\rightarrow\ K_1=\frac{1}{3}\ ,\ K_2=\frac{13}{33}$$

مسئله ۶

- معادله دیفرانسیلی برحسب v_o با استفاده از روش تحلیل گره تشکیل دهید.
- مرتبه معادله چیست وآن راچگونه توجیح می کنید.
- شرایط اولیه را برحسب ولتاژاولیه خازنها مشخص کنید.



شکل مسئله ۶

حل : با توجه به شکل مسئله و با استفاده از نمایش اپراتوری معادلات دیفرانسیل داریم.

$$\text{KCL برای گره ۳}\quad \rightarrow\quad 2D(v_0-v_1)+\frac{v_0-v_2}{\frac{1}{2}}+3Dv_0=0 \quad\rightarrow\quad 2Dv_1+2v_2-(5D+2)v_0=0$$

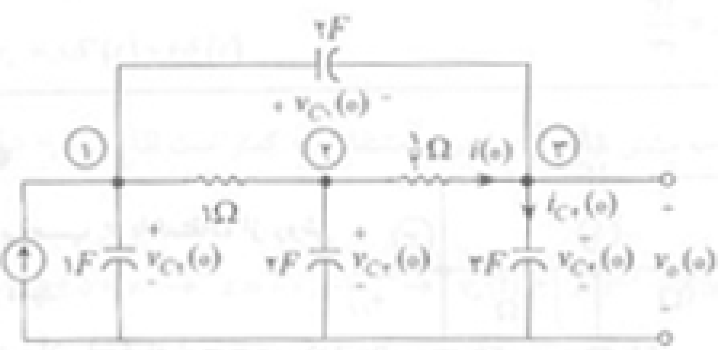
$$\text{KCL برای گره ۲}\quad \rightarrow\quad \frac{v_2-v_1}{1}+2Dv_2+\frac{v_2-v_0}{\frac{1}{2}}=0 \quad\rightarrow\quad v_1-(2D+3)v_2+2v_0=0$$

$$\text{KCL برای گره ۱}\quad \rightarrow\quad -i_s+Dv_1+2D(v_1-v_0)+\frac{v_1-v_2}{1}=0 \quad\rightarrow\quad (3D+1)v_1-v_2-2Dv_0=i_s$$

$$\rightarrow v_0=\frac{\begin{vmatrix} 2D & 2 & 0 \\ 1 & -(2D+3) & 0 \\ 3D+1 & -1 & i_s \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2D & 2 & -(5D+2) \\ 1 & -(2D+3) & 2 \\ 3D+1 & -1 & -2D \end{vmatrix}}=\frac{4D^2+6D+2}{22D^3+55D^2+12D}i_s$$

$$\rightarrow\ 22\frac{d^3v_0}{dt^3}+55\frac{d^2v_0}{dt^2}+12\frac{dv_0}{dt}=4\frac{d^2i_s}{dt^2}+6\frac{di_s}{dt}+2i_s$$

ملاحظه می شود که معادله درجه سه و لذا مدار مرتبه سوم است. با نگاهی به مدار چهار عنصر ذخیره کننده انرژی (خازن) دیده می شود وانتظار می رود که مدار مرتبه چهار باشد ولی با کمی دقت ملاحظه می شود که سه تا از خازنها تشکیل یک حلقه می دهند بنابراین ولتاژ آنها به هم وابسته بوده و در تعیین مرتبه مدار یکی از سه خازن فوق منظور نخواهد شد. پس در مجموع سه خازن را در نظر گرفته و مرتبه مدار سه خواهد بود. در ادامه به محاسبه شرایط اولیه بر حسب ولتاژ خازنها خواهیم پرداخت بدین منظور شکل زیر را در نظر می گیریم.



$v_0(0)=v_{C_3}(0)$

و با توجه به KCL های نوشته شده در قسمت قبل داریم.

$$2Dv_1 + 2v_2 - \left(5D + 2\right)v_o = 0 \quad \rightarrow \quad Dv_1 = \frac{5}{2}Dv_o + v_o - v_2$$

$$\left(2D + 1\right)v_1 - v_2 - 2Dv_o = i_s \quad \rightarrow \quad 2\left(\frac{5}{2}Dv_o + v_o - v_2\right) + v_1 - v_2 - 2Dv_o = i_s$$

$$Dv_o = \frac{2}{11}\left(-v_1 + 4v_2 - 3v_o + i_s\right) \quad \rightarrow \quad \frac{dv_o(0)}{dt} = \frac{2}{11}\left(-v_{c1}(0) + 4v_{c2}(0) - 3v_{c3}(0) + i_s(0)\right)$$

$$v_1 - \left(2D + 3\right)v_2 + 2v_o = 0 \quad \rightarrow \quad 4Dv_2 = 2v_1 - 6v_2 + 4v_o$$

$$D^2 v_o = \frac{2}{11}\left(-Dv_1 + 4Dv_2 - 3Dv_o + Di_s\right)$$

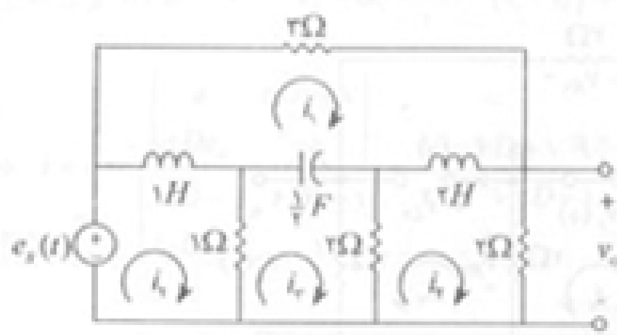
$$= \frac{2}{11}\left\{\left(-\frac{5}{2}Dv_o - v_o + v_2\right) + \left(2v_1 - 6v_2 + 4v_o\right) - 3Dv_o + Di_s\right\}$$

$$= \frac{2}{11}\left\{-\frac{11}{2}\left[\frac{2}{11}\left(-v_1 + 4v_2 - 3v_o + i_s\right)\right] + 2v_1 - 6v_2 + 4v_o + Di_s\right\} = \frac{2}{11}\left(3v_1 - 10v_2 + 7v_o + Di_s - i_s\right)$$

$$\rightarrow \quad \frac{d^2 v_o(0)}{dt^2} = \frac{2}{11}\left(3v_{c1}(0) - 10v_{c2}(0) + 7v_{c3}(0) + \frac{di_s(0)}{dt} - i_s(0)\right)$$

مسئله ۷

با استفاده از روش تحلیل مش معادله دیفرانسیلی بر حسب v_o تشکیل دهید و شرایط اولیه را مشخص کنید.



شکل مسئله ۷

حل : با توجه به شکل مسئله و با بکارگیری نمایش اپراتوری معادلات انتگرال- دیفرانسیل داریم.

KVL برای مش ۲ $\rightarrow \quad -e_s + D\left(i_2 - i_1\right) + \left(i_2 - i_3\right) = 0 \quad \rightarrow \quad -Di_1 + \left(D + 1\right)i_2 - i_3 = e_s$

KVL برای مش ۳ $\rightarrow \quad i_3 - i_2 + \frac{1}{\frac{1}{2}}D^{-1}\left(i_3 - i_1\right) + 2\left(i_3 - i_4\right) = 0$

$$\rightarrow \quad -2D^{-1}i_1 - i_2 + \left(2D^{-1} + 3\right)i_3 - 2i_4 = 0$$

KVL برای مش ۱ $\rightarrow \quad 2i_1 + 2D\left(i_1 - i_4\right) + \frac{1}{\frac{1}{2}}D^{-1}\left(i_1 - i_3\right) + D\left(i_1 - i_2\right) = 0$

$$\rightarrow\ \left(2D+2D^{-1}+3\right)i_1 - Di_2 - 2D^{-1}i_3 - 2Di_4 = 0$$

برای مش ۴ $KVL \ \rightarrow\ 2(i_4-i_3)+2D(i_4-i_1)+2i_4=0 \ \rightarrow\ -2Di_1-2i_2-2i_3+(2D+4)i_4=0$

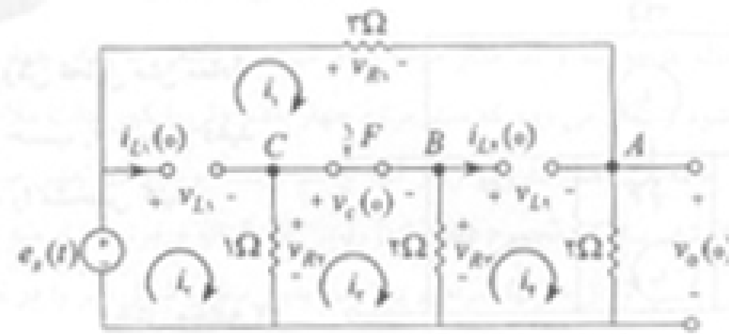
با استفاده از روش کرامر در حل دستگاه چهار معادله چهار مجهولی فوق خواهیم داشت.

$$\rightarrow\ v_o = 2i_4 = 2\frac{\begin{vmatrix} -D & D+1 & -1 & e_s \\ -2D^{-1} & -1 & 2D^{-1}+3 & 0 \\ 2D+2D^{-1}+3 & -D & -2D^{-1} & 0 \\ -2D & -2 & -2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -D & D+1 & -1 & 0 \\ -2D^{-1} & -1 & 2D^{-1}+3 & -2 \\ 2D+2D^{-1}+3 & -D & -2D^{-1} & 2D \\ -2D & -2 & -2 & 2D+4 \end{vmatrix}} = \frac{12D^3+20D^2+28D+4}{30D^3+56D^2+76D+32}e_s$$

$$\rightarrow\ \left(30D^3+56D^2+76D+32\right)v_o = \left(12D^3+20D^2+28D+4\right)e_s$$

$$\rightarrow\ 30\frac{d^3v_o}{dt^3}+56\frac{d^2v_o}{dt^2}+76\frac{dv_o}{dt}+32v_o = 12\frac{d^3e_s}{dt^3}+20\frac{d^2e_s}{dt^2}+28\frac{de_s}{dt}+4e_s$$

در $t=0$ سلفها مدار باز و خازن اتصال کوتاه می باشد.



برای گره (A) $KCL \ \rightarrow\ \frac{v_o}{2}-i_{L2}+\frac{v_o-e_s}{3}=0 \ \rightarrow\ v_o=\frac{2}{5}e_s+\frac{6}{5}i_{L2}$

$$\rightarrow\ v_o(0)=\frac{2}{5}e_s(0)+\frac{6}{5}i_{L2}(0)$$

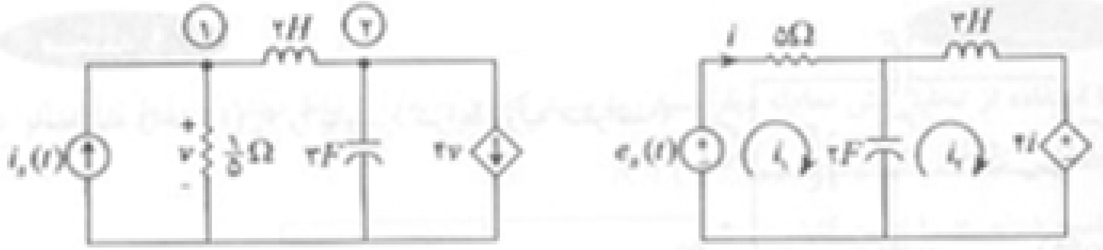
$$\frac{dv_o}{dt}=\frac{2}{5}\frac{de_s}{dt}+\frac{6}{5}\frac{di_{L2}}{dt}=\frac{2}{5}\frac{de_s}{dt}+\frac{6}{10}v_{L2}=\frac{2}{5}\frac{de_s}{dt}+\frac{6}{10}\left(v_{R2}-v_o\right)$$

$$v_{R2}=e_s-v_{L1}-v_c$$

$$\rightarrow\ \frac{dv_o(0)}{dt}=\frac{2}{5}\frac{de_s(0)}{dt}+\frac{6}{10}\left(e_s(0)-v_{L1}(0)-v_c(0)-v_o(0)\right)$$

مسئله ۸

- با نوشتن معادلات مش برای شکل(الف) و معادلات گره برای شکل (ب) نشان دهید دو مدار دوگان یکدیگر هستند.
- شرایط اضافی دیگر را در صورت وجود بیان کنید.



(ب) شکل مسئله ۸ (الف)

حل : با توجه به شکل (الف)، $i = i_1$ بوده و خواهیم داشت.

$$\text{برای مش ۲ } KVL \rightarrow \frac{1}{2}D^{-1}(i_2-i_1)+2Di_2+4i_1=0 \rightarrow (8D-1)i_1+(6D^2+1)i_2=0$$

$$\text{برای مش ۱ } KVL \rightarrow -e_s+5i_1+\frac{1}{2}D^{-1}(i_1-i_2)=0 \rightarrow (10D+1)i_1-i_2=2De_s$$

$$\rightarrow i=i_1=\frac{\begin{vmatrix} e & 6D^2+1 \\ 2De_s & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8D-1 & 6D^2+1 \\ 10D+1 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{6D+1}{30D^2+3D-18}e_s \rightarrow 30\frac{d^2i}{dt^2}+3\frac{di}{dt}-18i=\frac{6de_s}{dt}+e_s$$

و با توجه به شکل (ب)، $v = v_1$ بوده و خواهیم داشت.

$$\text{برای گره ۲ } KCL \rightarrow \frac{1}{2}D^{-1}(v_2-v_1)+2Dv_2+4v_1=0 \rightarrow (8D-1)v_1+(6D^2+1)v_2=0$$

$$\text{برای گره ۱ } KCL \rightarrow -i_s+\frac{v}{\frac{1}{5}}+\frac{1}{2}D^{-1}(v_1-v_2)=0 \rightarrow (10D+1)v_1-v_2=2Di_s$$

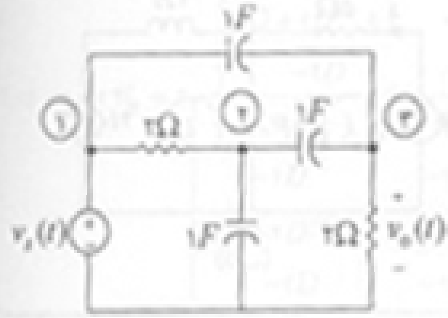
$$\rightarrow v=v_1=\frac{\begin{vmatrix} 0 & 6D^2+1 \\ 2Di_s & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8D-1 & 6D^2+1 \\ 10D+1 & -1 \end{vmatrix}}=\frac{6D+1}{30D^2+3D-18}i_s \rightarrow 30\frac{d^2v}{dt^2}+3\frac{dv}{dt}-18v=\frac{6di_s}{dt}+i_s$$

ملاحظه می شود که معادله دیفرانسیل مدار (ب) همانند مدار (الف) است و فقط به جای جریان، ولتاژ و بجای منبع ولتاژ منبع جریان قرار گرفته است پس دو مدار دوگان یکدیگر هستند و برای اینکه جوابهای $i(t)$ و $v(t)$ دقیقاً برابر شوند باید مقادیر اولیه آنها یکسان باشد و این همان شرط اضافی خواسته شده است.

$$i(0)=v(0) \quad , \quad \frac{di(0)}{dt}=\frac{dv(0)}{dt}$$

مسئله ۹

پاسخ پله واحد $v_o(t)$ را بیابید. (شرایط اولیه صفرند.)



شکل مسئله ۹

حل: با توجه به شکل مسئله و با بکارگیری نمایش اپراتوری معادلات دیفرانسیل داریم.

$$KCL \text{ برای گره ③} \rightarrow \frac{v_o}{2}+D(v_o-v_1)+D(v_o-v_s)=0 \rightarrow v_1=\left(\frac{1}{2D}+2\right)v_o-v_s$$

$$KCL \text{ برای گره ②} \rightarrow \frac{\left(\frac{1}{2D}+2\right)v_o-v_s-v_s}{2}+D\left\{\left(\frac{1}{2D}+2\right)v_o-v_s\right\}$$

$$+D\left\{\left(\frac{1}{2D}+2\right)v_o-v_s-v_o\right\}=0$$

$$\rightarrow \left(2D^2+2D+\frac{1}{4}\right)v_o=\left(2D^2+D\right)v_s \rightarrow 2\left(D+\frac{1}{2}\right)\left(D+\frac{1}{6}\right)v_o=2\left(D+\frac{1}{2}\right)v_s$$

$$\rightarrow \left(D+\frac{1}{6}\right)v_o=\frac{2}{3}Dv_s \quad , \quad v_s(t)=u(t)=1 \rightarrow \frac{dv_o}{dt}+\frac{1}{6}v_o=\frac{2}{3}\delta(t)$$

$$\rightarrow \frac{dv_o}{dt}+\frac{1}{6}v_o=0 \quad , \quad t>0$$

در $t=0$ خازنها اتصال کوتاه بوده و مقاومت ها عملاً از مدار خارج می شوند بنابراین با استفاده از قاعده تقسیم ولتاژ داریم:

$$v_o(0^+)=\frac{1}{\frac{1F1}{1F1}+1}v_s(0)=\frac{2}{3}$$

و در $t=\infty$ خازنها مدار باز شده و لذا جریان گذرنده از مقاومتها برابر صفر بوده و $v_o(\infty)=0$ می باشد.

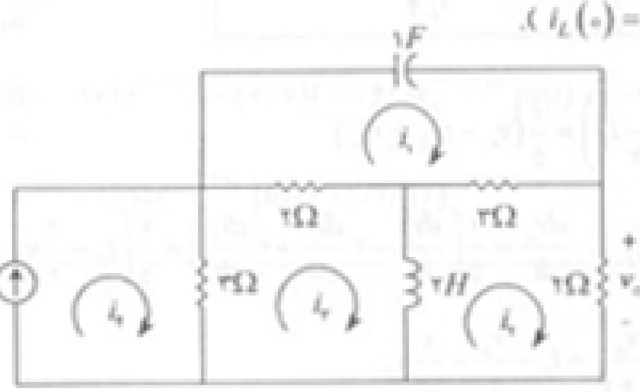
$$v_o(t) = K_1 e^{-\frac{1}{6}t} + K_2 \quad , \quad t > 0$$

$$\begin{cases} v_o(0) = \frac{2}{3} \rightarrow K_1 + K_2 = \frac{2}{3} \rightarrow K_1 = \frac{2}{3} \rightarrow v_o(t) = \frac{2}{3}u(t)e^{-\frac{1}{6}t} \\ v_o(\infty) = 0 \rightarrow K_2 = 0 \end{cases}$$

مسئله ۱۰

◄ با استفاده از تحلیل مش معادله دیفرانسیلی بنویسید که v_o را به i_s ارتباط دهد و شرایط اولیه را مشخص کنید. ($i_L(0) = I_0$ و $v_C(0) = V_0$).

◄ پاسخ ضربه v_o را تعیین کنید.



شکل مسئله ۱۰

حل : با توجه به شکل مسئله و با استفاده از نمایش اپراتوری معادلات انتگرال- دیفرانسیل داریم.

$i_2 = i_s$

برای مش ۳ $KVL \rightarrow 3(i_3 - i_2) + 2(i_3 - i_1) + 2D(i_3 - i_4) = 0$

$\rightarrow -2i_1 - 2Di_4 + (2D+5)i_3 = 3i_s$

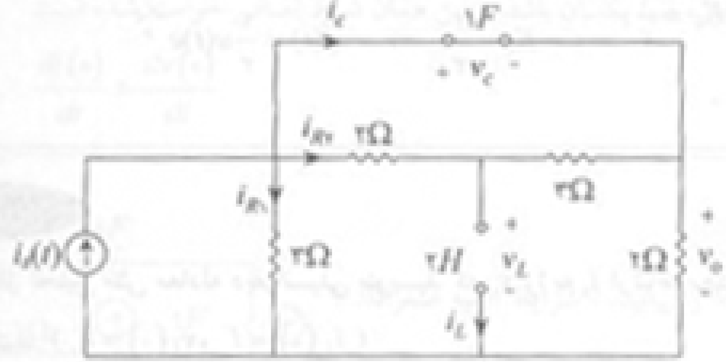
برای مش ۴ $KVL \rightarrow 2D(i_4 - i_3) + 3(i_4 - i_1) + 2i_4 = 0 \rightarrow -3i_1 + (2D+5)i_4 - 2Di_3 = 0$

برای مش ۱ $KVL \rightarrow D^{-1}i_1 + 3(i_1 - i_4) + 2(i_1 - i_3) = 0 \rightarrow (5D+1)i_1 - 3Di_4 - 2Di_3 = 0$

$$\rightarrow v_o = 2i_4 = 2\frac{\begin{vmatrix} -2 & 3i_s & 2D+5 \\ -3 & 0 & -2D \\ 5D+1 & 0 & -2D \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & -2D & 2D+5 \\ -3 & 2D+5 & -2D \\ 5D+1 & -3D & -2D \end{vmatrix}} = \frac{60D^2 + 28D}{50D^2 + 80D + 25}i_s$$

$$\rightarrow 50\frac{d^2v_o}{dt^2} + 80\frac{dv_o}{dt} + 25v_o = 60\frac{d^2i_s}{dt^2} + 28\frac{di_s}{dt}$$

با استفاده از قضیه جمع آثار و قوانین تقسیم ولتاژ و جریان v_o را بدست خواهیم آورد.(توجه کنید در حالت اولیه خازن را اتصال کوتاه و سلف را مدار باز در نظر می گیریم).



$$v_o = \frac{2}{2+3}v_c - 2\left(\frac{3}{2+3}i_L\right) + 2\left(\frac{3}{2+3}i_s\right) = \frac{2}{5}\left(v_c - 3i_L + 3i_s\right)$$

$$\rightarrow\ v_o(0) = \frac{2}{5}\left(V_0 - 3I_0 + 3i_s(0)\right)\ ,\ \ \frac{dv_o}{dt} = \frac{2}{5}\left(\frac{dv_c}{dt} - 3\frac{di_L}{dt} + 3\frac{di_s}{dt}\right) = \frac{2}{5}\left(i_c - \frac{3}{2}v_L + 3\frac{di_s}{dt}\right)$$

$$i_c = i_s - i_{R_1} - i_{R_2} = i_s - \frac{v_o + v_c}{3} - \frac{v_c}{2+3} = i_s - \frac{v_o}{3} - \frac{8}{15}v_c$$

$$v_L = v_o + 2i_{R_1} = v_o + 3\frac{v_c}{2+3} = v_o + \frac{3}{5}v_c \rightarrow\ \frac{dv_o}{dt} = \frac{2}{5}\left(i_s - \frac{v_o}{3} - \frac{8}{15}v_c - \frac{3}{2}\left(v_o + \frac{3}{5}v_c\right) + 3\frac{di_s}{dt}\right)$$

$$\rightarrow\ \frac{dv_o(0)}{dt} = \frac{2}{5}\left(-\frac{23}{15}v_c(0) + \frac{9}{5}i_L(0) + i_s(0) + 3\frac{di_s(0)}{dt}\right)$$

برای محاسبه پاسخ ضربه ابتدا به محاسبه پاسخ پله می پردازیم.

$$i_s(t) = u(t)\ \ \rightarrow\ \ 50\frac{d^2v_o}{dt^2} + 80\frac{dv_o}{dt} + 25v_o = 6\delta'(t) + 28\delta(t)$$

می دانیم که به ازای $t=0$ ، $\delta'(t)=\delta(t)=0$ می باشد، با فرض $v_c(0)=i_L(0)=0$ و با توجه به مقادیر اولیه بدست آمده داریم.

$$50\frac{d^2v_o}{dt^2} + 80\frac{dv_o}{dt} + 25v_o = 0\ \ ,\ \ v_o(0) = \frac{6}{5}\ \ ,\ \ \frac{dv_o(0)}{dt} = \frac{2}{5}$$

معادله مشخصه : $50s^2 + 80s + 25 = 0\ \rightarrow\ s = -1/17\ ,\ -0/42$

$$\rightarrow\ v_o(t) = \left(K_1e^{-1/17t} + K_2e^{-0/42t}\right)u(t)$$

$$\begin{cases} v_o(۰) = \frac{۶}{۵} \rightarrow K_۱ + K_۲ = ۱/۲ \\ \frac{dv_o(۰)}{dt} = \frac{۲}{۵} \rightarrow -۱/۷K_۱ - ۰/۴۲K_۲ = ۰/۴ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} K_۱ = -۲/۵ \\ K_۲ = ۳/۷ \end{cases}$$

$$\rightarrow v_o(t) = \left(-۲/۵e^{-۱/۱۷t} + ۳/۷e^{-۰/۴۲t}\right)u(t)$$

و با گرفتن مشتق از پاسخ پله، پاسخ ضربه را بصورت زیر بدست می آوریم.

$$h(t) = \frac{dv_o(t)}{dt}$$

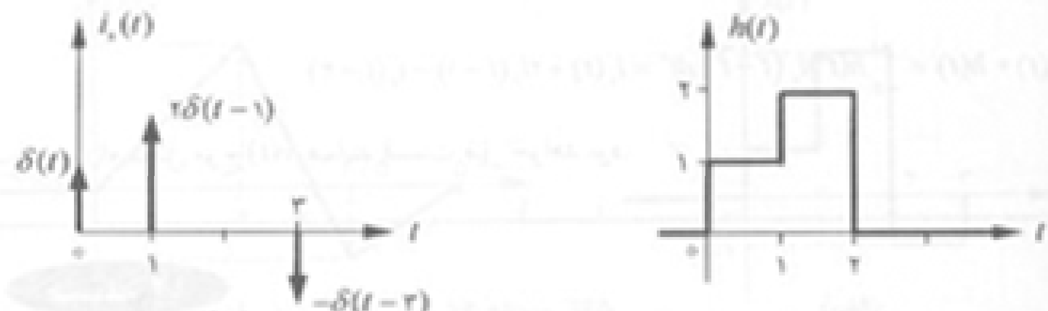
$$= \left((-۲/۵)(-۱/۱۷)e^{-۱/۱۷t} + (۳/۷)(-۰/۴۲)e^{-۰/۴۲t}\right)u(t) + \left(-۲/۵e^{-۱/۱۷t} + ۳/۷e^{-۰/۴۲t}\right)\Big|_{t=۰}\delta(t)$$

$$= \left(۲/۹۳e^{-۱/۱۷t} - ۱/۵۵e^{-۰/۴۲t}\right)u(t) + ۱/۲\delta(t)$$

مسئله ۱۱

$h(t)$ پاسخ ضربه مدار است. پاسخ مدار را به ورودی $i_s(t)$ تعیین و رسم کنید.

فرض کنید نمودار(الف) ورودی و نمودار(ب) پاسخ ضربه باشد.پاسخ حالت صفرمداررا تعیین کنید.



(ب) شکل مسئله ۱۱ (الف)

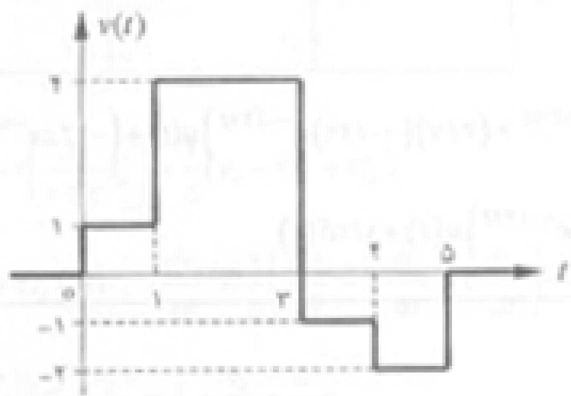
حل : با فرض اینکه مدار خطی تغییر ناپذیر با زمان بوده و $v(t)$ پاسخ ورودی $i_s(t)$ باشد خواهیم داشت.

$$i_s(t) = \delta(t) + ۲\delta(t-۱) - \delta(t-۳) \rightarrow v(t) = \int_۰^t h(t')i_s(t-t')dt' = h(t) + ۲h(t-۱) - h(t-۳)$$

بنابراین با توجه به شکل موج $h(t)$ ، شکل موج $v(t)$ را می توان بصورت زیر رسم کرد.

$$h(t)=\begin{cases}1\ , & 0<t<1\\ 2\ , & 1<t<2\end{cases}\ \rightarrow\ 2h(t-1)=\begin{cases}2\ , & 1<t<2\\ 4\ , & 2<t<3\end{cases}\ ,\quad h(t-3)=\begin{cases}1\ , & 3<t<4\\ 2\ , & 4<t<5\end{cases}$$

$$\rightarrow\ v(t)=\begin{cases}1+0+0\ , & 0<t<1\\ 2+2+0\ , & 1<t<2\\ 0+4+0\ , & 2<t<3\\ 0+0-1\ , & 3<t<4\\ 0+0-2\ , & 4<t<5\end{cases}\ \rightarrow\ v(t)=\begin{cases}1\ , & 0<t<1\\ 4\ , & 1<t<3\\ -1\ , & 3<t<4\\ -2\ , & 4<t<5\end{cases}$$



همچنین با اعمال مفروضات داده شده خواهیم داشت.

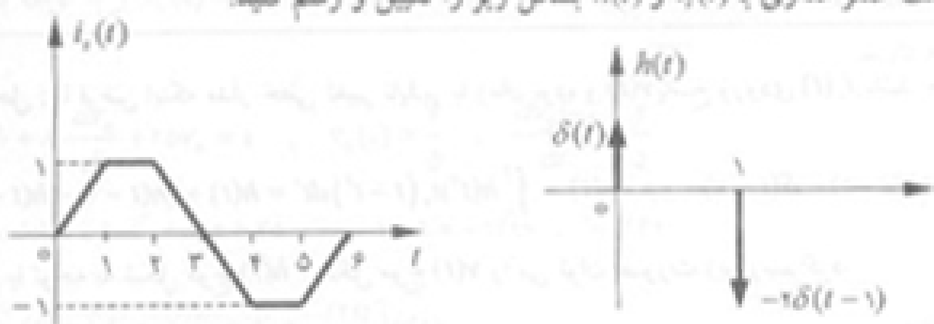
$$i_s(t)=\begin{cases}1\ , & 0<t<1\\ 2\ , & 1<t<2\end{cases}\ ,\quad h(t)=\delta(t)+2\delta(t-1)-\delta(t-3)$$

$$v(t)=i_s(t)*h(t)=\int_0^t h(t')i_s(t-t')\,dt'=i_s(t)+2i_s(t-1)-i_s(t-3)$$

واضح است که شکل موج $v(t)$ همانند قسمت قبل خواهد بود.

مسئله ۱۲

پاسخ حالت صفر مداری با $i_s(t)$ و $h(t)$ بشکل زیر را تعیین و رسم کنید.



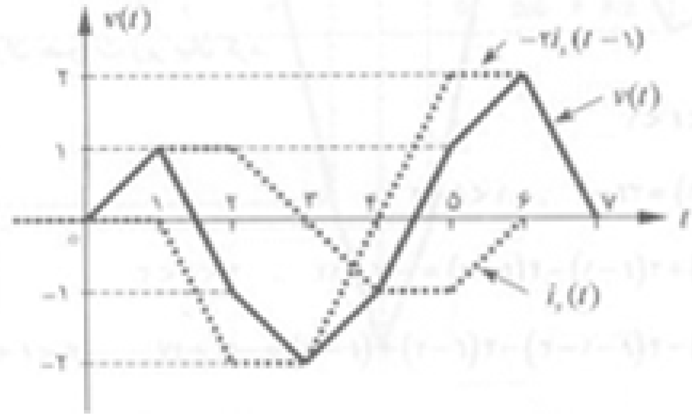
(ب) شکل مسئله ۱۲ (الف)

حل : با فرض اینکه خروجی $v(t)$ بوده و مدار خطی و تغییر ناپذیر با زمان باشد خواهیم داشت.

$$h(t) = \delta(t) - ۲\delta(t-۱)$$

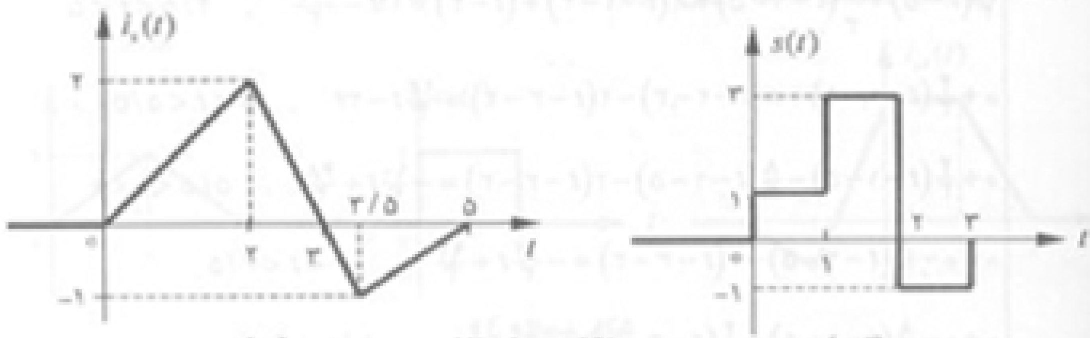
$$v(t) = i_s(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{t} h(t')i_s(t-t')dt' = i_s(t) - ۲i_s(t-۱)$$

شکل موج $v(t)$ بصورت زیر بدست می آید.



مسئله ۱۳

پاسخ ضربه مداری با $i_s(t)$ و $s(t)$ بشکل زیر را تعیین و رسم کنید.



شکل مسئله ۱۳

حل : ابتدا با توجه به پاسخ پله، پاسخ ضربه را بدست می آوریم.

$$s(t) = \left(u(t) - u(t-۱)\right) + ۳\left(u(t-۱) - u(t-۲)\right) - \left(u(t-۲) - u(t-۳)\right)$$

$$= u(t) + ۲u(t-۱) - ۴u(t-۲) + u(t-۳)$$

$$\rightarrow h(t) = \frac{ds(t)}{dt} = \delta(t) + ۲\delta(t-۱) - ۴\delta(t-۲) + \delta(t-۳)$$

حال با استفاده از انتگرال کانولوشن پاسخ حالت صفر را به ازای ورودی $i_s(t)$ تعیین می کنیم.

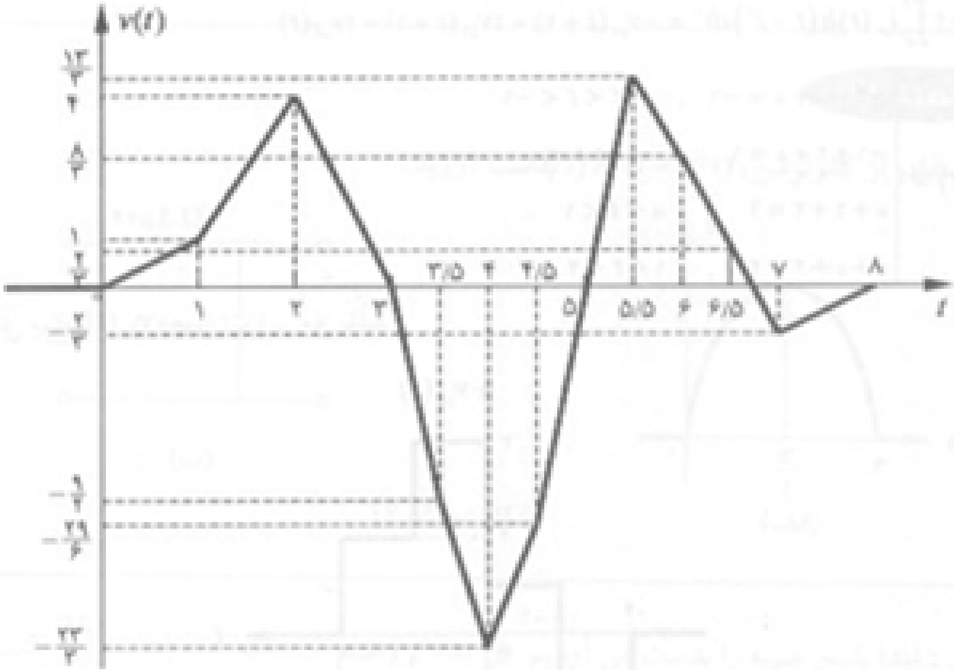
$$v(t)=i_s(t)*h(t)=\int_0^t h(t')i_s(t-t')\,dt'=i_s(t)+2i_s(t-1)-4i_s(t-2)+i_s(t-3)$$

$$i_s(t)=\begin{cases} t & , \quad 0<t<2 \\ -2(t-3) & , \quad 2<t<3/5 \\ \frac{2}{3}(t-5) & , \quad 3/5<t<5 \end{cases}$$

بنابراین $v(t)$ را می توان بصورت زیر بیان کرد.

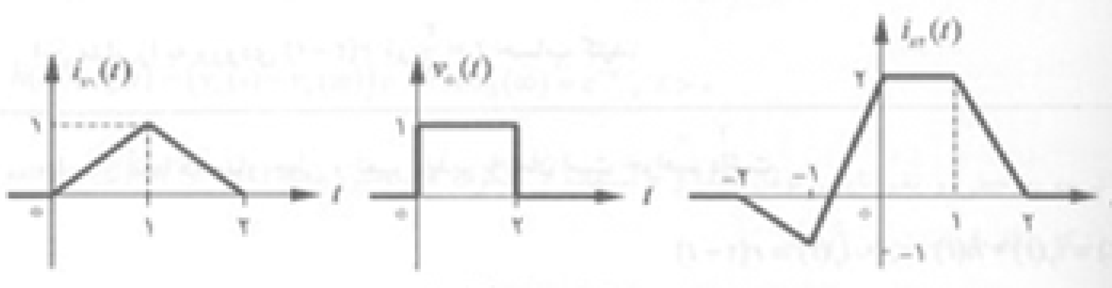
$$\rightarrow\; v(t)=\begin{cases} t \;,\; 0<t<1 \\ t+2(t-1)=3t-2 \;,\; 1<t<2 \\ -2(t-3)+2(t-1)-4(t-2)=-4t+12 \;,\; 2<t<3 \\ -2(t-3)-4(t-1-3)-4(t-2)+(t-3)=-9t+27 \;,\; 3<t<3/5 \\ \frac{2}{3}(t-5)-4(t-1-3)-4(t-2)+(t-3)=-\frac{19}{3}t+\frac{53}{3} \;,\; 3/5<t<4 \\ \frac{2}{3}(t-5)-4(t-1-3)+8(t-2-3)+(t-3)=\frac{17}{3}t-\frac{91}{3} \;,\; 4<t<4/5 \\ \frac{2}{3}(t-5)+\frac{4}{3}(t-1-5)+8(t-2-3)+(t-3)=11t-\frac{163}{3} \;,\; 4/5<t<5 \\ 0+\frac{4}{3}(t-1-5)+8(t-2-3)-2(t-3-3)=\frac{22}{3}t-36 \;,\; 5<t<5/5 \\ 0+\frac{4}{3}(t-1-5)-\frac{8}{3}(t-2-5)-2(t-3-3)=-\frac{10}{3}t+\frac{68}{3} \;,\; 5/5<t<6 \\ 0+0-\frac{8}{3}(t-2-5)-2(t-3-3)=-\frac{14}{3}t+\frac{92}{3} \;,\; 6<t<6/5 \\ 0+0-\frac{8}{3}(t-2-5)+\frac{2}{3}(t-3-5)=-2t+\frac{40}{3} \;,\; 6/5<t<7 \\ 0+0+0+\frac{2}{3}(t-3-5)=\frac{2}{3}t-\frac{16}{3} \;,\; 7<t<8 \end{cases}$$

و لذا شکل موج $v(t)$ بصورت زیر خواهد بود.



مسئله ۱۴

پاسخ حالت صفر یک مدار خطی و تغییر ناپذیر با زمان به ورودی $i_{s1}(t)$ ، $v_o(t)$ می باشد. پاسخ حالت صفر را به ورودی $i_{s2}(t)$ تعیین کنید.



شکل مسئله ۱٤

حل : با فرض اینکه پاسخ حالت صفر به ازای ورودی $i_{s2}(t)$ ، $v_{o2}(t)$ باشد خواهیم داشت.

$$v_{o2}(t) = i_{s2}(t) * h(t) = \int_0^t i_{s2}(t')h(t-t')\,dt'$$

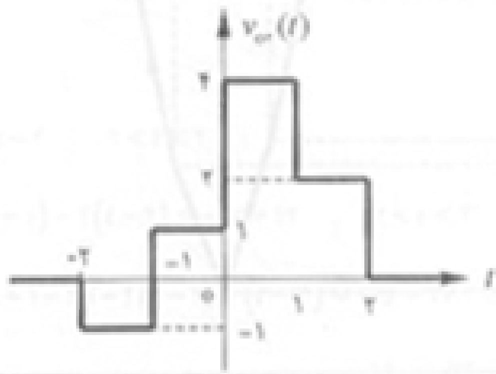
$$i_{s2}(t) = -i_{s1}(t+2) + 2i_{s1}(t+1) + 2i_{s}(t) \quad , \quad v_{o1}(t) = i_{s1}(t) * h(t)$$

$$v_{o2}(t) = \int_0^t i_{s2}(t')h(t-t')\,dt' = -\int_0^t i_{s1}(t'+2)h(t-t')\,dt' + 2\int_0^t i_{s1}(t'+1)h(t-t')\,dt'$$

$$+2\int_0^t i_{in}(t)h(t-t')\,dt' = -v_{os}(t+2)+2v_{os}(t+1)+2v_{os}(t)$$

$$\to v_{os}(t)=\begin{cases}-1+0+0=-1 \ , & -2<t<-1\\ -1+2+0=1 \ , & -1<t<0\\ 0+2+2=4 \ , & 0<t<1\\ 0+0+2=2 \ , & 1<t<2\end{cases}$$

بنابراین شکل موج $v_{os}(t)$ بصورت زیر می باشد.



مسئله ۱۵

پاسخ ضربه یک مدار خطی و تغییر ناپذیر با زمان $h(t)=\sum_{K=0}^{\infty}\delta(t-K)$ است. پاسخ حالت صفر این مدار را به ورودی $r(2-t)$ در $t=\frac{3}{2}$ حساب کنید.

حل : از آنجا که مدار خطی و تغییر ناپذیر با زمان است خواهیم داشت.

$$v(t)=i_s(t)*h(t) \quad , \quad i_s(t)=r(2-t)$$

$$v(t)=\int_0^t h(t')r(2-(t-t'))\,dt' = \int_0^t \sum_{K=0}^{\infty}\delta(t-K)\,r(2-(t-t'))\,dt = \sum_{K=0}^{\infty} r(2-(t-K))$$

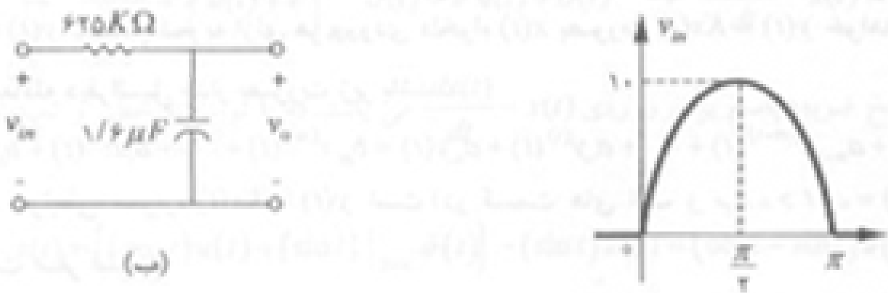
$$\to v(t)=\sum_{K=0}^{\infty} r(2+K-t) \quad \to \quad v\left(\frac{3}{2}\right)=\sum_{K=0}^{\infty} r\left(K+\frac{1}{2}\right)=r\left(\frac{1}{2}\right)+r\left(\frac{3}{2}\right)+r\left(\frac{5}{2}\right)+\cdots$$

طبق تعریف تابع شیب واحد $r(2-t)=\begin{cases}2-t \ , & 2-t>0\\ 0 \ , & 2-t<0\end{cases}=\begin{cases}2-t \ , & t<2\\ 0 \ , & t>0\end{cases}$ می باشد بنابراین داریم.

$$v\left(\frac{3}{2}\right)=\left(2-\frac{1}{2}\right)+\left(2-\frac{3}{2}\right)+0+\cdots=2$$

مسئله ۱۶

با استفاده از کانولوشن، $v_o(t=۲/۲)$ را بدست آورید.



(الف) (ب)

شکل مسئله ۱۶

حل : ابتدا پاسخ ضربه را بدست می آوریم. در $t=\infty$ واضح است که $v_o(\infty)=۰$ می باشد و در $t=۰$ خازن اتصال کوتاه بوده و جریان $\frac{\delta(t)}{۶۲۵\times ۱۰^۳}$ از آن می گذرد (فرض $v_{in}=\delta(t)$) بنابراین داریم.

$$v_o(۰^+)=v_o(۰^-)+\frac{۱}{۱/۶\times ۱۰^{-۶}}\int_{۰^-}^{۰^+}\frac{\delta(t)}{۶۲۵\times ۱۰^۳}dt=۰+\frac{۱}{۱/۶\times ۶۲۵\times ۱۰^{-۳}}=۱$$

$$\text{ثابت زمانی}=RC=۱/۶\times ۶۲۵\times ۱۰^{-۳}=۱$$

$$\rightarrow\ h(t)=v_o(t)=\big(v_o(۰)-v_o(\infty)\big)e^{-\frac{t}{RC}}+v_o(\infty)=e^{-t}\ ,\ t>۰$$

با توجه به خطی و تغییرناپذیر بودن مدار و با استفاده از انتگرال کانولوشن پاسخ $v_o(t)$ را به ازای v_{in} داده شده در شکل (الف) بدست می آوریم.

$$v_o(t)=\int_۰^t v_{in}(t').h(t-t')dt'=\int_۰^t ۱۰\sin t'.\,e^{-(t-t')}dt'=۱۰e^{-t}\int_۰^t ۱۰\sin t'e^{t'}dt'$$

$$=۱۰e^{-t}.\frac{e^{t'}}{۲}.\big(\sin t'-\cos t'\big)\Big|_۰^t=۵\big(\sin t-\cos t+e^{-t}\big)$$

$$v_o(۲/۲)=۵\big(\sin ۲/۲-\cos ۲/۲+e^{-۲/۲}\big)=۷/۵\,V$$

مسئله ۱۷

الف- در یک مدار خطی و تغییر ناپذیر با زمان ثابت کنید اگر به ازای ورودی $x(t)=u(t)$ خروجی $y(t)=Ku(t)$ باشد، پاسخ به ازای هر ورودی دلخواه $x(t)$ بصورت $y(t)=Kx(t)$ خواهد بود.

ب- اگر معادله دیفرانسیل مدار بصورت زیر باشد.

$$a_n y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1 y^{(1)}(t)+a_0 y(t)=b_m x^{(m)}(t)+\cdots+b_1 x^{(1)}(t)+b_0 x(t)$$

تحت چه شرایطی همواره $y(t)=Kx(t)$ است. (در قسمت های الف و ب، $t>0$ ، $x(t)=0$ و $y(t)$ پاسخ حالت صفر است)

حل : الف ـ از آنجا که مدار خطی و تغییر ناپذیر با زمان است لذا اگر ورودی برابر مشتق $u(t)$ باشد خروجی نیز برابر مشتق $Ku(t)$ خواهد شد.

$$\rightarrow\ x(t)=\frac{du(t)}{dt}=\delta(t)\ \rightarrow\ y(t)=h(t)=\frac{dy(t)}{dt}=K\delta(t)$$

و چون به ازای $t<0$ ، $x(t)=0$ بوده و مدار در حالت صفر می باشد لذا به ازای ورودی دلخواه $x(t)$ خواهیم داشت.

$$y(t)=\int_0^t h(t')x(t-t')\,dt'=\int_0^t K\delta(t')x(t-t')\,dt'=Kx(t-t')\Big|_{t'=0}=Kx(t)$$

ب ـ شرط اینکه $y(t)=Kx(t)$ پاسخ معادله دیفرانسیل باشد این است که در معادله دیفرانسیل صدق کند.

$$a_n Kx^{(n)}(t)+a_{n-1}Kx^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1 Kx^{(1)}(t)+a_0 Kx=b_m x^{(m)}(t)+\cdots+b_1 x^{(1)}(t)+b_0 x(t)$$

و شرط برقرار بودن رابطه فوق این است که مرتبه مشتق دو طرف برابر باشد و یا $n=m$ باشد. بنابراین به ازای $n=m$، $y(t)=Kx(t)$ پاسخ حالت صفر مدار با معادله دیفرانسیل فوق و ورودی $x(t)$ خواهد بود.

مسئله ۱۸

در یک مدار خطی و تغییر ناپذیر با زمان برای ورودی $x(t)=e^t u(t)$ پاسخ حالت صفر $y(t)=(\sin t)u(t)$ حاصل شده است.

الف- پاسخ ضربه این مدار را تعیین کنید.

ب- پاسخ حالت صفر این مدار را به ورودی $x_1(t)=(\sin t)u(t)$ بدست آورید.

حل : الف ـ می توان نوشت.

$$y(t)=x(t)*h(t)$$

$$x(t)=e^{t}u(t)\;\rightarrow\;\frac{dx(t)}{dt}=e^{t}u(t)+e^{t}\Big|_{t=0}\delta(t)=e^{t}u(t)+\delta(t)\;\rightarrow\;\frac{dx(t)}{dt}-x(t)=\delta(t)$$

بنابراین پاسخ ضربه، پاسخ برای ورودی $\frac{dx(t)}{dt}-x(t)$ می باشد که با توجه به خطی و تغییر ناپذیر بودن مدار داریم.

$$h(t)=\frac{dy(t)}{dt}-y(t)=\left\{(\cos t)u(t)+(\sin t)\big|_{t=0}\,\delta(t)\right\}-(\sin t)u(t)=(\cos t-\sin t)u(t)$$

ب ـ پاسخ حالت صفر خواسته شده را می توان با استفاده از انتگرال کانولوشن بدست آورد.

$$y_1(t)=x_1(t)*h(t)\quad,\quad x_1(t)=(\sin t)u(t)\quad,\quad h(t)=(\cos t-\sin t)u(t)$$

$$\rightarrow\; y_1(t)=\int_0^t h(t')x_1(t-t')\,dt'=\int_0^t(\sin t'-\cos t')\sin(t-t')\,dt'$$

$$=\int_0^t\left\{\sin t\left(\sin t'\cos t'-\cos^2 t'\right)-\cos t'\left(\sin^2 t'-\sin t'\cos t'\right)\right\}dt'$$

$$=\int_0^t\left\{\sin t\left(\frac{1}{2}\sin 2t'-\frac{1+\cos 2t'}{2}\right)-\cos t\left(\frac{1-\cos 2t'}{2}-\frac{1}{2}\sin 2t'\right)\right\}dt'$$

$$=\left\{\sin t\left(-\frac{1}{4}\cos 2t'-\frac{1}{2}t'-\frac{1}{4}\sin 2t'\right)-\cos t\left(\frac{1}{2}t'-\frac{1}{4}\sin 2t'+\frac{1}{4}\cos 2t'\right)\right\}\Bigg|_0^t$$

$$=-\frac{1}{2}\sin t+\frac{1}{2}t\left(\sin t+\cos t\right)$$

روش دوم : در این روش از تبدیل لاپلاس و رابطه $H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}$ کمک می گیریم.

$$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{\frac{1}{s^2+1}}{\frac{1}{s-1}}=\frac{s-1}{s^2+1}=\frac{s}{s^2+1}-\frac{1}{s^2+1}\;\rightarrow\; h(t)=\cos t-\sin t\;,\; t>0$$

$$Y_1(s)=H(s)\cdot X_1(s)=\frac{s-1}{s^2+1}\cdot\frac{1}{s^2+1}=\frac{s}{(s^2+1)^2}-\frac{1}{2}\frac{1}{(s^2+1)^2}$$

$$\rightarrow\; y_1(t)=\frac{1}{2}t\sin t-\frac{1}{2}(\sin t-t\cos t)$$

مسئله ۱۹

در یک مدار خطی و تغییر ناپذیر با زمان برای ورودی $x(t)=(e^{-t}-\sin t)u(t)$ پاسخ حالت صفر $y(t)=\delta(t)$ حاصل شده است.

الف- پاسخ ضربه مدار را تعیین کنید.

ب- آیا شرایط اولیه ای وجود دارد که به ازای آن، پاسخ ورودی صفر با گذشت زمان به سمت بی نهایت میل کند.

حل : الف ـ با توجه به خطی و تغییر ناپذیر بودن مدار می توان نوشت.

$$x(t)=\left(e^{-t}-\sin t\right)u(t) \;\rightarrow\; \frac{dx}{dt}=\left(-e^{-t}-\cos t\right)u(t)+\left(e^{-t}-\sin t\right)\Big|_{t=0}\delta(t)$$

$$=\left(-e^{-t}-\cos t\right)u(t)+\delta(t)$$

$$\frac{dx^2}{dt^2}=\left(e^{-t}+\sin t\right)u(t)+\left(-e^{-t}-\cos t\right)\Big|_{t=0}\delta(t)+\delta'(t)=\left(e^{-t}+\sin t\right)u(t)-2\delta(t)+\delta'(t)$$

$$\frac{dx^2}{dt^2}+x=2e^{-t}u(t)-2\delta(t)+\delta'(t)$$

$$\frac{dx^3}{dt^3}+\frac{dx}{dt}=-2e^{-t}u(t)+2e^{-t}\Big|_{t=0}\delta(t)-2\delta'(t)+\delta''(t)=-2e^{-t}u(t)+2\delta(t)-2\delta'(t)+\delta''(t)$$

$$\frac{dx^3}{dt^3}+\frac{dx^2}{dt^2}+\frac{dx}{dt}+x=\delta''(t)-\delta(t)$$

به ازای ورودی فوق پاسخ $\frac{dy^3}{dt^3}+\frac{dy^2}{dt^2}+\frac{dy}{dt}+y$ می باشد بنابر این داریم.

$$\frac{dh^2}{dt^2}-\frac{dh}{dt}=\delta^{(3)}(t)+\delta^{(2)}(t)+\delta^{(1)}(t)+\delta(t)$$

معادله مشخصه : $s^2-s=0 \;\rightarrow\; s=1\,,\,0 \;\rightarrow\; h(t)=\left(K_1+K_2e^{t}\right)u(t)+K_3\delta^{(1)}(t)+K_4\delta(t)$

با جایگذاری در معادله دیفرانسیل خواهیم داشت.

$$K_3\delta^{(3)}(t)+\left(K_4-K_3\right)\delta^{(2)}(t)+\left(K_1+K_2-K_4\right)\delta^{(1)}(t)-K_1\delta(t)$$

$$=\delta^{(3)}(t)+\delta^{(2)}(t)+\delta^{(1)}(t)+\delta(t)$$

$$\rightarrow \begin{cases} K_3 = 1 \\ K_4 - K_3 = 1 \\ -K_1 + K_2 - K_4 = 1 \\ -K_1 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} K_1 = -1 \\ K_2 = 4 \\ K_3 = 1 \\ K_4 = 2 \end{cases} \rightarrow h(t) = \left(-1 + 4e^{t}\right)u(t) + \delta'(t) + 2\delta(t)$$

روش دوم : در این روش از تبدیل لاپلاس و بکارگیری رابطه $H(s) = \dfrac{Y(s)}{X(s)}$ استفاده می کنیم. برای قسمت (الف) داریم.

$$H(s) = \frac{1}{\dfrac{1}{s+1} - \dfrac{1}{s^2+1}} = \frac{s^3 + s^2 + s + 1}{s(s-1)} = -\frac{1}{s} + \frac{4}{s-1} + s + 2$$

$$\rightarrow \; h(t) = -1 + 4e^{t} + \delta'(t) + 2\delta(t) \;,\; t > 0$$

ب ـ ابتدا معادله دیفرانسیل مدار را بدست می آوریم.

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{(s+1)(s^2+1)}{s(s-1)} \;\rightarrow\; \frac{d^2y(t)}{dt^2} - \frac{dy(t)}{dt} = \frac{d^3x(t)}{dt^3} + \frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dx(t)}{dt} + x(t)$$

به ازای ورودی صفر $x(t) = 0$ معادله دیفرانسیل مدار بصورت زیر خواهد شد.

$$\frac{dy^2}{dt^2} - \frac{dy}{dt} = 0 \;\rightarrow\; \frac{dy}{dt} - y = 0 \;\rightarrow\; y(t) = Ke^{t}u(t)$$

که به ازای $K = y(0) \neq 0$ پاسخ با گذشت زمان به بی نهایت میل می کند.

مسئله ۲۰

در یک مدار خطی و تغییر ناپذیر با زمان برای ورودی $(e^{-2t}\cos t)u(t)$ پاسخ حالت صفر $e^{-t}u(t)$ بدست آمده است. پاسخ پله این مدار را تعیین کنید. (در حوزه زمان حل کنید)

حل : با توجه به خطی و تغییر ناپذیر بودن مدار می توان نوشت.

$$x(t) = \left(e^{-2t}\cos t\right)u(t) \;\rightarrow\; \frac{dx(t)}{dt} = -\left(2e^{-2t}\cos t\right)u(t) - \left(e^{-2t}\sin t\right)u(t) + \delta(t)$$

$$\rightarrow\; \frac{d^2x(t)}{dt^2} = \left(3e^{-2t}\cos t\right)u(t) + \left(4e^{-2t}\sin t\right)u(t) - 2\delta(t) + \delta'(t)$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 4\frac{dx(t)}{dt} + 5x(t) = \delta'(t) + 2\delta(t) \quad , \quad y(t) = e^{-t}u(t)$$

$$\rightarrow\; \frac{dh}{dt} + 2h = \frac{dy^2}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 5y = 2e^{-t}u(t) + 3\delta(t) + \delta'(t)$$

$$s+2=0 \;\rightarrow\; s=-2 \;\rightarrow\; h(t)=\underbrace{K_1u(t)e^{-2t}+K_2\delta(t)}_{\text{پاسخ عمومی}}+\underbrace{K_3u(t)e^{-t}}_{\text{پاسخ خصوصی}}$$: معادله مشخصه

با جایگذاری پاسخ خصوصی در معادله دیفرانسیل به ازای $t=0$ داریم.

$$-K_3 e^{-t}+2K_3e^{-t}=2e^{-t} \;\rightarrow\; K_3=2$$

با جایگذاری $h(t)$ در معادله دیفرانسیل داریم.

$$(K_1+2K_3+2)\delta(t)+K_2\delta'(t)=3\delta(t)+\delta'(t) \;\rightarrow\; \begin{cases} K_2=1 \\ K_1+2K_2+2=3 \;\rightarrow\; K_1=-1 \end{cases}$$

$$\rightarrow\; h(t)=\left(2e^{-t}-e^{-2t}\right)u(t)+\delta(t)$$

در ادامه با استفاده از انتگرال کانولوشن پاسخ پله را به ازای $t>0$ ، $x(t)=u(t)=1$ حساب خواهیم کرد.

$$s(t)=x(t)*h(t) \quad , \quad x(t)=u(t)=1 \quad , \quad h(t)=\left(2e^{-t}-e^{-2t}\right)u(t)+\delta(t)$$

$$s(t)=\int_0^t x(t')h(t-t')\,dt'=\int_0^t h(t-t')\,dt'=\int_0^t\left(2e^{t'-t}-e^{2t'-2t}+\delta(t')\right)dt'$$

$$=\left(2e^{t'-t}-\frac{1}{2}e^{2t'-2t}\right)\Big|_0^t+1=\left(2-\frac{1}{2}\right)-\left(2e^{-t}-\frac{1}{2}e^{-2t}\right)+1$$

$$\rightarrow\; s(t)=-2e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t}+\frac{5}{2} \;,\; t>0 \;\rightarrow\; s(t)=\left(-2e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t}+\frac{5}{2}\right)u(t)$$

با استفاده از تبدیل لاپلاس نیز می توانیم پاسخ پله را بصورت زیر حساب کنیم.

$$H(s)=\frac{S(s)}{U(s)} \;\rightarrow\; S(s)=U(s)\cdot H(s)=U(s)\cdot\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{1}{s}\,\frac{\frac{1}{s+1}}{\frac{s+2}{(s+2)^2+1}}$$

$$S(s)=\frac{(s+1)^2+1}{s(s+1)(s+2)}=-\frac{2}{s+1}+\frac{\frac{1}{2}}{s+2}+\frac{\frac{5}{2}}{s} \;\rightarrow\; s(t)=-2e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t}+\frac{5}{2} \;,\; t>0$$

مسئله ۲۱

برای ورودی $x(t)=(\cos t-\sin t)u(t)$ پاسخ حالت صفر یک مدار خطی تغییر ناپذیر با زمان بصورت $\left(e^{-t}-e^{-2t}\right)u(t)$ است. پاسخ ضربه و پاسخ پله این مدار را بدست آورید.

حل : با توجه به خطی و تغییر ناپذیر بودن مدار با زمان می توان نوشت.

$$x(t) = (\cos t - \sin t)u(t) \quad , \quad y(t) = \left(e^{-t} - e^{-2t}\right)u(t)$$

$$\frac{dx}{dt} = (-\sin t - \cos t)\,u(t) + \delta(t) \;\rightarrow\; \frac{d^2 x}{dt^2} = (-\cos t + \sin t) - \delta(t) + \delta'(t)$$

$$\rightarrow\; \frac{d^2 x}{dt^2} + x = -\delta(t) + \delta'(t) \;\rightarrow\; \frac{d^2 y}{dy^2} + y = -h + \frac{dh}{dt}$$

$$\rightarrow\; \frac{dh}{dt} - h = \left(2e^{-t} - 5e^{-2t}\right)u(t) + \delta(t)$$

معادله مشخصه : $s - 1 = 0 \;\rightarrow\; s = 1 \;\rightarrow\; h(t) = \underbrace{K_1 e^{t}}_{\text{پاسخ عمومی}} + \underbrace{K_2 e^{-t} + K_3 e^{-2t}}_{\text{پاسخ خصوصی}} \;,\; t > 0$

با جایگذاری پاسخ خصوصی در معادله دیفرانسیل به ازای $t > 0$ داریم.

$$-2K_2 e^{-t} - 3K_3 e^{-2t} = 2e^{-t} - 5e^{-2t} \;\rightarrow\; K_2 = -1 \,,\, K_3 = \frac{5}{3}$$

و با انتگرال گیری از معادله دیفرانسیل در فاصله 0^- تا 0^+ ، $h(0^+) = 1$ شده بنابراین داریم.

$$h(0^+) = 1 \;\rightarrow\; K_1 - 1 + \frac{5}{3} = 1 \;\rightarrow\; K_1 = \frac{1}{3} \;\rightarrow\; h(t) = \left(\frac{1}{3}e^{t} - e^{-t} + \frac{5}{3}e^{-2t}\right)u(t)$$

در ادامه با استفاده از انتگرال کانولوشن پاسخ پله را نیز محاسبه خواهیم کرد.

$$x(t) = u(t) \;\rightarrow\; s(t) = x(t) * h(t) = \int_0^t x(t')h(t - t')\,dt'$$

$$= \int_0^t \left(\frac{1}{3}e^{t-t'} - e^{t'-t} + \frac{5}{3}e^{-2t'-2t}\right)dt' = \left(-\frac{1}{3}e^{t-t'} - e^{t'-t} + \frac{5}{6}e^{2t'-2t}\right)\Big|_0^t$$

$$= \left(-\frac{1}{3} - 1 + \frac{5}{6}\right) - \left(-\frac{1}{3}e^{t} - e^{-t} + \frac{5}{6}e^{-2t}\right) \;,\; t > 0 \;\rightarrow\; s(t) = \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}e^{t} + e^{-t} - \frac{5}{6}e^{-2t}\right)u(t)$$

مسئله را با استفاده از تبدیل لاپلاس نیز می توان بصورت زیر حل کرد.

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\dfrac{1}{s+1} - \dfrac{1}{s+2}}{\dfrac{s}{s^2+1} - \dfrac{1}{s^2+1}} = \frac{s^2+1}{(s-1)(s+1)(s+2)} = \frac{\frac{1}{3}}{s-1} - \frac{1}{s+1} + \frac{\frac{5}{3}}{s+2}$$

$$\rightarrow\; h(t) = \frac{1}{3}e^{t} - e^{-t} + \frac{5}{3}e^{-2t} \;,\; t > 0$$

$$S(s) = U(s)\cdot H(s) = \frac{1}{s}\left(\frac{s^2+1}{(s-1)(s+1)(s+2)}\right) = \frac{-\frac{1}{2}}{s} + \frac{\frac{1}{3}}{s-1} + \frac{1}{s+1} - \frac{\frac{5}{6}}{s+2}$$

$$\rightarrow \ s(t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3}e^{t} + e^{-t} - \frac{5}{6}e^{-2t}\ , \quad t > 0$$

مسئله ۲۲

پاسخ حالت صفر یک مدار خطی تغییر ناپذیر با زمان برای ورودی $x(t) = e^{-t}u(t)$ بصورت $y(t) = \left(e^{-t} + 2e^{-2t}\right)u(t)$ است. پاسخ پله این مدار چیست.(در حوزه زمان حل کنید)

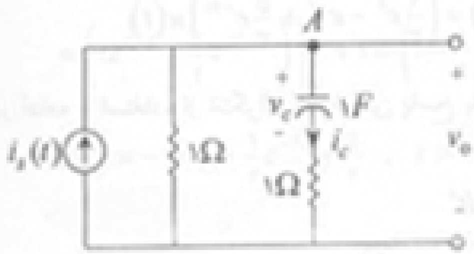
حل : از آنجا که مدار خطی و تغییر ناپذیر با زمان است لذا می توان نوشت.

$$\frac{dx(t)}{dt} = -e^{-t}u(t) + \delta(t) \ \rightarrow \ \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = \delta(t) \ \rightarrow \ \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = h(t)$$

$$\rightarrow \ h(t) = \left(-2e^{-2t}\right)u(t) + \delta(t) \ \rightarrow \ s(t) = \int_0^t h(t')dt' = \int_0^t \left(-2e^{-2t'} + \delta(t')\right)dt'$$

$$= e^{-2t'}\Big|_0^t + 1 = e^{-2t} - 1 + 1 = e^{-2t} \ \rightarrow \ s(t) = \left(e^{-2t}\right)u(t)$$

مسئله ۲۳



پاسخ حالت صفر v_o را تعیین کنید. $i_s(t) = e^{-t}u(t)$

اگر $v_c(0) = -1V$ باشد، پاسخ کامل $v_o(t)$ را حساب کنید.

شکل مسئله ۲۳

حل : با توجه به شکل مدار داریم.

$$v_o = v_c + i_c = v_c + \frac{dv_c}{dt} = v_c + Dv_c \ \rightarrow \ v_c = \frac{1}{D+1}v_o \ \rightarrow \ i_c = \frac{dv_c}{dt} = Dv_c = \frac{D}{D+1}v_o$$

A برای گره KCL $\rightarrow \ -i_s + \frac{v_o}{1} + i_c = 0 \ \rightarrow \ -i_s + \frac{v_o}{1} + \frac{D}{D+1}v_o = 0$

$$\rightarrow \ (2D+1)v_o = (D+1)i_s \ \rightarrow \ \frac{2dv_o}{dt} + v_o = \frac{di_s}{dt} + i_s = -e^{-t}u(t) + \delta(t) + e^{-t}u(t) = \delta(t)$$

معادله مشخصه : $2s + 1 = 0 \ \rightarrow \ s = -\frac{1}{2} \ \rightarrow \ v_o(t) = Ke^{-\frac{1}{2}t}\ , \ t > 0$

در $t = 0^+$ خازن اتصال کوتاه بوده بنابراین داریم.

$$i_c(0^+) = \frac{1}{1+1}i_s(0^+) = \frac{1}{2}A \ \rightarrow \ v_o(0^+) = \frac{1}{2} \ \rightarrow \ K = \frac{1}{2} \ \rightarrow \ v_o(t) = \frac{1}{2}u(t)e^{-\frac{1}{2}t}$$

برای محاسبه پاسخ کامل ابتدا پاسخ ورودی صفر را بدست می آوریم.

$$i_c(t)=0 \rightarrow 2\frac{dv_c}{dt}+v_c=0 \rightarrow v_c(t)=Ke^{-\frac{1}{2}t}, \quad t>0$$

$$v_c(0)=v_c(0)=-1 \rightarrow K=-1 \rightarrow v_c(t)=-u(t)e^{-\frac{1}{2}t}$$

پاسخ کامل برابر مجموع پاسخ ورودی صفر و پاسخ حالت صفر می باشد.

$$v_c(t)=\frac{1}{2}u(t)e^{-\frac{1}{2}t}-u(t)e^{-\frac{1}{2}t}=-\frac{1}{2}u(t)e^{-\frac{1}{2}t}$$

مسئله ۲۴

پاسخ ضربه معادلات دیفرانسیل زیر را تعیین کنید.

۱) $\frac{d^2y}{dt^2}+3\frac{dy}{dt}+2y=2\frac{d\omega}{dt}+\omega$

۲) $\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}+2y=\frac{d\omega}{dt}+2\omega$

۳) $\frac{d^2y}{dt^2}+4\frac{dy}{dt}+4y=\frac{d\omega}{dt}+\omega$

۴) $\frac{d^3y}{dt^3}+4\frac{d^2y}{dt^2}+6\frac{dy}{dt}+4y=\frac{d^2\omega}{dt^2}+3\frac{d\omega}{dt}+2\omega$

۵) $\frac{d^2y}{dt^2}+3\frac{dy}{dt}+2y=2\frac{d^2\omega}{dt^2}+\omega$

۶) $\frac{d^2y}{dt^2}+3\frac{dy}{dt}+2y=2\frac{d^3\omega}{dt^3}+\omega$

حل : در معادلات دیفرانسیل شامل تابع ضربه پاسخ علاوه بر پاسخ عمومی و خصوصی شامل توابع ویژه $\sum_{i=0}^{m-n} K_i\delta^{(m-n-i)}(t)$ نیز می باشد. که در آن n بیشترین درجه مشتقات خروجی و m بیشترین درجه مشتقات تابع ضربه است. با در نظر گرفتن این موضوع به حل معادلات فوق می پردازیم.(واضح است که اگر $n-m>0$ باشد پاسخ شامل ضربه ای نخواهد بود.)

$$\omega(t)=\delta(t) \rightarrow y(t)=h(t)$$

۱) $\frac{d^2y}{dt^2}+3\frac{dy}{dt}+2y=2\delta^{(1)}(t)+\delta(t)$

معادله مشخصه : $s^2+3s+2=0 \rightarrow s=-1,-2 \rightarrow y(t)=Ae^{-t}+Be^{-2t}$

۲) $\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}+2y=\delta^{(1)}(t)+\delta(t)$

معادله مشخصه : $s^2+2s+2=0 \rightarrow s=-1\pm j \rightarrow y(t)=e^{-t}(A\cos t+B\sin t)$

۳) $\frac{d^2y}{dt^2}+4\frac{dy}{dt}+4y=\delta^{(1)}(t)+\delta(t)$

معادله مشخصه : $s^2+4s+4=0 \rightarrow s=-2,-2 \rightarrow y(t)=(A+Bt)e^{-2t}$

۴) $\dfrac{d^3y}{dt^3}+4\dfrac{d^2y}{dt^2}+6\dfrac{dy}{dt}+4y=\delta^{(2)}(t)+2\delta^{(1)}(t)+2\delta(t)$

معادله مشخصه : $s^3+4s^2+6s+4=0 \;\rightarrow\; s=-2\,,\,-1\pm j$

$$\rightarrow\; y(t)=Ae^{-2t}+e^{-t}\left(B\cos t+C\sin t\right)$$

۵) $\dfrac{d^2y}{dt^2}+3\dfrac{dy}{dt}+2y=2\delta^{(2)}(t)+\delta(t)$

معادله مشخصه : $s^2+3s+2=0 \;\rightarrow\; s=-1\,,\,-2 \;\rightarrow\; y(t)=Ae^{-t}+Be^{-2t}+K_0\delta(t)$

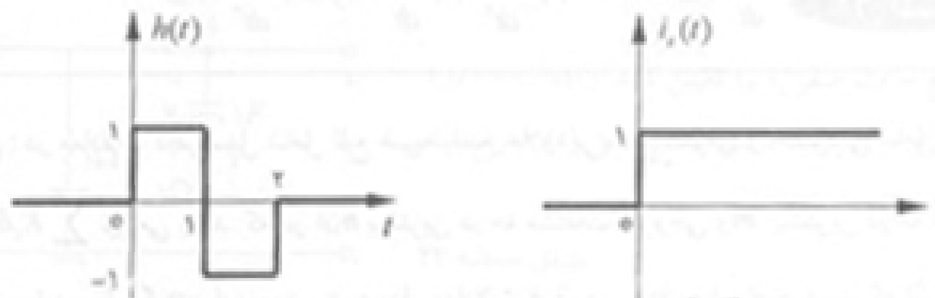
۶) $\dfrac{d^2y}{dt^2}+3\dfrac{dy}{dt}+2y=2\delta'''(t)+\delta(t)$

معادله مشخصه : $s^2+3s+2=0 \;\rightarrow\; s=-1\,,\,-2$

$$\rightarrow\; y(t)=Ae^{-t}+Be^{-2t}+K_0\delta(t)+K_1\delta^{(1)}(t)$$

مسئله ۲۵

کانولوشن دو سیگنال نشان داده شده را محاسبه و رسم کنید.



(ب) شکل مسئله ۲۵ (الف)

حل : با توجه به شکل توابع می توان نوشت.

$v(t)=i_s(t)*h(t) \quad , \quad i_s(t)=u(t)$

$$0<t<1 \;\rightarrow\; h(t)=1 \;\rightarrow\; v(t)=\int_0^t h(t')i_s(t-t')dt'=\int_0^t u(t-t')dt=-r(t-t')\Big|_0^t$$

$$=-r(0)+r(t)=t$$

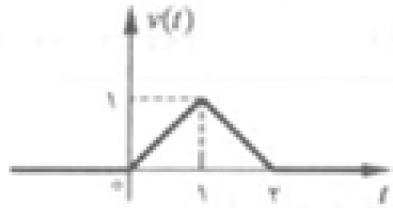
$$1<t<2 \;\rightarrow\; h(t)=-1 \;\rightarrow\; v(t)=v(1)+\int_1^t -i_s(t-t')dt'=1-\int_1^t u(t-t')dt'$$

$$=r(t-t')\Big|_1^t+1=r(0)-r(t-1)+1=-t+2$$

$$t>2 \;\rightarrow\; h(t)=0 \;\rightarrow\; v(t)=v(2)+\int_2^t 0\times i_s(t-t')\,dt' = v(2)=0$$

$$\rightarrow\; v(t)=\begin{cases} t & , \; 0<t<1 \\ -t+2 & , \; 1<t<2 \\ 0 & , \; t>2 \end{cases}$$

بنابراین $v(t)$ را بصورت زیر می توان رسم کرد.



مسئله ۲۶

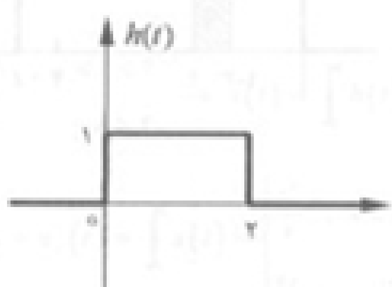
اگر بدانیم پاسخ ضربه مداری بصورت $h(t)$ مسئله۲۵باشد، پاسخ حالت صفر این مدار را به ورودی $i_s(t)$ مسئله ۲۵ ، بدون استفاده از انتگرال کانولوشن بدست آورید.

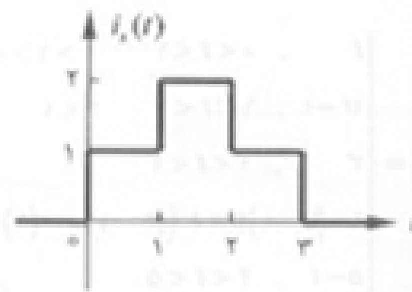
حل : از آنجا که $i_s(t)=u(t)$ می باشد لذا پاسخ حالت صفر خواسته شده پاسخ پله بوده که با انتگرال گیری از پاسخ ضربه $h(t)$ بدست می آید که با توجه به شکل موج $h(t)$ داریم.

$$h(t)=\begin{cases} 1 & , \; 0<t<1 \\ -1 & , \; 1<t<2 \\ 0 & , \; t>2 \end{cases} \qquad , \qquad s(t)=\int_0^t h(t)\,dt=\begin{cases} t & , \; 0<t<1 \\ -t+2 & , \; 1<t<2 \\ 0 & , \; t>2 \end{cases}$$

مسئله ۲۷

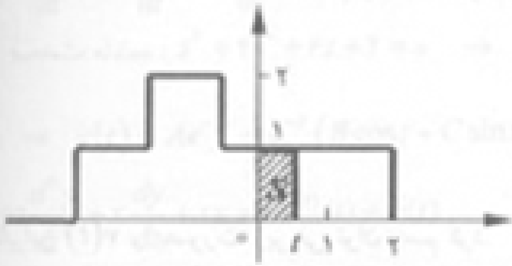
کانولوشن دو سیگنال داده شده را محاسبه و رسم کنید.

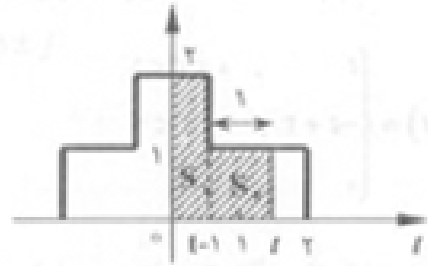




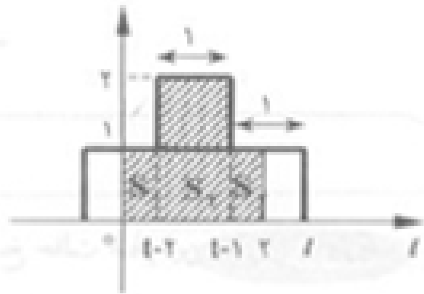
شکل مسئله ۲۷

حل : برای حل مسئله از شکل توابع و سطح زیر منحنی آنها استفاده خواهیم کرد.(روش ترسیمی).

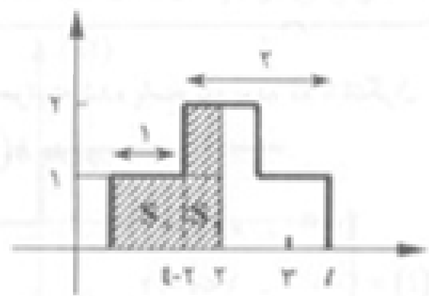




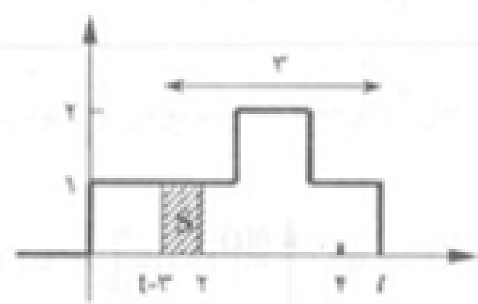
$0 < t < 1 \;\rightarrow\; v(t) = s = t$ $\qquad$ $1 < t < 2 \;\rightarrow\; v(t) = s_1 + s_2 = 2(t-1) + 1 = 2t - 1$



$2 < t < 3 \;\rightarrow\; v(t) = s_1 + s_2 + s_3 = (t-2) + 2 + (2 - (t-1))$



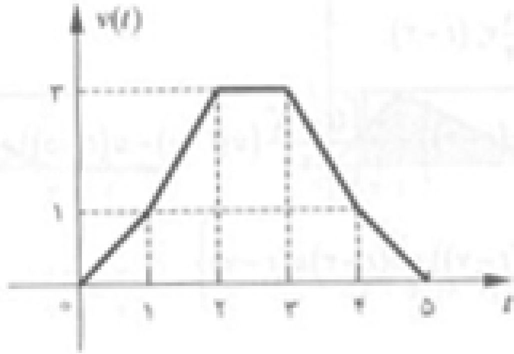
$3 < t < 4 \;\rightarrow\; v(t) = s_1 + s_2 = 1 + 2(2 - (t-3)) = 9 - 2t$



$4 < t < 5 \;\rightarrow\; v(t) = s = (2 - (t-3)) = 5 - t$

$$\rightarrow v(t) = \begin{cases} t & , \; 0 < t < 1 \\ 2t - 1 & , \; 1 < t < 2 \\ 3 & , \; 2 < t < 3 \\ 9 - 2t & , \; 3 < t < 4 \\ 5 - t & , \; 4 < t < 5 \end{cases}$$

بنابراین نمودار $v(t)$ بصورت زیر خواهد شد.



مسئله ۲۸

پاسخ حالت صفر را به دو طریق بدست آورید.

۱- بدون استفاده از انتگرال کانولوشن　　　۲- با استفاده از انتگرال کانولوشن

شکل مسئله ۲۸

حل : ۱- با توجه به خطی و تغییرناپذیری مدار با زمان و بدون بکارگیری انتگرال کانولوشن داریم.

$$i_s(t) = t\big(u(t) - u(t-1)\big) + \left(\frac{3}{2} - \frac{t}{2}\right)\big(u(t-1) - u(t-3)\big)$$

$$= tu(t) - \frac{3}{2}(t-1)u(t-1) + \frac{1}{2}(t-3)u(t-1) = r(t) - \frac{3}{2}r(t-1) + \frac{1}{2}r(t-3)$$

پاسخ شیب با دو بار انتگرال گیری از پاسخ ضربه بدست می آید.

$$h(t) = \begin{cases} 1 \ , & 0 < t < 2 \\ 0 \ , & t > 2 \end{cases} \rightarrow s(t) = \int_0^t h(t)\,dt = \begin{cases} t \ , & 0 < t < 2 \\ 2 \ , & t > 2 \end{cases}$$

$$\text{پاسخ شیب} = v_0(t) = \int_0^t s(t) = \begin{cases} \dfrac{t^2}{2} \ , & 0 < t < 2 \\ 2t \ , & t > 2 \end{cases} = \frac{t^2}{2}\big(u(t) - u(t-2)\big) + 2tu(t-2)$$

و پاسخ حالت صفر به ورودی $i_s(t)$ با توجه به $i_s(t)$ بدست آمده بصورت زیر حاصل خواهد شد.

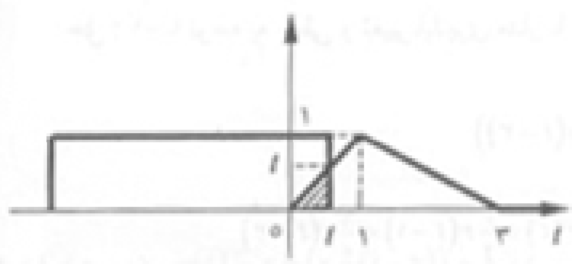
$$v(t)=v_0(t)-\frac{3}{2}v_0(t-1)+\frac{1}{2}v_0(t-3)$$

$$=\left\{\frac{t^2}{2}\big(u(t)-u(t-2)\big)+2tu(t-2)\right\}-\frac{3}{2}\left\{\frac{(t-1)^2}{2}\big(u(t-1)-u(t-5)\big)+2(t-1)u(t-5)\right\}$$

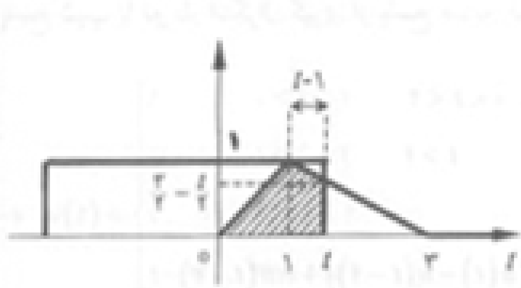
$$+\frac{1}{2}\left\{\frac{(t-3)^2}{2}\big(u(t-3)-u(t-7)\big)+2(t-3)u(t-7)\right\}$$

$$\rightarrow\ v(t)=\begin{cases}\dfrac{t^2}{2} & ,\ 0<t<1\\[2mm] \dfrac{t^2}{2}-\dfrac{3}{4}(t-1)^2=-\dfrac{1}{4}t^2+\dfrac{3}{2}t-\dfrac{3}{4} & ,\ 1<t<3\\[2mm] \dfrac{t^2}{2}-\dfrac{3}{4}(t-1)^2+\dfrac{1}{4}(t-3)^2=\dfrac{3}{2} & ,\ 3<t<4\\[2mm] 2t-\dfrac{3}{4}(t-1)^2+\dfrac{1}{4}(t-3)^2=-\dfrac{1}{2}t^2+4t-\dfrac{13}{2} & ,\ 4<t<5\\[2mm] 4t-6(t-1)+\dfrac{1}{4}(t-3)^2=\dfrac{1}{4}t^2-\dfrac{7}{2}t+\dfrac{49}{4} & ,\ 5<t<7\\[2mm] 4t-6(t-1)+2(t-3)=0 & ,\ t>7\end{cases}$$

۲- حال با استفاده از انتگرال کانولوشن و به روش ترسیمی $v(t)$ را بدست می آوریم.

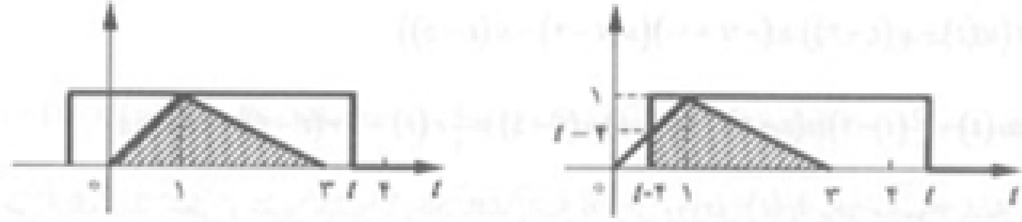


$$0<t<1\ \rightarrow\ v(t)=\frac{t\times t}{2}=\frac{t^2}{2}$$



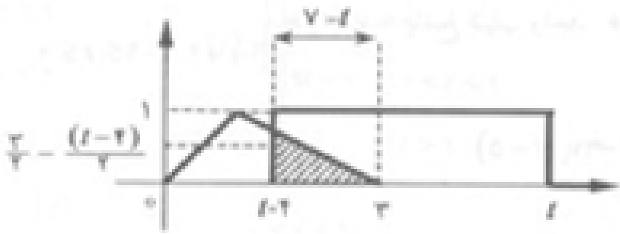
$$1<t<2\ \rightarrow\ v(t)=\frac{1\times 1}{2}+\frac{(t-1)}{2}\left(\frac{3}{2}-t+1\right)$$

$$=-\frac{1}{4}t^2+\frac{3}{2}t-\frac{3}{4}$$



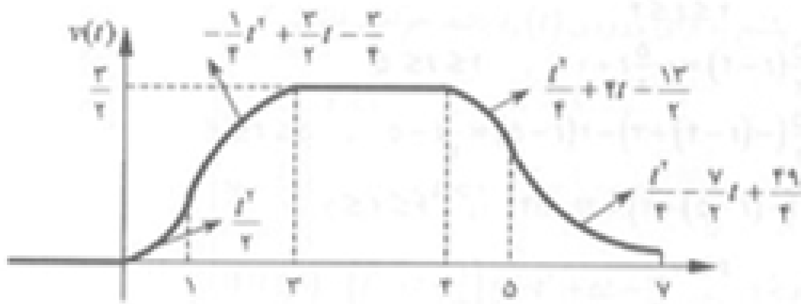
$$۲ < t < ۴ \rightarrow v(t) = \frac{۱ \times ۳}{۲} = \frac{۳}{۲}$$

$$۴ < t < ۵ \rightarrow v(t) = \frac{۳}{۲} - \frac{(t-۴)^۲}{۲} = -\frac{t^۲}{۲} + ۴t - \frac{۱۳}{۲}$$



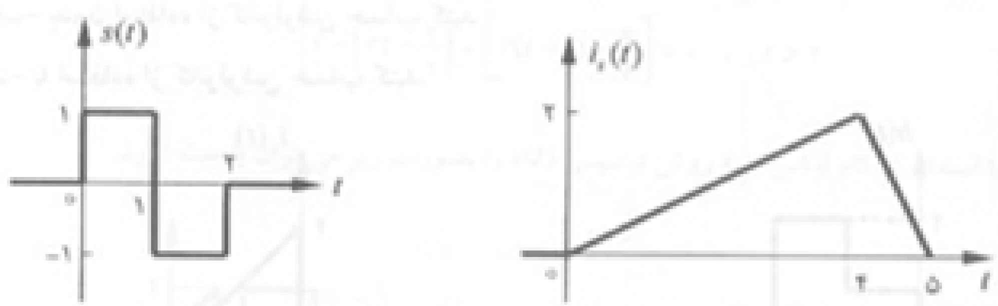
$$۵ < t < ۷ \rightarrow v(t) = \frac{(۷-t)\left(\frac{۳}{۲} - \frac{t-۴}{۲}\right)}{۲} = \frac{t^۲}{۴} - \frac{۷}{۲}t + \frac{۴۹}{۴}$$

بنابراین شکل موج پاسخ حالت صفر $v(t)$ بصورت زیر خواهد بود.



مسئله ۲۹

پاسخ پله مداری داده شده است. پاسخ حالت صفر را برای ورودی $i_s(t)$ بدست آورید.



شکل مسئله ۲۹

حل : می توان نوشت.

$$i_s(t)=\frac{1}{2}t\big(u(t)-u(t-2)\big)+\big(-2t+10\big)\big(u(t-2)-u(t-5)\big)$$

$$=\frac{1}{2}tu(t)-\frac{5}{2}(t-2)u(t-2)-2(t-5)u(t-5)=\frac{1}{2}r(t)-\frac{5}{2}r(t-2)-2r(t-5)$$

با فرض اینکه مدار خطی و تغییر ناپذیر با زمان باشد پاسخ به ازای ورودی $i_s(t)$ برابر مجموع پاسخ به ازای سه تابع شیب است همچنین پاسخ شیب برابر انتگرال پاسخ پله می باشد بنابراین داریم.

$$s(t)=\begin{cases}1 & , \ 0\le t\le 1\\ -1 & , \ 1\le t\le 2\end{cases} \rightarrow \text{پاسخ شیب واحد}=v_1(t)=\begin{cases}t & , \ 0\le t\le 1\\ -t+2 & , \ 1\le t\le 2\end{cases}$$

$$v(t)=\frac{1}{2}v_1(t)-\frac{5}{2}v_1(t-2)-2v_1(t-5)$$

$$\rightarrow \ v(t)=\begin{cases}0 & , \ t\le 0\\ \frac{1}{2}t & , \ 0\le t\le 1\\ -\frac{1}{2}t+1 & , \ 1\le t\le 2\\ 0 & , \ 2\le t\le 4\\ -\frac{5}{2}(t-2)=-\frac{5}{2}t+10 & , \ 4\le t\le 5\\ -\frac{5}{2}\big(-(t-2)+2\big)-2(t-5)=\frac{1}{2}t-5 & , \ 5\le t\le 6\\ -2\big(-(t-5)+2\big)=2t-14 & , \ 6\le t\le 7\\ 0 & , \ t\ge 7\end{cases}$$

مسئله ۳۰

ورودی یک مدار خطی تغییر ناپذیر با زمان و پاسخ ضربه آن داده شده اند از پاسخ حالت صفر را :

الف- بدون استفاده از کانولوشن حساب کنید.

ب- با استفاده از کانولوشن حساب کنید.

شکل ۳۰-۳

حل : الف ــ می توان نوشت.

$$i_s(t)=(2-t)\big(u(t)-u(t-2)\big)=2u(t)-tu(t)+(t-2)u(t-2)=2u(t)-r(t)+r(t-2)$$

از آنجا که مدار خطی و تغییر ناپذیر با زمان است لذا با انتگرال گیری های متوالی می توان پاسخ پله و پاسخ ضربه را بدست آورد.

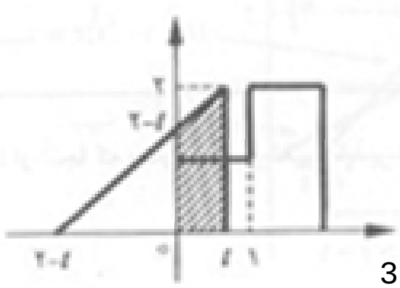
$$h(t)=\begin{cases}0 & , \; t<0\\ 1 & , \; 0<t<1\\ 2 & , \; 1<t<2\\ 0 & , \; t>2\end{cases} \quad \rightarrow \quad s(t)=\begin{cases}0 & , \; t<0\\ t & , \; 0<t<1\\ 2t-1 & , \; 1<t<2\\ 0 & , \; t>2\end{cases}$$

$$\text{پاسخ شیب}=v_r(t)=\begin{cases}\dfrac{t^2}{2} & , \; 0<t<1\\ t^2-t+\dfrac{1}{2} & , \; 1<t<2\\ 3t-\dfrac{7}{2} & , \; t>2\end{cases}$$

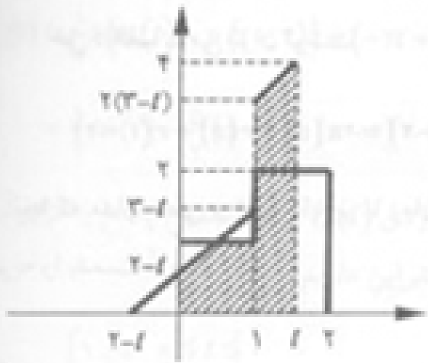
بنابراین اگر $v(t)$ پاسخ به ازای ورودی $i_s(t)$ باشد خواهیم داشت.

$$v(t)=2s(t)-v_r(t)+v_r(t-2)=\begin{cases}0 & , \; t<0\\ 2t-\dfrac{t^2}{2} & , \; 0<t<1\\ 2(2t-1)-\left(t^2-t+\dfrac{1}{2}\right)=-t^2+5t-\dfrac{5}{2} & , \; 1<t<2\\ 6-\left(3t-\dfrac{7}{2}\right)+\dfrac{(t-2)^2}{2}=\dfrac{t^2}{2}-5t+\dfrac{23}{2} & , \; 2<t<3\\ 6-\left(3t-\dfrac{7}{2}\right)+\left[(t-2)^2-(t-2)+\dfrac{1}{2}\right]=t^2-8t+16 & , \; 3<t<4\\ 6-\left(3t-\dfrac{7}{2}\right)+\left[3(t-2)-\dfrac{7}{2}\right]=0 & , \; t>4\end{cases}$$

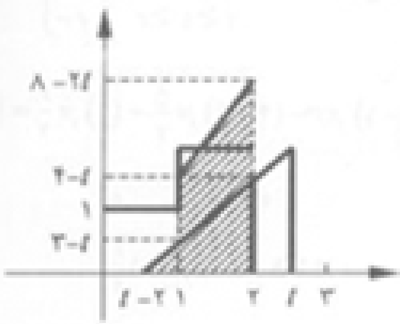
ب ــ با استفاده از کانولوشن و به روش ترسیمی $v(t)$ را بصورت زیر می توان بدست آورد.



$$0<t<1 \quad \rightarrow \quad v(t)=\left(\frac{2-t+2}{2}\right)(t)=2t-\frac{t^2}{2}$$



$$1 < t < 2 \rightarrow v(t) = \left(\frac{2-t+3-t}{2}\right)(1) + \left(\frac{6-2t+4}{2}\right)(t-1)$$
$$= -t^2 + 5t - \frac{5}{2}$$

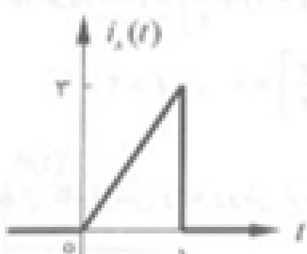


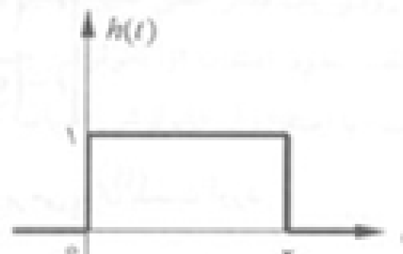
$$2 < t < 3 \rightarrow v(t) = \frac{\left((3-t)(1-(t-2)\right)}{2} + \left(\frac{4-t+8-2t}{2}\right)(1)$$
$$= \frac{t^2}{2} - 5t + \frac{23}{2}$$

$$3 < t < 4 \rightarrow v(t) = \frac{(8-2t)\left(2-(t-2)\right)}{2}$$
$$= t^2 - 8t + 16$$

مسئله ۳۱

پاسخ حالت صفر را بدست آورید. (مدار خطی و تغییر ناپذیر با زمان است.)





شکل مسئله ۳۱

حل : از آنجا که مدار خطی و تغییر ناپذیر است می توان نوشت.

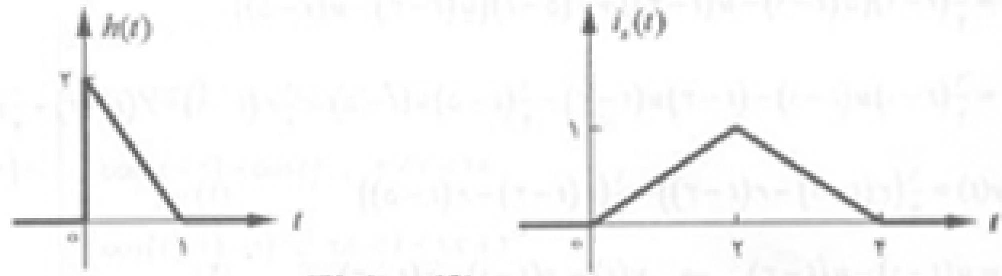
$$i_s(t) = 2t\big(u(t)-u(t-1)\big) = 2tu(t) - 2(t-1)u(t-1) - 2u(t-1) = 2r(t) - 2r(t-1) - 2u(t-1)$$

$$h(t) = \begin{cases} 0 \ , \ t<0 \\ 1 \ , \ 0<t<2 \\ 0 \ , \ t>0 \end{cases} \rightarrow s(t) = \begin{cases} 0 \ , \ t<0 \\ t \ , \ 0<t<2 \\ 2 \ , \ t>2 \end{cases} \rightarrow \text{پاسخ شیب} = v_1(t) = \begin{cases} 0 \ , \ t<0 \\ \dfrac{t^2}{2} \ , \ 0<t<2 \\ 2t-2 \ , \ t>2 \end{cases}$$

$$v(t) = 2v_1(t) - 2v_1(t-1) - 2s(t-1) = \begin{cases} 0 \ , \ t\leq 0 \\ 2\dfrac{t^2}{2} \ , \ 0\leq t<1 \\ 2\dfrac{t^2}{2} - 2\dfrac{(t-1)^2}{2} - 2(t-1) = \dfrac{3}{2} \ , \ 1<t<2 \\ 2(2t-2) - 2\dfrac{(t-1)^2}{2} - 2(t-1) = -\dfrac{3}{2}t^2 + 6t - \dfrac{9}{2} \ , 2<t<3 \\ 2(2t-2) - 2\big(2(t-1)-2\big) - 2(2) = 0 \ , \ t>3 \end{cases}$$

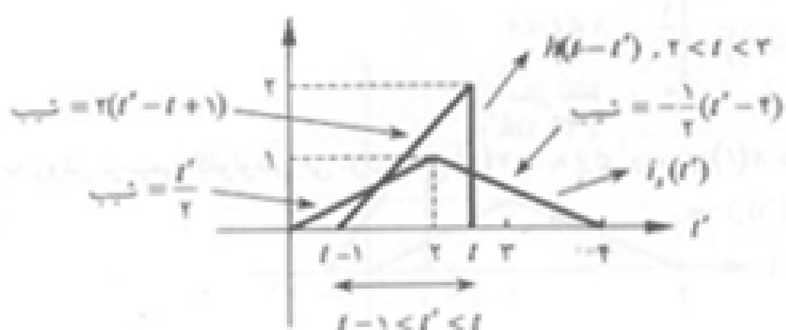
مسئله ۳۲

پاسخ حالت صفر را در فاصله $2 \leq t \leq 3$ تعیین کنید.(مدار خطی و تغییر ناپذیر با زمان است).



شکل مسئله ۳۲

حل : با بکار گیری انتگرال کانولوشن و با استفاده از روش ترسیمی داریم.



$$۲ < t < ۳ \quad \rightarrow \quad v(t) = i_s(t) * h(t) = \int_{t-۱}^{t} i_s(t')h(t-t')dt'$$

$$\rightarrow \quad v(t) = \int_{t-۱}^{۱} \frac{۱}{۲}t'\left(۲-۲(t-t')\right)dt' + \int_{۱}^{t}\left(۲-\frac{۱}{۲}t'\right)\left(۲-۲(t-t')\right)dt' = \frac{t^۳}{۳} - ۳t^۲ + \frac{۱۷}{۲}t - \frac{۴۱}{۶}$$

مسئله ۳۳

الف- در یک مدار خطی و تغییرناپذیر با زمان برای ورودی $x(t)$ پاسخ حالت صفر $y(t)$ حاصل شده است. پاسخ را برای $x(t) = \begin{cases} \sin t & , \ ۰ \le t \le ۲\pi \\ ۰ & \text{سایر مقادیر} \end{cases}$ بدست آورید.

ب- کانولوشن $x(t)$ و $y(t)$ را تعیین کنید.

شکل مسئله ۳۳

حل : الف ـ با توجه به شکل مسئله می توان نوشت.

$$y(t) = \frac{۱}{۲}(t-۱)\left(u(t-۱)-u(t-۳)\right) + \frac{۱}{۲}(۵-t)\left(u(t-۳)-u(t-۵)\right)$$

$$= \frac{۱}{۲}(t-۱)u(t-۱) - (t-۳)u(t-۳) - \frac{۱}{۲}(t-۵)u(t-۵) = \frac{۱}{۲}r(t-۱) - r(t-۳) + \frac{۱}{۲}r(t-۵)$$

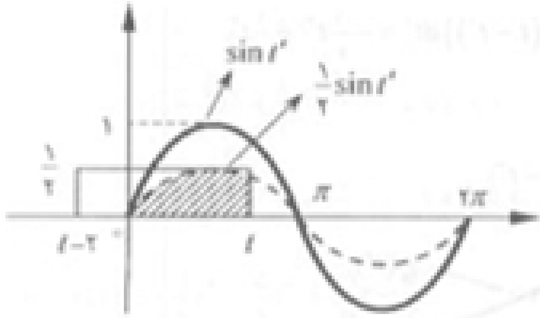
$$\rightarrow \quad y(t) = \frac{۱}{۲}\left(r(t-۱)-r(t-۳)\right) - \frac{۱}{۲}\left(r(t-۳)-r(t-۵)\right) \qquad (۱)$$

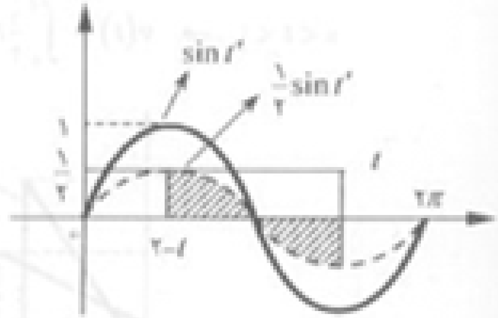
$$x(t) = u(t-۱) - u(t-۳) \quad \rightarrow \quad y(t) = s(t-۱) - s(t-۳) \qquad (۲)$$

$$(۱) \text{ و } (۲) \quad \rightarrow \quad s(t-۱) = \frac{۱}{۲}\left(r(t-۱)-r(t-۳)\right) \quad \rightarrow \quad h(t-۱) = \frac{۱}{۲}\left(u(t-۱)-u(t-۳)\right)$$

$$\rightarrow \quad h(t) = \frac{۱}{۲}\left(u(t)-u(t-۲)\right) = \begin{cases} \frac{۱}{۲} & , \ ۱ < t < ۲ \\ ۰ & , \ \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

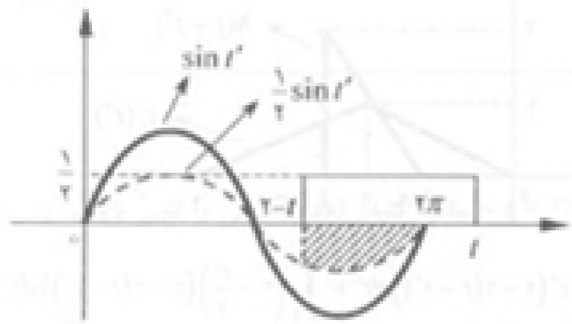
بنابراین به روش ترسیمی کانولوشن می توان پاسخ $v(t)$ را به ازای ورودی $x(t)$ داده شده بدست آورد.





$$0 < t < 2 \rightarrow v(t) = \int_0^t \frac{1}{2}\sin t'dt' = \frac{1}{2}(1-\cos t)$$

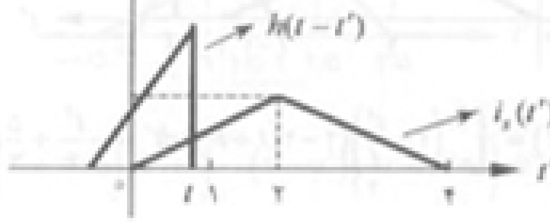
$$2 < t < 2\pi \rightarrow v(t) = \int_{t-2}^t \frac{1}{2}\sin t'dt' = \frac{1}{2}\left(\cos(t-2)-\cos t\right)$$



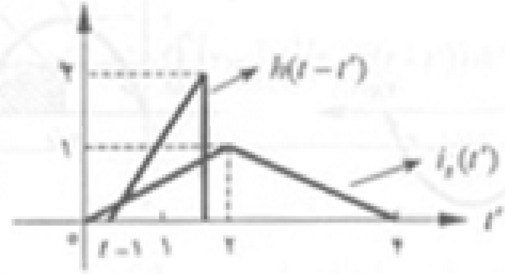
$$2\pi < t < 2+2\pi \rightarrow v(t) = \int_{t-2}^{2\pi} \frac{1}{2}\sin t'dt' = \frac{1}{2}\left(\cos(t-2)-1\right)$$

$$\rightarrow v(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t < 0 \\ \frac{1}{2}(1-\cos t) & , \quad 0 < t < 2 \\ \frac{1}{2}\left(\cos(t-2)-\cos t\right) & , \quad 2 < t < 2\pi \\ \frac{1}{2}\left(\cos(t-2)-1\right) & , \quad 2\pi < t < 2\pi+2 \\ 0 & , \quad t > 2\pi+2 \end{cases}$$

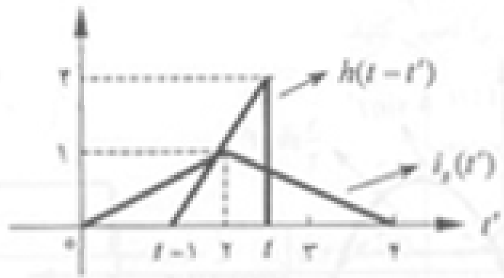
ب ـ با توجه به رابطه $v(t)=h(t)*i_s(t)=\int_0^t i_s(t')h(t-t')dt'$ و با توجه به شکل های زیر داریم.



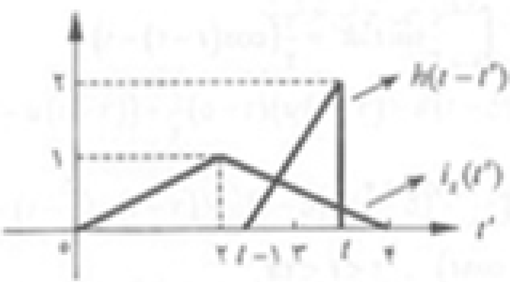
$$0<t<1 \;\rightarrow\; v(t)=\int_0^t \frac{1}{2}t'\left(2-2\left(t-t'\right)\right)dt' = -\frac{1}{6}t^3+\frac{1}{2}t^2$$



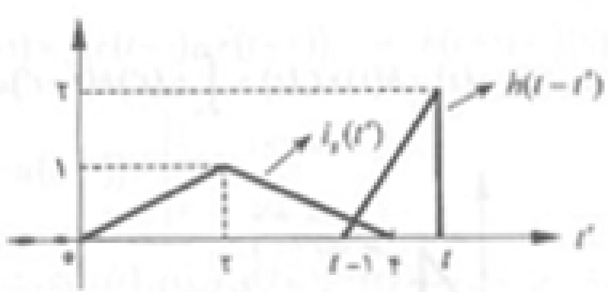
$$1<t<2 \;\rightarrow\; v(t)=\int_{t-1}^t \frac{1}{2}t'\left(2-2\left(t-t'\right)\right)dt' = \frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}t+\frac{1}{3}$$



$$2<t<3 \;\rightarrow\; v(t)=\int_{t-1}^2 \frac{1}{2}t'\left(2-2\left(t-t'\right)\right)dt' + \int_2^t\left(2-\frac{t'}{2}\right)\left(2-2\left(t-t'\right)\right)dt' = \frac{1}{6}t^3-\frac{5}{2}t^2+\frac{11}{2}t-\frac{7}{3}$$



$$3<t<4 \;\rightarrow\; v(t)=\int_{t-1}^t \left(2-\frac{t'}{2}\right)\left(2-2\left(t-t'\right)\right)dt' = -\frac{t}{2}+\frac{1}{6}$$



$$4<t<5 \;\rightarrow\; v(t)=\int_{t-1}^4 \left(2-\frac{t'}{2}\right)\left(2-2\left(t-t'\right)\right)dt' = -\frac{t^3}{6}+\frac{5}{2}t^2-\frac{15}{2}t+\frac{113}{6}$$

$$\rightarrow \quad v(t)=\begin{cases} ۰ \ , & t<۰ \\ -\frac{۱}{۶}t^{۳}+\frac{۱}{۲}t^{۲} \ , & ۰<t<۱ \\ -\frac{۱}{۲}t^{۲}-\frac{۱}{۲}t+\frac{۱}{۳} \ , & ۱<t<۲ \\ \frac{۱}{۶}t^{۳}-\frac{۵}{۳}t^{۲}+\frac{۱۱}{۲}t-\frac{۷}{۳} \ , & ۲<t<۳ \\ -\frac{t}{۲}+\frac{۱}{۶} \ , & ۳<t<۴ \\ -\frac{۱}{۶}t^{۳}+\frac{۵}{۲}t^{۲}-\frac{۱۵}{۲}t+\frac{۱۱۳}{۶} \ , & ۴<t<۵ \\ ۰ \ , & t>۵ \end{cases}$$

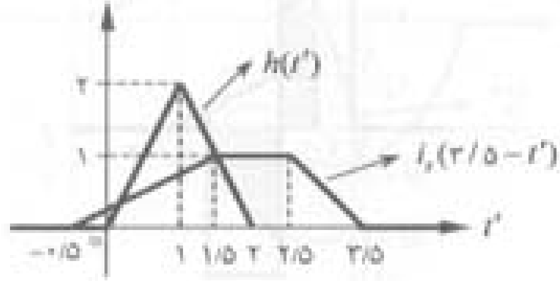
مسئله ۳۴

پاسخ حالت صفر را در $t=۳/۵$ حساب کنید. (مدار خطی و تغییر ناپذیر با زمان است).

شکل مسئله ۳٤

حل: با توجه به رابطه انتگرال کانولوشن داریم.

$$v(t)=i_s(t)*h(t)=\int_{۰}^{t}h(t')i_s(t-t')dt' \ \rightarrow \ v(۳/۵)=\int_{۰}^{۳/۵}h(t')i_s(۳/۵-t')dt'$$



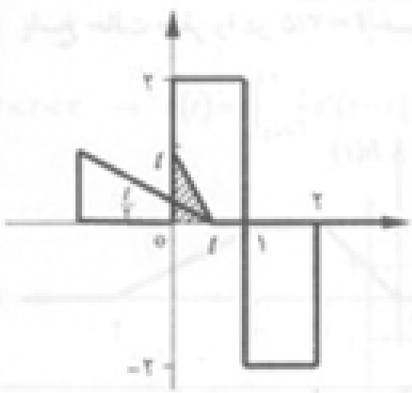
$$\rightarrow v(۳/۵)=\int_{۰}^{۱}۲t'\left(\frac{۱}{۲}t'+۰/۲۵\right)dt'+\int_{۱}^{۱/۵}(۴-۲t')\left(\frac{۱}{۲}t'+۰/۲۵\right)dt'+\int_{۱/۵}^{۲}(۴-۲t')dt'=۱/۲۷۹V$$

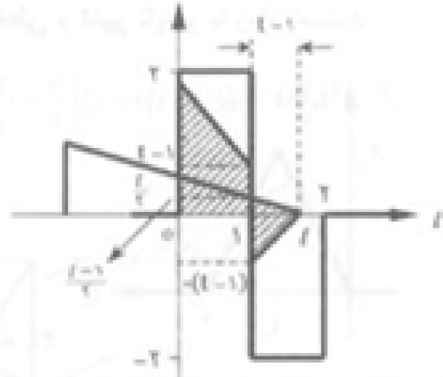
مسئله ۳۵

با استفاده از کانولوشن پاسخ حالت صفر را برای ورودی $i_s(t)$ تعیین و رسم کنید.

شکل مسئله ۳۵

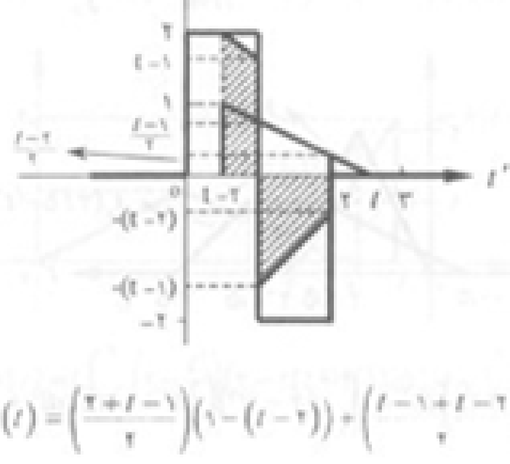
حل : با فرض خطی و تغییر ناپذیر بودن مدار و با استفاده از روش ترسیمی داریم.



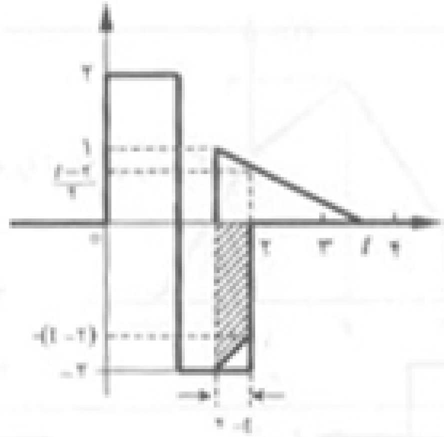


$$0 < t < 1 \rightarrow v(t) = \frac{t \times t}{2} = \frac{t^2}{2}$$

$$1 < t < 2 \rightarrow v(t) = \left(\frac{t-1+t}{2}\right)(1) + \frac{(t-1)(t-1)}{2} = -\frac{t^2}{2} + 2t - 1$$



$$2 < t < 3 \rightarrow v(t) = \left(\frac{2+t-1}{2}\right)\left(1-(t-2)\right) + \left(\frac{t-1+t-2}{2}\right)(0) = -\frac{t^2}{2} + \frac{3}{2}$$

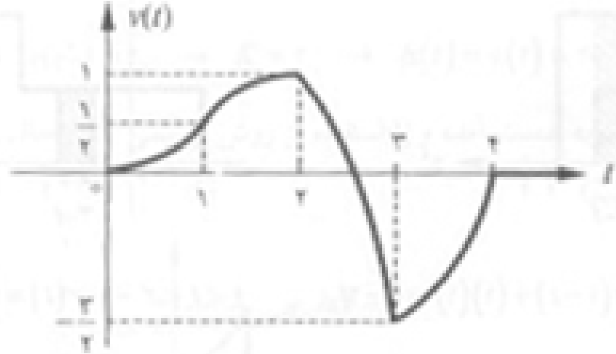


$$۳ < t < ۴ \rightarrow v(t) = -\left(\frac{t-۴+۲}{۲}\right)(۴-t) = \frac{t^2}{۲} - ۲t$$

بنابراین پاسخ حالت صفر $v(t)$ بصورت زیر می باشد.

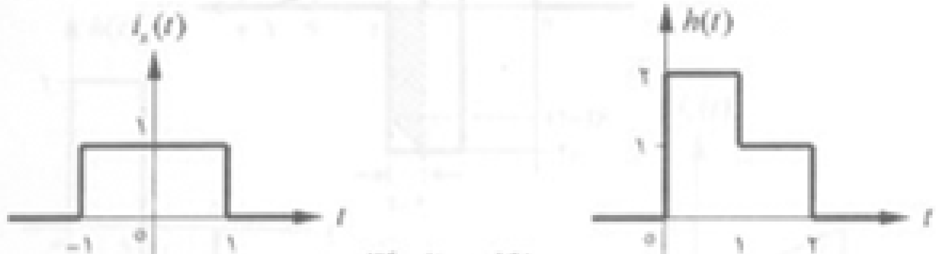
$$\rightarrow v(t) = \begin{cases} ۰ \ , & t < ۰ \\ \frac{t^2}{۴} \ , & ۰ < t < ۱ \\ -\frac{t^2}{۴} + ۲t - ۱ \ , & ۱ < t < ۲ \\ -\frac{t^2}{۲} + ۳ \ , & ۲ < t < ۳ \\ \frac{t^2}{۲} - ۲t \ , & ۳ < t < ۴ \\ ۰ \ , & t > ۴ \end{cases}$$

نمودار $v(t)$ در شکل زیر رسم شده است.



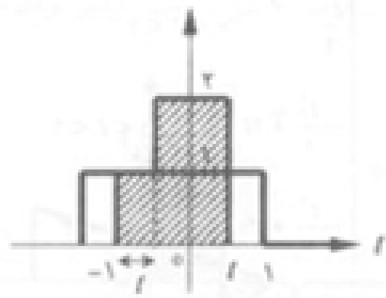
مسئله ۳۶

کانولوشن دو سیگنال داده شده را تعیین و رسم کنید.

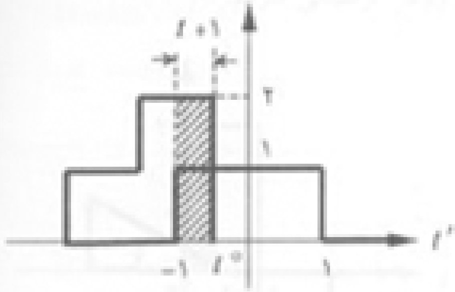


شکل مسئله ۳۶

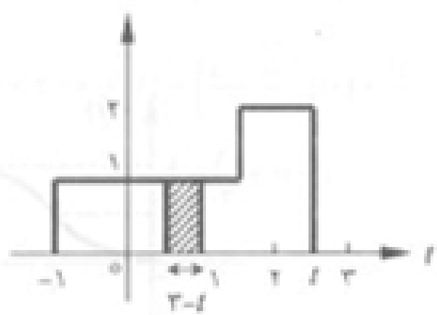
حل : با فرض $v(t) = i_s(t) * h(t)$ و خطی وتغییر ناپذیر بودن دو سیگنال و با استفاده از روش ترسیمی داریم.



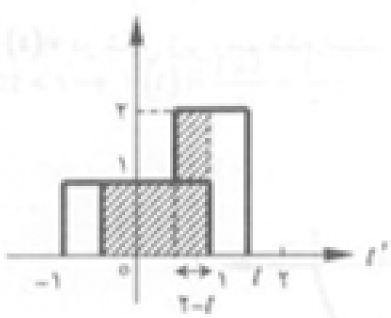
$$0 < t < 1 \rightarrow v(t) = (1)(t) + (1)(2) = t + 2$$



$$-1 < t < 0 \rightarrow v(t) = 2(t+1) = 2t + 2$$



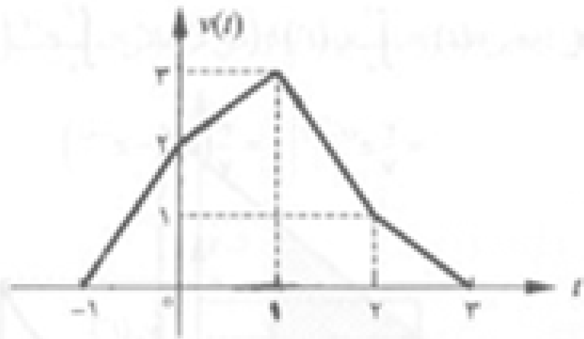
$$2 < t < 3 \rightarrow v(t) = (3-t)(1) = 3 - t$$



$$1 < t < 2 \rightarrow v(t) = 2(2-t) + (1)(1) = 5 - 2t$$

بنابراین کانولوشن دو سیگنال $h(t)$ و $i_s(t)$ بصورت زیر خواهد بود که آن را رسم کرده ایم.

$$\rightarrow \quad v(t)=\begin{cases} 0 & , \quad t<0 \\ 2t+2 & , \quad -1<t<0 \\ t+2 & , \quad 0<t<1 \\ 5-2t & , \quad 1<t<2 \\ 3-t & , \quad 2<t<3 \\ 0 & , \quad t>3 \end{cases}$$

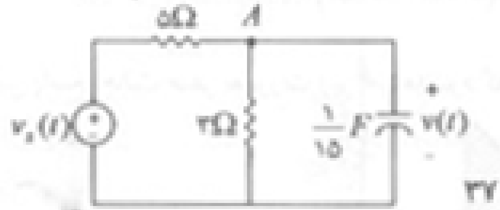


مسئله ۳۷

الف- پاسخ ضربه مدار را تعیین کنید.

ب- با استفاده از انتگرال کانولوشن پاسخ حالت صفر را به ورودی زیر تعیین و رسم کنید.

$$v_s(t)=e^{-t}\left(u(t)-u(t-2)\right)$$



شکل مسئله ۳۷

حل : الف- با توجه به شکل مدار $v=v_A$ بوده و خواهیم داشت.

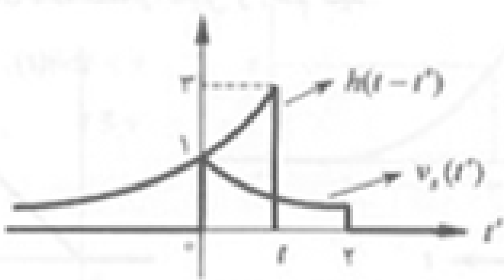
$$KCL \text{ برای گره } A \rightarrow \quad \frac{v-v_s}{5}+\frac{v}{3}+\frac{1}{15}\frac{dv}{dt}=0 \quad \rightarrow \quad \frac{dv}{dt}+8v=3v_s=3\delta(t)$$

معادله مشخصه: $s+8=0 \quad \rightarrow \quad s=-8 \quad \rightarrow \quad v(t)=Ke^{-8t}$

از آنجا که حالت اولیه صفر است لذا $v(0^-)=0$ بوده و با انتگرال گیری از معادله دیفرانسیل در فاصله 0^- تا 0^+ خواهیم داشت.

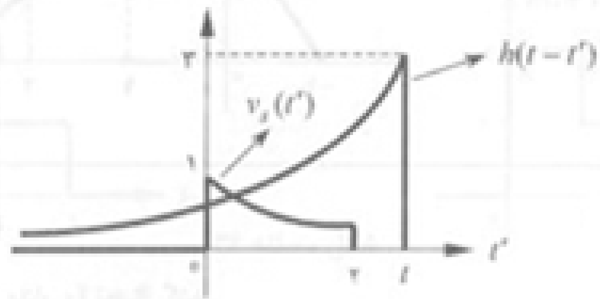
$$v(0^+)-v(0^-)+0=3 \quad \rightarrow \quad v(0^+)=3 \quad \rightarrow \quad K=3 \quad \rightarrow \quad h(t)=v(t)=3e^{-8t}, \ t>0$$

ب- با توجه به پاسخ ضربه بدست آمده و با استفاده از روش ترسیمی پاسخ حالت صفررا به ازای ورودی $v_s(t)$ داده شده محاسبه می کنیم.



$$0<t<2 \;\rightarrow\; v(t)=\int_0^t v_s(t')h(t-t')dt'=\int_0^t e^{-t'}\left(2e^{-8(t-t')}\right)dt'=\int_0^t 2e^{7t'-8t}dt'$$

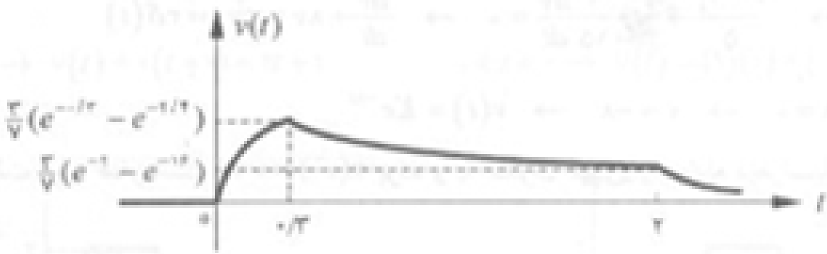
$$=\frac{2}{7}e^{7t'-8t}\Big|_0^t=\frac{2}{7}\left(e^{-t}-e^{-8t}\right)$$



$$t>2 \;\rightarrow\; v(t)=\int_0^2 2e^{7t'-8t}dt'=\frac{2}{7}e^{7t'-8t}\Big|_0^2=\frac{2}{7}\left(e^{14-8t}-e^{-8t}\right)$$

بنابراین پاسخ حالت صفر بصورت زیر خواهد بود که آن را رسم می کنیم.

$$\rightarrow\; v(t)=\begin{cases}0 & ,\; t<0\\ \frac{2}{7}\left(e^{-t}-e^{-8t}\right) & ,\; 0<t<2\\ \frac{2}{7}\left(e^{14-8t}-e^{-8t}\right) & ,\; t>2\end{cases}$$

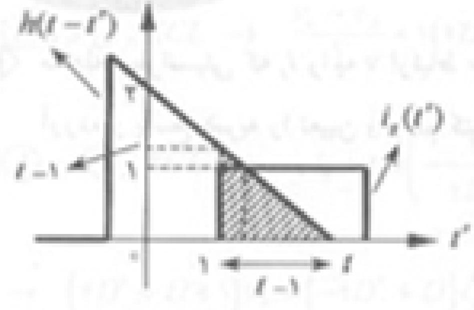


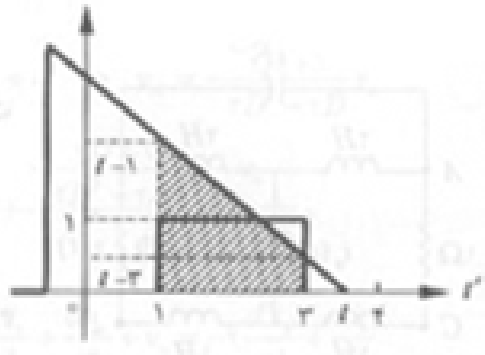
مسئله ۳۸

کانولوشن دو سیگنال داده شده را تعیین و رسم کنید.

شکل مسئله ۳۸

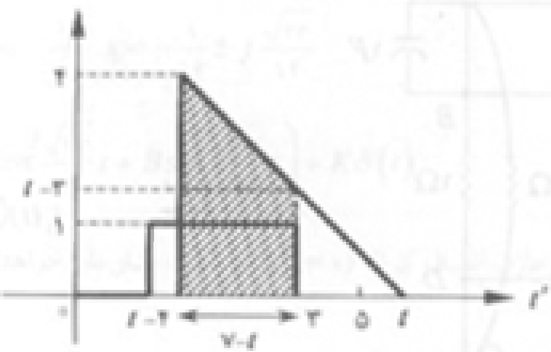
حل : بدین منظور با استفاده از روش ترسیمی به محاسبه کانولوشن در بازه های مختلف می پردازیم.





$$1 < t < 2 \rightarrow v(t) = \frac{(t-1)(t-1)}{2} = \frac{t^2}{2} - t + \frac{1}{2}$$

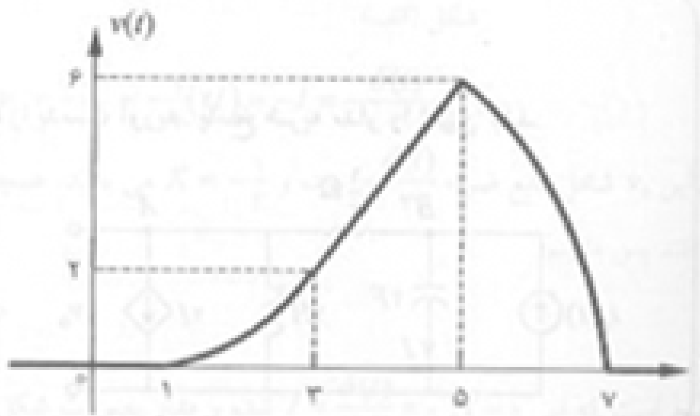
$$3 < t < 5 \rightarrow v(t) = \left(\frac{t-1+t+3}{2}\right)(3-1) = 4t - 4$$



$$5 < t < 7 \rightarrow v(t) = \left(\frac{t-3+4}{2}\right)(7-t) = -\frac{t^2}{2} + 3t + \frac{7}{2}$$

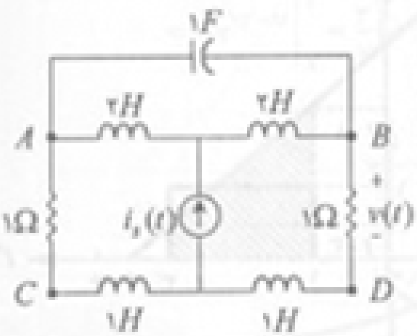
بنابراین کانولوشن دو تابع بصورت زیر خواهد بود که آن را رسم می کنیم.

$$v(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t < 1 \\ \frac{t^2}{2} - t + \frac{1}{2} & , \quad 1 < t < 3 \\ 4t - 4 & , \quad 3 < t < 5 \\ -\frac{t^2}{2} + 3t + \frac{7}{2} & , \quad 5 < t < 7 \\ 0 & , \quad t > 7 \end{cases}$$



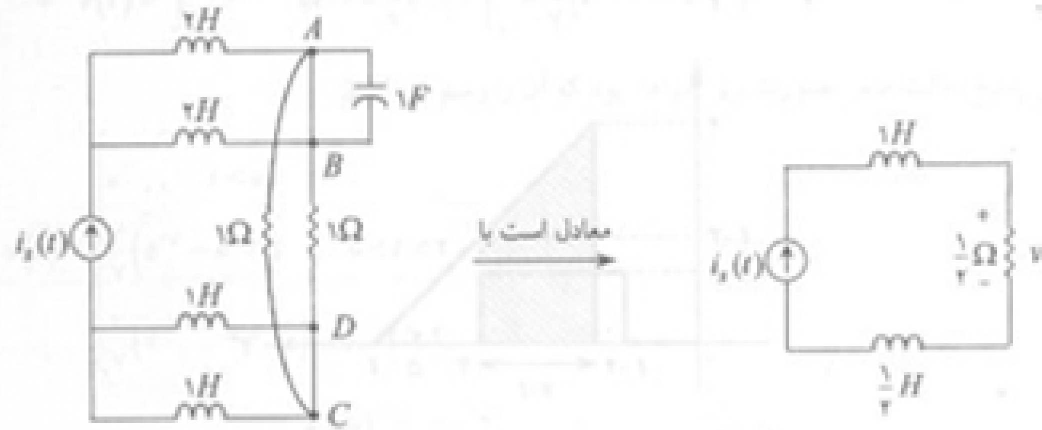
مسئله ۳۹

معادله دیفرانسیلی که i_s را به v ارتباط می دهد بدست آورده و پاسخ ضربه را تعیین و رسم کنید.



شکل مسئله ۳۹

حل : با توجه به تقارن مدار، نقاط B و A و همچنین D و C هم پتانسیل بوده ومدار را می توان بصورت زیر رسم کرد.

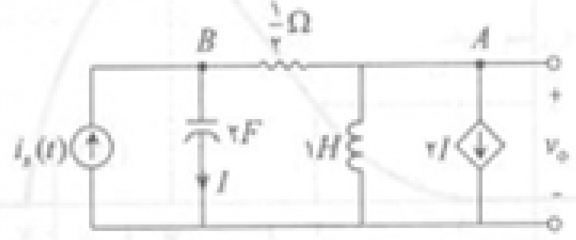


بنابراین داریم.

$$v(t)=\frac{1}{2}i_s(t) \quad \rightarrow \quad h(t)=v(t)\Big|_{i_s(t)=\delta(t)}=\frac{1}{2}\delta(t)$$

مسئله ۴۰

معادله دیفرانسیل ارتباط دهنده v_o به i_s را بدست آورید. پاسخ ضربه مدار را تعیین کنید.



شکل مسئله ۴۰

حل : با توجه به شکل مسئله و با بکارگیری نمایش اپراتوری معادلات انتگرال دیفرانسیل داریم.

$I = 2\frac{dv_A}{dt} = 2Dv_A \ , \ v_B = v_o$

$$\text{برای گره B} \ KCL \rightarrow \frac{v_o - v_A}{\frac{1}{2}} + 2(2Dv_A) + \frac{1}{D}v_o = 0 \rightarrow v_A = -\frac{2D+1}{4D^2-2D}v_o$$

$$\text{برای گره A} \ KCL \rightarrow -i_s + 2D\left(-\frac{2D+1}{4D^2-2D}v_o\right) + \frac{-\frac{2D+1}{4D^2-2D}v_o - v_o}{\frac{1}{2}} = 0$$

$$\rightarrow (6D^2+D+1)v_o = (-2D^2+D)i_s \rightarrow 6\frac{d^2v_o}{dt^2}+\frac{dv_o}{dt}+v_o = -2\frac{d^2 i_s}{dt^2}+\frac{di_s}{dt}$$

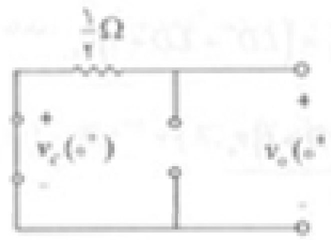
در ادامه با جایگذاری $i_s(t)=\delta(t)$ پاسخ ضربه را بدست خواهیم آورد.

$$6\frac{d^2v_o}{dt^2}+\frac{dv_o}{dt}+v_o = -2\delta^{(2)}(t)+\delta^{(1)}(t)$$

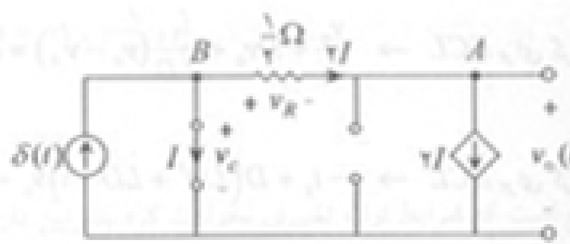
معادله مشخصه: $6s^2+s+1=0 \rightarrow s=-\frac{1}{12}\pm j\frac{\sqrt{23}}{12}$

$$\rightarrow v_o(t) = u(t)e^{-\frac{t}{12}}\left(A\cos\frac{\sqrt{23}}{12}t + B\sin\frac{\sqrt{23}}{12}t\right)+K\delta(t)$$

مطابق شکل (الف) در $t=0$ خازن اتصال کوتاه ($v_c=0$) و سلف مدار باز خواهد بود و خواهیم داشت.



شکل (ب)



شکل (الف)

$$2I + I = \delta(t) \rightarrow I=\frac{\delta(t)}{3} \quad , \quad v_o = -v_R = -\frac{1}{2}(2I) = -I = -\frac{\delta(t)}{3}$$

بنابراین v_o شامل تابع ضربه $-\frac{\delta(t)}{3}$ بوده و $K=-\frac{1}{3}$ می باشد. همچنین جریان ضربه $I=\frac{\delta(t)}{3}$ از خازن عبور می کند پس داریم.

$$v_c(0^+) = v_c(0^-) + \frac{1}{2}\int_{0^-}^{0^+}\frac{\delta(t)}{3}dt = \frac{1}{6}V$$

واضح است که در $t=0^+$، $I=\frac{\delta(t)}{3}=0$ شده و مدار بصورت شکل (ب) می باشد پس داریم.

$$v_o(0^+)=v_c(0^+)=\frac{1}{6} \rightarrow A=\frac{1}{6}$$

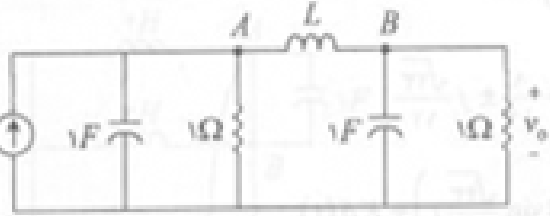
و با انتگرال گیری از معادله دیفرانسیل در فاصله 0^- تا 0^+، $\frac{dv_o(0^+)}{dt}$ را بدست خواهیم آورد.

$$\frac{dv_o(0^+)}{dt}+\frac{1}{6}=0 \rightarrow \frac{dv_o(0^+)}{dt}=-\frac{1}{6} \rightarrow -\frac{1}{12}A+\frac{\sqrt{23}}{12}B=-\frac{1}{6} \rightarrow B=-\frac{11}{6\sqrt{23}}$$

$$\rightarrow h(t)=v_o(t)=u(t)e^{-\frac{t}{12}}\left(\frac{1}{6}\cos\frac{\sqrt{23}}{12}t-\frac{11}{6\sqrt{23}}\sin\frac{\sqrt{23}}{12}t\right)-\frac{\delta(t)}{3}$$

مسئله ۴۱

معادله دیفرانسیل ارتباط دهنده i_s و v_o را بنویسید. برای $L=4H$ و $L=8H$ پاسخ ضربه مدار را تعیین کنید.



شکل مسئله ۴۱

حل : با توجه به شکل مسئله و با بکارگیری نمایش اپراتوری معادلات انتگرال- دیفرانسیل داریم.

Ⓑ KCL برای گره $\rightarrow \frac{v_o}{1}+Dv_o+\frac{1}{LD}(v_o-v_A)=0 \rightarrow v_A=(LD^2+LD+1)v_o$

Ⓐ KCL برای گره $\rightarrow -i_s+D(LD^2+LD+1)v_o+\frac{(LD^2+LD+1)v_o}{1}$

$$+\frac{1}{LD}\left((LD^2+LD+1)v_o-v_o\right)=0$$

$$\rightarrow (LD^3+2LD^2+(L+2)D+2)v_o=i_s \rightarrow L\frac{d^3v_o}{dt^3}+2L\frac{d^2v_o}{dt^2}+(L+2)\frac{dv_o}{dt}+2v_o=i_s$$

حال به ازای $L=4H$ و $i_s(t)=\delta(t)$ پاسخ ضربه را بدست می آوریم.

$$4\frac{d^3v_o}{dt^3}+8\frac{d^2v_o}{dt^2}+6\frac{dv_o}{dt}+2v_o=\delta(t)$$

معادله مشخصه : $4s^3+8s^2+6s+2=0 \rightarrow s=-1,\ -\frac{1}{2}\pm j\frac{1}{2}$

$$\rightarrow v_o(t)=K_1e^{-t}+e^{-\frac{1}{2}t}\left(K_2\cos\frac{1}{2}t+K_3\sin\frac{1}{2}t\right),\ t>0$$

در $t = 0^+$ خازنها اتصال کوتاه و سلف مدار باز است بنابراین داریم.

$$v_o(0^+) = \frac{dv_o(0^+)}{dt} = 0$$

همچنین با انتگرال گیری از معادله دیفرانسیل در فاصله 0^- تا 0^+ خواهیم داشت.

$$2\frac{d^2v_o(0^+)}{dt^2} = 1 \rightarrow \frac{d^2v_o(0^+)}{dt^2} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} v_o(0^+) = 0 & \rightarrow K_1 + K_2 = 0 \\ \dfrac{dv_o(0^+)}{dt} = 0 & \rightarrow K_1 - \frac{1}{2}K_2 + \frac{1}{2}K_3 = 0 \\ \dfrac{d^2v_o(0^+)}{dt^2} = \frac{1}{2} & \rightarrow K_1 - \frac{1}{2}K_3 = \frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} K_1 = \frac{1}{2} \\ K_2 = -\frac{1}{2} \\ K_3 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\rightarrow v_o(t) = \frac{1}{2}e^{-t} + e^{-\frac{1}{2}t}\left(-\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}t\right), \ t > 0$$

در ادامه به ازای $L = 8H$ و $i_s(t) = \delta(t)$ پاسخ ضربه را بدست خواهیم آورد.

$$8\frac{d^3v_o}{dt^3} + 16\frac{d^2v_o}{dt^2} + 10\frac{dv_o}{dt} + 2v_o = \delta(t)$$

معادله مشخصه : $8s^3 + 16s^2 + 10s + 2 = 0 \rightarrow s = -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$

$$\rightarrow v_o(t) = K_1e^{-t} + (K_2 + K_3t)e^{-\frac{1}{2}t}, \ t > 0$$

واضح است که شرایط اولیه تغییری نخواهند کرد بنابراین داریم.

$$\begin{cases} v_o(0^+) = 0 & \rightarrow K_1 + K_2 = 0 \\ \dfrac{dv_o(0^+)}{dt} = 0 & \rightarrow -K_1 - \frac{1}{2}K_2 + K_3 = 0 \\ \dfrac{d^2v_o(0^+)}{dt^2} = \frac{1}{2} & \rightarrow K_1 + \frac{1}{2}K_2 - \frac{1}{2}K_3 = \frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} K_1 = \frac{2}{5} \\ K_2 = -\frac{2}{5} \\ K_3 = \frac{1}{5} \end{cases}$$

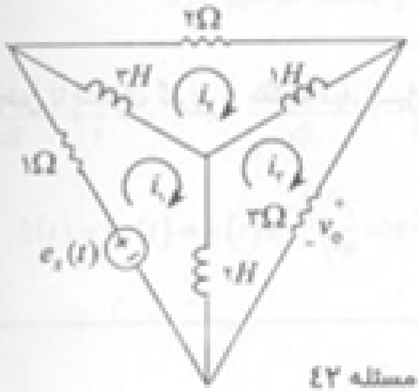
$$\rightarrow h(t) = v_o(t) = \frac{2}{5}e^{-t} + \left(-\frac{2}{5} + \frac{1}{5}t\right)e^{-\frac{1}{2}t}, \ t > 0$$

مسئله ۴۲

الف- معادله دیفرانسیلی بنویسید که e_s را به v_o ارتباط دهد. پاسخ ضربه v_o را حساب کنید.

ب- معادلات حالت این مدار را بنویسید.

(توجه کنید که فقط دو متغیر حالت مستقل وجود دارد)



شکل مسئله ۴۲

حل: الف - با توجه به شکل مسئله و با بکارگیری نمایش اپراتوری معادلات دیفرانسیل داریم.

KVL برای مش ۳ $\rightarrow\quad -2D(i_3 - i_1) + D(i_3 - i_2) + 3i_3 = 0$

KVL برای مش ۲ $\rightarrow\quad 3D(i_2 - i_1) + 2i_2 + D(i_2 - i_3) = 0$

KVL برای حلقه بیرونی $\rightarrow\quad -e_s + i_1 + 2i_2 + 3i_3 = 0$

$$\rightarrow \begin{cases} -2Di_1 + Di_2 + (3D+3)i_3 = 0 \\ -3Di_1 + (4D+2)i_2 - Di_3 = 0 \\ i_1 + 2i_2 + 3i_3 = e_s \end{cases} \rightarrow\quad v_o = 3i_3 = 3\frac{\begin{vmatrix} -2D & -2D & 0 \\ -3D & 4D+2 & 0 \\ 1 & 2 & e_s \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2D & -D & 3D+3 \\ -3D & 4D+2 & -D \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{11D^2 + 4D}{22D^2 + 16D + 2}$$

$$\rightarrow (22D^2 + 16D + 2)V_o = (11D^2 + 4D)i_s \quad\rightarrow\quad 22\frac{d^2v_o}{dt^2} + 16\frac{dv_o}{dt} + 2v_o = 11\frac{d^2i_s}{dt^2} + 4\frac{di_s}{dt}$$

با جایگذاری $i_s(t) = \delta(t)$ پاسخ ضربه v_o را می توان بصورت زیر یافت.

$$22\frac{d^2v_o}{dt^2} + 16\frac{dv_o}{dt} + 2v_o = 11\delta^{(2)}(t) + 4\delta^{(1)}(t)$$

معادله مشخصه : $22s^2 + 16s + 2 = 0 \quad\rightarrow\quad s = \frac{-4 \pm \sqrt{5}}{11}$

$$\rightarrow\quad v_o(t) = \left(K_1 e^{-\frac{4+\sqrt{5}}{11}t} + K_2 e^{-\frac{4-\sqrt{5}}{11}t}\right) + K_3\delta(t)$$

مقادیر K_i ها را با جایگذاری v_o در معادله دیفرانسیل می توان بدست آورده و $v_o(t)$ را بصورت زیر نوشت.

$$v_o(t)=\left(-\frac{3+\sqrt{5}}{44}e^{-\frac{3+\sqrt{5}}{11}t}+\frac{3-\sqrt{5}}{44}e^{-\frac{3-\sqrt{5}}{11}t}\right)+\frac{1}{2}\delta(t)$$

ب ـ با توجه به معادله $i_1+2i_2+3i_3=e_s$ واضح است که سه متغیر جریان در نظر گرفته شده به هم وابسته اند بنابراین تنهاانتخاب دوتاازجریانهای فوق به عنوان متغیرحالت کافی خواهد بودباجایگذاری $i_1=-2i_2-3i_3+e_s$ در دو معادله دیگر داریم.

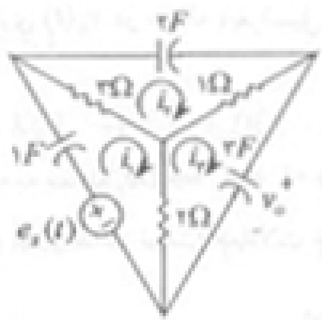
$$\begin{cases}10Di_2+8Di_3=-2i_2+3De_s\\3Di_2+9Di_3=-3i_3+2De_s\end{cases}\rightarrow\begin{cases}Di_2=-\frac{3}{11}i_2+\frac{2}{11}i_3+\frac{1}{6}De_s\\Di_3=\frac{1}{11}i_2-\frac{5}{11}i_3+\frac{1}{6}De_s\end{cases}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}\frac{di_2}{dt}\\\frac{di_3}{dt}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{3}{11}&\frac{2}{11}\\\frac{1}{11}&-\frac{5}{11}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_2\\i_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{6}&\frac{1}{6}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{de_s}{dt}\\\frac{de_s}{dt}\end{bmatrix}$$

مسئله ۴۳

الف- معادله دیفرانسیلی بنویسید که e_s را به v_o ارتباط دهد. پاسخ ضربه را حساب کنید.

ب- معادلات حالت این مدار را بنویسید.



شکل مسئله ۴۳

حل : الف- با توجه به شکل مسئله و با بکارگیری نمایش اپراتوری معادلات دیفرانسیل داریم.

برای حلقه بیرونی $KVL \rightarrow \frac{1}{D}i_1+\frac{1}{2D}i_2+\frac{1}{3D}i_3-e_s=0$

برای مش ۲ $KVL \rightarrow \frac{1}{2D}i_2+(i_2-i_3)+2(i_2-i_1)=0$

برای مش ۳ $KVL \rightarrow (i_3-i_2)+\frac{1}{3D}i_3+2(i_3-i_1)=0$

$$\rightarrow \begin{cases} 6i_1 + 3i_2 + 2i_3 = 6De_s \\ -6Di_1 + (8D+1)i_2 - 2Di_3 = 0 \\ -6Di_1 - 3Di_2 + (9D+1)\, i_3 = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow v_o = \frac{1}{3D} i_3 = \frac{1}{3D} = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 3 & 6De_s \\ -6D & 8D+1 & 0 \\ -6D & -3D & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 & 3 & 2 \\ -6D & 8D+1 & -2D \\ -6D & -3D & 9D+1 \end{vmatrix}} = \frac{22D^2+2}{103D^2+23D+3} e_s$$

$$\rightarrow (103D^2+23D+3)v_o = (22D^2+2)e_s \quad \rightarrow \quad 103\frac{d^2v_o}{dt^2} + 23\frac{dv_o}{dt} + 3v_o = 22\frac{d^2v_o}{dt^2} + 2\frac{dv_o}{dt}$$

حال با جایگذاری $e_s(t) = \delta(t)$ پاسخ ضربه را محاسبه خواهیم کرد.

$$\rightarrow 103\frac{d^2v_o}{dt^2} + 23\frac{dv_o}{dt} + 3v_o = 22\delta^{(2)}(t) + 2\delta(t)$$

معادله مشخصه: $103s^2 + 23s + 3 = 0 \quad \rightarrow \quad s = -0.11 \pm j0.13$

$$\rightarrow v_o(t) = \left(A\cos 0.13t + B\sin 0.13t\right)e^{-0.11t} + C\delta(t)$$

که با جایگذاری $v_o(t)$ در معادله دیفرانسیل و تعیین ضرایب مجهول، $v_o(t)$ بصورت زیر بدست می آید.

$$v_o(t) = \left(1.37\cos 0.13t - 0.61\sin 0.13t\right)e^{-0.11t} + 2.1\delta(t)$$

ب ـ با توجه به معادله $6i_1 + 3i_2 + 2i_3 = 6De_s$ که از معادلات KVL بدست آمد واضح است که جریانهای فوق به هم وابسته اند و لذا در نوشتن معادلات حالت فقط i_1 و i_2 را به عنوان متغیرهای حالت برمی گزینیم.

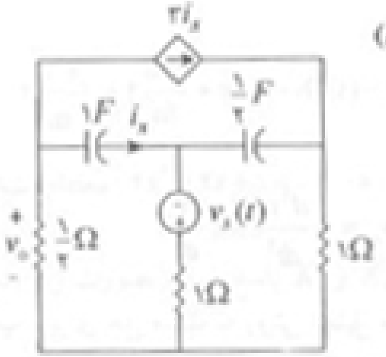
$$\begin{cases} 6i_1 + 3i_2 + 2i_3 = 6De_s \\ -6Di_1 + (8D+1)i_2 - 2Di_3 = 0 \\ -6Di_1 + 3Di_2 + (9D+1)i_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} Di_1 = -\frac{1}{11}i_1 + \frac{6D^2}{11}e_s \\ Di_2 = \frac{1}{11}i_1 - \frac{2}{121}i_2 - \frac{32}{33}De_s + \frac{1}{11}De_s \end{cases}$$

مسئله ۴۴

الف- معادله دیفرانسیل v_o بر حسب v_s را بنویسید. (تحلیل گره)

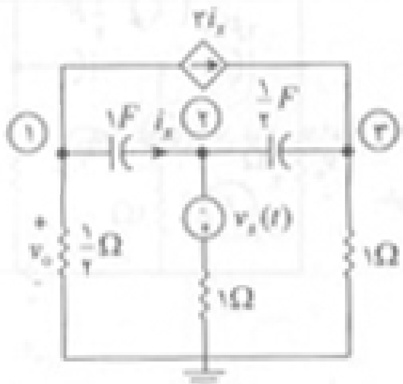
ب- معادله قسمت (الف) را با تحلیل مش بنویسید.

پ- پاسخ ضربه مدار را تعیین کنید.



شکل مسئله ٤٤

حل : الف ـ برای نوشتن معادلات گره شکل زیر را رسم کرده و از روش نمایش اپراتوری استفاده می کنیم.



$i_x = D(v_1 - v_2)$

① برای گره KCL $\rightarrow \quad \dfrac{v_1}{\frac{1}{2}} + D(v_1 - v_2) + 2D(v_1 - v_2) = 0$

② برای گره KCL $\rightarrow \quad -D(v_1 - v_2) + \dfrac{v_2 + v_s}{1} + \frac{1}{2}D(v_2 - v_3) = 0$

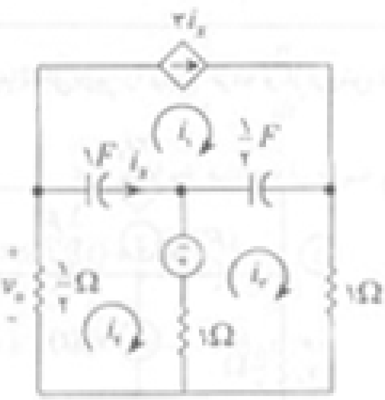
③ برای گره KCL $\rightarrow \quad \frac{1}{2}D(v_3 - v_2) + \dfrac{v_3}{1} - 2D(v_1 - v_2) = 0$

$$\rightarrow \begin{cases} (3D+2)v_1 - 3Dv_2 = 0 \\ 2Dv_1 - (3D+2)v_2 + Dv_3 = 2v_s \\ -4Dv_1 + 5Dv_2 + (D+2)v_3 = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow\quad v_o = v_c = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -2D & -2D \\ 2v_s & -3D-2 & D \\ 0 & 5D & D+2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4D+2 & -2D & 0 \\ 2D & -3D-2 & D \\ -6D & 5D & D+2 \end{vmatrix}} = \frac{-D^2-2D}{4D^2+4D+1}v_s$$

$$\rightarrow\quad (4D^2+4D+1)v_o = (-D^2-2D)v_s \;\rightarrow\; 4\frac{d^2v_o}{dt^2}+4\frac{dv_o}{dt}+v_o = -\frac{d^2v_s}{dt^2}-2\frac{dv_s}{dt}$$

ب - برای حل مسئله به روش تحلیل مش شکل زیر را رسم می کنیم.



با توجه به شکل فوق می توان نوشت.

$$i_x = i_2 - i_1 \;,\; i_x = i_3 - i_1 \;\rightarrow\; \frac{1}{3}i_1 = i_2 - i_1 \;\rightarrow\; 4i_1 - 3i_2 = 0$$

برای مش ۲ $KVL \;\rightarrow\; -\frac{1}{2}i_1 + \frac{1}{D}(i_2 - i_1) - v_s + (i_2 - i_3) = 0$

برای مش ۳ $KVL \;\rightarrow\; (i_3 - i_2) + v_s + \frac{2}{D}(i_3 - i_1) + i_3 = 0$

$$\rightarrow\quad \begin{cases} 4i_1 - 3i_2 = 0 \\ (D+2)\,i_1 - (3D+2)\,i_2 + 2D\,i_3 = -2Dv_s \\ 2Di_1 + Di_2 - (2D+2)\,i_3 = Dv_s \end{cases}$$

$$\rightarrow\quad v_o = -\frac{1}{2}i_1 = -\frac{1}{2} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -3 & 0 \\ -2Dv_s & -3D-2 & 2D \\ Dv_s & D & -2D-2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -3 & 0 \\ D+2 & -3D-2 & 2D \\ 2D & D & -2D-2 \end{vmatrix}} = \frac{-D^2-2D}{4D^2+4D+1}v_s$$

$$\rightarrow \quad 4\frac{d^2v_o}{dt^2}+4\frac{dv_o}{dt}+v_o=-\frac{d^2v_s}{dt^2}-2\frac{dv_s}{dt}$$

پ ـ برای محاسبه پاسخ ضربه با جایگذاری $v_s(t)=\delta(t)$ داریم.

$$\rightarrow \quad 4\frac{d^2v_o}{dt^2}+4\frac{dv_o}{dt}+v_o=-\delta''(t)-2\delta'(t)$$

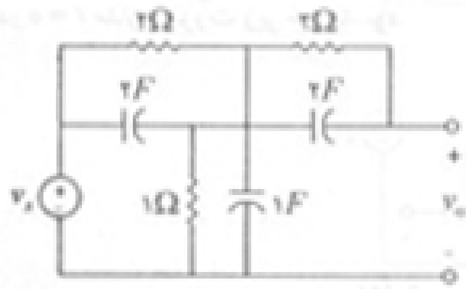
معادله مشخصه : $4s^2+4s+1=0 \quad \rightarrow \quad s=-\frac{1}{2}\,,\,-\frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad v_o(t)=\left(K_1+K_2t\right)e^{-\frac{1}{2}t}+K_3\delta(t)$

که با جایگذاری $v_o(t)$ در معادله دیفرانسیل و محاسبه ضرایب K_1 و K_2 و K_3 پاسخ ضربه بصورت زیر بدست خواهد آمد.

$$\rightarrow \quad v_o(t)=\left(1-\frac{3}{2}t\right)e^{-\frac{1}{2}t}-\frac{1}{4}\delta(t)$$

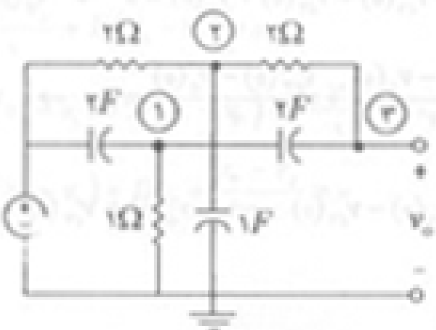
مسئله ۴۵

معادله دیفرانسیلی بنویسید که v_o را به v_s ارتباط دهد. پاسخ پله را حساب کنید.



شکل مسئله ۴۵

حل : از روش تحلیل گره استفاده می کنیم بدین منظور ابتدا شکل زیر را رسم خواهیم کرد.



$$\text{①}\ \text{KCL برای گره} \quad \rightarrow \quad 2D\left(v_1-v_s\right)+\frac{v_1}{1}+2D\left(v_1-v_3\right)=0$$

$$\text{②}\ \text{KCL برای گره} \quad \rightarrow \quad \frac{v_2-v_s}{2}+Dv_2+\frac{v_2-v_3}{2}=0$$

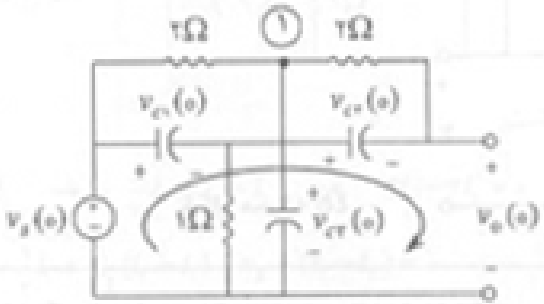
KCL برای گره ۲ $\rightarrow \quad 2D(v_2 - v_1) + \dfrac{v_2 - v_1}{2} = 0$

$$\rightarrow \begin{cases} (4D+1)v_1 - 2Dv_3 = 2Dv_s \\ (2D+2)v_2 - v_3 = v_s \\ 2Dv_1 + v_2 - (4D+1)v_3 = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \quad v_o = v_3 = \frac{\begin{vmatrix} 4D+1 & 0 & 2Dv_s \\ 0 & 2D+2 & v_s \\ v_s & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4D+1 & 0 & 2D \\ 0 & 2D+1 & -1 \\ 2D & 1 & -4D-1 \end{vmatrix}} = \frac{10D^3 + 16D^2 + 4D + 1}{16D^3 + 24D^2 + 6D} v_s$$

$$\rightarrow \quad 16\frac{d^3 v_o}{dt^3} + 24\frac{d^2 v_o}{dt^2} + 6\frac{dv_o}{dt} = 16\frac{d^2 v_s}{dt^2} + 4\frac{dv_s}{dt} + v_s$$

در $t = 0$ مدار بصورت زیر خواهد بود.

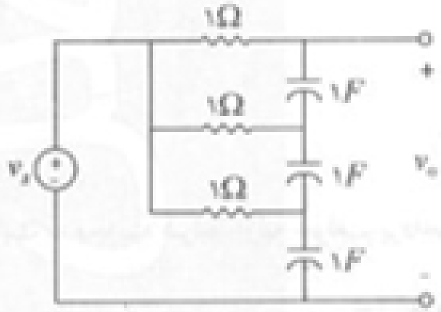


$$\begin{cases} \text{KVL برای حلقه ۱} \rightarrow -v_s(0) + v_{C1}(0) + v_{C2}(0) + v_o(0) = 0 \rightarrow v_o(0) = v_s(0) - v_{C1}(0) - v_{C2}(0) \\ \text{KCL برای گره ۱} \rightarrow \dfrac{v_{C3}(0) - v_s(0)}{2} + \dfrac{v_{C3}(0) - v_o(0)}{2} = 0 \rightarrow v_s(0) = 2v_{C3}(0) - v_o(0) \end{cases}$$

$$\rightarrow \quad v_o(0) = 2v_{C3}(0) - v_o(0) - v_{C1}(0) - v_{C2}(0) \quad \rightarrow \quad v_o(0) = v_{C3}(0) - \frac{v_{C1}(0) + v_{C2}(0)}{2}$$

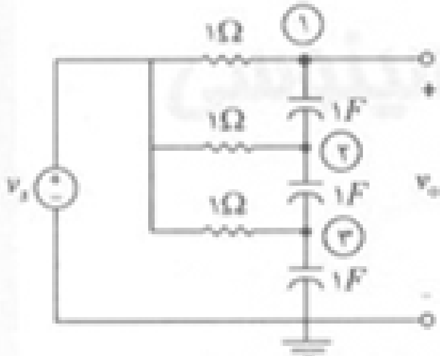
مسئله ۴۶

معادله دیفرانسیل v_o بر حسب v_s و شرایط اولیه را بر حسب شرایط اولیه خازنها مشخص کنید.



شکل مسئله ۴۶

حل : از روش تحلیل گره استفاده می کنیم.



با توجه به شکل فوق و با بکارگیری نمایش اپراتوری معادلات دیفرانسیل داریم.

$$\begin{cases} KCL \text{ برای گره } ① \rightarrow \dfrac{v_1 - v_s}{1} + D(v_1 - v_2) = 0 \\ KCL \text{ برای گره } ② \rightarrow D(v_2 - v_1) + D(v_2 - v_3) + \dfrac{v_2 - v_s}{1} = 0 \\ KCL \text{ برای گره } ③ \rightarrow D(v_3 - v_2) + Dv_3 + \dfrac{v_3 - v_s}{1} = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} (D+1)v_1 - Dv_2 = v_s \\ Dv_1 - (2D+1)v_2 + Dv_3 = -v_s \\ -Dv_2 + (2D+1)v_3 = v_s \end{cases}$$

$$\rightarrow \quad v_o = v_1 = \frac{\begin{vmatrix} v_s & -D & 0 \\ -v_s & -2D-1 & D \\ v_s & -D & 2D+1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} D+1 & -D & 0 \\ D & -2D-1 & D \\ 0 & -D & 2D+1 \end{vmatrix}} = \frac{6D^2+5D+1}{D^3+6D^2+5D+1}$$

$$\rightarrow \quad 2\frac{d^3 v_o}{dt^3} + 6\frac{d^2 v_o}{dt^2} + 5\frac{dv_o}{dt} + v_o = 6\frac{d^2 v_s}{dt^2} + 5\frac{dv_s}{dt} + v_s$$

و در نهایت به محاسبه شرایط اولیه خواهیم پرداخت. معادله درجه سوم است و لذا سه اولیه لازم است.

$$v_o = v_{c1} + v_{c2} + v_{c3} \quad \rightarrow \quad v_o(0) = v_{c1}(0) + v_{c2}(0) + v_{c3}(0)$$

مسئله ۱

فازورهای A و B را چنان تعیین کنید که

$$2A+5B=j10\left(1+\sqrt{3}\right)\ ,\ |B|=2\ ,\ |A|=5\sqrt{2}$$

حل: با توجه به مقادیر داده شده داریم.

$$A=A_m e^{j\theta}=5\sqrt{2}e^{j\theta}=5\sqrt{2}\left(\cos\theta+j\sin\theta\right)\ ,\ B=B_m e^{j\phi}=2e^{j\phi}=2\left(\cos\phi+j\sin\phi\right)$$

$$2A+5B=j10\left(1+\sqrt{3}\right)\ \rightarrow\ \left(10\sqrt{2}\cos\theta+10\cos\phi\right)+j\left(10\sqrt{2}\sin\theta+10\sin\phi\right)=j10\left(1+\sqrt{3}\right)$$

$$\rightarrow\begin{cases}10\sqrt{2}\cos\theta+10\cos\phi=0\\10\sqrt{2}\sin\theta+10\sin\phi=10\left(1+\sqrt{3}\right)\end{cases}\rightarrow\ \theta=\frac{3\pi}{4}\ ,\ \phi=\frac{\pi}{3}\ \rightarrow\ A=5\sqrt{2}e^{j\frac{3\pi}{4}}\ ,\ B=2e^{j\frac{\pi}{3}}$$

مسئله ۲

با استفاده از روش فازوری عبارتهای زیر را بصورت یک سیگنال سینوسی نمایش دهید.

الف ـ $x(t)=4\sin\left(2t+18^\circ\right)-3\cos\left(2t+45^\circ\right)+2\dfrac{d^2}{dt^2}\sin\left(2t-15^\circ\right)$

ب ـ $y(t)=\cos 2t+\cos\left(2t+120^\circ\right)+\cos\left(2t+240^\circ\right)$

حل: الف ـ هر کدام از سینوسی ها را بصورت فازور نمایش دهنده سینوسی نمایش می دهیم. با این کار داریم.

$$x(t)=\mathrm{Im}\left(4e^{j18}\cdot e^{j2t}\right)+\mathrm{Re}\left(-3e^{j45}\cdot e^{j2t}\right)+\mathrm{Im}\left(\frac{d^2}{dt^2}2e^{-j15}\cdot e^{j2t}\right)$$

$$=\mathrm{Re}\left(4e^{j18-j90}\cdot e^{j2t}\right)+\left(-3e^{j45}\cdot e^{j2t}\right)+\mathrm{Re}\left(\left(j2\right)^2\cdot 2e^{-j15-j90}\cdot e^{j2t}\right)$$

$$=\mathrm{Re}\left\{\left(4e^{-j72}-3e^{j45}-8e^{-j105}\right)e^{j2t}\right\}=\mathrm{Re}\left\{3.94e^{j66.98}\cdot e^{j2t}\right\}=3.94\cos\left(2t+66.98\right)$$

$$y(t)=\mathrm{Re}\left(e^{j2t}\right)+\mathrm{Re}\left(e^{j120}\cdot e^{j2t}\right)+\mathrm{Re}\left(e^{j240}\cdot e^{j2t}\right)=\mathrm{Re}\left\{\left(1+e^{j120}+e^{j240}\right)e^{j2t}\right\}$$

$$=\mathrm{Re}\left\{\left(0\right)e^{j2t}\right\}=0$$

مسئله ۳

پاسخ خصوصی معادلات دیفرانسیل زیر را به روش فازوری بدست آورید.

الف ـ $\frac{d^2 i}{dt^2}+\frac{di}{dt}+12i=12\cos 3t$

ب ـ $\frac{d^3 x}{dt^3}+2\frac{d^2 x}{dt^2}+\frac{dx}{dt}+6x=4\sin t-2\cos\left(t-27^\circ\right)+3\sin\left(2t+36^\circ\right)$

حل : الف ـ فرض کنیم پاسخ خصوصی بصورت $i_p(t)=A_m\cos(3t+\theta)$ باشد ، با جایگذاری فازور نمایش دهنده سینوسی ها در معادله دیفرانسیل داریم:(فازور سیگنال $i(t)$ را $\bar{A}$ در نظر می گیریم)

$$\frac{d}{dt}=j\omega \quad , \quad \frac{d^2}{dt^2}=\left(j\omega\right)^2 \quad , \quad \omega=3$$

$$\left(j3\right)^2 A+\left(j3\right)A+12A=12e^{j0} \rightarrow \left(3+3j\right)A=12e^{j0}$$

$$\rightarrow A=\frac{12e^{j0}}{3+3j}=\frac{12e^{j0}}{3\sqrt{2}e^{j45}}=\left(\frac{12}{3\sqrt{2}}\right)e^{j0-j45}=2\sqrt{2}e^{-j45} \rightarrow i_p\left(t\right)=2\sqrt{2}\cos\left(3t-45^\circ\right)$$

ب ـ طرف دوم معادله شامل دو فرکانس زاویه ای ۲ ، ۱ = ω می باشد که برای هر کدام از آنها پاسخ خصوصی مجزا در نظر گرفته و با جایگذاری فازور نمایش دهنده سینوسی ها در دو معادله دیفرانسیل برای دو فرکانس زاویه ای فوق خواهیم داشت.

$$\omega=1 \rightarrow \left(j\right)^3 A_1+2\left(j\right)^2 A_1+jA_1+6A_1=4e^{-j90^\circ}-2e^{-j27^\circ}$$

$$\left(-j-2+j+6\right)A_1=4\left(\cos 90-j\sin 90\right)-2\left(\cos 27-j\sin 27\right)=-5.78-j3.09$$

$$4A_1=6.56e^{-j151.9} \rightarrow A_1=1.64e^{-j151.9} \rightarrow i_{p1}\left(t\right)=1.64\cos\left(t-151.9\right)$$

$$\omega=2 \rightarrow \left(j2\right)^3 A_2+2\left(j2\right)^2 A_2+\left(j2\right)A_2+6A_2=3e^{j36-j90} \rightarrow \left(-2-6j\right)A_2=3e^{-j54}$$

$$\rightarrow A_2=\frac{3e^{-j54}}{6.32e^{-j108.43}}=\left(\frac{3}{6.32}\right)\left(e^{-j54+j108.43}\right)=0.47e^{j54.4}$$

$$\rightarrow i_{p2}\left(t\right)=0.47\cos\left(2t+54.4\right)$$

و بنا بر قضیه جمع آثار پاسخ خصوصی معادله دیفرانسیل داده شده برابر خواهد شد با:

$$i_p(t)=i_{p1}\left(t\right)+i_{p2}\left(t\right)=1.64\cos\left(t-151.9\right)+0.47\cos\left(2t+54.4\right)$$

مسئله ۴

پاسخ خصوصی (حالت دایمی سینوسی) معادلات دیفرانسیل زیر را تعیین کنید.

الف ـ $\dfrac{d^2 i}{dt^2} + 2\dfrac{di}{dt} + i = 5\sin(2t + 30^\circ)$

ب ـ $\dfrac{d^2 i}{dt^2} + 3\dfrac{di}{dt} + 2i = 2\cos(2t - 30^\circ) + 3\sin(2t + 45^\circ)$

پ ـ $\dfrac{d^2 i}{dt^2} + 2\dfrac{di}{dt} + 2i = 2\cos t + 3\sin 2t$

حل : الف ـ با جایگذاری فازور نمایش دهنده سینوسی ها در معادله دیفرانسیل داریم.

$$\omega = 2 \;\rightarrow\; (j2)^2 A + 2(j2)A + A = 5e^{j(30-90)} \;\rightarrow\; (-3+4j)A = 5e^{-j60}$$

$$\rightarrow\; A = \frac{5e^{-j60}}{-3+4j} = \frac{5e^{-j60}}{5e^{j126/9}} = e^{-j186/9} \;\rightarrow\; i_p(t) = \cos(2t - 186/9)$$

ب ـ

$$\omega = 2 \;\rightarrow\; (j2)^2 A + 3(j2)A + 2A = 2e^{-j30} + 3e^{j(45-90)} = 2e^{-j30} + 3e^{-j45}$$

$$\rightarrow\; (-2+6j)A = 2(\cos 30 - j\sin 30) + 3(\cos 45 - j\sin 45) = 3/12 - j3/58$$

$$\rightarrow\; A = \frac{3/12 - j3/58}{-2+6j} = \frac{4/7e^{-j49}}{6/32e^{j108/4}} = 0/74e^{-j212/6} \;\rightarrow\; i_p(t) = 0/74\cos(2t - 212/6)$$

پ ـ دو فرکانس زاویه ای متفاوت داریم که برای هرکدام از آنها جداگانه به محاسبه پاسخ خصوصی می پردازیم.

$$\omega = 1 \;\rightarrow\; (j)^2 A_1 + 2jA_1 + 2A_1 = 2 \;\rightarrow\; (1+2j)A_1 = 2$$

$$\rightarrow\; A_1 = \frac{2}{1+2j} = \frac{2}{\sqrt{5}e^{j63/4}} = 0/89e^{-j63/4} \;\rightarrow\; i_{p1}(t) = 0/89\cos(t - 63/4)$$

$$\omega = 2 \;\rightarrow\; (2j)^2 A_2 + 2(j2)A_2 + 2A_2 = 3e^{-j90} \;\rightarrow\; (-2+4j)A_2 = 3e^{-j90}$$

$$\rightarrow\; A_2 = \frac{3e^{-j90}}{-2+4j} = \frac{3e^{-j90}}{\sqrt{20}e^{j116/6}} = 0/67e^{-j206/6} \;\rightarrow\; i_{p2}(t) = 0/67\cos(2t - 243/4)$$

و در نهایت بنابر قضیه جمع آثار پاسخ خصوصی معادله دیفرانسیل بصورت زیر بدست خواهد آمد.

$$i_p(t) = i_{p1}(t) + i_{p2}(t) = 0/89\cos(2t - 63/4) + 0/67\cos(2t - 243/4)$$

مسئله ۵

$\left|\vec{V}_1\right| = 2\left|\vec{V}_2\right|$ و زاویه فاز $\vec{V}_g$ از زاویه فاز $\vec{V}_2$، 30° جلوتر است. $v_1(t)$ را در حالت دایمی بدست آورید. ($v_g(t)=10\cos 2t$)

شکل مسئله ۵

حل : ازآنجا که حالت دایمی مورد نظر بوده و ورودی سینوسی است، لذا می توان ازروش فازوری استفاده کرد.

$$v_g(t)=10\cos 2t \;\rightarrow\; V_g=10 \;\rightarrow\; \left|V_g\right|=10 \;,\; \angle V_g=0$$

$$\angle V_g-\angle V_2=30 \;\rightarrow\; 0-\angle V_2=30 \;\rightarrow\; \angle V_2=-30^\circ$$

$$\text{برای مش ۱}\; KVL \;\rightarrow\; V_1+V_2=V_g \;\rightarrow\; 2\left|V_2\right|e^{j\theta_1}+\left|V_2\right|e^{-j30}=10$$

$$\rightarrow 2\left|V_2\right|(\cos\theta_1+j\sin\theta_1)+\left|V_2\right|(\cos 30-j\sin 30)=10$$

$$\rightarrow \left|V_2\right|\left(2\cos\theta_1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+j\left|V_2\right|\left(2\sin\theta_1-\frac{1}{2}\right)=10$$

$$\rightarrow \left|V_2\right|\left(2\sin\theta_1-\frac{1}{2}\right)=0 \;\rightarrow\; \sin\theta_1=\frac{1}{4} \;\rightarrow\; \cos\theta_1=\sqrt{1-\left(\tfrac{1}{4}\right)^2}=0/97$$

$$\left|V_2\right|\left(2\cos\theta_1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=10 \;\rightarrow\; \left|V_2\right|\left(2(0/97)+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=10 \;\rightarrow\; \left|V_2\right|=3/56$$

$$\rightarrow v_2(t)=3/56\left(2t-30^\circ\right)$$

مسئله ۶

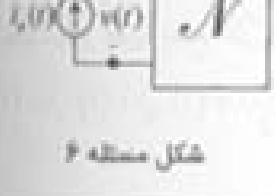
معادله دیفرانسیل ارتباط دهنده $v(t)$ به $i_s(t)$ بصورت زیر است.

$$\frac{d^2v}{dt^2}+15\frac{dv}{dt}+50v=\frac{d^2i_s}{dt^2}+7\frac{di_s}{dt}$$

الف ـ پاسخ ضربه را بدست آورید.

ب ـ امپدانس دو سر A و B در فرکانس ω چیست.

پ ـ برای $i_s(t)=10\cos 5t$ یک پاسخ خصوصی بدست آورید.



شکل مسئله ۶

حل: الف ـ با جایگذاری $i_s(t)=\delta(t)$ داریم:

$$\frac{d^2v}{dt^2}+۱۵\frac{dv}{dt}+۵۰v=\delta^{(۲)}(t)+۷\delta^{(۱)}(t)$$

معادله مشخصه: $s^2+۱۵s+۵۰=۰ \rightarrow s=-۵,-۱۰ \rightarrow v(t)=\left(K_1e^{-۵t}+K_2e^{-۱۰t}\right)u(t)+K_3\delta(t)$

با جایگذاری $v(t)$ در معادله دیفرانسیل داریم:

$$K_3\delta^{(۲)}(t)+\left(K_1+K_2+۱۵K_3\right)\delta^{(۱)}(t)+\left(۱۰K_1+۵K_2+۵۰K_3\right)=\delta^{(۲)}(t)+۷\delta^{(۱)}(t)$$

$$\begin{cases}K_3=۱\\ K_1+K_2+۱۵K_3=۷\\ ۱۰K_1+۵K_2+۵۰K_3=۰\end{cases} \rightarrow K_1=-۲\ ,\ K_2=-۶\ ,\ K_3=۱$$

$$\rightarrow h(t)=v(t)=\left(-۲e^{-۵t}-۶e^{-۱۰t}\right)u(t)+\delta(t)$$

ب ـ در فرکانس ω و در حالت دایمی سینوسی با استفاده ازروش فازوری و با توجه به معادله دیفرانسیل داریم:

$$(j\omega)^2V+۱۵(j\omega)V+۵۰V=(j\omega)^2I_s+۷(j\omega)I_s$$

$$\rightarrow \left[\left(۵۰-\omega^2\right)+j۱۵\omega\right]V=\left(-\omega^2+j۷\omega\right)I_s \rightarrow Z=\frac{V}{I_s}=\frac{-\omega^2+j۷\omega}{\left(۵۰-\omega^2\right)+j۱۵\omega}$$

پ ـ از آنجا که ورودی سینوسی می باشد لذا می توان پاسخ خصوصی را برابر پاسخ حالت دایمی سینوسی در نظر گرفت که با توجه به امپدانس بدست آمده در قسمت قبل داریم:

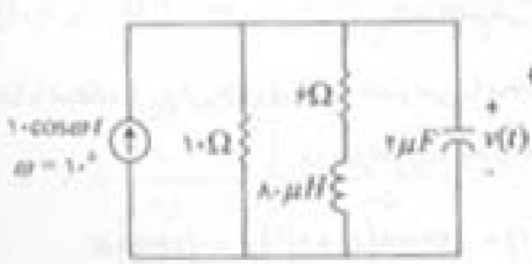
$$\omega=۵ \rightarrow V(j۵)=Z(j۵)I_s(j۵)=\left.\frac{-\omega^2+j۷\omega}{\left(۵۰-\omega^2\right)+j۱۵\omega}\right|_{\omega=۵}\times ۱۰=\frac{-۲۵+j۳۵}{۲۵+j۷۵}\times ۱۰$$

$$=\frac{۴۳۰/۱۱e^{j۱۲۵/۵}}{۷۹/۰۶e^{j۷۱/۶}}=۵/۴۴e^{j۵۳/۹}$$

$$\rightarrow v(t)=۵/۴۴\cos\left(۵t+۵۳/۹^\circ\right)$$

مسئله ۷

$v(t)=?$ (مدار در حالت دایمی سینوسی است)



شکل مسئله ۷

حل : ابتدا با استفاده از روش گسترش کسرهای متوالی ادمیتانس دو سر منبع جریان را بدست می آوریم

$$Y(j\omega)=G_1+\frac{1}{R_2+j\omega L}+j\omega C \;,\quad R_1=10\Omega \;,\quad R_2=6\Omega \;,\quad L=80\mu H \;,\quad C=2\mu F$$

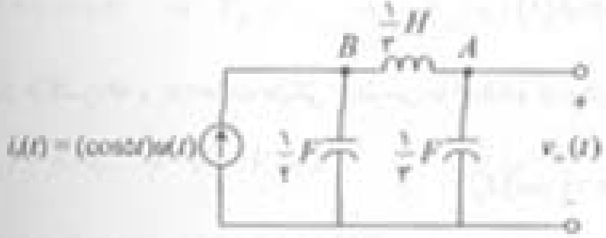
$$Y=\frac{1}{10}+\frac{1}{6+j80\times10^{-6}\times10^{5}}+j2\times10^{-6}\times10^{5}=0/16+j0/12$$

$$V=\frac{I_s}{Y}=\frac{10}{0/16+j0/12}=\frac{10}{0/2e^{j36/9}}=50e^{-j36/9} \;\rightarrow\; v(t)=50\cos\left(10^{5}t-36/9^{\circ}\right)$$

مسئله ۸

$v_o(t)$ را برای $t\geq 0$ حساب کنید. (شرایط اولیه صفر است).

$v_o(t)$ در حالت دایمی چیست.



شکل مسئله ۵

حل : با توجه به شکل مسئله و با استفاده از نمایش اپراتوری معادلات انتگرال دیفرانسیل داریم

$$\text{KCL برای گره (A)} \;\rightarrow\; \frac{1}{\frac{1}{3}D}(v_o-v_B)+\frac{1}{3}Dv_o=0 \;\rightarrow\; v_B=\left(\frac{1}{9}D^2+1\right)v_o$$

$$\text{KCL برای گره (B)} \;\rightarrow\; -i_s+\frac{1}{2}D\left\{\left(\frac{1}{9}D^2+1\right)v_o\right\}+\frac{1}{\frac{1}{3}D}\left\{\left(\frac{1}{9}D^2+1\right)v_o-v_o\right\}=0$$

$$\rightarrow\;\left(D^3+15D\right)v_o=18i_s \;\rightarrow\; \frac{d^3v_o}{dt^3}+15\frac{dv_o}{dt}=18\cos5t$$

$$\text{معادله مشخصه}: s^3+15s=0 \;\rightarrow\; s=0\,,\ \pm j\sqrt{15}$$

$$\rightarrow\; v_o(t)=\underbrace{K_1+K_2\cos\sqrt{15}t+K_3\sin\sqrt{15}t}_{\text{پاسخ عمومی}}+\underbrace{v_m\cos(5t+\theta)}_{\text{پاسخ خصوصی}}$$

ابتدا با استفاده از روش فازوری پاسخ خصوصی را محاسبه می کنیم.

$$\omega=5 \;\rightarrow\; (j5)^3V_p+15(j5)V_p=18 \;\rightarrow\; (-125j+75j)V_p=18$$

$$\rightarrow\; V_p=\frac{18}{-50j}=0/36j=0/36\angle90^{\circ} \;\rightarrow\; v_p(t)=0/36\cos\left(5t+90^{\circ}\right)=-0/36\sin5t$$

شرایط اولیه برابر صفر بوده و همچنین در $t=0^+$ خازن اتصال کوتاه و سلف مدار باز است بنابراین داریم.

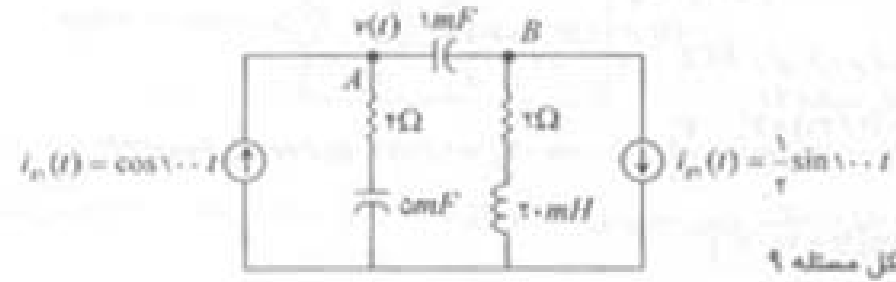
$$\begin{cases} v_o(0^+)=0 & \rightarrow\ K_1+K_2=0 \\ \dfrac{dv_o(0^+)}{dt}=0 & \rightarrow\ \sqrt{15}K_2-1/8=0 \\ \dfrac{d^2v_o(0^+)}{dt^2}=0 & \rightarrow\ -15K_1=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} K_1=0 \\ K_2=0 \\ K_3=0/32 \end{cases}$$

$$\rightarrow\ v_o(t)=0/32\sin\sqrt{15}t+0/32\sin 5t$$

مقدار $v_o(t)$ در حالت دایمی نیز بصورت فوق می باشد زیرا عامل میرا شونده ای برای $v_o(t)$ بدست نیامده است.

مسئله ۹

$v(t)=?$ (مدار در حالت دایمی سینوسی است)



شکل مسئله ۹

حل : از آنجا که مداردرحالت دایمی سینوسی است و فرکانس زاویه ای هر دو ورودی $\omega=100$ می باشد لذا با استفاده از روش فازوری خواهیم داشت.

$$I_{s1}=1\ ,\ I_{s2}=\frac{1}{2}e^{-j90}=-\frac{j}{2}$$

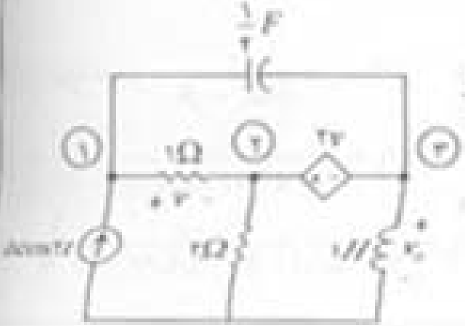
$$\text{KCL برای گره } \textcircled{B}\ \rightarrow\ -\frac{j}{2}+\frac{V_B}{2+j2}+\frac{V_B-V}{-10j}\ \rightarrow\ -jV+(1-j)V_B=5j$$

$$\text{KCL برای گره } \textcircled{A}\ \rightarrow\ -1+\frac{V}{2-2j}+\frac{V-V_B}{-10j}=0\ \rightarrow\ (2+2j)V-jV_B=10$$

$$\rightarrow\ V=\frac{\begin{vmatrix}5j & 1-j\\ 10 & -j\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-j & 1-j\\ 2+2j & -j\end{vmatrix}}=\frac{-5+10j}{-5}=1-2j=\sqrt{5}e^{-j63/4}\ \rightarrow\ v(t)=\sqrt{5}\cos(100t-63/4^\circ)$$

مسئله ۱۰

v_o و امپدانس دیده شده توسط منبع جریان را بدست آورید.



شکل مسئله ۱۰

حل : فرض کنیم مدار در حالت دایمی سینوسی باشد. فرکانس زاویه ی ورودی $\omega = 2$ می باشد بنابراین با توجه به شکل مسئله و با بکارگیری روش فازوری داریم.

$$i_s(t) = 5\cos 2t \rightarrow I_s = 5 \quad \text{و} \quad V_1 - V_2 = V \ , \ V_2 - V_3 = 2V \rightarrow V_1 - V_3 = 3V$$

برای گره ① KCL
$$\rightarrow -5 + \frac{V}{1} + \frac{3V}{-j2} = 0 \rightarrow V = 1/54 - j2/31$$

برای گره مرکب شامل ① و ② و ③ KCL
$$\rightarrow -5 + \frac{2V + V_o}{2} + \frac{V_o}{2j} = 0$$

$$\rightarrow -5 + \frac{2(1/54 - j2/31) + V_o}{2} + \frac{V_o}{2j} = 0 \rightarrow V_o = 1/15 + j5/77 = 5/88e^{j78/7^\circ}$$

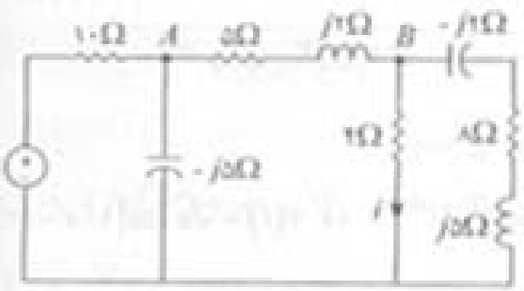
$$\rightarrow v_o(t) = 5/88\cos(2t + 78/7^\circ)$$

امپدانس دو سر منبع جریان $Z = \dfrac{V_1}{I_s}$ می باشد که آن را بصورت زیر بدست می آوریم.

$$V_1 = V_o + 3V = 5/77 - j1/15 \rightarrow Z = \frac{5/77 - j1/15}{5} = 1/15 - j0/23(\Omega)$$

مسئله ۱۱

فازور v_s را چنان تعیین کنید که فازور I بصورت $2e^{j45^\circ}$ باشد.



شکل مسئله ۱۱

حل: با توجه به شکل مدار می توان نوشت.

$$I = 3e^{j45^\circ} = 3\left(\cos 45^\circ + j\sin 45^\circ\right) = 2/12 + j2/12 \rightarrow V_B = 2I = 4/24 + j4/24$$

Ⓑ برای گره KCL $\rightarrow \dfrac{4/24 + j4/24}{-j3 + 8 + j5} + 2/12 + j2/12 + \dfrac{4/24 + j4/24 - V_A}{5 + j3} = 0$

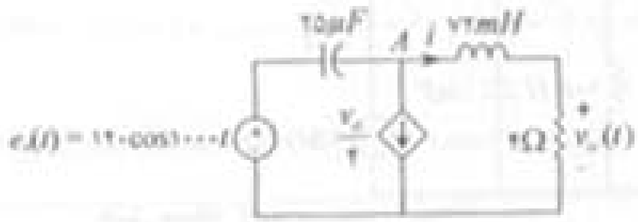
$$\rightarrow V_A = 20/08 + j28/8$$

Ⓐ برای گره KCL $\rightarrow \dfrac{20/08 + j28/8 - V_s}{10} + \dfrac{20/08 + j28/8}{-j5} + \dfrac{20/08 + j28/8 - 4/24 - j4/24}{5+2j} = 0$

$$\rightarrow V_s = -3/52 + j95/18 = 95/05e^{j92/1}$$

مسئله ۱۲

$v_o(t) = ?$



شکل مسئله ۱۲

حل: با فرض اینکه مدار در حالت دایمی سینوسی باشد و با توجه به شکل مسئله و اینکه $\omega = 1000$ می باشد داریم.

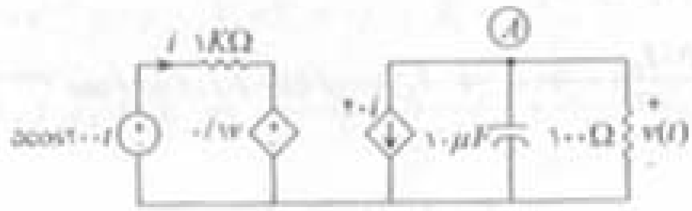
$$I = \frac{V_o}{4} \rightarrow V_A = I(j72 + 4) = (1 + j18)V_o \quad , \quad V_s = 120$$

Ⓐ برای گره KCL $\rightarrow \dfrac{V_o}{2} + \dfrac{V_o}{4} + \dfrac{(1 + j18)V_o - 120}{-j40} \rightarrow V_o = 28 + j56 = 62/62e^{j63/4}$

$$\rightarrow v_o(t) = 62/61\cos(1000t + 63/4^\circ)$$

مسئله ۱۳

$v(t) = ?$



شکل مسئله ۱۳

حل : بافرض اینکه مدار درحالت دایمی سینوسی است وبا توجه به شکل مسئله و اینکه $\omega = ۲۰۰$ می باشد لذا خواهیم داشت.

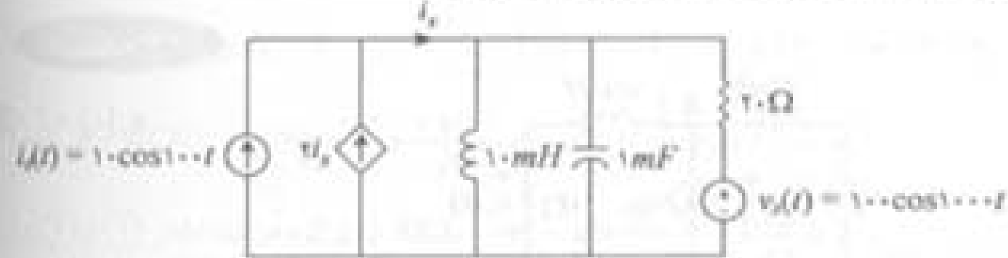
$$V_s = ۵ \quad , \quad I = \frac{V_s - ۰/۱V}{۱۰۰۰} = \frac{۵ - ۰/۱V}{۱۰۰۰}$$

$$\text{ⓐ گره برای } KCL \rightarrow ۴۰ \frac{۵ - ۰/۱V}{۱۰۰۰} + \frac{V}{-j۵۰۰} + \frac{V}{۱۰۰} = ۰$$

$$\rightarrow V = -۳۰ + j۱۰ = ۳۱/۶۲e^{j۱۶۱/۵۷^\circ} \rightarrow v(t) = ۳۱/۶۲\cos\left(۲۰۰t + ۱۶۱/۵۷^\circ\right)$$

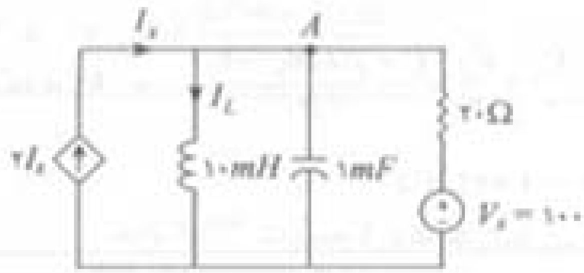
مسئله ۱۴

جریان گذرنده از سلف را در حالت دایمی بدست آورید.



شکل مسئله ١٤

حل : ازآنجا که فرکانس زاویه ای دو منبع نابسته متفاوت است لذا بطورهمزمان هردورا نمی توان درروش فازوری برای حل مسئله بکار گرفت.بنابراین آنها رابصورت مجزادرنظرگرفته و i_L مربوطه رابدست می آوریم.لذا منبع ولتاژ را منظور می کنیم. در این حالت $\omega = ۱۰۰۰$ بوده و در حالت دایمی سینوسی مدار بصورت زیر می باشد.

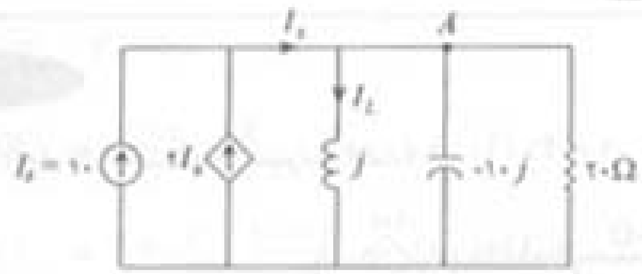


$$I_x = ۲I_x \rightarrow I_x = ۰ \quad , \quad V_A = (j۱۰)I_L = j۱۰I_L$$

$$\text{ⓐ گره برای } KCL \rightarrow I_L + \frac{j۱۰I_L}{-j} + \frac{j۱۰I_L - ۱۰۰}{۲۰} = ۰ \rightarrow I_L = -۰/۵۵ - j۰/۰۳ = ۰/۵۵e^{-j۱۷۴/۹}$$

$$\rightarrow i_L(t) = ۰/۵۵\cos\left(۱۰۰۰t - ۱۷۴/۹\right)$$

حال $V_s = ۰$ در نظر گرفته و اثر منبع جریان را بررسی می کنیم. در این حالت $\omega = ۱۰۰$ بوده و در حالت دایمی سینوسی مدار بصورت زیر می باشد.



$I_s + ۲I_x = I_x \;\rightarrow\; I_x = -I_s = -۱۰ \;,\; V_A = jI_L$

Ⓐ برای گره KCL $\rightarrow ۱۰ + I_L + \dfrac{jI_L}{-۱۰j} + \dfrac{jI_L}{۲۰} = ۰ \;\rightarrow\; I_L = -۱۱/۰۸ + j۰/۶۱ = ۱۱/۰۹e^{j۱۷۶/۹}$

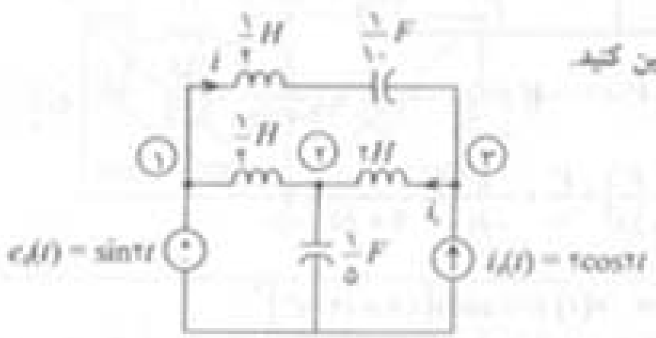
$\rightarrow\; i_L(t) = ۱۱/۰۹\cos(۱۰t + ۱۷۶/۹)$

و در نهایت بنا بر قضیه جمع آثار جریان گذرنده از سلف در حالت دایمی سینوسی بصورت زیر خواهد شد که یک سینوسی نمی باشد.

$i_L(t) = ۰/۵۵\cos(۱۰۰t - ۱۷۶/۹^\circ) + ۱۱/۰۹\cos(۱۰t + ۱۷۶/۹)$

مسئله ۱۵

$i(t)$ را در حالت دایمی سینوسی تعیین کنید.



شکل مسئله ۱۵

حل : از آنجا که فرکانسهای زاویه ای هر دو منبع یکسان است لذا برای هر مدار نمایش فازوری یکسان بوده و می توان هردو را با هم در نظر گرفت.

$V_1 = e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j \;,\; V_1 = V_s = -j \;,\; I_s = ۲$

۲ برای گره KCL $\rightarrow \dfrac{V_۲ - (-j)}{j} + \dfrac{V_۲}{-۲/۵j} + \dfrac{V_۲ - V_۳}{۲j} = ۰$

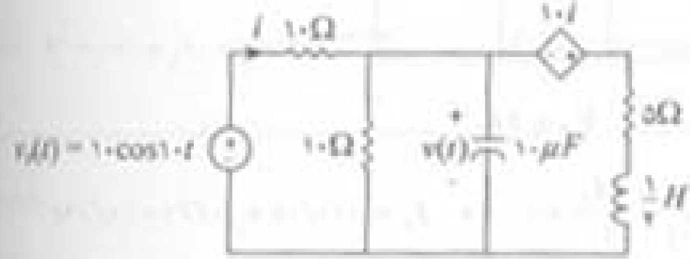
۳ برای گره KCL $\rightarrow \dfrac{V_۳ - (-j)}{j - ۵j} + \dfrac{V_۳ - V_۲}{۲j} - ۲ = ۰$

$\rightarrow \begin{cases} V_۳ = -j۲۶/۶ \\ V_۲ = -j۹ \end{cases}$

$$I=\frac{V_1-V_2}{j-5j}=\frac{-j-(-j24/6)}{-4j}=-6/4 \rightarrow i(t)=-6/4\cos 2t$$

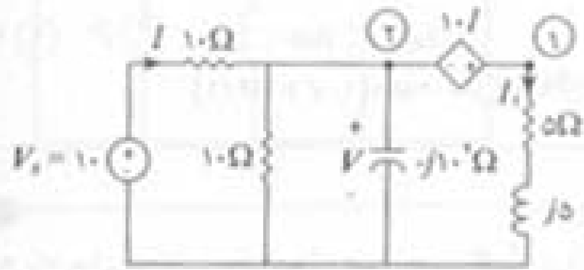
مسئله ۱۶

$v(t)=?$ (مدار در حالت دایمی سینوسی است)



شکل مسئله ۱۶

حل : مدار در حالت دایمی سینوسی بوده و $\omega=10$ می باشد بنابراین آن را می توان بصورت زیر رسم کرد.



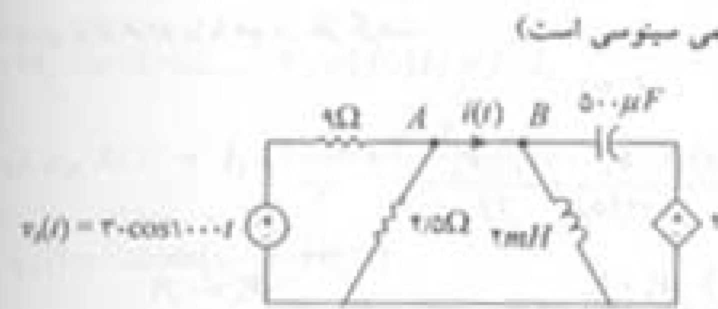
$$I=\frac{V_s-V}{10}=1-\frac{V}{10}\ ,\ V_1=V+10I=V+10-V=10 \rightarrow I_1=\frac{10}{5+j5}$$

KCL برای گره مرکب ۱ و ۲ $\rightarrow -\left(1-\frac{V}{10}\right)+\frac{V}{10}+\frac{V}{-j10^3}+\frac{10}{5+j5}=0$

$$\rightarrow V=0/0025+j0/5=0/5e^{j89/7} \rightarrow v(t)=0/5\cos\left(10t+89/7^\circ\right)$$

مسئله ۱۷

$i(t)=?$ (مدار در حالت دایمی سینوسی است)



شکل مسئله ۱۷

حل : مدار در حالت دایمی سینوسی و $\omega = ۱۰۰۰$ می باشد بنابراین با استفاده از روش فازوری و با توجه به شکل مسئله داریم.

$$V_A = V_B = V \quad , \quad V_s = ۳۰$$

Ⓐ برای گره KCL $\rightarrow \dfrac{V - ۳۰}{۹} + \dfrac{V}{۴/۵} + I = ۰ \rightarrow ۹I + ۳V = ۳۰$

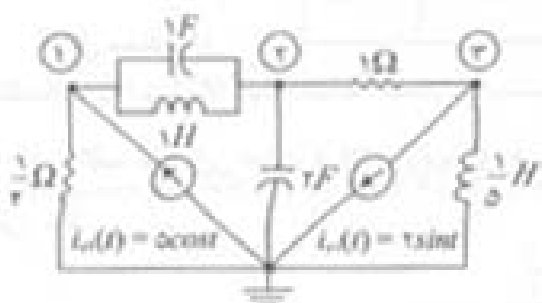
Ⓑ برای گره KCL $\rightarrow -I + \dfrac{V}{j۴} + \dfrac{V - ۲I}{-j۲} \rightarrow (۴ - j۴)I - V = ۰$

$$I = \frac{\begin{vmatrix} ۳۰ & ۳ \\ ۰ & -۱ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} ۹ & ۳ \\ ۴ - ۴j & -۱ \end{vmatrix}} = \frac{۱۰}{۷ - ۴j} = ۱/۰۷ + j۰/۶۱ = ۱/۲۴e^{j۲۹/۷۴}$$

$$\rightarrow i(t) = ۱/۲۴\cos\left(۱۰۰۰t + ۲۹/۷۴^{\circ}\right)$$

مسئله ۱۸

ولتاژ دو سر خازن $۲F$ را حساب کنید. (مدار در حالت دایمی سینوسی است)



شکل مسئله ۱۸

حل : فرکانس زاویه ای هر دو منبع $\omega = ۱$ می باشد بنابراین در روش تحلیل فازوری اثر هر دو منبع را به طور همزمان می توان در نظر گرفت.

$$I_{s1} = ۲e^{j۹۰} = j۲ \quad , \quad I_{s2} = ۵$$

② برای گره KCL $\rightarrow \dfrac{V_۲ - V_۱}{-j} + \dfrac{V_۲ - V_۱}{j} + \dfrac{V_۲}{-j۰/۵} + \dfrac{V_۲ - V_۳}{۱} = ۰ \rightarrow (۲ - j)V_۲ + jV_۳ = ۰$

③ برای گره KCL $\rightarrow \dfrac{V_۳ - V_۲}{۱} + \dfrac{V_۳}{j\frac{۱}{۵}} + ۲j = ۰ \rightarrow -jV_۲ + (۵ + j)V_۳ = ۲$

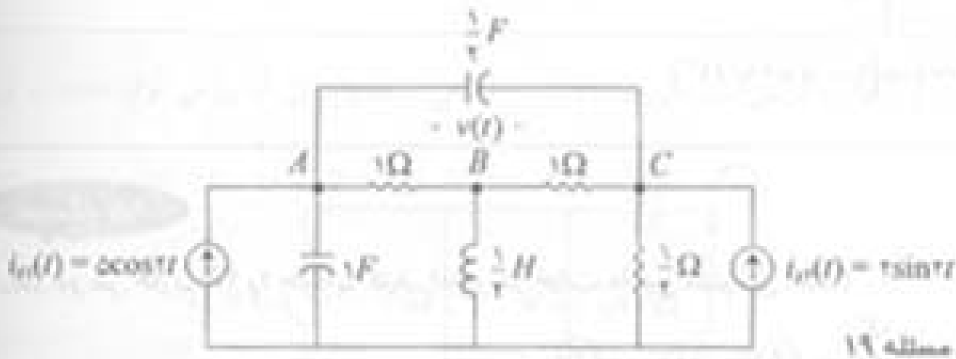
$$\rightarrow V_c = V_۲ = \frac{\begin{vmatrix} ۰ & j \\ ۲ & ۵+j \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} ۲-j & j \\ -j & ۵+j \end{vmatrix}} = \frac{-۲j}{۱۰-۳j} = \frac{۲e^{-j۹۰}}{۱۰/۴۴e^{-j۱۶/۷}} = ۰/۱۹e^{-j۷۳/۳}$$

$$\rightarrow v_c(t) = ۰/۱۹\cos(t - ۷۳/۳^\circ)$$

مسئله ۱۹

الف ـ ؟ = $v(t)$. (مدار در حالت دایمی سینوسی است)

ب ـ فرض کنید $i_{s۱}(t) = ۵\cos t$ شود، باز دیگر $v(t)$ را بدست آورید.



شکل مسئله ۱۹

حل : الف ـ در این حالت فرکانس زاویه ای هر دو منبع یکسان ۲ = ω بوده و می توان اثر هر دو را با هم منظور کرد

$$I_{s۱} = ۵ \quad , \quad I_{s۲} = ۲e^{-j۹۰} = -۲j$$

Ⓐ برای گره KCL $\rightarrow -۵ + \frac{V_A}{\frac{۱}{j۲}} + \frac{V_A - V_B}{۱} + \frac{V_A - V_C}{\frac{۱}{j}} = ۰ \rightarrow (۱+۳j)V_A - V_B - jV_C = ۵$

Ⓑ برای گره KCL $\rightarrow \frac{V_B - V_A}{۱} + \frac{V_B}{j} + \frac{V_B - V_C}{۱} = ۰ \rightarrow -V_A + (۲-j)V_B - V_C = ۰$

Ⓒ برای گره KCL $\rightarrow \frac{V_C}{\frac{۱}{۲}} + \frac{V_C - V_B}{۱} + \frac{V_C - V_A}{\frac{۱}{j}} - (-۲j) = ۰$

$$\rightarrow -jV_A - V_B + (۳+j)V_C = -۲j$$

$$V=V_A-V_C=\frac{\begin{vmatrix}۵ & -۱ & -j\\ ۰ & ۲-j & -۱\\ -۲j & -۱ & ۳+j\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}۱+۳j & -۱ & -j\\ -۱ & ۲-j & -۱\\ -j & -۱ & ۳+j\end{vmatrix}}-\frac{\begin{vmatrix}۱+۳j & -۱ & ۵\\ -۱ & ۲-j & ۰\\ -j & -۱ & -۲j\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}۱+۳j & -۱ & -j\\ -۱ & ۲-j & -۱\\ -j & -۱ & ۳+j\end{vmatrix}}=\frac{۳۴-j۹}{۸+j۱۲}-\frac{۲۰-۲j}{۸+j۱۲}$$

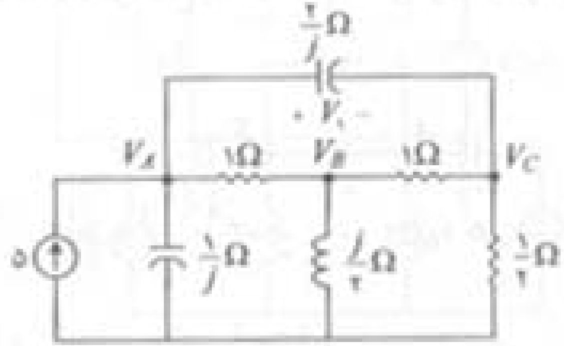
$$\rightarrow\ V=\frac{۱۴-j۱۱}{۸+j۱۲}=۱/۱۷e^{-j۹۶/۵}\ \rightarrow\ v(t)=۱/۱۷\cos\left(۲t-۹۶/۵^{\circ}\right)$$

ب- در این حالت فرکانس زاویه ای منابع جریان متفاوت بوده و باید اثر آنها را جداگانه در نظر گرفت. ابتدا با فرض $I_{g۱}=۰$ و $I_{g۲}=-۲/j$ و با توجه به معادلات بدست آمده در حالت قبل داریم.

$$V_۱=V_A-V_C=\frac{\begin{vmatrix}۰ & -۱ & -j\\ ۰ & ۲-j & -۱\\ -۲j & -۱ & ۳+j\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}۱+۳j & -۱ & -j\\ -۱ & ۲-j & -۱\\ -j & -۱ & ۳+j\end{vmatrix}}-\frac{\begin{vmatrix}۱+۳j & -۱ & ۰\\ -۱ & ۲-j & ۰\\ -j & -۱ & -۲j\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}۱+۳j & -۱ & -j\\ -۱ & ۲-j & -۱\\ -j & -۱ & ۳+j\end{vmatrix}}=\frac{-۶+j۲}{۸+j۱۲}=۰/۲۷e^{j۷۸/۹}$$

$$\rightarrow\ v_۱(t)=۰/۲۷\cos\left(۲t-۷۸/۹^{\circ}\right)$$

حال فرض می کنیم $I_{g۲}=۰$ بوده و $I_{g۱}(t)=۵\cos t$ و یا $\omega=۱$ ، $I_{g۱}=۵$ باشد. با اعمال مفروضات گفته شده مدار بصورت زیر خواهد شد.



Ⓐ برای گره KCL $\rightarrow -۵+\frac{V_A}{\frac{۱}{j}}+\frac{V_A-V_B}{۱}+\frac{V_A-V_C}{\frac{۲}{j}}=۰\ \rightarrow\ (۲+۳j)V_A-۲V_B-jV_C=۱۰$

Ⓑ برای گره KCL $\rightarrow \frac{V_B-V_A}{۱}+\frac{V_B}{\frac{j}{۲}}+\frac{V_B-V_C}{۱}=۰\ \rightarrow\ -V_A+(۲-۲j)V_B-V_C=۰$

$$\text{ⒸKCL برای گره } \rightarrow \frac{V_C}{\frac{۱}{۴}}++\frac{V_C-V_B}{۱}+\frac{V_C-V_A}{\frac{۲}{j}}=۰ \rightarrow -jV_A-۲V_B+(۶+j)V_C=۰$$

$$V_۱=V_A-V_C=\frac{\begin{vmatrix} ۱۰ & -۲ & -j \\ ۰ & ۲-۲j & -۱ \\ ۰ & -۲ & ۶+j \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} ۲+۳j & -۲ & -j \\ -۱ & ۲-۲j & -۱ \\ -j & -۲ & ۶+j \end{vmatrix}}-\frac{\begin{vmatrix} ۲+۳j & -۲ & ۱۰ \\ -۱ & ۲-۲j & ۰ \\ -j & -۲ & ۰ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} ۲+۳j & -۲ & -j \\ -۱ & ۲-۲j & -۱ \\ -j & -۲ & ۶+j \end{vmatrix}}=\frac{۲۰-j۳۰}{۱۱+j۲}=۳/۲۲e^{-j۶۶/۶}$$

$$\rightarrow v_۱(t)=۳/۲۲\cos(t-۶۶/۶^\circ)$$

و در نهایت بنا بر قاعده جمع آثار خواهیم داشت

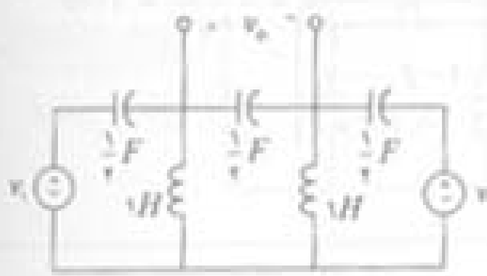
$$\rightarrow v(t)=v_۱(t)+v_۲(t)=۳/۲۲\cos(t-۶۶/۶^\circ)+۰/۴۷\cos(۲t-۷۸/۹^\circ)$$

مسئله ۴۰

$v_o(t)$ را در حالت دایمی سینوسی تعیین کنید.

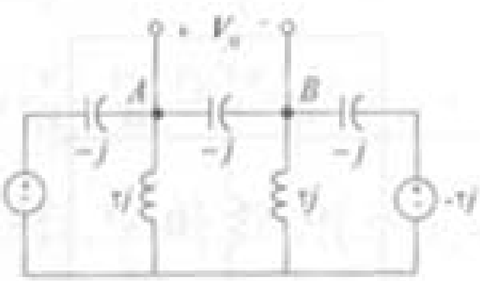
الف ـ $v_۱=۲\sin ۲t$ و $v_۲=۲\cos ۲t$

ب ـ $v_۱=\sin ۲t$ و $v_۲=۴\cos t$



شکل مسئله ۴۰

حل: الف ـ از آنجا که فرکانس منابع یکسان است لذا می توان اثر هر دو را با هم در نظر گرفت



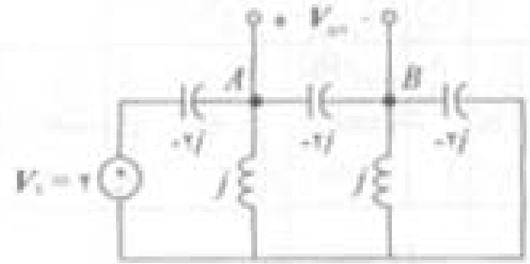
$$\text{ⒶKCL برای گره } \rightarrow \frac{V_A-۲}{-j}+\frac{V_A}{۲j}+\frac{V_A-V_B}{-j}=۰ \rightarrow ۳V_A-۲V_B=۴$$

$$\text{ⒷKCL برای گره } \rightarrow \frac{V_B-V_A}{-j}+\frac{V_B}{۲j}+\frac{V_B-(-۲j)}{-j}=۰ \rightarrow ۲V_A-۳V_B=j۴$$

$$\rightarrow ۵V_A-۵V_B=۴+j۴ \rightarrow V_o=V_A-V_B=\frac{۱}{۵}(۴+j۴)=\frac{۴\sqrt{۲}}{۵}e^{j۴۵}$$

$$\rightarrow\ v_o(t)=\frac{2\sqrt{2}}{5}\cos\left(2t+45^\circ\right)$$

ب- در این حالت منابع دارای فرکانسهای زاویه ای متفاوت اند بنابراین باید اثر هر کدام را جداگانه مورد بررسی قرار دهیم ابتدا بافرض $v_1(t)=2\cos t$ و $v_2(t)=0$ و $\omega=1$، $V_1=2$ و $V_2=0$ شده و مدار بصورت زیر خواهد شد.

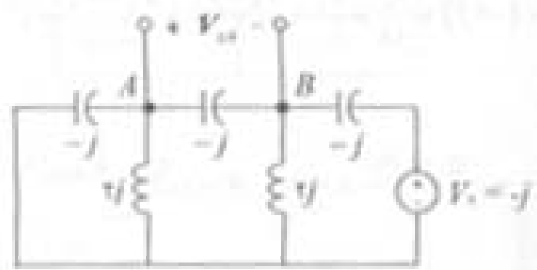


Ⓐ برای گره KCL $\rightarrow\ \dfrac{V_A-2}{-2j}+\dfrac{V_A}{j}+\dfrac{V_A-V_B}{-2j}=0\ \rightarrow\ V_B=-2$

Ⓑ برای گره KCL $\rightarrow\ \dfrac{-2-V_A}{-2j}+\dfrac{-2}{j}+\dfrac{-2}{-2j}=0\ \rightarrow\ V_A=0$

$$\rightarrow\ V_{o1}=V_A-V_B=2\ \rightarrow\ v_{o1}(t)=2\cos(t)$$

در ادامه با فرض $v_1(t)=0$ و $v_2(t)=\sin 2t$ و $\omega=2$، $V_1=0$ و $V_2=-j$ شده ومدار بصورت زیر خواهد شد.



Ⓐ برای گره KCL $\rightarrow\ \dfrac{V_A}{-j}+\dfrac{V_A}{2j}+\dfrac{V_A-V_B}{-j}=0\ \rightarrow\ 3V_A-2V_B=0$

Ⓑ برای گره KCL $\rightarrow\ \dfrac{V_B-(-j)}{-j}+\dfrac{V_B}{2j}+\dfrac{V_B-V_A}{-j}=0\ \rightarrow\ 2V_A-3V_B=2j$

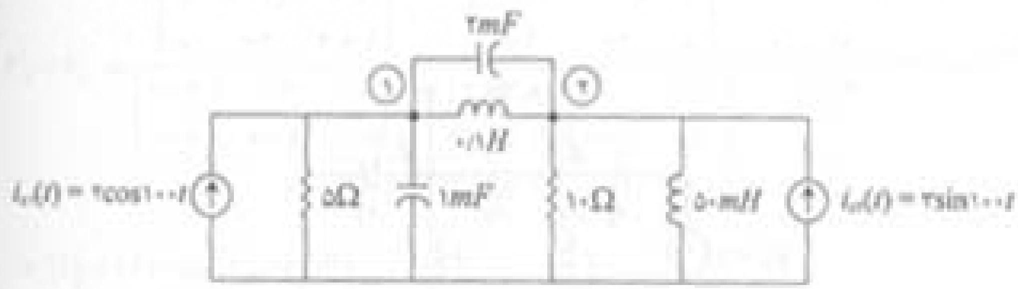
$$\rightarrow\ 5V_A-5V_B=2j\ \rightarrow\ V_{o2}=V_A-V_B=\frac{2}{5}j=\frac{2}{5}e^{j90^\circ}\ \rightarrow\ v_{o2}(t)=\frac{2}{5}\cos\left(2t+90^\circ\right)$$

و در نهایت بنابر قضیه جمع آثار خواهیم داشت.

$$v_o(t)=v_{o1}(t)+v_{o2}(t)=2\cos t+\frac{2}{5}\cos\left(2t+90^\circ\right)=2\cos t-\frac{2}{5}\sin 2t$$

مسئله ۲۱

ولتاژهای گره های مدار را با استفاده از تحلیل گره در حالت دایمی سینوسی بدست آورید.



شکل مسئله ۲۱

حل : از آنجا که فرکانس زاویه ای هردو منبع $(\omega=100)$ برابر بوده لذا تر هر دو را می توان یکجا بررسی کرد. با توجه به شکل مسئله داریم:

$I_{s1}=2\ ,\ I_{s2}=3e^{-j90}=-3j$

① برای گره KCL $\rightarrow -2+\dfrac{V_1}{5}+\dfrac{V_1}{-10j}+\dfrac{V_1-V_2}{-5j}+\dfrac{V_1-V_2}{10j}=0 \rightarrow (-2+j2)V_1+V_2=20j$

② برای گره KCL $\rightarrow -(-3j)+\dfrac{V_2}{j5}+\dfrac{V_2}{10}+\dfrac{V_2-V_1}{j10}+\dfrac{V_2-V_1}{-j5}=0 \rightarrow V_1+(1+j)V_2=30$

$$\rightarrow V_1=\frac{\begin{vmatrix} j20 & 1 \\ 30 & 1+j \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2+2j & 1 \\ 1 & 1+j \end{vmatrix}}=\frac{-50+j20}{5}=-10+j4=10/77e^{-j21/8}$$

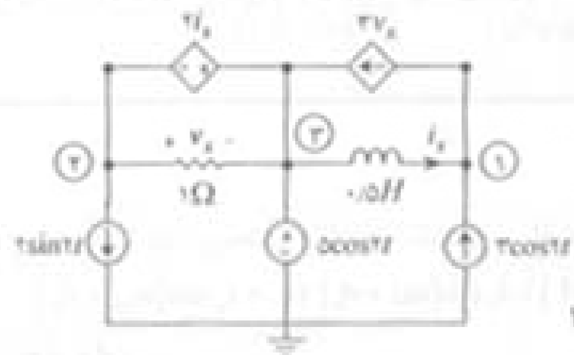
$$\rightarrow v_1(t)=10/77\cos\left(100t-21/8^{\circ}\right)$$

$$\rightarrow V_2=\frac{\begin{vmatrix} -2+2j & j20 \\ 1 & 30 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2+2j & 1 \\ 1 & 1+j \end{vmatrix}}=\frac{-60+j40}{5}=-12+j8=14/42e^{j146/3}$$

$$\rightarrow v_2(t)=14/42\cos\left(100t+146/3\right)$$

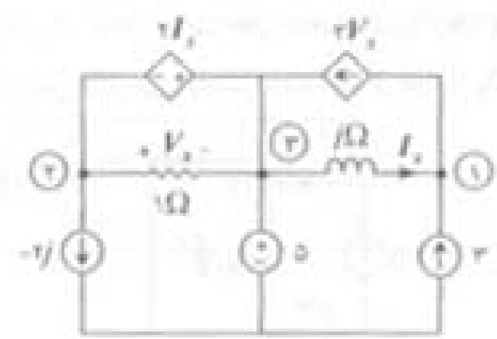
مسئله ۲۲

ولتاژ گره های مدار را با استفاده از تحلیل گره در حالت دایمی بدست آورید.



شکل مسئله ۲۲

حل : فرکانس هر سه منبع $۲ = \omega$ بوده پس مدار را در حالت دایمی سینوسی می توان بصورت زیر در نظر گرفت.



$$V_۳ = ۵ \rightarrow I_x = \frac{۵ - V_۱}{j} \ , \ V_x = V_۲ - ۵$$

$$V_x = -۲I_x \rightarrow V_۲ - ۵ = -۲\frac{۵ - V_۱}{j} \rightarrow ۲V_۱ - jV_۲ = ۱۰ - j۵$$

① برای گره KCL $\rightarrow ۲(V_۲ - ۵) + \dfrac{V_۱ - ۵}{j} - ۳ = ۰ \rightarrow V_۱ + j۲V_۲ = ۵ + j۱۸$

$$\rightarrow V_۱ = \frac{\begin{vmatrix} ۱۰ - j۵ & -j \\ ۵ + j۱۸ & j۲ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} ۲ & -j \\ ۱ & j۲ \end{vmatrix}} = \frac{j۳۵ - ۳}{۷j} = ۵ + j۰/۴۳ = ۵/۰۲e^{j۴/۹^\circ}$$

$$\rightarrow v_۱(t) = ۵/۰۲\cos(۲t + ۴/۹^\circ)$$

$$\rightarrow V_o = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 10-j5 \\ 1 & 5+j18 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -j \\ 1 & j3 \end{vmatrix}} = \frac{j41}{j7} = 5/58 \quad \rightarrow \quad v_o(t) = 5/58\cos 2t$$

$$V_o = 5 \quad \rightarrow \quad v_o(t) = \cos 2t$$

مسئله ۲۳

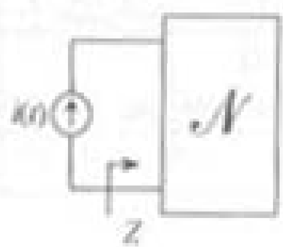
نشان دهید که اگر

$$i(t) = I_1 \sin(\omega_1 t + \theta_1) + I_2 \sin(\omega_2 t + \theta_2) + \ldots + I_n \sin(\omega_n t + \theta_n)$$

در این صورت مقدار موثر برابر:

$$I_{rms} = \sqrt{I_{rms1}^2 + I_{rms2}^2 + \ldots + I_{rmsn}^2} = \sqrt{\frac{I_1^2 + I_2^2 + \ldots + I_n^2}{2}}$$

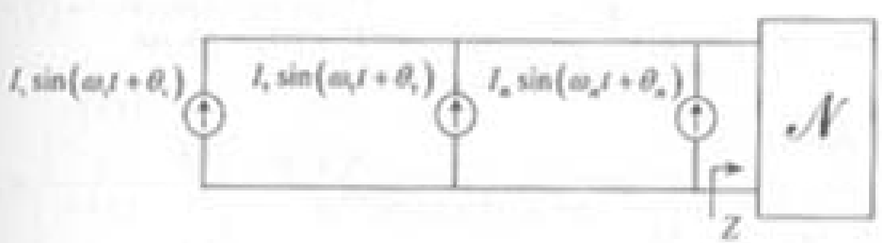
حل: فرض کنیم یک قطبی $\mathcal{N}$، شامل عناصر خطی وتغییرناپذیربا زمان بوده و $i(t)$ را به آن وصل کرده ایم همچنین فرض کنیم در حالت دایمی سینوسی امپدانس دیده شده از دو سر یک قطبی برابر Z باشد.



توان متوسط تحویل داده شده به یک قطبی $\mathcal{N}$، توسط منبع $i(t)$ برابر است با:

$$P_{av} = I_{rms}^2 \operatorname{Re}(Z)$$

همچنین با توجه به $i(t)$ داده شده شکل فوق را می توان بصورت زیر رسم کرد.



بنا بر قضیه جمع آثار می توان نوشت.

$$P_{av} = P_{av1} + P_{av2} + \ldots + P_{avn} = I_{rms1}^2 \operatorname{Re}(Z) + I_{rms2}^2 \operatorname{Re}(Z) + \ldots + I_{rmsn}^2 \operatorname{Re}(Z)$$

$$= \left(I_{rms1}^2 + I_{rms2}^2 + \ldots + I_{rmsn}^2\right) \operatorname{Re}(Z)$$

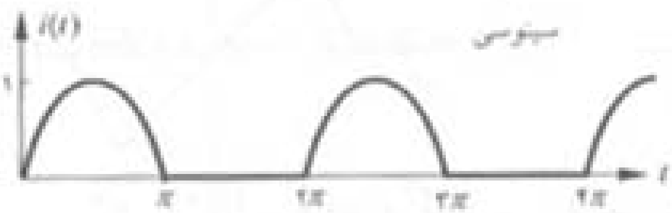
بنابراین داریم.

$$I_{rms}^2 = I_{rms1}^2 + I_{rms2}^2 + \dots + I_{rmsn}^2$$

$$\rightarrow\ I_{rms} = \sqrt{I_{rms1}^2 + I_{rms2}^2 + \dots + I_{rmsn}^2} = \sqrt{\left(\frac{I_1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{I_2}{\sqrt{2}}\right)^2 + \dots + \left(\frac{I_n}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{I_1^2 + I_2^2 + \dots + I_n^2}{2}}$$

مسئله ۲۴

مقدار موثر (RMS) شکل موج نشان داده شده را تعیین کنید.



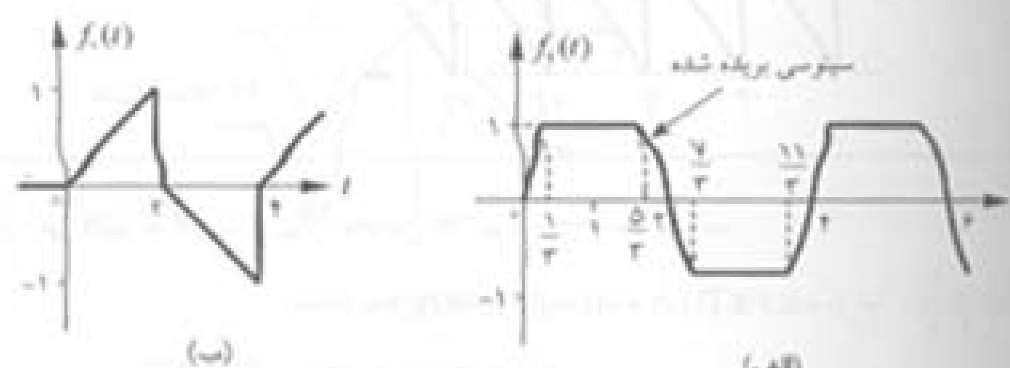
شکل مسئله ۲٤

حل: بنا بر تعریف مقدار موثر داریم.

$$I_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)dt} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \sin^2 t dt} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{2}$$

مسئله ۲۵

مقدار موثر سیگنالهای متناوب شکل را تعیین کنید.



شکل مسئله ۲۵

حل: الف ـ با توجه به شکل (۲۵- الف) داریم.

$$f_1(t)=\begin{cases}2\sin\frac{\pi}{2}t\ , & 0<t<\frac{1}{3}\\ 1\ , & \frac{1}{3}<t<1\end{cases}$$

$$\int_0^4 f_1^2(t)\,dt=4\int_0^1 f_1^2(t)\,dt=4\int_0^{\frac{1}{3}}\left(2\sin\frac{\pi}{2}t\right)^2 dt+4\int_{\frac{1}{3}}^1 dt=8\int_0^{\frac{1}{3}}(1-\cos\pi t)\,dt+4\int_{\frac{1}{3}}^1 dt$$

$$=8t-\frac{8\sin\pi t}{\pi}\bigg|_0^{\frac{1}{3}}+4t\bigg|_{\frac{1}{3}}^1=\frac{16}{3}-\frac{4\sqrt{3}}{\pi}$$

و در نهایت بنا برتعریف موثر خواهیم داشت.

$$F_{rms}=\sqrt{\frac{1}{4}\int_0^4 f_1(t)\,dt}=\sqrt{\frac{4}{3}-\frac{\sqrt{3}}{\pi}}$$

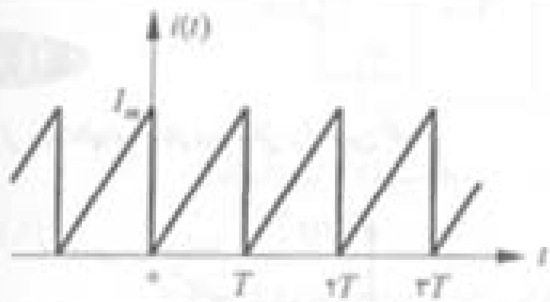
ب ـ به روش مشابه برای نمودار شکل (ب)داریم.

$$f_2(t)=\frac{t}{2}\ ,\quad 0<t<2$$

$$\int_0^4 f_2^2(t)\,dt=2\int_0^2\left(\frac{t}{2}\right)^2=\frac{t^3}{6}\bigg|_0^2=\frac{4}{3}\ \rightarrow\ F_{rms}=\sqrt{\frac{1}{4}\int_0^4 f_2^2(t)\,dt}=\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}\right)}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

مسئله ۲۶

جریان گذرنده از مقاومت R بصورت زیر است. توان متوسط تحویل داده شده به آن را تعیین کنید.



شکل مسئله ۲۶

حل : می دانیم که $P_{av}=I_{rms}^2R$ ، بنابراین ابتدا I_{rms} را محاسبه می کنیم.

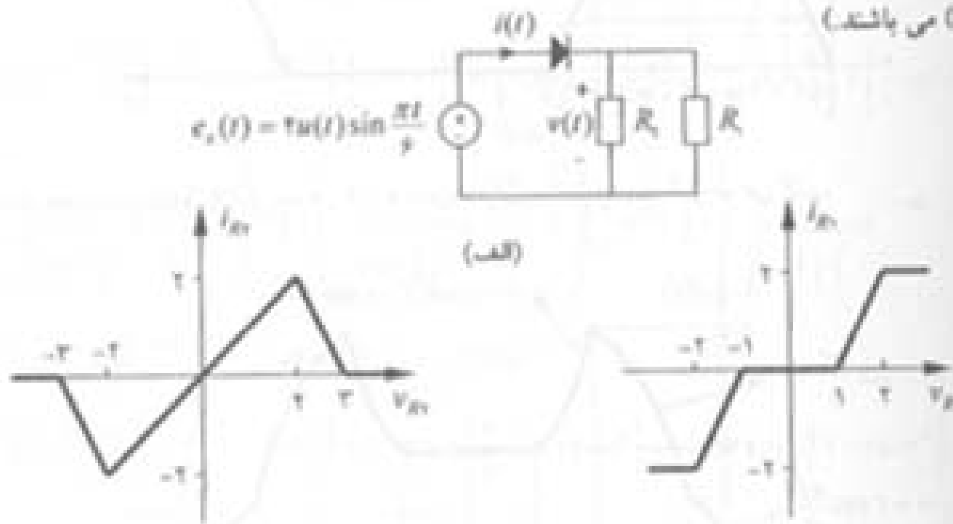
$$i(t)=\left(\frac{I_m}{T}\right)t\quad ,\quad 0\le t\le T\quad ,\quad i(t+KT)=i(t)$$

$$\int_0^T i^2(t)\,dt=\int_0^T\left(\frac{I_m}{T}\right)^2 t^2\,dt=\frac{TI_m^2}{3}\ \rightarrow\ I_{rms}=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)\,dt}=\sqrt{\frac{1}{T}\left(\frac{TI_m^2}{3}\right)}=\frac{I_m}{\sqrt{3}}$$

$$\rightarrow\ P_{av}=I_{rms}^2R=\left(\frac{I_m}{\sqrt{3}}\right)^2R=\frac{1}{3}I_m^2R$$

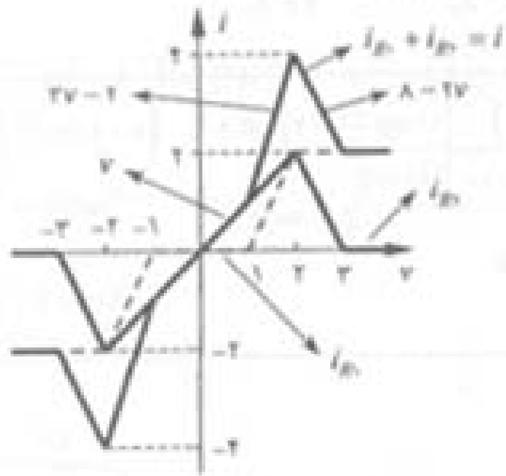
مسئله ۳۷

مقدار موثر $i(t)$ را تعیین کنید. R_1 و R_2 دو مقاومت غیر خطی با مشخصه های شکلهای (ب) و (پ) می باشند.



(پ) شکل مسئله ۳۷ (ب)

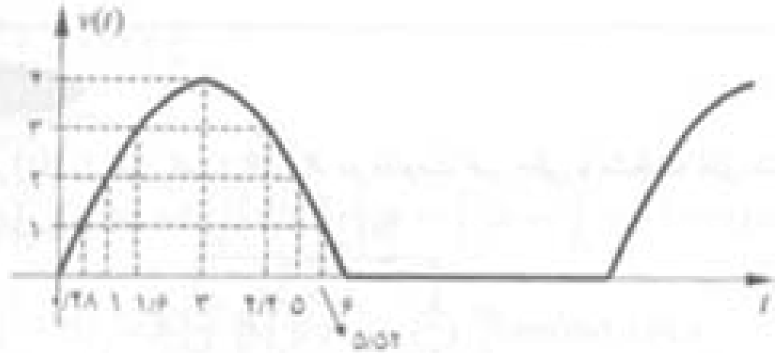
حل : ابتدا مشخصه معادل R_1 و R_2 را تعیین می کنیم. از آنجا که $v = v_{R_1} = v_{R_2}$ و $i = i_{R_1} + i_{R_2}$ لذا به ازای ولتاژهای متناظر جریان را با هم جمع می کنیم.



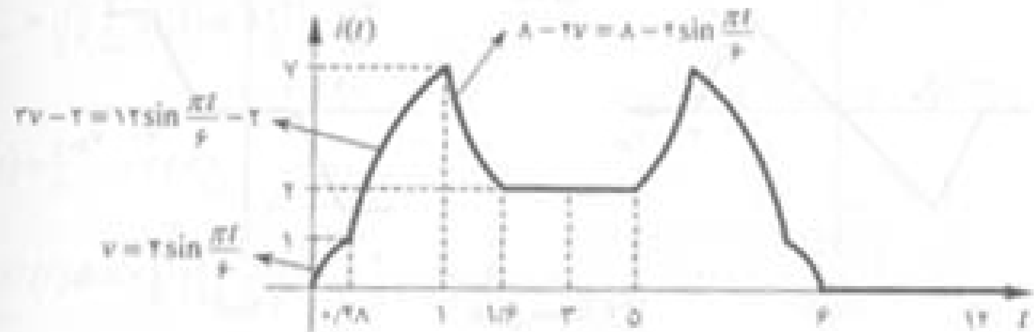
از آنجا که دیود فقط به ازای $e_s(t) > ۰$ هدایت می کند لذا خواهیم داشت.

$$v(t) = \begin{cases} e_s(t) & , e_s(t) > ۰ \\ ۰ & , e_s(t) < ۰ \end{cases} = \begin{cases} ۴\sin\frac{\pi t}{۶} & , ۰ < t < ۶ \\ ۰ & , ۶ < t < ۱۲ \end{cases} \quad , \quad v(t+۱۲) = v(t)$$

بنابراین نمودار $v(t)$ بصورت زیر خواهد بود.



در ادامه با توجه به نمودار $v(t)$ و نمودار $i-v$ نمودار $i(t)$ را بر حسب t رسم می کنیم.



و در نهایت به محاسبه مقدار موثر $i(t)$ خواهیم پرداخت.

$$I_{rms} = \sqrt{\frac{1}{12}\int_0^{12} i^2(t)\,dt} = \sqrt{\frac{1}{12}\int_0^{12} i^2(t)\,dt} = \sqrt{\frac{1}{6}\int_0^{6} i^2(t)\,dt}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{6}\left[\int_0^{0/48}\left(4\sin\frac{\pi t}{6}\right)^2 dt + \int_{0/48}^{1}\left(12\sin\frac{\pi t}{6}-2\right)^2 dt + \int_1^{1/6}\left(8-4\sin\frac{\pi t}{6}\right)^2 dt + \int_{1/6}^{5}(2)^2\,dt\right]}$$

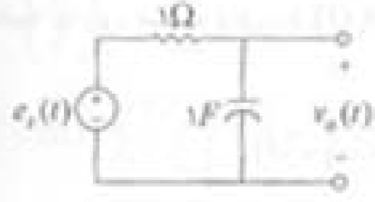
$$\rightarrow\ I_{rms} = \sqrt{\frac{1}{6}(30)} = 1/58\ A$$

مسئله ۲۸

حالت دایمی $v_o(t)$ و مقدار موثر آن را حساب کنید.

توان متوسط تلف شده در مقاومت 1Ω چیست.

$$e_s(t) = 4\left(\cos\frac{t}{2} - \frac{1}{3}\cos\frac{3t}{2} + \frac{1}{5}\cos\frac{5t}{2}\right)$$



شکل مسئله ۲۸

حل : با توجه به شکل مسئله و بنا بر قاعده تقسیم ولتاژ در حالت دایمی سینوسی داریم.

$$V_o = \frac{\frac{1}{j\omega}}{1+\frac{1}{j\omega}} V_s = \frac{1}{1+j\omega} V_s = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}} e^{-j\tan^{-1}\omega} V_s$$

و در نهایت با استفاده از قضیه جمع آثار داریم:

$$V_s = \left\{4, \omega = \frac{1}{2}\right\} + \left\{-\frac{4}{3}, \omega = \frac{3}{2}\right\} + \left\{\frac{4}{5}, \omega = \frac{5}{2}\right\} = \left\{4, \omega = \frac{1}{2}\right\} + \left\{\frac{4}{3} e^{j180^\circ}, \omega = \frac{3}{2}\right\} + \left\{\frac{4}{5}, \omega = \frac{5}{2}\right\}$$

$$V_o = \left(\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}} e^{-j\tan^{-1}\frac{1}{2}}\right)(4) + \left(\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{3}{2}\right)^2}} e^{-j\tan^{-1}\frac{3}{2}}\right)\left(\frac{4}{3} e^{j180^\circ}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{5}{2}\right)^2}} e^{-j\tan^{-1}\frac{5}{2}}\right)\left(\frac{4}{5}\right)$$

$$\rightarrow V_o = 3/58 e^{-j26/6^\circ} + 0/74 e^{j123/7^\circ} + 0/297 e^{-j68/2^\circ}$$

$$\rightarrow v_o(t) = 3/58 \cos\left(\frac{t}{2} - 26/6^\circ\right) + 0/74 \cos\left(\frac{3}{2}t - 123/7^\circ\right) + 0/297 \cos\left(\frac{5}{2}t - 68/2^\circ\right)$$

$$\rightarrow V_{rms} = \sqrt{\frac{(3/58)^2 + (0/74)^2 + (0/297)^2}{2}} = 2/59$$

می دانیم $P_{R_{av}} = I^2_{R_{rms}} \cdot R$ می باشد بنابراین ابتدا مقدار موثر $i_o(t)$ را محاسبه می کنیم.

$$I_o = \frac{V_o}{\frac{1}{j\omega}} = j\omega V_o = \omega V_o e^{j90^\circ}$$

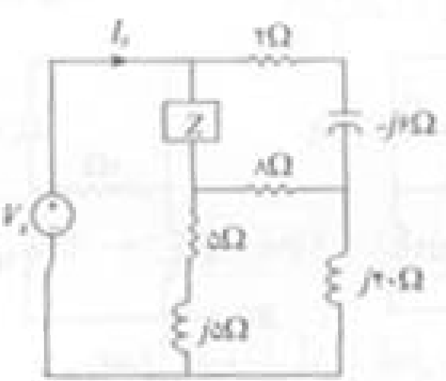
$$\rightarrow I_o = \left(\frac{1}{2}\right)(3/58) e^{-j26/6^\circ} \cdot e^{j90^\circ} + \left(\frac{3}{2}\right)(0/74) e^{j123/7^\circ} \cdot e^{j90^\circ} + \left(\frac{5}{2}\right)(0/297) e^{-j68/2^\circ} \cdot e^{j90^\circ}$$

$$= 1/79 e^{j63/4^\circ} + 1/11 e^{j213/7^\circ} + 0/74 e^{j21/8^\circ} \rightarrow I_{R_{rms}} = \sqrt{\frac{(1/79)^2 + (1/11)^2 + (0/74)^2}{2}} = 1/58$$

$$P_{R_{av}} = I^2_{R_{rms}} \cdot R = (1/58)^2 (1) = 2/49\ W$$

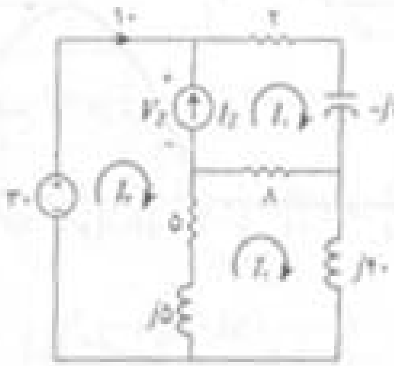
مسئله ۳۹

$(I = 10\angle 0^\circ\ ,\ V_s = 30\angle 0^\circ)$; $Z = ?$



شکل مسئله ۳۹

حل : برای محاسبه Z ، منبع جریان آزمایشی I_Z را بجای امپدانس Z جایگزین کرده و مدار را بصورت زیر رسم می کنیم.



$I_x = 10\ ,\ I_Z = I_1 - I_x \ \rightarrow\ I_1 = I_Z + I_x = I_Z + 10$

$$\begin{cases} \text{برای مش ۱ } KVL \ \rightarrow\ -V_Z + 2(I_Z+10) - j6(I_Z+10) + 8(I_Z+10-I_2) = 0 \\ \text{برای مش ۲ } KVL \ \rightarrow\ (5+j5)(I_2-10) + 8(I_2-(I_Z+10)) + j40\,I_2 = 0 \end{cases}$$

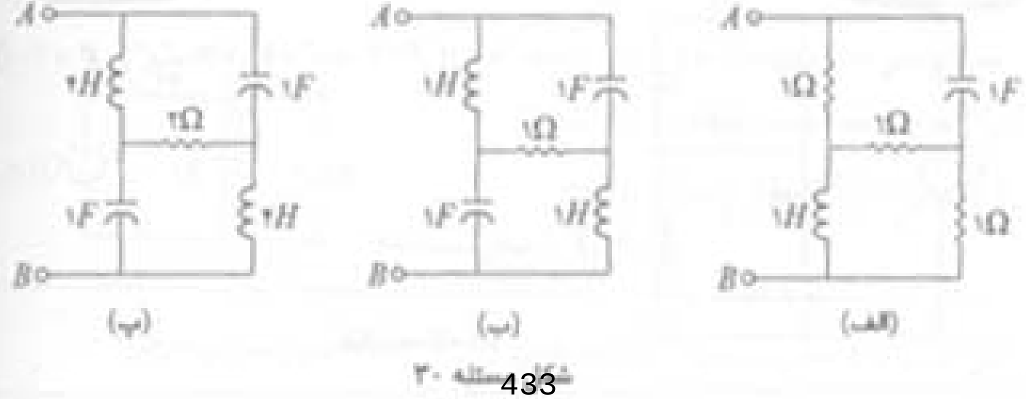
$$\rightarrow \begin{cases} (10-j6)I_Z - 8I_2 = V_Z - 100 + j60 \\ -8I_Z + (13+j45)I_2 = 130 + j50 \end{cases}$$

$$\rightarrow\ I_Z = \frac{\begin{vmatrix} V_Z - 100 + j60 & -8 \\ 130 + j50 & 13 + j45 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 10 - j6 & -8 \\ -8 & 13 + j45 \end{vmatrix}} = \frac{13 + j45}{336 + j372} V_Z + K$$

$$\rightarrow\ Z = \frac{336 + j372}{13 + j45} = 9/6 - j2/69$$

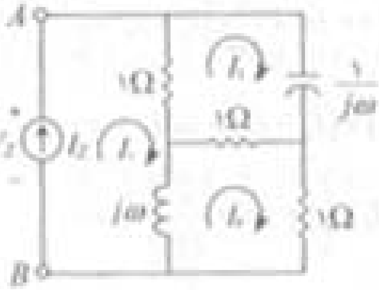
مسئله ۳۰

$Z_{AB} = ?$



شکل مسئله ۳۰

حل: الف ـ بدین منظور منبع آزمایشی I_Z را به دو سر A و B وصل می کنیم همچنین فرض می کنیم مدار در حالت دایمی سینوسی با فرکانس زاویه ای ω باشد.



$I_1=I_Z$

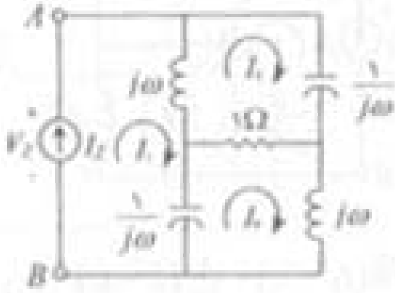
$$\text{برای مش ۱ } KVL \rightarrow -V_Z+(I_Z-I_2)+j\omega(I_Z-I_3)=0 \rightarrow (1+j\omega)I_Z-I_2-j\omega I_3=V_Z$$

$$\text{برای مش ۲ } KVL \rightarrow (I_2-I_Z)+\left(\frac{1}{j\omega}\right)I_2+(I_2-I_3)=0 \rightarrow -I_Z+\left(2+\frac{1}{j\omega}\right)I_2-I_3=0$$

$$\text{برای مش ۳ } KVL \rightarrow (j\omega)(I_3-I_Z)+(I_3-I_2)+I_3=0 \rightarrow -j\omega I_Z-I_2+(2+j\omega)I_3=0$$

$$\rightarrow I_Z=\frac{\begin{vmatrix} V_Z & -1 & -j\omega \\ 0 & 2+\frac{1}{j\omega} & -1 \\ 0 & -1 & 2+j\omega \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1+j\omega & -1 & -j\omega \\ -1 & 2+\frac{1}{j\omega} & -1 \\ -j\omega & -1 & 2+j\omega \end{vmatrix}}=\frac{5+2j\omega+\frac{2}{j\omega}}{5+2j\omega+\frac{2}{j\omega}}V_Z=V_Z \rightarrow Z_{AB}=\frac{V_Z}{I_Z}=1$$

ب ـ همانند قسمت (الف) عمل می کنیم.



$I_1=I_Z$

$$\text{برای مش ۱ } KVL \rightarrow -V_Z+j\omega(I_Z-I_2)+\frac{1}{j\omega}(I_1-I_3)=0$$

$$\rightarrow \left(j\omega+\frac{1}{j\omega}\right)I_Z-j\omega I_2-\frac{1}{j\omega}I_3=V_Z$$

KVL برای مش۲ $\rightarrow\ j\omega(I_۱ - I_Z) + \frac{۱}{j\omega}I_۱ + (I_۱ - I_۲) = ۰$

$$\rightarrow\ -j\omega I_Z + \left(۱ + j\omega + \frac{۱}{j\omega}\right)I_۱ - I_۲ = ۰$$

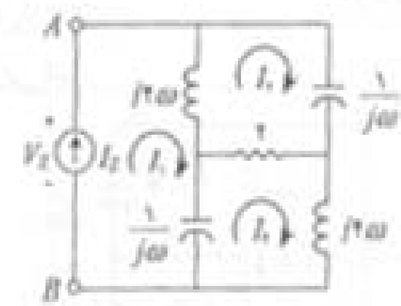
KVL برای مش۳ $\rightarrow\ \frac{۱}{j\omega}(I_۲ - I_Z) + (I_۲ - I_۱) + j\omega I_۲ = ۰$

$$\rightarrow\ -\frac{۱}{j\omega}I_Z - I_۱ + \left(۱ + j\omega + \frac{۱}{j\omega}\right)I_۲ = ۰$$

$$\rightarrow\ I_Z = \frac{\begin{vmatrix} V_Z & -j\omega & -\frac{۱}{j\omega} \\ ۰ & ۱ + j\omega + \frac{۱}{j\omega} & -۱ \\ ۰ & -۱ & ۱ + j\omega + \frac{۱}{j\omega} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} j\omega + \frac{۱}{j\omega} & -j\omega & -\frac{۱}{j\omega} \\ -j\omega & ۱ + j\omega + \frac{۱}{j\omega} & -۱ \\ -\frac{۱}{j\omega} & -۱ & ۱ + j\omega + \frac{۱}{j\omega} \end{vmatrix}} = \frac{۲ - \omega^۲ - \frac{۱}{\omega^۲} + j۲\omega + \frac{۲}{j\omega}}{۲ - \omega^۲ - \frac{۱}{\omega^۲} + j۲\omega + \frac{۲}{j\omega}} V_Z = V_Z$$

$$\rightarrow\ Z_{AB} = \frac{V_Z}{I_Z} = ۱\Omega$$

پ ـ به همین ترتیب برای مدار (پ) خواهیم داشت.



$I_۱ = I_Z$

KVL برای مش۱ $\rightarrow\ -V_Z + j۴\omega(I_Z - I_۲) + \frac{۱}{j\omega}(I_۱ - I_۳) = ۰$

$$\rightarrow\ \left(j۴\omega + \frac{۱}{j\omega}\right)I_Z - j۴\omega I_۲ - \frac{۱}{j\omega}I_۳ = V_Z$$

KVL برای مش۲ $\rightarrow\ j۴\omega(I_۲ - I_Z) + \frac{۱}{j\omega}I_۲ + ۲(I_۲ - I_۳) = ۰$

$$\rightarrow\quad -j4\omega I_Z+\left(2+j4\omega+\frac{1}{j\omega}\right)I_1-2I_2=0$$

برای مش ۳ KVL $\rightarrow\quad \frac{1}{j\omega}(I_2-I_Z)+2(I_2-I_1)+j4\omega I_2=0$

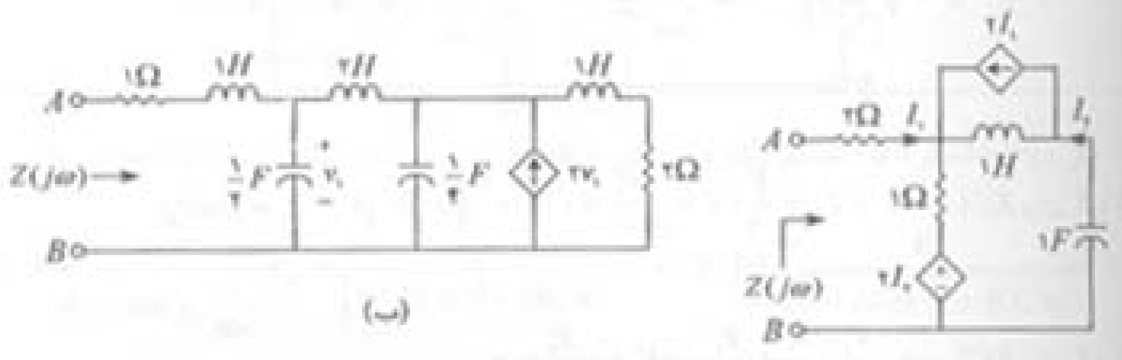
$$\rightarrow\quad -\frac{1}{j\omega}I_Z-2I_1+\left(2+j4\omega+\frac{1}{j\omega}\right)I_2=0$$

$$I_Z=\frac{\begin{vmatrix} V_Z & -j4\omega & -\frac{1}{j\omega} \\ 0 & 2+j4\omega+\frac{1}{j\omega} & -2 \\ 0 & -2 & 2+j4\omega+\frac{1}{j\omega}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} j4\omega+\frac{1}{j\omega} & -j4\omega & -\frac{1}{j\omega} \\ -j4\omega & 2+j4\omega+\frac{1}{j\omega} & -2 \\ -\frac{1}{j\omega} & -2 & 2+j4\omega+\frac{1}{j\omega}\end{vmatrix}}=\frac{8-16\omega^2-\frac{1}{\omega^2}+j16\omega+\frac{4}{j\omega}}{16-32\omega^2-\frac{2}{\omega^2}+j32\omega+\frac{8}{j\omega}}V_Z=\frac{V_Z}{2}$$

$$\rightarrow\quad Z_{AB}=\frac{V_Z}{I_Z}=2\Omega$$

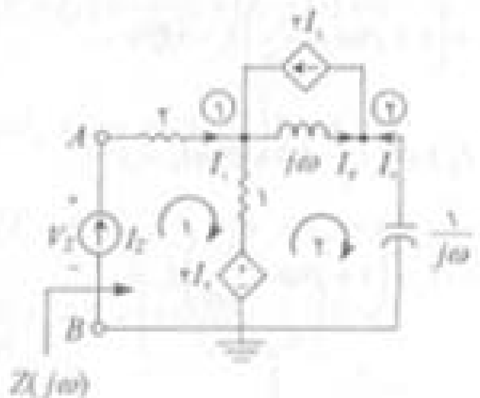
مسئله ۳۱

$Z_{AB}=?$



شکل مسئله ۳۱

حل: الف ـ در حالت دایمی سینوسی و به ازای فرکانس زاویه ای ω مدار به صورت زیر خواهد بود که منبع جریان آزمایش I_Z را به دو سر A و B وصل کرده ایم.



$I_1 = I_Z \;,\; V_1 = V_Z - 2I_1 = V_Z - 2I_Z$

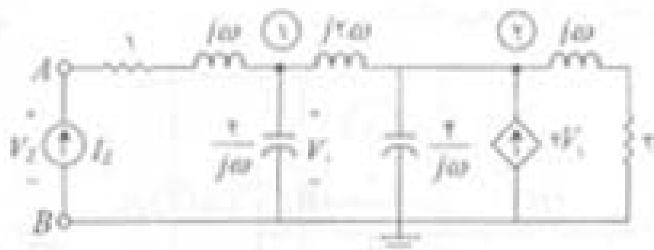
KCL برای گره مرکب شامل ① و ② $\rightarrow\; -I_Z + \dfrac{V_Z - 2I_Z - (-2I_1)}{1} - I_2 = 0 \;\rightarrow\; I_2 = 3I_Z - V_Z$

KCL برای گره ② $\rightarrow\; -I_3 + 2I_Z - (3I_Z - V_Z) = 0 \;\rightarrow\; I_3 = V_Z - I_Z$

KVL برای حلقه شامل مشهای ۱ و ۲ $\rightarrow\; -V_Z + 2I_Z + j\omega(V_Z - I_Z) - \dfrac{1}{j\omega}(3I_Z - V_Z) = 0$

$$\rightarrow\; (1 - \omega^2 - j\omega)V_Z = (3 - \omega^2 - 2j\omega)I_Z \;\rightarrow\; Z(j\omega) = \frac{V_Z}{I_Z} = \frac{3 - \omega^2 - 2j\omega}{1 - \omega^2 - j\omega}$$

ب ـ همانند قسمت (الف) عمل می کنیم



$$\begin{cases} \text{KCL برای گره ①} \;\rightarrow\; -I_Z + \dfrac{V_1}{\frac{2}{j\omega}} + \dfrac{V_1 - V_2}{j2\omega} = 0 \;\rightarrow\; (1 - \omega^2)V_1 - V_2 = j2\omega I_Z \\ \text{KCL برای گره ②} \;\rightarrow\; \dfrac{V_2 - V_1}{j2\omega} + \dfrac{V_2}{\frac{2}{j\omega}} - 4V_1 + \dfrac{V_2}{2 + j\omega} = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow\; \left(-4 - \frac{1}{j2\omega}\right)V_1 + \left(j\frac{\omega}{2} + \frac{1}{j2\omega} + \frac{1}{2 + j\omega}\right)V_2 = 0$$

$$\rightarrow V_1=\frac{\begin{vmatrix} j2\omega I_Z & -1 \\ 0 & j\frac{\omega}{2}+\frac{1}{j2\omega}+\frac{1}{2+j\omega}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1-\omega^2 & -1 \\ -2-\frac{1}{j2\omega} & j\frac{\omega}{2}+\frac{1}{j2\omega}+\frac{1}{2+j\omega}\end{vmatrix}}=\frac{1-\frac{\omega^2}{2}+\frac{j2\omega}{2+j\omega}}{-2+j\frac{2\omega-\omega^3}{2}+\frac{1-\omega^2}{2+j\omega}}I_Z$$

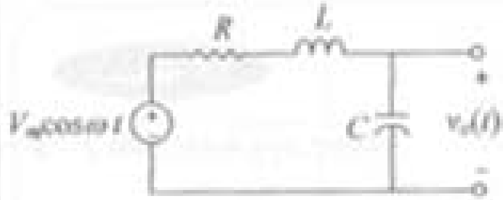
$$=\frac{2-\omega^2+j\left(2\omega-\frac{\omega^3}{2}\right)}{-3-\frac{7\omega^2}{2}+\frac{\omega^4}{2}+j\left(-\frac{\omega}{2}-\frac{\omega^3}{2}\right)}I_Z$$

$$V_Z=1+j\omega I_Z+V_1=\left(1+j\omega+\frac{2-\omega^2+j\left(2\omega-\frac{\omega^3}{2}\right)}{-3-\frac{7\omega^2}{2}+\frac{\omega^4}{2}+j\left(-\frac{\omega}{2}-\frac{\omega^3}{2}\right)}\right)I_Z$$

$$\rightarrow Z_{AB}=\frac{V_Z}{I_Z}=1+j\omega+\frac{2-\omega^2+j\left(2\omega-\frac{\omega^3}{2}\right)}{-3-\frac{7\omega^2}{2}+\frac{\omega^4}{2}+j\left(-\frac{\omega}{2}-\frac{\omega^3}{2}\right)}$$

مسئله ۳۲

- به ازای چه فرکانسی دامنه ولتاژ $v_o(t)$ حداکثر می شود.
- اندازه دامنه حداکثر در این فرکانس چیست.
- دامنه و فرکانس حداکثر را برحسب Q مدار بیان کنید.



شکل مسئله ۳۲

حل: با استفاده از قاعده تقسیم ولتاژ و با فرض اینکه مدار در حالت دایمی سینوسی باشد خواهیم داشت.

$$V_o=\frac{\frac{1}{j\omega c}}{R+j\omega L+\frac{1}{j\omega c}}V_m=\frac{V_m}{\left(1-LC\omega^2\right)+jRC\omega}\quad\rightarrow\quad |V_o|=\frac{V_m}{\sqrt{(1-LC\omega^2)^2+R^2C^2\omega^2}}$$

در ادامه با مشتق گیری از $|V_o|$ نسبت به ω و برابر صفر قرار دادن آن فرکانس مورد نظر را بدست می آوریم.

$$\frac{d|V_o|}{d\omega}=0\quad\rightarrow\quad\frac{V_m\left\{2(-2LC\omega)\left(1-LC\omega^2\right)+2R^2C^2\omega\right\}}{2\left((1-LC\omega^2)^2+R^2C^2\omega^2\right)^{\frac{3}{2}}}=0\quad\rightarrow\quad\omega=\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{2L^2}}$$

بنابراین دامنه حداکثر برابر خواهد شد با

$$|V_o|_{max} = V_o|_{\omega^2=\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{2L^2}} = \frac{V_m}{\sqrt{\left(1-LC\left(\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{2L^2}\right)\right)^2 + R^2C^2\left(\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{2L^2}\right)}}$$

با توجه به شکل مدار معادله دیفرانسیل خروجی بر حسب ورودی بصورت زیر است.

$$\frac{d^2v_o}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dv_o}{dt} + \frac{1}{LC}v_o = v_i \quad \rightarrow \quad \alpha = \frac{R}{2L} \quad , \quad \omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad , \quad Q = \frac{\omega_o}{2\alpha}$$

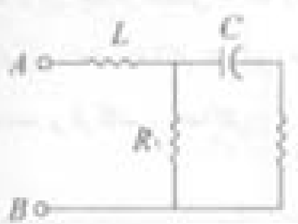
$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{2L^2}} = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}\right)^2 - 2\left(\frac{R}{2L}\right)^2} = \sqrt{\omega_o^2 - 2\alpha^2} = \omega_o\sqrt{1-\frac{2\alpha^2}{\omega_o^2}} = \omega_o\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}}$$

$$|V_o|_{max} = \frac{V_m}{\sqrt{\left(1-\frac{1}{\omega_o^2}\left(\omega_o^2-2\alpha^2\right)\right)^2 + \left(\frac{2\alpha}{\omega_o^2}\right)^2\left(\omega_o^2-2\alpha^2\right)}}$$

$$= \frac{V_m}{\sqrt{\frac{4\alpha^2}{\omega_o^2} - \frac{4\alpha^4}{\omega_o^4}}} = \frac{V_m}{\sqrt{\frac{1}{Q^2}-\frac{1}{4Q^4}}} = \frac{2Q^2}{\sqrt{4Q^2-1}}V_m$$

مسئله ۳۳

فرکانس تشدید مدار چیست؟



شکل مسئله ۳۳

حل : با توجه به شکل مسئله امپدانس دو سر A و B بصورت زیر بدست می آید.

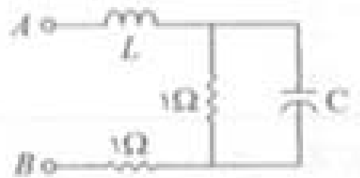
$$Z_{AB}(j\omega) = j\omega L + R_1 \parallel \left(R_2 + \frac{1}{j\omega C}\right)$$

$$= \frac{R_1 + R_1R_2(R_1+R_2)C^2\omega^2}{(R_1+R_2)^2C^2\omega^2+1} + j\omega\left(\frac{LC^2(R_1+R_2)^2\omega^2 + L - CR_1^2}{(R_1+R_2)^2C^2\omega^2+1}\right)$$

می دانیم به ازای فرکانس تشدید، $I_m\left[Z_{AB}(j\omega_o)\right] = 0$ می باشد بنابراین داریم.

$$I_m\{Z_{AB}(j\omega_o)\} = 0 \rightarrow LC^2(R_1+R_2)^2\omega_o^2 + L - CR_1^2 = 0 \rightarrow \omega_o = \frac{1}{C(R_1+R_2)}\sqrt{\frac{CR_1^2}{L}-1}$$

مسئله ۳۴



شکل مسئله ۳٤

- فرکانس تشدید ω_o چیست.
- L و C را چنان تعیین کنید که $\omega_o = 100$ باشد.

حل : برای محاسبه ω_o همانند مسئله قبل عمل می کنیم

$$Z_{AB}(j\omega) = j\omega L + 1\,\|\left(\frac{1}{j\omega C}\right) + 1 = \frac{2 + C^2\omega^2}{1 + C^2\omega^2} + j\omega\frac{L - C + C^2L\omega^2}{1 + \omega^2C^2}$$

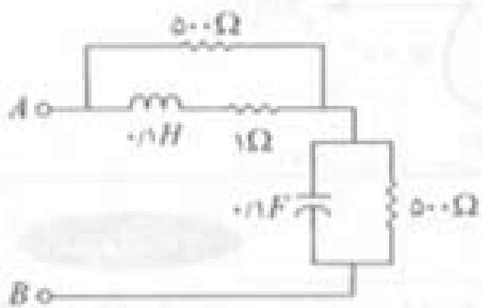
$$I_m\{Z_{AB}(j\omega_o)\} = 0 \rightarrow L - C + C^2L\omega_o^2 = 0 \rightarrow \omega_o = \frac{1}{C}\sqrt{\frac{C}{L}-1}$$

برای داشتن $\omega_o = 100$ با انتخاب $C = 0.01F$ خواهیم داشت.

$$100 = \frac{1}{0.01}\sqrt{\frac{0.01}{L}-1} \rightarrow L = 0.005H$$

مسئله ۳۵

- فرکانس تشدید ω_o چیست.



شکل مسئله ۳۵

حل : همانند مسئله قبل عمل می کنیم.

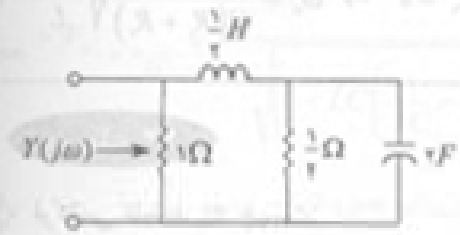
$$Z_{AB}(j\omega) = (1 + j0.1\omega)\,\|\,500 + 500\,\|\,\frac{1}{j0.1\omega} = \frac{500 + j50\omega}{501 + j0.1\omega} + \frac{500}{1 + j50\omega}$$

$$= \left\{\frac{(500)(501) + 5\omega^2}{(501)^2 + (0.1\omega)^2} + \frac{500}{1 + (50\omega)^2}\right\} + j50\omega\left\{\frac{500}{(501)^2 + (0.1\omega)^2} - \frac{500}{1 + (50\omega)^2}\right\}$$

$$I_m\{Z_{AB}(j\omega_o)\} = 0 \rightarrow \frac{500}{(501)^2 + (0.1\omega_o)^2} - \frac{500}{1 + (50\omega_o)^2} = 0 \rightarrow \omega_o = 10.02$$

مسئله ۳۶

مکان ادمیتانس ورودی $Y(j\omega)$ را تعیین کنید.



شکل مسئله ۳۶

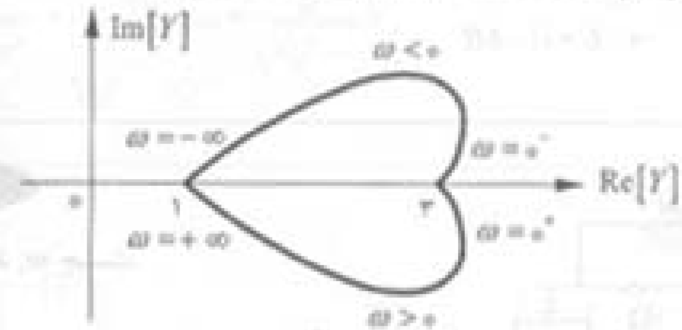
حل : با توجه به شکل مسئله داریم:

$$Y(j\omega)=1+\frac{1}{j\frac{\omega}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)\|\left(\frac{1}{j2\omega}\right)}=\left(1+\frac{2}{(1-\omega^2)^2+\omega^2}\right)+j\left(\frac{-2\omega^3}{(1-\omega^2)^2+\omega^2}\right)$$

$$\lim_{\omega\to 0^+} Y(j\omega)=3+j0^-=3\angle 0^- \quad ; \quad \lim_{\omega\to 0^-} Y(j\omega)=3+j0^+=3\angle 0^+$$

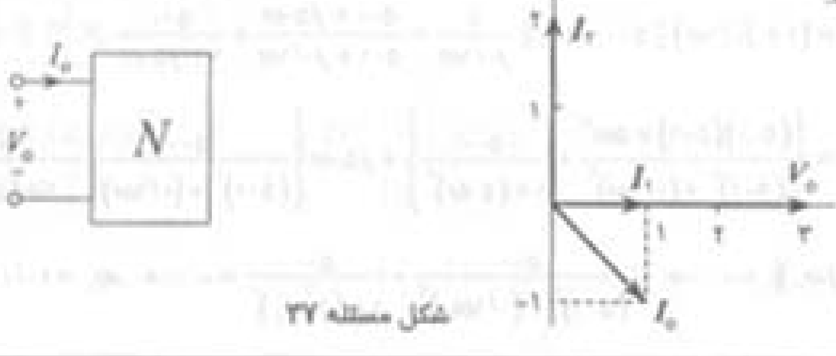
$$\lim_{\omega\to +\infty} Y(j\omega)=1+j0^-=1\angle 0^- \quad ; \quad \lim_{\omega\to -\infty} Y(j\omega)=1+j0^+=1\angle 0^+$$

بنابراین مکان ادمیتانس $Y(j\omega)$ در صفحه مختلط بصورت زیر خواهد بود.



مسئله ۳۷

در داخل یک قطبی، سه عنصر با امپدانسهای Z_1 و Z_2 و Z_3 و با فازور های جریان I_1 و I_2 و I_3 وجود دارند. شکل مدار داخل یک قطبی را رسم کنید. نوع و مقادیر هر عنصر را در فرکانس $\omega=2$ تعیین کنید.

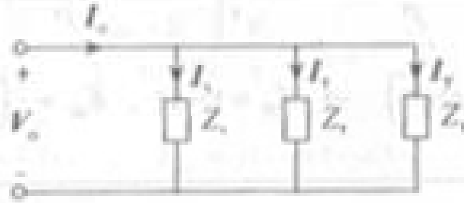


شکل مسئله ۳۷

حل : با توجه به فازورهای رسم شده داریم.

$$V_0 = 4\angle 0 \quad , \quad I_0 = \sqrt{2}\angle -45^\circ \quad , \quad I_1 = 1\angle 0 \quad , \quad I_2 = 2\angle 90^\circ$$

با توجه به صورت مسئله، یک قطبی را می توان بصورت زیر در نظر گرفت.



بنابراین داریم

$$Z_1 = \frac{V_0}{I_1} = \frac{4e^{j0}}{1e^{j0}} = 4\Omega \quad \to \quad R = 4\Omega$$

$$Z_2 = \frac{V_0}{I_2} = \frac{4e^{j0}}{2e^{j90}} = \frac{4}{2}e^{-j90} = \frac{1}{j\frac{2}{4}} \quad \to \quad \omega C = \frac{2}{4} \quad , \quad \omega = 2 \quad \to \quad C = \frac{1}{4}F$$

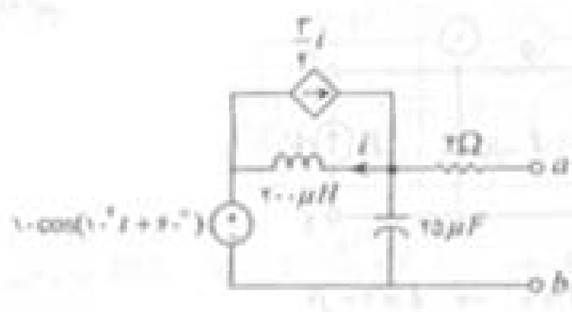
$$I_3 = I_0 - \left(I_1 + I_2\right) = \sqrt{2}e^{-j45} - \left(1 + 2e^{j90}\right) = -3j$$

$$Z_3 = \frac{V_0}{I_3} = \frac{3}{-3j} = j \quad \to \quad \omega L = 1 \quad , \quad \omega = 2 \quad \to \quad L = \frac{1}{2}H$$

بنابراین یک قطبی N یک مدار RLC موازی است که مقادیر آنها بصورت فوق می باشد.

مسئله ۳۸

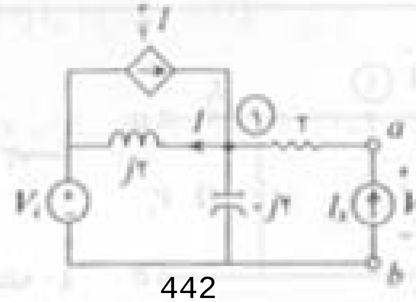
معادل تونن دو سر a و b را بدست آورید.



شکل مسئله ۳۸

حل: بدین منظور منبع جریان آزمایشی I_s را به دو سر a و b وصل کرده وولتاژ دو سر آن را بدست می آوریم.

با توجه به شکل مسئله $\omega = 10^4$ بوده و مدار در حالت دایمی سینوسی بصورت زیر خواهد بود.



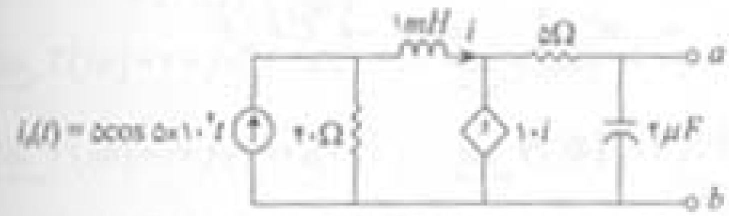
$V_1 = V_x - 2I_x$, $V_s = 10\angle 60^\circ = 5 + j5\sqrt{3}$, $I = \dfrac{V_1 - V_s}{j2} = \dfrac{V_x - 2I_x - (5 + j5\sqrt{3})}{j2}$

KCL برای گره ۱ $\rightarrow$ $\dfrac{V_x - 2I_x - (5 + j5\sqrt{3})}{j2} - \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{V_x - 2I_x - (5 + j5\sqrt{3})}{j2}\right) + \dfrac{V_x - 2I_x}{-j4} - I_x = 0$

$\rightarrow V_x = (2 - j3)I_x + \frac{1}{2}(5 + j5\sqrt{3}) \rightarrow Z_{th} = 2 - j3$, $E_{oc} = \frac{1}{2}(5 + j5\sqrt{3}) = 5\angle 60^\circ$

مسئله ۳۹

معادل تونن دو سر a و b را بدست آورید.



شکل مسئله ۳۹

حل: بدین منظورمنبع جریان آزمایشی I_x را به دو سر a و b وصل کرده وولتاژ دوسر آن را بدست می آوریم درحالت دایمی سینوسی مداربصورت زیرخواهد بود که درآن $\omega = 5\times10^4$ بوده و ازتبدیل نرتن به تونن استفاده کرده ایم.

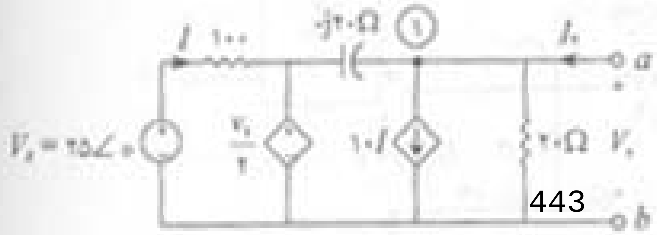
KVL برای مش ۱ $\rightarrow$ $-200 + 40I + j50I + 10I = 0 \rightarrow I = 2 - j2$

KCL برای گره ۱ $\rightarrow$ $\dfrac{V_x - 10(2 - j2)}{5} + \dfrac{V_x}{-j5} - I_x = 0 \rightarrow V_x = \left(\frac{5}{2} - j\frac{5}{2}\right)I_x - j20$

$\rightarrow Z_{th} = \frac{5}{2} - j\frac{5}{2}$, $E_{oc} = -j20 = 20\angle -90$

مسئله ۴۰

معادل تونن دو سر a و b جیست.



شکل مسئله ۴۰

حل : با توجه به شکل مسئله داریم:

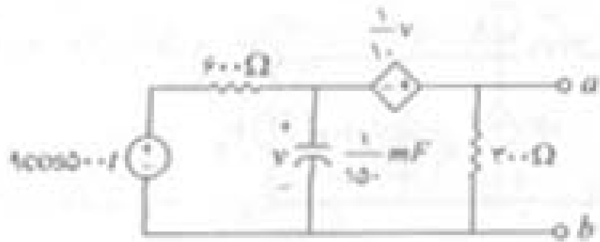
$$I = \frac{V_۱ - \frac{V_۱}{۲}}{۱۰۰} = \frac{۵۰ - V_۱}{۲۰۰}$$

$$\text{KCL برای گره ۱} \rightarrow \frac{V_۱ - \frac{V_۱}{۲}}{-j۴۰} + ۱۰\left(\frac{۵۰ - V_۱}{۲۰۰}\right) + \frac{V_۱}{۲۰} - I_۱ = ۰ \rightarrow V_۱ = -j۸۰ I_۱ + j۲۰۰$$

$$\rightarrow Z_{th} = -j۸۰ \quad , \quad E_{oc} = j۲۰۰ = ۲۰۰\angle ۹۰^\circ$$

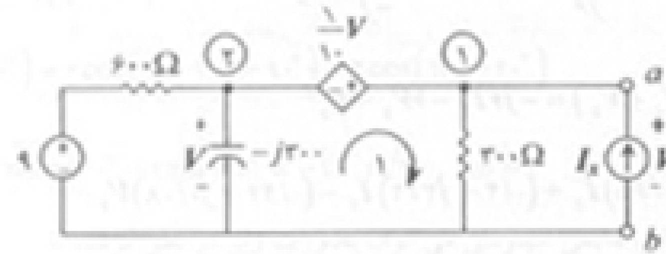
مسئله ۴۱

معادل تونن دو سر a و b چیست.



شکل مسئله ۴۱

حل : در حالت دایمی سینوسی مدار بصورت زیر خواهد بود که در آن منبع جریان آزمایشی I_s را به دو سر a و b وصل کرده ایم.



$$\text{KVL برای مش ۱} \rightarrow -V - \frac{V}{۱۰} + V_s = ۰ \rightarrow V = \frac{۱۰}{۱۱}V_s$$

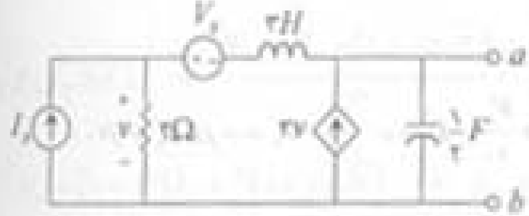
$$\text{KCL برای گره مرکب شامل ۱ و ۲} \rightarrow \frac{\frac{۱۰}{۱۱}V_s - ۹}{۶۰۰} + \frac{\frac{۱۰}{۱۱}V_s}{-j۳۰۰} + \frac{V_s}{۳۰۰} - I_s = ۰$$

$$\rightarrow V_s = (۱۴۸/۳ - j۹۲/۷)I_s + (۲/۲ - j۱/۴)$$

$$\rightarrow Z_{th} = ۱۴۸/۳ - j۹۲/۷ \quad , \quad E_{oc} = ۲/۲ - j۱/۴ = ۲/۶\angle -۳۲^\circ$$

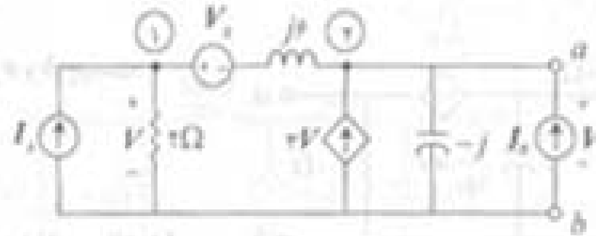
مسئله ۴۲

معادل تونن دو سر a و b چیست. $(\omega = 2)$



شکل مسئله ٤٢

حل : بدین منظور منبع جریان آزمایشی I_x را به دو سر a و b وصل کرده و از روش فازوری استفاده میکنیم.



$$\text{KCL برای گره ۱} \rightarrow -I_s + \frac{(V-V_s)-V_x}{j6} + \frac{V}{2} = 0 \rightarrow V = \frac{1}{1+3j}(j6I_s + V_s + V_x)$$

$$\text{KCL برای گره ۲} \rightarrow \frac{V_x-(V-V_s)}{j6} - 2V + \frac{V_x}{-j} - I_x = 0 \rightarrow (1+18j)V = -j6I_x - 6V_x + V_s$$

$$\rightarrow \frac{1+18j}{1+3j}(j6I_s + V_s + V_x) = -j6I_x - 6V_x + V_s$$

$$\rightarrow V_x = -(0/08 + j0/65)I_x + (0/4 - j3/2)I_s - (0/22 + j0/08)V_s$$

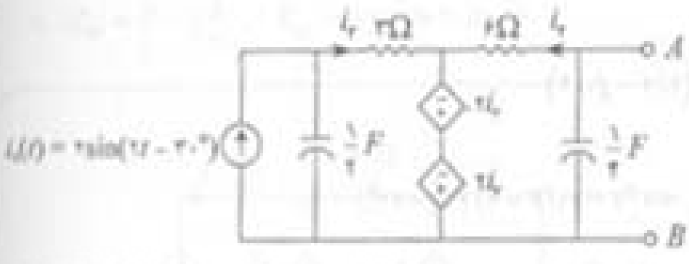
$$\rightarrow Z_{th} = -0/08 - j0/65 \quad , \quad E_{oc} = (0/4 - j3/2)I_s - (0/22 + j0/08)V_s$$

مسئله ۴۳

الف ـ $Z_{AB}(j\omega) = ?$

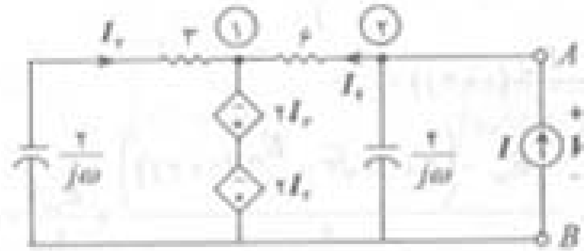
ب ـ معادل تونن دو سر A و B چیست.

پ ـ اگر نقاط A و B اتصال کوتاه شود، چه جریانی از شاخه AB می گذرد.



شکل مسئله ۴۳

حل : الف ـ بدین منظور منبع جریان آزمایش I را به دو سر A و B وصل کرده و تمامی منابع نابسته را برابر صفر قرار می دهیم.



$$I_y = \frac{V_۱}{۳ + \frac{۲}{j\omega}} = \frac{j\omega}{۲ + j۳\omega} V_۱ \quad , \quad I_x = \frac{V - V_۱}{۶}$$

$$\rightarrow \; V_۱ = -۲I_y - ۲I_x = \frac{-j۲\omega}{۲ + j۳\omega} V_۱ + \frac{۱}{۳} V_۱ - \frac{۱}{۳} V \;\; \rightarrow \;\; V_۱ = \frac{۲ + j۳\omega}{۴ + j۱۲\omega} V$$

$$\text{۲ برای گره } KCL \;\; \rightarrow \;\; \frac{V - \left(- \frac{۲ + j۳\omega}{۴ + j۱۲\omega} \right) V}{۶} + \frac{V}{\frac{۲}{j\omega}} - I = ۰$$

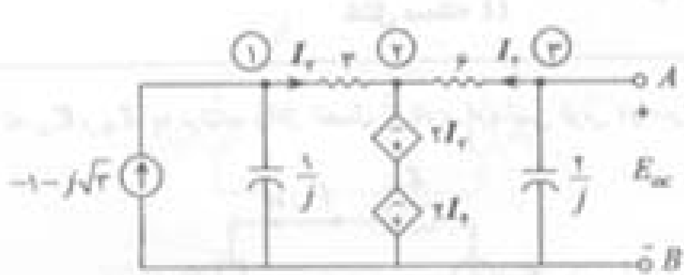
$$(۲ + j۳\omega) V = ۸I \;\; \rightarrow \;\; Z(j\omega) = \frac{V}{I} = \frac{۸}{۲ + j۳\omega}$$

ب ـ ابتدا فازور منبع جریان ورودی را بدست می آوریم.

$$i_s(t) = ۲\sin\left(۲t - ۳۰^\circ\right) = ۲\cos\left(۲t - ۳۰^\circ - ۹۰^\circ\right) = ۲\cos\left(۲t - ۱۲۰^\circ\right)$$

$$\rightarrow \;\; I_s = ۲\angle ۱۲۰^\circ = ۲\cos ۱۲۰^\circ - ۲\sin ۱۲۰^\circ = -۱ - j\sqrt{۳} \quad , \quad \omega = ۲$$

بنابراین شکل مدار را در حالت دایمی سینوسی می توان بصورت زیر در نظر گرفت.



$$\begin{cases} I_y = \dfrac{V_۱ - V_۲}{۳} \\ I_x = \dfrac{V_۳ - V_۲}{۶} \end{cases} \rightarrow \;\; V_۲ = -۲I_x - ۲I_y = V_۲ - \frac{V_۳}{۳} - ۲\frac{V_۱}{۳} \;\; \rightarrow \;\; V_۱ = -\frac{V_۳}{۲} = -\frac{E_{oc}}{۲}$$

$$① \text{ برای گره } KCL \rightarrow -\left(-1-j\sqrt{3}\right)+\frac{-\frac{E_{oc}}{2}}{\frac{1}{j}}+\frac{-\frac{E_{oc}}{2}-V_1}{2}=0$$

$$\rightarrow V_1 = 2+j2\sqrt{3}-\frac{E_{oc}}{2}(1+2j)$$

$$② \text{ برای گره } KCL \rightarrow -\frac{E_{oc}-\left(2+j2\sqrt{3}-\frac{E_{oc}}{2}(1+2j)\right)}{6}+\frac{\frac{E_{oc}}{2}}{\frac{2}{j}}=0$$

$$\rightarrow E_{oc}=\frac{1+j\sqrt{3}}{1+j3}=\frac{2\angle 60}{\sqrt{10}\angle 71/6}=1/26\angle -11/6^\circ$$

و با استفاده از $Z_{AB}(j\omega)$ بدست آمده در قسمت (الف) امپدانس تونن را بدست خواهیم آورد.

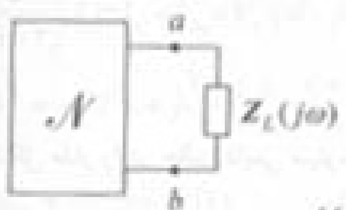
$$Z_{th}=Z_{AB}(j2)=\frac{8}{2+j6}=0/4-j1/2$$

پ ـ با استفاده از نمودار معادل تونن بدست آمده در قسمت (ب) خواهیم داشت:

$$I_{sc}=\frac{E_{oc}}{Z_{th}}=\frac{1/26\angle -11/6^\circ}{0/4-j1/2}=\frac{1/26\angle -131/6^\circ}{1/26\angle -71/6^\circ}=1\angle 60^\circ \rightarrow i_{sc}(t)=\cos\left(2t+60^\circ\right)$$

مسئله ۴۴

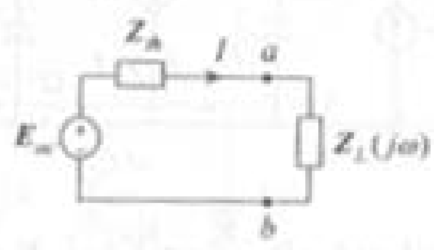
معادل تونن دو سر a و b چیست. (یک قطبی N، خطی و تغییر ناپذیر با زمان و با منابع ثابت هم فرکانس بوده و در حالت دایمی سینوسی است.)



$Z_L(j\omega)$	∞	$-j8$	$-j4$
$\lvert V_{ab}\rvert$	100	160	$\frac{400}{3}$

شکل مسئله ۴۴

حل: فرض کنید که E_{oc} و Z_{th} به ترتیب ولتاژ اتصال کوتاه و امپدانس تونن دو سر a و b باشند.



$$V_{ab}=\frac{Z_L}{Z_{th}+Z_L}E_{oc}=\frac{\mathrm{Re}(Z_L)+j\,\mathrm{Im}(Z_L)}{\mathrm{Re}(Z_{th})+\mathrm{Re}(Z_L)+j\left[\mathrm{Im}(Z_{th})+\mathrm{Im}(Z_L)\right]}E_{oc}$$

$$\rightarrow \quad |V_{ab}| = \sqrt{\frac{\mathrm{Re}^2(Z_L) + \mathrm{Im}^2(Z_L)}{\left[\mathrm{Re}(Z_{th}) + \mathrm{Re}(Z_L)\right]^2 + \left[\mathrm{Im}(Z_{th}) + \mathrm{Im}(Z_L)\right]^2}}\,|E_{oc}|$$

$$\begin{cases} |V_{ab}| = 100 \\ Z_L = \infty \end{cases} \rightarrow \ 100 = |E_{oc}| \ , \ \begin{cases} |V_{ab}| = 160 \\ Z_L = -j8 \end{cases} \rightarrow \ 160 = \frac{8}{\sqrt{\mathrm{Re}^2(Z_L) + \left(\mathrm{Im}(Z_L) - 8\right)^2}}\,100$$

$$\begin{cases} |V_{ab}| = \frac{400}{3} \\ Z_L = -j4 \end{cases} \rightarrow \ \frac{400}{3} = \frac{8}{\sqrt{\mathrm{Re}^2(Z_L) + \left(\mathrm{Im}(Z_L) - 4\right)^2}}\,100$$

$$\begin{cases} \mathrm{Re}^2(Z_L) + \left(\mathrm{Im}(Z_L) - 8\right)^2 = 25 \\ \mathrm{Re}^2(Z_L) + \left(\mathrm{Im}(Z_L) - 4\right)^2 = 9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}(Z_L) = 3 \\ \mathrm{Im}(Z_L) = 4 \end{cases} \rightarrow \ Z_L = 3 + j4$$

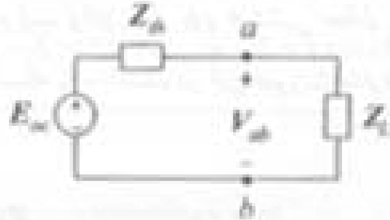
مسئله ۴۵

امپدانس دو سر a و b چیست.

Z_L	∞	۳	۱۲
$V_{ab(rms)}$	۱۳	۳	۹/۱

شکل مسئله ۴۵

حل: فرض کنید که E_{oc} و Z_{th} به ترتیب ولتاژ مدار باز و امپدانس معادل تونن مدار خطی و تغییر ناپذیر با زمان باشند. امپدانس دیده شده از دوسر a و b برابر امپدانس معادل تونن Z_{th} می باشد که درادامه آن را محاسبه خواهیم کرد.



با استفاده از عبارت بدست آمده برای $|V_{ab}|$ در مسئله قبل داریم.

$$V_{ab(rms)} = \frac{|V_{ab}|}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\mathrm{Re}^2(Z_L) + \mathrm{Im}^2(Z_L)}{\left[\mathrm{Re}(Z_{th}) + \mathrm{Re}(Z_L)\right]^2 + \left[\mathrm{Im}(Z_{th}) + \mathrm{Im}(Z_L)\right]^2}}\,\frac{|E_{oc}|}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{cases} V_{ab(rms)} = 13 \\ Z_L = \infty \end{cases} \rightarrow 13 = \frac{|E_{oc}|}{\sqrt{2}}$$

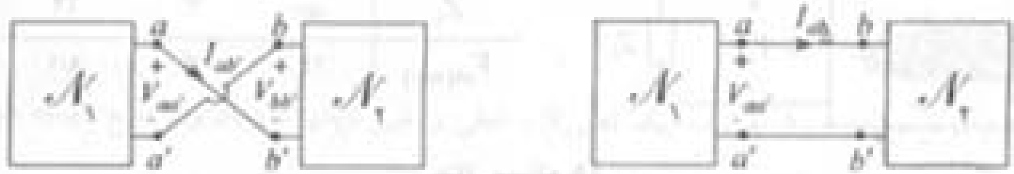
$$\begin{cases} V_{ab(rms)} = 3 \\ Z_L = 2 \end{cases} \rightarrow 3 = \frac{2}{\sqrt{\left(\mathrm{Re}(Z_{th}) + 2\right)^2 + \mathrm{Im}^2(Z_{th})}} 13$$

$$\begin{cases} V_{ab(rms)} = 9/1 \\ Z_L = 14 \end{cases} \rightarrow 9/1 = \frac{14}{\sqrt{\left(\mathrm{Re}(Z_{th}) + 2\right)^2 + \mathrm{Im}^2(Z_{th})}} 13$$

$$\begin{cases} \left(\mathrm{Re}(Z_{th}) + 2\right)^2 + \mathrm{Im}^2(Z_{th}) = 169 \\ \left(\mathrm{Re}(Z_{th}) + 12\right)^2 + \mathrm{Im}^2(Z_{th}) = 200 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}(Z_{th}) = 2 \\ \mathrm{Im}(Z_{th}) = 12 \end{cases} \rightarrow Z_{th} = 2 + j12$$

مسئله ۴۶

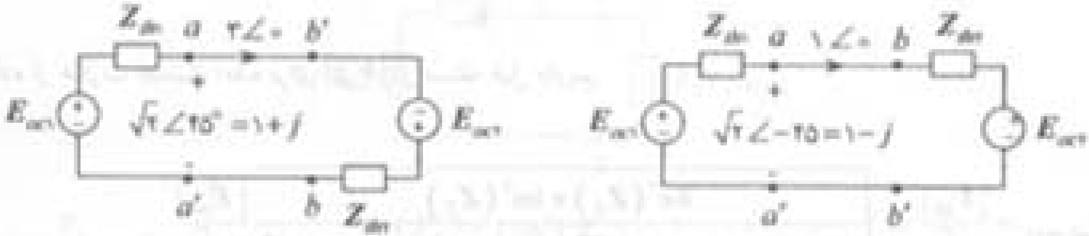
مدارهای معادل تونن شبکه های N_1 و N_2 را بدست آورید.



$I_{ab'} = 2\angle 0 \;,\; V_{aa'} = \sqrt{2}\angle -45^\circ$ (ب) $\qquad$ $I_{ab} = 1\angle 0 \;,\; V_{aa'} = \sqrt{2}\angle -45^\circ$ (الف)

شکل مسئله ۴۶

حل : فرض کنیم که E_{oc1} و Z_{th1} به ترتیب ولتاژ مدار باز و امپدانس معادل تونن شبکه N_1 و E_{oc2} و Z_{th2} به ترتیب ولتاژ مدار باز وامپدانس معادل تونن شبکه N_2 باشند، در این صورت مدارهای (الف) و(ب) را می توان بصورت زیر رسم کرد.



(ب) $\qquad$ (الف)

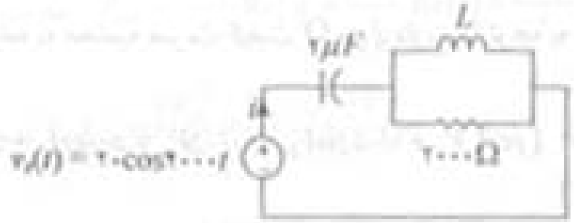
با توجه به شکلهای (الف) و (ب) داریم:

$$\begin{cases} \text{شکل الف} \to & -E_{th1}+Z_{th}+1-j=0 \\ \text{شکل ب} \to & -E_{th1}+2Z_{th}+1+j=0 \end{cases} \to \begin{cases} E_{th1}=1-j2=\sqrt{5}\angle -63/4^\circ \\ Z_{th}=-j \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{شکل الف} \to & -(1-j)+Z_{th}+E_{th2}=0 \\ \text{شکل ب} \to & -(1+j)-E_{th2}+2Z_{th}=0 \end{cases} \to \begin{cases} E_{th2}=0/5-j=1/12\angle -63/4^\circ \\ Z_{th}=0/5 \end{cases}$$

مسئله ۴۷

L را چنان تعیین کنید که v_s و i هم فاز باشند.



شکل مسئله ۴۷

حل: با توجه به شکل مسئله و در حالت دایمی سینوسی و با توجه به اینکه $\omega=4000$ می باشد داریم.

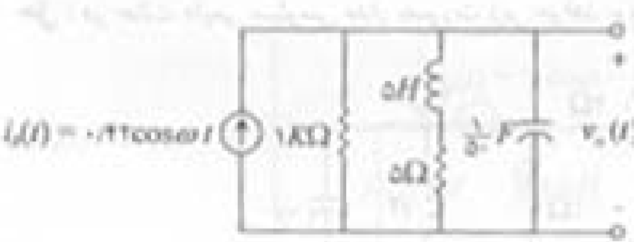
$$Z_{eq}=\left[\frac{1}{j0/008}+\left(j4000L\,\|\,2000\right)\right]V_s=\frac{8000L^2}{1+4L^2}+j\left(\frac{-500L^2+4000L-125}{1+4L^2}\right)$$

$$I=\frac{V_s}{Z_{eq}}=\frac{|V_s|}{|Z_{eq}|}\angle\left(\angle V_s-\angle Z_{eq}\right)$$

شرط اینکه I همفاز V_s باشد این است که $\angle Z_{eq}=0$ باشد و این یعنی اینکه Z_{eq} اهمی خالص باشد و یا اینکه قسمت موهومی آن برابر صفر شود.

$$\mathrm{Im}(Z_{eq})=0 \to -500L^2+4000L-125=0 \to L=7/97H \;,\; 31/37(mH)$$

مسئله ۴۸



- فرکانس تشدید ω_0 مدار چیست.
- دامنه ولتاژ $v_o(t)$ در این فرکانس چقدر است.
- $Q=?$
- پهنای باند مدار را تعیین کنید.

شکل مسئله ۴۸

حل : ابتدا ادمیتانس دیده شده از دو سر منبع جریان را محاسبه می کنیم.

$$Y(j\omega)=\frac{1}{1000}+\frac{1}{5+j5\omega}+\frac{j\omega}{50}=\frac{201+\omega^2}{1000(1+\omega^2)}+j\frac{\omega(20\omega^2-180)}{1000(1+\omega^2)}$$

$$\mathrm{Im}\{Y(j\omega_0)\}=0 \rightarrow 20\omega_0^2-180=0 \rightarrow \omega_0=3\left(\frac{rad}{sec}\right)$$

دامنه ولتاژ خروجی به ازای $\omega_0 = 3$ بصورت زیر بدست می آید.

$$V_0(j3)=\frac{I(j3)}{Y(j3)}=\frac{0.42}{\left[\frac{201+3^2}{1000(1+3^2)}+j0\right]}=20 \rightarrow |V_0(j3)|=20\,V$$

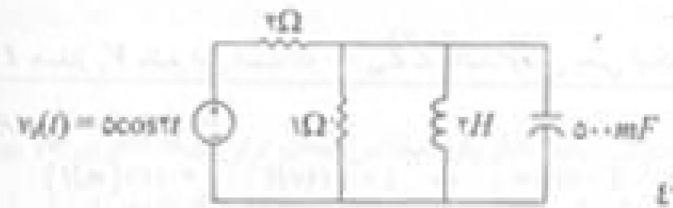
در ادامه به محاسبه ضریب کیفیت Q می پردازیم، با توجه به شکل مسئله داریم.

$$KCL \rightarrow \frac{V_0}{\frac{50}{j\omega}}+\frac{V_0}{5+j5\omega}+\frac{V_0}{1000}=I_s \rightarrow (j\omega)^2V_0+1.05j\omega V_0+10.05V_0=50j\omega I_s+50I_s$$

$$2\alpha=1.05 \rightarrow Q=\frac{\omega_0}{2\alpha}=\frac{3}{1.05}=2.86 \quad , \quad \Delta\omega=\frac{\omega_0}{Q}=\frac{3}{2.86}=1.05$$

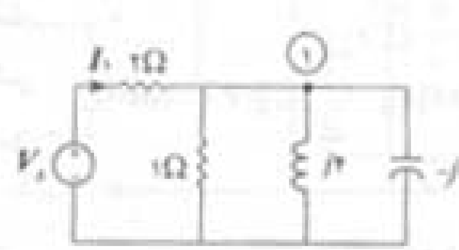
مسئله ۴۹

- توان متوسط تحویل داده شده به هر عنصر را تعیین کنید.
- نشان دهید که توان متوسط تحویل داده شده توسط منبع برابرمجموع توانهای متوسط در یافت شده توسط عناصر دیگر می باشد.



شکل مسئله ۴۹

حل : در حالت دایمی سینوسی مدار بصورت زیر خواهد بود.



$$\text{KCL برای گره ①} \rightarrow \frac{V_1-5}{2}+\frac{V_1}{1}+\frac{V_1}{j2}+\frac{V_1}{-j}=0 \rightarrow V_1=\frac{4}{3}-j\frac{2}{3} \rightarrow |V_1|^2=\frac{20}{9}$$

$$I_1=\frac{5-\left(\frac{4}{3}-j\frac{2}{3}\right)}{2}=\frac{11}{6}+j\frac{2}{6} \rightarrow |I_1|^2=\frac{125}{36}$$

بنابراین توانهای متوسط تحویل داده شده به عناصر بصورت زیر بدست خواهند آمد.

$$2\Omega \text{ مقاومت}: P_{av1}=\frac{|I_1|^2}{2}\text{Re}\{2\}=\frac{|I_1|^2}{2}\text{Re}(2)=|I_1|^2=\frac{125}{36}\ W$$

$$1\Omega \text{ مقاومت}: P_{av2}=\frac{|V_1|^2}{2}\text{Re}\{1\}=\frac{|V_1|^2}{2}\text{Re}(1)=\frac{|V_1|^2}{2}=\frac{20}{18}\ W$$

$$2H \text{ سلف}: P_{av3}=\frac{|V_1|^2}{2}\text{Re}\left\{\frac{1}{j2}\right\}=\frac{|V_1|^2}{2}(0)=0$$

$$500mF \text{ خازن}: P_{av4}=\frac{|V_1|^2}{2}\text{Re}\left\{\frac{1}{-j}\right\}=\frac{|V_1|^2}{2}(0)=0$$

توان ظاهری تحویل داده شده توسط منبع V_s برابر است با:

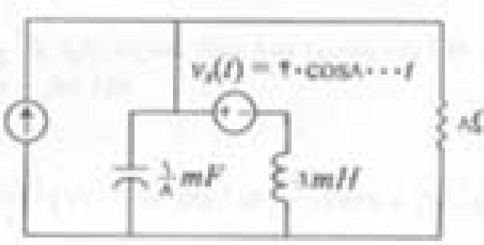
$$S=\frac{1}{2}V_s(I_1)^*=\frac{5}{2}\left(\frac{11}{6}-j\frac{2}{6}\right)=\frac{55}{12}-j\frac{5}{6} \rightarrow P_{av}=\frac{55}{12}\ W$$

واضح است که توان متوسط تحویل داده شده توسط منبع برابر مجموع توان های متوسط دریافت شده توسط عناصر دیگر می باشد، زیرا

$$P_{av1}+P_{av2}+P_{av3}+P_{av4}=\frac{126}{36}+\frac{20}{18}+0+0=\frac{55}{12}=P_{av}$$

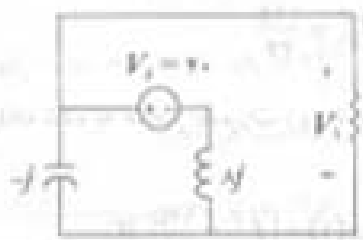
مسئله ۵۰

توان متوسط تلف شده توسط مقاومت 8Ω را تعیین کنید.



شکل مسئله ۵۰

حل : از آنجا که فرکانس زاویه ای منابع متفاوت است لذا اثر هر یک را به تنهایی بررسی خواهیم کرد با فرض $V_s=40$، $\omega=8000$ و $I_s=0$ مدار بصورت زیر خواهد شد.



$$V_1=\frac{-j\parallel 8}{-j\parallel 8+8j}40=\frac{-j320}{8+56j}\ \rightarrow\ |V_1|=\frac{320}{\sqrt{8^2+56^2}}=5/66\ ,\quad Y=\frac{1}{8}$$

$$\rightarrow P_{av1}=\frac{|V_1|^2}{2}\operatorname{Re}\{Y\}=\frac{(5/66)^2}{2}\left(\frac{1}{8}\right)=2\ W$$

حال فرض می کنیم $I_s=5$، $\omega=2000$ و $V_s=0$ باشد، که در این صورت مدار بصورت زیر خواهد بود

$$Y=\frac{1}{-j4}+\frac{1}{j2}+\frac{1}{8}=\frac{1}{8}-j\frac{1}{4}=\frac{1}{8}(1-j2)$$

$$\rightarrow V_1=\frac{I_s}{Y}=\frac{5}{\frac{1-j2}{8}}=\frac{40}{1-j2}\ \rightarrow\ |V_1|=\frac{40}{\sqrt{5}}=17/89$$

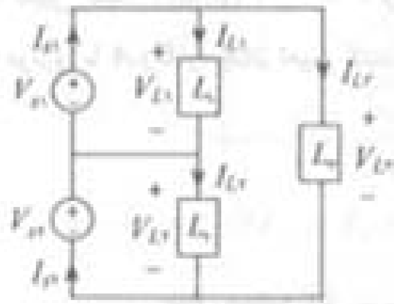
$$\rightarrow P_{av2}=\frac{|V_1|^2}{2}\operatorname{Re}\{Y\}=\frac{(17/89)^2}{2}\left(\frac{1}{8}\right)=20\ W$$

در نهایت بنا بر قضیه جمع آثار توان متوسط تلف شده در مقاومت 8Ω برابر خواهد شد با:

$$P_{av}=P_{av1}+P_{av2}=2+20=22\ W$$

مسئله ۵۱

$P_{L_1}=۷/۵+j۲/۵KVA$ و $\cos\phi_{L_۲}=۰/۲۸$ ، $|P_{L_۲}|=۱۰KVA$ و $L_۳$ یک مقاومت $۱۲/۵\Omega$ موازی با راکتانس ۵۰Ω می باشد. توان مختلطی که هر منبع تحویل می دهد چیست. V_{g1} و V_{g2} هر یک دارای فازور $۲۵۰\angle۰$ موثر می باشند.



شکل مسئله ۵۱

حل : با توجه به شکل مسئله داریم.

$$V_{L1}=V_{g1}=۲۵۰(rms)=۲۵۰\sqrt{۲}\quad ,\quad P_{L1}=\frac{۱}{۲}V_{L1}\overline{I}_{L1}$$

$$\rightarrow\ \overline{I}_{L1}=۲\frac{P_{L1}}{V_{L1}}=\frac{۲(۷/۵+j۲/۵)\times۱۰^۳}{۲۵۰\sqrt{۲}}=۴۲/۴۴+j۱۴/۱۴$$

$$\cos\varphi_{L۲}=۰/۲۸\,(\text{پس‌فاز})\ \rightarrow\ P_{L۲}=۱۰\angle\cos^{-1}۰/۲۸=۱۰\angle۷۳/۷^\circ=۲/۸+j۹/۶\ KVA$$

$$V_{L۲}=V_{g۲}=۲۵۰(rms)=۲۵۰\sqrt{۲}\ \rightarrow\ I_{L۲}=۲\frac{P_{L۲}}{V_{L۲}}=\frac{۲(۲/۸+j۹/۶)\times۱۰^۳}{۲۵۰\sqrt{۲}}=۱۵/۸۸+j۵۴/۴۴$$

$$V_{L۳}=V_{g1}+V_{g۲}=۵۰۰\sqrt{۲}\ \rightarrow\ I_{L۳}=V_{L۳}Y_{L۳}=۵۰۰\sqrt{۲}\left(\frac{۱}{۱۲/۵}+\frac{۱}{j۵۰}\right)=۵۶/۴-j۱۴/۱$$

$$\overline{I}_{g1}=\overline{I}_{L1}+\overline{I}_{L۳}=۹۸/۸۴+j۲۸/۲۴$$

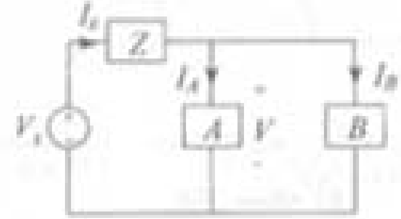
$$\rightarrow\ P_{g1}=\frac{۱}{۲}V_{g1}\overline{I}_{g1}=\frac{۲۵۰\sqrt{۲}}{۲}(۹۸/۸۴+j۲۸/۲۴)=۱۷۴۲۰+j۴۹۷۳$$

$$\overline{I}_{g۲}=\overline{I}_{L۲}+\overline{I}_{L۳}=۷۲/۲۸+j۶۸/۵۶$$

$$\rightarrow\ P_{g۲}=\frac{۱}{۲}V_{g۲}\overline{I}_{g۲}=\frac{۲۵۰\sqrt{۲}}{۲}(۷۲/۲۸+j۶۸/۵۶)=۱۲۷۳۹+j۱۲۰۸۳$$

مسئله ۵۲

- بار A القایی و توان $۱۰KVA$ با ضریب توان ۰/۶ مصرف می کند.
- بار B خازنی و توان $۵KVA$ با ضریب توان ۰/۸ مصرف می کند.
- V_s را تعیین کنید. $V=۱۰۰\ V(RMS)$ و $Z=۰/۱+j۰/۱$
- بار C موازی با A و B را چنان تعیین کنید که ضریب توان کل را برابر واحد کند.



شکل مسئله ۵۲

حل : با توجه به شکل و داده های مسئله داریم.

$$\cos\varphi_A=۰/۶(\text{پسفاز})\ \rightarrow\ P_A=۱۰\angle\cos^{-۱}۰/۶=۱۰\angle ۵۳/۱^\circ=۶+j۸\ KVA$$

$$\cos\varphi_B=۰/۸(\text{پیشفاز})\ \rightarrow\ P_B=۱۰\angle\cos^{-۱}۰/۸=۱۰\angle -۳۶/۹^\circ=۴-j۳\ KVA$$

می دانیم که $P=\frac{۱}{۲}V\bar{I}$ بنابراین $\bar{I}=\frac{۲P}{V}$ بوده و خواهیم داشت.

$$\bar{I}_s=\bar{I}_A+\bar{I}_B=\frac{۲P_A}{V}+\frac{۲P_B}{V}=\frac{۲(P_A+P_B)}{V}=\frac{۲(۱۰+j۵)\times ۱۰^۳}{۱۰۰\sqrt{۲}}=۱۴۱/۸+j۷۰/۹\ A$$

$$V_s=Z\bar{I}_s+V=(۰/۱+j۰/۱)(۱۴۱/۸-j۷۰/۹)+۱۰۰\sqrt{۲}=۱۶۲/۶۷+j۷/۰۹$$

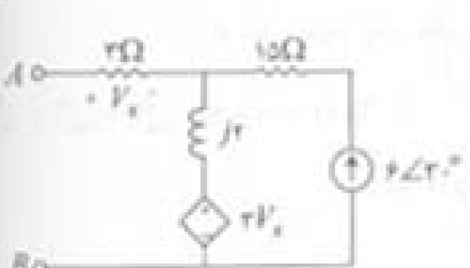
توان کل دریافتی بارها و یا توان تحویلی منبع ولتاژ برابر است با :

$$P_s=\frac{۱}{۲}V_s\bar{I}_s=\frac{۱}{۲}(۱۶۲/۶۷+j۷/۰۹)(۱۴۱/۸+j۷۰/۹)=۱۱۵۰۸+j۱۰۷۹$$

برای اینکه ضرایب توان برابر یک شود باید با یک خازنی با توان راکتیو منفی برابر $-۱۰۷۹\ \text{VAr}$ موازی کنیم تا قسمت موهومی P_s برابر صفر شده و ضریب توان کل برابر واحد گردد.

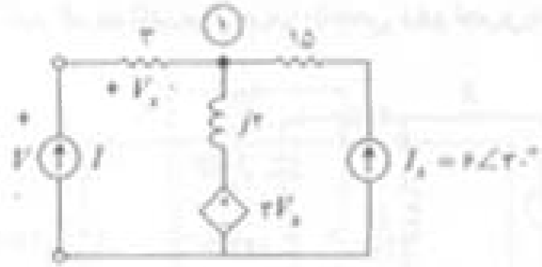
مسئله ۵۳

- چه امپدانسی باید در سرهای A و B قرار داد تا بیشترین توان متوسط به آن منتقل گردد.
- حداکثر توان دریافتی این امپدانس چقدر است.



شکل مسئله ۵۳

حل: ابتدا معادل تونن دو سر A و B را بدست می آوریم. بدین منظور منبع جریان آزمایشی I را به دو سر A و B وصل کرده و ولتاژ دو سر آن را محاسبه می کنیم.

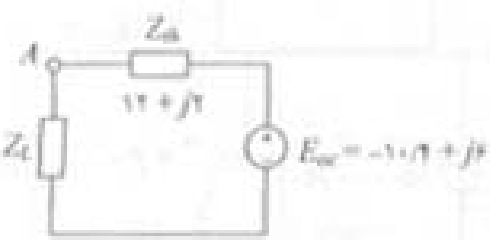


$$V_x = ۲I \;,\; V_۱ = V - V_x = V - ۲I \;,\; I_s = ۶\angle ۳۰^\circ = ۳ + j۵/۲$$

$$① \text{ برای گره } KCL \rightarrow -I + \frac{(V-۲I)-۲(۲I)}{j۴} - (۳ + j۵/۲) = ۰$$

$$\rightarrow V = (۱۲ + j۴)I - ۱۰/۴ + j۶$$

با در نظر گرفتن مدار معادل تونن و امپدانس بار Z_L برای دو سر A و B مدار بصورت زیر خواهد شد.



شرط انتقال توان ماکزیمم به Z_L عبارتست از:

$$Z_L = \bar{Z}_{th} \rightarrow Z_L = ۱۲ - j۴$$

و مقدار توان متوسط ماکزیمم برابر خواهد شد با:

$$\max P_{av} = \frac{۱}{۲}|I_L|^۲ \operatorname{Re}\{Z_L\} = \frac{۱}{۲}\left|\frac{E_{oc}}{Z_L + Z_{th}}\right|^۲ \operatorname{Re}\{Z_L\} = \frac{۱}{۲}\left|\frac{-۱۰/۴ + j۶}{(۱۲ - j۴) + (۱۲ + j۴)}\right|^۲ \operatorname{Re}\{۱۲ - j۴\}$$

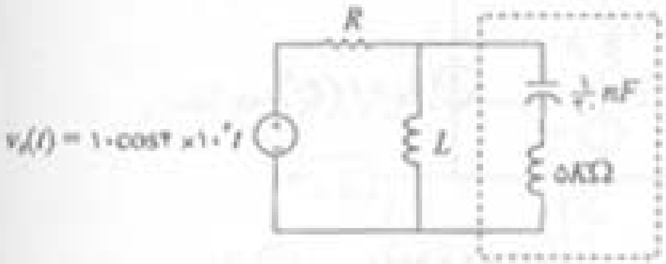
$$= ۱/۵\ W$$

روش ساده تر این است که از رابطه زیر استفاده کنیم.

$$\max P_{av} = \frac{|E_{oc}|^۲}{۸R_L} = \frac{|۱۲|^۲}{۸(۱۲)} = ۱/۵\ W$$

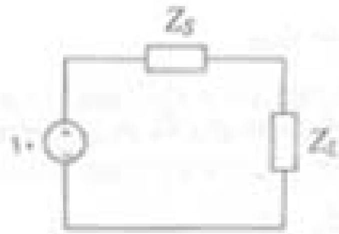
مسئله ۵۴

R و L را چنان تعیین کنید که حداکثر توان به بار مشخص شده تحویل داده شود.



شکل مسئله ٥٤

حل : در حالت دایمی سینوسی و با در نظر گرفتن $\omega = 4\times10^4$ مدار را می توان بصورت زیر در نظر گرفت.



که در آن

$$Y_L = \frac{1}{5\times10^3 + \dfrac{1}{j4\times10^4 \times \frac{1}{20}\times10^{-6}}} = \frac{1}{5000 - j5000} = 10^{-4} + j10^{-4}$$

$$Y_S = \frac{1}{R} + \frac{1}{j4\times10^4 L} = \frac{1}{R} - \frac{j}{4\times10^4 L}$$

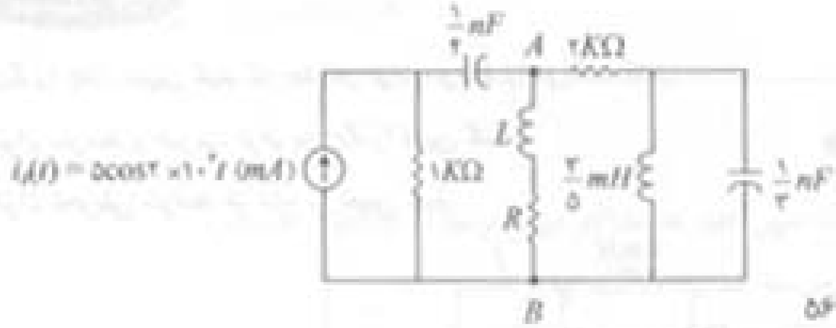
شرط انتقال توان ماکزیمم به بار Z_L عبارتست از:

$$Z_L = \bar{Z}_S \;\rightarrow\; Y_L = \bar{Y}_S \;\rightarrow\; \frac{1}{R} - j\frac{1}{4\times10^4 L} = 10^{-4} - j10^{-4}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{R} = 10^{-4} & \rightarrow\; R = 10\,K\Omega \\[2ex] \dfrac{1}{4\times10^4 L} = 10^{-4} & \rightarrow\; L = 2/5\,mH \end{cases}$$

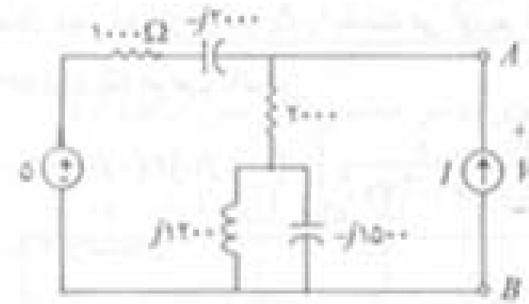
مسئله ۵۶

R و L را چنان تعیین کنید که بیشترین توان توسط R جذب شود.



شکل مسئله ۵۶

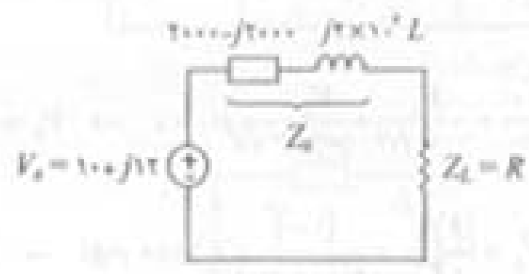
حل: ابتدا معادل تونن دو سر A و B را بدست می آوریم. بدین منظورمنبع جریان I را به دو سر A و B وصل کرده و ولتاژ دو سر آن را تعیین می کنیم. با فرض اینکه مدار درحالت دایمی سینوسی است و اینکه $\omega=2\times10^6$ و با استفاده از تبدیل تونن- نرتن مدار را می توان بصورت زیر رسم کرد.



$$KVL \text{ برای گره } (A) \rightarrow \frac{V-5}{1000-j2000}+\frac{V}{2000+(j1200)\|(-j1500)}-I=0$$

$$\rightarrow V=(2000-j2000)I+10+j12$$

بنابراین مدار داده شده را می توان بصورت زیر رسم کرد.

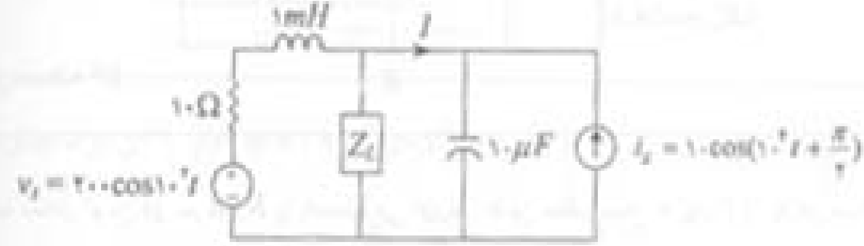


شرط اینکه بیشترین توان توسط مقاومت R جذب شود عبارتست از :

$$Z_L = \bar{Z}_s \rightarrow R = 2000 + j\left(2000 - 2\times10^{6}L\right) \rightarrow \begin{cases} R = 2000 = 2K\Omega \\ 2000 - 2\times10^{6}L = 0 \rightarrow L = 1mH \end{cases}$$

مسئله ۵۷

- Z_L را چنان تعیین کنید که حداکثر توان متوسط را دریافت کند.
- توان متوسط و ضریب توان بار Z_L را تعیین کنید.
- توان تحویلی متوسط هر منبع را تعیین کنید.



شکل مسئله ۵۷

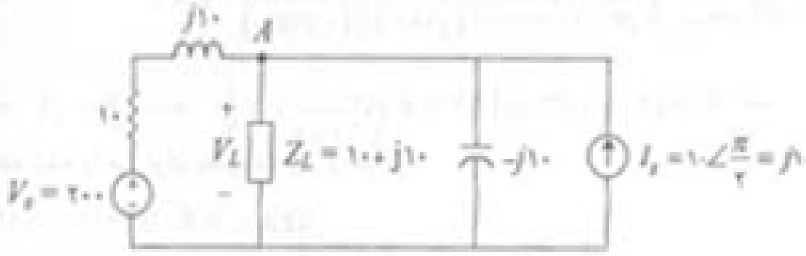
حل : ابتدا امپدانس معادل دیده شده از دو سر Z_L را بدست می آوریم. از آنجا که فرکانس زاویه ای هر دو منبع یکسان و برابر $\omega = 10^4$ است لذا خواهیم داشت.

$$Z_s = \left(10 + j1\times10^{-3}\times10^{4}\right) \mathrm{P} \left(\frac{1}{j10\times10^{-6}\times10^{4}}\right) = \left(10 + j10\right)\mathrm{P}\left(-j10\right) = 10 - j10$$

شرط انتقال توان ماکزیمم به Z_L عبارتست از:

$$Z_L = \bar{Z}_s = 10 + j10$$

با اتصاب Z_L بدست آمده مدار بصورت زیر خواهد شد.



$$\text{KCL برای گره } (A) \rightarrow \frac{V_L - 200}{10 + j10} + \frac{V_L}{10 + j10} + \frac{V_L}{-j10} - j10 = 0 \rightarrow V_L = 100$$

$$\rightarrow P_L = \frac{1}{2} I_L \bar{V}_L = \frac{1}{2}\frac{V_L}{Z_L}\bar{V}_L = \frac{\left|V_L\right|^2}{2Z_L} = \frac{\left(100\right)^2}{2\left(10 + j10\right)} = 250 - j250 \rightarrow \max P_{Lav} = 250\,W$$

و ضریب توان بار Z_L عبارتست از:

$$\cos\varphi_L = \cos\left(\tan^{-1}\frac{۲۵۰}{۲۵۰}\right) = \cos۴۵^\circ = ۰/۷۰۵$$

در ادامه به محاسبه توان تحویلی متوسط منابع می پردازیم.

$$P_{i(av)} = \frac{۱}{۲}V_L I_L^* = \frac{۱}{۲}(۱۰۰)(-j۱۰) = -۵۰۰j \quad \rightarrow \quad P_{l(av)} = ۰$$

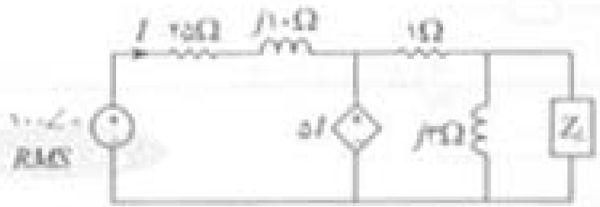
$$P_{V(av)} = P_{i(av)} - P_{l(av)} = ۲۵۰ - ۰ = ۲۵۰\ W$$

مسئله ۵۸

الف ـ Z_L را چنان تعیین کنید که حداکثر توان متوسط به آن انتقال داده شود.

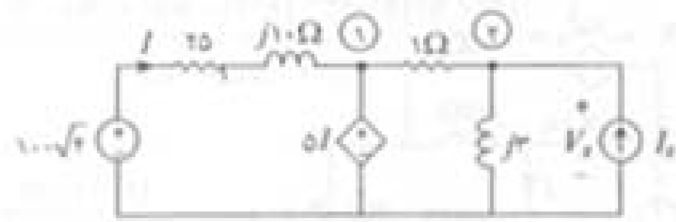
ب ـ مقدار توان متوسط انتقال داده شده چقدر است.

پ ـ چند درصد از توان تولید شده به Z_L انتقال داده می شود.



شکل مسئله ۵۸

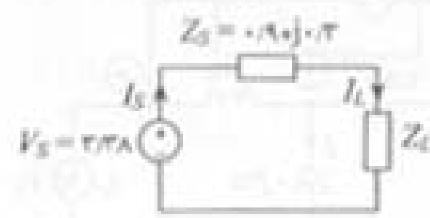
حل : الف ـ ابتدا معادل تونن دو سر امپدانس Z_L را تعیین خواهیم کرد.



$$I = \frac{۱۰۰\sqrt{۲} - V_۱}{۲۵ + j۱۰} \rightarrow I = \frac{۱۰۰\sqrt{۲} - ۵I}{۲۵ + j۱۰} \rightarrow I = ۴/۲۳ - j۱/۴۱$$

برای گره ۲، $KCL \rightarrow \dfrac{V_x - (۴/۲۳ - j۱/۴۱)}{۱} + \dfrac{V_x}{j۳} - I_x = ۰ \rightarrow V_x = (۰/۹ + j۰/۳)I_x + ۴/۳۸$

بنابراین مدار بصورت زیر ساده خواهد شد.



شرط انتقال توان ماکزیمم عبارتست از :

$$Z_L = \bar{Z}_s \quad \rightarrow \quad Z_L = ۰/۹ - j۰/۳\ \Omega$$

ب ـ توان انتقالی ماکزیمم را بصورت زیر بدست می آوریم. توجه کنید که مقادیر بصورت موثر داده شده اند لذا در محاسبه توان متوسط ضریب $\frac{1}{2}$ را منظور نخواهیم کرد.

$$I_s = I_L = \frac{V_s}{Z_s + Z_L} = \frac{۳/۳۸}{۱/۸} = ۱/۸۸\ A$$

$$\rightarrow \quad \max P_{L(av)} = |I_L|^2 \operatorname{Re}\{Z_L\} = (۱/۸۸)^2 (۰/۹) = ۳/۱۸\ W$$

پ ـ توان تولید شده برابر است با:

$$P_s = V_s \bar{I}_s = (۳/۳۸)(۱/۸۸) = ۶/۳۶\ W$$

بنابراین درصد توان انتقالی برابر خواهد شد با:

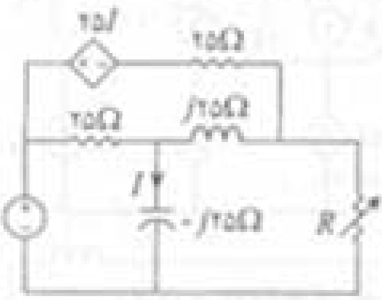
$$\frac{\max P_{L(av)}}{P_s} \times ۱۰۰ = \frac{۳/۱۸}{۶/۳۶} \times ۱۰۰ = ۵۰\%$$

مسئله ۵۹

الف ـ مقدار R را برای انتقال حداکثر توان متوسط به آن تعیین کنید.

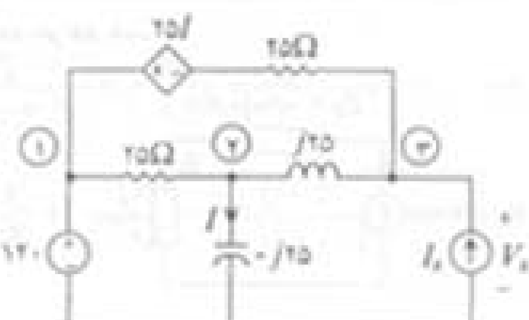
ب ـ توان متوسط تحویل داده شده به R را تعیین کنید.

پ ـ اگر R با یک امپدانس متغیر جایگزین شود حداکثر توان تحویل داده شده به آن چقدر



شکل مسئله ۵۹

حل : الف ـ ابتدا معادل تونن دیده شده از دو سر R را تعیین می کنیم.



$$V_1 = ۱۲۰ \;,\quad V_2 = V_s \;,\quad I = \frac{V_2}{-j۲۵} = \frac{jV_2}{۲۵}$$

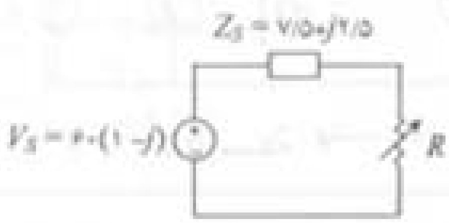
KCL برای گره ۲ : $\frac{V_2 - ۱۲۰}{۲۵} + \frac{V_2}{-j۲۵} + \frac{V_2 - V_s}{j۲۵} = ۰ \;\rightarrow\; V_2 = ۱۲۰ - jV_s$

KCL برای گره ۳ : $\frac{V_s - V_2}{j۲۵} + \frac{V_s - (۱۲۰ - ۲۵I)}{۲۵} - I_s = ۰$

$$\rightarrow\; \frac{V_s - (۱۲۰ - jV_s)}{j۲۵} + \frac{V_s - \left(۱۲۰ - ۲۵\left(\frac{j}{۲۵}(۱۲۰ - jV_s)\right)\right)}{۲۵} - I_s = ۰$$

$$\rightarrow\; V_s = (۷/۵ + j۲/۵)I_s + ۶۰(۱ - j)$$

بنابراین مدار بصورت زیر خواهد بود.



توان متوسط انتقالی به مقاومت R برابر است با :

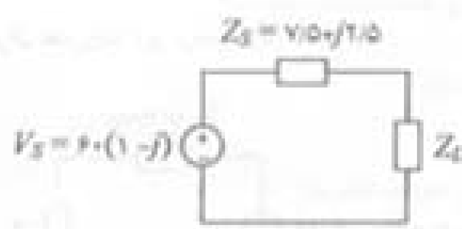
$$P_{av} = \frac{۱}{۲}|I_R|^۲ \cdot R = \frac{۱}{۲}\left|\frac{۶۰(۱-j)}{(۷/۵+R)+j۲/۵}\right|^۲ \cdot R = \frac{۳۶۰۰R}{R^۲ + ۱۵R + ۶۲/۵}$$

$$\frac{dP_{av}}{dR} = ۰ \;\rightarrow\; \frac{۳۶۰۰(R^۲ + ۱۵R + ۶۲/۵) - ۳۶۰۰R(۲R + ۱۵)}{(R^۲ + ۱۵R + ۶۲/۵)^۲} = ۰ \;\rightarrow\; R = ۷/۹\,\Omega$$

ب ـ با جایگذاری R بدست آمده در P_{av} داریم.

$$\max P_{av} = \frac{۳۶۰۰(۷/۹)}{(۷/۹)^۲ + ۱۵(۷/۹) + ۶۲/۵} = ۱۱۶/۸۴\ W$$

پ ـ با جایگزینی امپدانس Z_L بجای R مدار بصورت زیر تغییر خواهد کرد.



شرط انتقال توان متوسط ماکزیمم عبارتست از :

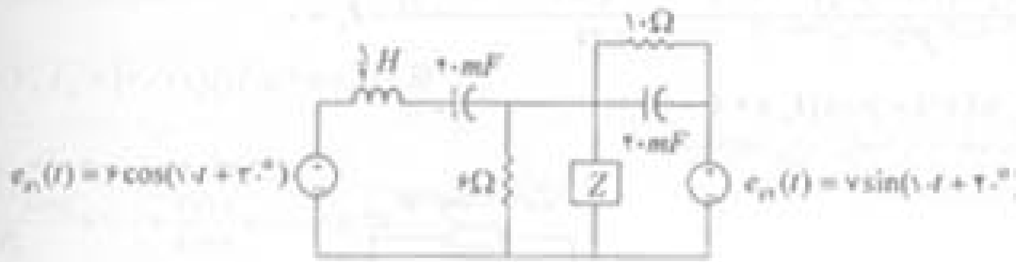
$$Z_L = \bar{Z}_S \;\rightarrow\; Z_L = ۷/۵ - j۲/۵$$

و توان متوسط ماکزیمم برابر خواهد شد با:

$$\max P_{L(av)} = \frac{\left|V_S\right|^{۲}}{۸R_L} = \frac{\left|۶۰\sqrt{۲}\right|^{۲}}{۸(۷/۵)} = ۱۲۰\ W$$

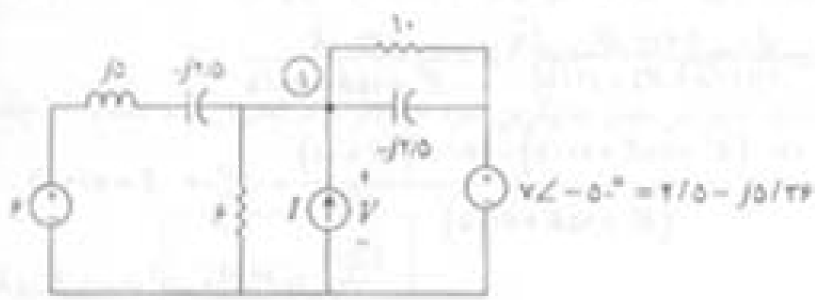
مسئله ۶۰

Z را چنان تعیین کنید که حداکثر توان متوسط به آن انتقال داده شود مقدار این توان چیست.



شکل مسئله ۶۰

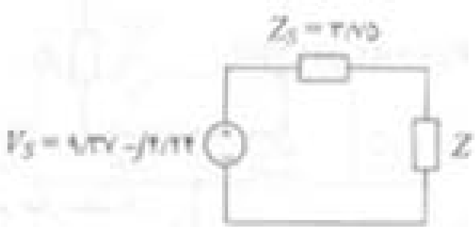
حل : ابتدا معادل تونن دو سر امپدانس Z را محاسبه می کنیم.



$$KCL\ \text{برای گره}\ ① \rightarrow \frac{V-۶}{j۵-j۲/۵} + \frac{V}{۶} + \frac{V-(۴/۵-j۵/۳۶)}{۱۰} + \frac{V-(۴/۵-j۵/۳۶)}{-j۲/۵} - I = ۰$$

$$\rightarrow V = ۳/۷۵I + ۹/۷۳ - j۴/۲۴$$

بنابراین مدار شکل مسئله را می توان بصورت زیر رسم کرد.



شرط انتقال توان ماکزیمم عبارتست از:

$Z = \bar{Z}_S \;\rightarrow\; Z = ۳/۷۵$

بنابراین حداکثر توان متوسط انتقالی بصورت زیر بدست خواهد آمد.

$$\max P_{l(av)} = \frac{|V_S|^۲}{۸R_L} = \frac{۹/۳۷^۲ + ۲/۲۴^۲}{۸(۳/۷۵)} = ۷/۰۶\ W$$

مسئله ۶۱

وقتی باری به a و b وصل نشود، (موثر) $V_{ab} = ۲۴۰\angle ۰$ و وقتی بار $۸۰ - j۶۰$ به a و b وصل شود، (موثر) $V_{ab} = ۱۱۵/۲ + j۳۳/۶$ است.امپدانسی را پیدا کنید که وقتی به a و b وصل شود حداکثر توان متوسط به آن انتقال یابد.مقدار حداکثر توان متوسط انتقال یافته به این امپدانس را تعیین کنید.

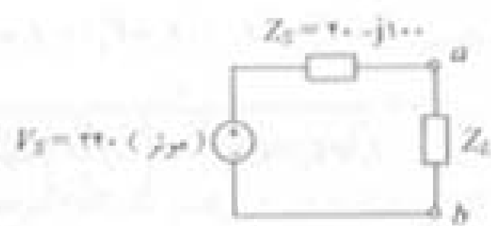
شکل مسئله ۶۱

حل : فرض کنیم که مدار داخل بلوک دارای ولتاژ مدار باز V_S و امپدانس معادل Z_S باشد. با توجه به داده های مسئله داریم.

$V_S = ۲۴۰\angle ۰$ (موثر)

$$V_{ab} = \frac{Z_L}{Z_L + Z_S} V_s \;\rightarrow\; ۱۱۵/۲ + j۳۳/۶ = \frac{۸۰ - j۶۰}{۸۰ - j۶۰ + Z_S} ۲۴۰ \;\rightarrow\; Z_S = ۴۰ - j۱۰۰$$

بنابراین مدار بصورت زیر خواهد بود.



شرط انتقال توان ماکزیمم عبارتست از:

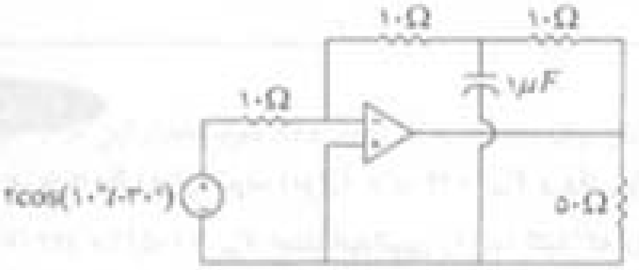
$Z_L = \bar{Z}_S \;\rightarrow\; Z_L = ۴۰ + j۱۰۰$

و حداکثر توان متوسط انتقالی برابر خواهد شد با :

$$\max P_{l(av)} = I_{rms}^۲ \operatorname{Re}(Z_L) = \left|\frac{V_{rms}}{Z_L + Z_S}\right|^۲ R_L = \left|\frac{V_{rms}}{۲R_L}\right|^۲ R_L = \frac{V_{rms}^۲}{۴R_L} = \frac{(۲۴۰)^۲}{۴(۴۰)} = ۳۶۰\ W$$

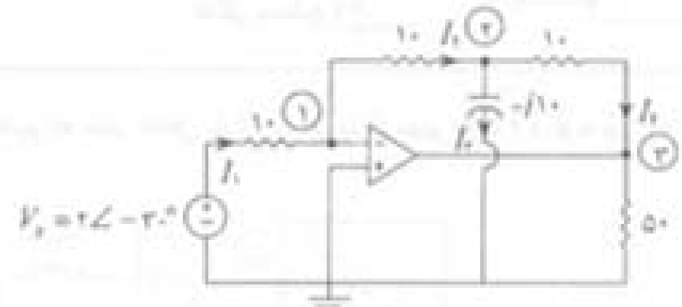
مسئله ۶۲

توان متوسط تحویل داده شده به مقاومت ۵۰Ω چیست.



شکل مسئله ۶۲

حل : با فرض اینکه مدار در حالت دائمی سینوسی است و با توجه به اینکه $\omega = ۱۰^۵$ مدار را می توان بصورت زیر رسم کرد.



با فرض ایده آل بودن آپ امپ $V_۱ = ۰$ و $I_۱ = I_۲$ بوده و خواهیم داشت.

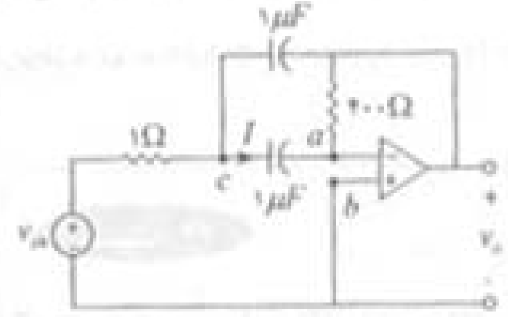
$$\rightarrow\ I_۱ = I_۲ = \frac{V_s - ۰}{۱۰} = \frac{V_s}{۱۰} \quad , \quad V_۳ = V_s - ۱۰ I_۱ - ۱۰ I_۲ = V_s - ۲۰ I_۱ = V_s - ۲۰\left(\frac{V_s}{۱۰}\right) = -V_s$$

$$I_۳ = \frac{V_۳}{-j۱۰} = \frac{-V_s}{-j۱۰} = -j\frac{V_s}{۱۰} \quad , \quad I_۴ = I_۲ - I_۳ = \frac{V_s}{۱۰} - \left(-j\frac{V_s}{۱۰}\right) = \frac{۱+j}{۱۰}V_s$$

$$V_o = V_۳ - ۱۰ I_۴ = -V_s - ۱۰\left(\frac{۱+j}{۱۰}\right)V_s = (-۲-j)V_s = \left(\sqrt{۵}\angle -۲۶\right)\left(۲\angle -۳۰\right) = ۲\sqrt{۵}\angle -۵۶$$

$$\rightarrow\ P_{av} = \frac{|V_o|^۲}{۲}\operatorname{Re}\{Y\} = \frac{\left(۲\sqrt{۵}\right)^۲}{۲}\left(\frac{۱}{۵۰}\right) = ۰/۲\ W$$

مسئله ۶۳



الف) $H(j\omega)=\dfrac{V_o}{V_{in}}$ را بدست آورید. Q مدار چیست.

ب) رفتار فیلتری مدار و فرکانس قطع آن را تعیین کنید.

شکل مسئله ۶۳

حل : با فرض ایده آل بودن آپ امپ $V_a=V_b=0$ بوده و خواهیم داشت

$$V_o=-200I \quad , \quad I=\frac{V_c-0}{\dfrac{1}{10^{-6}\omega}} \rightarrow I=j10^{-6}\omega V_c \rightarrow V_o=(-200)\left(j10^{-6}\omega V_c\right)$$

$$\rightarrow V_c=-\frac{2500}{j\omega}V_o$$

$$\text{برای گره } c \;\; KCL \rightarrow \frac{-\dfrac{2500}{j\omega}V_o-V_{in}}{1}+\frac{-\dfrac{2500}{j\omega}V_o-0}{\dfrac{1}{j10^{-6}\omega}}+\frac{-\dfrac{2500}{j\omega}V_o-V_o}{\dfrac{1}{j10^{-6}\omega}}=0$$

$$(j\omega)^2V_o+5000j\omega V_o+2500\times10^6V_o=j\omega V_{in}$$

$$\rightarrow H(j\omega)=\frac{V_o}{V_{in}}=\frac{j\omega}{(j\omega)^2+5000j\omega+2500\times10^6}=\frac{j\omega}{\left(2500\times10^6-\omega^2\right)+j5000\omega}$$

$$\omega_0^2=2500\times10^6 \rightarrow \omega_0=50\times10^3 \quad , \quad 2\alpha=5000 \rightarrow Q=\frac{\omega_0}{2\alpha}=\frac{50\times10^3}{5000}=10$$

با توجه به $H(j\omega)$ بدست آمده داریم.

$$\lim_{\omega\to0,\infty}\left|H(j\omega)\right|=\lim_{\omega\to0,\infty}\frac{\omega}{\sqrt{\left(2500\times10^6-\omega^2\right)^2+(5000\omega)^2}}=0$$

بنابراین مدار فوق یک فیلتر میان گذر است که دارای دو فرکانس قطع $3dB$ خواهد بود. در ادامه به محاسبه فرکانسهای قطع و پهنای باند $\left|H(j\omega)\right|$ خواهیم پرداخت.

$$\left|H(j\omega)\right|=\frac{\left|H(j\omega)\right|_{max}}{\sqrt2}=\frac{1}{\sqrt2} \rightarrow \frac{\omega}{\sqrt{\left(2500\times10^6-\omega^2\right)^2+(5000\omega)^2}}=\frac{1}{\sqrt2}$$

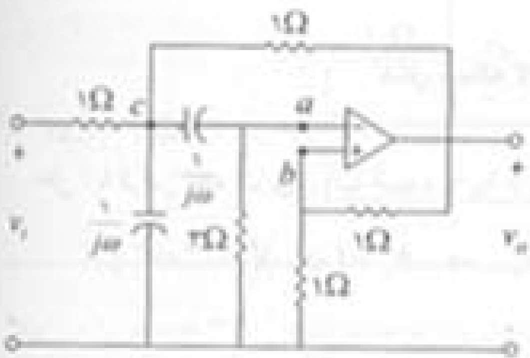
$$\rightarrow \omega_1=47561/5 \;,\; \omega_2=52561/5$$

$$\rightarrow \Delta\omega=\omega_2-\omega_1=52561/5-47561/5=5000$$

روش دوم: پهنای باند را می توان با استفاده از رابطه $\Delta\omega = \frac{Q}{\omega_0} = 2\alpha$ که برای مدارهای درجه دوم و توابع شبکه مربوط به آنها صادق است بدست آورد.

$\Delta\omega = 2\alpha = 5000$

مسئله ۶۴



- تابع شبکه $H(j\omega) = \frac{V_o}{V_i}$ را تعیین کنید.
- پاسخ فرکانسی(منحنی های اندازه و فاز) را رسم کنید.
- نوع فیلتری و پهنای باند 3db را مشخص کنید.

شکل مسئله ۶۴

حل : با فرض ایده آل بودن آپ امپ وبا توجه به شکل مسئله $V_a = V_b = \frac{1}{1+1}V_o = \frac{V_o}{2}$ بوده وخواهیم داشت.

$$\text{برای گره } ⓐ\ KCL \to \frac{\frac{V_o}{2} - V_c}{\frac{1}{j\omega}} + \frac{\frac{V_o}{2}}{2} = 0 \to V_c = \left(\frac{1+j2\omega}{j4\omega}\right)V_o$$

$$\text{برای گره } ⓒ\ KCL \to \frac{\left(\frac{1+j2\omega}{j4\omega}\right)V_o - V_i}{1} + \frac{\left(\frac{1+j2\omega}{j4\omega}\right)V_o}{\frac{1}{j\omega}} + \frac{\left(\frac{1+j2\omega}{j4\omega}\right)V_o - \frac{V_o}{2}}{\frac{1}{j\omega}}$$

$$+ \frac{\left(\frac{1+j2\omega}{j4\omega}\right)V_o - V_o}{1} = 0$$

$$\to (j\omega)^2 V_o + 2j\omega V_o + 2V_o = 2j\omega V_i \to H(j\omega) = \frac{2j\omega}{(j\omega)^2 + 2j\omega + 2} = \frac{2\omega}{2\omega + j(\omega^2 - 2)}$$

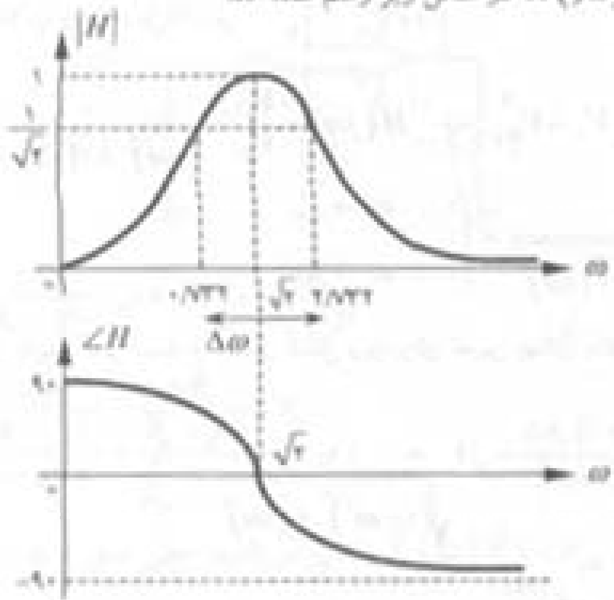
در ادامه به رسم پاسخ فرکانسی خواهیم پرداخت.

$$|H(j\omega)| = \frac{2\omega}{\sqrt{(2\omega)^2 + (\omega^2 - 2)^2}} = \begin{cases} 0\ ,\ \omega \to 0 \\ 0\ ,\ \omega \to \infty \end{cases}$$

$$\frac{d|H(j\omega)|}{d\omega} = 0 \to \omega = \sqrt{2} \to Max|H(j\omega)| = 1$$

$$\angle H(j\omega) = \angle(2\omega) - \angle\left(2\omega + j\left(\omega^2 - 2\right)\right) = 0 - \tan^{-1}\frac{\omega^2 - 2}{2\omega} = \begin{cases} 90 , & \omega \to 0 \\ 0 , & \omega = \sqrt{2} \\ -90 , & \omega \to \infty \end{cases}$$

نمودار های اندازه و زاویه $H(j\omega)$ در شکل زیر رسم شده اند.



با توجه به نمودار $|H|$ ملاحظه می شود که مدار همانند یک فیلتر میان گذر عمل می کند. در ادامه به محاسبه پهنای باند۳db خواهیم پرداخت. بدین منظور ابتدا فرکانسهای قطع۳db را بدست می آوریم.

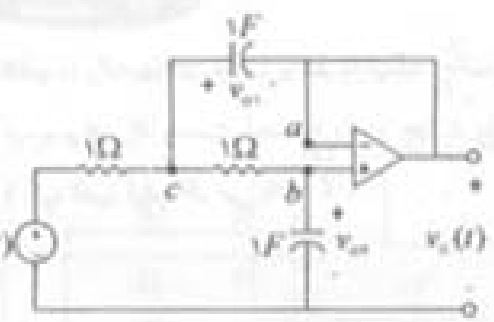
$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}}\max|H(j\omega)| \;\rightarrow\; \frac{2\omega}{\sqrt{(2\omega)^2 + \left(\omega^2 - 2\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \;\rightarrow\; \omega = 2/732 \,,\, 0/732$$

$$\rightarrow \Delta\omega = 2/732 - 0/732 = 2$$

مسئله ۶۵

الف ـ معادله دیفرانسیلی بر حسب v_o بنویسید.

ب ـ تابع شبکه $H(j\omega) = \dfrac{V_o}{V_s}$ را تعیین و نوع رفتار فیلتری این مدار و پهنای باند۳db آن را مشخص کنید.



شکل مسئله ۶۵

حل: الف ـ با فرض ایده آل بودن آپ امپ $v_a = v_b = v_o$ بوده و با بکارگیری نمایش اپراتوری معادلات دیفرانسیل داریم.

$$\text{(b)}\; \text{KCL برای گره} \;\rightarrow\; Dv_o + \frac{v_o - v_c}{1} = 0 \;\rightarrow\; v_C = (D+1)v_o$$

$$\text{KCL در گره } ③: \rightarrow \frac{(D+1)v_o - v_S}{1} + \frac{(D+1)v_o - v_o}{1} + D\left[(D+1)v_o - v_o\right] = 0$$

$$\rightarrow (D^2 + 2D + 1)v_o = v_S \rightarrow \frac{d^2 v_o}{dt^2} + 2\frac{dv_o}{dt} + v_o = v_S$$

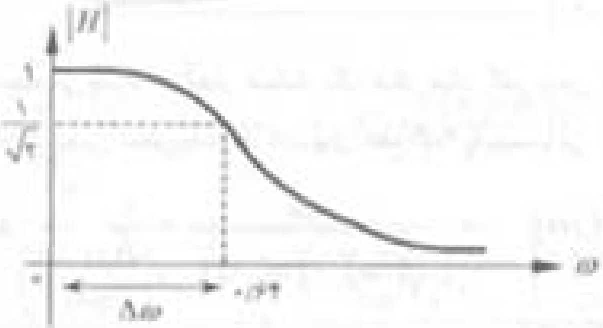
ب ـ با نمایش فازوری معادلات دیفرانسیل داریم:

$$(j\omega)^2 V_o + 2(j\omega)V_o + V_o = V_S \rightarrow H(j\omega) = \frac{V_o}{V_S} = \frac{1}{(j\omega)^2 + 2(j\omega) + 1} = \frac{1}{1-\omega^2 + j2\omega}$$

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1-\omega^2)^2 + (2\omega)^2}} = \begin{cases} 1\ , & \omega \rightarrow 0 \\ 0\ , & \omega \rightarrow \infty \end{cases}$$

بنابراین مدار فوق یک فیلتر پایین گذر است و مطابق شکل زیر برای تعیین پهنای باند $3db$ کافیست فرکانس قطع $3db$ را تعیین کنید.

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}}\max|H(j\omega)| \rightarrow \frac{1}{\sqrt{(1-\omega^2)^2 + (2\omega)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \omega = 0/64 \rightarrow \Delta\omega = 0/64$$

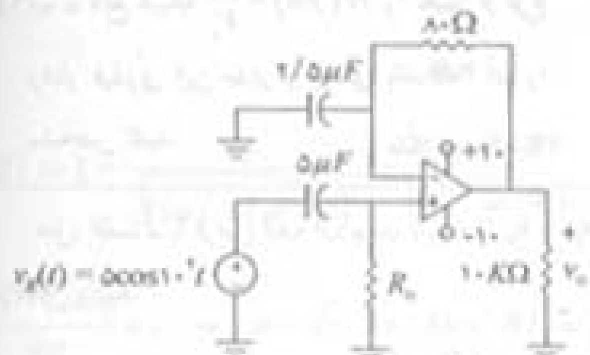


مسئله ۶۶

الف ـ R_o حداکثر چقدر باشد تا اینکه حالت دایمی v_o یک سینوسی کامل باشد.

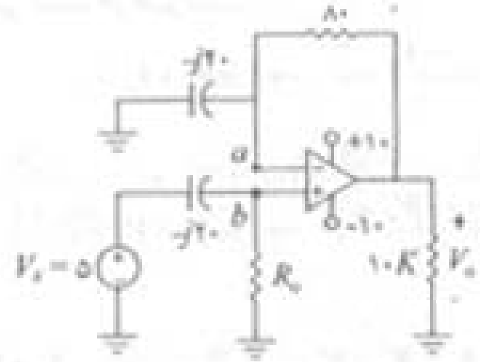
ب ـ برای R_o بدست آمده v_o را در حالت دایمی تعیین کنید.

(آپ امپ ایده آل می باشد)



شکل مسئله ۶۶

حل : الف ـ با فرض ایده آل بودن آپ امپ $v_b = v_a$ شده و با فرض اینکه مدار درحالت دایمی سینوسی باشد خواهیم داشت.



$$V_b = \frac{R_\circ}{R_\circ + (-j20)}5 = \frac{5R_\circ}{R_\circ - j20} \quad \rightarrow \quad V_a = \frac{5R_\circ}{R_\circ - j20}$$

$$KCL \text{ برای گره } a \quad \rightarrow \quad \frac{\frac{5R_\circ}{R_\circ - j20}}{-j40} + \frac{\frac{5R_\circ}{R_\circ - j20} - V_\circ}{80} = 0 \quad \rightarrow \quad V_\circ = \frac{5R_\circ(1+2j)}{R_\circ - j20}$$

واضح است که تا وقتی که $|V_\circ| < V_{sat}$ باشد آپ امپ در ناحیه خطی عمل کرده و $V_\circ$ تابع خطی از V_s بوده و با اینکه V_s سینوسی کامل است.

$$|V_\circ| < V_{sat} \quad \rightarrow \quad \frac{5\sqrt{5}R_\circ}{\sqrt{R^2 + 20^2}} < 10 \quad \rightarrow \quad R_\circ < 40 \quad \rightarrow \quad Max R_\circ = 40\Omega$$

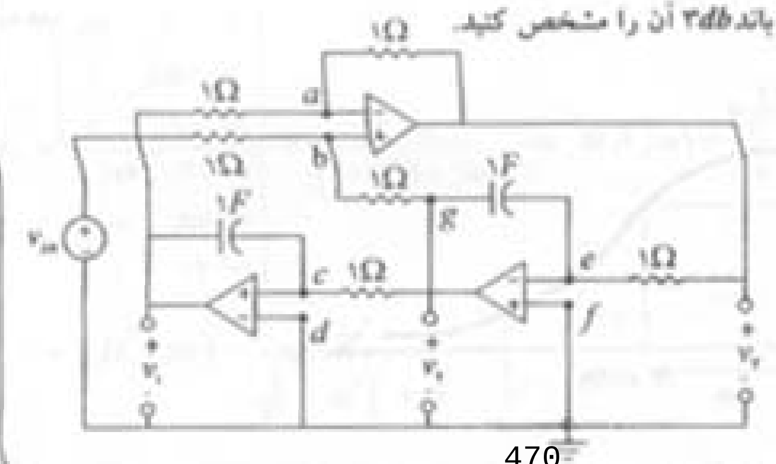
ب ـ به ازای $R_\circ = 40\Omega$ خواهیم داشت.

$$V_\circ = \frac{200(1+2j)}{20(2-j)} = j10 = 10\angle 90 \quad \rightarrow \quad v_\circ(t) = 10\cos(10^3 t + 90) = -10\sin 10^3 t$$

مسئله ۶۷

توابع شبکه $H_1(j\omega) = \frac{V_1}{V_{in}}$ و $H_2(j\omega) = \frac{V_2}{V_{in}}$ و $H_3(j\omega) = \frac{V_3}{V_{in}}$ را بدست آورید. رفتار فیلتری هر کدام از توابع شبکه و پهنای باند $3db$ آن را مشخص کنید.

(آپ امپ ایده آل می باشد)



شکل مسئله ۶۷

حل : با فرض ایده آل بودن آپ امپ ها $V_c = V_d = \cdot$ و $V_e = V_f = \cdot$ و $V_a = V_b$ بوده و با توجه به اینکه مدار در حالت دایمی سینوسی است خواهیم داشت.

$$\text{(c)}\ \text{برای گره}\ KCL \rightarrow \frac{\cdot - V_1}{\frac{1}{j\omega}} + \frac{\cdot - V_2}{1} = \cdot \rightarrow j\omega V_1 + V_2 = \cdot$$

$$\text{(e)}\ \text{برای گره}\ KCL \rightarrow \frac{\cdot - V_2}{\frac{1}{j\omega}} + \frac{\cdot - V_3}{1} = \cdot \rightarrow j\omega V_2 + V_3 = \cdot$$

$$\begin{cases} \text{(a)}\ \text{برای گره}\ KCL \rightarrow \dfrac{V_a - V_1}{1} + \dfrac{V_a - V_3}{1} = \cdot \rightarrow V_a = V_b = \dfrac{V_1 + V_3}{2} \\ \text{(b)}\ \text{برای گره}\ KCL \rightarrow \dfrac{V_b - V_{in}}{1} + \dfrac{V_b - V_2}{1} = \cdot \end{cases} \rightarrow V_1 - V_2 + V_3 = V_{in}$$

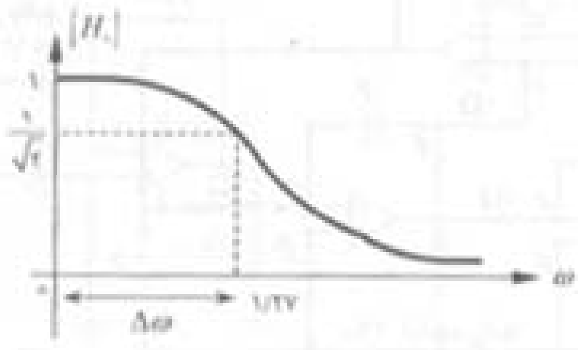
با توجه به سه معادله سه مجهولی فوق داریم

$$V_1 = \frac{\begin{vmatrix} \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & j\omega & 1 \\ V_{in} & -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} j\omega & 1 & \cdot \\ \cdot & j\omega & 1 \\ 1 & \cdot & 1 \end{vmatrix}} = \frac{V_{in}}{(1-\omega^2) + j\omega} \rightarrow H_1(j\omega) = \frac{V_1}{V_{in}} = \frac{1}{(1-\omega^2) + j\omega}$$

$$\rightarrow |H_1(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1-\omega^2)^2 + \omega^2}} = \begin{cases} 1 , & \omega = \cdot \\ \cdot , & \omega \rightarrow \infty \end{cases}$$

$$|H_1(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \max |H_1(j\omega)| \rightarrow \frac{1}{\sqrt{(1-\omega^2) + \omega^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \omega = 1/27$$

نمودار $|H_1(j\omega)|$ درشکل زیررسم شده است که یک فیلتر پایین گذر با فرکانس قطع3db ، برابر۱/۲۷ را نشان میدهد.



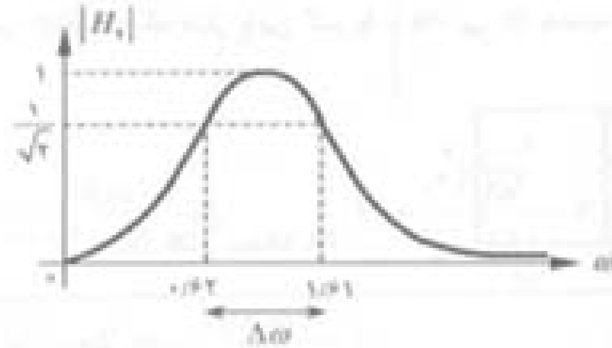
بنابراین پهنای باند آن $\Delta\omega = 1/27$ می باشد.در ادامه به بررسی $H_2(j\omega)$ خواهیم پرداخت با استفاده از دستگاه بدست آمده داریم:

$$V_2 = \frac{\begin{vmatrix} j\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & V_{in} & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} j\omega & 1 & 0 \\ 0 & j\omega & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-j\omega V_{in}}{\left(1-\omega^2\right)+j\omega} \rightarrow H_2(j\omega) = \frac{V_2}{V_{in}} = \frac{-j\omega}{\left(1-\omega^2\right)+j\omega}$$

$$\rightarrow \left|H_2(j\omega)\right| = \frac{\omega}{\sqrt{\left(1-\omega^2\right)^2+\omega^2}} = \begin{cases} 0 \ , & \omega \to 0 \\ 0 \ , & \omega \to \infty \end{cases}$$

$$\left|H_2(j\omega)\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}\max\left|H_2(j\omega)\right| \rightarrow \frac{\omega}{\sqrt{\left(1-\omega^2\right)^2+\omega^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \omega_1 = 0/62 \ , \ \omega_2 = 1/61$$

نمودار $\left|H_2(j\omega)\right|$ در شکل زیر رسم شده است که یک فیلتر میان گذر با فرکانسهای قطع۰/۶۲ و ۱/۶۱ می باشد.



با توجه به نمودار فوق پهنای باند3db بصورت زیر بدست می آید.

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = 1/61 - 0/62 = 0/99$$

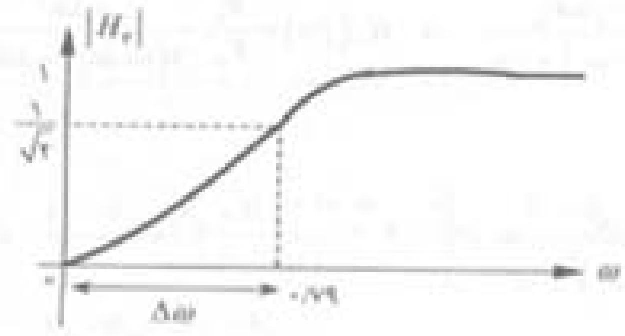
و در نهایت $H_3(j\omega)$ با استفاده از دستگاه بدست آمده بصورت زیر محاسبه می شود.

$$V_3 = \frac{\begin{vmatrix} j\omega & 1 & 0 \\ 0 & j\omega & 0 \\ 1 & -1 & V_{in} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} j\omega & 1 & 0 \\ 0 & j\omega & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-\omega^2 V_{in}}{\left(1-\omega^2\right)+j\omega} \rightarrow H_3(j\omega) = \frac{V_3}{V_{in}} = \frac{-\omega^2}{\left(1-\omega^2\right)+j\omega}$$

$$\rightarrow \left|H_3(j\omega)\right| = \frac{\omega^2}{\sqrt{\left(1-\omega^2\right)^2+\omega^2}} = \begin{cases} 0 \ , & \omega = 0 \\ 1 \ , & \omega \to \infty \end{cases}$$

$$|H_2(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}}\max|H_2(j\omega)| \to \frac{\omega^2}{\sqrt{(1-\omega^2)^2+\omega^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \to \omega = 0/79$$

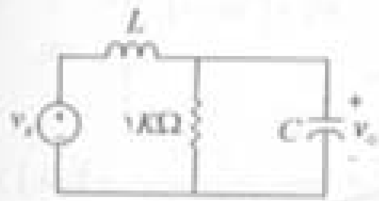
نمودار $|H_2(j\omega)|$ درشکل زیر رسم شده است که یک فیلتر بالا گذر با فرکانس وصل 3db برابر ۰/۷۹ را نشان می دهد.



بنابراین پهنای باند قطع 3db برابر $\Delta\omega = 0/79$ می باشد.

مسئله ۶۸

L و C را چنان تعیین کنید که یک فیلتر پایین گذر با $\omega_{3db} = 100$ بدست دهد.



شکل مسئله ۶۸

حل : با توجه به شکل مسئله داریم:

$$H(j\omega) = \frac{V_o}{V_s} = \frac{1000 \,\|\, \frac{1}{j\omega C}}{j\omega L + 1000 \,\|\, \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1000}{1000 - 100LC\omega^2 + j\omega L}$$

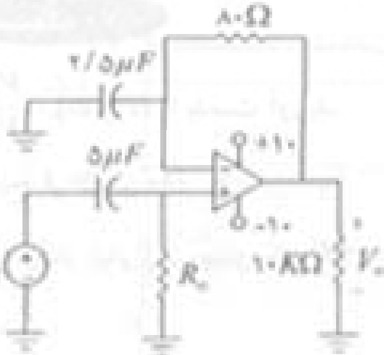
$$|H(j\omega_{3db})| = \frac{1}{\sqrt{2}}\max|H(j\omega)| \to |H(j100)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\to \frac{1000}{\sqrt{\left[1000 - 100LC(100)^2\right]^2 + (100L)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \to \left[1000 - 10^6 LC\right]^2 + 10^4 L^2 = 2$$

با انتخاب $L = 1mH$ داریم:

$$(1000 - 1000C)^2 + 10^{-2} = 2 \to C = 1/0015\ F$$

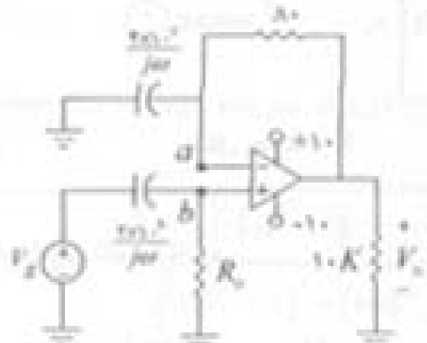
مسئله ۶۹



- $H(j\omega)=\frac{V_o}{V_g}$ را بدست آورید.
- پاسخ فرکانس $H(j\omega)$ را رسم و نوع فیلتری آن را تعیین کنید.

شکل مسئله ۶۹

حل: با فرض اینکه مدار در حالت دایمی سینوسی باشد داریم:



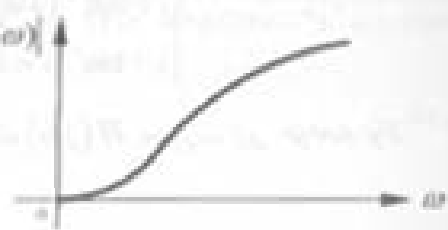
$$V_b=\frac{R_o}{R_o+\frac{2\times10^5}{j\omega}}V_g=\frac{jR_o\omega}{2\times10^5+jR_o\omega}V_g \quad , \quad V_a=\frac{\frac{4\times10^5}{j\omega}}{80+\frac{4\times10^5}{j\omega}}V_o=\frac{4\times10^5}{4\times10^5+j80\omega}V_o$$

$$V_a=V_b \;\rightarrow\; \frac{4\times10^5}{4\times10^5+j80\omega}V_o=\frac{jR_o\omega}{2\times10^5+jR_o\omega}V_g$$

$$\rightarrow\; H(j\omega)=\frac{V_o}{V_g}=\frac{jR_o\omega\left(4\times10^5+j80\omega\right)}{4\times10^5\left(2\times10^5+jR_o\omega\right)}$$

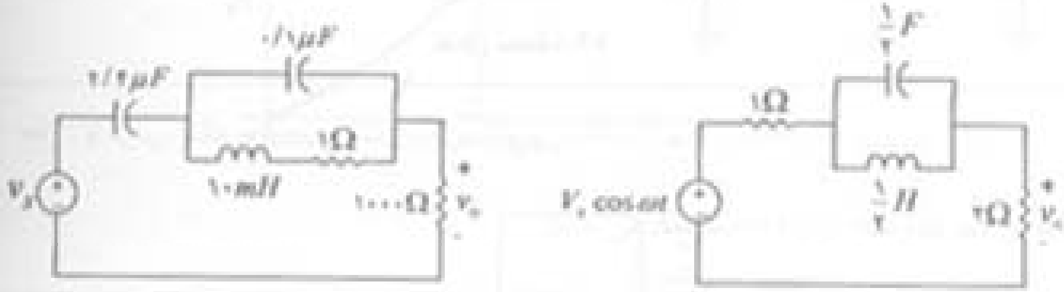
$$\left|H(j\omega)\right|=\frac{R_o\omega\sqrt{\left(4\times10^5\right)^2+\left(80\omega\right)^2}}{4\times10^5\sqrt{\left(2\times10^5\right)^2+\left(R_o\omega\right)^2}}=\begin{cases}0 & ,\ \omega=0\\ \infty & ,\ \omega\to\infty\end{cases}$$

بنابراین مدار فوق یک فیلتر بالاگذر است.



مسئله ۷۰

- $H(j\omega)=\dfrac{V_o}{V_s}$ را بدست آورید.
- پاسخ فرکانسی مدار را رسم کنید.
- نوع رفتار فیلتری و پهنای باند $3db$ را مشخص کنید.



(ب) شکل مسئله ۷۰ (الف)

حل : الف ـ با توجه به شکل (الف) داریم.

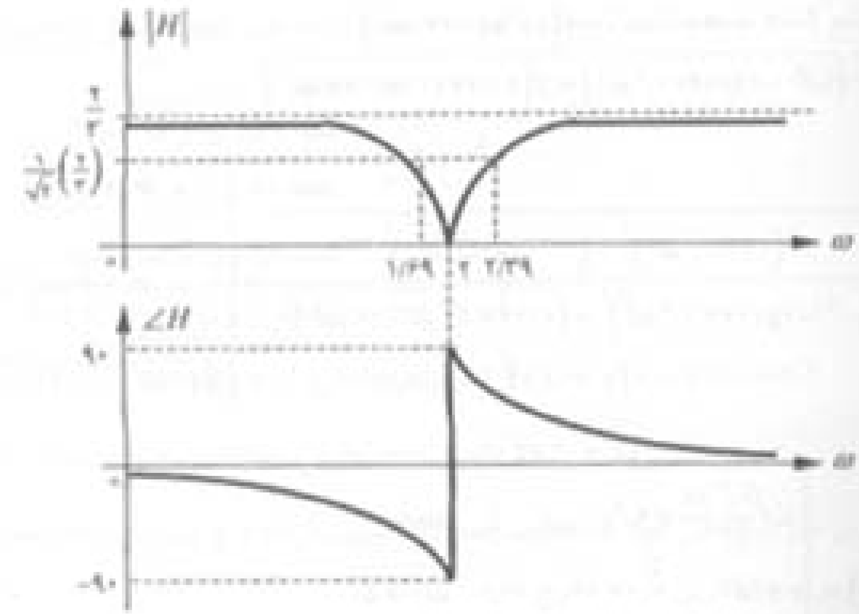
$$V_o=\frac{2}{\dfrac{j\frac{1}{2}\omega\times\dfrac{1}{j\frac{1}{2}\omega}}{j\frac{1}{2}\omega+\dfrac{1}{j\frac{1}{2}\omega}}+2+1}V_s\ \rightarrow\ H(j\omega)=\frac{V_o}{V_s}=\frac{2(j\omega)^2+8}{3(j\omega)^2+2j\omega+12}=\frac{8-2\omega^2}{12-3\omega^2+j2\omega}$$

$$|H(j\omega)|=\frac{|8-2\omega^2|}{\sqrt{(12-3\omega^2)^2+(2\omega)^2}}=\frac{|8-2\omega^2|}{\sqrt{9\omega^4-68\omega^2+144}}=\begin{cases}\dfrac{8}{12}=\dfrac{2}{3} &,\ \omega=0\\ \dfrac{2}{\sqrt{9}}=\dfrac{2}{3} &,\ \omega\to\infty\\ 0 &,\ \omega=2\end{cases}$$

$$\angle H(j\omega)=\angle(8-2\omega^2)-\angle(12-\omega^2+j2\omega)=0-\tan^{-1}\frac{2\omega}{12-\omega^2}$$

$$=\begin{cases}0-0=0 &,\ \omega=0\\ 0-\tan^{-1}(+\infty)=-90 &,\ \omega=2^-\\ 0-\tan^{-1}(+\infty)=90 &,\ \omega=2^+\\ 0-\tan^{-1}0=0 &,\ \omega=\infty\end{cases}$$

بنابراین نمودارهای اندازه و فاز تابع شبکه $H(j\omega)$ بصورت زیر خواهند بود.



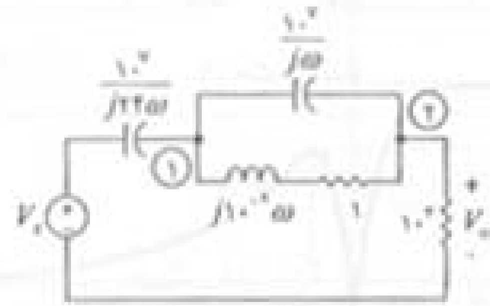
با توجه به نمودار پاسخ فرکانسی ملاحظه می شود که مدارداده شده یک فیلتر میان گذراست.در ادامه به محاسبه پهنای باند3dB خواهیم پرداخت.

$$\left|H(j\omega)\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}\max\left|H(j\omega)\right| \rightarrow \frac{\left|2\left(\omega^2-2\right)\right|}{\sqrt{9\left(\omega^2-2\right)^2+\left(2\omega\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2}{3}\right)$$

$\rightarrow \omega_1 = 1/69 , \omega_2 = 2/36$

$\rightarrow \Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = 2/36 - 1/69 = 0/67$

پ- شکل (ب) را مجدداً بصورت زیر رسم می کنیم.



با فرض اینکه $j\omega = s$ باشد خواهیم داشت.

$$V_o = \frac{10^3}{10^3 + \frac{10^6}{24s} + \left(\frac{10^6}{s}\right) \| \left(10^{-3}s+1\right)} V_s = \frac{240s^3 + 24\times10^3 s^2 + 10^{10} s}{240s^3 + 25/24\times10^5 s^2 + 1025\times10^6 s + 10^{10}} V_s$$

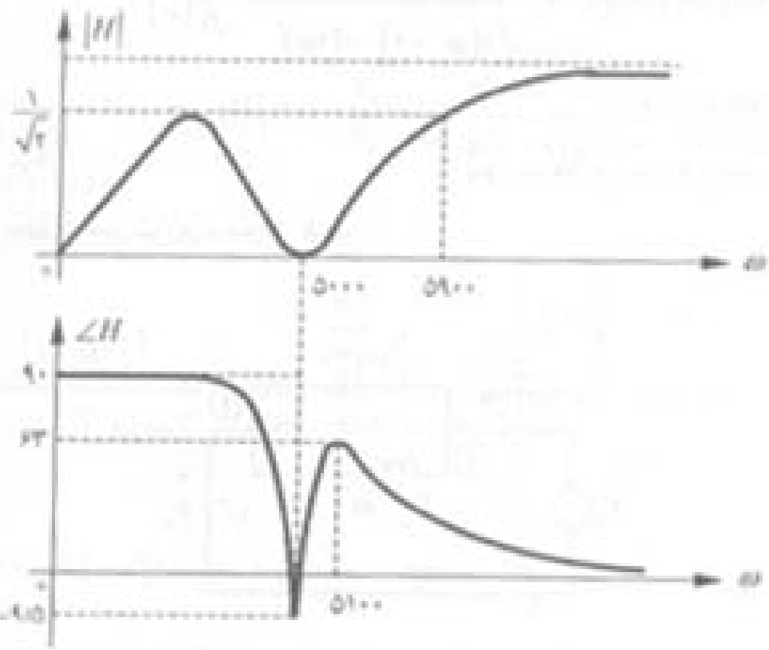
با جایگزینی $j\omega = s$ خواهیم داشت.

$$H(j\omega)=\frac{V_{\circ}}{V_{s}}=\frac{-۲۲\times ۱۰^{۳}\omega^{۲}+j\left(۱۰^{۱۰}\omega-۲۲\cdot\omega^{۳}\right)}{\left(۱۰^{۱۴}-۲۵/۲۲\times ۱۰^{۵}\omega^{۲}\right)+j\left(۱۰۲۲\times ۱۰^{۵}\omega-۲۲\cdot\omega^{۳}\right)}$$

$$\left|H(j\omega)\right|=\sqrt{\frac{\left(۲۲\times ۱۰^{۳}\omega^{۲}\right)^{۲}+\left(۱۰^{۱۰}\omega-۲۲\cdot\omega^{۳}\right)^{۲}}{\left(۱۰^{۱۴}-۲۵/۲۲\times ۱۰^{۵}\omega^{۲}\right)^{۲}+\left(۱۰۲۲\times ۱۰^{۵}\omega-۲۲\cdot\omega^{۳}\right)^{۲}}}=\begin{cases}۰ \ , \ \omega=۰\\ ۰ \ , \ \omega=۵۰۰۰\\ \sqrt{\dfrac{(-۲۲)^{۲}}{(-۲۲)^{۲}}}=۱ \ , \ \omega\to\infty\end{cases}$$

$$\to \angle H(j\omega)=\begin{cases}\angle\dfrac{j۱۰^{۱۰}\omega}{۱۰^{۱۴}}=۹۰^{\circ} & , \ \omega\to ۰\\ -۹/۵^{\circ} & , \ \omega\to ۵۰۰۰\\ \angle\dfrac{۲۲\cdot(j\omega)^{۳}}{۲۲\cdot(j\omega)^{۳}}=\angle ۱=۰ & , \ \omega\to\infty\end{cases}$$

نمودارهای اندازه و زاویه $H(j\omega)$ پاسخ فرکانسی در شکل زیر رسم شده اند.



با توجه به پاسخ فرکانسی ملاحظه می شود که مدارداده شده یک فیلتر بالا گذراست.در ادامه به محاسبه پهنای باند ۳db خواهیم پرداخت.

$$\left|H(j\omega)\right|=\frac{۱}{\sqrt{۲}}\max\left|H(j\omega)\right| \to \left|H(j\omega)\right|=\frac{۱}{\sqrt{۲}} \to \omega=۵۹۰۰ \to \Delta\omega=۵۹۰۰$$

نکته: با توجه به تابع شبکه بدست آمده بر حسب $s = j\omega$ بعضی از مقادیر کلیدی پاسخ فرکانسی را می توان بصورت زیر بدست آورد.

$$|H(j0)| = \lim_{s\to 0} \frac{\text{جمله با کمترین درجه صورت}}{\text{جمله با کمترین درجه مخرج}} = \lim_{s\to 0} \frac{10^{10} s}{10^{14}} = 0$$

$$|H(j\infty)| = \lim_{s\to \infty} \frac{\text{جمله با بیشترین درجه صورت}}{\text{جمله با بیشترین درجه مخرج}} = \lim_{s\to \infty} \frac{240 s^2}{240 s^2} = 1$$

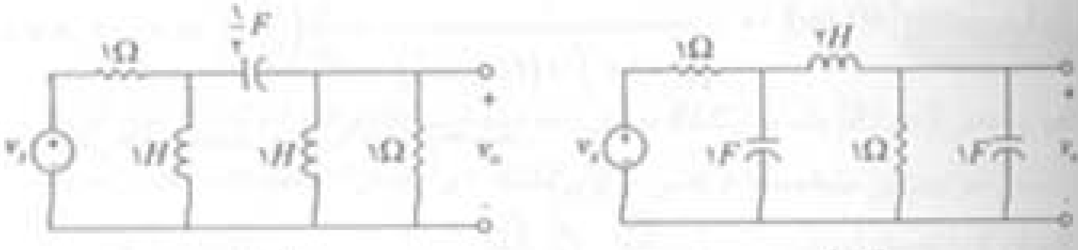
$$\angle H(j0) = \pm(\text{کمترین درجه صورت} - \text{کمترین درجه مخرج}) \times 90 = +(1-0)\times 90 = 90^\circ$$

$$\angle H(j\infty) = \pm(\text{بیشترین درجه صورت} - \text{بیشترین درجه مخرج}) \times 90 = +(0-0)\times 90 = 0$$

علامت منفی وقتی در نظر گرفته می شود که علامت جمله با کمترین درجه و یا بیشترین درجه صورت مخالف علامت جمله با کمترین و یا بیشترین درجه مخرج باشد.

مسئله ۷۱

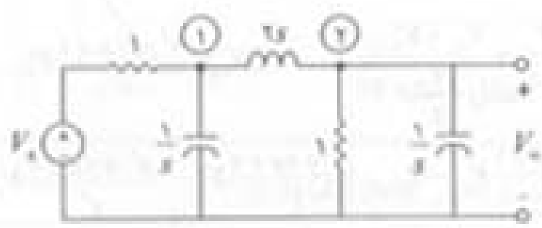
- **پاسخ فرکانسی هر کدام از مدارهای زیر را تعیین کنید.**
- **رفتار فیلتری و پهنای باند $3dB$- هر کدام را بدست آورید.**



(ب) (الف)

شکل مسئله ۷۱

حل: الف ـ با فرض $s = j\omega$ مدار بصورت زیر خواهد شد.

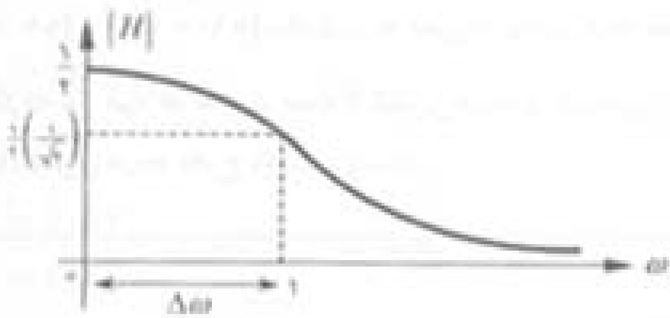


$$KCL \text{ برای گره } ② \rightarrow \frac{V_o}{\frac{1}{s}} + \frac{V_o}{1} + \frac{V_o - V_1}{2s} = 0 \rightarrow V_1 = (2s^2 + 2s + 1)V_o$$

$$\text{(1) KCL برای گره} \rightarrow \frac{(2s^2+2s+1)V_o - V_s}{1} + \frac{(2s^2+2s+1)V_o}{\frac{1}{s}} + \frac{(2s^2+2s+1)V_o - V_o}{2s} = 0$$

$$\rightarrow \frac{V_o}{V_s} = \frac{1}{2s^3+4s^2+4s+2} \rightarrow H(j\omega) = \frac{1}{2(j\omega)^3+4(j\omega)^2+4(j\omega)+2}$$

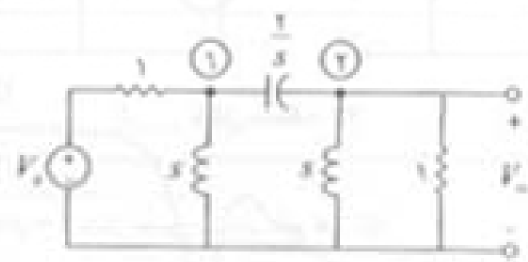
$$\rightarrow |H(j\omega)| = \left|\frac{1}{2(j\omega)^3+4(j\omega)^2+4(j\omega)+2}\right| = \begin{cases} \frac{1}{2} & , \ \omega \rightarrow 0 \\ 0 & , \ \omega \rightarrow \infty \end{cases}$$



با توجه به نمودار $|H|$ واضح است که مدار فوق یک فیلتر پایین گذر است، در ادامه به محاسبه فرکانس قطع و پهنای باند $3db$ خواهیم پرداخت.

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}}\max|H(j\omega)| \rightarrow \frac{1}{\sqrt{(2-4\omega^2)^2+(4\omega-2\omega^3)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}\right) \rightarrow \omega = 1 \rightarrow \Delta\omega = 1$$

ب ـ با فرض $S = j\omega$ مدار بصورت زیر خواهد شد.

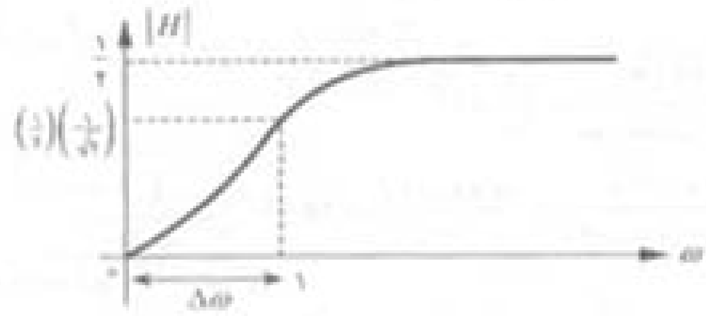


$$\text{(1) KCL برای گره} \rightarrow \frac{V_o}{1} + \frac{V_o}{s} + \frac{V_o - V_1}{\frac{2}{s}} = 0 \rightarrow V_1 = \frac{s^2+2s+2}{s^2}V_o$$

$$\text{(1) KCL برای گره} \rightarrow \frac{\frac{s^2+2s+2}{s^2}V_o - V_s}{1} + \frac{\frac{s^2+2s+2}{s^2}V_o}{s} + \frac{\frac{s^2+2s+2}{s^2}V_o - V_o}{\frac{2}{s}} = 0$$

$$\rightarrow \frac{V_o}{V_s} = \frac{s^3}{2s^3+4s^2+4s+2} \rightarrow H(j\omega) = \frac{(j\omega)^3}{2(j\omega)^3+4(j\omega)^2+4(j\omega)+2}$$

$$\rightarrow \quad \left|H(j\omega)\right| = \left|\frac{(j\omega)^3}{2(j\omega)^3 + 4(j\omega)^2 + 4(j\omega) + 2}\right| = \begin{cases} \left|\dfrac{(j\omega)^3}{2}\right|_{\omega=0} = 0 \ , & \omega \rightarrow 0 \\ \left|\dfrac{(j\omega)^3}{4(j\omega)^3}\right|_{\omega\rightarrow\infty} = 0 \ , & \omega \rightarrow \infty \end{cases}$$



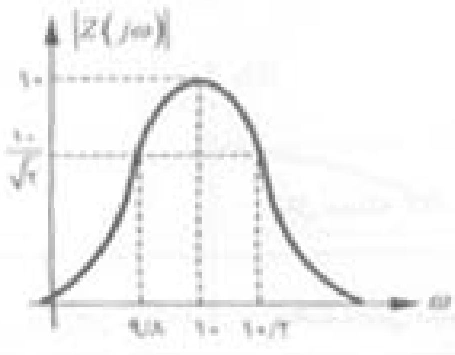
با توجه به نمودار $|H|$ واضح است که مدار فوق یک فیلتر بالا گذراست، در ادامه به محاسبه فرکانس قطع $3dB$ و پهنای باند $3dB$ خواهیم پرداخت.

$$\left|H(j\omega)\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}\max\left|H(j\omega)\right| \rightarrow \frac{\omega^3}{\sqrt{\left(2-4\omega^2\right)^2 + \left(4\omega-2\omega^3\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}\right) \rightarrow \omega = 1 \rightarrow \Delta\omega = 1$$

مسئله ۷۲

الف ـ منحنی $|Z(j\omega)|$ یک مدار RLC موازی داده شده است مقادیر R و L و C را بدست آورید.

ب ـ می خواهیم این مشخصه با فرکانس مرکزی $20KHZ$ و حداکثر 10^5 اهم باشد. مقادیر جدید R و L و C را بدست آورید.



شکل مسئله ۷۲

حل : الف ـ با توجه به پاسخ فرکانسی $|Z(j\omega)|$ داریم:

$$\omega_0 = 10 \quad , \quad \Delta\omega = 10/2 - 9/8 = 0/4 \quad , \quad \Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q} = 2\alpha \quad \rightarrow \quad 2\alpha = 0/4$$

می دانیم که در فرکانس تشدید ω_0 ، سلف و خازن اثر یکدیگر را خنثی کرده و $Z(j\omega) = R$ می باشد بنابراین داریم:

$$|Z(j\omega_0)|=|Z(j۱۰)|=R \rightarrow R=۱۰\Omega \quad , \quad ۲\alpha=\frac{۱}{RC} \rightarrow ۰/۴=\frac{۱}{۱۰C} \rightarrow C=۰/۲۵F$$

$$\omega_0=۱۰ \rightarrow \frac{۱}{\sqrt{LC}}=۱۰ \rightarrow \frac{۱}{\sqrt{۰/۲۵L}}=۱۰ \rightarrow L=۰/۰۴H$$

ب ـ در این حالت از روش نرمالیزه کردن استفاده می کنیم. مقادیر اجزای مدار نرمالیزه شده را برابر مقادیر محاسبه شده در قسمت قبل در نظر می گیریم.

$$r_z=\frac{\text{سطح امپدانس مطلوب}}{\text{سطح امپدانس طرح نرمالیزه شده}}=\frac{۱۰^۵}{۱۰}=۱۰^۴$$

$$\Omega_n=\frac{\text{فرکانس نوعی مطلوب}}{\text{فرکانس نوعی طرح نرمالیزه شده}}=\frac{۲\pi\times۲۰\times۱۰^۳}{۱۰}=۴\pi\times۱۰^۳$$

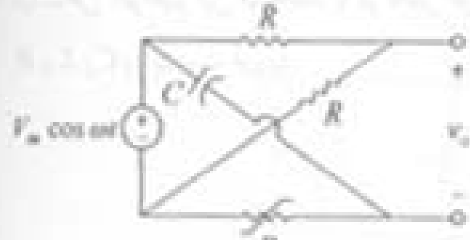
بنابراین اجزای مطلوب بصورت زیر بدست می آیند.

$$R=r_zR_n=۱۰^۴\times۱۰=۱۰^۵ \quad , \quad L=\frac{r_z}{\Omega_n}L_n=\frac{۱۰^۴}{۴\pi\times۱۰^۳}\times۰/۰۴=\frac{۱}{۱۰\pi}H$$

$$C=\frac{C_n}{r_z\Omega_n}=\frac{۰/۲۵}{۱۰^۴\times۴\pi\times۱۰^۳}=\frac{۲۵}{۴\pi}\times۱۰^{-۹}F$$

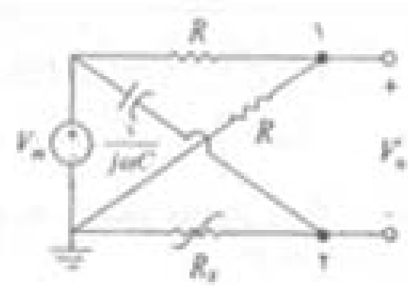
مسئله ۷۳

- v_o را تعیین کنید.
- منحنی های اندازه و فاز تابع شبکه انتقال ولتاژ V_o را بر حسب R_x رسم کنید.
- رفتار فیلتری این مدار را بر حسب تغییرات R_x تعیین کنید.



شکل مسئله ۷۳

حل : با فرض اینکه مدار در حالت دایمی سینوسی باشد آن را بصورت زیر رسم می کنیم.



$$\text{①}\ \text{KCL برای گره} \rightarrow \frac{V_1}{R}+\frac{V_1-V_m}{R}=0 \rightarrow V_1=\frac{V_m}{2}$$

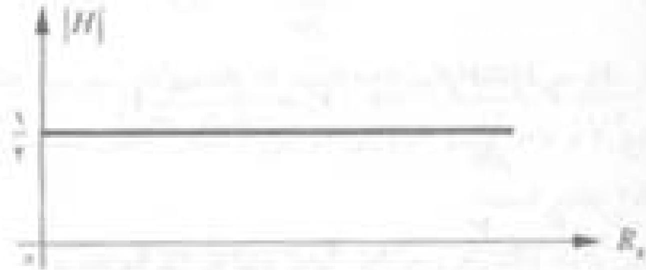
$$\text{②}\ \text{KCL برای گره} \rightarrow \frac{V_2-V_m}{\frac{1}{j\omega C}}+\frac{V_2}{R_x}=0 \rightarrow V_2=\frac{j\omega CR_x}{j\omega CR_x+1}V_m$$

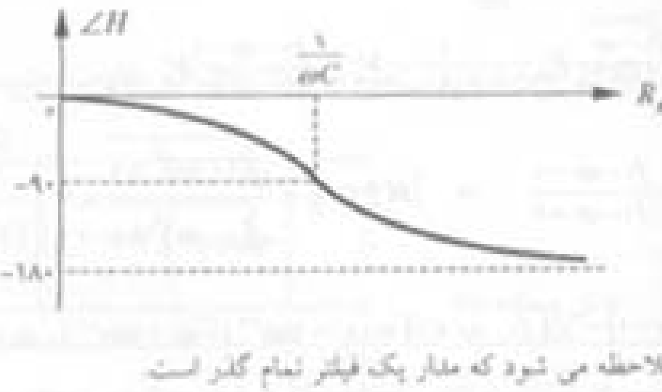
$$\rightarrow V_o=V_1-V_2=\frac{V_m}{2}-\frac{j\omega CR_x}{j\omega CR_x+1}V_m=\frac{1-j\omega CR_x}{2(j\omega CR_x+1)}V_m \rightarrow H(jR_x)=\frac{1-\omega C(jR_x)}{2\omega C(jR_x)+2}$$

$$\rightarrow |H(jR_x)|=\frac{\sqrt{1+(\omega CR_x)^2}}{2\sqrt{1+(\omega CR_x)^2}}=\frac{1}{2}$$

$$\angle H(jR_x)=-\tan\omega CR_x-\tan\omega CR_x=-2\tan\omega CR_x=\begin{cases}0 & ,\ R_x=0\\ -90^\circ & ,\ R_x=\frac{1}{\omega C}\\ -180 & ,\ R_x\rightarrow\infty\end{cases}$$

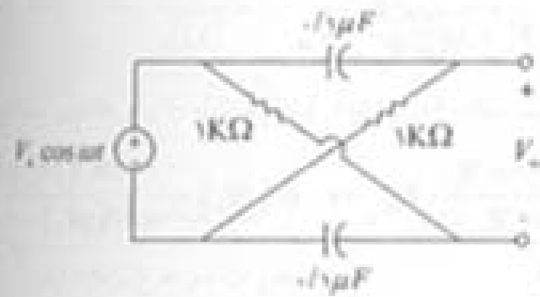
بنابراین نمودارهای اندازه و فاز تابع شبکه بصورت زیر می باشد.





با توجه به نمودار $|H|$، ملاحظه می شود که مدار یک فیلتر تمام گذر است.

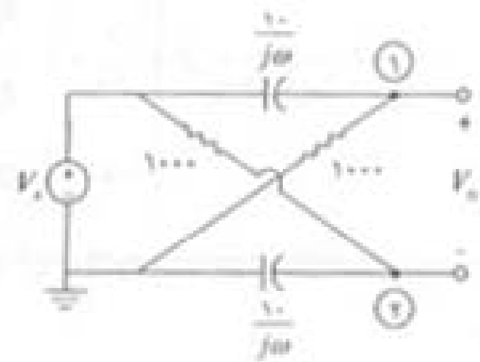
مسئله ۷۳



شکل مسئله ۷٤

- تابع شبکه $H(j\omega)=\frac{V_o}{V_s}$ را بدست آورید.
- پاسخ فرکانسی مدار را رسم کنید.
- نوع فیلتری مدار را مشخص کنید.

حل : با فرض اینکه مدار در حالت دایمی سینوسی باشد آن را بصورت زیر رسم می کنیم.



① برای گره KCL $\rightarrow \frac{V_1}{1000}+\frac{V_1-V_s}{\frac{10^{7}}{j\omega}} \rightarrow V_1=\frac{j10^{-4}\omega}{1+j10^{-4}\omega}V_s$

② برای گره KCL $\rightarrow \frac{V_2-V_s}{1000}+\frac{V_2}{\frac{10^{7}}{j\omega}} \rightarrow V_2=\frac{1}{1+j10^{-4}\omega}V_s$

$$\rightarrow V_o=V_1-V_2=\frac{j10^{-4}\omega}{1+j10^{-4}\omega}V_s-\frac{1}{1+j10^{-4}\omega}V_s=\frac{j10^{-4}\omega-1}{j10^{-4}\omega+1}V_s$$

$$\rightarrow H(j\omega)=\frac{V_o}{V_s}=\frac{j10^{-4}\omega-1}{j10^{-4}\omega+1} \rightarrow |H(j\omega)|=\frac{\sqrt{(10^{-4}\omega)^2+1}}{\sqrt{(10^{-4}\omega)^2+1}}=1$$

$$\angle H(j\omega)=\angle(j10^{-4}\omega-1)-\angle(j10^{-4}\omega+1)=180-\tan^{-1}10^{-4}\omega-\tan^{-1}10^{-4}\omega=180-2\tan^{-1}10^{-4}\omega$$

$$=\begin{cases}180-0=180 & , \ \omega=0\\ 180-90=90 & , \ \omega=\frac{1}{10^{-4}}\\ 180-180=0 & , \ \omega\rightarrow\infty\end{cases}$$

بنابراین نمودارهای اندازه و فاز پاسخ فرکانسی تابع شبکه بصورت زیر می باشد.

با توجه به نمودار $|H|$، واضح است که مدار بصورت یک فیلتر تمام گذر عمل می کند.

مسئله ۷۵

فرکانس منبع ولتاژ سینوسی چنان تنظیم شده است که دامنه ولتاژ سینوسی حداکثر شود.

- **الف ـ فرکانس منبع v_s و دامنه ولتاژ خروجی در این فرکانس چقدر است.**
- **ب ـ پهنای باند $3db$ چقدر است.**
- **پ ـ درچه فرکانسی دامنه ولتاژ خروجی $\frac{1}{\sqrt{2}}$ برابر حداکثر آن خواهد بود.**
- **ت ـ Q این مدار چیست.**
- **ث ـ اگر مقاومت ۱۶$K\Omega$ مقاومت درونی منبع را نشان دهد، این مقاومت منبع، Q مدار را چقدر پایین می آورد.**

شکل مسئله ۷۵

حل: الف ـ می دانیم که به ازای فرکانس تشدید ولتاژ خروجی ماکزیمم خواهد بود،بنابراین فرکانس مورد نظر بصورت زیر بدست می آید.

$$\omega_o = \frac{۱}{\sqrt{LC}} = \frac{۱}{\sqrt{(۴۰\times۱۰^{-۳})(۶/۲۵\times۱۰^{-۶})}} = ۲۰۰۰\left(\frac{rad}{sec}\right)$$

$$\omega_0 = 2\pi f_0 \;\rightarrow\; f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{2000}{2\pi} = 318/27\ Hz$$

در حالت تشدید سلف و خازن اثر یکدیگر را خنثی کرده بنابراین فقط مقاومت ها را در نظر خواهیم گرفت.

$$\rightarrow\; \max V_0 = \frac{4}{16+4}V_m = \frac{V_m}{5}$$

پ ـ با توجه به مدار داده شده داریم.

$$R_{eq} = 4 \parallel 16 = \frac{4\times 16}{4+16} = 3/2 \;\rightarrow\; 2\alpha = \frac{1}{R_{eq}C} = \frac{1}{3/2\times 6/25\times 10^{-3}} = 50$$

$$\rightarrow\; Q = \frac{\omega_0}{2\alpha} = \frac{2000}{50} = 40 \;\rightarrow\; Q \gg 1$$

از آنجا که $Q \gg 1$ می باشد لذا می توان از تقریب زیر استفاده کرد.

$$\Delta\omega = 2\alpha = 50$$

پ ـ فرکانسهای مورد نظر، فرکانسهای قطع $3db$ می باشد که با توجه به اینکه $Q \gg 1$ می باشد از تقریب های زیر استفاده خواهیم کرد.

$$\omega_1 = \omega_0 - \alpha = 2000 - 25 = 1975 \quad , \quad \omega_2 = \omega_0 + \alpha = 2000 + 25 = 2025$$

ث ـ در قسمت (ب) محاسبه شده است.

ث ـ اگر مقاومت $16K\Omega$ نباشد مقاومت معادل $R'_{eq} = 4$ می شود که با توجه به تعریف ضریب کیفیت خواهیم داشت.

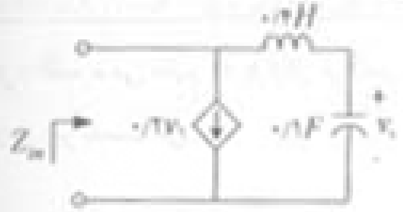
$$Q = \frac{\omega_0}{2\alpha} = \frac{\omega_0}{\frac{1}{R_{eq}C}} = \omega_0 R_{eq} C \;\rightarrow\; Q \propto R_{eq}$$

$$\frac{Q}{Q'} = \frac{R_{eq}}{R'_{eq}} = \frac{3/2}{4} \;\rightarrow\; Q' = \frac{4}{3/2}Q = \frac{4}{3/2}(40) = 50 \;\rightarrow\; \Delta Q = 50 - 40 = 10$$

بنابراین مقاومت $16K\Omega$، Q مدار را ۱۰ واحد پایین می آورد.

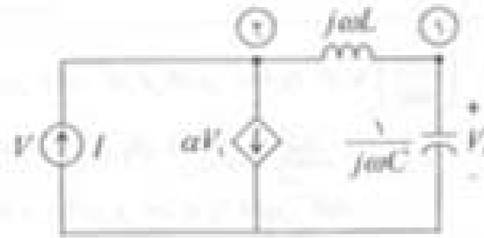
مسئله ۷۷

می خواهیم سطح امپدانس را ۴ برابر و سطح فرکانس را ۵ برابر افزایش دهیم. مقادیر جدید عناصر و امپدانس ورودی مدار جدید را بدست آورید.



شکل مسئله ۷۷

حل : در حالت دایمی سینوسی مدار بصورت زیر خواهد بود. ابتدا به محاسبه Z_{in} خواهیم پرداخت. بدین منظور منبع جریان I را به دو سر ورودی وصل کرده و ولتاژ دو سر آن را محاسبه خواهیم کرد.



$$\text{②} \quad \text{برای گره } KCL \rightarrow -I + \alpha V_1 + \frac{V_1}{\frac{1}{j\omega C}} \rightarrow I = (\alpha + j\omega C)V_1$$

$$\text{برای حلقه بیرونی } KVL \rightarrow -V + \left(j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right)\frac{V_1}{\frac{1}{j\omega C}} = 0 \rightarrow V = \left(1 - LC\omega^2\right)V_1$$

$$\rightarrow V = \left(1 - LC\omega^2\right)\frac{I}{(\alpha + j\omega C)}$$

$$\rightarrow Z(j\omega) = \frac{V}{I} = \frac{1 - LC\omega^2}{\alpha + j\omega C} \quad , \quad Y(j\omega) = \frac{\alpha}{1 - LC\omega^2} + j\frac{C\omega}{1 - LC\omega^2}$$

سطح امپدانس یا اندازه امپدانس ماکزیمم به ازای فرکانس تشدید بدست می آید. ابتدا فرکانس تشدید را بدست می آوریم.

$$\operatorname{Im}\{Y(j\omega_0)\} = 0 \rightarrow \frac{C\omega_0}{1 - LC\omega_0^2} = 0 \rightarrow \omega_0 = 0 \rightarrow \text{سطح امپدانس} = R_0 = \left|Z(j\omega_0)\right| = \frac{1}{\alpha}$$

سطح امپدانس باید ۴ برابر و سطح فرکانس باید ۵ برابر شود بنابراین $r_m = 4$ و $\Omega_m = 4$ بوده و با توجه به شکل مسئله داریم.

$$R_0 = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{0/2} = 5 \quad , \quad L_0 = 0/4 \quad , \quad C_0 = 0/1$$

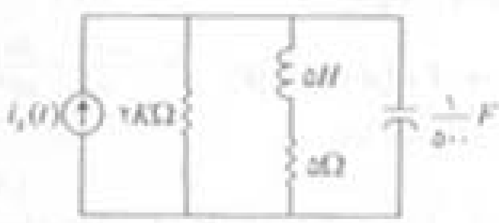
و با توجه به رابطه (۸-۶) کتاب، مقادیر عناصر برای مدار جدید برابر است با :

$$R = r_m R_0 = 4 \times 5 = 20 \rightarrow \frac{1}{\alpha} = 20 \rightarrow \alpha = 0/05$$

$$L = \frac{r_m}{\Omega_m} L_0 = \frac{4}{5}(0/4) = 0/32\ H \qquad , \qquad C = \frac{C_0}{r_m \Omega_m} = \frac{0/1}{4 \times 5} = 5 \times 10^{-3}\ F = 5\ mF$$

مسئله ۷۸

- فرکانس تشدید مدار چیست.
- مقیاس مدار را چنان تغییر دهید که فرکانس تشدید آن به $\Omega = 2\sqrt{11}\times 10^{4}\left(\frac{rad}{sec}\right)$ تبدیل شود و امپدانس دیده شده توسط منبع جریان $900K\Omega$ باشد.
- مقادیر جدید مقاومت ها و سلف و خازن را تعیین کنید.



شکل مسئله ۷۸

حل : ادمیتانس دیده شده از دو سر منبع جریان برابر است با :

$$Y(j\omega)=\frac{1}{2000}+\frac{1}{5+j5\omega}+\frac{1}{j\frac{\omega}{500}}=\left(\frac{1}{2000}+\frac{5}{25+25\omega^2}\right)+j\omega\left(\frac{1}{500}-\frac{5}{25+25\omega^2}\right)$$

می دانیم که فرکانس تشدید از حل معادله $\operatorname{Im}\{Y(j\omega)\}=0$ بدست می آید.

$$\operatorname{Im}\{Y(j\omega)\}=0 \rightarrow \frac{1}{500}-\frac{5}{25+25\omega^2}=0 \rightarrow 25+25\omega^2=2500 \rightarrow \omega_0=2\sqrt{11}$$

سطح امپدانس به ازای فرکانس تشدید بدست آمده برابر است با :

$$R_0=Z(j\omega_0)=\frac{1}{\left(\frac{1}{2000}+\frac{5}{25+25\omega^2}\right)_{\text{تشدید}}}=40\Omega$$

مقیاس مدارخواسته شده همان ضرایب نرمالیزاسیون امپدانس وفرکانس می باشند که با فرض اینکه طرح نرمالیزه مدار شکل فوق باشد داریم

$$r_a=\frac{\text{سطح امپدانس مطلوب}}{\text{سطح امپدانس طرح نرمالیزه}}=\frac{400K\Omega}{40\Omega}=10^4$$

$$\Omega_a=\frac{\text{فرکانس تشدید مطلوب}}{\text{فرکانس نوعی طرح نرمالیزه شده}}=\frac{4\pi\times 40\times 10^{3}}{10}=4\pi\times 10^{4}$$

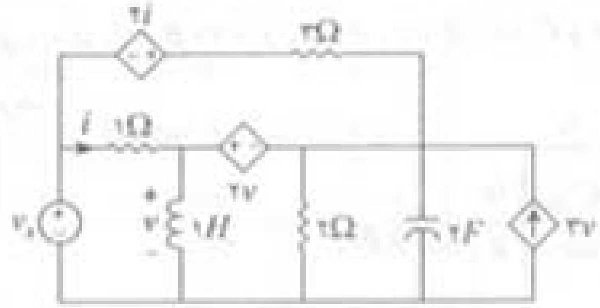
بنابراین مقادیر عناصر مدار برای سطح فرکانس و امپدانس خواسته شده بصورت زیر بدست خواهند آمد.

$$R=r_aR_{n}=\left(10^{4}\right)\left(2\times 10^{3}\right)=2M\Omega \quad , \quad R_1=r_aR_{1n}=\left(10^{3}\right)(5)=5K\Omega$$

$$L = \frac{r_n}{\Omega_n} L_n = \left(\frac{10^3}{10^6}\right)(5) = 5\ mH \quad , \quad C = \frac{C_n}{r_n \Omega_n} = \frac{\frac{1}{500}}{\left(10^3\right)\left(10^6\right)} = 2\ pF$$

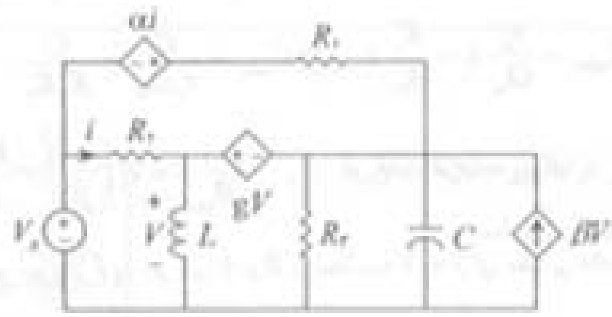
مسئله ۷۹

می خواهیم سطح امپدانس ۲۰۰۰ برابر و سطح فرکانس 4×10^5 برابر گردد. مقادیر جدید عناصر را تعین کنید.



شکل مسئله ۷۹

حل : فرض کنیم که مدار جدید مورد نظر بصورت زیر باشد.



با توجه به مقادیر داده شده سطح امپدانس و سطح فرکانس برابر $r_n = 2000 = 2\times10^3$ و $\Omega_n = 4\times10^5$ بوده و با فرض اینکه شکل مسئله ۷۹ طرح نرمالیزه شده باشد خواهیم داشت.

$$R_1 = r_n R_{1n} = \left(2\times10^3\right)(3) = 6K\Omega \quad , \quad R_2 = r_n R_{2n} = \left(2\times10^3\right)(1) = 2K\Omega$$

$$R_3 = r_n R_{3n} = \left(2\times10^3\right)(2) = 4K\Omega \quad , \quad L = \frac{r_n}{\Omega_n} L_n = \left(\frac{2\times10^3}{4\times10^5}\right)(1) = 5\ mH$$

$$C = \frac{C_n}{r_n \Omega_n} = \frac{2}{\left(2\times10^3\right)\left(4\times10^5\right)} = 2/5\ nF$$

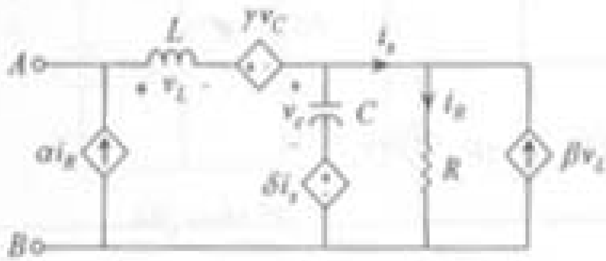
αi، gV و βV به ترتیب منابع ولتاژ کنترل شده با جریان ، ولتاژ کنترل شده با ولتاژ و جریان کنترل شده با ولتاژ اند بنابراین α از جنس امپدانس، g بدون بعد و β از جنس ادمیتانس است و لذا g تغییری نکرده و α و β بصورت زیر بدست می آیند.

$$\alpha = r_a \alpha_o = \left(۲\times۱۰^{۳}\right)\left(۴\right) = ۸۰۰۰ \quad , \quad \frac{۱}{\beta} = r_a \frac{۱}{\beta_o} = \frac{۲\times۱۰^{۳}}{۳} \rightarrow \beta = ۰/۰۰۱۵$$

مسئله ۸۰

می خواهیم سطح امپدانس را $K_۱$ برابر و سطح فرکانس را $K_۲$ برابر افزایش دهیم. مقادیر جدید R، L، C، α، β، δ و γ چیست.

برای $\alpha = ۱$، $\beta = ۱۰$، $\gamma = ۲۰$، $\delta = ۴$، $R = ۲$، $C = ۱۰$ و $L = ۲$ امپدانس ورودی مدار را بدست آورید.



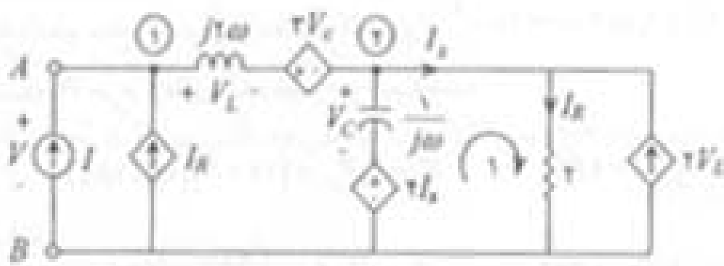
شکل مسئله ۸۰

حل : به روشی مشابه حل مسئله ۷۹ داریم:

$$R_{new} = r_a R = K_۱ R \quad , \quad L_{new} = \frac{r_a}{\Omega_a} L = \frac{K_۱}{K_۲} L \quad , \quad C_{new} = \frac{C}{r_a \Omega_a} = \frac{C}{K_۱ K_۲}$$

$$\alpha_{new} = \alpha \quad , \quad \gamma_{new} = \gamma \quad , \quad \delta_{new} = r_a \delta = K_۱ \delta \quad , \quad \frac{۱}{\beta_{new}} = r_a \left(\frac{۱}{\beta}\right) = \frac{K_۱}{\beta} \rightarrow \beta_{new} = \frac{\beta}{K_۱}$$

در ادامه با وصل کردن منبع جریان I به دو سر A و B و محاسبه V به ازای مقادیر داده شده، امپدانس ورودی را تعیین خواهیم کرد.



$$V_۱ = V \quad , \quad V_۲ = ۲I_R \quad , \quad \begin{cases} V_L = V - \left(۲V_C + ۲I_R\right) \\ I_x = I_R - ۲V_L \end{cases} \rightarrow I_x = ۵I_R + ۴V_C - V$$

$$① \text{ برای گره } KCL \rightarrow -I - I_R + \frac{V - \left(۲V_C + ۲I_R\right)}{j۲\omega} = ۰ \rightarrow V - ۲V_C - \left(۲ + j۲\omega\right) I_R = j۲\omega I$$

① برای گره KCL $\rightarrow \; -\dfrac{V-(2V_C+2I_R)}{j2\omega}+\dfrac{V_C}{\frac{1}{j\omega}}+5I_R+6V_C-V=0$

$$\rightarrow \; -(1+j2\omega)V+\left(3-2\omega^2+j12\omega\right)V_C+\left(2+j10\omega\right)I_R=0$$

① برای مش KVL $\rightarrow \; -4\left(5I_R+6V_C-V\right)-V_C+2I_R=0 \;\rightarrow\; 4V-25V_C-18I_R=0$

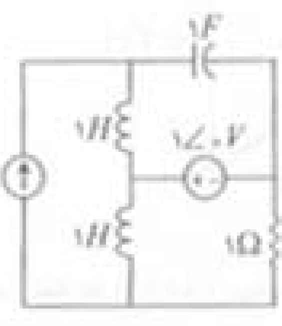
با حل سه معادله سه مجهول بدست آمده به روش کرامر خواهیم داشت.

$$V=\frac{\begin{vmatrix} j2\omega I & -3 & -2-j\omega \\ 0 & 3-2\omega^2+j12\omega & 2+j10\omega \\ 0 & -25 & -18 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -3 & -2-j2\omega \\ -1-j2\omega & 3-2\omega^2+j12\omega & 2+j10\omega \\ 4 & -25 & -18 \end{vmatrix}}=\frac{18\omega^2+j17\omega-2}{-8\omega^2-j2\omega}I \;\rightarrow\; Z_{in}(j\omega)=\frac{V}{I}$$

$$=\frac{18\omega^2+j17\omega-2}{-8\omega^2-j2\omega}$$

مسئله ۸۱

ⓘ در چه ناحیه فرکانسی توان متوسط تحویلی منبع جریان از منبع ولتاژ بیشتر است.



شکل مسئله ۸۱

حل : ابتدا منبع ولتاژ را برابر صفر منظور کرده اثر منبع جریان را بررسی می کنیم. امپدانس دیده شده از دو سر منبع جریان برابر است با:

$$Z_1(j\omega)=\left(j\omega \,\|\, \frac{1}{j\omega}\right)+j\omega \,\|\,(1)=\frac{\omega^2}{1+\omega^2}+j\frac{2\omega}{1-\omega^2}$$

$$\rightarrow \; P_{I(\omega)}=\frac{|I|^2}{2}\mathrm{Re}\left\{Z_1(j\omega)\right\}=\frac{1}{2}\left(\frac{\omega^2}{1+\omega^2}\right)=\frac{\omega^2}{2+2\omega^2}$$

حال منبع جریان را برابر صفر در نظر می گیریم و ادمیتانس دیده شده از دو سر منبع ولتاژ را حساب می کنیم.

$$Y_2(j\omega) = \frac{1}{j\omega + \frac{1}{j\omega}} + \frac{1}{1+j\omega} = \frac{1}{1+\omega^2} + j\frac{2\omega^3}{1-\omega^4}$$

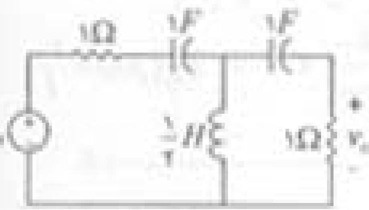
$$\rightarrow \; P_{2(\omega^2)} = \frac{|V|^2}{2}\mathrm{Re}\{Y_2(j\omega)\} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\omega^2}\right) = \frac{1}{2+2\omega^2}$$

در نهایت خواهیم داشت:

$$P_{1(\omega^2)} > P_{2(\omega^2)} \rightarrow \frac{\omega^2}{2+2\omega^2} > \frac{1}{2+2\omega^2} \rightarrow \omega^2 > 1 \rightarrow |\omega| > 1$$

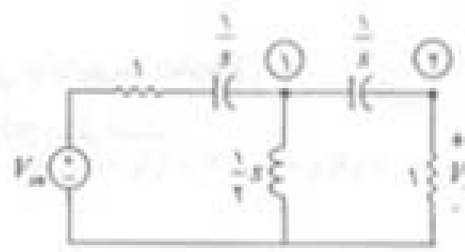
مسئله ۸۲

- تابع شبکه $H(j\omega) = \dfrac{V_o}{V_{in}}$ را تعیین کنید.
- رفتار فیلتری و فرکانس قطع آن را مشخص کنید.
- می خواهیم فیلتری با همین مشخصه در فرکانس $\omega = 10^4$ داشته باشیم. مقادیر جدید عناصر را تعیین کنید.



شکل مسئله ۸۲

حل : با فرض $j\omega = s$ مدار بصورت زیر خواهد بود.



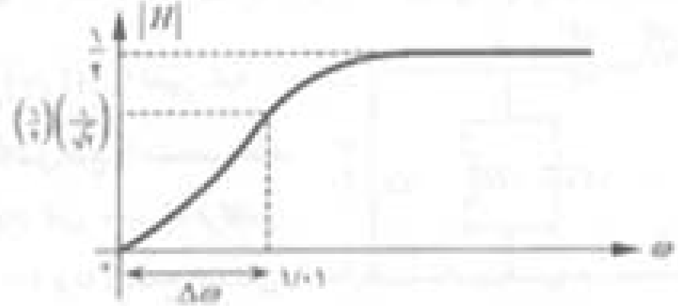
$$\text{KCL برای گره ②} \rightarrow \frac{V_o}{1} + \frac{V_o - V_1}{\frac{1}{s}} = 0 \rightarrow V_1 = \frac{s+1}{s}V_o$$

$$\text{KCL برای گره ①} \rightarrow \frac{\frac{s+1}{s}V_o - V_{in}}{\frac{1}{s}+1} + \frac{\frac{s+1}{s}V_o}{\frac{1}{2}s} + \frac{\frac{s+1}{s}V_o - V_o}{\frac{1}{s}} = 0$$

$$\rightarrow \frac{V_o}{V_{in}} = \frac{s^3}{2s^3 + 4s^2 + 4s + 2} \rightarrow H(j\omega) = \frac{(j\omega)^3}{2(j\omega)^3 + 4(j\omega)^2 + 4(j\omega) + 2}$$

$$\rightarrow |H(j\omega)| = \left|\frac{(j\omega)^3}{2(j\omega)^3 + 4(j\omega)^2 + 4(j\omega) + 2}\right| = \begin{cases} 0, & \omega = 0 \\ \frac{1}{2}, & \omega \rightarrow \infty \end{cases}$$

بنابراین نمودار $\left|H(j\omega)\right|$ بصورت زیر خواهد بود که نشان دهنده یک فیلتر بالاگذر می باشد.

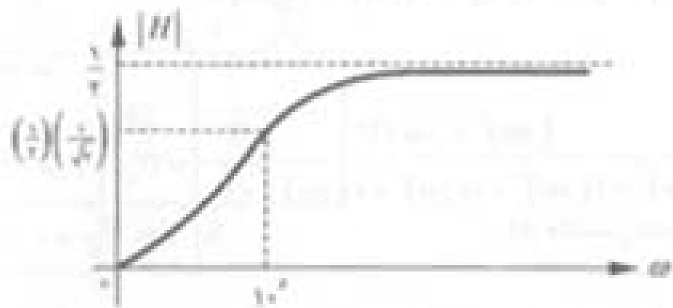


در ادامه به محاسبه فرکانس قطع ۳db خواهیم پرداخت.

$$\left|H(j\omega)\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}\max\left|H(j\omega)\right| \rightarrow \frac{\omega^3}{\sqrt{\left(2-4\omega^2\right)^2+\left(4\omega+2\omega^3\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}\right) \rightarrow \omega = 1/01$$

$$\rightarrow \Delta\omega = 1/01$$

حال می خواهیم فیلتری همانند فیلتر فوق ولی با فرکانس قطع $\omega = 10^6$ داشته باشیم.

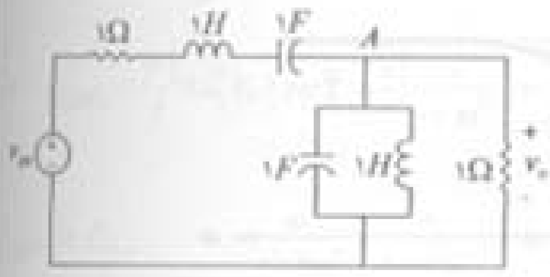


برای محاسبه مقادیر جدیدعناصر ابتدا ضرایب نرمالیزاسیون را محاسبه خواهیم کرد.ازآنجا که فقط سطح فرکانس را افزایش داده ایم لذا $r_n = 1$ بوده و خواهیم داشت.

$$\Omega_n = \frac{\text{فرکانس قطع مطلوب}}{\text{فرکانس قطع نرمالیزه شده}} = \frac{10^6}{1/01} \approx 10^6$$

$$R_{new} = r_n R = (1)(1) = 1\Omega \quad , \quad C_{new} = \frac{C}{r_n \Omega_n} = \frac{1}{1\times 10^6} = 1\mu F \quad , \quad L_{new} = \frac{r_n}{\Omega_n}L = \frac{1}{10^6}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\mu H$$

مسئله ۸۳



شکل مسئله ۸۳

- تابع شبکه $H(j\omega)=\dfrac{V_o}{V_{in}}$ را تعیین کنید.
- رفتار فیلتری وفرکانس قطع را مشخص کنید.
- مقیاس مدار را چنان تغییر دهید که فرکانس مورد توجه $1000Hz$ بوده و سطح امپدانس مدار ۳۰۰ برابر شود.

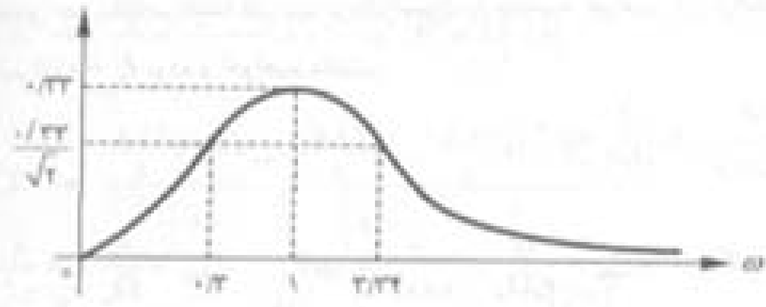
حل : با توجه به شکل مدار در حالت دایمی سینوسی داریم.

$$KCL \text{ برای گره } A \rightarrow \quad \frac{V_o - V_{in}}{1 + j\omega + \frac{1}{j\omega}} + \frac{V_o}{j\omega + \frac{1}{j\omega}} + \frac{V_o}{1} = 0$$

$$\rightarrow H(j\omega) = \frac{V_o}{V_{in}} = \frac{(j\omega)^3 + j\omega}{(j\omega)^4 + 3(j\omega)^3 + 4(j\omega)^2 + 3(j\omega) + 1}$$

$$\rightarrow |H(j\omega)| = \left|\frac{(j\omega)^3 + j\omega}{(j\omega)^4 + 3(j\omega)^3 + 4(j\omega)^2 + 3(j\omega) + 1}\right| = \begin{cases} 0 & , \ \omega \rightarrow 0 \\ 0/33 & , \ \omega = 1 \\ \lim\limits_{\omega \rightarrow \infty} \dfrac{\omega^3}{\omega^4} = 0 & , \ \omega \rightarrow \infty \end{cases}$$

بنابراین نمودار $H(j\omega)$ بصورت زیر است که نشان دهنده یک فیلتر میان گذر است.



در ادامه فرکانسهای قطع $3db$ را محاسبه خواهیم کرد.

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \max|H(j\omega)| \rightarrow \frac{\omega - \omega^3}{\sqrt{(1 - 4\omega^2 + \omega^4)^2 + (3\omega - 3\omega^3)^2}} = \frac{0/33}{\sqrt{2}}$$

$$\rightarrow \quad \omega_1 = ۰/۳ \quad , \quad \omega_2 = ۳/۳۴$$

از آنجا که سطح امپدانس ۳۰۰ برابر می شود لذا $r_n = ۳۰۰$ و فرکانس تشدید مطلوب برابر Hz۱۰۰۰ است بنابراین داریم.

$$\Omega_n = \frac{۲\pi \times ۱۰۰۰\left(\frac{rad}{sec}\right)}{۱\left(\frac{rad}{sec}\right)} = ۲\pi \times ۱۰^۳$$

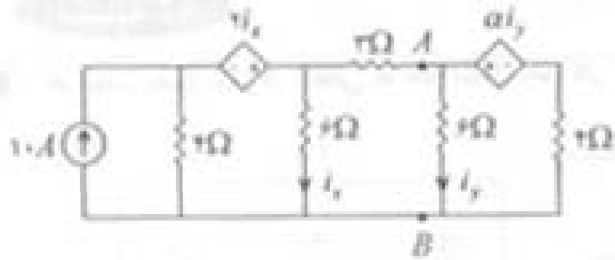
بنابراین مقادیر جدید عناصر بصورت زیر بدست خواهد آمد.

$$R_{new} = r_n R = (۳۰۰)(۱) = ۳۰۰\Omega \quad , \quad L_{new} = \frac{r_n}{\Omega_n} L = \frac{۳۰۰}{۲\pi \times ۱۰^۳}(۱) = ۴۷/۷۵mH$$

$$C_{new} = \frac{C}{r_n \Omega_n} = \frac{۱}{۳۰۰ \times ۲\pi \times ۱۰^۳} = ۵۳۰/۵۴nF$$

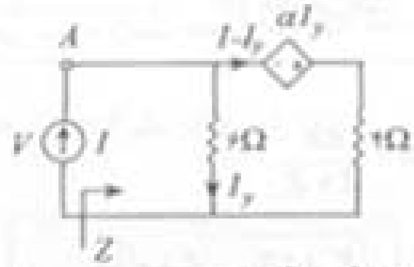
مسئله ۸۴

a را چنان تعیین کنید که حداکثر توان به مدار سمت راست دو سر A و B تحویل داده شود.



شکل مسئله ۸۴

حل : بدین منظور باید امپدانس معادل مدار سمت راست برابر مزدوج امپدانس معادل مدار سمت چپ باشد که آنها را بدست خواهیم آورد.

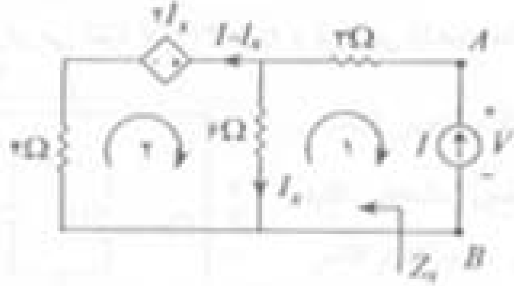


با توجه به شکل فوق $I_y = \frac{V}{۶}$ بوده و خواهیم داشت

$$\text{برای حلقه بیرونی } KVL \rightarrow \quad -V + aI_y + ۴(I - I_y) = ۰ \quad \rightarrow \quad -V + a\left(\frac{V}{۶}\right) + ۴\left(I - \frac{V}{۶}\right) = ۰$$

$$\rightarrow \quad Z = \frac{V}{I} = \frac{۲۴}{۱۰ - a}$$

و برای مدار سمت چپ دو سر A و B داریم.



KVL برای مش ۲ $\rightarrow -4(I-I_x)-2I_x+6I_x=0 \rightarrow I_x=\frac{I}{2}$

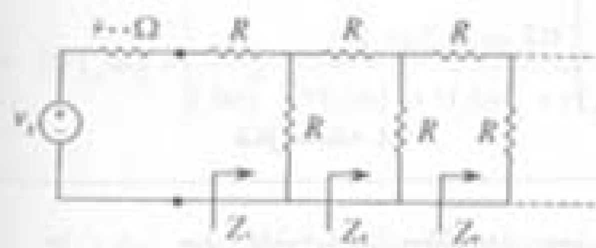
KVL برای مش ۱ $\rightarrow -6\left(\frac{I}{2}\right)-3I+V=0 \rightarrow V=6I \rightarrow Z_s=\frac{V}{I}=6$

شرط انتقال توان ماکزیمم عبارتست از:

$$Z=\bar{Z}_s \rightarrow \frac{12}{10-a}=6 \rightarrow a=6$$

مسئله ۸۵

R چقدر باشد تا توان انتقالی به خط انتقال حداکثر گردد.



شکل مسئله ۸۵

حل : از آنجا که تعداد عناصر سمت راست نامعین می باشد لذا... $Z_1=Z_2=Z_3=$ می باشد همچنین می توان نوشت.

$$Z_1=R+R \parallel Z_2=R+R \parallel Z_1=R+\frac{RZ_1}{R+Z_1}$$

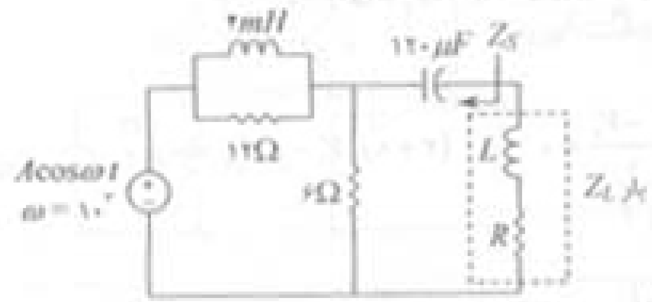
$$Z_1^2-RZ_1-R^2=0 \rightarrow Z_1=\frac{R+\sqrt{R^2+4R^2}}{2}=\frac{R+\sqrt{5}R}{2}=1/618R \quad , \quad Z_s=600$$

شرط انتقال توان حداکثر عبارتست از:

$$Z_1=\bar{Z}_s=600 \rightarrow 1/618R=600 \rightarrow R=372/67\Omega$$

مسئله ۸۶

R و L را چنان تعیین کنید که حداکثر توان متوسط به بار Z_L منتقل شود.



شکل مسئله ۸۶

حل: ابتدا امپدانس دیده شده از دو سر بار را حساب می کنیم.

$$Z_S = \frac{۱}{j۰/۱۲\omega} + (۶ \| ۱۲ \| j۴) = ۲ - j۶/۳۳ \quad , \quad Z_L = R + j\omega L$$

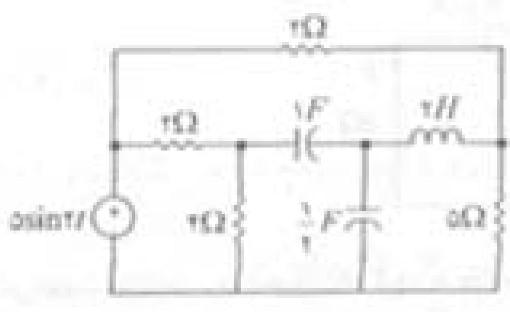
شرط انتقال توان ماکزیمم عبارتست از:

$$Z_L = \bar{Z}_s \;\rightarrow\; R + j۱۰^۳ L = ۲ + j۶/۳۳ \;\rightarrow\; \begin{cases} R = ۲ \\ ۱۰^۳ L = ۶/۳۳ \;\rightarrow\; L = ۶/۳۳mH \end{cases}$$

مسئله ۸۷

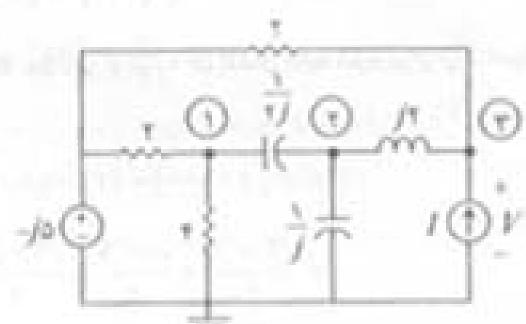
توان تحویلی به مقاومت ۵Ω را حساب کنید.

بجای مقاومت ۵Ω چه امپدانسی جایگزین کنیم تا توان تحویلی به آن ماکزیمم شود.



شکل مسئله ۸۷

حل: ابتدا معادل تونن دو سر مقاومت ۵Ω را بدون در نظر گرفتن خودش بدست می آوریم.



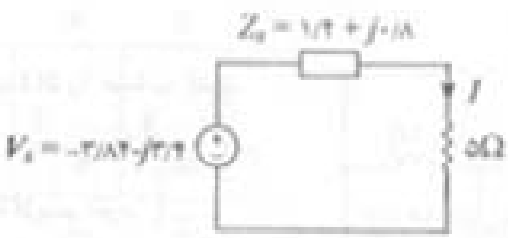
$$③\ \text{KCL برای گره} \rightarrow \frac{V_۳ - V_۲}{j۲} + \frac{V_۳ + j۵}{۲} - I = ۰ \rightarrow -V_۲ + (۱ + j)V_۳ = j۲I + ۵$$

$$②\ \text{KCL برای گره} \rightarrow \frac{V_۲ - V_۱}{\frac{۱}{۲j}} + \frac{V_۲}{\frac{۱}{j}} + \frac{V_۲ - V_۳}{j۲} = ۰ \rightarrow ۴V_۱ - ۵V_۲ - V_۳ = ۰$$

$$①\ \text{KCL برای گره} \rightarrow \frac{V_۱ + j۵}{۲} + \frac{V_۱}{۴} + \frac{V_۱ - V_۲}{\frac{۱}{۲j}} = ۰ \rightarrow (۳ + ۸j)V_۱ - ۸jV_۲ = -j۱۰$$

$$\rightarrow V = V_۳ = \frac{\begin{vmatrix} ۰ & -۱ & j۲I + ۵ \\ ۰ & -۵ & ۰ \\ ۳ + ۸j & -۸j & -j۱۰ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} ۰ & -۱ & ۱ + j \\ ۴ & -۵ & -۱ \\ ۳ + ۸j & -۸j & ۰ \end{vmatrix}} = (۱/۲ + j۰/۸)I + (-۳/۸۴ - j۳/۴)$$

بنابراین مدار معادل شکل مسئله را می توان بصورت زیر رسم کرد.



و در نهایت توان متوسط تحویل داده شده به مقاومت ۵Ω بصورت زیر بدست می آید.

$$I = \frac{V_s}{Z_s + ۵} = \frac{-۳/۸۴ - j۳/۴}{۶/۲ + j۰/۸} \rightarrow P_{av} = \frac{|I|^۲}{۲}\mathrm{Re}\{Z\} = \frac{۱}{۲}\left(\frac{(۳/۸۴)^۲ + (۳/۴)^۲}{(۶/۲)^۲ + (۰/۸)^۲}\right)(۵) = ۰/۸۱\ W$$

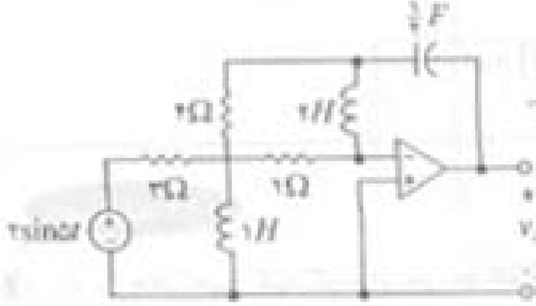
امپدانس جایگزین برای اینکه حداکثر توان به آن انتقال داده شود برابر $\bar{Z}_s$ است.

$$Z = \bar{Z}_s = ۱/۲ - j۰/۸$$

مسئله ۸۸

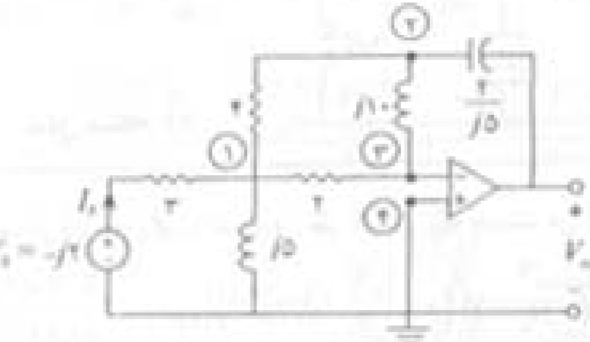
توان مختلط تحویلی منبع ولتاژ را بدست آورید.

ولتاژ v_o را در حالت دایمی سینوسی بدست آورید.



شکل مسئله ۸۸

حل : در حالت دایمی سینوسی مدار بصورت زیر خواهد بود.



با توجه به شکل فوق و با فرض ایده آل بودن آپ امپ داریم.

$V_۳=V_۴=۰$

(۳) KCL برای گره $\rightarrow \frac{۰-V_۱}{۲}+\frac{۰-V_۲}{j۱۰}=۰ \rightarrow j۵V_۱+V_۲=۰ \rightarrow V_۲=-j۵V_۱$

(۱) KCL برای گره $\rightarrow \frac{V_۱-(-j۲)}{۳}+\frac{V_۱}{j۵}+\frac{V_۱-۰}{۲}+\frac{V_۱-(-j۵V_۱)}{۴}=۰ \rightarrow V_۱=۰/۳۱-j۰/۳۲$

$I_s=\frac{V_s-V_۱}{۳}=\frac{-j۲-(-۰/۳۱-j۰/۳۲)}{۳}=۰/۱-j۰/۵۵$

توان مختلط تحویلی $\rightarrow P=\frac{۱}{۲}V_s\bar{I}_s=\frac{۱}{۲}(-j۲)(۰/۱+j۰/۵۵)=۰/۵۵-j۰/۱$

و در نهایت با نوشتن KCL برای گره (۲) V_o را بدست خواهیم آورد.

$V_۲=-j۵V_۱=-j۵(-۰/۳۱-j۰/۳۲)=(-۱/۶+j۱/۵۵)$

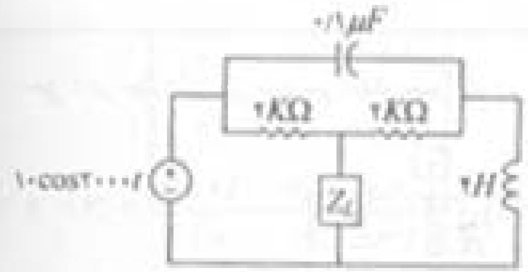
(۲) KCL برای گره $\rightarrow \frac{V_۲-V_۱}{۴}+\frac{V_۲-۰}{j۱۰}+\frac{V_۲-V_o}{\frac{۲}{j۵}}=۰$

$$\rightarrow \frac{(-۱/۶+j۱/۵۵)-(-۰/۳۱-j۰/۳۲)}{۴}+\frac{(-۱/۶+j۱/۵۵)}{j۱۰}+\frac{(-۱/۶+j۱/۵۵)-V_۰}{\frac{۴}{j۵}}=۰$$

$$\rightarrow V_۰=-۱/۳۲+j۱/۶۴=۲/۰۹\angle ۱۲۹^\circ \quad \rightarrow \quad v_۰(t)=۲/۰۹\cos\left(۵t+۱۲۹^\circ\right)$$

مسئله ۸۹

Z_L را چنان تعیین کنید که توان متوسط انتقالی به آن حداکثر باشد.



شکل مسئله ۸۹

حل : ابتدا امپدانس دیده شده از دو سر Z_L را بدون در نظر گرفتن Z_L بدست می آوریم:

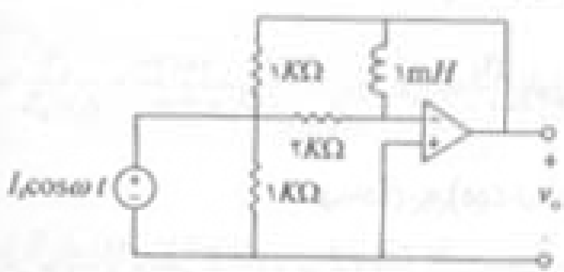
$$Z_s=\left(۲۰۰۰+(j۸۰۰۰\Omega)\,\|\,(-j۵۰۰۰)\right)\|\,۲۰۰۰=۱۹۱۷/۴-j۲۷۵/۴$$

و مقدار Z_L برای انتقال حداکثر توان متوسط به آن برابر است با:

$$\rightarrow Z_L=\bar{Z}_s=۱۹۱۷/۴+j۲۷۵/۴$$

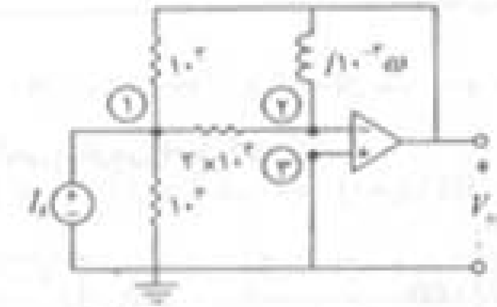
مسئله ۹۰

در چه فرکانسی مقدار RMS ولتاژ $v_۰$ حداکثر می شود.



شکل مسئله ۹۰

حل : در حالت دایمی سینوسی مدار بصورت زیر می باشد.



با فرض اینکه آپ امپ ایده آل باشد و با توجه به شکل فوق داریم:

$$V_+ = V_- = 0$$

$$\text{۲ برای گره } KCL \rightarrow \frac{0-V_1}{2\times10^3}+\frac{0-V_o}{j10^{-3}\omega}=0 \rightarrow V_1=-\frac{2\times10^6}{j\omega}V_o$$

$$\text{۱ برای گره } KCL \rightarrow -I_s+\frac{\frac{2\times10^6}{j\omega}V_o}{10^3}+\frac{-\frac{2\times10^6}{j\omega}V_o-0}{2\times10^3}+\frac{-\frac{2\times10^6}{j\omega}V_o-V_o}{10^3}=0$$

$$\rightarrow H(j\omega)=\frac{V_o}{I_s}=\frac{-j2\times10^3\omega}{10^6+2j\omega} \rightarrow \left|H(j\omega)\right|=\frac{|V_o|}{|I_s|}=\frac{\frac{|V_o|}{\sqrt{2}}}{\frac{|I_s|}{\sqrt{2}}}=\frac{V_{o(rms)}}{I_{s(rms)}}=\frac{2\times10^3\omega}{\sqrt{10^{12}+4\omega^2}}$$

$$\rightarrow V_{o(rms)}=\frac{2\times10^3\omega}{\sqrt{10^{12}+4\omega^2}}I_{s(rms)}$$

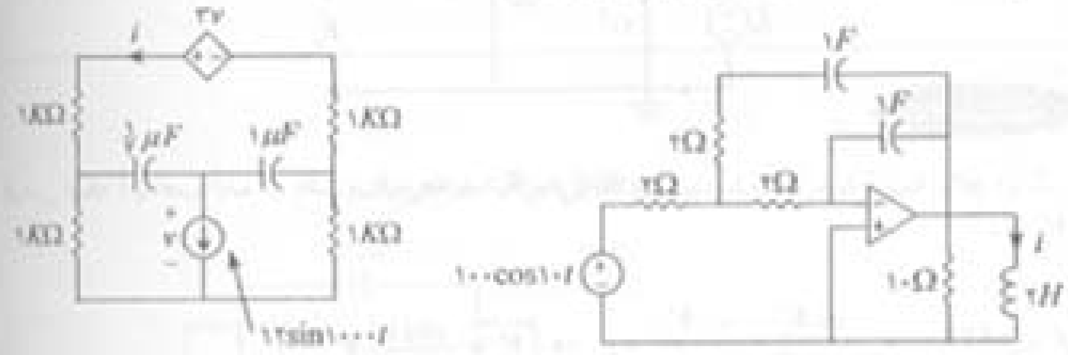
برای محاسبه فرکانسی که به ازای آن $V_{o(rms)}$ حداکثر می شود از $V_{o(rms)}$ نسبت به ω مشتق گرفته و برابر صفر قرار می دهیم.

$$\frac{dV_{o(rms)}}{d\omega}=\frac{2\times10^3\sqrt{10^{12}+4\omega^2}-\frac{8\times10^3\omega^2}{\sqrt{10^{12}+4\omega^2}}}{10^{12}+4\omega^2}=\frac{2\times10^{15}}{\left(10^{12}+4\omega^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

باتوجه به عبارت بدست آمده برای مشتق $V_{o(rms)}$ واضح است که فقط به ازای $\omega\rightarrow\infty$ مشتق برابرصفر خواهد شد و جواب مسئله $\omega=\infty$ است.

مسئله ۹۱

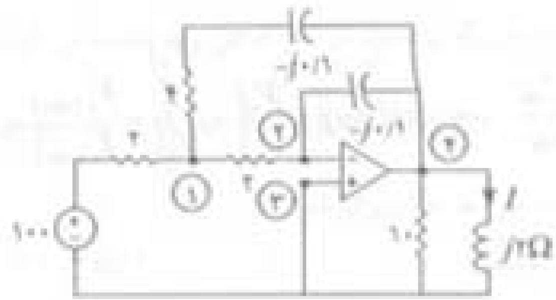
جریان I را در حالت دایمی سینوسی تعیین کنید.



(ب) (الف)

شکل مسئله ۹۱

حل: الف ـ در حالت دایمی سینوسی شکل مدار بصورت زیر است.



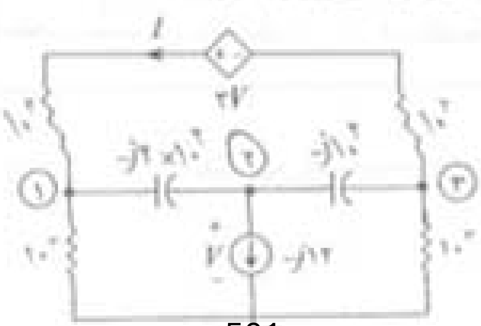
با فرض ایده آل بودن آپ امپ و با توجه به شکل فوق $V_2 = V_3 = 0$ بوده و خواهیم داشت.

$$\text{②}\ \text{برای گره}\ KCL \rightarrow \frac{0-V_1}{2}+\frac{0-V_4}{-j0/1}=0 \rightarrow V_1=-j20V_4$$

$$\text{①}\ \text{برای گره}\ KCL \rightarrow \frac{-j20V_4-100}{2}+\frac{-j20V_4-V_4}{2-j0/1}+\frac{-j20V_4-0}{2}=0 \rightarrow V_4=-0/01+j2$$

$$\rightarrow I=\frac{-0/01+j2}{j20}=-0/0005+j0/1\approx 0/1\angle 0/3^\circ \rightarrow i(t)=0/1\cos\left(10t+0/3^\circ\right)$$

ب ـ در حالت دایمی سینوسی مدار بصورت زیر خواهد بود.



با توجه به شکل فوق $V=V_1$ بوده و خواهیم داشت.

برای حلقه بیرونی $KVL \rightarrow -V_1 - 10^3 I + 2V_2 - 10^3 I + V_3 = 0 \rightarrow V_3 = V_1 - 2V_2 + 2\times10^3 I$

① برای گره $KCL \rightarrow \dfrac{V_1}{10^3} + \dfrac{V_1 - V_2}{-j2\times10^3} - I = 0 \rightarrow (1+j0/5)V_1 - j0/5V_2 - 10^3 I = 0$

② برای گره $KCL \rightarrow \dfrac{V_2 - V_1}{-j2\times10^3} - j12 + \dfrac{V_2 - \left(V_1 - 2V_2 + 2\times10^3 I\right)}{-j10^3} = 0$

$$\rightarrow -3V_1 + 9V_2 - 4\times10^3 I = 24\times10^3$$

③ برای گره $KCL \rightarrow \dfrac{V_2 - V_1}{-j2\times10^3} - j12 + \dfrac{V_2 - \left(V_1 - 2V_2 + 2\times10^3 I\right)}{-j10^3} = 0$

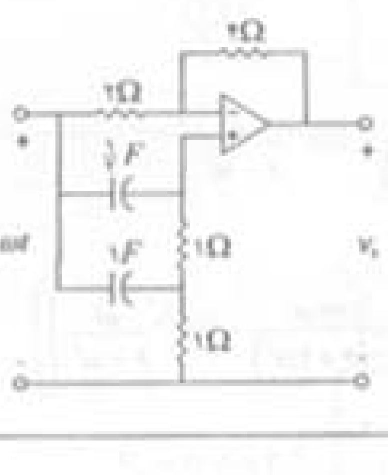
$$\rightarrow (1+j)V_1 - (3+j2)V_2 + 10^3(2+j2)I = 0$$

$$\rightarrow I = \frac{\begin{vmatrix} 1+j0/5 & -j0/5 & 0 \\ -3 & 9 & 24\times10^3 \\ 1+j & -(3+j2) & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1+j0/5 & -j0/5 & -10^3 \\ -3 & 9 & -4\times10^3 \\ 1+j & -(3+j2) & 10^3(2+j2) \end{vmatrix}} = 4/2 + j6/9 = 8/1\angle 58/4^\circ$$

$$\rightarrow i(t) = 8/1\cos\left(1000t + 58/4^\circ\right)$$

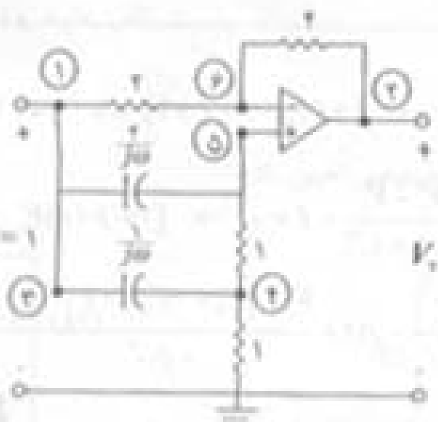
مسئله ۹۲

خروجی حالت دایمی سینوسی v_o را تعیین کنید.



شکل مسئله ۹۲

حل : در حالت دایمی سینوسی شکل مدار را می توان بصورت زیر رسم کرد.



با فرض ایده آل بودن آپ امپ $V_6 = V_5$ بوده و با توجه به شکل ۱ $V_1 = 1$ می باشد.

KCL برای گره ۵ $\rightarrow \frac{V_5 - 1}{2} + \frac{V_5 - V_2}{4} = 0 \rightarrow V_5 = \frac{V_2 + 2}{3}$

KCL برای گره ۴ $\rightarrow \frac{V_4 - 1}{\frac{1}{j\omega}} + \frac{V_4}{1} + \frac{V_4 - \frac{V_2 + 2}{3}}{1} = 0 \rightarrow -V_2 + (6 + j3\omega)V_4 = j3\omega$

KCL برای گره ۳ $\rightarrow \frac{1 - V_4}{\frac{1}{j\omega}} + \frac{1 - \frac{V_2 + 2}{3}}{\frac{2}{j\omega}} + \frac{1 - \frac{V_2 + 2}{3}}{2} = 0 \rightarrow (1 + j\omega)V_2 + j6\omega V_4 = 1 + j7\omega$

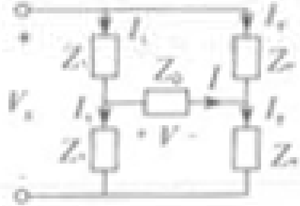
$$\rightarrow V_2 = \frac{\begin{vmatrix} j3\omega & 6 + j3\omega \\ 1 + j7\omega & j6\omega \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 6 + j\omega \\ 1 + j\omega & j6\omega \end{vmatrix}} = \frac{-\left(6 + 2\omega^2\right) + j22\omega}{6 - \omega^2 + j\omega}$$

$$\rightarrow V_2 = \sqrt{\frac{\left(6 + 2\omega^2\right)^2 + \left(22\omega\right)^2}{\left(6 - \omega^2\right)^2 + \omega^2}} \angle\left(\tan^{-1}\frac{22\omega}{-\left(6 + 2\omega^2\right)} - \tan^{-1}\frac{\omega}{6 - \omega^2}\right)$$

$$\rightarrow v_2(t) = \sqrt{\frac{\left(6 + 2\omega^2\right)^2 + \left(22\omega\right)^2}{\left(6 - \omega^2\right)^2 + \omega^2}} \cos\left(\omega t - \left(\tan^{-1}\frac{22\omega}{-\left(6 + 2\omega^2\right)} - \tan^{-1}\frac{\omega}{6 - \omega^2}\right)\right)$$

مسئله ۹۴

نشان دهید که اگر $Z_1Z_4 = Z_2Z_3$ باشد، آنگاه $I = V = 0$.



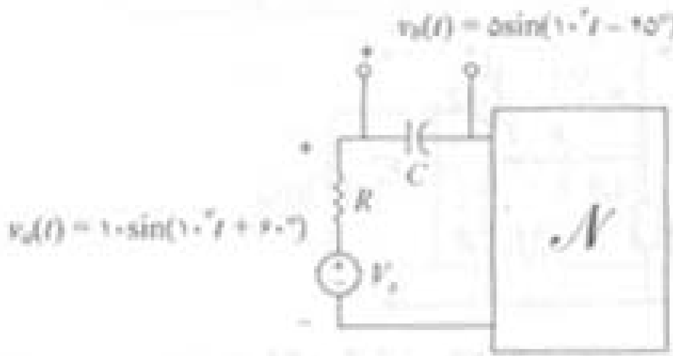
شکل مسئله ۹٤

حل : با فرض $I = 0$، $I_1 = I_3$ و $I_2 = I_4$ خواهد شد و با فرض $V = 0$ و با نوشتن KVL برای دو حلقه مدار خواهیم داشت.

$$\begin{cases} -Z_1I_1 + Z_2I_2 - 0 = 0 \;\rightarrow\; Z_1I_1 = Z_2I_2 \\ \\ -Z_3I_3 + 0 + Z_4I_4 = 0 \;\rightarrow\; Z_3I_3 = Z_4I_4 \end{cases} \rightarrow \frac{Z_1I_1}{Z_3I_3} = \frac{Z_2I_2}{Z_4I_4} \rightarrow Z_1Z_4 = Z_2Z_3$$

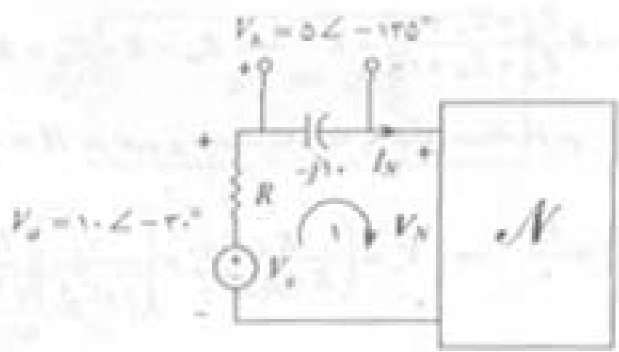
مسئله ۹۵

امپدانس دیده شده در سرهای مدار $\mathcal{N}$ را تعیین کنید. (امپدانس خازن برابر 10Ω است)



شکل مسئله ۹۵

حل : در حالت دایمی سینوسی مدار بصورت زیر است.



$$I_X = \frac{5\angle -135}{-j10} = \frac{5\angle -135}{10\angle -90^\circ} = 0.5\angle -45^\circ = 0.35 - j35$$

برای مش ۱ $KVL \rightarrow \quad -V_a + V_b + V_X = 0 \quad \rightarrow \quad V_X = V_a - V_b = 10\angle -30^\circ - 5\angle -135^\circ$

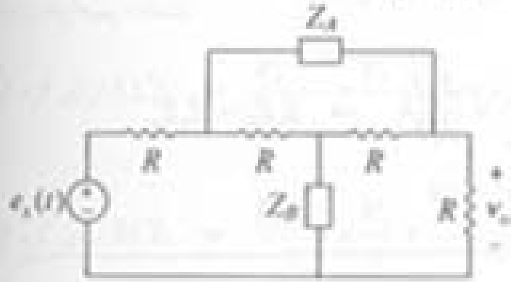
$$= 12.5 - j1.5$$

$$\rightarrow Z_X = \frac{V_X}{I_X} = \frac{12.5 - j1.5}{0.35 - j35} = 19.32 + j15.18\,\Omega$$

مسئله ۹۶

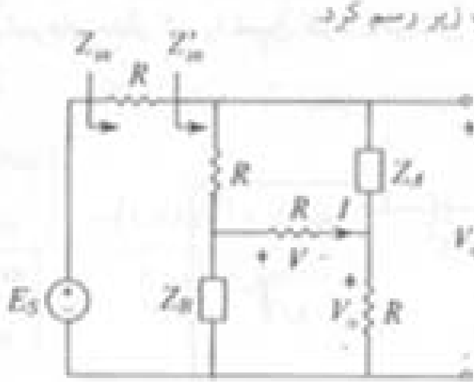
نشان دهید امپدانس ورودی مدار برابر $2R$ است. $\left(Z_A Z_B = R^2\right)$

نشان دهید $H = \dfrac{V_o}{E_s} = \dfrac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{Z_A}{R}}$



شکل مسئله ۹۶

حل : مدار را می توان بصورت زیر رسم کرد.



با توجه به صورت مسئله $Z_A Z_B = RR$ می باشد بنابراین طبق مسئله ۹۴ باید $I = V = 0$ باشد. لذا خواهیم داشت.

$$Z'_{in} = (Z_A + R)\,\|\,(Z_B + R) = \frac{Z_A Z_B + R(Z_A + Z_B) + R^2}{Z_A + R + Z_B + R} = \frac{R^2 + R(Z_A + Z_B) + R^2}{Z_A + Z_B + 2R}$$

$$= R\frac{Z_A + Z_B + 2R}{Z_A + Z_B + 2R} = R \quad \rightarrow \quad Z_{in} = R + Z'_{in} = R + R = 2R$$

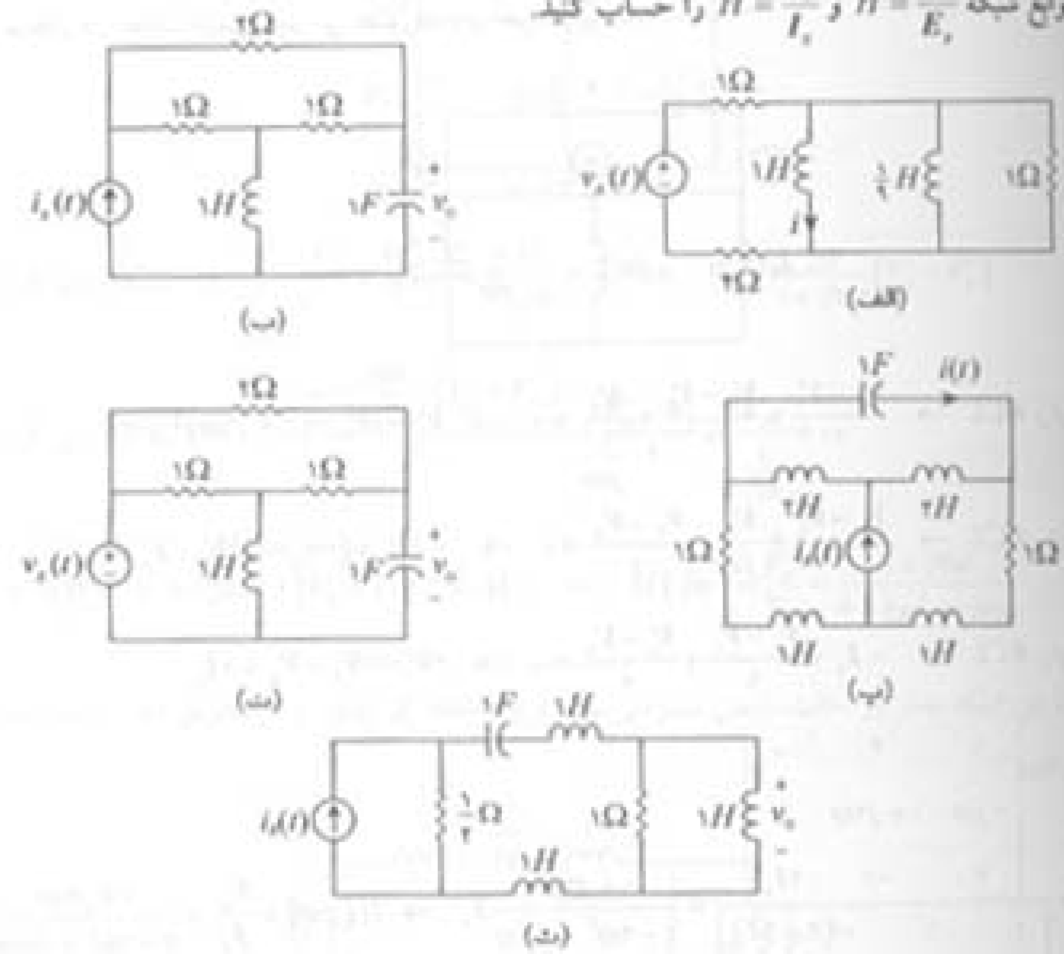
در ادامه به محاسبه $H = \dfrac{V_o}{E_s}$ خواهیم پرداخت. با توجه به شکل مسئله داریم.

$$V'_o = \frac{Z'_{in}}{R + Z'_{in}} E_s = \frac{R}{R + R} E_s = \frac{E_s}{2} \quad \rightarrow \quad V_o = \left(\frac{R}{R + Z_A}\right) V'_o = \left(\frac{1}{1 + \frac{Z_A}{R}}\right)\left(\frac{E_s}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{Z_A}{R}} E_s$$

$$\rightarrow \quad H=\frac{V_o}{E_s}=\frac{\frac{1}{9}}{1+\frac{Z_A}{R}}$$

مسئله ۹۷

توابع شبکه $H=\dfrac{I}{E_s}$ و $H=\dfrac{V_o}{I_s}$ را حساب کنید.



شکل مسئله ۹۷

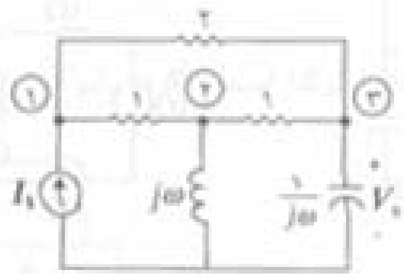
حل : الف ـ در حالت دایمی سینوسی شکل مسئله بصورت زیر خواهد بود.

$$Z=\left(j\omega \,\|\, \frac{j\omega}{9} \,\|\, 1\right)=\frac{1}{\frac{1}{j\omega}+\frac{9}{j\omega}+1}=\frac{j\omega}{10+j\omega}$$

$$V=\frac{Z}{1+4+Z}V_s=\frac{\dfrac{j\omega}{10+j\omega}}{5+\dfrac{j\omega}{10+j\omega}}V_s=\frac{j\omega}{50+j6\omega}V_s$$

$$\rightarrow I=\frac{V}{j\omega}=\frac{1}{50+j6\omega}V_s\quad\rightarrow\quad H(j\omega)=\frac{I}{V_s}=\frac{1}{50+j6\omega}$$

پ ـ مدار در حالت دایمی سینوسی بصورت زیر خواهد بود.



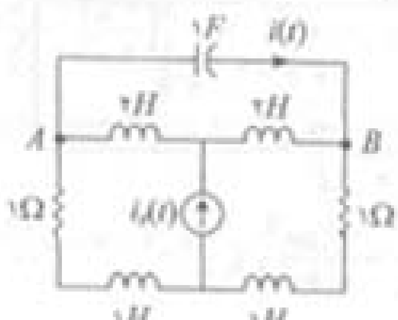
$$③\ \text{KCL برای گره}\ \rightarrow\ \frac{V_o-V_1}{2}+\frac{V_o-V_2}{1}+\frac{V_o}{\dfrac{1}{j\omega}}=0\ \rightarrow\ V_1+2V_2-(3+j2\omega)V_o=0$$

$$②\ \text{KCL برای گره}\ \rightarrow\ \frac{V_2-V_1}{1}+\frac{V_2}{j\omega}+\frac{V_2-V_o}{1}=0\ \rightarrow\ -5V_1+(1+j2\omega)V_2-V_o=0$$

$$①\ \text{KCL برای گره}\ \rightarrow\ -I_s+\frac{V_1-V_2}{1}+\frac{V_1-V_o}{2}=0\ \rightarrow\ 3V_1-2V_2-V_o=2I_s$$

$$\rightarrow V_o=\frac{\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ -j\omega & 1+j2\omega & 0\\ 3 & -2 & 2I_s\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 1 & -(3+2I)\\ -5 & 1+j2\omega & -j\omega\\ 3 & -2 & -1\end{vmatrix}}=\frac{1+j2\omega}{2-2\omega^2+j3\omega}I_s\quad\rightarrow\quad H(j\omega)=\frac{V_o}{I_s}=\frac{1+j2\omega}{2-2\omega^2+j3\omega}$$

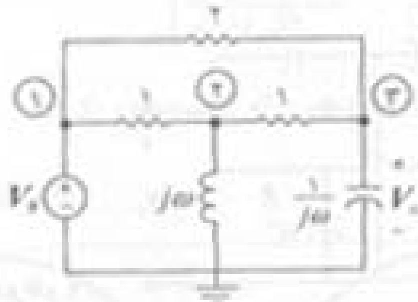
پ ـ شکل (پ) را مجدداً رسم می کنیم.



بنابه تقارن $V_B = V_A$ بوده و $i(t) = 0$ می باشد بنابراین داریم.

$$H(j\omega) = \frac{I}{I_s} = \frac{0}{I_s} = 0$$

ث ـ در حالت دایمی مدار بصورت زیر می باشد:

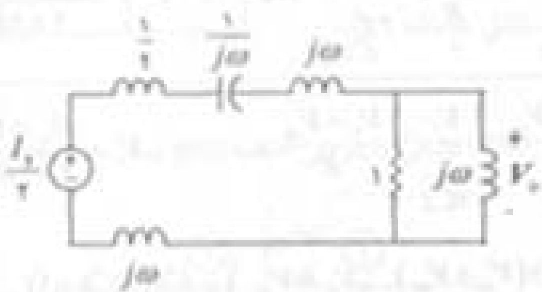


$$\text{KCL برای گره ۲} \rightarrow \frac{V_2 - V_s}{1} + \frac{V_2 - V_o}{1} + \frac{V_2}{j\omega} = 0 \rightarrow V_2 = \frac{j\omega}{1 + j2\omega}(V_s + V_o)$$

$$\text{KCL برای گره ۳} \rightarrow \frac{V_o - \frac{j\omega}{1 + j2\omega}(V_s + V_o)}{1} + \frac{V_o - V_s}{2} + \frac{V_o}{\frac{1}{j\omega}} = 0$$

$$\rightarrow \left(4(j\omega)^2 + 6j\omega + 3\right)V_o = (1 + 4j\omega)V_s \quad \rightarrow \quad H(j\omega) = \frac{V_o}{V_s} = \frac{1 + j4\omega}{3 - 4\omega^2 + j6\omega}$$

ث ـ با فرض اینکه مدار در حالت دایمی سینوسی بوده و با استفاده از تبدیل تونن ـ نرتن مدار را بصورت زیر رسم می کنیم.



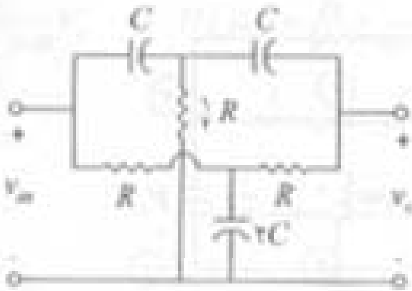
با استفاده از قاعده تقسیم ولتاژ خواهیم داشت.

$$\rightarrow V_o = \frac{(1)\|(j\omega)}{(1)\|(j\omega) + \frac{1}{2} + \frac{1}{j\omega} + j\omega + j\omega}\left(\frac{I_s}{2}\right) = \frac{\frac{j\omega}{1 + j\omega}}{\frac{j\omega}{1 + j\omega} + \frac{1}{2} + \frac{1}{j\omega} + j2\omega}\left(\frac{I_s}{2}\right)$$

$$= \frac{(j\omega)^2}{4(j\omega)^3 + 7(j\omega)^2 + 3j\omega + 2} I_s \quad \rightarrow \quad H(j\omega) = \frac{V_o}{I_s} = \frac{-\omega^2}{2 - 7\omega^2 + j\left(3\omega - 4\omega^3\right)}$$

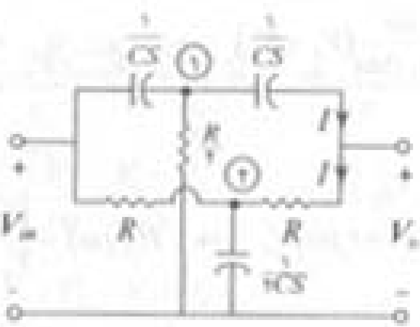
مسئله ۹۸

$H(j\omega)=\dfrac{V_o}{V_{in}}$ را محاسبه و نوع رفتار فیلتری مدار را تعیین کنید.



شکل مسئله ۹۸ (فیلتر T دوقلو)

حل : با جایگزینی $j\omega = s$ ، مدار حالت دایمی سینوسی بصورت زیر خواهد بود.



$$\text{①}\ \text{برای گره}\ KCL \rightarrow \frac{V_1 - V_{in}}{\frac{1}{Cs}} + \frac{V_1}{\frac{R}{2}} + \frac{V_1 - V_o}{\frac{1}{Cs}} = 0 \rightarrow V_1 = \frac{RCs(V_o + V_{in})}{2 + 2RCs}$$

$$\text{②}\ \text{برای گره}\ KCL \rightarrow \frac{V_2 - V_{in}}{R} + \frac{V_2}{\frac{1}{2Cs}} + \frac{V_2 - V_{in}}{R} = 0 \rightarrow V_2 = \frac{V_o + V_{in}}{2 + 2RCs}$$

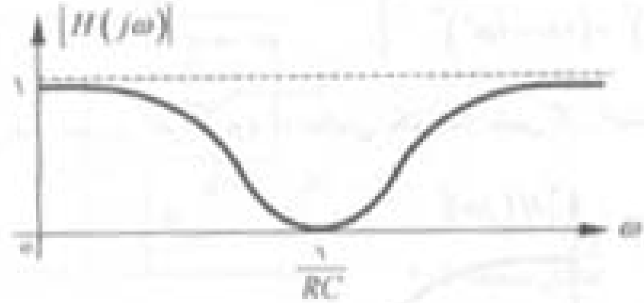
$$I = \frac{V_1 - V_2}{\frac{1}{Cs} + R} = \frac{Cs}{1 + RCs}\left(\frac{RCs(V_o + V_{in})}{2 + 2RCs} - \frac{V_o + V_{in}}{2 + 2RCs}\right) = \frac{Cs(RCs - 1)}{2(1 + RCs)^2}(V_o + V_{in})$$

$$V_o = IR + V_2 = \frac{RCs(RCs - 1)}{2(1 + RCs)^2}(V_o + V_{in}) + \frac{(V_o + V_{in})}{2 + 2RCs} = \frac{(RCs)^2 + 1}{2(1 + RCs)^2}(V_o + V_{in})$$

$$\frac{V_o}{V_{in}} = \frac{R^2C^2s^2 + 1}{R^2C^2s^2 + 4RCs + 1} \rightarrow H(j\omega) = \frac{1 - R^2C^2\omega^2}{1 - R^2C^2\omega^2 + j4RC\omega}$$

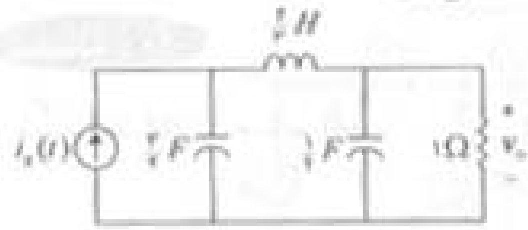
$$\left|H(j\omega)\right|=\frac{\left|1-R^2C^2\omega^2\right|}{\sqrt{\left(1-R^2C^2\omega^2\right)^2+\left(2RC\omega\right)^2}}=\begin{cases}\frac{1}{1}=1 & , \quad \omega\to 0\\ 0 & , \quad \omega\to\frac{1}{RC}\\ \frac{R^2C^2\omega^2}{R^2C^2\omega^2}=1 & , \quad \omega\to\infty\end{cases}$$

بنابراین نمودار $\left|H(j\omega)\right|$ بصورت زیر خواهد بود که نشان دهنده یک فیلتر میان گذر است.



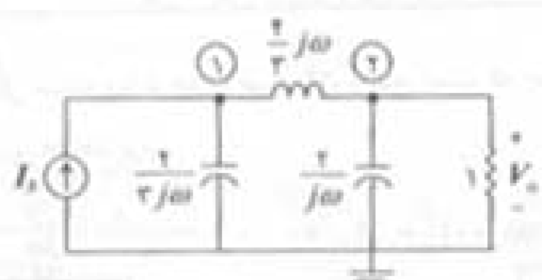
مسئله ۹۹

$H(j\omega)=\frac{V_o}{I_s}$ را تعیین و رفتار فیلتری مدار را مشخص کنید.



شکل مسئله ۹۹

حل : با فرض اینکه مدار در حالت دایمی سینوسی است شکل مدار بصورت زیر خواهد شد.



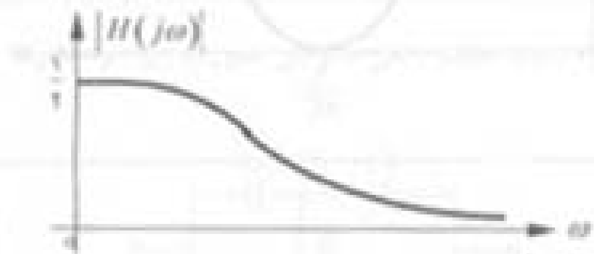
$$\text{KCL برای گره ۲} \rightarrow \frac{V_o}{1}+\frac{V_o}{\frac{2}{j\omega}}+\frac{V_o-V_1}{\frac{4}{3}j\omega}=0 \rightarrow V_1=\frac{1}{3}\left(2(j\omega)^2+4j\omega+3\right)V_o$$

KCL روی گره ① $\rightarrow \quad -I_s + \dfrac{\frac{1}{2}\left(2(j\omega)^2+2j\omega+2\right)V_o}{\frac{2}{2j\omega}} + \dfrac{\frac{1}{2}\left(2(j\omega)^2+2j\omega+2\right)V_o - V_o}{\frac{2}{2}j\omega} = 0$

$$\rightarrow H(j\omega)=\frac{V_o}{I_s}=\frac{1}{(j\omega)^3+2(j\omega)^2+2(j\omega)+2}=\frac{1}{2-2\omega^2+j\left(2\omega-\omega^3\right)}$$

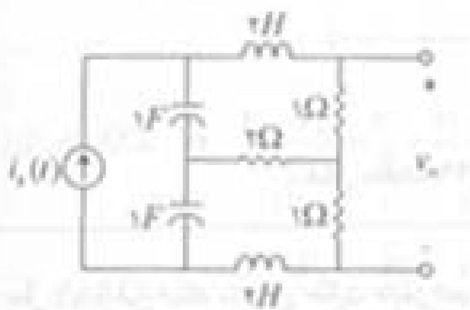
$$\left|H(j\omega)\right|=\frac{1}{\sqrt{\left(2-2\omega^2\right)^2+\left(2\omega-\omega^3\right)^2}}=\begin{cases}\frac{1}{2} & , \ \omega\rightarrow 0\\ 0 & , \ \omega\rightarrow\infty\end{cases}$$

بنابراین نمودار $\left|H(j\omega)\right|$ بصورت زیر خواهد بود که نمایش یک فیلتر پایین گذر است.



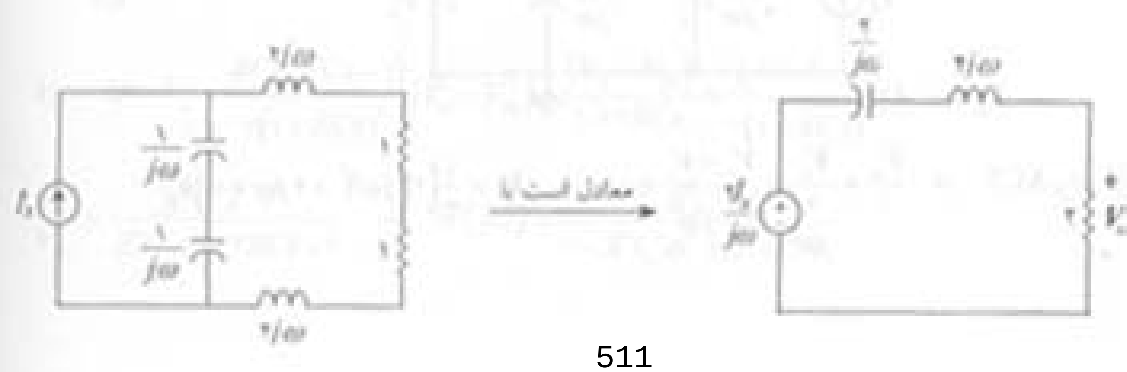
مسئله ۱۰۰

$H(j\omega)=\dfrac{V_o}{I_s}$ را حساب کنید.



شکل مسئله ۱۰۰

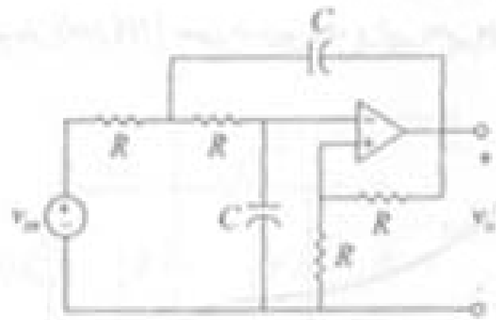
حل : با توجه به شکل مسئله وبا توجه به مسئله۹۴، واضح است که جریان و ولتاژ مقاومت 2Ω برابر صفر است و لذا مدار بصورت زیر خواهد بود.



$$\rightarrow V_o = \frac{2}{\frac{2}{j\omega}+2j\omega+2}\left(\frac{2I_s}{j\omega}\right) \rightarrow H(j\omega)=\frac{V_o}{I_s}=\frac{2}{1-2\omega^2+j\omega}$$

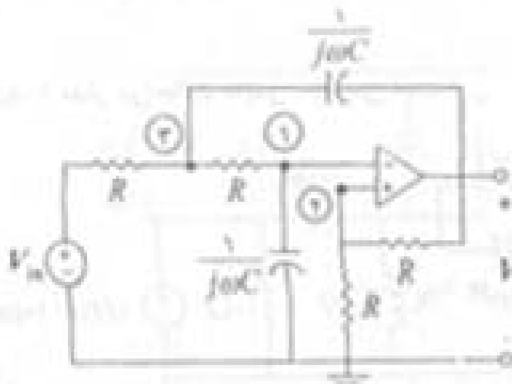
مسئله ۱۰۱

$H(j\omega)=\frac{V_o}{V_{in}}$ را حساب کرده و رفتار فیلتری آن را مشخص کنید.



شکل مسئله ۱۰۱

حل : در حالت دایمی سینوسی شکل مدار بصورت زیر است.



با فرض ایده آل بودن آپ امپ و با بکارگیری قاعده تقسیم ولتاژ داریم.

$$V_1 = V_2 = \frac{R}{R+R}V_o = \frac{V_o}{2}$$

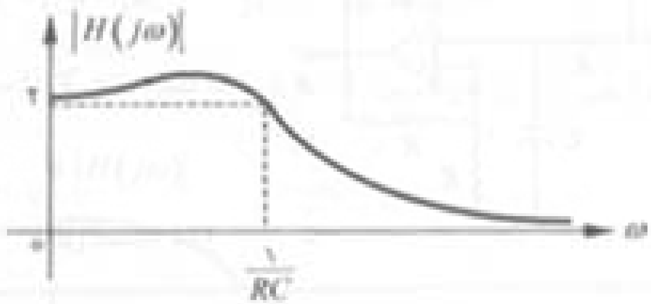
$$\text{①}\ \text{KCL برای گره} \rightarrow \frac{\frac{V_o}{2}}{\frac{1}{j\omega C}}+\frac{\frac{V_o}{2}-V_3}{R}=0 \rightarrow V_3=\frac{1}{2}(1+jRC\omega)V_o$$

$$\text{③}\ \text{KCL برای گره} \rightarrow \frac{\frac{1}{2}(1+jRC\omega)V_o-V_{in}}{R}+\frac{\frac{1}{2}(1+jRC\omega)V_o-\frac{V_o}{2}}{R}+$$

$$+\frac{\frac{1}{2}(1+jRC\omega)V_o - V_o}{\frac{1}{j\omega C}} = 0 \rightarrow H(j\omega)=\frac{V_o}{V_{in}}=\frac{2}{\left(1-R^2C^2\omega^2\right)+jRC\omega}$$

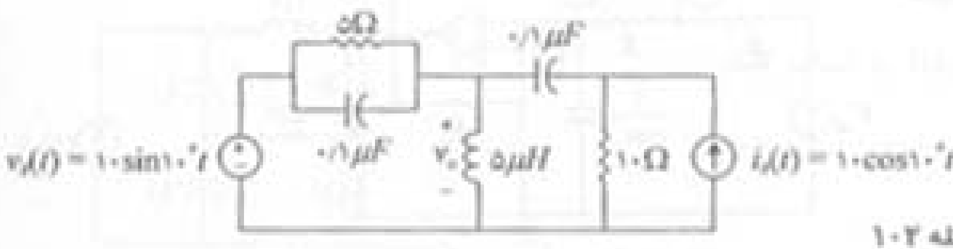
$$|H(j\omega)|=\frac{2}{\sqrt{\left(1-R^2C^2\omega^2\right)^2+(RC\omega)^2}}=\begin{cases}2 \;, & \omega\rightarrow 0\\ 2 \;, & \omega\rightarrow \frac{1}{RC}\\ 0 \;, & \omega\rightarrow\infty\end{cases}$$

بنابراین نمودار $|H(j\omega)|$ بصورت زیر بوده و این یعنی مدار یک فیلتر پایین گذر است.



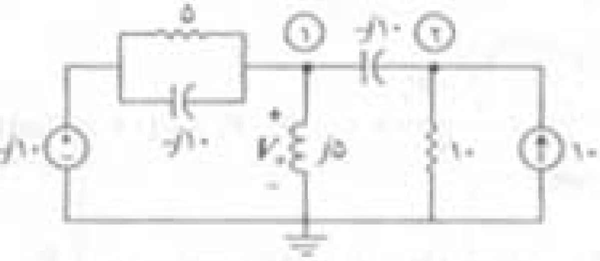
مسئله ۱۰۲

$v_o(t)$ را حساب کنید. (مدار در حالت دایمی سینوسی است)



شکل مسئله ۱۰۲

حل : در حالت دایمی سینوسی مدار بصورت زیر می باشد.



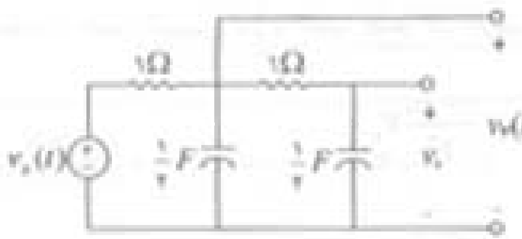
$$\text{برای گره ② } KCL \rightarrow \frac{V_2-V_o}{-j10}+\frac{V_2}{10}-10=0 \rightarrow V_2=\frac{1}{2}(1+j)V_o+50-j50$$

$$\text{①}\ \text{KCL برای گره} \rightarrow \frac{V_o+j10}{5}+\frac{V_o+j10}{-j10}+\frac{V_o}{j5}+\frac{V_o-\left[\frac{1}{2}(1+j)V_o+50-j50\right]}{-j10}=0$$

$$\rightarrow V_o=\frac{-60+j120}{1+2j}=26/8\angle 37/9^\circ \rightarrow v_o(t)=26/8\cos\left(10^5 t+37/9^\circ\right)$$

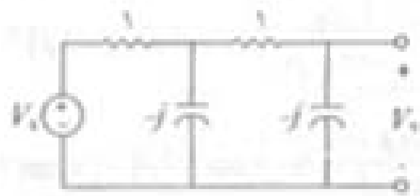
مسئله ۱۰۳

$\frac{V_2}{V_1}=Ae^{j\theta}$ را حساب کنید. (مدار در حالت دایمی سینوسی است)



شکل مسئله ۱۰۳

حل : با توجه به $v_1(t)$ ، $\omega=2$ بوده و مدار در حالت دایمی سینوسی بصورت زیر خواهد بود.



بنابراین با بکارگیری قاعده تقسیم ولتاژ خواهیم داشت.

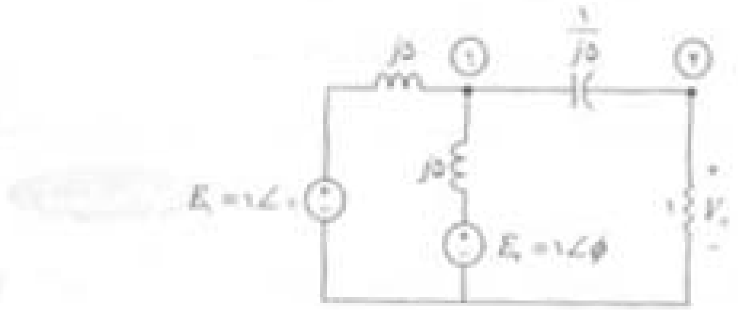
$$V_2=\frac{(-j)\|(1-j)}{1+(-j)\|(1-j)}V_1=\frac{\frac{1+j}{1-2j}}{1-\frac{1+j}{1-2j}}V_1 \rightarrow \frac{V_2}{V_1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}j=\frac{1}{2}e^{-j\pi/4}$$

مسئله ۱۰۴

آیا می توان ϕ را چنان انتخاب کرد که اختلاف فاز v_o با e_1 برابر ۴۰ درجه باشد.

شکل مسئله ۱۰۴

حل : با فرض اینکه مدار در حالت دایمی سینوسی باشد و اینکه ۵ = ω است مدار را بصورت زیر رسم می کنیم.



با استفاده از قاعده تقسیم ولتاژ و قضیه جمع آثار داریم.

② برای گره KCL $\rightarrow \dfrac{V_o - V_1}{\frac{۱}{j۵}} + \dfrac{V_o}{۱} = ۰ \rightarrow V_1 = \dfrac{۱ + j۵}{j۵} V_o$

① برای گره KCL $\rightarrow \dfrac{\frac{۱+j۵}{j۵}V_o - E_1}{j۵} + \dfrac{\frac{۱+j۵}{j۵}V_o - E_2}{j۵} + \dfrac{\frac{۱+j۵}{j۵}V_o - V_o}{\frac{۱}{j۵}} = ۰$

$$\rightarrow V_o = \frac{j۵}{-۲۳ + j۱۰}\left(E_1 + E_2\right) = \frac{j۵}{-۲۳ + j۱۰}\left(۱ + \cos\phi + j\sin\phi\right)$$

$$\rightarrow \angle V_o - \angle E_1 = ۹۰ + \tan^{-1}\frac{\sin\phi}{۱+\cos\phi} - \left(۱۸۰ - \tan^{-1}\frac{۱۰}{۲۳}\right) - ۰ = \tan^{-1}\frac{\sin\phi}{۱+\cos\phi} - ۶۶/۵$$

$$\rightarrow \angle V_o - \angle E_1 = ۶۰^\circ \rightarrow \tan^{-1}\frac{\sin\phi}{۱+\cos\phi} - ۶۶/۵ = ۶۰$$

$$\rightarrow \frac{\sin\phi}{۱+\cos\phi} = \tan ۱۲۶/۵ = -۱/۳۵ \rightarrow \sin\phi + ۱/۳۵\cos\phi = -۱/۳۵$$

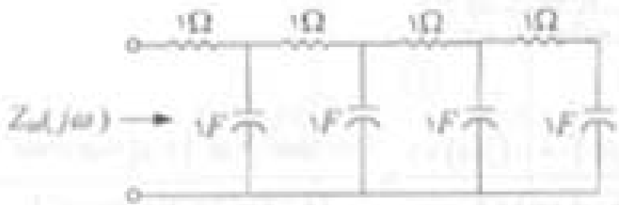
$$\rightarrow \sqrt{۱+\left(۱/۳۵\right)^۲}\cos\left(\phi - \tan^{-1}۱/۳۵\right) = -۱/۳۵ \rightarrow \cos\left(\phi - ۱۲۶/۵\right) = -۰/۸$$

$$\rightarrow \phi = \pm ۳۶/۵ + ۱۲۶/۵ = ۹۰ , ۱۶۳$$

مسئله ۱۰۵

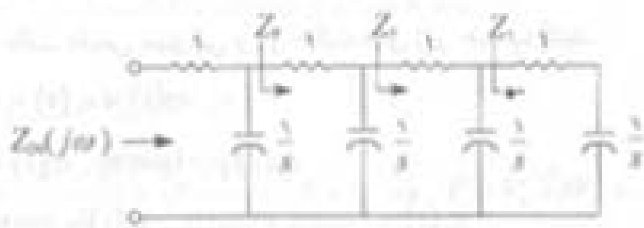
الف ـ $Z_{in}(j\omega)=?$

ب ـ مقاومت ها را با سلف های $1H$ و خازنها را با مقاومتهای 1Ω تعویض و $Z_{in}(j\omega)$ را تعیین کنید.



شکل مسئله ۱۰۵

حل : الف ـ در حالت دایمی سینوسی مدار بصورت زیر است که از تغییر متغیر $j\omega = s$ استفاده کرده ایم.



با استفاده از گسترش کسرهای متوالی داریم.

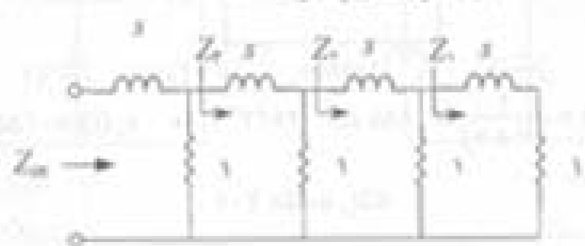
$$Z_1 = 1+\frac{1}{s}=\frac{s+1}{s}\quad,\quad Z_2 = 1+\frac{1}{s+\dfrac{s}{s+1}} = 1+\frac{s+1}{s^2+2s}=\frac{s^2+3s+1}{s^2+2s}$$

$$Z_3 = 1+\frac{1}{s+\dfrac{s^2+2s}{s^2+3s+1}} = 1+\frac{s^2+3s+1}{s^3+4s^2+3s}=\frac{s^3+5s^2+6s+1}{s^3+4s^2+3s}$$

$$Z_{in} = 1+\frac{1}{s+\dfrac{s^3+4s^2+3s}{s^3+5s^2+6s+1}} = 1+\frac{s^3+4s^2+3s}{s^4+6s^3+10s^2+4s}=\frac{s^4+7s^3+15s^2+10s+1}{s^4+6s^3+10s^2+4s}$$

$$\rightarrow\ Z_{in}(j\omega)=\frac{(j\omega)^4+7(j\omega)^3+15(j\omega)^2+10(j\omega)+1}{(j\omega)^4+6(j\omega)^3+10(j\omega)^2+4(j\omega)}=\frac{\left(\omega^4-15\omega^2+1\right)+j\left(-7\omega^3+10\omega\right)}{\left(\omega^4-10\omega^2\right)+j\left(-6\omega^3+4\omega\right)}$$

ب ـ با اعمال تغییرات گفته شده مدار بصورت زیر خواهد شد.



$$Z_۱ = s+۱ \ , \ Z_۲ = s + \frac{۱}{۱+\frac{۱}{s+۱}} = s + \frac{s+۱}{s+۲} = \frac{s^۲+۳s+۱}{s+۲}$$

$$Z_۳ = s + \frac{۱}{۱+\frac{s+۲}{s^۲+۳s+۱}} = s + \frac{s^۲+۳s+۱}{s^۲+۴s+۳} = \frac{s^۳+۵s^۲+۶s+۱}{s^۲+۴s+۳}$$

$$Z_{in} = s + \frac{۱}{۱+\frac{s^۲+۴s+۳}{s^۳+۵s+۶s+۱}} = \frac{s^۴+۷s^۳+۱۵s^۲+۱۰s+۱}{s^۳+۶s^۲+۱۰s+۴}$$

$$\to \ Z_{in}(j\omega) = \frac{(j\omega)^۴+۷(j\omega)^۳+۱۵(j\omega)^۲+۱۰(j\omega)+۱}{(j\omega)^۳+۶(j\omega)^۲+۱۰(j\omega)+۴} = \frac{(۱-۱۵\omega^۲+\omega^۴)+j(۱۰\omega-۷\omega^۳)}{(۴-۶\omega^۲)+j(۱۰\omega-\omega^۳)}$$

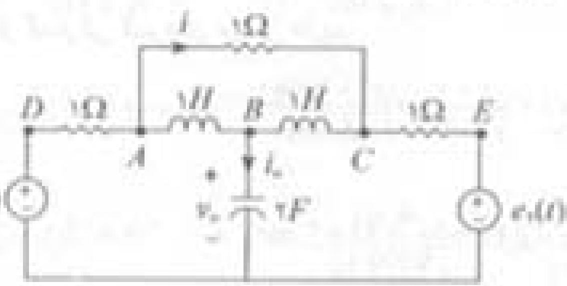
مسئله ۱۰۶

$v_o(t)$ را در حالت دایمی سینوسی و در حالت های زیر حساب کنید.

الف) $e_۱(t) = e_۲(t) = ۲\cos ۲t$

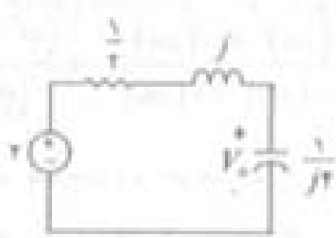
ب) $e_۱(t) = -۲\cos ۲t \ , \ e_۲(t) = ۲\cos ۲t$

پ) $e_۱(t) = ۲\cos ۲t + ۲\sin ۲t \ , \ e_۲(t) = \cos ۲t + \sin ۲t$



شکل مسئله ۱۰۶

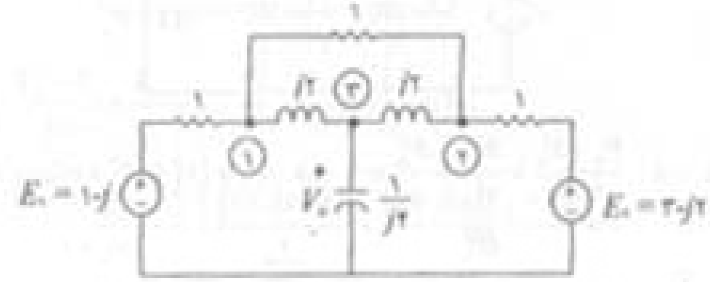
حل : الف ـ در این حالت به علت تقارن $v_A = v_C$ بوده و لذا $i = ۰$ می باشد و با انطباق نقاط A بر C و E بر D مدار در حالت دایمی سینوسی و با $\omega = ۲$ بصورت زیر خواهد شد.



$$\to \ V_o = \frac{\frac{۱}{j۴}}{\frac{۱}{۲}+j+\frac{۱}{j۴}}(۲) = \frac{۲}{-۳+۲j} = ۰/۵۵ \angle -۱۴۶/۳^\circ \ \to \ v_o(t) = ۰/۵۵\cos(۲t-۱۴۶/۳^\circ)$$

ب ـ به علت مختلف العلامه بودن منابع و نیز تقارن مدار لذا اثر آنها در تولید I_0 برابر و مختلف العلامه بوده و در نتیجه $I_0 = 0$ می باشد بنابراین در این حالت $V_0 = 0$ خواهد بود.

پ ـ در این حالت با بدست آوردن فازور منابع مدار را بصورت زیر رسم می کنیم.



۱ گره ۰ برای KCL $\rightarrow \dfrac{V_1-(1-j)}{1}+\dfrac{V_1-V_2}{1}+\dfrac{V_1-V_0}{j2}=0 \rightarrow (1+j4)V_1-j2V_2-V_0=2-j2$

۲ گره ۰ برای KCL $\rightarrow \dfrac{V_2-(3-j3)}{1}+\dfrac{V_2-V_1}{1}+\dfrac{V_2-V_0}{j2}=0$

$$\rightarrow -j2V_1+(1+j4)V_2-V_0=4-j6$$

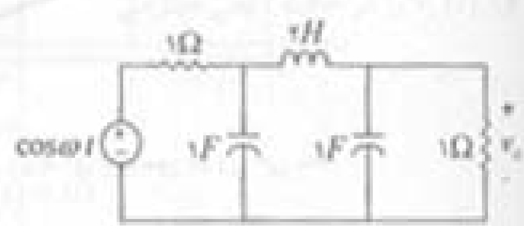
۳ گره ۰ برای KCL $\rightarrow \dfrac{V_0-V_1}{j2}+\dfrac{V_0-V_2}{j2}+\dfrac{V_0}{\frac{1}{j4}}=0 \rightarrow V_1+V_2+6V_0=0$

$$\rightarrow V_0=\frac{\begin{vmatrix} 1+j4 & -j2 & 2-j2 \\ -j2 & 1+j4 & 4-j6 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1+j4 & -j2 & -1 \\ -j2 & 1+j4 & -1 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}}=\frac{-46-j30}{-54+j56}=\frac{54.9\angle -146}{77.8\angle 134}=0.7\angle -280$$

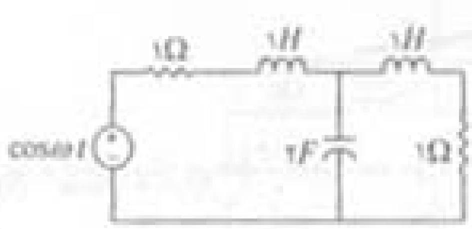
$$\rightarrow v_0(t)=0.7\cos(2t-280^\circ)$$

مسئله ۱۰۷

ولتاژ خروجی را در $\omega = 0.1, 1, 10$ حساب کرده و رفتار فیلتری آنها را نتیجه بگیرید.



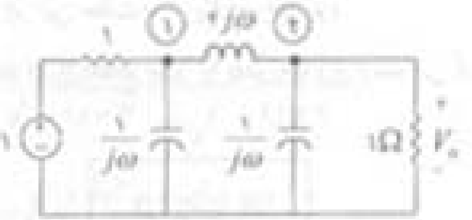
(الف)



(ب)

شکل مسئله ۱۰۷

حل : الف ـ شکل مسئله در حالت دایمی و فرکانس زاویه ای ω بصورت زیر می باشد.



$$\text{KCL برای گره ۲} \rightarrow \frac{V_o - V_1}{2j\omega} + \frac{V_o}{\frac{1}{j\omega}} + \frac{V_o}{1} = 0 \rightarrow V_1 = \left(2(j\omega)^2 + 2j\omega + 1\right)V_o$$

$$\text{KCL برای گره ۱} \rightarrow \frac{\left(2(j\omega)^2 + 2j\omega + 1\right)V_o - 1}{1} + \frac{\left(2(j\omega)^2 + 2j\omega + 1\right)V_o}{\frac{1}{j\omega}}$$

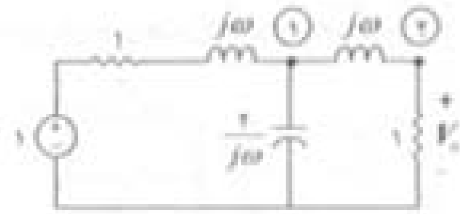
$$+ \frac{\left(2(j\omega)^2 + 2j\omega + 1\right)V_o - V_o}{2j\omega} = 0$$

$$\rightarrow V_o(j\omega) = \frac{1}{2(j\omega)^3 + 4(j\omega)^2 + 4j\omega + 2} = \frac{1}{2 - 4\omega^2 + j\left(4\omega - 2\omega^3\right)}$$

$$= \begin{cases} 0.5 & , \quad \omega = 0 \\ \dfrac{1}{1.96 + j0.398} = 0.5\angle -11.5^\circ & , \quad \omega = 0.1 \\ \dfrac{1}{-2 + j2} = 0.35\angle -135^\circ & , \quad \omega = 1 \\ \dfrac{1}{-398 + j1600} = 0.0005\angle 101.5^\circ & , \quad \omega = 10 \end{cases}$$

نمودار $\left|V_o(j\omega)\right|$ در شکل زیر رسم شده است که نشان می دهد یک فیلتر پایین گذر است.

پ ـ شکل مسئله در حالت دایمی سینوسی و فرکانس زاویه ای ω بصورت زیر می باشد.



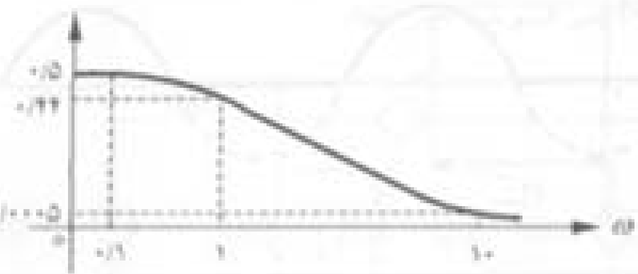
KCL برای گره ۲ $\rightarrow \frac{V_o - V_1}{j\omega} + \frac{V_o}{1} = 0 \rightarrow V_1 = (1 + j\omega)V_o$

KCL برای گره ۱ $\rightarrow \frac{(1 + j\omega)V_o - 1}{1 + j\omega} + \frac{(1 + j\omega)V_o}{\frac{2}{j\omega}} + \frac{(1 + j\omega)V_o - V_o}{j\omega} = 0$

$$\rightarrow V_o(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^3 + 2(j\omega)^2 + 5j\omega + 4} = \frac{2}{(4 - 2\omega^2) + j(5\omega - \omega^3)}$$

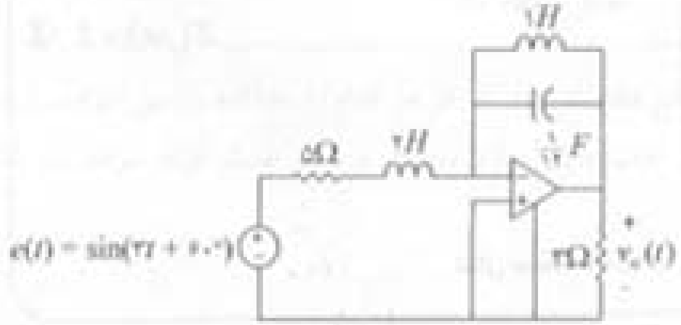
$$= \begin{cases} \frac{2}{4} = 0/5 & , \ \omega = 0 \\ \frac{2}{3/98 + j0/5} = 0/5\angle -7/1^\circ & , \ \omega = 0/1 \\ \frac{2}{2 + j4} = 0/44\angle -63^\circ & , \ \omega = 1 \\ \frac{1}{-196 - j1950} = 0/0005\angle 96^\circ & , \ \omega = 10 \end{cases}$$

بنابراین نمودار $|V_o(j\omega)|$ بصورت زیر خواهد بود که نمودار اندازه یک فیلتر پایین گذر است.



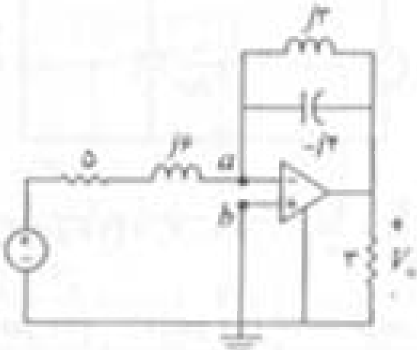
مسئله ۱۰۸

$v_o(t)$ را در حالت دایمی سینوسی تعیین کنید.



شکل مسئله ۱۰۸

حل : در حالت دایمی سینوسی مدار بصورت زیر خواهد بود.



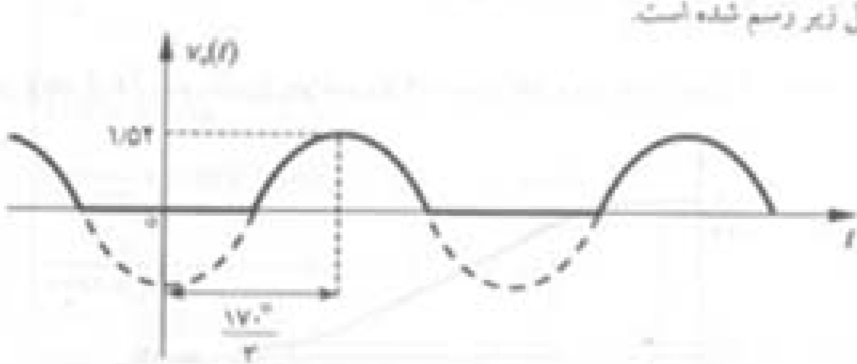
با فرض ایده آل بودن آپ امپ $V_a = V_b = 0$ بوده و خواهیم داشت.

$$\text{KCL برای گره } ⓐ \rightarrow \frac{0-1\angle -30}{5+j6}+\frac{0-V_o}{j3}+\frac{0-V_o}{-j4}=0$$

$$\frac{V_o}{-j12}=\frac{1\angle -30}{7.8\angle 50.2^\circ} \rightarrow V_o = 12\angle -90^\circ\,\frac{1\angle -30^\circ}{7.8\angle 50.2^\circ}=\left(\frac{12}{7.8}\right)\angle -90^\circ-30^\circ-50.2^\circ$$

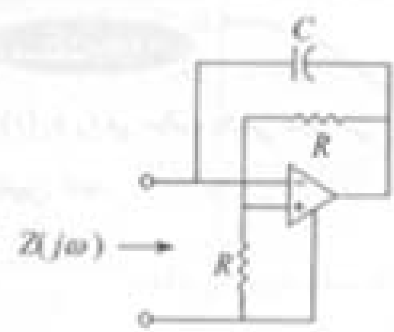
$$=1.54\angle -170.2^\circ \rightarrow v_o(t)=1.54\left(\cos 3t-170.2^\circ\right)$$

با دقت در مدار ملاحظه می شود که پایانه منفی آپ امپ زمین شده است بنابراین همواره $v_o(t) > 0$ خواهد بود، که در شکل زیر رسم شده است.



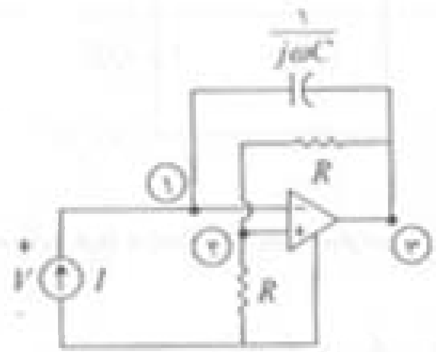
مسئله ۱۰۹

$Z(j\omega)=?$



شکل مسئله ۱۰۹

حل : بدین منظور منبع جریان I را به دو سر ورودی وصل کرده و ولتاژ دو سر آن را محاسبه می کنیم.



با توجه به شکل فوق و بنا بر قاعده تقسیم ولتاژ داریم.

$$V_2 = \frac{R}{R+R}V_3 = \frac{V_3}{2} \quad , \quad V_1 = V$$

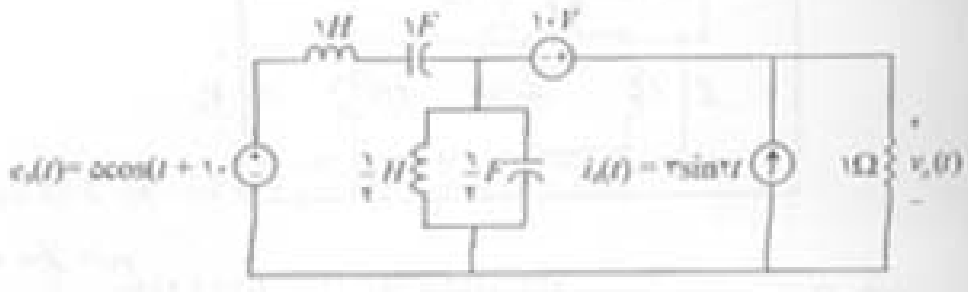
با فرض ایده آل بودن آپ امپ $V_1 = V_2$ بوده و خواهیم داشت.

$$V_1 = V_2 \;\rightarrow\; \frac{V_3}{2} = V \;\rightarrow\; V_3 = 2V$$

$$\text{① برای گره KCL} \;\rightarrow\; -I + \frac{V-2V}{\frac{1}{j\omega C}} \;\rightarrow\; Z(j\omega) = \frac{V}{I} = -\frac{1}{j\omega C} = \frac{j}{\omega C}$$

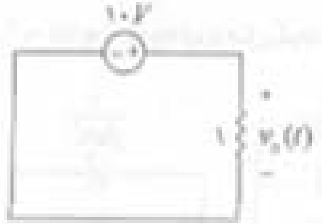
مسئله ۱۱۰

$v_o(t)$ را در حالت دایمی سینوسی تعیین کنید.



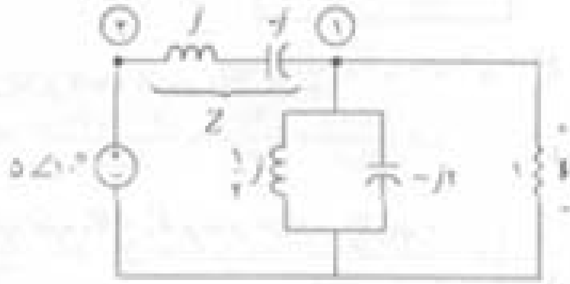
شکل مسئله ۱۱۰

حل : از آنجا که فرکانس زاویه ای منابع متفاوت است لذا اثر هر کدام را جداگانه بررسی خواهیم کرد. ابتدا منبع ولتاژ $10V$ را در نظر می گیریم. در حالت دایمی خازن مدار باز و سلف اتصال کوتاه خواهد بود. لذا مدار بصورت زیر می باشد.



$v_o(t) = 10\ V$

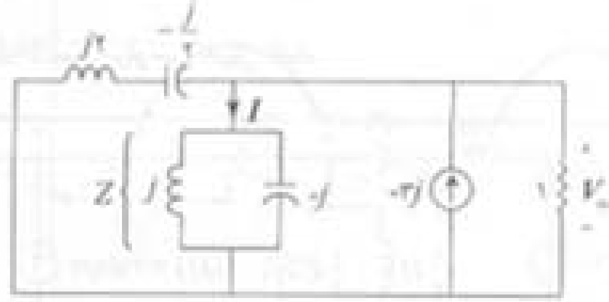
حال منبع ولتاژ $e_g(t)$ را منظور خواهیم کرد. در حالت دایمی سینوسی با توجه به اینکه $\omega = 1$ می باشد مدار بصورت زیر خواهد شد.



با توجه به شکل داریم.

$$Z = j - j = 0 \rightarrow V_1 = V_2 \rightarrow V_o = 5\angle 10^\circ \rightarrow v_o(t) = 5\cos\left(t + 10^\circ\right)$$

در ادامه اثر منبع جریان $i_g(t)$ را بررسی خواهیم کرد. در حالت دایمی سینوسی با توجه به اینکه $\omega = 2$ می باشد مدار بصورت زیر خواهد بود.



با توجه به شکل داریم.

$$Z = j \| -j = \frac{j\times(-j)}{j-j} = \frac{1}{0} = \infty \rightarrow I = 0$$

بنابراین با بکارگیری قاعده تقسیم جریان خواهیم داشت.

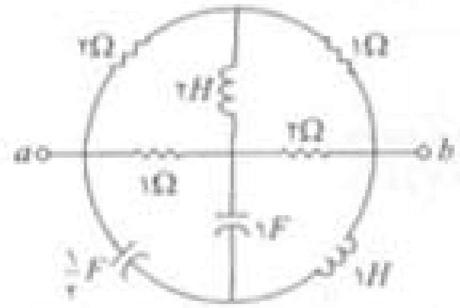
$$V_o = \frac{j2 - \frac{j}{2}}{1 + j2 - \frac{j}{2}}(-3j) = \frac{9}{2+3j} = 2/5\angle 56/3 \rightarrow v_o(t) = 2/5\cos\left(2t - 56/3^\circ\right)$$

و در نهایت بنا بر قضیه جمع آثار ولتاژ خروجی برابر است با :

$$v_o(t)=۱۰+۵\cos(t+۱۰)+۲/۵\cos(۲t-۵۶/۳^\circ)$$

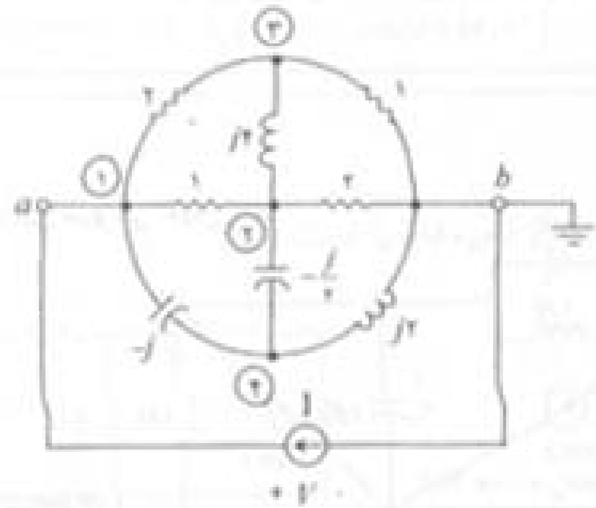
مسئله ۱۱۱

$Z_{ab}(j۲)=?$



شکل مسئله ۱۱۱

حل: بدین منظورمنبع جریان آزمایشی I را به دو سر a و b وصل کرده وولتاژدو سرآن را بدست می آوریم. در حالت دایمی سینوسی و در فرکانس زاویه ای $۲=\omega$ مدار بصورت زیر خواهد بود.



$$\text{KCL برای گره ۱} \rightarrow -I+\frac{V-V_۳}{۲}+\frac{V-V_۴}{-j}+\frac{V-V_۲}{۱}=۰$$

$$\rightarrow (۳+۲j)V-۲V_۲-V_۳-۲jV_۴=۲I$$

$$\text{KCL برای گره ۲} \rightarrow \frac{V_۲-V}{۱}+\frac{V_۲-V_۳}{j۴}+\frac{V_۲-V_۴}{-\frac{j}{۴}}+\frac{V_۲-۰}{۲}=۰$$

$$\rightarrow -j۴V+(-۸+j۶)V_۲-V_۳+۸V_۴=۰$$

$$\text{KCL برای گره ۳} \rightarrow \frac{V_۳-V}{۲}+\frac{V_۳-V_۲}{j۴}+\frac{V_۳-۰}{۱}=۰ \rightarrow -۲V-۲V_۲+(۱+j۶)V_۳=۰$$

KCL برای گره ۴ $\rightarrow \quad \dfrac{V_4 - V}{-j} + \dfrac{V_4 - V_2}{-\frac{j}{2}} + \dfrac{V_4 - 0}{j2} = 0 \quad \rightarrow \quad 2V + 4V_2 - 5V_4 = 0$

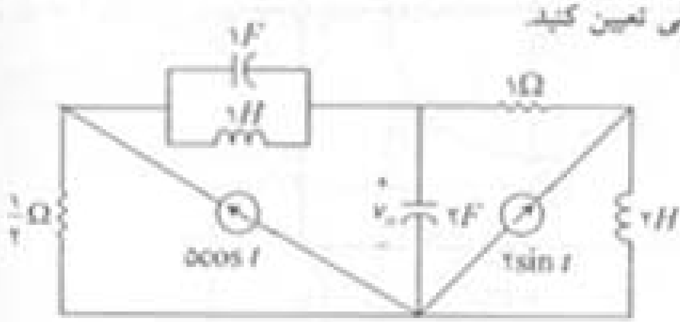
$$\rightarrow V = \frac{\begin{vmatrix} 2I & -2 & -1 & -2j \\ 0 & -8+j6 & -1 & 8 \\ 0 & -2 & 1+j6 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3+2j & -2 & -1 & -2j \\ -j2 & -8+j6 & -1 & 8 \\ -2 & -2 & 1+j6 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & -5 \end{vmatrix}} = \frac{0/37 + j5/87}{2/28 + j5/25} I$$

$$\rightarrow Z(j2) = \frac{V(j2)}{I(j2)} = \frac{0/37 + j5/87}{2/28 + j5/25} = 0/97 + j0/25\ \Omega$$

$$\rightarrow Z = R + j\omega L \quad \rightarrow \quad R = 0/97\Omega \quad , \quad L = 0/125\ H$$

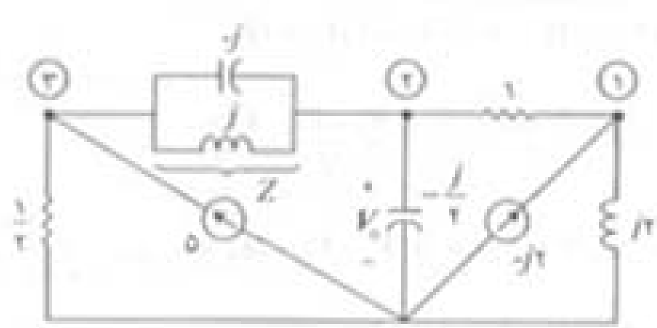
مسئله ۱۱۲.

$v_o(t)$ را در حالت دایمی سینوسی تعیین کنید.



شکل مسئله ۱۱۲

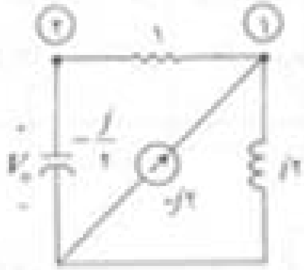
حل : در حالت دایمی سینوسی و با توجه به اینکه $\omega = 1$ می باشد، مدار بصورت زیر خواهد بود.



با توجه به شکل فوق داریم

$$Z = -j \,\|\, j = \frac{-j \times j}{-j + j} = \frac{۱}{۰} = \infty$$

بنابراین دو سر ② و ③ مدار باز بوده و مدار بصورت زیر خواهد شد.



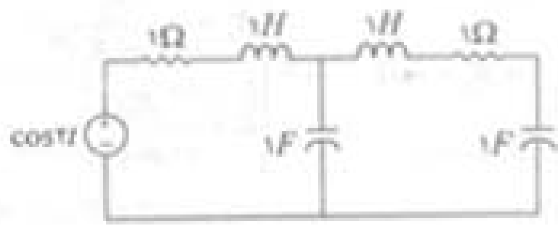
② KCL برای گره $\rightarrow \quad \frac{V_۰}{-\frac{j}{۲}} + \frac{V_۰ - V_۱}{۱} = ۰ \quad \rightarrow \quad V_۱ = (۱ + j۲)V_۰$

① KCL برای گره $\rightarrow \quad \frac{(۱ + j۲)V_۰ - V_۰}{۱} + \frac{(۱ + j۲)V_۰}{j۲} - j۲ = ۰$

$$\rightarrow \quad V_۰ = \frac{-۴}{-۳ + j۲} = ۱/۱۱ \angle ۳۳/۷^\circ \quad \rightarrow \quad v_۰(t) = ۱/۱۱ \cos(t + ۳۳/۷^\circ)$$

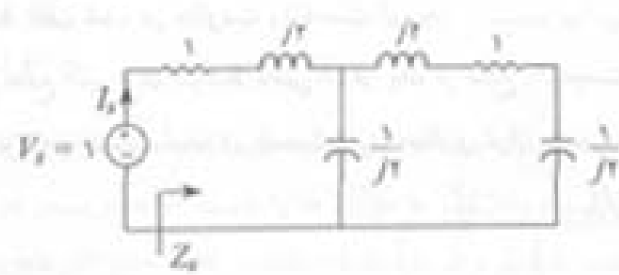
مسئله ۱۱۳

توان متوسط تلف شده و ذخیره شده را بدست آورید.



شکل مسئله ۱۱۳

حل : در حالت دایمی سینوسی و اینکه ۲ = ω است مدار بصورت زیر خواهد شد.



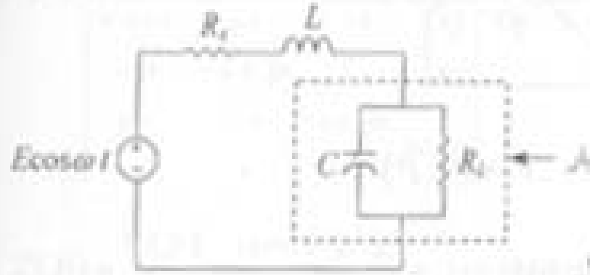
$$Z_s = ۱ + j۲ + \left(\frac{۱}{j۲}\right) \| \left(j۲ + ۱ + \frac{۱}{j۲}\right) = ۱/۱۲ + j۱/۳۷$$

$$S=\frac{1}{2}V_s\bar{I}_s=\frac{1}{2}V_s\overline{\left(\frac{V_s}{Z_s}\right)}=\frac{V_s\cdot\bar{V}_s}{2\bar{Z}_s}=\frac{|V_s|^2}{2\bar{Z}_s}=\frac{1}{2(1/12-j1/37)}$$

$$\rightarrow\ S=0/18-j0/22\ \rightarrow\ \begin{cases}\text{توان متوسط تلف شده}=0/18\ \omega\\ \text{انرژی متوسط ذخیره شده}=0/22\ Var\end{cases}$$

مسئله ۱۱۴

R_s و L را چنان تعیین کنید که بیشترین توان به بار تحویل داده شود.



شکل مسئله ۱۱۴

حل : با توجه به شکل فوق داریم.

$$Z_s=R_s+j\omega L\ ,\ Z_L=R_L\parallel\frac{1}{j\omega C}=\frac{R_L}{1+j\omega R_L C}=\frac{R_L-j\omega R_L^2 C}{1+\omega^2R_L^2C^2}$$

شرط انتقال توان ماکزیمم به بار Z_L عبارتست از:

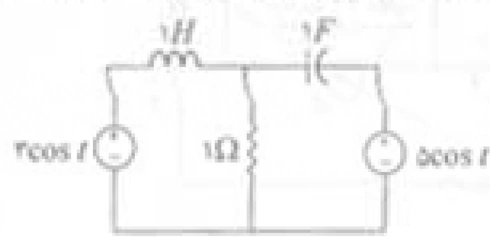
$$Z_L=\bar{Z}_s\ \rightarrow\ \frac{R_L}{1+\omega^2R_L^2C^2}-j\frac{\omega R_L^2C}{1+\omega^2R_L^2C^2}=R_s-j\omega L\ \rightarrow\ \begin{cases}R_s=\dfrac{R_L}{1+\omega^2R_L^2C^2}\\ L=\dfrac{R_L^2C}{1+\omega^2R_L^2C^2}\end{cases}$$

مسئله ۱۱۵

الف ـ توان متوسط تلف شده در مقاومت را بدست آورید.

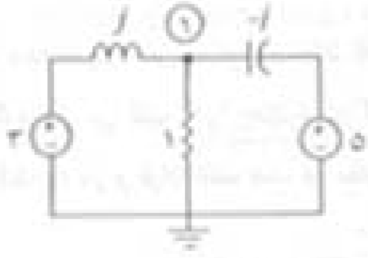
ب ـ با استفاده از جمع آثار توان متوسط ناشی از هر یک از منابع را بدست آورید.

پ ـ آیا مجموع توانهای بدست آمده در قسمت (ب) مساوی توان بدست آمده در قسمت (الف) است؟ چرا؟



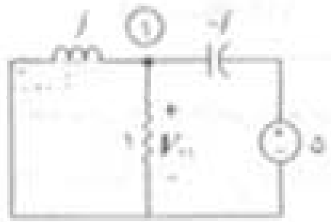
شکل مسئله ۱۱۵

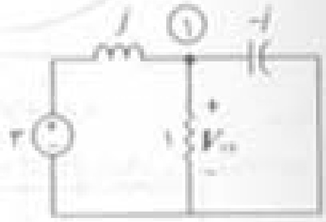
حل: الف ـ در حالت دایمی سینوسی ($\omega = 1$) نمودار مدار بصورت زیر می باشد.



برای گره ① $KCL \rightarrow \dfrac{V_1 - 3}{j} + \dfrac{V_1 - 5}{-j} + \dfrac{V_1}{1} = 0 \rightarrow V_1 = j3 \rightarrow P_{av} = \dfrac{|V_1|^2}{2R} = \dfrac{|2|^2}{2 \times 1} = 2\,W$

ب ـ در این حالت اثر هر کدام از منابع را جداگانه در نظر می گیریم.





$\dfrac{V_{11} - 5}{-j} + \dfrac{V_{11}}{1} + \dfrac{V_{11}}{j} = 0 \rightarrow V_1 = j5$

$\rightarrow P_{av1} = \dfrac{|V_{11}|^2}{2R} = \dfrac{5^2}{2 \times 1} = \dfrac{25}{2}\,W$

$\dfrac{V_{12} - 3}{j} + \dfrac{V_{12}}{1} + \dfrac{V_{12}}{-j} = 0 \rightarrow V_{12} = -j3$

$\rightarrow P_{av2} = \dfrac{|V_{12}|^2}{2R} = \dfrac{3^2}{2 \times 1} = \dfrac{9}{2}\,W$

پ ـ مجموع توان های بدست آمده در قسمت (ب) عبارتست از:

$P_{av1} + P_{av2} = \dfrac{25}{2} + \dfrac{9}{2} = 17\,W$

که مساوی توان بدست آمده در قسمت الف یعنی $P_{av} = 2W$ نیست. علت این است که اندازه مجموع دو بردار همیشه برابر مجموع اندازه های آنها نیست.

$|V_{11} + V_{12}| \neq |V_{11}| + |V_{12}|$

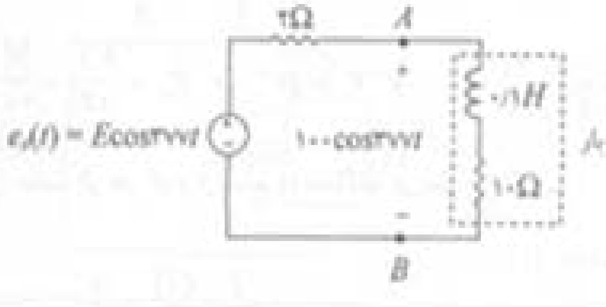
پس در محاسبه توان با استفاده از قضیه جمع آثار باید دقت کنیم که بعد از محاسبه ولتاژ و یا جریان هر عنصر ناشی از عناصر مختلف باید مجموع ولتاژها و یا جریان ها را بدست آورده و سپس در رابطه توان متوسط قرار دهیم. در مورد این مسئله محاسبه صحیح توان متوسط با استفاده از قضیه جمع آثار بصورت زیر خواهد بود.

$P_{av} = \dfrac{|V_{11} + V_{12}|^2}{2R} = \dfrac{|j5 - j3|^2}{2 \times 1} = \dfrac{4}{2 \times 1} = 2\,W$

مسئله ۱۱۶

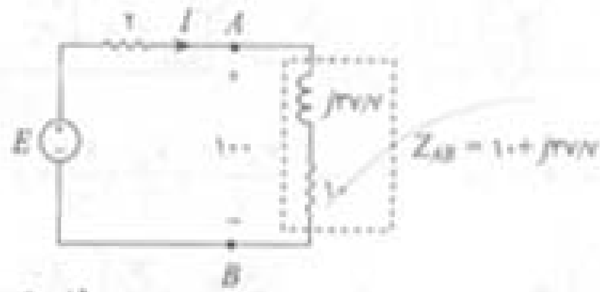
الف ـ توان متوسط تحویل داده شده به بار، ضریب توان و توان تلف شده درمقاومت ۲Ωرا بیابید.

ب ـ خازن C را به دو سر A و B وصل می کنیم.C را چنان تعیین کنید که ضریب توان بار برابر یک شود. توان متوسط تحویل داده شده به بار و توان تلف شده در مقاومت ۲Ω را محاسبه و با قسمت (الف) مقایسه کنید.



شکل مسئله ۱۱۶

حل : الف ـ در حالت دایمی سینوسی مدار بصورت زیر خواهد بود.



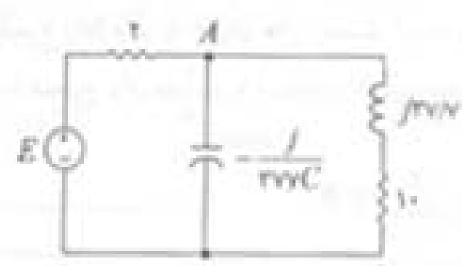
$$S_{AB} = \frac{|V_{AB}|^۲}{۲Z_{AB}} = \frac{(۱۰۰)^۲}{۲(۱۰ - j۳۷/۷)} = ۳۳/۱۸ + j۱۲۳/۸۳ \rightarrow P_{av(AB)} = ۳۳/۱۸\ W$$

$$\tan\phi = \frac{۱۲۳/۸۳}{۳۳/۱۸} = ۳/۷۳ \rightarrow \phi = ۷۵/۱ \rightarrow \text{ضریب توان} = \cos\phi = \cos ۷۵/۱^\circ = ۰/۲۵۶$$

توان متوسط تلف شده در مقاومت ۲Ω بصورت زیر بدست می آید.

$$I = \frac{۱۰۰}{۱۰ + j۳۷/۷} \rightarrow P_{av(R)} = \frac{۱}{۲}R|I|^۲ = \frac{۱}{۲} \times ۲ \times \frac{۱۰۰}{\sqrt{۱۰^۲ + (۳۷/۷)^۲}} = ۶/۵۷\ W$$

ب ـ با اتصال خازن C به دو سر A و B مدار بصورت زیر خواهد شد.



می دانیم که توان در این حالت توان تحویل داده شده به دو سر AB برابر است با :

$$S_{AB}=\frac{(۱۰۰)^۲}{۲(۱۰۰-j۳۷/۷)}+\frac{(۱۰۰)^۲}{۲\left(\frac{j}{۳۷۷C}\right)}=۳۳/۱۸+j\left(۱۲۳/۸۳-۱۸۸۵\times۱۰^۴C\right)$$

شرط اینکه ضریب قدرت برابر یک شود عبارتست از :

$$\cos\phi=۱\ \rightarrow\ \phi=۰$$

$$\tan\phi=\frac{۱۲۳/۸۳-۱۸۸۵\times۱۰^۴C}{۳۳/۱۸}=۰\ \rightarrow\ ۱۲۳/۸۳-۱۸۸۵\times۱۰^۴C=۰$$

$$\rightarrow\ C=\frac{۱۲۳/۸۳}{۱۸۸۵\times۱۰^۴}=۶۵/۷\times۱۰^{-۶}=۶۵/۷\ \mu F$$

روش دوم : در حالت کلی برای افزایش ضریب قدرت از $\cos\phi_1$ به $\cos\phi_2$ توان خازن لازم از رابطه زیر بدست می آید.

$$Q_c=P(\tan\varphi_1-\tan\varphi_2)$$

در این مسئله داریم.

$$\tan\phi_1=۳/۷۳\ ,\ \cos\phi_2=۱\ \rightarrow\ \tan\phi_2=۰\ \rightarrow\ Q_C=۳۳/۱۸(۳/۷۳-۰)=۱۲۳/۷۶$$

$$\rightarrow Q_C=\frac{|V_s|^۲}{۲\ X_c}\ \rightarrow\ ۱۲۳/۷۶=\frac{۱۰۰^۲}{۲X_c}$$

$$\rightarrow\ X_C=۴۰/۴۰\quad ,\quad X_C=\frac{۱}{C\omega}\ \rightarrow\ ۴۰/۴۰=\frac{۱}{C\times۳۷۷}\ \rightarrow\ C=۶۵/۶۵\ \mu F$$

همچنین داریم.

$$\rightarrow S_{AB}=۳۳/۱۸\quad ,\quad S_{AB}=\frac{۱}{۲}VI^*\rightarrow\ |I|=\frac{۲|S_{AB}|}{|V|}=\frac{۲\times۳۳/۱۸}{۱۰۰}=۰/۶۶\ A$$

$$\rightarrow\ P_{av(R)}=\frac{۱}{۲}R|I|^۲=\frac{۱}{۲}\times۲\times(۰/۶۶)^۲=۰/۴۴\ W$$

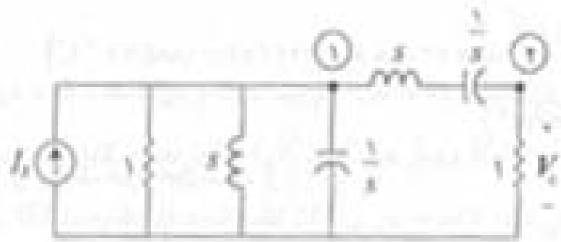
ملاحظه می شود که توان متوسط تحویلی به بار تغییری نکرده ولی توان تلف شده در مقاومت ۲Ω بسیار کمتر شده است.

مسئله ۱۱۷

$H(j\omega)=\frac{V_o}{I_s}$ را محاسبه و رفتار فیلتری مدار و فرکانس قطع آن را تعیین کنید.

شکل مسئله ۱۱۷

حل : با فرض $s = j\omega$ مدار در حالت دایمی سینوسی بصورت زیر خواهد بود.



$$\text{KCL برای گره ۲} \rightarrow \frac{V_1 - V_o}{s + \frac{1}{s}} + \frac{V_o}{1} = 0 \rightarrow V_1 = \frac{s^2 + s + 1}{s} V_o$$

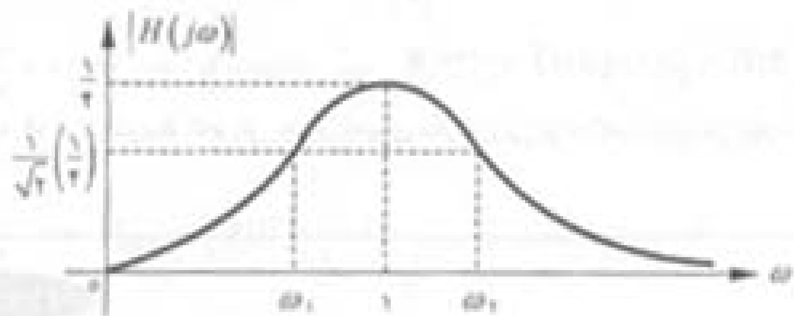
$$\text{KCL برای گره ۱} \rightarrow -I_s + \frac{\frac{s^2+s+1}{s}V_o}{1} + \frac{\frac{s^2+s+1}{s}V_o}{s} + \frac{\frac{s^2+s+1}{s}V_o}{\frac{1}{s}} + \frac{\frac{s^2+s+1}{s}V_o - V_o}{s + \frac{1}{s}} = 0$$

$$\rightarrow -I_s + \frac{s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 2s + 1}{s^2} V_o = 0$$

$$\rightarrow \frac{V_o}{I_s} = \frac{s^2}{s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 2s + 1} \rightarrow H(j\omega) = \frac{(j\omega)^2}{(j\omega)^4 + 2(j\omega)^3 + 4(j\omega)^2 + 2j\omega + 1}$$

$$\rightarrow |H(j\omega)| = \frac{\omega^2}{\sqrt{(\omega^4 - 4\omega^2 + 1)^2 + (2\omega - 2\omega^3)^2}} = \begin{cases} 0 & , \ \omega = 0 \\ \frac{1}{2} & , \ \omega = 1 \\ 0 & , \ \omega \rightarrow \infty \end{cases}$$

بنابراین نمودار $|H(j\omega)|$ بصورت زیر می باشد که نمایشگر یک فیلتر میان گذر است.



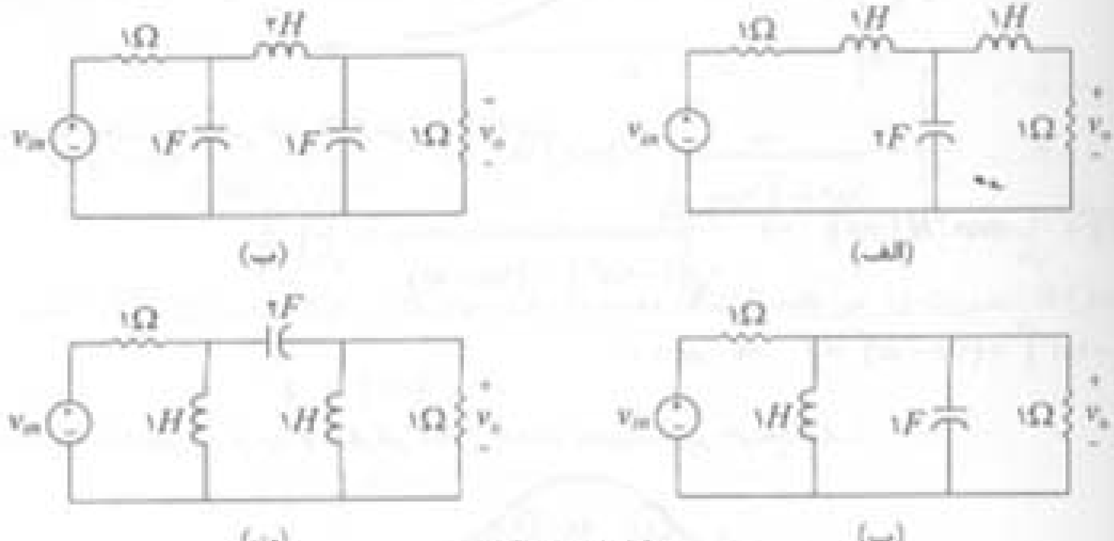
در ادامه به محاسبه فرکانسهای قطع $3dB$ خواهیم پرداخت.

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{2}\max|H(j\omega)| \rightarrow \frac{\omega^2}{\sqrt{(\omega^4 - 4\omega^2 + 1)^2 + (2\omega - 2\omega^3)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\rightarrow \omega_1 = 0/52 \quad , \quad \omega_2 = 1/93$$

مسئله ۱۱۸

$H(j\omega)=\frac{V_o}{V_{in}}$ را برای هر یک از مدار ها تعیین کنید و نوع رفتار فیلتری و فرکانس قطع آنها را بدست آورید.



شکل مسئله ۱۱۸

حل : الف ــ در حالت دایمی سینوسی و با فرض $s=j\omega$ مدار بصورت زیر خواهد بود.

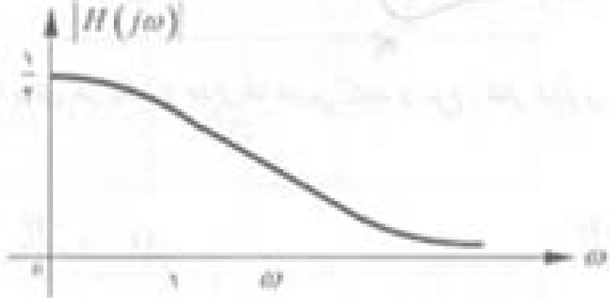
۲ KCL برای گره $\rightarrow \quad \frac{V_o-V_1}{s}+\frac{V_o}{1}=0 \quad \rightarrow \quad V_1=(s+1)V_o$

۱ KCL برای گره $\rightarrow \quad \frac{(s+1)V_o-V_o}{s}+\frac{(s+1)V_o}{\frac{1}{2s}}+\frac{(s+1)V_o-V_{in}}{s+1}=0$

$$\rightarrow (2s^3+4s^2+4s+2)V_o=V_{in} \rightarrow H(j\omega)=\frac{V_o}{V_{in}}=\frac{1}{2(j\omega)^3+4(j\omega)^2+4j\omega+2}$$

$$\rightarrow |H(j\omega)|=\frac{1}{\sqrt{(2-4\omega^2)^2+(4-2\omega^2)^2}}=\begin{cases}\frac{1}{2} , & \omega=0\\ 0 , & \omega\rightarrow\infty\end{cases}$$

بنابراین نمودار $|H(j\omega)|$ بصورت زیر است که نمایشگر یک فیلتر پایین گذر است.

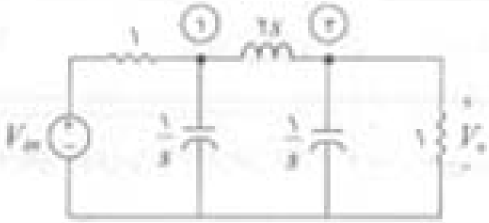


در ادامه به محاسبه فرکانس قطع $3db$ خواهیم پرداخت.

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}}\max|H(j\omega)| \;\rightarrow\; \frac{1}{2\sqrt{\left(1-2\omega^2\right)^2+\left(2\omega-\omega^3\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\rightarrow \left(1-2\omega^2\right)^2+\left(2\omega-\omega^3\right)^2 = 2 \;\rightarrow\; \omega = 1$$

پ ــ در حالت دایمی سینوسی و با فرض $s = j\omega$ مدار بصورت زیر خواهد شد.



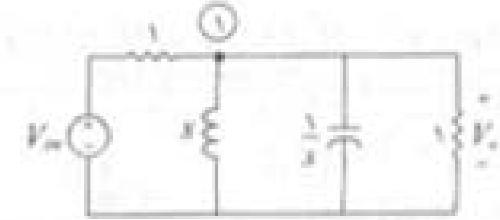
$$\text{KCL برای گره ۲} \rightarrow \frac{V_o}{1}+\frac{V_o}{\frac{1}{s}}+\frac{V_o-V_1}{2s}=0 \;\rightarrow\; V_1=\left(2s^2+2s+1\right)V_o$$

$$\text{KCL برای گره ۱} \rightarrow \frac{\left(2s^2+2s+1\right)V_o-V_{in}}{1}+\frac{\left(2s^2+2s+1\right)V_o}{\frac{1}{s}}+\frac{\left(2s^2+2s+1\right)V_o-V_o}{2s}=0$$

$$\rightarrow \left(2s^3+4s^2+4s+2\right)V_o=V_{in} \rightarrow H(j\omega)=\frac{1}{2(j\omega)^3+4(j\omega)^2+4j\omega+2}$$

ملاحظه می شود که تابع شبکه $H(j\omega)$ بدست آمده همانند قسمت (الف) است بنابراین مدار یک فیلتر پایین گذر با فرکانس قطع $1\,\frac{rad}{sec}$ است.

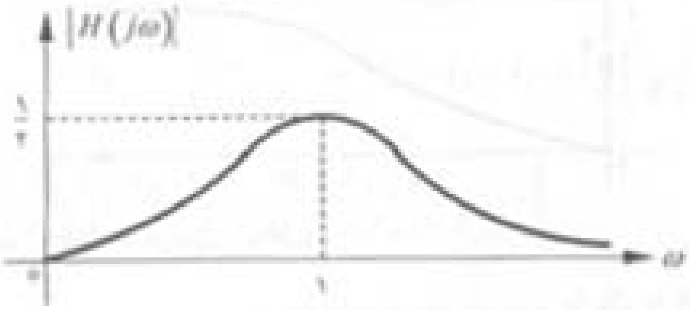
پ ــ در حالت دایمی سینوسی و با فرض $s = j\omega$ مدار بصورت زیر خواهد شد.



$$\text{KCL برای گره } ① \rightarrow \frac{V_o - V_{in}}{1} + \frac{V_o}{s} + \frac{V_o}{\frac{1}{s}} + \frac{V_o}{1} = 0 \rightarrow (s^2 + 2s + 1)V_o = sV_{in}$$

$$\rightarrow H(j\omega) = \frac{j\omega}{(j\omega)^2 + 2j\omega + 1} \rightarrow |H(j\omega)| = \frac{\omega}{\sqrt{(1-\omega^2)^2 + 4\omega^2}} = \begin{cases} 0 & , \omega \to 0 \\ \frac{1}{2} & , \omega = 1 \\ 0 & , \omega \to \infty \end{cases}$$

نمودار $|H(j\omega)|$ بصورت زیر می باشد که نشان دهنده یک فیلتر میان گذر با فرکانس مرکزی $1 \frac{rad}{sec}$ است.

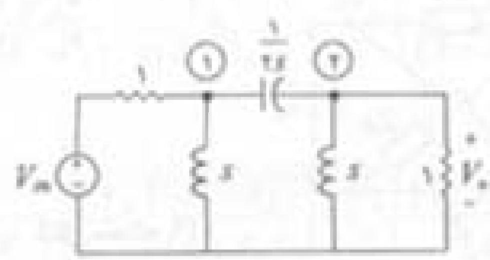


در ادامه به محاسبه فرکانسهای قطع $3db$ خواهیم پرداخت.

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \max|H(j\omega)| \rightarrow \frac{\omega}{\sqrt{(1-\omega^2)^2 + 4\omega^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\rightarrow \omega_1 = 0/42 \quad , \quad \omega_2 = 2/41$$

ث ـ در حالت دایمی سینوسی و با فرض $s = j\omega$ مدار بصورت زیر خواهد شد.



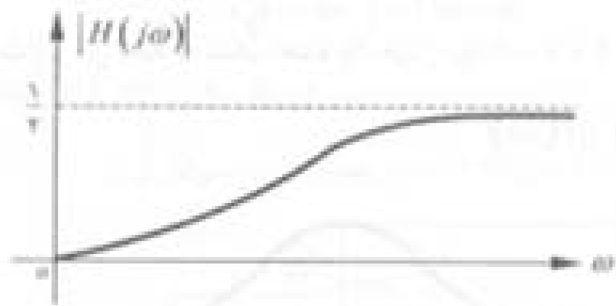
$$\text{KCL برای گره } ② \rightarrow \frac{V_o}{1} + \frac{V_o}{s} + \frac{V_o - V_1}{\frac{1}{2s}} = 0 \rightarrow V_1 = \frac{2s^2 + s + 1}{2s^2} V_o$$

$$\text{KCL برای گره ۱} \rightarrow \frac{\frac{2s^2+s+1}{2s^2}V_o - V_{in}}{1} + \frac{\frac{2s^2+s+1}{2s^2}V_o}{s} + \frac{\frac{2s^2+s+1}{2s^2}V_o - V_o}{\frac{1}{2s}} = 0$$

$$\rightarrow \left(\frac{4s^3+5s^2+2s+1}{2s^2}\right)V_o = V_{in} \rightarrow H(j\omega) = \frac{2(j\omega)^3}{4(j\omega)^3+5(j\omega)^2+2j\omega+1}$$

$$\rightarrow \left|H(j\omega)\right| = \frac{2\omega^3}{\sqrt{\left(1-5\omega^2\right)^2+\left(2\omega-4\omega^3\right)^2}} = \begin{cases} 0 & , \quad \omega \rightarrow 0 \\ \frac{1}{2} & , \quad \omega \rightarrow \infty \end{cases}$$

بنابراین نمودار $\left|H(j\omega)\right|$ بصورت زیر است که بیانگر یک فیلتر بالاگذر می باشد.



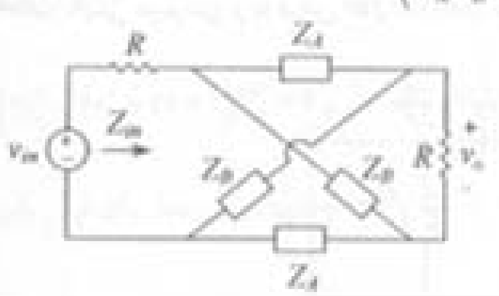
در ادامه به محاسبه فرکانس قطع $3db$ خواهیم پرداخت.

$$\left|H(j\omega)\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}\max\left|H(j\omega)\right| \rightarrow \frac{2\omega^3}{\sqrt{\left(1-5\omega^2\right)^2+\left(2\omega-4\omega^3\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}\right) \rightarrow \omega = 0/25$$

مسئله ۱۱۹

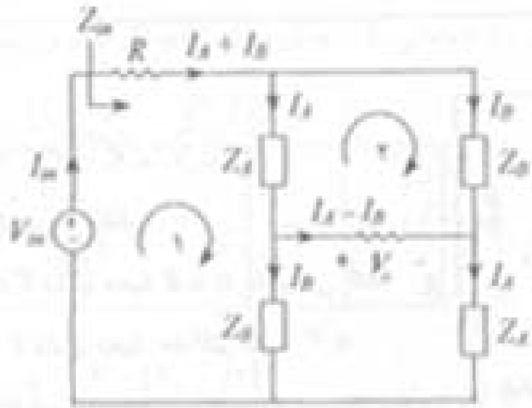
نشان دهید Z_{in} مستقل از فرکانس است. $\left(Z_A Z_B = R^2\right)$

نشان دهید $\frac{V_o}{V_{in}} = \frac{1}{2}\frac{R-Z_A}{R+Z_A}$



شکل مسئله ۱۱۹

حل : مدار را می توان بصورت زیر رسم کرد که یک پل متعادل است.



(۱) برای مش $KVL \;\to\; -V_{in}+R(I_A+I_B)+Z_AI_A+Z_BI_B=0$

$$\to\; (R+Z_A)I_A+(R+Z_B)I_B=V_{in}$$

(۲) برای مش $KVL \;\to\; -Z_AI_A+Z_BI_B-R(I_A-I_B)=0 \;\to\; (R+Z_A)I_A-(R+Z_B)I_B=0$

$$\to\; I_A=\frac{V_{in}}{2(R+Z_A)}\;,\; I_B=\frac{V_{in}}{2(R+Z_B)} \;\to\; I_{in}=I_A+I_B=\frac{V_{in}}{2}\left(\frac{1}{R+Z_A}+\frac{1}{R+Z_B}\right)$$

$$=\frac{V_{in}}{2}\left(\frac{R+Z_A+R+Z_B}{(R+Z_A)(R+Z_B)}\right)=\frac{V_{in}}{2}\left(\frac{2R+Z_A+Z_B}{R^2+R(Z_A+Z_B)+Z_AZ_B}\right)$$

از طرفی می دانیم که $R^2=Z_AZ_B$ است بنابراین خواهیم داشت.

$$I_{in}=\frac{V_{in}}{2}\left(\frac{2R+Z_A+Z_B}{R^2+R(Z_A+Z_B)}\right)=\frac{V_{in}}{2R}\left(\frac{2R+Z_A+Z_B}{2R+Z_A+Z_B}\right)=\frac{V_{in}}{2R} \;\to\; Z_{in}=\frac{V_{in}}{I_{in}}=2R$$

ملاحظه می شود که مقاومت ورودی برابر $2R$ است که مستقل از فرکانس است.
همچنین می توان نوشت.

$$V_o=R(I_A+I_B)=R\left(\frac{V_{in}}{2(R+Z_A)}-\frac{V_{in}}{2(R+Z_B)}\right)=\frac{RV_{in}}{2}\left(\frac{Z_B-Z_A}{(R+Z_A)(R+Z_B)}\right)$$

$$=\frac{RV_{in}}{2}\left(\frac{\frac{R^2}{Z_A}-Z_A}{(R+Z_A)\left(R+\frac{R^2}{Z_A}\right)}\right)=\frac{V_{in}}{2}\left(\frac{R^2-Z_A^2}{(R+Z_A)^2}\right)=\frac{V_{in}}{2}\left(\frac{(R-Z_A)(R+Z_A)}{(R+Z_A)^2}\right)$$

$$=\frac{V_{in}}{2}\left(\frac{(R-Z_A)}{R+Z_A}\right) \;\to\; \frac{V_o}{V_{in}}=\frac{1}{2}\frac{R-Z_A}{R+Z_A}$$

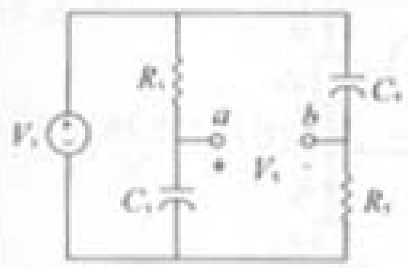
مسئله ۱۲۰

$R_1C_1 = R_2C_2 = T$ و $\angle V_2 - \angle V_1 = \phi$.

الف ـ نشان دهید ϕ با T تغییر می کند.

ب ـ برای یک مقدار ثابت T نشان دهید ϕ با ω تغییر می کند.

پ ـ برای یک مقدار ثابت T نشان دهید حداکثر دامنه V_2 به حداکثر دامنه V_1 تابعی از ω است.



شکل مسئله ۱۲۰

حل : الف ـ بنا بر قاعده تقسیم ولتاژ داریم.

$$V_a = \frac{\frac{1}{j\omega C_1}}{R_1 + \frac{1}{j\omega C_1}} V_1 = \frac{1}{1 + j\omega R_1 C_1} V_1 = \frac{1}{1 + j\omega T} V_1$$

$$V_b = \frac{R_2}{R_2 + \frac{1}{j\omega C_2}} V_1 = \frac{j\omega R_2 C_2}{1 + j\omega R_2 C_2} V_1 = \frac{j\omega T}{1 + j\omega T} V_1$$

$$\rightarrow V_2 = V_a - V_b = \left(\frac{1}{1 + j\omega T} V_1 - \frac{j\omega T}{1 + j\omega T} V_1 \right) = \frac{1 - j\omega T}{1 + j\omega T} V_1 \quad \rightarrow \quad \frac{V_2}{V_1} = \frac{1 - j\omega T}{1 + j\omega T}$$

$$\rightarrow \phi = \angle V_2 - \angle V_1 = -\tan^{-1} \omega T - \tan^{-1} \omega T = -2\tan^{-1} \omega T$$

بنابراین ϕ با T تغییر می کند.

ب ـ با توجه به رابطه بدست آمده برای ϕ واضح است که اگر T ثابت باشد ϕ با ω تغییر می کند.

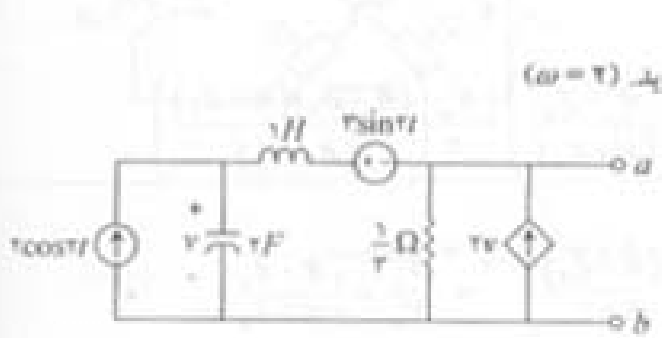
پ ـ با توجه به $\frac{V_2}{V_1}$ بدست آمده داریم.

$$\frac{|V_2|}{|V_1|} = \frac{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} = 1$$

ملاحظه می شود که $\left| \frac{V_2}{V_1} \right|$ ثابت بوده و به ω بستگی ندارد.

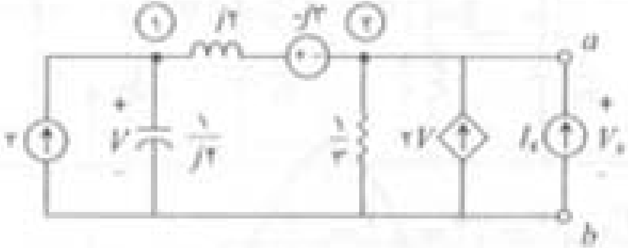
مسئله ۱۲۱

معادل تونن دو سر a و b را بدست آورید. $(\omega = 2)$



شکل مسئله ۱۲۱

حل : بدین منظور جریان آزمایشی I_x را به دو سر a و b وصل کرده و ولتاژ دو سر آن را بدست می آوریم.



$$\begin{cases} \text{KCL برای گره ۱} \;\rightarrow\; -۲+\dfrac{V}{\frac{۱}{j۴}}+\dfrac{V-(V_x-j۳)}{j۲}=۰ \;\rightarrow\; V_x+۷V=-j \\ \text{KCL برای گره ۲} \;\rightarrow\; -I_x-۲V+\dfrac{V_x}{\frac{۱}{۳}}+\dfrac{(V_x-j۳)-V}{j۲}=۰ \end{cases}$$

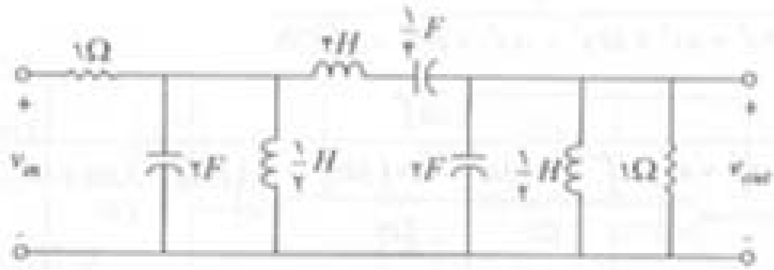
$$\rightarrow\; (۱+j۶)V_x-(۱+j۴)V=j۲I_x+j۳$$

$$\rightarrow\; V_x=\frac{\begin{vmatrix} -j & ۷ \\ j۲I_x+j۳ & -(۱+j۴) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} ۱ & ۷ \\ ۱+j۶ & -(۱+j۴) \end{vmatrix}}=\frac{-j۱۴I_x-۴-j۲۰}{-۸-j۴۶}=(۰/۲۹+j۰/۰۵)I_x+۰/۴۴-j۰/۰۱$$

$$\rightarrow\; Z_{th}=۰/۲۹+j۰/۰۵ \quad , \quad E_{oc}=۰/۴۴-j۰/۰۱=۰/۴۴\angle -۱/۴^\circ$$

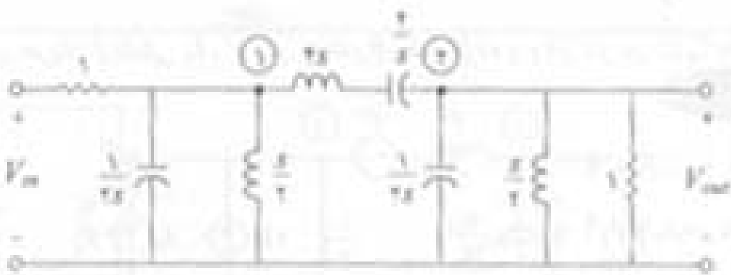
مسئله ۱۲۲

$H(j\omega)=\frac{V_{out}}{V_{in}}$ را تعیین و نوع رفتار فیلتری و فرکانس قطع ۳db- را تعیین کنید.



شکل مسئله ۱۲۲

حل : با فرض $j\omega = s$ ، در حالت دایمی سینوسی مدار بصورت زیر خواهد بود.



KCL برای گره ② $\rightarrow \quad \dfrac{V_{out}}{1} + \dfrac{V_{out}}{\frac{s}{2}} + \dfrac{V_{out}}{\frac{1}{2s}} + \dfrac{V_{out} - V_1}{2s + \frac{2}{s}} = 0$

$$\rightarrow \left(1 + 2s + \frac{2}{s} + \frac{s}{2s^2 + 2}\right) V_{out} - \left(\frac{s}{2s^2 + 2}\right) V_1 = 0$$

KCL برای گره ① $\rightarrow \quad \dfrac{V_1 - V_{in}}{1} + \dfrac{V_1}{\frac{1}{2s}} + \dfrac{V_1}{\frac{s}{2}} + \dfrac{V_1 - V_{out}}{2s + \frac{2}{s}} = 0$

$$\rightarrow \left(\frac{s}{2s^2 + 2}\right) V_{out} + \left(1 + 2s + \frac{2}{s} + \frac{s}{2s^2 + 2}\right) V_1 = V_{in}$$

$$\rightarrow V_{out} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -\dfrac{s}{2s^2+2} \\ V_{in} & 1 + 2s + \dfrac{2}{s} + \dfrac{s}{2s^2+2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 + 2s + \dfrac{2}{s} + \dfrac{s}{2s^2+2} & -\dfrac{s}{2s^2+2} \\ -\dfrac{s}{2s^2+2} & 1 + 2s + \dfrac{2}{s} + \dfrac{s}{2s^2+2} \end{vmatrix}}$$

$$\rightarrow \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{s^3}{16s^6 + 8s^5 + 56s^4 + 17s^3 + 56s^2 + 8s + 16}$$

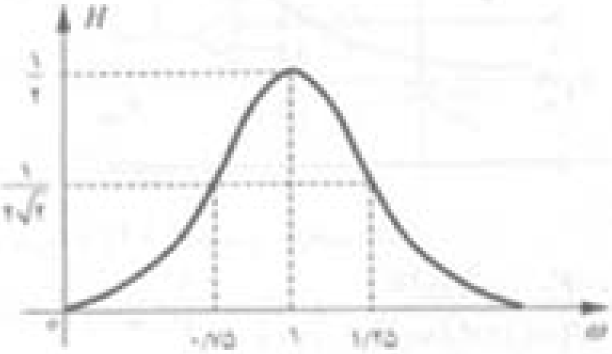
$$H(j\omega) = \frac{(j\omega)^3}{16(j\omega)^6 + 8(j\omega)^5 + 56(j\omega)^4 + 17(j\omega)^3 + 56(j\omega)^2 + 8j\omega + 16}$$

$$\rightarrow |H(j\omega)| = \frac{|\omega^3|}{2\sqrt{\left(8 - 28\omega^2 + 28\omega^4 - 8\omega^6\right)^2 + \left(8\omega - 17\omega^3 + 8\omega^5\right)^2}}$$

$$= \begin{cases} 0 \quad , & \omega \to 0 \\ 0 \quad , & \omega \to \infty \end{cases}$$

بنابراین نمودار $\left|H(j\omega)\right|$ بصورت زیر می باشد که نمایشگر یک فیلتر میان گذر است.

$$\frac{dH(j\omega)}{d\omega} = 0 \quad \rightarrow \quad \omega = 1 \quad \rightarrow \quad \left|H(j\omega)\right|_{max} = \left|H(j\omega)\right|_{\omega=1} = \frac{1}{2}$$



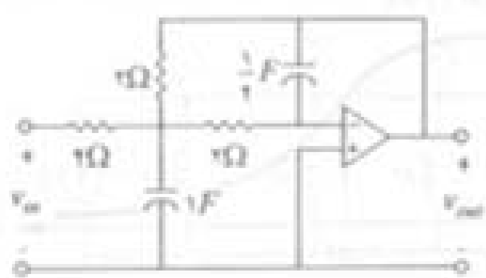
برای محاسبه فرکانس قطع $3dB$ می توان نوشت.

$$\left|H(j\omega)\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}\left|H(j\omega)\right|_{max} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \quad \rightarrow \quad \omega = 0/75 \;,\; 1/25$$

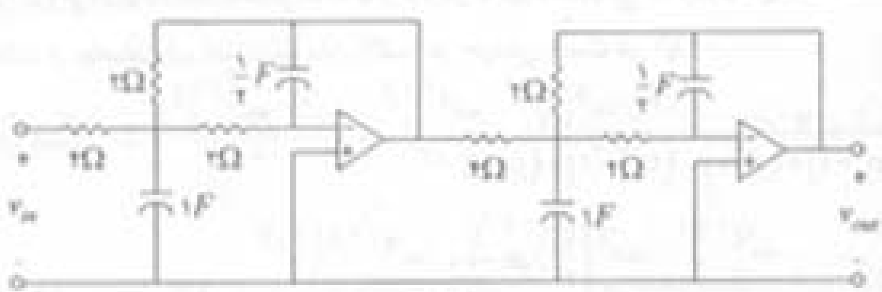
مسئله ۱۲۳

الف ـ $H(j\omega) = \frac{V_{out}}{V_{in}}$ مدار شکل (الف) را محاسبه و رفتار فیلتری آن را مشخص کنید.

ب ـ $H(j\omega) = \frac{V_{out}}{V_{in}}$ مدار شکل (ب) را تعیین و رفتار فیلتری مدار را مشخص کنید.



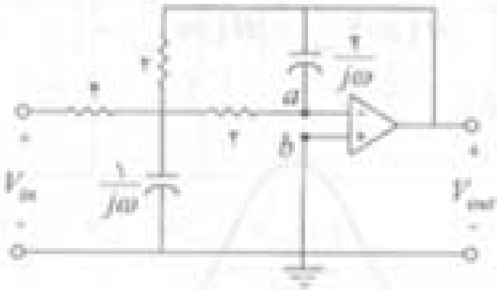
(الف)



(ب)

شکل مسئله ۱۲۳

حل : الف ـ در حالت دایمی سینوسی مدار بصورت زیر می باشد.



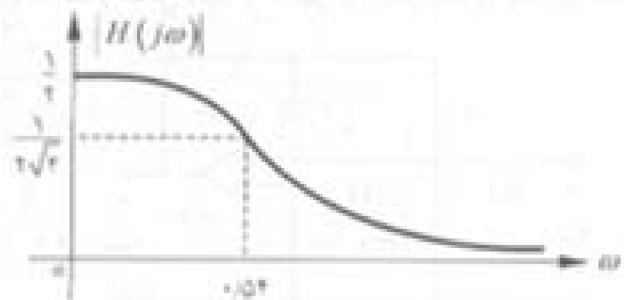
با فرض ایده آل بودن آپ امپ $V_a = V_b = 0$ بوده و خواهیم داشت.

ⓐ برای گره KCL $\rightarrow \quad \frac{0-V_C}{2}+\frac{0-V_{out}}{\frac{2}{j\omega}}=0 \quad \rightarrow \quad V_C=-j\omega V_{out}$

ⓒ برای گره KCL $\rightarrow \quad \frac{-j\omega V_{out}-V_{in}}{2}+\frac{-j\omega V_{out}}{\frac{1}{j\omega}}+\frac{-j\omega V_{out}-V_{out}}{2}+\frac{-j\omega V_{out}-0}{2}=0$

$$\rightarrow H(j\omega)=\frac{V_{out}}{V_{in}}=\frac{1}{4\omega^2-2+j5\omega} \quad \rightarrow \quad \left|H(j\omega)\right|=\frac{1}{\sqrt{\left(4\omega^2-2\right)^2+\left(5\omega\right)^2}}=\begin{cases}\frac{1}{2}\ , & \omega\rightarrow 0\\ 0\ , & \omega\rightarrow\infty\end{cases}$$

بنابراین نمودار $\left|H(j\omega)\right|$ بصورت زیر می باشد که نمایشگر یک فیلتر پایین گذر است.

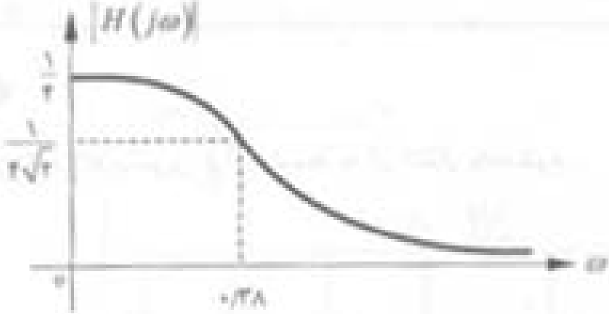


ب ـ مدار(ب) از دومدار(الف) تشکیل شده که خروجی یکی به ورودی دیگری وصل شده است ولذا تابع شبکه در این حالت از حاصلضرب تابع شبکه مدار (الف) در خودش بدست می آید.

$$H(j\omega)=\frac{1}{\left(4\omega^2-2\right)+\left(j5\omega\right)}\times\frac{1}{\left(4\omega^2-2\right)+\left(j5\omega\right)}$$

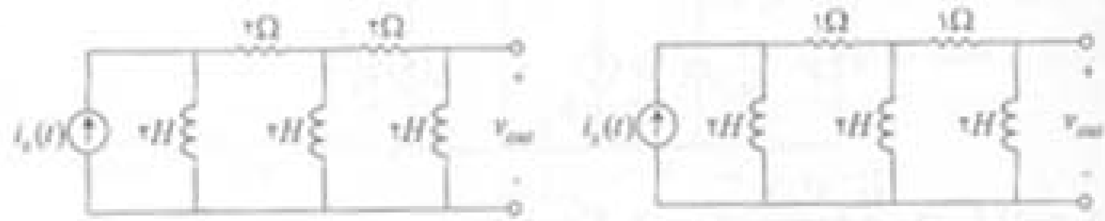
$$\rightarrow \quad \left|H(j\omega)\right|=\frac{1}{\left(4\omega^2-2\right)^2+\left(5\omega\right)^2}=\begin{cases}\frac{1}{4}\ , & \omega\rightarrow 0\\ 0\ , & \omega\rightarrow\infty\end{cases}$$

بنابراین نمودار $\left|H(j\omega)\right|$ بصورت زیر می باشد که نمایشگر یک فیلتر پایین گذر است.



مسئله ۱۲۴

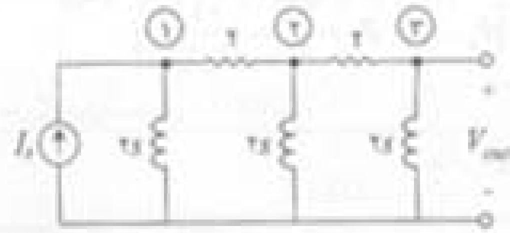
در شکل (الف) $H(j\omega)=\frac{V_{out}}{V_{in}}=\frac{\alpha(j\omega)^2}{(j\omega)^3+\beta(j\omega)^2+\gamma(j\omega)+\delta}$ است. $H(j\omega)$ مدار شکل (ب) را بدست آورید.



(ب) (الف)

شکل مسئله ۱۲۴

حل : با فرض $j\omega = s$ مدار (ب)در حالت دایمی سینوسی بصورت زیر خواهد بود.



③ برای گره KCL $\rightarrow \frac{V_{out}}{2s}+\frac{V_{out}-V_2}{2}=0 \rightarrow V_2=\frac{s+1}{s}V_{out}$

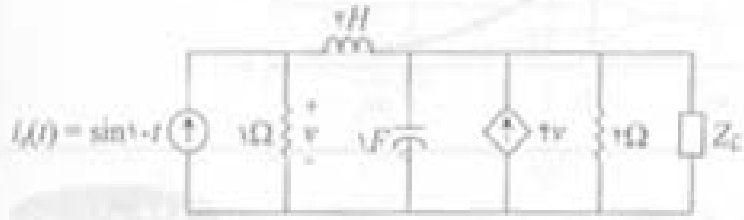
② برای گره KCL $\rightarrow \frac{\frac{s+1}{s}V_{out}-V_{out}}{2}+\frac{\frac{s+1}{s}V_{out}}{2s}+\frac{\frac{s+1}{s}V_{out}-V_1}{2}=0 \rightarrow V_1=\frac{s^2+3s+1}{s^2}V_{out}$

① برای گره KCL $\rightarrow -I_s+\frac{\frac{s^2+3s+1}{s^2}V_{out}}{2s}+\frac{\frac{s^2+3s+1}{s^2}V_{out}-\frac{s+1}{s}V_{out}}{2}=0$

$\rightarrow \frac{3s^2+4s+1}{s^3}V_{out}=2I_s \rightarrow H(j\omega)=\frac{2(j\omega)^3}{3(j\omega)^2+4(j\omega)+1}$

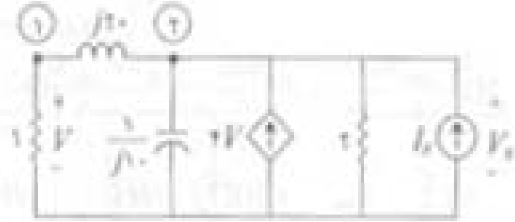
مسئله ۱۲۵

Z_L را چنان تعیین کنید که بیشترین توان متوسط به آن انتقال داده شود



شکل مسئله ۱۲۵

حل : ابتدا امپدانس دو سر Z_L را بدون در نظر گرفتن خود Z_L بدست می آوریم



$$① \text{ برای گره } KCL \rightarrow \frac{V}{1}+\frac{V-V_x}{j40}=0 \rightarrow V=\frac{V_x}{1+j40}$$

$$② \text{ برای گره } KCL \rightarrow \frac{V_x}{1+j40}+\frac{V_x}{\frac{1}{j10}}-4\left(\frac{V_x}{1+j40}\right)+\frac{V_x}{2}-I_x=0$$

$$\rightarrow (-402.5+j30)V_x=(1+j40)I_x \rightarrow Z_x=\frac{V_x}{I_x}=\frac{1+j40}{-402.5+j30}$$

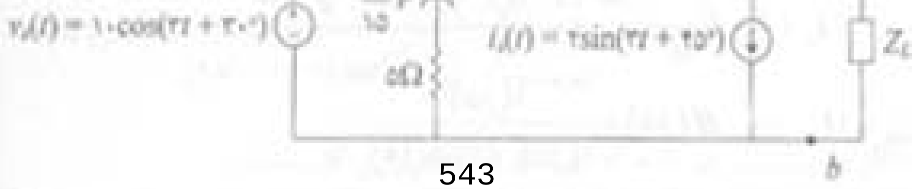
شرط انتقال توان ماکزیمم به Z_L عبارتست از :

$$Z_L=\bar{Z}_x \rightarrow Z_L=0.005+j0.098$$

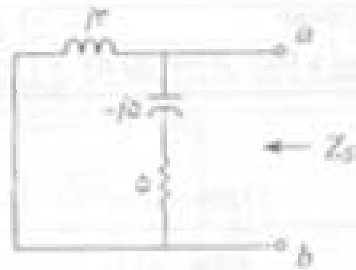
مسئله ۱۲۶

الف ـ امپدانس Z_L را چنان انتخاب کنید که بیشترین توان متوسط به آن انتقال داده شود.

ب ـ با استفاده از عناصر R و L و C مداری طراحی کنید که نشان دهنده امپدانس Z_L باشد.



حل: الف ـ ابتدا امپدانس دیده شده از دو سر a و b را بدون در نظر گرفتن Z_L بدست می آوریم.



$$Z_s = j۳ \| (۵-j۵) = \frac{j۳\times(۵-j۵)}{j۳+۵-j۵} = \frac{۱۵+j۱۵}{۵-j۲} = ۱/۵ + j۳/۶$$

شرط انتقال توان ماکزیمم عبارتست از:

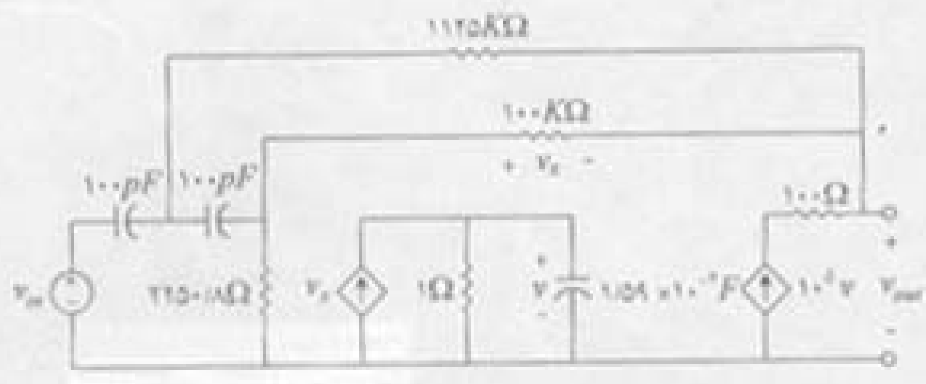
$$Z_L = Z_S^* \rightarrow Z_L = ۱/۵ - j۳/۶$$

ب ـ برای ساخت امپدانس Z_L می توان از یک مدار مقاومت R سری با خازن C استفاده کرد که مقادیر R و C بصورت زیر بدست می آیند.

$$Z_L = R + \frac{۱}{j\omega C} = R - \frac{j}{۳C} = ۱/۵ - j۳/۶ \rightarrow \begin{cases} R = ۱/۵ \\ \frac{۱}{۳C} = ۳/۶ \rightarrow C = ۰/۰۹۲F \end{cases}$$

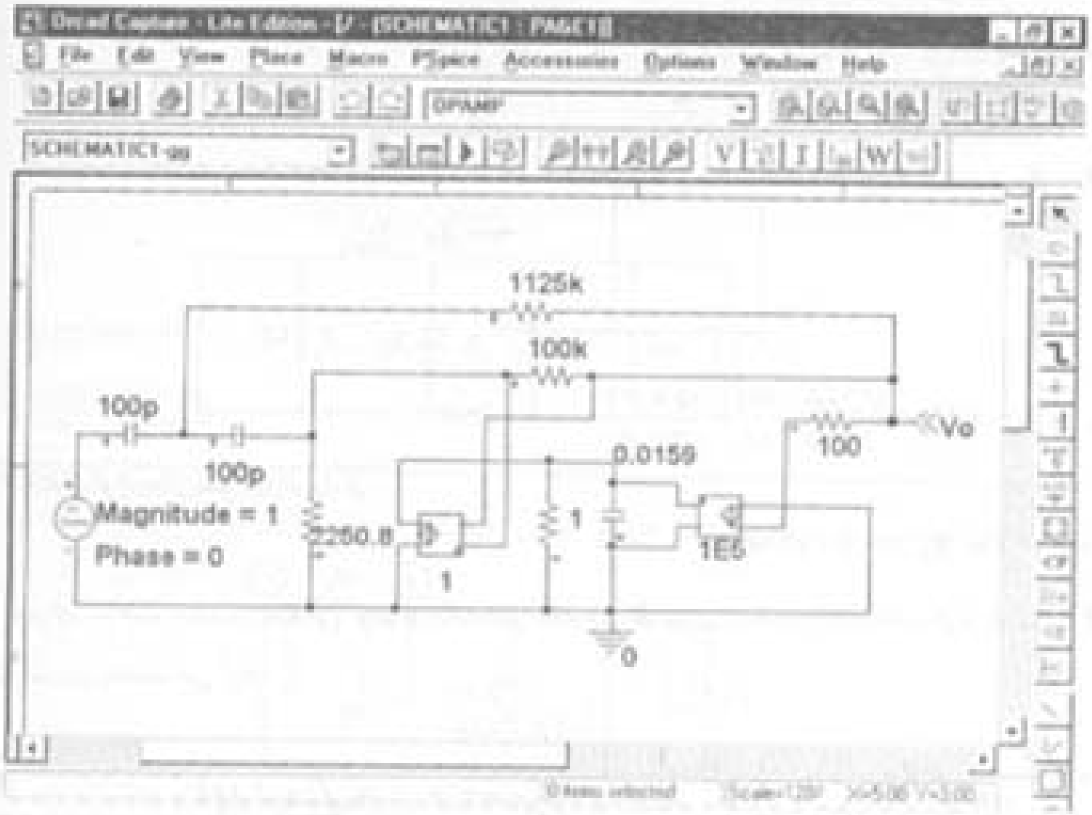
مسئله ۱۲۷

با استفاده از اسپایس $H(j\omega) = \frac{V_{out}}{V_{in}}$ را رسم کرده و رفتار فیلتری مدار را مشخص کنید.

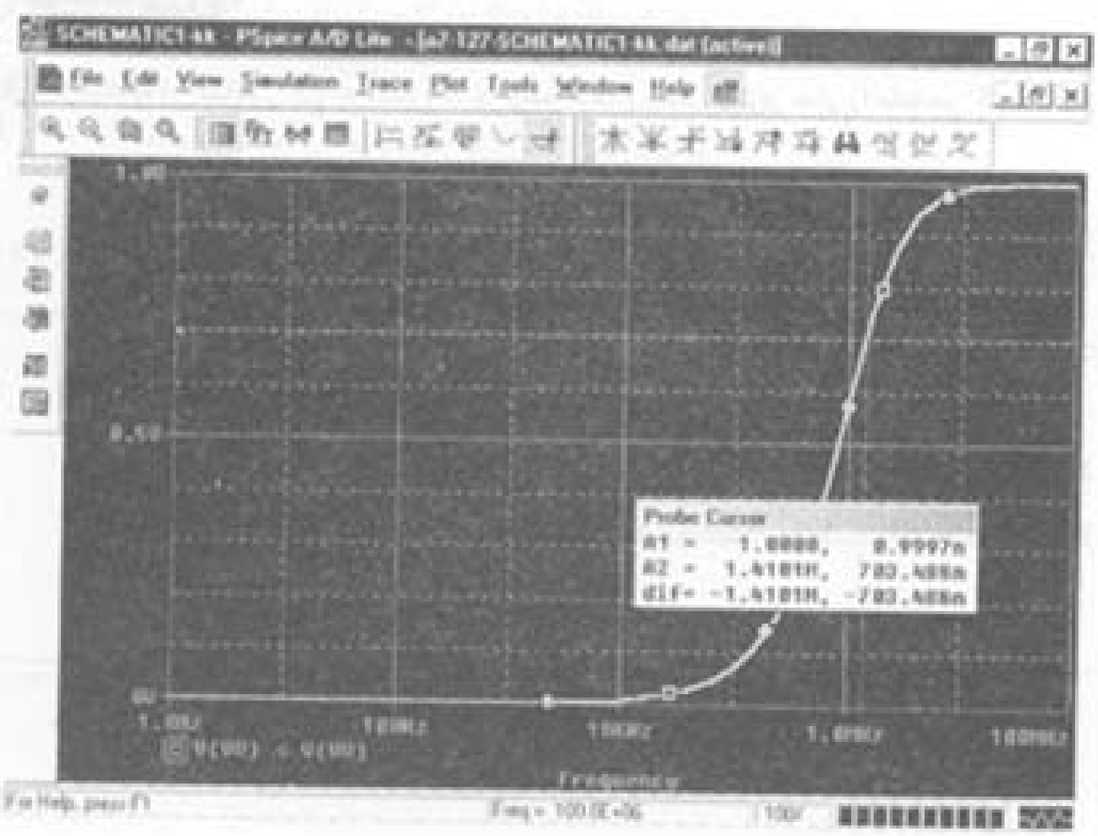


شکل مسئله ۱۲۷

حل: بدین منظور شماتیک زیر را رسم می کنیم که در آن $V_{in} = ۱\angle ۰$ در نظر گرفته شده است.

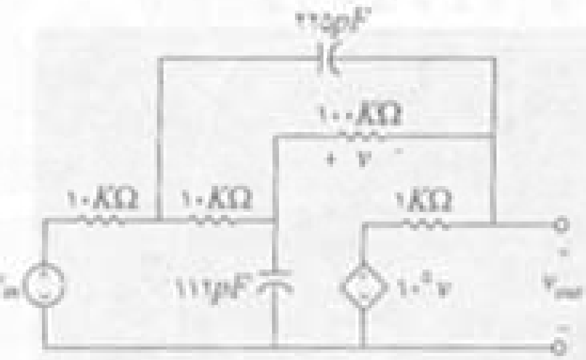


با اجرای شماتیک فوق بصورت *Ac Sweep*، V_{out} که برابر $H(j\omega)$ است بصورت زیر بدست خواهد آمد که یک فیلتر بالاگذر با فرکانس وصل $f_{وصل} = ۱/۴۱\ MHz$ می باشد.



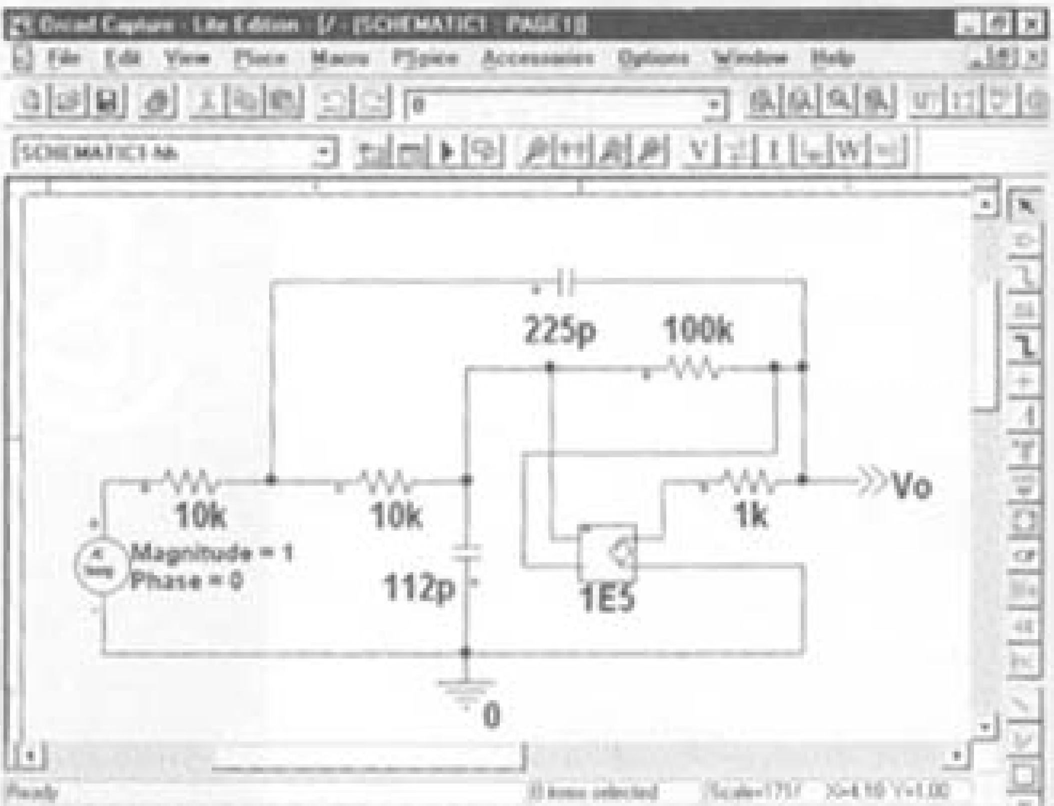
مسئله ۱۲۸

مسئله ۱۲۸ را برای مدار زیر تکرار کنید.

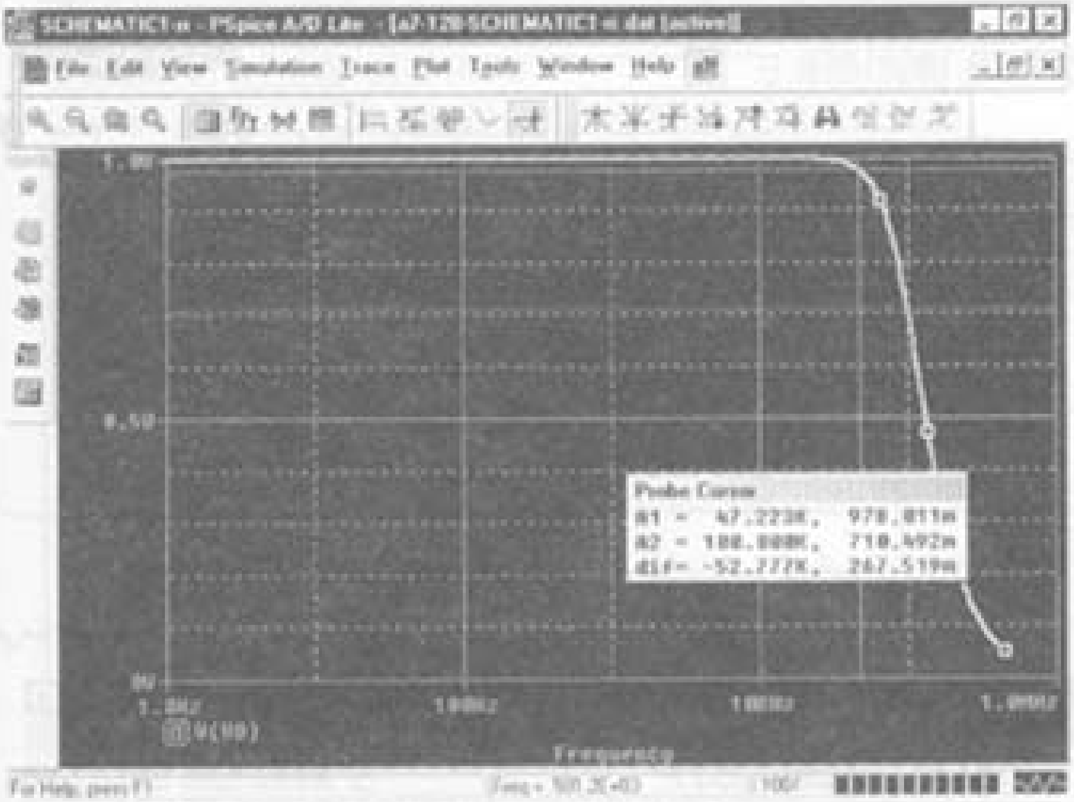


شکل مسئله ۱۲۸

حل: همانند مسئله قبل با فرض $V_{in} = 1\angle 0$ شماتیک زیر را رسم می کنیم. با این کار $H(j\omega) = V_{out}$ خواهد شد.



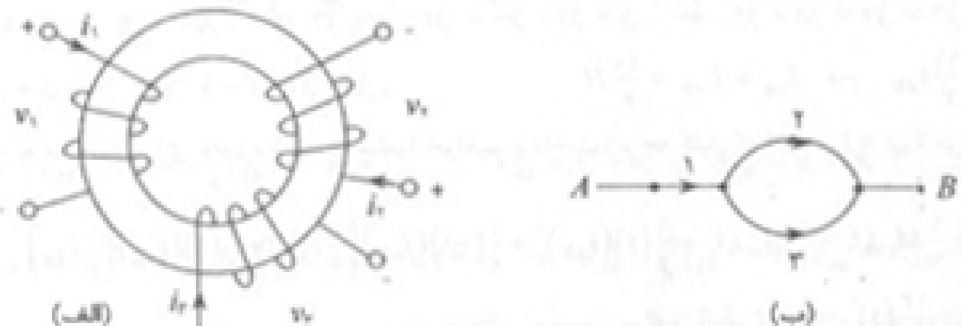
با اجرای شماتیک فوق بصورت **Ac Sweep**، $H(j\omega) = V_{out}$ بصورت زیر بدست می آید که یک فیلتر پایین گذر با فرکانس قطع $100\ KHz$ می باشد.


File Edit View Simulation Trace Plot Tools Window Help
Probe Cursor
A1 = 47.223K, 978.011m
A2 = 100.000K, 710.492m
dif= -52.777K, 267.519m
0.50
Frequency

مسئله ۱

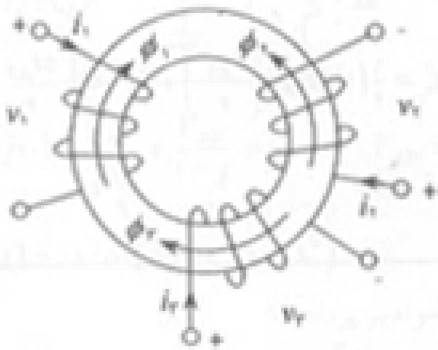
ضریب خود القایی هر سیم پیچ $2H$ و قدر مطلق ضریب خود القایی متقابل $1H$ است. اگر سیم پیچی ها را بصورت شکل (ب) ببندیم L_{AB} را بدست آورید.

اگر $i_1 = 2A$ و $i_2 = 1A$ و $i_3 = 2A$ باشد انرژی ذخیره شده در سیم پیچ ها را بیابید.



شکل مسئله ۱

حل : ابتدا شار گذرنده از هسته را بنابر قانون دست راست تعیین می کنیم.



ϕ_1 و ϕ_3 همجهت و هر دو مخالف جهت ϕ_2 اند بنابراین داریم.

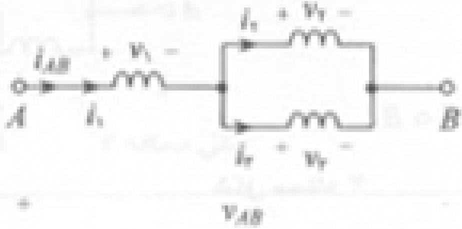
$$M_{13} = M_{31} = 1 \quad , \quad M_{12} = M_{21} = -1 \quad , \quad M_{23} = M_{32} = -1$$

و لذا خواهیم داشت

$$\phi_1 = L_1 i_1 + M_{12} i_2 + M_{13} i_3 = 2i_1 - i_2 + i_3 \quad , \quad \phi_2 = M_{21} i_1 + L_2 i_2 + M_{23} i_3 = -i_1 + 2i_2 - i_3$$

$$\phi_3 = M_{31} i_1 + M_{32} i_2 + L_3 i_3 = i_1 - i_2 + 2i_3$$

شکل (ب) را مجدداً بصورت زیر رسم می کنیم.



بنابراین می توان نوشت.

$$\begin{cases} v_۱ = v_۲ \rightarrow \phi_۱ = \phi_۲ \rightarrow -i_۱ + ۲i_۲ - i_۳ = i_۱ - i_۲ + ۲i_۳ \rightarrow ۳i_۲ - ۳i_۳ = ۲i_۱ = ۲i_{AB} \\ i_۲ + i_۳ = i_۱ = i_{AB} \end{cases}$$

$$\rightarrow i_۲ = \frac{۵}{۶} i_{AB} \ , \ i_۳ = \frac{۱}{۶} i_{AB} \ , \ v_{AB} = v_۱ + v_۲$$

$$\rightarrow Q_{AB} = \phi_۱ + \phi_۲ = \left(۲i_۱ - i_۲ + i_۳\right) + \left(-i_۱ + ۲i_۲ - i_۳\right) = i_۱ + i_۲ = i_{AB} + \frac{۵}{۶} i_{AB}$$

$$\rightarrow Q_{AB} = \frac{۱۱}{۶} i_{AB} \rightarrow L_{eq} = L_{AB} = \frac{۱۱}{۶} H$$

در ادامه به محاسبه انرژی ذخیره شده در سلفها خواهیم پرداخت.(توجه کنید که $i_{AB} = i_۱ = ۲A$ می باشد.)

$$E_۱ = \frac{۱}{۲} L_۱ i_۱^۲ + \frac{۱}{۲} M_{۱۲} i_۱ i_۲ + \frac{۱}{۲} M_{۱۳} i_۱ i_۳ = \frac{۱}{۲}(۲)(i_{AB})^۲ + \frac{۱}{۲}(-۱)(i_{AB})\left(\frac{۵}{۶} i_{AB}\right) + \frac{۱}{۲}(۱)(i_{AB})\left(\frac{۱}{۶} i_{AB}\right)$$

$$= \frac{۱۳}{۱۲} i_{AB}^۲ = \frac{۱۳}{۱۲}(۲)^۲ = ۴/۳۳ \ J$$

$$E_۲ = \frac{۱}{۲} M_{۲۱} i_۱ i_۲ + \frac{۱}{۲} L_۲ i_۲^۲ + \frac{۱}{۲} M_{۲۳} i_۲ i_۳ = \frac{۱}{۲}(-۱)(i_{AB})\left(\frac{۵}{۶} i_{AB}\right) + \frac{۱}{۲}(۲)\left(\frac{۵}{۶} i_{AB}\right)^۲ + \frac{۱}{۲}(-۱)\left(\frac{۵}{۶} i_{AB}\right)\left(\frac{۱}{۶} i_{AB}\right)$$

$$= \frac{۱۵}{۷۲} i_{AB}^۲ = \frac{۱۵}{۷۲}(۲)^۲ = ۰/۸۳ \ J$$

$$E_۳ = \frac{۱}{۲} M_{۳۱} i_۱ i_۳ + \frac{۱}{۲} M_{۳۲} i_۲ i_۳ + \frac{۱}{۲} L_۳ i_۳^۲ = \frac{۱}{۲}(۱)(i_{AB})\left(\frac{i_{AB}}{۶}\right) + \frac{۱}{۲}(-۱)\left(\frac{۵i_{AB}}{۶}\right)\left(\frac{i_{AB}}{۶}\right) + \frac{۱}{۲}(۲)\left(\frac{i_{AB}}{۶}\right)^۲$$

$$= \frac{۱۹}{۷۲}\left(i_{AB}\right)^۲ = \frac{۱۹}{۷۲}(۲)^۲ = ۱/۹۵ \ J$$

مسئله ۲

ماتریس اندوکتانس سه سیم پیچی تزویج شده بصورت $L = \begin{bmatrix} ۳ & ۱ & -۲ \\ ۱ & ۲ & -۱ \\ -۲ & -۱ & ۲ \end{bmatrix}$ است.

الف ـ ؟ = L_{AB}

ب ـ دو مدار را از سرهای A و B به هم وصل می کنیم v_{AB} و جریان گذرنده از هر سیم پیچ را حساب کنید.

شکل مسئله ۲

حل : الف ــ با توجه به رابطه $\phi_i = L\, i_i$ داریم.

$$\begin{bmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \phi_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 1 & -2\\ 1 & 2 & -1\\ -2 & -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_1\\ i_2\\ i_3\end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases}\phi_1 = 3i_1 + i_2 - 2i_3\\ \phi_2 = i_1 + 2i_2 - i_3\\ \phi_3 = -2i_1 - i_2 + 2i_3\end{cases}$$

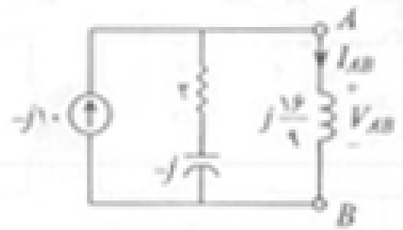
با توجه به شکل (ب) داریم.

$$\begin{cases} v_1 = -v_2 \rightarrow \phi_1 = -\phi_2 \rightarrow 3i_1 + i_2 - 2i_3 = -i_1 - 2i_2 + i_3 \rightarrow 4i_1 + 5i_2 = 3i_3 = 3i_{AB}\\ -i_1 + i_2 + i_3 = 0 \rightarrow i_1 - i_2 = i_3 = i_{AB}\end{cases}$$

$$\rightarrow\ i_1 = \frac{8}{9} i_{AB}\ ,\ i_2 = -\frac{1}{9} i_{AB}\ ,\ i_3 = i_{AB}\ ,\ v_{AB} = v_1 + v_3\ ,\ \phi_{AB} = \phi_1 + \phi_3$$

$$\rightarrow\ \phi_{AB} = \left(3i_1 - i_2 - 2i_3\right) + \left(-2i_1 - i_2 + 2i_3\right) = i_1 \rightarrow \phi_{AB} = \frac{8}{9} i_{AB} \rightarrow L_{eq} = L_{AB} = \frac{8}{9} H$$

پ ــ با اتصال دو مدار و با فرض حالت دایمی سینوسی داریم.



KCL برای گره A $\rightarrow\ -(-j10) + \dfrac{V_{AB}}{j\frac{16}{9}} + \dfrac{V_{AB}}{2-j} = 0 \rightarrow V_{AB} = 18.52\angle -37.8^\circ$

$$\rightarrow\ v_{AB}(t) = 18.52\left(\cos 2t - 37.8^\circ\right)$$

در ادامه به محاسبه جریان سلف ها خواهیم پرداخت:

$$I_3 = I_{AB} = \frac{V_{AB}}{j\frac{16}{9}} = \frac{18.52\angle -37.8^\circ}{\frac{16}{9}\angle 90^\circ} = 10.42\angle -127.8^\circ \rightarrow i_3(t) = 10.42\cos\left(2t - 127.8^\circ\right)$$

$$I_1 = \frac{8}{9} I_{AB} = 9.26\angle -127.8^\circ \rightarrow i_1(t) = 9.26\cos\left(2t - 127.8^\circ\right)$$

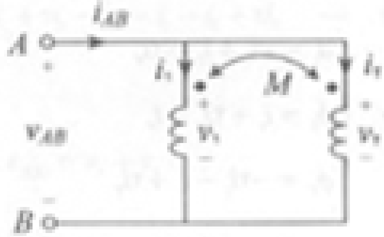
$$I_2 = -\frac{1}{9} I_{AB} = -1.16\angle -127.8^\circ \rightarrow i_2(t) = -1.16\cos\left(2t - 127.8^\circ\right)$$

مسئله ۳

$L_{AB} = ?$

شکل مسئله ۳

حل : شکل مسئله را مجدداً بصورت زیر رسم می کنیم.



از آنجا که جریان هر دو سلف از سر نقطه دار وارد شده لذا اندوکتانس متقابل مثبت خواهد بود.

$$v_1 = v_2 \;\rightarrow\; \phi_1 = \phi_2 \;\rightarrow\; L_1 i_1 + M i_2 = M i_1 + L_2 i_2 \;\rightarrow\; i_1 = \frac{L_2 - M}{L_1 - M} i_2$$

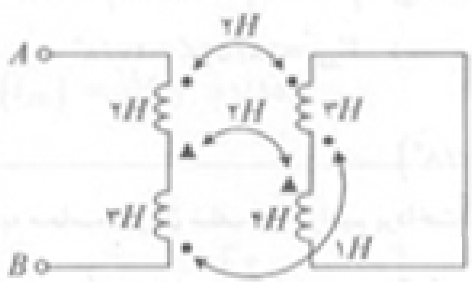
$$i_{AB} = i_1 + i_2 = \frac{L_2 - M}{L_1 - M} i_2 + i_2 = \frac{L_1 + L_2 - 2M}{L_1 - M} i_2$$

$$v_{AB} = v_1 \;\rightarrow\; \phi_{AB} = \phi_1 = L_1 i_1 + M i_2 = L_1 \frac{L_2 - M}{L_1 - M} i_2 + M i_2 = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 - M} i_2$$

$$\rightarrow\; L_{AB} = \frac{\phi_{AB}}{i_{AB}} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M}$$

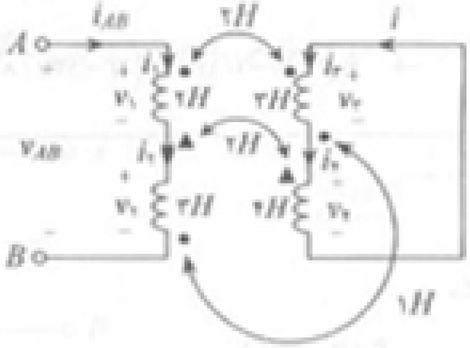
مسئله ۴

$L_{AB} = ?$



شکل مسئله ٤

حل : شکل مسئله را مجدداً بصورت زیر رسم می کنیم.



با توجه به شکل فوق به راحتی می توان نوشت.

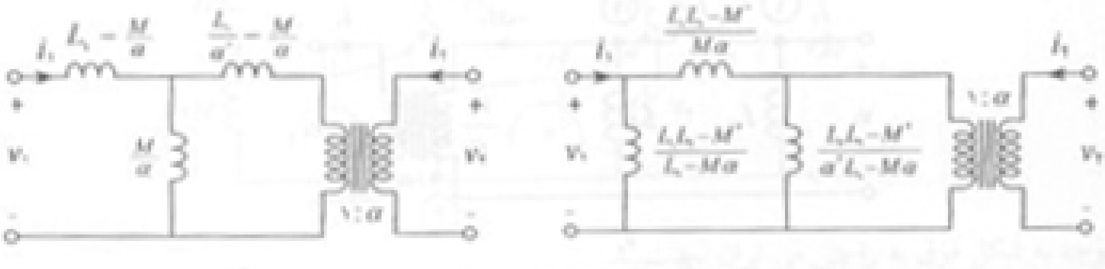
$$\begin{cases} \phi_1 = 2i_1 + 2i_2 - 2i_3 = 2i_{AB} \\ \phi_2 = 3i_1 + i_3 = 3i_{AB} + i \\ \phi_3 = 3i_1 + i_2 + 3i_3 = 3i_{AB} + 3i \\ \phi_4 = -2i_1 + 4i_3 = -2i_{AB} + 4i \end{cases}$$

$$v_3 + v_4 = 0 \rightarrow \phi_3 + \phi_4 = 0 \rightarrow 3i_{AB} + 3i - 2i_{AB} + 4i = 0 \rightarrow i = -\frac{i_{AB}}{7}$$

$$v_{AB} = v_1 + v_2 \rightarrow \phi_{AB} = \phi_1 + \phi_2 = 2i_{AB} + 3i_{AB} + i = 2i_{AB} + 3i_{AB} - \frac{i_{AB}}{7} = \frac{34}{7} i_{AB} \rightarrow L_{AB} = \frac{34}{7} H$$

مسئله ۵

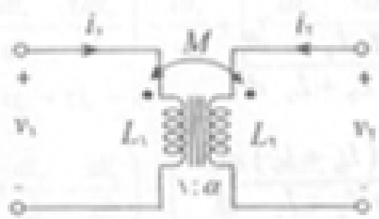
نشان دهید که دوقطبی های (الف) و (ب) می توانند به جای مدار معادل یک جفت سلف تزویج شده با اندوکتانسهای L_1 ، L_2 و M بکار روند.



(الف) (ب)

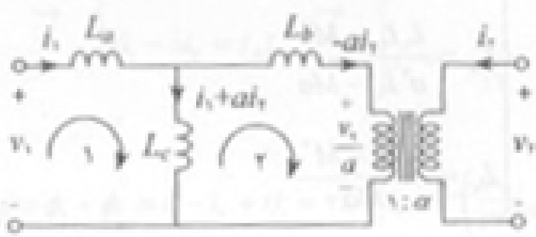
شکل مسئله ۵

حل : الف ـ سلفهای تزویج شده مورد نظر بصورت زیر خواهند بود که دستگاه معادله(I) رفتار مدار را توصیف می کند.



$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \quad , \quad v_2 = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \qquad (1)$$

مدار قسمت (الف) را مجدداً بصورت زیر رسم می کنیم.

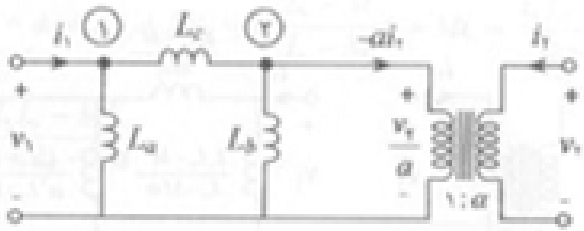


$$\begin{cases} KVL\ \text{برای مش۱} \rightarrow -v_1 + L_a \dfrac{di_1}{dt} + L_c \dfrac{d(i_1 + ai_2)}{dt} = 0 \rightarrow v_1 = (L_a + L_c)\dfrac{di_1}{dt} + (aL_c)\dfrac{di_2}{dt} \\ KVL\ \text{برای مش۲} \rightarrow -L_c \dfrac{d(i_1 + ai_2)}{dt} + L_b \dfrac{d(-ai_2)}{dt} + \dfrac{v_2}{a} = 0 \rightarrow v_2 = aL_c \dfrac{di_1}{dt} + a^2 (L_c + L_b)\dfrac{di_2}{dt} \end{cases}$$

با مقایسه دستگاه بدست آمده با دستگاه(I) داریم.

$$\begin{cases} L_a + L_c = L_1 \\ aL_c = M \\ a^2(L_c + L_a) = L_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} L_a = L_1 - \dfrac{M}{a} \\ L_b = \dfrac{L_2}{a^2} - \dfrac{M}{a} \\ L_c = \dfrac{M}{a} \end{cases}$$

ب ـ مدار قسمت (ب) را مجدداً بصورت زیر رسم می کنیم.



$$\begin{cases} KCL\ \text{برای گره} ① \rightarrow -i_1 + \dfrac{v_1}{L_a} + \dfrac{v_1 - \dfrac{v_2}{a}}{L_c} = 0 \rightarrow a(L_a + L_c)v_1 - L_b v_2 = aL_a L_c i_1 \\ KCL\ \text{برای گره} ② \rightarrow \dfrac{\dfrac{v_2}{a} - v_1}{L_c} + \dfrac{\dfrac{v_2}{a}}{L_b} - ai_2 = 0 \rightarrow -aL_b v_1 + (L_a + L_c)v_2 = a^2 L_b L_c i_2 \end{cases}$$

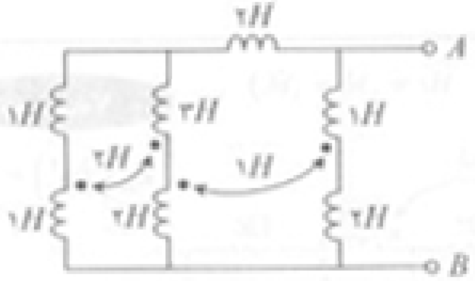
$$\rightarrow \begin{cases} v_1 = \dfrac{L_a(L_b + L_c)}{L_a + L_b + L_c}\dfrac{di_1}{dt} + \dfrac{aL_a L_b}{L_a + L_b + L_c}\dfrac{di_2}{dt} \\ v_2 = \dfrac{L_a L_b}{L_a + L_b + L_c}\dfrac{di_1}{dt} + \dfrac{a^2 L_b(L_a + L_c)}{L_a + L_b + L_c}\dfrac{di_2}{dt} \end{cases}$$

با مقایسه دستگاه بدست آمده با دستگاه(I) داریم.

$$\begin{cases} \dfrac{L_a(L_b + L_c)}{L_a + L_b + L_c} = L_1 \\ \dfrac{aL_a L_b}{L_a + L_b + L_c} = M \\ \dfrac{a^2 L_b(L_a + L_c)}{L_a + L_b + L_c} = L_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} L_a = \dfrac{L_1 L_2 - M^2}{L_2 - Ma} \\ L_b = \dfrac{L_1 L_2 - M^2}{a^2 L_1 - Ma} \\ L_c = \dfrac{L_1 L_2 - M^2}{Ma} \end{cases}$$

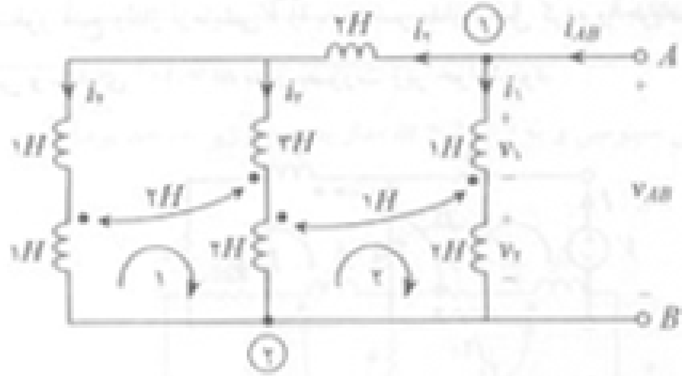
مسئله ۶

$L_{AB} = ?$



شکل مسئله ۶

حل : شکل مسئله را مجدداً بصورت زیر رسم می کنیم.



با توجه به شکل فوق به راحتی می توان نوشت.

KCL برای گره ۱ $\rightarrow \quad i_1 + i_4 = i_{AB}$

KCL برای گره ۲ $\rightarrow \quad i_1 + i_2 + i_3 = 0$

KVL برای مش ۱ $\rightarrow \quad -\left(\frac{di_3}{dt} - \frac{2di_2}{dt}\right) - \frac{di_3}{dt} + \left(3\frac{di_2}{dt} - \frac{2di_3}{dt}\right) + \left(2\frac{di_1}{dt} - \frac{di_2}{dt}\right) = 0$

$\rightarrow \quad i_1 - 7i_2 + 4i_3 = 0$

KVL برای مش ۲ $\rightarrow \quad -\left(2\frac{di_2}{dt} - \frac{di_3}{dt}\right) - \left(3\frac{di_2}{dt} - \frac{2di_3}{dt}\right) - 2\frac{di_1}{dt} + \left(\frac{di_1}{dt} - \frac{di_2}{dt}\right) + 2\frac{di_1}{dt} = 0$

$\rightarrow \quad 4i_1 - 2i_3 - 6i_2 + 2i_3 = 0$

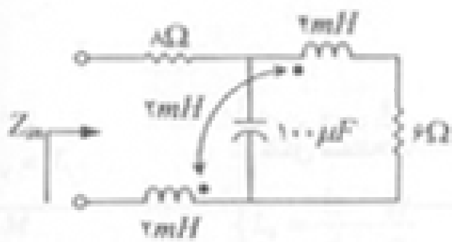
$$\begin{cases} i_1 + i_4 = i_{AB} \\ i_1 + i_2 + i_3 = 0 \\ i_1 - 7i_2 + 4i_3 = 0 \\ 4i_1 - 2i_3 - 6i_2 + 2i_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3i_1 + 11i_2 = 0 \\ 3i_1 - 8i_2 = i_{AB} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} i_1 = \frac{11}{36} i_{AB} \\ i_2 = -\frac{i_{AB}}{12} \end{cases}$$

$$v_{AB} = v_1 + v_2 \rightarrow \phi_{AB} = \phi_1 + \phi_2 = i_1 - i_2 + 2i_1 = 3i_1 - i_2 = 3\left(\frac{11}{36} i_{AB}\right) + \frac{i_{AB}}{12} = i_{AB}$$

$\rightarrow L_{AB} = \frac{\phi_{AB}}{i_{AB}} = ۱H$

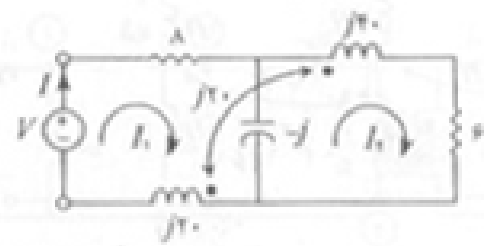
مسئله ۷

$Z_{in}(j۱۰^۴) = ?$



شکل مسئله ۷

حل : بدین منظور منبع ولتاژ آزمایشی V را به دو سر مدار وصل کرده و جریان آن را بدست می آوریم. در حالت دایمی سینوسی و به ازای $\omega = ۱۰^۴$ مدار بصورت زیر خواهد بود.



از آنجا که جریان هردو سیم پیچ یعنی I_1 و I_2 از سر نقطه دار وارد می شوند لذا علامت ضریب القایی متقابل را مثبت منظور می کنیم.

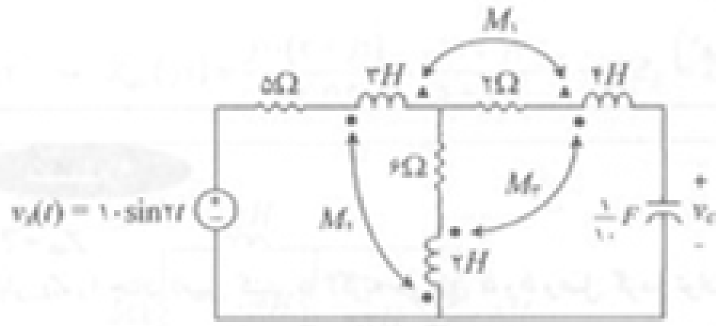
KVL برای مش ۲ $\rightarrow (j۴۰I_2 + j۲۰I_1) + ۶I_2 - j(I_2 - I_1) = ۰ \rightarrow j۲۱I_1 + (۶ + j۳۹)I_2 = ۰$

KVL برای مش ۱ $\rightarrow -v + ۸I_1 - j(I_1 - I_2) + (j۲۰I_1 + j۲۰I_2) = ۰ \rightarrow (۸ + j۱۹)I_1 + j۲۱I_2 = v$

$$\rightarrow I = \frac{\begin{vmatrix} ۰ & ۶ + j۳۹ \\ v & j۲۱ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} j۲۱ & ۶ + j۳۹ \\ ۸ + j۱۹ & j۲۱ \end{vmatrix}} = \frac{(-۶ - j۳۹)v}{۱۱۳ - j۴۲۶} \rightarrow Z_{in} = \frac{V}{I} = \frac{۱۱۳ - j۴۲۶}{-۶ - j۳۹} = ۵/۵ + j۳۵/۳$$

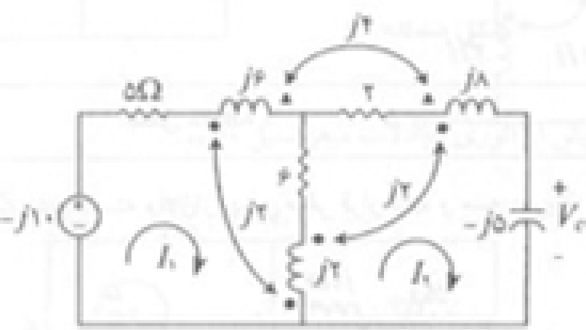
مسئله ۸

v_c را در حالت دایمی بدست آورید. ($M_1 = M_2 = 1H$ ، $M_3 = 2H$)



شکل مسئله ۸

حل : در حالت دایمی سینوسی و به ازای $\omega = 2$ مدار بصورت زیر خواهد بود.



$$\begin{cases} KVL \text{ برای مش ۱} \rightarrow -(-j10)+5I_1+\left[j6I_1 - j2(I_1-I_2) - j4I_2\right]+6(I_1-I_2) \\ \qquad +\left[j2(I_1-I_2) - j2I_1 + j2I_2\right] = 0 \\ KVL \text{ برای مش ۲} \rightarrow \left[j2(I_2-I_1) + j2I_1 - j2I_2\right] + 6(I_2-I_1) + 2I_2 \\ \qquad +\left[j8I_2 - j4I_1 + j2(I_2-I_1)\right] - j5I_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (11+j4)I_1 + (-6-j2)I_2 = -j10 \\ (6+j2)I_1 - (8+j)I_2 = 0 \end{cases} \rightarrow I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 11+j4 & -j10 \\ 6+j2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 11+j4 & -6-j2 \\ 6+j2 & -(8+j) \end{vmatrix}} = \frac{j10(6+j2)}{-52-19j}$$

$$=\frac{(10\angle 90)(6/32\angle 18/3^{\circ})}{(55/4\angle 159/9^{\circ})}=1/09\angle -51/8^{\circ}$$

$$\rightarrow\ V_c=-j5I_2=(5\angle -90^{\circ})(1/09\angle -51/8^{\circ})=5/45\angle -141/8$$

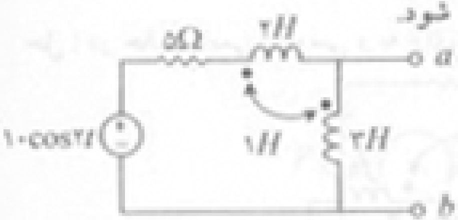
$$\rightarrow\ v_c(t)=5/45\cos(2t-141/8^{\circ})$$

مسئله ۹

$Z_{ab}=?$

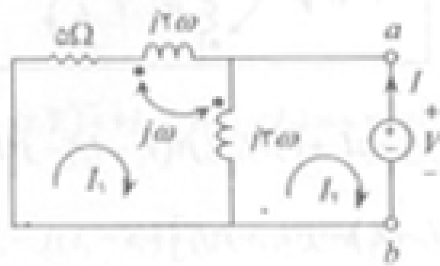
بار Z_L را چنان تعیین کنید که اگر به سرهای a و b وصل گردد توان متوسط حداکثر به آن انتقال داده شود.

چند درصد از توان تولید شده به بار Z_L تحویل داده می شود.



شکل مسئله ۹

حل : برای محاسبه Z_{ab} منبع ثابت ولتاژ را برابر صفر قرار داده و منبع جریان آزمایشی I را به دو سر a و b وصل می کنیم.



برای مش ۲ $KVL \rightarrow 5I_1+j2\omega I_1+j\omega(I_1-I_2)+j3\omega(I_1-I_2)+j\omega I_1=0$

$\rightarrow (5+j7\omega)I_1-j4\omega I_2=0$

برای مش ۱ $KVL \rightarrow j3\omega(I_2-I_1)-j\omega I_1+V=0 \rightarrow j4\omega I_1-j3\omega I_2=V$

$$\rightarrow\ I=-I_2=\frac{\begin{vmatrix}5+j7\omega & 0\\ j4\omega & V\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}5+j7\omega & -j4\omega\\ j4\omega & -j3\omega\end{vmatrix}}=\frac{5+j7\omega}{-j3\omega(5+j7\omega)+j4\omega(j4\omega)}V=\frac{5+j7\omega}{5j\omega(3+j\omega)}V$$

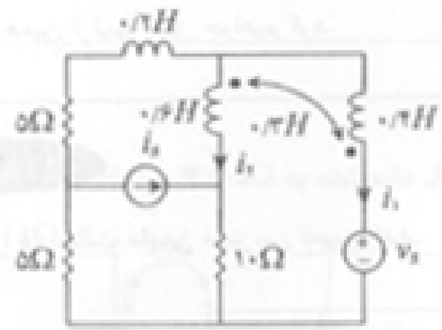
$$\rightarrow\ Z_{ab}(j\omega)=\frac{V}{I}=\frac{5j\omega(2+j\omega)}{5+j7\omega}$$

شرط انتقال توان ماکزیمم به بار Z_L که دردو سر a و b قرار می گیرد $Z_L=\overline{Z}_{ab}(j\omega)$ می باشد که در ادامه به ازای $\omega=2$، Z_L را محاسبه خواهیم کرد.

$$\omega=2\ \rightarrow\ Z_{ab}(j2)=\frac{j10(2+j2)}{5+j14}=\frac{-20+j20}{5+j14}\ \rightarrow\ Z_L=\overline{Z}_{ab}=\frac{-20-j20}{5-j14}=\frac{380-j230}{221}$$

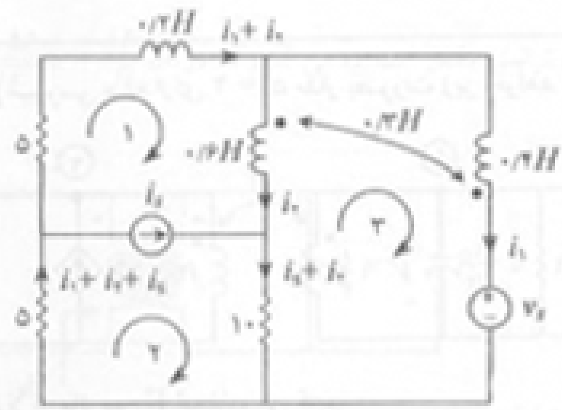
مسئله ۱۰

$i_1(t), i_2(t)=?$



شکل مسئله ۱۰

حل : با استفاده از نمایش اپراتوری معادلات دیفرانسیل داریم.



$$\begin{cases} KVL \text{ برای حلقه شامل مشهای ۱و۲ } \rightarrow 5(i_1+i_2+i_g)+5(i_1+i_2)+0/2D(i_1+i_2) \\ \qquad +(0/6Di_1-0/3Di_2)+10(i_1+i_g)=0 \\ KVL \text{ برای مش ۳ } \rightarrow -10(i_g+i_1)-(0/6Di_1-0/3Di_2)+(0/9Di_2-0/3Di_1)+v_g=0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} (10-0/1D)i_1+(20+0/8D)i_2=-15i_g \\ 0/7Di_1+(-10-0/9D)i_2=10i_g-v_g \end{cases}$$

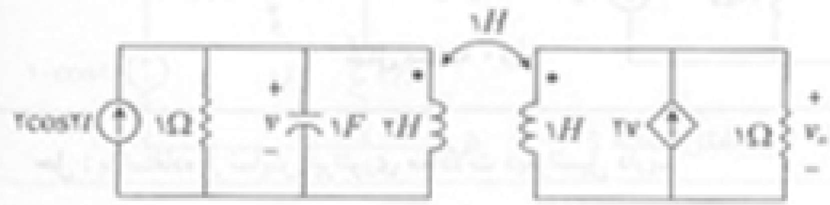
$$\rightarrow\ i_1 = \frac{\begin{vmatrix} -15 i_s & 20+0.8D \\ 10 i_s - v_s & -10-0.9D \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 10-0.1D & 20+0.8D \\ 0.7 & -10-0.9D \end{vmatrix}} = \frac{(-50+6.5D)i_s + (20+0.8D)v_s}{0.09D^2 - 8.56D - 101.4}$$

$$0.09\frac{d^2 i_1}{dt^2} - 8.56\frac{di_1}{dt} - 101.4 i_1 = 6.5\frac{di_s}{dt} - 50 i_s + 0.8\frac{dv_s}{dt} + 20 v_s$$

بنابراین با داشتن i_s و v_s با حل معادله دیفرانسیل می توان $i_1(t)$ را بدست آورد. برای محاسبه $i_2(t)$ با استفاده از دستگاه فوق به همین ترتیب عمل خواهیم کرد.

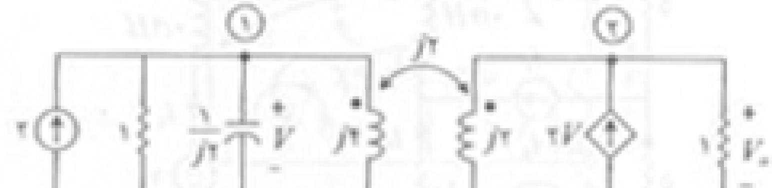
مسئله ۱۱

$v_o(t)$ را در حالت دایمی سینوسی تعیین کنید.



شکل مسئله ۱۱

حل : در حالت دایمی سینوسی و به ازای $\omega = 2$ مدار بصورت زیر خواهد بود.



در تجزیه و تحلیل گره معمولاً از ماتریس Γ استفاده می کنیم.

$$L_1 = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \Gamma = L^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

با استفاده از ماتریس Γ به نوشتن معادلات KVL مبادرت می ورزیم.

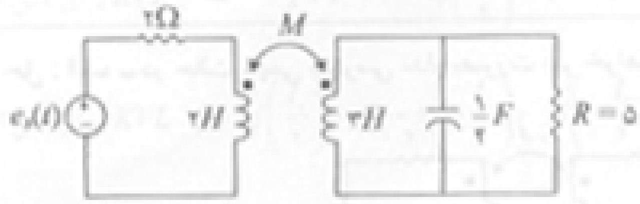
$$\begin{cases} KCL \text{ برای گره } ① \rightarrow -2 + \frac{V}{1} + \frac{V}{\frac{1}{j2}} + \left(\frac{1}{j2}V - \frac{1}{2j}V_o\right) = 0 \rightarrow \left(1 + j\frac{3}{2}\right)V + \frac{j}{2}V_o = 2 \\ KCL \text{ برای گره } ② \rightarrow \frac{V_o}{1} - 2V + \left(-\frac{1}{j2}V + \frac{1}{j}V_o\right) = 0 \rightarrow \left(-2 + \frac{j}{2}\right)V + (1-j)V_o = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow\ V_o=\frac{\begin{vmatrix}1+j & 2\\ -2+\frac{j}{2} & 0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1+j\frac{3}{2} & \frac{j}{2}\\ -2+\frac{j}{2} & 1-j\end{vmatrix}}=\frac{4-j}{2/75+j3}=\frac{4/12\angle-14^\circ}{4/07\angle 47/5}$$

$$\rightarrow\ V_o=1/01\angle-61/5^\circ\ \rightarrow\ v_o(t)=1/01\cos\left(2t-61/5^\circ\right)$$

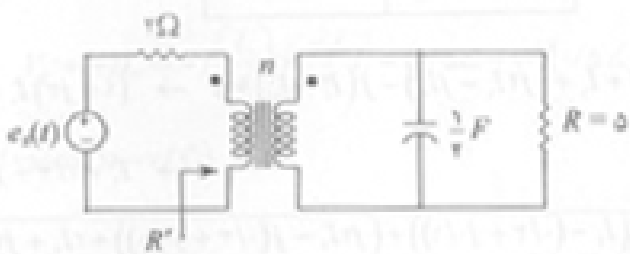
مسئله ۱۲

M را چنان تعیین کنید که توان متوسط انتقال داده شده به $R=5\Omega$ در $\omega=2$ حداکثر باشد.



شکل مسئله ۱۲

حل : از مدار معادل ترانس تکفاز استفاده می کنیم که در آن $n=\frac{M}{\sqrt{L_1L_2}}=\frac{M}{\sqrt{6}}$ می باشد.



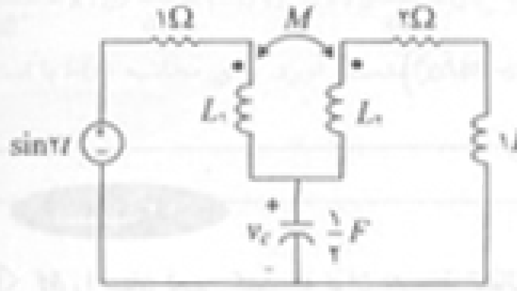
شرط انتقال توان ماکزیمم عبارتست از:

$$R_s=R'\ \rightarrow\ 2=n^2 5\ \rightarrow\ \left(\frac{M}{\sqrt{6}}\right)^2=\frac{2}{5}\ \rightarrow\ M=1/9$$

مسئله ۱۳

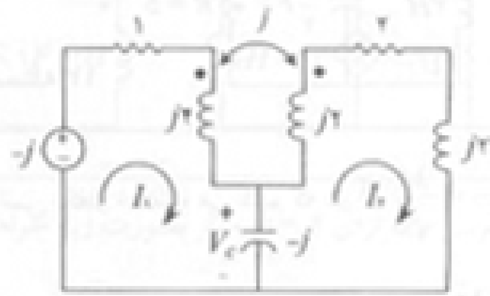
الف ـ v_c را در حالت دایمی سینوسی بدست آورید. ($M=\frac{1}{2}H$, $L_2 = 1H$, $L_1 = 2H$)

ب ـ اگر L_1 و L_2 یک ترانسفورماتور ایده آل با $\frac{n_1}{n_2}=\frac{1}{2}$ را تشکیل دهند، v_c را حساب کنید.



شکل مسئله ۱۳

حل : الف ـ در حالت دایمی سینوسی مدار بصورت زیر خواهد بود.



برای مش۱ $KVL \rightarrow -j + I_1 + (j4I_1 - jI_2) - j(I_1 - I_2) = 0 \rightarrow (1+j3)I_1 = j$

$\rightarrow I_1 = 0/3 + j0/1$

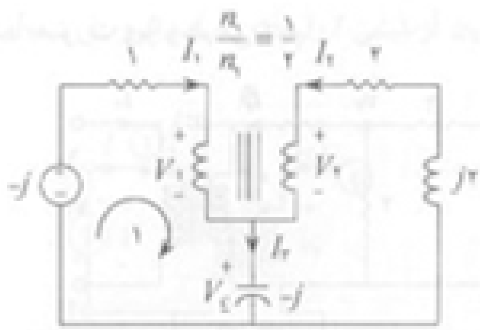
برای مش۲ $KVL \rightarrow -j(I_2 - (0/3 + j0/1)) + (j2I_2 - j(0/3 + j0/1)) + 2I_2 + j2I_2 = 0$

$\rightarrow I_2 = 0$

$\rightarrow V_c = -j(I_1 - I_2) = -j(0/3 + j0/1) = 0/1 - j0/3 = 0/32\angle -71/6^\circ$

$\rightarrow v_c(t) = 0/32\cos(2t - 71/6^\circ)$

ب ـ در این صورت مدار به شکل زیر خواهد بود.



$$\frac{I_2}{I_1} = -\frac{n_1}{n_2} = -\frac{1}{2} \rightarrow I_2 = -\frac{I_1}{2} \rightarrow I_3 = I_1 + I_2 = I_1 - \frac{I_1}{2} = \frac{I_1}{2}$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{1}{2} \rightarrow V_2 = 2V_1$$

$$\begin{cases} KVL \text{ برای مش ۱} \rightarrow -j + I_1 + V_1 - j\left(\frac{I_1}{2}\right) = 0 \rightarrow (2-j)I_1 + 2V_1 = 2j \\ KVL \text{ برای مش ۲} \rightarrow j\left(\frac{I_1}{2}\right) - 2V_1 - 2\left(-\frac{I_1}{2}\right) - j2\left(-\frac{I_1}{2}\right) = 0 \rightarrow (2+3j)I_1 - 4V_1 = 0 \end{cases}$$

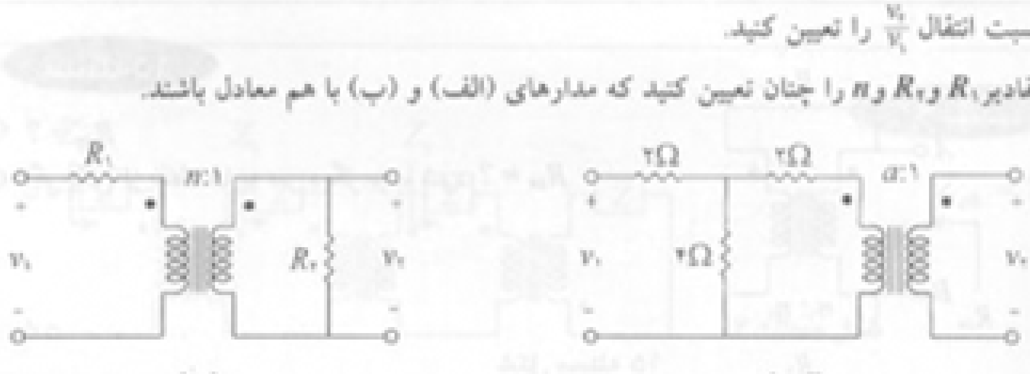
$$\rightarrow I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2j & 2 \\ 0 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2-j & 2 \\ 2+3j & -4 \end{vmatrix}} = \frac{-8j}{-16-2j} = \frac{8\angle -90}{16/12\angle -172/9} = 0/5\angle 82/9^\circ$$

$$I_3 = \frac{I_1}{2} \rightarrow V_c = -jI_3 = -j\left(\frac{I_1}{2}\right) = \frac{-j}{2}I_1 = (0/5\angle -90)(0/5\angle 82/9^\circ) = 0/25\angle -7/1^\circ$$

$$\rightarrow v_c(t) = 0/25\cos(2t - 7/1^\circ)$$

مسئله ۱۴

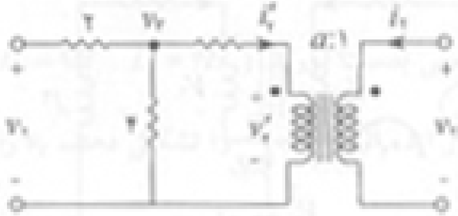
- نسبت انتقال $\frac{V_2}{V_1}$ را تعیین کنید.
- مقادیر R_1 و R_2 و n را چنان تعیین کنید که مدارهای (الف) و (ب) با هم معادل باشند.



(ب) (الف)

شکل مسئله ۱۴

حل : شکل (الف) را مجدداً بصورت زیر رسم می کنیم.



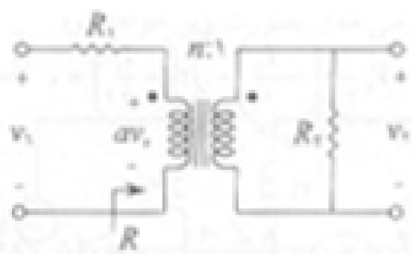
از آنجا که v_2 مدار باز است لذا $i_2 = 0$ بوده و خواهیم داشت.

$$\frac{v_2'}{v_2}=\frac{a}{1} \rightarrow v_2' = a v_2 \,,\quad \frac{i_2'}{i_2}=\frac{-1}{a} \rightarrow i_2' = -\frac{1}{a} i_2 \rightarrow v_3 = v_2' = a v_2$$

و در نهایت بنا بر قاعده تقسیم ولتاژ خواهیم داشت.

$$v_3 = \frac{4}{2+4} v_1 \rightarrow a v_2 = \frac{4}{2+4} v_1 \rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \frac{2}{3a}$$

برای شکل (ب) خواهیم داشت.



با توجه به شکل فوق $R = a^2 R_2$ بوده و بنابر قاعده تقسیم ولتاژ خواهیم داشت.

$$n v_2 = \frac{R}{R_1+R} v_1 = \frac{n^2 R_2}{R_1 + n^2 R_2} v_1 \rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \frac{nR_2}{R_1+n^2R_2}$$

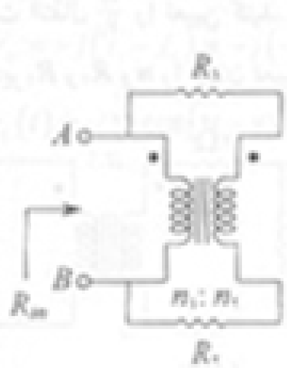
شرط معادل بودن در مدار این است که نسبت $\frac{v_2}{v_1}$ هردو یکی باشد.

$$\frac{nR_2}{R_1+n^2R_2} = \frac{2}{3a} \begin{cases} nR_2 = 2 \rightarrow R_2 = \frac{2}{n} \\ R_1 + n^2R_2 = 3a \end{cases} \rightarrow R_1 + 2n = 3a$$

مسئله ۱۵

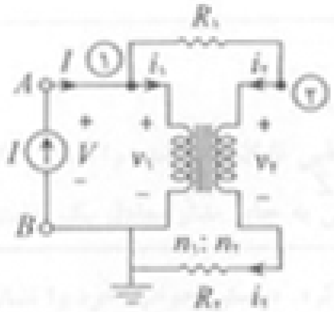
$R_{in} = ?$

اگر یکی از نقطه ها به سر دیگر برده شود.؟ = R_{in}



شکل مسئله ۱۵

حل : بدین منظور منبع جریان آزمایشی I را به دو سر A و B وصل کرده و جریان آن را محاسبه می کنیم.



$$v_1 = V \;\rightarrow\; v_2 = \frac{n_2}{n_1} v_1 = \frac{n_2}{n_1} V$$

KCL برای گره ۱ $\;\rightarrow\; I = i_1 + i_2 \;,\; i_1 = -\frac{n_2}{n_1} i_2 \;\rightarrow\; I = -\frac{n_2}{n_1} i_2 + i_2 \;\rightarrow\; i_2 = \frac{n_1}{n_1 - n_2} I$

KVL برای حلقه سمت راست $\;\rightarrow\; v_1 = R_1 i_2 + v_2 + R_2 i_2$

$$\rightarrow V = R_1\left(\frac{n_1}{n_1 - n_2}\right) I + \frac{n_2}{n_1} V + R_2\left(\frac{n_1}{n_1 - n_2}\right) I$$

$$\rightarrow V - \frac{n_2}{n_1} V = \left(\frac{n_1}{n_1 - n_2}\right)(R_1 + R_2) I \;\rightarrow\; V = \frac{n_1^2}{(n_1 - n_2)^2}(R_1 + R_2) I$$

در نهایت خواهیم داشت.

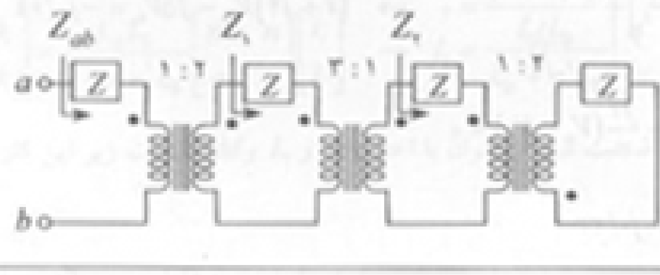
$$\rightarrow R_{in} = \frac{V}{I} = \frac{n_1^2}{(n_1 - n_2)^2}(R_1 + R_2)$$

اگر یکی از نقطه ها به سر دیگر برده شود نسبت تبدیل $\frac{v_2}{v_1} = -\frac{n_2}{n_1}$ و $\frac{i_2}{i_1} = \frac{n_1}{n_2}$ خواهد شد که با جایگذاری متغیر فوق در پروسهٔ حل قبل خواهیم داشت.

$$R_{in} = \frac{n_1^2}{(n_1 + n_2)^2}(R_1 + R_2)$$

مسئله ۱۶

$Z_{ab} = ?$



شکل مسئله ۱۶

حل : بدین منظور امپدانس ها را مرحله به مرحله به طرف ab انتقال می دهیم.

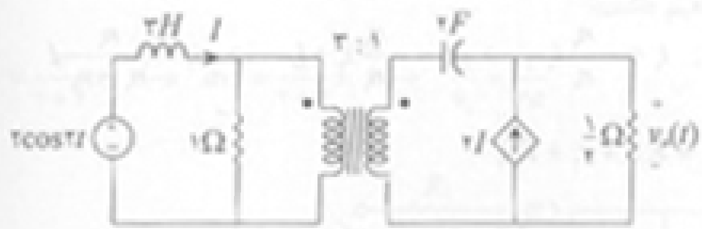
$$Z_1 = Z + \left(\frac{1}{2}\right)^2 Z = \frac{5}{4} Z$$

$$Z_2 = Z + (3)^2 (Z_1) = Z + 9\left(\frac{5}{4} Z\right) = \frac{49}{4} Z$$

$$Z_{ab} = Z + \left(\frac{1}{2}\right)^2 Z_2 = Z + \frac{1}{4}\left(\frac{5}{4} Z\right) = \frac{65}{16} Z$$

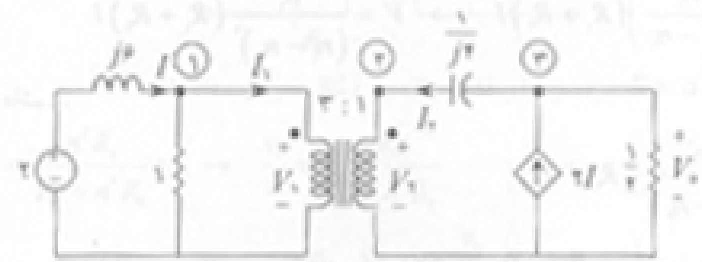
مسئله ۱۷

حالت دایمی سینوسی $v_o(t)$ را بدست آورید.



شکل مسئله ۱۷

حل : در حالت دایمی سینوسی مدار بصورت زیر خواهد بود.



$$V_1 = 3V_2 \quad , \quad I = \frac{2 - V_1}{j6} \rightarrow I = \frac{2 - 3V_2}{j6}$$

$$I_2 = \frac{V_o - V_2}{\frac{1}{j4}} = j4\left(V_o - V_2\right) \quad , \quad I_1 = -\frac{1}{3} I_2 \quad \rightarrow \quad I_1 = -\frac{j4}{3}\left(V_o - V_2\right)$$

KCL برای گره ③ $\rightarrow \dfrac{V_o}{\frac{1}{2}} - 2\left(\dfrac{2 - 3V_2}{j6}\right) + \dfrac{\left(V_o - V_2\right)}{\frac{1}{j4}} = 0 \rightarrow (2 + j4)V_o - j5V_2 = -j0/66$

KCL برای گره ① $\rightarrow \dfrac{3V_2 - 2}{j6} + \dfrac{3V_2}{1} - \dfrac{j4}{3}\left(V_o - V_2\right) = 0$

$$\rightarrow \quad -j1/33V_o + \left(3 + j0/83\right)V_2 = -j0/33$$

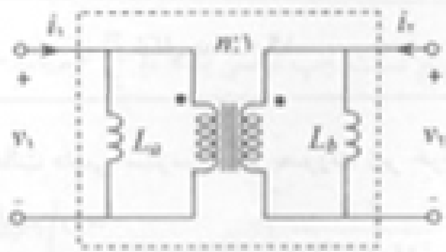
از حل دستگاه دو معادله دو مجهولی فوق داریم.

$$V_o = 0/18 \angle -97/64 \quad \rightarrow \quad v_o(t) = 0/18\cos\left(2t - 97/64^\circ\right)$$

مسئله ۱۸

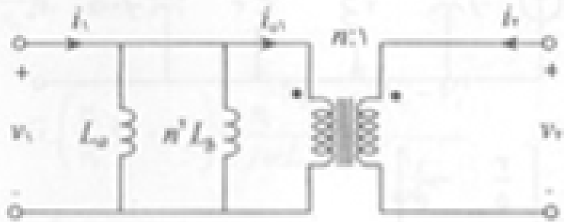
الف ـ ماتریس اندوکتانس دو قطبی نشان داده شده را حساب کنید.

ب ـ آیا می توان از این دو قطبی به جای مدار معادل یک جفت سلف تزویج شده با ماتریس اندوکتانس $\begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix}$ استفاده کرد. درستی جواب خود را نشان دهید.



شکل مسئله ۱۸

حل : الف ـ بدین منظور مطابق شکل زیر L_b را به طرف L_a انتقال می دهیم.



$$\frac{v_1}{v_2} = n \quad \rightarrow \quad v_2 = \frac{v_1}{n} \quad , \quad \frac{i_{o1}}{i_2} = -\frac{1}{n} \quad \rightarrow \quad i_{o1} = -\frac{i_2}{n}$$

$$\phi_1 = \left(L_a \parallel n^2 L_b\right)\left(i_1 - i_{o1}\right) = \frac{n^2 L_a L_b}{L_a + n^2 L_b}\left(i_1 + \frac{i_2}{n}\right) = \frac{L_a L_b}{L_a + n^2 L_b}\left(n^2 i_1 + n i_2\right)$$

$$v_2 = \frac{v_1}{n} \quad \rightarrow \quad \phi_2 = \frac{\phi_1}{n} = \frac{L_a L_b}{L_a + n^2 L_b}\left(n i_1 + i_2\right)$$

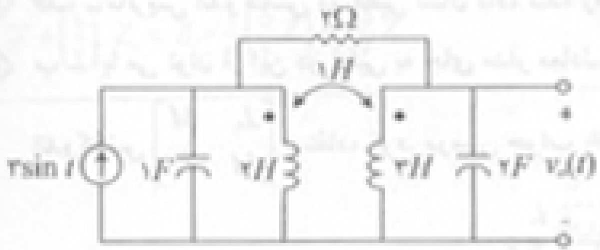
$$\rightarrow \quad \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} = \frac{L_a L_b}{L_a + n^2 L_b}\begin{bmatrix} n^2 & n \\ n & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad L = \frac{L_a L_b}{L_a + n^2 L_b}\begin{bmatrix} n^2 & n \\ n & 1 \end{bmatrix}$$

ب ـ بله- با توجه به L بدست آمده در قسمت قبل می توان با اختیار L_1 و L_2 و M بصورت زیر این کار را انجام داد.

$$L_1 = \frac{n^2 L_a L_b}{L_a + n^2 L_a L_b} \quad , \quad L_2 = \frac{L_a L_b}{L_a + n^2 L_a L_b} \quad , \quad M = \frac{n L_a L_b}{L_a + n^2 L_a L_b}$$

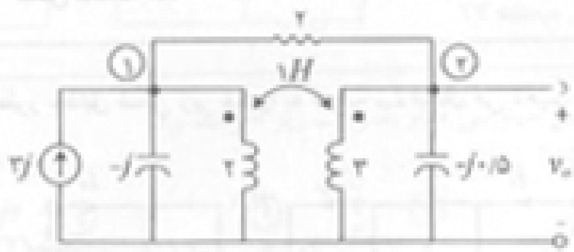
مسئله ۱۹

$v_o(t)$ را در حالت دایمی بدست آورید.



شکل مسئله ۱۹

حل: در حالت دایمی سینوسی مدار بصورت زیر خواهد بود. از تحلیل گره استفاده می کنیم ابتدا ماتریس Γ را بدست خواهیم آورد.



$$L = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \Gamma = L^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

KCL برای گره ① $\rightarrow \quad -3j + \frac{V_1}{-j} + \frac{V_1 - V_2}{2} + \frac{3}{5j}V_1 - \frac{1}{5j}V_2 = 0 \rightarrow (2 - j5)V_1 + (2 + j5) = 30$

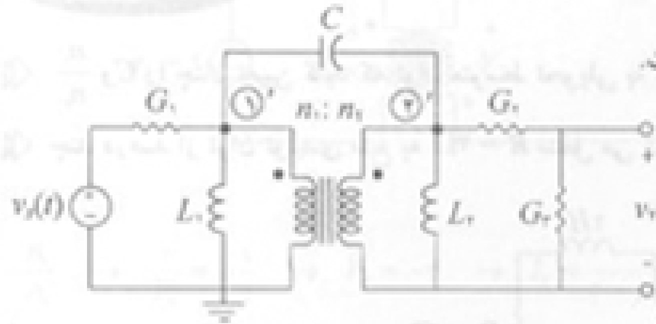
KCL برای گره ② $\rightarrow \quad \frac{V_2}{-j0.5} + \frac{V_2 - V_1}{2} + \left(-\frac{1}{5j}V_1 + \frac{2}{j5}V_2\right) = 0 \rightarrow (-2 + j5)V_1 + (16 - j5)V_2 = 0$

$$\rightarrow V_o = V_2 = \frac{\begin{vmatrix} 30 & 2 - j5 \\ 0 & 2 + j5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 - j5 & 2 + j5 \\ 2 + j5 & 16 - j5 \end{vmatrix}} = \frac{60 + j150}{60 - j120} = 1.204\angle 131.63$$

$$\rightarrow v_o(t) = 1.204\cos(2t + 131.63)$$

مسئله ۲۰

نسبت انتقال $\frac{V_2}{V_s}$ در فرکانس ω چیست.



شکل مسئله ۲۰

حل : با فرض اینکه L ضریب خود القایی سیم پیچ سمت چپ ترانس باشد $\frac{n_2}{n_1}L$ ضریب خودالقایی سیم پیچ سمت راست بوده و خواهیم داشت.

$$L=\begin{bmatrix} L & M \\ M & \frac{n_2}{n_1}L \end{bmatrix} \rightarrow \Gamma = L^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{n_2 L}{n_2 L^2 - n_1 M^2} & \frac{-n_1 M}{n_2 L^2 - n_1 M^2} \\ \frac{-n_1 M}{n_2 L^2 - n_1 M^2} & \frac{n_1 L}{n_2 L^2 - n_1 M^2} \end{bmatrix}$$

$$\frac{V_1'}{V_2'}=\frac{n_1}{n_2} \rightarrow V_1'=\frac{n_1}{n_2}V_2'$$

$$\text{KCL برای گره ۱} \rightarrow G_1\left(\frac{n_1}{n_2}V_2'-V_s\right)+\frac{\frac{n_1}{n_2}V_2'}{j\omega L_1}+\frac{\frac{n_1}{n_2}V_2'-V_2'}{\frac{1}{j\omega C}}$$

$$+\left(\frac{n_2 L}{\left(n_2 L^2-n_1 M^2\right)j}\frac{n_1}{n_2}V_2'-\frac{n_1 M}{\left(n_2 L^2-n_1 M^2\right)j}V_2'\right)=0$$

$$\frac{n_1}{n_2}\left(G_1+\frac{1}{j\omega L_1}+j\omega C\left(1-\frac{n_2}{n_1}\right)+\frac{n_2 L-n_2 M}{\left(n_2 L^2-n_1 M^2\right)j}\right)V_2'=G_1 V_s$$

از طرفی بنابر قاعده تقسیم ولتاژ داریم

$$V_2=\frac{G_2}{G_2+G_3}V_2' \rightarrow V_2'=\left(1+\frac{G_3}{G_2}\right)V_2$$

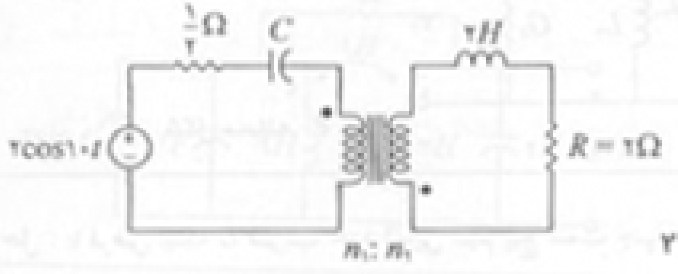
بنابراین خواهیم داشت.

$$\frac{V_2}{V_s}=\frac{G_1}{\frac{n_1}{n_2}\left(1+\frac{G_3}{G_2}\right)\left(G_1+\frac{1}{j\omega L_1}+j\omega c\left(1-\frac{n_2}{n_1}\right)+\frac{n_2\left(L-M\right)}{\left(n_2 L^2-n_1 M^2\right)j}\right)}$$

مسئله ۲۱

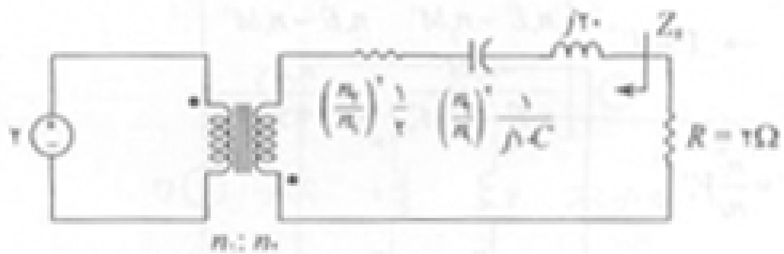
$\frac{n_1}{n_2}$ و C را چنان تعیین کنید که توان متوسط تحویلی به $R = 2\Omega$ حداکثر گردد.

چند درصد از توان تولیدی منبع به $R = 2\Omega$ منتقل می شود.



شکل مسئله ۲۱

حل : با انتقال امپدانس طرف اول به طرف دوم و در حالت دایمی سینوسی مدار بصورت زیر خواهد بود.



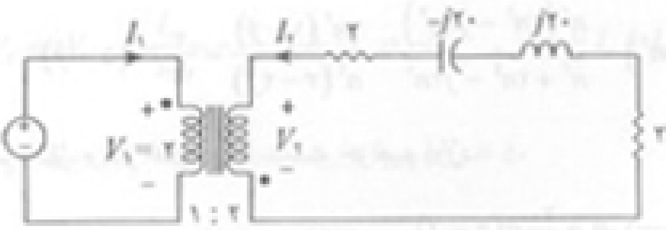
$$Z_o = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \frac{1}{2} + \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \frac{1}{j10C} + j20 = \frac{1}{2}\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 + j\left(20 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \frac{1}{10C}\right)$$

شرط انتقال توان ماکزیمم عبارت است از :

$$R = \bar{Z}_o \quad \rightarrow \quad 2 = \frac{1}{2}\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 + j\left(20 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \frac{1}{10C}\right)$$

$$\rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 = 2 \quad \rightarrow \quad \frac{n_1}{n_2} = \frac{1}{2} \\ 20 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \frac{1}{10C} = 0 \quad \rightarrow \quad 20 - \frac{4}{10C} = 0 \quad \rightarrow \quad C = \frac{1}{50}F \end{cases}$$

در ادامه به محاسبه درصد توان منتقل خواهیم پرداخت بدین منظور شکل مسئله را با توجه به مقادیر بدست آمده در حالت دایمی سینوسی رسم می کنیم.



با توجه به سر نقطه دار سیم پیچی ها داریم.

$$\frac{V_1}{V_2} = -\frac{n_1}{n_2} \rightarrow \frac{۲}{V_2} = -\frac{۱}{۲} \rightarrow V_2 = -۴ \rightarrow I_2 = \frac{۴}{۲ - j۲۰ + j۲۰ + ۲} = ۱A$$

$$\rightarrow \text{توان متوسط انتقالی} = \frac{۱}{۲}R\left|I_2\right|^2 = \frac{۱}{۲}(۲)(۱)^2 = ۱\,W \;,\; \frac{I_1}{I_2} = \frac{n_2}{n_1} \rightarrow \frac{I_1}{۱} = \frac{۲}{۱} \rightarrow I_1 = ۲$$

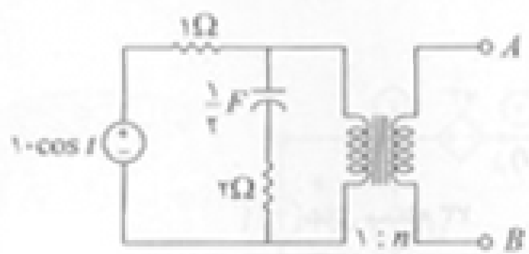
$$\rightarrow \text{توان متوسط تولیدی} = V_s I_1 = (۲)(۱) = ۲\,W$$

$$\rightarrow \text{درصد توان انتقالی} = \frac{\text{توان متوسط انتقالی}}{\text{توان متوسط تولیدی}} \times ۱۰۰ = \frac{۱}{۲} \times ۱۰۰ = ۵۰\%$$

مسئله ۲۲

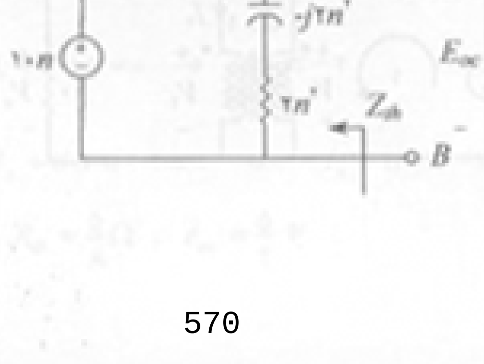
الف ـ معادل تونن دو سر A و B چیست.

ب ـ $R_L = ۸\sqrt{۲}$ را به دو سر A و B وصل می کنیم. n را چنان تعیین کنید که حداکثر توان متوسط به R_L منتقل شود.



شکل مسئله ۲۲

حل: الف ـ با انتقال امپدانسهای طرف اول به طرف دوم و درحالت دایمی سینوسی و به ازای $\omega = ۱$ مدار بصورت زیر خواهد شد.



بنابراین داریم.

$$Z_{th}=n^2\parallel\left(2n^2-j2n^2\right)=\frac{n^2\left(2n^2-j2n^2\right)}{n^2+2n^2-j2n^2}=\frac{2n^2\left(1-j\right)}{n^2\left(3-2j\right)}=\frac{2}{13}n^2\left(5-j\right)$$

و با استفاده از قاعده تقسیم ولتاژ، ولتاژ مدار باز را بدست خواهیم آورد.

$$E_{oc}=\frac{2n^2-j2n^2}{n^2+2n^2-j2n^2}10n=\frac{20}{13}n\left(5-j\right)$$

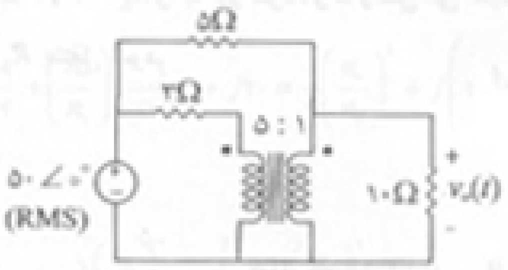
ب ـ با استفاده از شرط $\overline{Z}_s=R_L$ نمی توان n را بدست آورد زیرا به جواب $n=0$ می رسیم. بنابراین به محاسبه توان متوسط انتقالی بر حسب n خواهیم پرداخت و برای محاسبه n مورد نظر از توان متوسط مشتق گرفته و برابر صفر قرار می دهیم.

$$I=\frac{E_{oc}}{Z_s+R_L}=\frac{\frac{20}{13}n\left(5-j\right)}{\frac{2}{13}n^2\left(5-j\right)+8\sqrt{2}}=\frac{7/69n-j1/53n}{0/76n^2+11/3-j0/15n^2}$$

$$p_{av}=\frac{1}{2}R_L\left|I\right|^2=\frac{8\sqrt{2}}{2}\frac{\left(7/69n\right)^2+\left(1/53n\right)^2}{\left(0/76n^2+11/3\right)^2+\left(0/15n^2\right)^2}\quad,\quad\frac{dp_{av}}{dt}=0\;\rightarrow\;n=3/8$$

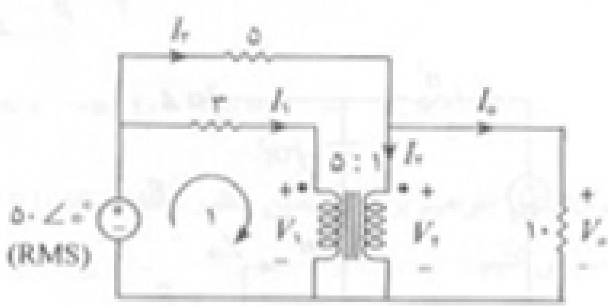
مسئله ۲۳

با استفاده از روش تحلیل مش، $v_o(t)$ را در حالت دایمی سینوسی تعیین کنید.



شکل مسئله ۲۳

حل : شکل مسئله را مجدداً بصورت زیر رسم می کنیم.



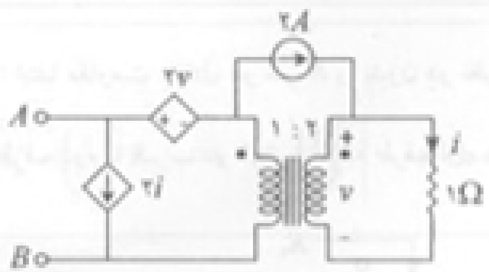
$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{5}{1} \rightarrow V_1 = 5V_2 = 5V_o \quad , \quad \frac{I_1}{I_2} = -\frac{1}{5} \rightarrow I_2 = -5I_1 \quad , \quad I_3 = I_2 + I_o = -5I_1 + \frac{V_o}{10}$$

$$\begin{cases} \text{برای مش ۱ } KVL \rightarrow -50 + 2I_1 + 5V_o = 0 \rightarrow 2I_1 + 5V_o = 50 \\ \text{برای حلقه بیرونی } KVL \rightarrow -50 + 5\left(-5I_1 + \frac{V_o}{10}\right) + V_o = 0 \rightarrow -50I_1 + 3V_o = 100 \end{cases}$$

$$V_o = \frac{2800}{260} = 10.8\angle 0 \rightarrow v_o(t) = 10.8\cos 2t \quad (RMS)$$

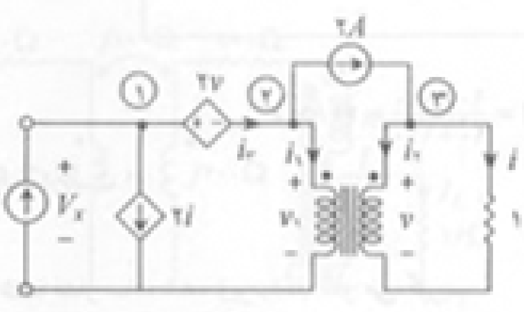
مسئله ۲۴

معادل تونن دو سر A و B را تعیین کنید.



شکل مسئله ۲۴

حل : بدین منظور منبع آزمایشی I_x را به دو سر A و B وصل کرده و ولتاژ دو سر آن را بدست می آوریم.



$$v = \frac{i}{1} = i \quad , \quad \frac{v_1}{v} = \frac{1}{2} \rightarrow v_1 = \frac{1}{2}v = \frac{i}{2} \rightarrow V_x = 2v + v_1 = 2i + \frac{i}{2} = \frac{5}{2}i \rightarrow i = \frac{2}{5}V_x$$

③ برای گره $KCL \rightarrow -2 + i_2 + i = 0 \rightarrow i_2 = 2 - i \quad , \quad \frac{i_1}{i_2} = -\frac{2}{1} \rightarrow i_1 = -2i_2 = 2i - 4$

② برای گره $KCL \rightarrow -i_x + i_1 + 2 = 0 \rightarrow i_x = 2i - 2$

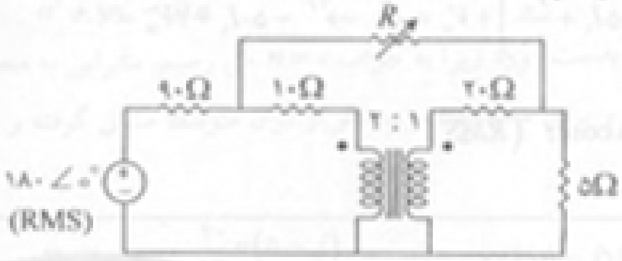
① برای گره $KCL \rightarrow -I_x + 2i + 2i - 2 = 0 \rightarrow -I_x + 4i - 2 = 0 \rightarrow -I_x + \frac{8}{5}V_x - 2 = 0$

$$\rightarrow V_x = \frac{5}{8}I_x + \frac{5}{4} \rightarrow R_{th} = \frac{5}{8}\Omega \quad , \quad e_{oc} = \frac{5}{4}V$$

مسئله ۲۵

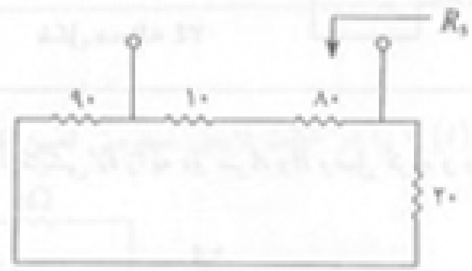
مقدار R برای انتقال حداکثر توان متوسط به آن چقدر است.

درصد توان انتقالی منبع به R در حالت فوق چیست.



شکل مسئله ۲۵

حل : ابتدا مقاومت معادل دو سر R را بدون در نظر گرفتان خود R بدست می آوریم. بدین منظور تمامی مقاومتهای طرف دوم با ضرب در $۴ = \left(\frac{۲}{۱}\right)^۲$ به طرف اول منتقل می کنیم.

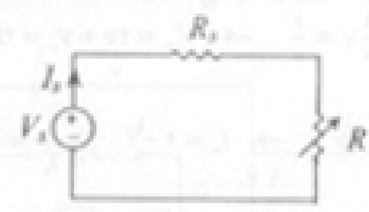


$$\rightarrow \quad R_s = (۱۰+۸۰) \| (۹۰+۲۰) = \frac{۹۰ \times ۱۱۰}{۹۰+۱۱۰} = ۴۹/۵\Omega$$

شرط انتقال توان حداکثر به R عبارتست از:

$$R = \bar{R}_s \quad \rightarrow \quad R = ۴۹/۵\Omega$$

برای محاسبه درصد خواسته شده مدار ساده شده زیر را در نظر می گیریم.

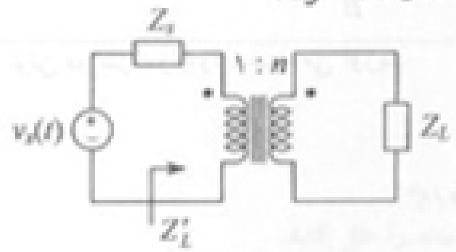


$$R = R_s \quad \rightarrow \quad I_s = \frac{V_s}{R_s + R} = \frac{V_s}{۲R} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} P_s = \frac{۱}{۲} V_s I_s = \frac{V_s^۲}{۴R} \\ P_R = \frac{۱}{۲} R (I_s)^۲ = \frac{(V_s)^۲}{۸R} \end{cases}$$

$\rightarrow$ درصد توان انتقالی $= \frac{P_s}{R_s}\times 100 = \frac{1}{2}\times 100 = 50\%$

مسئله ۲۶

n را چنان تعیین کنید که حداکثر توان به بار Z_L انتقال داده شود .



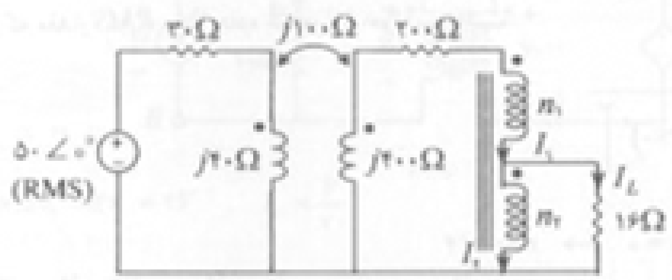
شکل مسئله ۲۶

حل : شرط انتقال توان ماکزیمم عبارت است از:

$$Z_s = Z'_L = \left(\frac{1}{n}\right)^2 Z_L \rightarrow n^2 = \left|\frac{Z_L}{Z_s}\right| \rightarrow n = \sqrt{\left|\frac{Z_L}{Z_s}\right|}$$

مسئله ۲۷

n_2 را چنان تعیین کنید که حداکثر توان متوسط به مقاومت 16Ω انتقال داده شود. توان ماکزیمم ودرصد آن از توان تولیدی را تعیین کنید. $(n_1 = 500)$

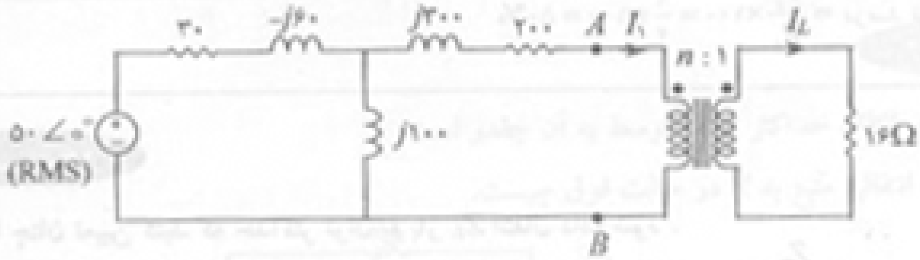


شکل مسئله ۲۷

حل : با توجه به شکل داریم .

$$\begin{cases} \frac{I_2}{I_1} = -\frac{n_1}{n_2} \rightarrow I_2 = -\frac{n_1}{n_2} I_1 \\ \qquad\qquad\qquad \rightarrow I_L = I_1 + \frac{n_1}{n_2} I_1 = \frac{n_1 + n_2}{n_2} I_1 \\ I_L = I_1 - I_2 \end{cases}$$

بنابراین با فرض $n = \frac{n_1 + n_2}{n_2}$ و با بکارگیری مدار معادل T شکل مسئله را می توان بصورت زیر رسم کرد.

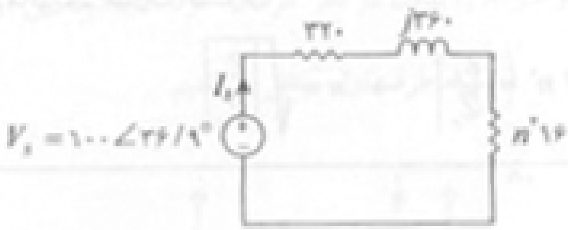


حال معادل تونن دو سر A و B را بدست می آوریم.

$$Z_{th} = \left(30 - j60 \parallel j100\right) + 200 + j300 = 320 + j360$$

$$E_{oc} = \frac{j100}{30 - j60 + j100} 50\angle 0 = 80 + j60 = 100\angle 36/9^\circ$$

بنابراین مدار را می توان بصورت زیر ساده کرد.



$$I_s = \frac{100\angle 36/9^\circ}{16n^2 + 320 + j360} \rightarrow \left|I_s\right|^2 = \frac{10000}{\left(16n^2 + 320\right)^2 + \left(360\right)^2}$$

از آنجا که مقدار RMS ولتاژ داده شده، لذا خواهیم داشت:

$$P_{av} = R\left|I_s\right|^2 = \frac{160000\,n^2}{\left[\left(16n^2 + 320\right)^2 + \left(360\right)^2\right]}$$

$$\frac{dP_{av}}{dn} = 0 \quad \rightarrow \quad -256n^4 + 232090 = 0 \quad \rightarrow \quad n = 5/4$$

n باید صحیح باشد لذا $n = 5$ انتخاب می شود و خواهیم داشت.

$$n = 5 \quad \rightarrow \quad \frac{n_1 + n_2}{n_2} = 5 \quad \rightarrow \quad \frac{500 + n_2}{n_2} = 5 \quad \rightarrow \quad n_2 = 125$$

در ادامه با توجه به $n = 5$ به محاسبه درصد توان ماکزیمم خواهیم پرداخت.

$$\text{توان ماکزیمم انتقالی} = P_{av,\max} = R\left|I_s\right|^2 = \frac{160000\,(5)^2}{\left(16(5)^2 + 320\right)^2 + \left(360\right)^2} = 9/17\ W$$

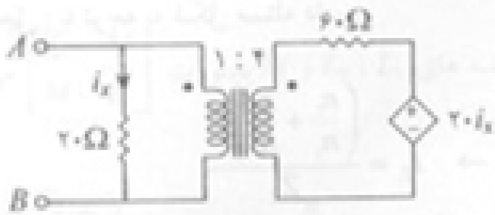
$$\text{توان تولیدی} = P_{av,s} = |V_s||I_s| = (100)\left(\frac{10000}{\left(16(5)^2+320\right)^2+(360)^2}\right) = 57/31\ W$$

$$\text{درصد توان ماکزیمم انتقالی} = \frac{9/17}{57/31}\times 100 = 16\%$$

مسئله ۲۸

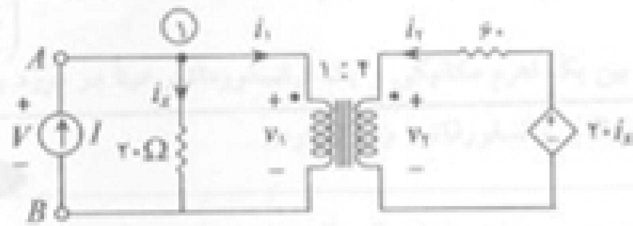
معادل تونن دو سر A و B را بدست آورید.

اگر محل یکی از نقاط تغییر کند بار دیگر مسئله را حل کنید.



شکل مسئله ۲۸

حل : بدین منظور منبع جریان آزمایشی I را به دو سر A و B وصل کرده و ولتاژ دو سر آن را بدست می آوریم.



$$v_1 = V \;\rightarrow\; v_2 = 4v_1 = 4V \quad , \quad i_x = \frac{V}{20}$$

$$i_2 = \frac{20 i_x - v_2}{60} = \frac{V-4V}{60} = -\frac{V}{20} \quad , \quad i_1 = -4i_2 = \frac{V}{5}$$

$$\text{KCL برای گره ①} \;\rightarrow\; -I + \frac{V}{20} + \frac{V}{5} = 0 \;\rightarrow\; V = 4I \;\rightarrow\; R_{th} = 4 \;,\; e_{oc} = 0$$

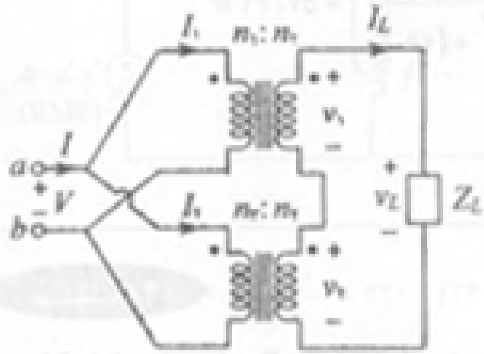
با تغییر سر نقطه دار یکی از سیم پیچ ها داریم.

$$v_2 = -4v_1 = -4V \;\rightarrow\; i_2 = \frac{V+4V}{60} = \frac{V}{12} \quad , \quad i_1 = 4i_2 = \frac{V}{3}$$

$$\text{KCL برای گره ①} \;\rightarrow\; -I + \frac{V}{20} + \frac{V}{3} = 0 \;\rightarrow\; V = \frac{60}{23}I \;\rightarrow\; R_{th} = \frac{60}{23} \quad , \quad e_{oc} = 0$$

مسئله ۲۹

امپدانس دو سر a و b را حساب کنید.



شکل مسئله ۲۹

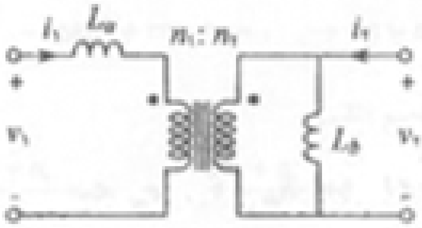
حل : با توجه به شکل مسئله داریم.

$$v_L = v_1 + v_2 = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)V + \left(\frac{n_4}{n_3}\right)V = \left(\frac{n_2}{n_1} + \frac{n_4}{n_3}\right)V \quad \rightarrow \quad I_L = \frac{\left(\frac{n_2}{n_1} + \frac{n_4}{n_3}\right)V}{Z_L}$$

$$I = I_1 + I_2 = \frac{n_2}{n_1} I_L + \frac{n_4}{n_3} I_L = \left(\frac{n_2}{n_1} + \frac{n_4}{n_3}\right)V \frac{\left(\frac{n_2}{n_1} + \frac{n_4}{n_3}\right)V}{Z_L} \quad \rightarrow \quad Z_{ab} = \frac{V}{I} = \frac{Z_L}{\left(\frac{n_2}{n_1} + \frac{n_4}{n_3}\right)^2}$$

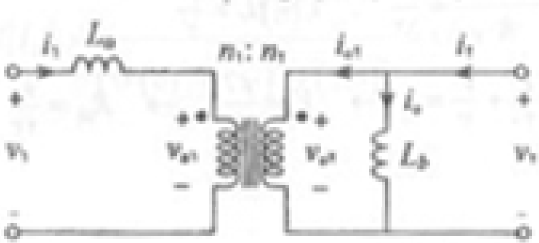
مسئله ۳۰

L_a و L_b و $\frac{n_1}{n_2}$ را چنان تعیین کنید که دو قطبی حاصل، معادل یک جفت سلف تزویج شده با L_1، L_2 و M گردد.



شکل مسئله ۳۰

حل : شکل مسئله را مجدداً بصورت زیر رسم می کنیم.



$$v_2 = v_{o2} \;\rightarrow\; \phi_2 = \phi_{o2} \;\;,\;\; v_{o1} = \frac{n_1}{n_2} v_{o2} \;\rightarrow\; \phi_{o1} = \frac{n_1}{n_2}\phi_2$$

$$i_{o2} = i_2 - i_b = i_2 - \frac{\phi_2}{L_b} \;\rightarrow\; i_1 = -\frac{n_2}{n_1} i_{o2} = \frac{n_2}{n_1}\left(\frac{\phi_2}{L_b} - i_2\right) \;\rightarrow\; \phi_2 = \left(\frac{n_1}{n_2} L_b\right) i_1 + L_b i_2$$

$$\phi_1 = i_1 L_a + v_{o1} = i_1 L_a + \frac{n_1}{n_2}\phi_2 = i_1 L_a + \frac{n_1}{n_2}\left[\left(\frac{n_1}{n_2} L_b\right) i_1 + L_b i_2\right]$$

$$\phi_1 = \left(L_a + \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 L_b\right) i_1 + \frac{n_1}{n_2} L_b i_2 \;\rightarrow\; \begin{bmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_a + \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 L_b & \frac{n_1}{n_2} L_b \\ \frac{n_1}{n_2} L_b & L_b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2\end{bmatrix}$$

ماتریس اندوکتانس یک جفت سلف تزویج شده با مشخصه های L_1 ، L_2 و M بصورت $\begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2\end{bmatrix}$ می باشد بنابراین داریم.

$$L_1 = L_a + \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 L_b \;\;,\;\; M = \frac{n_1}{n_2} L_b \;\;,\;\; L_2 = L_b$$

مسئله ۳۱

نشان دهید که تشابه بین یک اهرم مکانیکی و یک ترانسفورماتور عیناً در مورد یک جفت چرخ دنده با شعاعهای R_1 و R_2 و ترانسفورماتور وجود دارد.

حل : برای یک جفت چرخ دنده با شعاعهای R_1 و R_2 و زاویه چرخش θ و گشتاور τ داریم.

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{n_1}{n_2} \;\;,\;\; \frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

که مشابه $\frac{v_1}{v_2} = \frac{n_1}{n_2}$ و $\frac{i_1}{i_2} = -\frac{n_2}{n_1}$ در ترانسفورماتور است.

مسئله ۳۲

$Z_{AB}(j\omega) = ?$

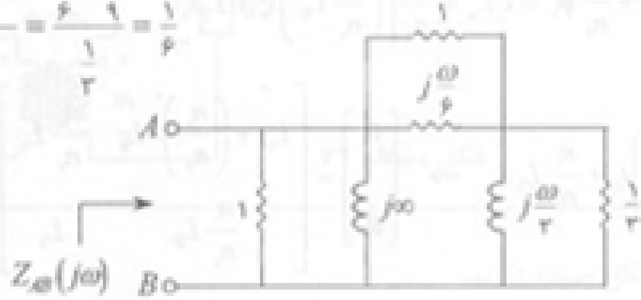
اگر جای نقطه ها عوض شود Z_{AB} را حساب کنید.

شکل مسئله ۳۲

حل : بدین منظور از مدار معادل π سلفهای تزویج شده استفاده می کنیم.

$$L_a = \frac{L_1L_2 - M^2}{L_2 - M} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{3}\right)^2}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}} = \infty \quad , \quad L_b = \frac{L_1L_2 - M^2}{L_1 - M} = \frac{\frac{1}{6} - \frac{1}{9}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$$

$$L_c = -\frac{1}{6}\, L_c = \frac{L_1L_2 - M^2}{M} = \frac{\frac{1}{6} - \frac{1}{9}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{6}$$

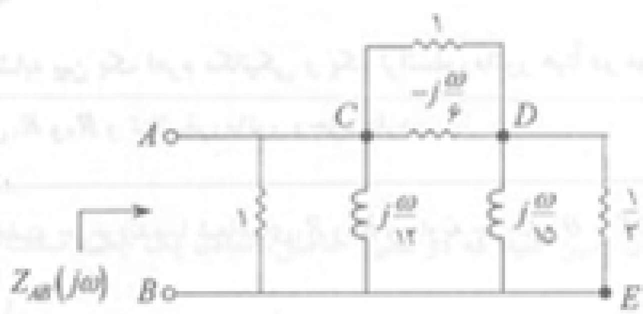


$$Z_{AB}(j\omega) = \left[\left(\frac{1}{3}\right) \| \left(j\frac{\omega}{3}\right) + (1) \| \left(j\frac{\omega}{6}\right)\right] \| (1) = \frac{-2\omega^2 + j7\omega}{-8\omega^2 + 36 + j49\omega}$$

با عوض کردن جای نقطه ها $M = -M = -\frac{1}{3}$ شده و خواهیم داشت.

$$L_a = \frac{1}{12} \quad , \quad L_b = \frac{1}{15} \quad , \quad L_c = -\frac{1}{6}$$

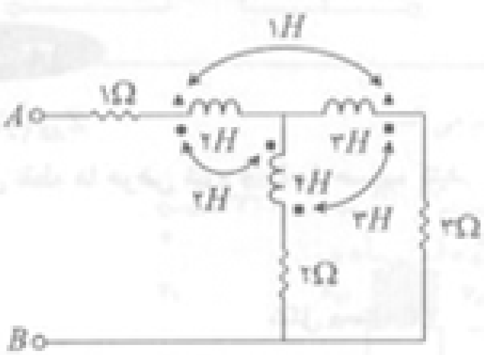
بنابراین در این حالت مدار بصورت زیر خواهد شد.



$$Z_{AB} = \left[\left(\frac{1}{3} \| \frac{j\omega}{15}\right) + \left(-\frac{j\omega}{6}\right) \| (1)\right] \| \left(\frac{j\omega}{12} \| (1)\right) = \frac{9\omega^2 + j4\omega^3}{\omega^4 - 18 + j\left(3\omega^3 + 33\omega\right)}$$

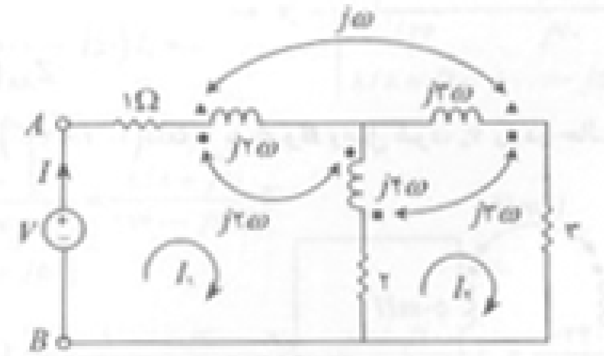
مسئله ۳۳

$Z_{AB}(j\omega) = ?$



شکل مسئله ۳۳

حل : بدین منظور منبع ولتاژ آزمایشی V را به دو سر A و B وصل کرده و جریان گذرنده از آن را بدست می آوریم.



برای مش ۱ KVL $\;\rightarrow\;$ $-V + I_1 + \left(j4\omega I_1 + j2\omega\left(I_1 - I_2\right) - j\omega I_2\right)$

$$+\left(j2\omega I_1 + j4\omega\left(I_1 - I_2\right) + j3\omega I_2\right) + 2\left(I_1 - I_2\right) = 0$$

$$\rightarrow \left(3 + j12\omega\right)I_1 + \left(-2 + j4\omega\right)I_2 = V$$

برای مش ۲ KVL $\;\rightarrow\;$ $2\left(I_2 - I_1\right) + \left(-j2\omega I_1 + j4\omega\left(I_2 - I_1\right) - j3\omega I_1\right)$

$$+\left(-j\omega I_1 + j3\omega\left(I_1 - I_2\right) + j3\omega I_2\right) + 3I_2 = 0$$

$$\rightarrow \left(-2 - j3\omega\right)I_1 + \left(5 + j\omega\right)I_2 = 0$$

$$\rightarrow I = I_1 = \frac{\begin{vmatrix} V & -2 + j4\omega \\ 0 & 5 + j\omega \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 + j12\omega & -2 + j4\omega \\ -2 - j3\omega & 5 + j\omega \end{vmatrix}} = \frac{\left(5 + j\omega\right)V}{\left(3 + j12\omega\right)\left(5 + j\omega\right) - \left(-2 - j3\omega\right)\left(-2 + j4\omega\right)}$$

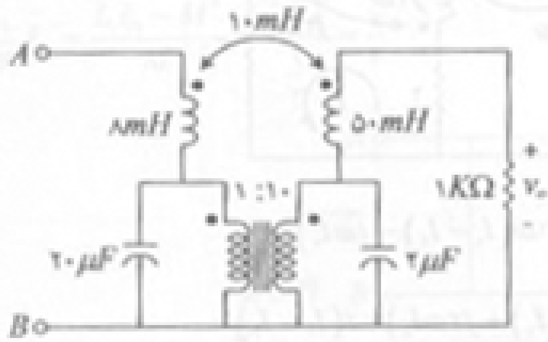
$$= \frac{5 + j\omega}{11 - 12\omega^2 + j65\omega}V$$

$$\rightarrow Z_{AB}\left(j\omega\right) = \frac{V}{I} = \frac{11 - 12\omega^2 + j65\omega}{5 + j\omega}$$

مسئله ۳۴

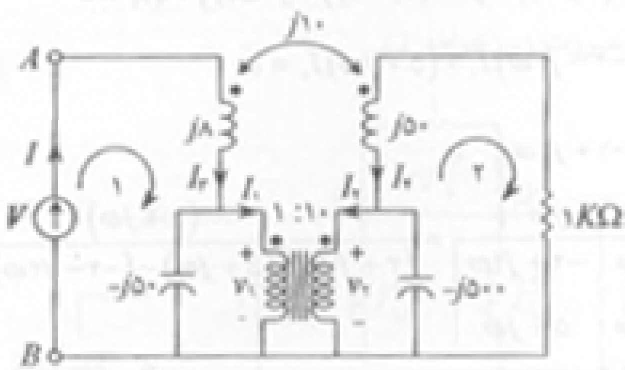
الف ـ $Z_{AB}(j1000) = ?$

ب ـ اگر منبع ولتاژ $10\cos(10^3 t + 30^\circ)$ به A و B وصل شود، v_o را در حالت دایمی سینوسی تعیین کنید.



شکل مسئله ۳۴

حل : الف ـ بدین منظور منبع ولتاژ آزمایشی V را به دو سر A و B متصل کرده و جریان گذرنده از آن را بدست می آوریم. در حالت دایمی سینوسی و $\omega = 1000$ مدار بصورت زیر خواهد بود.



$$I_2 = \frac{v_1}{-j50} + I_1 = \frac{v_1}{-j50} - 10 I_4 \quad , \quad I_3 = \frac{v_2}{-j500} + I_4 = \frac{v_1}{-j50} + I_4$$

برای مش۱ $KVL \rightarrow \quad -V + j8\left(\frac{v_1}{-j50} - 10 I_4\right) + j10\left(\frac{v_1}{-j50} + I_4\right) + v_1 = 0$

برای مش۲ $KVL \rightarrow \quad -10v_1 - j50\left(\frac{v_1}{-j50} + I_4\right) - j10\left(\frac{v_1}{-j50} - 10 I_4\right) - 1000\left(\frac{v_1}{-j50} + I_4\right) = 0$

$$\rightarrow \begin{cases} 0/26V_1 + j70 I_2 = -V \\ (8/8 + j20)V_1 + (1000 - j50)I_2 = 0 \end{cases} \rightarrow V_1 = \frac{\begin{vmatrix} -V & j70 \\ 0 & 1000 - j50 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0/26 & j70 \\ 8/8 + j20 & 1000 - j50 \end{vmatrix}} = -\frac{1000 - j50}{1760 - j724}V$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 0/26 & -V \\ 8/8 + j20 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0/26 & j70 \\ 8/8 + j20 & 1000 - j50 \end{vmatrix}} = \frac{8/8 + j20}{1760 - j724}V$$

$$\rightarrow I = I_2 = \frac{V_1}{-j50} - 10 I_2 = \frac{1000 - j50}{j50(1760 - j724)}V - \frac{88 + j200}{1760 - j724}V = \frac{-3400 - j10050}{j50(1760 - j724)}V$$

$$\rightarrow Z_{AB} = \frac{V}{I} = \frac{j50(1760 - j724)}{-3400 - j10050} = \frac{(50\angle 90)(1906\angle -22/6)}{(10609\angle -108/7)} = 8/98\angle 176/1$$

ب ـ در این حالت با جایگذاری $V = 10\angle 30^\circ$ خواهیم داشت.

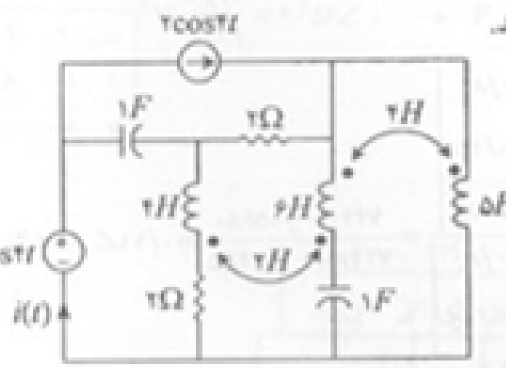
$$V_o = 1000 I_2 = 1000\left(\frac{V_1}{-j50} + I_2\right) = j20 V_1 + 1000 I_2$$

$$\rightarrow V_o = j20\left(-\frac{1000 - j50}{1760 - j724}10\angle 30^\circ\right) + 1000\frac{8/8 + j20}{1760 - j724}10\angle 30^\circ = 28\angle 78$$

$$\rightarrow v_o(t) = 28\cos\left(10^7 t + 78^\circ\right)$$

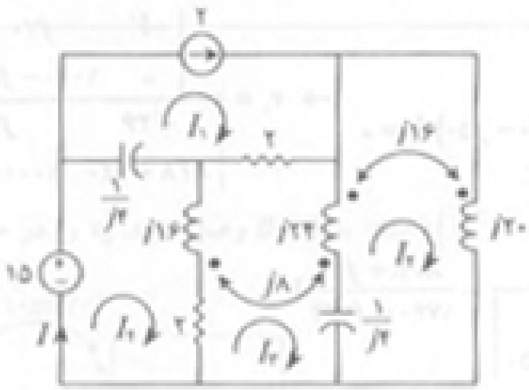
مسئله ۳۵

$i(t)$ را در حالت دایمی سینوسی تعیین کنید.



شکل مسئله ۳۵

حل: در حالت دایمی سینوسی مدار بصورت زیر خواهد بود.



$I_۱ = ۱$

برای مش۲ $KVL \rightarrow -۱۵ + \frac{۱}{j۴}(I_۲ - ۲) + j۱۶(I_۲ - I_۳) + j۸(I_۳ - I_۴) + ۲(I_۲ - I_۳) = ۰$

برای مش۳ $KVL \rightarrow ۲(I_۳ - I_۲) + j۱۶(I_۳ - I_۲) - j۸(I_۳ - I_۴) + ۲(I_۳ - ۱) + ۲۴j(I_۳ - I_۴)$

$$- j۸(I_۳ - I_۲) + j۱۶I_۴ + \frac{۱}{j۴}(I_۳ - I_۴) = ۰$$

برای مش۴ $KVL \rightarrow \frac{۱}{j۴}(I_۴ - I_۳) + j۲۴(I_۴ - I_۳) + j۸(I_۳ - I_۲) - j۱۶I_۳ + j۲۰I_۴$

$$+ ۱۶j(I_۴ - I_۳) = ۰$$

$$\rightarrow \begin{cases} (۲ + j۱۵/۷۵)I_۲ + (-۲ + j۸)I_۳ - j۸I_۴ = ۱۵ - j۰/۵ \\ (-۲ - j۸)I_۲ + (۴ - j۱۳/۲۵)I_۳ - j۰/۲۵I_۴ = ۲ \\ -j۸I_۲ + j۰/۲۵I_۳ + j۱۱/۷۵I_۴ = ۰ \end{cases}$$

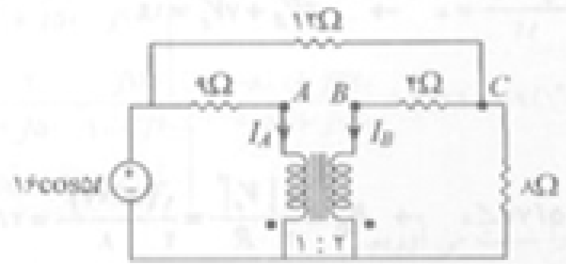
$$\rightarrow I = I_۲ = \frac{\begin{vmatrix} ۱۵ + j۰/۵ & -۲ + j۸ & -j۸ \\ ۲ & ۴ - j۱۳/۲۵ & -j۰/۲۵ \\ ۰ & j۰/۲۵ & j۱۱/۷۵ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} ۲ + j۱۵/۷۵ & -۲ + j۲ & -j۸ \\ -۲ - j۸ & ۴ - j۱۳/۲۵ & -j۰/۲۵ \\ -j۸ & j۰/۲۵ & j۱۱/۷۵ \end{vmatrix}} = \frac{۷۴۶۰۰ - j۱۵۶۸۰}{۷۲۲۸۰ + j۱۵۴۵۵} = ۰/۱۱\angle -۱۳/۰^{\circ}$$

$$\rightarrow i(t) = ۰/۱۱\cos(۲t - ۱۳/۰^{\circ})$$

مسئله ۳۶

الف ـ توان متوسط تحویلی به مقاومت 8Ω را تعیین کنید.

ب ـ اگر یک مقاومت 8Ω به دو سر A و B وصل شود بار دیگر مسئله را حل کنید.



شکل مسئله ۳۶

حل : الف ـ با توجه به شکل مسئله $V_A = 2V_B$ و $I_B = -2I_A$ بوده و خواهیم داشت.

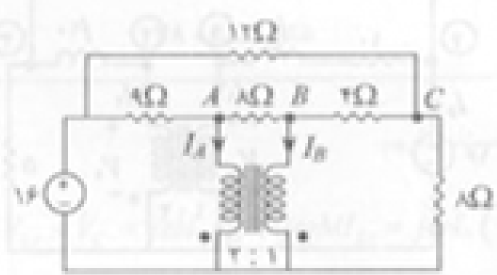
$$\text{(A)}\ KCL \text{ برای گره } \rightarrow I_A + \frac{2V_B - 16}{9} = 0 \rightarrow 9I_A + 2V_B = 16$$

$$\text{(B)}\ KCL \text{ برای گره } \rightarrow -2I_A + \frac{V_B - V_c}{4} = 0 \rightarrow 8I_A - V_B + V_c = 0$$

$$\text{(C)}\ KCL \text{ برای گره } \rightarrow \frac{V_c - V_B}{4} + \frac{V_c}{8} + \frac{V_c - 16}{16} = 0 \rightarrow -4V_B + 7V_c = 16$$

$$\rightarrow V_c = \frac{\begin{vmatrix} 9 & 2 & 16 \\ 8 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 16 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 9 & 2 & 0 \\ 8 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 7 \end{vmatrix}} = \frac{-912}{-139} = 6/56\angle 0 \rightarrow P_{av} = \frac{1}{2}\frac{|V_c|^2}{R} = \frac{1}{2}\frac{(6/56)^2}{8} = 2/68\ W$$

ب ـ در این حالت مدار بصورت زیر خواهد شد.



با توجه به شکل $V_A = 2V_B$ و $I_B = -2I_A$ بوده و خواهیم داشت.

KCL برای گره Ⓐ $\rightarrow \dfrac{2V_B-16}{9}+I_A+\dfrac{2V_B-V_B}{8}=0 \rightarrow 72I_A+25V_B=128$

KCL برای گره Ⓑ $\rightarrow \dfrac{V_B-2V_B}{8}-2I_A+\dfrac{V_B-V_C}{4}=0 \rightarrow 16I_A-V_B+2V_C=0$

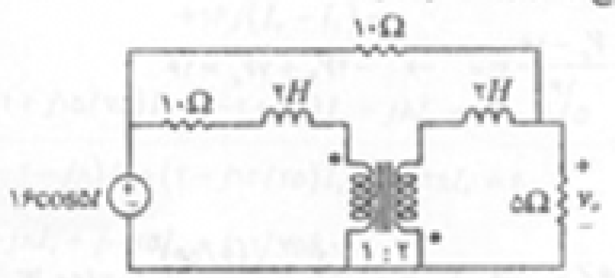
KCL برای گره Ⓒ $\rightarrow \dfrac{V_C-V_B}{4}+\dfrac{V_C}{8}+\dfrac{V_C-16}{12}=0 \rightarrow -2V_B+7V_C=16$

$$\rightarrow V_C=\frac{\begin{vmatrix}72 & 25 & 128\\ 16 & -1 & 0\\ 0 & -2 & 16\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}72 & 25 & 0\\ 16 & -1 & 2\\ 0 & -2 & 7\end{vmatrix}}=\frac{-15744}{-2728}=5.77\angle 0 \rightarrow P_{av}=\frac{1}{2}\frac{|V_C|^2}{R}=\frac{1}{2}\frac{(5.77)^2}{8}=2.08\,W$$

مسئله ۳۷

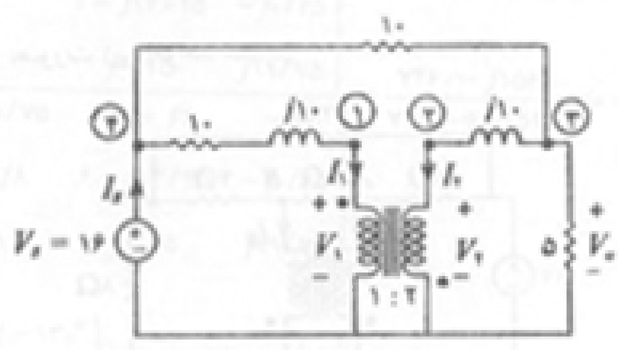
الف ـ v_o را در حالت دایمی سینوسی بدست آورید.

ب ـ امپدانس دیده شده در دو سر منبع ولتاژ را حساب کنید.



شکل مسئله ۳۷

حل : الف ـ در حالت دایمی سینوسی شکل مسئله بصورت زیر خواهد شد.



$$\frac{V_1}{V_2}=-\frac{1}{2} \rightarrow V_2=-2V_1 \quad , \quad I_1=\frac{16-V_1}{10+j10} \quad , \quad \frac{I_1}{I_2}=\frac{2}{1} \rightarrow I_2=\frac{1}{2}I_1=\frac{16-V_1}{20+j20}$$

$$\text{KCL برای گره ۲} \;\rightarrow\; \frac{16-V_1}{20+j20}+\frac{-2V_1-V_o}{j10}=0 \;\rightarrow\; (40+j50)V_1+(20+j20)V_o=j160$$

$$\text{KCL برای گره ۳} \;\rightarrow\; \frac{V_o}{5}+\frac{V_o-(-2V_1)}{j10}+\frac{V_o-16}{10}=0 \;\rightarrow\; 2V_1+(1+j3)V_o=j16$$

$$V_o=\frac{\begin{vmatrix}40+j50 & j160\\ 2 & j16\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}40+j50 & 20+j20\\ 2 & 1+j3\end{vmatrix}}=\frac{-800+j320}{-150+j130}=4/34\angle 19/1^\circ \;\rightarrow\; V_o(t)=4/34\cos(5t+19/1^\circ)$$

ب ـ ابتدا با استفاده از دستگاه معادله فوق، V_1 را بدست می آوریم.

$$V_1=\frac{\begin{vmatrix}j160 & 20+j20\\ j16 & 1+j3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}40+j50 & 20+j20\\ 2 & 1+j3\end{vmatrix}}=\frac{-260-j160}{-150+j130}=\frac{305\angle -31^\circ}{198\angle 139}=1/54\angle -170^\circ$$

$$\text{KCL برای گره ۱} \;\rightarrow\; -I_s+\frac{16-4/34\angle 19/1^\circ}{10}+\frac{16-1/54\angle -170^\circ}{10+j10}=0$$

$$\rightarrow\; I_s=2/97\angle -19/6^\circ$$

$$\rightarrow\; Z_s=\frac{V_s}{I_s}=\frac{16\angle 0}{2/97\angle -19/6^\circ}=5/4\angle 19/6^\circ=5/09+j1/81$$

مسئله ۳۸

$i_s(t)=?$

$$v_c(t)=\sin(2\pi\times 10^{6}t)+10^{-3}\sin(2\pi\times 10^{7}t)$$

شکل مسئله ۳۸

حل : با توجه به شکل مسئله داریم.

$$I_{L_2}=-I_C=-j\omega CV_c \quad , \quad V_{L_2}=V_C=j\omega L_2 I_{L_2}+j\omega MI_{L_1}=j\omega L_2(-j\omega CV_C)+j\omega MI_s$$

$$j\omega MI_s=V_C-\omega^2 cL_2V_C \;\rightarrow\; I_s=\frac{1-\omega^2 cL_2}{j\omega M}V_c$$

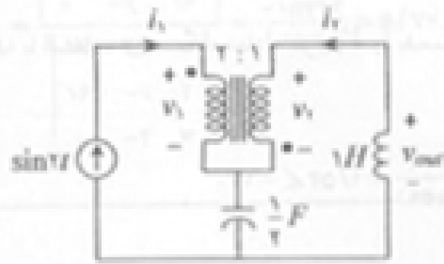
$$V_{s1} = -j \ , \ \omega = 2\pi\times10^{6} \ \rightarrow \ I_{s1} = \frac{1-\left(2\pi\times10^{6}\right)^{2}\times25\times10^{-12}\times10^{-3}}{j2\pi\times10^{6}\times10^{-3}}(-j) = -2/07\times10^{-4}$$

$$V_{s2} = -j10^{-3} \ , \ \omega = 2\pi\times10^{7} \ \rightarrow \ I_{s2} = \frac{1-\left(2\pi\times10^{7}\right)^{2}\times25\times10^{-12}\times10^{-3}}{j2\pi\times10^{7}\times10^{-3}} = -1/59\times10^{-4}$$

$$i_s(t) = -2/07\times10^{-4}\cos\left(2\pi\times10^{6}t\right) - 1/59\times10^{-4}\cos\left(2\pi\times10^{7}t\right)$$

مسئله ۳۹

$v_{out} = ?$



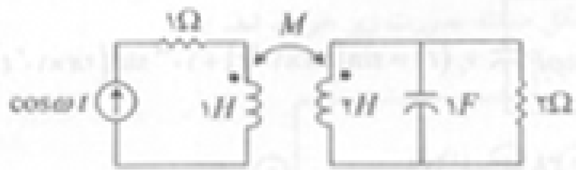
شکل مسئله ۳۹

حل : از آنجا که به حالت دایمی سینوسی اشاره نشده است لذا پاسخ کامل v_{out} را بدست خواهیم آورد.

$$i_1 = \sin 2t \ , \ \frac{i_1}{i_2} = \frac{1}{2} \ \rightarrow \ i_2 = 2i_1 = 2\sin 2t \qquad , \qquad v_{out} = -\frac{di_2}{dt} = 4\cos 2t$$

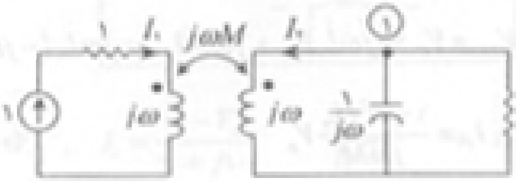
مسئله ۴۰

M را چنان تعیین کنید که حداکثر توان متوسط به بار 2Ω منتقل شود.



شکل مسئله ٤۰

حل : مدار را در حالت دایمی سینوسی رسم می کنیم.



KCL برای گره ۱ : $I_2 + \frac{V_2}{\frac{1}{j\omega}} + \frac{V_2}{2} = 0 \rightarrow I_2 = -\left(\frac{1}{2} + j\omega\right)V_2$

از طرفی با توجه به سلفهای تزویج شده می توان نوشت.

$$V_2 = j\omega M I_1 + j\omega I_2 = j\omega M - j\omega\left(\frac{1}{2} + j\omega\right)V_2$$

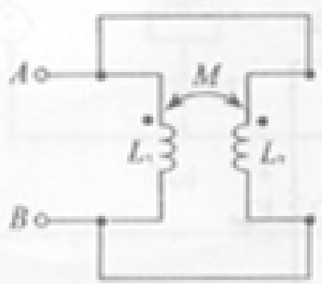
$$\rightarrow V_2 = \frac{j\omega M}{1 - \omega^2 + j\frac{\omega}{2}} \rightarrow P_{av} = \frac{1}{2}\frac{|V_2|^2}{R} = \frac{M^2\omega^2}{2\left(\left(1-\omega^2\right)^2 + \left(\frac{\omega}{2}\right)^2\right)}$$

واضح است که P_{av} ماکزیمم به ازای M ماکزیمم حاصل خواهد شد که برابر است با

$$M = \sqrt{L_1 L_2} = 1H$$

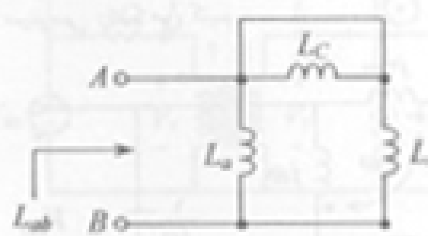
مسئله ۴۱

$L_{AB} = ?$



شکل مسئله ۴۱

حل : با استفاده از مدار معادل π سلفهای تزویج شده شکل مدار بصورت زیر خواهد شد.

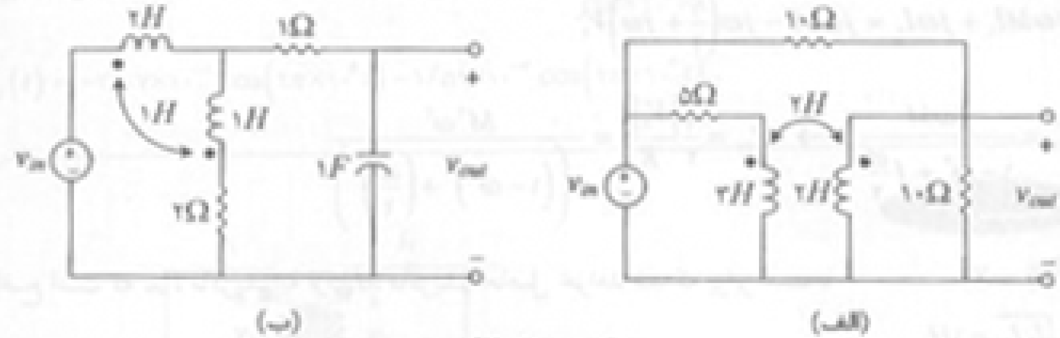


$$L_a = \frac{L_1L_2 - M^2}{L_2 - M} \quad , \quad L_b = \frac{L_1L_2 - M^2}{L_1 - M} \rightarrow L_{AB} = L_a \parallel L_b = \frac{L_aL_b}{L_a + L_b}$$

$$\rightarrow L_{AB} = \frac{\left(\frac{L_1L_2 - M^2}{L_2 - M}\right)\left(\frac{L_1L_2 - M^2}{L_1 - M}\right)}{\frac{L_1L_2 - M^2}{L_2 - M} + \frac{L_1L_2 - M^2}{L_1 - M}} = \frac{L_1L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M}$$

مسئله ۴۲

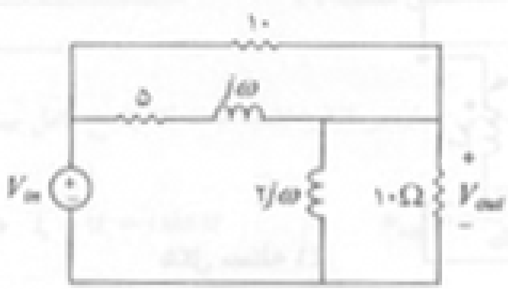
تابع شبکه انتقال ولتاژ را در دو مدار زیر بدست آورید.



(ب) (الف)

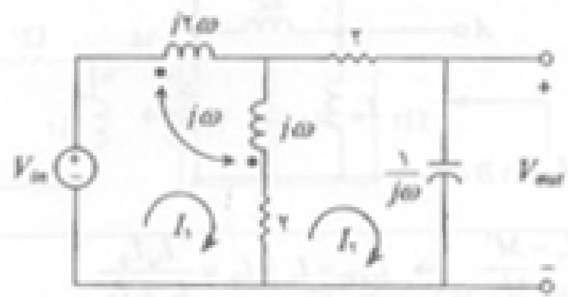
شکل مسئله ۴۲

حل: الف ـ با استفاده از مدارمعادل T برای سلفهای تزویج، مداررا درحالت دایمی سینوسی رسم می کنیم.



$$V_{out} = \frac{10 \| 2j\omega}{10 \| 2j\omega + 10 \| (5 + j\omega)} = \frac{-\omega^2 + j15\omega}{25 - 2\omega^2 + j25\omega} V_{in} \rightarrow H(j\omega) = \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{-\omega^2 + j15\omega}{25 - 2\omega^2 + j25\omega}$$

ب ـ مدار را در حالت دایمی سینوسی رسم می کنیم.



برای مش۱ $KVL \rightarrow -V_{in} + \left[j2\omega I_1 - j\omega(I_1 - I_2)\right] + \left[j\omega(I_1 - I_2) - j2\omega I_1\right] + 2(I_1 - I_2) = 0$

$$\rightarrow (2 + j\omega)I_1 - 2I_2 = V_{in} \quad (I)$$

برای مش۲ $KVL \rightarrow 2(I_2 - I_1) + \left[j\omega(I_2 - I_1) + j\omega I_1\right] + 2I_2 + \frac{1}{j\omega} I_2 = 0$

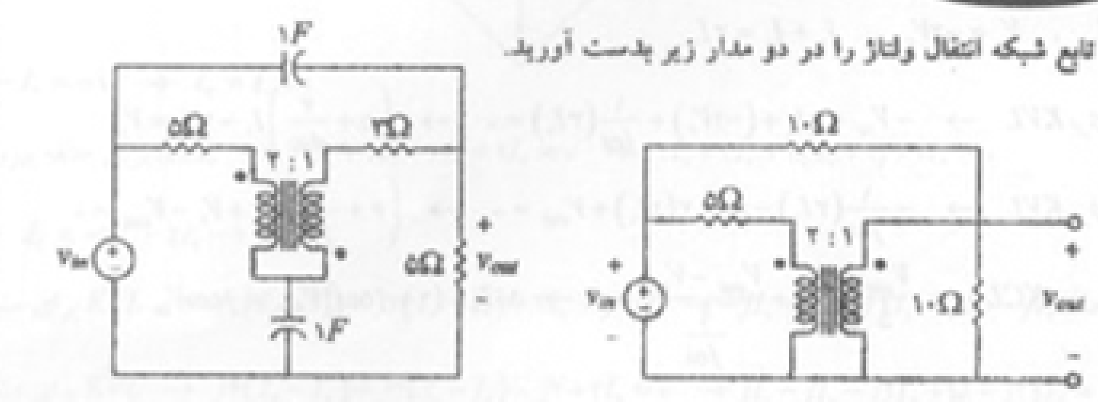
$$\rightarrow\quad -2I_1 + \left(4 + j\omega + \frac{1}{j\omega}\right) I_2 = 0 \quad\rightarrow\quad I_1 = \left(2+\frac{j\omega}{2}+\frac{1}{2j\omega}\right)I_2$$

با توجه به شکل مسئله $I_2 = j\omega V_{out}$ می باشد. با جایگذاری I_1 و I_2 بدست آمده در معادله(I) خواهیم داشت.

$$(2+j\omega)\left(2+\frac{j\omega}{2}+\frac{1}{j2\omega}\right)(j\omega V_{out}) - 2(j\omega V_{out}) = V_{in} \quad\rightarrow\quad \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{2}{2-5\omega^2 + j\left(4\omega-\omega^3\right)}$$

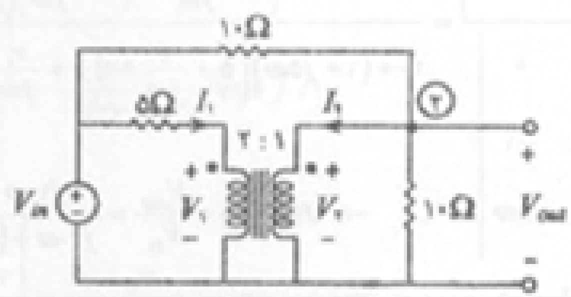
مسئله ۴۳

تابع شبکه انتقال ولتاژ را در دو مدار زیر بدست آورید.



شکل مسئله ۴۳

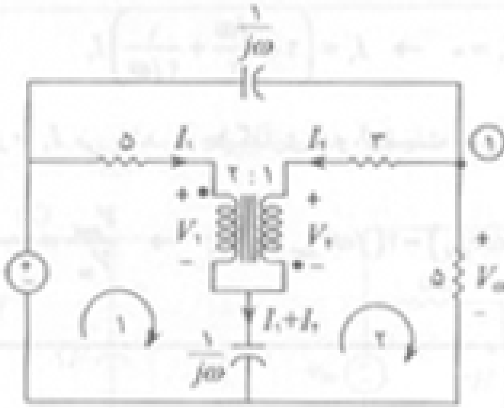
حل: الف ـ شکل مسئله را در حالت دایمی سینوسی رسم می کنیم.



$$V_1 = 2V_2 \quad\rightarrow\quad I_1 = \frac{V_{in}-V_1}{5} = \frac{V_{in}-2V_2}{5} \quad,\quad I_2 = -2I_1 = \frac{4V_2-2V_{in}}{5} = \frac{4V_{out}-2V_{in}}{5}$$

KCL برای گره ۲ $\rightarrow \frac{V_{out}}{10}+\frac{V_{out}-V_{in}}{10}+\frac{4V_{out}-2V_{in}}{5}=0 \rightarrow H(j\omega)=\frac{V_{out}}{V_{in}}=\frac{1}{2}$

ب ـ مدار را در حالت دایمی سینوسی رسم می کنیم.



$I_2 = 2I_1 \quad , \quad V_1 = -2V_2 \quad , \quad I_1 + I_2 = 3I_1$

برای مش ۱ $KVL \rightarrow -V_{in} + 5I_1 + (-2V_2) + \frac{1}{j\omega}(3I_1) = 0 \rightarrow \left(5 + \frac{3}{j\omega}\right)I_1 - 2V_2 = V_{in}$

برای مش ۲ $KVL \rightarrow -\frac{1}{j\omega}(3I_1) - V_2 - 3(2I_1) + V_{out} = 0 \rightarrow \left(6 + \frac{3}{j\omega}\right)I_1 + V_2 - V_{out} = 0$

برای گره ① $KCL \rightarrow \frac{V_{out}}{5} + 2I_1 + \frac{V_{out} - V_{in}}{\frac{1}{j\omega}} = 0 \rightarrow 10I_1 + (1 + j5\omega)V_{out} = j5\omega V_{in}$

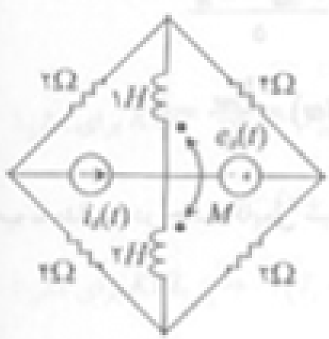
$$\rightarrow V_{out} = \frac{\begin{vmatrix} 5 + \frac{3}{j\omega} & -2 & V_{in} \\ 6 + \frac{3}{j\omega} & 1 & 0 \\ 10 & 0 & j5\omega V_{in} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 + \frac{3}{j\omega} & -2 & 0 \\ 6 + \frac{3}{j\omega} & 1 & -1 \\ 10 & 0 & j5\omega \end{vmatrix}} = \frac{10 + j5\omega\left(5 + \frac{3}{j\omega} + 2\left(6 + \frac{3}{j\omega}\right)\right)}{20 + (1 + j5\omega)\left(5 + \frac{3}{j\omega} + 2\left(6 + \frac{3}{j\omega}\right)\right)}V_{in}$$

$$\rightarrow H(j\omega) = \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{j10\omega + j5\omega(9 + j17\omega)}{j20\omega + (1 + j5\omega)(9 + j17\omega)}$$

مسئله ۴۴

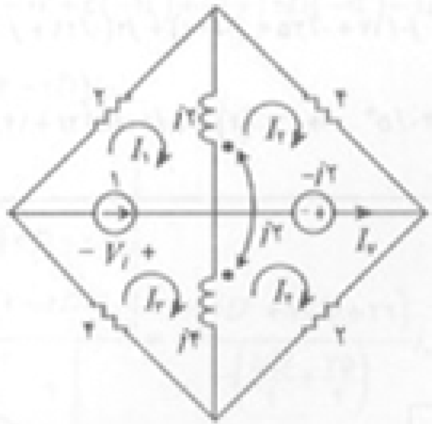
جریان گذرنده از منبع ولتاژ و ولتاژ دو سر منبع جریان را تعیین کنید.

$(M = 1H \;,\; e_s(t) = 2\sin 2t \;,\; i_s(t) = \cos 2t)$



شکل مسئله ٤٤

حل : شکل مسئله را در حالت دایمی سینوسی رسم می کنیم.



$I_۱ - I_۳ = -۱ \quad \rightarrow \quad I_۳ = I_۱ + ۱$

برای حلقه بیرونی $KVL \;\rightarrow\; ۲I_۱ + ۴I_۲ + ۴I_۳ + ۲I_۴ = ۰ \;\rightarrow\; ۲I_۱ + ۴I_۲ + ۴(I_۱ + ۱) + ۲I_۴ = ۰$

$\rightarrow \quad I_۴ = -۳I_۱ - ۲I_۲ - ۲$

برای مش ۲ $KVL \;\rightarrow\; j۲(I_۲ - I_۱) + j۲(I_۳ - I_۴) + ۴I_۲ + j۲ = ۰ \rightarrow -jI_۱ + (۲ + j)I_۲ + jI_۳ - jI_۴ = -j$

برای مش ۴ $KVL \;\rightarrow\; j۴(I_۴ - I_۳) + j۲(I_۱ - I_۲) - j۲ + ۲I_۴ = ۰ \;\rightarrow\; jI_۱ - jI_۲ - j۲I_۳ + (۱ + j۲)I_۴ = j$

$$\begin{cases} -jI_۱ + (۲ + j)I_۲ + j(I_۱ + ۱) - j(-۳I_۱ - ۲I_۲ - ۲) = -j \\ jI_۱ - jI_۲ - j۲(I_۱ + ۱) + (۱ + j۲)(-۳I_۱ - ۲I_۲ - ۲) = j \end{cases} \rightarrow \begin{cases} j۳I_۱ + (۲ + j۳)I_۲ = -j۴ \\ (۳ + j۷)I_۱ + (۲ + j۵)I_۲ = -۲ - j۷ \end{cases}$$

$$\rightarrow \quad I_۱ = \frac{\begin{vmatrix} -j۴ & ۲ + j۳ \\ -۲ - j۷ & ۲ + j۵ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} j۳ & ۲ + j۳ \\ ۳ + j۷ & ۲ + j۵ \end{vmatrix}} = \frac{۳ + j۱۲}{-j۱۷} = -۰/۷۱ + j۰/۱۷$$

$$\rightarrow \quad I_۲ = \frac{\begin{vmatrix} j۳ & -j۴ \\ ۳ + j۷ & -۲ - j۷ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} j۳ & ۲ + j۳ \\ ۳ + j۷ & ۲ + j۵ \end{vmatrix}} = \frac{-۷ + j۶}{-j۱۷} = -۰/۳۵ + j۰/۴۷ \qquad , \qquad I_۳ = I_۱ + ۱ = ۰/۲۹ + j۰/۱۷$$

$I_۴ = -۳I_۱ - ۲I_۲ - ۲ = -۳(۰/۲۹ + j۰/۱۷) - ۲(-۰/۳۵ + j۰/۴۷) - ۲ = -۲/۲ - j۰/۴۵$

با توجه به شکل مسئله داریم.

$I_x = I_۴ - I_۲ = (-۲/۲ - j۰/۴۵) - (-۰/۳۵ + j۰/۴۷) = -۱/۸۵ - j۱/۹۲ = ۲/۶۷\angle -۱۳۳/۹$

$\rightarrow \quad i_x(t) = ۲/۶۷\cos(۲t - ۱۳۳/۹^\circ)$

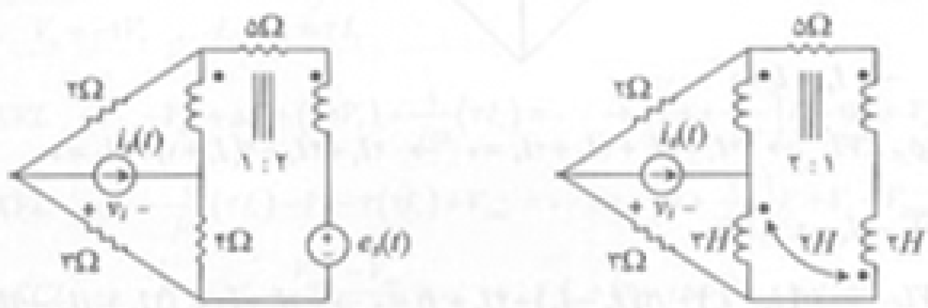
KVL برای مش۱ $\rightarrow\ V_1 + 2I_1 + j2(I_1 - I_3) + j2(I_2 - I_3) = 0$

$$V_1 + 2(-0/71 + j0/17) + j2(-0/71 + j0/17 + 0/35 - j0/47) + j2(0/29 + j0/17 + 2/2 + j1/45) = 0$$

$$\rightarrow\ V_1 = -4/06 + j3/3 = 5/2\angle 140/5^\circ\ \rightarrow\ v_1(t) = 5/2\cos(2t + 140/5^\circ)$$

مسئله ۴۵

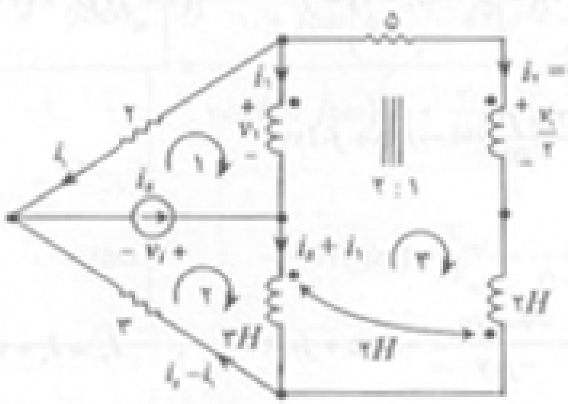
$v_1(t) = ?$



(ب) (الف)

شکل مسئله ۴۵

حل: الف ـ ازآنجا که به حالت دایمی سینوسی اشاره ای نشده است ومنابع ثابته موجود درمدارنامعلوم اند لذا به محاسبه معادله دیفرانسیل v_1 بر حسب منابع ثابته اکتفا خواهیم کرد.



همانطورکه ملاحظه می شود جریان تمامی شاخه ها رامی توان برحسب جریان طرف اول ترانسفورماتور ایده آل (i_1) و منبع جریان بدست آورد. در ادامه با بکارگیری روش تحلیل مش و با استفاده از نمایش اپراتوری معادلات دیفرانسیل داریم.

KVL برای مش۱ $\rightarrow\ -2i_1 + v_1 + v_s = 0$

KVL برای مش۲ $\rightarrow\ -v_s + \left[2D(i_s + i_1) - 2D(-2i_1)\right] + 3(i_s - i_1) = 0$

$$\rightarrow \quad (۷D-۳)i_1+v_2=-(۳D+۳)i_s$$

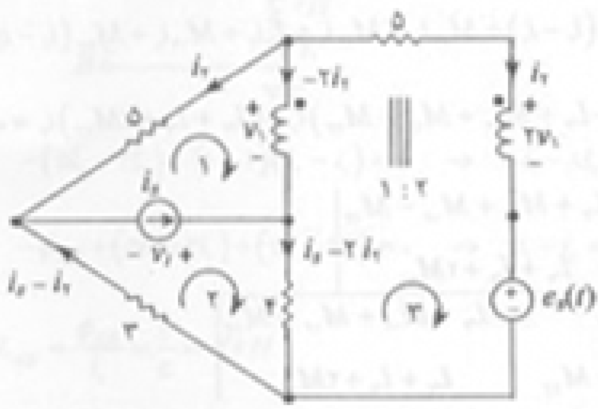
برای حلقه بیرونی $KVL \quad \rightarrow \quad -۲i_1+۵(-۲i_1)+\frac{v_1}{۲}+\left[۲D(-۲i_1)-۲D(i_s+i_1)\right]+۳(i_s-i_1)=۰$

$$\rightarrow \quad (۶D+۱۵)i_1+\frac{v_1}{۲}=-(۳-۲D)i_s$$

$$\rightarrow \quad v_2=\frac{\begin{vmatrix} -۲ & ۱ & ۰ \\ ۷D-۳ & ۰ & -(۳D+۳)i_s \\ ۶D+۱۵ & \frac{۱}{۲} & (۳-۲D)i_s \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -۲ & ۱ & ۱ \\ ۷D-۳ & ۰ & -۱ \\ ۶D+۱۵ & \frac{۱}{۲} & ۰ \end{vmatrix}}=\frac{-\left(۴D^۲+۹۳D+۳۹\right)}{-\left(\frac{۵D}{۲}+\frac{۳۵}{۲}\right)}i_s$$

$$\rightarrow \quad \frac{۵}{۲}\frac{dv_2}{dt}+\frac{۳۵}{۲}v_2=۴\frac{d^۲i_s}{dt^۲}+۹۳\frac{di_s}{dt}+۳۹i_s$$

ب ــ همانند قسمت (الف) عمل می کنیم.



برای مش۱ $KVL \quad \rightarrow \quad -۵i_1+v_1+v_2=۰$

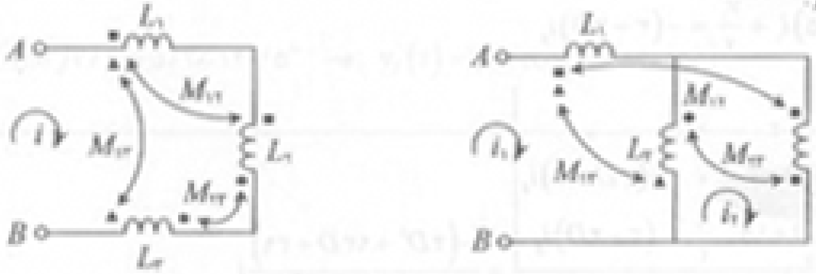
برای مش۲ $KVL \quad \rightarrow \quad ۳(i_s-i_1)-v_2+۴(i_s-۲i_1)=۰ \quad \rightarrow \quad ۱۱i_1+v_2=۷i_s$

برای مش۳ $KVL \quad \rightarrow \quad -۴(i_s-۲i_1)-v_1+۵i_1+۲v_1+e_s=۰ \quad \rightarrow \quad ۱۳i_1+v_1=۴i_s-e_s$

$$\rightarrow \quad v_2=\frac{\begin{vmatrix} -۵ & ۱ & ۰ \\ ۱۱ & ۰ & ۷i_s \\ ۱۳ & ۱ & ۴i_s-e_s \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -۵ & ۱ & ۱ \\ ۱۱ & ۰ & ۱ \\ ۱۳ & ۱ & ۰ \end{vmatrix}}=\frac{۴۷i_s+۱۱e_s}{۲۹} \quad \rightarrow \quad v_2=\frac{۸۲}{۲۹}i_s+\frac{۱۱}{۲۹}e_s$$

مسئله ۴۶

$L_{AB} = ?$



(ب) شکل مسئله ۴۶ (الف)

حل : الف ـ با نوشتن KVL برای هر دو حلقه مدار داریم.

KVL برای مش۱ $\rightarrow \quad -\phi_{AB} + L_1 i_1 + M_{13} i_2 - M_{12}(i_1 - i_2) + L_2(i_1 - i_2) - M_{23} i_2 - M_{12} i_1 = 0$

$$\rightarrow \quad (L_1 + L_2 - 2M_{12}) i_1 + (-L_2 + M_{13} + M_{12} - M_{23}) i_2 = \phi_{AB}$$

KVL برای مش۲ $\rightarrow \quad L_2(i_2 - i_1) + M_{23} i_2 + M_{13} i_1 + L_3 i_2 + M_{23} i_2 + M_{12}(i_1 - i_2) = 0$

$$\rightarrow \quad (-L_2 + M_{12} + M_{13} - M_{23}) i_1 + (L_2 + L_3 + 2M_{23}) i_2 = 0$$

$$i_1 = \frac{\begin{vmatrix} \phi_{AB} & -L_2 + M_{13} + M_{12} - M_{23} \\ 0 & L_2 + L_3 + 2M_{23} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} L_1 + L_2 - 2M_{12} & -L_2 + M_{13} + M_{12} - M_{23} \\ -L_2 + M_{13} + M_{12} - M_{23} & L_2 + L_3 + 2M_{23} \end{vmatrix}}$$

$$\rightarrow \quad L_{AB} = \frac{\phi_{AB}}{i_1} = \frac{(L_1 + L_2 - 2M_{12})(L_2 + L_3 + 2M_{23}) - (-L_2 + M_{13} + M_{12} - M_{23})^2}{L_2 + L_3 + 2M_{23}}$$

ب ـ همانند قسمت (الف) عمل می کنیم.

$$\phi_{AB} = (L_1 i + M_{13} i - M_{12} i) + (L_3 i + M_{13} i - M_{23} i) + (L_2 i - M_{12} i - M_{23} i)$$

$$= (L_1 + L_3 + L_2 + 2M_{13} - 2M_{12} - 2M_{23}) i$$

$$\rightarrow \quad L_{AB} = \frac{\phi_{AB}}{i} = L_1 + L_3 + L_2 + 2(M_{13} - M_{12} - M_{23})$$

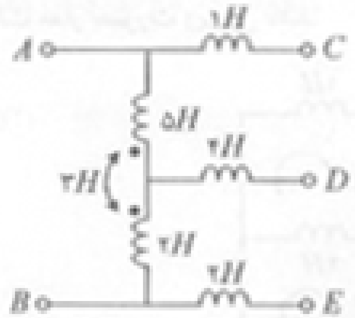
مسئله ۴۷

؟ = L_{AB} به شرط اتصالهای زیر.

الف ـ C به D.

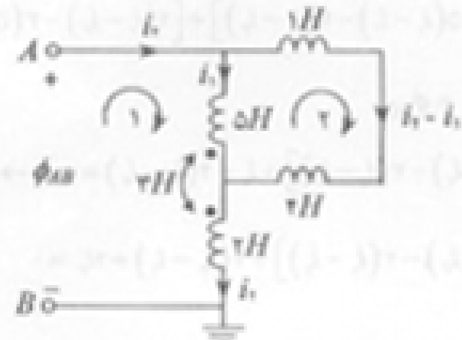
ب ـ D به E.

پ ـ C و E به D



شکل مسئله ۴۷

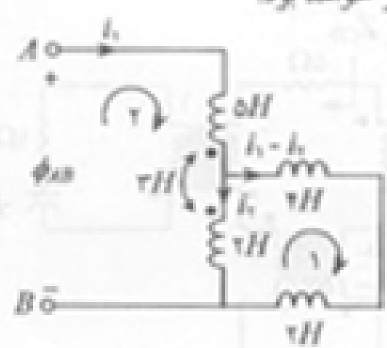
حل : الف ـ در این حالت مدار بصورت زیر خواهد بود.



$$\begin{cases} \text{KVL برای مش ۱} \rightarrow -(5i_2 - 2i_1) + (1+2)(i_1 - i_2) = 0 \rightarrow 10 i_2 - 8 i_1 = 0 \\ \text{KVL برای مش ۲} \rightarrow -\phi_{AB} + (5i_2 - 2i_1) + (2i_1 - 2i_2) = 0 \rightarrow 3i_2 - i_1 = \phi_{AB} \end{cases}$$

$$\rightarrow i_1 = \frac{5}{3}\phi_{AB} \rightarrow L_{AB} = \frac{\phi_{AB}}{i_1} = \frac{3}{5} = 0/6H$$

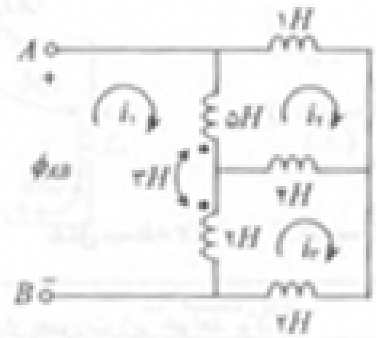
ب ـ در این حالت مدار بصورت زیر خواهد بود.



$$\begin{cases} \text{KVL برای مش ۱} \rightarrow -(2i_2 - 2i_1) + (2+2)(i_1 - i_2) = 0 \rightarrow 4i_1 - 8i_2 = 0 \\ \text{KVL برای مش ۲} \rightarrow -\phi_{AB} + (5i_1 - 2i_2) + (2i_2 - 2i_1) = 0 \rightarrow 3i_1 - i_2 = \phi_{AB} \end{cases}$$

$$\rightarrow\ i_1=\frac{8}{7}\phi_{AB}\ \rightarrow\ L=\frac{\phi_{AB}}{i_1}=\frac{7}{8}H$$

پ ـ در این حالت مدار بصورت زیر می باشد.



$$KVL \text{ برای مش ۱ } \rightarrow\ -\phi_{AB}+\left[5(i_1-i_2)-3(i_1-i_3)\right]+\left[4(i_1-i_3)-3(i_1-i_2)\right]=0$$

$$\rightarrow\ i_1-2i_2+i_3=\phi_{AB}$$

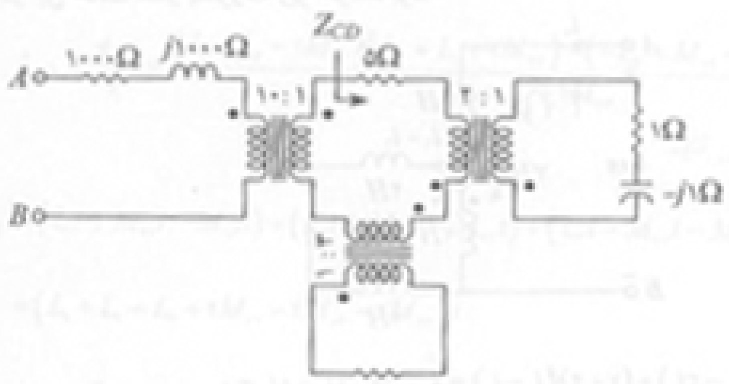
$$KVL \text{ برای مش ۲ } \rightarrow\ -\left[5(i_1-i_2)-3(i_1-i_3)\right]+i_2+4(i_2-i_3)=0\ \rightarrow\ -2i_1+10i_2-7i_3=0$$

$$KVL \text{ برای مش ۳ } \rightarrow\ -\left[4(i_1-i_3)-3(i_1-i_2)\right]+4(i_3-i_2)+4i_3=0\ \rightarrow\ i_1-7i_2+8i_3=0$$

$$\rightarrow\ i_1=\frac{\begin{vmatrix}\phi_{AB} & -2 & 1\\ 0 & 10 & -7\\ 0 & -7 & 8\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & -2 & 1\\ -2 & 10 & -7\\ 1 & -7 & 8\end{vmatrix}}=\frac{31\phi_{AB}}{17}\ \rightarrow\ L_{AB}=\frac{\phi_{AB}}{i_1}=\frac{17}{31}H$$

مسئله ۴۸

$Z_{AB}=?$



شکل مسئله ۴۸

حل : با توجه به شکل مسئله و نسبت تبدیل ترانسفورماتورها داریم:

$$Z_{CD} = ۵ + (۲)^۲ (۱ - j۱) + (۳)^۲ (۰/۶) = ۱۴/۴ - j۴$$

و در نهایت خواهیم داشت.

$$Z_{AB} = ۱۰۰۰ + j۱۰۰۰ + (۱۰)^۲ Z_{CD} = ۱۰۰۰ + j۱۰۰۰ + ۱۴۴۰ - j۴۰۰ = ۲۴۴۰ + j۶۰۰ \ \Omega$$