انتگرال معین و نامعین :

۱– برای محاسبه $\int \sqrt{1 \pm \sin x}\,dx$ از اتحاد $1 \pm \sin x = (\sin\frac{x}{2} \pm \cos\frac{x}{2})^2$ و برای محاسبه $\int \sqrt{1 \pm \cos x}\,dx$ از اتحاد های $1 + \cos x = 2\cos^2\frac{x}{2}$ و $1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$ استفاده کنید .

۲– برای محاسبه $\int p(x)(ax+b)^n\,dx$ که $p(x)$ یک چند جمله ای دلخواه است قرار دهید $u = ax + b$.

۳– برای محاسبه انتگرال از توان های زوج سینوس یا کسینوس و یا حاصل ضربی از این دو از فرمول کاهش توان که در نکته اول گفته‌شده استفاده کنید .

۴– برای محاسبه $\int \sin^m x \cos^n x\,dx$ وقتی که حداقل یکی از توان ها فرد باشد ، از توان فرد یک واحد جدا کرده بقیه عبارت را بر حسب عبارت مثلثاتی دیگر می نویسیم و از تغییر متغیر عکس آن عبارت جدا کرده استفاده می کنیم . یعنی اگر $\sin x$ را جدا کردیم u را برابر $\cos x$ می گیریم و برعکس .

۵– برای محاسبه $\int \tan^m x \sec^n x\,dx$ اگر m فرد باشد ، $\tan x \sec x$ را جدا کرده و توان باقی مانده از تانژانت را که یه عدد زوج است بر حسب $\sec x$ می نویسیم و از تغییر متغیر $u = \sec x$ استفاده می کنیم .

۶– با مفروضات نکته بالا اگر n زوج باشد ، $\sec^2 x$ را جدا می کنیم و توان باقی مانده از سکانت را که عددی زوج است بر حسب تانژانت می نویسیم و از تغییر متغیر $u = \tan x$ بهره می بریم .

۷– برای محاسبه $\int \cot^m x \csc^n x\,dx$ مانند نکات بالا عمل می کنیم با این تفاوت که به جای تانژانت از کتانژانت و به جای سکانت از کسکانت استفاده می کنیم .

۸– برای محاسبه انتگرال یک کسر گویا بر حسب سینوس و کسینوس قرار می دهیم $z = \tan\frac{x}{2}$ و به این ترتیب داریم :

$$\sin x = \frac{2z}{1+z^2} \quad , \quad \cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2} \quad , \quad dx = \frac{2dz}{1+z^2}$$

۹– برای محاسبه $\int \frac{dx}{a\sin^2 x + b\cos^2 x + c}$ صورت و مخرج را بر $\cos^2 x$ تقسیم کرده و سپس از تغییر متغیر $u = \tan x$ استفاده کنید .

۱۰– برای محاسبه انتگرال توابع رادیکالی باید به نحوی کل عبارت زیر رادیکال را به یک عبارت مربع کامل تبدیل کنیم تا بتوانیم مقدار انگرال را محاسبه کنیم . خصوصا برای $\sqrt[n]{ax+b}$ از تغییر متغیر $u = ax + b$ استفاده کنید .

۱۱– در مواجه شدن با $\sqrt{a^2 - x^2}$ و $\sqrt{a^2 + x^2}$ و $\sqrt{x^2 - a^2}$ به ترتیب از $x = a\sin\theta$ ، $x = a\tan\theta$ و $x = a\sec\theta$ استفاده کرده و حدود θ را طوری انتخاب کنید که تابع مثلثاتی دارای معکوس باشد .

۱۲– در مواجه شدن با کسرهای گویا چنانچه درجه صورت از درجه مخرج کمتر باشد از روش تجزیه کسرهای جزئی کمک می گیریم . به این ترتیب که مخرج را به عوامل سازنده آن ، تجزیه کرده و متناظر هر عامل کسر می نویسیم . اگر درجه صورت از مخرج بیشتر بود ابتدا صورت را بر مخرج تقسیم کرده و باقی مانده آن را با روش زیر تجزیه کسر می کنیم .

الف) به جای عبارت $(x-a)^k$ که $k \in N$ ، مجموع k کسر به شکل زیر نوشته می شود :

$$\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\dots+\frac{A_k}{(x-a)^k}$$

ب) به جای عبارت $(x^2+ax+b)^k$ که $\Delta < 0$ ، k کسر زیر را قرار می دهیم :

$$\frac{B_1x+C_1}{x^2+ax+b}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+ax+b)^2}+\dots+\frac{B_kx+C_k}{(x^2+ax+b)^k}$$

برای محاسبه ضرایب کافی است دو طرف تساوی را در مخرج کسر ضرب کرده و ضرایب چند جمله های ایجاد شده در دو طرف را با هم مقایسه کنیم .

۱۳– برای محاسبه ضریب A_k در حالت (الف) از رابطه $A_k = \lim\limits_{x\to a}(x-a)^k f(x)$ استفاده کنید .

۱۴– در مواجه شدن با حاصل ضرب چند جمله ای در نمایی و سینوس و کسینوس مثلثاتی و هیپربولیک و لگاریتم یا حاصل ضرب توابع نمایی در سینوس وکسینوس از روش جزء به جزء استفاده کنید .

۱۵– برای محاسبه انتگرال هایی مانند $\int \ln x\,dx$ ، $\int \mathrm{Arcsin}\,x\,dx$ ، $\int (\mathrm{Arctan}\,x)^2\,dx$ و ... که انتگرال مورد نظر فقط شامل یک عبارت است ایده اصلی استفاده از روش جزء به جزء با گرفتن آن عبارت به عنوان u و قرار دادن $dx = dv$ است .

۱۶– انتگرال های توان های فرد $\sin ax$ و $\cos ax$ بر بازه هایی که طول آن برابر ضریبی از دوره تناوب است ، صفر می شود .

۱۷– انتگرال هر تابع فرد پیوسته بر بازه متقارن برابر صفر است .

۱۸– قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال :

$$\frac{d}{dx}\int_{v(x)}^{u(x)} f(t)\,dt = u'(x)f(u(x)) - v'(x)f(v(x))$$

۱۹– برای محاسبه حد مجموع ریمان (وقتی تعداد جملات برابر n باشد) جمله عمومی عبارت داده شده را برابر $\frac{1}{n}f(c_k)$ قرار داده و آن را در n ضرب کرده و در آن $\frac{k}{n}$ ایجاد می کنیم . پس از شناسایی c_k که معمولا برابر $\frac{k}{n}$ انتخاب می شود و تبدیل $c_k \to x$ تابع $f(x)$ حاصل می شود و پاسخ برابر $\int_0^1 f(x)\,dx$ می باشد . دقت کنید که c_k می تواند هر عددی در بازه $\left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right]$ انتخاب شود ولی معمولا برابر $\frac{k}{n}$ می شود .

۲۰– برای محاسبه انتگرال های معینی که با استفاده از روش های تغییر متغیر و جزء به جزء حل نمی شوند یه ایده مناسب استفاده از تغییر متغیر u به شکل کران بالای انتگرال داده شده منهای x است .

انتگرال ناسره :

۲۱– در انتگرال هایی که بیش از یک ناسرگی دارند انتگرال را به دو بازه تقسیم کرده و همگرایی یا واگرایی انتگرال را به صورت جدا گانه در هر یک از آن ها بررسی می کنیم . همگرایی فقط زمانی رخ می دهد که انتگرال در همه ناسرگی ها همگرا باشد .

۲۲– انتگرال ناسره $\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ (که در آن $a>0$ می باشد) برای $p>1$ همگرا و برای $p\le 1$ واگراست .

۲۳– انتگرال ناسره $\int_0^a\frac{dx}{x^p}$ (که در آن $a>0$ می باشد) برای $p<1$ همگرا و برای $p\ge 1$ واگراست .

۲۴– انتگرال ناسره $\int_{x_0}^a\frac{dx}{(x-x_0)^p}$ (که در آن $a>x_0$ می باشد) برای $p<1$ همگرا و برای $p\ge 1$ واگراست .

۲۵– (آزمون مقایسه) اگر $\int_a^b f(x)\,dx$ و $\int_a^b g(x)\,dx$ فقط در x_0 ناسره بوده و در همسایگی نقطه ناسرگی داشته باشیم $f(x)\ge g(x)\ge 0$ در این صورت

الف) همگرایی $\int_a^b f(x)\,dx$ نتیجه می دهد که $\int_a^b g(x)\,dx$ همگراست .

ب) واگرایی $\int_a^b g(x)\,dx$ نتیجه می دهد که $\int_a^b f(x)\,dx$ واگراست .

۲۶– (آزمون هم ارزی) اگر $f(x)$ فقط در x_0 ناسره بوده و در این نقطه $f(x)\sim g(x)$ آن گاه $\int_a^b f(x)\,dx$ و $\int_a^b g(x)\,dx$ از لحاظ همگرایی یا واگرایی مثل هم هستند .

۲۷– اگر $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ فقط در بی نهایت ناسره بوده و در این نقطه $f(x)\sim\frac{1}{x^p}$ چنان چه $p>1$ انتگرال همگرا و برای $p\le 1$ واگراست .

۲۸– اگر $\int_a^b f(x)\,dx$ فقط در $x=x_0$ ناسره بوده و در این نقطه $f(x)\sim\frac{1}{(x-x_0)^p}$ چنان چه $p<1$ انتگرال همگرا و برای $p\ge 1$ واگراست .

۲۹– اگر $\int_a^b |f(x)|\,dx$ همگرا باشد ، آن گاه $\int_a^b f(x)\,dx$ همگرا (همگرای مطلق) است .

۳۰– برای محاسبه انتگرال ناسره به جز در حالتی که نقطه ناسرگی داخل بازه است ، نیازی به توجه به ناسرگی نیست و آن را مانند انتگرال معین محاسبه می کنیم . ولی در جایگذاری ناسرگی در تابع اولیه در صورت نیاز باید حد آن را جایگزین مقدار نماییم .

۳۱– تابع گاما با رابطه $\Gamma(p+1)=\int_0^{+\infty} t^p e^{-t}\,dt$ برای $p>-1$ تعریف شده و دارای رابطه بازگشتی $\Gamma(p+1)=p\Gamma(p)$ می باشد .

کاربرد انتگرال :

۳۲– مساحت ناحیه محدود توسط نمودار های $y = f(x)$ و $y = g(x)$ در فاصله $a \le x \le b$ که در این فاصله خط موازی محور y ها از یکی از دو نمودار وارد و از دیگری خارج شود برابر $\int_a^b |f(x) - g(x)|dx$ است .

۳۳– (روش دیسک) اگر ناحیه محدود بین دو نمودار $y = f(x)$ و $y = g(x)$ (که یکی سقف و دیگری کف ناحیه است .) حول خط $y = \beta$ دوران کند ، حجم جسم حاصل از دوران از رابطه زیر به دست می آید :

$$V = \pi\int_a^b (R_۲^۲ - R_۱^۲)\,dx = \pi\int_a^b \left|(g(x)-\beta)^۲ - (f(x)-\beta)^۲\right|dx$$

که R همان شعاع دوران می باشد .

۳۴– (روش پوسته استوانه ای) اگر ناحیه محدود بین دو نمودار f و g در فاصله $[a, b]$ (که یکی از نمودارها سقف و دیگری کف ناحیه است .) حول خط $x = \alpha$ دوران کند از رابطه $۲\pi\int_a^b |x - \alpha||f(x) - g(x)|dx$ زیر به دست می آید ($\int_a^b ۲\pi$ (ارتفاع) × (شعل دوران) dx) .

۳۵– روش دیسک فقط تاکید بر این نکته دارد که المان انتخاب شده **عمود** بر محور دوران باشد و هیچ الزامی به این که محور دوران محور x ها باشد **ندارد** . همچنین روش پوسته استوانه نیز فقط تاکید بر این مطلب دارد که المان انتخاب شده **موازی** محور دوران باشد و لزومی به دوران صرفا در جهت محور y ها **نیست**

۳۶– محور دوران نباید از داخل شکل عبور کند فقط در صورتی می تواند این اتفاق بیفتد که محور دوران محور تقارن ناحیه باشد. در این حالت نیمه بالایی یا پایینی جسم رو دوران داده و **نباید** پاسخ نهایی را در ۲ ضرب کنیم .

۳۷– طول قوس تابع f در بازه $[a, b]$ برابر $\int_a^b ds$ است . اگر تابع f به صورت $y = f(x)$ باشد $ds = \sqrt{۱ + f'^۲(x)}\,dt$ و اگر f پارامتری باشد به صورت $ds = \sqrt{x'^۲(t) + y'^۲(t)}\,dt$ می باشد .

۳۸– تابع f دارای مشتق مرتبه اول پیوسته است . مساحت سطح جانبی ایجاد شده در اثر دوران قسمتی از آن در فاصله $a \le x \le b$ حول محور افقی یا قائمی که منحنی را قطع نمی کند برابر $۲\pi\int_a^b R\,ds$ است که R همان شعاع دوران می باشد .

۳۹– اگر محور دوران (در دوران یک نمودار حول یک محور) محور تقارن نمودار باشد ، کافی است سطح جانبی حاصل از دوران نیمه ای از شکل که در یک طرف محور دوران واقع است را محاسبه کنیم و **نباید** پاسخ نهایی را در ۲ ضرب کنیم .

۴۰– قطعه سیمی در امتداد محور x ها و در فاصله $a \le x \le b$ طوری قرار دارد که چگالی خطی آن در هر نقطه $\delta(x)$ است . جرم جسم برابر $\int_a^b \delta(x)\,dx$ می باشد .

۴۱- D ناحیه ای در صفحه است که به محور x ها و نمودار $y = f(x)$ و خطوط $x = a$ و $x = b$ محدود شده است . مرکز هندسی این ناحیه $G(\bar{x}, \bar{y})$ است که :

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x f(x)\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx} \quad , \quad \bar{y} = \frac{\frac{۱}{۲}\int_a^b f^{۲}(x)\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx}$$

۴۲- **(قضیه اول پاپوس)** اگر ناحیه D در صفحه حول محوری که از داخل آن عبور نمی کند دوران کند ، حجم جسم حاصل از دوران برابر است با :

$$V = A \times ۲\pi d$$

که A مساحت ناحیه و d فاصله مرکز هندسی ناحیه از محور دوران است .

۴۳- **(قضیه دوم پاپوس)** اگر منحنی c در صفحه حول محوری که آن را قطع نمی کند دوران کند ، مساحت سطح ایجاد شده در اثر دوران برابر $l \times ۲\pi d$ می باشد که l طول قوس خم و d فاصله مرکز هندسی خم از محور دوران است .

۴۴- مساحت محدود توسط منحنی پارامتری $y = y(t)$ و $x = x(t)$ و خطوط $x = f(a)$ و $y = f(b)$ و محور x ها برابر $\int_{t=a}^{t=b} |y|\,dx = \int_a^b |y(t)||x'(t)|\,dt$ است .

۴۵ – اگر منحنی پارامتری $y = y(t)$ و $x = x(t)$ مورد نظر برای $a \le t \le b$ بسته و در جهت مثلثاتی باشد ، مساحت محدود توسط آن برابر $\int_{t=a}^{t=b} x\,dy = -\int_{t=a}^{t=b} y\,dx = \frac{۱}{۲}\int_{t=a}^{t=b} x\,dy - y\,dx$ می باشد .