Subject: 1   جلسه اول   Date:

صفحه (29)

سری فوریه:

فرض کنید f(x) [redacted] با دوره تناوب $p=2L$ باشد و [redacted] f(x) در محدوده $-L<x<L$ تکه‌ای پیوسته باشد (یعنی در این بازه تعداد نقاط ناپیوستگی تابع متناهی باشد)

در این صورت سری فوریه $F(x)$:

$$F(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)+b_n\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right)$$

که در آن $a_0, a_1, a_2, \dots$ و $b_1, b_2, \dots$ را ضرایب حقیقی سری فوریه می‌نامیم و از روابط زیر بدست می‌آید:

زوج $a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx \qquad n=0,1,2,\dots$

فرد $b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx \qquad n=1,2,\dots$

هدف سری فوریه این است که توابع متناوب را به صورت توابع متناوب sin و cos نمایش دهد

یادآوری:

تابع f(x) را فرد گوییم هرگاه دامنه متقارن باشد و $f(-x)=-f(x)$ (تقارن نسبت به مبدأ)

تابع f(x) را زوج گوییم هرگاه دامنه متقارن باشد و $f(-x)=f(x)$ (تقارن نسبت به محور y)

زوج = فرد × فرد
فرد = فرد × زوج
زوج = زوج × زوج

فرد = فرد + فرد
نه زوج نه فرد = فرد + زوج
زوج = زوج + زوج

Subject : ۲ Date :

$f(x)$ فرد $\rightarrow \int_{-L}^{L} \underbrace{f(x)}_{\text{فرد}} dx = 0$ *

$f(x)$ زوج $\rightarrow \int_{-L}^{L} f(x)dx = 2\int_{0}^{L} f(x)dx$ *

* کسینوس همواره زوج است : $\cos(\text{زوج}) = \text{زوج}$ ، $\cos(\text{فرد}) = \text{زوج}$

* سینوس همواره فرد است : $\sin(\text{زوج}) = \text{فرد}$ ، $\sin(\text{فرد}) = \text{فرد}$

* فرمول سری فوریه تابع فرد :

f فرد است $\rightarrow \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_n = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\frac{n\pi}{L}x) \\ b_n = \frac{2}{L}\int_0^L \underbrace{f(x)}_{\text{فرد}} \times \underbrace{\sin(\frac{n\pi}{L}x)}_{\text{فرد}} dx \;=\; \text{زوج}, \quad n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

* فرمول سری فوریه تابع زوج :

f زوج $\rightarrow b_n = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\frac{n\pi}{L}x) \\ a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos(\frac{n\pi}{L}x)dx, \quad n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

در امتحان معمولاً می‌گویند تابع می‌دهند که فرد و یا زوج باشد.

DOTO BONK

f زوج $\rightarrow b_1 = b_2 = \dots = 0$

فرض کنید سری فوریه تابع زوج

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \\ a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx \end{cases}$$

مثال:

تقارن داشته

سری فوریه تابع $(-\pi < x < \pi)$ تابع $\begin{cases} f(x) = x \\ P = 2\pi \end{cases}$ را بیابید

* همواره l برابر نصف P است. در نتیجه داریم: $l = \pi$

f فرد $\longrightarrow a_n = 0$

$$\longrightarrow b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin(nx)\,dx$$

* تکنیک بسیار مهم:

برای حل انتگرال هایی که جزء به جزء حل می‌شوند داریم:

مشتق ↓ چند جمله‌ای	sin یا cos یا نما ↓ انتگرال
x ⊕	$\sin(nx)$
1 ⊖	$-\frac{1}{n}\cos(nx)$
0	$-\frac{1}{n^2}\sin(nx)$

ادامه حل: $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin(nx)\,dx$

$= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{x}{n}\cos(nx) + \frac{1}{n^2}\sin(nx)\right]_0^{\pi}$

$= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\pi}{n}\overset{(-1)^n}{\cos(n\pi)} + \frac{1}{n^2}\overset{0}{\sin(n\pi)}\right]$

*هشدار: $\cos(n\pi) = (-1)^n$; $\sin(n\pi) = 0$

$\boxed{b_n = -\frac{2}{n}(-1)^n}$, $n = 1, 2, \ldots$

سری فوریه $f(x)$: $\boxed{f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2}{n}(-1)^n \sin(nx)}$

*چون تابع $f(x)$ فرد است ، در آخر sin داریم

جملات سری یا: $2\sin x - \sin(2x) + \frac{2}{3}\sin(3x) - \cdots$

مثال: سری فوریه $f(x) = x^2 \quad -1 < x < 1$ را بیابید.

* نکته بسیار مهم:

اگر دوره تناوب را نداشتیم آنگاه عدد بزرگ دامنه را از عدد کوچکتر کم میکنیم تا دوره تناوب به دست آید.

$P = 1 - (-1) = 2 \longrightarrow L = 1$

زوج $f \longrightarrow b_n = 0$

$$\longrightarrow a_n = \frac{2}{1} \int_0^1 x^2 \cos(n\pi x)\,dx \quad \text{رابطه ۲}$$

جزء به جزء جدولی

$x^2 \oplus$	$\cos(n\pi x)$
$2x \ominus$	$\frac{1}{n\pi} \sin(n\pi x)$
$2 \oplus$	$-\frac{1}{n^2\pi^2} \cos(n\pi x)$
0	$-\frac{1}{n^3\pi^3} \sin(n\pi x)$

مثبت و منفی ها را در نظر داشته باشید

$$a_n = 2 \left[\frac{x^2}{n\pi} \sin(n\pi x) + \frac{2x}{n^2\pi^2} \cos(n\pi x) - \frac{2}{n^3\pi^3} \sin(n\pi x) \right]_0^1$$

قرار دادن کران ها:

$$a_n = 2 \left[\frac{2}{n^2\pi^2} \cos(n\pi) \right]$$

$$a_n = 2 \left[\frac{2}{n^2\pi^2} (-1)^n \right] \longrightarrow a_n = \frac{4}{n^2\pi^2} (-1)^n \quad n \neq 0$$

وقتی که به این شکل فرض کردیم که مخرج به ازای بعضی از مقادیر n صفر شد، a_n را برای آن

PAPCO

* حتماً برای n حالت خاص محاسبه می‌کنیم:

$n=0 \rightarrow a_0 = 2\int_0^1 x^2\,dx = 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi x) = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2\pi^2}(-1)^n \cos(n\pi x)$$

* چون تابع زوج است، برحسب cos بدست می‌آید.

مثال:

سری فوریه تابع
$$f(x) = \begin{cases} 1+x & -\pi < x < 0 \\ 1-x & 0 < x < \pi \end{cases}$$
را بیابید. (تابع در ضابطه‌ای است)

* این جا نیز باید دوره تناوب را حتماً بدست بیاوریم:

$P = \pi - (-\pi) = 2\pi \longrightarrow l = \pi$

حتماً باید زوج و فرد را بررسی کنیم:

$$f(-x) = \begin{cases} 1+(-x) & , -\pi < -x < 0 \\ 1-(-x) & , 0 < -x < \pi \end{cases} = \begin{cases} 1-x & , 0 < x < \pi \\ 1+x & , -\pi < x < 0 \end{cases} = f(x)$$

پس تابع زوج است و داریم:

f زوج است $\rightarrow b_n = 0$

$$\longrightarrow a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$$

ویژگی توابع زوج

ادامه حل ←

Subject:
Year: ۸۴ Month: ۱۲ Date: ۹

$*\ a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1-x)\cos(nx)\,dx$ ① رابطه

ادامه حل:

$1-x$	$\cos(nx)$
-1	$\frac{1}{n}\sin(nx)$
0	$-\frac{1}{n^2}\cos(nx)$

$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{1-x}{n}\sin(nx) - \frac{1}{n^2}\cos(nx)\right]_0^{\pi}$

$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{-1}{n^2}(-1)^n + \frac{1}{n^2}\right]$

$\rightsquigarrow a_n = \frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^{n+1}+1\right) \quad , \quad n \neq 0$

هنوز پس از قرار دادن $n \neq 0$ ضرایب را کامل می‌کنیم

$*$ ① رابطه صفر قرار دادن $\xrightarrow{n=0}$ $a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1-x)\,dx = \frac{2}{\pi}\left[x-\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi}$

$\rightarrow a_0 = 2-\pi$

$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nx)$ جایگذاری

$= \frac{2-\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^{n+1}+1\right)\cos(nx)$: سری فوریه $f(x)$

PAPCO

مثال: سری فوریه ی تابع زیر را بیابید:

$$\begin{cases} f(x) = \cos(3x) , & 0 < x < \pi \\ f(x) = -f(-x) , & -\pi < x < 0 \end{cases}$$

به تنهایی نه زوج و نه فرد است، زیرا متقارن نیست

این شرط تابع را فرد می کند

$P = 2\pi \rightarrow l = \pi$

فرد است f $\rightarrow a_n = 0$

$\rightarrow b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx$

$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(3x) \sin(nx)\, dx$

یادآوری:

* تذکر:

دانستن اتحادهای موجود در ریاضی مهندسی ضرب توابع مثلثاتی sin و cos است و طرح

$\sin A \cos B = \frac{1}{2} [\sin(A+B) + \sin(A-B)]$

$\cos A \cos B = \frac{1}{2} [\cos(A+B) + \cos(A-B)]$

$\sin A \sin B = \frac{1}{2} [\cos(A-B) - \cos(A+B)]$

چون ۲ بیرون آمده

$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [\sin(n+3)x + \sin(n-3)x]\, dx$ ادامه حل: از رابطه ۱

فاکتورگیری از منفی

$b_n = -\frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{n+3} \cos(n+3)x + \frac{1}{n-3} \cos(n-3)x \right]_0^{\pi}$

PAPCO

ادامه حل.

ادامه حل: $b_n = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n+3}\cos(n+3)\pi + \frac{1}{n-3}\cos(n-3)\pi - \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n-3}\right]$

$(-1)^{n+3} = -(-1)^n$ $\qquad$ $(-1)^{n-3} = -(-1)^n$

$$= \frac{1}{\pi}\left[(-1)^n\underbrace{\left(\frac{1}{n+3}+\frac{1}{n-3}\right)}_{\frac{2n}{n^2-9}} + \underbrace{\left(\frac{1}{n+3}+\frac{1}{n-3}\right)}_{\frac{2n}{n^2-9}}\right]$$

در $-\frac{1}{\pi}$ اثر داده شده

$$\boxed{b_n = \frac{2n\left((-1)^n+1\right)}{\pi(n^2-9)}} \qquad n \neq 3$$

توجه: $\ast$ $\xrightarrow{n=3}$ $b_3 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(6x)\,dx$

$$= -\frac{1}{6\pi}\left[\cos(6x)\right]_0^{\pi} = -\frac{1}{6\pi}\left[\cancel{\cos(6\pi)}^{1} - 1\right]$$

$\rightsquigarrow \boxed{b_3 = 0}$ چون که b_3 با جمله b_n متفاوت است

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin(nx) = \sum_{\substack{n=1\\ n\neq 3}}^{\infty} b_n\sin(nx) + \cancel{b_3}^{0}\sin(3x)$$

$$= \sum_{\substack{n=1\\ n\neq 3}}^{\infty}\frac{2n\left((-1)^n+1\right)}{\pi(n^2-9)}\sin(nx)$$

مثال: ~~[illegible]~~

سری فوریه‌ی تابع $f(x)=e^{2x}$ با $-\pi<x<\pi$ را بیابید

$P=2\pi \longrightarrow l=\pi$

تابع f نه زوج و نه فرد است

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{2x}\cos(nx)\,dx$$

* تکنیک بسیار مهم: (فرمول در صفحه‌ی ۱۱ کتاب)

دسته‌ی سوم توابعی که باید در ریاضی مهندسی انتگرال گرفت ضرب e^{nx} در توابع مثلثاتی sin و cos ای است.

cos یا sin	تابع
$\cos(nx)$ (+)	e^{2x}
$-n\sin(nx)$ (−)	$\frac{1}{2}e^{2x}$
$-n^2\cos(nx)$	$\frac{1}{4}e^{2x}$

مشتق ۲

انتگرال ۲ بار

ضرب X

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\frac{1}{2}e^{2x}\cos(nx)+\frac{n}{4}e^{2x}\sin(nx)}{1-\left(-\frac{n^2}{4}\right)}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$\sin(nx) \to 0$

طبق فرمول ۱

ضرب دو ضریب آخر جدول

* نکته مهم: $(-1)^{-n}=(-1)^{n}$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\frac{1}{2}e^{2\pi}\cos(n\pi)-\frac{1}{2}e^{-2\pi}\cos(-n\pi)}{1+\frac{n^2}{4}}\right]$$

$\cos(n\pi) \to (-1)^n$

ادامه حل ←
$$a_n = \frac{2(-1)^n}{\pi(n^2+4)} \times \left(e^{2\pi} - e^{-2\pi}\right)$$

$$2\sinh(2\pi)$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{4(-1)^n \sinh(2\pi)}{\pi(n^2+4)}$$

در نتیجه ← n های مثالی داریم پس می توانیم از رابطه فوق مقدار a_0 را بیابیم.

$$n=0: \quad a_0 = \frac{\sinh(2\pi)}{\pi}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{2x} \sin(nx)\, dx = \dots\dots$$

* درس تا صفحه ۲۰ کتاب گفته شده است و جلسه آینده تا صفحه ۲۶ بخوانید.

تمرین ۱:

سری فوریه تابع $-\pi<x<\pi$ ، $f(x)=x-x^2$ را بیابید.

تمرین ۲:

سری فوریه تابع $-1<x<1$ ، $f(x)=\sinh x$ را بیابید.

تمرین ۳:

سری فوریه تابع $f(x)=\begin{cases} x^2 , & -\pi<x<0 \\ -x^2 , & 0<x<\pi \end{cases}$ را بیابید.

تمرین ۴:

سری فوریه تابع $f(x)=\begin{cases} f(x)=\sin(2x), & 0<x<\pi \\ f(x)=f(-x), & -\pi<x<0 \end{cases}$ را بیابید.

آیا شرط زوج را کشیده‌ات

تمرین ۵:

سری فوریه تابع $-\pi<x<\pi$ ، $f(x)=\cos(3x)$ را بیابید.

سؤال : تفسیر همگرایی :

آیا حاصل سری فوریه $f(x)$ (با $f(x)$) در نقطه‌ی x_0 برابر است ؟

قضیه :

f متناوب با دوره‌ی تناوب $P=2l$
f در محدوده‌ی $-l < x < l$
تکه‌ای پیوسته باشد.

f سری فوریه دارد. حاصل سری فوریه $f(x)$ در نقطه‌ی x_0 $\longrightarrow$

$$\longrightarrow \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to x_0^+} f(x) + \lim_{x\to x_0^-} f(x)\right)$$

نتیجه : f پیوسته باشد $\Rightarrow$ $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$

$\longrightarrow$ حاصل سری فوریه در نقطه x_0 $\longrightarrow = f(x_0)$

مثال:

سری فوریه تابع $f(x)=\begin{cases}1+x\,, & -\pi<x<0\\ 1-x\,, & 0<x<\pi\end{cases}$ را بیابید و حاصل سری فوریه را به ازای $x_0=0$, $x_0=1$, $x_0=5$, $x_0=\pi$, $x_0=8\pi$ را محاسبه کنید.

* $P=2\pi$

سری فوریه $f(x)$ (طبق جلسه قبل) $=\left(1-\frac{\pi}{2}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\left((-1)^{n+1}+1\right)}{\pi n^2}\cos(nx)$

*نکته: اگر x_0 نقطه‌ی شکستگی نباشد آنگاه حاصل $f(x_0)$ می‌شود. و اگر نقطه‌ی شکستگی باشد سری با $\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to x_0^+}f(x)+\lim_{x\to x_0^-}f(x)\right)$ برابر خواهد شد.

نقطه‌ی شکستگی

$\boxed{x=0}\rightarrow\left(1-\frac{\pi}{2}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\left((-1)^{n+1}+1\right)}{\pi n^2}=\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to x_0^+}f(x)+\lim_{x\to x_0^-}f(x)\right)$

$=\frac{1}{2}(1+1)=1$

نقطه‌ی پیوستگی

$\boxed{x=1}\rightarrow\left(1-\frac{\pi}{2}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\left((-1)^{n+1}+1\right)}{\pi n^2}\cos(n)=f(1)=0$

خواص توابع متناوب

نقطه‌ی پیوستگی

$\boxed{x=5}\rightarrow\left(1-\frac{\pi}{2}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\left((-1)^{n+1}+1\right)}{\pi n^2}\cos(5n)=f(5)=f(5-2\pi)$

دوره‌ی تناوب

ضابطه‌ی اول

$=1+(5-2\pi)=6-2\pi$

ادامهٔ حل:

نقطهٔ ناپیوستگی

$$\boxed{x=\pi} \rightarrow \left(1-\frac{\pi}{2}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\left((-1)^{n+1}+1\right)}{\pi n^2}\cos(n\pi)=\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to\pi^+}f(x)+\lim_{x\to\pi^-}f(x)\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to-\pi^+}f(x)+\lim_{x\to\pi^-}f(x)\right)=\frac{1}{2}\left((1+(-\pi))+(1+\pi)\right)=1-\pi$$

* چون بازهٔ π^+ را نداریم از خاصیت تابع متناوب استفاده می‌کنیم و $\pi^+-2\pi$ را می‌گذاریم

* نقطه‌ای است که چیزی است که ما را به ... می‌کند.

نقطهٔ ناپیوستگی

$$\boxed{x=8\pi} \rightarrow \left(1-\frac{\pi}{2}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\left((-1)^{n+1}+1\right)}{\pi n^2}\cos(8n\pi)=\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to8\pi^+}f(x)+\lim_{x\to8\pi^-}f(x)\right)$$

در بازه نیست

$$=\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to0^+}f(x)+\lim_{x\to0^-}f(x)\right)=\frac{1}{2}(1+1)=1$$

$8\pi^+-4(2\pi)$ دوره تناوب

$8\pi^--4(2\pi)$ دوره تناوب

* برای این مسئله تمام $K\pi$ ها با توجه به دامنهٔ تابع که از $\pi-$ تا π است، نقاط ناپیوستگی می‌شوند.

* برای کم کردن نقاط فقط از دورهٔ تناوب P استفاده می‌کنیم نه از L

مثال:

سری فوریه‌ی تابع $\begin{cases} f(x)=x^2, & -1<x<1 \\ P=2 \end{cases}$ را بنویسید و به کمک آن حاصل

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ و $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ را محاسبه کنید.

* در بیان ① فقط می‌توانستیم بگوییم سری‌های فوق همگرا هستند و لی در این جا مقدار آن‌ها را نیز می‌توانیم به دست آوریم

سری فوریه تابع $f(x)$ (حل شده قبل) $= \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2\pi^2}\cos(n\pi x) = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(n\pi x)$

اگر به جای $x=0$ بگذاریم می‌توانیم $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ را از سری فوق به دست آوریم

نقطه پیوستگی
طبق صورت سوال

$\boxed{x=0} \rightarrow \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = f(0) = 0$

$\rightarrow \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{1}{3} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{-\pi^2}{12}$

نقطه ناپیوستگی

$\boxed{x=1} \rightarrow \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 1^+} f(x) + \lim_{x\to 1^-} f(x)\right)$

در جازه نیست و از خاصیت توابع متناوب استفاده می‌کنیم.

$= \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to -1^+} f(x) + \lim_{x\to 1^-} f(x)\right) = \frac{1}{2}\left((-1)^2 + (1)^2\right) = 1$

$\rightarrow \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Subject:
Year. ۸۴ Month. ۱۲ Date. ۱۹ ( )

۱۷

سؤال:

آیا می‌توان سری فوریه $f(x)$ را در فاصله‌ای غیر از $(-l, l)$ به

دست آورد؟ بله

قضیه:

فرض کنیم $f(x)$ متناوب با دوره تناوب $P = 2l$ باشد در این صورت:

$$\int_{-l}^{l} f(x)\,dx = \int_{0}^{2l} f(x)\,dx = \int_{l}^{3l} f(x)\,dx = \int_{\frac{l}{2}}^{\frac{5l}{2}} f(x)\,dx = \dots = \int_{a-l}^{a+l} f(x)\,dx$$

* یعنی به جای کران ۴ ، هر مقداری را می‌توان به دلخواه قرار داد.

PAPCO

مثال:

سری فوریه‌ی تابع $f(x)=\begin{cases}1, & -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\\ 0, & \frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}\end{cases}$ را با نمایش پیوسته کنید. آنگاه

نشان دهید:

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots=\frac{\pi}{4}$$

(ص ۲۵۴ سالهای ۱۰۶، سوال ۳ ترم پیش) =

* همانطور که می‌بینیم دامنه متقارن نیست و داریم:

$$P=\frac{3\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=2\pi \longrightarrow l=\pi$$

* تابع f زوج است. دقت کنید.

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(nx)\,dx$$

مشکل اینجاست که $-\pi$ در بازه نیست.

جزوه‌ی مقصد $\longrightarrow \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}f(x)\cos(nx)\,dx$

بازه‌ها را می‌شکانیم تا $f(x)$ بدست آید.

$$=\frac{1}{\pi}\underbrace{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1)\cos(nx)\,dx}_{\text{زوج}}+\frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}(0)\cos(nx)\,dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos(nx)\,dx$$

ادامه حل: رابطه (*) $a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(nx)\,dx$

$$=\frac{2}{n\pi}\Big[\sin(nx)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} \Rightarrow a_n=\frac{2}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right),\quad n\neq 0$$

* فقط به جای $\cos(n\pi)=(-1)^n$ و $\sin(n\pi)=0$ جایگذاری می‌کنیم ولی در بیشتر موارد اصلاً دست به مثلثاتی‌ها دست نمی‌زنیم

(*) رابطه $n=0$ جایگذاری $\rightarrow a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx \Rightarrow a_0=1$

$$b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin(nx)\,dx$$

$$\xrightarrow{\text{طبق تعریف}}\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}f(x)\sin(nx)\,dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1)\underbrace{\sin(nx)}_{\text{فرد}}\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}(0)\sin(nx)\,dx$$

$$\rightarrow b_n=0$$

$$f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\right)$$

PAPCO ← ادامه حل

ادامهٔ حل:

حال a_n ، b_n و a_0 را جایگذاری می‌کنیم:

$$\boxed{f(x)\ \text{سری فوریه} = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cos(nx)}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n} \cos(nx)$$

* هر وقت در صورت سؤال سری باز بود یعنی جمع چنین عددی را داشتیم، سری

را باز می‌کنیم تا ببینیم به ازای چه مقدار x، باز شدهٔ صورت سؤال را می‌دهد.

$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\cos(x) - \frac{1}{3}\cos(3x) + \frac{1}{5}\cos(5x) - \frac{1}{7}\cos(7x) + \dots\right)$$

حال اگر $x=0$ را بگذاریم، سری باز شدهٔ صورت سؤال بدست می‌آید:

نقطهٔ پیوستگی

$$\boxed{x=0} \rightarrow \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) = \underbrace{f(0)}_{\text{یعنی}} = 1$$

مقدار سری فوریه در نقطهٔ ۰

$$\rightarrow \frac{2}{\pi}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}$$

سؤال :

آیا می‌توان سری فوریه $f(x)$ را در محدوده $0<x<l$ نوشت، بطوریکه سری فوریه $f(x)$ فقط سینوسی یا فقط کسینوسی باشد؟

بله – سری فوریه تابع فوق را، هم به صورت سینوسی و هم به صورت کسینوسی می‌توان نوشت:

توسیع (گسترش) زوج یا فرد:

توسیع زوج:

فرض کنیم $f(x)$ تابعی در محدوده $0<x<l$ باشد. تابع جدید $f^*(x)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{cases} f^*(x)=\begin{cases} f(x), & 0<x<l \\ f(-x), & -l<x<0 \end{cases} \\ p=2l \end{cases}$$

$$f^*(-x)=\begin{cases} f(-x), & 0<-x<l \\ f(x), & -l<-x<0 \end{cases}=\begin{cases} f(-x), & -l<x<0 \\ f(x), & 0<x<l \end{cases}$$

f^* تابع زوج است در نتیجه سری فوریه آن به صورت زیر است:

$$\begin{cases} f^*(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \\ a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f^*(x)\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx \end{cases}$$

چون $0 < x < l$ قرار دارد $\longrightarrow f^*(x) = f(x)$

سری فوریه کسینوسی f $\longrightarrow$

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \\ a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx \end{cases}$$

توسیع (گسترش) فرد:

فرض کنیم $f(x)$ در محدوده $0<x<l$ باشد، تابع جدید $f^*(x)$

را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$f^*(x)=\begin{cases} f(x), & 0<x<l \\ -f(-x), & -l<x<0 \end{cases}$$

f^* فرد است $\longrightarrow$
$$\begin{cases} f^*(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \\ b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f^*(x)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx \end{cases}$$

$$0<x<l \longrightarrow f^*(x)=f(x)$$

سری فوریه سینوسی f $\longrightarrow$
$$\begin{cases} f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \\ b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx \end{cases}$$

مثال:

سری فوریه کسینوسی $f(x)=x \quad 0<x<\pi$ را بیابید.

تابع فرد است و سری فوریه سینوسی داریم زیرا $a_n=0$

* نکته بسیار بسیار مهم:

هرگاه بگویند سری فوریه سینوسی یا کسینوسی یک تابع را بدست آوریم، نیم تناوب بازه برابر با l می باشد.

$l=\pi$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(nx)\,dx \quad (*) \text{ رابطه}$$

$$\begin{array}{c|l} x \;(+) & \cos(nx) \\ 1 \;(-) & \frac{1}{n}\sin(nx) \\ 0 & -\frac{1}{n^2}\cos(nx) \end{array}$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{x}{n}\sin(nx)+\frac{1}{n^2}\cos(nx)\right]_0^{\pi} \rightarrow a_n=\frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n-1\right) \quad n\neq 0$$

حالت خاص $n=0$ در رابطه: $\rightarrow a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx$

$$\rightarrow a_0=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{2}\right)=\pi$$

$$\boxed{f(x)=\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\left((-1)^n-1\right)}{\pi n^2}\cos(nx)}$$

حل تمرین ۵ جلسه قبل

سری فوریه $-\pi < x < \pi$ ، $f(x) = \cos(3x)$ را بیابید . $L=\pi$

f زوج است $\longrightarrow b_n = 0$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(3x)\cos(nx)\,dx$$

* تذکر مهم :

$$\int_0^{L} \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx = \begin{cases} \frac{L}{2}, & m=n \\ 0, & m\neq n \end{cases}$$

$$\int_0^{L} \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx = \begin{cases} \frac{L}{2}, & m=n \\ 0, & m\neq n \end{cases}$$

طبق تذکرات بالا :

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(3x)\cos(nx)\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\begin{cases} \frac{\pi}{2} & n=3 \\ 0 & n\neq 3 \end{cases} = \begin{cases} 1, & n=3 \\ 0, & n\neq 3 \end{cases}$$

$$a_3 = 1 \ , \ a_0 = a_2 = a_4 = \dots = 0$$

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nx) = \overset{1}{a_3}\cos(3x) = \cos(3x)$$

جلسهٔ سوم تدریس :

صورت مختلط سری فوریه :

صورت مختلط سری فوریه

$f(x)$ متناوب با دورهٔ تناوب $2L$ ← $f(x)$ سری فوریه دارد

$f(x)$ در محدودهٔ $-L<x<L$ تعریف شد

$$\begin{cases} f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi}{L}x} \\ c_n=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\, e^{-i\frac{n\pi}{L}x}\,dx \quad n=0,\pm1,\pm2,\ldots \end{cases}$$

ضرایب مختلط سری فوریه

رابطهٔ بین ضرایب حقیقی و مختلط :

$$\begin{cases} a_n=c_n+c_{-n}, & n=0,1,2,\ldots \\ b_n=i\,(c_n-c_{-n}), & n=1,2,\ldots \end{cases}$$

مثال: صورت مختلط سری فوریه $f(x)=x \quad , \quad -\pi<x<\pi$ را بیابید و از روی
آن صورت حقیقی را بدست آورید.

$P=2\pi \quad L=\pi$

$$C_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,e^{-inx}\,dx \quad (*) \text{رابطه}$$

x (+)	e^{-inx}
1 (−)	$\frac{-1}{in}e^{-inx}$
0	$\frac{-1}{n^2}e^{-inx}$

$$C_n=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{-x}{in}e^{-inx}+\frac{1}{n^2}e^{-inx}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{-\pi}{in}\underbrace{e^{-in\pi}}_{(-1)^n}+\frac{1}{n^2}\underbrace{e^{-in\pi}}_{(-1)^n}-\frac{\pi}{in}\underbrace{e^{in\pi}}_{(-1)^n}-\frac{1}{n^2}\underbrace{e^{in\pi}}_{(-1)^n}\right]$$

حذف می‌شوند

یادآوری مهم: $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$

$$e^{in\pi}=\cos(n\pi)+\cancel{i\sin(n\pi)}=(-1)^n$$

$$e^{-in\pi}=\cos(n\pi)-\cancel{i\sin(n\pi)}=(-1)^n$$

ادامه حل ←

ادامهٔ حل:

حال از $(-1)^n$ در c_n فاکتور می‌گیریم:

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{-2\pi}{in}(-1)^n\right] \Rightarrow c_n = \frac{-(-1)^n}{in} \quad , \quad n \neq 0$$

حال $n=0$ را در رابطهٔ * جایگذاری می‌کنیم:

$$* \xrightarrow{n=0} c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{x}_{\text{فرد}}\, dx = 0$$

با توجه به اینکه کران‌ها متقارن‌اند.

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} c_n e^{inx} + \cancel{c_0}$$

صورت مختلط سری فوریه:

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{-(-1)^n}{in} e^{inx}$$

* $(-1)^{-n} = (-1)^n$ توجه کنید

هستند در سؤال:

$$a_n = c_n + c_{-n} = \frac{-(-1)^n}{in} + \frac{-(-1)^{-n}}{-in} = \frac{-(-1)^n}{in} + \frac{(-1)^n}{in} = 0$$

$$a_0 = c_0 + c_0 = 0$$

$$b_n = i(c_n - c_{-n}) = i\left(\frac{-(-1)^n}{in} - \frac{(-1)^n}{in}\right) = \frac{-2(-1)^n}{n}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}\cancel{a_0} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\cancel{a_n}\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2(-1)^n}{n}\sin(nx)$$

صورت حقیقی سری فوریه

«انتگرال فوریه»: جلسه 12

برای توابعی است که از $-\infty$ تا $+\infty$ باشند و شرایط داشتن انتگرال فوریه به صورت زیر است:

شرایط انتگرال فوریه:

۱- تابع $f(x)$ تابعی تکه‌ای پیوسته در محدوده $-\infty < x < \infty$

۲- $f(x)$ در محدوده‌ی $-\infty < x < \infty$ مطلقاً انتگرال‌پذیر باشد (یعنی قدر مطلق اش در انتگرال داشته باشیم):

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx = \text{عدد متناهی}$$

با داشتن شرایط فوق تابع $f(x)$ دارای انتگرال است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

امگا

$$f(x) = \int_0^{\infty} \left(a(\omega)\cos(\omega x) + b(\omega)\sin(\omega x)\right) d\omega$$

$$a(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(\omega x)\, dx$$

$$b(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(\omega x)\, dx$$

ضرایب حقیقی انتگرال فوریه

فرد f ← $a(\omega)=0$

$$\left\{\begin{array}{l} f(x)=\int_0^\infty b(\omega)\sin(\omega x)\,d\omega \\ b(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\sin(\omega x)\,dx \end{array}\right.$$

→ فرمول انتگرال فوریه تابع فرد

زوج f ← $b(\omega)=0$

$$\left\{\begin{array}{l} f(x)=\int_0^\infty a(\omega)\cos(\omega x)\,d\omega \\ a(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\cos(\omega x)\,dx \end{array}\right.$$

→ فرمول انتگرال فوریه تابع زوج

قضیه‌ی همگرایی:

حاصل انتگرال فوریه در نقطه x_0 $= \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to x_0^+} f(x) + \lim_{x\to x_0^-} f(x)\right)$

نتیجه ← f در x_0 پیوسته باشد ← حاصل انتگرال فوریه در نقطه x_0 $= f(x_0)$

هر روز تکرار مهم

مثال: (صفحه ۲۶۹ کتاب)

ابتدا انتگرال فوریه تابع $f(x) = \begin{cases} 1-x^2 , & |x|<1 \\ 0 , & |x|>1 \end{cases}$ را بیابید.

$-1<x<1$ ، $x<-1$ یا $x>1$

سپس به کمک آن حاصل $\int_0^\infty \frac{x\cos(x)-\sin(x)}{x^3}\cos\left(\frac{x}{2}\right)dx$ را بیابید.

تذکر بسیار مهم:

اولین کار در انتگرال فوریه این است که به جای x های انتگرال u یا v را قرار دهیم.

سپس باید ببینیم تابع در انتگرال زوج است یا فرد.

$$f(-x) = \begin{cases} 1-(-x)^2 , & |-x|<1 \\ 0 , & |-x|>1 \end{cases} = \begin{cases} 1-x^2 , & |x|<1 \\ 0 , & |x|>1 \end{cases}$$

در نتیجه تابع f زوج است و داریم:

f زوج است $\rightarrow b(\omega)=0$

$$\rightarrow a(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\cos(\omega x)\,dx$$

در فرمول

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^1 (1-x^2)\cos(\omega x)\,dx + \frac{2}{\pi}\int_1^\infty (0)\cos(\omega x)\,dx$$

0

* چون تابع چند ضابطه‌ای بود، ما تک‌تک کران ها را به ازای کران هر ضابطه می‌شکنیم.

ادامه حل ←

ادامهٔ حل:

$$a(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^1 (1-x^2)\cos(\omega x)\,dx$$

$1-x^2 \; (+)$	$\cos(\omega x)$
$-2x \; (-)$	$\frac{1}{\omega}\sin(\omega x)$
$-2 \; (+)$	$-\frac{1}{\omega^2}\cos(\omega x)$
0	$-\frac{1}{\omega^3}\sin(\omega x)$

$$a(\omega)=\frac{2}{\pi}\left[\frac{1-x^2}{\omega}\sin(\omega x)-\frac{2x}{\omega^2}\cos(\omega x)+\frac{2}{\omega^3}\sin(\omega x)\right]_0^1$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{-2}{\omega^2}\cos(\omega)+\frac{2}{\omega^3}\sin(\omega)\right]$$

$$=\frac{-4}{\pi}\left(\frac{\omega\cos\omega-\sin(\omega)}{\omega^3}\right)$$

* حتماً باید این عبارت داخل انتگرال بدست بیاید

انتگرال فوریه $f(x)$:

$$f(x)=\int_0^\infty a(\omega)\cos(\omega x)\,d\omega=\frac{-4}{\pi}\int_0^\infty \frac{\omega\cos\omega-\sin\omega}{\omega^3}\cos(\omega x)\,d\omega$$

* حال می‌بینیم چه مقدار x، انتگرال صورت سؤال را می‌سازد:

نقطهٔ پیوستگی

$$\boxed{x=\frac{1}{3}}\rightarrow\frac{-4}{\pi}\int_0^\infty\frac{\omega\cos\omega-\sin\omega}{\omega^3}\cos\left(\frac{\omega}{3}\right)d\omega$$

$$=f\left(\frac{1}{3}\right)=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}\Rightarrow\int_0^\infty\frac{\omega\cos\omega-\sin\omega}{\omega^3}\cos(\omega/3)\,d\omega=\frac{-2\pi}{9}$$

مثال ترم قبل:

به کمک انتگرال فوریه ثابت کنید:

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{1+\omega^2}\cos(\omega x)+\frac{\omega}{1+\omega^2}\sin(\omega x)\right)d\omega=\begin{cases}\pi e^{-x} & x>0\\ \frac{\pi}{2} & x=0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

*تذکر مهم:
فقط در نقاط پیوستگی تابع برابر با انتگرالش می شود.

جا تعجب به تذکر فوق: برای این است که کران ۰ را بیاییم.

فرض کنیم $f(x)=\begin{cases}\pi e^{-x} & x>0\\ 0 & x<0\end{cases}$. چون هم sin و هم cos داریم،

تابع f نه زوج است و نه فرد:

$$a(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos(\omega x)\,dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0}(0)\cos(\omega x)\,dx+\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\pi e^{-x}\cos(\omega x)\,dx$$

چون تابع چند ضابطه ای است کران ۰ را می شکنیم.

$\cos(\omega x)$ +	e^{-x}
$-\omega\sin(\omega x)$ −	$-e^{-x}$
$-\omega^2\cos(\omega x)$	e^{-x}

PAPCO ← ادامه حل

ادامه حل:

$$a(\omega) = \left[\frac{-e^{-x}\cos(\omega x) + \omega e^{-x}\sin(\omega x)}{1-(-\omega^2)} \right]_0^\infty$$

$$a(\omega) = \frac{1}{1+\omega^2}$$

$$b(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(\omega x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \pi e^{-x}\sin(\omega x)\,dx$$

$$\begin{array}{c|c} \sin(\omega x) & e^{-x} \\ \omega\cos(\omega x) & -e^{-x} \\ -\omega^2\sin(\omega x) & e^{-x} \end{array}$$

$$b(\omega) = \left[\frac{-e^{-x}\sin(\omega x) - \omega e^{-x}\cos(\omega x)}{1+\omega^2} \right]_0^\infty = \frac{\omega}{1+\omega^2}$$

$$f(x) = \int_0^\infty \left(a(\omega)\cos(\omega x) + b(\omega)\sin(\omega x)\right)d\omega$$

$$= \int_0^\infty \left(\frac{1}{1+\omega^2}\cos(\omega x) + \frac{\omega}{1+\omega^2}\sin(\omega x)\right) d\omega$$

نقطه ناپیوستگی

$x=0$ → انتگرال فوریه $= \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 0^+} f(x) + \lim_{x\to 0^-} f(x)\right)$

برای اثبات مقدار تابع در ه $= \frac{1}{2}(\pi + 0) = \frac{\pi}{2}$

PAPCO

سری فوریه جلسه ۲۸: انتگرال فوریه

فرض کنیم $f(x)$ تابعی تکه‌ای پیوسته (مطلقاً انتگرال‌پذیر در محدوده $0<x<\infty$ باشد.

یعنی قدر مطلقش انتگرال‌پذیر باشد.

در این صورت انتگرال فوریه $f(x)$ را می‌توان به دو شکل زیر نوشت:

انتگرال فوریه کسینوسی (توسیع زوج):

در این روش تابع جدید $f^*(x)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x) , & 0<x<\infty \\ f(-x) , & -\infty<x<0 \end{cases}$$

$$f^* \text{ زوج } \longrightarrow \begin{cases} f^*(x) = \int_0^\infty a(\omega)\cos(\omega x)\,d\omega \\ a(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f^*(x)\cos(\omega x)\,dx \end{cases}$$

$0<x<\infty$:

$$\text{انتگرال فوریه کسینوسی } f \longrightarrow \begin{cases} f(x) = \int_0^\infty a(\omega)\cos(\omega x)\,d\omega \\ a(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\cos(\omega x)\,dx \end{cases}$$

انتگرال فوریه سینوسی (توسیع فرد):

مطابق روش توسیع زوج می‌توان نوشت:

$$f(x) = \int_0^\infty b(\omega) \sin(\omega x)\, d\omega$$

$$b(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(x) \sin(\omega x)\, dx$$

انتگرال فوریه سینوسی f

مثال: (مسأله ۸.۱ صفحه ۲۵۶ کتاب) تمرین

به کمک انتگرال فوریه کسینوسی تابع $f(x) = \frac{\pi}{2} e^{-x}$ ثابت کنید:

$$\int_0^\infty \frac{\cos(\omega x)}{1+x^2}\, dx = \frac{\omega \pi}{2e}$$

صورت تذکر

* تابع فوق نه زوج است و نه فرد. پس هم بسط sin ای و هم بسط cos ای دارد:

$$a(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\pi}{2} e^{-x} \cos(\omega x)\, dx$$

به کمک جدول

$$= \left[\frac{-e^{-x}\cos(\omega x) + \omega e^{-x}\sin(\omega x)}{1+\omega^2} \right]_0^\infty = \frac{1}{1+\omega^2}$$

$$f(x) = \int_0^\infty a(\omega)\cos(\omega x)\, d\omega$$ انتگرال فوریه کسینوسی تابع f

نقطه ی پیوستگی

$$\boxed{x=1} \Rightarrow \int_0^\infty \frac{\cos(\omega)}{1+\omega^2}\, d\omega = f(1) = \frac{\pi}{2e}$$

فقط در $x=1$ است که می توان انتگرال فوریه را به صورت انتگرال داده شده در صورت سؤال جایگذاری آورد.

مثال:

به کمک انتگرال فوریه ثابت کنید:

$$\int_0^\infty \frac{\sin\omega}{\omega}\cos(\omega x)\,d\omega = \begin{cases}\frac{\pi}{2} & 0<x<1\\ \frac{\pi}{4} & x=1\\ 0 & x>1\end{cases}$$

* فرض کنیم

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\pi}{2} & 0<x<1\\ 0 & x>1\end{cases}$$

تذکر خیلی مهم:

چون $f(x)$ در محدوده $0<x<\infty$ قرار دارد لذا هم دارای انتگرال فوریه‌ی sin ای و هم cos ای داریم. ولی چون طرف دیگر تساوی دارای $\cos(\omega x)$ هستیم لذا انتگرال فوریه cos ای تابع را تشکیل می‌دهیم:

$$a(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\cos(\omega x)\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{\pi}{2}\cos(\omega x)\,dx + \frac{2}{\pi}\int_1^\infty (0)\cos(\omega x)\,dx$$

چون تابع صفر است

$$= \left[\frac{1}{\omega}\sin(\omega x)\right]_0^1 = \frac{\sin(\omega)}{\omega}$$

ادامه صفحه بعد

ادامه‌ی حل: $f(x) = \int_0^\infty a(\omega)\cos(\omega x)\, d\omega$

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{\sin(\omega)}{\omega} \cos(\omega x)\, d\omega$$

نقاط ناپیوستگی

$\boxed{x = 1}$ → انتگرال $= \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 1^+} f(x) + \lim_{x \to 1^-} f(x)\right) =$

برای اثبات متقارن تابع در این نقطه

$= \frac{1}{2}\left(0 + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$

به جای تعیین نیز خواهی توابع متناوب.

صورت مختلط انتگرال فوریه:

$f(x)$ در محدوده $-\infty < x < \infty$ تکه‌ای پیوسته و مطلقاً انتگرال پذیر است.

در این صورت: صورت مختلط انتگرال فوریه ⇐

$$\begin{cases} f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} c(\omega) e^{i\omega x} \, d\omega \\ c(\omega) = \dfrac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} \, dx \end{cases}$$

ضریب مختلط انتگرال فوریه

رابطه این ضرایب حقیقی ⇐

$$\begin{cases} a(\omega) = c(\omega) + c(-\omega) \\ b(\omega) = i\,(c(\omega) - c(-\omega)) \end{cases}$$

معادله موج (ارتعاش): صفحه ۱۸

معادله موج: $u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x,t)$

حل معادله موج متناهی:

تصور کنید طول نخ l را بر روی محور x در محدوده $0 < x < l$ قرار می‌دهیم. فرض کنیم

نخ کشسان باشد (یعنی در برابر نیرو از خود مقاومت نشان دهد و سریع پاره شود).

نخ را از حالت اولیه خود خارج کرده و آن را به ارتعاش در می‌آوریم در این صورت،

$u(x,t)$ (جواب معادله موج) مکان نقطه x از نخ نسبت به زمان را نشان می‌دهد.

معادله ارتعاش نخ متناهی حل نخواهد شد مگر اینکه شرایط زیر، برای معادله

موج داده شده باشد.

شرایط معادله موج:

$$\begin{cases} u(x,0) = f(x) & \text{حالت اولیه نخ } (t=0 \text{ در لحظه}) \\ u_t(x,0) = g(x) & \text{سرعت اولیه ارتعاش} \\ u(0,t) = p(t) & \text{ارتعاش در ابتدای نخ} \\ u(l,t) = q(t) & \text{ارتعاش در انتهای نخ} \end{cases}$$

(دو شرط اول: شرایط اولیه — دو شرط آخر: شرایط مرزی)

هرگاه $p(t)$ و $q(t)$ تواماً با هم صفر باشند مرز معادله موج را همگن می‌نامیم.

برای حل معادلات موج سه مرحله کار را انجام می دهیم

۱ـ همگن کردن معادله (در سؤال امتحانی هیچ گاه معادله غیر همگن نمی دهند و همواره با همگن فرض نمی کنیم)

۲ـ ایجاد یک سری از فرم جواب

۳ـ حل معادله

در جلسه گذشته از مرحله سوم شروع به حل و گفتن می کنیم

حل معادله موج با مرز همگن:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x,t)$$

شرایط معادله موج متناهی:

$$\begin{cases} u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 \end{cases}$$

شرایط مرزی همگن

* وقتی مرز همگن است که دو سر تخت ثابت باشد

وقتی شرایط مرزی همگن مطابق با یکی از چهار حالت، ابتدا فرم جواب معادله را

با یکی از چهار حالت زیر تشکیل می‌دهیم.

شرایط مرزی $\begin{cases} u(0,t)=0 \\ u(L,t)=0 \end{cases} \rightarrow$ فرم جواب $= u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} G_n(t)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$

شرایط مرزی $\begin{cases} u_x(0,t)=0 \\ u_x(L,t)=0 \end{cases} \rightarrow$ فرم جواب $= u(x,t)=G_0(t)+\sum_{n=1}^{\infty} G_n(t)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$

شرایط مرزی $\begin{cases} u(0,t)=0 \\ u_x(L,t)=0 \end{cases} \rightarrow$ فرم جواب $= u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} G_n(t)\sin(\lambda_n x)$

$$\lambda_n=\frac{2n-1}{2}\frac{\pi}{L}$$

شرایط مرزی $\begin{cases} u_x(0,t)=0 \\ u(L,t)=0 \end{cases} \rightarrow$ فرم جواب $= u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} G_n(t)\cos(\lambda_n x)$

حال فرم جواب های فوق را در معادله صدق می‌دهیم تا تابع مجهول $G_n(t)$

محاسبه شود.

مثال: معادله‌ی موج زیر را با شرایط داده شده حل کنید:

$$u_{tt} - 4u_{xx} = x + 2t$$

$$\begin{cases} u(x,0) = \sin(2x) \\ u_t(x,0) = 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \end{cases}$$

مرزها صفر است.

$L = \pi$

حل:

هدف یافتن $G(t)$ است: فرم جواب = $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t)\sin(nx)$

اولین کار قرار دادن فرم جواب در معادله است

مشتق‌گیری ۲ بار نسبت به

$$u_{tt} = \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{G}_n(t)\sin(nx)$$

$$u_{xx} = \sum_{n=1}^{\infty} -n^2 G_n(t)\sin(nx)$$

از $\sin(nx)$، ۲ بار مشتق گرفته‌ام

$$u_{tt} - 4u_{xx} = x + 2t \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{G}_n(t)\sin(nx) - 4\sum_{n=1}^{\infty} -n^2 G_n(t)\sin(nx)$$

$$= x + 2t$$

حال از $\sum_{n=1}^{\infty}$ فاکتور می‌گیریم:

$$\rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left(\ddot{G}_n(t) + 4n^2 G_n(t)\right)\sin(nx) = x + 2t$$ سری فوریه سینوسی:

PAPCO ادامه حل ←

از ادامه حل: سری فوریه سینوسی $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\ddot{G}_n(t)+4n^2G_n(t)\right)\sin(nx)=x+2t$

یادآوری: سری فوریه سینوسی $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx$$

از دل $\sum$ (مثلاً) مقدار ضریب (یعنی b_n) جدا سازی می‌کنیم.

* برای حل معادله‌ی منتج به ۴ سری فوریه‌ی sin یا cos ای در نظر می‌گیریم که برای حذف معادله ۲ تا برای یافتن a_n و b_n است.

$$\rightarrow \ddot{G}_n(t)+4n^2G_n(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+2t)\sin(nx)\,dx$$

چون می‌خواهیم انتگرال را محاسبه نکنیم و به جایش یک اندیس قرار دهیم و چون G برحسب t می‌باشد، باید ابتدا t را از داخل انتگرال درآوریم و به همین علت به ۲ انتگرال جزء تجزیه می‌کنیم:

$$=\underbrace{\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin(nx)\,dx}_{H_n}+t\,\underbrace{\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(nx)\,dx}_{K_n}$$

زیرا با قرار دادن کران‌ها به جای x، متغیر دیگری به نام x باقی نمی‌ماند که انتگرال به آن وابسته است.

معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم با ضرایب ثابت: $\ddot{G}_n(t) + 4n^2 G_n(t) = H_n + t K_n$

یادآوری:
معادلهی خطی مرتبه دوم با ضرایب ثابت:

$$a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = f(t)$$

معادله مشخصه (کمکی): $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$

(i) دو ریشه λ_1 و λ_2 دارد: $\rightarrow y = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + y^*$

(ii) یک ریشه $\lambda_1 = \lambda_2$ دارد: $\rightarrow y = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 t e^{\lambda_1 t} + y^*$

برای معادله موج: ریشه‌های مختلط $\alpha \pm i\beta$ دارد $\rightarrow y = c_1 e^{\alpha t}\cos(\beta t) + c_2 e^{\alpha t}\sin(\beta t) + y^*$

برای معادله لاپلاس: دو ریشه قرینه $\lambda_1 = -\lambda_2$ دارد $\rightarrow y = c_1 \cosh(\lambda_1 t) + c_2 \sinh(\lambda_1 t) + y^*$

تذکر مهم: y^* یک جواب خصوصی معادله ناهمگن است.

ادامه حل: معادله مشخصه: $\lambda^2 + 4n^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 2ni \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 2n \end{cases}$

$$G_n(t) = a_n \cos(2nt) + b_n \sin(2nt) + G_n^*(t)$$ ادامه ①

تذکر: $\ddot{G}_n(t) + 4n^2 G_n(t) = H_n + tK_n$ (۱)

به احتمال زیاد در امتحان به صورت زیر می‌دهند.

اگر طرف دوم معادله t وجود داشت یا توان t برابر یک بود برای محاسبه جواب خصوصی

می‌توان طرف دوم را بر ضریب G_n تقسیم نمود (۲)

$$G_n^*(t) = \frac{H_n + tK_n}{4n^2} \quad \text{رابطه ۲}$$

ضریب $G_n(t)$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t) \sin(nx)$$

حال روابط ۱ و ۲ را جایگذاری می‌کنیم.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(2nt) + b_n \sin(2nt) + \frac{H_n + tK_n}{4n^2} \right) \sin(nx)$$

«جواب معادله»

مشکل ما در جواب فوق مجهول بودن a_n و b_n است و برای یافتن a_n و b_n از

شرایط اولیه مسئله استفاده می‌کنیم.

* در جواب معادله $u(x,t)$ به جای t صفر قرار می‌دهیم $\rightarrow$ $u(x,0) = \sin(2x)$

سری فوریه سینوسی: $\xrightarrow{t=0} \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n + \frac{H_n}{4n^2} \right) \sin(nx) = \sin(2x)$

PAPCO: ادامه حل

ادامه حل:

و برای یافتن ضرایب a_n فوریه سینوسی داریم:

$$a_n + \frac{Hn}{4n^2} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(2x)\sin(nx)\,dx$$

$$\pi \to L \qquad \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(2x)\sin(nx)\,dx = P_n$$

$$\Rightarrow a_n = P_n - \frac{Hn}{4n^2}$$

طبق تمرین داده شده در صفحه ۲۶ جزوه
$$P_n = \frac{2}{\pi}\begin{cases}\frac{\pi}{2}, & n=2\\ 0, & n\neq 2\end{cases} = \begin{cases}1, & n=2\\ 0, & n\neq 2\end{cases}$$

$$P_2 = 1,\quad P_1 = P_3 = P_4 = \dots = 0$$

حال به جای t، صفر قرار داده، سپس از $u(x,0)$ مشتق نسبت به t می‌گیریم ← فرض مسئله: $u_t(x,0)=0$

$$\Rightarrow u_t(x,0) = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left(2nb_n + \frac{Kn}{4n^2}\right)\sin(nx) = 0$$ بسط فوریه سینوسی ۰

$$\to 2nb_n + \frac{Kn}{4n^2} = 0 \Rightarrow b_n = -\frac{Kn}{8n^3}$$

مثال: معادله موج زیر را با شرایط داده شده حل کنید:

$u_{tt} - 4u_{xx} = xt$

$$\begin{cases} u(x,0) = x \\ u_t(x,0) = 1 \\ u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0 \end{cases}$$ شرایط مرزی همگن

$L = 1$

چون مشتق ۲ سر نخ برابر صفر است حالت کسینوسی پیش می‌آید:

فرم جواب: $u(x,t) = G_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t) \cos(n\pi x)$

$u_{tt} = \ddot{G}_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{G}_n(t) \cos(n\pi x)$

$u_{xx} = 0 + \sum_{n=1}^{\infty} -n^2\pi^2 G_n(t) \cos(n\pi x)$

G_0 چون x ندارد مشتقش برابر با صفر است.

مشتق گیری به x

حال فرم جواب‌ها را در معادله جایگذاری می‌کنیم:

$u_{tt} - 4u_{xx} = xt$

$\rightarrow \ddot{G}_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{G}_n(t) \cos(n\pi x) - 4\sum_{n=1}^{\infty} -n^2\pi^2 G_n(t) \cos(n\pi x) = x$

حال $\sum$ را فاکتور می‌گیریم:

ادامه حل: ←

ادامه‌ی حل: رابطه‌ی ①: $\ddot{G}_0(t)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\ddot{G}_n(t)+4n^2\pi^2 G_n(t)\right)\cos(n\pi x)=xt$

سری فوریه‌ی کسینوسی

یادآوری:

$$f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

$$a_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$$

$$n=0\Rightarrow a_0=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,dx$$

$$\frac{1}{2}a_0=\frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx$$

$\ddot{G}_0(t)=\frac{1}{2}G_0(t)$ ... ② انتگرال‌گیری

طبق یادآوری فوق:

$$\ddot{G}_0(t)=\frac{1}{1}\int_0^1 xt\,dx=\left[t\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\frac{t}{2}$$

L

$\frac{1}{2}a_0$

ثابت انتگرال‌گیری

بخاطر G_0

$$\xrightarrow{\int dt}\dot{G}_0(t)=\frac{t^2}{4}+a_0\xrightarrow{\int dt}G_0(t)=\frac{t^3}{12}+a_0t+b_0$$

$$\ddot{G}_n(t)+4n^2\pi^2G_n(t)=\frac{2}{1}\int_0^1 xt\cos(n\pi x)\,dx$$

ضریب داخل سیگما رابطه‌ی ①

حال t را خارج می‌کنیم:

$$=t\underbrace{2\int_0^1 x\cos(n\pi x)\,dx}_{H_n}=tH_n$$ خطی مرتبه‌ی دوم

ادامه حل: معادله را حل می‌کنیم: $\ddot{G}_n(t) + 9n^2\pi^2 G_n(t) = tH_n$

معادله مشخصه $\Rightarrow \lambda^2 + 9n^2\pi^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 3n\pi i \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 3n\pi \end{cases}$

$$G_n(t) = a_n \cos(3n\pi t) + b_n \sin(3n\pi t) + \frac{tH_n}{9n^2\pi^2}$$

$G_n^*(t)$

$$u(x,t) = G_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t)\cos(n\pi x)$$

جواب معادله:

$$u(x,t) = \frac{t^3}{12} + a_0 t + b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(3n\pi t) + b_n \sin(3n\pi t) + \frac{tH_n}{9n^2\pi^2}\right)\cos(n\pi x)$$

حال a_0 ، b_0 ، a_n ، b_n را از طریق حالت های اولیه داده شده حساب می‌کنیم:

$$u(x,0) = x \Rightarrow b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n)\cos(n\pi x) = x$$ سری فوریه کسینوسی

$$\Rightarrow \begin{cases} a_n = \frac{2}{1}\int_0^1 x\cos(n\pi x)\,dx \\ b_0 = \frac{1}{1}\int_0^1 x\,dx \Rightarrow b_0 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

L

حال از جواب معادله یعنی $u(x,t)$ مشتق می‌گیریم:

$$u_t(x,t) = \frac{t^2}{4} + a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(-3n\pi a_n \sin(3n\pi t) + 3n\pi b_n \cos(3n\pi t) + \frac{H_n}{9n^2\pi^2}\Big)\cos(n\pi x)$$

Subject:
Year. ۸۵ Month. ۱ Date. ۱۷

(۵۲)

ادامهٔ حل:

حال در $u(x,t)$ به جای t صفر قرار می‌دهیم، داریم:

$u_t(x,0)=1$: طبق فرض مسئله: $\xrightarrow{t=0} a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(3n\pi b_n+\frac{4n}{9n^2\pi^2}\right)\cos(n\pi x)=1$

سری فوریهٔ کسینوسی

* همانطور که در این مسئله هم دیده شد، ۳ بار به سراغ فوریهٔ سینوسی یا کسینوسی می‌رویم.

$$\begin{cases} 3n\pi b_n+\frac{4n}{9n^2\pi^2}=\frac{2}{1}\int_0^1 \cos(n\pi x)\,dx=0 \Rightarrow b_n=\frac{-4n}{27n^3\pi^3} \\ a_0=\frac{1}{1}\int_0^1 dx \Rightarrow a_0=1 \end{cases}$$

PAPCO

حل معادله موج متناهی با مرز ناهمگن:

در این حالت فرض می‌کنیم: $u(x,t) = V(x,t) + W(x,t)$

سپس با توجه به شرایط مرزی، $W(x,t)$ را به یکی از دو شکل زیر انتخاب می‌کنیم:

$$\text{شرایط مرزی}\begin{cases} u(0,t) = P(t) \\ u(L,t) = q(t) \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} u(0,t) = P(t) \\ u_x(L,t) = q(t) \end{cases}$$

$$\text{یا} \begin{cases} u_x(0,t) = P(t) \\ u(L,t) = q(t) \end{cases} \Rightarrow \boxed{W(x,t) = ax + b}$$

در صورت داشتن این شرایط مرزی $\begin{cases} u_x(0,t) = P(t) \\ u_x(L,t) = q(t) \end{cases} \Rightarrow \boxed{W(x,t) = ax^2 + bx}$

سپس یک معادله موج جدید برحسب V در نظر می‌گیریم و مرز آن را همگن فرض می‌کنیم. سپس با توجه به شرایط مرزی همگن، مجهولات a و b را بدست می‌آوریم و در آخر معادله موج جدید برحسب V را تحلیل می‌کنیم و آن را حل می‌نماییم.

مثال: $u_{tt} - 4u_{xx} = x^2 - 2t$

شرایط معادله
$$\begin{cases} u(x,0) = x+1 \\ u_t(x,0) = 0 \\ u(0,t) = 1-t \\ u(\pi,t) = 2t+1 \end{cases}$$
شرایط مرزی ناهمگن (برای $u(0,t)$ و $u(\pi,t)$)

اولین کار در حل این جور مسائل این است که یک معادله مانند معادله مسئله داده شده برحسب V بنویسیم (یعنی هر جا u بود به جایش V قرار دهیم) که برحسب V نوشته ایم

$$V_{tt} - 4V_{xx} = ? = x^2 - 2t$$

شرایط معادله
$$\begin{cases} V(x,0) = ? = x \\ V_t(x,0) = ? = 1 - \frac{3}{\pi}x \\ V(0,t) = 0 \\ V(\pi,t) = 0 \end{cases}$$
شرایط مرزی همگن (شرایط این سوال ما) (برای $V(0,t)$ و $V(\pi,t)$)

رابطه ① $\quad u(x,t) = V(x,t) + \overbrace{ax+b}^{w(x,t)}$: طبق قرارداد

حال مشکل ما محاسبه a و b است که با توجه به شرایط مرزی ناهمگن می‌توان نوشت:

در رابطه ① $\xrightarrow{x=0}$ $\overbrace{u(0,t)}^{1-t} = \overbrace{V(0,t)}^{0} + b \rightarrow b = 1-t$

در رابطه ① $\xrightarrow{x=\pi}$ $u(\pi,t) = V(\pi,t) + a\pi + 1 - t \rightarrow a = \frac{3t}{\pi}$

ادامه حل ←

ادامه حل: $u(x,t) = v(x,t) + ax + b$ رابطه ①

حال a و b بدست آمده را در رابطه ① جایگذاری می‌کنیم:

$u(x,t) = v(x,t) + \frac{3t}{\pi}x + 1 - t$ رابطه ⊛

* حال فقط تمام بحث ما روی رابطه ⊛ می‌باشد و در این حالت و با استفاده از رابطه ⊛ می‌توان جای علامت سؤال ۴ را پر نمود:

* علامت سؤال دوم $\boxed{v(x,0) = x} \leftarrow u(\overset{x+1}{\overbrace{x,0}}) = v(x,0) + 1 \xleftarrow{t=0}$ در رابطه ⊛

در رابطه ⊛ $\xrightarrow{\text{مشتق نسبت به } t} u_t(x,t) = v_t(x,t) + \frac{3}{\pi}x - 1 \xrightarrow{t=0}$

* علامت سؤال سوم $\boxed{v_t(x,0) = 1 - \frac{3}{\pi}x} \Leftarrow \overset{\circ}{\overbrace{u_t(x,0)}} = v_t(x,0) + \frac{3}{\pi}x - 1 \xleftarrow{t=0}$

در رابطه ⊛ $\xrightarrow{\text{۲ بار مشتق نسبت به } t} u_{tt} = v_{tt}$

در رابطه ⊛ $\xrightarrow{\text{۲ بار مشتق نسبت به } x} u_{xx} = v_{xx}$

حال به جای مقادیر و عبارات فوق در معادله اصلی داده شده جایگذاری انجام می‌دهیم:

* علامت سؤال اول $\boxed{v_{tt} - 4v_{xx} = x^2 - 2t} \longleftarrow u_{tt} - 4u_{xx} = x^2 - 2t$

حال مانند حل مسئله‌ی جلسه قبل ، ابتدا $v(x,t)$ را از رابطه صفحه بعد می‌یابیم

می‌آوریم و در آخر با جایگذاری $V(x,t)$ بدست آمده در رابطه‌ی (*) مقدار عبارت

$U(x,t)$ بدست می‌آید:

فرم جواب: $V(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t)\sin(nx)$

* تذکر مهم:

برای مشتق‌گیری از جواب خصوصی به شکل زیر عمل می‌کنیم:

$G_n^* \xrightarrow{\text{مشتق}} \dot{G}_n^* \rightarrow$ اگر $t=0 \rightarrow \dot{G}_n^*(0)$

مثال:
$$u_{tt} - 9u_{xx} = xt$$

شرایط معادله
$$\begin{cases} u(x,0) = \sin x \\ u_t(x,0) = 1 \\ u_x(0,t) = 2t+3 \\ u_x(1,t) = 0 \end{cases}$$
شرایط مرزی ناهمگن

حال ما مسئله قبل شروع به حل می کنیم:

$$v_{tt} - 9v_{xx} = ?\ xt - 18t - 27$$

شرایط معادله جدید
$$\begin{cases} v(x,0) = ?\ \sin x + \frac{3}{2}x^2 - 3x \\ v_t(x,0) = ?\ 1 + x^2 - 2x \\ v_x(0,t) = 0 \\ v_x(1,t) = 0 \end{cases}$$
→ شرایط مرزی همگن

$L = 1$

$w(x,t)$ ← چون ۲ بار مشتق گرفته ام

رابطه ۱: $u(x,t) = v(x,t) + ax^2 + bx$: ضمن تکرار داده شده

با توجه به شرایط مرزی ناهمگن داریم:

در رابطه ۱: $\xrightarrow{\text{مشتق نسبت به } x} u_x(x,t) = v_x(x,t) + 2xa + b \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$

$$\begin{cases} x=0 \longrightarrow u_x(0,t) = v_x(0,t) + b \rightarrow b = 2t+3 \\ \\ x=1 \longrightarrow u_x(1,t) = v_x(1,t) + 2a + 2t + 3 \rightarrow a = \frac{-2t-3}{2} \end{cases}$$

ادامه حل ←

ادامه حل:

حال مقادیر a و b را در رابطه ① قرار می‌دهیم:

$$u(x,t) = v(x,t) + \frac{-2t-3}{2}x^2 + (2t+3)x$$ رابطه (*)

حال با توجه به رابطه * و مرز ناهمگن، علامت سؤال ۴ را پیدا می‌کنیم:

در رابطه * $\xrightarrow{t=0} u(x,0) = v(x,0) - \frac{3}{2}x^2 + 3x \rightarrow v(x,0) = \sin \pi x + \frac{3}{2}x^2 - 3x$ علامت سؤال ۴

در رابطه * $\xrightarrow{\text{مشتق نسبت به } t} u_t(x,t) = v_t(x,0) - x^2 + 2x \xrightarrow{t=0} \overset{1}{u_t(x,0)} = v_t(x,0) - x^2 + 2x$

$\rightarrow v_t(x,0) = 1 + x^2 - 2x$ علامت سؤال ۳ *

در رابطه * $\xrightarrow{\text{۲ بار مشتق نسبت به } t} u_{tt} = v_{tt}$

در رابطه * $\xrightarrow{\text{۲ بار مشتق نسبت به } x} u_{xx} = v_{xx} - 2t - 3$

حال به جای u معادله اصلی، ۷ و ۴ را قرار می‌دهیم:

$u_{tt} - 9u_{xx} = xt \rightarrow v_{tt} - 9(v_{xx} - 2t - 3) = xt$

$\rightarrow v_{tt} - 9v_{xx} = xt - 18t - 27$ علامت سؤال اول *

فرم جواب = $v(x,t) = G_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t)\cos(n\pi x)$

با یافتن $v(x,t)$ از فرم جواب بالا و قرار دادن در رابطه * ، $u(x,t)$ به دست آید.

معادله گرما (حرارت) : ④ مقطع

$u_t - c^2 u_{xx} = F(x,t)$: فرم کلی معادله گرما

* تنها فرق معادله گرما با معادله موج فقط در u_t است که در معادله موج u_{tt} داریم.

حل معادله گرمای متناهی :

میله‌ای به طول L را عایق پوشش می‌کنیم. به طوری که فقط از دو سر خود بتوانند با محیط اطراف تبادل گرما نمایند. این میله را بر روی محور x و در محدوده‌ی $0 < x < L$ قرار می‌دهیم. در این صورت $u(x,t)$ (جواب معادله گرما)، درجه حرارت نقطه‌ی x از میله نسبت به زمان را نشان می‌دهد.

معادله توزیع گرما در میله‌ی متناهی حل نخواهد شد مگر اینکه شرایط زیر برای معادله داده شده باشد:

شرایط معادله گرما
$$\begin{cases} u(x,0) = F(x) & \text{شرط اولیه} \rightarrow \text{دمای اولیه میله} \\ u(0,t) = P(t) \\ u(L,t) = q(t) \end{cases}$$

گرما در دو سر میله — شرایط مرزی

تذکر بسیار بسیار مهم:

حل معادلهٔ گرما همانند معادلهٔ موج متناهی است. زیرا:

شرایط مرزی یکسانی در هر دو معادلهٔ فوق صادق است.

مثال:

$$u_t - 4u_{xx} = x - t$$

شرایط معادله
$$\begin{cases} u(x,0) = x \\ u_x(0,t) = t \\ u(\pi,t) = 1-t \end{cases}$$
شرایط مرزی ناهمگن

$$v_t - 4v_{xx} = ? = 1 + \pi - t$$

شرایط معادله جدید
$$\begin{cases} v(x,0) = ? = x-1 \\ v_x(0,t) = 0 \\ v(\pi,t) = 0 \end{cases}$$
شرایط مرزی همگن

فرض تبدیل: $u(x,t) = v(x,t) + \overbrace{ax+b}^{w(x,t)}$ رابطهٔ ①

با تصحیح شرایط مرزی ناهمگن در رابطهٔ ①

$$\begin{cases} u_x(x,t) = v_x(x,t) + a \xrightarrow{x=0} \overbrace{u_x(0,t)}^{t} = \overbrace{v_x(0,t)}^{0} + a \to a = t \\ \overbrace{u(\pi,t)}^{1-t} = \overbrace{v(\pi,t)}^{0} + t\pi + b \to b = 1 - t - t\pi \end{cases}$$

a و b را در رابطهٔ ① قرار می‌دهیم:

$$u(x,t) = v(x,t) + tx + 1 - t - t\pi \quad \text{رابطهٔ } (*)$$

حال علامت سؤال‌های ایجاد شده را توسط رابطهٔ $(*)$ بدست می‌آوریم

$*$ در رابطهٔ $\xrightarrow{t=0} \overbrace{u(x,0)}^{x} = v(x,0) + 1 \to v(x,0) = x-1$ علامت سؤال دوم

$*$ در رابطهٔ $\xrightarrow{\text{مشتق نسبت به } t} u_t = v_t + x - 1 - \pi$

ادامهٔ حل:

$\circledast$ در رابطهٔ $\xrightarrow{\text{۲ بار مشتق نسبت به } x}$ $u_{xx}=v_{xx}$

حال به جای u در معادلهٔ اصلی جانشانی v را انجام می‌دهیم:

$u_t-4u_{xx}=x-t \longrightarrow v_t+x-1-\pi-4v_{xx}=x-t$

$$\longrightarrow \boxed{v_t-4v_{xx}=1+\pi-t}$$ * معادله جدید مسئله اول

فرم جواب همان ۵: $v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} G_n(t)\cos(\lambda_n x) \longrightarrow \lambda_n=\frac{2n-1}{2}\frac{\pi}{L}$

$L=\pi \longrightarrow \lambda_n=\frac{2n-1}{2}$

حال فرم جواب را در معادله صدق می‌دهیم:

$v_t=\sum_{n=1}^{\infty}\dot{G}_n(t)\cos(\lambda_n x)$

$v_{xx}=\sum_{n=1}^{\infty}-\lambda_n^2 G_n(t)\cos(\lambda_n x)$

$v_t-4v_{xx}=1+\pi-t \xrightarrow{\text{جانشانی بالا}} \sum_{n=1}^{\infty}\dot{G}_n(t)\cos(\lambda_n x)-$

$4\sum_{n=1}^{\infty}-\lambda_n^2 G_n(t)\cos(\lambda_n x)=1+\pi-t$

$\xrightarrow{\text{فاکتور گیری از } \sum}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dot{G}_n(t)+4\lambda_n^2 G_n(t)\right)\cos(\lambda_n x)=1+\pi-t$ سری فوریه کسینوسی

ادامه حل:
$$\rightarrow \dot{G}_n(t) + 4\lambda_n^2 G_n(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (1+\pi-t)\cos(\lambda_n x)\,dx$$

چون $G_n(t)$ برحسب t می‌باشد، t را از داخل انتگرال بیرون می‌کشیم:

$$\rightarrow = \underbrace{\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (1+\pi)\cos(\lambda_n x)\,dx}_{H_n} - t\,\underbrace{\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(\lambda_n x)\,dx}_{K_n}$$

* تفاوت معادله موج با معادله گرما این است که در معادله موج $\ddot{G}$ ظاهر می‌شود ولی در معادله گرما $\dot{G}$ ظاهر می‌شود.

* خطی مرتبه اول $\dot{G}_n(t) + 4\lambda_n^2 G_n(t) = H_n - t K_n$

یادآوری: خطی مرتبه اول $\dot{y} + f(t)y = r(t)$

$$y = e^{-\int f(t)dt}\left[\int e^{\int f(t)dt} r(t)\,dt + c\right]$$

طبق یادآوری بالا داریم:

$$G_n(t) = e^{-\int 4\lambda_n^2 dt}\left[\int e^{\int 4\lambda_n^2 dt}(H_n - tK_n)\,dt + a_n\right]$$

$$G_n(t) = e^{-4\lambda_n^2 t}\left[\int e^{4\lambda_n^2 t}(H_n - tK_n)\,dt + a_n\right]$$

چون انتگرال بالا، نامعین است (کران ندارد) و هم برحسب t و هم برحسب n می‌باشد

الزاماً باید حل شود و نمی‌توان به جای آن انتگرال قرار داد.

Subject:
Year. ۸۵ Month. ۱ Date. ۲۲

ادامه حل:

مشتق	انتگرال
$H_n - tK_n$ (+)	$e^{4\lambda_n^2 t}$
$-K_n$ (−)	$\frac{1}{4\lambda_n^2} e^{4\lambda_n^2 t}$
0	$\frac{1}{16\lambda_n^4} e^{4\lambda_n^2 t}$

$$G_n(t) = e^{-4\lambda_n^2 t}\left[\frac{H_n - tK_n}{4\lambda_n^2} e^{4\lambda_n^2 t} + \frac{K_n}{16\lambda_n^4} e^{4\lambda_n^2 t} + a_n\right]$$

$$G_n(t) = \frac{H_n - tK_n}{4\lambda_n^2} + \frac{K_n}{16\lambda_n^4} + a_n e^{-4\lambda_n^2 t}$$

حال $G_n(t)$ را در فرم جواب قرار می‌دهیم:

فرم جواب: $V(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t)\cos(\lambda_n x)$

جواب ف

جایگذاری $G_n(t)$ $\longrightarrow$ $V(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{H_n - tK_n}{4\lambda_n^2} + \frac{K_n}{16\lambda_n^4} + a_n\right)\cos(\lambda_n x)$

فقط در جواب بالا یک مجهول (a_n) داریم و با استفاده از شرایط اولیه می‌توان آن را یافت

شرایط اولیه $V(x,0) = x - 1 \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{H_n - \cancel{tK_n}}{4\lambda_n^2} + \frac{K_n}{16\lambda_n^4} + a_n\right)\cos(\lambda_n x) =$

$= x - 1$ سری فوریه کسینوسی f

PAPCO ادامه حل $\leftarrow$

Subject:
Year ۸۵ Month ۱ Date ۲۲/۱

۶۵.

ادامه حل:

$$\frac{H_n}{4\lambda_n^2}+\frac{K_n}{16\lambda_n^4}+a_n=\underbrace{\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x-1)\cos(\lambda_n x)\,dx}_{P_n}$$

$\frac{2}{L}$

$$\boxed{a_n=P_n-\frac{H_n}{4\lambda_n^2}-\frac{K_n}{16\lambda_n^4}}$$

حال با جایگذاری a_n در ۷ و سپس جایگذاری ۷ در رابطه (۱) که بدست آمده در رابطه ✱

$u(x,t)$ (جواب معادله گرما) بدست می‌آید

Subject:

Year. ۸۵ Month. ۱ Date. ۲۲ ( )

PAPCO

معادله‌ی پواسون: ۱۵ صفحه

معادله‌ی پواسون به فرم $\nabla^2 u = f$ می‌باشد که در حالت دو بعدی به صورت $u_{xx} + u_{yy} = f(x,y)$

نابلا (گرادیان)

است زیرا:

در حالت دو بعدی: $\vec{\nabla} u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}$

$$\nabla^2 u = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} u$$

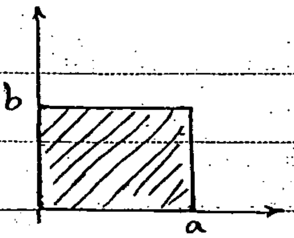
$$\nabla^2 u = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j}\right) \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

هرگاه در معادله‌ی $u_{xx} + u_{yy} = f(x,y)$ مقدار $f(x,y) = 0$ شود آنگاه

معادله‌ی پواسون را معادله‌ی لاپلاس می‌گوییم.

* در امتحان مسئله‌ی داده شده بیشتر معادله‌ی پواسون است تا معادله‌ی موج.

حل معادلهٔ پتانسیل روی صفحهٔ مستطیلی



در معادلهٔ پتانسیل برروی صفحهٔ مستطیلی، توزیع بار الکتریکی روی چهار مرز (چهار ضلع مستطیل) را تعیین نموده و سپس می‌توان توزیع بار را در هرجای مستطیل بدست آورد.

*حل معادلهٔ پتانسیل روی صفحهٔ مستطیلی تقریباً مشابه حل معادلهٔ موج است.

معادلهٔ پتانسیل روی صفحهٔ مستطیلی: حل فرض شود مقدار پتانسیل روی چهار مرز (چهار ضلع) داده شده باشد:

شرایط معادلهٔ پتانسیل دوبعدی روی صفحهٔ مستطیلی

$$\begin{cases} u(x,0) = f_1(x) \\ u(x,b) = g_1(x) \end{cases} \text{زوج ①}$$

$$\begin{cases} u(0,y) = f_2(y) \\ u(a,y) = g_2(y) \end{cases} \text{زوج ②}$$

⇐ همهٔ شرایط مرزی اند و مرزها ناهمگن هستند

برای حل مسئلهٔ فوق یکی از دو زوج ① یا ② را به دلخواه مرزی فرض می‌کنیم و زوج دیگر را اولیه فرض می‌کنیم و مسئلهٔ پتانسیل را همانند موج حل می‌کنیم.

۱) اولویت اول: بهتر است زوجی را مرزی فرض کنیم که همگن باشد.

۲) اولویت دوم: اگر دو زوج ناهمگن بودند، زوجی را که دارای فرم جواب sin است را به عنوان مرزی می‌گیریم.

نکتهٔ مهم:

الف: چنانچه زوج ۲ را به عنوان شرایط مرزی انتخاب نماییم، آنگاه w ها تابعی برحسب x و تابع مجهول G_n در فرم جواب، برحسب y خواهد شد.

ب: چنانچه زوج ۱ را به عنوان شرایط مرزی انتخاب نماییم، آنگاه w ها تابعی برحسب y و تابع مجهول G_n در فرم جواب، برحسب x خواهد شد.

مثال: $u_{xx} + u_{yy} = x - y$

$$\begin{cases} u(x,0) = x+1 \\ u(x,\pi) = 2-x \end{cases}$$

* چون فرم جواب سینوسی می‌شود بهتر است ← شرایط مرزی

$$\begin{cases} u_x(0,y) = y-2 \\ u_x(\pi,y) = 1-y^2 \end{cases}$$

شرایط اولیه

تذکرات مهم:

۱ـ در امتحان معمولاً یک سر را همگن می‌دهند.

۲ـ در امتحان ممکن است زوج ۴ را پس و پیش بدهند و باید برحسب x ۴ را زوج ① و برحسب t ۴ را زوج ② قرار دهیم.

$V_{xx} + V_{yy} = ?\ x - y$

$$t=\pi \leftarrow \begin{cases} V(x,0) = 0 \\ V(x,\pi) = 0 \\ V_x(0,y) = ?\ y + \frac{2}{\pi}y - 3 \\ V_x(\pi,y) = ?\ \frac{2}{\pi}y - y^2 \end{cases}$$

شرایط مرزی همگن

$$u(x,y) = V(x,y) + \overbrace{ay+b}^{w(x,t)}$$

با توجه به شرایط مرزی ناهمگن می‌توان نوشت که برای u

$y=0 \rightarrow \overset{x+1}{\cancel{u(x,0)}} = \overset{0}{\cancel{V(x,0)}} + b \Rightarrow b = x+1$

$y=\pi \rightarrow \overset{2-x}{\cancel{u(x,\pi)}} = \overset{0}{\cancel{V(x,\pi)}} + a\pi + x + 1 \Rightarrow a = \frac{1-2x}{\pi}$

با جایگذاری مقادیر a, b $\rightarrow$ $u(x,y) = V(x,y) + \frac{1-2x}{\pi}y + x + 1$ ✱ رابطه ۱

ادامه حل ←

ادامهٔ حل: $\xrightarrow{\text{مشتق نسبت به } x}$ در رابطهٔ * $u_x(x,y) = v_x(x,y) - \frac{2}{\pi}y + 1$

علامت سؤال دوم: $\xrightarrow{x=0} u_x(0,y) = v_x(0,y) - \frac{2}{\pi}y + 1 \Rightarrow v_x(0,y) = y + \frac{2}{\pi}y - 3$ ($u_x(0,y) = y-2$)

علامت سؤال سوم: $\xrightarrow{x=\pi} u_x(\pi,y) = v_x(\pi,y) - \frac{2}{\pi}y + 1 \Rightarrow v_x(\pi,y) = \frac{2}{\pi}y - y^2$ ($u_x(\pi,y) = 1-y^2$)

$\xrightarrow{\text{۲ بار مشتق نسبت به } x}$ در رابطهٔ * $u_{xx} = v_{xx}$

جایگذاری در معادلهٔ اصلی مسئله

$\xrightarrow{\text{۲ بار مشتق نسبت به } y}$ در رابطهٔ * $u_{yy} = v_{yy}$

علامت سؤال اول: $\longrightarrow u_{xx} + u_{yy} = x - y \longrightarrow v_{xx} + v_{yy} = x - y$

فرم جواب: $v(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(x)\sin(ny)$

در فرم جواب هرکدام که x بود، دیگری y می‌شود یعنی ۲ متغیر داریم

$v_{xx} = \sum_{n=1}^{\infty} G_n''(x)\sin(ny)$

$v_{yy} = \sum_{n=1}^{\infty} -n^2 G_n(x)\sin(ny)$

$v_{xx} + v_{yy} = x - y \xrightarrow{\text{جایگذاری فرم‌های بالا}} \sum_{n=1}^{\infty} G_n''(x)\sin(ny) + \sum_{n=1}^{\infty} -n^2 G_n(x)\sin(ny)$

$= x - y$

PAPCO ادامهٔ حل $\Leftarrow$

ادامه حل: سری فوریه سینوسی: $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left(G_n''(x) - n^2 G_n(x) \right) \sin(ny) = x - y$

$$\Rightarrow G_n''(x) - n^2 G_n(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (x-y) \sin(ny)\, dy$$

برحسب عبارت متغیر داخل کما مثلثاتی است

$$= x \underbrace{\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(ny)\, dy}_{H_n} - \underbrace{\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} y \sin(ny)\, dy}_{K_n}$$

* چون G برحسب x است در نتیجه x را از داخل انتگرال بیرون می‌آوریم *

$$G_n''(x) - n^2 G_n(x) = x H_n - K_n$$

* در یک نیل همواره هیپربولیک ظاهر می‌شود: در نتیجه: معادله مشخصه: $\lambda^2 - n^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm n$

$$G_n(x) = a_n \cosh(nx) + b_n \sinh(nx) - \frac{xH_n - K_n}{n^2}$$ رابطه ۲

فرم جواب: $V(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(x) \sin(ny)$ رابطه ۱

جایگذاری رابطه ۲ در ۱:

$$V(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cosh(nx) + b_n \sinh(nx) - \frac{xH_n - K_n}{n^2} \right) \sin(ny)$$

ادامه حل ←

ادامه حل:

حال از شرایط اولیه تابع V (تابع همساز) استفاده می‌کنیم:

$$V_n(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(na_n\sinh(nx)+nb_n\cosh(nx)-\frac{H_n}{n^2}\right)\sin(ny)$$

شرط فوریه سینوسی:

$$\xrightarrow{x=0}\ \underbrace{V_n(0,y)}_{y+\frac{2}{\pi}y-3}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(nb_n-\frac{H_n}{n^2}\right)\sin(ny)=y+\frac{2}{\pi}y-3$$

$$\rightarrow nb_n-\frac{H_n}{n^2}=\underbrace{\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(y+\frac{2}{\pi}y-3\right)\sin(ny)\,dy}_{P_n}\Rightarrow b_n=\frac{P_n+\frac{H_n}{n^2}}{n}$$

شرط فوریه سینوسی:

$$\xrightarrow[\text{شرایط اولیه}]{x=\pi}\ V_n(\pi,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(na_n\sinh(n\pi)+nb_n\cosh(n\pi)-\frac{H_n}{n^2}\right)\underbrace{}_{\sin ny}=\frac{2}{\pi}y-y^2$$

$$\rightarrow na_n\sinh(n\pi)+nb_n\cosh(n\pi)-\frac{H_n}{n^2}=\underbrace{\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{2}{\pi}y-y^2\right)\sin(ny)\,dy}_{Z_n}$$

$$\rightarrow a_n=\frac{Z_n+\frac{H_n}{n^2}-\left(P_n+\frac{H_n}{n^2}\right)\cosh(n\pi)}{n\sinh(n\pi)}$$

مراحل حل معادلات موج گرما - پتانسیل متناهی :

۱- همگن کردن شرایط مرزی

۲- اثبات فرم جواب و ← یافتن $F(x)$

۳- جاگذاری فرم جواب در معادله و محاسبه تابع مجهول G_n ← یافتن $G_n(t)$

تذکر:
چنانچه حل مسئله جابجائیات کامل خواسته شده باشد، انجام مرحله دوم الزامیست. در غیر اینصورت نیازی به انجام این قسمت (قسمت دوم) نمی باشد.

مرحله دوم:

در این مرحله، ابتدا معادله موج را همگن فرض می نمائیم و سپس شرایط مرزی را به آنکه در مرحله اول همگن شده است انتخاب می نمائیم و به روش تفکیک متغیرها (روش ضربی) معادله را حل می نمائیم. در این روش جواب معادله را به فرم $u(x,t) = F(x)\,G(t)$ در نظر می گیریم و با صدق دادن آن در معادله همگن و شرایط مرزی همگن تابع مجهول $F(x)$ را به دست می آوریم.

تذکر:

در امتحان معمولاً مسئله های هموژن را با ضرایب ثابت کامل حل نمائید.

تذکر بسیار مهم:

فرم جواب معادلات ناهمگن موج و گرما و پتانسیل و مسئله: $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} G_n(t)\,F_n(x)$

مثال:

مسئله‌ی زیر را با جزئیات کامل حل کنید: $u_{tt} - 4u_{xx} = x + t^2$

$$\begin{cases} u(x,0) = \sin(2x) \\ u_t(x,0) = 0 \\ u(0,t) = 0 \\ u(\pi,t) = 0 \end{cases}$$

$u(0,t)=0$ و $u(\pi,t)=0$ ⟸ شرایط مرزی همگن

$\pi \to L$

مرحله‌ی اول:

مرز همگن است.

مرحله‌ی دوم: رابطه‌ی ① معادله‌ی موج همگن $u_{tt} - 4u_{xx} = 0$

شرایط مرزی همگن $\begin{cases} u(0,t)=0 \\ u(\pi,t)=0 \end{cases}$

تذکر مهم:

در این قسمت (مرحله‌ی دوم) اصلاً به معادله‌ی موج اولیه کاری نداریم و فقط با معادله‌ی موج همگن شده سروکار داریم.

روش تفکیک متغیر: $u(x,t) = F(x)\,G(t)$ رابطه‌ی ②

از رابطه‌ی ② $\begin{cases} u_{tt} = F(x)\,\ddot{G}(t) \\ u_{xx} = F''(x)\,G(t) \end{cases}$ $\xrightarrow{\text{جایگذاری در رابطه‌ی ①}}$ $F(x)\,\ddot{G}(t) = 4F''(x)\,G(t)$

$$\longrightarrow \frac{F''(x)}{F(x)} = \frac{\ddot{G}(t)}{4G(t)} = K$$

ضریب را با $G(t)$ می‌بریم

ادامه‌ی حل ⟵

ادامه حل ←

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = \frac{\ddot{G}(t)}{4G(t)} = K$$

طرفین وسطین ⇒

$$\begin{cases} F''(x) - KF(x) = 0 \quad \text{رابطه ③} \\ \cancel{\ddot{G}(t) - 4KG(t) = 0} \end{cases}$$

معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم

$G(t)$ در مرحله ششم بدست می آید

دو ثابت c_1 و c_2 دارند و باید دو شرط داشته باشند تا c_1 و c_2 بدست آید و از شرایط مرزی معادله موج همگن استفاده می کنیم

شرایط مرزی

$$\begin{cases} \overbrace{u(0,t)}^{\text{شرط مرزی}} = 0 \Rightarrow F(0)\underbrace{G(t)}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow F(0) = 0 \\ \overbrace{u(\pi,t)}^{\text{شرط مرزی}} = 0 \Rightarrow F(\pi)\underbrace{G(t)}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow F(\pi) = 0 \end{cases}$$

زیرا با توجه به $u(x,t)=F(x)G(t)$ اگر $G(t)=0$ باشد آنگاه $u(x,t)$ به ازای هر t ای صفر می شود یعنی ارتعاشی بوجود نمی آید.

$$\Rightarrow \begin{cases} F''(x) - KF(x) = 0 \quad : \text{③ رابطه ی} \\ F(0) = F(\pi) = 0 \quad \text{④ رابطه ی} \end{cases}$$

$\Rightarrow F''(x) - KF(x) = 0 \Rightarrow$ جبر معادله دیفرانسیل : $\lambda^2 - K = 0$

(i) : $K = 0 \xrightarrow{\text{جایگذاری در ③}} F''(x) = 0 \xrightarrow{\text{برای یافتن } F(x) \text{ دوبار انتگرال می گیریم}} F'(x) = c_1 \Rightarrow F(x) = c_1 x + c_2$

$$F(x) = c_1 x + c_2 \Rightarrow \begin{cases} F(0) = 0 \rightarrow c_2 = 0 \rightarrow F(x) = c_1 x \quad \text{طبق رابطه ④} \\ \underbrace{F(\pi)}_{\pi = 3.14} = 0 \rightarrow \underbrace{c_1 \pi}_{\pi = 3.14} = 0 \rightarrow c_1 = 0 \Rightarrow F(x) = 0 \quad \text{طبق رابطه ④} \end{cases}$$

$\Rightarrow u = 0$ ✗

ادامه جواب ←

← تناقض می شود $K=0$ نمی تواند باشد. اگر $K=0$ باشد ارتعاشی نداریم.

Subject:
Year. ۸۵ Month. ۱ Date. ۲۹

Sinh فقط در صفر، صفر است.
Cosh اصلاً صفر نیست و بزرگتر مساوی یک است

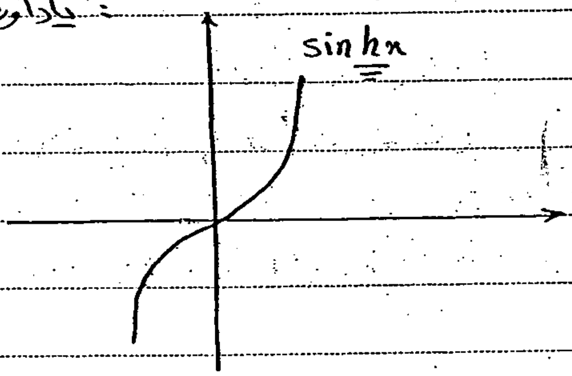
ادامهٔ حل:

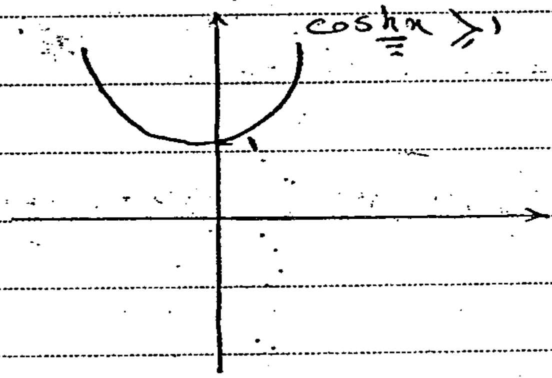
(ii): $K=\mu^2>0\ ,\ \mu>0$

$K=\mu^2 \xrightarrow[\text{در رابطهٔ ③}]{\text{جایگذاری}} F''(x)-\mu^2F(x)=0 \xrightarrow{\text{معادلهٔ مشخصه}} \lambda^2-\mu^2=0$ که $\lambda=\pm\mu$ ریشه‌ها دوتایند

جواب عمومی معادله: $F(x)=C_1\cosh(\mu x)+C_2\sinh(\mu x)$

یادآوری:





$$\begin{cases} F(0)=0 \ \text{؛ طبق رابطهٔ ④} \Rightarrow C_1=0 \Rightarrow F(x)=C_2\sinh(\mu x) \\ \text{زیرا } \sinh \text{ فقط در صفر، صفر می‌شود} \neq 0 \\ F(\pi)=0 \ \text{؛ طبق رابطهٔ ④} \Rightarrow C_2\sinh(\mu x)=0 \Rightarrow C_2=0 \Rightarrow F(x)=0 \end{cases}$$

$C_2=0$

$\Rightarrow U=0$ ✗ تناقض

$\mu>0$ چون $\neq 0$

جایگذاری $x=\pi$ در $F(x)$ بالا

(iii): $K=-\mu^2<0\ ,\ \mu>0$

$K=-\mu^2 \xrightarrow[\text{در رابطهٔ ③}]{\text{جایگذاری}} F''(x)+\mu^2F(x)=0 \Rightarrow$ معادلهٔ مشخصه $\lambda^2+\mu^2=0$

$\Rightarrow \lambda=\pm\mu i \Rightarrow \begin{cases}\alpha=0\\ \beta=\mu\end{cases}$

PAPCO ادامهٔ حل ←

مثال: مسئله زیر را با جزئیات کامل حل کنید: $u_{tt} - 9u_{xx} = xt$

$$\begin{cases} u(x,0) = x \\ u_t(x,0) = 1 \\ u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0 \quad \text{شرایط مرزی همگن} \end{cases}$$

مرحله اول:
مرز همگن است

مرحله دوم: رابطه ① : معادله همگن $u_{tt} - 9u_{xx} = 0$

شرایط مرزی همگن
$$\begin{cases} u_x(0,t) = 0 \\ u_x(1,t) = 0 \end{cases}$$

رابطه ② $u(x,t) = F(x)G(t)$ روش ضربی

$$\xrightarrow{\text{با استفاده از رابطه ②}} \begin{cases} u_{tt} = F(x)\ddot{G}(t) \\ u_{xx} = F''(x)G(t) \end{cases} \xrightarrow{\text{جایگذاری در رابطه ①}} F(x)\ddot{G}(t) = 9F''(x)G(t)$$

$$\longrightarrow \frac{F''(x)}{F(x)} = \frac{\ddot{G}(t)}{9G(t)} = k \Rightarrow \begin{cases} F''(x) - kF(x) = 0 \quad \text{رابطه ③} \\ \cancel{\ddot{G}(t) - 9kG(t) = 0} \end{cases}$$

ادامه حل ←

جواب عمومی معادله: $F(x) = C_1 \cos(\mu x) + C_2 \sin(\mu x)$

$F(0) = 0$: رابطه ۴ $\rightarrow C_1 = 0 \rightarrow F(x) = C_2 \sin(\mu x)$

$F(\pi) = 0$: رابطه ۴ $\xrightarrow[\text{در } F(x) \text{ بالا}]{\text{جایگذاری } \pi}$ $C_2 \sin(\mu \pi) = 0$ $\xrightarrow{\text{با فرض } C_2 = 1}$ $\sin(\mu \pi) = 0$

$\rightarrow \mu \cancel{\pi} = n \cancel{\pi} \rightarrow \mu_n = n \quad n = 1, 2, \ldots$

$F_n(x) = \sin(nx)$ توابع ویژه $n = 1, 2, \ldots$

$\frac{n\pi}{L} x$

$K_n = -\mu_n^2 = -n^2$ مقادیر ویژه

فرم جواب معادلات موج، گرما و قانون پتانسیل مشابه $\rightarrow u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t) F_n(x)$

$\rightarrow u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t) \sin(nx)$

مرحله سوم:

ادامه‌ی حل:

حال، از شرایط مرزی معادله‌ی حرارت استفاده می‌کنیم:

شرایط مرزی:

$$\begin{cases} u_x(x,t) = F'(x)G(t) \xrightarrow{x=0} u_x(0,t) = F'(0)\underbrace{G(t)}_{\neq 0} \Rightarrow F'(0)=0 \\ \xrightarrow{x=1} u_x(1,t) = 0 \Rightarrow F'(1)\underbrace{G(t)}_{\neq 0} \Rightarrow F'(1)=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F''(x) - KF(x) = 0 & \text{رابطه‌ی ③} \\ F'(0) = F'(1) = 0 & \text{رابطه‌ی ④} \end{cases}$$

(i): $K=0 \xrightarrow{\text{جایگذاری در رابطه‌ی ③}} F''(x)=0 \rightarrow F'(x)=c_1 \rightarrow F(x)=c_1x+c_2$

$$\begin{cases} F'(0)=0 : \text{طبق رابطه‌ی ④} \Rightarrow c_1=0 \\ F'(1)=0 : \text{طبق رابطه‌ی ④} \Rightarrow c_1=0 \end{cases} \Rightarrow F(x)=c_2 \xrightarrow[\text{با فرض}]{c_2=1} F(x)=1$$

(ii): $K=\mu^2>0 \;,\; \mu>0$

$\xrightarrow{\text{جایگذاری } K=\mu^2 \text{ در رابطه‌ی ③}} F''(x)-\mu^2F(x)=0 \Rightarrow \lambda^2-\mu^2=0$ معادله‌ی مشخصه

$\Rightarrow \lambda = \pm\mu$ دو ریشه‌ی قرینه

$$F(x) = c_1\cosh(\mu x) + c_2\sinh(\mu x)$$

$$F'(x) = c_1\mu\sinh(\mu x) + c_2\mu\cosh(\mu x)$$

ادامه‌ی حل ←

ادامه حل: $F'(x) = c_1 \mu \sinh(\mu x) + c_2 \mu \cosh(\mu x)$

$$\begin{cases} F'(0)=0 : \text{④ طبق رابطه} \Rightarrow c_2 \overset{\mu>0}{\mu} = 0 \Rightarrow c_2 = 0 \Rightarrow F'(x) = c_1 \mu \sinh(\mu x) \\ F'(1) = 0 : \text{④ طبق رابطه} \Rightarrow c_1 \mu \underbrace{\sinh(\mu x)}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \Rightarrow F(x) = 0 \end{cases}$$

تناقض $\Rightarrow u = 0$ ✗

(iii): $k = -\mu^2 < 0 \ , \ \mu < 0$

$$\xrightarrow[\text{در رابطه ③}]{k=-\mu^2 \text{ جایگذاری}} F''(x) + \mu^2 F(x) = 0 \Rightarrow \lambda^2 + \mu^2 = 0 \quad \text{معادله مشخصه}$$

$$\Rightarrow \lambda = \pm \mu i \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = \mu \end{cases}$$

جواب معادله فوق عبارتست: $F(x) = c_1 \cos(\mu x) + c_2 \sin(\mu x)$

$F'(x) = -c_1 \mu \sin(\mu x) + c_2 \mu \cos(\mu x)$

$$\begin{cases} \text{④ طبق رابطه}: F'(0) = 0 \Rightarrow c_2 \overset{\mu<0}{\mu} = 0 \Rightarrow c_2 = 0 \Rightarrow F'(x) = -c_1 \mu \sin(\mu x) \\ \text{④ طبق رابطه}: F'(1) = 0 \xrightarrow{c_2=0} -c_1 \mu \sin(\overset{x=1}{\mu}) = 0 \xrightarrow{c_1=1 \text{ با فرض}} \sin(\mu) = 0 \end{cases}$$

$\longrightarrow \mu_n = n\pi \ , \ n = 1, 2, \ldots$

$F_n(x) = \cos(n\pi x) \ , \ n = 1, 2, \ldots$

ادامه حل ←

ادامه حل:

از ادغام کردن ① جواب در حالت $K=0$ و جواب برای حالت $K<0$ کلیه توابع ویژه مسئله

را می‌توان ① به فرم روبرو نوشت:

$$\boxed{F_n(x) = \cos(n\pi x)\ ,\ n = 0, 1, 2, \ldots}$$

فرم جواب: $u(x,t) = \sum G_n(t)\,F_n(x)$

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(t)\,F_n(x)$$

$$\xrightarrow{n=0} \quad u(x,t) = G_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t)\cos(n\pi x)$$

* حل ص ۶۴ کتاب درسی داده شده است.

« تبدیلات فوریه » : جلسه 21

تبدیل فوریه:

فرض کنیم $f(x)$ تابعی تکه‌ای پیوسته و مطلقاً انتگرال‌پذیر در بازه $-\infty < x < \infty$ باشد. در این صورت:

صورت مختلط انتگرال فوریه:

$$\begin{cases} f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} c(\omega)\, e^{i\omega x}\, d\omega \\[2ex] c(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\omega x}\, dx \end{cases}$$

با جایگذاری $c(\omega)$ در رابطه $f(x)$ داریم:

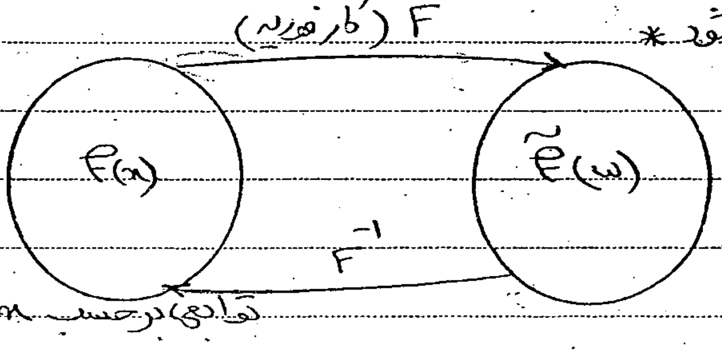
$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\omega x}\, dx \right) e^{i\omega x}\, d\omega$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\underline{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\omega x}\, dx} \right) e^{i\omega x}\, d\omega$$

مثلاً (تیلدا)

فوریه $f(x)$ $= F\{f(x)\} = \tilde{f}(\omega)$

* x به w تبدیل می‌شود *



Subject:
Year ۸۵ Month ۲ Date ۱۱

«تبدیل فوریه و معکوس آن برای توابع نامتناهی»: $-\infty < x < \infty$

$$\begin{cases} F(f(x)) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\omega x}\, dx = \tilde{f}(\omega) & : f \text{ تبدیل فوریه نامتناهی} \\ F^{-1}(\tilde{f}(\omega)) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega)\, e^{i\omega x}\, d\omega = f(x) & : \tilde{f} \text{ تبدیل فوریه معکوس} \end{cases}$$

قضیه:

اگر $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ ، $\lim_{x\to\pm\infty} f'(x) = 0$ خواهیم داشت:

$$F(f''(x)) = -\omega^2 F(f(x))$$

اثبات (سؤال مهم امتحانی):

طبق تعریف تبدیل فوریه

$$F(f''(x)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f''(x)\, e^{-i\omega x}\, dx$$

از روش جزء به جزء

$$\begin{cases} u = e^{-i\omega x} \rightarrow du = -i\omega e^{-i\omega x} \\ dv = f''(x)\,dx \rightarrow v = f'(x) \end{cases}$$

طبق تعریف و انتگرال جزء به جزء →

طبق شرط قضیه 0

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\Big[\overbrace{f'(x)}^{v}\, \overbrace{e^{-i\omega x}}^{u}\Big]_{-\infty}^{\infty} + i\omega \int_{-\infty}^{\infty} \overbrace{f'(x)}^{v}\, \overbrace{e^{-i\omega x}\,dx}^{du \rightarrow du = -i\omega e^{-i\omega x}} \right)$$

$$= \frac{i\omega}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\, e^{-i\omega x}\, dx \rightarrow \begin{cases} u = e^{-i\omega x} \rightarrow du = -i\omega e^{-i\omega x}\, dx \\ dv = f'(x)\,dx \rightarrow v = f(x) \end{cases}$$

PAPCO

ادامه ←

ادامه

$$= \frac{i\omega}{\sqrt{2\pi}}\left(\Big[\underbrace{f(x)e^{-i\omega x}}_{\text{(طبق شرط قضیه) } 0}\Big]_{-\infty}^{\infty} + i\omega\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\,dx\right)$$

$$= i^2\omega^2 \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\,dx}_{F(f(x))} = -\omega^2 F(f(x))$$

* تذکر: تبدیل فوریه مشتق جزء امتحان نمی‌باشد.

«تبدیل فوریه و معکوس آن برای توابع نیم‌متناهی»: $0<x<\infty$

۱- تبدیل فوریه سینوسی:

فرض کنیم $f(x)$ تابعی تکه‌ای پیوسته و مطلقاً انتگرال‌پذیر باشد (دو شرط داشتن انتگرال فوریه)

در بازه $0<x<\infty$ باشد. در این صورت:

$$\begin{cases} f(x) = \int_0^\infty b(\omega)\sin(\omega x)\,d\omega \\ \\ b(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\sin(\omega x)\,dx \end{cases}$$

با جاگذاری $b(\omega)$ در رابطه $f(x)$ داریم:

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \Bigg(\underbrace{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\sin(\omega x)\,dx}_{F_s(f(x)) = \tilde{f}_s(\omega)}\Bigg)\sin(\omega x)\,d\omega$$

s: نشانه $\sin$

* فوریه سینوسی:

$$F_s\left(f(x)\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(x)\sin(\omega x)\,dx=\tilde{f}_s(\omega)$$

$$F_s^{-1}\left(\tilde{f}_s(\omega)\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} \tilde{f}_s(\omega)\sin(\omega x)\,d\omega=f(x)$$

۲- تبدیل فوریه کسینوسی:

فوریه کسینوسی f: $F_c\left(f(x)\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(x)\cos(\omega x)\,dx=\tilde{f}_c(\omega)$

نشانه cos است

فوریه معکوس کسینوسی f: $F_c^{-1}\left(\tilde{f}_c(\omega)\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} \tilde{f}_c(\omega)\cos(\omega x)\,d\omega=f(x)$

قضیه: (برای نیمه متناهی)

اگر $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$ و $\lim_{x\to\infty} f'(x)=0$ داریم:

$$F_s(f'')=-\omega^2F_s(f)+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\omega f(0)$$ «حفظی و مهم»

$$F_c(f'')=-\omega^2F_c(f)-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,f'(0)$$

اثبات کنید (سؤال امتحانی)

مثال:
ابتدا تبدیل فوریه $f(x)=e^{-|x|}$ را بیابید و سپس به کمک آن حاصل انتگرال:

$$\int_0^{\omega} \frac{\cos(\omega \ln x^3)}{1+\omega^2}\, d\omega$$

را بدست آورید.

حل: چون دارای قدر مطلق در $f(x)$ هستیم باید ۲ بازه مختلف (مثبت و منفی) تعیین کنیم در نتیجه تابع $f(x)$ تابعی نامتناهی است.

* چون تبدیل فوریه خواسته شده، تابع $f(x)$ را در فوریه جایگذاری می‌کنیم:

$$F(f(x)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x}\, dx$$

$$F(f(x)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} e^{-i\omega x}\, dx$$ شکستن بازه‌ها

$$F(f(x)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} \underbrace{e^{x} e^{-i\omega x}}_{e^{(1-i\omega)x}}\, dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} \underbrace{e^{-x} e^{-i\omega x}}_{e^{-(1+i\omega)x}}\, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1-i\omega)} \left[e^{(1-i\omega)x} \right]_{-\infty}^{0} + \frac{-1}{\sqrt{2\pi}(1+i\omega)} \left[e^{-(1+i\omega)x} \right]_{0}^{\infty}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{1+i\omega} + \frac{1}{1-i\omega} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1-i\omega+1+i\omega}{1+\omega^2} \right) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}(1+\omega^2)} = \tilde{f}(\omega)$$

ادامهٔ حل:

* اگر در مسئله‌ای ابتدا گفته بود تبدیل فوریه (سینوسی، کسینوسی و ...) حساب کنید و سپس یک انتگرال

داده بود آن را حساب کنیم (مانند این مسئله) حتماً از تابع f بدست آمده، فوریهٔ معکوس

می‌گیریم:

$$F^{-1}\left(\tilde{F}(\omega)\right)=f(x)$$

$$\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2}{\sqrt{2\pi}\,(1+\omega^2)}\,e^{i\omega x}\,d\omega=f(x)$$

* چون انتگرالی که می‌خواهیم بدست آوریم (انتگرال داده شده) داخلش مثلثاتی است e را از طریق فرمول

اویلر به مثلثاتی تبدیل کنیم

$$* \quad e^{i\omega x}=\cos(\omega x)+i\sin(\omega x)$$

$$\rightarrow \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\underbrace{\frac{\cos(\omega x)\rightarrow \text{زوج}}{1+\omega^2\rightarrow\text{زوج}}}_{\text{زوج}}d\omega+\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\underbrace{\frac{\sin(\omega x)\rightarrow\text{فرد}}{1+\omega^2\rightarrow\text{زوج}}}_{\text{فرد}}d\omega=f(x)$$

$$\xrightarrow[\text{زوج است}]{\text{چون تابع داخل انتگرال}}\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos(\omega x)}{1+\omega^2}\,d\omega=f(x)$$

$$\xrightarrow{x=\ln 3}\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos(\omega\ln 3)}{1+\omega^2}\,d\omega=f(\ln 3)=e^{-\ln 3}=\frac{1}{3}$$

$$\longrightarrow \int_0^{\infty}\frac{\cos(\omega\ln 3)}{1+\omega^2}\,d\omega=\frac{\pi}{6}$$

* تمرین دوم:

تبدیل فوریهٔ متناهی صفحهٔ است (صفحهٔ ۳۴ کتاب)

حل معادلات موج و گرمای نامتناهی ($-\infty < x < \infty$) به کمک تبدیل فوریه:

معادلات موج و گرمای نامتناهی شرایط مرزی ندارند ولی ما ۲ شرط زائد را چه برهند و چه نهند

در نظر می‌گیریم: معادله موج: $u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x,t) \quad , \quad -\infty < x < \infty$

شرایط موج نامتناهی:
$$\begin{cases} u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases} \Rightarrow \text{شرایط اولیه}$$
$$\lim_{x \to \pm\infty} u(x,t) = \lim_{x \to \pm\infty} u_x(x,t) = 0 \quad : \text{شرایط زائد}$$

معادله گرما: $u_t - c^2 u_{xx} = F(x,t) \quad , \quad -\infty < x < \infty$

شرایط معادله گرما نامتناهی:
$$u(x,0) = f(x) \quad \text{شرط اولیه}$$
$$\lim_{x \to \pm\infty} u(x,t) = \lim_{x \to \pm\infty} u_x(x,t) = 0 \quad : \text{شرایط زائد}$$

برای حل مساله از طرفین معادله تبدیل فوریه می‌گیریم و مساله در صورتی دارای جواب است که توابع

$F(x,t)$ و $f(x)$ و $g(x)$ در بازه $-\infty < x < \infty$ توابعی پیوسته و مطلقاً انتگرال‌پذیر باشند

Subject:
Year. ۸۵ Month. ۲ Date. ۵

مثال: *سری مقصد در کدیم ناممکن می است زیرا هدف کدام را نمایش نشان*

$$\begin{cases} U_t - 4U_{xx} = \begin{cases} x+t, & |x|<1 \to -1<x<1 \\ 0, & |x|>1 \to \begin{cases} x>1 \\ x<-1 \end{cases} \end{cases} \\ U(x,0) = \begin{cases} x^2, & |x|<\pi \\ 0, & |x|>\pi \end{cases} \end{cases}$$

شرایط اولیه

روش اول حل: استفاده از تفکیک متغیرها است.

روش دوم حل:

حال از طرفین تبدیل فوریه می‌گیریم:

$$F(U_t) - 4(U_{xx}) = F\left(\begin{cases} x+t, & |x|<1 \\ 0, & |x|>1 \end{cases}\right) \quad \text{رابطه ۱}$$

یادآوری:

$$\begin{cases} F(f''(x)) = -\omega^2 F(f(x)) \to F(U_{xx}(x,t)) = -\omega^2 \tilde{U}(\omega,t) \\ F(U_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} U_t e^{-i\omega x}\,dx = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} U e^{-i\omega x}\,dx\right) = \tilde{U}_t \end{cases}$$

*اگر بخواهیم از U_t تبدیل فوریه بگیریم به $\tilde{U}_t$ و اگر از U_{tt} تبدیل بگیریم به $\tilde{U}_{tt}$ تبدیل می‌شود ولی U_x را هنگامی که تبدیل می‌گیریم از فرمول می‌نویسیم

جایگذاری یادآوری در رابطه ۱

$$\tilde{U}_t - 4(-\omega^2\tilde{U}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1}(x+t)e^{-i\omega x}\,dx$$

در بقیه بازه‌ها $U(x,t)=0$ است $\quad f(x)$

t را از انتگرال بیرون می‌آوریم

$$\tilde{U}_t + 4\omega^2\tilde{U} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1} x e^{-i\omega x}\,dx}_{H(\omega)} + t\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1} e^{-i\omega x}\,dx}_{K(\omega)}$$

چون x با قرار دادن عدد از بین می‌رود و ω باقی می‌ماند

ادامه ←

ادامه حل: خطی مرتبه اول: $\rightarrow \tilde{U}_t + 4\omega^2 \tilde{U} = H(\omega) + t\,K(\omega)$

$$\rightarrow \tilde{U}(\omega,t) = e^{-4\omega^2 t}\left[\int e^{4\omega^2 t}\big(H(\omega) + t\,K(\omega)\big)\,dt + a(\omega)\right]$$

قبلاً a_n می‌گرفتیم.

$H(\omega)+tK(\omega)$	$\oplus\ e^{4\omega^2 t}$
$+K(\omega)$	$\ominus\ \frac{1}{4\omega^2}e^{4\omega^2 t}$
0	$\frac{1}{16\omega^4}e^{4\omega^2 t}$

حال جواب انتگرال داخل کروشه را (به وسیله جدول) جایگذاری می‌کنیم:

$$\rightarrow \tilde{U}(\omega,t) = e^{-4\omega^2 t}\left[\frac{H(\omega)+t\,K(\omega)}{4\omega^2}e^{4\omega^2 t} - \frac{K(\omega)}{16\omega^4}e^{4\omega^2 t} + a(\omega)\right]$$

$$\rightarrow \tilde{U}(\omega,t) = \frac{H(\omega)+t\,K(\omega)}{4\omega^2} - \frac{K(\omega)}{16\omega^4} + a(\omega)\,e^{-4\omega^2 t} \quad * \text{ رابطه}$$

$$t=0 \rightarrow \tilde{U}(\omega,0) = \frac{H(\omega)}{4\omega^2} - \frac{K(\omega)}{16\omega^4} + a(\omega) \quad ① \text{ رابطه}$$

* تنها مشکل ما (مجهول ما) $a(\omega)$ است که از شرایط اولیه استفاده کرده و داریم:

حال از شرایط اولیه یعنی $U(x,0) = \begin{cases} x^2 ; & |x|<\pi \\ 0 ; & |x|>\pi \end{cases}$ تبدیل فوریه می‌گیریم:

$$\tilde{U}(\omega,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 e^{-i\omega x}\,dx = P(\omega) \quad ② \text{ رابطه}$$

در بقیه بازه‌ها $U(x,0)=0$ است

یک اسم است

ادامه حل :

رابطه ① = رابطه ②

$$a(\omega) = P(\omega) - \frac{H(\omega)}{4\omega^2} + \frac{K(\omega)}{16\omega^4}$$ جایگذاری $a(\omega)$ در رابطه *

طبق رابطه * داریم $\longrightarrow$

$$\tilde{U}(\omega,t) = \frac{H(\omega)+tK(\omega)}{4\omega^2} - \frac{K(\omega)}{16\omega^4} + \left(P(\omega) - \frac{H(\omega)}{4\omega^2} + \frac{K(\omega)}{16\omega^4}\right) e^{-4\omega^2 t}$$

حال ما $\tilde{U}(\omega,t)$ را داریم و با یک تبدیل معکوس می‌توانیم $u(\omega,t)$ را بیابیم :

فوریه معکوس می‌گیریم $\longrightarrow$

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{U}(\omega,t)\, e^{i\omega x}\, d\omega}$$

Subject:
Year ۸۵ Month ۲ Date ۱۲

مسئله:

$$u_{tt} - 9u_{xx} = \begin{cases} x - t^2 & |x| < \pi \\ 0 & |x| > \pi \end{cases}$$

شرایط مرزی

$$\begin{cases} u(x,0) = \begin{cases} 1+x & |x| < 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases} \\ u_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

معادله فوق، معادله موج ناهمگن است و باید از طرفین فوریه بگیریم:

$$F(u_{tt}) - 9F(u_{xx}) = F\left(\begin{cases} x - t^2 & |x| < \pi \\ 0 & |x| > \pi \end{cases}\right)$$

$$\tilde{u}_{tt} - 9(-\omega^2 \tilde{u}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} (x - t^2) e^{-i\omega x} dx$$

t را از داخل انتگرال آزاد می‌کنیم:

$$\tilde{u}_{tt} + 9\omega^2 \tilde{u} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} x e^{-i\omega x} dx}_{H(\omega)} - t^2 \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\omega x} dx}_{K(\omega)}$$

$$\tilde{u}_{tt} + 9\omega^2 \tilde{u} = H(\omega) - t^2 K(\omega)$$ معادله خطی مرتبه دوم

معادله مشخصه: $\lambda^2 + 9\omega^2 = 0 \rightarrow \lambda^2 = -9\omega^2 \rightarrow \lambda = \pm 3\omega i$ $\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 3\omega \end{cases}$

تذکر: $u(x,t) \longrightarrow \tilde{u}(\omega,t)$

رابطه ✻ $\tilde{u}(\omega,t) = a(\omega)\cos(3\omega t) + b(\omega)\sin(3\omega t) + \underbrace{\tilde{u}^*(\omega,t)}$

جواب خصوصی از طریق لاگرانژ

PAPCO ادامه حل ←

Subject:
Year ۸۵ Month ۲ Date ۱۲

* ابتدا باید با کمک شرایط مرزی، $a(\omega)$ و $b(\omega)$ را یافت و سپس با فوریه معکوس

گرفتن u را یافت.

* در رابطه‌ی $t=0 \Rightarrow \tilde{u}(\omega,0) = a(\omega) + \tilde{u}^*(\omega,0)$ رابطه‌ی ①

* در رابطه‌ی $\Rightarrow$ مشتق نسبت به t $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \tilde{U}_t(\omega,t) = -3\omega a(\omega)\sin(3\omega t) + 3\omega b(\omega)\cos(3\omega t) + \tilde{U}_t^*(\omega,t)$$

$$t=0 \Rightarrow \tilde{U}_t(\omega,0) = 3\omega b(\omega) + \tilde{U}_t^*(\omega,0)$$ رابطه‌ی ②

حال از شرایط اولیه استفاده می‌کنیم:

$$U(x,0) = \begin{cases} 1+x & |x|<1 \\ 0 & |x|>1 \end{cases} \xrightarrow{\text{فوریه می‌گیریم}} \tilde{u}(\omega,0) = \overbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1}(1+x)e^{-i\omega x}\,dx}^{P(\omega)}$$

$$\longrightarrow \tilde{u}(\omega,0) = P(\omega)$$ رابطه‌ی ③

$$\underbrace{U_t}_{\text{«مشتق U نسبت به t»}}(x,0) = 0 \xrightarrow{\text{فوریه می‌گیریم}} \tilde{U}_t(\omega,0) = 0$$ رابطه‌ی ④

ادامه‌ی حل ←

PAPCO

ادامهٔ حل:

① = ③ ⟶ $a(\omega) = P(\omega) - \tilde{U}^*(\omega,0)$

② = ④ ⟶ $b(\omega) = \dfrac{-\tilde{U}_t(\omega,0)}{3\omega}$

حال $a(\omega)$ و $b(\omega)$ بدست آمده را در رابطهٔ * قرار می‌دهیم سپس یک تبدیل فوریه می‌گیریم تا u بدست آید:

$$\tilde{U}(\omega,t) = \left(P(\omega) - \tilde{U}^*(\omega,0)\right)\cos(3\omega t) - \frac{\tilde{U}_t(\omega,0)}{3\omega}\sin(3\omega t) + \tilde{U}^*(\omega,t)$$

جواب معادله: $\xrightarrow{\text{فوریهٔ معکوس می‌گیریم}}$ $u(x,t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{U}(\omega,t)\, e^{i\omega x}\, d\omega$

تذکر مهم:

* در امتحان اگر معادلهٔ موج متناهی بود روش تفکیک متغیر را استفاده کرده ولی اگر نیمه متناهی و نامتناهی بود از فوریه استفاده می‌کنیم

انتشار موج در دریای نیمه متناهی: $(0 < x < \infty)$

معادله موج: $U_{tt} - c^2 U_{xx} = F(x,t)$

شرایط موج نیمه متناهی

$$\begin{cases} U(x,0) = f(x) \\ U_t(x,0) = g(x) \\ U(0,t) = P(t) \\ \lim_{x\to\infty} U(x,t) = 0 \end{cases}$$

شرایط اولیه (برای $U(x,0)=f(x)$ و $U_t(x,0)=g(x)$)

$U(0,t)=P(t) \rightarrow$ شرط مرزی $\Leftarrow$ چون یک سر ∞ است یک شرط مرزی داریم

$\lim_{x\to\infty} U(x,t)=0 \rightarrow$ (همواره برقرار است) شرط زاویه

نوع شرایط دریا نیمه متناهی

$$\begin{cases} U(x,0) = f(x) \\ U(0,t) = P(t) \\ \lim_{x\to\infty} U(x,t) = 0 \end{cases}$$

$U(x,0)=f(x)$ شرط اولیه

$U(0,t)=P(t)$ شرط مرزی $\Leftarrow$ چون یک سر ∞ است یک شرط مرزی داریم

$\lim_{x\to\infty} U(x,t)=0$ شرط زاویه

مسائل فوق درصورتی دارای جواب است که توابع $F(x,t)$ ، $f(x)$ و $g(x)$

در بازه‌ی $0 < x < \infty$ مطلقاً انتگرال پذیر باشند.

در غیر اینصورت:

چنانچه مرز همگن نباشد، آن را همگن می‌کنیم و سپس شرط وجود جواب را

برای مسئله‌ی جدید (۷) بررسی می‌کنیم

* تذکر مهم:

اگر توابع مطلقاً انتگرال‌پذیر باشند نیازی به همگن کردن مرز نداریم.

برای همگن کردن شرط مرزی $w(x,t)$ را با توجه به شرط مرزی به یکی از دو صورت زیر می‌گیریم:

$u(0,t)=P(t)$: شرط مرزی $\rightarrow$ $w(x,t)=a$

$u_x(0,t)=P(t)$ شرط مرزی $\rightarrow$ $w(x,t)=ax$

برای حل معادله، چنانچه شرط مرزی به صورت $u(0,t)=P(t)$ باشد، از طرفین معادله تبدیل فوریه sin ای می‌گیریم.

و چنانچه شرط مرزی به صورت $u_x(0,t)=P(t)$ باشد، از طرفین معادله تبدیل فوریه cos ای می‌گیریم.

مثال:

معادلهٔ زیر را حل کنید. (صفحهٔ ۲۵۴ مسئلهٔ ۴.۶)

$$U_t - U_{xx} = \begin{cases} 2t & 0<x<\pi \\ 1 & x>\pi \end{cases}$$

شرایط معادله:
$$\begin{cases} u(x,0) = \begin{cases} 2x, & 0<x<1 \\ 1, & x>1 \end{cases} \rightarrow \text{شرایط اولیه} \\ u(0,t) = t+1 \quad \text{مرز ناهمگن} \end{cases}$$

* مطلقاً انتگرال‌پذیر یعنی باید قسمتی که $\pi < x$ است، انتگرالش می‌شود:

$$\int_{\pi}^{\infty} 1 \, dx = x \Big|_{\pi}^{\infty} = \infty \quad \times$$

پس فقط یک شانس داریم و آن این است که مرز را همگن کنیم و پس مطلقاً انتگرال‌پذیری را

بررسی کنیم:

$$\begin{cases} V_t - V_{xx} = ? \\ V(x,0) = ? \\ V(0,t) = 0 \quad \text{مرز همگن} \end{cases}$$

$U(x,t) = V(x,t) + a$, یافتن a از طریق مرز ناهمگن

$U(0,t) = V(0,t) + a \longrightarrow a = t-1$

$U(x,t) = V(x,t) + t - 1$ رابطهٔ (*)

ادامه ...

ادامه حل: حال علامت سؤال ۴ را بررسی کنیم:

* از ادامه $\xrightarrow{t=0} u(x,0) = v(x,0) - 1$

$\rightarrow v(x,0) = \begin{cases} 2x+1 , & 0<x<1 \\ 0 , & x>1 \end{cases}$ ⟸ * مطلقاً انتگرال پذیر شد.

از ادامه * داریم: $\begin{cases} u_t = v_t + 1 \\ u_{xx} = v_{xx} \end{cases}$ $\xrightarrow[\text{می دهیم}]{\text{در معادله اصلی صدق}} v_t + 1 - v_{xx} = \begin{cases} 2t , & 0<x<\pi \\ 1 , & x>\pi \end{cases}$

$\rightarrow v_t - v_{xx} = \begin{cases} 2t-1 , & 0<x<\pi \\ 0 , & x>\pi \end{cases}$

چون مرز به صورت $u(0,t)$ است تبدیل فوریه سینوسی می گیریم:

$$F_s(v_t) - F_s(v_{xx}) = F_s\left(\begin{cases} 2t-1 & 0<x<\pi \\ 0 & x>\pi \end{cases}\right)$$

یادآوری می کنیم: $F_s(f(x)) = \tilde{F}_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \sin(\omega x)\, dx$

$F_s(f''(x)) = -\omega^2 F_s(f(x)) + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \omega f(0) \rightarrow$

$\rightarrow F_s(v_{xx}) = -\omega^2 \tilde{v}_s + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \omega\, v(0,t)$

ادامه حل ←