۸۸/۷/۱۴

میانترم ۲ آذرماه ۹،۳

جلسه اول

مرجع: سیستمهای مخابراتی (کارلسون)

مباحث: ۱- مقدمه ۲- تبدیل فوریه (فصل ۲ کتاب، اسئول در میانترم) ۳- انتقال سیگنال و فیلتر کردن

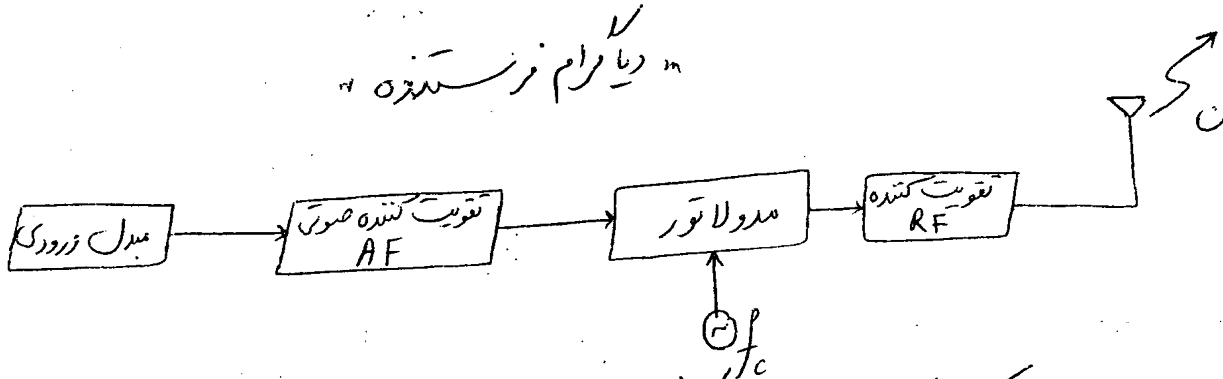
۴- مقدمه‌ای بر آمار و احتمال مهندسی (درس داده نمی‌شود و بطور مستقیم سوال داده می‌شود)

۵- فرآیندها یا سیگنال‌های تصادفی ۶- مدولاسیون پیوسته خطی دامنه: AM و DSB

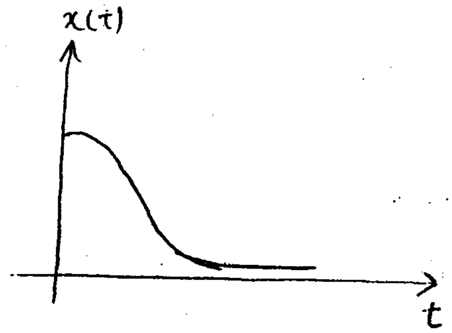
۷- مدولاسیون پیوسته نمایی فاز FM و PM ۸- گیرنده‌های رادیویی (میکسر).

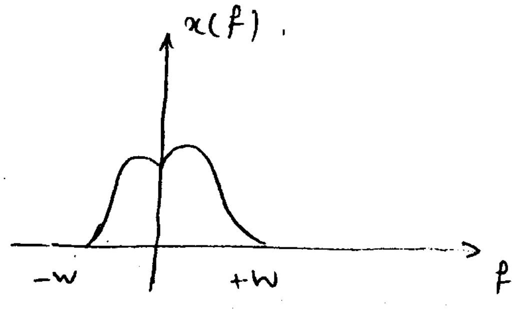
مقدمه:

"دیاگرام فرستنده"

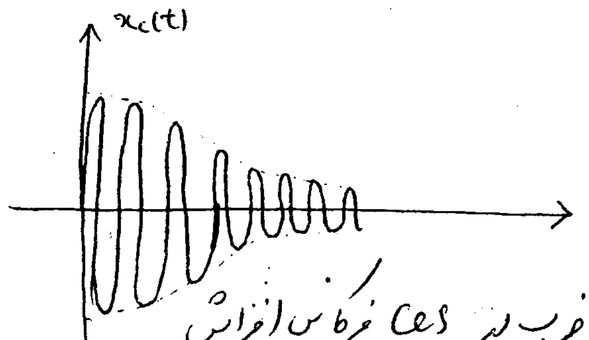


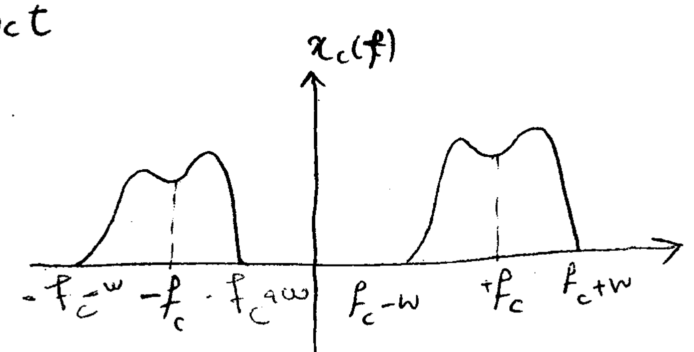
مدولاسیون: یک نوع بالا بردن فرکانس.





سیگنال مدوله شده $x_c(t) = x(t)\cos\omega_c t$





* با ضرب در cos فرکانس افزایش می‌یابد و اطلاعات از بین نمی‌رود و فقط شیفت می‌یابد.

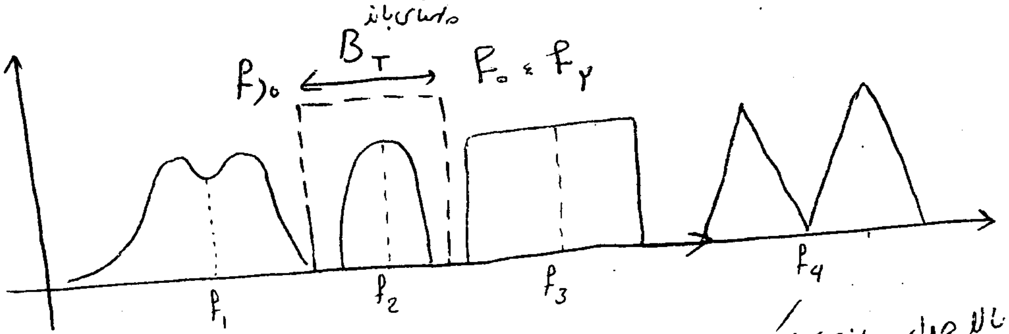
علل بکارگیری مدولاسیون:

۱- کاهش سایز آنتن:

$$\text{ابعاد آنتن} \propto \frac{\lambda}{4} = \frac{v}{4f} = \frac{c}{4f} = \frac{3\times10^8}{4\times4\times10^3} \simeq 2\times10^4 \simeq 20\,km$$

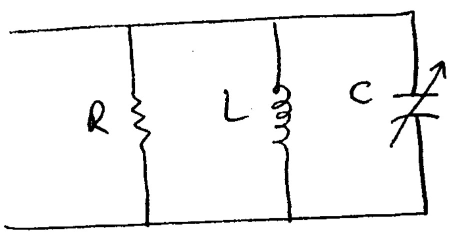
نامناسب پس باید طول موج کاهش داد. (فرکانس را کاهش می‌دهیم)

۲- امکان ارسال همزمان چند فرستنده:



در فرکانس بالا جداسازی امکان پذیر نیست.

* مدولاسیون باعث می‌شود که شکل ها به صورت جداگانه منتقل شود و بر روی هم واقع نشوند.



$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

فرکانس تشدید (رزونانس)

* مدار برای تنظیم دریافت یک فرکانس خاص.

۳- مقابله با نویز

۴- استفاده از کانال های مخابراتی مختلف.

انواع مدولاسیون:

۱- مدولاسیون دامنه (AM)

۲- مدولاسیون فاز (FM)

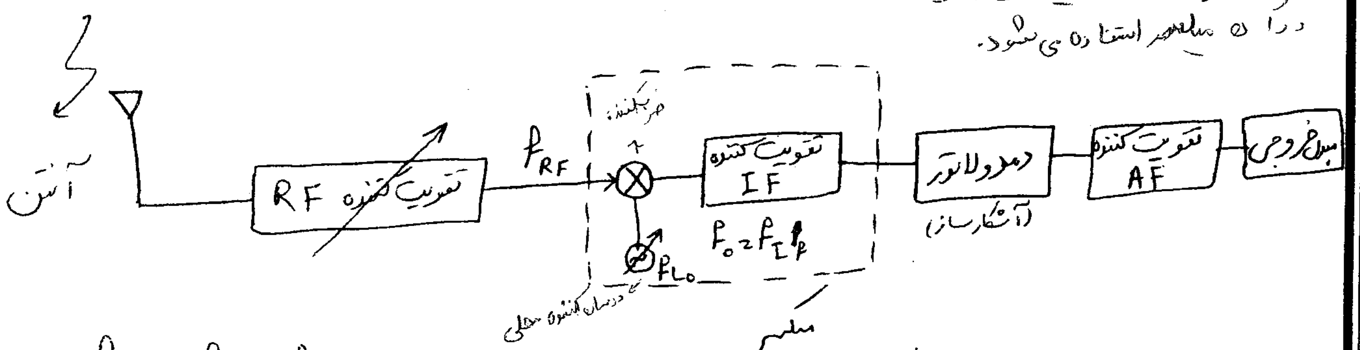
* نویز یک سیگنال تصادفی است و شکل ~~خاص~~ مشخص ندارد.

سیگنال های تصادفی تبدیل فوریه ندارند.

* مدولاتور عمل مدولاسیون را انجام می‌دهد.

دیاگرام گیرنده‌ها

- گیرنده‌های هیتروداین: گیرنده‌هایی که در آن‌ها میکسر استفاده می‌شود.



$$f_{IF} = f_{RF} - f_{Lo}$$

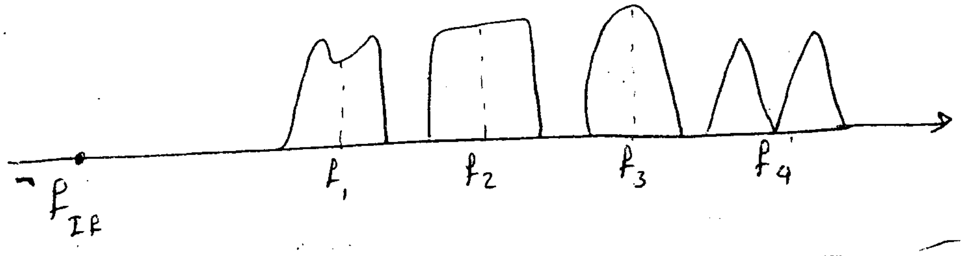
Q معمولاً در حد ۲۰۰ و ۳۰۰ می‌باشد.

ضریب کیفیت

$$Q = \frac{f_{IF}}{B_T}$$

$$Q = \frac{f_o}{B_T} = \frac{40\ MHZ}{8\ KHZ} = 5000$$

* هرچه ضریب کیفیت پائین‌تر باشد توانایی جداکردن یک سمت از بقیه بیشتر است.
* علت استفاده از میکسر این است که فرکانس را پائین بیاوریم.



نحوه ارزیابی:
1) ٪۴۵ میانترم
2) ٪۵۵ پایانترم

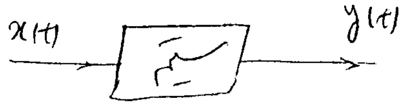
تاریخ امتحان میانترم ۸۹/۲/۱۴ سه‌شنبه
۸۸/۹/۴

* فصل ۲ (تبدیل فوریه، اسئوال) و فصل ۳ (چند مسئله) اثبات معادلات با شد

۸۸/۷/۲۱

فصل سوم : انتقال سیگنال و فیلتر کردن

۱- سیستم های خطی تغییر ناپذیر با زمان (LTI) :



$$y(t) = F[x(t)]$$

خاصیت خطی بودن
$$\begin{cases} x(t) = \sum_k a_k x_k(t) \\ y(t) = \sum_k a_k F[x_k(t)] \end{cases}$$

۲- خاصیت تغییر ناپذیری با زمان :

$$F[x(t-t_d)] = y(t-t_d)$$

پاسخ ضربه واحد : $h(t) = F[\delta(t)]$

قضیه : در سیستم های LTI پاسخ سیستم به ورودی دلخواه، کانولوشن آن ورودی با پاسخ ضربه آن سیستم خواهد بود.

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

اثبات :

نکته : هر تابعی با ضربه کانولوشن شود، می شود خودش :

$$x(t) = x(t) * \delta(t)$$

$$\Rightarrow y(t) = F[x(t)] = F[x(t) * \delta(t)] = F\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda)\,\delta(t-\lambda)\,d\lambda\right]$$

با توجه به خطی بودن :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda)\, F[\delta(t-\lambda)]\, d\lambda$$

با توجه به خاصیت تغییر ناپذیری با زمان :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda)\, F[\delta(t-\lambda)\, d\lambda]$$

با توجه به خاصیت تعریف کانولوشن :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda)\, h(t-\lambda)\, d\lambda = x(t) * h(t)$$

$$g(t) = F[u(t)]$$

پاسخ پله :

قضیه : در سیستم های LTI بازمان رابطه بین پاسخ ضربه و پاسخ پله به صورت زیر بیان می شود.

$$h(t) = \frac{dg(t)}{dt}$$ (تابع ضربه مشتق تابع پله است)

$$\frac{d}{dt}\left(v(t) * w(t)\right) = v(t) * \frac{dw(t)}{dt}$$

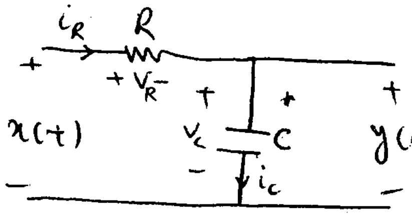
اثبات :

$$\frac{dg(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(h(t) * w(t)\right) \Rightarrow h(t) * \frac{dw(t)}{dt} = h(t) * \delta(t) = h(t)$$

مهم : در سیستم های خطی تغییرناپذیر با زمان رابطه خروجی به وسیله ی یک معادله خطی تغییرناپذیر بیان می گردد:

$$b_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + b_{n-1}\frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + b_1 \frac{dy(t)}{dt} + b_0 y(t) = a_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + a_{m-1}\frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0 x(t)$$

مثال : پاسخ زمان سیستم مرتبه اول :



(I) $V_R + V_c = x(t)$ (II) $i_R = i_c = C\frac{dV_c}{dt} \xRightarrow{\text{IV, II, III}} RC\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$

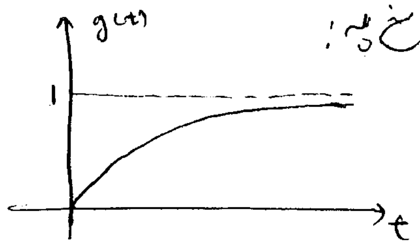
(III) $V_c = y(t)$ (IV) $V_R = R\, i_R$

معادله دیفرانسیل بین ورودی و خروجی :

$g(t) = ?$ $g(t) = F[u(t)]$

$x(t) = u(t) \Rightarrow g(t) = (1 - e^{-\frac{t}{RC}})\, u(t)$

پاسخ پله :

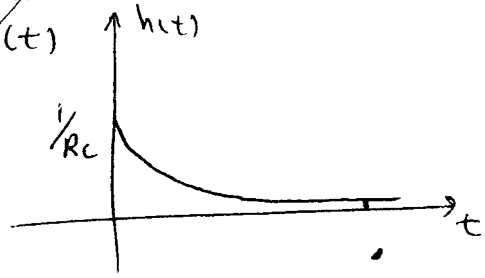


پاسخ ضربه: چون پاسخ پله داریم از آن مشتق می‌گیریم:

$h(t) = ?$

$$h(t) = \frac{dg(t)}{dt} = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} u(t) + \cancel{(1-e^{-\frac{t}{RC}})\delta(t)}^{\,0}$$

در پاسخ ضربه همیشه $\Rightarrow$ $$= \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} u(t)$$



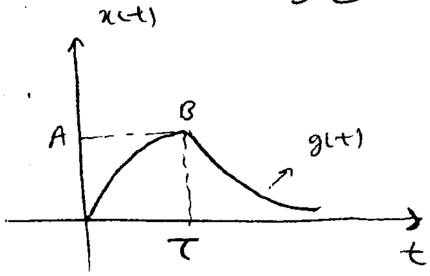
پاسخ پالس:

$t<0 \rightarrow y(t)=0$

$0 \leq t \leq \tau \rightarrow y(t) = A(1-e^{-\frac{t}{RC}})$

$t \geq \tau \rightarrow y(t) = B e^{-\frac{(t-\tau)}{RC}}$

$B = A(1-e^{-\frac{t}{RC}})$



$$y(t) = \begin{cases} 0 \\ A(1-e^{-\frac{t}{RC}}) \\ A(1-e^{-\frac{t}{RC}})\, e^{-\frac{(t-\tau)}{RC}} \end{cases}$$

---

* تابع تبدیل و پاسخ فرکانسی:

تابع تبدیل $$H(f) = F[h(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

* اگر $h(t)$ یک تابع حقیقی باشد $H(f)$ تقارن هرمیتی بصورت زیر دارد:

$$H(-f) = H^*(f)$$

* هر تابع حقیقی تبدیل فوریه آن دارای تقارن هرمیتی است.

$$H^*(f) = F[h(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-j2\pi(-f)t} dt = H(-f)$$

بنابراین:

1) $|H(-f)| = |H(f)|$ تقارن زوج

2) $\angle H(-f) = -\angle H(f)$ 〃 فرد

در حوزه زمان — در حوزه فرکانس

$$y(t) = h(t) * x(t) \longrightarrow Y(f) = H(f) \cdot X(f)$$

$$\Rightarrow y(t) = F^{-1}[Y(f)] = \int_{-\infty}^{+\infty} [H(f) * X(f)]\, e^{+j2\pi ft}\, df$$

$$|Y(f)| = |H(f)||X(f)|$$

$$\measuredangle Y(f) = \measuredangle X(f) + \measuredangle H(f)$$

* پیدا کردن H(f) (تابع تبدیل) با استفاده از معادله دیفرانسیلی ورودی - خروجی :

$$b_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + b_{n-1}\frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + b_1 \frac{dy(t)}{dt} + b_0 y(t) =$$

$$a_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + a_{m-1}\frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0 x(t)$$

حال از دو طرف تبدیل فوریه می‌گیریم :

$$\Rightarrow H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{a_m(j2\pi f)^m + a_{m-1}(j2\pi f)^{m-1} + \cdots + a_1(j2\pi f) + a_0}{b_n(j2\pi f)^n + b_{n-1}(j2\pi f)^{n-1} + \cdots + b_1(j2\pi f) + b_0}$$

* پیدا کردن H(f) تابع تبدیل با استفاده از فازورهای ورودی - خروجی :

امپدانس مقاومت $Z_R = R$ — امپدانس سلف $Z_L = j2\pi Lf$

امپدانس خازن $Z_C = \dfrac{1}{j2\pi fC}$ — فازور ولتاژ $V = ZI$ (امپدانس، فازور جریان)

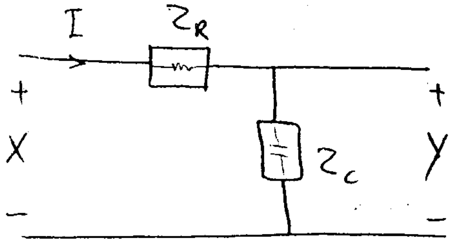
$$H(f) = \frac{Y}{X}$$

Y ← فازور خروجی

X ← فازور ورودی

مثال : پاسخ فرکانسی مدار مرتبه اول :

منظور از پاسخ فرکانسی رسم همزمان اندازه و فاز تابع
تابع $H(f)$ می باشد.



$$Y = I Z_c = \left(\frac{X}{Z_c + Z_R}\right) Z_c$$

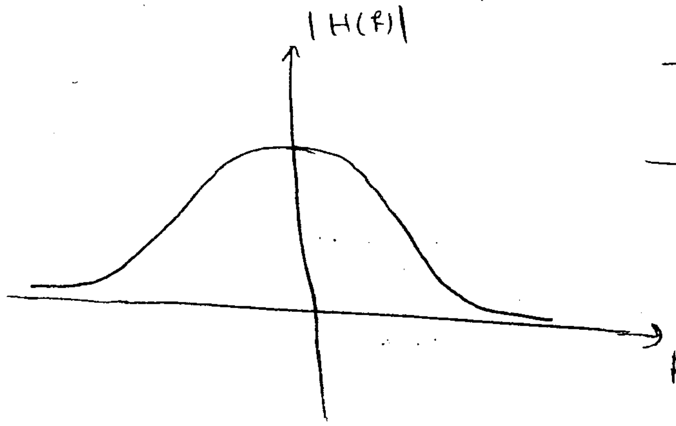
$$Z_R = R \qquad Z_c = \frac{1}{j\underbrace{2\pi f}_{\omega} C}$$

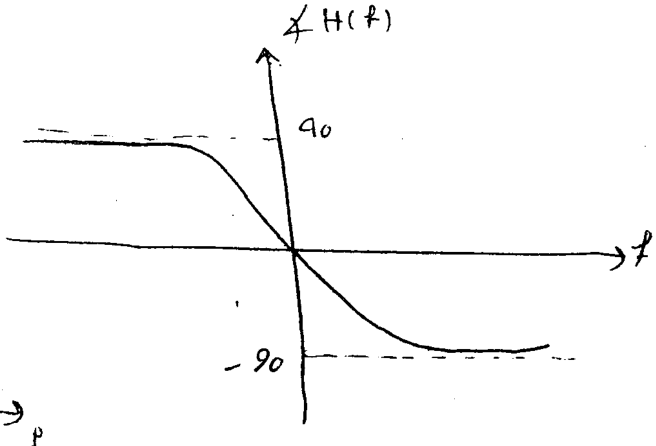
$$H(f) = \frac{Y}{X} = \frac{Z_c}{Z_c + Z_R}$$

$$= \frac{\frac{1}{j2\pi f C}}{\frac{1}{j2\pi f C} + R} = \frac{1}{1 + j2\pi f RC}$$

$$B \triangleq \frac{1}{2\pi RC} \longrightarrow H(f) = \frac{1}{1 + j\left(\frac{f}{B}\right)} \longrightarrow |H(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{B}\right)^2}}$$

$$\measuredangle H(f) = -tg^{-1}\left(\frac{f}{B}\right)$$





۸۸/۷/۲۸

جلسه سوم

* تحلیل با نمودار بلوکی:

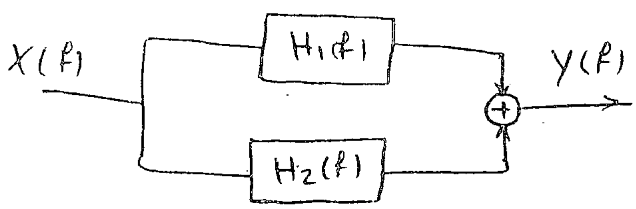
$$y(t) = \pm k\, x(t) \implies H(f) = \pm K$$

$$y(t) = \frac{dx(t)}{d(t)} \implies H(f) = (j2\pi f)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\lambda)\, d\lambda \implies H(f) = \frac{1}{j2\pi f}$$

$$y(t) = x(t - t_d) \implies H(f) = e^{-j2\pi f t_d}$$

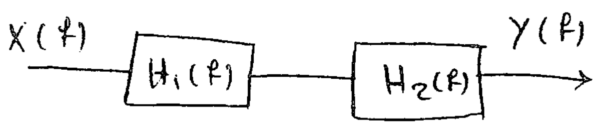
* اتصال موازی:



$$Y(f) = X(f)H_1(f) + X(f)H_2(f)$$

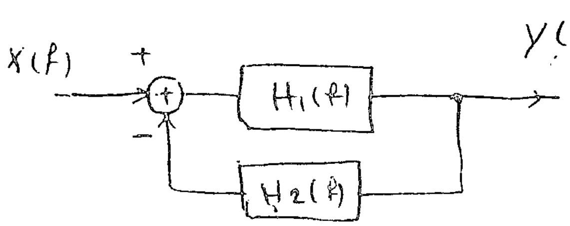
$$\implies H(f) = H_1(f) + H_2(f)$$

* اتصال سری:



$$Y(f) = [X(f)H_1(f)]\, H_2(f) \implies H(f) = H_1(f) \cdot H_2(f)$$

* اتصال فیدبک دار:

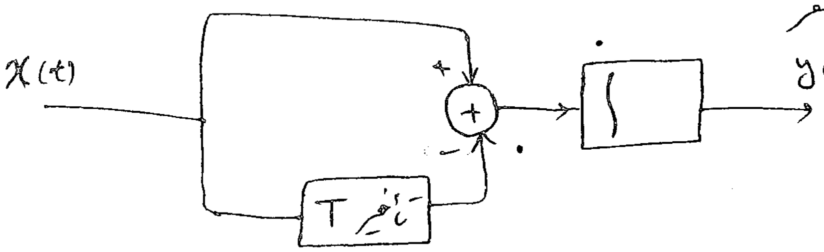


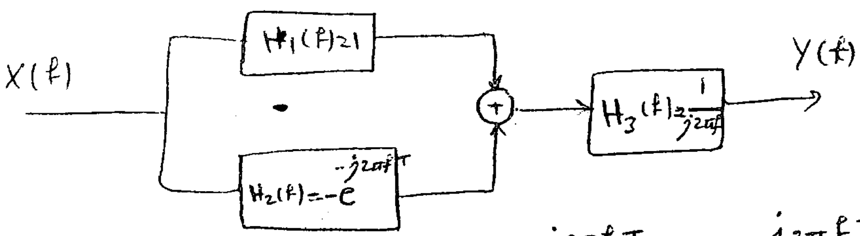
$$Y(f) = [X(f) - Y(f)H_2(f)]\, H_1(f)$$

$$Y(f)[1 + H_1(f)H_2(f)] = X(f)H_1(f)$$

$$\implies H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{H_1(f)}{1 + H_1(f)H_2(f)}$$

مثال : مدار نگهدار مرتبه صفر





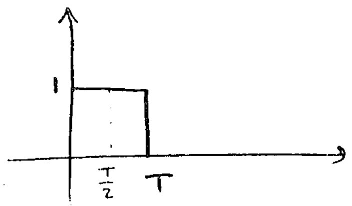
$$H(f)=\left[H_1(f)+H_2(f)\right]H_3(f)=\frac{1-e^{-j2\pi fT}}{j2\pi f}=e^{-j2\pi fT}\left(\frac{e^{j2\pi fT}-e^{-j2\pi fT}}{j2\pi f}\right)$$

$$\mathrm{sinc}\, fT=\frac{\sin \pi fT}{\pi fT}\qquad =e^{-j2\pi fT}\,\frac{\sin \pi fT}{\pi f}=T e^{-j\pi fT}\,\mathrm{sinc}\, fT$$

روش دوم :

$$x(t)=\delta(t)\Longrightarrow y(t)=h(t)$$

$$h(t)=\int_{-\infty}^{t}\left[\delta(\lambda)-\delta(\lambda-T)\right]d\lambda=u(t)-u(t-T)$$



$$x(t)=\Pi\left(\frac{t}{T}\right)\xleftrightarrow{\;F\;}X(f)=T\,\mathrm{sinc}\, fT$$

تبدیل فوریه

$$h(t)=x\left(t-\frac{T}{2}\right)$$

$$\Longrightarrow H(f)=X(f)e^{-j\pi fT}=Te^{-j\pi fT}\,\mathrm{sinc}\, fT$$

---

* اعوجاج سیگنال در انتقال : عوض شدن شکل موج خروجی نسبت به ورودی را اعوجاج می‌نامند . (ضریب ثابت و تأخیر زمانی اعوجاج محسوب نمی‌شود).

* انتقال بدون اعوجاج : در یک انتقال بدون اعوجاج خروجی می‌تواند تنها در یک ضریب ثابت و یک تأخیر زمانی ثابت با ورودی تفاوت داشته باشد.

مثل $\Rightarrow y(t)=K_1x(t-t_d)$

بدست آوردن تابع تبدیل اعوجاج قبلی $\Rightarrow Y(f) = K X(f) e^{-j2\pi f t_d}$

تابع تبدیل $H(f) = K e^{-j2\pi f t_d}$

* بنابراین در یک سیستم بدون اعوجاج :

1) $|H(f)| = K$

2) $\measuredangle H(f) = -2\pi f t_d \pm m180$

K_1 مثبت باشد عدد زوج
K_1 منفی باشد عدد فرد

* اگر دامنه ثابت و منفی باشد m یک عدد فرد و مثبت در نظر می‌گیریم.

* در یک سیستم غیرخطی خروجی به توانهای بالاتری از ورودی نیز بستگی دارد.

شده : $y(t) = a_1 x(t) + a_2 x^2(t) + a_3 x^3(t) + \cdots$

$\xrightarrow{\text{تبدیل فوریه می‌گیریم}} Y(f) = a_1 X(f) + a_2 X(f) * X(f) + a_3 X(f) * X(f) * X(f) + \cdots$

بنابراین در سیستمهای غیرخطی حتماً اعوجاج وجود دارد.

* براین اساس سه نوع اعوجاج را بصورت زیر تعریف می‌کنیم :

۱- اعوجاج دامنه که به ازای شرط زیر رخ می دهد : $|H(f)| \neq K$

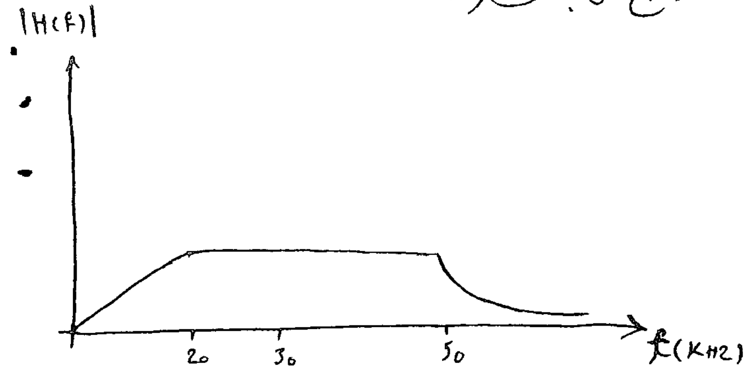
۲- اعوجاج فاز (تاخیر) که به ازای شرط زیر رخ می دهد : $\measuredangle H(f) \neq -2\pi f t_d \pm m180$

۳- اعوجاج غیرخطی که در صورت وجود اجزای غیرخطی رخ می دهد.

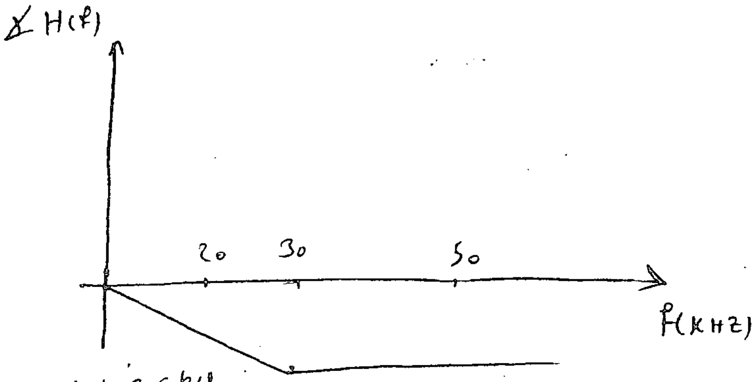
۸۸/۸/۵

جلسه چهارم

مثال: پاسخ فرکانسی یک سیستم انتقال در شکل زیر نشان داده شده است. این سیستم در چه ناحیه‌ای از باند فرکانسی بدون اعوجاج می‌باشد؟



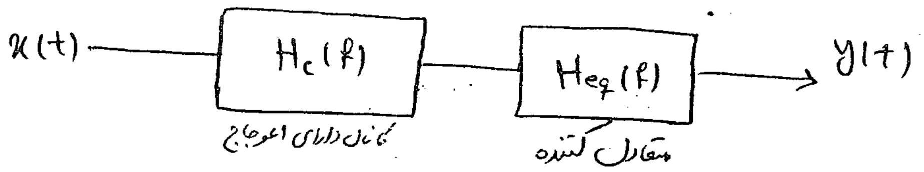
بین فاصله‌ی 20 تا 30 سیستم بدون اعوجاج است.



رابطه‌ی خطی دارد.

---

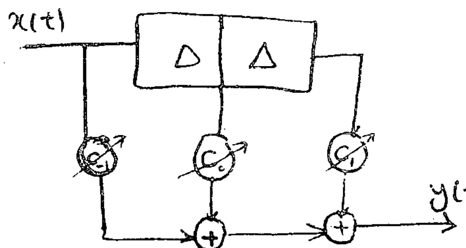
* متعادل کننده یا اکولایزر یا جبران ساز:



$$H_c(f)\,H_{eq}(f) = K e^{-j2\pi f t_d}$$

$$\boxed{H_{eq}(f) = \frac{K e^{-j2\pi f t_d}}{H_c(f)}}$$ ← تابع تبدیل

* متعادل کننده خط تأخیر برگ‌دار یا فیلتر عرضی:



$$y(t) = C_{-1}x(t) + C_0\,x(t-\Delta) + C_1\,x(t-2\Delta)$$

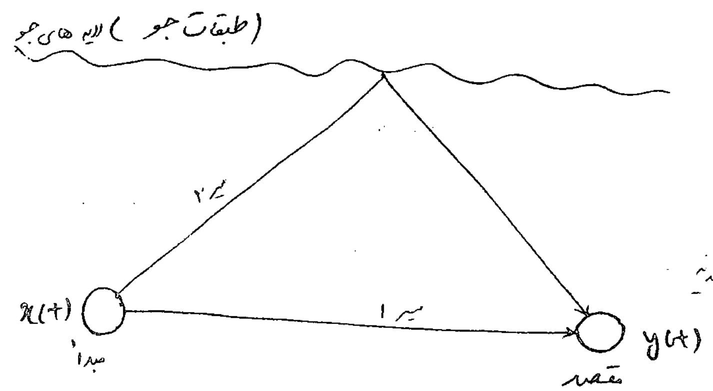
تبدیل فوریه از y(t) می‌گیریم $\Rightarrow H(f) = c_{-1} + c_0 e^{-j\omega\Delta} + c_1 e^{-j\omega 2\Delta}$

$$\Rightarrow H(f) = \left(c_{-1} e^{+j\omega\Delta} + c_0 + c_1 e^{-j\omega\Delta}\right) e^{-j\omega\Delta}$$

با تعمیم معادله‌ی فوق به حالت خط تأخیر $2M\Delta$ با $2M+1$ سر خواهیم داشت:

$$\boxed{H(f) = \left(\sum_{m=-M}^{M} c_m e^{-j\omega m\Delta}\right) e^{-j\omega M\Delta}}$$

مثال: اعوجاج چندمسیره



انتقال سیگنال از طریق طبقات جو : پدیده اسکترینگ

$$y(t) = K_1 x(t-t_1) + K_2 x(t-t_2)$$

تبدیل فوریه $\Rightarrow Y(f) = K_1 X(f) e^{-j\omega t_1} + K_2 X(f) e^{-j\omega t_2}$

تابع تبدیل $H_c(f) = K_1 e^{-j\omega t_1} + K_2 e^{-j\omega t_2}$

فرض: $t_2 > t_1$

$$\Rightarrow H_c(f) = K_1 e^{-j\omega t_1}\left(1 + K_0 e^{-j\omega t_0}\right)$$

$$K_0 = \frac{K_2}{K_1} \quad , \quad t_0 = t_2 - t_1$$

متعادل کننده یا اکولایزر برای این سیستم باید دارای خاصیت زیر باشد یعنی اینکه:

$$H_c(f) H_{eq}(f) = K e^{-j\omega t_d}$$

$$H_{eq}(f) = \frac{K e^{-j\omega t_d}}{H_c(f)} \Rightarrow H_{eq}(f) = \frac{K e^{-j\omega t_d}}{K_1 e^{-j\omega t_1}\left(1 + K_0 e^{-j\omega t_0}\right)}$$

برای سادگی شکل متعادل کننده با انتخاب $t_d = t_1$ و $K = K_1$ خواهیم داشت:

$$H_{eq}(f) = \frac{1}{1 + K_0 e^{-j\omega t_0}}$$

اگر $\alpha \ll 1$:

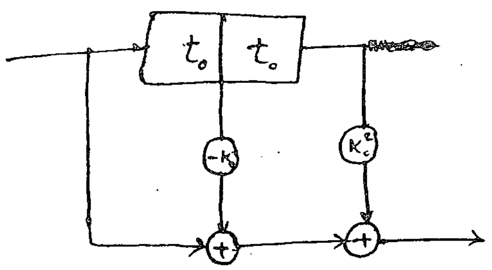
$$1-\alpha+\alpha^2-\alpha^3+\cdots=\frac{1}{1+\alpha}$$

بنابراین با توجه به $(k_0 \ll k_1)$ $K_0=\frac{K_2}{K_1} \ll 1$ خواهیم داشت :

$$H_{eq}(f)=\frac{1}{1+K_0 e^{-j\omega t_0}}=1-K_0 e^{-j\omega t_0}+K_0^2 e^{-j\omega 2t_0}-K_0^3 e^{-j\omega 3t_0}+\cdots$$

چون که $K_0 \ll K_1$ است داریم : (از جمله سوم به بعد صرف نظر می‌کنیم)

$$H_{eq} \simeq 1-K_0 e^{-j\omega t_0}+K_0^2 e^{-j\omega 2t_0}=\underbrace{\left(1e^{+j\omega t_0}-K_0+K_0^2 e^{-j\omega t_0}\right)}_{\text{خط تأخیر سه‌ترک‌دار}} e^{-j\omega t_0}$$



---

* اعوجاج غیرخطی :

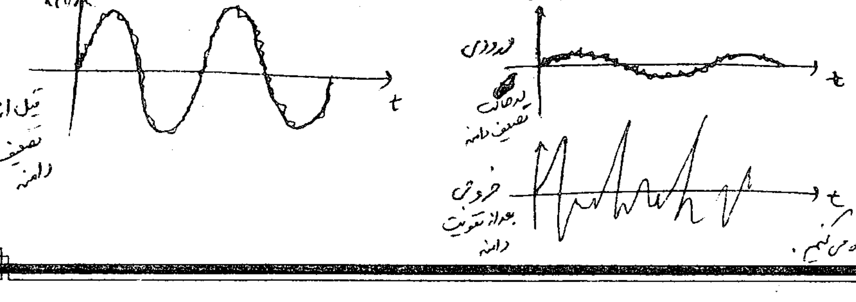
همانطور که قبلاً گفته شد در سیستم‌های غیرخطی خروجی به توان‌های بالاتری از ورودی نیز بستگی دارد :

$$y(t)=a_1 x(t)+a_2 x^2(t)+a_3 x^3(t)+\cdots$$

$$Y(f)=a_1 X(f)+a_2 X(f)*X(f)+a_3 X(f)*X(f)*X(f)+\cdots$$

* اگر دامنه سیگنال را خیلی ضعیف کنیم خروجی تقریباً شبیه ورودی است یعنی اعوجاج کم است.

* البته با کاهش دامنه در حد خیلی ولت ممکن است نویز روی سیگنال بیافتد چون که نویز نیز در حد میلی ولت است و اگر در خروجی دامنه را تقویت کنیم در کل نویز را نیز همراه دامنه تقویت کرده‌ایم.



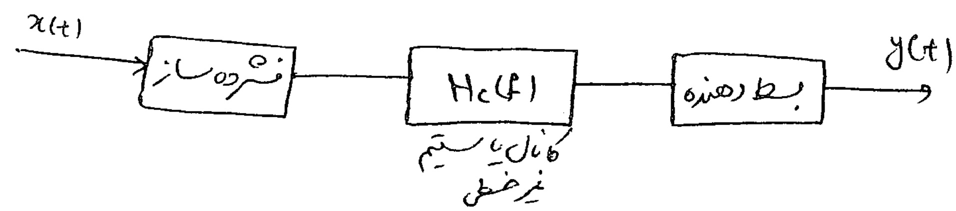
* اگر دامنه را خیلی کم کنیم با نویز ترکیب می‌شود و در حقیقت سیگنال را حذف می‌کند که برای این کار از دو روش فشرده ساز و بسط دهنده استفاده می‌کنیم.

فشرده ساز و بسط دهنده : مثل لگاریتم

فشرده ساز $T_{com}[x(t)]$

مثل آنتی لگاریتم

بسط دهنده $T_{exp}\left[T_{com}[x(t)]\right] = x(t)$



* تلفات انتقال :

۸۸/۸/۱۲

جلسه پنجم

* تلفات انتقال و دسیبل :

بهره توان $g = \frac{P_{out}}{P_{in}}$

$$P_{in} \longrightarrow \boxed{g} \longrightarrow P_{out}$$

$$P_{out} = g P_{in}$$

$$g_{dB} = 10 \log g = 10 \log \frac{P_{out}}{P_{in}} \Longrightarrow \boxed{g = 10^{\left(\frac{g_{dB}}{10}\right)}}$$

* یک وات ۰ dBW و ۳۰ dBm است.

$$P_{dBW} = 10 \log \frac{P}{1w} \qquad P_{dBm} = 10 \log \frac{P}{1mw}$$

$$\Longrightarrow g_{dB} = P_{out\,dBW} - P_{in\,dBW} \Longrightarrow \boxed{P_{out\,dBW} = P_{in\,dBW} + g_{dB}}$$

$$\boxed{P_{out\,dBm} = P_{in\,dBm} + g_{dB}}$$

* در سیستم های خطی تغییر ناپذیر با زمان می توان نشان داد :

تابع تبدیل

$$g = |H(f)|^2$$

$$Y(f) = X(f)\, H(f)$$

$$|Y(f)| = |X(f)|\, |H(f)|$$

با اثبات

$$\omega = 2\pi f$$

(موج تک فرکانس یعنی یک موج سینوسی)

ورودی

$$x(t) = A_x \cos \omega t$$

$$y(t) = A_y \cos(\omega t + \varphi) \Longrightarrow A_y = A_x |H(f)|$$

$$\Longrightarrow \frac{A_y^2}{2} = \frac{A_x^2}{2} |H(f)|^2$$

توان متوسط خروجی $P_y = \frac{A_y^2}{2}$

$$\Longrightarrow g = \frac{P_y}{P_x} = |H(f)|^2$$

توان متوسط ورودی $P_x = \frac{A_x^2}{2}$

* اگر داشته باشیم $|H(f)|=K$ (مقدار ثابت) آنگاه خواهیم داشت $g=K^2$.

* تلفات انتقال و تکرار کننده ها :

* در تقویت کننده توان خروجی بیشتر از توان ورودی است. $g>1$

تلفات انتقال $L=\frac{P_{in}}{P_{out}}=\frac{1}{g}$

* در جایی که توان ورودی بیشتر از توان خروجی است تلفات داریم:

$L>1$: در خطوط انتقال و کابل ها

$$L = 10\log L = 10\log\frac{P_{in}}{P_{out}} = -g_{dB}$$

$$g_{dB}=P_{out\,dBW}-P_{in\,dBW}$$

$$P_{out\,dBW}=P_{in\,dBW}-L_{dB}$$

$$P_{out\,dBm}=P_{in\,dBm}-L_{dB}$$

* معمولاً در کابل ها، فیبرهای نوری، موجبرها و ... رابطه‌ی بین توان ورودی و خروجی بصورت زیر بیان می‌شود:

$$P_{out}=10^{-(\frac{\alpha l}{10})}P_{in}$$

α : ضریب تضعیف

بستگی به جنس و نوع کانال دارد.

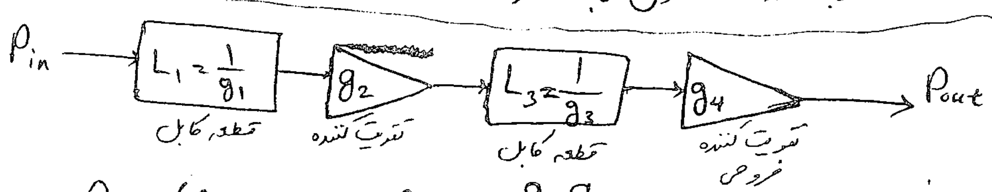
l : طول کابل (هرچه l بزرگتر باشد تلفات بیشتر است یعنی توان خروجی کمتر است)

تلفات انتقال $L=10^{(\frac{\alpha l}{10})}$

تلفات برحسب دسیبل $L_{dB}=\alpha l$

* با توجه به رابطه‌ی فوق واحد α دسیبل بر واحد طول می‌باشد.

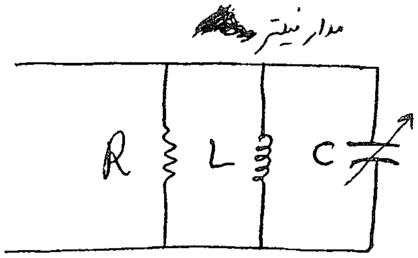
مثال: رابطه‌ی بین توان خروجی و ورودی را بنویسید.



$$P_{out}=(g_1g_2g_3g_4)P_{in}=(\frac{g_2g_4}{L_1L_3})P_{in}$$

رابطه‌ی فوق برحسب دسیبل بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$P_{out}=(g_2+g_4-L_1-L_3)+P_{in}$$



$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

* فیلتر و فیلتر کردن :

فیلتر ایده آل : در عمل قابل ساخت نیست.

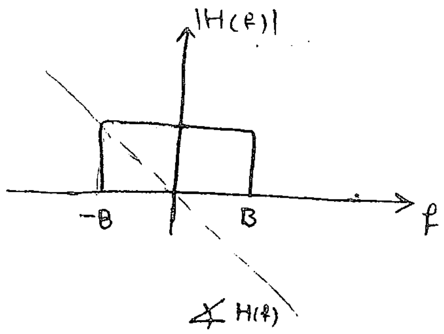
فیلتر غیر ایده آل : در عمل می توان ساخت.

* انواع فیلترها :

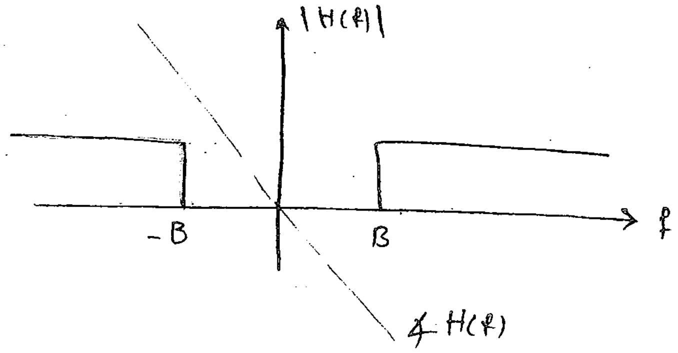
* فیلتر پائین گذر ایده آل :

در ناحیه $-B$ - 0 :

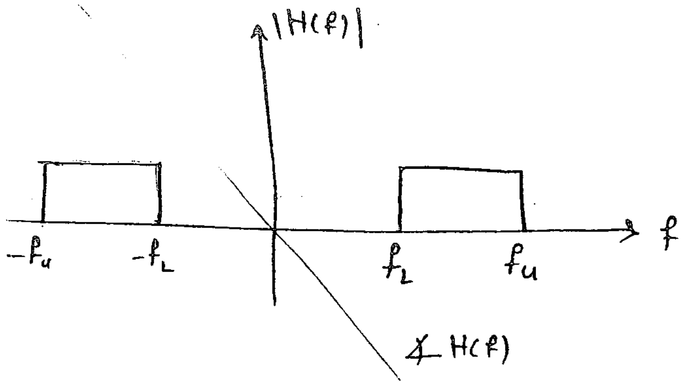
مقدار ثابت و فاز آن رابطه ی خطی با فرکانس دارد.



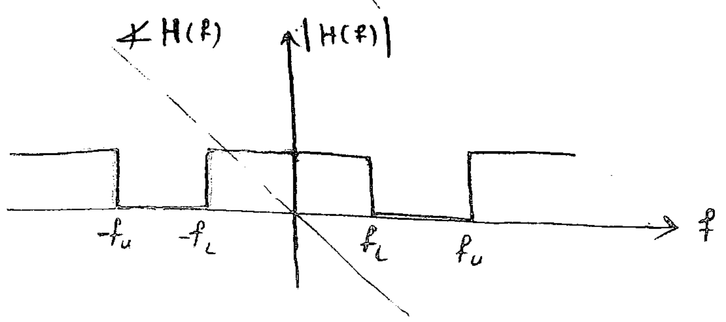
* فیلتر بالا گذر ایده آل :



* فیلتر میان گذر ایده آل :



* فیلتر میان نگذر ایده آل :



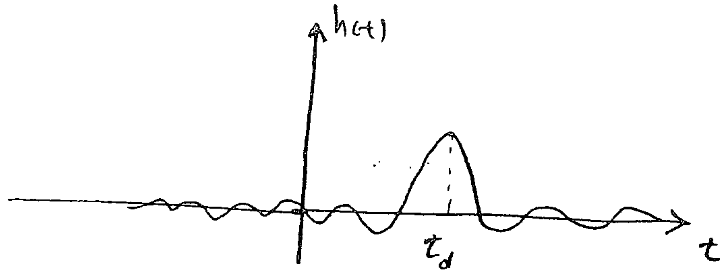
* فیلتر پائین گذر ایده آل :

$$H(f) = K e^{-j2\pi f t_d} \overset{\text{پالس}}{\Pi}\left(\frac{f}{2B}\right)$$

در فاصله بین B و B- بدون اعوجاج است و در خارج از آن صفر است.

فرکانس قطع : B

پاسخ ضربه $h(t) = 2KB \,\text{sinc}\, 2B(t-t_d)$



~~پاسخ قبل از صفر~~
~~پاسخ قبل از ورودی نیز وجود دارد.~~

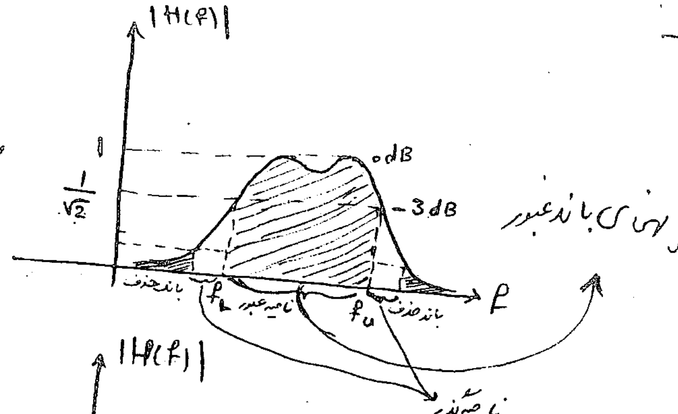
* در سیستم های علّی خروجی قبل از ورودی وجود ندارد.

در پاسخ ضربه در زمان های قبل از صفر مقدار صفر است.

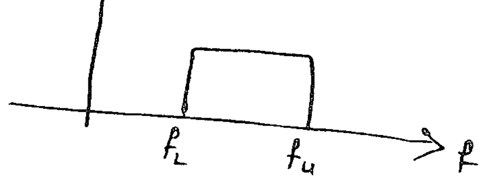
فیلتر میان گذر واقعی یا عملی :

$$20 \log \frac{1}{\sqrt{2}} = -3dB$$

واقعی



فیلتر میان گذر ایده آل



* فیلترهای پائین گذر باترورث :

$$H(f) = \frac{1}{P_n\left(\frac{jf}{B}\right)}$$

$P_n\left(\frac{jf}{B}\right)$: چندجمله‌ای باترورث

۱) $P_n\left(\frac{jf}{B}\right)$ یک چندجمله‌ای مرتبه n بر حسب $\left(\frac{jf}{B}\right)$ می باشد.

$$\Rightarrow |H(f)| = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{f}{B}\right)^{2n}}}$$

۲) فرکانس قطع B فیلتر 3dB می باشد.

۳) خاصیت چندجمله‌ای : $\left|P_n\left(\frac{jf}{B}\right)\right|^2 = 1 + \left(\frac{f}{B}\right)^{2n}$

$$P_n\left(\frac{jf}{B}\right) = 1 + \frac{jf}{B}$$

$$\left|P_n\left(\frac{jf}{B}\right)\right|^2 = 1 + \left(\frac{f}{B}\right)^2$$

$$P_n\left(\frac{jf}{B}\right) = 1 + \sqrt{2}\left(\frac{jf}{B}\right) + \left(\frac{jf}{B}\right)^2$$

$$= \left[1 - \left(\frac{f}{B}\right)^2\right] + \frac{j\sqrt{2}f}{B}$$

$$\left|P_n\left(\frac{jf}{B}\right)\right|^2 = \left[1 - \left(\frac{f}{B}\right)^2\right]^2 + \left(\frac{\sqrt{2}f}{B}\right)^2$$

$$= 1 + \left(\frac{f}{B}\right)^4$$

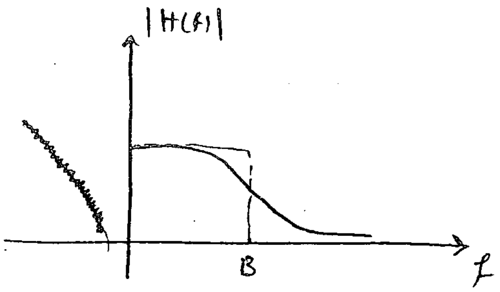
$\alpha = \frac{jf}{B}$

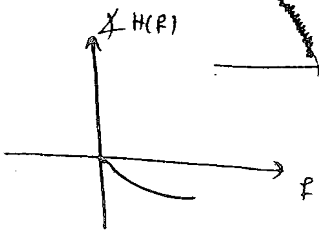
$P_n(\alpha)$	n
$1+\alpha$	$\leftarrow 1$
$1+\sqrt{2}\alpha+\alpha^2$	$\leftarrow 2$
$(1+\alpha)(1+\alpha+\alpha^2)$	$\leftarrow 3$
$(1+0.765\alpha+\alpha^2)(1+1.848\alpha+\alpha^2)$	$\leftarrow 4$
⋮	

برای $n=3$:

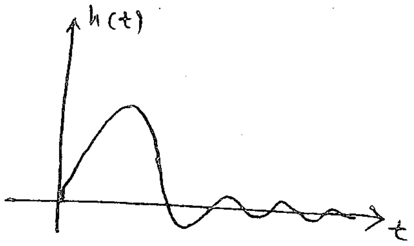
$$H(f) = \frac{1}{\left(1+\frac{jf}{B}\right)\left[1+\left(\frac{jf}{B}\right)+\left(\frac{jf}{B}\right)^2\right]}$$

طیف تقریبی $|H(f)| = \dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{f}{B}\right)^6}}$





پاسخ ضربه اش:



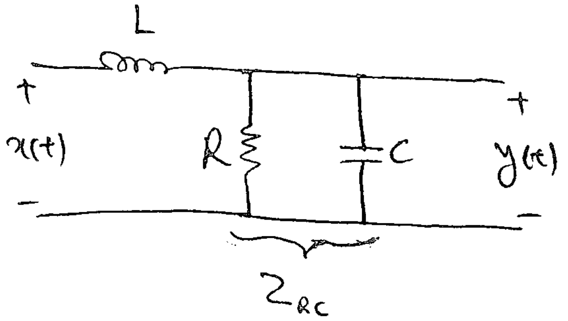
تمرین: فصل ۳ : ۱-۱ , ۱-۲ , ۱-۶ , ۱-۸ , ۱-۱۰ , 2-4 , 2-5 , 2-9 , 3-1 , 3-3

4-5 , 4-7 , 4-9 , 4-17 ,

۸۸/۸/۱۹

جلسه پنجم (ششم)

مثال: مدار شکل زیر رابطه ای را بین R، L و C پیدا کنید که این مدار یک فیلتر پائین گذر باترورث مرتبه ی دو با پهنای باند 3dB، $B=\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ باشد.



$$Z_{RC}=\frac{\frac{R}{j\omega C}}{\frac{1}{j\omega C}+R}=\frac{R}{1+j\omega RC}$$

$$H(f)=\frac{Z_{RC}}{Z_{RC}+Z_L}$$

$$Z_L=j\omega L$$

$$H(f)=\frac{\frac{R}{1+j\omega RC}}{\frac{R}{1+j\omega RC}+j\omega L}=\frac{R}{R+j\omega L-\omega^2RLC}$$

$$\Longrightarrow H(f)=\frac{1}{1+j\left(\frac{\omega L}{R}\right)-\omega^2LC}$$

چند جمله ای باترورث P_n (در شرایط داده می شود)

$$H(f)=\frac{1}{P_n\left(\frac{jf}{B}\right)}$$

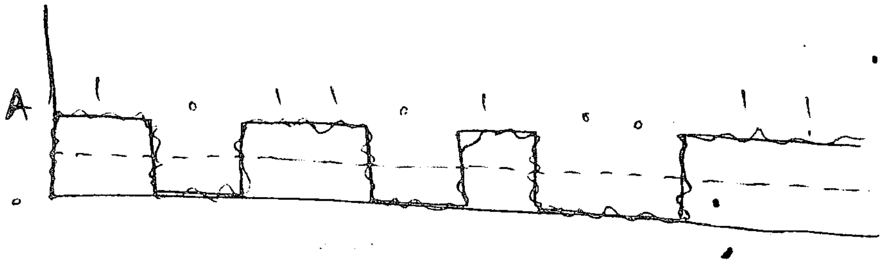
$$P_n(\alpha)=1+\sqrt{2}\,\alpha+\alpha^2 \quad ; \quad \alpha=\frac{jf}{B} \Longrightarrow H(f)=\frac{1}{1+\sqrt{2}\left(\frac{jf}{B}\right)-\left(\frac{f}{B}\right)^2}$$

$$\xrightarrow{\circledast} \frac{\sqrt{2}\,f}{B}=\frac{\omega L}{R} \Longrightarrow \sqrt{2}\,\cancel{2\pi}\sqrt{LC}\,\cancel{f}=\frac{\cancel{2\pi f}L}{R}$$

$$\Longrightarrow R=\frac{L}{\sqrt{2LC}} \Longrightarrow R=\sqrt{\frac{L}{2C}}$$

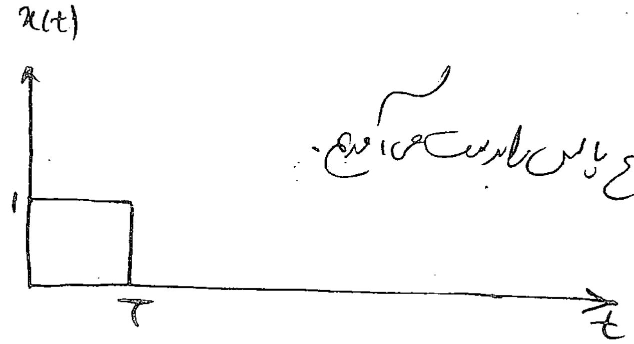
$$\omega^2LC=\frac{f^2}{B^2} \Longrightarrow \cancel{4\pi^2f^2}LC=4\pi^2LC\cancel{f^2}=1$$

* پاسخ پالس و زمان صعود :



اگر پهنای باند بی‌نهایت باشد (بزرگ باشد) اگر پالس صاف ارسال شود در طرف مقابل هم بصورت صاف دریافت می‌شود. ولی اگر کانال ما پائین گذر باشد (پهنای باند کم) شکل مربع ما از بین می‌رود (عوض می‌شود).

اما تا حدودی می‌توان این صفر و یک های تغییر یافته را بدست آورد.



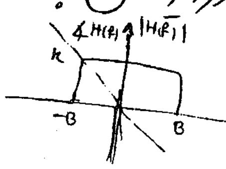
لذا ابتدا پاسخ پله پاسخ پالس را بدست می‌آوریم.

پاسخ پالس برحسب پله $x(t) = u(t) - u(t-\tau)$

* پاسخ پله فیلتر پائین گذر مرتبه اول:

$$g(t) = (1-e^{-2\pi B t})\,u(t) \quad ; \quad \text{3dB فرکانس قطع} \quad B = \frac{1}{2\pi RC}$$

* پاسخ پله فیلتر پائین گذر ایده‌آل :



تبدیل فوریه پالس، Sinc است.
و تبدیل فوریه Sinc پالس است.

تابع تبدیل فیلتر پائین گذر ایده آل

$$H(f) = K e^{-j\omega t_d}\,\Pi\left(\frac{f}{2B}\right)$$

فوریه معکوس

$$h(t) = F^{-1}[H(f)] = 2KB\,\mathrm{Sinc}\,2B(t-t_d)$$

برای سادگی تحلیل $t_d=0$ و $k=1$ را فرض می‌کنیم بنابراین خواهیم داشت که :

پاسخ ضربه $\leftarrow$ $\boxed{h(t) = 2B\,\mathrm{sinc}\,2Bt}$

$$\Longrightarrow \text{پاسخ پله}\; g(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\lambda)\,d\lambda = \int_{-\infty}^{t} 2B\,\mathrm{sinc}\,2B\lambda\,d\lambda$$

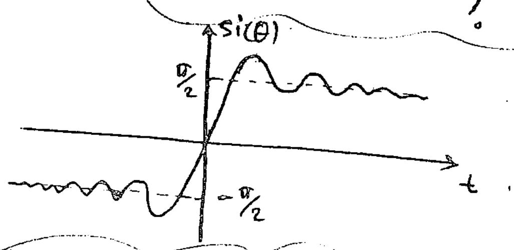
$$\mu = 2B\lambda \rightarrow d\mu = 2B\,d\lambda$$
$$d\lambda = \frac{d\mu}{2B}$$

if: $\lambda \to {}^{0}_{t} \Rightarrow$

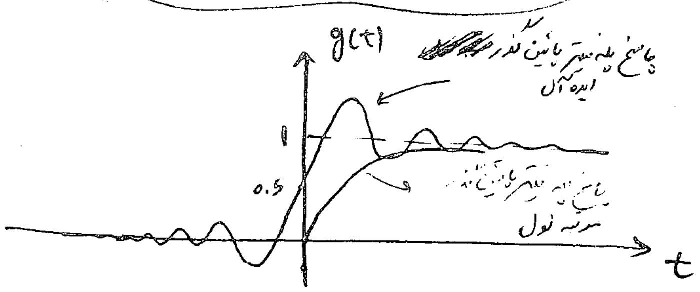
$$\Rightarrow g(t) = \int_{-\infty}^{2Bt} \mathrm{sinc}\,\mu\,d\mu$$

$$= \int_{-\infty}^{0} \mathrm{sinc}\,\mu\,d\mu + \int_{0}^{2Bt} \mathrm{sinc}\,\mu\,d\mu$$

تابع ساین $\;Si(\theta) \triangleq \int_0^{\theta} \frac{\sin\alpha}{\alpha}\,d\alpha = \pi \int_0^{\frac{\theta}{\pi}} \mathrm{sinc}\,\mu\,d\mu \qquad \alpha = \pi\mu$



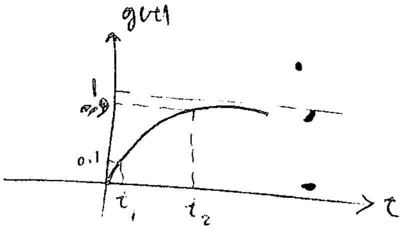
$$\Rightarrow \boxed{g(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} Si(2\pi B t)}$$



* زمان صعود (t_r) :

مدت زمانی که طول می‌کشد تا خروجی از ۰.۱ تا ۰.۹ مقدار نهایی خود برسد.

* زمان صعود برای فیلتر پائین گذر مرتبه اول :



$$t_r = t_2 - t_1$$

$$g(t) = (1 - e^{-2\pi B t})\, u(t)$$

$$0.1 = (1 - e^{-2\pi B t_1})$$

$$0.9 = (1 - e^{-2\pi B t_2}) \Rightarrow \boxed{t_r = t_2 - t_1 \simeq \frac{0.35}{B}}$$

---

* زمان صعود برای فیلتر پائین گذر ایده آل : (فیلتر مرتبه بی‌نهایت)

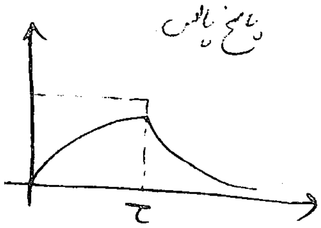
$$t_r \simeq \frac{0.44}{B}$$

چون شکل خاصی ندارد
از روشهای تحلیلی استفاده می‌کنیم.

بنابراین : $t_r \simeq \frac{0.5}{B} = \frac{1}{2B}$ زمان صعود فیلتر پائین گذر (به مرتبه فیلتر بستگی ندارد)

---

* پاسخ پالس فیلتر پائین گذر مرتبه اول :

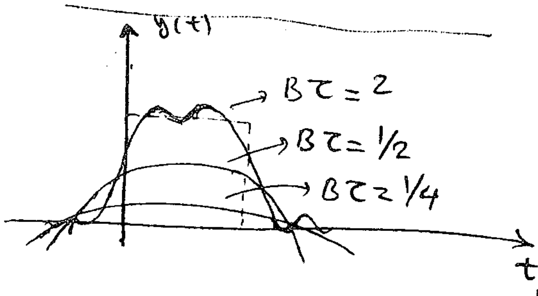


* پاسخ پالس فیلتر پائین گذر ایده آل :

$$x(t) = u(t) - u(t-\tau)$$

$$y(t) = g(t) - g(t-\tau)$$

$$\Rightarrow g(t) = \frac{1}{\pi}\left\{ Si(2\pi B t) - Si[2\pi B(t-\tau)] \right\}$$



$if: B\tau \gg 1 \Longrightarrow$ به پالس نزدیکتر است

نتیجه: اگر $B \geq \frac{1}{2\tau}$ هنوز پالس ها قابل تشخیص هستند. (هنوز صفر و یک ها شان قابل تشخیص است)
عرض ها یکی هستند. (عرض پالس)

اگر پالس هایی ارسال شوند که عرض آنها با هم یکی نباشد $B \geq \frac{1}{2\tau_{min}}$
(یعنی τ هایی نباشند) در این صورت پهنای باند کانال گذر
← کوچکترین عرض
ما بایستی بصورت زیر باشد:

$$B \geq \frac{1}{2\tau_{min}}$$

---

* فیلترهای ربعی و تبدیل هیلبرت:

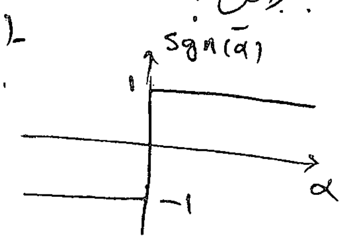
فیلترهای ربعی سیستم‌هایی هستند که فاز فرکانس های مثبت را به اندازه‌ی -90° و فاز فرکانس های منفی را به اندازه‌ی $+90^\circ$ شیفت می دهند. (دامنه ها تغییر نمی دهند اندازه)

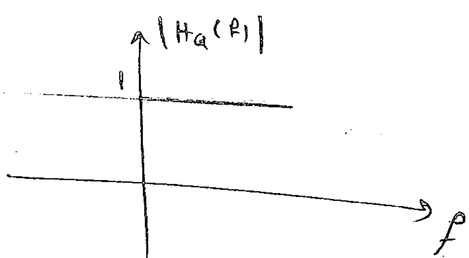
بنابراین تابع تبدیل این فیلترها را می توان بصورت زیر نوشت:

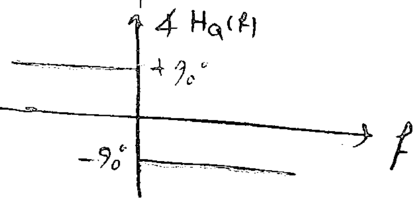
$$H_Q(f) = \begin{cases} 1e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j & f > 0 \\ 1e^{+j\frac{\pi}{2}} = +j & f < 0 \end{cases}$$

بنابراین:

$$H_Q(f) = -j\,\mathrm{sgn}(f)$$







* پاسخ ضربه فیلتر ربعی :

$$h_Q(t) = F^{-1}\left[H_Q(f)\right] = F^{-1}\left[-j\,\mathrm{sgn}(f)\right]$$

$$u(t) = \frac{1}{2}\left[\mathrm{sgn}(t)+1\right]$$

با گرفتن تبدیل فوریه از دو طرف رابطه ی فوق خواهیم داشت :

$$F\left[u(t)\right] = \frac{1}{2}F\left[\mathrm{sgn}(t)\right] + \frac{1}{2}\delta(f)$$

$$\frac{1}{j2\pi f} + \cancel{\frac{1}{2}\delta(f)} = \frac{1}{2}F\left[\mathrm{sgn}(t)\right] + \cancel{\frac{1}{2}\delta(f)}$$

$$\Longrightarrow F\left[\mathrm{sgn}(t)\right] = \frac{1}{j\pi f}$$

مشابه قضیه ی همزادی :

$$F\left[\frac{1}{j\pi t}\right] = \mathrm{sgn}(-f) \overset{\text{چون تابع}}{\underset{\text{فرد است}}{=}} -\mathrm{sgn}(f)$$

$$\xrightarrow{\times j} F\left[\frac{1}{\pi t}\right] = -j\,\mathrm{sgn}(f)$$

$$\boxed{h_Q(t) = \frac{1}{\pi t}}$$ ⟵ پاسخ ضربه فیلتر ربعی

تبدیل هیلبرت : خروجی یک فیلتر ربعی می شود تبدیل هیلبرت ورودی :

تبدیل هیلبرت $x(t)$ ورودی

$$\hat{x}(t) = x(t) * h_Q(t) = x(t) * \frac{1}{\pi t}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(\lambda)}{\pi(t-\lambda)}\, d\lambda$$

۸۸/۸/۲۶

جلسه ششم (هفتم)

$H_Q(f) = -j\,\mathrm{sgn}(f)$ — تابع تبدیل فیلتر ربعی

$h_Q(t) = \dfrac{1}{\pi t}$ — پاسخ ضربه فیلتر ربعی

مثال: تبدیل هیلبرت تابع زیر را بدست آورید.

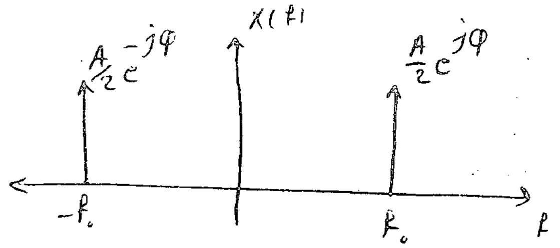
$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$x(t) = \frac{A}{2}\left[e^{j(2\pi f_0 t+\varphi)} + e^{-j(2\pi f_0 t+\varphi)}\right]$$

$$x(t) = \frac{A}{2}\left[e^{j\varphi}\,e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j\varphi}\cdot e^{-j2\pi f_0 t}\right]$$

(تبدیل فوریه عدد ثابت ضربه می‌شود.)

تبدیل فوریه می‌گیریم $\quad X(f) = \dfrac{A}{2}\left[e^{j\varphi}\,\delta(f-f_0) + e^{-j\varphi}\,\delta(f+f_0)\right]$

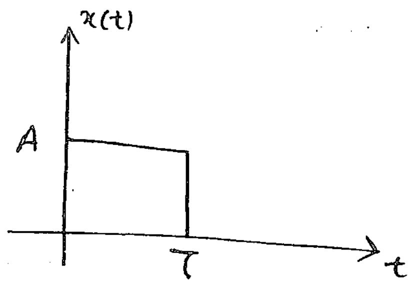


هیلبرت $\quad \hat{X}(f) = \dfrac{A}{2}\left[e^{j(\varphi-\frac{\pi}{2})}\,\delta(f-f_0) + e^{-j(\varphi-\frac{\pi}{2})}\,\delta(f+f_0)\right]$

$$\hat{x}(t) = \frac{A}{2}\left[e^{j(2\pi f_0 t+\varphi-\frac{\pi}{2})} + e^{-j(2\pi f_0 t+\varphi-\frac{\pi}{2})}\right]$$

$$\Longrightarrow \hat{x}(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi - \tfrac{\pi}{2}) = A\sin(\omega_0 t + \varphi)$$

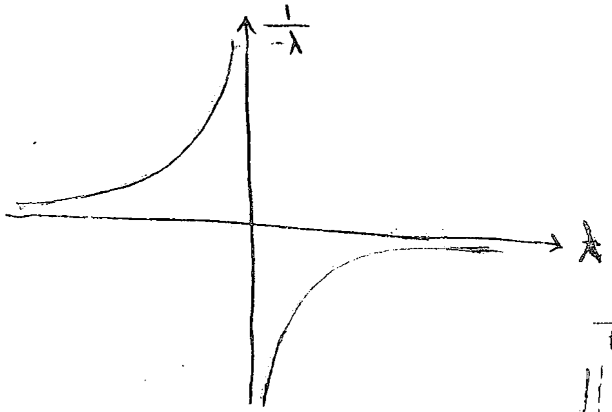
مثال : تبدیل هیلبرت تابع پالس $x(t)$ نشان داده شده در شکل زیر را بدست آورید.



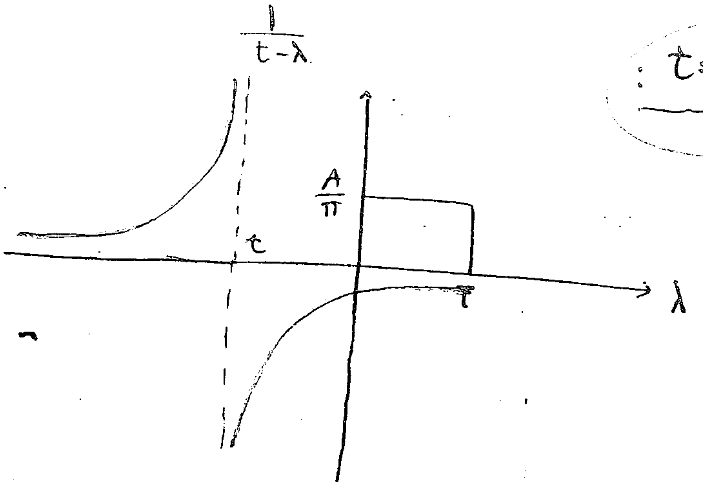
$$\hat{x}(t) = x(t) * \frac{1}{\pi t}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(\lambda)}{\pi(t-\lambda)}\, d\lambda = \frac{A}{\pi}\int_{0}^{\tau} \frac{d\lambda}{t-\lambda}$$

در زمانهای $t=\lambda$ انتگرال مقدارش بی نهایت می شود و انتگرال نامعین پس برای رفع این مشکل مراحل زیر را انجام می دهیم.

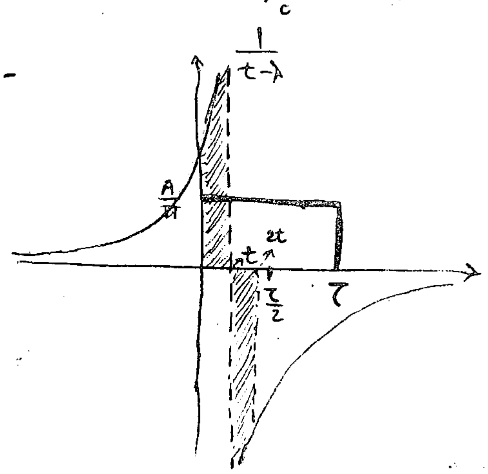


به ازای : $t<0$



$$\hat{x}(t) = \frac{A}{\pi}\int_{0}^{\tau} \frac{d\lambda}{t-\lambda} = \frac{A}{\pi}\Big[-\ln(t-\lambda)\Big]\Big|_{0}^{\tau} = \frac{A}{\pi}\Big[\ln t - \ln(t-\tau)\Big] = \frac{A}{\pi}\ln\frac{t}{t-\tau}$$

به ازای : $0<t\leq\frac{\tau}{2}$

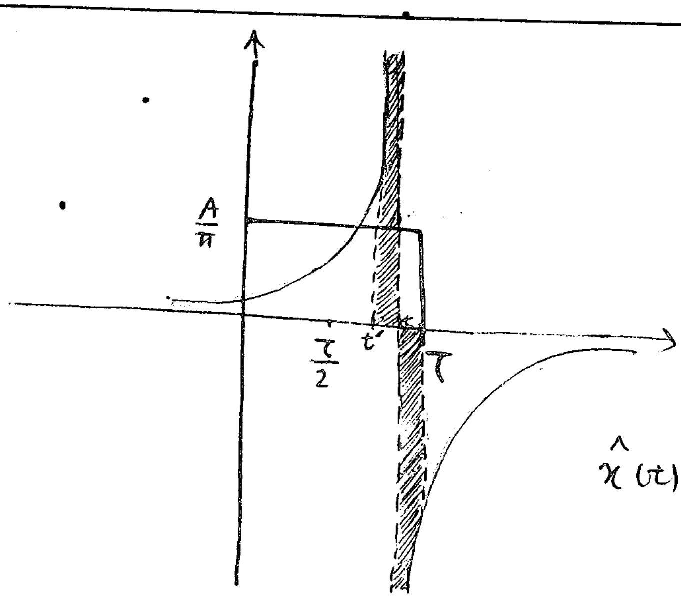


$$\hat{x}(t) = \frac{A}{\pi}\int_{0}^{\tau} \frac{d\lambda}{t-\lambda} = \frac{A}{\pi}\int_{2t}^{\tau} \frac{d\lambda}{t-\lambda}$$

$$= \frac{A}{\pi}\Big[-\ln(t-\lambda)\Big]\Big|_{2t}^{\tau} = \frac{A}{\pi}\Big[\ln(-t) - \ln(t-\tau)\Big]$$

$$\hat{x}(t) = \frac{A}{\pi}\ln\frac{t}{\tau-t}$$

به ازای $\frac{\tau}{2} < t \le \tau$:



$$t' = \tau - 2(\tau - t)$$

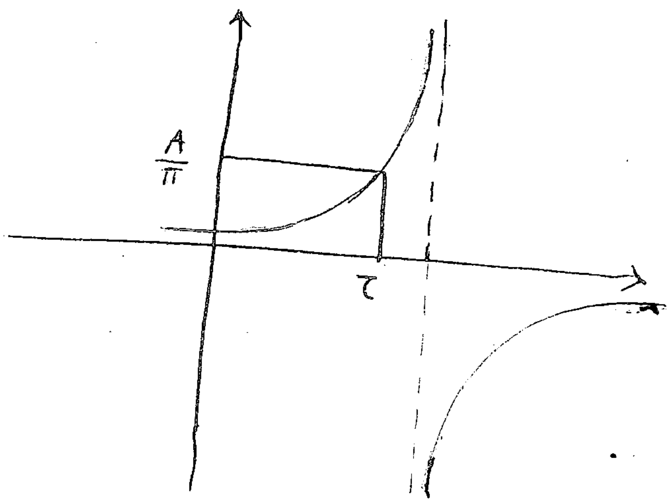
$$\boxed{t' = 2t - \tau}$$

$$\hat{x}(t) = \frac{A}{\pi}\int_0^{t'} \frac{d\lambda}{t-\lambda} = \frac{A}{\pi}\int_0^{2t-\tau} \frac{d\lambda}{t-\lambda}$$

$$\hat{x}(t) = \frac{A}{\pi}\Big[-\ln(t-\lambda)\Big]_0^{2t-\tau}$$

$$= \frac{A}{\pi}\Big[\ln t - \ln(t-2t+\tau)\Big] = \frac{A}{\pi}\ln\frac{t}{\tau - t}$$

به ازای $t > \tau$:



$$\hat{x}(t) = \frac{A}{\pi}\int_0^{\tau} \frac{d\lambda}{t-\lambda} = \frac{A}{\pi}\ln\frac{t}{t-\tau}$$

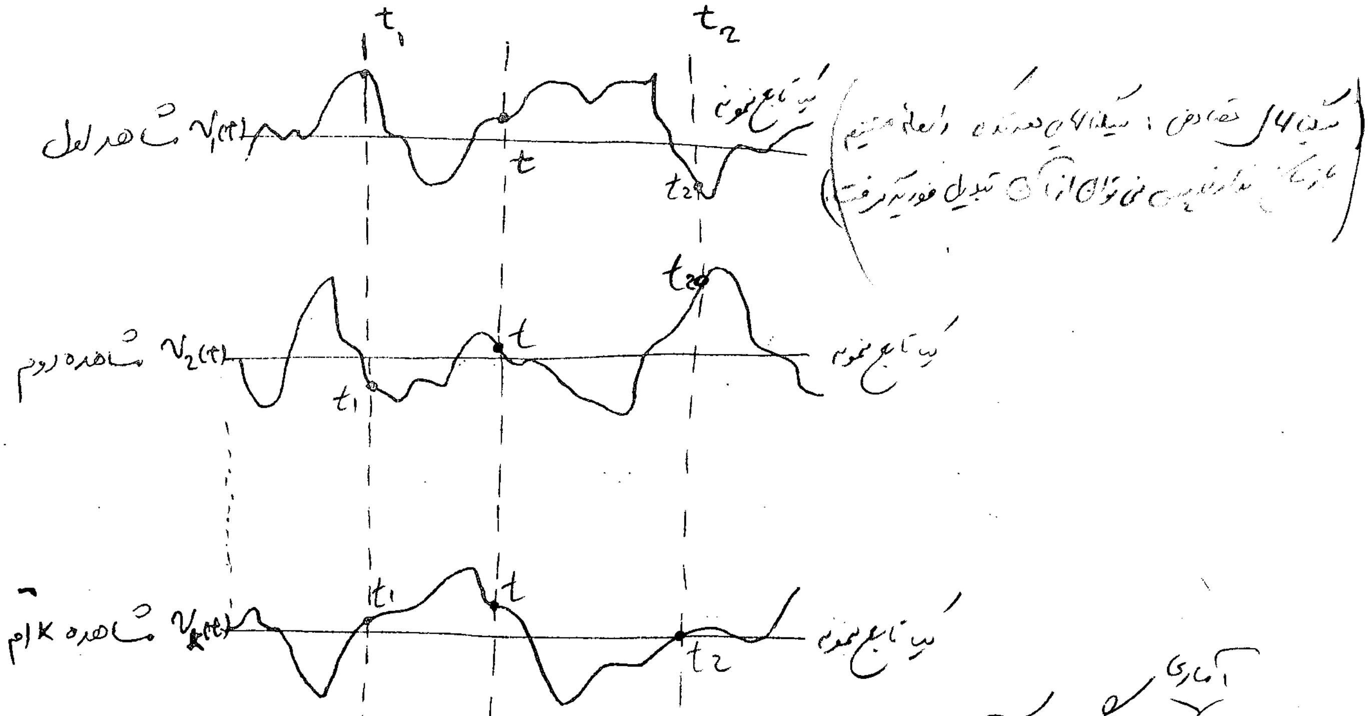
$$\boxed{\hat{x}(t) = \frac{A}{\pi}\ln\left|\frac{t}{t-\tau}\right|}$$

۸۸/۹/۱۰

جلسه هفتم : فصل ۵ پنجم

* فرآیندها یا سیگنالهای تصادفی :

* فرآیند تصادفی : یک فرآیند تصادفی نتایج تجربی را به توابع حقیقی از زمان می نگارد. مجموعه توابع زمانی (۱) مجموعه آماری و هریک از آنها تابع نمونه خوانده می شود.



* متوسط یا میانگین آماری فرآیند :

$$\overline{v(t)} \triangleq E[v(t)]$$

میانگین آماری فرآیند — امید ریاضی — Expektation

* تابع خود همبستگی :

$$R_v(t_1,t_2) = E[v(t_1)\,v(t_2)] \xrightarrow{t_1=t_2=t \text{ اگر}} R_v(t,t) = E[v^2(t)]$$

در بعضی از مواقع فرآیند بصورت تابعی از یک متغیر تصادفی و یک متغیر غیر تصادفی بصورت زیر می باشد :

$$v(t) = g(t, x)$$

متغیر غیر تصادفی — متغیر تصادفی

مثلاً موج سینوسی با فاز تصادفی :

$$v(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

φ : متغیر تصادفی

t : متغیر غیر تصادفی

برای این حالت :

تابع چگالی احتمال

متوسط آماری $\overline{v(t)} = E[v(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t, x)\, f_x(x)\, dx$

$$R_v(t_1, t_2) = E[v(t_1)\, v(t_2)]$$

تابع خود همبستگی $R_v(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t_1, x)\, g(t_2, x)\, f_x(x)\, dx$

$f_x(x)$: تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی X :

مثال : مهم برای سیگنال سینوسی با فاز تصادفی زیر متوسط و تابع خود همبستگی را پیدا کنید.

$$v(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

(φ یک متغیر تصادفی یکنواخت در فاصله $[0, 2\pi]$ می‌باشد.)

تابع چگالی احتمال $f_\varphi(\varphi) = \frac{1}{2\pi}$

$$\overline{v(t)} = E[v(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} [A\cos(\omega t + \varphi)]\, f_\varphi(\varphi)\, d\varphi$$

$$= \frac{A}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\omega t + \varphi)\, d\varphi = 0$$

انتگرال $x\cos\alpha$ ، $x\sin\alpha$ در یک پریود کامل صفر می‌شود.

تابع خود همبستگی $R_v(t_1, t_2) = E[v(t_1)\, v(t_2)] = \int_{-\infty}^{+\infty} [A\cos(\omega t_1 + \varphi)][A\cos(\omega t_2 + \varphi)]\, f_\varphi(\varphi)\, d\varphi$

$$(\cos x \cos) = \tfrac{1}{2}(\cos t_1 + \cos t_2) - \tfrac{1}{2}(\cos t_1 - \cos t_2)$$

$$= \frac{A^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\omega t_1 + \varphi)\cos(\omega t_2 + \varphi)\, d\varphi$$

$$= \frac{A^2}{\underset{2\times 2\pi}{4\pi}} \int_0^{2\pi} \cos[\omega(t_1 + t_2) + 2\varphi]\, d\varphi + \frac{A^2}{\underset{2\times 2\pi}{4\pi}} \int_0^{2\pi} \cos\omega(t_1 - t_2)\, d\varphi$$

$$\Rightarrow R_v(t_1, t_2) = \frac{A^2}{2}\cos\omega(t_1 - t_2)$$

حالا اگر $t_1 = t_2 = t \Rightarrow R_v(t_1, t_2) = \frac{A^2}{2}$

* فرآیندهای ارگادیک و ایستا

یک فرآیند تصادفی درصورتی ارگادیک است که تمام متوسط‌های زمانی توابع نمونه با متوسط‌های متناظر مجموعه آماری برابر باشد.

$$\langle v_i(t) \rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} v_i(t)\,dt$$ متوسط زمانی نمونه i ام فرآیند

$$\langle v_i^2(t) \rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} v_i^2(t)\,dt$$ متوسط مربع نمونه i ام فرآیند

$$\vdots$$

$$\langle v_i^k(t) \rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} v_i^k(t)\,dt$$

یک فرآیند زمانی ارگادیک است که:

$$\left.\begin{aligned} \langle v_i(t) \rangle &= E[v(t)] = m_v \\ \langle v_i^2(t) \rangle &= E[v^2(t)] \\ &\vdots \\ \langle v_i^k(t) \rangle &= E[v^k(t)] \end{aligned}\right\}$$ مهم

مثلاً برای موج سینوسی با فاز تصادفی:

$$\langle v_i(t) \rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A\cos(\omega t+\varphi)\,dt$$

تغییر متغیر $\omega t = \frac{2\pi}{T}t = \theta$

$$\theta = \frac{2\pi}{T}t \quad \begin{cases} t = -\frac{T}{2} \to \theta = -\pi \\ t = +\frac{T}{2} \to \theta = +\pi \end{cases}$$

$$= \frac{A}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(\theta+\varphi)\,d\theta = 0$$

$$E[v(t)] = 0 \qquad \Longrightarrow \langle v_i(t) \rangle = E[v(t)]$$

$$\langle v_i^2(t)\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A^2\cos^2(\omega t+\varphi)\,dt$$

با تغییر متغیر : θ

$$= \frac{A^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(\theta+\varphi)\,d\theta$$

$$= \frac{A^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cancel{\cos(2\theta+2\varphi)}^{\,0}\right]d\theta = \frac{A^2}{2}$$

$$t_1=t_2=t \Rightarrow R_v(t,t)=E[v^2(t)]=\frac{A^2}{2}$$

$$\Rightarrow \langle v_i^2(t)\rangle = E[v^2(t)]$$

* تمام متوسطهای آماری یک فرآیند ارگادیک مستقل از زمان هستند.

برای فرآیندهای ارگادیک $\langle v_i(t)\rangle = E[v(t)] = m_v$

۱_ مقدار میانگین فرآیند یعنی m_v با مقدار dc نمونه‌ها یعنی $\langle v_i(t)\rangle$ برابر است.

~~$\langle v_i(t)\rangle = E[v(t)] = m_v$~~

۲_ مقدار مربع میانگین فرآیند یعنی m_v^2 با مقدار توان dc نمونه‌ها یعنی $\langle v_i(t)\rangle^2$ برابر است.

۳_ مقدار میانگین مربع فرآیند یعنی $\overline{v^2(t)}$ با توان نمونه‌ها یعنی $\langle v_i^2(t)\rangle$ برابر است.

۴_ مقدار واریانس فرآیند یعنی $\sigma_v^2 = E[v^2(t)] - E^2[v(t)]$ با توان ac نمونه‌ها یعنی

$$\langle v_i^2(t)\rangle - \langle v_i(t)\rangle^2$$

برابر است.

۵_ انحراف معیار σ_v با مقدار rms نمونه‌ها یعنی $\sqrt{\langle v_i^2(t)\rangle - \langle v_i(t)\rangle^2}$

برابر است.

* فرآیندهای ایستا یا ساکن :

یک فرآیند تصادفی ایستای با تسامح (WSS) (ساکن به مفهوم وسیع) اگر $E[V(t)]$ مستقل از زمان باشد و تابع خودهمبستگی $R_v(t_1,t_2)$ تنها به تفاضل (t_1-t_2) بستگی داشته باشد.

$$E[V(t)] = m_v$$

$$R_v(t_1,t_2) = R_v(t_1-t_2) = R_v(\tau)$$

$t_1 - t_2 = \tau$ تاو

خواص:

۱- تابع خودهمبستگی فرآیندهای ایستا یا ساکن برحسب τ یک تابع زوج می‌باشد:

$$R_v(\tau) = R_v(-\tau)$$

اثبات:
$$R_v(\tau) = E[V(t)V(t-\tau)]$$
$$= E[V(t+\tau)V(t)]$$
$$= E[V(t)V(t+\tau)]$$
$$= R_v(-\tau)$$

۲- $R_v(0) = E[V^2(t)] = \sigma^2 + m_v^2$

توان متوسط

۳- با استفاده از نامساوی شوارتز می‌توان نشان داد:

$$R_v(0) \geq |R_v(\tau)|$$

۴- برای فرآیندهای ایستا یا ساکن رابطه‌ی زیر برقرار خواهد بود:

$$R_v(\pm\infty) = m_v^2$$

مقدار متوسط DC یا

اثبات: $R_v(\pm\infty) = \lim_{\tau \to \pm\infty} R_v(\tau) = \lim_{\tau \to \pm\infty} E[v(t)v(t-\tau)]$

$$= \lim_{\tau \to \pm\infty} E[v(t)]E[v(t-\tau)] = m_v \times m_v = m_v^2$$

۵- اگر توابع نمونه متناوب باشند (با دوره تناوب T_0) آنگاه :

$$R_v(\tau \pm nT_0) = R_v(\tau)$$

اثبات: $R_v(\tau \pm nT_0) = E[v(t+\tau \pm nT_0)v(t)]$

$$= E[v(t+\tau)v(t)]$$

$$= R_v(\tau)$$

۶-

توان متوسط فرآیند $P = R_v(0)$

اثبات:

توان نمونه اول $\langle v_1^2(t) \rangle$

توان نمونه دوم $\langle v_2^2(t) \rangle$

$\vdots$

توان نمونه k ام $\langle v_k^2(t) \rangle$

به t بستگی ندارد

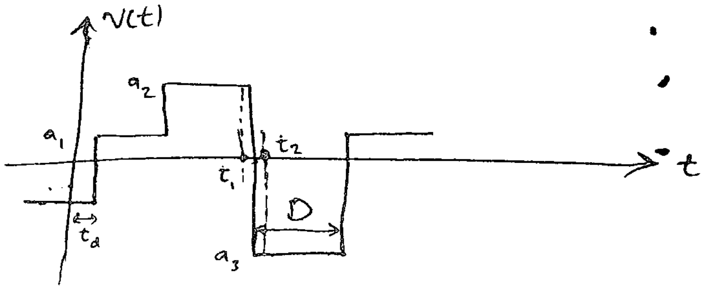
$$P = E[\langle v_i^2(t) \rangle] = \langle E[v_i^2(t)] \rangle$$

$$= E[v^2(t)] = R_v(0)$$

۸۸/۹/۱۷

جلسه هشتم.

مثال: موج دیجیتال تصادفی از مجموعه‌ی قطارهای پالس مستطیلی شکل شبیه تابع نمونه شکل زیر بدست می‌آید. تمام پالس‌ها دارای عرض ثابت و غیرتصادفی D هستند.



ولی مجموعه‌ی آماری دو متغیر تصادفی به شرح زیر دارد: واریانس δ^2 می‌باشد

1. دامنه‌ی a_k پالس k ام یک متغیر تصادفی گسسته با میانگین صفر ($E[a_k]=0$)
ضمناً دامنه‌ها در فواصل زمانی مختلف مستقل آماری هستند.

$$E[a_k a_j] = E[a_k]E[a_j] \quad k\neq j$$

2. t_d یک متغیر تصادفی یکنواخت در فاصله‌ی $[0, D]$ است.

برای این فرآیند مقدار متوسط و تابع خودهمبستگی را پیدا کنید.

واریانس $\delta^2 = E[a_k^2] - E^2[a_k]$

مقدار متوسط $E[v(t)] = E[a_k] = 0$

تابع خودهمبستگی $R_v(t_1-t_2) = ?$

حالت اول: $|t_2-t_1|>D$: یعنی t_1 و t_2 حتماً در دو پالس مختلف قرار دارند.

$$R_v(t_2-t_1) = E[v(t_2)v(t_1)] = \underset{k\neq j}{E}[a_k a_j] = E[a_k]E[a_j] = 0$$

حالت دوم: $|t_2-t_1|<D$: یعنی t_1 و t_2 یا در یک پالس قرار می‌گیرند یا در دو پالس مجاور قرار می‌گیرند.

A: رخداد اینکه t_1 و t_2 در دو پالس مجاور باشند:

$$R_v(t_2,t_1) = E[v(t_2)v(t_1)] = E[\cancel{a_k a_j}]P(A) + E[a_k^2](1-P(A))$$

$$\Rightarrow R_v(t_2,t_1) = \delta^2(1-P(A))$$

$t_2 > t_1$:

(پالس k ام، عرض پالس)

$$P(A) = P(t_1 < KD + t_d < t_2)$$

$$P(A) = P(t_1 - KD < t_d < t_2 - KD)$$

تابع چگالی احتمال یک متغیر تصادفی متعادل ثابت است : $\frac{1}{\text{فاصله}}$

تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی t_d

$$f_{T_d}(t_d) = \frac{1}{D}$$

$$P(A) = \int_{t_1 - KD}^{t_2 - KD} f_{T_d}(t_d)\, dt_d = \frac{t_2 - t_1}{D}$$

$t_1 > t_2$:

$$P(A) = \frac{t_1 - t_2}{D}$$

بنابراین خواهیم داشت :

$$P(A) = \frac{|t_2 - t_1|}{D}$$

$$t_2 - t_1 = \tau$$

$$\Longrightarrow P(A) = \frac{|\tau|}{D}$$

بنابراین برای حالت $|t_2 - t_1| < D$ خواهیم داشت :

$$R_v(t_2, t_1) = \delta^2 \left(1 - \frac{|t_2 - t_1|}{D}\right)$$

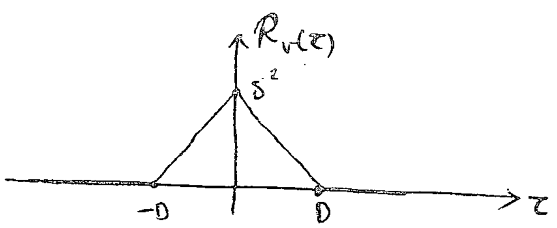
$$R_v(t_2, t_1) = \begin{cases} \delta^2 \left(1 - \frac{|t_2 - t_1|}{D}\right) & |t_2 - t_1| < D \\ 0 & |t_2 - t_1| > D \end{cases}$$

ایستا است :

$E[v(t)] = 0$ مقدار ثابت و مستقل از زمان

$$R_v(t_2, t_1) = \begin{cases} \delta^2 \left(1 - \frac{|t_2 - t_1|}{D}\right) \\ 0 \end{cases}$$

$$R_v(\tau) = \begin{cases} \delta^2 \left(1 - \frac{|\tau|}{D}\right) & \tau < D \\ 0 & \tau > D \end{cases}$$



$$R_v(\tau) = \delta^2 \Lambda\left(\frac{\tau}{D}\right)$$ پالس مثلثی

برای ارگادیک بودن همیشه حالتی را بررسی می‌کنیم که اثبات کند ارگادیک نیست :

$$E[a_k^2] = \delta^2$$

باید تمام حالات برابر با δ^2 باشد تا ارگادیک باشد :

$$\langle v_i^2(t) \rangle^2 = ?$$

مثال نقض : اگر $v_1(t) = a_1 \Leftarrow$

$$\langle v_i^2(t) \rangle^2 = \langle a_1^2 \rangle \neq a_1^2$$

ارگادیک نیست .

---

* طیف توان :

اگر $v(t)$ یک سیگنال تصادفی است تا باشد می‌توانیم از طیف توان آن $G_v(f)$ بعنوان توزیع توان متوسط P در حوزه‌ی فرکانس صحبت کنیم .

$$\text{توان متوسط } P = \int_{-\infty}^{+\infty} G_v(f)\,df$$

برای سیگنالهای غیرتصادفی :

$$P = \int_{-\infty}^{+\infty} |v(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |V(f)|^2 df \quad \text{طبق قضیه پارسوال}$$

بنابراین برای سیگنالهای غیرتصادفی :

$$G_v(f) = |V(f)|^2$$

طبق قضیه وانیر لینشاین برای یک سیگنال تصادفی $v(t)$ ، $G_v(f)$ توسط تبدیل فوریه با تابع خودهمبستگی مربوط می‌شود :

$$G_v(f) = F[R_v(\tau)] = \int_{-\infty}^{+\infty} R_v(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad ※$$

$$R_v(\tau) = F^{-1}[G_v(f)] = \int_{-\infty}^{+\infty} G_v(f) e^{j2\pi f\tau} df$$

اثبات

توان متوسط $P = R_v(0) \Rightarrow R_v(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_v(f)\,df = P$

* خواص:

۱) $G_v(f) \geq 0$

۲) $G_v(f) = G_v(-f)$ یک تابع زوج است.

اثبات: $G_v(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_v(\tau) e^{+j2\pi f\tau} d\tau$

از روی تابع اصلی ⊛

$$\tau' = -\tau \rightarrow d\tau' = -d\tau$$

$$= -\int_{+\infty}^{-\infty} R_v(\tau') e^{-j2\pi f\tau'} d\tau' = \int_{-\infty}^{+\infty} R_v(\tau') e^{-j2\pi f\tau'} d\tau' = G_v(f)$$

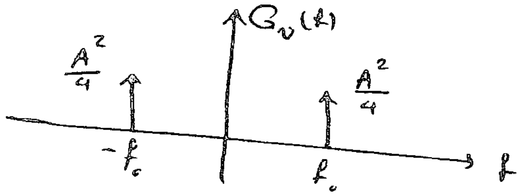
مثال: موج سینوسی با فاز تصادفی:

$$R_v(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos 2\pi f_0 \tau$$

$\cos \rightarrow \frac{1}{2}$ شیفت به راست

$\rightarrow \frac{1}{2}$ شیفت به چپ

$$G_v(f) = F[R_v(\tau)] = \frac{A^2}{4}\delta(f-f_0) + \frac{A^2}{4}\delta(f+f_0)$$

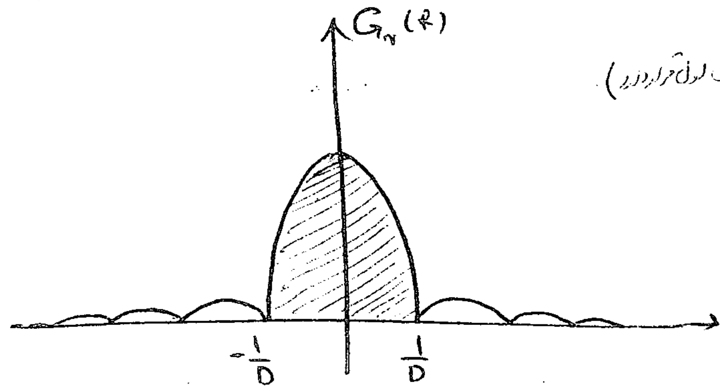


مثال: طیف توان را بدست آورید.

* موج دیجیتال تصادفی:

$$R_v(\tau) = \sigma^2 \Lambda\left(\frac{\tau}{D}\right)$$

$$G_v(f) = F[R_v(\tau)] = \sigma^2 D \operatorname{sinc}^2 Df$$

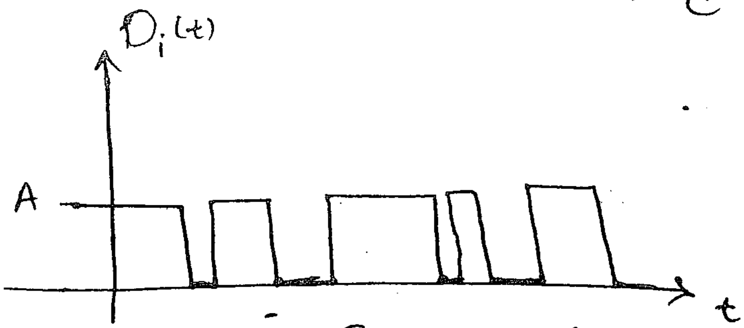


پائین گذر است. (۹۸ درصد انرژی در لوب اول قرار دارد)
فرکانس قطع $\frac{1}{D}$.

مثال: طیف توان را بدست آورید.

موج تلگراف تصادفی:

شکل زیر یک تابع نمونه از یک موج تلگراف تصادفی را نشان می دهد.



این سیگنال بین دو مقدار هم احتمال A و ۰ جابجایی تصادفی مستقل دارد. زمانهای جابجایی یک متغیر تصادفی پواسون با مقدار متوسط μ می باشد.

تابع خودهمبستگی این فرآیند بصورت زیر می باشد:

$$R_v(\tau) = \frac{A^2}{4}\left(e^{-2\mu|\tau|}+1\right)$$

الف) تابع خودهمبستگی را برحسب τ رسم کنید.

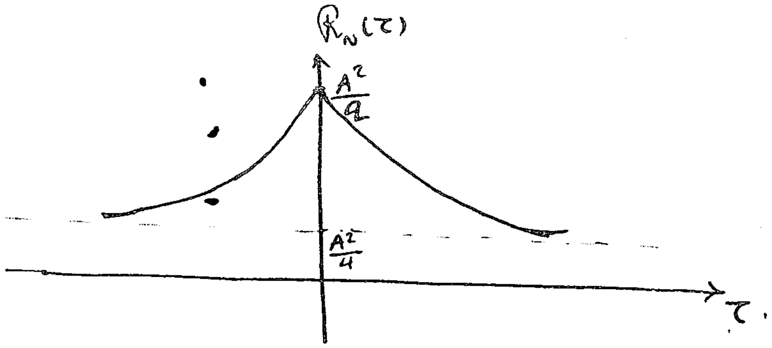
ب) توان متوسط فرآیند را بدست آورید.

ج) مقدار متوسط این فرآیند چقدر است.

د) مقدار rms این فرآیند را محاسبه نمائید.

هـ) چگالی طیف توان این فرآیند را محاسبه نموده و رسم کنید.

الف)



ب)

توان متوسط $P = R_v(0) = \frac{A^2}{4}\left(e^{-2\mu|\tau|} + 1\right) = \frac{A^2}{2}$

ج)

$$m_v^2 = R_v(\pm\infty) = \frac{A^2}{4}$$

$$\boxed{m_v = \frac{A}{2}}$$

د)

مقدار rms : $\sigma = \sqrt{E[v^2(t)] - m_v^2} = \sqrt{R_v(0) - m_v^2} = \sqrt{\frac{A^2}{2} - \frac{A^2}{4}} = \frac{A}{2}$

$$\sigma = rms = \frac{A}{2}$$

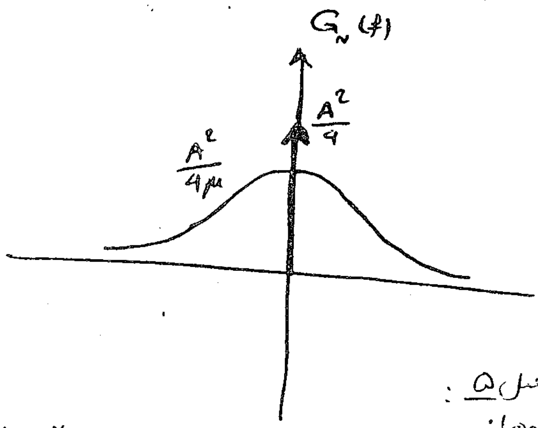
هـ)

$$G_v(f) = F[R_v(\tau)]$$

$$e^{-\lambda|t|} \xleftrightarrow{F} \frac{2\lambda}{\lambda^2 + 4\pi^2 f^2}$$

$$G_v(f) = \frac{A^2}{4}\left(\frac{4\mu}{4\mu^2 + 4\pi^2 f^2} + \delta(f)\right)$$

$$= \frac{A^2}{4\mu\left[1 + \left(\frac{\pi f}{\mu}\right)^2\right]} + \frac{A^2}{4}\delta(f)$$



فصل ۵ :

مسئله‌ها: ۱-۱ ، ۱-۳ ، ۱-۶ ، ۱-۷ ، ۲-۱ ، ۲-۷ ، ~~[illegible]~~

۸۸/۹/۲٤.

جلسه نهم

فصل ششم

*مدولاسیون موج پیوسته خطی :

*مدولاسیون AM :

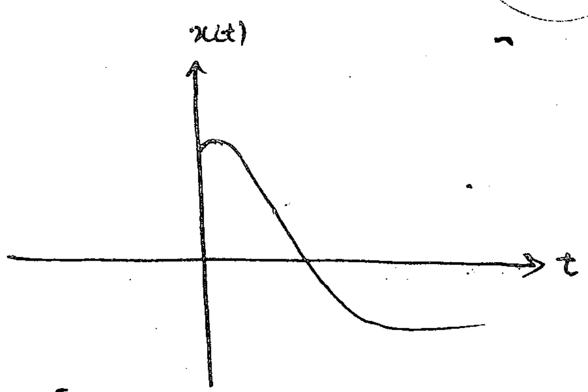
$$AM:\ x(t) = A_c(1+\mu x(t))\cos\omega_c t$$

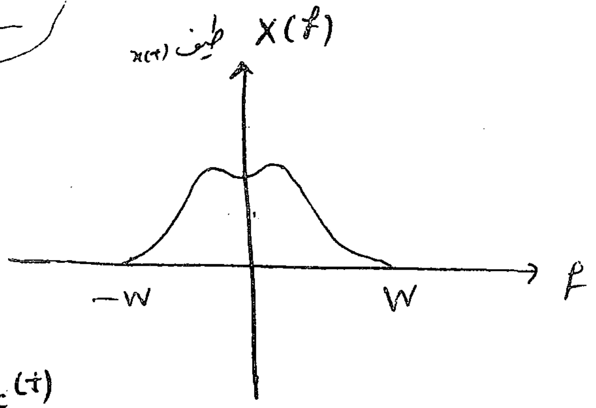
$x(t)$: سیگنال اطلاعات

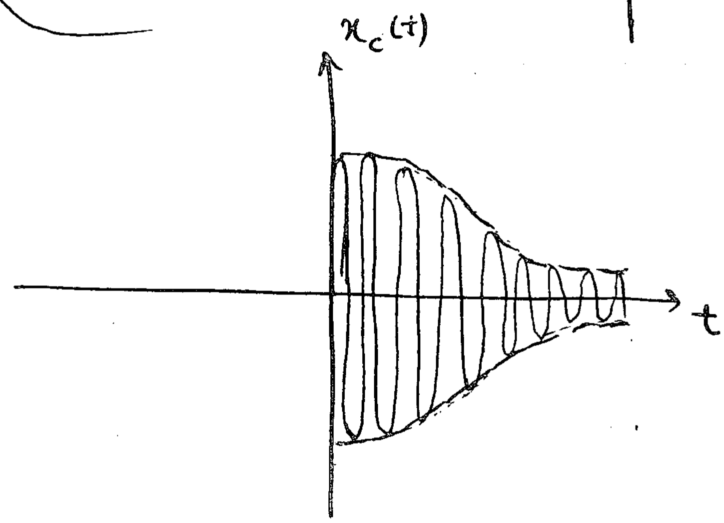
μ : ضریب مدولاسیون $\qquad 0<\mu\leq 1$

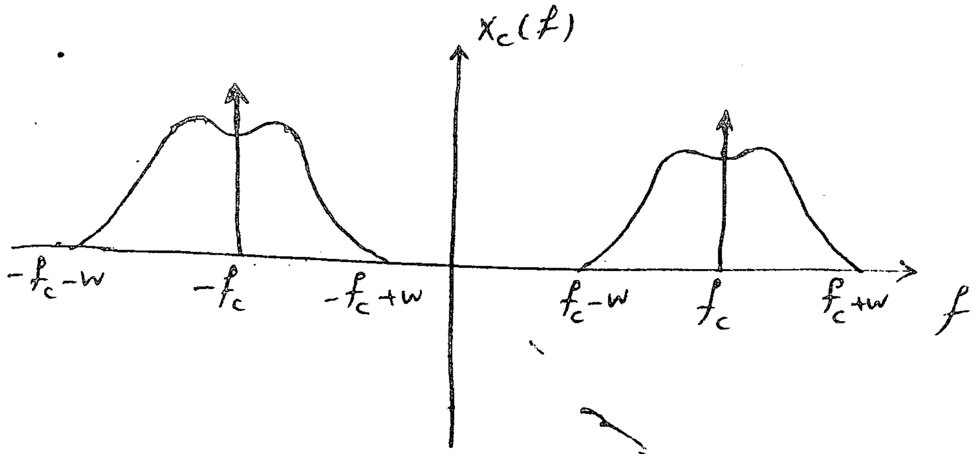
f_c : فرکانس حامل. $\qquad \omega_c = 2\pi f_c$

$$|x(t)|\leq 1$$









* محدودیت‌های مخابراتی:

1) توان ارسالی (S_T)

* توان ارسالی کم باشد.

2) پهنای باند لازم (B_T)

* پهنای باند کم باشد.

* برای مدولاسیون AM :

$$B_T = 2W$$

$$S_T = \langle x_c^2(t) \rangle = \langle A_c^2 (1+\mu x(t))^2 \cos^2 \omega_c t \rangle$$

میانگین زمانی

$$= \left\langle \frac{A_c^2}{2}(1+\mu x(t))^2 \right\rangle + \left\langle \cancel{\frac{A_c^2}{2}(1+\mu x(t))^2 \cos 2\omega_c t} \right\rangle \quad 0$$

با فرض اینکه تغییرات $x(t)$ خیلی کمتر از f_c باشد پس $x(t)^2$ نسبت به $\cos 2\omega_c t$ ثابت است پس مقدار متوسط آنها صفر می‌شود.

$$= \frac{A_c^2}{2} + \frac{A_c^2}{2}\mu^2 \langle x^2(t) \rangle + \cancel{A_c^2 \mu \langle x(t) \rangle} \quad 0$$

$$\Longrightarrow S_T = \frac{A_c^2}{2} + \frac{A_c^2}{2}\mu^2 S_x$$

$S_x : \langle x^2(t) \rangle$ توان سیگنال اطلاعات

$$S_T = P_c + 2P_{sb}$$

carrier (کریر) توان سیگنال حامل مدوله نشده $P_c = \frac{A_c^2}{2}$ (1)

توان باند کناری $P_{sb} = \frac{A_c^2}{4}\mu^2 S_x = \frac{P_c}{2}\mu^2 S_x$ (2)

side bound

$\left(\frac{S_x}{N}\right)\uparrow \Longrightarrow$ کیفیت $\uparrow$

سیگنال به نویز

$\mu^2 S_x \leqslant 1 \qquad (3)$

$(2),(3) \Longrightarrow \boxed{P_{sb} \leqslant \frac{P_c}{2}}$

$P_c = S_T - 2P_{sb} \geqslant S_T - P_c \Rightarrow \boxed{P_c \geqslant \frac{1}{2} S_T}$

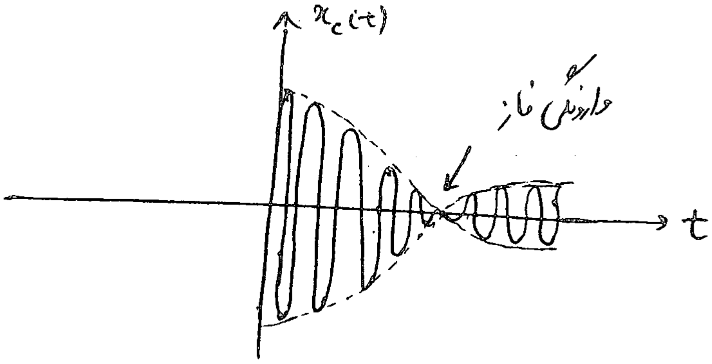
$2P_{sb} \leqslant S_T - 2P_{sb} \Rightarrow \boxed{P_{sb} \leqslant \frac{1}{4} S_T}$

---

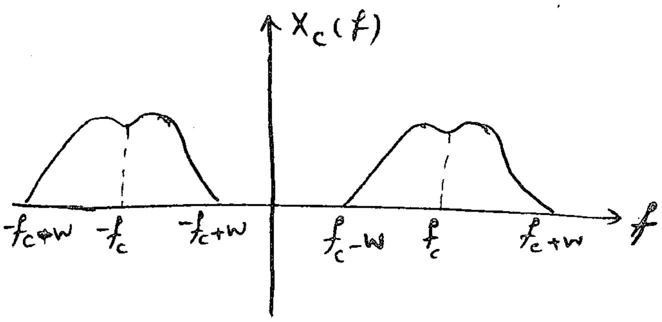
* سیگنال و طیف DSB :

DSB: $x_c(t) = A_c\, x(t) \cos \omega_c t$

$$X_c(f) = \frac{A_c}{2} X(f-f_c) + \frac{A_c}{2} X(f+f_c)$$



: DSB



: DSB

$$B_T = 2W$$

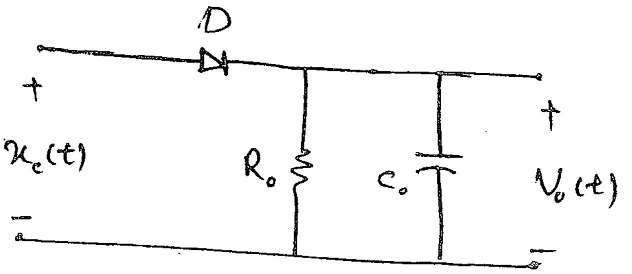
$$S_T = \langle x_c^2(t) \rangle = \langle A_c^2 x^2(t) \cos^2 \omega_c t \rangle$$

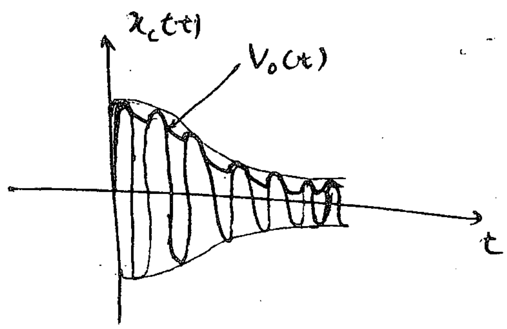
$$= \frac{A_c^2}{2} \langle x^2(t) \rangle + \frac{A_c^2}{2} \cancel{\langle x^2(t) \cos 2\omega_c t \rangle}^{\,0}$$

$$S_T = \frac{A_c^2}{2} S_x \quad \text{یا} \quad S_T = 2P_{sb}$$

---

* آشکارساز قله‌ی پوش :

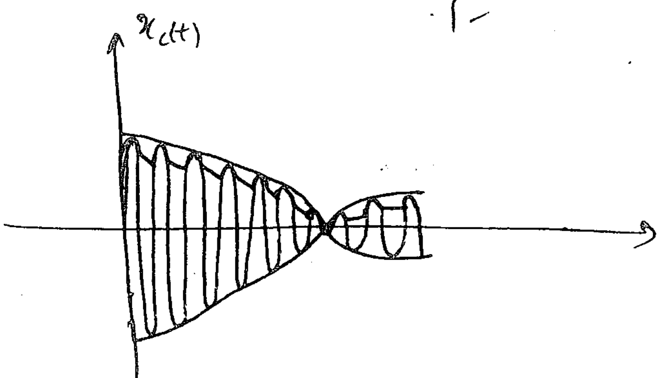




$$\frac{1}{f_c} \ll RC \Longrightarrow \frac{1}{RC} \ll f_c$$

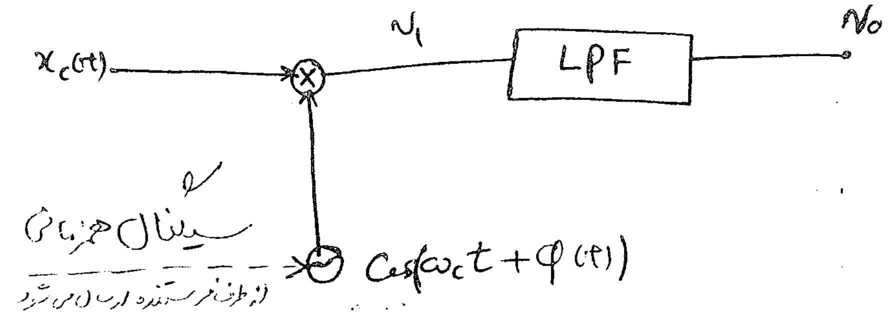
فرکانس قطع فیلتر پائین گذر RC $\quad \frac{1}{RC} \geq W \quad \Longrightarrow \quad \boxed{W \leq \frac{1}{RC} \leq f_c}$

اگر از آشکارساز قله‌ی پوش در DSB استفاده کنیم:



$x_c(t)$ شکل $x(t)$ محدود نیست
پس نمی‌توان از آن در DSB
استفاده کرد.

* آشکارساز همزمانی : (DSB)



$$x_c(t) = A_c\, x(t) \cos\omega_c t$$

$$v_1 = A_c\, x(t) \cos^2\omega_c t = \frac{A_c}{2} x(t) + \underbrace{\frac{A_c}{2} x(t) \cos 2\omega_c t}_{\text{توسط LPF حذف می‌شود}}$$

$$v_0 = \frac{A_c}{2} x(t)$$

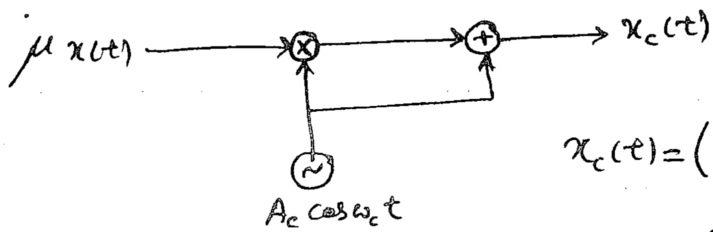
$$v_1 = A_c\, x(t) \cos\omega_c t \cdot \cos\left(\omega_c t+\varphi(t)\right)$$

$$= \frac{A_c}{2} x(t) \cos\varphi(t) + \underbrace{\frac{A_c}{2} x(t) \cos\left(2\omega_c t+\varphi(t)\right)}_{\text{توسط LPF حذف می‌شود}}$$

$$v_o = \frac{A_c}{2} x(t) \cos\varphi(t)$$

---

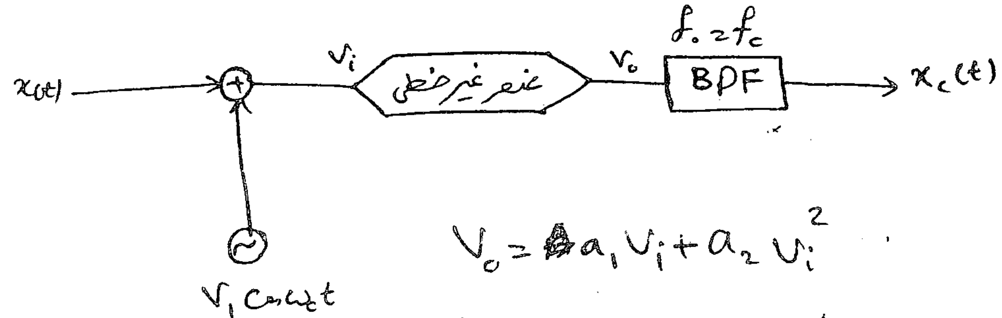
* مدولاتور حاصلضربی :



$$x_c(t) = \left(\mu x(t)\right)\left(A_c \cos\omega_c t\right) + A_c \cos\omega_c t$$

$$x_c(t) = A_c\left(1+\mu x(t)\right) \cos\omega_c t$$

* مدولاتورهای مربع کننده و متعادل :



$$V_o = a_1 V_i + a_2 V_i^2$$

$$V_i = x(t) + V_1 \cos\omega_c t$$

$$\Longrightarrow V_o = a_1 \left(x(t) + V_1 \cos\omega_c t\right) + a_2 \left(x(t) + V_1 \cos\omega_c t\right)^2$$

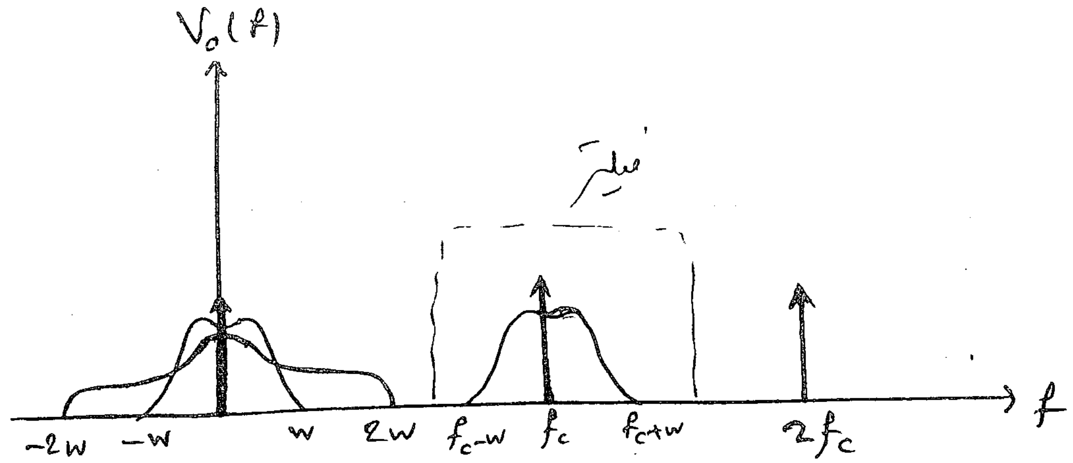
$$\Longrightarrow V_o = \left(a_1 x(t) + a_2 x^2(t) + \frac{a_2 V_1^2}{2}\right) + V_1\left(a_1 + 2a_2 x(t)\right)\cos\omega_c t + \frac{a_2 V_1^2}{2}\cos 2\omega_c t$$

$$\Longrightarrow x_c(t) = V_1\left(a_1 + 2a_2 x(t)\right)\cos\omega_c t$$

$$\boxed{x_c(t) = A_c\left(1 + \mu x(t)\right)\cos\omega_c t}$$

$\mu = \dfrac{2a_2}{a_1}$

$A_c = a_1 V_1 \quad , f > 0$



$$f_c - W \geq 2W \Longrightarrow \boxed{f_c \geq 3W}$$

با این شرط یک مدولاتور AM است.

تمرین ۶: ۲-۱ ، ۲-۲ ، ۲-۶ ، ۲-۱۰ ، ۳-۱ ، ۳-۲ ، ۳-۴ ، ۳-۶ ، ۵-۱ ، ۵-۷

جلسه دهم

۸۸/۱۰/۱

فصل هفتم

* مدولاسیون موج پیوسته نمایی :

* سیگنال های FM و PM :

ϕ تغییرات.
دامنه ثابت است.

$$x_c(t) = A_c \cos(\omega_c t + \phi(t))$$

$\phi(t)$: فاز لحظه ای

* مدولاسیون فاز (PM) :

$\phi(t) = \phi_\Delta x(t)$ و ϕ_Δ : شاخص مدولاسیون فاز $\phi_\Delta \leqslant 180^\circ$

$$x_c(t) = A_c \cos(\underbrace{\omega_c t + \phi_\Delta x(t)}_{\theta_c(t)}) \quad (PM)$$

فاز متناسب با $x(t)$ تغییر می کند.

$\theta_c(t) = \omega_c t + \phi_\Delta x(t)$

$\omega_c = 2\pi f_c$

فرکانس لحظه ای (ثابت نیست) $f(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\theta_c(t)}{dt} = f_c + \frac{1}{2\pi} \phi_\Delta \frac{d x(t)}{dt}$

* مدولاسیون فرکانس (FM) :

فرکانس متناسب با $x(t)$ تغییر می کند.

$f(t) = f_c + f_\Delta x(t)$ فرکانس لحظه ای

f_Δ : شاخص مدولاسیون فرکانس.

$$\theta_c(t) = \omega_c t + 2\pi f_\Delta \int x(t) dt$$

$$x_c(t) = A_c \cos(\omega_c t + \underbrace{2\pi f_\Delta \int x(t) dt}_{\phi(t)}) \quad (FM)$$

	فاز لحظه‌ای	فرکانس لحظه‌ای
PM	$\phi_\Delta\, x(t)$	$f_c + \frac{1}{2\pi}\phi_\Delta \frac{dx(t)}{dt}$
FM	$2\pi f_\Delta \int x(t)\,dt$	$f_c + f_\Delta\, x(t)$

---

* FM و PM باند باریک :

در حالت کلی : $x_c(t) = A_c \cos(\omega_c t + \phi(t))$

$$\Rightarrow x_c(t) = A_c \cos\omega_c t \cdot \cos\phi(t) - A_c \sin\omega_c t \cdot \sin\phi(t)$$

$$A_c \cos\phi(t) = A_c\left[1 - \frac{1}{2!}\phi^2(t) + \frac{1}{4!}\phi^4(t) + \cdots\right]$$

$$A_c \sin\phi(t) = A_c\left[\phi(t) - \frac{1}{3!}\phi^3(t) + \frac{1}{5!}\phi^5(t) - \cdots\right]$$

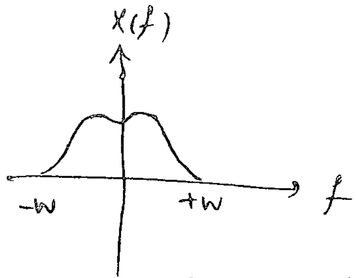
باند باریک : $|\phi(t)| \ll 1 \text{ rad}$ (از جملات دوم به بعد صرف نظر می‌کنیم)

$$x_c(t) = A_c \cos\omega_c t - \phi(t) A_c \sin\omega_c t$$

$$X_c(f) = \frac{A_c}{2}\delta(f-f_c) - \frac{A_c}{2j}\Phi(f)(f-f_c)$$ و $f>0$

$$X_c(f) = \frac{A_c}{2}\delta(f-f_c) + \frac{A_c j}{2}\Phi(f)(f-f_c)$$

$$\Phi(f) = \begin{cases} \phi_\Delta X(f) & : PM \\ \dfrac{-j f_\Delta X(f)}{f} & : FM \end{cases}$$



پهنای باند : $2W$ برای PM و FM باند باریک

NBFM : FM باندباریک

NBPM : PM باندباریک

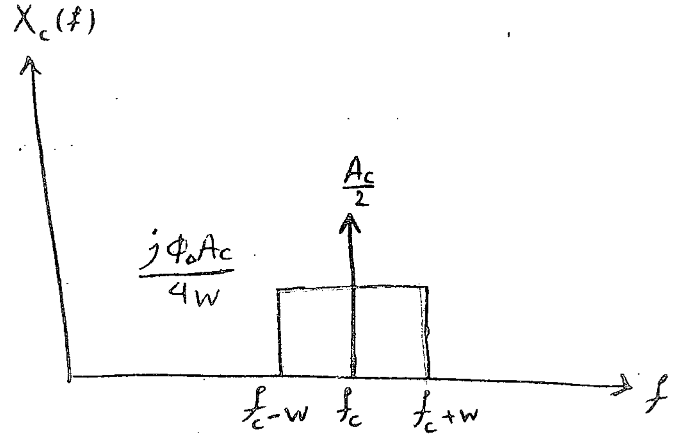
مثال: با درنظر گرفتن $x(t) = \mathrm{Sinc}\,2Wt$ ، طیف‌های باندباریک PM و باندباریک FM برای این سیگنال را رسم نمائید.

$x(t) = \mathrm{Sinc}\,2Wt$

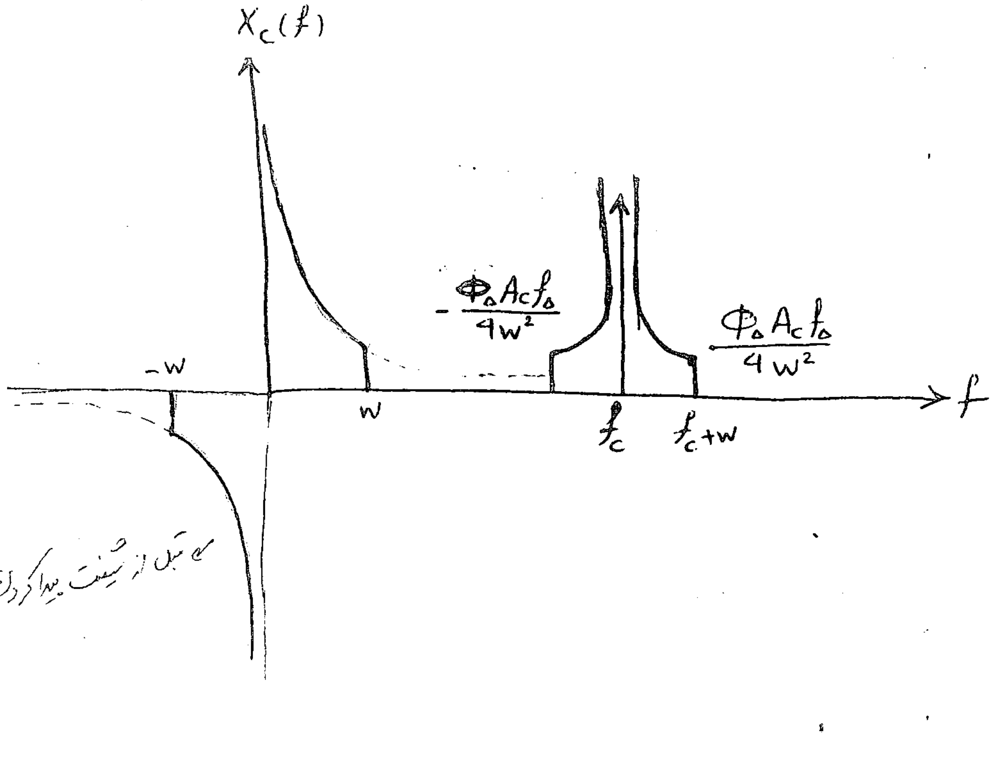
$X(f) = \frac{1}{2W}\Pi\left(\frac{f}{2W}\right)$

$f>0$:

PM :



FM :



قبل از شیفت پیدا کردن

برای PM ، FM :

توان ارسالی $S_T = \langle x_c^2(t) \rangle = \frac{A_c^2}{2}$

به S_x بستگی ندارد.

* پهنای باند FM :

$$B_T = 2(D+2)W \quad ; \quad D \geqslant 2$$

$$D = \frac{f_\Delta}{W}$$

$$B_T = \begin{cases} 2W & D \ll 1 \\ 2DW & D \gg 1 \end{cases}$$

$$B_T = 2(D+1)W \qquad \begin{matrix} D \gg 1 \\ D \ll 1 \end{matrix}$$

* پهنای باند PM :

$$B_T = 2(\phi_\Delta + 1)W$$

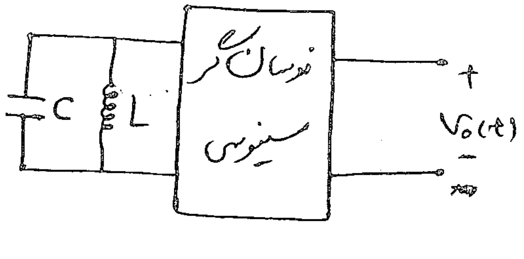
* تولید و آشکارسازی FM :

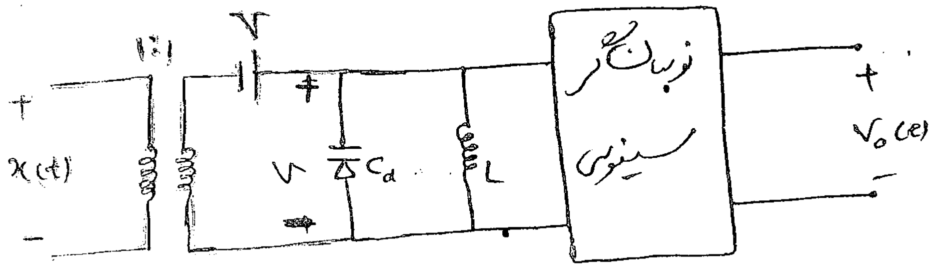
فرکانس باید با تغییرات $x(t)$ بصورت خطی تغییر کند.

* تولید FM :

FM مستقیم :

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$





ظرفیت خازنی دیود ورکتور $C_d = \frac{K}{\sqrt{V}}$

$$V = V + x(t)$$

$$C_d = \frac{K}{\sqrt{V}} = \frac{k}{\sqrt{V + x(t)}} = \frac{K}{\sqrt{V}}\left(1 + \frac{1}{V}x(t)\right)^{-\frac{1}{2}}$$

بسط دوجمله‌ای $(a+b)^n = a^n + \frac{n a^{n-1} b}{1!} + \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2} b^2 + \cdots$

$$C_d = \frac{K}{\sqrt{V}}\left(1 - \frac{x(t)}{2V} + \cdots\right)$$

$$\left|\frac{x(t)}{V}\right| \ll 1 \Longrightarrow \boxed{V \gg 1}$$

با این رابطه می‌توان از جملات دوم به بعد را صرف‌نظر کرد.

$$|x(t)| \ll 1$$

$$C_d \simeq \frac{K}{\sqrt{V}}\left(1 - \frac{1}{2V}x(t)\right)$$

$$\Longrightarrow C_d = C_0 + C_1 x(t)$$

$$C_0 = \frac{K}{\sqrt{V}}, \quad C_1 = \frac{-C_0}{2V}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_d}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{L(C_0 + C_1 x(t))}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_0}}\left(1 + \frac{C_1}{C_0}x(t)\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_0}}\left(1 - \frac{C_1}{2C_0}x(t) + \cdots\right)$$

$$\left|\frac{C_1}{C_0}\right| \ll 1 \Rightarrow \frac{1}{2V} \ll 1 \Rightarrow \boxed{V \gg 1}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_0}}\left(1 - \frac{C_1}{2C_0}x(t)\right)$$

$$\Rightarrow f(t) = f_c + f_\Delta x(t)$$

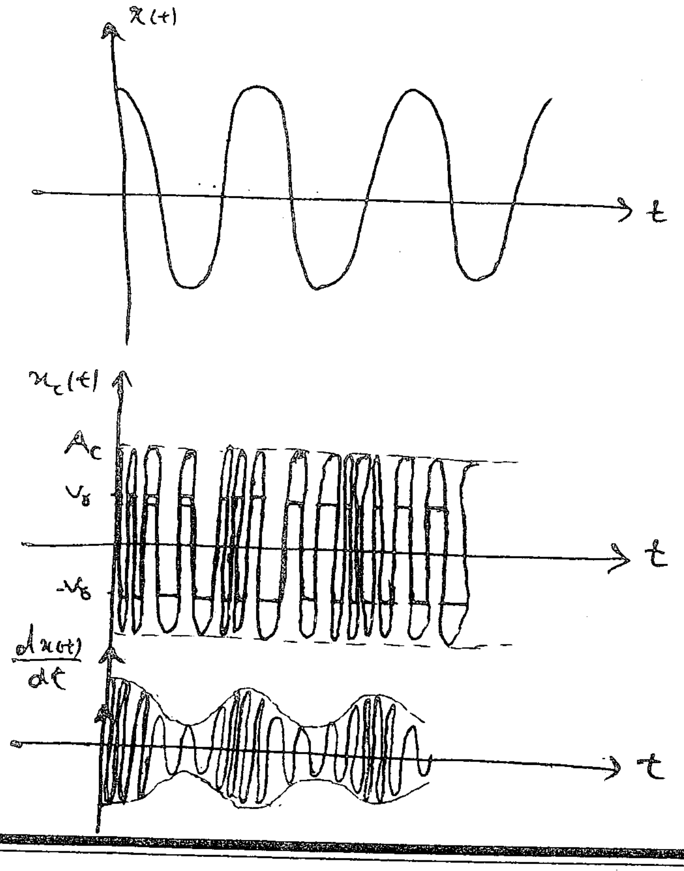
$$f_c = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_0}} \quad , \quad f_\Delta = \frac{-f_c C_1}{2C_0}$$

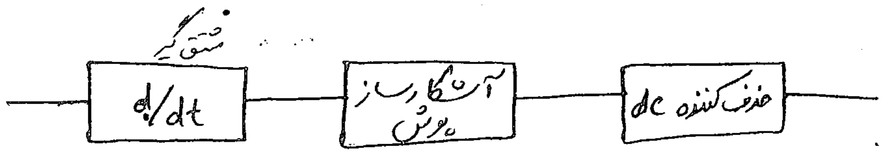
---

* آشکارسازی FM : (روش تبدیل FM به AM با مشتق گیری)

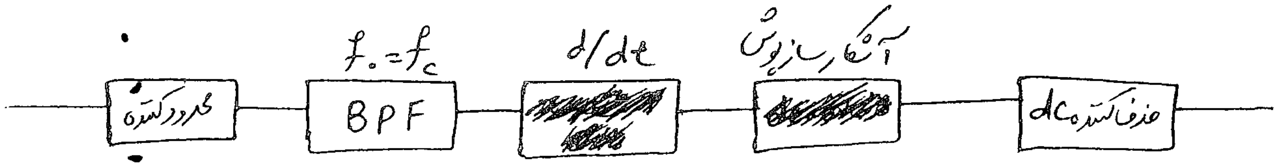
$$FM: \quad x_c(t) = A_c \cos\left(\omega_c t + 2\pi f_\Delta \int x(t)\,dt\right)$$

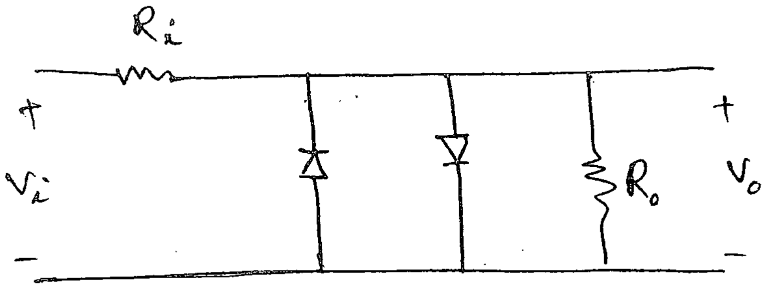
$$\frac{dx_c(t)}{dt} = -A_c\left(\omega_c + 2\pi f_\Delta x(t)\right)\sin\left(\omega_c t + 2\pi f_\Delta \int x(t)\,dt\right)$$

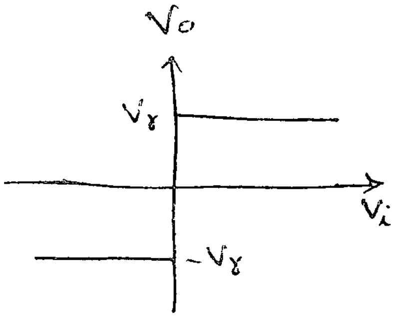




* این مدار ایراد دارد چون نویز را وارد دامنه می‌کند.







تمرینات فصل ۷: ۱-۹ ، ۱-۱۰ ، ۱-۱۲ ، ۱-۱۴√ ، ۲-۱ ، ۲-۲ ، ۳-۴√ ، ۳-۷ ، ۳-۱۲

* متوسط‌گیری سیگنال تصادفی $x(t)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$y(t) = \frac{1}{T}\int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} x(\lambda)\,d\lambda$$

$H(f)$ را به نحوی بیابید که $y(t) = h(t) * x(t)$ و نشان دهید که:

$$R_y(\tau) = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T}\left(1-\frac{|\lambda|}{T}\right)R_x(\tau-\lambda)\,d\lambda$$

با فرض $x(t) = \delta(t)$

$$y(t) = h(t) = \frac{1}{T}\int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} \delta(\lambda)\,d\lambda = \begin{cases} \frac{1}{T} & t-\frac{T}{2} < 0 < t+\frac{T}{2} \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$

$$h(t) = \begin{cases} 1 & |t| < \frac{T}{2} \\ 0 & |t| > \frac{T}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} H(f) = \mathrm{Sinc}\, fT \\ G_y(f) = |H(f)|^2 G_x(f) \end{array}$$

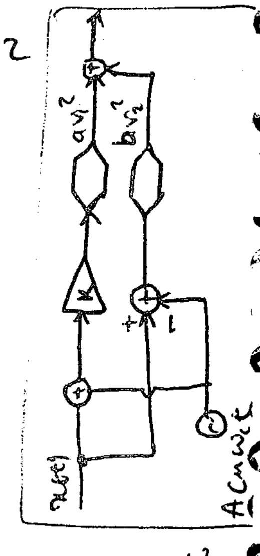
$$R_y(\tau) = F^{-1}[G_y(f)] = F^{-1}[\mathrm{Sinc}^2 fT\, G_x(f)]$$

$$= \frac{1}{T}\Lambda\left(\frac{\tau}{T}\right) * R_x(\tau)$$

$$R_y(\tau) = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T}\left(1-\frac{|\lambda|}{T}\right)R_x(\tau-\lambda)\,d\lambda$$

---

* یک سیستم مدولاسیون با عنصر غیرخطی $x_c(t) = ak^2(v(t)+A\cos w_c t)^2 - b(v(t)-A\cos w_c t)^2$ را ایجاد کرده است. اگر فرکانس حامل f_c باشد، نشان دهید که به ازای یک مقدار مناسب K می‌توان بدون تغییر کردن مدولاسیون $\frac{DSB}{AM}$ را بدست آورد و نمودار بلوکی سیستم مدولاسیون را رسم کنید.



$v(t) = x(t)$

DSB: $x_c(t) = ak^2(x(t)+A\cos w_c t)^2 - b(x(t)-A\cos w_c t)^2$

$$= ak^2\left[x^2(t) + 2A\,x(t)\cos w_c t + A^2\cos^2 w_c t\right]$$
$$- b\left[x^2(t) - 2A\,x(t)\cos w_c t + A^2\cos^2 w_c t\right]$$

$$= ak^2 x^2(t) + 2ak^2 A\,x(t)\cos w_c t + ak^2 A^2\cos^2 w_c t$$
$$- b x^2(t) + 2bA\,x(t)\cos w_c t - bA^2\cos^2 w_c t$$

$$= (ak^2-b)(x^2(t) + A^2\cos^2 w_c t) + 2A(ak^2+b)\,x(t)\cos w_c t$$

اگر $k = \sqrt{\frac{b}{\;}}$ داریم:

۲

AM: $x_c(t)=ak^2(V(t)+A\cos\omega_c t)^2-b(V(t)-A\cos\omega_c t)^2$

$$=ak^2[V^2(t)+2AV(t)\cos\omega_c t+A^2\cos^2\omega_c t]$$
$$-b[V^2(t)-2AV(t)\cos\omega_c t+A^2\cos^2\omega_c t]$$

$$=ak^2V^2(t)+ak^2 2AV(t)\cos\omega_c t+ak^2A^2\cos^2\omega_c t$$
$$-bV^2(t)+b2AV(t)\cos\omega_c t-bA^2\cos^2\omega_c t$$

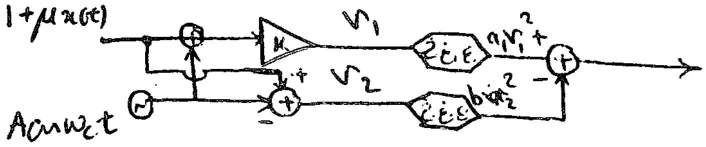
$$=(ak^2-b)(V^2(t)+A^2\cos^2\omega_c t)+2A(ak^2+b)V(t)\cos\omega_c t$$

اگر $k=\sqrt{\frac{b}{a}}$ داریم:

$$=4AbV(t)\cos\omega_c t$$

و اگر $V(t)=1+\mu x(t)$ داریم:

$$x_c(t)=\underbrace{4Ab}_{A_c}[1+\mu x(t)]\cos\omega_c t$$

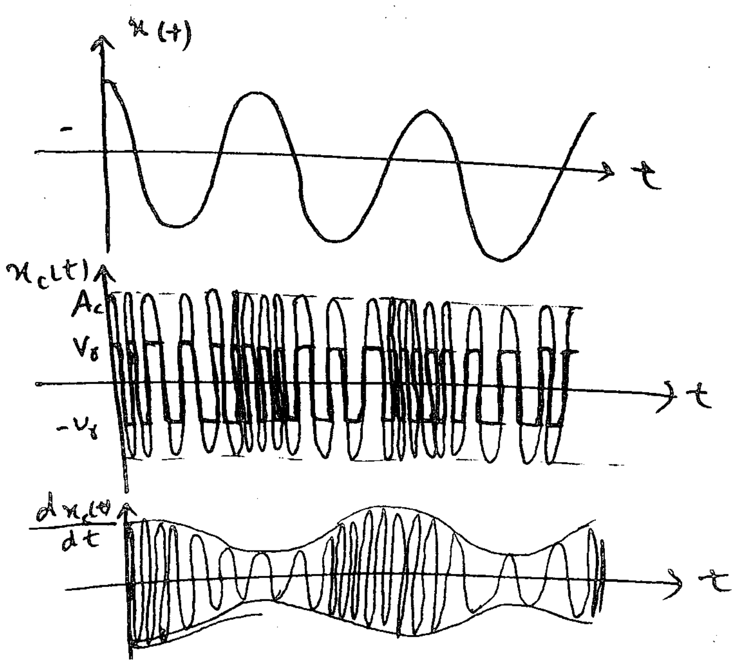


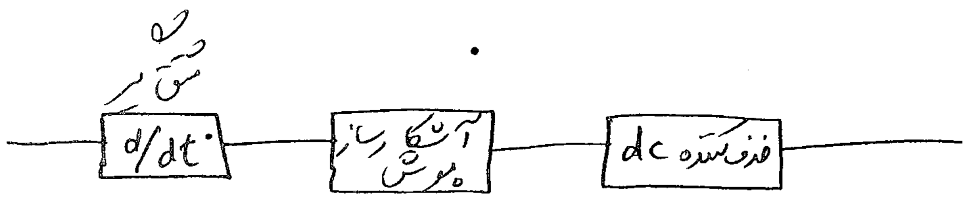
---

* بلوک دیاگرام یک آشکارساز FM از نوع تبدیل FM به AM را رسم نموده و آن را شرح دهید.

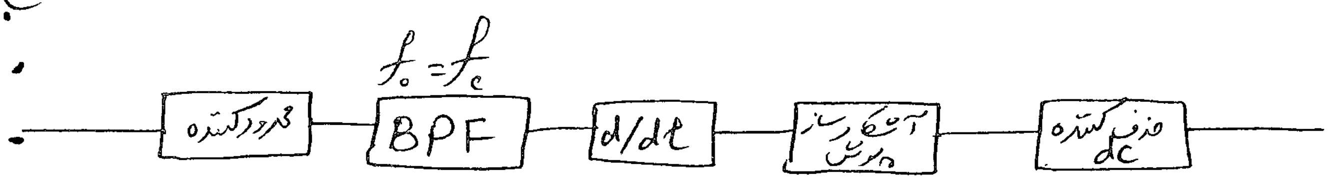
$$x_c(t)=A_c\cos\left(\omega_c t+2\pi f_\Delta\int x(t)dt\right)$$

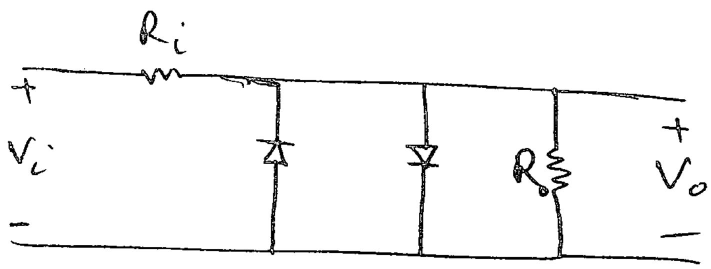
$$\frac{dx_c(t)}{dt}=-A_c(\omega_c+2\pi f_\Delta x(t))\sin\left(\omega_c t+2\pi f_\Delta\int x(t)dt\right)$$

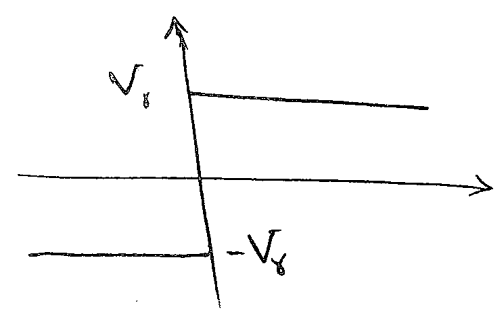




این مدل ناقص است چون که نویز را نیز وارد دامنه می‌کند به همین دلیل مدل را به صورت زیر اصلاح می‌کنیم!



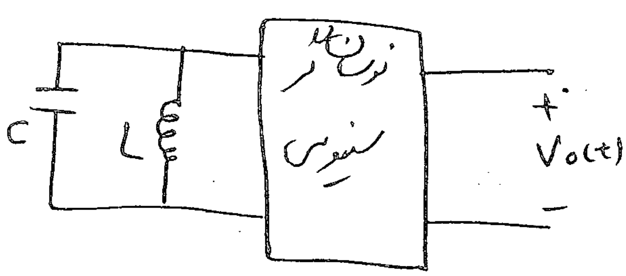




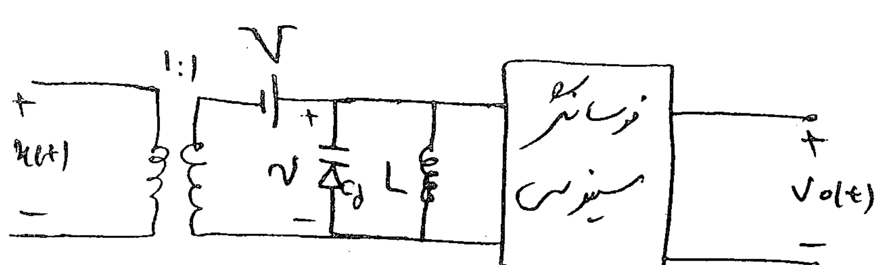
---

* بلوک دیاگرام مدولاتور FM مستقیم را رسم نموده و آن را شرح دهید.

تولید FM به روش مستقیم :



$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$



$$C_d = \frac{k}{\sqrt{v}}$$

ظرفیت خازنی دیود ورکتور

$$v = V + x(t)$$

$$C_d = \frac{k}{\sqrt{v}} = \frac{k}{\sqrt{V + x(t)}} = \frac{k}{\sqrt{V}}\left(1 + \frac{1}{V}x(t)\right)^{-1/2}$$

با نوشتن بسط دوجمله‌ای داریم $\Rightarrow C_d = \frac{k}{\sqrt{V}}\left(1 - \frac{x(t)}{2V} + \cdots\right)$

$$\left|\frac{x(t)}{V}\right| \ll 1 \Longrightarrow \boxed{V \gg 1}$$

$$|x(t)| \lesssim 1$$

پس از جملات دوم به بعد صرف نظر می‌کنیم.

$$C_d \simeq \frac{k}{\sqrt{V}}\left(1 - \frac{1}{2V}x(t)\right) \Longrightarrow \boxed{\begin{array}{c} C_d = C_0 + C_1 x(t) \\ C_0 = \frac{k}{\sqrt{V}}, \quad C_1 = \frac{-C_0}{2V} \end{array}}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_d}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{L(C_0 + C_1 x(t))}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_0}}\left(1 + \frac{C_1}{C_0}x(t)\right)^{-1/2}$$

$$\left|\frac{C_1}{C_0}\right| \ll 1 \Longrightarrow \frac{1}{2V} \ll 1 \Longrightarrow \boxed{V \gg 1}$$

از جملات دوم به بعد صرف نظر می‌کنیم:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_0}}\left(1 - \frac{C_1}{2C_0}x(t)\right)$$

$$\Longrightarrow \boxed{\begin{array}{c} f(t) = f_c + f_\Delta x(t) \\ f_c = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_0}}, \quad f_\Delta = \frac{-f_c C_1}{2C_0} \end{array}}$$

$R_v(\tau)=16e^{-(8\tau)^2}+9$

۵ * برای سیگنال تصادفی $V(t)$ با تابع خودهمبستگی ~~$R_v(\tau)=(12e^{-3\tau}+4)u(t)$~~ طیف توان را بیابید و مقدار dc سیگنال، توان متوسط و مقدار rms را حساب کنید.

$$F\left[e^{(\sqrt{\pi}\,bt)^2}\right]=\frac{1}{b}e^{(\sqrt{\pi}\,f/b)^2}$$

$$R_v(\tau)=16e^{-(8\tau)^2}+9 \qquad b=\frac{8}{\sqrt{\pi}}$$

$$\Longrightarrow G_v(f)=F\left[R_v(\tau)\right]=\frac{16}{8/\sqrt{\pi}}\,e^{\left(\sqrt{\pi}\,f/(8/\sqrt{\pi})\right)^2}+9\delta(f)=2\sqrt{\pi}\,e^{(\pi f/8)^2}+9\delta(f)$$

طیف توان

$$\langle v(t)\rangle=\sqrt{R_v(\pm\infty)}=\pm 3$$

مقدار dc

$$\langle v^2(t)\rangle=P=R_v(0)=25$$

توان متوسط

$$V_{rms}=\sqrt{R_v(0)-R_v(\pm\infty)}=\sqrt{25-9}=4$$

---

* سوال بالا را برای $R_v(\tau)=(12e^{-3\tau}+4)u(t)$ تکرار کنید.

$$G_v(f)=F\left[R_v(\tau)\right]=2\sqrt{\pi}\,e^{-(\sqrt{\pi}\,f/3)}+4\delta(f)$$

$$12\delta(f+2)+$$

$$\langle v(t)\rangle=\sqrt{R_v(\pm\infty)}=\pm 2$$

مقدار dc

$$\langle v^2(t)\rangle=P=R_v(0)=16$$

توان متوسط

$$V_{rms}=\sqrt{R_v(0)-R_v(\pm\infty)}=\sqrt{16-4}=2\sqrt{3}$$

6

* با در نظر گرفتن $x(t) = \cos 200\pi t$ ، B_T و S_T را برای مدولاسیون AM با $A_c = 10$ و $\mu = 0.6$ بدست آورید. برای مدولاسیون DSB تکرار کنید.

روش اصلی: مدولاسیون $S_x = 1$ ، مدوله $S_x = 1/2$

AM: $B = 2W = 2 \times 200 = 400\ Hz$

$W = 200$

$S_T = \frac{1}{2} A_c^2 (1 + \mu^2 S_x) = \frac{100}{2}(1 + (0.6)^2)$

$S_x = 1 \Rightarrow S_T = 68\ W$ وات

DSB: $B = 2W = 2 \times 200 = 400\ Hz$

$W = 200$

$S_T = \frac{1}{2} A_c^2 S_x = \frac{100}{2} = 50\ W$ وات

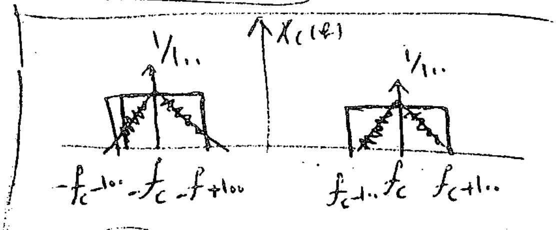
مثلا اگر از تابع Sinc ، $S_x = 1/2$ باشد

---

* $\text{Sinc}\, 200\pi t$ ، $A_c = 10$ ، $\mu = 0.6$

$\text{Sinc}\, 200\pi t \longleftrightarrow \frac{1}{200}\Pi\left(\frac{f}{200}\right)$

$\boxed{S_x = 1/2}$



AM:

$B_T = 2W = 2 \times 200 = 400$

$S_T = \frac{A_c^2}{2}(1 + \mu^2 S_x) = \frac{100}{2}\left(1 + \frac{0.6^2}{2}\right) = 59\ W$ وات

DSB:

$B_T = 2W = 400$

$S_T = \frac{A_c^2}{2} S_x = \frac{100}{4} = 25\ W$ وات

---

* $x(t) = \text{Sinc}(\underbrace{8 \times 10^{-3}}_{W})t$ ، $A = 10$ ، $\mu = 0.5$. $S_T, B_T = ?$

$\boxed{S_x = 1/2}$

AM: $B_T = 2 \times 8 \times 10^{-3}$, $S_T = \frac{A_c^2}{2}(1 + \mu^2 S_x) = \dots$

DSB: $B_T = 2 \times 8 \times 10^{-3}$, $S_T = \frac{A_c^2}{2} S_x = \dots$

* توان ارسالی یک منبع AM مدوله شده با تک آهنگ به ازاء مدولاسیون ۱۰۰ درصد و ماکزیمم توان پوشش 32kW را حساب کنید.

$$A_{max}^2 = (2A_c)^2 = 32\,kw \Rightarrow A_c^2 = 8\,kw$$

$$\mu = 1 \quad , \quad S_x = 1/2 \Rightarrow S_T = \frac{1}{2} A_c^2 (1+\mu^2 S_x) = 6\,kw$$

الف

---

* اگر ماکزیمم توان پوشش یک فرستنده رادیویی 4kW باشد ماکزیمم مقدار μ منبع AM مدوله شده با تک آهنگ و $S_T = 1kW$ چیست؟

$$S_x = 1/2 \qquad S_T = \frac{1}{2} A_c^2 (1+\mu^2 S_x) = 1^{kw} \Rightarrow A_c^2 = \frac{4}{2+\mu^2}\,kw$$

$$A_{max}^2 = (1+\mu)^2 A_c^2 = 4\,\frac{(1+\mu)^2}{2+\mu^2} \le 4\,kw$$

$$1+2\mu+\mu^2 \le 2+\mu^2 \Rightarrow \boxed{\mu \le 0.5}$$

---

* فرآیند تصادفی $x(t)$ به صورت زیر تعریف می‌شود: $x(t) = 2\cos(2\pi t + y)$ که در آن y یک متغیر تصادفی گسسته با $P(y=0) = P(y=\pi/2) = 1/2$ باشد، $M_x(1)$ و $R_x(0,1)$ را پیدا کنید.

$$m_x = \sum x_i P_x(x)$$

$$m_x(t) = \sum 2\cos(2\pi t + y)\, \overset{1/2}{P_y(y)}$$

$$m_x(t) = \sum \cos(2\pi t + y) \Rightarrow m_x(1) = \sum \cos(2\pi + y)$$

$$\Rightarrow m_x(1) = \frac{1}{2}\Big[\underbrace{\cos(2\pi + 0)}_{1} + \underbrace{\cos(2\pi + \pi/2)}_{\sin 2\pi = 0}\Big] = 1/2$$

۸

$$R_x(t_1,t_2) = \sum 2\cos(2\pi t_1+y)\,2\cos(2\pi t_2+y)\,P_y(y)$$

$$R_x(0,1) = \sum \cos(y)\cos(2\pi+y)\,P_y(y) \quad \tfrac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{4}\sum\left[\cos(2\pi+y+y)+\cos(y-2\pi-y)\right]$$

$\cos(2\pi+2y)+\cos(-2\pi)$

$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$
$$= \frac{1}{4}\sum\cos(-2\pi)+\frac{1}{4}\sum\cos(2\pi+2y)$$

$$= \frac{1}{4}\sum\cos 2\pi+\frac{1}{4}\sum\cos(2\pi+2y)$$

$y = \begin{cases} 0 \\ \pi/2 \end{cases}$
$$= \frac{1}{4}+\frac{1}{4}\left(\cos 2\pi+\underbrace{\cos\left(2\pi+2\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\right)}_{\cos(3\pi)}\right)$$

$$= \frac{1}{4}+\frac{1}{4}(1+(-1)) = \frac{1}{4}$$

---

* $X_c(f)$ را برحسب $X(f)$ برای NBFM , NBPM بدست آورید.

$$x_c(t) = A_c\cos(\omega_c t+\phi(t))$$

$$\longrightarrow x_c(t) = A_c\cos\omega_c t\cdot\cos\phi(t) - A_c\sin\omega_c t\cdot\sin\phi(t)$$

$$A_c\cos\phi(t) = A_c\left[1-\frac{1}{2!}\phi^2(t)+\frac{1}{4!}\phi^4(t)+\dots\right]$$

$$A_c\sin\phi(t) = A_c\left[\phi(t)-\frac{1}{3!}\phi^3(t)+\frac{1}{5!}\phi^5(t)-\dots\right]$$

$|\phi(t)| \ll 1$ rad $\rightarrow$ از جملات درجه بالا صرف نظر میکنیم

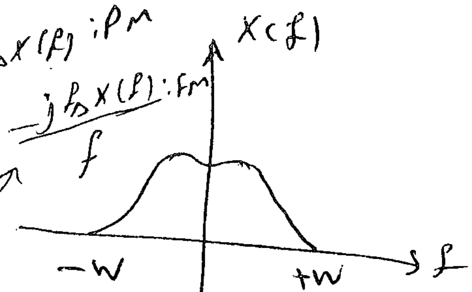
$$x_c(t) = A_c\cos\omega_c t - \phi(t)A_c\sin\omega_c t$$

$$X_c(f) = \frac{A_c}{2}\delta(f-f_c) - \frac{A_c}{2j}\Phi(f-f_c)$$

$\phi_\Delta X(f)$: PM

$\dfrac{-j f_\Delta X(f)}{f}$: FM

$$X_c(f) = \frac{A_c}{2}\delta(f-f_c) + \frac{A_c j}{2}\Phi(f-f_c)$$



$$\Phi(f) = \begin{cases} \Phi_\Delta X(f) & : PM \\ -j f_\Delta X(f) & : FM \end{cases}$$

PM, FM پهنای باند برابر 2W

۸- اگر فرآیند تصادفی از سیستم LTI عبور کند، تابع خودهمبستگی خروجی را نسبت به خروجی حساب کنید.

$$R_y(t_1,t_2)=E[y(t_1)y(t_2)]=h(-\tau)*R_{yx}(\tau)$$

$$R_y(t_1,t_2)=E[y(t_1)y(t_2)],\quad y(t_2)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(\lambda)x(t-\lambda)d\lambda$$

$$R_y(t_1,t_2)=\int^{+\infty}h(\lambda)E[y(t_1)x(t-\lambda)]d\lambda$$

$$E[y(t_1)x(t-\lambda)]=R_{yx}(t_1,t_2-\lambda)=R_{yx}(t_1-t_2+\lambda)=R_{yx}(\tau+\lambda)$$

$$R_y(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(\lambda)R_{yx}(\tau+\lambda)d\lambda=\int_{-\infty}^{+\infty}h(-\mu)R_{yx}(\tau-\mu)d\mu$$

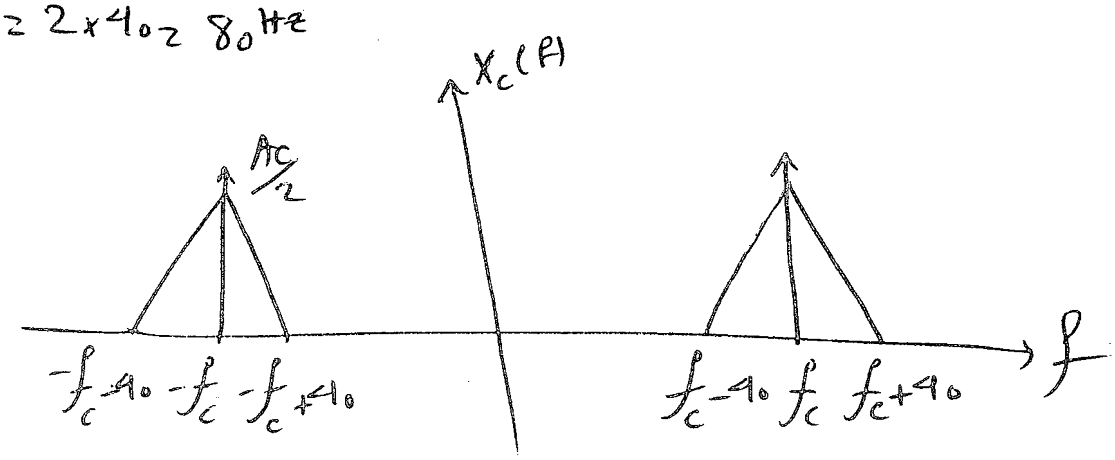
$$=h(-\tau)*R_{yx}(\tau)$$

---

* اگر سیگنال $x(t)=\mathrm{sinc}^2 40t$ بصورت AM با $\mu<1$ ارسال شود طیف دوطرفه $x_c(t)$ را رسم و B_T را بدست آورید.

$$\mathrm{sinc}^2 40t \longleftrightarrow \frac{1}{40}\Lambda\left(\frac{f}{40}\right)$$

$$B_T=2W=2\times 40=80\,\mathrm{Hz}$$



* یک ایستگاه فرستنده رادیویی با $S_T \leq 3kw$ و $A_{max}^2 \leq 8kw$ در نظر بگیرید.
سیگنال پیام باند پایه تک‌تن با $A_m = 1$ در نظر بگیرید. حداکثر P_{sb}
برای مدولاسیون Am و DSB را بدست آورید.

DSB:

$$\frac{P_{sb}}{A_{max}^2} = \frac{S_x}{4} \rightarrow P_{sb} = \frac{S_x A_{max}^2}{4} = \frac{A_{max}^2}{8} \leq 1\,kw \qquad S_x = \frac{A_m^2}{2} = 1/2$$

$$S_T = 2P_{sb} \Rightarrow P_{sb} = \frac{S_T}{2} = \frac{3}{2} \leq 1.5\,kw \qquad \boxed{P_{sb} \leq 1\,kw}$$

Am:

$$\frac{P_{sb}}{A_{max}^2} = \frac{S_x}{16} \rightarrow P_{sb} = \frac{S_x A_{max}^2}{16} = \frac{A_{max}^2}{32} \leq 0.25\,kw$$

$$P_{sb} = \frac{1}{2} S_x P_c = \frac{P_c}{4} \rightarrow S_T = P_c + 2P_{sb} = 4P_{sb} + 2P_{sb}$$

$$\Rightarrow S_T = 6P_{sb} \rightarrow \boxed{P_{sb} = \frac{S_T}{6} \leq 0.5\,kw}$$

فرمول:

$$\frac{P_{sb}}{A_{max}^2} = \begin{cases} \frac{S_x}{4} & DSB \\ \frac{S_x}{16} & Am \end{cases}$$

$DSB: A_{max}^2 = A_c^2, \quad P_{sb} = \frac{A_c^2}{4} S_x$

$Am: A_{max}^2 = 4A_c^2, \quad P_{sb} = \frac{A_c^2 S_x}{4}$

باسمه تعالی

نام آزمون: مخابرات I　نام مدرس: کاظمی　مدت آزمون: ۲ ساعت

نام و نام خانوادگی دانشجو:　رشته تحصیلی: برق

نیمسال: تابستان　سال تحصیلی: ۸۶

۱- فرآیند تصادفی $x(t)$ به صورت زیر تعریف می‌شود: (۲۰ نمره) پایان ترم

$$x(t) = 2\cos(2\pi t + y)$$

در صورتی که y یک متغیر تصادفی گسسته با $P(y=0) = P(y=\pi/2) = \frac{1}{2}$ باشد

$m_x(1)$ و $R_x(0,1)$ را پیدا کنید.

۲- متوسط متحرک سیگنال تصادفی $x(t)$ به صورت زیر تعریف می‌شود (۲۰ نمره)

$$y(t) = \frac{1}{T}\int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} x(\lambda)\,d\lambda$$

$H(f)$ را به نحوی بیابید که $y(t) = h(t) * x(t)$ و نشان دهید که:

$$R_y(\tau) = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T}\left(1 - \frac{|\lambda|}{T}\right)R_x(\tau-\lambda)\,d\lambda$$

۳- اگر $x(t) = \mathrm{sinc}(8\times 10^3 t)$ باشد، B_T و S_T را برای مدولاسیون AM با $A_c = 10$ و $\mu = 0.4$ حساب کنید. مسئله را برای مدولاسیون DSB تکرار کنید. (۱۵ نمره)

۴- یک سیستم مدولاسیون با عنصر غیرخطی

$$x_c(t) = aK^2(v(t) + A\cos\omega_c t)^2 - b(v(t) - A\cos\omega_c t)^2$$

را ایجاد کرده است. اگر فرکانس حامل f_c باشد، نشان دهید که به ازای یک مقدار مناسب K می‌توان با فیلتر کردن مدولاسیون DSB را به دست آورد. نمودار بلوکی سیستم مدولاسیون را رسم کنید. (۱۵ نمره)

پایان ترم قبل ۱۹۷ ص

پایان ترم قبل ص ۲۴۷

کتاب یا جزوه

حل شد ص ۲۹

$\mathrm{sinc}\, fW$

۲۴ خرداد

۱- $X_1(t)$ را بر حسب $X(t)$ برای NBFM و NBPM بدست آورید (۱۰ نمره)

([illegible])

۲- بلوک دیاگرام یک آشکارساز FM از نوع تبدیل FM به AM را رسم نموده و آن را شرح دهید. (۱۰ نمره) آخرین سؤال جزوه درسی

۳- بلوک دیاگرام مدولاتور FM مستقیم را رسم نموده و آن را شرح دهید (۱۰ نمره)

$x = 2\cos(2\pi t + y)$

$m_x(1) = ?$

$R_x(0, 1) = ?$

$m_x = \sum x_i \, P_x(x)$

$m_x(t) = \sum \cancel{2}\cos(2\pi t + y)\, P_x(y)$

$\Rightarrow m_x(1) = \sum \cos(2\pi + y)\, \cancel{P}$

$= \cancel{\frac{1}{2}}\big(\underbrace{\cos(2\pi + 0)}_{+1} + \underbrace{\cos(2\pi + \frac{\pi}{2})}_{(0)}\big) \cdot \frac{1}{2} \quad 1$

$R_x(t_1, t_2) = \sum \cos(2\pi t_1 + y)\cos(2\pi t_2 + y) \cdot P_X(x)$

$R_x(0, 1) = \sum \cos(y)\cos(2\pi + y)\, \cancel{P_X(y)}$

$= \cancel{\sum} \cancel{\frac{1}{2}} \{\cos(y - 2\pi - y) + \cos(y + 2\pi + y)\}$

$= \frac{1}{2}\sum \cos 2\pi + \frac{1}{2}\sum \cos(2\pi + 2y)$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum \cos(2\pi + 2y)$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\cos 2\pi + \cos(2\pi + 2(\frac{\pi}{2})\right) = \frac{1}{a}$

$m_x = \sum_{i=1}^{k} x_i\, P_x(x_i)$

$m_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, P_x(x)\, dx$

باسمه تعالی

نام آزمون: مخابرات I نام مدرس: ... مدت آزمون: ۲ ساعت و ربع

نام و نام خانوادگی دانشجو: ... رشته تحصیلی: کارشناسی ناپیوسته برق

نیمسال: دوم سال تحصیلی: ۸۶-۸۵

۱- اگر برای سیگنال تصادفی $y(t)$ با تابع خودهمبستگی $R_y(\tau) = (12e^{-3\tau} + 4)\,u(t)$ طیف توان را بیابید و مقدار dc سیگنال، توان متوسط و مقدار rms را حساب کنید (۲۰ نمره)

۲- شرط تشکیل سیگنال تصادفی $x(t)$ به صورت زیر تعریف می‌شود (۲۰ نمره) ص ۱۹۷

$$y(t) = \frac{1}{T}\int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} x(\lambda)\, d\lambda$$

ص ۲۴۷   ۵ - ۲ - ۴۵

$H(f)$ را به نحوی که $y(t) = h(t) * x(t)$ بیابید و نشان دهید که:

$$R_y(\tau) = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T}\left(1-\frac{|\lambda|}{T}\right) R_x(\tau-\lambda)\, d\lambda$$

$x(t) = \sin c\, 2W t$

۳- اگر $x(t) = \sin c(8\times10^3 t)$ باشد، S_T را برای مدولاسیون AM با $AC=10$ و $\mu = 0.4$ محاسبه کنید. مشابه را برای مدولاسیون DSB تکرار کنید (۲۰ نمره)

$B_T = 2W$

۴- یک سیستم مدولاسیون با عنصر غیرخطی $x_c(t) = aK^2(v(t) + A\cos\omega_c t)^2 - b(v(t) - A\cos\omega_c t)^2$ را ایجاد کرده است. اگر فرکانس حامل f_c باشد، نشان دهید که به ازای یک مقدار مناسب K می‌توان به وسیله فیلتر کردن مدولاسیون DSB را بدست آورد. نمودار بلوکی سیستم مدولاسیون را رسم کنید (۲۰ نمره) ص ۶۹

۵- $X_c(f)$ را برحسب $X(f)$ برای NBFM و NBPM بدست آورید (۱۰ نمره)

FM مستقیم

۶- ... کار ... ۱/۲۱ ...

تلفون ... صفحه ... مخابرات I ... نام مدرس: کاکائی ... مدت آزمون: ۲ ساعت ... روز ...

نام و نام خانوادگی دانشجو .... رشته تحصیلی ....

نیمسال .... سال تحصیلی: تابستان ۸۵

۱- رابطه زیر را از خواص تبدیل فوریه اثبات کنید (۲۰ نمره) ص ۵۲ و ۵۳ کتاب

$$v(at) \longleftrightarrow \frac{1}{|a|} V\left(\frac{f}{a}\right)$$

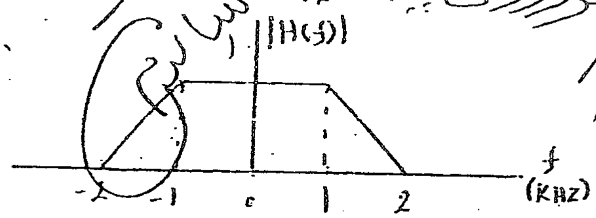
۲- سیستمی را با پاسخهای دامنه و فاز نشان داده شده در شکل زیر با سه ورودی زیر در نظر می‌گیریم:

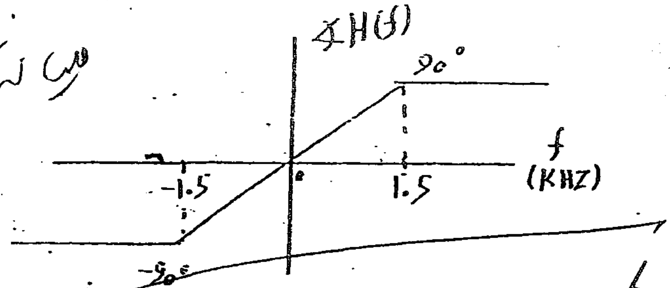
$x_1(t) = \cos 500\pi t + \cos 2000\pi t \qquad x_2(t) = \cos 500\pi t + \cos 2500\pi t \qquad x_3(t) = \cos 2500\pi t + \cos 3500\pi t$

(۲۰ نمره)

الف) خروجی‌های $y_1(t)$ ، $y_2(t)$ و $y_3(t)$ را پیدا کنید

ب) در صورت وجود اعوجاج، نوع آن را برای هر ورودی پیدا کنید





۳- فرآیند تصادفی $X(t)$ به صورت زیر تعریف می‌شود: (۲۰ نمره)

$$X(t) = 2\cos(2\pi t + Y)$$

در صورتی که Y یک متغیر تصادفی گسسته با $P(Y=0)=P(Y=\frac{\pi}{2})=\frac{1}{2}$ باشد، $m_x(1)$ و $R_x(0,1)$ را پیدا کنید

تابستان ۸۲

۴- یک سیستم مدولاسیون با عنصر غیرخطی سیگنال زیر را ایجاد کرده است: (۲۰ نمره)

$$x_c(t) = aK^2[v(t) + A\cos\omega_c t]^2 - b(v(t) - A\cos\omega_c t)^2$$

اگر f_c فرکانس حامل باشد و $v(t)=x(t)$، نشان دهید که به ازای یک مقدار مناسب K می‌توان بدون فیلتر کردن مدولاسیون DSB به دست آورد. نمودار بلوکی سیستم مدولاسیون را رسم کنید

۴-۳-۱

۵

5- بلوک دیاگرام یک آشکارساز FM از نوع تبدیل FM به AM را رسم نموده و آن را شرح دهید؟ (۱۰) آخرین سؤال جزوه درسی

تا پایان ترم اول مهم

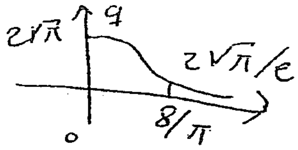
6) بلوک دیاگرام یک مدولاتور FM مستقیم را رسم نموده و آن را شرح دهید؟ (۱۰)

تا پایان ترم اول مهم

$$R_V(\tau) = 16\, e^{-(8\tau)^2} + 9$$ سؤال

$$\mathcal{F}\left[e^{-(\sqrt{\pi}\, b t)^2}\right] = \frac{1}{b}\, e^{-(\sqrt{\pi}\, f/b)^2} \qquad b = \frac{8}{\sqrt{\pi}}$$

$$G_V(f) = 2\sqrt{\pi}\, e^{-(\pi f/8)^2} + 9\delta(f)$$



$$\langle V(t)\rangle = \sqrt{R_V(\pm\infty)} = \pm 3$$

$$\langle V^2(t)\rangle = R_V(0) = 25$$

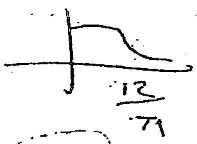
$$V_{rms} = \sqrt{25-9} = 4 \qquad e^{-7|t|}$$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{\pi}\ e^{-\sqrt{\pi f}} \qquad \frac{\sqrt{\pi}}{\pi}\ \frac{\pi f}{\frac{12}{\pi}}\ \pi^2 f \qquad b = \frac{12}{\sqrt{\pi}}$$

$$R_V(\tau) = 12\, e^{-|3t|} + 4 \quad (1)$$ ؟

$$\mathcal{F}\left[e^{-\sqrt{\pi} b t}\right] = \frac{1}{b}\, e^{-\sqrt{\pi}\cdot f/b} \qquad b = \frac{12}{\sqrt{\pi}} \qquad (b = 3$$

$$G_V(f) = 2\sqrt{\pi}\, e^{-(\pi f/3)} + 4\delta(f)$$



$$\int_{-\infty}^{\infty}$$

$$\langle V(t)\rangle = \sqrt{R_V(\pm\infty)} = \pm 2 \qquad (\sqrt{12})^2 = \qquad \frac{\sqrt{\pi}}{12}\, e^{-\frac{\pi f}{12}}$$

$$\langle V^2(t)\rangle = R_V(0) = 16$$

$$V_{rms} = \sqrt{16-4} = \sqrt{12} \qquad \infty = 0 \qquad 0 = 1 \qquad e^0$$

$$\sqrt{R_V(0) - (m_d)^2}$$

$$\sqrt{16-4} = \sqrt{12} \qquad R_V =$$

(7), (4), (5), (3), (1) تمارين

۹-۱-۹۰

① dc ⇐ $\tau = 0$ قرار می دهیم

برای سیگنال تصادفی $R_v(\tau) = (12e^{-3\tau} + 4)\,u(\tau)$ مقدار dc نمی‌توان قرار داد
میانگین و مقدار rms را حساب کنید؟

سوال دانشگاه کازرون

$(\tau = 0) \Rightarrow dc^2$

$\tau = \infty$

$R_v(\pm\tau)$
$R_v(0)$

$\tau = 0$ توان متوسط

مقدار rms ⟶ $(\sqrt{\quad})^2$ رابطه واریانس

تعیین توان ⟵ کنترل فوریه بگیریم جدول می دهیم

② اگر فرایند تصادفی از سیستم LTI تابع خود همبستگی خروجی را نسبت به خروجی حساب کنید

57 تا 59

$R_y(t_1, t_2) = E[y(t_1)\cdot y(t_2)] = h(-\tau) * R_{YX}(\tau)$

سوال تمرین کتاب

فصل 7 دوتا
فصل 6 دوتا
فصل ۵ دوتا

③ فرض $x(t)$ $h(t) * x(t)$

نشان دهید:

$$R_y(\tau) = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T}\left(1 - \frac{|\lambda|}{T}\right) R_x(\tau - \lambda)\, d\lambda$$

صفحه ۱۹۷

$h(t) = \begin{cases} \frac{1}{T} \\ 0 \end{cases}$ اشتباه کتاب

۱۵-۲-۹۰
تمرین

توضیح کامل؟

سوال تمرین کتاب

حل :

$$\text{AM:}\ \ B_T = 400\text{Hz} \qquad S_T = \frac{1}{2}A_c^2\left(1+\mu^2 S_x\right) = \frac{100}{2}\left(1+0.6^2\right) = 68\text{W}$$

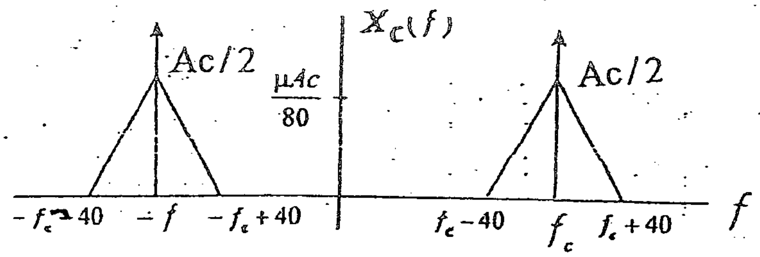
$$\text{DSB:}\ \ B_T = 400\text{Hz} \qquad S_T = \frac{1}{2}A_c^2 S_x = \frac{100}{2} = 50\text{W}$$

٤. ٢-٤. اگر سیگنال $x(t)=\text{sinc}^2 40t$ بصورت AM با $\mu < 1$ ارسال شود، طیف دو طرفه $x_c(t)$ را رسم و B_T آن را بدست آورید.

حل :

$$\text{sinc}^2\, 40t \ \leftrightarrow\ \frac{1}{40}\Lambda\left(\frac{f}{40}\right)$$

$$B_T = 2W = 80\ \text{Hz}$$



٤. ٢-٥. توان ارسالی یک موج AM مدوله شده با تک آهنگ را به ازاء مدولاسیون 100 درصد و ماکزیمم توان پوش 32kW را حساب کنید.

حل :

$$A_{max}^2 = (2A_c)^2 = 32\text{kW} \ \Rightarrow\ A_c^2 = 8\text{kW}$$

$$\mu = 1,\quad S_x = \frac{1}{2} \ \Rightarrow\ S_T = \frac{1}{2}A_c^2\left(1+\mu^2 S_x\right) = 6\text{kW}$$

٤. ٢-٦. اگر ماکزیمم توان پوش یک فرستنده رادیوئی 4kW باشد ماکزیمم مقدار μ موج AM مدوله شده با تک آهنگ و S_T=1kW چیست؟ (سؤال)

حل :

$$S_x = \frac{1}{2},\quad S_T = \frac{1}{2}A_c^2\left(1+\frac{\mu^2}{2}\right) = 1\text{kW} \ \Rightarrow\ A_c^2 = \frac{4}{2+\mu^2}\text{kW}$$

$$A_{max}^2 = (1+\mu)^2 A_c^2 = 4\frac{(1+\mu)^2}{2+\mu^2}\text{kW} \le 4\text{kW}$$

۱۹۰

۱۲) با در نظر گرفتن $x(t)=\cos 200\pi t$ ، B_T و S_T را برای مدولاسیون AM با $A_c=10$ و $\mu=1$ بدست آورید این مسئله را برای مدولاسیون DSB تکرار نمائید

$W = 200\pi$

$S_x = \frac{1}{2}$

AM : $B_T = 2W$

$S_T = \frac{A_c^2}{2}(1+\mu^2 S_x)$ $(S_x = 1)$ $1/2$ چون تک تن

$P_c + 2P_{sb}$

DSB : $B_T = 2W$

$\cancel{S_T = \frac{A_c^2}{2}}$ $S_T = 2P_{sb}$ و $P_{sb} = \frac{A_c^2}{4}\mu^2 S_x$

$S_T = A_c^2 \mu^2 S_x \Rightarrow S_T = \frac{A_c^2}{2} S_x$

سوال دانشگاه آزاد جنوب تهران

اگر $x(t) = \operatorname{Sinc} 200\pi t$ باشد B_T و S_T را برای مدولاسیون AM با $A_c = 10$ و $\mu = 1$ بدست آورید.

نکته: برای تابع Sinc ، $S_x = \frac{1}{2}$ می باشد

$B_T = 2W$

$S_T = A_c^2 (1+\mu \ldots) \cos \ldots$

$A_c^2 \quad A_c^2 \quad \ldots$

بنام خدا

تا ۱۲ اصول خ

۱- رابطه‌ی زیر را از خواص تبدیل فوریه اثبات کنید؟ $v(at) \longleftrightarrow \frac{1}{|a|} v\left(\frac{f}{a}\right)$

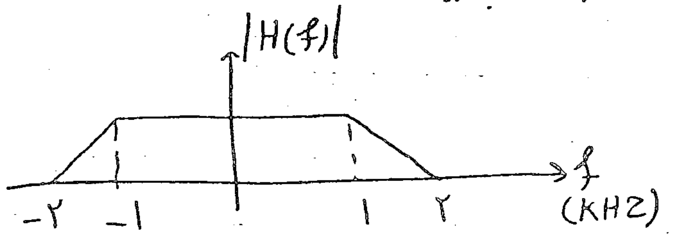
۲- سیستمی با پاسخ های دامنه و فاز نشان داده شده در شکل زیر با سه ورودی زیر در نظر میگیریم :

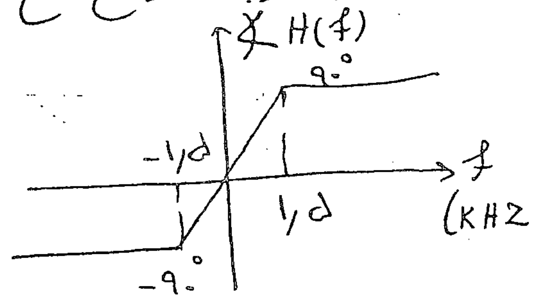
$x_1(t) = \cos 600\pi t + \cos 2000\pi t$ $\qquad$ $x_2(t) = \cos 600\pi t + \cos 2500\pi t$

$x_3(t) = \cos 2500\pi t + \cos 3500\pi t$

الف) خروجی‌های $y_1(t)$ ، $y_2(t)$ و $y_3(t)$ را پیدا کنید؟

ب) در صورت وجود اعوجاج، نوع آنرا برای هر ورودی پیدا کنید؟





**۳- فرایند تصادفی $x(t)$ به صورت زیر تعریف می‌شود $x(t) = 2\cos(2\pi t + y)$

در صورتی که y یک متغیر تصادفی گسسته با $P(y=0) = P\left(y=\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$ باشد،

$m_x(1)$ و $R_x(0,1)$ را پیدا کنید؟

**۴- یک سیستم مدولاسیون با عنصر غیر خطی سیگنال زیر را ایجاد کرده است : دقیق خوانده شود

$$x_c(t) = ak^2\left[v(t) + A\cos\omega_c t\right]^2 - b\left(v(t) - A\cos\omega_c t\right)^2$$

اگر f_c فرکانس حامل باشد و $v(t) = x(t)$ ، نشان دهید که به ازای یک مقدار مناسب k می‌توان بدون فیلتر کردن مدولاسیون DSB به دست آورد، نمودار بلوکی سیستم مدولاسیون را رسم کنید؟ ص ۶۹ حل المسائل ۲-۳-۶

** ۵- بلوک دیاگرام یک آشکارساز FM از نوع تبدیل FM به AM را رسم نموده و آنرا شرح دهید؟

** ۶- بلوک دیاگرام یک مدولاتور FM مستقیم را رسم نموده و آنرا شرح دهید؟

** ۷- متوسط متحرک سیگنال تصادفی $x(t)$ به صورت زیر تعریف می شود

$$y(t)=\frac{1}{T}\int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} x(\lambda)\,d\lambda$$

دقیق — ص ۱۹۷ 15-2.9 — فصل ۹

$H(f)$ را به نحوی بیابید که $y(t)=h(t)*x(t)$ و نشان دهید که: ص ۱۹۷ 15-2.9 مسائل — ثابت افشار دارای

$$R_y(\tau)=\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}\left(1-\frac{|\lambda|}{T}\right)R_x(\tau-\lambda)\,d\lambda$$

** ۸- اگر $x(t)=\text{sinc}(8\times10^{3}t)$ باشد، B_T و P_T را برای مدولاسیون $x(t)=\cos 200\pi t$

AM با $A_c=10$ و $\mu=0/4$ حساب کنید. مسئله را برای مدولاسیون DSB تکرار کنید؟ $\mu=0/2$ ص ۲۳۲۵

** ۹- $x_c(f)$ را برحسب $X(f)$ برای NBFM و NBPM بدست آورید؟ ارتباط با فرمول ۶

فصل ۹ ۱۰- برای سیگنال تصادفی $v(t)$ با تابع خودهمبستگی $R_v(\tau)=(12e^{-2\tau}+4)u(\tau)$ طیف

توان را بیابید و مقدار dc سیگنال، توان متوسط و مقدار rms را حساب کنید؟ ص ۱۹۳

* ۱۱- یک روش تولید و یک روش آشکارسازی FM را نام برده و با رسم بلوک دیاگرام آنها را شرح دهید

FM مستقیم — تبدیل FM به AM

داخل جزوه ۱۰ آشنا د ۲ بزرگ ۱ هم