نام کتاب : مقاومت مصالح

نام مؤلف : دکتر حجت‌الله عادلی

نام ناشر : انتشارات دهخدا تلفن : ۶۴۶۰۱۸۵

نوبت چاپ : هفتم و بهار ۱۳۷۵

تیراژ : چهارهزارنسخه

قطع و صفحه : وزیری ۱۰+۷۶۰ صفحه

چاپ : مروی

صحافی : ایران هنر

این کتاب با استفاده از کاغذ حمایتی وزارت فرهنگ و ارشاد اسلامی به چاپ رسیده است.




# فصل اول

## کشش و فشار

### ۱ – ۱ مقدمه

مقاومت مصالح شاخه‌ای از مکانیک کاربردی است که رفتار اجسام جامد را تحت بارگذاری های مختلف بررسی می‌کند . اجسام جامدی که در این درس مطالعه می‌شود عبارتند از میله‌های با بارگذاری محوری ، محورهای مکانیکی ، تیرها ، ستون‌ها وهمچنین سازه‌هایی که از مجموعه‌ای از این اجزاء ساده تشکیل می‌شوند . معمولا" هدف از تحلیل تعیین تنش، کرنش و تغییر شکل ایجاد شده بوسیله بارها در قطعات ساختمان و به طور کلی اجزاء یک سازه می‌باشد . اگر بتوانیم این کمیت‌ها را برای تمام مقادیر بار تا بار شکست حساب کنیم در این صورت تصویر کاملی از رفتار مکانیکی جسم یا سازه مورد نظر خواهیم داشت .

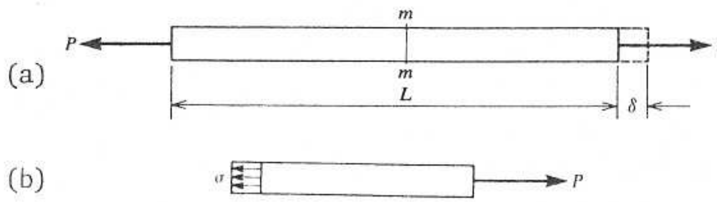
تحلیل‌های نظری و نتایج تجربی در مطالعه مقاومت مصالح اهمیت مساوی دارند . در بسیاری از مواقع ما با استدلال منطقی فرمول‌ها و معادلاتی برای تخمین رفتار مکانیکی سازه‌ها بدست می‌آوریم ولی در عین حال باید آگاه باشیم بدون در نظر گرفتن خواص ماده یا مصالح مصرفی نمی‌توان این فرمول‌ها را به طور واقع بینانه‌ای بکار برد . خواص مکانیکی مصالح فقط بعد از انجام آزمایش‌های مناسب در آزمایشگاه بدست خواهند آمد . همچنین بسیاری از مسائل مهم مهندسی را نمی‌توان با استفاده از روش‌های تئوری به‌طور موءثری حل نمود و اندازه گیری‌های تجربی عملا" مورد نیاز می‌گردد . پیشرفت مقاومت مصالح در طول تاریخ مخلوط جالبی از تئوری و تجربه‌می‌باشد به طوریکه دربعضی ازمواقع

آزمایش منجر به نتایج جالبی گردیده و در مواقع دیگر تئوری نتایج جدیدی ارائه داده است. اشخاص مشهوری همچون لئوناردو داوینچی ( ۱۴۵۲ — ۱۵۱۹ ) و گالیله ( ۱۵۶۴ — ۱۶۴۲ ) آزمایش‌هایی برای تعیین مقاومت سیم‌ها، میله‌ها و تیرها انجام دادند هر چند که آنها با استاندارد امروزه هیچ گونه تئوری برای توجیه نتایج آزمایش‌های خود ارائه ندادند.

در مقابل، ریاضی دان معروف لئونارد اولر ( ۱۷۰۷ — ۱۷۸۳ ) تئوری ریاضی ستون‌ها را توسعه داد و در سال ۱۷۴۴ بار بحرانی یک ستون را مدت‌ها قبل از اینکه هیچ گونه نتایج تجربی وجود داشته باشد حساب کرد. بدین ترتیب نتایج تئوری اولر سالها بدون استفاده باقی ماند هر چند که این نتایج امروزه اساس تئوری ستون‌ها را تشکیل می‌دهد.

## ۲ — ۱ تنش و کرنش

مفاهیم تنش و کرنش را می‌توان به طور ساده با مطالعه یک میله منشوری تحت‌کشش بیان نمود. میله منشوری میله‌ایست که در سراسر طولش و یک محور مستقیم دارای سطح مقطع ثابت باشد. در شکل ۱ — ۱ فرض می‌شود که میله در دو انتهایش با نیروهای محوری P بارگذاری شده باشد که در آن ایجاد یک کشش یکنواخت می‌کند. بوسیله یک برش مصنوعی در مقطعی عمود بر محور میله، مثل مقطع mm، می‌توانیم قسمتی از میله را به صورت جسم آزاد جدا کنیم ( شکل ۱ — ۱ b ). در انتهای راست نیروی کششی P وارد شده و در انتهای دیگر نیروهایی وجود دارد که معرف عمل قسمت جدا شده روی قسمت مورد نظر می‌باشد. این نیروها، مشابه توزیع پیوسته فشار هیدروستاتیکی روی یک‌جسم




شکل ۱ — ۱ میله منشوری تحت کشش



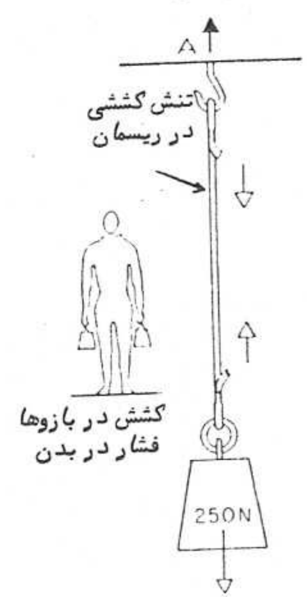
غوطه‌ور، روی سطح مقطع به طور پیوسته توزیع شده‌اند. شدت نیرو، یعنی نیرو در واحد سطح، به نام تنش نامیده می‌شود و معمولاً " با حرف یونانی $\sigma$ نشان داده می‌شود. با فرض اینکه تنش توزیع یکنواختی روی مقطع داشته باشد ( شکل ۱ — ۱ b ) برآیند نیروهای فوق برابر است با حاصل ضرب شدت $\sigma$ و مساحت سطح مقطع میله A. بعلاوه از شرایط تعادل جسم نشان داده شده در شکل ۱ — ۱ b نتیجه می‌شود که برآیند مزبور باید برابر با P باشد. در نتیجه داریم

$$\sigma = \frac{P}{A} \qquad (1-1)$$

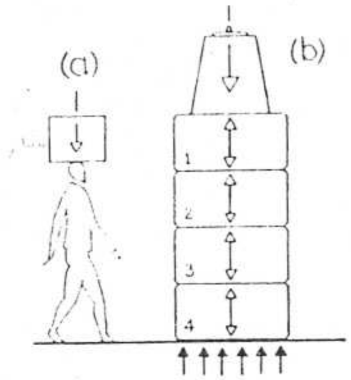
بدین ترتیب معادله تنش یکنواخت در یک میله منشوری بدست می‌آید. این معادله نشان می‌دهد که تنش واحد نیرو بر سطح دارد. در مقاومت مصالح سه سیستم آحاد مورد استفاده می‌باشد. در سیستم انگلیسی نیرو بر حسب پاوند (lb) و سطح برحسب اینچ مربع ($in^2$) اندازه گیری می‌شود، از این رو واحد تنش پاوند در اینچ مربع می‌باشد که با psi نشان داده می‌شود. در سیستم آحاد بین المللی یا SI[1] واحد نیرو نیوتن (N) و واحد سطح متر مربع می‌باشد. واحد تنش در این سیستم نیوتن در متر مربع موسوم به پاسکال (Pa) می‌باشد. چون از لحاظ مقاومت مصالح پاسکال واحد کوچکی است غالباً " مگا پاسکال (MPa) بکار برده می‌شود که معادل نیوتن در میلی مترمربع ($N/mm^2$) می‌باشد. بالاخره سیستم MKS که در آن واحدهای اصلی متر و کیلو گرم نیرو و ثانیه می‌باشند. در این سیستم واحد متداول تنش کیلو گرم بر سانتیمتر مربع ($Kg/cm^2$) است.

موقعی که میله فوق کشیده می‌شود تنش ایجاد شده به نام تنش‌کششی نامیده میشود. اگر جهت نیروها را عوض کنیم میله تحت فشار قرار می‌گیرد و تنش ایجاد شده تنش‌فشاری خوانده می‌شود. در مقاومت مصالح معمولاً " تنش کششی را مثبت و تنش فشاری را منفی فرض می‌کنند. اشکال ۲ — ۱ و ۳ — ۱ به خواننده کمک می‌کنند تا برای تنش‌های کششی و فشاری احساس پیدا کند.

1- Système International.

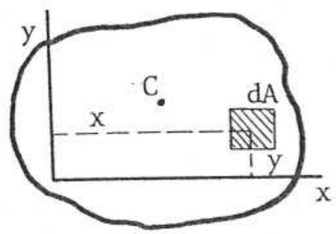



شکل ۲ – ۱




شکل ۳ – ۱

شرط لازم برای درستی معادله 1-1 این است که تنش روی سطح مقطع به طور یکنواخت توزیع شده باشد. این شرط موقعی بر قرار خواهد شد که نیروی محوری P در مرکز سطح مقطع میله وارد شود. این نکته را می‌توان با استفاده از معادلات تعادل تحقیق نمود. در شکل ۴ – ۱ یک شکل اختیاری برای مقطع میله منشوری فرض شده است. مختصات مرکز سطح C از روابط زیر بدست می‌آید:




شکل ۴ – ۱

$$x_c = \frac{\int_A x\, dA}{A} \qquad (1\text{-}2)$$

$$y_c = \frac{\int_A y\, dA}{A} \qquad (1\text{-}3)$$



اگر مختصات نقطه اثر نیروی P را که در امتداد برآیند نیروهای σ می‌باشد با $x_p$ و $y_p$ نشان دهیم از معادلات تعادل روابط زیر نتیجه می‌شود:

لنگر برآیند حول y = لنگر نیروهای σ حول y : $Px_p = \int_A (\sigma\, dA)\, x$ (1-4)

لنگر برآیند حول x = لنگر نیروهای σ حول x : $Py_p = \int_A (\sigma\, dA)\, y$ (1-5)

از این روابط مختصات نقطه اثر نیروی P بدست می‌آید.

$$x_p = \frac{\int_A \sigma x\, dA}{P} \qquad (1\text{-}6)$$

$$y_p = \frac{\int_A \sigma y\, dA}{P} \qquad (1\text{-}7)$$

اگر σ در مقطع ثابت باشد رابطه 1-1 صادق است و با استفاده از این رابطه معادلات 1-6 و 1-7 به معادلات 1-2 و 1-3 منجر می‌شوند، به عبارت دیگر $x_c = x_p$ و $y_c = y_p$ و نیروی P از مرکز سطح مقطع عبور می‌کند.

موقعی که بار P در مرکز سطح مقطع اثر نکند میله تحت خمش خواهد بود و تحلیل مفصل‌تری لازم می‌گردد که بعداً" در این کتاب مورد بحث قرار خواهد گرفت. در سراسر این کتاب فرض می‌شود که نیروهای محوری در مرکز سطح مقطع اثر کنند مگر در مواردی که عکس این مطلب ذکر شده باشد. همچنین بجز در مواردی که صریحاً" ذکر خواهد شد به طور کلی از وزن اجسام (مانند مثال شکل ۱ – ۱) صرف نظر می‌شود.

اضافه طول (یا کاهش طول) یک میله تحت نیروهای محوری را با حرف یونانی δ نشان می‌دهیم (شکل ۱ – ۱). اضافه طول (یا کاهش طول) در واحد طول به نام کرنش خوانده می‌شود که از رابطه زیر بدست می‌آید:

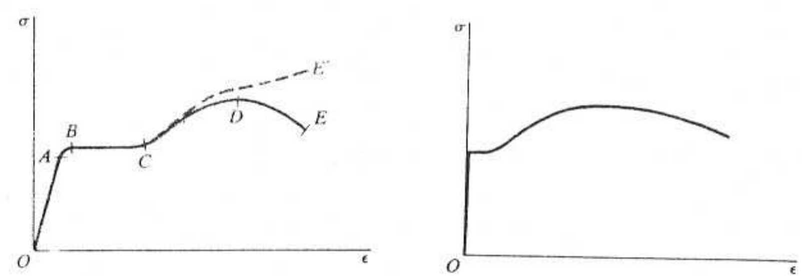
$$\varepsilon = \frac{\delta}{L} \qquad (1\text{-}8)$$

L در این رابطه طول کل میله می‌باشد . کرنش وقتی از رابطه 8-1 با دقت به دست می‌آید که مقدار آن در تمام طول میله یکنواخت باشد . توجه کنید که کرنش یک کمیت بدون بعد است . موقعی که میله تحت کشش است کرنش کششی و موقعی که میله تحت‌فشار است کرنش فشاری می‌باشد . در حالت اخیر مقاطع مجاور هم به یکدیگر نزدیک می‌شوند . در مقاومت مصالح معمولا " کرنش کششی را مثبت و کرنش فشاری را منفی فرض می‌کنند .

## ۳ ـ ۱ آزمایش کشش

رابطه بین تنش و کرنش در یک ماده مورد نظر با آزمایش کشش تعیین می‌شود . نمونه‌ای از ماده مزبور معمولا " به شکل یک میله گرد ( میله با مقطع دایره‌ای ) در داخل ماشین کشش قرار داده می‌شود و تحت کشش قرار می‌گیرد . نیرو و ازدیاد طول میله‌با اضافه کردن تدریجی بار اندازه گیری می‌شود . با تقسیم نیرو بر مساحت سطح مقطع تنش و با تقسیم ازدیاد طول میله بر طول میله کرنش پیدا می‌شود . بدین طریق منحنی کامل تنش ـ کرنش برای ماده مورد نظر بدست می‌آید .

منحنی تنش ـ کرنش برای فولاد سازه‌ای در شکل a ۵ ـ ۱ مشاهده می گردد ( منحنی OABCDE ) . از O تا A تنش و کرنش مستقیما " متناسب می‌باشند و منحنی



(a) (b)

شکل ۵ ـ ۱



خطی است . بعد از A بین تنش و کرنش دیگر رابطه خطی وجود ندارد ، از این جهت نقطه A حد تناسب نامیده می‌شود . تنش حد تناسب برای فولادهای سازه‌ای با کربن کم معمولا " بین $2100 Kg/cm^2$ تا $2500 Kg/cm^2$ می‌باشد ولی برای فولاد های با مقاومت زیاد می‌تواند خیلی بیشتر باشد . با اضافه نمودن بار ، کرنش نسبت به تنش سریع‌تر اضافه می‌شود تا اینکه در نقطه B بدون افزایش قابل ملاحظه نیروی کششی ازدیاد طول قابل ملاحظه‌ای شروع می‌شود . این پدیده به " تسلیم شدن ماده " معروف است و تنش نقطه B به نام تنش تسلیم خوانده می‌شود . در ناحیه BC ماده بصورت خمیری در می‌آید و میله ممکن است به حالت خمیری به مقدار ۱۰ تا ۱۵ برابر حدتناسب افزایش طول پیدا کند . در نقطه C ماده شروع به سخت شدن و در مقابل ازدیاد بار مقاومت می‌کند . این پدیده موسوم به " سخت شوندگی کرنش " می‌باشد . بدین ترتیب همراه‌با افزایش طول بیشتر ، تنش نیز افزایش می‌یابد تا اینکه در نقطه D به یک‌حدنهایی می‌رسد . تنش نقطه D به نام تنش نهایی نامیده می‌شود . بعد از این نقطه افزایش طول میله با کاهش بار همراه می‌باشد که بالاخره در نقطه E به گسیخته‌شدن‌میله‌منجرمیشود .

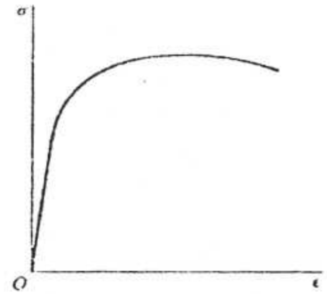
ازدیاد طول میله با انقباض جانبی آن همراه است که منجر به کم شدن‌مساحت‌سطح مقطع میله می‌گردد . این پدیده تا نقطه C اثر محسوسی در روی منحنی تنش ـ کرنش ندارد ولی بعد از نقطه C کاهش مساحت سطح مقطع اثر قابل توجه‌ای در مقدار تنش محاسبه شده خواهد داشت . میله در وسط طولش باریک می‌شود ( شکل ۶ ـ ۱ ) واگر مساحت سطح مقطع واقعی در قسمت باریک شده در محاسبه σ بکار رود منحنی تنش ـ کرنش واقعی بدست می‌آید ( منحنی ´OABCE ) . با وجود اینکه بار کلی که میله تحمل می‌کند پس از تنش نهایی کاهش می‌یابد ( منحنی DE ) ، کاهش مزبور در اثر کم شدن سطح مقطع می‌باشد نه به علت از بین رفتن مقاومت خود ماده . ماده‌درواقع‌افزایش تنش را تحمل می‌کند تا اینکه نمونه پاره شود . برای اکثر کار بردهای‌عملی می‌توان‌منحنی معمول تنش ـ کرنش OABCDE را بر اساس سطح مقطع اولیه نمونه بکار برد .


شکل ۶ ـ ۱ باریک شدن میله در اثر کشش

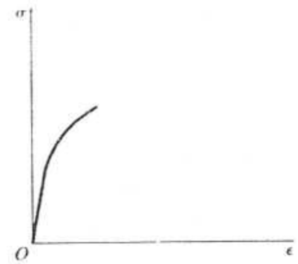
منحنی a ۵ – ۱ برای نشان دادن خصوصیات کلی منحنی تنش ــ کرنش فولاد رسم شده است ولی اندازه‌هایش با واقعیت منطبق نمی‌باشد زیرا همانطور که قبلا" تذکر داده شد کرنش از B تا C ممکن است ۱۵ برابر کرنش از O تا A باشد. همچنیـــن کرنش از C تا E حتی بیشتر از کرنش از B تا C می‌باشد. منحنی تنش ــ کرنش با مقیاس صحیح در شکل b ۵ – ۱ رسم شده‌است. در این شکل کرنش از O تا A درمقابل کرنش A تا E آنقدر کوچک است که قابل دیدن نیست و قسمت خطی منحنی به صورت یک خط عمودی به نظر می‌رسد.

وجود نقطه تسلیم مشخص و کرنش خمیری زیاد به دنبال آن تا حدودی منحصر به فولاد است که امروزه رایج‌ترین فلز سازه‌ای می‌باشد. در آلیاژهای الومینیوم انتقال از قسمت خطی به قسمت غیر خطی به صورت تدریجی تری صورت می‌گیرد ( شکل ۷ – ۱ ). فولاد و بسیاری از آلیاژهای الومینیوم قبل از گسیختگی تغییر شکل زیادی می‌دهند و از این رو به مواد شکل پذیر موسوم می‌باشند. از طرف دیگر موادی که شکننده هستند در کرنش‌های نسبتا" کوچک گسیخته می‌شوند ( شکل ۸ – ۱ ). از مواد شکننده می توان سفال، چدن، بتن، شیشه و بعضی از آلیاژهای فلزی را نام برد.

برای حالت فشار نیز می‌توان منحنی‌هایی شبیه منحنی‌های فوق برای مصالح مختلف بدست آورد و حد تناسب، حد تسلیم و تنش نهایی را برای آنها تعریف کرد. در مورد فولاد مشاهده می‌شود که حد تناسب و تنش تسلیم در کشش و فشار تقریبا" یکسان میباشد.



شکل ۷ – ۱ منحنی نمونه تنش ــ کرنش برای آلیاژهای الومینیوم سازه‌ای



شکل ۸ – ۱ منحنی نمونه تنش ــ کرنش برای یک ماده شکننده



برای اغلب مصالح شکننده تنش‌های مشخصه در فشار خیلی بیشتر از مقادیر نظیر در کشش می‌باشند.

منحنی‌های تنش ــ کرنش در شکل‌های ۵ – ۱، ۷ – ۱ و ۸ – ۱ رفتار مصالح مختلف را در حالت بارگذاری کششی نشان می‌دهند. موقعی که نمونه‌ای از ماده مورد نظر بار ــ برداری می‌شود، یعنی اینکه بار به تدریج کم شده و به صفر رسانده می‌شود، تمام یا قسمتی از اضافه‌طولی که در موقع بارگذاری ایجاد شده است از بین می‌رود. این خاصیت مواد که در اثر آن ماده به شکل اولیه باز می‌گردد به نام خاصیت ارتجاعی خوانده می‌شود. اگر مقدار بارگذاری کم باشد پس از باربرداری میله به طور کامل به حالت اولیه برمی‌گردد، اما اگر مقدار بارگذاری زیاد باشد بطوری که از حد ارتجاعی تجاوز کند میله مقداری تغییر شکل دائمی پیدا خواهد کرد. برای فولاد و بسیاری از فلزات دیگر حد ارتجاعی و حد تناسب تقریبا" منطبق می‌باشند. اما در مواد لاستیک ــ مانند خاصیت ارتجاعی مقدار زیادی پس از حد تناسب ادامه پیدا می‌کند.

در طرح یک سازه لازم است مطمئن شویم که سازه برای وظایف در نظر گرفته‌شده تحت شرایط بهره برداری بطور صحیحی انجام وظیفه می‌کند. معمولا" سازه طوری طرح می‌شود که حداکثر تنش زیر حد تناسب ( یا حد ارتجاعی ) باقی بماند زیرا فقط در این صورت است که هیچ گونه تغییر شکل دائمی در سازه پیدا نخواهد شد. به منظور در نظر گرفتن بارگذاری‌های بیش از اندازه تصادفی یا بی دقتی‌های ممکن در اجرای ساختمان و همچنین برای متغیرهای نا معلوم احتمالی در تحلیل سازه غالبا" ضریب اطمینانی در نظر گرفته می‌شود. بدین ترتیب که تنش حد تناسب بر عددی بزرگتر از واحد به نام ضریب اطمینان تقسیم می‌شود تا تنش مجاز بدست آید و سعی می‌شود که در هیچ نقطه از سازه تنش از تنش مجاز تجاوز نکند. برای مثال در طرح سازه‌های فولادی برای فولادی‌که تنش تسلیم آن $2300 Kg/cm^2$ می‌باشد تنش مجاز $1400 Kg/cm^2$ بکار برده‌میشود. بنابراین ضریب اطمینان مربوطه در مقابل تسلیم 1.64 می‌باشد. برای موادشکل پذیر معمولا" ضریب اطمینان در مقابل تسلیم حساب می‌شود. ولی برای مواد شکننده مانند بتن تنش مجاز در مقابل تنش نهایی حساب می‌شود. به طور کلی در موقع طرح بر اساس تنش‌های مجاز یکی از دو معادله زیر را می‌توان برای تعیین تنش مجاز بکار برد:

$$\sigma_w = \frac{\sigma_y}{n_1} \qquad \text{(برای مواد شکل پذیر)} \qquad (1-9)$$

$$\sigma_w = \frac{\sigma_u}{n_2} \qquad \text{(برای مواد شکننده)} \qquad (1-10)$$

در این روابط $\sigma_y$ و $\sigma_u$ به ترتیب معرف تنش تسلیم و تنش نهایی و $n_1$ و $n_2$ ضرائب اطمینان می‌باشند. تعیین ضریب اطمینان مناسب مسئله پیچیده ایست زیرا بستگی به نوع ماده مورد نظر و همچنین شرایط بهره برداری دارد. ضرائب اطمینان معمولا" به وسیله آیین نامه‌های ساختمانی تعیین می‌گردد.

روش مورد بحث در بالا برای تحلیل سازه‌ها موسوم به " روش تنش‌های مجاز " می‌باشد. روش دیگری برای تحلیل سازه‌ها وجود دارد که موسوم به " روش بار نهایی " است. در این روش تعیین می‌کنند سازه مورد نظر تحت چه باری فرو می‌ریزد. این بار موسوم به بار نهایی می‌باشد. بار مجاز از تقسیم نمودن بار نهایی بر ضریبی بزرگتر از واحد موسوم به ضریب بار بدست می‌آید. در طرح سازه‌های فلزی هر دو روش تنش‌های مجاز و بار نهایی متداول می‌باشند. تعیین بار نهایی برای سازه‌های ساده در فصل سوم مورد بحث قرار خواهد گرفت.

## ۱-۴ انواع مصالح سازه‌ای

مصالح سازه‌ای اصلی عبارتند از آجر، سنگ، چوب، بتن، فولاد و بتن مسلح. در سال‌های اخیر آلیاژهای آلومینیوم برای بعضی از انواع سازه‌ها بکار رفته‌اند. بعضی از پلاستیک‌ها نیز به طور سازه‌ای مورد استفاده قرار گرفته‌اند.

### ۱-۴-۱ آجر

آجر در طول هزاران سال در ساختن ساختمان ها بکار رفته است. مصری‌های باستان آجر را از مخلوط کردن گل و خرده کاه می‌ساختند. کاه باعث تقویت آجر می‌شود و مانع خرد شدن آن در هنگام خشک شدن در آفتاب می‌گردد.

امروزه اکثر آجرها از خاک رس ساخته می‌شوند که با فشار دست یا ماشین در داخل



قالب فشرده می‌گردند. آجر سپس در کوره آجر پزی تا درجه حرارت $1000^{\circ}C$ حرارت داده می‌شود. از آنجایی که انواع مختلف خاک رس یافت می‌شوند انواع زیادی آجر با مقاومت‌های گوناگون وجود دارند.

مقاومت فشاری آجر خیلی بیشتر از مقاومت کششی آن می‌باشد. مقاومت کششی آجر به قدری پایین است که نمی‌توان آن را برای تحمل نیروهای کششی بکار برد. مقاومت فشاری آجر کاری را نمی‌توان با آزمایش مقاومت فشاری یک آجر تنها با دقت بدست آورد زیرا نوع ملاط و کیفیت اجرای کار در روی مقاومت آجر کاری تاثیر می‌گذارد. تنش مجاز فشاری آجر کاری‌های معمولی بین $5Kg/cm^2$ تا $35Kg/cm^2$ می‌باشد.

### ۱-۴-۲ سنگ

استفاده از سنگ در کارهای ساختمانی قدیمی‌تر از آجر می‌باشد. با وجود اینکه امروزه استفاده از سنگ برای حمل بار در ساختن بناها رایج نمی‌باشد در نواحی که سنگ زیاد و ارزان است خانه‌های کوچک را هنوز می‌توان با دیوارهای سنگی ساخت. پایه‌های پل را می‌توان از سنگ ساخت. پایه‌های بسیاری از پل‌های راه آهن قرن نوزدهم در اروپا از سنگ می‌باشند. سنگ مانند آجر شکننده است و دارای مقاومت فشاری زیاد ولی مقاومت کششی ضعیف می‌باشد. مقاومت فشاری سنگ ها بستگی به نوع آنها دارد. برای مثال تنش مجاز فشاری سنگ گرانیت در حدود $50Kg/cm^2$ و تنش مجاز فشاری سنگ آهک مرغوب در حدود $15-20Kg/cm^2$ می‌باشد.

### ۱-۴-۳ چوب

چوب مانند سنگ از زمان‌های باستان به عنوان یک ماده طبیعی برای تحمل بار بکار رفته است. پل‌های اولیه در عرض رودهای کوچک یک لوحه سنگی و یا یک کنده چوب بودند.

چون انواع مختلف چوب وجود دارند ظرفیت باربری آنها متغیر است. بر خلاف آجر و سنگ که دارای بافت دانه‌ای و در نتیجه شکننده می‌باشند، چوب دارای بافت لیفی و رشته‌ای و مقاومت کششی و فشاری خوب می‌باشد. برای هر نوع چوب مقاومت آن برحسب اینکه بار وارده در امتداد رشته‌های چوب و یا عمود بر آن باشد فرق می‌کند. چوب‌های نرم از قبیل چوب سفید، صنوبر و کاج غالبا" بعنوان تیرچه برای پوشاندن سقف خانه‌ها بکار

می‌روند . برای این چوب‌ها تنش‌های مجاز فشاری و کششی در امتداد رشته‌های چوب به ترتیب در حدود $60Kg/cm^2$ و $80Kg/cm^2$ می‌باشد . چوب‌های سخت مانند بلوط قوی تر می‌باشند ولی به علت گرانی کمتر بکار می‌روند . در سال‌های اخیر سازه‌های قوسی و قاب‌های پرتال از چوب‌های ورق ساخته شده‌اند .

## ۴ – ۴ – ۱ بتـن

بتـن از مخلوطی از سیمان ، خرده‌سنگ‌های ریز و درشت و آب ساخته می‌شود که تشکیل ماده سخت سنگ مانندی می‌دهند . خواص مکانیکی بتن بستگی به کیفیت و مقدار این اجزاء در مخلوط دارد . سیمان مورد استفاده معمولا " سیمان پرتلند می‌باشد . خرده سنگ‌های ریز و درشت معمولا " شن و ماسه و سنگ ریزه می‌باشند که نباید به نمک آلوده باشند . در مخلوط بتن لازم است که خرده سنگ‌ها اندازه‌های مختلف داشته باشند تا در هنگام مخلوط شدن ذرات ریز فضاهای خالی بین سنگ‌های درشت‌تر را پر کنند و بتن متراکمی با مقدار اقتصادی سیمان بدست آید . یک نوع متداول بتن مخلوط ۱ : ۲ : ۴ می‌باشد . این بدان معنی است که یک حجم سیمان با دو حجم ماسه و چهار حجم سنگ ریزه مخلوط می‌شود .

مقاومت بتن بستگی به عوامل زیادی دارد . یکی از مهم‌ترین عوامل نسبت آب به سیمان می‌باشد . اگر تمام عوامل یکسان باشد هر چه سیمان بیشتری بکار رود بتن مقاوم تری بدست می‌آید . بعضی از مواقع بتن از گرانیت یا ماسه سنگ خرد شده ساخته می‌شود . با استفاده از سنگ پا یا تفاله کوره ذوب آهن می‌توان بتن سبک وزن ساخت . مقاومت کششی بتن مانند سنگ ضعیف می‌باشد . مقاومت فشاری بتن‌های متداول بین $200Kg/cm^2$ تا $500Kg/cm^2$ است . مقاومت کششی بتن در حدود ۱۰ – ۱۵ % مقاومت فشاری آن است .

## ۵ – ۴ – ۱ فـولاد

ماده اصلی برای تولید انواع مختلف آهن و فولاد سنگ معدن آهن می‌باشد . برای جدا کردن آهن از سنگ معدن باید آن را حرارت داد . فلزات آهنی بطور کلی به سه دسته تقسیم می‌شوند : چدن ، آهن خمیری و فولاد . با وجود اینکه این مواد تقریبا " تماما " از آهن می‌باشند وجود مقادیر کوچکی از عناصر دیگر تاءثیر مهمی در روی خواص آنها دارد . یکی از عناصر مهم در آهن و فولاد کربن می‌باشد . وقتی در صد کربن کم است فلز



نرم و شکل پذیر است و وقتی در صد کربن زیاد است فلز سخت و شکننده می‌باشد .

با وجود اینکه صدها سال است که فولاد ساخته شده است تا نیمه دوم قرن نوزدهم تهیه آن گران بود و فقط به مقادیر کم برای ساختن شمشیر و فنر بکار می‌رفت . در روش‌های جدید تولید فولاد اولین مرحله گرم کردن سنگ معدن در کوره بلند فولاد سازی می‌باشد که از آن آهن لخته بدست می‌آید . آهن لخته در صد زیادی کربن دارد که آن را شکننده می‌سازد و نیز دارای ناخالصی‌های دیگر مانند سیلیسیم ، منگنز ، فسفر و گوگرد می باشد . چدن از ذوب مجدد آهن لخته بدست می‌آید و بر حسب عملیات تصفیه و موادی که به آن اضافه می‌شود انواع مختلف چدن با شکنندگی‌های مختف وجود دارد . آهن خمیری نیز از تصفیه آهن لخته بدست می‌آید ولی عملیات تولید آن دشوار است و تولید انبوه آن مانند فولاد به سهولت امکان ندارد . درجه حرارتی که آهن خمیری در آن تولید می‌شود آنقدر زیاد نیست که فلز را به حالت مذاب نگه دارد . آهن خمیری که از داخل کوره در می‌آید با چکش کاری کردن یا نورد دادن به صورت صفحه ، میله و غیره درآورده می‌شود . بر خلاف چدن که شکننده می‌باشد آهن خمیری بسیار چکش‌خوار است . قرن‌ها است که آهن خمیری برای وسائل تزئینی از قبیل دروازه حیاط و همچنین حلقه‌های زنجیر بکار رفته است .

برای تولید فولاد آهن لخته را با حرارت دادن تصفیه می‌کنند تا ناخالصی‌های آن از قبیل کربن و فسفر و غیره جدا شود . به فلز مایعی که بدین ترتیب به حالت خالص در می‌آید مقادیر دقیق مواد لازم ( از جمله کربن ) اضافه می‌شود تا فولاد با خواص مطلوب بدست آید . فولاد به حالت مایع در قالب ریخته می‌شود تا به صورت شمش در آید . با حرارت دادن مجدد شمش و نورد دادن آن می‌توان فولاد را به صورت صفحه ، میله ، و شکل‌های دیگر در آورد . فولاد مایع را همچنین می‌توان مستقیما " در قالب‌های به شکل معین ریخت تا شکل‌های مطلوب حاصل شوند .

فولاد سازه‌ای که برای تهیه تیر و ستون در ساختمان‌ها و میله‌های بتن مسلح بکار می‌رود مقدار کمی ( در حدود ۰/۲ در صد ) کربن دارد و در نتیجه نرم و شکل‌پذیر می‌باشد . انواع مختلف فولاد سازه‌ای وجود دارد . متداول‌ترین آنها فولاد نرم است که تنش تسلیم آن در حدود $2500\text{-}3000Kg / cm^2$ و تنش نهایی آن در حدود $4500\text{-}5000Kg / cm^2$ می‌باشد . با اضافه نمودن بعضی از مواد مانند مس در موقع تولید فولاد می‌توان مقاومت آن را اضافه نمود . تنش نهایی فولادهای با مقاومت زیاد

$6000\text{-}7000Kg / cm^2$ می باشد . تنش نهایی بعضی از آلیاژ های فولاد به $20000Kg / cm^2$ می‌رسد . تنش‌های مجاز برای اینگونه فولادها بیشتر از مقادیر نظیر برای فولاد نرم معمولی است و در نتیجه می‌توان مقاطع کوچکتری از آنها را بکار برد .

### ۶ – ۴ – ۱ آلیاژهای الومینیوم

رایج ترین منبع الومینیوم سنگ معدنی موسوم به بوکسیت می‌باشد که برای اولین‌بار در سال ۱۸۲۱ در فرانسه پیدا شد . الومینیوم فلز بیش از اندازه نرمی می‌باشد ولی با اضافه نمودن مواد دیگر به آن از قبیل مس، منگنز ، سیلیسیم ، نیکل و روی می‌توان بر مقاومت آن افزود . امروزه‌تولید آلیاژهای الومینیوم که مقاومت کششی در حدود مقاومت کششی فولاد داشته باشند امکان پذیر است . از آنجایی که وزن مخصوص الومینیوم در حدود $\frac{۱}{۳}$ وزن مخصوص فولاد ( $2.75T / m^3$ در مقابل $7.7T/m^3$ ) می‌باشد در مقایسه با فولاد نرم با آلیاژهای الومینیوم می‌توان سازه‌های سبک‌تری‌ساخت . اما الومینیوم دو عیب دارد . اولا" مخارج تولید آن زیاد می‌باشد . ثانیا" ضریب ارتجاعی آن ( به بخش ۵ – ۱ رجوع کنید ) خیلی کمتر از ضریب ارتجاعی فولاد است و این به معنی تغییر شکل بیشتر تحت یک بار معین می‌باشد . چون آلیاژهای الومینیوم نسبت به فولاد تغییر شکل بیشتری می‌دهند بهترین کار برد آنها در سازه‌هایست که تغییر شکل‌های زیاد لزوما" به معنای بکار بردن مصالح بیشتر نمی‌باشد . برای پوشاندن بعضی از سقف‌های با دهانه زیاد ( مثلا" گنبدها ) استفاده از الومینیوم بسیار مناسب می‌باشد .

### ۷ – ۴ – ۱ بتن مسلح

همان طوریکه قبلا" ذکر شد بتن دارای مقاومت فشاری زیاد ولی مقاومت کششی کم می‌باشد . با ترکیب کردن مقاومت فشاری بتن با مقاومت کششی فولاد می‌توان از هر دو مصالح به نحو اقتصادی استفاده نمود . بتن مسلح نسبت به فولاد دارای دو مزیت می‌باشد . یکی اینکه می‌توان آن را در قالب‌های باشکل‌های مختلف ریخت و بدین‌ترتیب می‌توان سازه‌هایی با شکل‌های پیچیده بنا نمود . دیگر اینکه مقاومت بتن مسلح در مقابل آتش از مقاومت فولاد بیشتر است . در هنگام آتش سوزی اسکلت فولادی در مدت کمی ذوب می‌شود و فرو می‌ریزد در حالی که پوشش بتنی در ساختمان‌های بتن مسلح درمقابل آتش مقاوم می‌باشد .



### ۸ – ۴ – ۱ پلاستیک‌ها و مصالح مصنوعی

پلاستیک‌ها و مصالح مصنوعی که در آنها از مواد آلی بعنوان‌چسبنده‌استفاده‌میشود به تدریج در ساختمان‌ها کار برد وسیعی پیدا می‌کنند ولی به علت مخارج نسبتا" زیاد آنها هنوز به عنوان مصالح سازه‌ای مصرف زیادی ندارند . بیشتر پلاستیک‌های سازه‌ای به وسیله شیشه مسلح می‌شوند . رشته‌های شیشه با مقاومت خیلی زیادبرای‌تقویت‌صمغ اپاکسی بکار می‌روند . این نوع پلاستیک‌ها برای ساختن قطعات هواپیما کار برد دارند . رشته‌های شیشه به صمغ‌های اپاکسی ، پولی استر ، پولی وینیل و مواد پلاستیک دیگر مقاومت کششی می‌دهند . این نوع مواد بعنوان غشاء در سقف‌هایی که با فشار هوا کار می‌کنند از قبیل سقف‌های متکی بر هوا یا باد شده ( به مرجع 37 رجوع شود ) بکار می‌روند . بهنظر می‌رسد در سالهای آینده با پیشرفت‌هایی که در زمینه پلاستیک‌ها خواهد شد این مواد به تدریج با مصالح سازه‌ای سنتی قابل رقابت تر خواهند بود .

### ۵ – ۱ خاصیت ارتجاعی خطی و قانون هوک

در منحنی تنش ــ کرنش بیشتر مصالح سازه‌ای یک قسمت اولیه خطی وجود دارد که در آن ماده به صورت ارتجاعی عمل می‌کند ( ناحیه O تا A در منحنی تنش ــ کرنش فولاد در شکل ۱ – ۵ a ) . موقعی که ماده به صورت ارتجاعی عمل می‌کند و رابطه بین تنش و کرنش نیز خطی می‌باشد به آن ماده ارتجاعی خطی می‌گویند . این‌خاصیت‌ازخواص مکانیکی خیلی مهم بسیاری از مصالح جامد شامل اکثر فلزها ، چوب ، بتن ، سفال و پلاستیکها می‌باشد .

رابطه خطی بین تنش و کرنش برای یک میله تحت کشش به صورت معادله ساده زیر بیان می‌شود :

$$\sigma = E\varepsilon \qquad (1\text{-}11)$$

E در این رابطه ضریب تناسب و موسوم به ضریب ارتجاعی ماده‌می‌باشد . ضریب‌ارتجاعی شیب منحنی تنش ــ کرنش در ناحیه ارتجاعی خطی و از خصوصیات مصالح است . ضریب

**جدول ۱ ـ ۱ خواص مکانیکی نمونه مصالح**

( به جز موارد ذکر شده خواص نوشته شده برای حالت کشش می‌باشند )

| مصالح | وزن مخصوص $t/m^3$ | ضریب ارتجاعی $E$ $Kg/cm^2$ | ضریب ارتجاعی برشی $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ $Kg/cm^2$ | تنش تسلیم $\sigma_y$ $Kg/cm^2$ | تنش نهایی $\sigma_u$ $Kg/cm^2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| الومینیوم | ۲/۷۵ | $۰/۷ \times ۱۰^۶$ | ۲۸۰۰۰۰ | ۱۴۰۰ | ۲۱۰۰ |
| آلیاژهای الومینیوم | ۲/۷۵ ـ ۸/۳ | $۰/۷ \times ۱۰^۶$ | ۲۸۰۰۰۰ | ۱۰۵۰ـ۳۵۰۰ | ۱۴۰۰ـ۴۲۰۰ |
| برنج | ۸/۳ | $۰/۹۸ \times ۱۰^۶$ | ۳۸۵۰۰۰ | ۱۰۵۰ـ۴۲۰۰ | ۲۸۰۰ـ۵۲۵۰ |
| برنز | ۸/۳ | $۰/۹۸ \times ۱۰^۶$ | ۳۸۵۰۰۰ | ۷۰۰ ـ ۳۸۵۰ | ۲۱۰۰ـ۴۲۰۰ |
| بتن (فشار) | ۲/۳۵ | $۰/۱۴ - ۰/۲۸ \times ۱۰^۶$ | | | ۱۴۰ ـ ۷۰۰ |
| مس | ۸/۸۵ | $۱/۰۵ \times ۱۰^۶$ | ۴۲۰۰۰۰ | ۷۰۰ ـ ۳۱۵۰ | ۲۱۰۰ـ۴۲۰۰ |
| چدن | ۷/۷۵ | $۱/۰۵ \times ۱۰^۶$ | ۴۲۰۰۰۰ | ۴۲۰ ـ ۲۸۰۰ | ۱۱۲۰ـ۴۲۰۰ |
| منیزیم | ۱/۷۷ | $۰/۴۲ \times ۱۰^۶$ | ۱۶۸۰۰۰ | ۸۴۰ ـ ۱۲۶۰ | ۱۴۰۰ـ۲۱۰۰ |
| فولاد نرم | ۷/۷ | $۲ - ۲/۱ \times ۱۰^۶$ | ۷۷۰۰۰۰ـ۸۴۰۰۰۰ | ۲۱۰۰ـ۴۲۰۰ | ۳۵۰۰ـ۷۰۰۰ |
| فولاد با مقاومت زیاد | ۷/۷ | $۲ - ۲/۱ \times ۱۰^۶$ | ۷۷۰۰۰۰ـ۸۴۰۰۰۰ | ۳۵۰۰ـ۱۱۲۰۰ | ۷۰۰۰ـ۱۹۶۰۰ |
| چوب سازه‌ای ( فشار ) | ۰/۲۸ـ۰/۸۳ | $۰/۰۷ - ۰/۱۴ \times ۱۰^۶$ | | | ۲۸۰ ـ ۷۰۰ |



ارتجاعی برای مصالح مختلف در جدول ۱ ـ ۱ خلاصه شده است. توجه کنید واحد E همان واحد تنش است. برای غالب فلزات ضریب ارتجاعی در کشش وفشاریکسان میباشد. ضریب ارتجاعی بعضی مواقع به ضریب یانگ ( به نام دانشمند انگلیسی، ۱۸۲۹–۱۷۷۳) نیز خوانده می‌شود. معادله 1-11 معمولاً به نام قانون هوک ( یک دانشمند دیگر انگلیسی، ۱۷۰۳ – ۱۶۳۵ ) نامیده می‌شود. هوک برای اولین بار رابطه خطی بین بار و ازدیاد ( یا کاهش ) طول را به طور تجربی بدست آورد.

موقعی که میله‌ای تحت کشش ساده می‌باشد ( شکل a ۱ ـ ۱ ) تنش محوری وکرنش محوری به ترتیب از معادلات 1-1 و 1-8 بدست می‌آیند. هرگاه معادلات مزبور را با قانون هوک ترکیب کنیم معادله زیر برای تغییر طول یک میله تحت کشش یا فشار بدست می‌آید :

$$\delta = \frac{PL}{AE} \qquad (1-12)$$

این معادله نشان می‌دهد که تغییر طول ( ازدیاد طول یا کاهش طول ) میله‌ای از ماده ارتجاعی خطی مستقیماً با بار و طول آن و معکوساً با ضریب ارتجاعی و مساحت سطح مقطع آن متناسب می‌باشد. کمیت AE صلبیت محوری میله نامیده می شود. هر چه صلبیت محوری میله بیشتر باشد میله تحت بار معینی تغییر شکل کمتری خواهد داد.

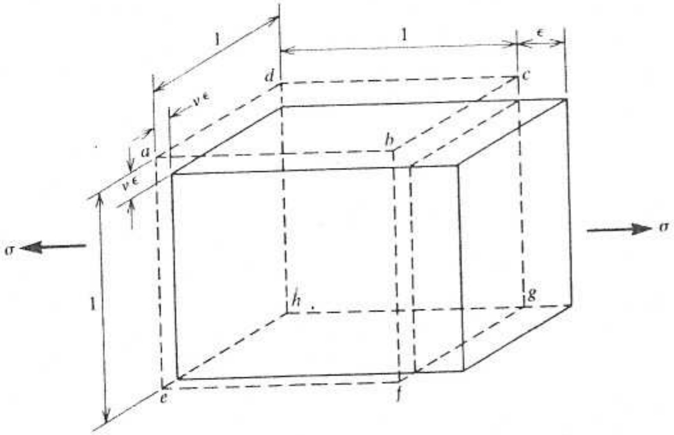
## ۶ ـ ۱ ضریب پواسون

موقعی که میله‌ای تحت کشش می‌باشد اضافه طول محوری آن همراه با انقباض جانبی می‌باشد. به عبارت دیگر با اضافه شدن طول میله عرض آن کاهش می‌یابد. تا زمانی که میله به صورت ارتجاعی عمل میکند نسبت کرنش در جهت عرض به کرنش در جهت طول میله ثابت و به ضریب پواسون (ν) موسوم می‌باشد.

$$\nu = \frac{\text{کرنش جانبی}}{\text{کرنش طولی}} \qquad (1-13)$$

پواسون ریاضی دان فرانسوی ( ۱۸۴۰ — ۱۷۸۱ ) با استفاده از تئوری مولکولی مواد سعی نمود مقدار ضریب مزبور را بدست آورد. برای مواد متجانس ( موادی که خواص ارتجاعی آنها در همه جهات یکسان می‌باشد ) پواسون ضریب مزبور را $\nu = 0.25$ پیدا کرد. آزمایش‌های واقعی در روی فلزات نشان می‌دهد که $\nu$ در واقع بین 0.25 تا 0.35 می باشد.

تغییر حجم یک میله تحت کشش را با دانستن ضریب پواسون و ضریب ارتجاعی ماده میله می‌توان بدست آورد. تغییرات حجم در شکل ۹ — ۱ نشان داده شده است. این شکل جزء کوچکی از ماده را که از میله تحت کشش بریده شده است نشان می‌دهد. شکل اولیه جزء مزبور مکعب abcdefgh می‌باشد که فرض می شود طول اضلاع آن برابر واحد باشد. جهت نیروی محوری در شکل به وسیله تنشهای $\sigma$ نشان داده شده است. اضافه طول مکعب مزبور در جهت بار گذاری $\varepsilon = \sigma / E$ و کاهش طول اضلاع مکعب در دو جهت جانبی $\nu\varepsilon$ می باشد. بنابراین مساحت سطح مقطع مکعب در جهت عمود بر بار به اندازه $(1-\nu\varepsilon)^2 / 1$ کاهش و حجم آن به نسبت $(1+\varepsilon)(1-\nu\varepsilon)^2 / 1$ افزایش یافته است. اگر حاصل ضرب این عبارت بسط داده شود و از جملات توان دوم و سوم $\varepsilon$ که مقادیر بسیار کوچکی می‌باشند صرف نظر شود نسبت مزبور به صورت $(1+\varepsilon-2\nu\varepsilon) / 1$ ساده می‌شود. تغییر حجم مکعب برابر




شکل ۹ — ۱ تغییر حجم مکعبی به اضلاع واحد تحت کشش



با حجم نهایی منهای حجم اولیه آنست. بنابراین

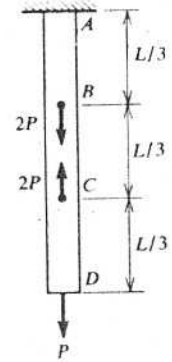
$$\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon(1-2\nu) \qquad (1-14)$$

$\frac{\Delta V}{V}$ در این عبارت معرف نسبت تغییر حجم ( $\Delta V$ ) به حجم اولیه ( $V$ ) میباشد. چون کاهش حجم یک میله تحت کشش نا معقول به نظر می‌رسد از معادله 1-14 می‌توان نتیجه گرفت که $\nu$ باید همواره کمتر از 0.5 باشد. لاستیک و پارافین جامد عملا" تحت کشش تغییر حجمی نمی‌دهند از این رو در این مصالح $\nu$ نزدیک حد 0.5 می‌باشد. از طرف دیگر برای چوب پنبه $\nu$ عملا" صفر می‌باشد. ضریب پواسون بتن در حدود 0.1 و ضریب پواسون فلزات در حدود 0.25-0.35 است.

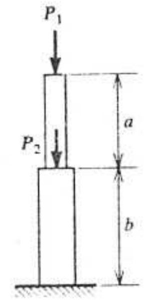
بحث بالا در مورد انقباض جانبی میله تحت کشش را می‌توان برای حالت فشار نیز بکار برد با این تفاوت که فشار طولی با انبساط جانبی همراه می‌باشد. برای کارهای عملی مقدار عددی $\nu$ در کشش و فشار را می‌توان یکسان فرض نمود.

## ۷ — ۱ تغییر طول میله‌های با بار گذاری محوری

در حالات زیادی تغییر طول میله‌ها را می توان از رابطه 1-12 به دست آورد. مثلا" وقتی که بارها نه تنها در انتها بلکه در یک یا چند نقطه در طول میله نیزوارد می‌شوند ( شکل ۱۰ — ۱ ) و یا اینکه سطح مقطع میله به طور ناگهانی تغییر کند می‌توان از رابطه مزبور برای محاسبه تغییر طول میله‌ها استفاده نمود. برای محاسبه تغییر طول میله شکل ۱۰ — ۱ ابتدا نیروی محوری را در هر یک از قسمت‌های میله ( قسمت‌های AB، BC و CD ) تعیین می‌کنیم. سپس تغییر طول ( اضافه طول یا کاهش طول) هر قسمت را حساب می‌کنیم. بالاخره با جمع جبری تغییر طول‌های قسمت‌های مختلف تغییر طول کل میله بدست می‌آید. همین روش را می‌توان در مورد میله شکل ۱۱ — ۱ بکار برد. بدین ترتیب به طورکلی تغییر طول کل میله‌هایی که از چند قسمت با سطح مقطع و بار گذاری‌های مختلف تشکیل شده‌اند از معادله زیر بدست می‌آید :




شکل ۱۰ – ۱



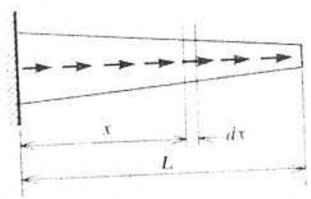

شکل ۱۱ – ۱

$$\rightarrow \quad \delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{P_i L_i}{E_i A_i} \qquad (1\text{-}15)$$

در این رابطه $P_i$ ، $L_i$ ، $E_i$ و $A_i$ به ترتیب نیروی محوری ، طول ، ضریب‌ارتجاعی و مساحت سطح مقطع قسمت $i$ و $n$ تعداد کل قسمت‌ها می‌باشد .

موقعی که نیروی محوری یا مساحت سطح مقطع در طول محور میله به طور پیوسته تغییر می‌کند معادله 1-15 قابل استفاده نمی‌باشد . برای پیدا کردن تغییر طول دراین حالت جزء دیفرانسیلی از میله به طول $dx$ به فاصله $x$ از انتهای چپ میله را در نظر می‌گیریم ( شکل ۱۲ – ۱ ) . این جزءکوچک را از میله جدا می‌کنیم . نیروی محوری $P_x$ در طول جزء کوچک و سطح مقطع آن $A_x$ را باید بر حسب تابعی از $x$ تعیین کنیم . در این صورت معادله اضافه طول جزء مزبور به صورت زیر در می‌آید :

$$d\delta = \frac{P_x\, dx}{E A_x} \qquad (1\text{-}16)$$




شکل ۱۲ – ۱ میله با سطح مقطع ونیروی‌محوری‌متغیر



و اضافه طول کل میله از انتگرال زیر حاصل می‌شود :

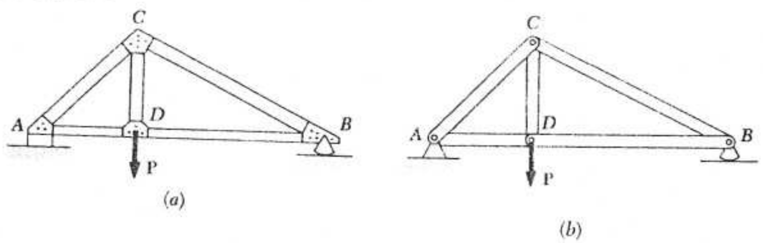
$$\delta = \int_0^L d\delta = \int_0^L \frac{P_x\, dx}{EA_x} \qquad (1\text{-}17)$$

در مواقعی که نتوان جواب انتگرال فوق را به صورت بسته بدست آورد باید از روش های عددی انتگرال گیری استفاده نمود . در صورتی رابطه 1-17 جواب دقیق می‌دهدکه زاویه بین اضلاع میله با مقطع باریک شونده کوچک باشد . به عنوان مثال اگر زاویه بین اضلاع $20°$ باشد حداکثر خطای محاسبه در تنش عمودی $\sigma = P/A$ حدود 3 در صد می‌باشد . برای‌زوایای کوچکتر خطا کمتر است . اگر زاویه بین اضلاع بیشتر باشد روش‌های تحلیل دقیق تری لازم می‌گردد ( مرجع 26 ) .

## ۸ – ۱ خرپاهای ایزواستاتیک

### ۱ – ۸ – ۱ تعریف خرپا

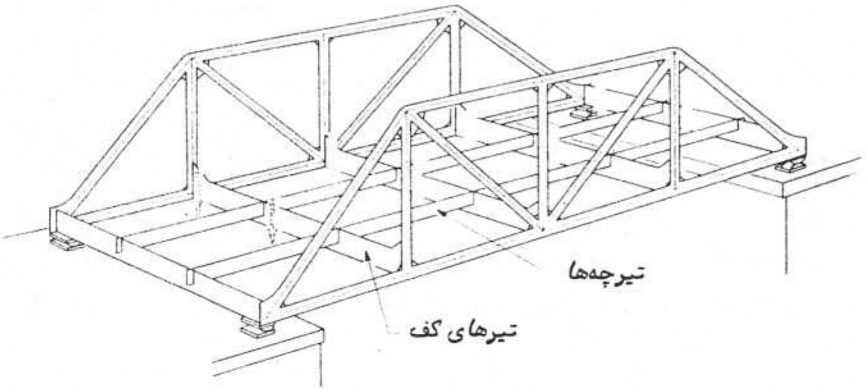
خرپا یکی از انواع اصلی سازه‌های مهندسی است که بخصوص در ساختمان‌هاو پلها کاربرد زیادی دارد . خرپا شامل اعضاء مستقیم می‌باشد که در محل اتصالات به یکدیگر وصل می‌شوند . یک خرپای نمونه در شکل ۱۳a – ۱ مشاهده می‌شود . اعضاء خرپا در انتهاهایشان به یکدیگر متصل می‌شوند و هیچ عضوی در روی اتصال پیوسته نمی‌باشد .




شکل ۱۳ – ۱

برای مثال در شکل a ۱۳ – ۱ AB پیوسته نمی‌باشد بلکه از دو عضو AD و DB تشکیل شده است که در نقطه D به یکدیگر متصل شده‌اند . خر پاها برای بارهای وارد در صفحه آنها طرح می‌شوند از این رو می‌توان آنها را به صورت سازه‌های دو بعدی محاسبه نمود .

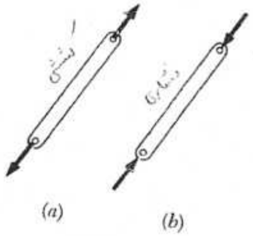
به طور کلی اعضاء خر پا باریک می‌باشند و بار جانبی کمی را می‌توانند تحمل کنند از این‌رو تمام بارها باید در محل اتصالات وارد شوند نه "مستقیما" بر روی اعضاء. موقعی که بار گسترده‌ای باید بوسیله خر پایی حمل شود ( مانند خرپای یک پل در شکل۱۴–۱ ) سیستم کف از تیر و تیرچه تشکیل می‌یابد که بارها را به محل اتصالات منتقل می کنند . همچنین فرض می‌شود وزن اعضاء خر پا در محل اتصالات واردمی‌گرددبدین‌ترتیب که نیمی از وزن هر عضو در هر انتها وارد می‌شود . با وجود اینکه اعضاء در عمل با پرچ یاجوش‌به‌یکدیگرمتصل‌میباشند معمولا " اتصالات اعضاء مفصلی فرض‌می‌شود (شکل b ۱۳–۱) . در نتیجه در هر انتهای هر عضو فقط یک نیرو وجود دارد بدون اینکه لنگری بر آن اثر کند . بدین ترتیب هر عضو به صورت دو نیرویی می‌باشد و نیروها باید در امتداد اعضاء وارد شوند ( شکل ۱۵ – ۱ ) .



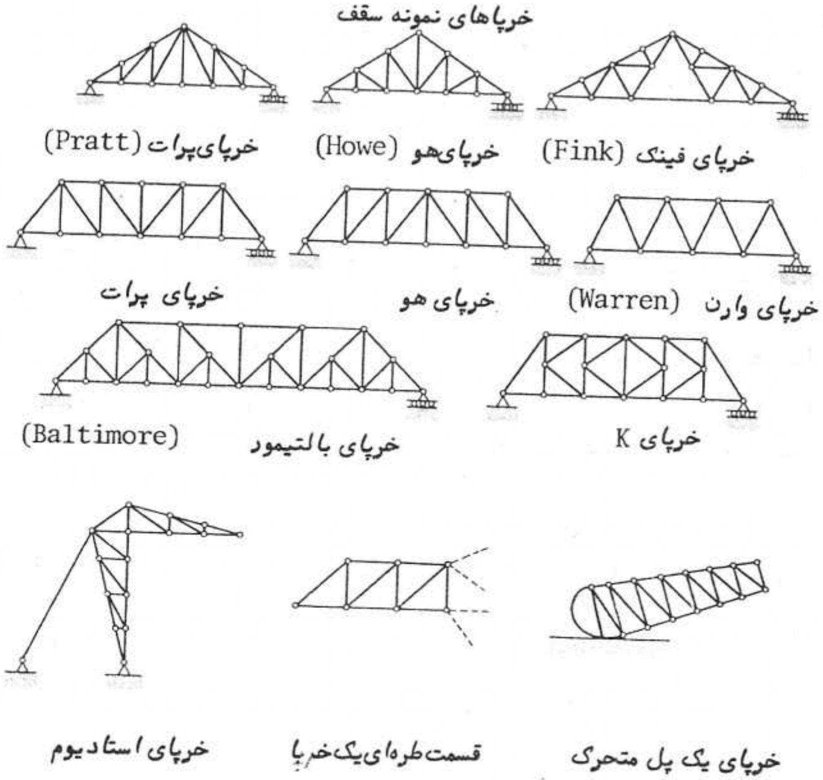

شکل ۱۴ – ۱



در تحلیل‌های دقیق تر خر پاها لنگرهای ایجاد شده در اثر گیر داری اتصالات خر پا به حساب آورده می‌شوند ولی این موضوع خارج از بحث مقاومت مصالح مقدماتی می‌باشد ( مرجع 17 را به بینید ) . شکل ۱۶ – ۱ چند نوع متداول خر پاها را نشان می‌دهد .

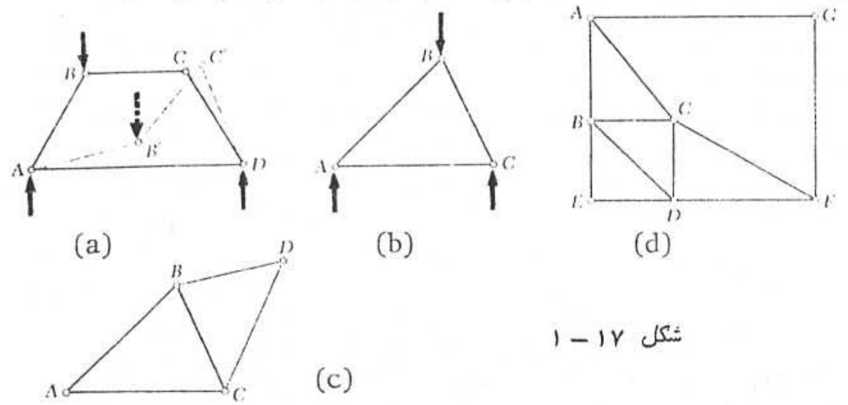



شکل ۱۵ – ۱




شکل ۱۶ – ۱ انواع مختلف خر پاها

خرپای شکل a ۱۷ – ۱ را که از چهار عضو متصل در نقاط A، B، C، Dو بصورت مفصلی تشکیل شده است در نظر بگیرید. اگر باری در نقطه B وارد شود خرپا به مقدار زیادی تغییر شکل داده و شکل اولیه خود را کاملا" از دست می‌دهد. از طرف‌دیگرخرپای شکل b ۱۷ – ۱ که از سه عضو متصل بهم در نقاط A، B و C تشکیل شده است تحت بار وارد در B تغییرشکل مختصری می‌دهد. تنها تغییر شکل ممکن برای این خرپا تغییرات کوچک در طول اعضاء می باشد. خرپای شکل b ۱۷ – ۱ پایدار است ولی خرپای شکل a ۱۷ – ۱ ناپایدار می‌باشد و در اثر بارگذاری فرو خواهد ریخت.




شکل ۱۷ – ۱

همچنانکه در شکل c ۱۷ – ۱ مشاهده می‌شود خرپای پایدار بزرگتری را می‌توان با اضافه نمودن دو عضو BD و CD به‌خرپای مثلثی پایه شکل b ۱۷–۱ بدست‌آورد. این عمل را می‌توان تکرار نمود. خرپایی که بدین صورت بدست می‌آید خرپای ساده نامیده می‌شود. اگر هر بار دو عضو جدید به دو مفصل مختلف متصل کرده و خود آنها را بهم وصل کنیم بطوریکه سه مفصل در یک امتداد نباشند خرپای حاصله یک خرپای‌پایدار خواهد بود.

باید توجه نمود خرپای ساده لازم نیست فقط از مثلث ساخته شود. برای مثال خرپای شکل d ۱۷ – ۱ یک خرپای ساده می باشد. ازطرف‌دیگرخرپاهای پایدار همیشه به صورت خرپای ساده نمی باشند. برای مثال خرپاهای فینک و بالتیمور در شکل ۱۶ – ۱ خرپاهای ساده نمی‌باشند زیرا نمی‌توان آنها را از یک مثلث با روش بالا ساخت. همه خرپاهای دیگر در شکل ۱۶ – ۱ خرپای‌ساده

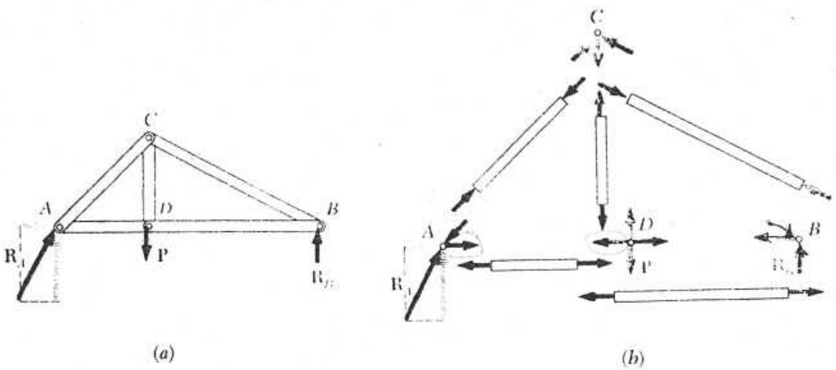


می‌باشند (برای خرپای K مثلث بلندی را با یکی از مثلث‌های میانی شروع کنید).

با مراجعه مجدد به خرپای مثلثی پایه شکل b ۱۷ – ۱ مشاهده می‌شود که این خرپا سه عضو و سه مفصل دارد. خرپای‌شکل c ۱۷ – ۱ دو عضو و یک مفصل‌بیشتردارد و جمعا" پنج عضو و چهار مفصل دارد. بدین ترتیب مشاهده می‌شود که با افزودن هر دو عضو جدید بر تعداد مفصل ها یکی اضافه می‌شود. بنابراین در خرپایی‌که‌تعدادمفصلها n می‌باشد تعداد اعضاء $m = 3+2(n-3)=2n-3$ می‌باشد.

## ۳ – ۸ – ۱ تحلیل خرپاهای ایزواستاتیک با روش مفاصل

منظور از تحلیل یک خرپا (و به طور کلی یک سازه) بدست آوردن نیروها (یا تنش‌ها)ی داخلی و تغییر شکل‌های آن تحت یک بارگذاری معین می‌باشد. هرگاه‌بتوان تمام نیروهای داخلی یک سازه را فقط با استفاده از معادلات تعادل و بدون درنظرگرفتن تغییر شکل‌های آن بدست آورد آن سازه را ایزواستاتیک می‌نامند و در غیر این صورت سازه موسوم به هیپراستاتیک می‌باشد. خرپاهای ساده که در بخش قبل نحوه ساختن‌آنها شرح داده شد ایزواستاتیک می‌باشند. نمودار جسم آزاد خرپای شکل ۱۳ – ۱ در شکل a ۱۸ – ۱ رسم شده است. در شکل b ۱۸ – ۱ نمودار جسم‌آزاد برای مفصل‌هاواعضاء خرپا رسم شده است. در هر مفصل دو معادله تعادل می‌توان نوشت. اگرتعدادمفصل‌های



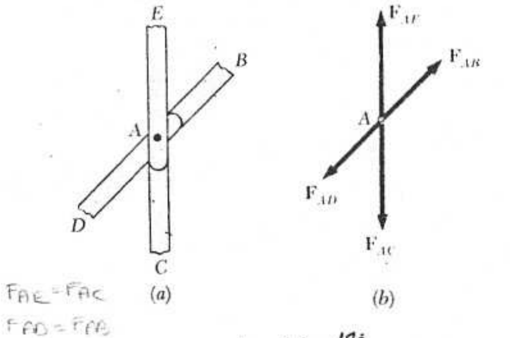

شکل ۱۸ – ۱

خر پا n باشد تعداد معادلات موجود 2n خواهد بود که می‌توان آنها را برای 2n مجهول حل نمود. در مورد خر پاهای ساده رابطه $m=2n-3$ موجود است. بنابراین $2n=m+3$ تعداد مجهولاتی است که می‌توان از نمودارهای جسم آزاد مفصل‌ها بدست آورد. بنابراین با توجه به اینکه تعداد واکنش‌های مجهول خر پا سه می‌باشد با نوشتن 2n معادله تعادل می‌توان تمام نیروهای داخلی اعضاء ( m عدد ) و واکنش های مجهول را بدست آورد. قبل از اینکه به ذکر مثالی بپردازیم لازم است که مفصل های تحت بارگذاری ویژه را بررسی کنیم. نکات :

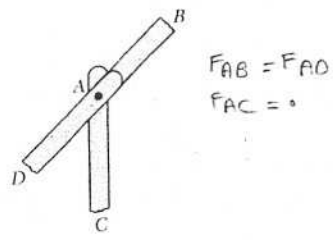
۱ اتصال شکل ۱۹a – ۱ را در نظر بگیرید که در آن چهار عضو که دو بدو در یک امتداد می‌باشند در نقطه A به یکدیگر متصل شده‌اند. نمودار جسم آزاد اتصال مزبور در شکل ۱۹b – ۱رسم شده است. هر گاه تعادل نیروها را در امتداد عمود بر DAB در نظر بگیریم نتیجه می‌شود : $F_{AE}=F_{AC}$ . همین طور اگر تعادل نیروها را در امتداد عمود بر CAE در نظر بگیریم نتیجه می‌شود : $F_{AB}=F_{AD}$ . بنابراین در چنین اتصالاتی عضوهایی که در یک امتداد قرار دارند دارای نیروی یکسان می‌باشند.

۲ حال اتصال شکل ۲۰ – ۱ را در نظر بگیرید. هر گاه در اتصال A نیرویی وارد نشود اتصال مزبور حالت خاصی از اتصال شکل ۱۹ a – ۱ می‌باشد. بنابراین نیروی عضو AC برابر صفر و نیروهای عضوهای AD و AB مساوی می‌باشند.

۳ در شکل ۲۱a – ۱ نیروهای داخلی عضوهای AB و AD که در یک امتداد هستند باید با یکدیگر برابر باشند و در شکل ۲۱b – ۱ نیروهای داخلی عضوهای AB و AD



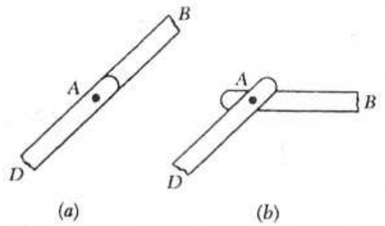

شکل ۱۹ – ۱




شکل ۲۰ – ۱



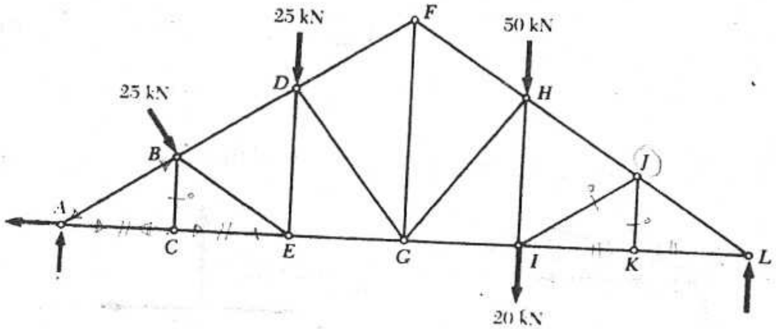
که در یک امتداد نیستند صفر می‌باشد. در موقع حل خر پاها با توجه به مفصل‌های تحت بارگذاری ویژه میتوان اعضاء بدون نیرو (با نیروی داخلی برابر صفر) را در ابتدای کار تعیین نمود. واضح است که اعضاء بدون نیرو اعضاء بی فایده‌ای نیستند. این اعضاء فقط تحت بار – گذاری ( یا بارگذاری‌های ) خاص بدون نیرو می‌باشند و تحت بعضی از بارگذاری‌های دیگر در آنها ممکن است نیرو ایجاد شود. بعلاوه این عضوها معمولاً" برای تحمل وزن خر پا که غالبا" از آن در محاسبات صرف نظر می‌شود لازم می‌باشند.




شکل ۲۱ – ۱

## مثال ۱ – ۱

در خر پای شکل ۲۲ – ۱ عضوهای بدون نیرو را پیدا کنید.

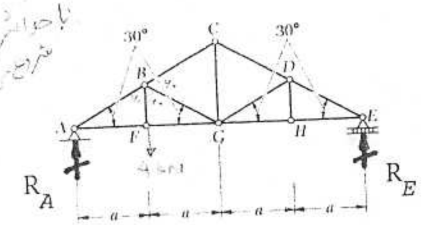



شکل ۲۲ – ۱

**حـل :** پیدا کردن اتصالاتی از خرپا که تحت شرایط بار گذاری ویژه هستند تحلیل خرپاها را آسان می‌کند . از بررسی مفصل C نتیجه می‌شود که عضو BC بدون نیرو می‌باشد . از بررسی مفصل K مشاهده می‌شود که عضو JK بدون نیرو است . بالاخره با در نظر گرفتن تعادل مفصل J نتیجه می‌شود که عضو IJ نیز بدون نیرو می‌باشد .

## مثال ۲ — ۱

نیروهای داخلی خرپای شکل ۲۳ — ۱ را با استفاده از روش مفاصل تعیین کنید .




شکل ۲۳ — ۱

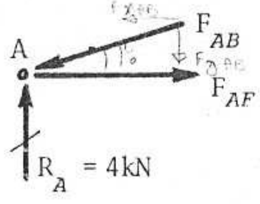
**حـل :** بعلت تقارن کافی است فقط نصف خرپا را در نظر بگیریم . از تعادل خرپا در امتداد قائم واکنش‌های $R_A$ و $R_E$ بدست می‌آیند .

$$R_A = R_E = 4\text{kN}$$

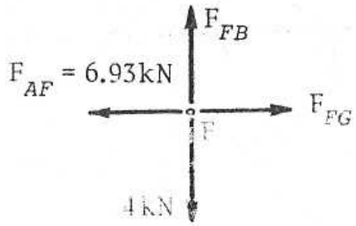
با نوشتن معادلات تعادل اتصال A نیروهای $F_{AB}$ و $F_{AF}$ بدست می‌آیند .

فشاری $\quad +\uparrow\Sigma F_y = 0 \; : \; 4 - F_{AB}\cos 60 = 0 \; : \; F_{AB} = 8\text{kN}$

کششی $\quad \overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0 \; : \; F_{AF} - F_{AB}\cos 30 = 0 \; : \; F_{AF} = 6.93\text{kN}$




نمودار جسم آزاد مفصل A




نمودار جسم آزاد مفصل F



هر گاه جهت نیروی یک عضو به مفصل نزدیک شود آن نیرو فشاری و هر گاه از مفصل دور شود آن نیرو کششی می‌باشد . با نوشتن معادلات تعادل اتصال F نیروهای $F_{FB}$ و $F_{FG}$ بدست می‌آیند .

کششی $\quad \overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0 \; : \; F_{FG} - 6.93 = 0 \; : \; F_{FG} = 6.93\text{kN}$

کششی $\quad +\uparrow\Sigma F_y = 0 \; : \; F_{FB} - 4 = 0 \; : \; F_{FB} = 4\text{kN}$

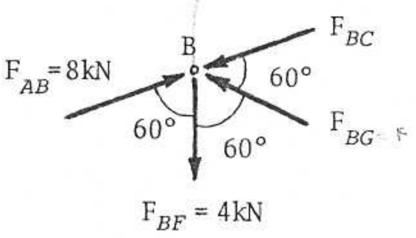
با نوشتن معادلات تعادل اتصال B نیروهای $F_{BC}$ و $F_{BG}$ به دست می‌آیند . از تعادل نیروها در امتداد عمود بر نیروهای $F_{BC}$ و $F_{AB}$ حاصل می‌شود .

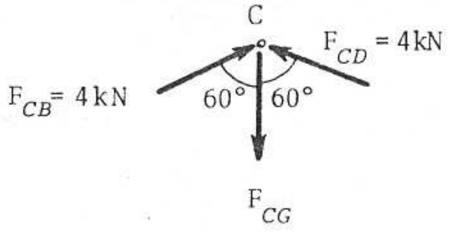
فشاری $\quad F_{BG}\cos 30 - 4\cos 30 = 0 \; : \; F_{BG} = 4\text{kN}$

فشاری $\quad \overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0 \; : \; 8\cos 30 - F_{BC}\cos 30 - F_{BG}\cos 30 = 0 \; : \; F_{BC} = 4\text{kN}$

بالاخره با نوشتن معادلات تعادل اتصال C نیروی $F_{CG}$ بدست می‌آید .

کششی $\quad -\uparrow\Sigma F_y = 0 \; : \; F_{CG} - 4\cos 60 - 4\cos 60 = 0 \; : \; F_{CG} = 4\text{kN}$



بعلت تقارن خر پا و بارگذاری می‌توانیم نیروهای داخلی سایر اعضاء خر پا را بدون محاسبه تعیین کنیم .

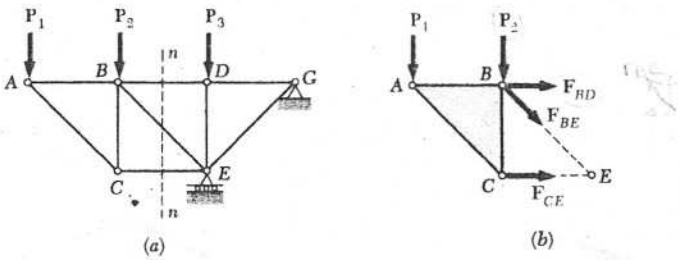
| | | | |
|---|---|---|---|
| کششی | $F_{GH} = 6.93kN$ | فشاری | $F_{GD} = 4kN$ |
| فشاری | $F_{DE} = 8kN$ | کششی | $F_{DH} = 4kN$ |
| کششی | $F_{EH} = 6.93kN$ | | |

در محاسبه خر پاها هر گاه کمیت بدست آمده برای یک نیرو منفی باشد جهت فرض شده برای آن نیرو باید عوض شود .

### ۴ – ۸ – ۱ تحلیل خر پاهای ایزو استاتیک با روش مقاطع

معمولا " روش مفاصل وقتی مفید است که نیروهای داخلی تمام اعضاء خر پا مطلوب باشد . ولی اگر فقط نیروهای داخلی یک یا چند عضو خر پا مطلوب باشد با روش مقاطع می‌توان سریع تر به جواب رسید .

فرض کنیم بخواهیم نیروی داخلی عضو BD خر پای شکل ۲۴ – ۱ را تعیین‌کنیم . در روش مقاطع با مقطعی مانند n-n که عضو BD را قطع می‌کند خر پا را به دوقسمت تقسیم می‌کنیم و نمودار جسم آزاد قسمت ABC خر پا را مطابق شکل ۲۴b – ۱ رسم می‌کنیم . در روی نمودار جسم آزاد مزبور سه مجهول $F_{BD}$ ، $F_{BE}$ و $F_{CE}$ مشاهده می‌شود . چون فقط نیروی داخلی عضو BD مطلوب است با نوشتن معادله تعادل‌لنگری حول نقطه E نیروی $F_{BD}$ مستقیما " بدست می‌آید . توجه کنید در روش مقاطع باید



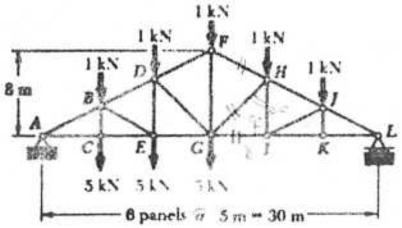

شکل ۲۴ – ۱



سعی شود که هر مقطع بیش از سه عضو را قطع نکند چه در غیراین‌صورت معمولا "نمی‌توان نیروهای داخلی اعضاء بریده شده را فقط با یک مقطع بدست آورد ( زیرا در صفحه فقط سه معادله تعادل موجود می‌باشد که بوسیله آنها می‌توان سه مجهول را پیدا کرد ) .

### مثال ۳ – ۱

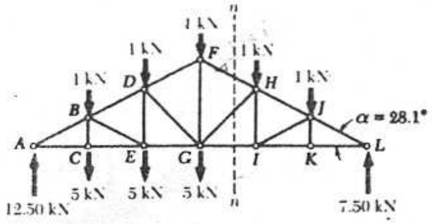
نیروهای عضوهای FH ، GH و GI خر پای شکل ۲۵ – ۱ را بدست آورید .

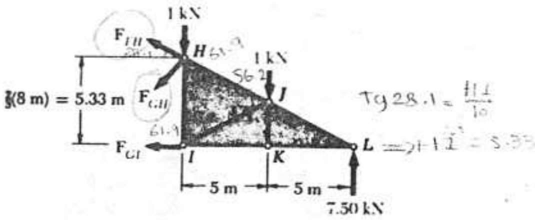



شکل ۲۵ – ۱

حـل : مقطع n-n مطابق شکل زیر از خر پا عبور داده می‌شود . قسمت سمت راست خر پا ( قسمت HLI ) به عنوان جسم آزاد در نظر گرفته می‌شود . ولی واکنش تکیه گاه L ($R_L$) را باید با در نظر گرفتن تعادل لنگری تمام خر پا حول نقطه A بدست آورد .

$$\Sigma M_A = 0 \quad : \quad R_L = 7.50kN$$



۱. از تعادل لنگری قسمت HLI خر پا حول نقطه H کمیت $F_{GI}$ بدست می اید .

$$\curvearrowleft \Sigma M_H = 0 \quad (7.5)(10)-(1)(5)-F_{GI}(5.33)=0 \quad F_{GI}=13.13\text{kN}$$ کششی

۲. نیروی $F_{FH}$ با نوشتن معادله تعادل لنگری حول نقطه G بدست می‌آید . نیروی $F_{FH}$ را در امتداد خط اثرش به نقطه F منتقل و در آنجا به دو موءلفه در امتداد افق و قائم تجزیه می‌کنیم . دراین‌صورت لنگر $F_{FH}$ حول نقطه G برابر $(F_{FH}\cos\alpha)(8)$ می باشد .

$$\curvearrowleft \Sigma M_G = 0$$

انتقال $F_{FH}$ به F

$$(7.5)(15) - (1)(10) - (1)(5) + (F_{FH}\cos\alpha)(8) = 0$$

$$F_{FH} = -13.82\text{kN}$$ فشاری

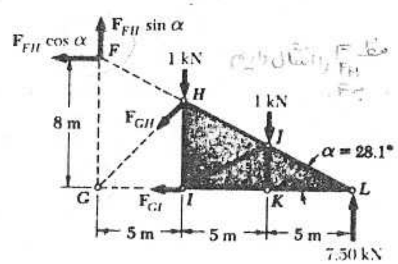
۳. برای تعیین نیروی $F_{GH}$ ابتدا آن را در امتداد اثرش به نقطه G منتقل و در آنجا به دو موءلفه افقی و قائم تجزیه می‌کنیم . از نوشتن معادله تعادل لنگری حول نقطه L نیروی $F_{GH}$ بدست می‌آید .

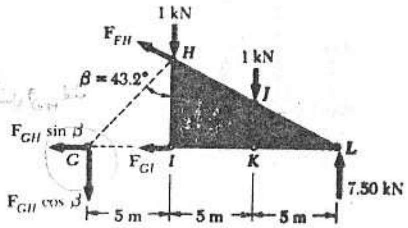
$$\curvearrowleft \Sigma M_L = 0$$

$$(1)(10) + (1)(5) + (F_{GH}\cos\beta)(15) = 0$$

$$F_{GH} = -1.37\text{ kN}$$ فشاری

انتقال $F_{GH}$ به G






## ۵ – ۸ – ۱ خر پاهای مرکب و پایداری خر پاها

دو خر پای ساده ABC و DEF ( شکل ۲۶ – ۱ ) را در نظر بگیرید . اگر دو خر پای مزبور بوسیله سه میله BD ، BE و CE به یکدیگر متصل شوند خرپای‌پایدار شکل ۲۶a – ۱ بدست می‌آید . خر پاهای ABC و DEF را همچنین می‌توان باوصل کردن مفصل‌های B و D به یکدیگر و متصل کردن مفصل‌های C و E با میله CE بـا یکدیگر ترکیب نمود ( شکل ۲۶b – ۱ ) . خر پایی که بدین ترتیب بدست می‌آید به خر پای فینک موسوم است . خر پاهای شکل‌های ۲۶a – ۱ و ۲۶b – ۱ خرپاهای‌ساده نمی‌باشند زیرا نمی‌توان آنها را از یک خر پای مثلثی با اضافه نمودن متوالی عضوها به صورت دو بدو مطابق آنچه که در بخش ۲ – ۸ – ۱ شرح داده شد بدست آورد . اما خر پاهای مزبور خر پاهای پایداری هستند . خر پاهایی که از بهم پیوستن چند خر پای ساده ساخته می‌شوند به خر پاهای مرکب موسوم می‌باشند .

نکته

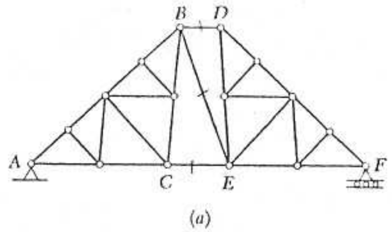
خرپای * 

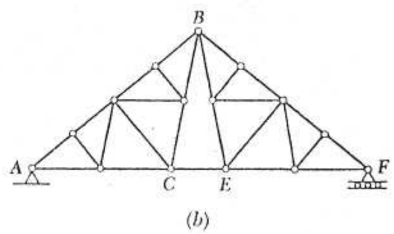
بین تعداد عضوهای یک خر پای مرکب و تعداد مفصل‌های آن همـان رابطـه $m = 2n-3$ بر قرار است . خر پاهای مرکبی که بوسیله یک تکیه گاه مفصلی و یک تکیه گاه غلطکی ( یا بوسیله یک سیستم معادل تکیه گاهها ) تحمل می‌شوند خر پا های ایزو استاتیک می‌باشند و نیروهای داخلی آنها را می‌توان مستقیما" از معادلات تعادل‌به دست آورد .

نکته

حال فرض کنید خر پاهای ABC و DEF بوسیله چهار میله BD ، BE ، CD و CE ( شکل ۲۷ – ۱ ) به یکدیگر متصل شده باشند . تعداد اعضاء m در این صورت‌از $2n - 3$ بزرگتر است . تعداد مجهولات خر پای مزبور از 2n معادله تعـادل مستقل موجود بیشتر می‌باشد و در نتیجه خر پا به طور استاتیکی نا معین و هیپر استاتیک است .

اکنون فرض کنید دو خر پای ساده ABC و DEF مطابق شکل ۲۸ – ۱ فقط در

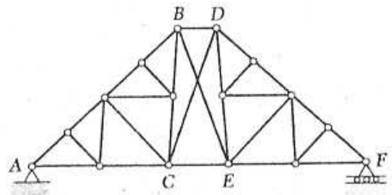



شکل ۲۶ – ۱

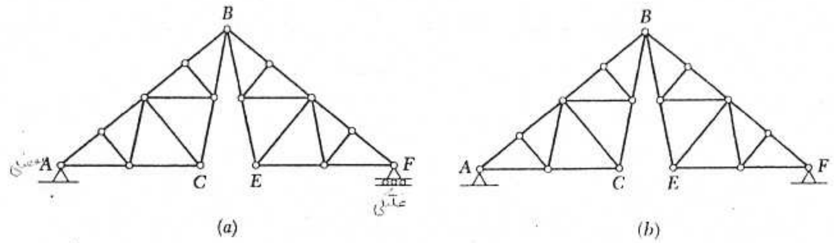
ناپایدار $m+3 < 2n$
پایدار معین استاتیکی (ایزو استاتیک) $m+3 = 2n$
نامعین استاتیکی (هیپر استاتیک) $m+3 > 2n$






شکل ۱ — ۲۷

مفصل B به یکدیگر متصل باشند . در این حالت تعداد اعضاء m کوچکتر از $2n - 3$ می‌باشد . اگر خر پا در نقطه A بوسیله تکیه گاه مفصلی و در نقطه B بوسیله تکیه گاه غلطکی نگهداری شود تعداد کل مجهولات $m + 3$ می‌باشد . این عدد کوچکتر از تعداد $2n$ معادلات تعادل می‌باشد که باید قانع گردند . در نتیجه خر پا نا پایدار است و تحت وزن خودش فرو خواهد ریخت . اما اگر هر دو تکیه گاه مفصلی باشند ( شکل b ۲۸ — ۱ ) خر پا پایدار می‌شود و دیگر فرو نخواهد ریخت . توجه می‌کنیم که درا ین حالت تعداد کل مجهولات $m + 4$ می‌باشد که برابر با تعداد معادلات است . در حالی که شرط مساوی بودن تعداد مجهولات با تعداد معادلات تعادل موجود ( یا بیشتر بودن تعداد مجهولات از تعداد معادلات موجود ) شرط لازم برای پایداری خرپاهاست شرط کافی برای پایداری آنها نمی‌باشد . با متصل کردن دو خر پای ساده به یکدیگر به وسیله سه میله غیر موازی و غیر متقارب یک خر پای پایدار حاصل می‌شود . اما اگرسه میله مزبور موازی و یا متقارب باشند خر پا نا پایدار خواهد بود .




شکل ۱ — ۲۸

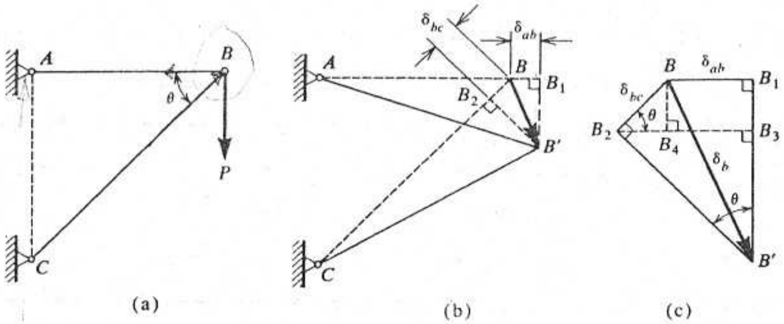


## ۹ — ۱ تغییر شکل خر پاهای ایزو استاتیک

برای تعیین کردن تغییر مکان مفصل‌های خر پاهای ساده ابتدا بایدنیروهای داخلی اعضاء آن را تعیین نمود . سپس با استفاده از رابطه 12 - 1 ازدیاد یا کاهش طول هریک از اعضاء را می‌توان محاسبه نمود . با داشتن تغییر طول اعضاء تغییر مکان مفصل‌های خرپا با استفاده از هندسه بدست می‌آید . برای نشان دادن روش ترسیمی تعیین تغییر شکل خر پاها به ذکر مثالی می‌پردازیم .

### مثال ۴ — ۱

تغییر مکان اتصال B خر پای شکل a ۲۹ — ۱ را بدست آورید .




شکل ۱ — ۲۹

**حل :** نیروهای $F_{AB}$ و $F_{BC}$ در دو عضو خر پا از معادلات تعادل مفصل B بدست می‌آیند .

$$F_{AB} = P \cot \theta \qquad F_{BC} = \frac{P}{\sin \theta}$$

نیروی $F_{AB}$ کششی و نیروی $F_{BC}$ فشاری می‌باشد . تغییر طول میله‌ها عبارتند از

$$\delta_{ab} = \frac{PL_{ab} \cot\theta}{EA_{ab}}$$ ( ازدیاد طول )

$$\delta_{bc} = \frac{PL_{bc}}{EA_{bc} \sin\theta}$$ ( کاهش طول )

* تغییرمکان مفصل B:

برای پیدا کردن تغییر مکان اتصال B ابتدا فرض می‌کنیم میله AB به اندازه $\delta_{ab}$ اضافه‌طول‌پیدا کندبه‌طوریکه‌انتهایش‌به نقطه $B_1$ منتقل شود ( شکل b ۲۹–۱) . سپس‌قوسی‌به مرکز A و شعاع $AB_1$ رسم می‌کنیم . چون تغییر مکان نقطه B خیلی‌کوچک است قوس مزبور را می‌توان با خطی که در $B_1$ بر امتداد AB عمود باشد جایگـــزین نمود . همین طور فرض می‌شود که عضو BC به اندازه $\delta_{bc}$ کاهش طول پیدا کند به طوریکه انتهایش به نقطه $B_2$ منتقل شود . سپس قوسی به مرکز C و شعاع $CB_2$ رسم می‌کنیم . این قوس نیز با خطی که در $B_2$ بر امتداد AB عمود باشد جایگزین می‌گردد . دو خط عمود یکدیگر را در نقطه ´B قطع می‌کنند که محل نهایی اتصال B خر پا است . بدین ترتیب بردار $\overrightarrow{BB'}$ معرف تغییر مکان $\delta_b$ اتصال B خر پا می‌باشد .

نمودار تغییر مکان شکل b ۲۹ – ۱ با مقیاس بزرگتری در شکل c ۲۹ – ۱ رسم شده است . از این شکل نتیجه می‌شود که مؤلفه افقی $\delta_b$ برابر $\delta_{ab}$ می‌باشدو مؤلفه قائم‌آن‌از دو قسمت $B_1B_3$ و $B_3B'$ تشکیل شده است . فاصله $B_1B_3$ که‌همان فاصله $BB_4$ است برابر با $\delta_{bc}\sin\theta$ می‌باشد . طول $B_3B'$ را می‌توان از مثلث $B_2B_3B'$ که ضلع $B_2B_3$ آن برابر $\delta_{bc}\cos\theta + \delta_{ab}$ می‌باشد به دست آورد بدین ترتیب مؤلفه قائم تغییر مکان $\delta_b$ مساوی می‌شود با

$$B_1B' = \delta_{bc}\sin\theta + ( \delta_{bc}\cos\theta + \delta_{ab})\cot\theta = \frac{\delta_{bc}}{\sin\theta} + \delta_{ab}\cot\theta$$

با داشتن مؤلفه‌های افقی و قائم تغییر مکان اتصال B تغییر مکان $\delta_b$ این اتصـال به سهولت بدست می‌آید .

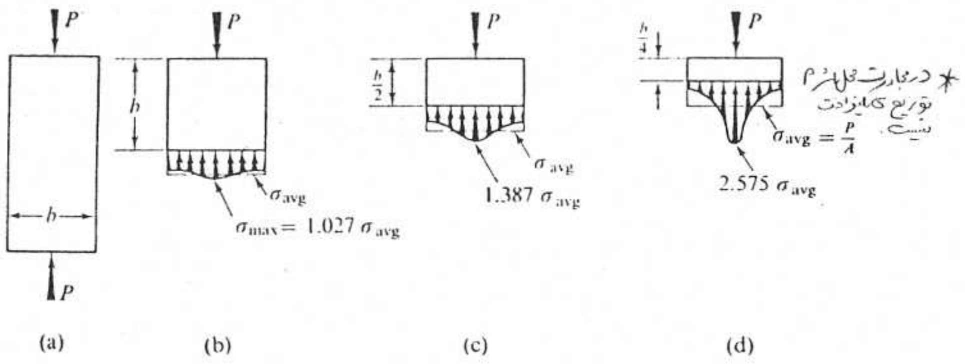
$$\delta_b = \sqrt{(\overline{BB_1})^2 + (\overline{B_1B'})^2}$$



نمودارهای تغییر مکان از نوع نمودار شکل c ۲۹ – ۱ وسیله مهمی برای تعیین تغییر شکل خرپاها می‌باشند . این نمودارها به نام ویلیو[1] مهندس فرانســوی خوانده می شوند .

## ۱۰ – ۱ تمرکز تنش

معادله 1-1 که در مقاومت مصالح برای تعیین تنش در میله‌های با بار گذاری محوری بکار می‌رود در مجاورت محل اثر بار وارده جواب دقیق نمی‌دهد . توزیع تنش در مجاورت محل اثر بار را می‌توان به کمک تئوری ارتجاعی بدست آورد ( مرجع 26 ) . در شکل a ۳۰ – ۱ بلوک کوتاهی تحت اثر بارهای محوری متمرکز P می‌باشد . توزیع تنش در عرض بلوک در مجاورت دو انتهای بلوک در شکل‌های b ۳۰ – ۱ ، c ۳۰ – ۱ و d ۳۰ – ۱ رسم شده است . چنانکه مشاهده می‌شود در مجاورت محل اثر بار متمرکزتوزیع تنش در عرض بلوک یکنواخت نمی‌باشد ولی هر چه از انتهای بلوک دور شویم توزیع تنش به توزیع یکنواخت نزدیک‌تر می‌گردد . در شکل ۳۰ – ۱ کمیت P/A تنش متـوسط یا $\sigma_{avg}$ می‌باشد .




شکل ۳۰ – ۱

1- Williot.

نتیجه: * در زیر بارهای متمرکز، همواره تنش متمرکز می‌گردد. ← تنش بیشتر از تنش متوسط است.



بنابراین در نزدیکی بار P ( شکل ۱ــ۳۰d ) تنش حداکثر در مقطع خیلی بیشتر از تنش متوسط می‌باشد . این پدیده به " تمرکز تنش " موسوم است . به طور کلی در زیر بارهای متمرکز همواره تنش متمرکز می‌گردد . اما اگر از دو انتهای بلوک دور شویم توزیع تنش تقریباً " یکنواخت بوده و مقدار آن را با تقریب خوب می‌توان از معادله 1-1 بدست آورد .

## ۱ــ۱۱ مسائل حل شده

### مسئله ۱ــ۱

سیم درازی به طور قائم تحت وزن خودش آویزان است . بیشترین طولی که سیم بدون پاره شدن می‌تواند داشته باشد چقدر است اگر :

الف ــ جنس سیم فولاد با تنش نهائی $21000Kg / cm^2$ باشد .

ب ــ جنس سیم الومینیوم با تنش نهائی $3500Kg / cm2$ باشد .

وزن مخصوص: وزن واحد حجم فولاد $7.86g/cm^3$ و وزن واحد حجم الومینیوم $2.72g/cm^3$ می‌باشد .

$\gamma = \frac{W}{\forall}$

حــل : هرگاه سیمی به طول L ، وزن مخصوص γ ، سطح مقطع A و وزن W تحت وزن خودش آویزان باشد بیشترین تنش در آن در انتهای فوقانی آن خواهد بودکه برابر است با

$$\sigma_{max} = \frac{W}{A} = \frac{\gamma AL}{A} = \gamma L$$

اگر تنش نهایی فلز سیم $\sigma_u$ باشد ماکزیمم طول سیم بدون اینکه پاره شود از رابطه زیر بدست می‌آید :

$$L_{max} = \frac{\sigma_u}{\gamma}$$



برای سیم فولادی :

$$L_{max} = \frac{21000 \times 1000}{7.86 \times 100} = 26717 \text{ m}$$

برای سیم الومینیومی :

$$L_{max} = \frac{3500 \times 1000}{2.72 \times 100} = 12868 \text{ m}$$

### مسئله ۲ــ۱

در میله‌توپری‌با مقطع دایره و به قطر d=3.8 cm سوراخ‌کوچکی مطابق‌شکل ۱ــ۳۱ در مرکز آن وجود دارد . قطر سوراخ $\frac{d}{4}$ می‌باشد . با فرض اینکه تنش مجاز کششی روی سطح مقطع خالص‌میله در جایی که سوراخ وجود دارد $\sigma_w = 700Kg / cm^2$ باشدحداکثر بار کششی مجاز P را که میله می‌تواند تحمل کند تعیین کنید .

حــل : مساحت سطح یک قطعه دایره به شعاع R که زاویه مقابل آن θ باشد از رابطه زیر بدست می‌آید :

$$A_s = \frac{1}{2} R^2 ( \theta - \sin\theta )$$

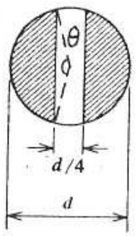
با توجه به شکل می‌توانیم زاویه θ را به صورت زیر محاسبه کنیم :

$$\cos\frac{\theta}{2} = \frac{\frac{d}{8}}{\frac{d}{2}} = 0.25 \qquad : \theta = 2.636 \text{ rad}$$

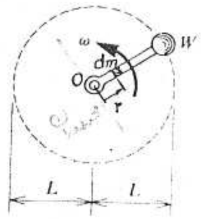
$$A = 2A_s = \frac{d^2}{4} ( \theta - \sin\theta ) = \frac{3.8^2}{4} (2.636-0.484)$$

$$= 7.77cm^2$$

$$P_w = A\sigma_w = 7.77(700) = 5439Kg$$




شکل ۳۱ – ۱




شکل ۳۲ – ۱

## مسئله ۳ – ۱

میله‌ای به طول L با سرعت زاویه‌ای ω در یک صفحه افقی حول یک محور قائم دوران می‌کند. میله دارای سطح مقطع A و وزن $W_1$ می‌باشد. وزنه‌ای به وزن W به انتهای میله متصل شده است. ازدیاد طول کل میله را در اثر نیروهای گریز از مرکز پیدا کنید. ضریب ارتجاعی میله را E فرض کنید( شکل ۳۲ – ۱ ).

حل : فرض می‌کنیم $\delta_1$ ازدیاد طول میله در اثر نیروی گریز از مرکز وارد بروزنه W و $\delta_2$ ازدیاد طول میله در اثر نیروی گریز از مرکز وارد بر خود میله باشد. در این صورت ازدیاد طول کل میله در اثر نیروهای گریز از مرکز برابر خواهد بود با

$$\boxed{\delta = \delta_1 + \delta_2}$$

نیروی گریز ازمرکز وارد بر وزنه W از رابطه زیر بدست می‌آید ( g شتاب‌ثقل‌میباشد ):

$$F = \frac{W}{g} L\,\omega^2$$

بنابراین

$$\delta_1 = \frac{FL}{AE} = \frac{W\omega^2L^2}{gAE}$$



نیروی گریز از مرکز وارد بر جرم dm میله که در فاصله r از محور دوران قرار دارد برابر است با

$$dF = dm\, r\,\omega^2$$

ازدیاد طول میله در اثر این نیروی جزئی مساوی است با

$$d\delta_2 = \frac{dF\, r}{AE}$$

در نتیجه تغییر مکان $\delta_2$ از انتگرال زیر بدست می‌آید : (وزن مخصوص میله = γ )

$$dm = \frac{\gamma A\,dr}{g}$$

$$\delta_2 = \int_0^L \frac{r\,dF}{AE} = \frac{\omega^2}{AE}\int_0^L r^2\,dm = \frac{\omega^2}{AE}\int_0^L \frac{r^2}{g}\gamma A\,dr$$

تا برحسب dr بشود

$$= \frac{\omega^2\gamma A L^3}{3g\,AE}$$

$\delta_2$ را بر حسب وزن میله $W_1=\gamma AL$ می‌نویسیم.

$$\delta_2 = \frac{\omega^2L^2W_1}{3g\,AE}$$

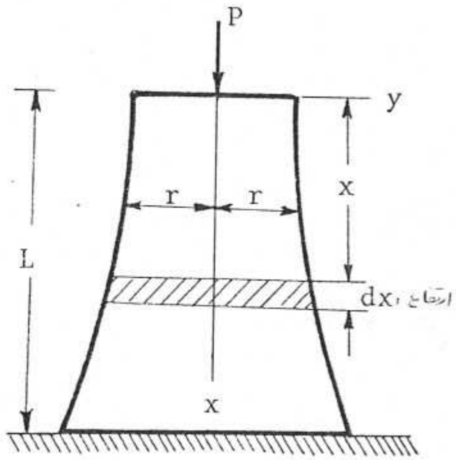
$$\delta = \frac{\omega^2L^2}{3gAE}\,(W_1 + 3W)$$

## مسئله ۴ – ۱

معادله‌ای برای شعاع r ستونی با مقطع دایره بدست آورید به طوریکه حجم آن حداقل باشد. ستون تحت اثر بار P در بالا و همچنین وزن خود می‌باشد. ستون از ماده‌ای با وزن واحد حجم $\gamma$ و تنش مجاز فشاری $\sigma_w$ تشکیل شده است. مساحت سطح مقطع ستون در بالا و پایین و حجم ستون را نیز حساب کنید ( شکل ۳۳ – ۱ ).

**حل :** قسمتی از ستون به ارتفاع dx را که به فاصله x از انتهای فوقانی ستون قرار دارد در نظر می‌گیریم. حجم ستون موقعی حداقل خواهد بود که از مصالح حداکثر استفاده بشود به عبارت دیگر تنش در همه مقاطع باید یکسان و برابر تنش مجاز $\sigma_w$ باشد. در این صورت اختلاف dA بین مساحت سطح مقطع پایین و بالای ستون به ارتفاع dx باید چنان باشد که اختلاف نیروی فشاری از بالا تا پایین جزء ستون را که خود برابر با وزن جزء است جبران کند.

$$\sigma_w \, dA = \gamma A dx$$




شکل ۳۳ – ۱



در این رابطه A سطح مقطع ستون در فاصله x از انتهای فوقانی ستون می‌باشد. از حل معادله دیفرانسیل فوق A بدست می‌آید.

$$\frac{dA}{A} = \frac{\gamma}{\sigma_w} dx$$

$$\text{Ln } A = \frac{\gamma}{\sigma_w} x + C \qquad (1)$$

ثابت انتگرال گیری C از شرط حدی در انتهای فوقانی ستون محاسبه می‌شود. دربالای ستون سطح لازم برابر است با

$$A_t = \frac{P}{\sigma_w} \qquad (\text{در } x = 0)$$

بنابراین $C = \text{Ln}\frac{P}{\sigma_w}$ بدست می‌آید که آن را در معادله (1) قرار می‌دهیم.

$$\text{Ln}A = \frac{\gamma}{\sigma_w} x + \text{Ln}\frac{P}{\sigma_w} \qquad \text{Ln}\frac{\sigma_w}{P} A = \frac{\gamma}{\sigma_w} x$$

$$\frac{\sigma_w}{P} A = e^{\frac{\gamma}{\sigma_w} x} \quad : \quad A = \frac{P}{\sigma_w} e^{\frac{\gamma}{\sigma_w} x} \qquad (2)$$

$$\pi r^2 = \frac{P}{\sigma_w} e^{\frac{\gamma x}{\sigma_w}} \quad : \quad r = \left(\frac{P}{\pi \sigma_w} e^{\frac{\gamma}{\sigma_w} x}\right)^{\frac{1}{2}}$$

شعاع :

حال از معادله (2) می‌توانیم مساحت سطح مقطع ستون در پایین ستون را حساب‌کنیم . کافی است در این معادله به جای $x$ مقدار $L$ طول ستون را قرار دهیم .

$$A_b = \frac{P}{\sigma_w} e^{\frac{\gamma L}{\sigma_w}}$$

حجم ستون به صورت زیر حساب می‌شود :

$$V = \int_0^L \underbrace{\pi r^2}_{A} dx = \frac{P}{\sigma_w} \int_0^L e^{\frac{\gamma}{\sigma_w} x} dx = \frac{P}{\sigma_w} \frac{\sigma_w}{\gamma} e^{\frac{\gamma}{\sigma_w} x} \Big|_0^L$$

$\int A\,dx$

$$V = \frac{P}{\gamma} \left( e^{\frac{\gamma L}{\sigma_w}} - 1 \right)$$

**مسئله ۵ــ ۱**

نکته ۳۷: برای آنکه وزن حداقل باشد باید V را بدست آوریم و مشتق را صفر قرار دهیم.

خر پای شکل ۳۴ــ۱ از دو عضو AB و BC تشکیل شده است که طول عضو AB آن برابر L و ثابت می‌باشد . این خر پا بار قائم P را در اتصال B باید حمل کند . تکیه گاه C را می‌توان در امتداد قائم حرکت و زاویه θ را تغییر داد . با فرض اینکه تنشهای مجاز فشاری و کششی مصالح مصرفی در خر پا یکسان باشند زاویه θ را چنان تعیین کنید که وزن خر پای مزبور حداقل باشد .

**حل :** از نوشتن معادلات تعادل مفصل B نیروی $F_{AB}$ در عضو AB ونیروی $F_{CB}$ در عضو CB بدست می‌آیند .

وزن حداقل ← حجم حداقل



$$+\uparrow \Sigma F_y = 0 \qquad F_{CB} \sin\theta = P \quad : \quad F_{CB} = \frac{P}{\sin\theta}$$

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0 \qquad F_{CB} \cos\theta - F_{AB} = 0 \quad : \quad F_{AB} = P\cot\theta$$

سطح مقطع لازم هر یک از میله‌ها با تقسیم نمودن نیرو در میله بر تنش مجاز $\sigma_w$ بدست می آید .

سطح مقطع لازم برای میله AB :

$$A_{AB} = \frac{F_{AB}}{\sigma_w} = \frac{P\cot\theta}{\sigma_w}$$

سطح مقطع لازم برای میله CB :

$$A_{CB} = \frac{F_{CB}}{\sigma_w} = \frac{P}{\sigma_w \sin\theta}$$

حجم خر پا :

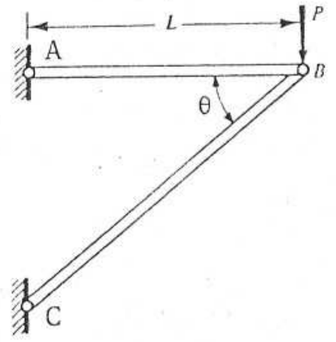
$$V = L A_{AB} + \frac{L}{\cos\theta} A_{CB} = \frac{PL}{\sigma_w} \left( \cot\theta + \frac{1}{\sin\theta\cos\theta} \right)$$

$\boxed{\text{وزن خر پا وقتی حداقل می‌باشد که حجم آن حداقل باشد .}}$

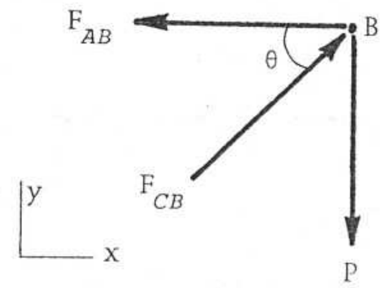
$$\frac{dV}{d\theta} = 0 \quad : \quad -\frac{1}{\sin^2\theta} - \frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{\sin^2\theta \cos^2\theta} = 0$$

$$-\cos^2\theta - \cos^2\theta + \sin^2\theta = 0 \qquad : \qquad \cos^2\theta = \frac{1}{3} , \quad \theta = 55^\circ$$

پس بنابراین هر وقت V را داشتیم و مشتق نسبت به θ گرفتیم و صفر قرار دادیم.




شکل ۱ – ۳۴




نمودار جسم آزاد مفصل B

مسئله ۱ – ۶

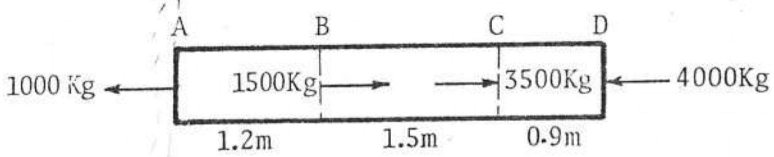
یک میله الومینیومی با سطح مقطع $1.6\ cm^2$ بارهای محوری نشان داده شده در شکل ۳۵ – ۱ را حمل می‌کند . اگر ضریب ارتجاعی الومینیوم $E = 700000\ Kg/cm^2$ باشد تغییر شکل کل میله را تعیین کنید .

حـل : تغییر شکل میله از رابطه زیر بدست می‌آید :

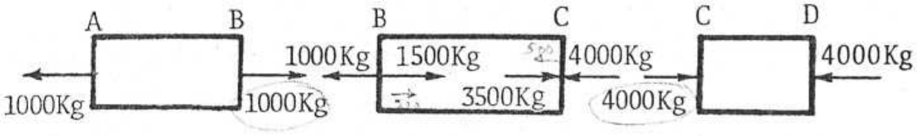
$$\delta = \sum_{i=1}^{3} \frac{P_i L_i}{A_i E_i} = \frac{1}{AE} \sum_{i=1}^{3} P_i L_i$$

برای تعیین نیروهای محوری در قسمت‌های AB ، BC و CD نمودارهای جسم آزاد را برای این ۳ قسمت رسم می‌کنیم .






شکل ۳۵ – ۱




نمودار جسم آزاد AB　　نمودار جسم آزاد BC　　نمودار جسم آزاد CD

| قسمت | $P_i$ Kg | $L_i$ m | $P_iL_i$ Kg m |
|---|---|---|---|
| AB | ۱۰۰۰ | ۱/۲ | ۱۲۰۰ |
| BC | –۵۰۰ | ۱/۵ | –۷۵۰ |
| CD | –۴۰۰۰ | ۰/۹ | –۳۶۰۰ |
| مجموع | | | –۳۱۵۰ |

$$\delta = \frac{1}{EA} \sum_{i=1}^{3} P_i L_i = \frac{(-3150)(100)}{(700000)(1.6)} = -0.28\ cm$$ ( کاهش طول )

## مسئله ۷ – ۱

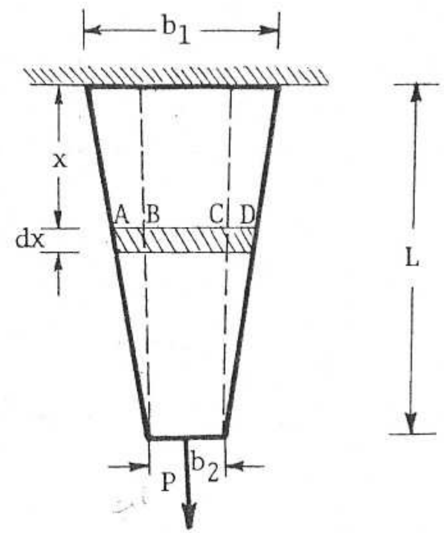
یک میله غیر منشوری با مقطع مستطیل و ضخامت ثابت t که عرض آن به طور خطی از مقدار $b_1$ در تکیه گاه تا مقدار $b_2$ در انتهای آزاد آن تغییر می‌کند بار P را تحمل می‌نماید. رابطه‌ای برای ازدیاد طول میله تحت بار P بدست آورید (شکل ۳۶–۱).

**حل:** ازدیاد طول قسمتی از میله به طول dx که به فاصله x از انتهای فوقانی قرار دارد از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$d\delta = \frac{P_x\,dx}{EA_x}$$

در این رابطه $A_x$ سطح مقطع میله در فاصله x از تکیه گاه و $P_x$ نیروی محوری در قسمت مورد نظر می‌باشد. بنابراین ازدیاد طول کل میله از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\delta = \int_0^L \frac{P_x\,dx}{EA_x}$$




شکل ۳۶ – ۱



$P_x$ در تمام طول میله ثابت و برابر P می‌باشد (از وزن میله صرف نظر می‌شود).

$$A_x = (\overline{AD})\,t = (2\overline{AB} + \overline{BC})\,t = (2\,\overline{AB} + b_2)\,t$$

$$\frac{\overline{AB}}{\frac{b_1 - b_2}{2}} = \frac{L - x}{L} \quad : \quad \overline{AB} = \frac{b_1 - b_2}{2L}(L - x)$$

$$A_x = \left[\frac{b_1 - b_2}{L}(L - x) + b_2\right]t = t\left[b_1 - \frac{b_1 - b_2}{L}x\right]$$

$$\delta = \frac{P}{Et}\int_0^L \frac{dx}{b_1 - \frac{b_1 - b_2}{L}x} = \frac{P}{Et}\left(-\frac{L}{b_1 - b_2}\right)\left[Ln\left(b_1 - \frac{b_1 - b_2}{L}x\right)\right]_0^L$$

$$\delta = \frac{PL}{Et(b_1 - b_2)}\,Ln\,\frac{b_1}{b_2}\ (Ln\,b_1 - Ln\,b_2)$$

## مسئله ۸ – ۱

در مسئله قبل رابطه‌ای برای اضافه حجم $\Delta V$ میله پیدا کنید.

**حل:** با توجه به مسئله قبل کرنش جزء کوچکی از میله به طول dx که به فاصله x از انتهای فوقانی (شکل ۳۶ – ۱) قرار دارد برابر است با

$$\varepsilon_x = \frac{d\delta}{dx} = \frac{P}{EA_x}$$

اضافه حجم جزء مزبور با استفاده از رابطه 1-14 محاسبه می‌شود.

$$d(\Delta V) = \varepsilon_x(1-2\nu)dV = \frac{P}{EA_x}(1-2\nu)A_x dx = \frac{P(1-2\nu)}{E}dx$$

بنابراین اضافه طول کل میله از انتگرال زیر بدست می‌آید :

$$\Delta V = \int_0^L \frac{P(1-2\nu)}{E}dx = \frac{P(1-2\nu)}{E}\int_0^L dx = \frac{PL}{E}(1-2\nu)$$

## مسئله ۹ـ۱

یک‌گوی فولادی به شعاع r مطابق شکل ۳۷ـ۱ تراش داده شده است بطوریکه بالا و پایین آن مسطح گردیده است و ضخامت آن در امتداد قائم 1.6r می‌باشد. کاهش ضخامت جسم مزبور را موقعی که یک بار محوری W در بالای آن وارد می‌شود حساب کنید.

حل : جزئی از جسم مزبور را که در شکل با هاشور نشان داده شده است در نظر می‌گیریم.

$$\text{مساحت مقطع جزء} = \pi y^2 = \pi(r^2-x^2)$$

$$\text{تنش در جزء مزبور} = \frac{W}{\pi(r^2-x^2)}$$

$$\text{کاهش ضخامت جزء مزبور} = \frac{W\,dx}{\pi E(r^2-x^2)}$$



$$\text{کاهش ضخامت کل} = 2\int_0^{0.8r}\frac{W dx}{\pi E(r^2-x^2)} = \frac{2W}{\pi E}\left[\frac{1}{2r}\,Ln\,\frac{r+x}{r-x}\right]_0^{0.8r}$$

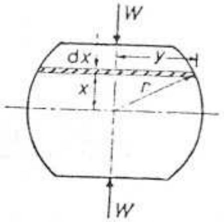
$$= \frac{W}{\pi rE}[\,Ln9 - Ln1\,] = \frac{2.197W}{\pi rE}$$

## مسئله ۱۰ـ۱

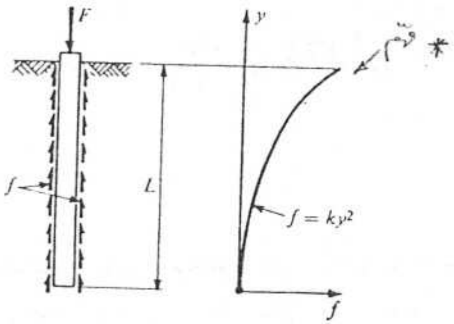
یک شمع چوبی با مقطع یکنواخت و به طول L در خاک رس کوبیده شده است و بار F را در بالای شمع حمل می‌کند. تمام این بار بوسیله نیروی اصطکاکی f ( در واحد طول ) در طول شمع مقاومت می‌شود که تغییرات آن مطابق شکل ۳۸ـ۱ به صورت یک‌سهمی می‌باشد. تعیین کنید :

الف ــ کاهش طول کل شمع را بر حسب F ، L ، A ( سطح مقطع شمع ) و E (ضریب ارتجاعی چوب ).

ب ــ اگر F = 43600 Kg ، L = 12 m ، $A = 645cm^2$ و $E = 105000 Kg/cm^2$ باشد مقدار عددی کوتاه شدن شمع مزبور را.




شکل ۳۷ـ۱




شکل ۳۸ـ۱

حـل : ابتدا ضریب k را در معادله $f = ky^2$ با نوشتن معادله تعادل در امتداد قائم بدست می‌آوریم .

۱ $$F = \int_0^L f\,dy = \int_0^L ky^2\,dy = \frac{kL^3}{3} \quad : \quad k = \frac{3F}{L^3}$$

اگر $P_y$ بار وارد بر شمع در فاصله y از انتهای پایین آن باشد آن را از انتگرال زیر می‌توانیم حساب کنیم :

۲ $$P_y = \int_0^y dP = \int_0^y f\,dy = \int_0^y ky^2\,dy = \frac{ky^3}{3} = \frac{y^3}{L^3}F$$

بالاخره کاهش طول کل میله از انتگرال زیر بدست می‌آید :

۳ $$\delta = \int_0^L \frac{P_y\,dy}{AE} = \int_0^L \frac{F}{AEL^3}\,y^3\,dy = \frac{FL}{4AE}$$

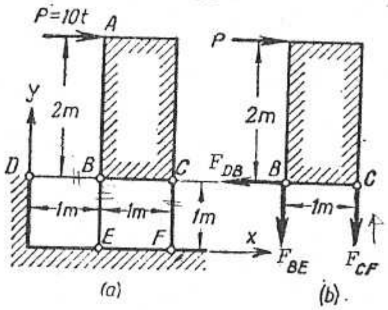
مقدار عددی δ برابر است با

$$\delta = \frac{(43600)(1200)}{4(645)(105000)} = 0.19 \text{ cm} = 1.9 \text{ mm}$$

### مسئله ۱۱ـ۱

سازه صلبی مطابق شکل ۳۹ـ۱ بوسیله سه میله فولادی با سطح مقطع یکسان $A = 20\ cm^2$ به فونداسیون متصل شده است. تنشها را در میله‌ها و همچنین تغییر مکان افقی و قائم و کل نقطه B را در اثر بار افقی $P = 10\ t$ تعیین کنید . ضریب ارتجاعی فولاد $E = 2\times10^6\ Kg/cm^2$ می‌باشد .






شکل ۳۹ـ۱

نمودار جسم آزاد سازه

حـل : از تعادل سازه در امتداد افق نیروی داخلی میله BD بدست می‌آید .

$$F_{BD} = P = 10\,t$$

از تعادل لنگری نیروها حول نقطه B نیروی داخلی میله CF بدست می‌آید .

$$\overset{+}{\curvearrowleft}\ \Sigma M_B = 0 \qquad 2(10) + 1(F_{CF}) = 0 \quad : \quad F_{CF} = -20t \uparrow$$

بنابراین جهت نیروی $F_{CF}$ در روی شکل باید عوض شود . از تعادل نیروها در امتداد قائم نیروی داخلی میله BE بدست می‌آید .

$$F_{BE} = 20t \downarrow$$

$$\sigma_{BD} = \frac{10000}{20} = 500\ Kg/cm^2$$

$$\sigma_{CF} = \frac{-20000}{20} = -1000\ Kg/cm^2$$

$$\sigma_{BE} = \frac{20000}{20} = 1000\ Kg/cm^2$$

تغییر مکان افقی نقطه B برابر با ازدیاد طول میله BD می‌باشد .

$$\delta_{Bh} = \Delta L_{BD} = \frac{F_{BD}L}{AE} = \frac{(10000)(100)}{(20)(2\times10^6)} = 0.025 \text{ cm} = 0.25\text{mm}$$

تغییر مکان قائم نقطه B برابر با ازدیاد طول میله BE می‌باشد .

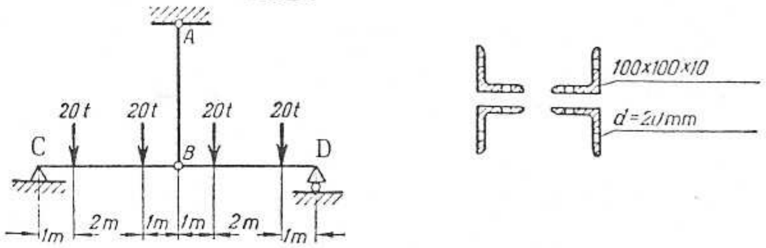
$$\delta_{Bv} = \Delta L_{BE} = \frac{F_{BE}L}{AE} = \frac{(20000)(100)}{(20)(2\times10^6)} = 0.05 \text{ cm} = 0.5\text{mm}$$

تغییر مکان کل نقطه B از جمع هندسی مؤلفه‌های افقی و قائم آن بدست می‌آید .

$$\delta_B = \sqrt{\delta_{Bh}^2 + \delta_{Bv}^2} = \sqrt{0.25^2+0.5^2} = 0.56 \text{ mm}$$

## مسئله ۱۲ – ۱

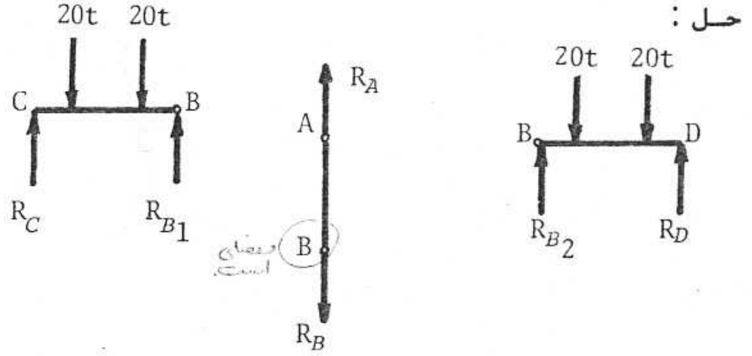
مقطع عضو کششی AB ( شکل ۴۰ – ۱ ) شامل چهار نبشی استاندارد $100\text{mm}\times100\text{mm}\times10\text{mm}$ به مساحت مقطع $A = 19.2 \text{ cm}^2$ می‌باشد که بوسیله 8 سوراخ پرچ به قطر 20mm ضعیف شده است . تنش را در مقطع بحرانی عضو کششی پیدا کنید .




شکل ۴۰ – ۱



حـل :




نمودار جسم آزاد BD　　نمودار جسم آزاد AB　　نمودار جسم آزاد CB

از نمودار جسم آزاد CB نتیجه می‌شود : $R_C = R_{B_1} = 20t$

از نمودار جسم آزاد BD نتیجه می‌شود : $R_D = R_{B_2} = 20t$

بنابراین نیروی کششی عضو AB برابر است با $R_B = R_{B_1} + R_{B_2} = 40t$

مساحت سطح مقطع ضعیف عضو AB مساوی است با

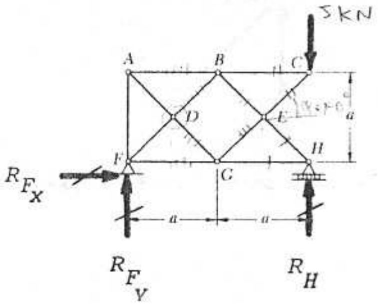
$$A' = 4A - 8(2\times1) = 4(19.2) - 16 = 60.8 \text{ cm}^2$$

در نتیجه تنش در مقطع بحرانی عضو کششی برابر است با

$$\sigma = \frac{R_B}{A'} = \frac{40000}{60.8} = 658 \text{ Kg / cm}^2$$

## مسئله ۱۳ – ۱

نیروهای داخلی خرپای شکل ۴۱ – ۱ را با روش مفاصل بدست آورید .



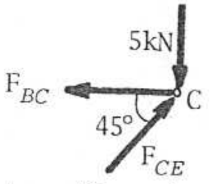

شکل ۴۱ – ۱

حل : ابتدا با نوشتن معادلات تعادل کل خر پا واکنش ها را بدست می‌آوریم .

$\Sigma F_x = 0 \quad : \quad R_{F_x} = 0$

$\Sigma M_H = 0 \quad : \quad R_{F_y} = 0$

$\Sigma F_y = 0 \quad : \quad R_H = 5\ kN$



نمودار جسم آزاد مفصل C

از نوشتن معادلات تعادل در نمودار جسم آزاد مفصل C نیروهای $F_{BC}$ و $F_{CE}$ بدست می‌آیند .

$\Sigma F_y = 0 \quad : \quad F_{CE}\cos45^\circ - 5 = 0$

$F_{CE} = 5\sqrt{2}\ kN = 7.07\ kN$ فشاری

$\Sigma F_x = 0 \quad : \quad F_{BC} - F_{CE}\cos45^\circ = 0 \qquad F_{BC} = 5\ kN$ کششی

به علت تقارن خر پا و بار گذاری حول یک محور افقی :

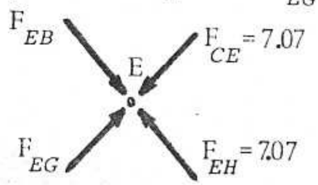
$F_{EH} = F_{CE} = 7.07\ kN$ فشاری

$F_{HG} = F_{BC} = 5\ kN$ کششی

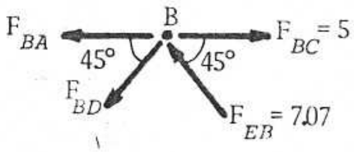
از نمودار جسم آزاد مفصل E نیروهای $F_{EB}$ و $F_{EG}$ بدست می‌آیند . بعلت شرایط ویژه بار گذاری در اتصال E می‌توانیم بنویسیم

$F_{EB} = F_{EH} = 7.07\ kN$ فشاری

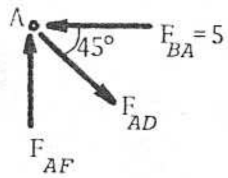
$F_{EG} = F_{CE} = 7.07\ kN$ فشاری



نمودار جسم آزاد مفصل E



نمودار جسم آزاد مفصل B



نمودار جسم آزاد مفصل A



از معادلات تعادل مفصل B نیروهای $F_{BA}$ و $F_{BD}$ بدست می‌آیند .

$\Sigma F_y = 0 \ : \ F_{BD}\cos45 - F_{EB}\cos45 = 0 \qquad F_{BD} = 7.07\ kN$ کششی

$\Sigma F_x = 0 \ : \ F_{BA} + F_{BD}\cos45 + 7.07\cos45 - 5 = 0 \qquad F_{BA} = -5 kN$ فشاری

به علت تقارن خر پا و بار گذاری :

$F_{DG} = F_{BD} = 7.07\ kN$ کششی

$F_{GF} = F_{BA} = 5\ kN$ فشاری

با در نظر گرفتن تعادل مفصل A نیروهای $F_{AD}$ و $F_{AF}$ بدست می‌آیند .

$\Sigma F_x = 0 \ : \ F_{AD}\cos45 - 5 = 0 \qquad F_{AD} = 7.07\ kN$ کششی

$\Sigma F_y = 0 \ : \ F_{AF} - F_{AD}\cos45 = 0 \qquad F_{AF} = 5\ kN$ فشاری

## مسئله ۱۴ — ۱

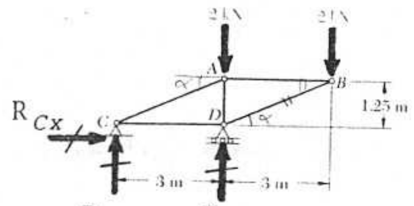
نیروهای داخلی خر پای شکل ۴۲ — ۱ را حساب کنید . واکنش‌های آن را نیز تعیین کنید .

حل : ابتدا با نوشتن معادلات تعادل تمام خر پا واکنشها را پیدا می‌کنیم .

$$\Sigma F_x = 0 \quad : \quad R_{Cx} = 0$$

$$\Sigma M_D = 0 \quad : \quad 3R_{Cy} + 3(2) = 0$$

$$R_{Cy} = -2\ \text{kN}$$



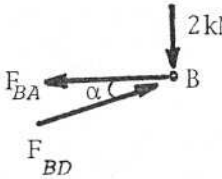

شکل ۴۲ — ۱

بنابراین جهت $R_{Cy}$ در روی شکل باید عوض شود .

$$\Sigma F_y = 0 \quad : \quad 2+2+2-R_{Dy} = 0 \quad : \quad R_{Dy} = 6\ \text{kN}$$

$$\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{3^2+1.25^2}} = \frac{12}{13} \quad ; \quad \sin\alpha = \frac{5}{13}$$

از نمودار جسم آزاد مفصل B نیروهای $F_{BA}$ و $F_{BD}$ بدست می‌آیند .




نمودار جسم آزاد مفصل B

$\Sigma F_y = 0 \quad : \quad F_{BD}\sin\alpha - 2 = 0$

$F_{BD} = 5.2\ \text{kN}$ فشاری

$\Sigma F_x = 0 \quad : \quad F_{BA} - F_{BD}\cos\alpha = 0$

$F_{BA} = 4.8\ \text{kN}$ کششی

با نوشتن معادلات تعادل مفصل A نیروهای $F_{AC}$ و $F_{AD}$ بدست می‌آیند .

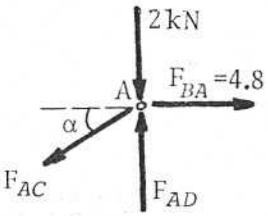
$\Sigma F_x = 0 \quad : \quad F_{AC}\cos\alpha - 4.8 = 0 \qquad F_{AC} = 5.2\ \text{kN}$ کششی

$\Sigma F_y = 0 \quad : \quad F_{AD} - 2 - F_{AC}\sin\alpha = 0 \qquad F_{AD} = 4\ \text{kN}$ فشاری .

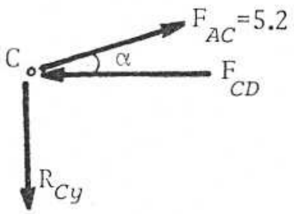


بالاخره با نوشتن معادله تعادل مفصل C در امتداد افق نیروی $F_{CD}$ بدست می‌آید .

$\Sigma F_x = 0 : F_{CD} - F_{AC}\cos\alpha = 0 \qquad F_{CD} = 4.8\ \text{kN}$ فشاری



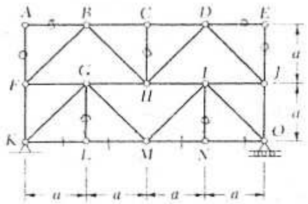

نمودار جسم آزاد مفصل A



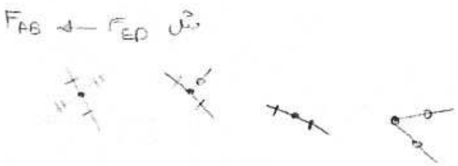

نمودار جسم آزاد مفصل C

## مسئله ۱۵ — ۱

عضوهای بدون نیروی خر پای شکل ۴۳ — ۱ را بدست آورید .




شکل ۴۳ — ۱



حـل : از تعادل مفصل A در امتداد قائم نتیجه می‌شود : $F_{AF} = 0$

از تعادل مفصل C در امتداد قائم نتیجه می‌شود : $F_{CH} = 0$

$F_{DE} = 0$   از تعادل مفصل E در امتداد افق نتیجه می‌شود :

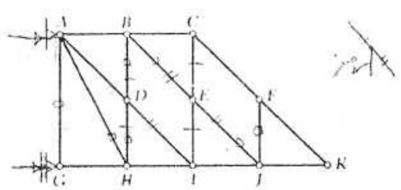
$F_{EJ} = 0$   از تعادل مفصل E در امتداد قائم نتیجه می‌شود :

$F_{GL} = 0$   از تعادل مفصل L در امتداد قائم نتیجه می‌شود :

$F_{IN} = 0$   از تعادل مفصل N در امتداد قائم نتیجه می‌شود :

## مسئله ۱۶ ــ ۱

عضوهای بدون نیروی خر پای شکل ۴۴ ــ ۱ را بدست آورید .




شکل ۴۴ ــ ۱

از سمت F شروع می‌کنیم

حــل : از تعادل مفصل F در امتداد عمود بر CK نتیجه می‌شود : $F_{FJ} = 0$

از تعادل مفصل J در امتداد قائم نتیجه می‌شود : $F_{EJ} = 0$

از تعادل مفصل E در امتداد افق نتیجه می‌شود : $F_{EB} = 0$

از تعادل مفصل B در امتداد قائم نتیجه می‌شود : $F_{BD} = 0$



از تعادل مفصل D در امتداد عمود بر AI نتیجه می‌شود : $F_{DH} = 0$

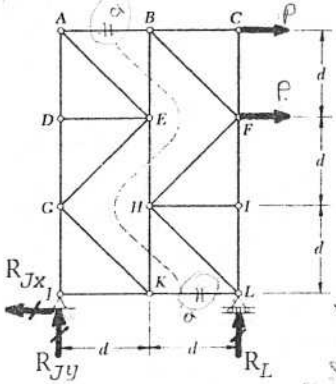
از تعادل مفصل H در امتداد قائم نتیجه می‌شود : $F_{AH} = 0$

از تعادل مفصل G در امتداد قائم نتیجه می‌شود : $F_{AG} = 0$

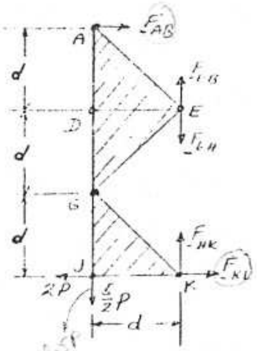
## مسئله ۱۷ ــ ۱

نیروهای اعضاء AB و KL خر پای شکل ۴۵ ــ ۱ را بدست آورید .

اینجا مقطع میزنیم




شکل ۴۵ ــ ۱




نمودار جسم آزاد

نیروهای محل قطع را رسم میکنیم

نیروهای عکس العمل تکیه‌گاه

حــل : ابتدا با نوشتن معادلات تعادل تمام خر پا واکنش های $R_{Jx}$ و $R_{Jy}$ را بدست می آوریم .

$\Sigma F_x = 0 \quad : \quad R_{Jx} = 2P$

$\Sigma M_L = 0 \quad : \quad 2d\, R_{Jy} + 2dP + 3dP = 0 \quad : \quad R_{Jy} = -2.5\,P$

بنابراین جهت واکنش $R_{Jy}$ در روی شکل باید عوض شود .

حال با مقطع a-a خر پا را به دو نیم تقسیم می‌کنیم و نمودار جسم آزاد را برای قسمت سمت چپ رسم می‌کنیم . با نوشتن معادله تعادل لنگری حول نقطه K نیروی $F_{AB}$ بدست می‌آید .

$$\Sigma M_K = 0 \quad : \quad +2.5P(d) - F_{AB}(3d) = 0$$

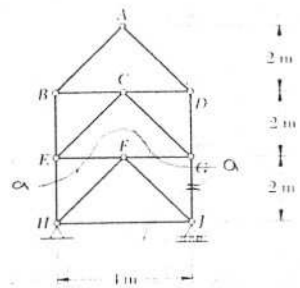
$$F_{AB} = \frac{5}{6}P$$ کششی

با نوشتن معادله تعادل در امتداد افق نیروی $F_{KL}$ بدست می‌آید .

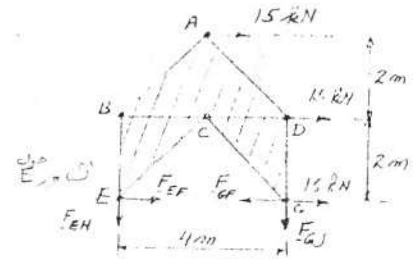
$$\Sigma F_x = 0 \quad : \quad \overset{5/6 P}{F_{AB}} + F_{KL} - 2P = 0 \quad : \quad F_{KL} = \overset{\rightarrow 7/6 P}{\frac{7}{6}P}$$ کششی

## مسئله ۱–۱۸

نیروی داخلی عضو GJ خر پای شکل ۱–۴۶ را پیدا کنید .




شکل ۱–۴۶




نمودار جسم آزاد



حـل : با مقطع a-a خر پا را به دو نیم تقسیم می‌کنیم و نمودار جسم آزاد قسمت فوقانی را در نظر می‌گیریم .

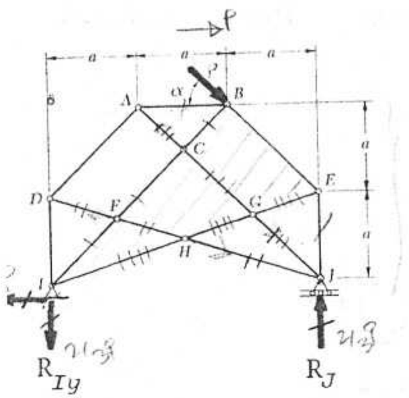
با نوشتن معادله تعادل لنگری حول نقطه E نیروی داخلی عضو GJ بـه دست می آید .

$$\Sigma M_E = 0 \quad : \quad +(15)(4)+15(2)+F_{GJ}(4)=0$$

$$F_{GJ} = -22.5 \text{ kN}$$ فشاری

## مسئله ۱–۱۹

هر گاه در خر پای شکل ۱–۴۷ α برابر صفر باشد نیروی داخلی اعضاء AB و EJ آن را تعیین کنید .




AC=CG=GJ
DF=FH=HJ
BC=CF=FI
EG=GH=GI

شکل ۱–۴۷

حـل : ابتدا با نوشتن معادلات تعادل تمام خر پا واکنش‌های $R_{Ix}$ و $R_{Iy}$ را به دست می‌آوریم .

$$\Sigma F_x = 0 \quad : \quad R_{Ix} = P$$

$$\Sigma M_J = 0 \quad : \quad R_{Iy}(3a) - P(2a) = 0 \quad : \quad R_{Iy} = \frac{2}{3}P$$

حال قسمت IBE را جدا و نمودار جسم آزاد آن را رسم می‌کنیم . چون در هر یک از مفصل‌های C ، F ، G و H اعضاء دو بدو در یک امتداد هستند می‌توانیم بنویسیم

$$F_{AC} + F_{GJ} = 0$$

$$F_{DF} + F_{HJ} = 0$$

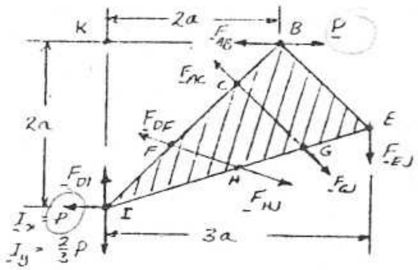
با توجه به اینکه لنگرهای دو نیروی $F_{AC}$ و $F_{GJ}$ و همچنین دو نیروی $F_{DF}$ و $F_{HJ}$ یکدیگر را خنثی می‌کنند معادله تعادل لنگری قطعه IBE را حول نقطه K می‌نویسیم .

$$\Sigma M_K = 0 \quad : \quad +P(2a)+F_{EJ}(3a) = 0$$

$$F_{EJ} = -\frac{2}{3}P \qquad \text{فشاری}$$

معادله تعادل قطعه IBE در امتداد افق نیروی $F_{AB}$ را می‌دهد .

$$\Sigma F_x = 0 \quad : \quad P - P - F_{AB} = 0 \quad : \quad F_{AB} = 0$$

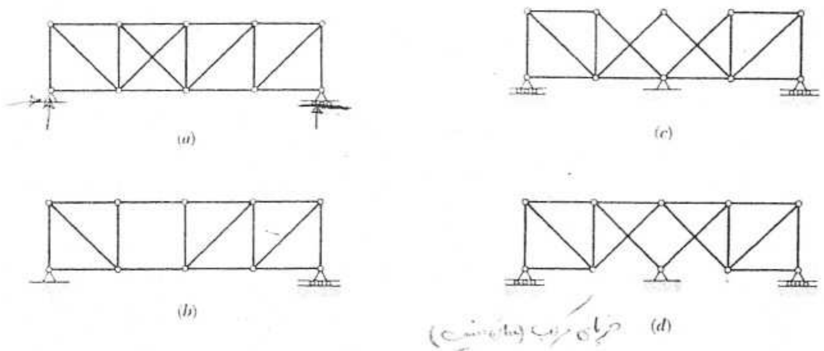


**مسئله ۲۰ – ۱**

خرپاهای شکل ۴۸ – ۱ را به ناپایدار ، ایزواستاتیک ( و پایدار ) ،وهیپراستاتیک



طبقه بندی کنید .




شکل ۴۸ – ۱

حـل : تعداد مفصل‌ها را n ، تعداد اعضاء را m و تعـداد واکنش هـا را ( مو‌لفه‌های واکنش‌ها را ) r می‌نامیم .

$(m+r)=2n$

شکل (a) : $n=10 \quad m=18 \quad r=3$

چون $m+r>2n$ می‌باشد خر پا هیپر استاتیک است و درجه هیپر استاتیکی آن‌برابر است با $m+r-2n = 18+3-20 = 1$

$m+3=21>20$

شکل (b) : $n=10 \quad m=16 \quad r=3$

$m+r < 2n$

بنابراین خر پا ناپایدار است .

شکل (c) : $n=10 \quad m=16 \quad r=4$

$m+r = 2n = 20$

خر پا ایزواستاتیک و پایدار است .

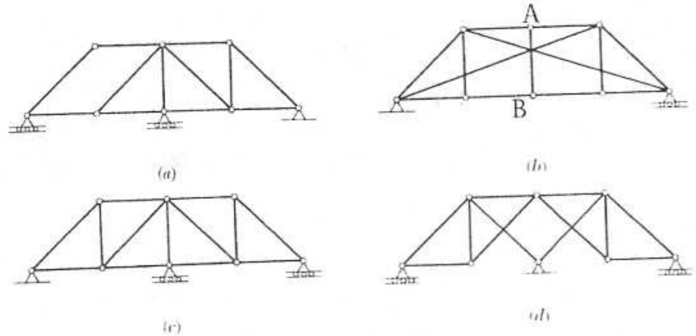
شکل (d) : $n=10 \quad m=16 \quad r=4$

$m+r = 2n = 20$

خرپا ایزو استاتیک و پایدار است . توجه کنید این خرپا یک خرپای ساده نمی‌باشدولی با وجود این می‌توان تمام نیروهای داخلی آن را پیدا کرد و در نتیجه ایزواستاتیک می باشد .

### مسئله ۲۱ــ۱

خرپاهای شکل ۴۹ــ۱ را به پایدار و ناپایدار طبقه‌بندی کنید . همچنین خرپاهای پایدار را به ایزواستاتیک و هیپراستاتیک طبقه بندی نمایید .




شکل ۴۹ــ۱

حل : تعداد مفصل‌های خرپا را $n$ ، تعداد اعضاء آن را $m$ وتعداد واکنش‌های مجهول را $r$ می‌نامید .

شکل (a) :

$n = 8 \qquad m = 12 \qquad r = 4$

$m + r = 2n = 16$

خرپا معین و پایدار می‌باشد .

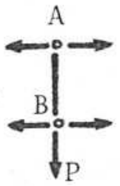
شکل (b) :

$n = 8 \qquad m = 13 \qquad r = 3$

$m + r = 2n = 16$



توجه کنید خرپای مزبور یک خرپای ساده نمی‌باشد و بین مفصل‌های A و B مفصلی وجود ندارد . با وجود اینکه رابطه $m + r=2n$ بر قرار است خرپای مزبور پایدارنمی‌باشد زیرا اگر نمودار جسم آزاد عضو AB را رسم کنیم مشاهده می‌کنیم که عضو مزبور در امتداد قائم در حال تعادل نیست .




نمودار جسم آزاد AB

شکل (c) :

$n = 8 \qquad m = 13 \qquad r = 4$

$m + r > 2n$

خرپا هیپراستاتیک می‌باشد و درجه هیپراستاتیکی آن برابر است با

$m + r - 2n = 13 + 4 - 16 = 1$

شکل (d) :

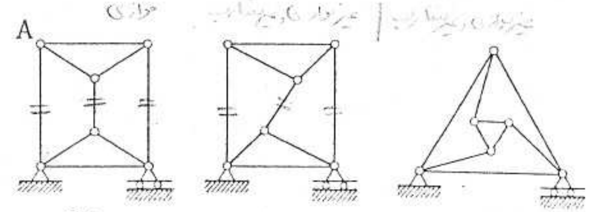
$n = 8 \qquad m = 12 \qquad r = 4$

$m + r = 2n = 16$

خرپای مزبور یک خرپای ساده نیست ولی با روش مقاطع می‌توان تمام نیروهای داخلی عضوهای آن را بدست آورد . بنابراین خرپا پایدار و ایزواستاتیک می‌باشد .

### مسئله ۲۲ــ۱

کدامیک از خرپاهای شکل ۵۰ــ۱ پایدار و کدامیک ناپایدار می‌باشند ؟
کدامیک از خرپاهای پایدار ایزواستاتیک و کدامیک هیپراستاتیک می باشند ؟




شکل ۱ – ۵۰

حـل :

(a) : دو خرپای ساده فوقانی و تحتانی به وسیله سه میله موازی به یکدیگر متصل شده‌اند بنابراین خرپا ناپایدار است . تحت اثر یک نیروی افقی مثلا " در مفصل A خرپا از تعادل خارج خواهد شد و فرو خواهد ریخت .

(b) : دو خرپای ساده فوقانی و تحتانی به وسیله سه میله غیر موازی و غیرمتقارب به یکدیگر متصل شده‌اند . بنابراین خرپای حاصل یک خرپای مرکب پایدار و ایزو استاتیک می باشد .

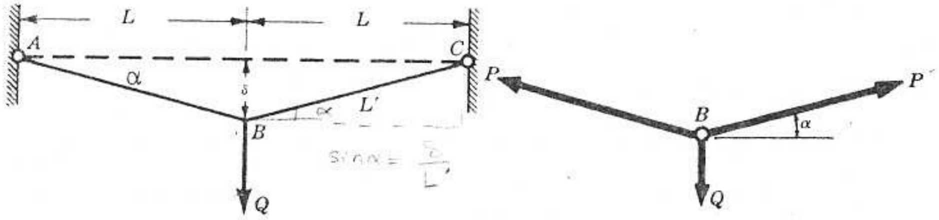
(c) : دو خرپای ساده ( مثلث خارجی و مثلث داخلی ) به وسیله سه میله غیر موازی و غیرمتقارب به یکدیگر متصل شده‌اند و تشکیل یک خرپای مرکب پایدار ایزواستاتیک می دهند .

## مسئله ۲۳ – ۱

دو سیم یا میله نازک AB و BC که در نقاط A ، B و C دارای اتصالات مفصلی می‌باشند تحت تاثیر بار Q در نقطه B قرار دارند . قبل از اینکه بار Q وارد شود هر یک از دو سیم ( یا میله ) به طول L و افقی می‌باشند و از وزن آنها صرف نظر می‌شود . بار Q چقدر باید باشد تا تغییر مکان نقطه B برابر $\delta$ باشد ؟ سطح مقطع هر یک از سیم ها A و ضریب ارتجاعی آنها E می‌باشد .

حـل : این یک مثال فوق العاده جالب از سازه‌ای است که اعضاء آن تابع قانون هـوک می‌باشند ولی با وجود این به دلایل هندسی بار با تغییر مکان متناسب نمی‌باشد .






شکل ۱ – ۵۱

هر یک از میله‌ها تابع قانون هـوک می‌باشند و ازدیاد طول هر یک از آنها از رابطه $\Delta = \frac{PL}{AE}$ بدست می‌آید . بنابراین

$$\Delta = L' - L = \frac{PL}{AE} \quad \rightarrow P = \frac{\Delta AE}{L} \qquad (1)$$

نمودار جسم آزاد مفصل B در شکل ۱ – ۵۱b رسم شده است . از معادله تعادل در امتداد قائم نتیجه می‌شود

$$2P\sin\alpha - Q = 0$$

$$Q = 2P\sin\alpha = 2P\left(\frac{\delta}{L'}\right) \qquad \sin\alpha = \frac{\delta}{L'} \qquad (2)$$

به جای P از معادله 1 در معادله 2 قرار می‌دهیم و به جای $L'$ مقدار مساوی آن $\sqrt{L^2+\delta^2}$ را قرار می‌دهیم .

$$Q = 2\,\frac{(L'-L)AE}{L}\,\frac{\delta}{L'} = \frac{2\delta AE}{L}\left(1 - \frac{L}{L'}\right)$$

$$Q = \frac{2\delta AE}{L}\left(1 - \frac{L}{\sqrt{L^2+\delta^2}}\right)$$

عبارت رادیکال را بسط می‌دهیم.

$$\sqrt{L^2+\delta^2} = L\left(1+\frac{\delta^2}{L^2}\right)^{\frac{1}{2}} = L\left(1+\frac{1}{2}\frac{\delta^2}{L^2}+\dots\right)$$

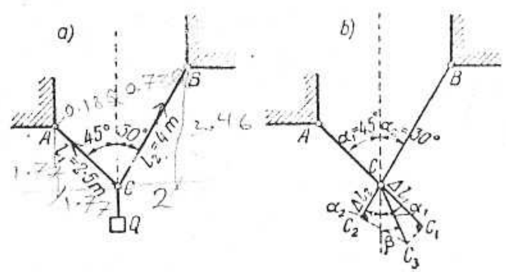
$$1-\frac{L}{\sqrt{L^2+\delta^2}} = 1-\left(1-\frac{1}{2}\frac{\delta^2}{L^2}\right) = \frac{1}{2}\frac{\delta^2}{L^2}$$

$$Q = \frac{2\delta AE}{L}\frac{\delta^2}{2L^2} = \frac{AE\delta^3}{L^3}$$

بدین ترتیب مشاهده می‌شود با وجود اینکه هر یک از میله‌ها از قانون هوک تبعیت می‌کند نیروی $Q$ با تغییر مکان $\delta$ متناسب نمی‌باشد. در نتیجه در این مسئله نمی‌توان از اصل اجتماع اثر قوا استفاده نمود (درباره این اصل در فصل دوم بحث خواهد شد).

## مسئله ۲۴ — ۱

میله‌های AC و BC در شکل ۵۲ — ۱ a به ترتیب از آلومینیوم و فولاد با تنش مجاز یکسان $\sigma_w = 1500\ Kg/cm^2$ ساخته شده‌اند و تحت اثر بار $Q = 5t$ قرار دارند. ضریب ارتجاعی آلومینیوم $E_a = 0.7\times10^6\ Kg/cm^2$ و ضریب ارتجاعی فولاد




شکل ۵۲ — ۱



$E_s = 2\times10^6\ Kg/cm^2$ می‌باشد. سطح مقطع لازم برای هر یک از میله‌ها و تغییر مکان‌های افقی و قائم نقطه C را تعیین کنید. طول‌های AC و BC به ترتیب 2.5 m و 4 m می‌باشند.

حل: از معادله تعادل مفصل C در امتداد عمود بر AC نیروی $F_{BC}$ به دست می‌آید.

$$F_{BC}\cos 15 - 5\cos 45 = 0$$

$$F_{BC} = 3.66\ t$$

از معادله تعادل مفصل C در امتداد قائم نیروی $F_{AC}$ بدست می‌آید.

$$\Sigma F_y = 0 \quad : \quad F_{AC}\cos 45 + F_{BC}\cos 30 - 5 = 0$$

$$F_{AC} = 2.59\ t$$

سطح مقطع لازم برای میله AC
$$A_{AC} = \frac{F_{AC}}{\sigma_w} = \frac{2590}{1500} = 1.73\ cm^2$$

سطح مقطع لازم برای میله BC
$$A_{BC} = \frac{F_{BC}}{\sigma_w} = \frac{3660}{1500} = 2.44\ cm^2$$

اضافه طول میله AC
$$\Delta l_1 = \frac{F_{AC} l_1}{A_{AC}E_a} = \frac{\sigma_w l_1}{E_a} = \frac{(1500)(2500)}{700000} = 5.4\ mm$$

اضافه طول میله BC
$$\Delta l_2 = \frac{F_{BC} l_2}{A_{BC}E_s} = \frac{\sigma_w l_2}{E_s} = \frac{(1500)(4000)}{2\times10^6} = 3\ mm$$

با توجه به شکل ۵۲ — ۱ b رابطه زیر بین تغییر مکان مفصل C، $\Delta = \overline{CC_3}$، زاویه $\beta$

و مقادیر معلوم $\alpha_1$ ، $\alpha_2$ ، $\Delta l_1$ و $\Delta l_2$ وجود دارد :

$$\Delta = \frac{\Delta l_1}{\cos(\alpha_1-\beta)} = \frac{\Delta l_2}{\cos(\alpha_2+\beta)}$$

از این رابطه ابتدا $\beta$ و سپس $\Delta$ بدست می‌آید.

$$\frac{\cos(\alpha_2+\beta)}{\cos(\alpha_1-\beta)} = \frac{\cos\alpha_2\cos\beta-\sin\alpha_2\sin\beta}{\cos\alpha_1\cos\beta+\sin\alpha_1\sin\beta} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\beta-\frac{1}{2}\sin\beta}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\beta+\sin\beta)}$$

$$= \frac{1.73\cos\beta-\sin\beta}{1.41(\cos\beta+\sin\beta)} = \frac{\Delta l_2}{\Delta l_1} = \frac{3}{5.4} = 0.56$$

$$\tan\beta = 0.53 \quad : \quad \boxed{\beta = 27.71^\circ}$$

$$\Delta = \frac{\Delta l_1}{\cos(\alpha_1-\beta)} = \frac{5.4}{\cos 17.29^\circ} = 5.66 \text{ mm}$$

تغییر مکان افقی مفصل C : $\Delta_h = \Delta\sin\beta = 2.6 \text{ mm}$

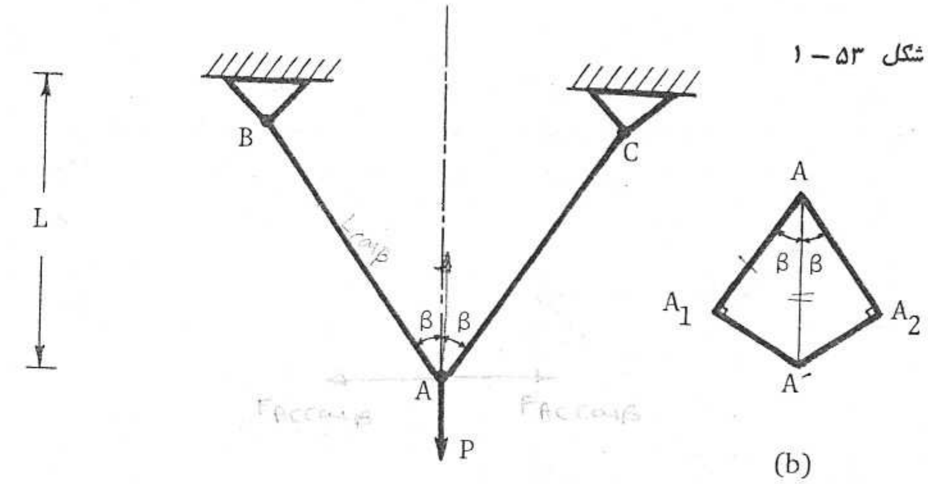
تغییر مکان قائم مفصل C : $\Delta_v = \Delta\cos\beta = 5 \text{ mm}$

## مسئله ۱ – ۲۵

در خرپای شکل a ۵۳ – ۱ تغییر مکان قائم مفصل A را بدست آورید. صلبیت محوری هر یک از میله‌ها EA می‌باشد.



شکل ۱ – ۵۳




(a) (b)

$F_{AB} = F_{AC}$

حل : به علت تقارن نیروهای داخلی میله‌های AB و AC برابر است. مقدار این نیرو از معادله تعادل در امتداد قائم بدست می‌آید.

$$F_{AB} = F_{AC} = \frac{P}{2\cos\beta} \qquad 2F_{AC}\cos\beta = P$$

اضافه طول هر یک از میله‌ها برابر است با

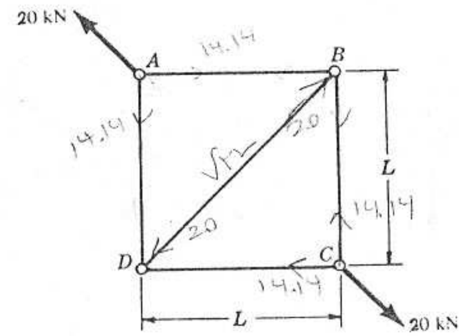
$$\overline{AA_1} = \overline{AA_2} = \frac{\frac{P}{2\cos\beta}\,\frac{L}{\cos\beta}}{EA} = \frac{PL}{2EA\cos^2\beta}$$

تغییر مکان قائم مفصل A از نمودار ویلیو ( شکل b ۵۳ – ۱ ) بدست می‌آید.

$$= \overline{AA'} = \frac{\overline{AA_1}}{\cos\beta} = \frac{PL}{2EA\cos^3\beta}$$

## مسئله ۲۶ – ۱

سازه پنج میله‌ای شکل ۵۴ – ۱ بوسیله دو نیروی 20kN درامتدادیکی ازقطرهایش بارگذاری شده است. میله‌ها از فولاد با ضریب ارتجاعی $E = 2\times10^{11}\ N/m^2$ ساخته شده‌اند و سطح مقطع آنها $A = 5cm^2$ می‌باشد. افزایش طول AC را حساب کنید.



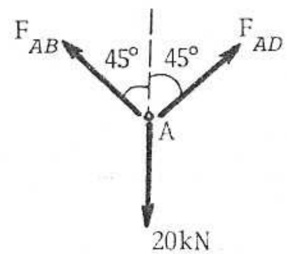

شکل ۵۴ – ۱

حل: ابتدا نیروهای داخلی اعضاء سازه را پیدا می‌کنیم. معادله‌تعادل مفصل A درامتداد AC نیروهای $F_{AB}$ و $F_{AD}$ را می‌دهد.

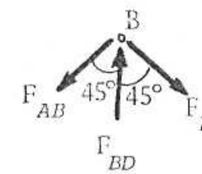
$$F_{AB} = F_{AD} = \frac{20}{2\cos45^\circ} = 14.142kN$$

به علت تقارن:

$$F_{BC} = F_{CD} = 14.142\ kN$$




نمودار جسم آزاد مفصل A




نمودار جسم آزاد مفصل B



از تعادل مفصل B در امتداد BD نیروی $F_{BD}$ بدست می‌آید.

$$F_{BD} = (F_{BC} + F_{AB})\cos45^\circ = 20\ kN$$

افزایش طول AC شامل دو مؤلفه می‌باشد. مؤلفه اول ناشی‌ازاضافه‌طول‌عضوهای‌کششی AB ، AD ، BC و CD می‌باشد که با توجه به نتیجه مسئله ۲۵ – ۱ برابر است با

$$\delta_1 = 2\ \frac{PL'}{2EA\cos^3\beta}$$

در این رابطه: $\beta = 45^\circ$ ، $L' = \frac{L}{\sqrt{2}}$ ، $A = 5cm^2$ ، $E = 2\times10^{11}N/m^2$ و $P = 20kN$

$$\delta_1 = \frac{20000(\frac{L}{\sqrt{2}})}{(2\times10^{11})(10^{-4})(5)\cos^3 45^\circ} = 0.0004L$$

مؤلفه دوم ناشی از کاهش طول عضو فشاری BD می‌باشد. اگر از تغییر مکان‌های مرتبه دوم در مقابل تغییر مکان‌های مرتبه اول صرف نظر کنیم کاهش طول قطر BD برابر با اضافه طول قطر AC خواهد بود. بنابراین مؤلفه دوم برابر است با

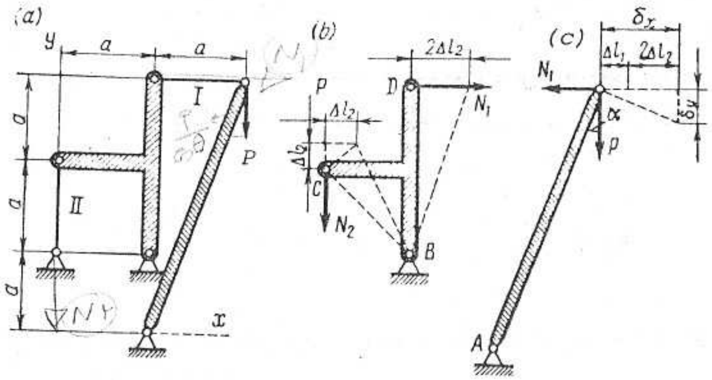
$$\delta_2 = \frac{F_{BD}(\sqrt{2}L)}{AE} = \frac{(20000)(\sqrt{2}L)}{(5)(2\times10^{11})(10^{-4})} = 0.0003L$$

افزایش طول AC مجموع $\delta_1$ و $\delta_2$ می‌باشد.

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = 0.0004L + 0.0003L = 0.0007L$$

## مسئله ۲۷ – ۱

در سازه شکل ۵۵ـ۱ میله‌های 1 و 2 به ترتیب دارای صلبیت محوری $E_1A_1$ و $E_2A_2$ می‌باشند. تغییر مکان‌های افقی و قائم نقطه اثر بار P را تعیین کنید.




شکل ۵۵ـ۱

حل : با نوشتن معادلات تعادل لنگری $\Sigma M_A = 0$ و $\Sigma M_B = 0$ نیرو های داخلی میله‌ها بدست می‌آیند.

$$N_1 = \frac{P}{3} \quad ; \quad N_2 = \frac{2}{3}P$$

بر اساس رابطه 1-12 ازدیاد طول دو میله عبارتند از

$$\Delta l_1 = \frac{Pa}{3E_1A_1} \quad ; \quad \Delta l_2 = \frac{2Pa}{3E_2A_2}$$

با توجه به شکل ۵۵a ـ ۱ تغییر مکان افقی نقطه C برابر $\Delta l_2$ وتغییرمکان نقطه C در امتداد عمود بر BC مساوی $\delta_C = \sqrt{2}\Delta l_2$ می‌باشد. نقطه D فقط در امتداد افق می‌تواند تغییر مکان دهد. این تغییر مکان با توجه به اینکه قطعه CBD مانند یک جسم صلب دوران می‌کند از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\frac{\delta_D}{2a} = \frac{\delta_C}{\sqrt{2}a} = \frac{\sqrt{2}\Delta l_2}{\sqrt{2}\,a} \quad : \quad \delta_D = 2\Delta l_2$$



تغییر مکان افقی نقطه اثر بار P مجموع تغییر مکان افقی نقطه D و اضافه طول میله 1 می‌باشد.

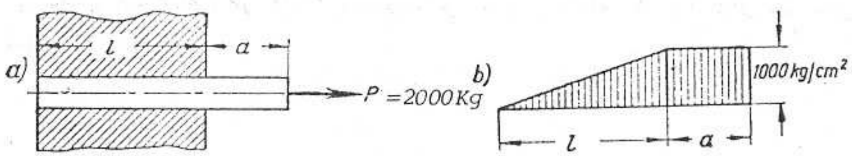
$$\delta_x = 2\Delta l_2 + \Delta l_1 = \frac{4Pa}{3E_2A_2} + \frac{Pa}{3E_1A_1} = \frac{Pa}{3}\left(\frac{4}{E_2A_2} + \frac{1}{E_1A_1}\right)$$

تغییر مکان قائم نقطه اثر بار P برابر است با

$$\delta_y = \delta_x \tan\alpha = \delta_x\left(\frac{a}{3a}\right) = \frac{Pa}{9}\left(\frac{4}{E_2A_2} + \frac{1}{E_1A_1}\right)$$

## مسئله ۲۸ـ۱

میله‌ای مطابق شکل ۵۶ـ۱ در داخل بتن قرار دارد و بوسیله نیروی P کشیده می‌شود. سطح مقطع میله $A = 2cm^2$ و طولهای l و a در روی شکل به ترتیب 40cm و 15cm می‌باشند. بین میله و بتن نیروهای چسبندگی وجود دارد که فرض می‌شود در طول l به طور یکنواخت گسترده باشند. منحنی توزیع تنش را در طول میله رسم کنید. اضافه طول میله را نیز حساب کنید. $E = 2\times10^6 Kg/cm^2$ .




شکل ۵۶ـ۱

حـل : در طول a میله در هر مقطعی از آن تنش ها یکسان و برابرند با

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{2000}{2} = 1000\ Kg/cm^2$$

در طول $l$ میله برای اینکه تعادل بر قرار باشد برآیند نیروهای اتصالی باید برابر P باشد . چون بر اساس فرض مسئله این نیروها در طول $l$ به طور یکنواخت توزیع شده‌اند در واحد طول آن نیروی p وارد می‌شود که برابر است با

$$p = \frac{P}{l}$$

اگر مقطعی به فاصله x از انتهای چپ میله در نظر بگیریم نیروهای برآیند در طرف چپ مقطع مساوی است با

$$R = p\,x = \frac{P}{l}\,x$$

بنابراین تنش در یک مقطع به فاصله x از انتهای چپ میله برابر است با

$$\sigma(x) = \frac{R}{A} = \frac{Px}{lA}$$

در انتهای چپ میله ( در $x=0$ ) تنش برابر صفر و در فاصله $l$ از انتهای چپ تنش مساوی است با

$$\sigma_l = \frac{Pl}{lA} = \frac{P}{A} = 1000 Kg/cm^2$$



منحنی توزیع تنش در طول میله در شکل b ۵۶ – ۱ رسم شده است .

اضافه طول قسمتی از میله که خارج از بتن است ( به طول a ) برابر است با

$$\Delta l_a = \frac{Pa}{EA} = \frac{(2000)(15)}{(2\times10^6)(2)} = 7.5\times10^{-3}\ cm$$

برای محاسبه اضافه طول قسمتی از میله که در داخل بتن قرار دارد ( به طول $l$ ) در فاصله x از انتهای چپ میله جزء کوچکی از میله به طول dx را در نظر می‌گیریم . نیروی وارد بر این جزء قبلا" تعیین شد . بنابراین اضافه طول جزء خیلی کوچک مزبور برابر است با

$$d(\Delta l) = \frac{R\,dx}{EA} = \frac{Px\,dx}{lEA}$$

اضافه طول قسمتی از میله که در داخل بتن قرار دارد از انتگرال زیر بدست می‌آید :

$$\Delta l_l = \int_0^l d(\Delta l) = \int_0^l \frac{Px\,dx}{lEA} = \frac{Pl}{2EA}$$

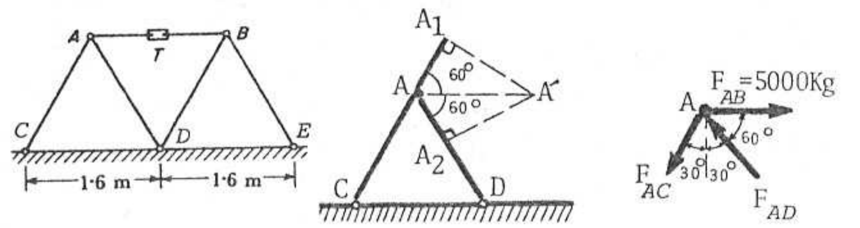
$$= \frac{(2000)(40)}{(2)(2\times10^6)(2)} = 0.01\ cm$$

اضافه طول کل میله مساوی است با

$$\Delta l = \Delta l_l + \Delta l_a = 0.01 + 0.0075 = 0.0175cm = 0.175mm$$

## مسئله ۲۹ – ۱

هر یک از میله‌های خرپای شکل a ۵۷ – ۱ به طول 1.6 m و مساحت سطح مقطع $A = 2.5\ cm^2$ می‌باشد. جنس میله‌ها از فولاد با ضریب ارتجاعی $E=2(10)^6 Kg/cm^2$ است. در میله AB یک بست قورباغه‌ای (T) که به طور مضاعف عمل می کند و تعداد دنده‌های آن در هر سانتیمتر 13 می‌باشد بکار رفته است. برای اینکه در میله AB کشش محوری 5000Kg ایجاد شود چند دور باید بست مزبور را چرخاند ؟ ( توضیح : با هر دور چرخاندن یک بست قورباغه‌ای مضاعف دو سر میله به اندازه دو گام پیچها به‌یکدیگر نزدیک می‌شوند ).




(a) (b) نمودار جسم آزاد مفصل A

شکل ۵۷ – ۱

حل : با نوشتن معادلات تعادل مفصل A نیروهای $F_{AC}$ و $F_{AD}$ بـه‌دست می‌آیند .

$$F_{AC} = F_{AD} = \frac{5000}{2\cos 60°} = 5000Kg$$

اضافه طول میله AC
$$\overline{AA_1} = \delta_{AC} = \frac{(5000)(160)}{(2.5)(2\times 10^6)} = 0.16\ cm$$

کاهش طول میله AD
$$\overline{AA_2} = \delta_{AD} = \delta_{AC} = 0.16\ cm$$

به علت کاهش طول میله AD و افزایش طول میله AC مفصل A به اندازه $\delta_1$ به سمت



راست تغییر مکان می‌دهد .

$$\delta_1 = \overline{AA'} = \frac{\overline{AA_1}}{\cos 60°} = \frac{0.16}{\frac{1}{2}} = 0.32\ cm$$

به علت تقارن مفصل B نیز به اندازه $\delta_1=0.32cm$ به سمت چپ تغییر مکان‌میدهد . از طرف دیگر میله AB در اثر نیروی کششی 5000Kg به اندازه $\delta_{AB}$ اضافه طول‌پیدا می کند .

$$\delta_{AB} = \frac{(5000)(160)}{(2.5)(2\times 10^6)} = 0.16\ cm$$

بنابراین برای اینکه در میله AB کشش محوری 5000Kg ایجاد شود دو انتهای میله در داخل بست قورباغه‌ای باید به اندازه

$$\delta = 2\delta_1 + \delta_{AB} = 2(0.32) + 0.16 = 0.8\ cm$$

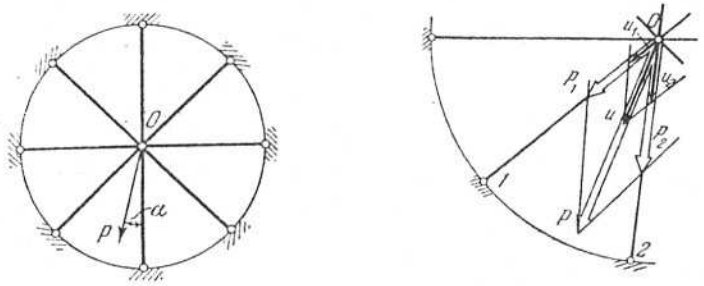
به یکدیگر نزدیک شوند . چون با هر دور چرخاندن بست قورباغه‌ای دو سر میله ها به اندازه $\frac{2}{13}$ cm به هم نزدیک می‌گردند تعداد دوران‌های لازم بست قورباغه‌ای‌برابر است با

$$n = \frac{0.8}{\frac{2}{13}} = 5.2$$

## مسئله ۳۰ – ۱

خرپای صفحه‌ای شکل a ۵۸ – ۱ شامل n ( $n > 2$ ) میله مشابه می‌باشد‌که‌در فواصل مساوی از یکدیگ قرار گرفته و همگی آنها در مفصل مشترک O به یکدیگرمتصل‌می–

باشند. نیروی P در صفحه خرپا در مفصل O واردمیشود. ثابت‌کنیدتغییرمکان‌اتصال O همواره در امتداد نیروی P و مقدار این تغییر مکان مستقل از زاویه α می‌باشد.




(a) (b)

شکل ۵۸ – ۱

حـل : نیروی P را به دو مولفه $P_1$ و $P_2$ در امتداد دو میله مجاور هم 1 و 2 تجزیه می‌کنیم ( شکل b ۵۸ – ۱ ) . اگر تغییر مکان اتصال O را در اثر بار $P_1$ با $u_1$ نشان دهیم چون خرپا نسبت به میله متقارن است این تغییر مکان در امتداد میله 1 خواهد بود. به دلیل مشابه تغییر مکان اتصال O در اثر بار $P_2$ که با $u_2$ نشان داده می‌شود در امتداد میله 2 خواهد بود.

به علت تقارن خرپا ضریب سختی k ( نیروی لازم برای ایجاد تغییرمکان‌واحد) در امتدادهای 1و 2 یکسان می‌باشد. بنابراین می‌توانیم بنویسیم

$$u_1 = \frac{P_1}{k} \quad ; \quad u_2 = \frac{P_2}{k}$$

تغییر مکان کل اتصال O که با استفاده از قاعده متوازی الاضلاع به دست می‌آید باتوجه به روابط فوق در امتداد خط اثر نیروی P می‌باشد و مقدار آن برابر است با

$$u = \frac{P}{k}$$



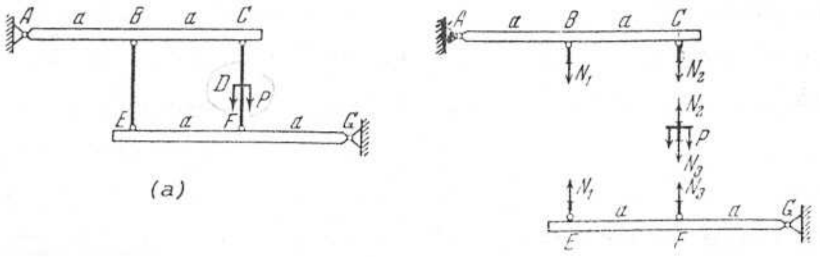
بنابراین تغییر مکان اتصال O مستقل از زاویه α می‌باشد.

## مسئله ۳۱ – ۱

سازه شکل a ۵۹ – ۱ شامل دو میله صلب افقی AC و EG می باشد که به‌دو میله قائم BE و CF متصل می‌باشند. در نقطه D نیروی P در امتداد میله CF بر سازه وارد می‌شود.

الف – آیا سازه مزبور ایزو استاتیک و یا هیپر استاتیک می‌باشد ؟

ب – نیروهای ایجاد شده در میله‌های قائم را حساب کنید.




(a) (b)

شکل ۵۹ – ۱

حـل : سازه مزبور ایزو استاتیک می‌باشد و نیروها را می‌توان به کمک معادلات تعادل اجزاء سازه بدست آورد ( شکل b ۵۹ – ۱ ) . برای میله‌های صلب AC و EG مجموع لنگرهای نیروها را به ترتیب حول نقاط A و G برابر صفر قرار می‌دهیم.

$$2N_2 + N_1 = 0$$

$$2N_1 + N_3 = 0$$

برای میله CF شرط زیر بر قرار است

$$N_2 = P + N_3$$

از حل سه معادله فوق نیروهای مجهول بدست می‌آیند .

$$N_1 = \frac{2}{3}P \quad ; \quad N_2 = -\frac{1}{3}P \quad ; \quad N_3 = -\frac{4}{3}P$$

## ۱۲ — ۱ مسائل حل نشده

**مسئله ۱ — ۳ — ۱** میله‌ای به طول L با سرعت زاویه‌ای $\omega$ در یک صفحه افقی حول یک محور قائم دوران می‌کند ( شکل ۳۲ — ۱ ) . وزنه‌ای به وزن W به انتهای میله متصل شده است . با صرف نظر کردن از وزن میله و با فرض اینکه تنش مجاز $\sigma_w$ باشد رابطه‌ای برای سطح مقطع لازم (A) میله پیدا کنید .

**مسئله ۲ — ۳ — ۱** مسئله‌قبل را با به حساب آوردن وزن میله حل کنید . وزن‌واحدحجم مصالح میله را $\gamma$ فرض کنید .

**مسئله ۳ — ۳ — ۱** دو میله منشوری که کاملا " به یکدیگر متصل شده‌اند بار قائم 50kN را تحمل می‌کنند ( شکل ۳ — ۳ — ۱ ) . میله فوقانی از فولاد با سطح مقطع $60\ cm^2$ و وزن مخصوص $7.7\times10^4 N/m^3$ می‌باشد . میله تحتانی از برنج با سطح مقطع $50\ cm^2$ و وزن مخصوص $8.25\times10^4 N/m^3$ می‌باشد . ضریب‌ارتجاعی‌فولاد $E=2\times10^{11} N/m^2$ و ضریب ارتجاعی مس را $E = 9\times10^{10} N/m^2$ فرض کنید . تنش حداکثر را در هر یک از مصالح پیدا کنید .

**مسئله ۴ — ۳ — ۱** اگر دیواری از بتن با مقاومت فشاری نهایی $160 Kg/cm^2$ و وزن



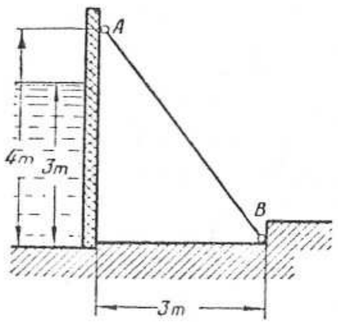
مخصوص $2000 Kg/m^3$ ساخته شود با یک ضریب اطمینان 4 حداکثر ارتفاع دیوارچقدر می‌تواند باشد ؟

**مسئله ۵ — ۳ — ۱** سپری که در مقابل آب غیر قابل نفوذ می‌باشد ( شکل ۵ — ۳ — ۱ ) بوسیله پایه‌های چوبی با مقطع دایره‌ای (AB) و قطر 15 cm نگه داشته شده است تا از واژگونی آن جلو گیری به عمل آید . تنش مجاز چوب $20 Kg/cm^2$ می‌باشد . حداکثر فاصله مجاز بین پایه‌ها را تعیین کنید .

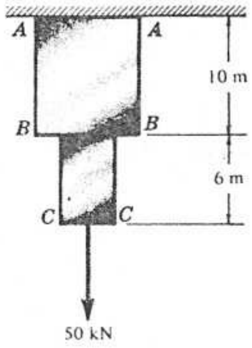
**مسئله ۶ — ۳ — ۱** اگردرشکل۶—۳—۱بار P برابر 10t و تنش مجاز مصالح عضو های AB و CD $1000 Kg/cm^2$ باشد قطر این اعضاء را تعیین کنید .

**مسئله ۷ — ۳ — ۱** درسازه‌شکل۷—۳—۱تمام میله‌هاازفولادباسطح‌مقطع یکسان $30 cm^2$ می‌باشند . بار P برابر 10t است . تنش‌های ایجاد شده در میله‌ها را حساب کنید .

**مسئله ۸ — ۳ — ۱** میله صلب AB مطابق شکل۸—۳—۱ بوسیله‌یک‌سیستم طناب‌آویزان می‌باشد . اگر تنش مجاز برای ماده طناب $100 Kg/cm^2$ و سطح مقطع همه‌طناب‌هایکسان و قطر آنها برابر d = 2.5cm باشد حداکثر بار مجاز P را تعیین کنید . سطح مقطع مفید طناب 75% سطحی است که بوسیله محیط‌آن احاطه می‌شود .




شکل ۵ — ۳ — ۱




شکل ۳ — ۳ — ۱

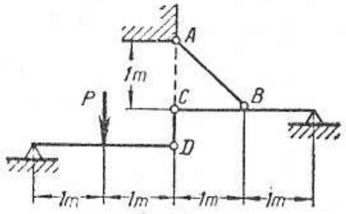
**مسئله ۹ – ۳ – ۱** جسم صلب AB بوسیله سه کابل (شکل ۹–۳–۱) با سطح مقطع یکسان $A = 2cm^2$ و تنش مجاز $\sigma_W = 12\times10^7 N/m^2$ نگهداشته شده است و در نقطه A تحت اثر بار P می‌باشد. حداکثر مجاز بار P را تعیین کنید.

**مسئله ۱ – ۶ – ۱** کاهش حجم $\Delta V$ یک میله منشوری را که تحت اثر وزن خودش آویزان است بدست آورید. وزن کل میله را W ، طول آن را L ، ضریب پواسون را $\nu$ و ضریب ارتجاعی را E فرض کنید.

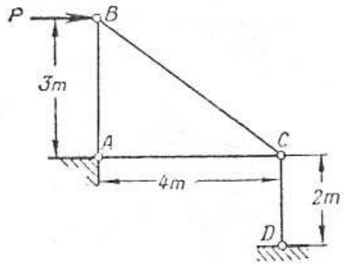
**مسئله ۱ – ۷ – ۱** رابطه‌ای برای ازدیاد طول یک میله منشوری به طول L ، سطح مقطع A و وزن W که تحت اثر وزن خودش آویزان می‌باشد بدست آورید.

**مسئله ۲ – ۷ – ۱** میله‌ای به شکل مخروط ناقص (شکل ۲–۷–۱) تحت اثر دو نیروی محوری P در دو انتها قرار دارد. اضافه طول میله مزبور را حساب کنید.

**مسئله ۳ – ۷ – ۱** میله فولادی شکل ۳ – ۷ – ۱ تحت اثر بارهای نشان داده شده می‌باشد. سطح مقطع میله $5cm^2$ و ضریب ارتجاعی آن $2\times10^{11} N/m^2$ است. اضافه طول میله را حساب کنید.



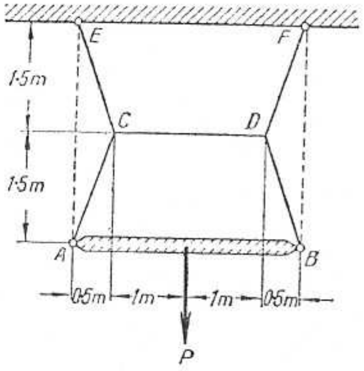

شکل ۶ – ۳ – ۱



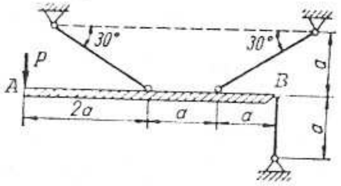

شکل ۷ – ۳ – ۱



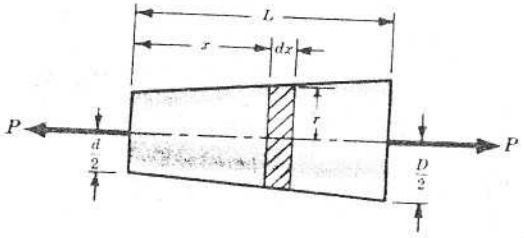
**مسئله ۴ – ۷ – ۱** میله برنجی شکل ۴–۷–۱ سطح مقطع $10cm^2$ دارد. اضافه یا کاهش طول آن را تحت بار گذاری نشان داده شده حساب کنید. برای برنج $E = 9\times10^{10} N/m^2$ می‌باشد.



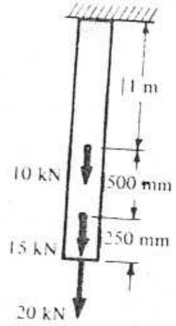

شکل ۸ – ۳ – ۱



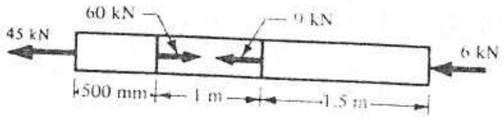

شکل ۹ – ۳ – ۱




شکل ۲ – ۷ – ۱

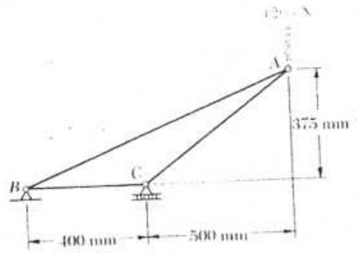



شکل ۳ – ۷ – ۱

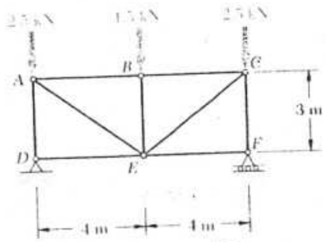



شکل ۴ – ۷ – ۱

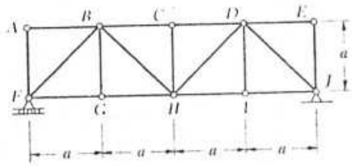
**مسائل ۱ـ۸ـ۱ تا ۷ـ۸ـ۱** نیروهای داخلی خرپاهای شکل‌های زیررا با استفاده از روش مفاصل تعیین کنید .



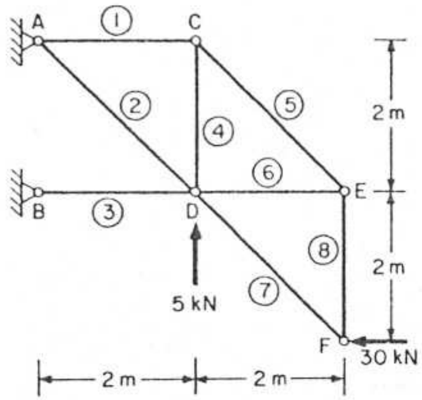

شکل ۱ـ۸ـ۱



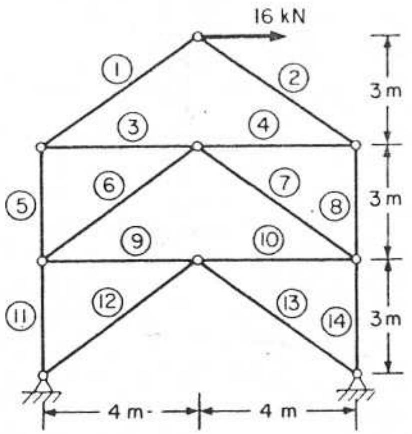

شکل ۱ـ۸ـ۲



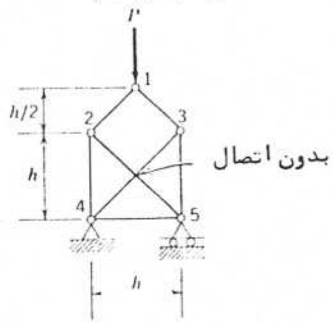
شکل ۱ـ۸ـ۳




شکل ۱ـ۸ـ۴



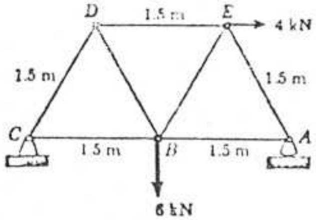

شکل ۱ـ۸ـ۵



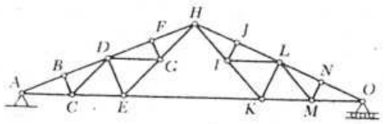

شکل ۱ـ۸ـ۶



**مسئله ۸ـ۸ـ۱** عضوهای بدون نیروی خر پای شکل ۸ـ۸ـ۱ را تعیین کنید .



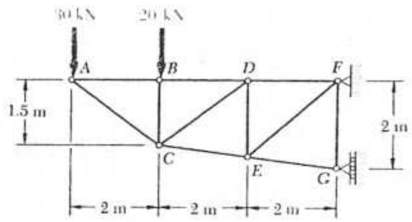

شکل ۷ـ۸ـ۱



شکل ۸ـ۸ـ۱

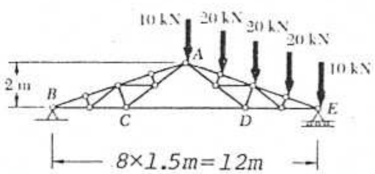
**مسئله ۹ـ۸ـ۱** هرگاه در خرپای شکل ۴۷ـ۱ α برابر 90° باشد نیروی داخلی اعضای AB و EJ را تعیین کنید .

**مسئله ۱۰ـ۸ـ۱** نیروهای داخلی اعضای DF و DE خرپای شکل ۱۰ـ۸ـ۱ را بدست آورید .



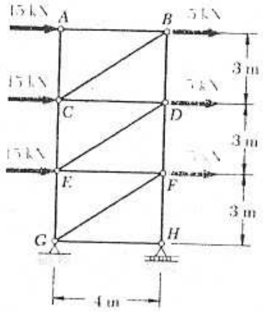

شکل ۱۰ـ۸ـ۱

**مسئله ۱۱ـ۸ـ۱** نیروی عضو CD خر پای سقف شکل ۱۱ـ۸ـ۱ را پیدا کنید .



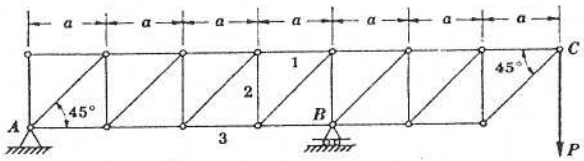

شکل ۱۱ـ۸ـ۱

**مسئله ۱۲ــ۸ــ۱** نیروهای داخلی عضوهای CE ، CD و BD خرپای شکل ۱۲ــ۸ــ۱ را به دست آورید .




شکل ۱۲ــ۸ــ۱

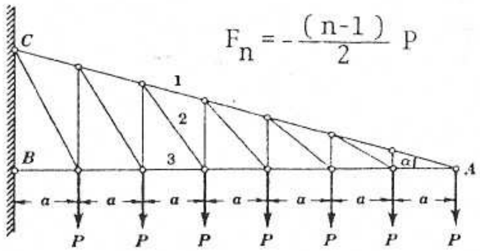
**مسئله ۱۳ــ۸ــ۱** نیروهای داخلی عضوهای ۱ ، ۲ و ۳ خرپای شکل ۱۳ــ۸ــ۱ را بدست آورید .




شکل ۱۳ــ۸ــ۱

**مسئله ۱۴ــ۸ــ۱** در خرپای شکل ۱۴ــ۸ــ۱ ثابت کنید نیروی محوری در n امین عضو قائم از انتهای آزاد خرپا برابر است با

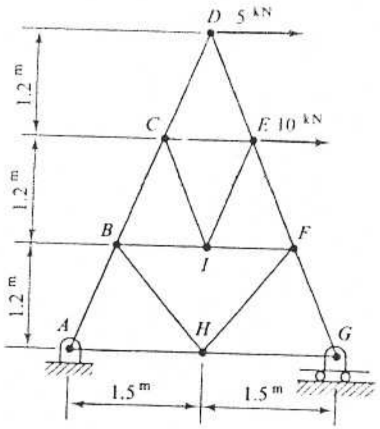
$$F_n = -\frac{(n-1)}{2}\,P$$



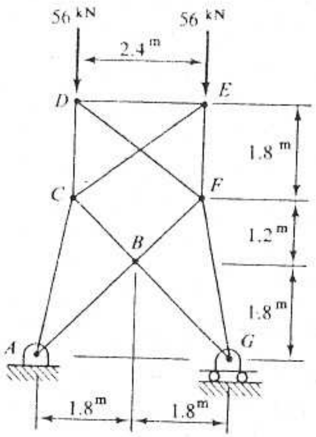

شکل ۱۴ــ۸ــ۱



**مسئله ۱۵ــ۸ــ۱** نیروهای عضوهای BC و BI خرپای شکل ۱۵ــ۸ــ۱ را پیدا کنید .



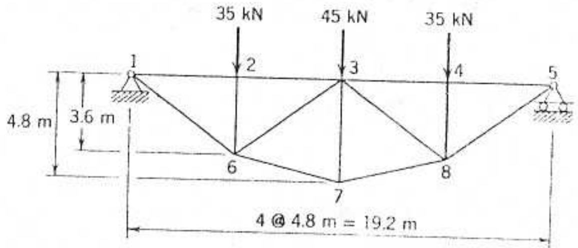

شکل ۱۵ــ۸ــ۱




شکل ۱۶ــ۸ــ۱

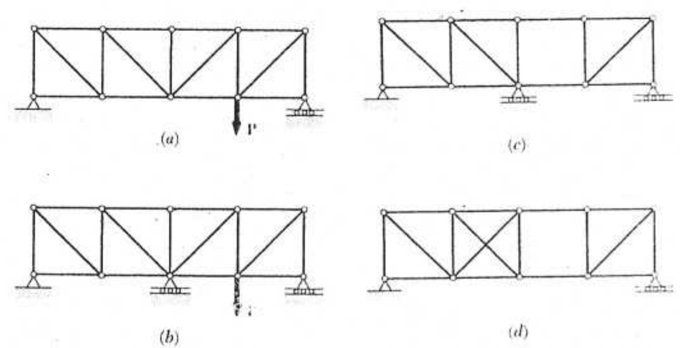
**مسئله ۱۶ــ۸ــ۱** نیروهای اعضای AC ، BC و DF خرپای شکل ۱۶ــ۸ــ۱ را به دست آورید .

**مسئله ۱۷ــ۸ــ۱** نیروهای اعضای 2-3 ، 2-6 ، 6-3 ، 6-7 و 3-7 خرپای شکل ۱۷ــ۸ــ۱ را حساب کنید .



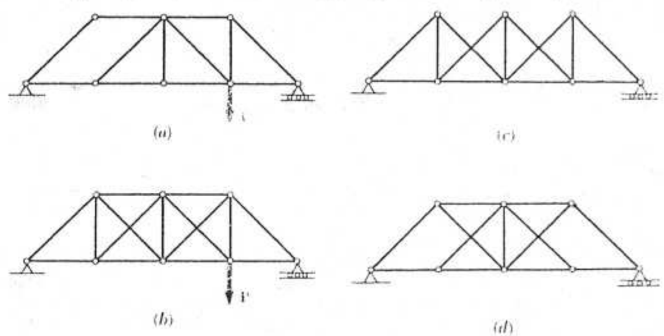

شکل ۱۷ــ۸ــ۱

**مسئله ۱۸ــ۸ــ۱** خرپاهای شکل ۱۸ــ۸ــ۱ را به ناپایدار ، ایزواستاتیک (وپایدار) ، و هیپر استاتیک طبقه بندی نمائید .



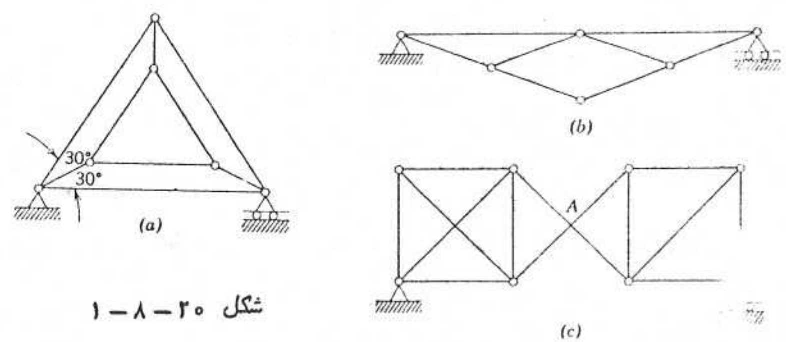

شکل ۱۸-۸-۱

**مسئله ۱۹-۸-۱** خرپاهای شکل ۱۹-۸-۱ را به پایدار و ناپایدار تقسیم‌بندی کنید و در صورتی که پایدار باشند آنها را به ایزو استاتیک و هیپر استاتیک طبقه بندی نمایید.




شکل ۱۹-۸-۱

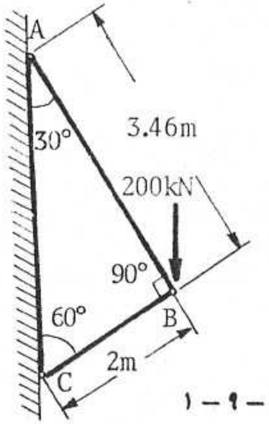
**مسئله ۲۰-۸-۱** کدامیک از خرپاهای شکل ۲۰-۸-۱ پایدار و کدامیک ناپایدار میباشند؟



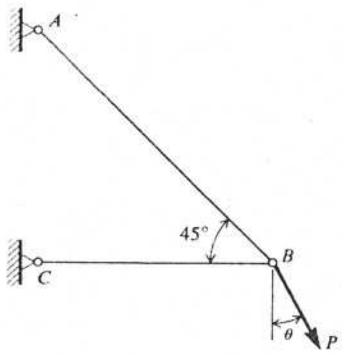

شکل ۲۰-۸-۱



**مسئله ۱-۹-۱** میله‌های AB و BC خرپای شکل ۱-۹-۱ از فولاد با تنش تسلیم 200 MPa ساخته شده‌اند. با فرض اینکه ضرائب اطمینان در کشش و فشار به ترتیب 2 و 2.5 باشد سطح مقطع هر یک از میله‌ها را تعیین کنید. مؤلفه‌های افقی و قائم تغییر مکان مفصل B را نیز محاسبه نمایید. ضریب ارتجاعی فولاد $E = 2\times10^{11}\ N/m^2$ می‌باشد.



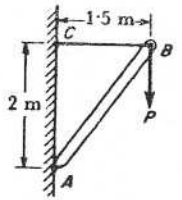

شکل ۱-۹-۱




شکل ۲-۹-۱

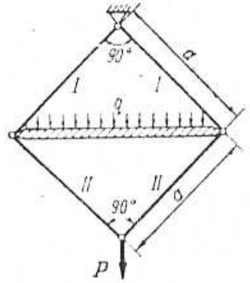
**مسئله ۲-۹-۱** سطح مقطع عضوهای AB و BC خرپای شکل ۲-۹-۱ به ترتیب $A_1$ و $A_2$ می‌باشد. تحت چه زاویه $\theta$ تغییر مکان مفصل B در امتداد نیروی P خواهد بود؟

**مسئله ۳-۹-۱** در سازه شکل ۳-۹-۱ عضو BC سیم فولادی به قطر d=0.3cm و عضو AB از چوب با مقطع مربع به اضلاع 2.5cm می‌باشد. مؤلفه‌های افقی و قائم تغییر مکان نقطه B را در اثر بار قائم P= 200Kg پیدا کنید. ضریب ارتجاعی فولاد $E_S=2\times10^6\ Kg/cm^2$ و ضریب ارتجاعی چوب $E_W=10^5\ Kg/cm^2$ می‌باشد.

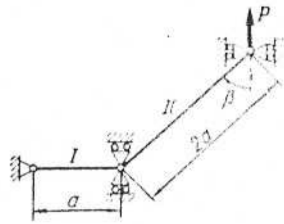



شکل ۳-۹-۱

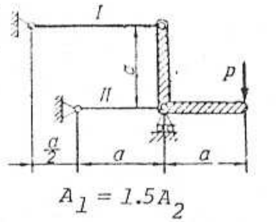
**مسئله ۴ــ۹ــ۱ تا ۱۱ــ۹ــ۱** تغییر مکان‌های نقطه اثر بار خارجی P و همچنین تنش‌ها را در هر یک از میله‌ها حساب کنید . در جایی که مشخص نشده است سطح مقطع میله‌ها را A فرض کنید ( ضریب ارتجاعی = E ) .



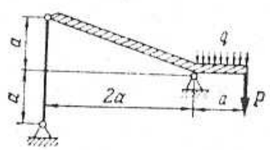

شکل ۴ــ۹ــ۱



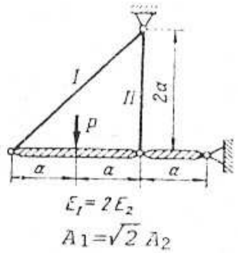

شکل ۵ــ۹ــ۱



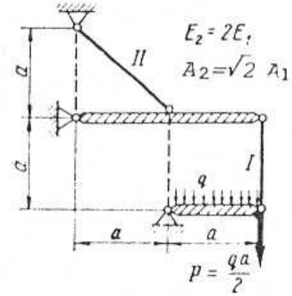

شکل ۶ــ۹ــ۱



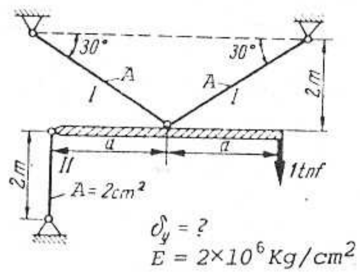

شکل ۷ــ۹ــ۱



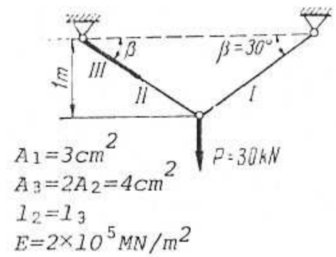

شکل ۸ــ۹ــ۱




شکل ۹ــ۹ــ۱



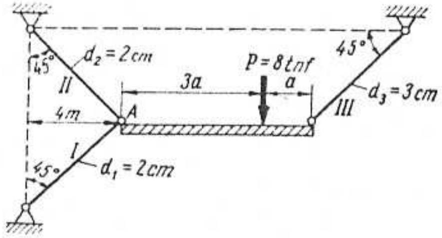

شکل ۱۰ــ۹ــ۱




شکل ۱۱ــ۹ــ۱

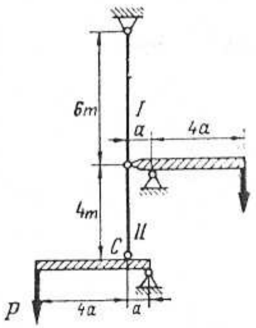


**مسئله ۱۲ــ۹ــ۱** تغییر مکان نقطه A را در شکل ۱۲ــ۹ــ۱ پیدا کنید . تنش‌های ایجاد شده در میله‌ها را نیز محاسبه نمایید . ( $E = 2\times10^6$ Kg / cm$^2$ )

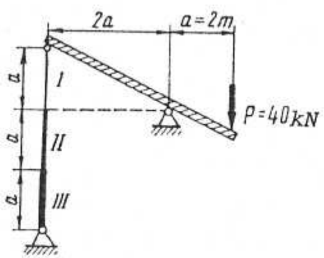



شکل ۱۲ــ۹ــ۱

**مسئله ۱۳ــ۹ــ۱** در سازه شکل ۱۳ــ۹ــ۱ تغییر مکان نقطه C و تنش‌های ایجاد شده در میله‌ها را محاسبه کنید . ( $A_1 = A_2 = 2cm^2$ $E = 2\times10^6$ MN/m$^2$ )




شکل ۱۳ــ۹ــ۱




شکل ۱۴ــ۹ــ۱

**مسئله ۱۴ــ۹ــ۱** در سازه شکل ۱۴ــ۹ــ۱ تغییر مکان‌های نقطه اثر بار خارجی P و تنش‌های ایجاد شده در میله‌ها را حساب کنید. ($A_3=2A_2=4A_1=10cm^2$ $E=2\times10^6 Kg/cm^2$)

## ۱۳ – ۱ جواب‌های مسائل حل نشده

۱ – ۳ – ۱ : $A = \dfrac{WL\omega^2}{g\sigma_w}$

۱ – ۳ – ۲ : $A = \dfrac{2WL\omega^2}{2g\sigma_w - \gamma L^2\omega^2}$

۱ – ۳ – ۳ : در برنج : $\sigma = 10.5MPa$ ، در فولاد : $\sigma = 9.5MPa$

۱ – ۳ – ۴ : 200 m

۱ – ۳ – ۵ : 1.88m

۱ – ۳ – ۶ : $d_{AB} = 42.4$ mm ; $d_{CD} = 25.2$ mm

۱ – ۳ – ۷ : $\sigma_{AB} = 250$ ; $\sigma_{AC} = 333$ ; $\sigma_{BC} = -417$ ; $\sigma_{CD} = -250 Kg/cm^2$

۱ – ۳ – ۸ : 695 Kg

۱ – ۳ – ۹ : 9000 N

۱ – ۶ – ۱ : $\Delta V = \dfrac{WL}{2E}(1-2\nu)$

۱ – ۷ – ۱ : $\delta = \dfrac{WL}{2EA}$



۱ – ۷ – ۲ : $\Delta = \dfrac{4PL}{\pi DdE}$

۱ – ۷ – ۳ : 0.675 mm

۱ – ۷ – ۴ : صفر

۱ – ۸ – ۱ : $F_{AB} = 3900$ ; $F_{AC} = -4500$ ; $F_{BC} = -3600$ N

۱ – ۸ – ۲ : $F_{DE} = F_{EF} = 0$ ; $F_{CF} = F_{DA} = -4kN$

$F_{BC} = F_{BA} = -2kN$ ; $F_{CE} = F_{EA} = 2.5kN$

$F_{BE} = -1.5kN$

۱ – ۸ – ۳ : $F_{AB} = F_{DE} = F_{BG} = F_{DI} = 0$ ; $F_{AF} = F_{CH} = F_{EJ} = -400N$

$F_{BC} = F_{CD} = -800N$ ; $F_{BF} = F_{DJ} = -849N$

$F_{BH} = F_{DH} = 283N$ ; $F_{FG} = F_{GH} = F_{HI} = F_{IJ} = 600N$

۱ – ۸ – ۴ : $F_1 = 30kN$ ; $F_2 = -5\sqrt{2}$ ; $F_3 = -55$ ; $F_4 = -30$

$F_5 = 30\sqrt{2}$ ; $F_6 = -30$ ; $F_7 = -30\sqrt{2}$ ; $F_8 = 30$

۱ – ۸ – ۵ : $F_1 = F_6 = F_{12} = 10kN$ ; $F_2 = F_7 = F_{13} = -10kN$

۱–۸–۶ :

$F_3 = F_9 = -8kN \quad ; \quad F_4 = F_{10} = 8kN$

$F_5 = -F_8 = 6kN \quad ; \quad F_{11} = -F_{14} = 12kN$

$F_{12} = F_{13} = F_{25} = F_{34} = -0.707P$

$F_{42} = F_{53} = -P \quad ; \quad F_{45} = -0.50P$

۱–۸–۷ :

$F_{BE} = -F_{AE} = 5.46kN \quad ; \quad F_{AB} = 2.73kN$

$F_{BD} = -F_{CD} = -F_{DE} = 1.46kN; \quad F_{BC} = 4.73kN$

۱–۸–۸ : KL , LM , MN , IL , IJ , CD , BC

۱–۸–۹ : $F_{EJ} = -\frac{2}{3}P \quad ; \quad F_{AB} = 0$

۱–۸–۱۰ : $F_{DE} = -38.6 \text{ kN} \quad ; \quad F_{DF} = 91.4 \text{ kN}$

۱–۸–۱۱ : 60 kN

۱–۸–۱۲ : $F_{CE} = 15 \quad ; \quad F_{BD} = -15 \quad ; \quad F_{CD} = -35 \text{ kN}$



۱–۸–۱۳ : $F_1 = 2.25P \quad ; \quad F_2 = -0.75P \quad : \quad F_3 = -2.25P$

۱–۸–۱۵ : $F_{BC} = 13 \text{ kN} \quad ; \quad F_{BI} = 2.5 \text{ kN}$

۱–۸–۱۶ : $F_{AC} = -71.4 \quad ; \quad F_{BC} = 25.2 \quad ; \quad F_{DF} = -43.75 \text{ kN}$

۱–۸–۱۷ : $F_{23} = -76.7 \text{ kN} \quad ; \quad F_{26} = -35 \text{ kN} \quad ;$

$F_{63} = 4.77 \text{ kN} \quad ; \quad F_{6-7} = 82.8 \text{ kN} \quad ; \quad F_{3-7} = -39.9 \text{ kN}$

۱–۸–۱۸ : (a) ـ پایدار و ایزو استاتیک ، (b) ـ هیپر استاتیک ،
(c) ـ پایدار و ایزو استاتیک ، (d) ـ نا پایدار ( تحت بارگذاری کلی

۱–۸–۱۹ : (a) ـ نا پایدار ، (b) ـ هیپر استاتیک ، (c) ـ ایزو استاتیک ،
(d) ـ ایزو استاتیک

۱–۸–۲۰ : هر سه نا پایدار می‌باشند

۱–۹–۱ : مساحت سطح مقطع AB = $17.32 \text{ cm}^2$

مساحت سطح مقطع BC = $12.5 \text{ cm}^2$

$\delta_h = 0.2$ mm ( به طرف راست ) و $\delta_v = 1.9$ mm ( به طرف پایین )

۱–۹–۲ : $\cos 2\theta = -\frac{\sqrt{2}A_2}{A_1}$

۱–۹–۳ : = 1.59 mm ; $\delta_v = 2.44$ mm

۱-۹-۴ : $\delta = \frac{(2P + \sqrt{2}\,qa)\,a}{EA}$ ; $\sigma_1 = \frac{P + \sqrt{2}\,qa}{\sqrt{2}\,A}$ ;

$\sigma_2 = \frac{P}{\sqrt{2}\,A}$

۱-۹-۵ : $\delta = \frac{Pa}{EA\cos^2\beta}(\sin^2\beta + 2)$

$\sigma_1 = \frac{P}{A}\tan\beta$ ; $\sigma_2 = \frac{P}{A\cos\beta}$

۱-۹-۶ : $\delta_x = \frac{3Pa}{2EA_1}$ ; $\delta_y = \frac{2Pa}{EA_2}$

$\sigma_1 = \frac{P}{A_1}$ ; $\sigma_2 = \frac{3P}{2A_1}$

۱-۹-۷ : $\delta = \frac{(2P + qa)a}{4EA}$ ; $\sigma = \frac{2P + qa}{4A}$

۱-۹-۸ : $\delta = \frac{Pa}{E_2A_2}$ ; $\sigma = \frac{P}{2A_2}$



۱-۹-۹ : $\delta = \frac{10Pa}{E_1A_1}$ ; $\sigma_1 = \frac{2P}{A_1}$ ; $\sigma_2 = \frac{4P}{A_1}$

۱-۹-۱۰ : $\delta = 8.5\ mm$ ; $\sigma_1 = 1000$ ; $\sigma_2 = 500\ Kg/cm^2$

۱-۹-۱۱ : $\delta_x = 0.08\ mm$ ; $\delta_y = 2.125\ mm$

$\sigma_1 = 100$ ; $\sigma_2 = 150$ ; $\sigma_3 = 75\ MN/m^2$

۱-۹-۱۲ : $\delta_x = 5.4\ mm$ ; $\delta_y = 1.8\ mm$

$\sigma_1 = 900$ ; $\sigma_2 = 1800$ ; $\sigma_3 = 1200\ Kg/cm^2$

۱-۹-۱۳ : $\delta = 3.9\ mm$ ; $\sigma_1 = 30$ ; $\sigma_2 = 150\ MN/m^2$

۱-۹-۱۴ : $\delta_x = 0.35\ mm$ ; $\delta_y = 0.7\ mm$

$\sigma_1 = 80$ ; $\sigma_2 = 40$ ; $\sigma_3 = 20\ MN/m^2$