فصل دوم

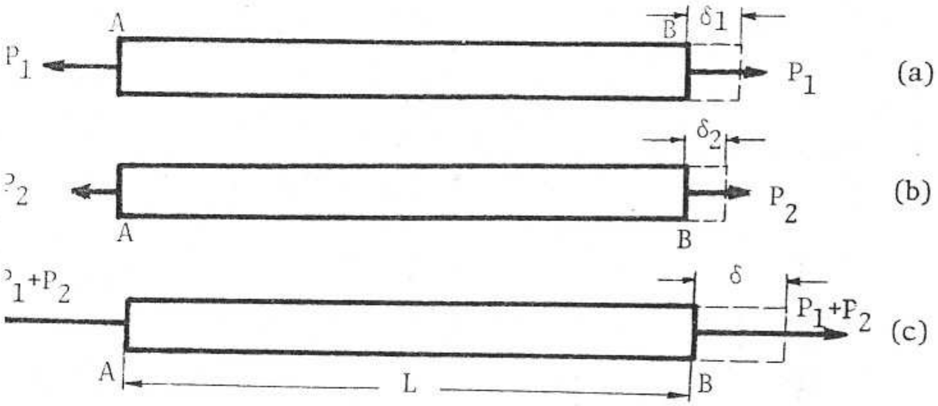
سازه‌های کششی و فشاری هیپر استاتیک

۱ — ۲ اصل اجتماع اثر قوا

مطابق این اصل هرگاه سازه‌ای به طور همزمان تحت تاءثیر تعدادی نیروباشدتغییر مکان ایجاد شده در هر نقطه از آن مجموع تغییر مکان های ایجاد شده بوسیله هر یک از آن نیروهاست وقتی که هر یک از آنها به تنهایی بر سازه وارد شوند. این اصل وقتی بر قرار است که سازه رفتار سازه‌ای خطی داشته باشد و برای اینکه این نکته صادق باشد دو شرط باید بر قرار باشد. اول اینکه مصالح سازه باید از قانون هوک پیروی کند. به عبارت دیگر رابطه بین تنش و کرنش خطی باشد. دوم اینکه تغییر شکل‌های کوچک سازه نباید در روی عمل بارهای وارده تاءثیر داشته باشد (مسئله ۲۳ — ۱ راببینید). در مورد دوم بعدا" در فصل ستون‌ها و کمانش بحث بیشتری خواهد شد.

بعنوان مثال میله منشوری AB را در نظر بگیرید (شکل ۱ — ۲). در اثرنیروهای کششی P_1 طول میله به اندازه δ_1 و در اثر نیروهای کششی P_2 طول میله به اندازه δ_2 افزایش می‌یابد. حال اگر P_1 و P_2 همزمان بر میله اثر کنند (شکل ۱c — ۲)اضافه طول با استفاده از رابطه 1-12 برابر خواهد بود با

$$\delta = \frac{(P_1 + P_2)L}{AE} = \frac{P_1 L}{AE} + \frac{P_2 L}{AE} = \delta_1 + \delta_2$$



شکل ۱ — ۲

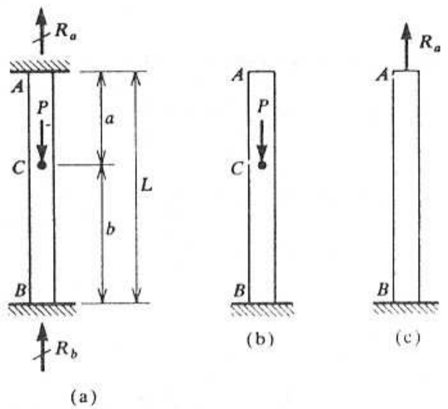
۲ — ۲ سازه‌های هیپر استاتیک

تا کنون فرض بر این بوده است که می‌توان نیروهای محوری در اعضاء یک سازه ، استفاده از معادلات تعادل بدست آورد. اما موارد دیگری وجود داردکه‌درآنها معادلا تعادل به تنهایی برای تعیین همه نیروهای داخلی و واکنش‌ها کفایت نمی‌کند. این سازه‌ها سازه‌های هیپر استاتیک یا سازه‌هایی که به طور استاتیکی نا معین می‌باشندخوا می شوند.

برای تحلیل سازه‌های هیپر استاتیک دو روش عمومی نیرو و تغییر مکان وجود د که به کمک مثال‌هایی این دو روش را شرح می‌دهیم.

مثال ۱ــ۲

میله AB شکل ۲ــ۲a در دو انتها به تکیه گاههای صلبی متصل می‌باشد و به وسیله‌بار محوری P در نقطه میانی C بارگذاری شده است. واکنش‌های R_a و R_b را که در دو انتهای میله ایجاد می‌شود تعیین کنید.



شکل ۲ــ۲

حــل : واکنش‌های R_a و R_b را نمی‌توان صرفا" از معادلات تعادل بدست آورد. تنها معادله تعادل موجود برای میله عبارتست از

$$R_a + R_b = P \qquad (2\text{-}1)$$

که دو مجهول دارد و نمی‌توان مجهولات را پیدا کرد. برای حل سازه مزبور احتیاج به معادله دیگری است که با بررسی تغییر شکل‌ها بدست می‌آید.

برای‌حل‌سازه‌های‌هیپرا ستاتیک‌دوروش‌کلی‌وجوددارد. این‌مثال‌باهردوروش‌حل‌میشود. درروش اول ابتدا ما یکی از واکنش‌ها را بعنوان‌کمیت مجهول‌انتخاب می‌کنیم. دراین‌مثال R_a را به عنوان کمیت مجهول اختیار می‌کنیم. اگر این کمیت معلوم باشد واکنش دیگر R_b از معادله 2-1 بدست می‌آید. کمیت مجهول R_a به نام واکنش اضافی خوانده میشود

زیرا هرگاه این واکنش را بر داریم سازه ایزو استاتیک و پایدار باقی می‌ماند. بدین‌ترتیب از نقطه نظر تحمل بار وارده واکنش در انتهای A لازم نیست و زائد می‌باشد. سازه‌ای که بعد از برداشتن واکنش اضافی باقی می‌ماند به نام سازه مبنا خوانده می‌شود.

حال بیاییم اثر بار P را در روی تغییر مکان نقطه A در سازه مبنا درنظربگیریم (شکل ۲ــ۲b). این تغییر مکان برابر است با

$$\delta_P = \frac{Pb}{EA}$$

که به طرف پایین می‌باشد. سپس اثر واکنش زائد R_a را در روی تغییر مکان نقطه A (شکل ۲ــ۲c) تعیین می‌کنیم. توجه کنید در این حالت R_a باید به صورت‌باری که بر سازه مبنا وارد می‌شود تصور گردد. تغییر مکان رو به بالای نقطه A دراثربار R_a برابر است با

$$\delta_R = \frac{R_a L}{EA}$$

تغییر مکان نهایی δ نقطه A تحت اثر توام بارهای P و R_a با ترکیب نمودن δ_P و δ_R بدست می‌آید. اگر تغییر مکان رو به پایین را مثبت فرض کنیم می‌توانیم بنویسیم

$$\delta = \delta_P - \delta_R$$

از آنجایی که تغییر مکان واقعی نقطه A در سازه اولیه صفر می‌باشد نتیجه می‌شود

$$\delta_R = \delta_P \qquad (2\text{-}2)$$

یا

$$\frac{R_a L}{EA} = \frac{Pb}{EA} \qquad (2\text{-}3)$$

از این رابطه واکنش R_a بدست می‌آید .

$$R_a = \frac{P\,b}{L} \qquad (2\text{-}4)$$

با جایگزینی R_a در معادله 2-1 واکنش R_b بدست می‌آید .

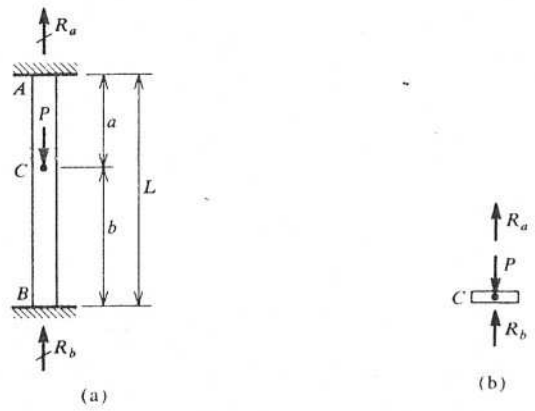
$$R_b = \frac{P\,a}{L}$$

روش مذکور در بالا برای تحلیل سازه‌های نا معین را می‌توان باین صورت خلاصه کرد . یکی از واکنش‌های نا معلوم بعنوان واکنش اضافی انتخاب می‌شود و با برداشتن این واکنش اضافی از روی سازه ، سازه مبنا تشکیل می‌شود . سپس سازه مبنا که به طور استاتیکی معین و پایدار می‌باشد تحت اثر بار واقعی P و همچنین بار واکنش اضافی قرار داده می‌شود . تغییر مکان‌های ایجاد شده بوسیله دو سیستم بار گذاری محاسبه و با یکدیگر ترکیب می‌شود تا معادله‌ای که موسوم به معادله سازگاری تغییر مکان‌ها می‌باشد بدست‌آید (معادله 2-2) . این معادله سازگاری بیان کننده یک شرط مربوط به تغییر مکان ها می‌باشد (در مثال مزبور δ برابر صفر است) . بعد از جایگزینی تغییر مکان‌ها برحسب نیروها در معادله سازگاری (معادله 2-3) واکنش مجهول بدست می‌آید (معادله 2-4) . بالاخره نیروهای نا معلوم باقی مانده به کمک معادلات تعادل بدست می‌آیند .

روش مورد بحث در بالا به نام روش نیرو خوانده می‌شود زیرا در آن یکی از نیروها به عنوان مجهول اولیه انتخاب می‌شود . روش نیرو یک روش کاملا "کلی برای حل سازه‌های هیپراستاتیک با درجات نامعینی خیلی زیاد می‌باشد (درجه نامعینی استاتیکی یا درجه هیپر استاتیکی یک سازه برابر است با تعداد نیروهای مجهول سازه منهای معادلات تعادل موجود برای سازه) .

حال مثال مزبور را با دومین روش عمومی تحلیل سازه‌های هیپر استاتیک حل میکنیم (شکل a ۳ – ۲) . در این روش ما تغییر مکان δ_C نقطه C را به عنوان کمیت نا معلوم انتخاب می‌کنیم . نیروهای R_a و R_b در قسمت های بالا و پایین میله را می‌توان بر حسب δ_C بیان نمود .

$$R_a = \frac{EA}{a}\,\delta_C \qquad ; \qquad R_b = \frac{EA}{b}\,\delta_C \qquad (2\text{-}5)$$



شکل ۳ – ۲

در معادلات فوق فرض شده است که تغییر مکان δ_C به طرف پایین مثبت باشد . در نتیجه در قسمت بالای میله کشش و در قسمت پایین آن فشار ایجاد می‌شود .

قدم بعدی جدا کردن نقطه C در میله بعنوان یک جسم آزاد (شکل b ۳–۲) و در نظر گرفتن تعادل آن می‌باشد . نیروهایی که بر جسم آزاد مربوطه وارد می‌شوند عبارتند از بار P به طرف پایین ، نیروی کششی R_a در قسمت بالا و نیروی فشاری R_b در قسمت پایین . معادله تعادل در امتداد قائم به صورت زیر نوشته می‌شود :

$$R_a + R_b = P \qquad (2\text{-}6)$$

R_a و R_b را از معادلات 2-5 در معادله 2-6 جایگزین می‌کنیم .

$$\frac{EA}{a}\,\delta_C + \frac{EA}{b}\,\delta_C = P \qquad (2\text{-}7)$$

از این رابطه δ_C بدست می‌آید .

$$\delta_C = \frac{Pab}{EAL} \qquad (2-8)$$

با داشتن δ_C واکنش‌های R_a و R_b از معادلات 2-5 بدست می‌آیند .

$$R_a = \frac{Pb}{L} \quad ; \quad R_b = \frac{Pa}{L}$$

البته این نتایج با نتایج روش قبلی یکسان می‌باشد .

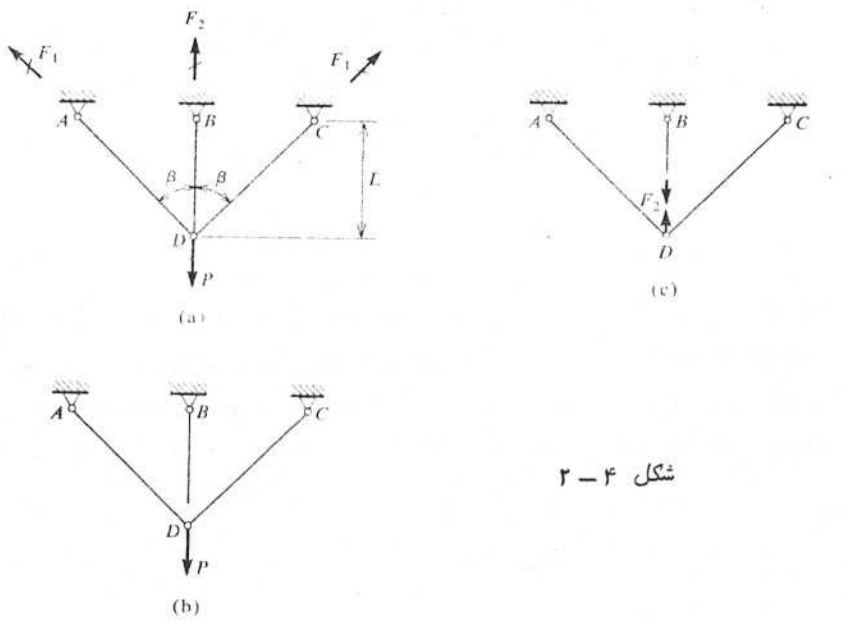
به طور خلاصه در روش دوم یک تغییر مکان مناسب بعنوان کمیت مجهول انتخاب می‌شود . این تغییر مکان باید چنان انتخاب شود که نیروها در قسمت‌های جداگانه سازه را بتوان بر حسب آن بیان نمود . سپس این نیروها در معادله تعادل ترکیب می شود (معادله 2-6) . بعد از جایگزینی نیروها برحسب تغییرمکان‌ها درمعادله تعادل (معادله 2-7) تغییرمکان مجهول بدست میآید (معادله 2-8) . سرانجام با داشتن تغییرمکان مجهول نیروها بدست می‌آیند .

این روش تحلیل سازه‌های هیپر استاتیک به نام روش تغییر مکان خوانده می‌شود زیرا در این روش یک تغییر مکان به عنوان کمیت مجهول اولیه انتخاب می‌شود . این روش نیز مانند روش نیرو یک روش کلی برای تحلیل بسیاری از سازه‌ها می‌باشد (مرجع 17) .

انتخاب هر یک از این دو روش برای تحلیل سازه‌های بزرگ بستگی به‌عوامل‌بسیاری از جمله هندسه و تعداد اتصالات دارد . به طور کلی موقعی هر یک از این دو روش بر دیگری برتری دارد که تعداد مجهول‌های اولیه آن کمتر باشد . در هنگام تحلیل سازه ها با استفاده از حسابگرهای الکترونیک روش تغییر مکان در بسیاری مواقع بر روش‌نیروبرتری دارد (مرجع 17) .

مثال ۲ – ۲

خرپای شکل a ۴ – ۲ را با استفاده از روش نیرو حل نمایید .



شکل ۴ – ۲

حـل : چون خر پا و بار گذاری روی آن متقارن است نیروهای کششی در میله‌های خارجی برابر می‌باشند . معادله تعادل نیروها را در امتداد قائم می‌نویسیم .

$$2F_1 \cos\beta + F_2 = P \qquad (2-9)$$

این معادله شامل دو نیروی مجهول F_1 و F_2 می‌باشد . از این رو یک معادله دیگرلازم است تا بتوان نیروها را بدست آورد .

در این مثال نیروی F_2 به عنوان نیروی مجهول اولیه یا نیروی اضافی‌انتخاب می‌گردد و برای اینکه این نیرو برداشته شود میله BD در انتهای پایینش بریده‌میشود . موقعی که بار P در روی سازه مبنا اثر می‌کند (شکل ۲ – ۴b) تغییر مکان به طرف

پایین‌مفصل D با استفاده‌از نمودار ویلیو برابر می‌شود با (مسئله ۲۵ – ۱ را ببینید)

$$\delta_P = \frac{PL}{2EA\cos^3\beta} \qquad (2\text{-}10)$$

در این رابطه L طول میله قائم می‌باشد و فرض شده است که تمام میله‌ها صلبیت محوری یکسان EA داشته باشند . موقعی که نیروی اضافی F_2 بر سازه مبنا (شکل c ۴–۲) اثر می‌کند میله بریده شده BD بوسیله نیروی F_2 به طرف پایین کشیده می‌شود ودر عین حال نیروی مساوی ولی مخالف نیروی مزبور بر مفصل D به طرف بالا واردمی‌آید . نیروی دومی باعث می‌شود که مفصل D به اندازه (با معادله 2-10 مقایسه کنید)

$$\delta_F = \frac{F_2L}{2EA\cos^3\beta} \qquad (2\text{-}11)$$

به طرف بالا تغییر مکان یابد . تغییر مکان کل به طرف پایین مفصل D در اثر همزمان P و F_2 برابر $\delta_P - \delta_F$ می‌باشد . باید توجه نمود که میله BD نیزبه‌اندازه $\frac{F_2L}{EA}$ اضافه طول پیدا می‌کند . شرط سازگاری تغییر مکان‌ها در مفصل D به این صورت بیان می‌شود : تغییر مکان به طرف پایین مفصل D برابر است با اضافه طول میله BD .
بنابراین

$$\delta_P - \delta_F = \frac{F_2L}{EA} \qquad (2\text{-}12)$$

با جایگزینی معادلات 2-10 و 2-11 در معادله 2-12 و حل‌معادله‌حاصل‌برای F_2 خواهیم داشت

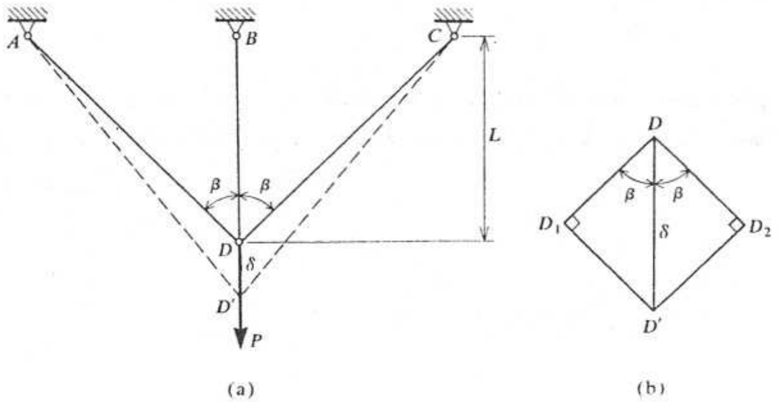
$$F_2 = \frac{P}{1 + 2\cos^3\beta}$$

سرانجام از معادله تعادل (معادله 2-9) نیروی F_1 بدست می‌آید .

$$F_1 = \frac{P\cos^2\beta}{1+2\cos^3\beta}$$

مثال ۳ – ۲

مثال ۲ – ۲ را با روش تغییر مکان حل کنید .



شکل ۵ – ۲

حل : تغییر مکان δ مفصل D را به عنوان کمیت مجهول انتخاب می‌کنیم (شکل a ۵ – ۲) . خط‌چین‌ها در شکل a ۵ – ۲ شکل تغییر مکان یافته خر پا را نشان می‌دهد . نمودار ویلیو برای مفصل D در شکل b ۵ – ۲ رسم شده است . خطوط DD_1 و DD_2 به ترتیب معرف اضافه طول میله‌های CD و AD و خط DD' معرف تغییر مکان قائم نقطه D (δ) می‌باشد . از نمودار مزبور اضافه طول میله های

مایل بر حسب δ بدست می‌آیند .

$$DD_1 = DD_2 = \delta\cos\beta$$

بنابراین نیرو در میله‌های مایل برابر است با

$$F_1 = \frac{EA\cos\beta}{L}(\delta\cos\beta) = \frac{EA\delta\cos^2\beta}{L} \qquad (2\text{-}13)$$

نیرو در میله قائم نیز مساویست با

$$F_2 = \frac{EA\delta}{L} \qquad (2\text{-}14)$$

معادلات 2-13 و 2-14 نیروهای میله‌ها را بر حسب یک کمیت مجهول یعنی تغییر مکان δ می‌دهند . حال اگر این نیروها را در معادله تعادل (معادله 2-9) جایگزین کنیم تغییر مکان δ بدست می‌آید .

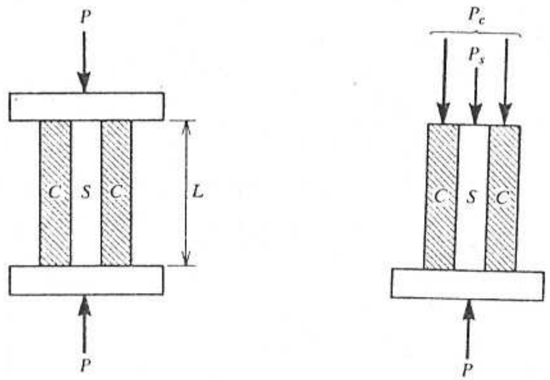
$$\frac{2EA\delta\cos^3\beta}{L} + \frac{EA\delta}{L} = P$$

$$\delta = \frac{PL}{EA}\ \frac{1}{1 + 2\cos^3\beta} \qquad (2\text{-}15)$$

با جایگزینی δ از معادله فوق در معادلات 2-13 و 2-14 نیروهای داخلی میله‌ها بدست می‌آیند . واضح است که جواب‌های حاصله همان جواب‌های مثال قبل خواهد بود .

مثال ۴ــ۲

یک استوانه فولادی و یک لوله مسی که در شکل a ۶ــ۲ به ترتیب با S و C مشخص شده‌اند بین دو سر یک ماشین آزمایش تحت فشار می‌باشند . تنش‌های ایجاد شده در فولاد و مس و کرنش فشاری ناشی از نیروی P را در جهت قائم تعیین‌کنید . صلبیت محوری استوانه فولادی و لوله مسی را به ترتیب E_sA_s و E_cA_c فرض کنید وازروش نیرو استفاده نمایید .



(a) (b)

شکل ۶ــ۲

حــل : صفحه فوقانی را بر می‌داریم تا سازه شکل b ۶ــ۲ بدست آید . نیروهای مجهول P_s و P_c که به ترتیب معرف نیروهای محوری کل در فولاد و مس می‌باشند به وسیله معادله تعادل زیر به یکدیگر ارتباط دارند :

$$P_s + P_c = P \qquad (2\text{-}16)$$

استوانه فولادی به اندازه $\frac{P_sL}{E_sA_s}$ و لوله مسی به اندازه $\frac{P_cL}{E_cA_c}$ کوتاه می‌شود . شرط سازگاری تغییر مکان‌ها در این مثال برابر بودن کاهش طول استوانه فولادی با کاهش

طول لوله مسی می‌باشد . بنابراین

$$\frac{P_s L}{E_s A_s} = \frac{P_c L}{E_c A_c} \qquad (2\text{-}17)$$

از حل همزمان دو معادله 2-16 و 2-17 نیروها در فولاد و مس بدست می‌آیند .

$$P_s = \frac{E_s A_s}{E_s A_s + E_c A_c} P \quad ; \quad P_c = \frac{E_c A_c}{E_s A_s + E_c A_c} P \qquad (2\text{-}18)$$

تنش فشاری σ_s در فولاد از تقسیم نمودن P_s بر A_s و تنش فشاری σ_c در مس از تقسیم نمودن P_c بر A_c بدست می‌آید .

$$\sigma_s = \frac{P_s}{A_s} = \frac{E_s}{E_s A_s + E_c A_c} P$$

$$\sigma_c = \frac{P_c}{A_c} = \frac{E_c}{E_s A_s + E_c A_c} P$$

کرنش فشاری ε که برای فولاد و مس یکسان می‌باشد با استفاده از قانون هـوک بدست می‌آید .

$$\varepsilon = \frac{\sigma_s}{E_s} = \frac{\sigma_c}{E_c} = \frac{P}{E_s A_s + E_c A_c} \qquad (2\text{-}19)$$

این معادله نشان می‌دهد کرنش فشاری برابر است با بار کل تقسیم بر مجموع صلبیت‌های محوری استوانه فولادی و لوله مسی .

مثال ۵ ـ ۲

مثال قبل را با روش تغییر مکان حل کنید .

حـل : تغییر مکان مجهول در این مثال تغییر مکان نسبی δ بین دو صفحه انتهایی انتخاب می‌شود که برابر است با کاهش طول استوانه فولادی و لوله مسی . نیروهای P_s و P_c بر حسب δ عبارتند از

$$P_s = \frac{E_s A_s \delta}{L} \quad ; \quad P_c = \frac{E_c A_c \delta}{L} \qquad (2\text{-}20)$$

از جایگزینی این عبارات در معادله تعادل (معادله 2-16) نتیجه می‌شود

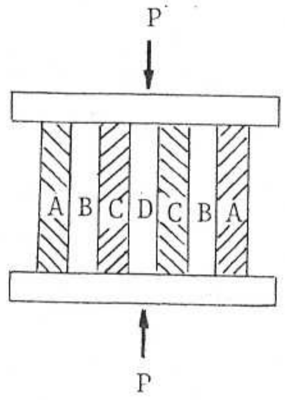
$$\frac{E_s A_s \delta}{L} + \frac{E_c A_c \delta}{L} = P$$

از این رابطه تغییر مکان δ بدست می‌آید .

$$\delta = \frac{PL}{E_s A_s + E_c A_c}$$

حال اگر مقدار δ را در روابط 2-20 قرار دهیم نیروهای P_s و P_c به دست می‌آیند . نتایج حاصله با نتایج مثال قبلی (معادله 2-18) مطابقت دارد . همچنین از تقسیم‌نمودن δ بر L کرنش ε بدست می‌آیدکه با رابطه 2-19 یکسان میباشد . مقایسه مثال‌های ۴ ـ ۲ و ۵ ـ ۲ نشان می‌دهد که از لحاظ محاسباتی بعضی مواقع اختلاف کمی بین دو روش نیرو و تغییر مکان وجود دارد . از طرف دیگر باید توجه نمود که در مسائل پیچیده تر فرق محاسباتی قابل ملاحظه‌ای می‌توانندبین دو روش وجود داشته باشد . برای مثال هر گاه سازه شکل ۶ ـ ۲ a را با اضافه نمودن استوانه‌هایی با

مصالح دیگر پیچیده‌تر کنیم (شکل ۷ ــ ۲) در این صورت روش تغییر مکان به همان سادگی مثال ۵ ــ ۲ خواهد بود ، در حالی که روش نیرو خیلی پیچیده‌تر خواهد شدو منجر به حل دستگاه معادلات خطی می‌گردد . موارد دیگری وجود دارد که در آنها روش نیرو راه حل ساده‌تری ارائه می‌دهد (برای مثال مسئله ۳ ــ ۲ را ببینید) .

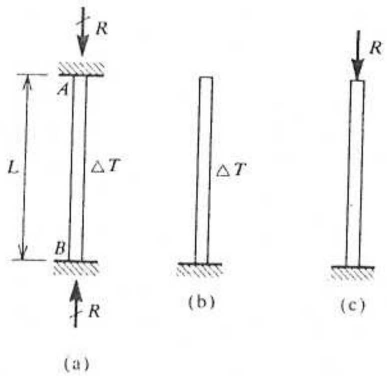


شکل ۷ ــ ۲

۲ــ۳ آثار گرمایی ، اندازه نبودن ابعاد اعضاء سازه و تغییر شکل اولیه

در سازه‌های ایزو استاتیک تغییر یکنواخت درجه حرارت در سراسر سازه تنشی در آن تولید نخواهد کرد زیرا تمام سازه می‌تواند به آزادی انبساط یا انقباض پیدا کند . از طرف دیگر تغییر درجه حرارت در سازه‌های هیپر استاتیک تولید تنشهایی موسوم به تنش‌های گرمایی می‌کند . با مقایسه میله‌ای که در یک انتها آزاد می‌باشد (برای مثال شکل ۱۰ ــ ۱ را ببینید) با میله‌ای که در هر دو انتها گیردار است (شکل a ۸ ــ ۲) می‌توان به نتیجه فوق رسید . در حالت اول ازدیاد یکنواخت درجه حرارت در سراسر میله باعث می‌شود که میله به اندازه

$$\delta = \alpha L \Delta T \qquad (2\text{-}21)$$



شکل ۸ ــ ۲

اضافه طول پیدا کند . در این رابطه α ضریب انبساط حرارتی (جدول۱ــ۲ راببینید) ، L طول میله و ΔT افزایش درجه حرارت می‌باشد . چون این اضافه طول به آزادی رخ می‌دهد در میله هیچ تنشی ایجاد نمی‌شود .

جدول ۱ ــ ۲ مقادیر نمونه ضریب انبساط حرارتی

مصالح	ضریب انبساط حرارتی $10^{-6}/°C$
فولاد	۱۱/۷
الومینیوم	۲۱/۴ ــ ۲۴
منیزیم	۲۶/۱
مس	۱۶/۷۵
بتن	۷/۲ ــ ۱۲/۶

در حالت میله هیپر استاتیک شکل a ۸ – ۲ میله نمی‌تواند ازدیاد طول پیدا کند و در نتیجه در اثر ازدیاد درجه حرارت در آن نیروی فشاری R ایجاد می‌شود. این نیرو را می‌توان با روش های حل سازه‌های هیپر استاتیک که در بخش قبل بحث شد بدست آورد.

اگر انتهای A را با برداشتن واکنش R آزاد کنیم (شکل b ۸ – ۲) تغییر مکان رو به بالای نقطه A در اثر تغییر درجه حرارت برابر $\alpha L\Delta T$ و تغییر مکان رو به پایین نقطه A در اثر نیروی R (شکل c ۸ – ۲) برابر $\frac{RL}{EA}$ می باشد. با مساوی قرار دادن این دو تغییر مکان نیروی مجهول R بدست می‌آید.

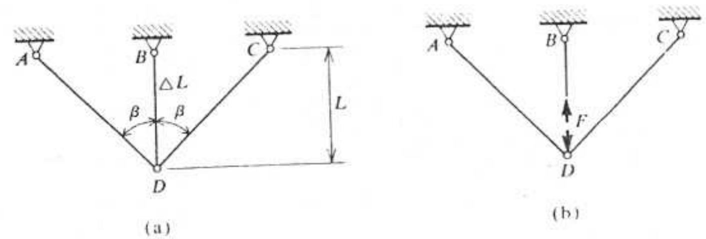
$$R = EA\alpha\Delta T$$

با داشتن R تنش و کرنش فشاری در میله به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\sigma = \frac{R}{A} = E\alpha\Delta T \quad ; \quad \varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \alpha\Delta T$$

از این مثال مشاهده می‌شود که در اثر تغییر درجه حرارت در یک سازه هیپراستاتیک حتی اگر تحت اثر هیچ نوع بار خارجی نباشد تنش ایجاد می‌گردد.

موقعی که طول یکی از اعضاء سازه درست نمی‌باشد و یا وقتی که یکی از اعضاء سازه بوسیله نیروهایی پیش تنیده شده که بعداً برداشته می‌شود وضعیتی مشابه حالت فوق به دست می‌آید. در هر دو حالت یک تغییر شکل اولیه در سازه وجود دارد که حتی بدون وجود بارهای خارجی در سازه تنش ایجاد می‌کند. برای مثال فرض کنید در خرپای شکل a ۹ – ۲ طول میله قائم بجای L برابر $L+\Delta L$ باشد. در این صورت برای وصل



شکل ۹ – ۲

کردن سه عضو به یکدیگر و سوار کردن خر پا باید میله قائم را فشرد و میله‌های مایل را کشید. فرض کنید F نیروی فشاری در میله قائم باشد (شکل b ۹ – ۲). در این صورت تغییر مکان به طرف پایین اتصال D در اثر نیروی F (از معادله 2-10) برابر است با

$$\delta_F = \frac{FL}{2EA\cos^3\beta}$$

شرط سازگاری تغییر مکان ها در اتصال D بدین صورت بیان می شود: تغییر مکان رو به پایین δ_F اتصال D برابر است با اضافه طول اولیه ΔL میله قائم منهای کاهش طول میله قائم در اثر نیروی F. بنابراین معادله سازگاری تغییر مکان ها عبارتست از

$$\frac{FL}{2EA\cos^3\beta} = \Delta L - \frac{FL}{EA}$$

از این رابطه F بدست می‌آید.

$$F = \frac{EA\Delta L}{L}\;\frac{2\cos^3\beta}{1+2\cos^3\beta} \qquad (2\text{-}22)$$

با دانستن نیروی F نیروهای داخلی میله‌های مایل به سهولت از معادله تعادل مفصل D در امتداد قائم بدست می‌آیند. دو مثال قبلی نشان دهنده این واقعیت می‌باشند که روشهای تحلیل سازه‌های هیپر استاتیک وقتی که تغییرات درجه حرارت و یا تغییرشکل اولیه وجود دارد همان روشهایی است که برای تحلیل یک سازه هیپر استاتیک تحت اثر بارهای خارجی بکار می‌رود.

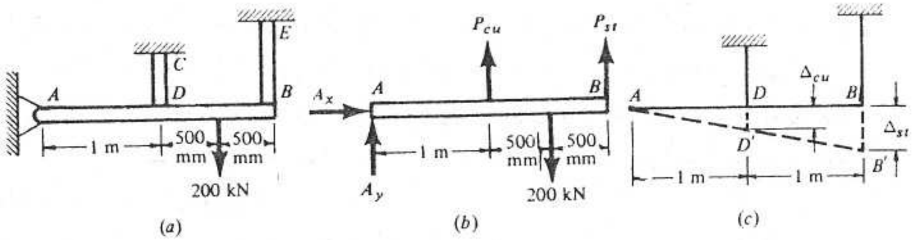
به عنوان یک مثال نهایی مجدداً " خر پای شکل a ۹ – ۲ را در نظر می‌گیریم و این بار فرض می‌کنیم که میله قائم حرارت داده شده بطوریکه درجه حرارت آن به اندازه

ΔT اضافه شود . اثر ناشی از این اضافه درجه حرارت در نیروهای میله‌های خر پا همان اثر طویل تر بودن میله وسطی به اندازه ΔL می‌باشد به شرط اینکه ΔL برابر انبساط حرارتی میله وسطی وقتی که به آزادی بتواند انبساط پیدا کند اختیار شود . به عبارت دیگر برای اینکه نیروی میله وسط را در اثر تغییر درجه حرارت مزبور بدست آوریم کافی است در معادله 2-22 به جای ΔL کمیت $\alpha L \Delta T$ را قرار دهیم .

۲ – ۴ مسائل حل شده

مسئله ۱ – ۲

میله AB در شکل a ۱۰ – ۲ کاملا" صلب فرض می‌شود و قبل از اینکه بار 200kN مطابق شکل بر آن وارد شود افقی می‌باشد . اتصال A مفصلی و میله AB به وسیله میله فولادی EB و میله مسی CD نگهداشته شده است . طول CD و EB به ترتیب 1m و 2m می‌باشد . مساحت سطح مقطع CD برابر $500\ mm^2$ و مساحت سطح مقطع EB برابر $250\ mm^2$ می‌باشد . تنش‌ها را در هر یک از میله‌های قائم تعیین کنید . از وزن AB صرف نظر نمایید . ضریب ارتجاعی مس $120\times10^9\ N/m^2$ و ضریب ارتجاعی فولاد $200\times10^9\ N/m^2$ می‌باشد .



شکل ۲ – ۱۰

حل : اولین قدم در حل این مسئله رسم نمودار جسم آزاد AB می باشد (شکل b ۱۰ – ۲) . از دو معادله تعادل نیروها در امتداد افق و قائم و معادله تعادل لنگری حول نقطه A نتیجه می‌شود

$$\Sigma F_h = A_x = 0$$

$$\Sigma F_v = A_y + P_{cu} + P_{st} - 200\times10^3 = 0$$

$$\Sigma M_A = 1000P_{cu} + 2000P_{st} - 200\times10^3(1500) = 0 \qquad (1)$$

چون دو معادله آخر دارای سه مجهول می‌باشند سازه مزبور یک درجه هیپراستاتیک است و ما مجبوریم تغییر شکل سازه را مطالعه کنیم . چون میله AB صلب است تنها حرکتی که می‌تواند داشته باشد دورانی به صورت جسم صلب حول نقطه A می باشد . خط منقطع در شکل c ۱۰ – ۲ موقعیت نهایی میله AB را پس از اینکه بار 200kN بر آن وارد شود نشان می‌دهد . در ابتدا میله به صورت افقی است که با خط پر AB در این شکل نشان داده شده است .

چون میله AB صلب می‌باشد با استفاده از مثلث‌های مشابه ´ADD و ´ABB رابطه ساده‌ای بین اضافه طول میله مسی CD (Δ_{cu}) و اضافه طول میله فولادی EB (Δ_{st}) وجود دارد .

$$\frac{\Delta_{st}}{\Delta_{cu}} = \frac{BB'}{DD'} = \frac{AB}{AD} = \frac{2}{1} = 2$$

این معادله همان معادله سازگاری تغییر مکان ها می‌باشد که آن را به صورت زیر می‌نویسیم (تغییر مکان ها را بر حسب نیروهای داخلی میله‌ها بیان می‌کنیم) :

$$\Delta_{st} = 2\Delta_{cu}$$

$$\frac{P_{st}(2000)}{(250)(200\times10^9\times10^{-6})} = \frac{2P_{cu}(1000)}{(500)(120\times10^9\times10^{-6})}$$

$$P_{st} = 0.833P_{cu} \qquad (2)$$

از حل همزمان معادلات 1 و 2 نیروهای داخلی میله‌ها بدست می‌آیند .

$$P_{cu} = 112.5\text{kN} \qquad ; \qquad P_{st} = 94\text{kN}$$

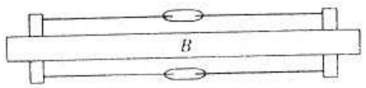
بالاخره از تقسیم کردن نیرو بر مساحت سطح مقطع تنش‌های مربوطه بدست می‌آید .

$$\sigma_{cu} = \frac{112.5 \times 10^3}{500} = 225\,\text{MPa}$$

$$\sigma_{st} = \frac{94 \times 10^3}{250} = 376\,\text{MPa}$$

مسئله ۲ — ۲

میله B در شکل ۱۱ — ۲ دارای طول L ، ضریب ارتجاعی E و سطح مقطع A می‌باشد . دو کابل با بست‌های قورباغه‌ای مطابق شکل به دو انتهای میله متصل گردیده‌اند . هر یک از کابل‌ها به طول L ، ضریب ارتجاعی E_c و سطح مقطع A_c می‌باشد . گام دنده‌های بست‌های قورباغه‌ای با عمل مضاعف برابر p می‌باشد . برای اینکه میله B



شکل ۱۱ — ۲

به تنش یکنواخت σ_0 پیش تنیده شود هر یک از بست‌های قورباغه‌ای را چند دور باید چرخاند ؟

حل : فرض می‌کنیم نیرو در میله B برابر F_b و در هر یک از کابل‌ها برابر F_c باشد . در این صورت معادله تعادل به صورت زیر نوشته می‌شود :

$$F_b = 2F_c$$

در اثر چرخاندن بست‌های قورباغه‌ای میله B تحت فشار قرار می گیرد وطول آن کم می‌شود و کابل‌ها تحت کشش قرار گرفته و طولشان اضافه می‌شود . بنابراین اگر هر یک از بست‌های قورباغه‌ای را n دور بچرخانیم شرط سازگاری تغییر مکان‌ها به صورت زیر نوشته می‌شود :

2np = کاهش طول میله B + ازدیاد طول هر یک از کابل ها

$$F_b = A\sigma_0$$

$$F_c = \frac{1}{2} F_b = \frac{1}{2} A\sigma_0$$

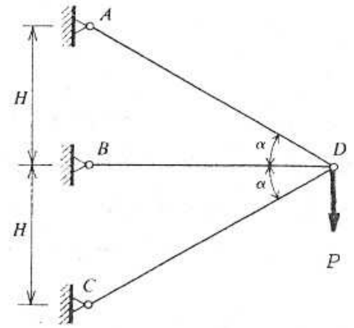
مقادیر نیروها را در معادله سازگاری قرار می‌دهیم .

$$\frac{\frac{1}{2}A\sigma_0 L}{E_c A_c} + \frac{A\sigma_0 L}{EA} = 2np$$

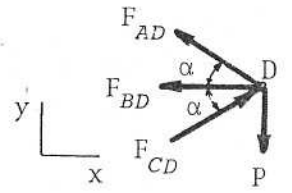
$$n = \frac{\sigma_0 L}{2pE}\left(1 + \frac{EA}{2E_c A_c}\right)$$

مسئله ۳ــ۲

سه میله AD ، BD و CD که صلبیت محوری یکنواخت EA دارند تشکیل خر پایی مطابق شکل ۱۲ ــ ۲ می‌دهند . نیروهای ایجاد شده در ۳ میله و موءلفه‌های افقی و قائم تغییر مکان مفصل D را در اثر بار P تعیین کنید .



شکل ۱۲ ــ ۲



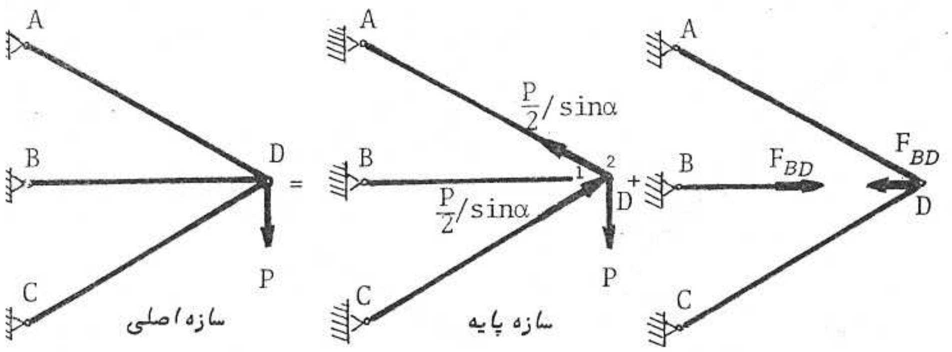
دیاگرام جسم آزاد مفصل D

حــل : حل این مسئله به روش نیرو ساده‌تر است چون تعداد نا معینی استاتیکی خر پای فوق یک می‌باشد . با استفاده از نمودار جسم آزاد مفصل D معادلات تعادل نیروها در امتداد افق و قائم را می‌نویسیم .

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0 \quad : \quad -F_{BD} + (F_{CD} - F_{AD})\cos\alpha = 0 \qquad (1)$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0 \quad : \quad (F_{AD} + F_{CD})\sin\alpha - P = 0 \qquad (2)$$

برای حل این مسئله به روش نیرو میله BD را عضو زائد اختیار می‌کنیم و آن را درمحل اتصال D می‌بریم (شکل ۱۳ ــ ۲) . سمت چپ محل برش را نقطه 1 و سمت راست محل برش را نقطه 2 می‌نامیم . در این صورت شرط سازگاری تغییر مکان‌ها با مساوی قرار



شکل ۱۳ ــ ۲

دادن موءلفه افقی تغییر مکان دو نقطه 1 و 2 (در اتصال D) بدست می‌آید .

$$\delta_{Dh_1} = \delta_{Dh_2} \qquad (3)$$

$$\delta_{Dh_1} = \frac{F_{BD} H \cot\alpha}{AE} \qquad (4)$$

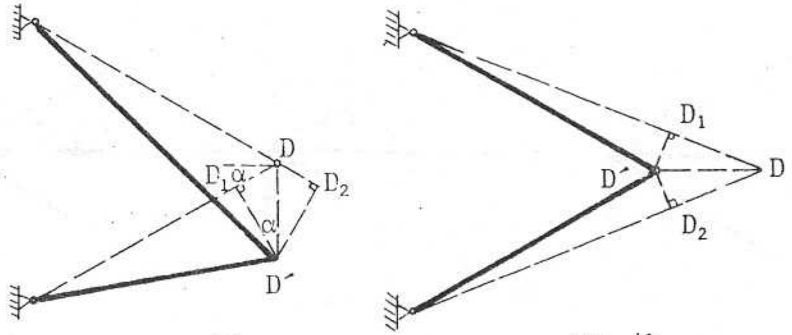
$$\delta_{Dh_2} = (\delta_{Dh})_P + (\delta_{Dh})_{F_{BD}} \qquad (5)$$

تغییر مکان افقی نقطه 2 در اثر نیروی F_{BD} + تغییر مکان افقی‌نقطه 2 در اثر بار

محاسبه $(\delta_{Dh})_P$: (شکل a)

$$DD_1 = DD_2 = \frac{\frac{P}{2\sin\alpha} H/\sin\alpha}{AE} = \frac{PH}{2AE\sin^2\alpha}$$

$$(\delta_{Dh})_P = 0 \qquad (6)$$



شکل (a) شکل (b)

چون $DD_1=DD_2$ است تغییر مکان DD' قائم می‌باشد و موءلفه افقی ندارد .

محاسبه $(\delta_{Dh})_{F_{BD}}$: (شکل b)

$$DD_1 = DD_2 = \frac{\frac{F_{BD}}{2\cos\alpha}\,\frac{H}{\sin\alpha}}{AE} = \frac{F_{BD}H}{2AE\cos\alpha\sin\alpha}$$

$$(\delta Dh)_{F_{BD}} = DD' = \frac{DD_1}{\cos\alpha} = \frac{F_{BD}H}{2AE\cos^2\alpha\sin\alpha} \qquad (7)$$

از معادله سازگاری، رابطه (3) ، با استفاده از روابط (4) تا (7) خواهیم داشت

$$\frac{F_{BD}H\cot\alpha}{AE} = \frac{F_{BD}H}{2AE\sin\alpha\cos^2\alpha} \quad : \quad F_{BD} = 0$$

$$(1)\&(2) \Longrightarrow F_{AD} = F_{CD} = \frac{P}{2\sin\alpha}$$

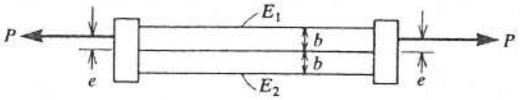
چون $F_{BD}=0$ می‌باشد موءلفه‌های افقی و قائم تغییر مکان مفصل D از شکل a بدست می‌آیند .

موءلفه افقی تغییر مکان مفصل D : $\delta_{Dh} = 0$

موءلفه قائم تغییر مکان مفصل D : $\delta_{Dv} = DD' = \frac{DD_1}{\sin\alpha} = \frac{PH}{2AE\sin^3\alpha}$

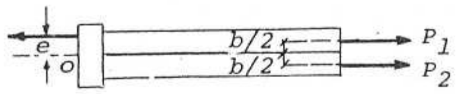
مسئله ۴ — ۲

میله‌ای با سطح مقطع مربع شکل از دو میله با مصالح مختلف به ضرایب ارتجاعی E_1 و E_2 ساخته شده است . هر دو میله سطح مقطع یکسان دارند . بافرض‌اینکه صفحات انتهایی تغییر شکل ناپذیر باشند رابطه‌ای برای خروج از مرکز e بار P بدست آورید بطوریکه هر دو میله در کشش یکنواخت باشند (فرض کنید $E_1 > E_2$) .



شکل ۱۴ — ۲

حل : فرض می‌کنیم نیروی داخلی در میله فوقانی P_1 و در میله تحتانی P_2 باشد . موقعی که هردو میله‌در کشش یکنواخت می‌باشند نیروهای P_1 و P_2 ازمرکزسطح هر یک از میله‌ها عبور خواهند کرد (مطابق شکل ۱۵ — ۲) . از شرط تعادل نیروها در امتداد افق نتیجه می‌شود



شکل ۱۵ — ۲

$$P_1 + P_2 = P \qquad (1)$$

از شرط تعادل لنگر نیروها حول نقطه O داریم

$$Pe - P_1 \frac{b}{2} + P_2 \frac{b}{2} = 0 \qquad (2)$$

و بالاخره شرط سازگاری تغییر مکان‌ها با مساوی قرار دادن تغییر مکان یا ازدیاد طول میله 1 با ازدیاد طول میله 2 بدست می‌آید.

$$\delta_1 = \delta_2$$

$$\frac{P_1 L}{AE_1} = \frac{P_2 L}{AE_2}$$ (سطح مقطع هر یک از میله‌ها = A)

$$\frac{P_1}{E_1} = \frac{P_2}{E_2} \qquad (3)$$

$$(1) \,\&\, (2) \Longrightarrow \begin{cases} P_1 + P_2 = P \\ P_1 - P_2 = \dfrac{2Pe}{b} \end{cases}$$

از حل این دستگاه معادلات خواهیم داشت

$$P_1 = P\left(\frac{1}{2} + \frac{e}{b}\right) \quad ; \quad P_2 = P\left(\frac{1}{2} - \frac{e}{b}\right)$$

مقادیر P_1 و P_2 را در معادله (3) قرار می‌دهیم.

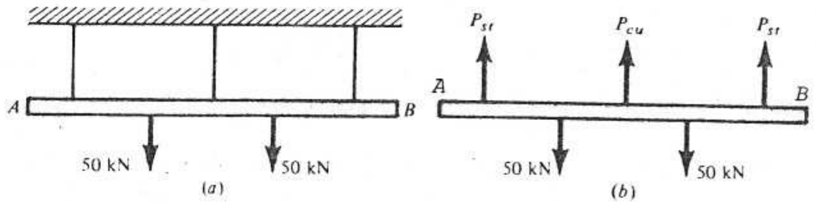
$$\frac{P\left(\frac{1}{2} + \frac{e}{b}\right)}{E_1} = \frac{P\left(\frac{1}{2} - \frac{e}{b}\right)}{E_2}$$

از این معادله e بدست می‌آید.

$$e = \frac{E_1 - E_2}{E_1 + E_2}\,\frac{b}{2}$$ (با فرض اینکه $E_1 > E_2$)

مسئله ۵ — ۲

میله AB کاملا" صلب و بوسیله سه میله دیگر مطابق شکل a ۱۶—۲ نگهداشته شده است. دو میله خارجی فولادی هستند و سطح مقطع هر یک از آنها $250\ mm^2$ می باشد. میله مرکزی از مس است و سطح مقطع آن $10^3\ mm^2$ می باشد. برای فولاد $E = 200 \times 10^9\ N/m^2$ و برای مس $E = 120 \times 10^9\ N/m^2$. طول همه میله ها 2m است. میله‌ها در فواصل مساوی قرار دارند و دو نیروی 50 kN در وسط فاصله بین میله‌ها بر AB وارد شده است. با صرف نظر کردن از وزن میله AB نیروی داخلی هر یک از میله‌های قائم را تعیین کنید.



شکل ۱۶ – ۲

حـل : در شکل b ۱۶ – ۲ نمودار جسم آزاد AB رسم شده است. به دلیل تقارن، نیروها در دو میله خارجی مساوی می‌باشند. از معادله تعادل در امتداد قائم نتیجه می‌شود

$$2P_{st} + P_{cu} = 100 \qquad (1)$$

به علت تقارن سازه و بارگذاری روی آن میله AB پس از بارگذاری افقی باقی می‌ماند. به عبارت دیگر اضافه طول میله‌های فولادی با اضافه طول میله مسی یکسان می‌باشد.

$$\Delta_{st} = \Delta_{cu}$$

$$\frac{P_{st}(2000)}{250(200\times10^{9}\times10^{-6})} = \frac{P_{cu}(2000)}{10^{3}(120\times10^{9}\times10^{-6})}$$

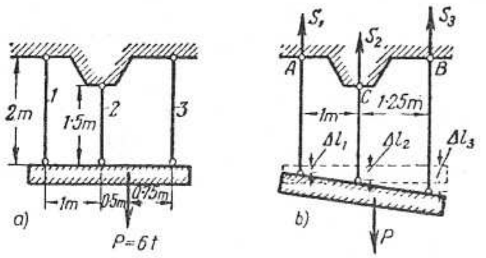
$$P_{st} = 0.417P_{cu} \qquad (2)$$

از حل همزمان معادله تعادل 1 و معادله سازگاری تغییر مکانهای 2 نیروها بدست می‌آیند.

$$P_{cu} = 54.5\ kN \quad ; \quad P_{st} = 22.75\ kN$$

مسئله ۶ – ۲

در شکل a ۱۷ – ۲ میله صلبی بوسیله سه میله آویزان شده است و تحت اثر بار $P = 6t$ قرار دارد. میله 1 از مس با مساحت سطح مقطع $1cm^2$، میله 2 از فولاد با مساحت سطح مقطع $2cm^2$ و میله 3 از الومینیوم با مساحت سطح مقطع $1.5cm^2$ می‌باشد. تنشها را در هر یک از میله‌ها تعیین کنید. ضرائب ارتجاعی مس، فولاد و الومینیوم به ترتیب $1\times10^6 Kg/cm^2$ ، $2\times10^6 Kg/cm^2$ و $0.7\times10^6 Kg/cm^2$ می‌باشد.



شکل ۱۷ – ۲

حـل : وضعیت نهایی سازه در شکل b ۱۷ – ۲ نشان داده شده است. معادلات تعادل لنگری حول نقاط A و B عبارتند از

$$\Sigma M_A = -(S_2\times1) - (S_3\times2.25) + (P\times1.5) = 0 \qquad (1)$$

$$\Sigma M_B = (S_1\times2.25) + (S_2\times1.25) - (P\times0.75) = 0 \qquad (2)$$

برای نوشتن معادله سازگاری تغییر مکان‌ها از ذوزنقه شکل b ۱۷ – ۲ استفاده می‌کنیم .

$$\frac{\Delta l_3 - \Delta l_1}{2.25} = \frac{\Delta l_2 - \Delta l_1}{1}$$

این معادله به صورت زیر مرتب می‌شود :

$$1.25\Delta l_1 - 2.25\Delta l_2 + \Delta l_3 = 0$$

تغییر مکان‌ها را بر حسب نیروها بیان می‌کنیم .

$$1.25\,\frac{S_1\times 200}{10^6\times 1} - 2.25\,\frac{S_2\times 150}{2\times 10^6\times 1.5} + \frac{S_3\times 200}{0.7\times 10^6\times 2} = 0$$

این معادله پس از ساده کردن به صورت زیر در می‌آید :

$$2.5S_1 - 1.125S_2 + 1.43S_3 = 0 \qquad (3)$$

از حل معادلات 1 ، 2 و 3 نیروهای داخلی میله‌ها بدست می‌آیند .

$$S_1 = 0.018P = 0.018(6000) = 110Kg$$

$$S_2 = 0.568P = 0.568(6000) = 3410Kg$$

$$S_3 = 0.414P = 0.414(6000) = 2480Kg$$

حال مقادیر محاسبه شده را کنترل می‌کنیم .

$$\Sigma S = 110 + 3410 + 2480 = 6000Kg = P \quad \checkmark$$

تنش‌ها در میله‌ها عبارتند از

$$\sigma_1 = \frac{S_1}{A_1} = \frac{110}{1} = 110 \quad Kg/cm^2$$

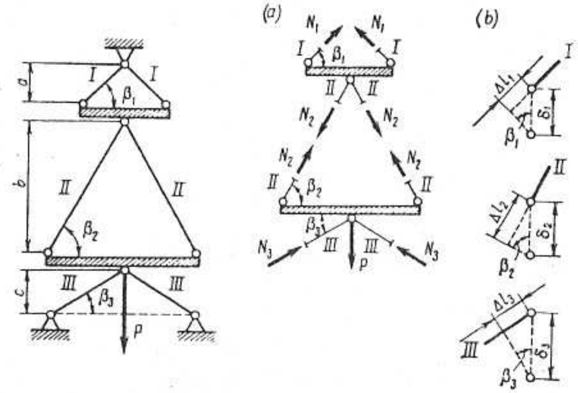
$$\sigma_2 = \frac{S_2}{A_2} = \frac{3410}{1.5} = 2270 \quad Kg/cm^2$$

$$\sigma_3 = \frac{S_3}{A_3} = \frac{2480}{2} = 1240 \quad Kg/cm^2$$

مسئله ۷ – ۲

در شکل ۱۸ – ۲ میله‌ها از فولاد با تنش مجاز $\sigma_w = 1600Kg/cm^2$ و ضریب ارتجاعی $E = 2\times10^6 Kg/cm^2$ و سطح مقطع آنها $A_1 = 12cm^2$ ، $A_2=14cm^2$ و $A_3 = 16cm^2$ می‌باشد . حداکثر بار مجاز P_w را تعیین کنید ، $a= 0.4\ m$ ، $b = 1.2\ m$ ، $c = 0.4\ m$ ، $\beta_1= 45°$ ، $\beta_2=60°$ و $\beta_3 = 30°$.

حل : بین نیروهای میله‌ها ، N_1 ، N_2 و N_3 ، دو معادله تعادل زیروجود دارد :



شکل ۱۸ – ۲

$$2N_1\sin\beta_1 = 2N_2\sin\beta_2$$

$$2N_2\sin\beta_2 + 2N_3\sin\beta_3 = P$$

شرط سازگاری تغییر مکان ها بدین صورت بیان می‌شود : تغییر مکان نقطه اثر بار P در اثر ازدیاد طول میله‌های 1 و 2 باید برابر با تغییر مکان نقطه مزبور در اثر کاهش طول میله‌های 3 باشد (چون ارتفاع تمام سازه ثابت است) .

$$\delta_1 + \delta_2 = \delta_3$$

بر اساس قانون هوک می‌توانیم بنویسیم

$$\delta_1 = \frac{\Delta l_1}{\sin\beta_1} = \frac{N_1 l_1}{E_1 A_1 \sin\beta_1}$$

$$\delta_2 = \frac{\Delta l_2}{\sin\beta_2} = \frac{N_2 l_2}{E_2 A_2 \sin\beta_2}$$

$$\delta_3 = \frac{\Delta l_3}{\sin\beta_3} = \frac{N_3 l_3}{E_3 A_3 \sin\beta_3}$$

از هندسه سازه داریم

$$l_1 = \frac{a}{\sin\beta_1} \quad ; \quad l_2 = \frac{b}{\sin\beta_2} \quad ; \quad l_3 = \frac{c}{\sin\beta_3}$$

مقادیر فوق را در معادله سازگاری تغییر مکان‌ها جایگزین می‌کنیم .

$$\frac{N_1 a}{E_1 A_1 \sin^2\beta_1} + \frac{N_2 b}{E_2 A_2 \sin^2\beta_2} = \frac{N_3 c}{E_3 A_3 \sin^2\beta_3}$$

حال از مقادیر عددی مسئله استفاده می‌کنیم .

$$\sin\beta_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad ; \quad \sin\beta_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad ; \quad \sin\beta_3 = \frac{1}{2}$$

$$\frac{a}{A_1 \sin^2\beta_1} = \frac{40\times4}{12\times2} = \frac{20}{3} \quad 1/cm$$

$$\frac{b}{A_2 \sin^2\beta_2} = \frac{120\times4}{14\times3} = \frac{80}{7} \quad 1/cm$$

$$\frac{c}{A_3 \sin^2\beta_3} = \frac{40\times4}{16\times1} = 10 \quad 1/cm$$

با جایگزینی مقادیر عددی فوق در معادلات تعادل و سازگاری تغییر مکان‌ها نتیجه میشود

$$\sqrt{2}\, N_1 = \sqrt{3}\, N_2$$

$$\sqrt{3}\, N_2 + N_3 = P$$

$$14\, N_1 + 24\, N_2 = 21\, N_3$$

از حل دستگاه معادلات فوق ابتدا نیروها و سپس تنش‌ها بدست می‌آیند .

$$N_1 = 0.332P \quad ; \quad N_2 = 0.27P \quad ; \quad N_3 = 0.53P$$

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{0.332P}{12} = 0.0276P$$

$$\sigma_2 = \frac{0.27P}{14} = 0.0193P$$

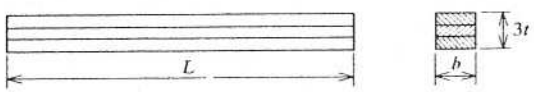
$$\sigma_3 = \frac{0.53P}{16} = 0.0331P$$

چون تنش ماکزیمم σ_3 نباید از تنش مجاز تجاوز کند بار مجاز برابر است با

$$P \le \frac{\sigma_w}{0.0331} = \frac{1600}{0.0331} = 48340Kg = 48.3t$$

مسئله ۸ – ۲

میله‌ای دو فلزی شامل یک هسته مسی متصل به دو نوار فولادی در بالا و پایین آن می‌باشد که به اندازه T درجه به طور یکنواخت گرما داده می‌شود (شکل ۱۹ – ۲) . با فرض اینکه عرض میله b ، طول میله L و ضخامت هر نوار t باشدتنش‌های‌ایجاد شده در فولاد و مس را تعیین کنید . ضرایب انبساط حرارتی برای فولاد و مس به ترتیب α_s و α_c ($\alpha_c > \alpha_s$) و ضرایب ارتجاعی فولاد و مس به ترتیب E_s و E_c می باشد .



شکل ۱۹ – ۲

حل : فرض می‌کنیم σ_c تنش در نوار مسی و σ_s تنش در نوار فولادی باشد . چون ضریب انبساط حرارتی مس از فولاد بیشتر می‌باشد نوار مسی‌نسبت‌به‌نوارهای‌فولادی تمایل به انبساط بیشتر دارد ولی نوارهای فولادی از انبساط کامل نوار مسی جلوگیری می‌کنند . در نتیجه نوار مسی تحت فشار قرار می‌گیرد و نوارهای فولادی کشیده می‌شوند .

$P_s = 2tb\sigma_s$ نیروی کششی در نوارهای فولادی

نیروی فشاری در نوار مسی $\qquad P_c = bt\sigma_c$

چون نیروی محوری خارجی وجود ندارد داریم :

$$P_s + P_c = 0 \qquad : \qquad 2\sigma_s + \sigma_c = 0$$

اگر مقادیر تنش‌ها را به صورت حسابی در نظر بگیریم این رابطه به صورت زیر نوشته می شود :

$$\sigma_c = 2\sigma_s \qquad (1)$$

فرمول تغییر شکل میله‌های تحت کشش یا فشار یکنواخت را به صورت زیر می‌نویسیم :

$$\delta = \frac{PL}{AE} = \frac{\sigma L}{E}$$

ازدیاد طول نوارهای فولادی در اثر تنش σ_s :

$$\delta_s = \frac{\sigma_s L}{E_s}$$

کاهش طول نوار مسی در اثر تنش σ_c :

$$\delta_c = \frac{\sigma_c L}{E_c}$$

شرط سازگاری تغییر مکان‌ها :

$$\delta_s + \delta_c = \alpha_c LT - \alpha_s LT$$

$$\frac{\sigma_s L}{E_s} + \frac{\sigma_c L}{E_c} = \alpha_c LT - \alpha_s LT$$

$$\frac{\sigma_s}{E_s} + \frac{\sigma_c}{E_c} = \alpha_c T - \alpha_s T \qquad (2)$$

از حل معادلات 1 و 2 نتیجه می‌شود

کششی

$$\sigma_s = \frac{(\alpha_c - \alpha_s)TE_sE_c}{E_c + 2E_s}$$

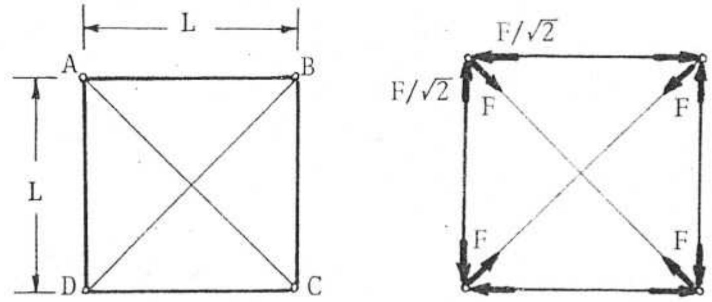
فشاری

$$\sigma_c = \frac{2(\alpha_c - \alpha_s)TE_sE_c}{E_c + 2E_s}$$

مسئله ۹ – ۲

میله‌های خارجی خر پای شکل ۲۰ – ۲ از الومینیوم (با ضریب ارتجاعی $E_a = 7\times10^5 Kg/cm^2$ و ضریب انبساط حرارتی $\alpha_a = 21.6\times10^{-6}\ /°C$) و قطرهایش از سیم‌های فولادی (با ضریب ارتجاعی $E_s = 2.1\times10^6 Kg/cm^2$ و ضریب انبساط حرارتی $\alpha_s = 11.7\times10^{-6}/°C$) تشکیل شده است . مساحت سطح مقطع میله‌های الومینیومی و سیم‌های فولادی نسبت 20/1 دارند . اگردرجه‌حرارت‌خرپا به اندازه 44.5°C اضافه شود تنش را در سیم‌های فولادی تعیین کنید .

حل : به علت $\alpha_a > \alpha_s$ میله‌های خارجی نسبت به قطرها می‌خواهند طویل‌تر



شکل ۲۰ — ۲

شوند ولی به علت متصل بودن به قطرها نمی‌توانند . در نتیجه میله‌های خارجی تحت فشار و قطرهای سیمی تحت کشش قرار می‌گیرند .

A = سطح مقطع سیم‌های فولادی

F = کشش در سیم‌ها (قطرها)

$F/\sqrt{2}$ = فشار در میله‌های خارجی

ازدیاد طول سیم‌های فولادی یا ازدیاد طول هر یک از قطرها تحت اثر نیروی کشش سیم‌ها

$$\delta_1 = \frac{F\sqrt{2}\,L}{AE_s}$$

کاهش طول هر یک از قطرها تحت اثر نیروهای فشاری در میله‌های خارجی

$$\delta_2 = \frac{\frac{F}{\sqrt{2}}L}{20AE_a} \Big/ \cos 45°$$

شرط سازگاری تغییر مکان‌ها در اتصالات A ، B ، C و D :

$$\delta_1 + \delta_2 = (\alpha_a - \alpha_s)\sqrt{2}\,L\Delta T$$

$$\frac{F\sqrt{2}\,L}{AE_s} + \frac{FL}{20AE_a} = (\alpha_a - \alpha_s)\sqrt{2}\,L\Delta T$$

تنش در سیم‌های فولادی :

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{\sqrt{2}\,(\alpha_a - \alpha_s)\Delta T}{\frac{\sqrt{2}}{E_s} + \frac{1}{20E_a}}$$

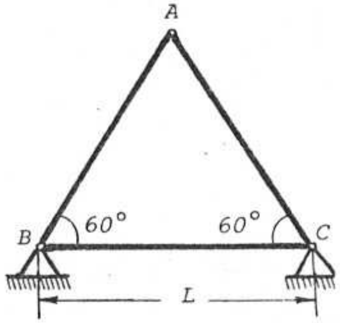
$$= \frac{\sqrt{2}\,(21.6 - 11.7)10^{-6}(44.5)}{\frac{\sqrt{2}}{2.1\times10^{6}} + \frac{1}{14\times10^{6}}} = 836.4\ \mathrm{Kg/cm^2}$$

مسئله ۱۰ — ۲

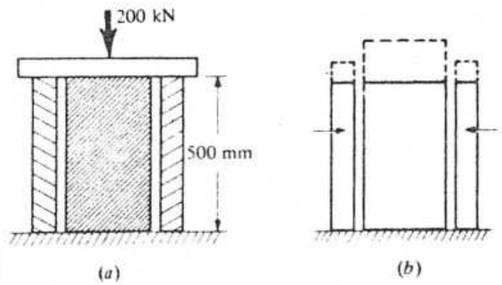
اعضای خرپای شکل ۲۱ — ۲ از فلزی‌با ضریب ارتجاعی E و ضریب انبساط حرارتی α تشکیل شده است . سطح مقطع میله‌های AB و AC برابر A و سطح مقطع میله BC برابر $A/2$ می‌باشد . فاصله بین تکیه گاههای B و C برابر L است . اگر درجه حرارت به اندازه ΔT کاهش یابد تنش‌های کششی یا فشاری‌ایجادشده‌درمیله‌های AB ، AC و BC را حساب کنید .

حل : چون میله‌های AB و AC در اثر تغییر درجه حرارت‌می‌توانند به‌آزادی تغییر مکان یابند در آنها نیرو و تنشی ایجاد نمی‌شود .

$$\sigma_{AB} = \sigma_{AC} = 0$$



شکل ۲۱ – ۲



شکل ۲۲ – ۲

اما در میله BC در اثر کاهش درجه حرارت تنش کششی ایجاد می‌شود که مقدار آن برابر است با (F_{BC} نیروی داخلی میله BC و δ تغییر شکل ناشی‌ازآن میباشد)

$$\sigma_{BC} = \frac{F_{BC}}{\frac{1}{2}A} = \frac{\frac{AE\delta}{2L}}{\frac{1}{2}A} = \frac{E\delta}{L}$$

اگر میله BC آزاد بود به اندازه $\delta = \alpha L \Delta T$ کاهش طول می‌یافت بنابراین تنش ناشی از کاهش درجه حرارت به اندازه ΔT در میله BC برابر است با

$$\sigma_{BC} = \frac{E(\alpha L \Delta T)}{L} = E\alpha\Delta T \qquad (\text{کششی})$$

مسئله ۱۱ – ۲

یک استوانه فولادی تو خالی استوانه مسی توپری را مطابق شکل a ۲۲ – ۲ در بر می‌گیرد و بار 200 kN بر مجموعه وارد می‌شود . مساحت سطح مقطع فولاد $2000\,mm^2$ و مساحت سطح مقطع مس $5000\,mm^2$ می‌باشد . قبل از وارد شدن بار، هر دو استوانه طول یکسان دارند . تعیین کنید چه افزایش درجه حرارتی لازم است تا تمام بار به‌وسیله استوانه مسی حمل شود . صفحه‌ای که در بالای مجموعه قرار دارد صلب فرض می شود . برای مس $E=120\times10^9\,N/m^2$ و $\alpha = 20\times10^{6}\,C^{-1}$ وبرای فولاد $E=200\times10^9\,N/m^2$ و $\alpha = 12\times10^{-6}\,C^{-1}$.

حل : فرض می‌کنیم بار و همچنین صفحه فوقانی برداشته شود و دستگاه بتواند در اثر اضافه درجه حرارت ΔT به آزادی انبساط پیدا کند . در این صورت انتهای فوقانی استوانه‌ها در وضعیتی قرار می‌گیرند که در شکل b ۲۲–۲ با خطوط منقطع نشان داده شده است . استوانه مسی بیش از استوانه فولادی منبسط می‌شود زیرا ضریب انبساط حرارتی مس از فولاد بیشتر می‌باشد . انبساط رو به بالای استوانه فولادی برابر $(12\times10^{-6})(500)\Delta T$ و انبساط رو به بالای استوانه مسی برابر $(20\times10^{-6})(500)\Delta T$ می باشد . البته این وضعیت واقعی نیست زیرا بار 200 kN هنوز وارد نشده است . اگر تمام این بار محوری بوسیله استوانه مسی تحمل شود در این صورت فقط استوانه مسی فشرده می‌شود و مقدار این فشردگی برابر است با

$$\Delta_{cu} = \frac{PL}{AE} = \frac{(200)(10^3)(500)}{(5000)(120\times10^9\times10^{-6})}$$

بنابراین بر اساس شرایط مسئله می‌توانیم بنویسیم

$$(20\times10^{-6})(500)\Delta T - \Delta_{cu} = (12\times10^{-6})(500)\Delta T$$

از حل معادله فوق ΔT بدست می‌آید .

$$\Delta T = 41.6°C$$

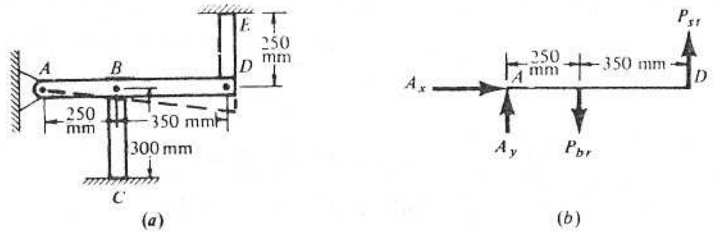
مسئله ۱۲ – ۲

میله صلب AD در تکیه گاه A مفصلی و به دو میله BC و ED مطابق شکل a ۲۳ – ۲ متصل می‌باشد . سازه مزبور در ابتدا بدون تنش می‌باشد و ازوزن همه میله‌ها صرف نظر می‌گردد . درجه حرارت میله BC به اندازه $25°C$ کاهش و درجه حرارت میله ED به اندازه $25°C$ افزایش داده می‌شود . با صرف‌نظر کردن از کمانش جانبی ، تنش‌ها را در میله‌های BC و ED پیدا کنید .

برای BC که برنجی است $E = 90\times10^{9} N/m^2$ و $\alpha = 20\times10^{-6} C^{-1}$

و برای ED که فولادی است $E = 200\times10^{9} N/m^2$ و $\alpha = 12\times10^{-6} C^{-1}$

مساحت سطح مقطع BC و ED به ترتیب $500 \ mm^2$ و $250 \ mm^2$ می‌باشد .



شکل ۲۳ – ۲

حل : در شکل b ۲۳ – ۲ نمودار جسم آزاد AD رسم شده است . نیروهای میله‌های BC و ED به ترتیب با P_{br} و P_{st} نشان داده شده است . چون AD

مانند جسم صلبی دوران می‌کند (خط منقطع در شکل a ۲۳ – ۲) بین کاهش طول میله BC (Δ_{br}) و افزایش طول میله ED (Δ_{st}) رابطه زیربرقراراست

$$\frac{\Delta_{br}}{250} = \frac{\Delta_{st}}{600} \qquad (1)$$

تغییر طول کل میله BC شامل کاهش طول ناشی از افت درجه حرارت و افزایش طول ناشی از نیروی محوری P_{br} می‌باشد . تغییر طول کل میله DE شامل افزایش طول ناشی از افزایش درجه حرارت و افزایش طول ناشی از نیروی محوری P_{st} میباشد . بنابراین

$$\Delta_{br} = -(20\times10^{-6})(300)(25) + \frac{P_{br}(300)}{(500)(90\times10^{9}\times10^{-6})} \qquad (2)$$

$$\Delta_{st} = (12\times10^{-6})(250)(25) + \frac{P_{st}(250)}{(250)(200\times10^{9}\times10^{-6})} \qquad (3)$$

پس از جایگزینی معادلات 2 و 3 در معادله 1 و ساده نمودن حاصل میشود

$$3.2P_{br} - P_{st} = 87000 \qquad (4)$$

معادله تعادل لنگری AD حول نقطه A :

$$250P_{br} - 600P_{st} = 0 \qquad (5)$$

از حل معادلات 4 و 5 نیروها و سپس تنش‌ها محاسبه می‌شوند .

$$P_{st} = 13024\ N \quad ; \quad P_{br} = 31257\ N$$

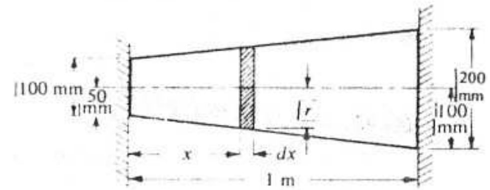
$$\sigma_{st} = \frac{13024}{250} = 52.1\ MPa$$

$$\sigma_{br} = \frac{31257}{500} = 62.5\ MPa$$

مسئله ۱۳ـ۲

میله فولادی شکل ۲۴ ــ ۲ که به شکل مخروط ناقص می‌باشد در دو انتها گیر دار است . میله در ابتدا بدون تنش می‌باشد . اگر درجه حرارت تمام میله به اندازه $20°C$ تنزل کند حداکثر تنش عمودی را در میله تعیین کنید .

فرض کنید $E = 200000 MN/m^2$ و $\alpha = 12\times10^{-6} C^{-1}$.



شکل ۲۴ ــ ۲

حل . ... حل این مسئله ابتدا فرض کنید یک انتهای میله (مثلا" انتهای راست) آزاد باشد . در این صورت میله به اندازه $(20)(1000)(12\times10^{-6})=0.24mm$

در اثر تنزل درجه حرارت منقبض می‌شود . حال برای اینکه شرایط حدی مسئله را قانع کنیم باید نیروی P را بر انتهای آزاد میله وارد کنیم به طوریکه در اثر آن میله‌به‌اندازه $0.24\ mm$ افزایش طول پیدا کند . با توجه به شکل و مختصات انتخاب شده

$$r = 50 + \frac{50x}{1000} = 50 + \frac{x}{20}$$

با فرض اینکه شیب جدار مخروط ناقص کم باشد رابطه زیر بین اضافه طول میله و P وجود دارد

$$0.24 = \int_0^{1000} \frac{Pdx}{\pi r^2 E} = \int_0^{1000} \frac{Pdx}{\pi (50 + \frac{x}{20})^2 E}$$

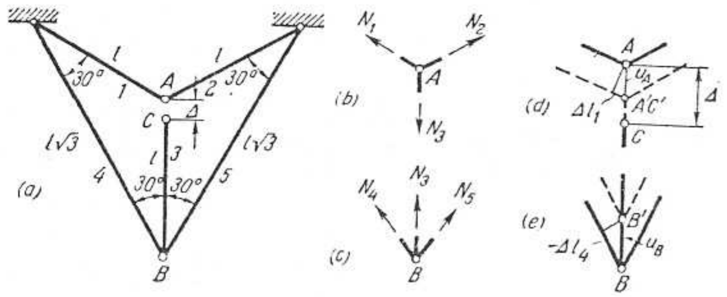
پس از انتگرال گیری

$$0.24 = \frac{400P}{2000\pi E}$$

از این رابطه $P = 750\ kN$ بدست می‌آید . نیروی محوری کششی P در سراسر میله ثابت است ولی تنش در طول آن تغییر می‌کند . حداکثر تنش در انتهای چپ میباشد که برابر است با

$$\sigma_{max} = \frac{750\times10^3}{\pi(50)^2} = 95.4\ MPa$$

در هنگام سوار کردن قطعات یک خرپا (شکل a ۲۵ – ۲) مشاهده می‌شود که در طول میله‌ها بی دقتی وجود دارد و بین نقاط A و C فاصله Δ ایجاد می گردد. با متصل کردن نقاط A و C به یکدیگر میله‌ها جا داده می‌شوند. نیروهای ایجادشده در خرپا را پس از سوار کردن تعیین کنید.



شکل ۲۵ – ۲

حل : خرپای مزبور پنج عضو دارد درنتیجه تعداد نیروهای مجهول پنج میباشد. در هر یک از اتصالات A و B دو معادله تعادل وجود دارد. بنابراین خرپا یک‌درجه هیپر استاتیک است.

از شرایط تعادل اتصالات A و B (شکل‌های b ۲۵ – ۲ و c ۲۵ – ۲) داریم

$$N_1 = N_2 = N_3 \qquad (1)$$

$$N_4 = N_5 \qquad (2)$$

$$N_3 + 2N_4 \cos 30^\circ = 0 \qquad (3)$$

فرض کنید پس از سوار کردن قطعات خرپا مفصل A به اندازه u_A به‌طرف پایین

تغییر مکان یابد و به نقطه ´A منتقل شود و مفصل B به اندازه u_B به طرف بالا تغییر مکان یابد و به نقطه ´B منتقل شود (شکل‌های d ۲۵ – ۲ و e ۲۵ – ۲). در این صورت بین اضافه طول میله 1 (Δl_1) و u_A و همچنین کاهش طول میله 4 (Δl_4) و u_B روابط زیر بر قرار است :

$$\Delta l_1 = u_A \sin 30^\circ \quad ; \quad \Delta l_4 = -u_B \cos 30^\circ \qquad (4)$$

اضافه طول میله وسط برابر است با

$$\Delta l_3 = \Delta - u_A - u_B \qquad (5)$$

پس از حذف u_A و u_B در روابط 4 و 5 معادله زیر بدست می‌آید :

$$\Delta l_3 = \Delta - 2\Delta l_1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \Delta l_4$$

تغییر مکان‌ها را در معادله فوق بر حسب نیروها بیان می‌کنیم.

$$2N_1 - 2N_4 + N_3 = \frac{\Delta}{l} EA \qquad (6)$$

EA در این رابطه طلبیت محوری هر یک از میله‌ها می‌باشد. از حل معادلات 1 ، 2 ، 3 و 6 نیروهای مجهول به دست می‌آیند.

$$N_1 = N_2 = N_3 = \frac{\sqrt{3}}{2 + 3\sqrt{3}} \frac{\Delta}{l} EA$$

$$N_4 = N_5 = -\frac{1}{2 + 3\sqrt{3}} \frac{\Delta}{l} EA$$

مسئله ۱۵ – ۲

در خرپای شکل ۱۸ – ۲ (مسئله ۷ – ۲) هر گاه درجه‌حرارت به‌اندازه $\Delta t=40°C$ افزایش یابد تنش‌های ایجاد شده در میله‌ها را حساب کنید . ضریب انبساط حرارتی همه میله‌ها یکسان و برابر $\alpha= 12.5\times10^{-6}C^{-1}$ می‌باشد .

حل : از شرایط تعادل (شکل a ۲۶ – ۲) معادلات زیر نتیجه می‌شود :

$$2N_1\sin\beta_1 = 2N_2\sin\beta_2 \qquad (1)$$

$$2N_2\sin\beta_2 = 2N_3\sin\beta_3 \qquad (2)$$

از شرط سازگاری تغییر مکان ها (شکل b ۲۶ – ۲) معادله زیر حاصل می‌شود :

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = 0$$

که در آن

$$\delta_1 = \frac{\Delta l_1}{\sin\beta_1} \quad ; \quad \delta_2 = \frac{\Delta l_2}{\sin\beta_2} \quad ; \quad \delta_3 = \frac{\Delta l_3}{\sin\beta_3}$$

$$\Delta l_1 = l_1\alpha_1\Delta t - \frac{N_1 l_1}{E_1A_1} \quad ; \quad \Delta l_2 = l_2\alpha_2\Delta t - \frac{N_2 l_2}{E_2A_2}$$

$$\Delta l_3 = l_3\alpha_3\Delta t - \frac{N_3 l_3}{E_3A_3}$$

بنابراین معادله سازگاری تغییر مکان‌ها به صورت زیر در می‌آید :

$$\frac{a}{\sin^2\beta_1}\left(\alpha\Delta t - \frac{N_1}{EA_1}\right) + \frac{b}{\sin^2\beta_2}\left(\alpha\Delta t - \frac{N_2}{EA_2}\right)$$

$$+ \frac{c}{\sin^2\beta_3}\left(\alpha\Delta t - \frac{N_3}{EA_3}\right) = 0 \qquad (3)$$

با بکار بردن مقادیر عددی و استفاده از روابط $\sigma_1=N_1/A_1$ ، $\sigma_2 = N_2/A_2$ و $\sigma_3 = N_3/A_3$ معادلات 1 تا 3 به صورت زیر ساده می‌شوند

$$6\sqrt{2}\ \sigma_1 = 7\sqrt{3}\ \sigma_2$$

$$7\sqrt{3}\ \sigma_2 = 8\sigma_3$$

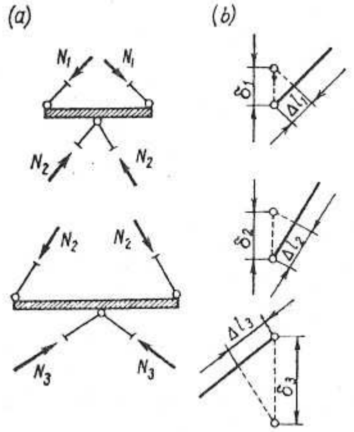
$$\sigma_1 + 2\sigma_2 + 2\sigma_3 = 5000$$

از حل این دستگاه معادلات تنش‌ها در میله‌ها بدست می‌آیند .

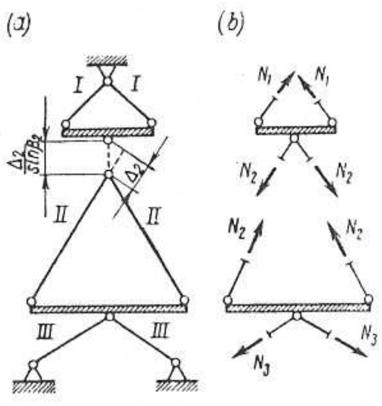
$$\sigma_1 = 1105\ Kg/cm^2$$

$$\sigma_2 = 774\ Kg/cm^2$$

$$\sigma_3 = 1172\ Kg/cm^2$$



شکل ۲۶ — ۲



شکل ۲۷ — ۲

مسئله ۱۶ — ۲

در خرپای شکل ۱۸ — ۲ (مسئله ۷ — ۲) هرگاه میله‌های 2 به اندازه $\Delta_2 = 1.2\ \mathrm{mm}$ از طول طرح شده کوتاه‌تر ساخته شده باشند تنش‌های ایجاد شده در خرپا را در موقع سوار کردن حساب کنید (شکل ۲۷ — ۲) .

حل : با توجه به شکل ۲۷ b — ۲ معادلات تعادل عبارتند از

$$2N_1\sin\beta_1 = 2N_2\sin\beta_2 \tag{1}$$

$$2N_2\sin\beta_2 = 2N_3\sin\beta_3 \tag{2}$$

با توجه به مسئله قبل معادله سازگاری تغییر مکان‌ها به صورت زیر نوشته می‌شود :

$$\frac{\Delta l_1}{\sin\beta_1} + \frac{\Delta l_2}{\sin\beta_2} + \frac{\Delta l_3}{\sin\beta_3} = \frac{\Delta_2}{\sin\beta_2}$$

و یا بر حسب تنش‌ها

$$\frac{\sigma_1 a}{\sin^2\beta_1} + \frac{\sigma_2 b}{\sin^2\beta_2} + \frac{\sigma_3 c}{\sin^2\beta_3} = E\frac{\Delta_2}{\sin^2\beta_2} \tag{3}$$

معادلات 1 تا 3 پس از جایگزینی مقادیر عددی به صورت زیر ساده می‌شوند :

$$6\sqrt{2}\,\sigma_1 = 7\sqrt{3}\,\sigma_2$$

$$7\sqrt{3}\,\sigma_2 = 8\sigma_3$$

$$\sigma_1 + 2\sigma_2 + 2\sigma_3 = 4000$$

از حل دستگاه معادلات فوق تنش‌ها به دست می‌آیند .

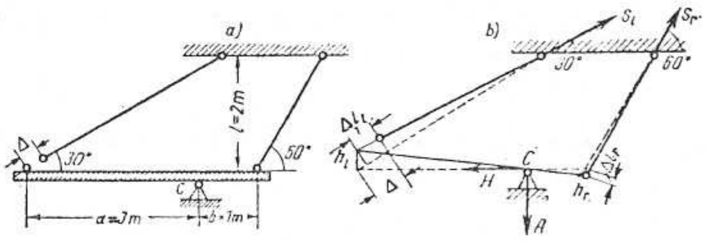
$$\sigma_1 = 886\ \mathrm{Kg/cm^2}$$

$$\sigma_2 = 620\ \mathrm{Kg/cm^2}$$

$$\sigma_3 = 939\ \mathrm{Kg/cm^2}$$

مسئله ۱۷ – ۲

میله صلبی (شکل a ۲۸ – ۲) به وسیله تکیه گاه مفصلی C و دو مهار فولادی با سطح مقطع یکسان نگهداشته شده است . مهار سمت چپ به اندازه $\Delta = 1\ mm$ کوچکتر از اندازه طرح شدهٔ ساخته شده است . تنش‌ها را در مهارها پس از سوار کردن سازه پیدا کنید . برای فولاد $E = 2\times10^6 Kg/cm^2$.



شکل ۲۸ – ۲

حـل : پس از سوار کردن سازه ، میله صلب به حالت مایل شکل b ۲۸ – ۲ در خواهد آمد . میله سمت چپ به اندازه Δl_1 و میله سمت راست به اندازه Δl_r اضافه طول پیدا خواهد کرد . در دو میله چپ و راست به ترتیب نیروهای S_1 و S_r ایجاد خواهد شد . از معادله تعادل لنگری حول نقطه C حاصل می‌شود

$$S_1 a \sin 30° = S_r b \sin 60°$$

$$S_r = \frac{a\sin 30°}{b\sin 60°} S_1 = \frac{3\times 0.5}{1\times 0.866} S_1 = 1.73\, S_1 \qquad (1)$$

با توجه به شکل b ۲۸ – ۲ شرط سازگاری تغییر مکان‌ها به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\frac{h_1}{h_r} = \frac{a}{b} = 3$$

ولـی

$$h_1 = \frac{\Delta - \Delta l_1}{\sin 30°} \quad ; \quad h_r = \frac{\Delta l_r}{\sin 60°}$$

بنابراین

$$\frac{(\Delta - \Delta l_1)\sin 60°}{\sin 30°\ \Delta l_r} = 3$$

پس از ساده کردن

$$1.73\ \Delta l_r + \Delta l_1 = \Delta$$

اضافه طول های Δl_1 و Δl_r را بر حسب نیروهای S_1 و S_r بیان می‌کنیم .

$$1.73\ \frac{S_r l}{EA\sin 60°} + \frac{S_1 l}{EA\sin 30°} = \Delta$$

پس از ساده کردن

$$S_r + S_1 = \frac{\Delta EA}{2l} \qquad (2)$$

معادلات 1 و 2 را بر حسب تنش‌های میله‌ها $\sigma_1 = S_1/A$ و $\sigma_r = S_r/A$ بیان می‌کنیم.

$$\sigma_r = 1.73\sigma_1 \quad ; \quad \sigma_r + \sigma_1 = \frac{\Delta E}{2l}$$

از حل معادلات فوق تنشها به دست می‌آیند.

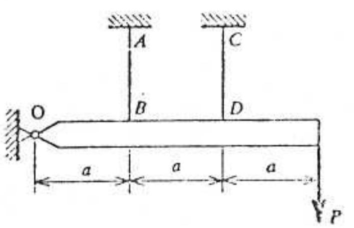
$$\sigma_1 = 0.184\ \frac{\Delta E}{l} = \frac{0.184(0.1)(2\times10^6)}{200} = 184\ \mathrm{Kg/cm^2}$$

$$\sigma_r = 0.317\ \frac{\Delta E}{l} = \frac{0.317(0.1)(2\times10^6)}{200} = 317\ \mathrm{Kg/cm^2}$$

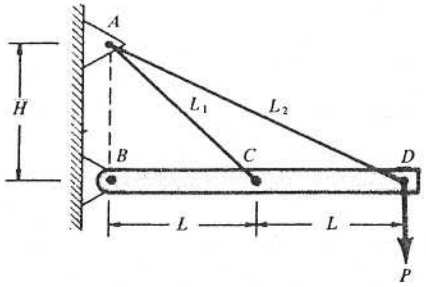
۲ــ۵ مسائل حل نشده

مسئله ۱ــ۲ــ۲ میله صلبی به طول $3a$ به وسیله دو کابل مشابه AB و CD نگاهداشته شده است. سطح مقطع هر یک از کابلها $A = 20\ \mathrm{cm^2}$ می باشد و بار $P = 25000\ \mathrm{Kg}$ در انتهای میله وارد می‌شود. تنشها را در کابل ها پیدا کنید.

مسئله ۲ــ۲ــ۲ در شکل ۲ــ۲ــ۲ میله صلب BD به وسیله سیم‌های AC و AD نگهداشته شده است. سیم‌ها در ابتدا بدون تنش می‌باشند و از وزن همه‌قطعات صرف‌نظر می‌شود. ضریب ارتجاعی هر دو سیم یکسان می‌باشد. پس از اینکه بار P در نقطه D



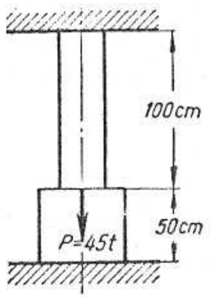
شکل ۱ــ۲ــ۲



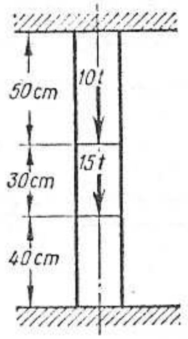
شکل ۲ــ۲ــ۲

وارد شود نیروهای کششی ایجاد شده در هر یک از سیم ها را حساب کنید.

مسئله ۳ــ۲ــ۲ ستون شکل ۳ــ۲ــ۲ در دو انتهای فوقانی و تحتانی گیر دار و دارای سطح مقطع $10\ \mathrm{cm^2}$ در قسمت فوقانی و $40\ \mathrm{cm^2}$ در قسمت تحتانی می‌باشد. تنشها را در هر یک از قسمت‌های ستون تعیین کنید.



شکل ۳ــ۲ــ۲



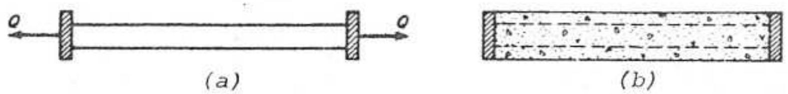
شکل ۴ــ۲ــ۲

مسئله ۴ــ۲ــ۲ میله شکل ۴ــ۲ــ۲ در دو انتها گیر دار می‌باشد و سطح مقطع آن $10\ \mathrm{cm^2}$ است. تنش ها را در قسمت‌های مختلف میله حساب کنید.

مسئله ۵ – ۲ – ۲ مساحت سطح مقطع بتن در یک ستون بتن مسلح کوتاه $645\ cm^2$ می‌باشد . در ستون مزبور چهار میله فولادی طولی که مساحت سطح مقطع هر یک $10\ cm^2$ می‌باشد به‌طور متقارن به کار رفته است . اگر تنش مجاز بتن $80\ Kg/cm^2$ و تنش‌مجاز فولاد $1400\ Kg/cm^2$ باشد بار مجاز ستون را محاسبه کنید . ضرائب ارتجاعی فولاد و بتن به ترتیب $2\times10^6 Kg/cm^2$ و $2\times10^5 Kg/cm^2$ می‌باشد .

مسئله ۶ – ۲ – ۲ یک ستون بتنی با مقطع مربع به وسیله چهار میله فولادی مسلح‌شده است . مساحت سطح مقطع میله‌های فولادی یک در صد مساحت سطح مقطع ستون‌می‌باشد . تنش مجاز برای بتن $60\ Kg/cm^2$ و برای فولاد $1200 Kg/cm^2$ است . نسبت‌ضریب ارتجاعی فولاد به ضریب ارتجاعی بتن 10 می‌باشد . ستون بار 100 t را حمل می‌کند . عرض ستون و قطر میله‌ها چقدر باید باشد ؟

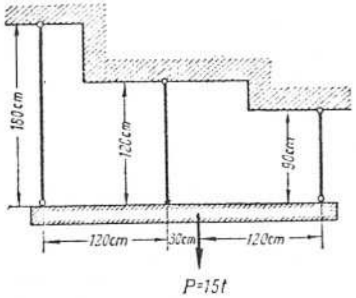
مسئله ۷ – ۲ – ۲ تیرهای بتنی پیش تنیده به صورت زیر ساخته می‌شوند : کابل‌های فولادی بین دو صفحه انتهایی طلب تحت تنش کششی σ_0 کشیده می شوند (شکل a ۷ – ۲ – ۲) . سپس بتن در اطراف کابل‌ها ریخته می‌شود تا تیر شکل b ۷ – ۲ – ۲ بدست آید . بعد از اینکه بتن گرفت نیروهای خارجی Q برداشته‌میشود تا بتن پیش تنیده گردد . اگر ضرائب ارتجاعی فولاد و بتن به نسبت 12 به 1 و مساحت سطح مقطع آنها به نسبت 1 به 15 باشد تنش‌های باقی مانده نهایی را در دو مصالح حساب کنید .



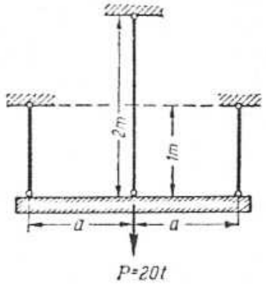
شکل ۷ – ۲ – ۲

مسئله ۸ – ۲ – ۲ تا ۱۲ – ۲ – ۲ در هر یک از شکل‌های ۸ – ۲ – ۲ تا ۱۲ – ۲ – ۲ جسم صلبی بوسیله تعدادی میله فولادی نگهداشته شده است . با فرض اینکه ضریب ارتجاعی فولاد $E = 2\times10^6 Kg/cm^2$ و تنش مجاز آن $1600\ Kg/cm^2$ باشد مساحت

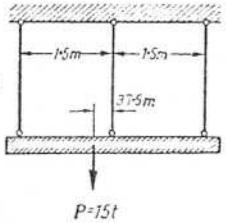
سطح مقطع لازم میله‌ها را تعیین کنید . سطح مقطع میله‌ها یکسان می‌باشد .



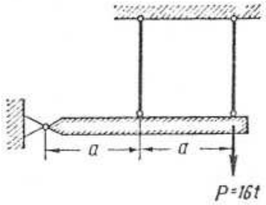
شکل ۸ – ۲ – ۲



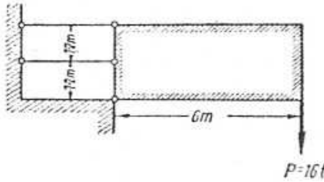
شکل ۹ – ۲ – ۲



شکل ۱۰ – ۲ – ۲



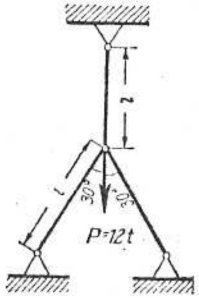
شکل ۱۱ – ۲ – ۲



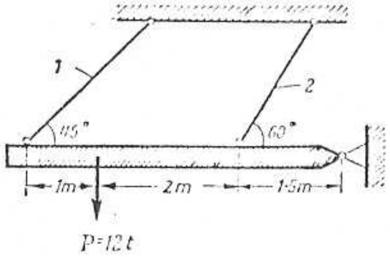
شکل ۱۲ – ۲ – ۲

مسئله ۱۳ – ۲ – ۲ در شکل ۱۳ – ۲ – ۲ سه عضو خر پا دارای سطح مقطع یکسان‌می‌باشند . با فرض اینکه ضریب ارتجاعی و تنش مجاز آنها به ترتیب $2\times10^6 Kg/cm^2$ و $1600\ Kg/cm^2$ باشد مساحت سطح مقطع آنها را تعیین کنید .

مسئله ۱۴ – ۲ – ۲ جسم صلبی بوسیله‌دوکابل‌فولادی‌باضریب‌ارتجاعی $2\times10^6 Kg/cm^2$ و تنش مجاز $1600\ Kg/cm^2$ آویزان می‌باشد (شکل ۱۴ – ۲ – ۲) . کابل 1 باید سطح مقطعی دو برابر سطح مقطع کابل 2 داشته باشد . مساحت سطح مقطع هر یک از کابل ها را تعیین کنید .

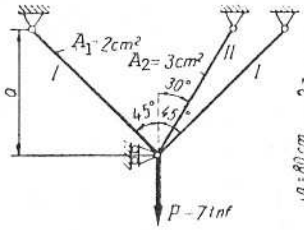


شکل ۱۳ – ۲ – ۲

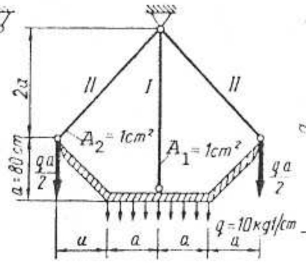


شکل ۱۴ – ۲ – ۲

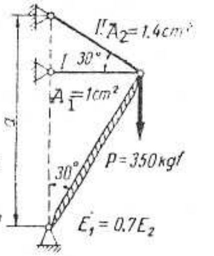
مسئله ۱۵ – ۲ – ۲ تا ۲۳ – ۲ – ۲ در شکل‌های ۱۵ – ۲ – ۲ تا ۲۳ – ۲ – ۲ تنش‌ها را در میله‌ها تعیین کنید. اگر ضریب ارتجاعی E مشخص نمی باشد آن را برای تمام میله‌ها یکسان فرض کنید.



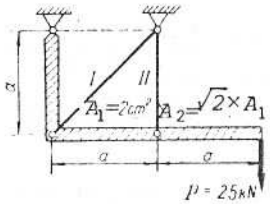
شکل ۱۵ – ۲ – ۲



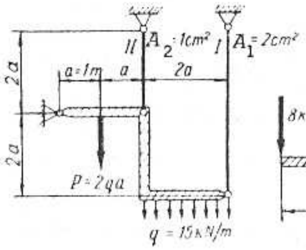
شکل ۱۶ – ۲ – ۲



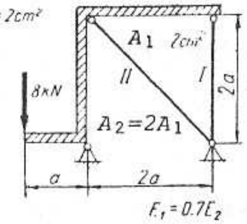
شکل ۱۷ – ۲ – ۲



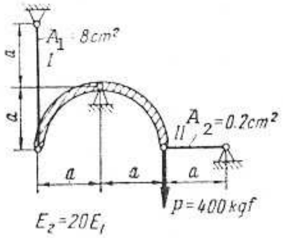
شکل ۱۸ – ۲ – ۲



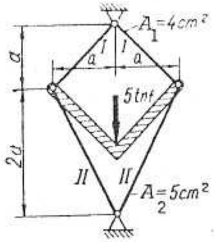
شکل ۱۹ – ۲ – ۲



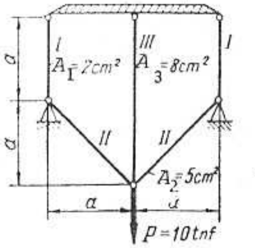
شکل ۲۰ – ۲ – ۲



شکل ۲۱ – ۲ – ۲



شکل ۲۲ – ۲ – ۲

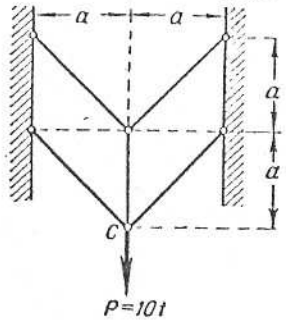


شکل ۲۳ – ۲ – ۲

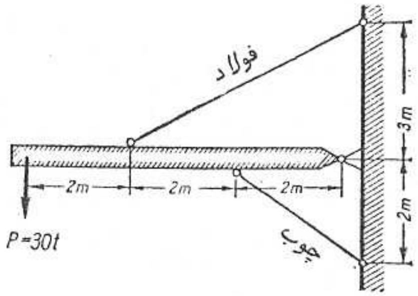
مسئله ۲۴ – ۲ – ۲ در شکل ۲۴ – ۲ – ۲ تغییر مکان قائم مفصل C را محاسبه کنید. مساحت سطح مقطع هر یک از میله‌ها $5cm^2$ می‌باشد، $a=1m$، $E=2\times10^6Kg/cm^2$.

مسئله ۲۵ – ۲ – ۲ در شکل ۲۵ – ۲ – ۲ میله صلبی به وسیله یک اتصال مفصلی، یک مهار فولادی و یک ستون چوبی به دیوار متصل شده است. اگر مساحت سطح مقطع ستون ده برابر مساحت سطح مقطع مهار فولادی و تنش های مجاز فولاد و چوب به ترتیب $1600\ Kg/cm^2$ و $60Kg/cm^2$ باشد مساحت سطح مقطع آنها را تعیین کنید. ضرائب ارتجاعی فولاد و چوب به ترتیب $2\times10^6Kg/cm^2$ و $10^5Kg/cm^2$ می‌باشند.

مسئله ۲۶ – ۲ – ۲ درسازه شکل ۲۶ – ۲ – ۲ میله 1 ازچدن باتنش مجاز $800Kg/cm^2$، میله 2 از مس با تنش مجاز $600\ Kg/cm^2$ و میله 3 از فولاد با تنش مجاز $1200Kg/cm^2$ می‌باشد. مساحت سطح مقطع میله‌های 1 و 2 یکسان و مساحت سطح مقطع میله 3 نصف مساحت سطح مقطع میله‌های 1 و 2 است. ضرائب ارتجاعی چدن، مس وفولاد به‌ترتیب $1.2\times10^6Kg/cm^2$، $10^6Kg/cm^2$ و $2\times10^6Kg/cm^2$ می‌باشد. مساحت سطح مقطع هر یک از میله‌ها را تعیین کنید.



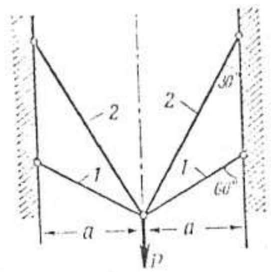
شکل ۲۴ – ۲ – ۲



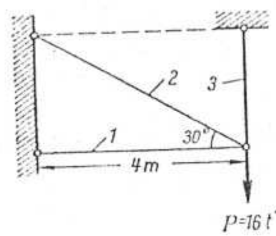
شکل ۲۵ – ۲ – ۲

مسئله ۲۷ ـ ۲ ـ ۲ در سازه شکل ۲۷ ـ ۲ ـ ۲ میله‌های 1 از فولاد با سطح مقطع $10cm^2$ و میله‌های 2 از مس با سطح مقطع $20\ cm^2$ می‌باشند تنش مجاز فولاد $1600\ Kg/cm^2$ و تنش مجاز مس $600\ Kg/cm^2$ می‌باشد. ضرائب ارتجاعی فولاد و مس به ترتیب برابر $2\times10^6 Kg/cm^2$ و $10^6 Kg/cm^2$ است. بار مجاز P_w را تعیین کنید.

مسئله ۲۸ ـ ۲ ـ ۲ سازه صلب شکل ۲۸ ـ ۲ ـ ۲ به وسیله یک مفصل و دو میله به فونداسیون متصل شده است. میله 1 از فولاد (با تنش مجاز $1600\ Kg/cm^2$ و ضریب ارتجاعی $2\times10^6 Kg/cm^2$) و میله 2 از چدن (باتنش مجاز $1000Kg/cm^2$ و ضریب ارتجاعی $1.2\times10^6 Kg/cm^2$) می‌باشد. مساحت سطح مقطع میله‌های فولادی و چدنی به ترتیب $30\ cm^2$ و $50\ cm^2$ می‌باشد. حداکثر بار مجاز P را تعیین کنید.



شکل ۲۷ ـ ۲ ـ ۲

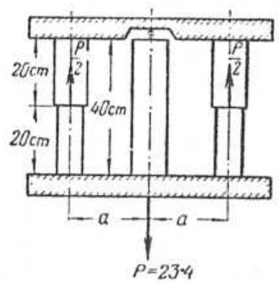


شکل ۲۶ ـ ۲ ـ ۲

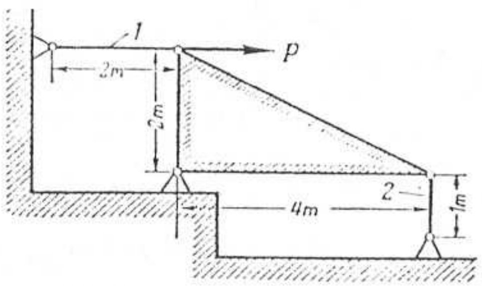
مسئله ۲۹ ـ ۲ ـ ۲ دو میله صلب به وسیله سه میله مطابق شکل ۲۹ ـ ۲ ـ ۲ به یکدیگر متصل شده‌اند. میله‌های کناری از فولاد با سطح مقطع قسمت فوقانی برابر $16\ cm^2$ و سطح مقطع قسمت تحتانی برابر $10\ cm^2$ می‌باشد. میله وسطی از مس با مساحت سطح مقطع برابر $20\ cm^2$ است. فنری با ثابت فنری $k = 0.8\times10^5 Kg/cm$ بین انتهای فوقانی میله وسط و میله صلب فوقانی قرار دارد. ضرائب ارتجاعی فولاد و مس به ترتیب

$2\times10^6 Kg/cm^2$ و $10^6 Kg/cm^2$ می‌باشد. تنش‌های ایجاد شده در میله‌ها را تحت بارگذاری نشان داده شده تعیین کنید.

مسئله ۳۰ ـ ۲ ـ ۲ سازه صلب شکل ۳۰ ـ ۲ ـ ۲ بر چهار میله متکی می‌باشد که همگی از یک نوع مصالح و یکسان با مساحت سطح مقطع $25\ cm^2$ می‌باشند. تنش ها را در میله‌ها تعیین کنید.



شکل ۲۹ ـ ۲ ـ ۲

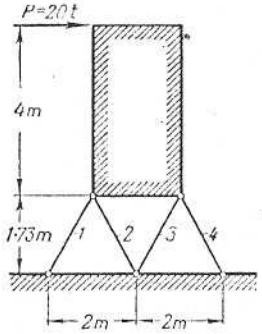


شکل ۲۸ ـ ۲ ـ ۲

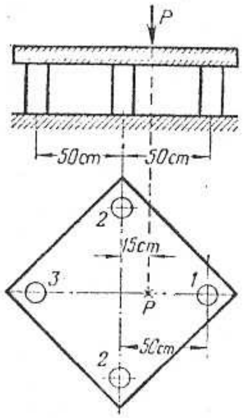
مسئله ۳۱ ـ ۲ ـ ۲ دال مربع شکلی بر روی چهار ستون به صورت متقارن تکیه دارد (شکل ۳۱ ـ ۲ ـ ۲). ستون‌ها از یک نوع مصالح و دارای طول و سطح مقطع یکسان می‌باشند. با صرف نظر نمودن از تغییر شکل دال نیروهای وارد برستون‌هارا حساب‌کنید.

مسئله ۳۲ ـ ۲ ـ ۲ یک دال مستطیلی صلب بر روی چهار ستون با سطح مقطع، طول و جنس یکسان تکیه دارد (شکل ۳۲ ـ ۲ ـ ۲). نیروها را در هر یک ازستون‌ها پیداکنید.

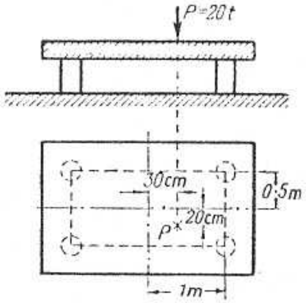
مسئله ۳۳ ـ ۲ ـ ۲ میله الومینیومی شکل ۳۳ ـ ۲ ـ ۲ با سطح مقطع $20\ cm^2$ بدون‌بار به طول $25.004\ cm$ می‌باشد. لوله فولادی دارای همان سطح مقطع و تحت همان شرایط به طول $25\ cm$ می‌باشد. تحت چه بار P تنش های ایجاد شده در فولاد و



شکل ۲ـ۲ـ۳۰



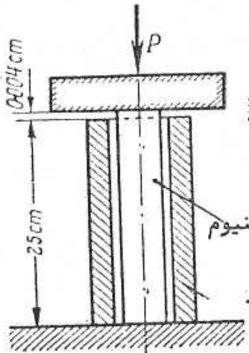
شکل ۲ـ۲ـ۳۱



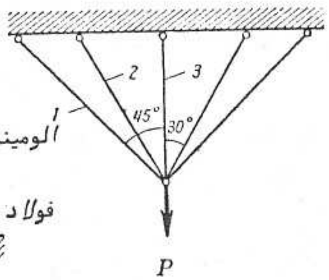
شکل ۲ـ۲ـ۳۲

الومینیوم مساوی خواهند بود ؟ ضرائب ارتجاعی فولاد و الومینیوم به‌ترتیب برابر 2×10^6 Kg/cm² و 0.7×10^6 Kg/cm² می باشد .

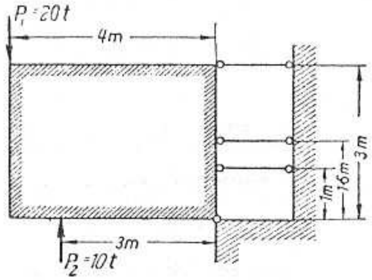
مسئله ۲ـ۲ـ۳۴ تمام میله‌های خرپای شکل ۲ـ۲ـ۳۴ یکسان و به قطر 3 cm و از یک نوع مصالح می‌باشند . تنش ها را درمیله‌ها تعیین کنید . بار P برابر 30t است .



شکل ۲ـ۲ـ۳۳



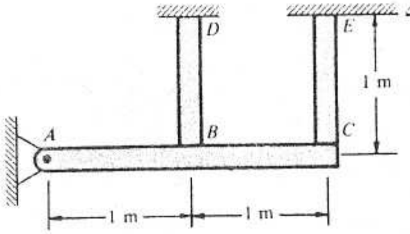
شکل ۲ـ۲ـ۳۴



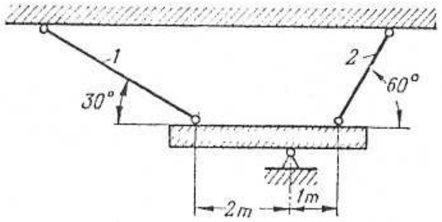
شکل ۲ـ۲ـ۳۵

مسئله ۲ـ۲ـ۳۵ سازه صلب شکل ۲ـ۲ـ۳۵ بوسیله یک مفصل و سه مهار فولادی‌با سطح مقطع و طول یکسان به فونداسیون متصل شده است . اگر تنش مجاز فولاد $\sigma = 1600$ Kg/cm² و ضریب ارتجاعی آن $E = 2\times10^6$ Kg/cm² باشد مساحت‌سطح‌مقطع لازم مهارها را حساب کنید .

مسئله ۲ـ۳ـ۱ میله AC در شکل ۲ـ۳ـ۱ کاملا" صلب و در نقطه A مفصلی و در نقاط B و C به دو میله DB و EC آویزان می‌باشد . وزن AC برابر 50kN و وزن دو میله دیگر قابل صرف نظر می‌باشد . درجه حرارت هر دو میله DB و CE بـه اندازه 35°C افزایش می‌یابد . تنش‌های ایجاد شده در دو میله را حساب کنید . DB از مس با $E = 90000$ MN/m² ، $\alpha = 18\times10^{-6}$ C⁻¹ و مساحت سطح مقطع برابر 1000 mm² و CE از فولاد با $E = 200000$ MN/m² ، $\alpha = 12\times10^{-6}$ C⁻¹ و مساحت سطح مقطع 500 mm² می‌باشد . از امکان کمانش جانبی‌میله‌هاصرفنظر کنید .



شکل ۲ـ۳ـ۱

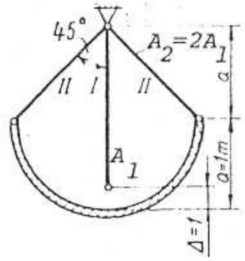


شکل ۲ـ۳ـ۲

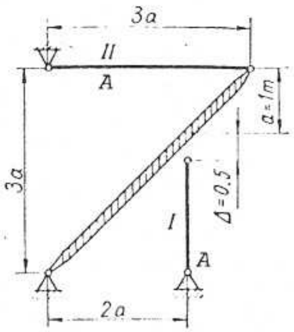
مسئله ۲ـ۳ـ۲ میله صلبی مطابق شکل ۲ـ۳ـ۲ متکی بر یک تکیه گاه مفصلی وبه وسیله دو میله با سطح مقطع یکسان 40 cm² آویزان است . پس از نصب میله‌ها درجه حرارت به اندازه 20°C اضافه می‌شود . تنش های حرارتی در میله‌ها را حساب کنید .

مسئله ۲ـ۳ـ۳ تا ۲ـ۳ـ۸ اگر Δ خطای تولید (اندازه نبودن) یکی از اعضاء نشان داده شده در شکل باشد تنش‌های ناشی از سوار کردن سازه را پیدا کنید .

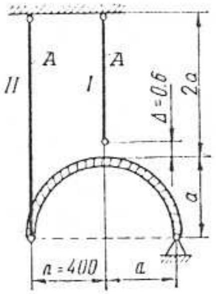
ضریب ارتجاعی میله‌ها را $E = 2\times10^6 Kg/cm^2$ فرض کنید . در مسائل ۷ — ۳ — ۲ و ۸ — ۳ — ۲ فرض کنید : $E=2\times10^5 MN/m^2$.



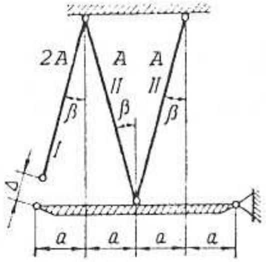
شکل ۳ — ۳ — ۲



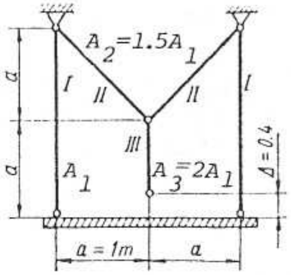
شکل ۴ — ۳ — ۲



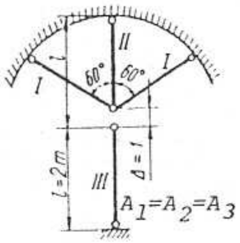
شکل ۵ — ۳ — ۲



شکل ۶ — ۳ — ۲



شکل ۷ — ۳ — ۲



شکل ۸ — ۳ — ۲

مسئله ۹ — ۳ — ۲ تا ۱۶ — ۳ — ۲ تنش های ناشی از تغییر درجه حرارت را در هر یک از سازه‌ها پیدا کنید . در شکل‌های ۹ — ۳ — ۲ تا ۱۶ — ۳ — ۲ :

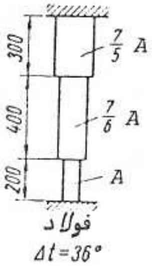
Δt = تغییر درجه حرارت تمام سازه بر حسب درجه سانتیگراد

Δt_i = تغییر درجه حرارت عضو i از سازه

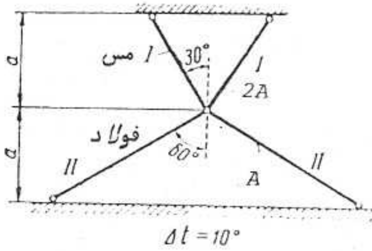
برای فولاد : $\alpha = 125\times10^{-7} C^{-1}$, $E = 2\times10^6 Kg/cm^2$

برای مس : $\alpha = 165\times10^{-7} C^{-1}$, $E = 10^6 Kg/cm^2$

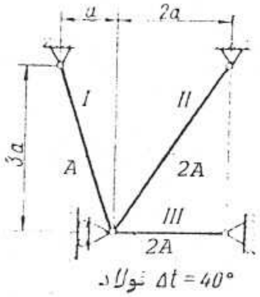
در مسائل ۱۳ — ۳ — ۲، ۱۵ — ۳ — ۲ و ۱۶ — ۳ — ۲ برای فولاد : $E = 2\times10^5 MN/m^2$



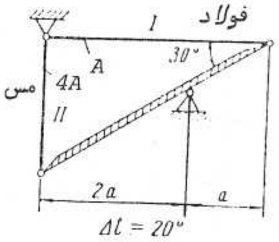
شکل ۹ — ۳ — ۲



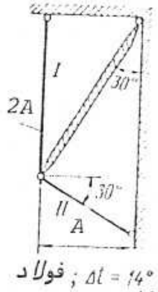
شکل ۱۰ — ۳ — ۲



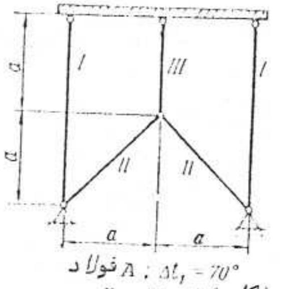
شکل ۱۱ — ۳ — ۲



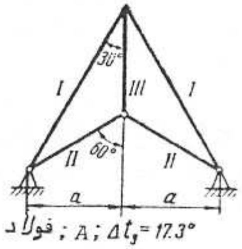
شکل ۱۲ — ۳ — ۲



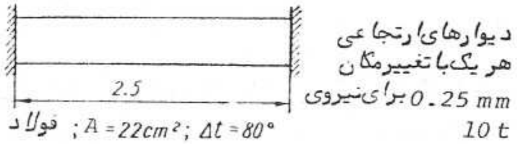
شکل ۱۳ — ۳ — ۲



شکل ۱۴ — ۳ — ۲

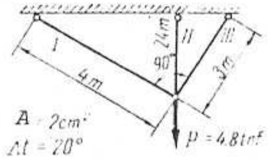


شکل ۱۵ — ۳ — ۲

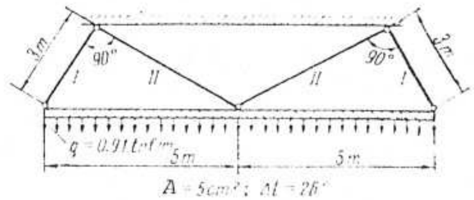


شکل ۱۶ — ۳ — ۲

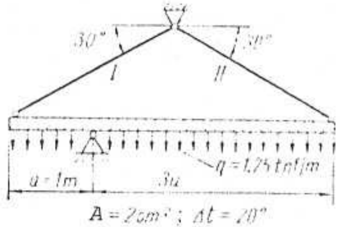
مسئله ۱۷ – ۳ – ۲ تا ۲۲ – ۳ – ۲ تنش‌های ناشی از عمل نیروها و تغییر درجه حرارت را پیدا کنید. برای میله‌ها $E = 2\times10^6 Kg/cm^2$ و $\alpha = 12\times10^{-6}C^{-1}$ می‌باشد. در مسائل ۲۱ – ۳ – ۲ و ۲۲ – ۳ – ۲ فرض کنید : $E = 2\times10^5 MN/m^2$.



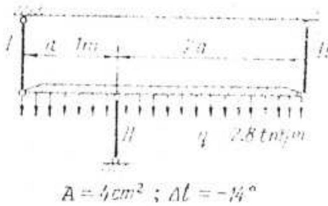
شکل ۱۷ – ۳ – ۲



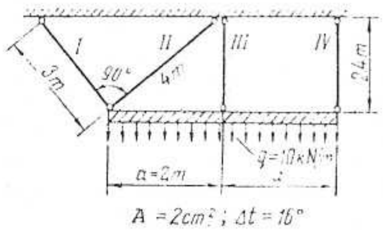
شکل ۱۸ – ۳ – ۲



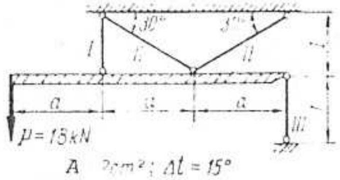
شکل ۱۹ – ۳ – ۲



شکل ۲۰ – ۳ – ۲

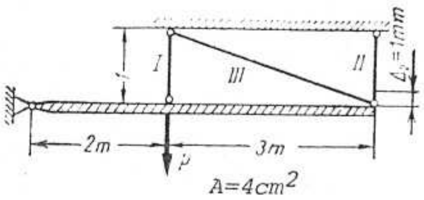


شکل ۲۱ – ۳ – ۲

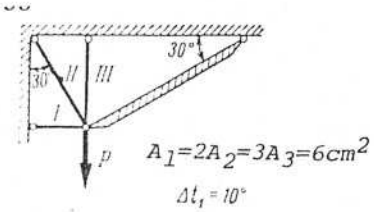


شکل ۲۲ – ۳ – ۲

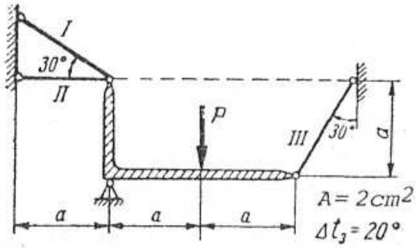
مسئله ۲۳ – ۳ – ۲ تا ۳۰ – ۳ – ۲ بر مبنای تنش مجاز، حداکثر بار مجاز را تعیین کنید. همچنین تنش‌های حرارتی و ناشی از اندازه نبودن یکی از اعضاء را برای حالات



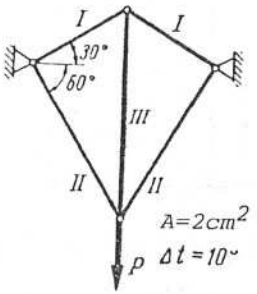
شکل ۲۳ – ۳ – ۲



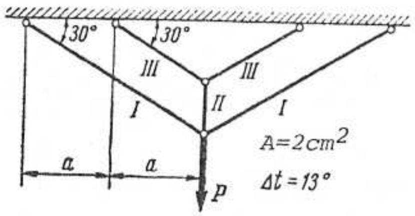
شکل ۲۴ – ۳ – ۲



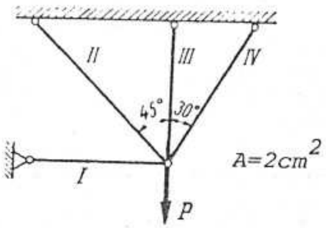
شکل ۲۵ – ۳ – ۲



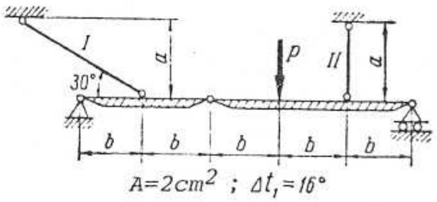
شکل ۲۶ – ۳ – ۲



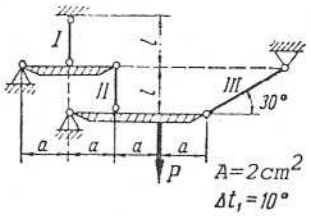
شکل ۲۷ – ۳ – ۲



شکل ۲۸ – ۳ – ۲

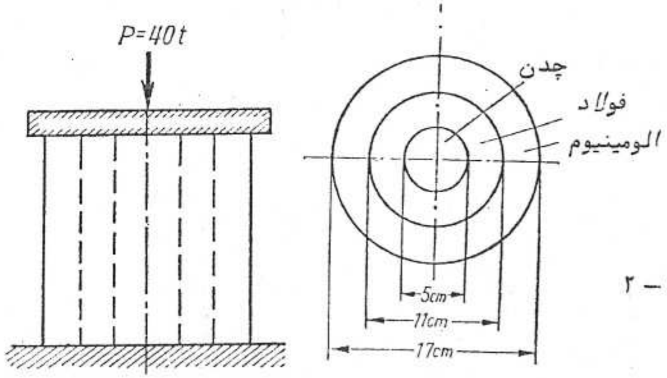


شکل ۲۹ – ۳ – ۲



شکل ۳۰ – ۳ – ۲

مشخص شده در روی شکل‌ها پیدا کنید . برای میله‌ها فرض کنید : $E = 2\times10^6 Kg/cm^2$ ، $\sigma_w = 1600 Kg/cm^2$ و $\alpha = 12\times10^{-6} C^{-1}$. در مسائل ۲۸ – ۳ – ۲ و ۳۰ – ۳ – ۲ فرض کنید : $E = 2\times10^5 MN/m^2$ و $\sigma_w = 160 MN/m^2$.



شکل ۳۲ – ۳ – ۲

مسئله ۳۱ – ۳ – ۲ تعیین کنید فاصله لازم بین ریل‌های آهن را برای اینکه در تابستان آنها یکدیگر را تحت فشار قرار ندهند . ریل‌ها در درجه حرارت $10°C$ جاگذاشته شده‌اند و حداکثر درجه حرارت تابستان $60°C$ می‌باشد . طول ریل‌ها 8 m است . اگر بین ریل ها فاصله گذاشته نشود چه تنش‌هایی در آنها ایجاد خواهد شد ؟ $E = 2\times10^6 Kg/cm^2$.

مسئله ۳۲ – ۳ – ۲ یک میله چدنی کوتاه در داخل یک لوله فولادی به آزادی قرار دارد و هر دو آنها در داخل یک لوله الومینیومی قرار دارند . تنش‌هایی را که در اثر بار P=40 t بوسیله یک دال صلب در لوله‌ها و میله چدنی ایجاد می‌شود حساب کنید . ضرائب ارتجاعی چدن ، فولاد و الومینیوم به ترتیب 1.2×10^6 ، 2×10^6 و $0.7\times10^6 Kg/cm^2$ می‌باشند (شکل ۳۲ – ۳ – ۲) .

۶ – ۲ جواب‌های مسائل حل نشده

۱ – ۲ – ۲ : $\sigma_{AB} = \frac{1}{2}\sigma_{CD} = 750 Kg/cm^2$

۲ – ۲ – ۲ :

$$\text{AD نیرو در} = \frac{2P}{\dfrac{A_1 L_2^2 H}{2A_2 L_1^3} + \dfrac{2H}{L_2}}$$

$$\text{AC نیرو در} = \frac{2P}{\dfrac{4HA_2 L_1^2}{A_1 L_2^3} + \dfrac{H}{L_1}}$$

۳ – ۲ – ۲ : تنش در قسمت فوقانی $500 Kg/cm^2$ و در قسمت تحتانی $-1000 Kg/cm^2$ می‌باشد .

۴ – ۲ – ۲ : تنش ها از بالا به پایین به ترتیب عبارتند از 1083 ، 83 و $-1417 Kg/cm^2$

۵ – ۲ – ۲ : 83.6 t

۶ – ۲ – ۲ : d = 22 mm ; a = 39 cm

۲-۲-۷ : $\sigma_s = \frac{5}{9}\sigma_0$; $\sigma_c = -\frac{\sigma_0}{27}$

۲-۲-۸ : $3.78\ cm^2$; ۲-۲-۹ : $5\ cm^2$

۲-۲-۱۰ : $4.3\ cm^2$; ۲-۲-۱۱ : $8\ cm^2$

۲-۲-۱۲ : $20\ cm^2$; ۲-۲-۱۳ : $3\ cm^2$

۲-۲-۱۴ : $A_2 = 3.75\ cm^2$; $A_1 = 7.5\ cm^2$

۲-۲-۱۵ : $\sigma_2 = 1560 Kg/cm^2$; $\sigma_1 = 1040 Kg/cm^2$

۲-۲-۱۶ : $\sigma_2 = 875\ Kg/cm^2$; $\sigma_1 = 1164 Kg/cm^2$

۲-۲-۱۷ : $\sigma_2 = 87\ Kg/cm^2$; $\sigma_1 = 61\ Kg/cm^2$

۲-۲-۱۸ : $\sigma_2 = 141.4 MN/m^2$; $\sigma_1 = 70.7\ MN/m^2$

۲-۲-۱۹ : $120\ MN/m^2$

۲-۲-۲۰ : $\sigma_2 = 7.1\ MN/m^2$; $\sigma_1 = 10\ MN/m^2$

۲-۲-۲۱ : $\sigma_2 = 1000\ Kg/cm^2$; $\sigma_1 = 25\ Kg/cm^2$

۲-۲-۲۲ : $\sigma_2 = 312\ Kg/cm^2$; $\sigma_1 = 390\ Kg/cm^2$

۲-۲-۲۳ : $\sigma_3 = 452\ Kg/cm^2$; $\sigma_2 = 903$; $\sigma_1 = 903$

۲-۲-۲۴ : $0.895\ mm$

۲-۲-۲۵ : چوب $= 500\ cm^2$; فولاد $= 50\ cm^2$

۲-۲-۲۶ : $A_3 = 12.3\ cm^2$; $A_1 = A_2 = 24.6\ cm^2$

۲-۲-۲۷ : $32.8\ t$; ۲-۲-۲۸ : $112.5\ t$

۲-۲-۲۹ : در قسمت تحتانی میله‌های فولادی $= 1026 Kg/cm^2$; درقسمت‌فوقانی میله‌های‌فولادی $= -90 Kg/cm^2$; در میله مسی $= 144\ Kg/cm^2$

۲-۲-۳۰ : $\sigma_3 = -525$; $\sigma_2 = 525$; $\sigma_1 = 1330$; $\sigma_4 = -1330\ Kg/cm^2$

۲-۲-۳۱ : $F_3 = 0.1P$; $F_2 = 0.25P$; $F_1 = 0.4P$

۲-۲-۳۲ : $F_4 = 5.5t$; $F_3 = 8.5t$; $F_2 = 4.5t$; $F_1 = 1.5t$

۲-۲-۳۳ : $6.9\ t$

۲-۲-۳۴ : $\sigma_3 = 1414 \frac{Kg}{cm^2}$; $\sigma_2 = 1060$; $\sigma_1 = 707$

۲-۲-۳۵ : $7.65\ cm^2$

۲-۳-۱ : $\sigma_{cu} = -21.7 MPa$; $\sigma_{st} = 72 MPa$

۲-۳-۲ : $\sigma_2 = -542\ Kg/cm^2$; $\sigma_1 = -470$

۲-۳-۳ : $\sigma_2 = 261\ Kg/cm^2$; $\sigma_1 = 739$

۲-۳-۴ : $\sigma_1 = 300$; $\sigma_2 = 200\ Kg/cm^2$

۲-۳-۵ : $\sigma_1 = 1091$; $\sigma_2 = 545\ Kg/cm^2$

۲-۳-۶ : $\sigma_1 = \frac{\Delta E}{5a}\sin\beta$; $\sigma_2 = \frac{2\Delta E}{5a}\sin\beta$

۲-۳-۷ : $\sigma_1 = 16.4$; $\sigma_2 = 15.4$: $\sigma_3 = 16.4\ MN/m^2$

۲-۳-۸ : $\sigma_1 = 20$; $\sigma_2 = 40$; $\sigma_3 = 60\ MN/m^2$

۲-۳-۹ : $\sigma_1 = 764$; $\sigma_2 = 917$; $\sigma_3 = 1070\ Kg/cm^2$

۲-۳-۱۰ : $\sigma_1 = 87$; $\sigma_2 = 302\ Kg/cm^2$

۲-۳-۱۱ : $\sigma_1 = 172$; $\sigma_2 = 98$; $\sigma_3 = 1000\ Kg/cm^2$

۲-۳-۱۲ : $\sigma_1 = 596$; $\sigma_2 = 43\ Kg/cm^2$

۲-۳-۱۳ : $35\ MN/m^2$

۲-۳-۱۴ : $\sigma_1 = 513$; $\sigma_2 = 726$; $\sigma_3 = 1025\ Kg/cm^2$

۲-۳-۱۵ : $\sigma_1 = 6$; $\sigma_2 = 10.4$; $\sigma_3 = 10.4\ MN/m^2$

۲-۳-۱۶ : $106\ MN/m^2$

۲-۳-۱۷ : 800 ; 600 ; $1400\ Kg/cm^2$
120 ; 200 ; $160\ Kg/cm^2$

۲-۳-۱۸ : 800 ; $450\ Kg/cm^2$
144 ; $192\ Kg/cm^2$

۲-۳-۱۹ : 500 ; $1500\ Kg/cm^2$
576 ; $192\ Kg/cm^2$

۲-۳-۲۰ : 400 ; 450 ; $550\ Kg/cm^2$
288 ; 432 ; $144\ Kg/cm^2$

۲-۳-۲۱ : 50 ; 37.5 ; 75 ; $62.5\ MN/m^2$
48 ; 36 ; 12 ; $6\ MN/m^2$

۲-۳-۲۲ : 130 ; 10 ; $50\ MN/m^2$
16 ; 32 ; $16\ MN/m^2$

۲-۳-۲۳ : $P = 19.1t$; 671 ; 322 ; $168\ Kg/cm^2$

۲-۳-۲۴ : $P = 14.3t$; 147 ; 93 ; $93\ Kg/cm^2$

۲-۳-۲۵ : $P = 9.06t$; 220 ; 294 ; $280\ Kg/cm^2$

۲-۳-۲۶ : $P = 7.14t$; 93 ; 93 ; $54\ Kg/cm^2$

۲-۳-۲۷ : $P = 5.2\ t$; $72\ Kg/cm^2$

۲-۳-۲۸ : $P = 63\ kN$

۲-۳-۲۹ : $P = 2.05t$; 300 ; $225\ Kg/cm^2$

۲-۳-۳۰ : $P = 28.3$ kN ; 16.3 ; 8.1 ; 5.4 MN/m^2

۲-۳-۳۱ : 5 mm ; $\sigma = -1250\ Kg/cm^2$