# فصل پنجم

## تحلیل تنش و کرنش

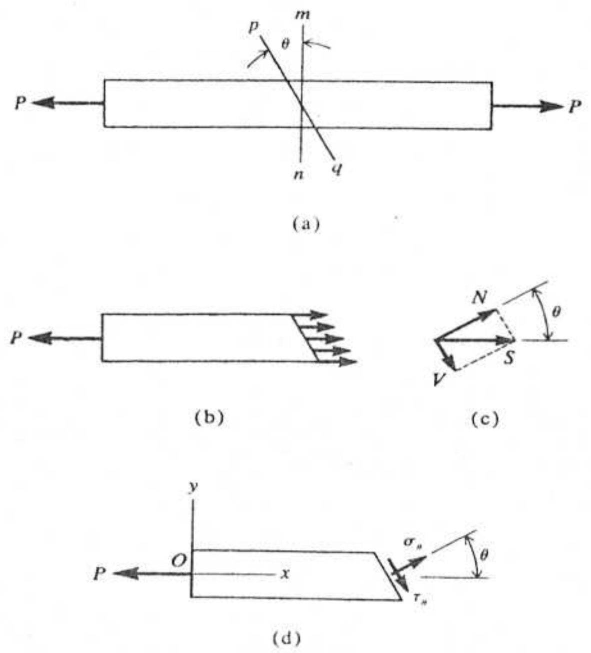
### ۵ — ۱ تنش‌ها روی سطوح مایل

موقعی که یک میله منشوری تحت تاءثیر کشش ساده قرار می‌گیرد، تنش‌ها روی سطح مقطع mn عمود بر محور میله بطور یکنواخت توزیع شده و برابر P/A می‌باشد ( شکل ۱ — ۵ ). حال بیاییم تنش‌ها را روی سطح مایل pq که با مقطع mn زاویه $\theta$ تشکیل می‌دهد مطالعه کنیم. چون همه تارهای طولی کرنش‌محوری‌یکسان‌دارند، نیروهای معرف اثر قسمت سمت راست روی قسمت سمت چپ میله باید روی مقطع مایل pq بطور یکنواخت توزیع شده باشند ( شکل ۱b — ۵ ). قسمت چپ میله باید تحت اثر این نیروها و بار خارجی P در حال تعادل باشد. از این رو برآیند S نیروهای گسترده روی مقطع مایل باید برابر P باشد. نیروی S را می‌توان به دو موءلفه N عمود بر سطح مایل و V مماس بر سطح مایل تجزیه نمود ( شکل ۱c — ۵ ). مقداراین‌موءلفه‌ها از روابط زیر بدست می‌آیند :

$$N = P \cos\theta \quad ; \quad V = P \sin\theta$$

چون مساحت $A'$ سطح مقطع مایل برابر $A/\cos\theta$ است، تنش‌های نظیر N و V به ترتیب عبارتند از






شکل ۱ — ۵

$$\sigma_\theta = \frac{N}{A'} = \frac{P}{A}\cos^2\theta = \sigma_x \cos^2\theta \qquad (5\text{-}1)$$

$$\tau_\theta = \frac{V}{A'} = \frac{P}{A}\sin\theta\cos\theta = \sigma_x \sin\theta\cos\theta \qquad (5\text{-}2)$$

در این رابطه $\sigma_x = P/A$ تنش در جهت x در روی سطح مقطع عمود بر محور میله می‌باشد. تنش‌های $\sigma_\theta$ و $\tau_\theta$ که به ترتیب تنش‌های عمودی و برشی در روی سطح مایل pq هستند ( شکل ۱d — ۵ ) در روی سطح مقطع بطوریکنواخت توزیع شده‌اند. توجه کنید وضعیت سطح مایل بوسیله زاویه $\theta$ که از محور x تا خط عمود بر سطح اندازه گیری می‌شود تعریف شده است.

معادله 5-1 نحوه تغییرات تنش عمودی $\sigma_\theta$ را نسبت به زوایای مختلف مقطع مایل نشان می‌دهد . موقعی که $\theta = 0$ ، سطح pq با سطح مقطع mn منطبق می‌گردد و همانطوریکه انتظار می‌رود داریم $\sigma_\theta = \sigma_x$ . با افزایش زاویه $\theta$ تنش $\sigma_\theta$ کاهش می‌یابد تا اینکه در $\theta = \pi/2$ تنش عمودی برابر صفر می‌گردد . این نتیجه نشان میدهد که بین تارهای طولی میله تنش‌های عمودی وجود ندارد . بدین ترتیب مشاهده می‌شودکه حداکثر مقدار تنش عمودی وقتی اتفاق می‌افتد که $\theta = 0$ و برابر است با

$$\sigma_{max} = \sigma_x \qquad (5-3)$$

از معادله 5-2 مشاهده می‌شود که تنش برشی $\tau_\theta$ در $\theta = 0$ و $\theta = \pi/2$ برابر صفر است و در $\theta = \pi/4$ مقدارش حداکثر و برابر است با

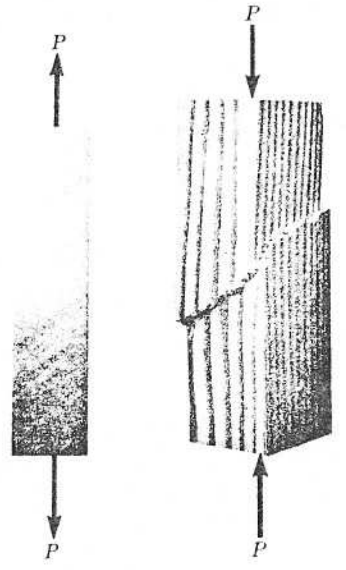
$$\tau_{max} = \frac{\sigma_x}{2} \qquad (5-4)$$

با وجود اینکه تنش برشی ماکزیمم نصف تنش عمودی ماکزیمم است وقتی که ماده یک میله با بار محوری در مقابل برش خیلی ضعیف تر از کشش باشد ، تنش تعیین کننده تنش برشی می‌باشد . برای مثال هنگام آزمایش کشش میله مسطحی از فولاد با کربن کم و سطوح صیقلی نوارهای لغزش در روی سطوح تخت آن در امتداهایی که با محور میله زاویه تقریبا" $45°$ تشکیل می دهند ظاهر می گردد که با چشم قابل روءیت می باشد ( شکل a ۲ — ۵ ) . این نوارها نشان می‌دهد که ماده در روی سطوحی که تنش برشی در آن ماکزیمم است در حال شکست می‌باشد . نوارهای مزبور وقتی ظاهر می‌شوند که‌تنش در میله به تنش تسلیم نزدیک می‌شود .

مثال دیگری از شکست برشی در شکل b ۲ — ۵ مشاهده می‌گردد . این شکل یک بلوک چوبی را نشان می‌دهد که در امتداد محورش تحت فشار قرار گرفته و در اثر برش‌در امتداد یک صفحه $45°$ شکست خورده است .

معادلات 5-1 و 5-2 که برای میله تحت کشش نوشته شده‌اند برای فشار محوری نیز قابل استفاده می‌باشند به شرط‌آنکه برای $\sigma_x$ یک مقدار منفی بکاربرده‌شود . در این صورت برای تمام مقادیر $\theta$ بین 0 تا $\frac{\pi}{2}$ برای $\sigma_\theta$ و $\tau_\theta$ مقادیر منفی بدست می‌آید . علامت منفی برای $\sigma_\theta$ به معنای فشاری بودن تنش عمودی است .



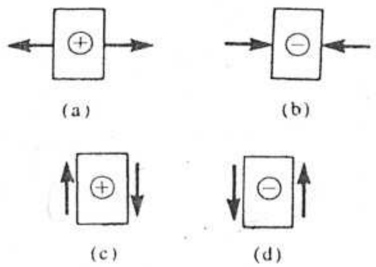



شکل ۲ — ۵

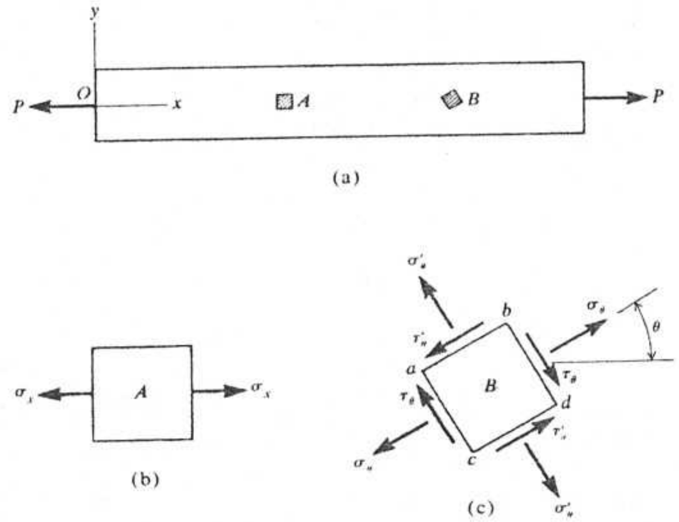
علامت منفی برای $\tau_\theta$ به این معنی است که این تنش در جهتی مخالف جهت نشان داده شده در شکل d ۱ — ۵ عمل می‌کند . شکل ۳ — ۵ قرار دادهای علامت رابرای تنش‌های عمودی و برشی نشان می‌دهد . تنش عمودی مثبت تنشی است که از سطح مصالح بدون توجه به وضعیت آن دور شود و تنش عمودی منفی به سطح مصالح نزدیک می‌شود . تنش‌های برشی $\tau_\theta$ وقتی مثبت هستند که نسبت به سطح مصالح در جهت عقربه های ساعت عمل‌کنند و در صورتی که در خلاف جهت عقربه‌های‌ساعت‌عمل‌کنندمنفی‌میباشند .

یک روش ساده برای نشان دادن تنش‌ها در یک نقطه از میله این است که‌عنصر کوچکی از ماده را به صورت جسم آزاد جدا کرده و تنش‌ها را در روی تمام وجه‌های‌آن نشان دهیم . برای مثال دو عنصر A و B که از میله تحت کششی بریده شده‌اند در شکل ۴ — ۵ مشاهده می‌شود . وضعیت عنصر A چنان است که برای آن $\theta = 0$ و در نتیجه تنها تنش‌هایی که در روی آن عمل می‌کنند $\sigma_x = P/A$ می‌باشند .

عنصر B به اندازه زاویه $\theta$ دوران کرده است و بنابراین تنش‌ها روی ضلع bd آن $\sigma_\theta$ و $\tau_\theta$ می‌باشند که از روابط 5-1 و 5-2 بدست می‌آیند . عمود وارد بر ضلع ab نسبت به محور x زاویه $\theta + \pi/2$ می سازد و بنابراین با جایگزینی




شکل ۳ـ۵ قرار دادهای علامت برای تنش‌های عمودی و برشی




شکل ۴ـ۵

$\theta + \pi/2$ به جای $\theta$ در معادلات 5-1 و 5-2 تنش‌ها در روی سطح ab بـه دست می‌آیند.

$$\sigma'_\theta = \sigma_x \cos^2(\theta+\tfrac{\pi}{2}) = \sigma_x \sin^2\theta \qquad (5\text{-}5)$$

$$\tau'_\theta = \sigma_x \sin(\theta+\tfrac{\pi}{2})\cos(\theta+\tfrac{\pi}{2}) = -\sigma_x \sin\theta\cos\theta \qquad (5\text{-}6)$$



چون $\sigma_x$ در این مثال مثبت می‌باشد، تنش عمودی $\sigma'_\theta$ نیز مطابق شکل ۴ـ۵ c مثبت است. تنش برشی $\tau'_\theta$ در روی ضلع ab عنصر B علامت منفی دارد، این بدان معنی است که نسبت به سطح عنصر مزبور در جهت مخالف جهت عقربه‌های ساعت عمل می‌کند (شکل ۴ـ۵ c).

با مقایسه معادلات 5-1 و 5-2 با معادلات 5-5 و 5-6 دو رابطه جالب بین تنش‌ها در روی دو سطح عمود بر یکدیگر بدست می‌آید.

$$\sigma_\theta + \sigma'_\theta = \sigma_x \qquad (5\text{-}7)$$

$$\tau'_\theta = -\tau_\theta \qquad (5\text{-}8)$$

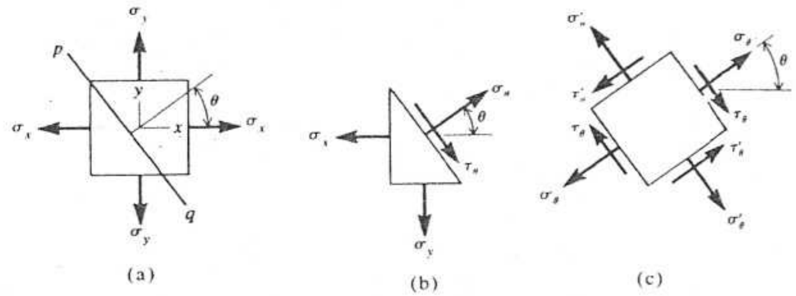
رابطه 5-7 نشان می‌دهد که برای یک میله تحت کشش مجموع تنش‌های عمودی درروی دو سطح عمود بر یکدیگر ثابت و برابر با $\sigma_x$ می‌باشد. رابطه 5-8 نشان می دهد که تنش‌های برشی در روی دو سطح عمود بر هم بطور عددی مساوی ولی دارای علامت های مخالف می‌باشند. نتیجه اخیر قبلا" در بخش ۱ ـ ۴ نیز مشاهده گردید.

اگر به همین طریق ادامه دهیم می‌توانیم تنش‌ها را در روی اضلاع ac و cd عنصر شکل ۴ـ۵ c نیز بدست آوریم. زاویه عمود بر سطح نسبت به محور x برای ضلع ac برابر $\theta + \pi$ و برای ضلع cd برابر $\theta+3\pi/2$ می‌باشد. بدین طریق مشاهده می‌کنیم که تنش‌های عمودی و برشی در روی اضلاع ac و bd یکسان‌هستند، همچنین تنش‌ها در روی اضلاع cd و ab نیز یکسان می‌باشند.

در موقع انجام محاسبات عددی برای تعیین تنش‌ها در روی ضلعی مانند cd، بعضی از مواقع ساده‌تر است که زاویه $\theta$ در جهت منفی (جهت عقربه‌های ساعت) اندازه گیری شود. برای مثال اگر زاویه $\theta$ در شکل ۴ـ۵ c مساوی $30°$ باشد، در موقع استفاده از معادلات 5-1 و 5-2 می‌توان هر یک از زوایای $30°+270°=300°$ یا $-60°$ را برای مشخص کردن سطح cd بکار برد.

## ۲ـ۵ تنش دو محوری

حال بیاییم حالت کلی تری از تنش را در نظر بگیریم که در آن تنشهای عمودی در دو جهت $x$ و $y$ در روی یک عنصر اثر میکنند ( شکل a ۵ – ۵ ) . در مقابل




شکل ۵ – ۵

تنش یک بعدی یا یک محوری مورد بحث در بخش قبل ، حالت تنش مزبور تنش دومحوری خوانده میشود . ما به تنشهای دو محوری در مطالعه مخازن سیالات تحت فشار ، تیرها ، محورهای مکانیکی و تعداد زیادی از اجزاء سازهای و مکانیکی دیگر بر میخوریم که در فصلهای بعد مورد بحث قرار میگیرند . در اینجا ما میخواهیم تنشها را در روی یک مقطع مایل pq که عمود بر سطحش زاویه $\theta$ با محور $x$ میسازد تعیین کنیم (شکل a ۵ – ۵ ) . تنشهایی که بر سطح مایل pq اثر میکنند تنش عمودی $\sigma_\theta$ و تنش برشی $\tau_\theta$ مطابق شکل b ۵ – ۵ میباشند .

برای تعیین کردن تنشهای $\sigma_\theta$ و $\tau_\theta$ تعادل عنصر مثلثی راکهازعنصر مستطیلی شکل a ۵ – ۵ بریده شده است در نظر میگیریم ( شکل b ۵ – ۵ ) . اگر مساحت سطح قائمی را که $\sigma_x$ برآن اثر میکند $A$ فرض کنیم ، در این صورت مساحت سطح افقی عنصر مثلثی که $\sigma_y$ بر آن اثر میکند برابر $A\tan\theta$ و مساحت سطح مایل برابر $A\sec\theta$ میباشد . بدین طریق نیروی کل بر وجه عمود بر محور $x$ برابر $\sigma_x A$ و نیروی کل بر وجه عمود بر محور $y$ برابر $\sigma_y A\tan\theta$ میباشد . هر یک ازاین نیروها را میتوان به دو مؤلفه عمود بر یکدیگر تجزیه نمود بطوریکه یک مؤلفه در امتداد سطح مایل و مؤلفه دیگر در امتداد عمود بر سطح مایل باشد . با نوشتن معادله تعادل عنصر مثلثی در امتداد $\sigma_\theta$ نتیجه میشود

$$\sigma_\theta A\sec\theta = \sigma_x A\cos\theta + \sigma_y A\tan\theta\sin\theta$$



از این معادله رابطه زیر بدست میآید :

$$\sigma_\theta = \sigma_x\cos^2\theta + \sigma_y\sin^2\theta \tag{5-9}$$

همین طور با نوشتن معادله تعادل عنصر مثلثی در امتداد $\tau_\theta$ حاصل میشود

$$\tau_\theta A\sec\theta = \sigma_x A\sin\theta - \sigma_y A\tan\theta\cos\theta$$

و یا پس از ساده کردن

$$\tau_\theta = (\sigma_x - \sigma_y)\sin\theta\cos\theta \tag{5-10}$$

با استفاده از روابط مثلثاتی زیر

$$\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta) \quad ; \quad \sin^2\theta = \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$$

$$\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta$$

معادلات 5-9 و 5-10 به صورت زیر در میآیند :

$$\sigma_\theta = \frac{1}{2}(\sigma_x+\sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x-\sigma_y)\cos 2\theta \tag{5-11}$$

$$\tau_\theta = \frac{1}{2}(\sigma_x-\sigma_y)\sin 2\theta \tag{5-12}$$

توجه کنید قرار دادهای علامت برای $\sigma_\theta$ و $\tau_\theta$ در معادلات فوق همانقراردادهایی است که در بخش قبلی بکار رفته است ( شکل ۳ – ۵ ) .

اگر در معادلات 5-11 و 5-12 بجای $\theta$ کمیت $\theta+\pi/2$ را قرار دهیم تنشهای $\sigma'_\theta$ و $\tau'_\theta$ در روی صفحهای که با صفحه تنشهای $\sigma_\theta$ و $\tau_\theta$ زاویه $90°$ میسازد بدست میآید ( شکل c ۵ – ۵ ) .

$$\sigma'_\theta = \frac{1}{2}(\sigma_x+\sigma_y) - \frac{1}{2}(\sigma_x-\sigma_y)\cos 2\theta \tag{5-13}$$

$$\tau'_\theta = -\frac{1}{2}(\sigma_x-\sigma_y)\sin 2\theta \tag{5-14}$$

با ترکیب نمودن دو معادله 5-11 و 5-13 نتیجه می‌شود

$$\sigma_\theta + \sigma'_\theta = \sigma_x + \sigma_y \qquad (5\text{-}15)$$

این رابطه مجدداً " نشان می‌دهد که مجموع تنش‌های عمودی در روی هر دو سطح عمودبر هم مقدار ثابتی است . همچنین مقایسه معادله 5-12 با معادله 5-14 مجدداً " نشان می‌دهد که تنش‌های برشی در روی دو سطح عمود بر هم بطور عددی مساوی و جهتشان مخالف یکدیگر می‌باشد ( معادله 5-8 را ببینید ) .

با دوران عنصر شکل ۵ ــ ۵ c از $\theta = 0$ تا $\theta = \pi/2$ ، تنش عمودی $\sigma_\theta$ از $\sigma_x$ تا $\sigma_y$ تغییر می‌کند ( معادله 5-11 را ببینید ) . بدین ترتیب یکی از این تنش ها بزرگترین و دیگری کوچکترین مقدار $\sigma_\theta$ می‌باشد . این مقادیر ماکزیمم ومینیمم تنش عمودی را تنش‌های اصلی می‌گویند و دو صفحه‌ای که روی آنها تنش‌های مذکور اثر می‌کنند به صفحه‌های اصلی موسوم می‌باشند . از معادله 5-12 نتیجه می‌شود که بر روی صفحه‌های اصلی تنش برشی وجود ندارد .

تنش برشی $\tau_\theta$ به ازای $\theta = 0$ برابر صفر و با افزایش $\theta$ اضافه می‌شود تا اینکه در $\theta = \frac{\pi}{4}$ به حد ماکزیمم می‌رسد . ماکزیمم تنش‌برشی‌برابراست‌با (معادله 5-12 )

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \qquad (5\text{-}16)$$

از این معادله نتیجه می‌شود که تنش برشی ماکزیمم نصف تفاضل تنش‌های اصلی‌می‌باشد . اگر تنش‌های $\sigma_x$ و $\sigma_y$ مساوی باشند روی هیچ یک از صفحه‌های مایل‌تنش‌برشی‌وجود نخواهد داشت .

باید توجه نمود که بحث بالا در مورد تنش‌های برشی ماکزیمم فقط درباره تنش‌های برشی در روی سطوح موازی با محور z مانند صفحه pq صادق است .

شکل ۵ ــ ۵ a در واقع یک عنصر سه بعدی است که تنش $\sigma_z$ در جهت z برابر صفر می‌باشد . صفحه‌های مایل را می‌توان موازی محور x یا y از میان عنصر عبور داد ، و تنش برشی در روی یکی از این صفحه‌ها ممکن‌است‌ازتنشی‌که‌معادله 5 - 16 می‌دهد بیشتر باشد . تعیین تنش برشی ماکزیمم در حالت سه بعدی بعداً " در بخش تنش‌های سه محوری بحث خواهد شد .



## ۳ ــ ۵ کرنش‌ها در تنش دو محوری

کرنش در جهت x برای عنصری در تنش دو محوری ( شکل ۵ ــ ۵ a ) نه تنها به تنش $\sigma_x$ در جهت x بلکه به علت اثر ضریب پواسون ( که در بخش ۶ ــ ۱ توضیح داده شد ) به تنش در جهت y نیز بستگی دارد . با فرض اینکه قانون هــوک در مورد ماده مورد نظر صادق باشد ، کرنش در جهت x تحت اثر $\sigma_x$ برابر $\sigma_x/E$ و تحت اثر $\sigma_y$ برابر $-\nu\sigma_y/E$ می‌باشد . بدین ترتیب اگر هر دو تنش $\sigma_x$ و $\sigma_y$ بطور همزمان اثر کنند ، کرنش در جهت x برابر می‌شود با

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu\sigma_y\right) \qquad (5\text{-}17)$$

همین طور برای کرنش در جهت y رابطه زیر را پیدا می‌کنیم :

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \nu\sigma_x\right) \qquad (5\text{-}18)$$

کرنش در جهت z نیز برابر است با

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}\left(\sigma_x + \sigma_y\right) \qquad (5\text{-}19)$$

از معادلات 5-17 و 5-18 تنش‌های $\sigma_x$ و $\sigma_y$ را می‌توان بر حسب توابعی از کرنش‌های $\varepsilon_x$ و $\varepsilon_y$ بیان نمود .

$$\sigma_x = \frac{(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y)E}{1-\nu^2} \quad ; \quad \sigma_y = \frac{(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x)E}{1-\nu^2} \qquad (5\text{-}20)$$

وقتی که کرنش‌های $\varepsilon_x$ و $\varepsilon_y$ معلوم باشند ( برای مثال از روی اندازه گیری تغییر شکل ها ) از معادلات فوق برای محاسبه تنش‌های $\sigma_x$ و $\sigma_y$ می‌توان استفاده نمود .

تغییر حجم ماده‌ای ارتجاعی در تنش‌دومحوری‌در واحد حجم را می‌توان بر حسب کرنش‌ها بدست آورد . ابعاد عنصری از ماده در جهت‌های x ، y و z به ترتیب به نسبت $\frac{1+\varepsilon_x}{1}$ ، $\frac{1+\varepsilon_y}{1}$ و $\frac{1+\varepsilon_z}{1}$ افزایش می‌یابد . بنابراین حجم میله

به نسبت

$$\frac{(1+\varepsilon_x)(1+\varepsilon_y)(1+\varepsilon_z)}{1}$$

افزایش می‌یابد . اگر از مقادیر کوچک مرتبه دوم و سوم کرنش‌ها صرف نظر شود کمیت مزبور برابر می‌شود با

$$1+\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z$$

بنابراین تغییر حجم واحد حجم از رابطه زیر بدست می‌آید :

$$\frac{\Delta V}{V}=\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z \qquad (5-21)$$

اگر به جای کرنش‌ها از معادلات 5-17 تا 5-19 در معادله 5-21 قرار دهیم ، رابطه تغییر حجم واحد حجم در تنش دو محوری به صورت زیر در می‌آید :

$$\frac{\Delta V}{V}=\frac{(\sigma_x+\sigma_y)(1-2\nu)}{E} \qquad (5-22)$$

اگر $\sigma_y=0$ باشد این معادله به معادله 1-14 برای تغییر حجم واحد حجم درحالت تنش یک محوری تبدیل می‌شود .

## ۵ ــ ۴ برش خالص

حال حالت خاصی از تنش دو محوری را در نظر می‌گیریم که در آن $\sigma_x$ تنش کششی و $\sigma_y$ تنش فشاری با همان مقدار $\sigma_x$ باشد بطوریکه ( شکل a ۶ ــ ۵ )

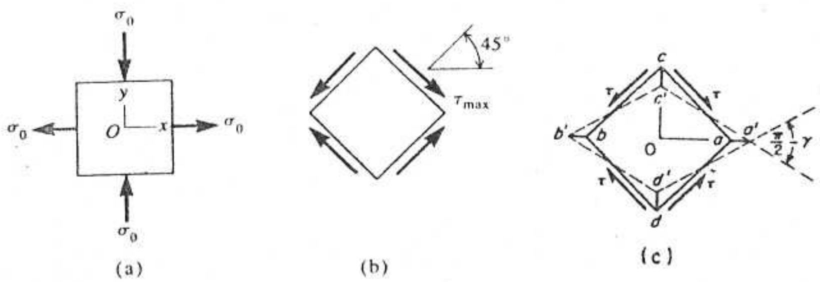
$$\sigma_x=-\sigma_y=\sigma_0 \qquad (5-23)$$

ماکزیمم تنش برشی در روی صفحه مایلی که برای آن $\theta=45°$ می‌باشد اتفاق می‌افتد و مقدار آن با استفاده از معادله 5-16 برابر است با

$$\tau_{max}=\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}=\sigma_0 \qquad (5-24)$$

این تنش برشی در شکل b ۶ ــ ۵ رسم شده است . برای پیدا کردن تنش‌های عمودی






شکل ۶ ــ ۵

در روی اضلاع عنصر شکل b ۶ ــ ۵ کافی است در معادلات 5-11 و 5-13 بجای θ مقدار 45° را قرار دهیم که حاصل می‌شود $\sigma_\theta=\sigma'_\theta=0$ . بدین ترتیب مشاهده می‌کنیم که عنصر شکل b ۶ ــ ۵ تنها تحت اثر تنش‌های برشی قرار دارد و بنابراین در حالت برش خالص می‌باشد . همچنین مشاهده می‌کنیم که برش خالص معادل با حالت تنش ایجاد شده بوسیله تنش کششی در یک جهت و تنش فشاری هم اندازه آن در جهت عمود بر آن می‌باشد . البته واضح است اگر ما عنصری را در نظر بگیریم که به اندازه زاویه θ متفاوت با 45° دوران کرده باشد ، روی سطوح عنصر مزبور هم تنش عمودی و هم تنش برشی وجود خواهد داشت که از معادلات 5-11 تا 5-14 بدست می‌آیند .

تغییر شکل عنصری که در برش خالص قرار دارد در شکل c ۶ ــ ۵ رسم شده است . در طول اضلاع عنصر مزبور تغییری حاصل نمی‌شود زیرا در امتدادهای 45° تنش های عمودی وجود ندارد ، ولی قطر افقی آن ازدیاد طول و قطر قائم آن کاهش طول پیدا خواهد کرد . کرنش برشی γ که برابر با $\tau_{max}/G$ می‌باشد در شکل c ۶ ــ ۵ به صورت کاهش زوایای قائمه در دو انتهای قطر افقی ، یا افزایش زوایای قائمه در دو انتهای قطر قائم ظاهر می‌گردد . زاویه بین وضعیت اولیه و نهایی هر یک از اضلاع عنصر مزبور برابر $\gamma/2$ می‌باشد .

تغییرات طول قطرهای عنصر شکل c ۶ ــ ۵ بوسیله کرنش‌های $\varepsilon_x$ و $\varepsilon_y$ که از معادلات 5-17 و 5-18 بدست می‌آیند تعیین می‌شود . در عین حال از شکل c ۶ ــ ۵ مشاهده می‌شودکه این تغییرات طول بطور هندسی با کرنش برشی γ ارتباط دارند . بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که ضریب ارتجاعی در برش G به وسیله ضریب پواسون با ضریب ارتجاعی E ( در کشش و فشار ) ارتباط دارد .

برای پیدا کردن رابطه بین G و E ابتدا با استفاده از روابط 5-17 ، 5-18

و 5-24 طول‌های ´oa و ´oc را حساب می‌کنیم.

$$oa' = oa\,(1+\varepsilon_x) = oa\left[\,1+\frac{\tau_{max}}{E}(1+\nu)\,\right]$$

$$oc' = oc\,(1+\varepsilon_y) = oc\left[\,1-\frac{\tau_{max}}{E}(1+\nu)\,\right]$$

با توجه به مثلث قائم الزاویه ´c´oa می‌توانیم بنویسیم

$$\tan \widehat{oa'c'} = \tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{oc'}{oa'} = \frac{1-\frac{\tau_{max}}{E}(1+\nu)}{1+\frac{\tau_{max}}{E}(1+\nu)}$$

اگر رابطه فوق را با رابطه مثلثاتی زیر

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\frac{\gamma}{2}}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\gamma}{2}} \simeq \frac{1-\frac{\gamma}{2}}{1+\frac{\gamma}{2}}$$

که در آن به علت کوچک بودن زاویه $\gamma$ از تساوی $\tan\frac{\gamma}{2} \simeq \frac{\gamma}{2}$ استفاده شده است مقایسه کنیم نتیجه می‌گیریم که

$$\frac{\gamma}{2} = \frac{\tau_{max}}{E}(1+\nu)$$

حال اگر در این رابطه به جای $\gamma$ مقدار مساوی آن $\tau_{max}/G$ را قرار دهیم رابطه‌بین $G$ و $E$ به صورت زیر بدست می‌آید:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \qquad (5\text{-}25)$$



این رابطه نشان می‌دهد که $E$ ، $G$ و $\nu$ خصوصیات مستقل مصالح نمی‌باشند. برای مثال برای فولاد اگر $\nu = 0.3$ و $E = 2.1\times10^6\ Kg/cm^2$ فرض شود، از معادله 5-25 حاصل می‌شود: $G = 810000\ Kg/cm^2$.

## ۵ ـ ۵ دایره موهر برای تنش دو محوری

معادلات تنش‌های $\sigma_\theta$ و $\tau_\theta$ را که در روی صفحه‌های مایل در حالت تنش دو محوری اثر می‌کنند می‌توان به صورت ترسیمی نشان داد. برای این کار ابتدا نام‌گذاری زیر را انتخاب می‌کنیم:

$$\sigma_{av} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} \qquad (5\text{-}26)$$

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2} \qquad (5\text{-}27)$$

در این عبارات $\sigma_{av}$ مقدار متوسط تنش‌های عمودی در روی اضلاع عنصر مورد نظر و $\tau_{max}$ تنش برشی ماکزیمم می‌باشد. با نام گذاری فوق می‌توانیم معادلات 5-11 و 5-12 را به صورت زیر بنویسیم:

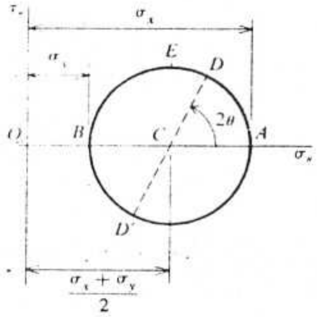
$$\sigma_\theta - \sigma_{av} = \tau_{max}\cos 2\theta$$

$$\tau_\theta = \tau_{max}\sin 2\theta$$

دو معادله فوق معادلات پارامتری یک دایره با پارامتر $2\theta$ می باشند. با مربع کردن طرفین دو معادله فوق و جمع کردن آنها با یکدیگر می‌توان پارامتر مزبور را حذف نمود.

$$(\sigma_\theta - \sigma_{av})^2 + \tau_\theta^2 = \tau_{max}^2 \qquad (5\text{-}28)$$

معادله فوق معادله دایره‌ای با متغیرهای مستقل $\sigma_\theta$ و $\tau_\theta$ و شعاع $\tau_{max}$ میباشد. این دایره در شکل ۵ ـ ۷ با فرض اینکه محور طول‌ها $\sigma_\theta$ و محور عرض‌ها $\tau_\theta$ باشد رسم شده‌است. مرکز $C$ دایره‌مزبور دارای مختصات $\sigma_\theta = \sigma_{av}$ و $\tau_\theta = 0$ میباشد. این‌روش ترسیمی برای اولین بار در سال ۱۸۸۲ توسط مهندس آلمانی اتو موهر[1] پیشنهاد



شکل ۷ – ۵ دایره موهر برای تنش دو محوری

شد و از این رو دایره مزبور به نام دایره موهر معروف است .

نقطه A دایره موهر در شکل ۷ – ۵ که دارای مختصات

$$\sigma_\theta = \sigma_{av} + \tau_{max} = \sigma_x \quad ; \quad \tau_\theta = 0$$

می‌باشد معرف تنشها در روی وجه x ( وجهی که بر محور x عمود است ) عنصر مورد مطالعه می‌باشد $(\theta = 0)$ . همین طور نقطه B دایره که مختصات $\sigma_\theta = \sigma_y$ و $\tau_\theta = 0$ دارد معرف تنشها در وجه y عنصر مورد نظر می‌باشد $(\theta = 90°)$ .

حال بیاییم یک نقطه اختیاری D روی دایره را که با زاویه $2\theta$ در شکل ۷ – ۵ مشخص شده است در نظر بگیریم . زاویه $2\theta$ از نقطه A که برای آن $\theta = 0$ می‌باشد اندازه گیری می‌شود . مختصات $\sigma_\theta$ و $\tau_\theta$ نقطه D را می‌توان از هندسه دایره به صورت زیر بدست آورد :

$$\sigma_\theta = OC + CD\cos 2\theta = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\theta$$

$$\tau_\theta = CD\sin 2\theta = \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\sin 2\theta$$

با مقایسه این روابط با معادلات 5-11 و 5-12 نتیجه می‌شود که مختصات نقطه D معرف تنشهای $\sigma_\theta$ و $\tau_\theta$ در روی صفحه مایلی است که در شکل ۵ – ۵ با زاویه $\theta$ تعریف شده است . توجه کنید برای تعیین محل نقطه D در روی دایره موهر زاویه $2\theta$ به کار رفته است . همچنانکه زاویه $\theta$ از 0 تا $\pi/2$ تغییر می‌کند نقطه D در روی دایره از A تا B تغییر مکان می‌دهد ، بطوریکه نیمه فوقانی دایره برای وضعیت‌های مختلف عنصر مورد نظر ( شکل c ۵ – ۵ ) از $\theta = 0$ تا $\theta=\pi/2$ تنشهای



$\sigma_\theta$ و $\tau_\theta$ را می‌دهد . برای مثال اگر $\theta = \pi/4$ باشد در این صورت $2\theta = \pi/2$ و نقطه D در بالای دایره ( نقطه E ) قرار خواهد گرفت که برای آن

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \quad ; \quad \tau_\theta = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}$$

بنابراین نقطه E معرف صفحه‌ای می‌باشد که در آن تنش برشی ماکزیمم است ، و این نتیجه ایست که از دایره موهر ( شکل ۷ – ۵ ) "مستقیما" به دست می‌آید زیرا شعاع دایره برابر $\tau_{max}$ است .

اگر زاویه $\theta$ بیشتر از $\pi/2$ اختیار شود نقطه نظیر آن در روی دایره موهر در روی نیمه تحتانی دایره قرار خواهد گرفت . برای مثال نقطه D´ که به طور قطری مخالف نقطه D و بنابراین با زاویه $2\theta + \pi$ مشخص می‌باشد معرف تنشها در روی صفحه‌ای است که با صفحه تنشهای $\sigma_\theta$ و $\tau_\theta$ زاویه قائمه می‌سازد . بررسی شکل ۷ – ۵ نشان می‌دهد که مختصات نقطه D´ برابر با $\sigma'_\theta$ و $\tau'_\theta$ می‌باشد که بوسیله معادلات 5-13 و 5-14 داده شده است . بنابراین با تغییر زاویه $2\theta$ در روی دایره موهر از $0°$ تا $360°$ ، تنشها در روی تمام اضلاع عنصر شکل c ۵ – ۵ از $\theta = 0°$ تا $\theta = 180°$ بدست می‌آید . البته تنشها در روی اضلاع باقی مانده ( $\theta$ از $180°$ تا $360°$ ) برابر با تنشها در روی اضلاع مخالف می‌باشد .

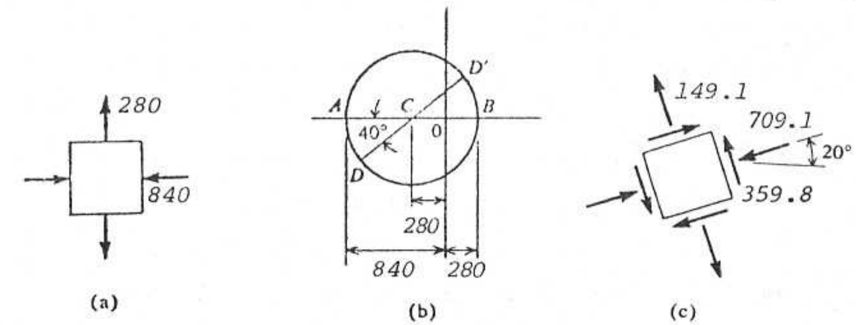
روش معمول برای رسم دایره موهر مشخص کردن نقاط A و B در روی محور $\sigma_\theta$ با مقیاسی معین و سپس رسم دایره‌ای به قطر AB می‌باشد . تنشها در روی هر صفحه مایلی که با زاویه $\theta$ مشخص شده باشد با اندازه گیری زاویه $2\theta$ در روی دایره و تعیین نقطه D بدست می‌آید . تنشهای مطلوب $\sigma_\theta$ و $\tau_\theta$ یا "مستقیما" با اندازه گیری مختصات نقطه D و یا با استفاده از محاسبات مثلثاتی تعیین می‌شوند . اگر یکی از دو تنش $\sigma_x$ و $\sigma_y$ و یا هر دو آنها فشاری باشد همان روش مذکور در فوق را می‌توان بکار برد با این تفاوت که قسمتی از دایره و یا تمام آن ممکن است در سمت چپ مبداء مختصات قرار بگیرد . همچنین باید به خاطر داشت که زاویه $2\theta$ همواره از نقطه A که معرف تنشهای صفحه x می‌باشد در جهت مخالف جهت عقربه‌های ساعت اندازه‌گیری می‌شود ، حتی اگر نقطه A در انتهای چپ قطر افقی دایره قرار بگیرد ( این در صورتی اتفاق می‌افتد که $\sigma_x$ بطور جبری از $\sigma_y$ کوچکتر باشد . مثال ۱ – ۵ را ببینید ) .

دایره موهر را به صورت معکوس نیز می‌توان بکار برد ؛ یعنی اگر تنشهای $\sigma_\theta$ ، $\tau_\theta$ ، $\sigma'_\theta$ و $\tau'_\theta$ در روی یک عنصردوران کرده در تنش دو محوری معلوم باشند

( شکل c ۵ – ۵ ) ، با استفاده از دایره موهر می‌توان تنش‌های $\sigma_x$ و $\sigma_y$ را بدست آورد . برای اینکار ابتدا با دانستن مقادیر معلوم تنش‌ها ، محل نقاط D و D´ مشخص می‌شود . سپس با رسم دایره‌ای به قطر DD´ دایره موهر بدست می‌آید . محل بر خورد دایره با محور $\sigma_\theta$ نقاط A و B را می‌دهد . بدین ترتیب نه تنها تنش‌های $\sigma_x$ و $\sigma_y$ بلکه زاویه دوران θ عنصر مورد نظر نیز تعیین می‌شود .

### مثال ۱ – ۵

دایره موهر را برای حالت تنش دو محوری شکل a ۸ – ۵ که در آن $\sigma_x = -840 Kg/cm^2$ و $\sigma_y = 280Kg/cm^2$ می‌باشد رسم کنید . تنش‌های $\sigma_\theta$، $\tau_\theta$، $\sigma'_\theta$ و $\tau'_\theta$ را در روی اضلاع عنصری‌که برای آن $\theta = 20°$ می‌باشد تعیین کنید .




شکل ۸ – ۵

حل : ابتدا محل نقاط A و B را که به ترتیب معرف تنش‌ها درروی‌صفحه‌های $\theta = 0$ و $\theta = 90°$ می‌باشند مطابق شکل b ۸ – ۵ تعیین می‌کنیم . مرکز C دایره‌در $\sigma_{av} = -280 Kg/cm^2$ و شعاع دایره برابر $560 Kg/cm^2$ می‌باشد .
نقطه D با اندازه گیری زاویه $2\theta = 40°$ از نقطه A در جهت مخالف جهت عقربه‌های ساعت بدست می‌آید . از روی دایره موهر( شکل b ۸ – ۵ ) مختصات نقطه با مقیاس یا محاسبه بدست می‌آید .

$$\sigma_\theta = -709.1 Kg/cm^2 \quad ; \quad \tau_\theta = -359.8 Kg/cm^2$$

این تنشها در روی عنصر دوران پیدا کرده در شکل c ۸ – ۵ نشان داده شده است .



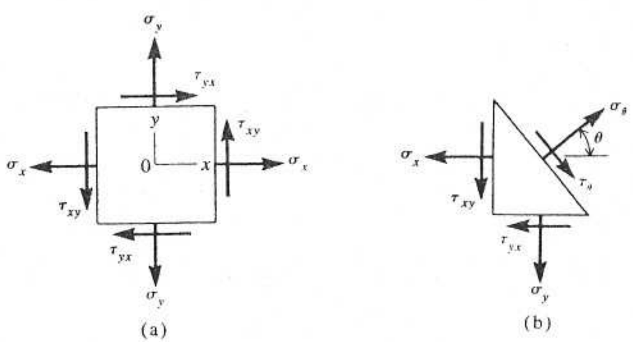
نقطه D´ تنش‌ها را در صفحه‌ای‌می‌دهد که برای آن $2\theta = 220°$ یا $\theta = 110°$ میباشد .
تنش‌های نقطه D´ عبارتند از

$$\sigma'_\theta = 149.1 Kg/cm^2 \quad ; \quad \tau'_\theta = 359.8 Kg/cm^2$$

این تنش‌ها نیز در روی شکل c ۸ – ۵ نشان داده شده‌اند .

## ۶ – ۵ تنش مسطح

تنش های یک محوری و دو محوری حالت‌های خاصی از حالت کلی تر تنش موسوم به تنش مسطح می‌باشد . عنصر کوچکی در تنش مسطح مطابق شکل a ۹ – ۵ می تواند در روی وجه‌های x و y تنش‌های عمودی و برشی داشته باشد ولی در روی وجه z آن تنش وجود ندارد . تنش برشی در روی وجه x عنصر کوچک مزبور با $\tau_{xy}$ نشان‌داده می‌شود که در آن زیر نویس اول معرف سطحی است که تنش بر آن اثر می‌کند و زیر نویس دوم معرف راستای تنش برشی می‌باشد . موقعی که از این اسم گذاری برای مشخص کردن تنش‌های برشی استفاده می‌شود معمولا " تنش برشی وقتی مثبت فرض می‌شود که جهت آن در جهت مثبت محور y باشد . بدین ترتیب $\tau_{xy}$ در جهت نشان داده شده درروی شکل مثبت می‌باشد . همین طور تنش برشی در وجه فوقانی عنصر کوچک با $\tau_{yx}$ نشان داده می‌شود و این تنش معرف آن است که تنش برشی در روی وجه y عنصر کوچک در




شکل ۹ – ۵

جهت مثبت x اثر می‌کند و مقدار آن مثبت است. این قرار داد علامت‌برای‌تنش‌های برشی $\tau_{xy}$ و $\tau_{yx}$ غالبا" در تئوری ارتجاعی بکار می‌رود و از این جهت در این کتاب انتخاب شده است.

اما ما در بحث‌های قبلی قرار داد دیگری برای علامت تنش برشی $\tau_\theta$ بکاربردیم که بر اساس اینکه تنش برشی در جهت عقربه‌های ساعت و یا مخالف‌جهت‌عقربه‌های‌ساعت نسبت به سطح اثر کند قرار داشت. ما در مطالعه تنش مسطح برای $\tau_\theta$ همان قرار داد علامت را بکار خواهیم برد. در این صورت در روی سطح $\theta = 0$ (وجه x عنصرکوچک) داریم: $\tau_\theta = -\tau_{xy}$ و در روی سطح $\theta = 90°$ داریم: $\tau_\theta = \tau_{yx}$. همچنین از تساوی تنش‌های برشی در روی دو سطح عمود بر هم واضح است که

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \qquad (5-29)$$

حال مقطع مایلی را که عمود بر آن با محور x زاویه θ تشکیل می‌دهد در نظر می‌گیریم (شکل b ۹ ـ ۵). از شرایط تعادل عنصر کوچک مثلثی می‌توان تنش‌عمودی $\sigma_\theta$ و تنش برشی $\tau_\theta$ را که بر سطح مایل اثر می‌کند بدست آورد. در نوشتن معادلات تعادل باید توجه نمود که مساحت‌های وجه‌های عنصر مزبور یکسان نمی‌باشند و برای به دست آوردن نیروی وارد بر هر وجه باید تنش وارد بر وجه مزبور را در مساحت سطح آن ضرب نمود. این روش قبلا" در مورد معادلات 5-9 و 5-10 بکار رفت.

از تعادل نیروها در امتداد $\sigma_\theta$ (شکل b ۹ ـ ۵) نتیجه می‌شود

$$\sigma_\theta = \sigma_x\cos^2\theta + \sigma_y\sin^2\theta + 2\tau_{xy}\sin\theta\cos\theta$$

از تعادل نیروها در امتداد $\tau_\theta$ معادله زیر حاصل می‌شود:

$$\tau_\theta = (\sigma_x - \sigma_y)\sin\theta\cos\theta + \tau_{xy}(\sin^2\theta - \cos^2\theta)$$

دو معادله فوق را می‌توان با استفاده از روابط مثلثاتی به صورت زیر نوشت:

$$\sigma_\theta = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta \qquad (5-30)$$

$$\tau_\theta = \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\sin 2\theta - \tau_{xy}\cos 2\theta \qquad (5-31)$$

معادلات فوق تنش‌های عمودی و برشی را در روی هر سطح مایلی بر حسب تنش‌های $\sigma_x$، $\sigma_y$ و $\tau_{xy}$ می‌دهند. توجه کنید وقتی $\theta = 0$ از معادلات فوق $\sigma_\theta = \sigma_x$ و



$\tau_\theta = -\tau_{xy}$، و وقتی $\theta = \pi/2$ از معادلات فوق $\sigma_\theta = \sigma_y$ و $\tau_\theta = \tau_{xy}$ به دست می‌آید. همچنین وقتی $\tau_{xy} = 0$ می‌باشد، معادلات 5-30 و 5-31 به معادلات 5-11 و 5-12 برای حالت تنش دو محوری منجر می‌شوند.

در هنگام استفاده از معادلات 5-30 و 5-31 به قرار دادهای علامت تنشها باید به دقت توجه شود:

الف ـ تنش‌های عمودی وقتی مثبت هستند که کششی باشند،

ب ـ تنش برشی $\tau_{xy}$ وقتی مثبت است که در جهت مثبت محور y باشد،

پ ـ تنش برشی $\tau_\theta$ وقتی مثبت است که در جهت عقربه‌های ساعت در روی سطح ماده اثر کند.

علت انتخاب قرار داد علامت فوق برای $\tau_\theta$ این است که زاویه 2θ در دایره موهر در جهت مخالف جهت عقربه‌های ساعت که همان جهت مثبت اندازه گیری θ است اندازه گیری شود.

تنش‌ها در روی سطحی که زاویه $\theta + \pi/2$ با محور x می‌سازند ($\sigma'_\theta$ و $\tau'_\theta$) از معادلات 5-30 و 5-31 با جایگزینی $\theta + \pi/2$ به جای θ بدست می‌آیند. اگر این عمل انجام شود، پیدا خواهیم کرد

$$\sigma_\theta + \sigma'_\theta = \sigma_x + \sigma_y \quad ; \quad \tau_\theta = -\tau'_\theta$$

بدین ترتیب مجددا" مشاهده می‌کنیم که مجموع تنش‌های عمودی در روی دو سطح عمود بر هم ثابت می‌باشد و تنش‌های برشی در روی دو سطح عمود بر هم دارای مقدار یکسان ولی جهت مخالف یکدیگر می‌باشند.

با تغییر زاویه θ در شکل b ۹ ـ ۵ از 0° تا 360° تنش‌های $\sigma_\theta$ و $\tau_\theta$ نیز تغییر می‌کنند. ماکزیمم و مینیمم مقادیر $\sigma_\theta$ تنش‌های اصلی هستند و صفحاتی که این تنشها بر آنها اثر می‌کنند با مساوی صفر قرار دادن $d\sigma_\theta / d\theta$ وسپس‌حل‌معادله حاصل برای θ بدست می‌آیند.

$$\frac{d\sigma_\theta}{d\theta} = -(\sigma_x - \sigma_y)\sin 2\theta + 2\tau_{xy}\cos 2\theta = 0$$

$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \qquad (5-32)$$

$\theta_p$ در این رابطه زوایای صفحه‌های اصلی را مشخص می‌کند . از معادله 5-32 دو مقدار برای $2\theta_p$ بدست می‌آید که با یکدیگر به اندازه $180^\circ$ اختلاف دارند . اولین مقدار بین $0^\circ$ و $180^\circ$ و مقدار دیگر بین $180^\circ$ و $360^\circ$ قرار دارد . بدین ترتیب دو مقدار برای $\theta_p$ بدست می‌آید ، مقدار اول بین $0^\circ$ و $90^\circ$ و مقدار دیگر بین $90^\circ$ و $180^\circ$ قرار دارد . تنش عمودی $\sigma_\theta$ به ازای یکی از مقادیر $\theta_p$ ماکزیمم و به‌ازای‌مقدار دیگر مینیمم می‌باشد . این دو تنش اصلی در دو صفحه عمود بر هم اثر می‌کنند .

در هر حالت‌خاصی‌بعد از پیدا کردن مقادیر $\theta_p$ از معادله 5-32 میتوان آنها را در معادله 5-30 جایگزین نمود تا دو تنش اصلی بدست آیند . با انجام این عملیات بطور جبری می‌توان یک فرمول کلی برای تنش‌های اصلی بدست آورد . برای این کار از معادله 5-32 داریم

$$\cos 2\theta_p = \pm \frac{\sigma_x - \sigma_y}{s} \quad ; \quad \sin 2\theta_p = \pm \frac{2\tau_{xy}}{s}$$

در این رابطه

$$s = \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

از جایگزینی مقادیر فوق در معادله 5-30 حاصل می‌شود

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \qquad (5\text{-}33)$$

$\sigma_1$ و $\sigma_2$ به ترتیب معرف تنش‌های اصلی ماکزیمم و مینیمم به طور جبری می‌باشند . مشاهده می‌شود که رابطه $\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_x + \sigma_y$ بر قرار است .

اگر در معادله 5-31 تنش برشی $\tau_\theta$ را مساوی صفر قرار دهیم و معادله را برای $2\theta$ حل کنیم به همان نتیجه معادله 5-32 می‌رسیم . این نتیجه نشان‌میدهد که در صفحه‌های اصلی تنش برشی وجود ندارد .

حال تنش‌های برشی ماکزیمم و صفحه‌هایی را که بر آنها اثر می‌کنند پیدا می‌کنیم .

اگر مشتق معادله 5-31 را نسبت به $\theta$ مساوی صفر قرار دهیم خواهیم داشت

$$\cot 2\theta_s = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \qquad (5\text{-}34)$$



$\theta_s$ زاویه صفحه‌ایست که در آن تنش برشی ماکزیمم می‌باشد . از مقایسه معادله فوق با معادله 5-32 نتیجه می‌شود

$$\cot 2\theta_s = -\tan 2\theta_p$$

بنابراین نتیجه می‌گیریم که $2\theta_s$ و $2\theta_p$ به اندازه $90^\circ$ با یکدیگراختلاف‌دارند ، یا صفحه‌های تنش برشی ماکزیمم با صفحه‌های اصلی زاویه $45^\circ$ تشکیل می‌دهند ( این نتیجه قبلاً در بخش ۲ ــ ۵ در حالت تنش دو محوری نیز مشاهده شده است ) . با جایگزینی $2\theta_s$ از معادله 5-34 در معادله 5-31 تنش برشی ماکزیمم به دست می آید .

$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \qquad (5\text{-}35)$$

رابطه فوق معادل است با

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \qquad (5\text{-}36)$$

در روی صفحه‌های تنش برشی ماکزیمم تنش‌های عمودی برابرند با

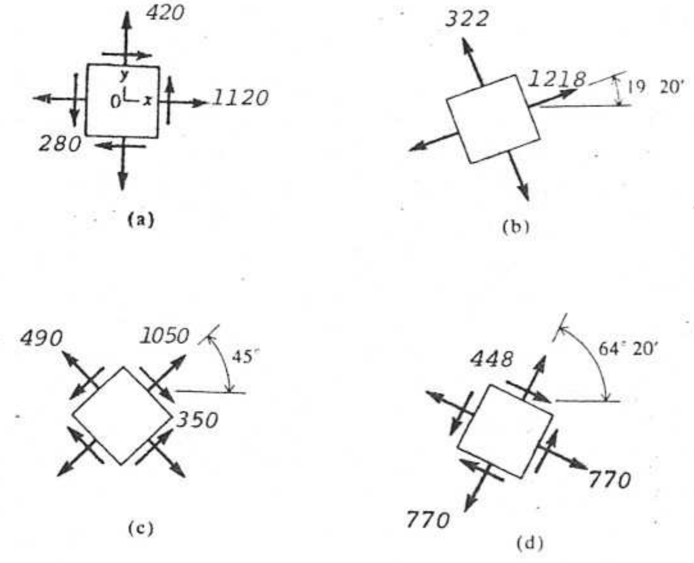
$$\sigma_\theta = \sigma'_\theta = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \qquad (5\text{-}37)$$

## مثال ۲ ــ ۵

عنصری در تنش مسطح تحت تنش‌های $\sigma_x = 1120 Kg/cm^2$، $\sigma_y = 420 Kg/cm^2$، و $\tau_{xy} = 280 Kg/cm^2$ مطابق شکل ۵ ــ ۱۰ a قرار دارد . تعیین کنید : الف ــ تنشها و صفحه‌های‌اصلی ، ب ــ تنشها در روی عنصری‌که‌به اندازه $45^\circ$ دوران کرده باشد و پ ــ تنشهای برشی ماکزیمم . نتایج را روی شکل‌های عناصر دوران پیدا کرده نشان دهید .

**حل** : الف ــ برای پیدا کردن صفحه‌های اصلی‌از معادله 5-32 استفاده می‌کنیم که از آن $\tan 2\theta_p = 0.8$ و $\theta_p = 19^\circ 20'$ و $109^\circ 20'$ بدست می آید .

با استفاده‌ازمعادله 5-33 تنش‌های‌اصلی $\sigma_1 = 1218\ Kg/cm^2$ و $\sigma_2 = 322 Kg/cm^2$




شکل ۱۰ ــ ۵

بدست‌می‌آیند .این نتایج در شکل b ۱۰ ــ ۵ نشان داده شده‌است .

ب ــ تنشها در روی عنصری که به اندازه $45°$ دوران کرده باشد از معادلات 5-30 و 5-31 بدست می‌آیند . اگر در این معادلات $\theta = 45°$ قرار دهیم $\sigma_\theta = 1050 Kg/cm^2$ و $\tau_\theta = 350 Kg/cm^2$ و اگر در آنها $\theta = 135°$ قرار دهیم $\sigma'_\theta = 490 \ Kg/cm^2$ و $\tau'_\theta = -350 \ Kg/cm^2$ بدست می‌آیند . این نتایج در شکل c ۱۰ ــ ۵ نشان داده شده است .

پ ــ زاویه صفحه تنش برشی ماکزیمم از معادله 5-34 بـه دست می آیـد : $\cot 2\theta_s = -0.8$ و $\theta_s = 64°20'$ ، $154°20'$ . با بکار بردن $2\theta = 128°40'$ در معادلات 5-30 و 5-31 ، $\sigma_\theta = 770 Kg/cm^2$ و $\tau_\theta = 448 Kg/cm^2$ ، و با بکار بردن $2\theta = 308°40'$ ، $\sigma'_\theta = 770 Kg/cm^2$ و $\tau'_\theta = -448 Kg/cm^2$ بدست‌میآیند . این نتایج در شکل d ۱۰ ــ ۵ نشان داده شده است .



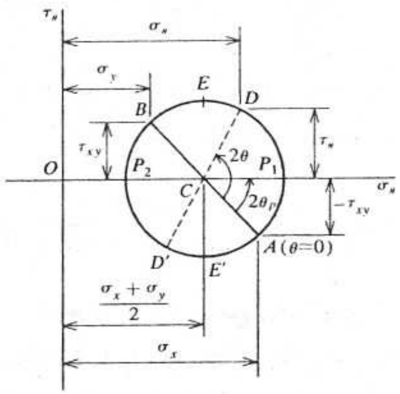
## ۷ ــ ۵ دایره موهر برای تنش مسطح

معادلات 5-30 و 5-31 برای حالت کلی تنش مسطح را می توان‌بوسیله دایره موهر نشان داد . این معادلات را می‌توان مشابه آنچه که در بخش ۵ ــ ۵ بحث شد با یکدیگر ترکیب نمود تا معادله

$$(\sigma_\theta - \sigma_{av})^2 + \tau_\theta^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2 \qquad (5\text{-}38)$$

بدست آید که در آن $\sigma_{av} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)$ . معـادله 5-38 معـادلـه دایره‌ایست که مرکز آن در $\sigma_\theta = \sigma_{av}$ و $\tau_\theta = 0$ قرار دارد و شعاع آن برابر با جذر قسمت راست معادله فوق می‌باشد . توجه کنید اگر $\tau_{xy} = 0$ باشد معادله 5-38 بـه حالت خاص معادله 5-28 تبدیل می‌گردد .

نحـوه رسم دایـره موهر در شکل ۱۱ ــ ۵ نشان داده شده است . ابتدامحل




شکل ۱۱ ــ ۵ دایره موهر برای تنش‌مسطح

نقطه C با مختصات $\sigma_\theta = \sigma_{av}$ و $\tau_\theta = 0$ مشخص می‌شود . سپس محـل نقطه A که معرف شرایط تنش در صفحه x عنصر می‌باشد و مختصات آن $\sigma_\theta = \sigma_x$ و $\tau_\theta = -\tau_{xy}$ ( به قرار دادهای علامت برای $\tau_\theta$ و $\tau_{xy}$ در شکل ۹ ــ ۵ رجوع کنید ) است در روی صفحه مختصات مشخص می‌گردد . بعد از آن محل نقطه B که‌معرف صفحه y عنصر با $\sigma_\theta = \sigma_y$ و $\tau_\theta = \tau_{xy}$ است تعیین می‌گردد . نقاط A و B معرف تنش در روی صفحه‌هایی هستند که بر یکدیگر عمود می‌باشند ، بنابراین در روی

دایره موهر باید به اندازه $180°$ از یکدیگر فاصله داشته باشند. بدین ترتیب دایره‌ای که به مرکز C و قطر AB رسم شود همان‌دایره موهر است. برای پیدا کردن تنش های $\sigma_\theta$ و $\tau_\theta$ در روی صفحه‌ای با زاویه $\theta$ کافی است در روی دایره موهر از نقطه A به اندازه $2\theta$ در جهت خلاف‌جهت عقربه‌های‌ساعت‌جداکنیم تا به نقطه D برسیم. مختصات نقطه D همان تنش‌های مطلوب می‌باشد. اثبات اینکه مختصات نقطه D به وسیله معادلات 5-30 و 5-31 داده می‌شود به عنوان تمرینی به عهده خواننده واگذار می‌شود.

نقطه ́D که‌با نقطه D در روی یک قطر قرار دارد معرف صفحه‌ای می‌باشد که با صفحه مربوط‌به نقطه D زاویه $90°$ می‌سازد. نقطه E در بالاترین نقطه‌دایره‌معرف تنش‌های صفحه تنش برشی مثبت ماکزیمم و نقطه ́E در پایین ترین نقطه دایره معرف تنش‌های صفحه تنش برشی منفی ماکزیمم می‌باشد. در روی این صفحه‌ها تنش‌های عمودی برابر با تنش متوسط (معادله 5-37) می‌باشند.

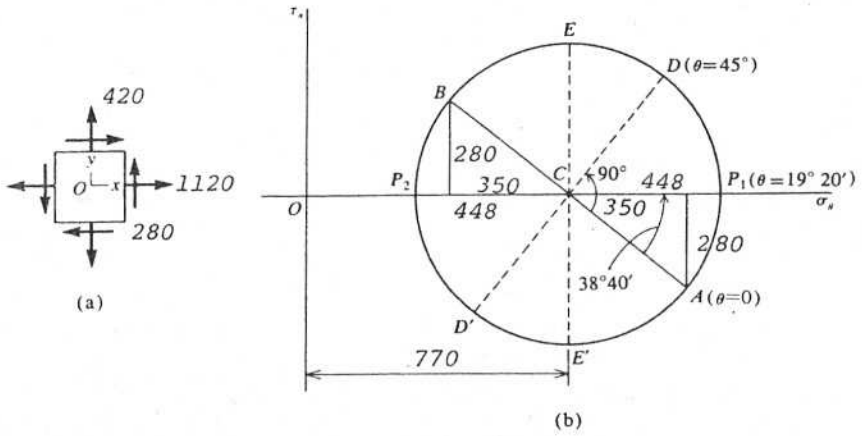
یکی از استفاده‌های مهم دایره موهر تعیین کردن تنش‌های اصلی می‌باشد. این تنش‌ها که تنش‌های عمودی ماکزیمم و مینیمم می‌باشند با نقاط $P_1$ و $P_2$ در روی‌دایره موهر (شکل ۱۱ – ۵) مشخص می‌شوند. نقطه $P_1$ نظیر صفحه اصلی با تنش عمودی ماکزیمم $\sigma_1$ و نقطه $P_2$ نظیر صفحه اصلی با تنش عمودی مینیمم می‌باشد. زاویه $2\theta_p$ اولین صفحه اصلی در روی شکل ۱۱ – ۵ مشخص شده است. تمام روابطی که در بخش قبل بدست آمد به سهولت بوسیله دایره موهر قابل استنتاج می‌باشد.

## مثال ۳ – ۵

عنصری در تنش مسطح مطابق شکل ۱۲ a – ۵ تحت تنش‌های $\sigma_x=1120Kg/cm^2$، $\sigma_y = 420Kg/cm^2$ و $\tau_{xy}=280Kg/cm^2$ قرار دارد. با استفاده از دایره موهر تعیین کنید: الف – تنش‌ها و صفحه‌های اصلی، ب – تنش‌ها در روی صفحه‌ای که به‌اندازه $45°$ دوران کرده است و پ – تنش‌های برشی ماکزیمم (توجه کنید این مثال قبلاً در مثال ۲ – ۵ حل گردیده است).

حل: مرکز C دایره در روی محور $\sigma_\theta$ قرار دارد که برای آن $\sigma_\theta=770Kg/cm^2$. محل نقطه A به مختصات $\sigma_\theta=1120Kg/cm^2$ و $\tau_\theta=-280Kg/cm^2$ در روی صفحه مختصات مشخص می‌شود. سپس دایره‌ای به مرکز C






شکل ۱۲ – ۵

و شعاع $CA = 448Kg/cm^2$ رسم می‌گردد. نقطه B که در انتهای دیگر قطر AB قرار دارد به مختصات $\sigma_\theta=1120Kg/cm^2$ و $\tau_\theta=280Kg/cm^2$ می‌باشد.

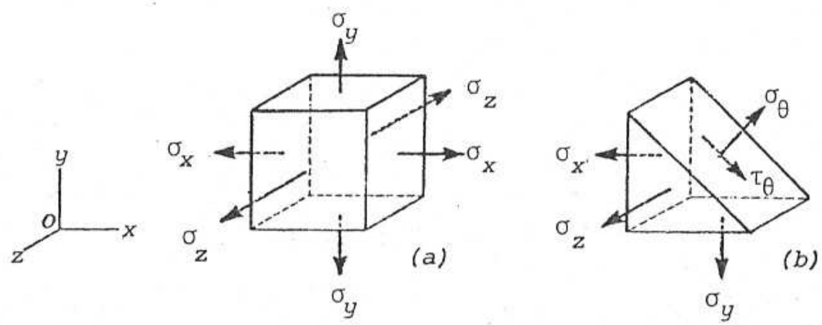
الف – بر اساس دایره موهر تنش اصلی $\sigma_1$ برابر با $770 + 448 = 1218Kg/cm^2$ می‌باشد و صفحه اصلی مربوط زاویه $2\theta_p$ برابر $38°40'$ دارد. بنابراین زاویه بین محور x و صفحه اصلی $19°20'$ می‌باشد. تنش اصلی دیگر (نظیر نقطه $P_2$) برابر با $\sigma_2=770 - 448 = 322Kg/cm^2$ است که در روی صفحه با $\theta=19°20'+90°=109°20'$ اثر می‌کند.

ب – تنش‌ها در روی صفحه‌ای که به اندازه $45°$ دوران کرده است در روی دایره موهر بوسیله نقطه D با $2\theta = 90°$ مشخص می‌شود. زاویه بین خط CD و محور $\sigma_\theta$ برابر $90°-38°40'= 51°20'$ می‌باشد. از مختصات نقطه D تنش‌های $\sigma_\theta=1050Kg/cm^2$ و $\tau_\theta=350Kg/cm^2$ بدست می‌آید. تنش‌ها در نقطه ́D نیز $\sigma'_\theta= 490 Kg/cm^2$ و $\tau'_\theta=-350Kg/cm^2$ می‌باشند. این نتایج را می‌توان در روی عنصری مانند شکل c ۱۰ – ۵ رسم نمود.

پ – تنش‌های برشی ماکزیمم و صفحه‌های‌مربوطه‌بوسیله نقاط E و ́E تعیین می‌شوند. خواننده به سهولت می‌تواند ثابت کند که تنش‌ها در این نقاط با نتایج شکل d ۱۰ – ۵ منطبق می‌باشند.

## ۸ – ۵ تنش سه محوری

حالت تنش عنصر کوچکی از ماده که تحت اثر تنشهای $\sigma_x$ ، $\sigma_y$ و $\sigma_z$ در سه جهت عمود بر هم می‌باشد ( شکل a ۱۳ – ۵ ) موسوم به تنش سه‌محوری میباشد . اگر صفحه مایلی موازی محور z از میان عنصر عبور کند ( شکل b ۱۳ – ۵ ) ، تنها




شکل ۱۳ – ۵

تنشهایی که در سطح مایل اثر می‌کنند تنشهای $\sigma_\theta$ و $\tau_\theta$ می‌باشند که قبلاً" برای حالت تنش دو محوری بدست آمد . چون این تنشها از نوشتن معادلات تعادل در صفحه xy بدست می‌آیند ، آنها مستقل از تنش $\sigma_z$ می باشند . بنابراین برای تعیین تنشهای $\sigma_\theta$ و $\tau_\theta$ می‌توانیم از معادلات حالت تنش دو محوری و همچنین دایره موهر استفاده کنیم . در مورد صفحه‌های مایلی که موازی x و y از میان عنصربریده شود نیز همین نتایج کلی حاصل می‌شود .

با توجه‌به‌بحث‌های قبل‌مشاهده می‌شود که تنشهای $\sigma_x$ ، $\sigma_y$ و $\sigma_z$ تنشهای اصلی عنصر مزبور می‌باشند . بعلاوه تنشهای برشی ماکزیمم روی صفحه‌هایی خواهد بود که عنصر را تحت زاویه $45°$ و موازی یکی از محورهای مختصات قطع کند ( واین‌بستگی به مقدار تنشهای $\sigma_x$ ، $\sigma_y$ و $\sigma_z$ نسبت به یکدیگر دارد ) . برای مثال اگر فقط صفحه‌های موازی محور z را در نظر بگیریم ( شکل b ۱۳ – ۵ ) ، تنش‌برشی‌ماکزیمم برابر است با ( با استفاده از معادله 5-16 )

$$(\tau_{max})_z = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \qquad (5\text{-}39)$$

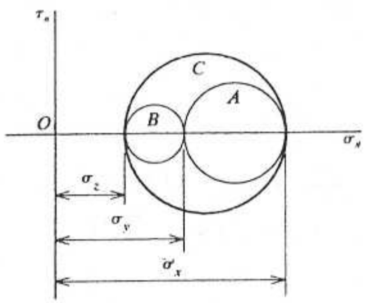


همین‌طور تنشهای برشی‌ماکزیمم در روی صفحه‌های موازی محورهای x و y عبارتنداز

$$(\tau_{max})_x = \frac{\sigma_y - \sigma_z}{2} \quad ; \quad (\tau_{max})_y = \frac{\sigma_x - \sigma_z}{2} \qquad (5\text{-}40)$$

بسته به مقادیر نسبی $\sigma_x$ ، $\sigma_y$ و $\sigma_z$ یکی از مقادیر فوق بطور عددی بیشترین تنش برشی در عنصر می‌باشد .

همین نتایج را می‌توان به کمک دایره موهر به سهولت مجسم کرد . برای صفحه های موازی محور z دایره موهر دایره A در شکل ۱۴ – ۵ می‌باشد ( با فرض اینکه $\sigma_x$ و $\sigma_y$ هر دو کششی و $\sigma_x > \sigma_y$ باشد ) . همین طور برای صفحه‌های موازی محورهای x و y به ترتیب دایره‌های B و C بدست می‌آیند . شعاع‌های سه دایره معرف تنشهای برشی ماکزیمم می‌باشندکه بوسیله معادلات 5-39 و 5-40 داده‌شده‌اند ، و تنش برشی ماکزیمم مطلق برابر با شعاع بزرگترین دایره می‌باشد .




شکل ۱۴ – ۵ دایره موهر برای تنش سه‌محوری

تنشهای برشی و عمودی در روی صفحه‌هایی که به طور مورب وغیرموازی‌بامحورهای x ، y و z بریده شده باشند با یک تحلیل سه بعدی پیچیده تری بدست می آید ( مرجع 26 ) . تنشهای عمودی در روی این صفحه‌ها همواره مابین مقادیر جبری تنشهای اصلی ماکزیمم و مینیمم قرار دارد ، و تنش برشی در روی این صفحه‌ها همواره کمتر از مقدار عددی تنش برشی ماکزیمم که از معادلات 5-39 و 5-40 به دست می‌آید می‌باشد .

## ۹ – ۵ کرنشها در تنش سه محوری

اگر ماده مورد نظر از قانون هـوک پیروی کند کرنش‌ها در جهت‌های $x$ ، $y$ و $z$ برای حالت تنش سه محوری به همان طریق حالت تنش دو محوری بدست می‌آید .

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_y + \sigma_z) \qquad (5\text{-}41)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_z) \qquad (5\text{-}42)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \qquad (5\text{-}43)$$

تغییر حجم واحد حجم عنصر برابر است با ( معادله 5-21 )

$$\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \qquad (5\text{-}44)$$

اگر در معادله فوق به جای کرنش‌ها از معادلات 5-41 تا 5-43 قرار دهیم خواهیم داشت

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \qquad (5\text{-}45)$$

در حالت خاصی‌که عنصر مورد نظر تحت فشار هیدرواستاتیک یا فشار یکنواخت در همه جهات قرار دارد اگر فشار مزبور را $p$ بنامیم می‌توانیم بنویسیم

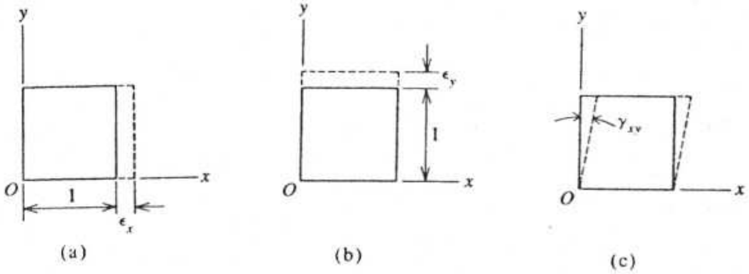
$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p$$

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{-3p(1-2\nu)}{E} \qquad (5\text{-}46)$$

## ۱۰ — ۵ کرنش مسطح

در تحقیقات تجربی رفتار مصالح و سازه‌ها اندازه گیری کرنش‌ها بوسیله‌کرنش‌سنج‌ها کاملا" متداول است . از این رو پیدا کردن روابطی بین کرنش‌های عمودی و برشی در امتدادهای مختلف مشابه روابطی که در بخش ۶ — ۵ برای تنش مسطح بدست آمد مورد توجه می‌باشد . در صفحه $xy$ سه موءلفه کرنش ممکن است وجود داشته باشد : کرنش عمودی $\varepsilon_x$ درامتداد $x$ ( شکل a ۱۵ — ۵ ) ، کرنش عمودی $\varepsilon_y$ درامتداد $y$






شکل ۱۵ — ۵

( شکل b ۱۵ — ۵ ) و کرنش برشی $\gamma_{xy}$ ( شکل c ۱۵ — ۵ ) .

کرنش برشی $\gamma_{xy}$ در یک عنصر به صورت کاهش زاویه قائمه گوشه سمت چپ تحتانی‌آن وقتی که عنصر مطابق شکل c ۱۵ — ۵ نسبت به محورهای $x$ و $y$ قرارگرفته‌تعریف می‌شود . این تعریف کرنش برشی مثبت با تعریف تنش برشی مثبت $\tau_{xy}$ در شکل a ۹ — ۵ سازگار می‌باشد .

حالت عنصری از ماده که فقط تحت اثر کرنش‌های $\varepsilon_x$ ، $\varepsilon_y$ و $\gamma_{xy}$ میباشد حالت کرنش مسطح خوانده می‌شود . چنین عنصری کرنش عمودی $\varepsilon_z$ وکرنش‌های‌برشی $\gamma_{xz}$ و $\gamma_{yz}$ ( به ترتیب در صفحه‌های $xz$ و $yz$ ) نخواهد داشت . بدین ترتیب حالت کلی کرنش مسطح بوسیله شرایط زیر تعریف می‌شود :

$$\varepsilon_x \neq 0 \qquad \varepsilon_y \neq 0 \qquad \gamma_{xy} \neq 0$$

$$\varepsilon_z = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0$$

تعریف کرنش مسطح فوق مشابه تعریف تنش مسطح می‌باشد که در حالت کلی به صورت‌زیر بیان می‌شود :

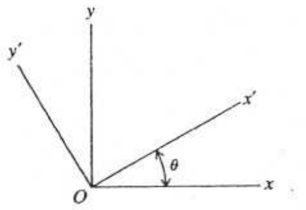
$$\sigma_x \neq 0 \qquad \sigma_y \neq 0 \qquad \tau_{xy} \neq 0$$

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

از تشابه شرایط‌کرنش مسطح و تنش مسطح نباید نتیجه گرفت که کرنش مسطح و تنش‌مسطح در شرایط یکسان ایجاد می‌شوند . برای مثال ما می‌دانیم عنصری در تنش مسطح معمولا"

در امتداد z کرنش دارد و این نشان می‌دهد که حالت تنش مسطح لزومی ندارد که حالت کرنش مسطح را ایجاد کند . همچنین بر عنصری در کرنش مسطح معمولا " تنش $\sigma_z$ اثر می‌کند تا شرط $\varepsilon_z = 0$ بر قرار گردد ، بنابراین مجددا " نتیجه می‌شود که معمولا " تنش مسطح و کرنش مسطح بطور همزمان اتفاق نمی‌افتند .

معادلات تبدیل تنش‌ها در بخش ۶ – ۵ ابتدا برای حالت تنش‌مسطح‌بدست‌آمدند . بعدا " در بخش ۸ – ۵ دیدیم که آنها را می‌توان برای عنصری در تنش سه محوری‌نیز بکار برد به شرط‌آنکه دوران عنصر حول یکی از محورهای مختصات صورت گرفته باشد . در مورد کرنش‌ها نیز همان روش فوق بکار خواهد رفت . معادلات تبدیل کرنش ها برای حالت کرنش مسطح بدست خواهد آمد ، اما این معادلات برای حالت کرنش سه‌محوری‌نیز صادق هستند به شرط‌آنکه دوران به یک امتداد جدید حول یکی از محورهای مختصات صورت گیرد . در نتیجه معادلات تبدیل کرنشها که در زیر بدست می‌آیند برای‌تعیین کرنشها در حالت تنش مسطح نیز بکار می‌روند . همین طور معادلات تنش مسطح که در بخش ۶ – ۵ بدست آمد برای تعیین تنشها در حالت کرنش مسطح نیز بکار می‌روند .

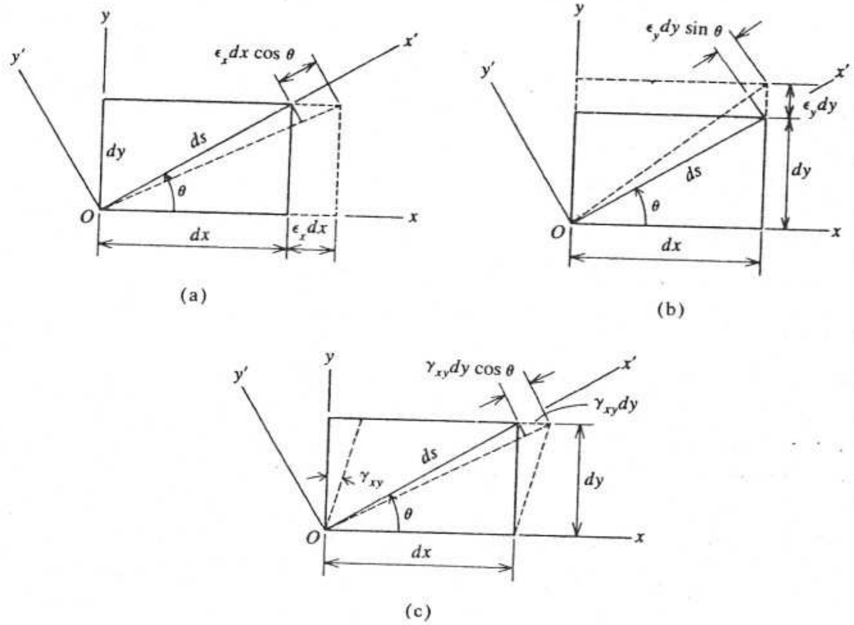



شکل ۱۶ – ۵

برای اینکه معادلات تبدیل کرنشها را برای کرنش مسطح بدست آوریم ، محور های مختصات شکل ۱۶ – ۵ را در نظر می‌گیریم . فرض می‌شود که کرنشهای عمودی $\varepsilon_x$ و $\varepsilon_y$ و کرنش برشی $\gamma_{xy}$ مربوط به محورهای xy معلوم باشند . هدف ما تعیین کرنشهای عمودی و برشی مربوط به محورهای x´y´ می‌باشد که نسبت به محورهای xy به اندازه θ دوران‌کرده‌اند . کرنش عمودی در امتداد x´ با $\varepsilon_\theta$ و کرنش‌برشی مربوط به محورهای x´y´ با $\gamma_\theta$ نشان داده می‌شود . وقتی که $\theta = 0$ داریم $\varepsilon_\theta = \varepsilon_x$ و $\gamma_\theta = \gamma_{xy}$ .

یک عنصر مستطیلی‌به اضلاع dx و dy که قطرش در امتداد محور x´ میباشد در شکل ۱۷ – ۵ مشاهده می‌گردد . در اثر کرنش های $\varepsilon_x$ ، $\varepsilon_y$ و $\varepsilon_z$ عنصر مزبور در امتداد x به اندازه $\varepsilon_x dx$ ( شکل ۱۷a – ۵ ) و در امتداد y به‌اندازه $\varepsilon_y dy$ ( شکل b ۱۷ – ۵ ) اضافه طول پیدا خواهد کرد و زاویه xOy به اندازه






شکل ۱۷ – ۵

$\gamma_{xy}$ کاهش خواهد یافت ( شکل c ۱۷ – ۵ ) . هر یک از این سه تغییرشکل باعث می‌شود که طول قطر عنصر تغییر کند . اضافه طول های نظیر قطر عنصر مطابق شکل $\varepsilon_x dx\cos\theta$ ، $\varepsilon_y dy\sin\theta$ و $\gamma_{xy} dy\cos\theta$ می‌باشد . بنابراین اضافه طول کل‌قطر مزبور مجموع‌سه کمیت فوق می‌باشد ، و کرنش نظیر $\varepsilon_\theta$ در راستای x´ باتقسیم کردن این مجموع بر طول قطر ds به دست می‌آید . با توجه به اینکه $dy/ds=\sin\theta$ و $dx/ds = \cos\theta$ نتیجه زیر حاصل می‌شود :

$$\varepsilon_\theta = \varepsilon_x\cos^2\theta + \varepsilon_y\sin^2\theta + \gamma_{xy}\sin\theta\cos\theta \qquad (5\text{-}47)$$

این معادله را به صورت زیر نیز می‌توان نوشت :

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) + \frac{1}{2}(\varepsilon_x - \varepsilon_y)\cos 2\theta + \frac{1}{2}\gamma_{xy}\sin 2\theta \qquad (5\text{-}48)$$

بدین ترتیب معادلات 5-47 و 5-48 کرنش عمودی $\varepsilon_\theta$ را در راستای محور x´

می‌دهند . اگر کرنش عمودی در راستای $y'$ مطلوب باشد کافی است در معادلات فوق به جای $\theta$ مقدار $\theta+\pi/2$ را قرار دهیم .

برای یافتن معادله‌ای برای کرنش برشی $\gamma_\theta$ مجددا " تغییر شکل‌های شکل ۱۷–۵ را در نظر می‌گیریم . از شکل ۱۷ – ۵ a مشاهده می‌شود که در اثر کرنش $\varepsilon_x$ محور $x'$ به اندازه زاویه کوچک $\varepsilon_x dx\sin\theta/ds$ در جهت عقربه‌های ساعت دوران کرده است . همین طور از شکل ۱۷ – ۵ b نتیجه می‌شود که در اثر کرنش $\varepsilon_y$ محور $x'$ به اندازه زاویه $\varepsilon_y dy\cos\theta/ds$ در جهت مخالف جهت عقربه‌های ساعت دوران نموده است . بالاخره از شکل ۱۷ – ۵ c مشاهده می‌شود که در اثر کرنش برشی $\gamma_{xy}$ محور $x'$ به اندازه $\gamma_{xy}dy\sin\theta/ds$ در جهت عقربه‌های ساعت دوران کرده است . بدین ترتیب دوران محور $x'$ در جهت عقربه‌های ساعت برابر است با

$$\alpha = \varepsilon_x\sin\theta\cos\theta - \varepsilon_y\sin\theta\cos\theta + \gamma_{xy}\sin^2\theta$$

اگر در رابطه فوق به جای $\theta$ کمیت $\theta+\pi/2$ را قرار دهیم . زاویه دوران محور $y'$ در جهت عقربه‌های ساعت بدست می‌آید .

$$\beta = -\varepsilon_x\sin\theta\cos\theta + \varepsilon_y\sin\theta\cos\theta + \gamma_{xy}\cos^2\theta$$

کاهش زاویه $x'Oy'$ که همان کرنش برشی $\gamma_\theta$ است برابر $\beta-\alpha$ می‌باشد .

$$\gamma_\theta = -2\varepsilon_x\sin\theta\cos\theta + 2\varepsilon_y\sin\theta\cos\theta + \gamma_{xy}(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$$

یا پس از تقسیم نمودن طرفین رابطه فوق بر 2 حاصل می‌شود

$$\frac{1}{2}\gamma_\theta = -(\varepsilon_x-\varepsilon_y)\sin\theta\cos\theta+\frac{1}{2}\gamma_{xy}(\cos^2\theta-\sin^2\theta) \qquad (5-49)$$

این رابطه پس از استفاده از روابط مثلثاتی بصورت زیر در می‌آید :

$$\frac{1}{2}\gamma_\theta = -\frac{1}{2}(\varepsilon_x-\varepsilon_y)\sin2\theta+\frac{1}{2}\gamma_{xy}\cos2\theta \qquad (5-50)$$

در دو حالت خاص $\theta=0°$ و $\theta=90°$ از معادلات فوق به ترتیب $\gamma_\theta=\gamma_{xy}$ و $\gamma_\theta=-\gamma_{xy}$ بدست می‌آید .

مقایسه معادلات 5-48 و 5-50 برای حالت کرنش‌مسطح‌با‌معادلات 5-30 و 5-31 برای حالت تنش مسطح نشان می‌دهد که عبارات $\varepsilon_\theta$ و $\gamma_\theta$ همان شکل



عبارات $\sigma_\theta$ و $\tau_\theta$ را دارند . این شباهت به صورت نظیر بودن $\sigma_x$ ، $\sigma_y$ و $\sigma_\theta$ به ترتیب با $\varepsilon_x$ ، $\varepsilon_y$ و $\varepsilon_\theta$ و همچنین $\tau_{xy}$ با $\frac{1}{2}\gamma_{xy}$ و $\tau_\theta$ با $-\frac{1}{2}\gamma_\theta$ می‌باشد . وجود علامت منفی در جمله آخر به علت قرار داد علامتی است که برای تنش برشی $\tau_\theta$ بکار رفت ( شکل ۹ – ۵ را ببینید ) .

شباهت بین معادلات تنش مسطح و کرنش مسطح نشان می‌دهد که نظیر هر معادله تنش مسطح معادله‌ای نیز برای کرنش مسطح وجود دارد . برای مثال کرنش عمودی $\varepsilon'_\theta$ و کرنش برشی $\gamma'_\theta$ مربوط به یک جفت محوری که به اندازه $\theta+\pi/2$ دوران کرده‌است با جایگزینی $\theta+\pi/2$ بجای $\theta$ در معادلات 5-48 و 5-50 بدست‌می‌آیند ، در این صورت داریم

$$\varepsilon_\theta+\varepsilon'_\theta = \varepsilon_x+\varepsilon_y \quad ; \quad \gamma_\theta = -\gamma'_\theta \qquad (5-51)$$

این معادلات نشان می‌دهد که مجموع کرنش‌های عمودی در دو جهت عمود بر هم ثابت است و کرنش‌های برشی در امتداد های عمود بر هم دارای مقدار یکسان و علامت مخالف می‌باشد . این نتیجه کاملا " مشابه نتیجه‌ایست که در بخش ۶ – ۵ برای تنش مسطح‌بدست آمد .

همچنین در امتدادهایی که بوسیله معادله زیر مشخص می‌شود کرنش‌های‌اصلی‌وجود دارد ( این معادله را با معادله 5-32 مقایسه کنید ) .

$$\tan2\theta_p = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x-\varepsilon_y} \qquad (5-52)$$

کرنش‌های اصلی از معادله زیر محاسبه می‌شوند :

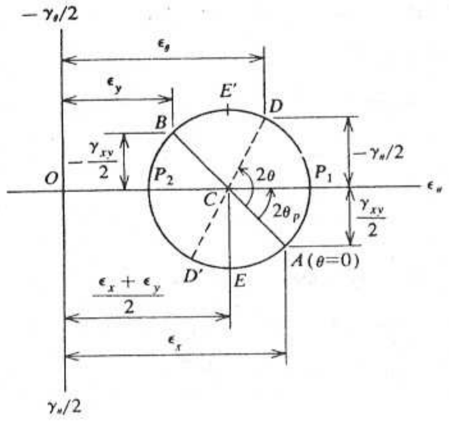
$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2}\right)^2+\left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \qquad (5-53)$$

این معادله شبیه معادله 5-33 برای تنش ها می‌باشد . در روی صفحه‌های اصلی کرنش برشی وجود ندارد .

کرنش برشی ماکزیمم در روی صفحه‌هایی که با صفحه‌های اصلی زاویه 45° میسازند وجود دارد و مقدار آن از رابطه زیر بدست می‌آید :

$$\frac{1}{2}\gamma_{max} = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2}\right)^2+\left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \qquad (5-54)$$

کرنش عمودی در صفحه‌های کرنش برشی ماکزیمم برابر است با $(\varepsilon_x + \varepsilon_y)/2$ .
دایره موهر برای کرنش مسطح با همان ترتیب تنش مسطح ساخته می شود (شکل ۱۸ – ۵) . کرنش عمودی $\varepsilon_\theta$ در روی محور افقی و نصف کرنش برشی در روی محور قائم به طرف پایین رسم می‌شود (شکل ۱۸ – ۵ را با شکل ۱۱ – ۵ مقایسه کنید) .




شکل ۱۸ – ۵

مرکز C دایره طولی برابر $(\varepsilon_x+\varepsilon_y)/2$ دارد. نقطه A معرف کرنش‌های مربوط به امتداد x دارای مختصات $\varepsilon_x$ و $\gamma_{xy}/2$ و نقطه B در انتهای دیگر قطری که از A عبور می‌کند دارای مختصات $\varepsilon_y$ و $-\gamma_{xy}/2$ می‌باشد (نقطه B معرف کرنش‌های مربوط به یک جفت محورهایی است که به اندازه $\theta = 90°$ دوران کرده‌است) .
کرنش‌های مربوط به محورهای دوران کرده دیگر بوسیله نقطه D داده می‌شود که برای تعیین محل آن از نقطه A به اندازه $2\theta$ اندازه گرفته می‌شود . همچنین نقاط $P_1$ و $P_2$ معرف کرنش‌های اصلی و نقاط $E'$ و E معرف کرنش‌های برشی ماکزیمم میباشند .
تمام کمیت‌های مذکور را می‌توان به سهولت از روی دایره موهر پیدا نمود .

## ۱۱ – ۵ مسائل حل شده

### مسئله ۱ – ۵



یک میله فلزی در درجه حرارت 21°C دقیقاً" در بین تکیه گاههای صلب قرار می‌گیرد (شکل a ۱۹ – ۵) . اگر در جه حرارت به 93°C افزایش یابد تنش های عمودی و برشی را در مقطع مایل pq حساب کنید . ضریب انبساط حرارتی فلز میله را $\alpha = 11.7\times10^{-6} C^{-1}$ و ضریب ارتجاعی آن را $E = 2.1\times10^6 Kg/cm^2$ فرض کنید .


شکل ۱۹ – ۵

**حل :** اگر میله آزاد بود به اندازه $\delta = \alpha L \Delta T$ ازدیاد طول پیدا می‌کرد (طول میله = L و ازدیاد درجه حرارت = $\Delta T$) . ولی چون از ازدیاد طول میله در دو انتهای آن بوسیله تکیه‌گاههای صلب جلو گیری می‌شود در آن تنش‌های فشاری $\sigma_x$ ایجاد می‌گردد . اگر سطح مقطع میله برابر A باشد نیروی ایجاد شده در میله برابر است با

$$P = \frac{AE\delta}{L}$$

بنابراین تنش $\sigma_x$ به صورت زیر حساب می‌شود :

$$\sigma_x = \frac{P}{A} = \frac{E\delta}{L} = \frac{E(\alpha L \Delta T)}{L} = E\alpha\Delta T$$

$$\sigma_x = -(2.1\times10^6)(11.7\times10^{-6})(93-21) = -1769 \ Kg/cm^2$$ فشاری

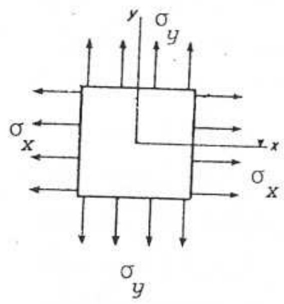
تنش‌های عمودی و برشی در مقطع مایل pq که عمود بر آن با امتداد افق زاویه $\theta = 30°$ می‌سازد (شکل b ۱۹ – ۵) از روابط زیر بدست می‌آید :

$$\sigma_{30} = \sigma_\theta = \sigma_x\cos^2\theta = -1769\cos^2 30 = -1326.75 \ Kg/cm^2$$

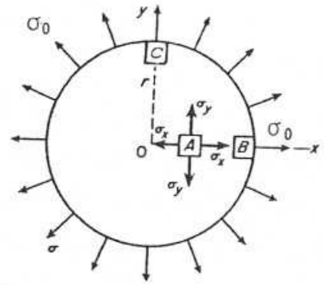
$$\tau_{30} = \tau_\theta = \sigma_x \sin\theta\cos\theta = -1769\sin30\cos30 = -766 Kg/cm^2$$

## مسئله ۲ – ۵

صفحه نازکی به ضخامت $t$ در تنش دو محوری تحت تنش‌های $\sigma_x=1400 Kg/cm^2$ و $\sigma_y = 560 Kg/cm^2$ قرار دارد ( شکل ۲۰ – ۵ ) . اگر $t=6.3\ mm$ ، $\nu = 0.25$ و $E = 2.1\times10^6 Kg/cm^2$ باشد کاهش ضخامت صفحه را پیدا کنید .




شکل ۲۰ – ۵




شکل ۲۱ – ۵

**حل :** کرنش در جهت محور $z$ ( عمود بر صفحه شکل ) برابر است با

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x+\sigma_y) = -\frac{0.25}{2.1\times10^6}(1400+560) = -2.33\times10^{-4}$$

اگر کاهش ضخامت صفحه را $\Delta t$ بنامیم خواهیم داشت

$$\varepsilon_z = \frac{\Delta t}{t} = \frac{\Delta t}{6.3} = -2.33\times10^{-4}$$

$$\Delta t = 0.0015\ mm$$

## مسئله ۳ – ۵



یک صفحه فولادی دایره‌ای نازک به شعاع $r$ و ضخامت $t$ تحت تنش شعاعی $\sigma_0$ که به طور یکنواخت در محیط آن گسترده است قرار دارد . حالت تنش را در روی عنصری از صفحه مانند $A$ بیابید ( شکل ۲۱ – ۵ ) . همچنین اگر ضریب ارتجاعی فولاد $E = 2\times10^6 Kg/cm^2$ ، $\sigma_0 = 2000 Kg/cm^2$ و ضریب پواسون $\nu = 0.25$ باشد تغییر حجم واحد حجم صفحه را پیدا کنید .

**حل :** چون صفحه و بارگذاری‌خارجی هر دو نسبت به نقطه $O$ متقارن‌میباشند نتیجه می‌شود که صفحه بعد از تغییر شکل نیز به صورت دایره‌ای باقی خواهد ماند . این بدان معنی است که کرنش‌های شعاعی ( در امتداد شعاع دایره ) و محیطی ( در امتداد محیط دایره ) در سراسر صفحه باید یکنواخت و یکسان باشد . حال با توجه به‌روابط بین تنش‌ها و کرنش‌ها در تنش دو محوری ( معادلات 5-17 و 5-18 ) و با مراجعه به حالت تنش‌ها در عنصرهای $B$ ، $C$ و $A$ ( از نمودار جسم آزاد عنصر $B$ نتیجه می‌شود $\sigma_x = \sigma_0$ و از نمودار جسم آزاد عنصر $C$ نتیجه می‌شود $\sigma_y = \sigma_0$ ) می‌توان نتیجه گرفت

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_0$$

بنابراین حالت‌تنش در هر عنصر دیگری از صفحه مانند عنصر $A$ تنش دو محوری با تنش‌های اصلی یکسان می‌باشد .

قبل از تغییر شکل صفحه حجم آن برابر است با $V_0 = \pi r^2 t$ . بعد از تغییر شکل شعاع‌جدید صفحه $r(1+\varepsilon_x)$ و ضخامت جدید آن $t(1+\varepsilon_z)$ می‌گردد .بنابراین حجم جدید صفحه $V = \pi r^2 t(1+\varepsilon_x)^2(1+\varepsilon_z)$ می‌باشد . با بسط دادن این عبارت و صرف نظر نمودن از توان‌های دوم و سوم کرنش‌ها که مقادیر کوچکی هستند خواهیم داشت

$$V \simeq \pi r^2 t(1+\varepsilon_z+2\varepsilon_x)$$

در این صورت تغییر حجم در واحد حجم صفحه برابر می‌شود با

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \frac{V-V_0}{V_0} = \frac{\pi r^2 t(\varepsilon_z+2\varepsilon_x)}{\pi r^2 t} = \varepsilon_z + 2\varepsilon_x \qquad (1)$$

حال برای حالت تنش $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_0$ کرنش‌ها را حساب می‌کنیم .

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \frac{\sigma_x}{E} - \nu\frac{\sigma_y}{E} = \frac{(1-\nu)\sigma_0}{E}$$

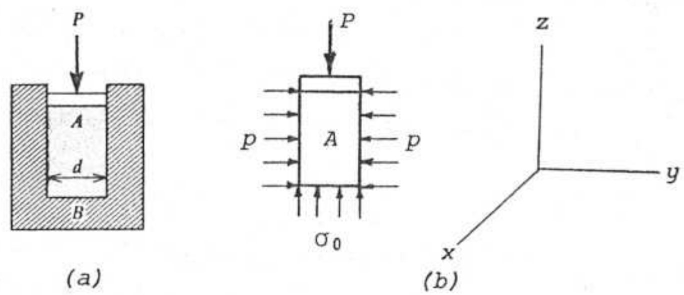
$$\varepsilon_z = -\nu\left(\frac{\sigma_x}{E}+\frac{\sigma_y}{E}\right) = -\frac{2\nu\sigma_0}{E}$$

با جایگزینی مقادیر کرنش‌ها در رابطه 1 خواهیم داشت

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \frac{2\sigma_0}{E}(1-2\nu) = \frac{2(2000)}{2(10)^6}(1-0.5) = 0.001$$

## مسئله ۴ – ۵

استوانه لاستیکی A به قطر d در استوانه فولادی B به وسیله نیروی P فشرده می‌شود ( شکل a ۲۲ – ۵ ) . اگر $P = 500Kg$ ، $d = 5cm$ و ضریب پواسون لاستیک $\nu = 0.45$ باشد ، فشار p بین لاستیک و فولاد را تعیین کنید .




شکل ۲۲ – ۵

حـل : اگر فشار وارد بر کف استوانه لاستیکی را $\sigma_0$ بنامیم ( شکل b ۲۲–۵) با نوشتن معادله تعادل استوانه در امتداد قائم فشار $\sigma_0$ بدست می‌آید .

$$\sigma_0 = -\frac{P}{\frac{\pi d^2}{4}} = -\frac{4P}{\pi d^2}$$

بر استوانه لاستیکی از سه جهت x ، y و z تنش وارد می‌شود ( تنش سه محوری ) و مقدار این تنش‌ها برابر است با

$$\sigma_x = \sigma_y = -p$$

$$\sigma_z = \sigma_0 = -\frac{4P}{\pi d^2}$$



برای بدست آوردن p از تغییر شکل استوانه فولادی در مقابل تغییر شکل استوانه لاستیکی می‌توان صرف نظر نمود ، به عبارت دیگر می‌توان فرض نمود :

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0$$

اما $\varepsilon_x$ بر حسب تنش‌ها به صورت زیر بیان می‌شود :

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] = \frac{1}{E}[-p - \nu(-p - \frac{4P}{\pi d^2})] = 0$$

از این رابطه p بدست می‌آید .

$$p = \frac{4\nu P}{\pi(1-\nu)d^2} = \frac{4(0.45)(500)}{\pi(1-0.45)(5)^2} = 20.83\ Kg/cm^2$$

## مسئله ۵ – ۵

کاهش حجم یک گوی فولادی تو پر به قطر 2.5 cm تحت فشار هیدرو استاتیکی $140Kg/cm^2$ چقدر می‌باشد ؟ ضریب ارتجاعی فولاد را $E=2.1 \times 10^6\ Kg/cm^2$ و ضریب پواسون را $\nu = 0.3$ اختیار کنید .

حـل : گوی در سه جهت x ، y و z تحت فشار $p = 140\ Kg/cm^2$ می باشد .

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p = -140\ Kg/cm^2$$

کرنش در جهت $\varepsilon_x$ برابر است با

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$= \frac{1}{E}[-p - \nu(-p-p)] = -\frac{(1-2\nu)p}{E}$$

به علت تقارن کرنش‌های $\varepsilon_y$ و $\varepsilon_z$ نیز برابر با $\varepsilon_x$ می‌باشند .

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\frac{(1-2\nu)p}{E}$$

بنابراین تغییر حجم در واحد حجم برابر است با

$$\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = -\frac{3(1-2\nu)p}{E}$$

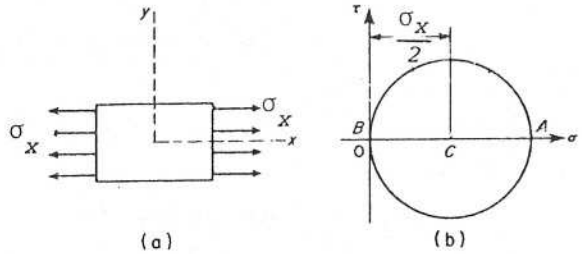
$$= -\frac{3(1-0.6)(140)}{2.1\times10^6} = -8\times10^{-5}$$

سرانجام کاهش حجم کره برابر است با

$$\Delta V = \frac{4}{3}\pi r^3(8\times10^{-5}) = \frac{4}{3}(\pi\times1.25^3)(8\times10^{-5}) = 0.65\times10^{-3}\,cm^3$$

### مسئله ۶ – ۵

دایره موهر را برای حالت کشش ساده شکل a ۲۳ – ۵ رسم کنید .



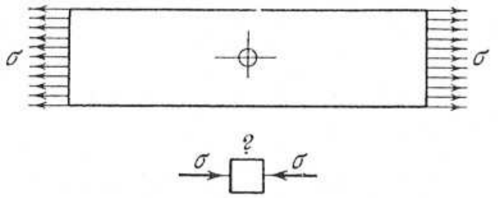

شکل ۲۳ – ۵

حل : مرکز C دایره به مختصات $\sigma=\sigma_x/2$ و $\tau=0$ ، نقطه A به مختصات $\sigma=\sigma_x$ و $\tau=0$ و نقطه B به مختصات $\sigma=\tau=0$ می باشد . پس از تعیین محل این نقاط دایره موهر مطابق شکل b ۲۳ – ۵ رسم می‌گردد .



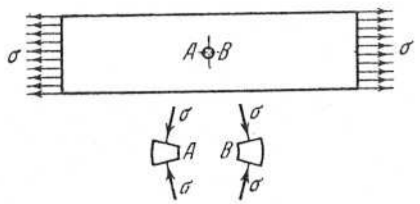
### مسئله ۷ – ۵

آیا می‌توانید در روی تسمه طویلی که تحت تنش‌های کششی σ مطابق شکل ۲۴–۵ می‌باشد و در وسط آن سوراخی وجود دارد نقطه‌ای پیدا کنید که حالت تنش در آن یک محوری فشاری با همان تنش σ باشد ؟




شکل ۲۴ – ۵

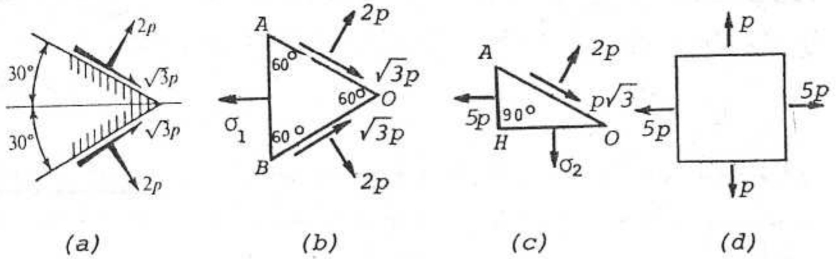
حل : نقاط A و B در دو انتهای چپ و راست سوراخ ( شکل ۲۵ – ۵ ) تحت تنش یک محوری فشاری با همان تنش σ می‌باشند .




شکل ۲۵ – ۵

### مسئله ۸ – ۵

مقدار و جهت تنش‌ها روی دو صفحه متقاطع در یک نقطه مطابق شکل a ۲۶ – ۵ می‌باشد . مقدار و جهت تنش های اصلی را در نقطه مزبور تعیین کنید .




شکل ۲۶ – ۵

**حل :** در روی سطح قائم AB تنش برشی وجود ندارد ، با نوشتن معادله تعادل عنصر مثلثی OAB می‌توان به این نتیجه رسید ( شکل b ۲۶ – ۵ ) .
مساحت سطح AB را برابر dA فرض می‌کنیم و معادله تعادل عنصر OAB را در امتداد افق می‌نویسیم تا تنش اصلی $\sigma_1$ بدست آید .

$$\sigma_1 dA = 2(2P)dA\left(\frac{1}{2}\right) + 2\left(\sqrt{3}P\right) dA\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$\sigma_1 = 5p$$

توجه کنید مثلث OAB متساوی الاضلاع و مساحت سطوح OA و OB نیزبرابر dA می باشد .

با نوشتن معادله تعادل عنصر OAH ( شکل c ۲۶ – ۵ ) در امتداد افق نتیجه می‌شودکه در سطح OH تنش برشی وجود ندارد ، و تنش $\sigma_2$ با نوشتن معادله تعادل در امتداد قائم بدست می‌آید .

$$\sigma_2 \frac{\sqrt{3}}{2} dA - 2pdA\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + p\sqrt{3}\, dA\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$
$$\sigma_2 = p$$

بنابراین صفحه‌های اصلی صفحه‌های افقی و قائم می‌باشند . تنش‌های اصلی در روی عنصر شکل d ۲۶ – ۵ مشخص شده است .

## ۵ – ۱۲ مسائل حل نشده

**مسئله ۱ – ۱ – ۵** میله‌ای با سطح مقطع دایره‌ای بوسیله نیروی 15t کشیده میشود . تنش برشی در روی هیچ یک از سطوح نباید از $600 Kg/cm^2$ تجاوز کند . قطر میله را حساب کنید .

**مسئله ۲ – ۱ – ۵** یک میله فولادی با مقطع مربع و ضلع 25mm تحت نیروی‌فشاری محوری 50 kN قرار دارد . تنش‌های عمودی و برشی را در روی صفحه‌ای که نسبت به خط اثر نیروی فشاری زاویه $30°$ تشکیل می‌دهد پیدا کنید .



**مسئله ۳ – ۱ – ۵** مثال ۱ – ۵ را با استفاده از دایره موهر حل کنید .

**مسئله ۱ – ۲ – ۵** یک غشاء برنجی دایره‌ای نازک در سراسر لبه‌اش بر روی‌حلقه‌برنجی دایره‌ای صلبی متکی می‌باشد . غشاء مزبور در درجه حرارت اطاق (20°C) بدون‌تنش است . اگر درجه حرارت به -20°C تنزل پیدا کند ، تنش‌های اصلی $\sigma_x$ و $\sigma_y$ در غشاء چقدر خواهند بود ؟
فرض کنید $E = 10^6 Kg/cm^2$ ، $\nu = 0.3$ و $\alpha = 19\times10^{-6} C^{-1}$ .

**مسئله ۱ – ۳ – ۵** عنصری از مصالح درتنش‌دومحوری‌کرنش‌های‌اصلی $\varepsilon_x = 0.00004$ و $\varepsilon_y = 0.00017$ دارد . اگر $\nu = 0.3$ باشد ، کرنش $\varepsilon_z$ را پیدا کنید .

**مسئله ۲ – ۳ – ۵** اگر در میله منشوری تحت فشار محوری نسبت تغییر حجم در واحد حجم به تغییر مساحت سطح مقطع در واحد سطح مقطع به طور عددی برابر 0.75 باشد ضریب پواسون را بدست آورید .

**مسئله ۳ – ۳ – ۵** عنصری در تنش دو محوری مطابق شکل ۵ – ۵ در جهت‌های x و y به ترتیب کرنش‌های اصلی $\varepsilon_x$ و $\varepsilon_y$ دارد . کرنش $\varepsilon_\theta$ در امتداد $\sigma_\theta$ را برحسب $\varepsilon_x$ ، $\varepsilon_y$ و زاویه $\theta$ پیداکنید . نتیجه‌را با معادله 5-9 مقایسه‌کنید .

**مسئله ۱ – ۴ – ۵** صفحه فولادی مربع شکلی به اضلاع 15cm در یک جهت بوسیله تنش $750Kg/cm^2$ کشیده می‌شود و از جهت دیگر تحت تنش فشاری با همان مقدار فوق قرار دارد . کرنش را در امتداد قطرهای صفحه پیدا کنید .

**مسئله ۲ – ۴ – ۵** تغییر حجم واحد حجم را برای عنصری در برش خالص پیدا کنید .

**مسئله ۱ – ۵ – ۵** دایره موهر را برای حالت برش خالص ( شکل ۶ – ۵ ) رسم کنید و از روی آن معادله 5-24 را اثبات کنید .

**مسئله ۲ – ۵ – ۵** دایره موهر را برای حالت تنش دو محوری ( شکل ۵ – ۵ ) با فرض $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_0$ رسم کنید .

**مسئله ۳ — ۵ — ۵** برای عنصر شکل a ۵ — ۵ مقادیر تنش های اصلی $\sigma_x=350Kg/cm^2$ و $\sigma_y=-700Kg/cm^2$ می‌باشد . دایره موهر را رسم کنید ومقدار زاویه θ صفحه‌ای را که درآن تنش عمودی صفر می‌باشد پیدا کنید . تنش برشی درروی این صفحه چقدر است ؟

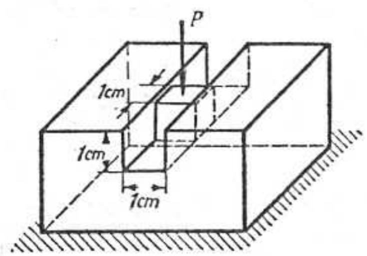
**مسئله ۴ — ۵ — ۵** در شکل a ۵ — ۵ مقدار تنش‌های اصلی $\sigma_x=840Kg/cm^2$ و $\sigma_y=420Kg/cm^2$ می‌باشد . دایره موهر را برای عنصر مزبور رسم کنید و زاویه θ صفحه‌ای را که در روی آن نسبت تنش عمودی به تنش برشی مینیمم می‌باشد پیدا کنید .

**مسئله ۱ — ۶ — ۵** با فرض اینکه برای عنصر شکل a ۹ — ۵ مقادیرتنش ها $\sigma_x=-5000Kg/cm^2$ ، $\sigma_y=3000Kg/cm^2$ و $\tau_{xy}=-1000Kg/cm^2$ باشد تنش‌ها و صفحه‌های اصلی را پیدا کنید .

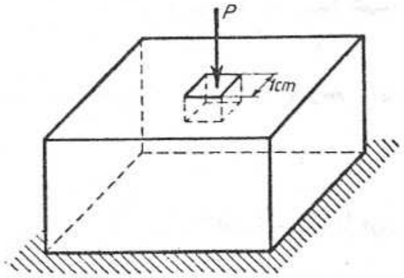
**مسئله ۱ — ۷ — ۵** مسئله ۱ — ۶ — ۵ را به کمک دایره موهر حل کنید .

**مسئله ۱ — ۸ — ۵** صفحه نازکی در تنش دو محوری تحت تنش‌های $\sigma_x=10000Kg/cm^2$ و $\sigma_y=20000Kg/cm^2$ قرار دارد . تنش‌های عمودی و برشی ماکزیمم درصفحه‌چقدرمیباشند ؟

**مسئله ۱ — ۹ — ۵** در داخل یک قطعه فولادی ضخیم شیار مربع شکلی به اضلاع 1cm وجود دارد ( شکل ۱ — ۹ — ۵ ) . یک مکعب الومینیومی با ابعاد 1×1×1 cm در داخل شیار مزبور جا گرفته و مطابق شکل تحت نیروی P = 600Kg فشرده می شود . با فرض اینکه قطعه الومینیومی تغییر شکل نا چیزی داشته باشد تنش‌های اصلی را برای مکعب الومینیومی پیدا کنید . برای الومینیوم $\nu=0.33$ و $E=0.7\times10^6Kg/cm^2$ .




شکل ۱ — ۹ — ۵

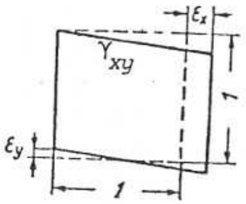



شکل ۲ — ۹ — ۵



**مسئله ۲ — ۹ — ۵** سوراخی به شکل مکعب به ابعاد 1cm درداخل‌دال‌فولادی‌ضخیمی ایجاد شده است . یک مکعب فولادی در داخل سوراخ مزبور دقیقا" جا می‌گیرد و بوسیله نیروی P = 700Kg فشرده می‌شود ( شکل ۲ — ۹ — ۵ ) . با صرف نظر نمودن‌ازتغییر شکل‌های دال تنش‌های اصلی را در مکعب پیدا کنید .

**مسئله ۱ — ۱۰ — ۵** کرنش‌ها برای‌یک عنصر صفحه‌ای فولادی‌در شکل ۱ — ۱۰ — ۵عبارتند از $\varepsilon_x=5.32\times10^{-4}$، $\varepsilon_y=-1.82\times10^{-4}$ و $\gamma_{xy}=1.19\times10^{-3}$ . مقداروجهت تنش‌های اصلی را پیدا کنید . برای فولاد $\nu=0.3$ و $E=2\times10^6Kg/cm^2$.




شکل ۱ — ۱۰ — ۵

**مسئله ۲ — ۱۰ — ۵** کرنش‌های اصلی $\varepsilon_1$ و $\varepsilon_2$ و جهت آنها را با فرض اینکه $\varepsilon_x=500\times10^{-6}$ ، $\varepsilon_y=140\times10^{-6}$ و $\gamma_{xy}=-360\times10^{-6}$ باشد پیدا کنید و نتیجه را به کمک دایره موهر کنترل نمایید .

## ۱۳ — ۵ جواب‌های مسائل حل نشده

۱ — ۱ — ۵ : 4cm

۲ — ۱ — ۵ : $\sigma=-20MPa$ ; $\tau=-34.6MPa$

۱ — ۲ — ۵ : $\sigma_x=\sigma_y=1085Kg/cm^2$

۱ — ۳ — ۵ : -0.00009

۲ — ۳ — ۵ : $\nu=\frac{2}{7}$

۳ — ۳ — ۵ : $\varepsilon_\theta=\varepsilon_x\cos^2\theta+\varepsilon_y\sin^2\theta$

۱ — ۴ — ۵ : $\varepsilon=0$

۲ — ۴ — ۵ : صفر

۳ — ۵ — ۵ : $\tau=495\ Kg/cm^2$ ; $\theta=35°16'$

۴ — ۵ — ۵ : $54°44'$

۱ — ۶ — ۵ : $\sigma_1=3120Kg/cm^2(\theta_p=97°1')$

$\sigma_2=-5120Kg/cm^2(\theta_p=7°1')$

۱ـ۸ـ۵ : $\sigma_{max} = 20000Kg/cm^2$ ; $\tau_{max} = 10000Kg/cm^2$

۱ـ۹ـ۵ : $\sigma_1 = 0$ ; $\sigma_2 = -198$ ; $\sigma_3 = -600Kg/cm^2$

۲ـ۹ـ۵ : $\sigma_1 = \sigma_2 = -300$ ; $\sigma_3 = -700Kg/cm^2$

۱ـ۱۰ـ۵ : $\sigma_1 = 1600$ ; $\sigma_3 = -600Kg/cm^2$

$\sigma_1$ نسبت به محور افقی به اندازه $30°$ در جهت عقربه‌های‌ساعت‌دوران‌کرده‌است.

۲ـ۱۰ـ۵ : $\varepsilon_1 = 575 \times 10^{-6}$ ; $\theta_p = -22.5°$