

به نام خدا

KONKUR.IN



Forum.konkur.in

Club.konkur.in

Shop.konkur.in

Admin : Araz & Faraz Rahbar

Email : Konkur.in@gmail.com

باسمه تعالی

اصول بیومکانیک و تحلیل حرکت

جزوه کارشناسی تربیت بدنی

ترجمه:

دکتر آذراقاییاری

دکتر ابوالفضل فراهانی

حمیدرضا امینی

خلاصه‌ی فهرست مطالب

فصل اول مقدمه‌ای بر تحلیل حرکت.....	۱
فصل دوم کمیت‌های برداری و نرده‌ای در مکانیک و تحلیل حرکت.....	۳۹
فصل سوم کینماتیک خطی.....	۸۳
فصل چهارم تعادل.....	۱۲۳
فصل پنجم دینامیک ۱.....	۱۷۳
فصل ششم دینامیک ۲.....	۲۱۹
فصل هفتم کینماتیک زاویه‌ای.....	۲۷۳
فصل هشتم دینامیک چرخشی.....	۳۰۳
فصل نهم هموار سازی، فیلتر کردن و روندهای تغییرات داده‌ها.....	۳۳۷
فصل دهم توصیف داده‌های حرکت با استفاده از صفحه گسترده‌ها.....	۳۸۷
فصل یازدهم دینامیک سیال و پرواز توپ‌ها.....	۴۲۱
فصل دوازدهم بیومکانیک گام و تحلیل آن.....	۴۵۸
پاسخ خودآزمایی‌ها.....	۴۸۵
پیوست ۱ واحدهای اندازه‌گیری و روش‌های ریاضی.....	۵۰۵
پیوست ۲ آناتومی و حرکت پا و مچ پا.....	۵۲۵
نمایه.....	۵۳۴

ب

فهرست

فصل اول مقدمه‌ای بر تحلیل حرکت.....	۱
۱-۱ مقدمه‌ای بر تحلیل حرکت	۲
۲-۱ تحلیل دو بعدی (۲D) حرکت.....	۲
۳-۱ تحلیل سه بعدی (۳D) حرکت	۴
۴-۱ کالیبراسیون سیستم‌های تحلیل حرکت.....	۹
۱-۴-۱ سیستم‌های دو بعدی بر پایه‌ی ویدیو.....	۹
۲-۴-۱ سیستم‌های تصویر برداری نوری سه بعدی حرکت.....	۱۱
۵-۱ تصویر برداری ویدیویی با سرعت بالا	۱۱
۶-۱ کینماتیک دو بعدی و سه بعدی.....	۱۴
۷-۱ ابزارهای اندازه‌گیری نیرو و فشار	۱۷
۱-۷-۱ معرفی مبدل‌های نیرو.....	۱۷
۲-۷-۱ صفحات نیرو	۱۸
۳-۷-۱ اندازه‌گیری توزیع فشار کف پا.....	۲۰
مورد پژوهی ۱-۱ کاربرد تحلیل حرکت در طراحی تجهیزات ورزشی.....	۲۳
مورد پژوهی ۲-۱ کاربرد تحلیل حرکت در بهبود تکنیک‌های ورزشی.....	۲۶
مورد پژوهی ۳-۱ کاربرد تحلیل حرکت در پیشگیری از صدمات و توانبخشی.....	۳۲
فصل دوم کمیت‌های برداری و نرده‌ای در مکانیک و تحلیل حرکت.....	۳۹
۱-۲ جمع و تفریق بردارها.....	۴۰
۱-۱-۲ جمع کمیت‌های نرده‌ای.....	۴۱
۲-۱-۲ جمع بردارها	۴۲
۳-۱-۲ جمع دو بردار با زاوایای عمود بر هم.....	۴۸
مورد پژوهی ۱-۲ بزرگی و جهت بردارهای نیرو در هنگام راه رفتن.....	۴۹
۴-۱-۲ قانون متوازی الاضلاع.....	۵۳
۲-۲ تجزیه‌ی بردارها به مولفه‌ها.....	۵۹
۱-۲-۲ تجزیه یک بردار به دو بردار عمود برهم.....	۵۹
۲-۲-۲ بردارهای واحد در سه بعد.....	۶۲
۳-۲ ضرب بردارها.....	۶۲
۱-۳-۲ ضرب یک بردار در یک کمیت نرده‌ای.....	۶۲
مورد پژوهی ۲-۲ سرعت بیشتر با چوب جدید گلف.....	۶۳
مورد پژوهی ۳-۲ سرعت توپ بیسبال در زمان‌های مختلف.....	۶۴
۲-۳-۲ حاصلضرب نرده‌ای دو بردار.....	۶۶

ت

- مورد پژوهی ۲-۴ حرکت رو به بالا و رو به پایین در چمباتمه..... ۶۸
- ۳-۳-۲ حاصلضرب برداری دو بردار..... ۷۰
- ۴-۲ سیستم واحدها..... ۷۵
- فصل سوم کینماتیک خطی..... ۸۳
- ۱-۳ قانون اینرسی..... ۸۴
- ۲-۳ اندازه‌گیری تندی یا سرعت یک شیء..... ۸۴
- ۱-۲-۳ معنی نموداری سرعت حرکت..... ۸۷
- مورد پژوهی ۳-۱ سرعت اندازه‌گیری شده توسط دانش آموزان برای سورت‌های که سر می‌خورد..... ۹۰
- ۲-۲-۳ معادلات جابه‌جایی و سرعت برای وضعیت شتاب یکنواخت..... ۹۳
- ۳-۳ شتاب به عنوان شیب نمودار سرعت-زمان..... ۹۸
- مورد پژوهی ۳-۲ دروازه‌های نور استفاده شده برای بدست آوردن زمان بخش‌های ۱۰ متری در دوی ۱۰۰ متر سرعت..... ۱۰۰
- ۴-۳ چهار چوب‌های مرجع..... ۱۰۳
- ۵-۳ پرتابه‌ها..... ۱۰۵
- ۱-۵-۳ تجزیه سرعت به مولفه‌های افقی و عمودی..... ۱۰۶
- ۲-۵-۳ بدست آوردن زمان پرواز T ۱۰۸
- ۳-۵-۳ بدست آوردن برد افقی R ۱۱۰
- ۴-۵-۳ پرتابه با ارتفاع‌هایی بالاتر یا پایین‌تر از ارتفاع سطح فرود..... ۱۱۱
- ۵-۵-۳ مسیر سهمی شکل..... ۱۱۲
- مورد پژوهی ۳-۳ تحلیل حرکت توپ‌هاکی بعد از پرش از کف با استفاده از تحلیل حرکت..... ۱۱۴
- فصل چهارم تعادل..... ۱۲۳
- ۱-۴ شرایط تعادل ایستا..... ۱۲۴
- ۲-۴ اثر اصطکاک و اهمیت آن برای ایجاد تعادل..... ۱۲۵
- مورد پژوهی ۴-۱ توپ‌هاکی غلتان بر روی سطح پلیمر سنتزی صاف..... ۱۲۷
- ۳-۴ ممان نیرو..... ۱۲۸
- ۴-۴ جمع و تفریق نیروهای موازی..... ۱۳۰
- مورد پژوهی ۴-۲ توزیع وزن بین پاهای چپ و راست..... ۱۳۱
- ۵-۴ مرکز گرانش و مرکز جرم..... ۱۳۲
- مورد پژوهی ۴-۳ یافتن مرکز جرم فرد با استفاده از روش تخته‌ی واکنش..... ۱۳۴

ث

- ۶-۴ جفت‌ها: دو نیروی مخالف و مساوی که در دو نقطه‌ی مختلف اعمال می‌شوند..... ۱۳۶
- ۷-۴ اجسام ساکن..... ۱۳۸
- ۸-۴ تعادل تحت عمل دو نیرو..... ۱۳۸
- ۹-۴ مرکز جرم یک جسم ساکن..... ۱۴۰
- ۱۰-۴ تعادل تحت عمل ۳ نیرو..... ۱۴۲
- ۱-۱۰-۴ سه نیروی موازی..... ۱۴۴
- ۲-۱۰-۴ سه نیروی غیر موازی..... ۱۴۶
- ۱۱-۴ هیدروستاتیک و شناوری..... ۱۴۸
- ۱-۱۱-۴ فشار هیدروستاتیک به عنوان تابعی از عمق..... ۱۴۸
- ۲-۱۱-۴ نیروی بالاران یا شناوری بر روی یک جسم غوطه ور..... ۱۴۹
- ۳-۱۱-۴ وزن مخصوص..... ۱۵۰
- ۱۲-۴ روش قطعه‌ای برای تخمین مرکز جرم یک شخص..... ۱۵۱
- ۱۳-۴ نمودارهای جسم آزاد..... ۱۵۷
- ۱-۱۳-۴ محاسبه‌ی نیروهای نامعلوم..... ۱۵۷
- ۲-۱۳-۴ محاسبه‌ی ممان‌های مفصل..... ۱۶۱
- مورد پژوهی ۴-۴ شناوری و پایداری در کایاک..... ۱۶۳
- فصل پنجم دینامیک ۱..... ۱۷۳
- ۱-۵ اینرسی و جرم..... ۱۷۴
- ۲-۵ نیرو..... ۱۷۴
- ۳-۵ قانون اول نیوتن..... ۱۷۵
- ۴-۵ نیروهای گرانشی..... ۱۷۵
- ۵-۵ قانون دوم نیوتن..... ۱۷۶
- ۶-۵ اندازه‌گیری جرم و نیرو..... ۱۷۷
- ۱-۶-۵ مقایسه نیروهای معلوم و نامعلوم..... ۱۷۷
- ۲-۶-۵ کشش سنج‌ها..... ۱۷۷
- ۳-۶-۵ سلول‌های فشار و صفحات نیرو..... ۱۸۰
- ۱-۳-۶-۵ محاسبات ولتاژ خروجی..... ۱۸۱
- ۲-۶-۵ محاسبه COP (مرکز فشار)..... ۱۸۳
- مورد پژوهی ۱-۵ راه رفتن آزمودنی مرد با پوشیدن کفش‌های ورزشی بر روی صفحه
نیرو..... ۱۸۴
- ۷-۵ شتاب قابل استناد به گرانش و وزن..... ۱۸۴

ج

۱۸۶	مورد پژوهی ۲-۵ پرش عمودی.....
۱۹۰	۸-۵ قانون سوم نیوتن.....
۱۹۳	۹-۵ اصطکاک.....
۱۹۵	۱-۹-۵ اصطکاک و مساحت تماس.....
۱۹۶	۲-۹-۵ اصطکاک و سرعت.....
۱۹۷	۳-۹-۵ خلاصه‌ای از اصطکاک جنبشی و اصطکاک ساکن.....
۲۰۰	مورد پژوهی ۳-۵ حداکثر سرعت در مسیر شیبدار مسابقه.....
۲۰۲	مورد پژوهی ۴-۵ اصطکاک غلتشی در توپ‌هاکی.....
۲۰۲	۱۰-۵ اندازه حرکت جسم.....
۲۰۵	۱۱-۵ حرکت پرتابه، با در نظر گرفتن نیروی پسا.....
۲۰۵	۱-۱۱-۵ مقدمه.....
۲۰۶	۲-۱۱-۵ عدد رینولد.....
۲۰۸	۳-۱۱-۵ نیروی پسا و اثر آن بر حرکت.....
۲۰۹	۴-۱۱-۵ مدل سازی عددی حرکت توپ.....
۲۱۹	فصل ششم دینامیک ۲.....
۲۲۰	۱-۶ کار انجام شده بوسیله نیروی ثابت.....
۲۲۳	۲-۶ کار انجام شده بوسیله نیروی متغیر.....
۲۲۵	۳-۶ انرژی جنبشی.....
۲۲۸	۴-۶ انرژی پتانسیل گرانشی.....
۲۲۹	۵-۶ بقاء انرژی مکانیکی.....
۲۳۳	۶-۶ توان.....
۲۳۴	۷-۶ نیروهای ضربه‌ای و برخوردها.....
۲۳۴	۱-۷-۶ ارتباط ضربه - اندازه حرکت.....
۲۳۶	۲-۷-۶ حالت خاص نیروی ضربه‌ای ثابت.....
۲۳۷	۳-۷-۶ برخورد در یک بعد.....
۲۳۸	۴-۷-۶ بقاء اندازه حرکت خطی.....
۲۴۰	۵-۷-۶ برخوردهای ارتجاعی و غیر ارتجاعی.....
۲۴۴	مورد پژوهی ۶-۱ اندازه‌گیری ضریب ارتجاعی توپ توسط سرعت‌های برخورد و برگشت از سطح فولادی.....
۲۴۶	۶-۷-۶ برخوردهای مورب.....
۲۴۷	۷-۷-۶ بازی‌های باتوم - و - توپ و اثر حالت ارتجاعی.....
۲۴۹	۸-۶ نوسان‌ها.....

ح

- ۲۴۹.....۱-۸-۶ فنرها و قانون هوک.....
- ۲۵۱.....۲-۸-۶ حرکت نوسانی.....
- ۲۵۶.....۳-۸-۶ نوسانهای تضعیف شده.....
- ۲۵۸.....مورد پژوهی ۲-۶ محاسبه ضریب اصطکاک b در نوسانگر ساده جرم - فنر.....
- ۲۶۰.....۴-۸-۶ آونگ ها.....
- ۲۶۰.....۱-۴-۸-۶ آونگ ساده.....
- ۲۶۱.....۲-۴-۸-۶ آونگ واقعی.....
- ۲۶۳.....مورد پژوهی ۳-۶ اثرات حاد تمرین بر سفتی غیرفعال مفصل.....

خ

فصل اول

مقدمه‌ای بر تحلیل حرکت

اهداف فصل

ارائه‌ی شرح و توضیح در مورد اینکه تحلیل حرکت چیست و چگونه می‌تواند در مطالعات کینماتیکی و کینماتیکی به کار رود. در این فصل به روش‌ها و تجهیزات جدید موجود برای تحلیل حرکت در آزمایشگاه‌ها تاکید شده است.

نتایج فصل

پس از مطالعه این فصل خواننده قادر خواهد بود تا:

- سیستم‌های تصویر برداری موجود برای تحلیل کینماتیکی دو بعدی ($2D$) و سه بعدی ($3D$) را شرح دهد.
- فرق بین سیستم‌های تحلیل حرکت دارای قابلیت‌های دو بعدی ($2D$) و سه بعدی ($3D$) را بداند.
- چندین سیستم نیروی مختلف برای اندازه‌گیری فشار پا و نیروهای عکس‌العمل زمین را با یکدیگر مقایسه کند.
- کاربرد این فن آوری را در سه بخش اساسی یعنی بازتوانی و جلوگیری از صدمات، طراحی تجهیزات، و ارتقاء تکنیک‌های ورزشی، دریابد.

۱-۱ مقدمه‌ای بر تحلیل حرکت

تحلیل حرکت علم مقایسه‌ی تصاویر ثابت متوالی گرفته شده با استفاده از عکسبرداری از جسم در حال حرکت به منظور مطالعه کینماتیک (یعنی خود حرکات) و کینتیک (یعنی نیروهای داخلی و خارجی) درگیر حرکت است. تحلیل حرکت علاوه بر توسعه‌ی برنامه‌های تمرینی موثرتر برای ورزشکاران، برای ارزیابی برنامه‌های تربیت بدنی برای معلولین ذهنی، آزمون صحت عملکرد عضوهای مصنوعی و تکامل الگوهای حرکتی نیز به کار می‌رود.

۲-۱ تحلیل دو بعدی (۲D) حرکت

تصویر برداری از طریق روش‌های مختلفی انجام پذیر است. برای مثال، جهت تصویر برداری از حرکت اشیاء نسبتاً بزرگ از قبیل بدن انسان، دوربین‌های ویدیویی دیجیتال (کمکوردرها) با نوارهای ویدیویی دیجیتالی (DVT)، دوربین‌های دیجیتالی دیسک دار (DVD)، و یا دوربین‌هایی با حافظه سخت (HDD) ابزارهایی ارزان و کار آمد هستند. امروزه اغلب تحلیل‌ها به منظور یافتن الگوی حرکتی و پیشگویی، با استفاده از رایانه‌ها و نرم افزار انجام می‌شوند که تصاویری که به صورت مجزا و یا متوالی ثبت شده‌اند را تحلیل کرده و یا با سایر تصاویر مجزا و یا متوالی مقایسه می‌کنند. دوربین‌های ویدیویی دیجیتال نشان داده شده در شکل ۱-۱، تصویربرداری دو بعدی (۲D) را با سرعت ۵۰ تا ۶۰ فریم در ثانیه ممکن ساخته‌اند و قادرند تصاویر را به راحتی و به صورت دیجیتالی به کامپیوتر منتقل کنند تا پردازش لازم بر روی آنها صورت گیرد.

دیجیتال سازی تصاویر (یعنی تبدیل بخشی از عکس به داده‌های مکانی عددی) ممکن است به صورت دستی و یا خودکار باشد. در دیجیتال سازی دستی، اپراتور مکان نما (معمولاً یک پیکان) را روی یک عکس در صفحه نمایش حرکت داده می‌شود (برای مثال مچ پا، گردن، لگن) و با کلیک بر روی نقطه مورد نظر داده‌های مربوط به آن نقطه را تعریف می‌کند. برای تحلیل خودکار، قبل از تصویر برداری یک سری نشانگرهای بازتابی کوچک روی نقاط مهم و استراتژیک (به عنوان مثال سطوح خارجی مفاصل ران، زانو و مچ پا) قرار داده می‌شود.

فصل اول: مقدمه‌ای بر تحلیل حرکت ۳

نرم افزار دیجیتال‌ساز (که همراه با بسته‌های سیستم تحلیل حرکت پایه است) نقاط بازتابی هر نشانگر را بر روی فریم ضبط شده تشخیص می‌دهد، مرکز هر کدام از این نشانگرها را محاسبه می‌کند، و موقعیت نسبی آنها را به یک نقطه داده تبدیل می‌کند، و برای تحلیل به صورت جدول یا نمودار ارائه می‌دهد. در این وضعیت دو بعدی، موقعیت‌های نشانگرها چه به صورت دستی بدست آمده باشند یا خودکار، به شکل زیر هستند:

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \dots \dots \dots (x_n, y_n)$$

در اینجا (x_1, y_1) مختصات نشانگر اولی و (x_n, y_n) مختصات جفت n ام آخرین نشانگر می‌باشد. در اینجا x مسافت اندازه‌گیری شده در راستای محوری است که در فریم ثبت شده در راستای افق قرار دارد و y مسافت اندازه‌گیری شده در راستای محوری است که در فریم ثبت شده، در راستای عمودی و رو به بالا قرار دارد. استفاده از علائم x و y به صورت اختیاری است و نه اجباری. در واقع در بعضی از سیستم‌های تحلیل حرکت، برای جهت عمودی از علامت z استفاده می‌شود. بنابراین مختصات نشانگر ممکن است به صورت (x_j, z_j) نشان داده شود. همچنین به خاطر سپردن این که برای هر فریم ویدئویی که گرفته می‌شود، n جفت مختصات تولید خواهد شد، مفید خواهد بود. بنابراین اگر M فریم دیجیتال‌سازی شود، به اندازه nM جفت مختصات از



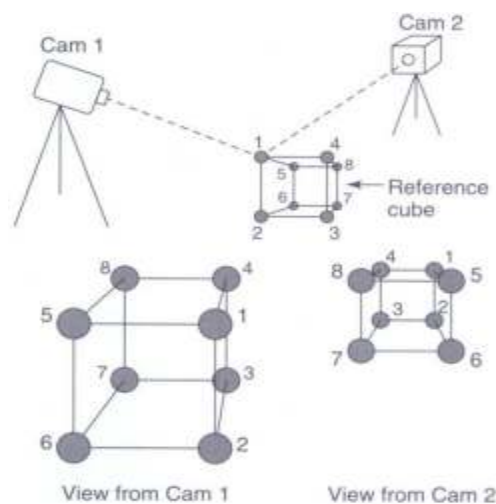
شکل ۱-۱. دوربین ویدئویی پیشرفته با DVD. (ساخته شده توسط شرکت سونی).

فصل اول: مقدمه‌ای بر تحلیل حرکت ۴

داده‌های مکانی خواهیم داشت. برای مثال، با استفاده از دوربین ویدیویی با سرعت 50 Hz ، اگر برای یک کلیپ یک ثانیه‌ای ۱۵ نشانگر دیجیتال‌سازی شود، تعداد جفت مختصات می‌شود: $15 \times 50 = 750$.

۳-۱ تحلیل سه بعدی ($3D$) حرکت

برای گرفتن تصویر ویدیویی سه بعدی ($3D$) از حرکت، نیاز به استفاده از تعدادی دوربین است، به طوری که بتوان داده‌های «عمقی» را نیز همانند داده‌های سطحی که از یک دوربین قابل حصول هستند، بدست آورد. یک تکنیک خوب برای این کار استفاده از روش انتقال خطی مستقیم (DLT) با استفاده از دو و یا تعداد بیشتری دوربین است. این روش بر انتقال ریاضی بین داده‌های دو بعدی (u, v) خام دوربین و مختصات سه بعدی واقعی (X, Y, Z) نقطه تکیه می‌کند. اساس این انتقال نظریه‌ای است که دید هر دوربین بوسیله‌ی قوانین چشم انداز معین می‌شود، به طوری که محل استقرار، جهت و مسافت مشخص در تصویر، توسط موقعیت و جهت گیری دوربین تعیین می‌شود و تبدیل توسط ۱۱ ضریب ثابت (یعنی پارامترهای دوربین) تعیین می‌شود. مثالی از تاثیر چشم انداز از نقاط دید دو دوربین در شکل ۲-۱ نشان داده شده است.



شکل ۲-۱. چشم اندازهای دو دوربین مجزا از مکعب با نشانگرهایی در هر گوشه.

فصل اول: مقدمه‌ای بر تحلیل حرکت ۵

معادلات DLT عبارتند از:

$$u = \frac{aX + bY + cZ + d}{iX + jY + kZ + 1}$$

و

$$v = \frac{eX + fY + gZ + h}{iX + jY + kZ + 1}$$

اگر ۶ نقطه کالیبراسیون یا بیشتر را همراه با (X, Y, Z) مشخص و مختصات خام دوربین متناظر (u, v) داشته باشید، پارامترهای a, b, c, \dots, k ، دوربین قابل محاسبه است، زیرا شما ۱۲ معادله و یا بیشتر (دو معادله به ازای هر مختصات مکانی کالیبراسیون) با ۱۱ مجهول دارید. این فرایند برای هر دوربین انجام می‌شود. وقتی پارامترهای هر دوربین مشخص هستند، مختصات (X, Y, Z) مجهول سایر مختصات مکانی از داده‌های (u, v) دو دوربین یا بیشتر قابل حصول است، زیرا به ازای ۳ مجهول (X, Y, Z) ۴ معادله یا بیشتر وجود دارد. بعضی از سیستم‌های خودکار جدید برای تصویر برداری نوری سه بعدی حرکت، برای مشخص ساختن موقعیت مفصل از نشانگرهای بازتابی استفاده می‌کنند (معمولا به شکل نیم کره یا کره هستند). شکل ۱-۳ یک آزمودنی آزمایشی را با نشانگرهای بازتابی در آزمایشگاه تحلیل سه بعدی حرکت نشان می‌دهد.

دوربین‌ها نور مرئی و یا امواج مادون قرمز را منتشر می‌کنند که بوسیله‌ی نشانگرها منعکس می‌شوند. خیلی وقت‌ها سیستم تحلیل فقط مختصات سه بعدی نشانگرها را اندازه‌گیری می‌کند، و تحلیل کینماتیک بعدی به طور کامل بر پایه‌ی این اطلاعات است. تحلیل را می‌توان دو بعدی یا سه بعدی انجام داد (با نیاز به واحدهای نرم افزاری مجزا) و می‌توان از مسیر حرکت نقطه‌ی منتخب مانند حرکت مچ پا در دویدن یک شخص یا فلکشن آرنج در طول پرتاب توپ بیس‌بال، نمودار دو بعدی یا سه بعدی را ساخت.

معمولا بخشی از نرم افزار، روش‌های آماری پایه برای تعیین انحراف معیار و معنی‌داری متغیرهای داده‌ها است. هنگام ضبط سه بعدی حرکت، داده‌ها به این شکل

فصل اول: مقدمه‌ای بر تحلیل حرکت ۶



شکل ۱-۳. فرد نشاندار شده با نشانگرهای بازتابی در آزمایشگاه در احاطه‌ی سیستم تحلیل حرکت سه بعدی. (با اجازه‌ی دانشگاه Wales Swansea).

خواهند شد:

$$(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \dots, (x_n, y_n, z_n)$$

در اینجا x و y مسافت‌های اندازه‌گیری شده در راستای دو محور افقی هستند و z مسافت در راستای محور عمودی است. برخی اوقات جهت‌های x و y در خطی در امتداد یک جهت مناسب و راحت قرار می‌گیرند، برای نمونه، هنگامی که x منطبق بر جهت راه رفتن فرد (قدامی-خلفی) است y محور داخلی-خارجی خواهد بود. از طرف دیگر برخی از تولیدکننده‌ها علائم را به گونه‌ای دیگر در نظر می‌گیرند، به طوری که y ممکن است محور عمودی باشد، x محور قدامی-خلفی باشد، و z محور داخلی-خارجی باشد. در این کتاب وقتی با محورهای x و y و z سر و کار داریم، z محور عمودی در نظر گرفته می‌شود مگر اینکه غیر از این بیان شده باشد. با این حال، در محورهای دو بعدی، معمولاً x و y استفاده می‌شوند طوری که y محور عمودی است.

فصل اول: مقدمه‌ای بر تحلیل حرکت ۷

اغلب سیستم‌های تحلیل حرکت نوری اجزاء سخت افزاری مشابهی دارند، اما ممکن است از نظر ظرفیت، انعطاف پذیری و یا قابلیت تحلیلی بخش نرم افزاری، متفاوت باشند. در شکل ۱-۴ یک نوع دوربین معمولی که در سیستم تحلیل حرکت نوری استفاده می‌شود، نشان داده شده است. در این روش داشتن ۶ تا ۱۲ دوربین در حال استفاده بصورت همزمان معمول است، در حالی که هر دوربین رو به سمت هدف متحرک است. همچنین ممکن است از انواع دیگر سیستم‌های تحلیل حرکت استفاده شود؛ به عنوان مثال:

- سیستم‌های مغناطیسی: حس گرها بوسیله‌ی کابل به کامپیوتر متصل شده‌اند.
- الکترو مغناطیسی: شخص یک لباس مخصوص می‌پوشد.
- اوپتو الکترونیک: شخص دی یو‌دهای ساطع کننده‌ی نور می‌پوشد.
- سیستم‌های صوتی: که از امواج صوتی باز تابیده شده استفاده می‌شود.
- غیرتاهجمی: که از یک یا چند دوربین با سرعت بالا استفاده می‌کند.



شکل ۱-۴. دوربین ویدیویی دیجیتال مجهز به دی یو‌دهای ساطع کننده‌ی نور قرمز مرئی که برای ضبط ویدیویی سه بعدی حرکت مورد استفاده قرار گرفته است. (با اجازه‌ی *Vicon Peak Limited*).

کادر ۱-۱ دوربین قابل حمل دیجیتال با منبع ذخیره‌ی DVD برای تحلیل ویدیویی

یک نمونه دوربین ویدیویی دیجیتالی با منبع ذخیره‌ی DVD که در زمان نوشتن موجود است، از یک ابزار جفت-شارژ^۱ (CCD) ۱٫۰ مگاپیکسل که تصاویر ویدیویی با کیفیت بالا را انتقال می‌دهد، استفاده می‌کند. یعنی تصویر از یک میلیون عنصر تصویر که در یک آرایش مستطیلی قرار گرفته است، تشکیل می‌شود. فرمت ضبط DVD کیفیت تصویر و صدای قابل مقایسه با نوار MiniDV را اما بر روی DVD یعنی دیسکی که بر روی کامپیوترها یا دی وی دی پلیرهای سازگار بازبینی می‌شود، در اختیار می‌گذارد. وقتی در مد ویدیو استفاده می‌شود، دوربین دارای ۶۹۰K از پیکسل‌های موثر است و ۵۲۰ خط جداسازی را فراهم می‌کند. با حداکثر تفکیک ۸۶۴ × ۱۱۵۲ امکان گرفتن بیش از ۶۰۰۰ تصویر ثابت بر روی یک دیسک وجود دارد.

زوم نوری ۱۰X/دیجیتال ۱۲۰X: زوم نوری به نزدیک آوردن حرکت از (فواصل) خیلی دور کمک می‌کند. اضافه کردن زوم دیجیتال به معنی زوم دیجیتال بی نهایت واضحتر، همراه با اعوجاج کم است.

مد شلیک: برای عمل سریع تصویر برداری بیشتر از چهار تصویر در ۸۶۴ × ۱۱۵۲ یا ۱۲ تصویر در ۴۸۰ × ۶۴۰ متوالی می‌گیرد.

سیستم تثبیت تصویر: یک محدوده‌ی وسیعی از فرکانس‌های لرزش و ارتعاش را برای رسیدن به یک سطح بالای همواری بدون کاهش کیفیت ویدیو، کنترل می‌کند.

رابط USB ۲٫۰: یک راه ساده برای اتصال دوربین قابل حمل DVD به کامپیوتر برای انتقال سریع تصاویر ثابت و ویدیویی به کامپیوتر برای ویرایش و تحلیل فراهم می‌کند. دوربین قابل حمل همچنین می‌تواند به عنوان یک DVD برنر^۲ (رایتر) خارجی استفاده شود، که برای کپی کردن DVDها و فیلم‌های ویرایش شده مناسب است.

ظرفیت ضبط یک دیسک: ۲۰ دقیقه در تنظیمات کیفیت بالا؛ ۳۰ دقیقه در تنظیمات کیفیت استاندارد؛ ۶۰ دقیقه در تنظیمات کیفیت پائین.

سرعت شاتر: ۱/۴ تا ۱/۴۰۰۰ ثانیه. اگر حرکت‌های سریع بدون از دست دادن جزئیات باید گرفته شوند، سرعت شاتر مهم است. سرعت شاتر بالاتر، در بازبینی اشیاء متحرک با سرعت بالاتر آشکار خواهند شد.

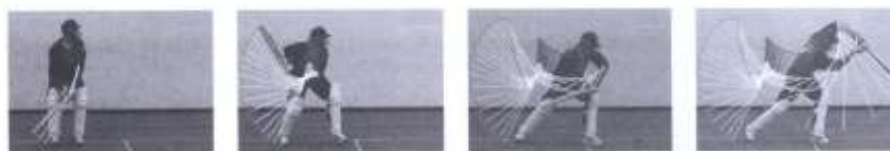
چهار فریم از یک ضبط نمونه در شکل ۱-۵ نشان داده شده‌اند. در این شکل انتهای باتوم یک مسیر پرواز (یعنی راهی در میان فضا) پیچیده را در طول اجرای ضربه نشان می‌دهد. ما می‌توانیم بین مسافت کلی طی شده بوسیله‌ی باتوم (طول همه‌ی مسیر پرواز) و جابه‌جایی آن (اختلاف بین نقطه‌ی اتهایی و ابتدائی آن) تمایز قائل شویم. جابه‌جایی انتهای باتوم به طور قطع خیلی کوچکتر از مسافت کلی طی شده است و علاوه بر این، جابه‌جایی نیاز دارد تا بوسیله‌ی هردوی بزرگی (به متر) آن و زاویه‌ی آن نسبت به نقطه‌ی شروع مشخص شود. مسافت طی شده بوسیله‌ی انتهای باتوم نیز به متر اندازه‌گیری می‌شود اما از نظر بزرگی خیلی بزرگتر است. مسافت دارای جهت نیست، بنابراین به عنوان کمیت نرده‌ای شناخته می‌شود. جابه‌جایی و مسافت طی شده می‌توانند بعد از اینکه سیستم تحلیل حرکت کالیبره شد، اندازه‌گیری شوند. این تکرار موضوع کینماتیک است، و تمایز بین بردارها و نرده‌ای‌ها در فصل ۱ دوباره تاکید شده است.

۱ . charge-coupled device

۲ . burner

فصل اول: مقدمه‌ای بر تحلیل حرکت ۹

اما در همه موارد هدف یکسان است: تعیین مختصات نقاط مشخص شده به صورت تابع زمان. در این مقدمه و راهنما برای دانشجویان حرکت شناسی و علوم ورزشی -



شکل ۱-۵. چهار فریم ثابت گرفته شده از ضبط ویدیویی از مرد باتوم زن که در حال زدن ضربه است.

زشی، توجه خود را به روش‌هایی از سیستم‌های تحلیل ویدیویی دو بعدی و تحلیل حرکت نوری سه بعدی معطوف می‌کنیم که به صورت متداول استفاده می‌شوند.

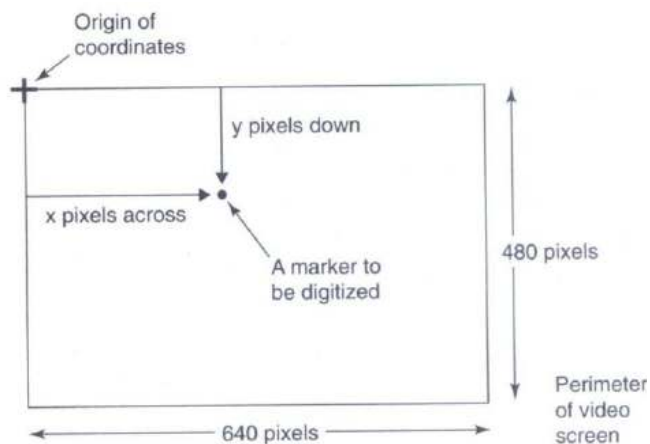
۴-۱ کالیبراسیون سیستم‌های تحلیل حرکت

۱-۴-۱ سیستم‌های دو بعدی بر پایه‌ی ویدیو

صفحات نمایش موجود برای بازبینی تصاویر ویدیویی و تصاویر ثابت با وضوح متفاوت (یعنی سطح جزئیات قابل تشخیص در صفحه) وجود دارد. معمولاً وضوح‌های موجود ۶۴۰×۴۸۰ و ۸۰۰×۶۰۰ پیکسل هستند. یعنی عکس‌ها می‌تواند همانند یک الگوئی از نقاط کوچک روی صفحه در نظر گرفته شوند که به صورت منظم در یک آرایش مستطیلی پخش شده‌اند. مشروط به موجود بودن کالیبراسیون مناسب، به طور معمول بسته‌های نرم افزاری موجود برای دیدن و تحلیل تصاویر ویدیویی از داده‌های پیکسل استفاده می‌کنند تا اطلاعات کینماتیک نقاط مشخص شده را ارائه دهند. در شکل ۱-۶ یک نمونه صفحه نمایش ویدیویی به همراه مکان مبدأ مختصات افقی و عمودی و نقطه‌ی نشانگر نشان داده شده است.

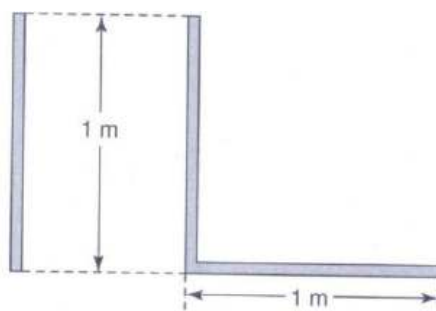
مکان این مبدأ کاملاً اختیاری است اما در بیشتر موارد بوسیله‌ی سازنده نرم افزار تحلیل به عنوان مکان معینی در صفحه‌ی نمایش تعریف می‌شود؛ برای مثال در اینجا، در بالا و سمت چپ است. کالیبراسیون سیستم تحلیل ویدیویی دو بعدی معمولاً با استفاده از شیئی مرجعی انجام می‌شود که با اندازه‌ی مشخص در یک فاصله تقریبی هم اندازه با فاصله‌ی نشانگرها از دوربین، در میدان دید دوربین قرار گرفته است. شکل ۱-۷ دو نمونه از اشیاء کالیبراسیون سیستم‌های تحلیل بر پایه‌ی ویدیو را نشان می‌دهد.

فصل اول: مقدمه‌ای بر تحلیل حرکت ۱۰



شکل ۱-۶. نمونه‌ای از صفحه نمایش ویدیویی همراه با نمایش مختصات پیکسل استفاده شده برای تحلیل.

شیئی مرجع ممکن است یک شیئی یک بعدی (قطعه‌ی سمت چپ شکل ۱-۷) باشد که در داخل میدان دید و در یک جهت معین قرار گرفته است، یا ممکن است شیئی دو بعدی باشد (قطعه‌ی سمت راست شکل ۱-۷) به طوریکه می‌تواند در امتداد دو راستای عمود بر هم جهت‌گیری کرده باشد. توجه کنید مشروط به اینکه اندازه‌ی شیئی به طور دقیق مشخص باشد، شیئی مرجع می‌تواند در هر اندازه یا شکل دلخواه باشد. معمولاً در نرم افزار تحلیل، طول شیئی مرجع بر اساس پیکسل اندازه‌گیری می‌شود. سپس کالیبراسیون سیستم از این نتایج استنباط می‌شود. برای مثال طول $1-m$ مرجع، در صفحه ویدیو می‌تواند برابر با 150 پیکسل باشد. یعنی هر پیکسل در صفحه



شکل ۱-۷. دو شیئی مرجع ممکن برای کالیبراسیون ابعادی ویدیو

فصل اول: مقدمه‌ای بر تحلیل حرکت ۱۱

متناظر با تقسیم $0,00666m = 1/150$ است. می‌توان انتظار داشت که این نتیجه تنها برای اشیاء مشاهده شده در یک فاصله از دوربین صحیح باشد و حتی در این صورت نیز اعوجاج‌هایی را که به سبب محدودیت‌های نوری ممکن است در عکس بوجود آید، برای مثال در لبه‌ی صفحه‌ی نمایش، در نظر نمی‌گیرد. همچنین انتظار می‌رود که حتی تحت شرایط مطلوب روشنایی و تمرکز در کانون (فوکوس)، شیء مرجع تنها بتواند با دقت پیکسل ± 1 اندازه‌گیری شود. بنابراین، کالیبراسیون بیان شده در مثال فوق ممکن است با ضریب خطایی در حدود $\pm 0,7\%$ همراه باشد.

۱-۴-۲ سیستم‌های تصویر برداری نوری سه بعدی حرکت

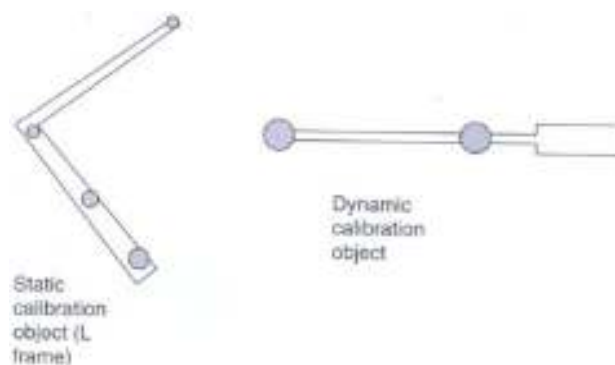
این سیستم‌ها با استفاده از اشیاء مرجع با ابعاد معین و معمولاً با متصل کردن نشانگرهای بازتابی در فاصله‌های مشخص، همراه با استفاده از تعدادی کالیبراسیون ایستا (شیء یا اشیاء مرجع ساکن) یا کالیبراسیون پویا (شیء یا اشیاء مرجع متحرک) کالیبره می‌شوند. شکل ۱-۸ یک جفت از اشیاء کالیبراسیون نمونه را برای کالیبراسون سیستم تحلیل حرکت سه بعدی نشان می‌دهد.

قاب L شکل (قطعه‌ی سمت چپ شکل ۱-۸) در یک نقطه ثابت در آزمایشگاه قرار گرفته است و جهت محورهای مختصات را تعیین می‌کند در حالی که چوب (قطعه‌ی سمت راست شکل ۱-۸) در داخل فضای تصویربرداری که از قبل مشخص شده است، به صورت موجی حرکت می‌کند. این رویه اطمینان می‌دهد که مکان و جهت گیری دوربین‌ها طوری مشخص شده‌اند که دقت کالیبراسیون کلی در بیشترین حد ممکن است.

۱-۵ تصویر برداری ویدیویی با سرعت بالا

امکان تهیه‌ی دوربین‌های با سرعت بالای مخصوص جهت گرفتن تصویر از حرکات بسیار سریع ورزشی از قبیل تاب چوب گلف، برخورد باتوم به توپ بیس بال و حرکت پاهای یک دوند، وجود دارد. یک نمونه دوربین با سرعت بالا می‌تواند با سرعت دیافراگم بالاتر از ۱۰ میکرو ثانیه استفاده شود به طوری که حرکات‌های سریع می‌توانند

فصل اول: مقدمه‌ای بر تحلیل حرکت ۱۲



شکل ۸-۱ شیء مرجع پویا و ایستا برای کالیبراسیون تصویر برداری سه بعدی حرکت.

به صورت واضح ضبط شوند. (یک میکرو ثانیه با یک میلیونم ثانیه برابر است). سرعت‌های فریم (سرعت‌های عکس) بالاتر از ۱۰۰ تا ۱۰۰۰۰ فریم بر ثانیه به این معنی است که حرکات سریع می‌توانند قبل از پایان یافتن، به طور کامل ضبط شوند. دوربین نشان داده شده در شکل ۹-۱ دارای ضبط کننده‌ی 512×512 پیکسل است. این دوربین می‌تواند با استفاده از تمامی پیکسل‌های ضبط کننده با ۱۰۰۰ عکس بر ثانیه کار کند، اما در صورت کاهش تعداد پیکسل‌های مورد استفاده، می‌تواند به سرعت‌های عکس بالای ۳۲۰۰۰ عکس بر ثانیه برسد.



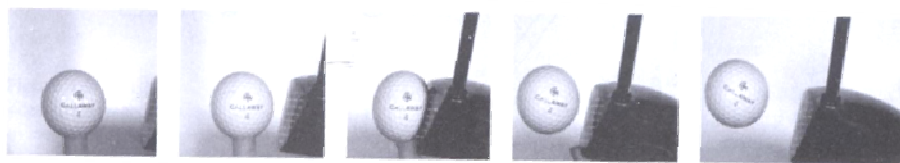
شکل ۹-۱. یک دوربین ویدیویی با سرعت بالا با توانایی گرفتن بالای ۱۰۰۰ فریم در ثانیه. (با اجازه‌ی Photo-Sonics (Intenashional Ltd, United kingdom)

فصل اول: مقدمه‌ای بر تحلیل حرکت ۱۳

شکل ۱-۱۰ تعدادی عکس ثابت از تاب دادن چوب گلف را نشان می‌دهد که بوسیله یک دوربین ویدیویی با سرعت بالا در سرعت عکس برداری ۳۵۰ عکس بر ثانیه گرفته شده‌اند. در این تصاویر متوالی، چوب گلف با سرعتی بیش از 50 m/s حرکت می‌کند. مسلماً یک دوربین معمولی با سرعت 50 Hz برای ضبط این حرکت مناسب نمی‌باشد. اغلب هنگام کار در سرعت‌های بالای عکس، بدلیل محدود شدن مقدار نور موجود در طول باز ماندن دیافراگم دوربین، روشنایی شیئی یک موضوع مهم است. سرعت‌های خیلی زیاد عکس فقط با کاهش وضوح عکس بدست می‌آیند؛ یعنی عکس برداری با انتخاب پیکسل‌های کمتر. در برخی مواقع برای افزایش نور موجود تا سطوح قابل قبول، روشن سازی با لامپ مورد نیاز است. بنابراین، رابطه‌ای بین سرعت عکس و وضوح برقرار است. جدول ۱-۱ نشان دهنده رابطه بین سرعت عکس و وضوح در یک سیستم نمونه است.

جدول ۱-۱ سرعت عکس به عنوان تابع وضوح افقی و عمودی در دسترس از یک نمونه دوربین ویدیویی دیجیتال.

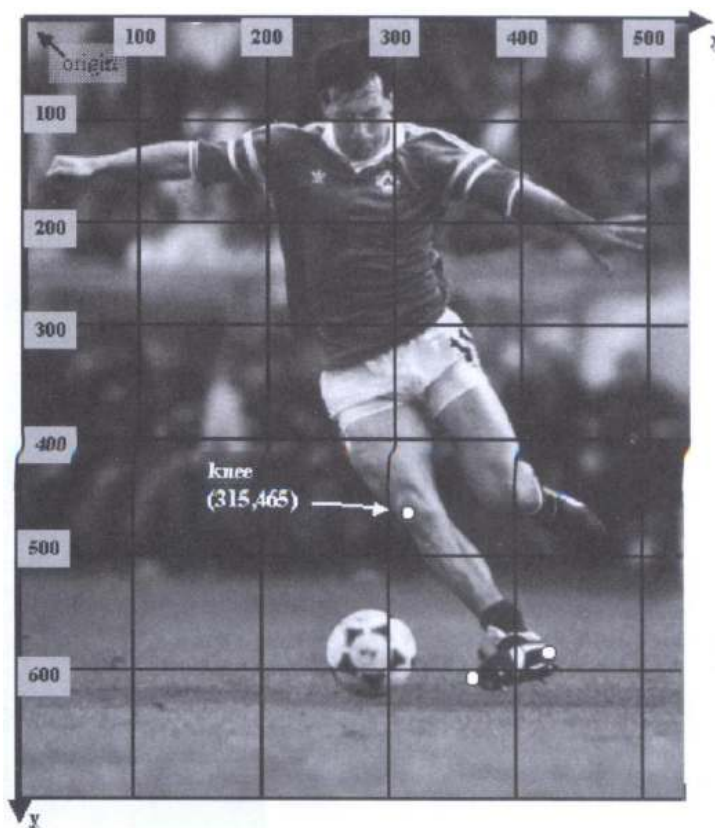
وضوح افقی			
۱۲۸	۲۵۶	۵۱۲	
۳۱۳۲	۱۹۰۸	۱۰۰۰	۵۱۲
۶۰۳۸	۳۷۳۱	۲۱۱۵	۲۵۶
۱۱۲۶۱	۷۱۴۲	۴۱۲۵	۱۲۸
۱۹۸۴۱	۱۳۱۵۷	۷۸۶۱	۶۴
۳۲۰۵۱	۲۲۷۲۷	۱۴۳۶۷	۳۲
			وضوح عمودی



شکل ۱-۱۰. ضربه‌ی گلف عکس برداری شده با دوربین ویدیویی با سرعت بالا با ۳۵۰ عکس در ثانیه.

۱-۶ کینماتیک دو بعدی و سه بعدی

در شکل ۱-۱۱ یک نمونه صفحه‌ی ویدیویی دو بعدی آماده برای تحلیل نشان داده شده است. این عکس با استفاده از یک لنز با فاصله‌ی کانونی بزرگ گرفته شده است؛ دوربین در فاصله ۳۵ متری بازیکن فوتبال قرار گرفته بود. زانوی این بازیکن فوتبال بوسیله یک نشانگر دایره‌ای نشاندار شده است و نسبت به مبدأ در گوشه بالا سمت چپ صفحه، به اندازه‌ی ۳۱۵,۴۶۵ پیکسل اندازه‌گیری شده است. نقاط مچ پا و پنجه پا نیز نشانه گذاری شده‌اند. در چنین مواردی همیشه وجود شیئی مرجع در عکس دوربین ممکن نیست، اما راه دیگر در این موارد استفاده از قطر توپ به عنوان شیئی کالیبراسیون است.



شکل ۱-۱۱. عکس بازیکن فوتبال هنگام شوت. مختصات پیکسل و مبدأ نشان داده شده است.

کادر ۱-۲ سیستم‌های چند دوربین خودکار همراه با فلش‌های دیودی ساطع کننده‌ی نور (LED) و نشانگرهای بازتابی

سیستم‌های تحلیل چند دوربین‌ی خودکار جدید می‌توانند با نشانگرهای بازتابی استفاده شوند تا در محیط آزمایشگاه دقت و سرعت بی نظیری را فراهم کنند. نشانگرها می‌توانند از نظر قطر به کوچکی ۲ یا ۳ میلی متر باشند. یک دوربین نمونه در زمان نوشتن این مطلب دارای ضبط کننده‌ی CMOS ۴/۱ مگاپیکسل و حداکثر سرعت فریم 160 Hz در وضوح کامل ضبط کردن باشد. با استفاده‌ی مناسب از ویندوز، سرعت ضبط فریم می‌تواند حداکثر تا 10000 Hz افزایش یابد. فلش می‌تواند به صورت نور حلقوی شبه-مادون قرمز، مادون قرمز و مرئی تعیین شود؛ یک سیستم نمونه می‌تواند به راحتی داخل فضاهای کار به کوچکی 0.2 m^3 (بعد خطی 0.5 m) تا بالای 275 m^3 (بعد خطی 16.5 m) پیکربندی شود. در شکل ۱-۱۲ یک نمونه نتایج نشان داده شده است، که یک اسکلت ارائه شده براساس مختصات سه بعدی نقاط نشانگرها است.

در کینماتیک دو بعدی، محاسبات زیر مورد نیاز است:

- جابه‌جایی (برداری) یا مسافت طی شده (نرده‌ای) به متر (m)
- سرعت (برداری) یا تندی (نرده‌ای) به متر بر ثانیه (m/s یا ms^{-1})
- شتاب (برداری یا نرده‌ای) به متر بر مجذور ثانیه (m/s^2 یا ms^{-2})

و همچنین موارد زیر مورد نیاز است:

- مسافت و جابه‌جایی زاویه‌ای (به درجه یا رادیان)
- سرعت و تندی زاویه‌ای (به درجه بر ثانیه یا رادیان بر ثانیه)
- شتاب زاویه‌ای (به درجه بر مجذور ثانیه یا رادیان بر مجذور ثانیه)



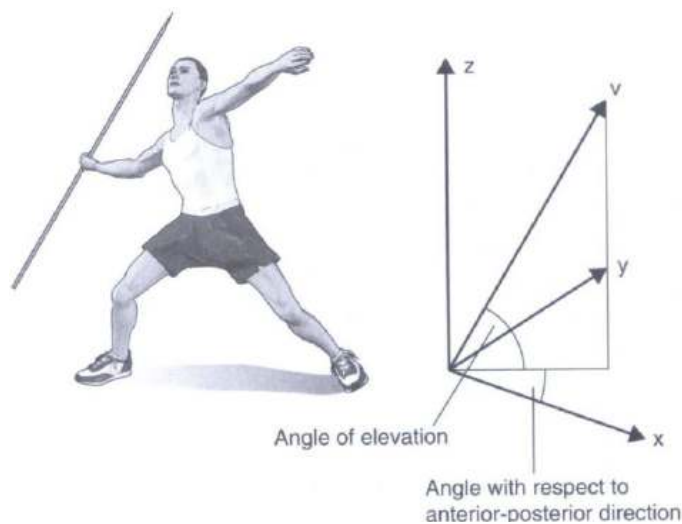
شکل ۱-۱۲. اسکلت ارائه شده براساس اطلاعات نشانگر بدست آمده از عکس سه بعدی حرکت.

فصل اول: مقدمه‌ای بر تحلیل حرکت ۱۶

در وضعیت تحلیل دو بعدی، کمیت‌های کینماتیک فوق تنها می‌توانند در صفحه‌ی ضبط ویدیویی محاسبه شوند و مولفه‌های کینماتیک عمود بر این صفحه از دست می‌روند. اغلب می‌توان با قراردادن دقیق دوربین با یک روش معنی‌دار برای ثبت حرکت، این محدودیت سیستم‌های دو بعدی را برطرف کرد. برای مثال در ورزشکاری که در خط مستقیم می‌دود، بیشترین حرکت در سطح ساجیتال اتفاق می‌افتد، پس دوربین می‌تواند برای ثبت حرکت در این سطح یعنی در کنار مسیر حرکت قرار گیرد. اطلاعات کینماتیک حاصل از تحلیل $3D$ به خودی خود سه بعدی هستند. برای مثال، جابه‌جایی‌ها، سرعت‌ها، و شتاب‌ها می‌توانند به صورت مولفه‌هایشان در راستای سه محور x ، y ، z بیان شوند. یک راه دیگر مشخص ساختن بزرگی بردارهای سه بعدی به همراه حداقل دو زاویه برای تعیین راستای آنها است. در شکل ۱-۱۳ سرعت نیزه ۲۵ متر بر ثانیه با زاویه پرتاب 48° نسبت به سطح افق و زاویه 20° نسبت به محور خلفی-قدامی است.

راه دیگر این است که گفته شود: $v_x = 15.72$ ، $v_y = 5.72$ و $v_z = 18.58 \text{ ms}^{-1}$

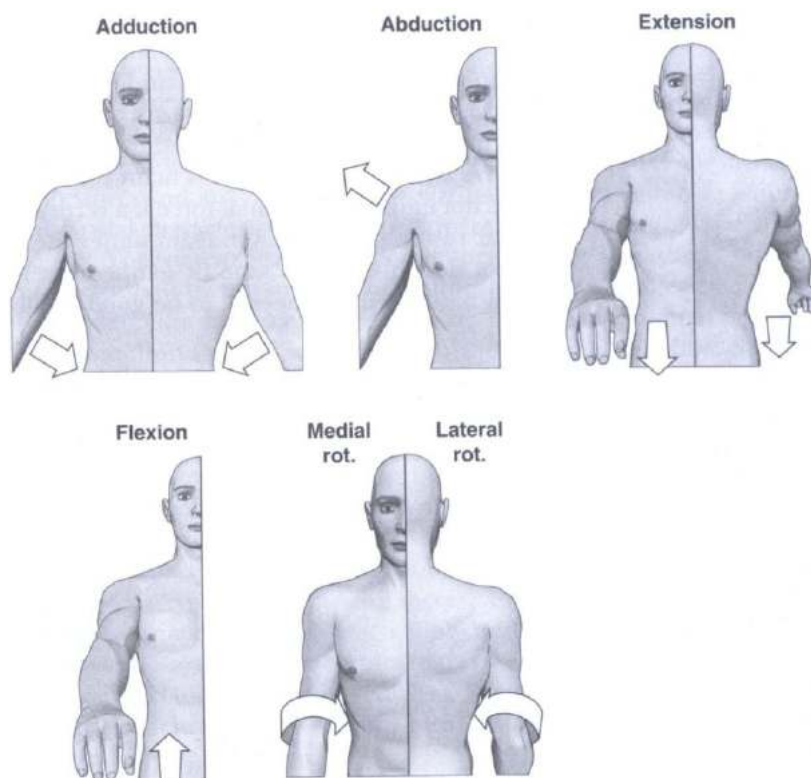
اطلاعات بیشتر در باره‌ی تجزیه‌ی بردارها به مولفه‌ها در فصل دوم ارائه شده است.



شکل ۱-۱۳. نیزه‌ی در حال پرتاب. سرعت نیزه همراه با زوایای پرتاب نشان داده شده است.

فصل اول: مقدمه‌ای بر تحلیل حرکت ۱۷

همچنین تحلیل سه بعدی این امکان را می‌دهد تا اطلاعات مربوط به زاوایای چرخش جسم را ارائه داد. برای مثال شکل ۱-۱۴ نشان می‌دهد که مفصل شانه می‌تواند موجب سه حرکت مجزا شود: فلکشن/اکستنشن، آبداکشن/آداکشن، و چرخش داخلی یا خارجی. کاربرد این نظریه‌ها در فصل ۱۲ توضیح داده شده است.



شکل ۱-۱۴. حرکات سه بعدی ممکنه در مفصل شانه.

۷-۱ ابزارهای اندازه‌گیری نیرو و فشار

۱-۷-۱ معرفی مبدل‌های نیرو

برای محاسبه تأثیرات نیروهای خارجی بر روی اجسام، داشتن برخی ابزارها برای اندازه‌گیری این نیروها و ممان‌های تولید شده توسط آنها ضروری است. به طور کلی

فصل اول: مقدمه‌ای بر تحلیل حرکت ۱۸

این دستگاه‌ها به عنوان **مبدل نیرو** یا **صفحه‌ی نیرو** شناخته می‌شوند. مبدل نیرو یک سیگنال الکتریکی (ولتاژ یا شدت جریان) متناسب با نیروی به کار رفته تولید می‌کند (به عنوان مثال اگر نیرو دو برابر شود، سیگنال الکتریکی نیز دو برابر می‌شود). انواع زیادی از این دستگاه‌ها وجود دارد که بر اصول متفاوتی متکی هستند.

کشش سنج: یک صفحه فلزی تحت تغییر بسیار جزئی در یکی از ابعاد آن (کشش)، مقاومت حسگر فلزی یا نیمه رسانا را تغییر می‌دهد.

خازنی: فاصله بین دو صفحه الکترود، ظرفیت ذخیره‌ی شارژ را تغییر می‌دهد.

فیزو الکتریک: تغییر جزئی در مواد بلورین، مشخصه‌های الکتریکی را طوری تغییر می‌دهد که بین سطوح کریستال اختلاف پتانسیل ایجاد می‌شود.

فیزو رسیستيو: ساختار اتمی کریستال طوری تغییر می‌کند که مقاومت الکتریکی

آن را تغییر دهد.

برای علاقه مندان به مطالعه، اطلاعات بیشتر درباره ابزارها در یک کتاب توسط رجتین^۱ (۲۰۰۴) جمع آوری شده است.

۱-۷-۲ صفحات نیرو

نیروهای عکس العمل زمین (GRF ها) معمولی ترین نیروهایی هستند که بر روی بدن انسان عمل می‌کنند. این نیروها در هنگام راه رفتن، دویدن، یا پریدن بر روی پاها عمل می‌کنند. GRF می‌تواند به صورت یک بردار سه بعدی متشکل از یک مولفه عمودی و دو مولفه‌ی افقی عمل کننده در صفحه‌ی زمین باشد. این نیرو می‌تواند بوسیله‌ی صفحه نیرو، که در شکل ۱-۱۵ نشان داده شده است، اندازه‌گیری شود. به طور معمول، یک ابزار صفحه‌ی نیرو، علایم الکتریکی متناظر با نیروهای F_x ، F_y و F_z و ممان‌های خروجی M_x ، M_y و M_z تولید می‌کند. برخی مشخصات یک نمونه صفحه نیروی کشش سنج در جدول ۱-۲ نشان داده شده است.

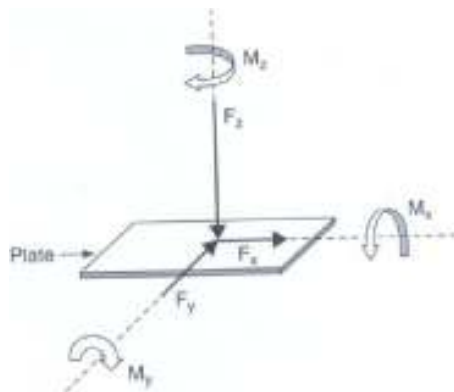
۱. Regtien

فصل اول: مقدمه‌ای بر تحلیل حرکت ۱۹

کاربردهای ویژه‌ی چنین صفحاتی شامل تحلیل گام؛ تحلیل پایداری؛ (تحلیل) اجرای ورزشی؛ و مطالعات نیرو، توان، و کار است. بعضی از صفحات نیرو همراه با جبران فشار، ضد آب شده‌اند، به طوری که می‌توان از آنها در زیر آب استفاده کرد.

جدول ۲-۱ برخی از مشخصات معمولی صفحه‌ی نیرو بر پایه‌ی کشش سنج

۴۴۵۰	ظرفیت F_x, F_y
۸۹۰۰	ظرفیت F_z
۲۳۰۰	ظرفیت M_x, M_y (Nm)
۱۱۰۰	ظرفیت M_z (Nm)
۰/۳۴	حساسیت F_x, F_y ($\mu V/[VN]$)
۰/۰۸	حساسیت F_z ($\mu V/[VN]$)
۰/۷۹	حساسیت M_x, M_y ($\mu V/[VN]$)
۱/۶۹	حساسیت M_z ($\mu V/[VN]$)
۳۷۰	بسامد طبیعی F_x, F_y (Hz)
۵۳۰	بسامد طبیعی F_z (Hz)
۴۵	وزن (kg)
۸۲/۵۰	ارتفاع (mm)
۴۶۳ × ۵۰۸ mm	صفحه‌ی رویی آلومینیوم



شکل ۱-۱۵. یک نمونه صفحه‌ی نیرو که خروجی متناظر با ورودی‌های نیرو و ممان سه بعدی را تولید می‌کند.

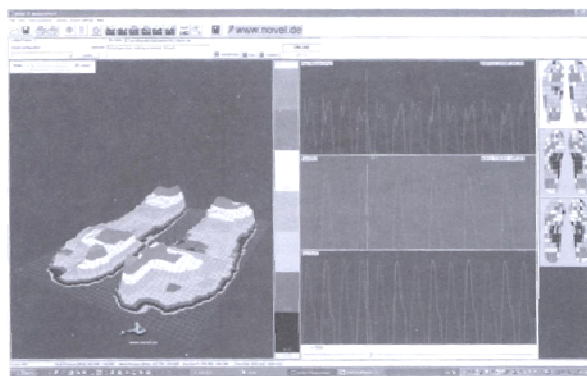
بعضی از ویژگی‌های مهم صفحات نیرو عبارت‌اند از حساسیت بسیار بالا (چند ولت برای هر نیوتون اعمال شده)، ضریب خطای پائین (اگر نیروی عمودی اعمال شد، نیرو را افقی نشان نمی‌دهد)، قابلیت تکرار (تحت تاثیر یک فشار یکسان در تکرارهای

فصل اول: مقدمه‌ای بر تحلیل حرکت ۲۰

مختلف نتیجه‌ی یکسانی را نشان می‌دهد)، و ثبات (در طول زمان و تحت تاثیر درجه حرارت به راحتی خراب نمی‌شود). بیشتر صفحات نیروی تجاری موجود طوری مهندسی شده‌اند که در همه‌ی این جنبه‌ها خوب باشند. صفحات نیروی بر پایه‌ی کشش سنج به تحریک پل (منبع تغذیه) و تقویت کننده سیگنال نیازمندند (افزایش ولتاژها به اندازه‌های مناسب)، و به طور معمول این دو با یک واحد مرکب از یک منبع تغذیه و واحد تقویت کننده تامین می‌شوند. همچنین صفحات نیروی فیزو الکتریک با مزیت عدم نیاز به منبع نیرو، موجود هستند. همچنین صفحات نیروی تولید می‌شوند که دارای نرم افزاری برای جمع آوری و پردازش خودکار داده‌ها هستند؛ واحدهای مستقل با ویژگی نصب سخت افزار، ورود اطلاعات به سیستم، و تحلیل داده‌ها. برای اطلاعات بیشتر درباره‌ی ویژگی‌های حسگرها، رجتین (۲۰۰۴) را ببینید.

۱-۷-۳ اندازه‌گیری توزیع فشار کف پا

ابزارهای کف کفشی تعداد زیادی از حسگرهای منفرد فشار را بر روی مساحت کف کفش به هم متصل کرده‌اند، به طوری که می‌توانند توزیع فشار کف پایی را رسم کنند. مکان مرکز فشار می‌تواند بوسیله‌ی میانگین وزنی ماتریس حسگرها محاسبه شود. ذکر این نکته مهم است که این ابزارها فقط مولفه‌ی عمودی نیرو را ثبت می‌کنند و نیروهای افقی در نظر گرفته نمی‌شوند. همانطور که در شکل ۱-۱۶ نشان داده شده است، این ابزارها می‌توانند فشار کف پایی میانگین، فشار کف پایی لحظه‌ای، و هر نقطه‌ی پر فشار را نیز نشان دهند.



فصل اول: مقدمه‌ای بر تحلیل حرکت ۲۱

شکل ۱-۱۶. سیستم اندازه‌گیری فشار کف کفشی بر پایه‌ی حسگرهای خازنی. (با اجازه‌ی نول^۱).
در جدول ۱-۳ بعضی از مشخصات نمونه‌ی سیستم‌های کف کفشی بر پایه‌ی حسگرهای خازنی ارائه شده است. این سیستم مرکب از **جعبه‌ی منبع تغذیه/جمع آوری کننده‌ی اطلاعات** به صورت عادی به کمربند آزمودنی متصل شده و توسط کابل به کف کفش متصل می‌شود.

سیستم‌های کف کفشی برای اندازه‌گیری توزیع فشار و نمایش فشارهای موضعی بین کف پاها و کفش‌ها دارای پایایی و روایی هستند. بعضی از سیستم‌ها می‌توانند با کابل *USB* فیبرنوری به کامپیوتر شخصی (*PC*) متصل شوند، و بعضی وقت‌ها آنها همراه با استفاده از جدیدترین فن آوری بلوتوث داخلی که توانایی اتصال به کامپیوترهای جیبی، کامپیوترهای نوت بوک و کامپیوترهای شخصی استاندارد سازگار با بلوتوث را دارد، می‌توانند به صورت یک ظرفیت سیار عمل کنند. انتخاب دیگر یک سیستم با انباره‌ی حافظه‌ی فلش داخلی است که اجازه می‌دهد داده‌ها در هر جایی جمع آوری شوند و سپس به کامپیوتر منتقل شوند. همه‌ی این ویژگی‌ها سیستم‌های کف کفشی را برای اجرای واقعی تمام آزمایش‌ها همچون راه رفتن، دویدن، بالا رفتن از پله‌ها، حمل بار، فوتبال، و حتی دوچرخه سواری، بسیار سیار و انعطاف پذیر می‌کنند. جعبه کنترل شامل منبع تغذیه و وسایل الکترونیکی معمولاً یا به یک کف کفش با حسگرهای ارتجاعی بسیار سازگار که تمام سطح کف پا را می‌پوشاند و یا به صفحات حسگر برای سطوح پشتی، روئی پا، و جانبی پا، متصل می‌شود. بسیاری از سیستم‌ها امکانات همزمانی چندگانه را برای استفاده همراه با الکترومیوگرافی (*EMG*) و سیستم‌های ویدیویی جهت تحلیل گام، فراهم می‌کنند.

جدول ۱-۳ برخی از مشخصات سیستم کف کفشی با حسگرهای خازنی برای اندازه‌گیری فشار کف پا

اندازه‌گیری فشار	اندازه
اندازه‌ی جعبه (mm)	۱۵۰ × ۱۰۰ × ۴۰
وزن جعبه (g)	۴۰۰
تعداد حسگرها (حد اکثر)	۲۵۶ (۱۰۲۴)
بسامد اندازه‌گیری	۲۰۰۰۰ حس در ثانیه
منبع ذخیره	فلش داخلی ۸ مگابایتی

۱. Novel GmbH

رابط کامپیوتر	فیبر نوری \ USB و بلوتوث
سیستم عامل	ویندوز
منبع تغذیه	باتری Li-Ion
اندازه‌ی کف کفش	۲۲ تا ۴۰ (اروپایی)

سیستم‌های کف کفشی ممکن است با سیستم‌های دور سنجی بی سیم (مانند بلوتوث) فعال شوند. دور سنجی به کاربر اجازه می‌دهد به آزمودنی نگاه کند درحالی که در همان زمان از طریق PC آزمایش را به طور کامل کنترل می‌کند. به طوری که داده‌های پویای فشاری می‌توانند به صورت برخط مشاهده شوند و به شخص گفته شود که چگونه کار کند. چنین سیستم‌هایی برای آموزش و آزمون بازخورد زیستی مناسب هستند.

برای جمع آوری و ارائه‌ی داده‌ها، کمکی‌های دیجیتال شخصی (PDA's) می‌توانند بصورت متصل به سیستم‌های اندازه‌گیری فشار کف کفشی مورد استفاده قرار گیرند. PDA یک PC جیبی بر پایه ویندوز است. عملیات اضافی مانند کالیبراسیون حسگرها و تحلیل داده‌ها معمولاً در PC کامل می‌شوند. PDA داده‌ها را به نوت بوک یا کامپیوتر میزبان انتقال می‌دهد. نمونه‌ای از کاربردهای سیستم‌های اندازه‌گیری کف کفشی فشار کف پا عبارت‌اند از:

- تحقیق و طراحی کفش
- کمک به طراحی در ارتوپدی
- ارزیابی توانبخشی
- تحلیل کینتیکی گام
- نشان دادن فشارهای طولانی مدت
- بیومکانیک ورزشی
- بازخورد زیستی

بسیاری از سیستم‌های اندازه‌گیری فشار کف کفشی بوسیله‌ی قرار دادن کفی بین سطوح بالایی و پائینی یک وسیله‌ی کالیبراسیون که با هوای فشرده کار می‌کند یا قادر به اعمال بارهای مشخص با وزن ثابت است، آزمایش می‌شوند. برخی از مزیت‌های سیستم‌های اندازه‌گیری کف کفشی فشار کف پا عبارتند از:

- انتخاب تکی حسگر

فصل اول: مقدمه‌ای بر تحلیل حرکت ۲۳

- حالت‌های برخط و غیربرخط
- نمایش برخط دو بعدی یا سه بعدی
- نمایش هم فشار (خط‌هایی که نقاط با فشار یکسان را به هم وصل می‌کنند)
- نمایش عددی
- انیمیشن مراحل تماس پا
- تصویر حداکثر فشار (*MPP*)
- انتخاب گام
- تحلیل زمان گام
- خطوط گام میانگین و انفرادی

کاربرد تحلیل حرکت در طراحی تجهیزات ورزشی

مورد پژوهی ۱-۱

در بسیاری از ورزش‌ها فشارهای مکانیکی پویا روی پاهای ورزشکاران وارد می‌شود. کفش‌های ورزشی برای بهبود اجرای ورزشی و چسبیدن خوب به پاها و محافظت آنها از آسیب‌ها بسیار مهم هستند. جلوی پا و عقب پا نیروهای متفاوتی را تحمل می‌کنند، بنابراین بهتر است کف کفش‌های ورزشی از یک ترکیب پیچیده از مواد مختلف ساخته شوند تا پاسخگوی نیازهای هر قسمت از کفش باشند. بررسی خاصیت کشسانی و تضعیف‌کنندگی (جذب نیرو) هر کفش ورزشی در شرایط واقعی یک بخش ضروری از تحقیق و پیشرفت برای کارخانه‌های بزرگ است. برای مثال شرکت آدیداس سالومون ای جی^۱ دارای یک مرکز تحقیقاتی جهت بررسی مواد و طرح‌های جدید است.

کفش‌های ورزشی بر اساس نیازهای طراحی آنها درخواست می‌شوند. برای مثال در هنگام دویدن، پاشنه پا اول با زمین برخورد می‌کند و نیرویی تا دو یا سه برابر نیروی وزن بدن به سرعت به پاشنه اعمال می‌شود. به منظور محافظت از پا و پاشنه در برابر نیروی ضربه‌ای بزرگ، انرژی حاصل از این ضربه باید بوسیله‌ی مواد پاشنه‌ی کفش

۱. Adidas-Salomon AG

جذب شود. این وضعیت نیاز به خاصیت‌های گران روی (جذب کننده نیرو شبیه به تضعیف کننده‌ها در سپر ماشین) و ارتجاعی (فنریت) در مواد سازنده‌ی پاشنه‌ی کفش دارد. در مرحله‌ی تماس یا "استقرار"، پا باز می‌شود و سپس از طریق جلوی پا از زمین جدا می‌شود. در این مرحله‌ی جلوبرنده، باید انرژی خیلی کمی بوسیله‌ی مواد کف کفش جذب شود، به طوری که فنریت برای حرکت به جلو و بالا به ورزشکار کمک کند. این مورد در شکل ۱-۱۷ برای دویدن در سرعت متوسط نشان داده شده است، در اینجا فشار در مواد کف کفش سایه دار و با پیکان نشان شده است.

بوسیله‌ی ساختارهایی که مواد فوم ارتجاعی و گران روی از قبیل اتیلن وینیل استات (*EVA*) و پلی اورتان (*PU*) را ترکیب می‌کنند، می‌توان به اجرای بهبود یافته دست یافت. هنگام برخورد اولیه‌ی پا، پلاستیک‌های گران روی در پاشنه بالشتکی را مهیا می‌کنند و پلاستیک‌های ارتجاعی در جلوی پا از دست رفتن انرژی را به حداقل می‌رسانند. در همه‌ی شرایط، جلوگیری از "رسیدن کفش به پائین‌ترین حد"، یعنی فشردن شدن مواد کف کفش تا اندازه‌ی خیلی زیاد و افزایش نیروهای فشاری تا سطوح غیر قابل قبول، مهم است.

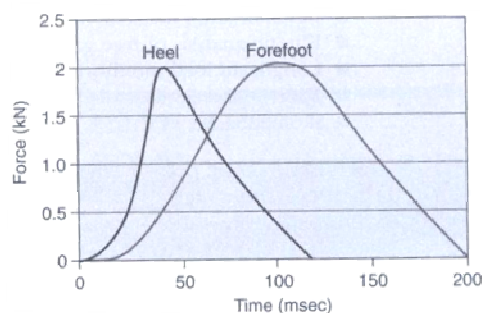
نیروهای وارده بر قسمت‌های مختلف کفش را در هنگام دویدن می‌توان به صورت نمودار نیرو-زمان نشان داد. نمودار شکل ۱-۱۸ نیروهای وارده بر پاشنه و جلوی پا را در یک دونه‌ی ۷۰ کیلوگرمی نشان می‌دهد. حدود ۳۰ تا ۴۰ میلی ثانیه بعد از اولین تماس، نیروی پاشنه به حداکثر $2000N$ می‌رسد. در جلوی پا، نیروی مشابه در زمانی در حدود ۱۰۰ میلی ثانیه بدست می‌آید. این اطلاعات به تعیین مشخصه‌های تغییر شکل کف کفش کمک می‌کند.

منحنی تغییر نیروی مواد کف کفش‌ها باید یک منحنی غیر خطی باشد (مانند فنرها) که در درجات مختلف دارای روند تصاعدی است، به طوری که با فشردن بیشتر، سخت‌تر شوند. انجام آزمایش مکانیکی مواد پلاستیکی جهت بررسی مناسب

فصل اول: مقدمه‌ای بر تحلیل حرکت ۲۵

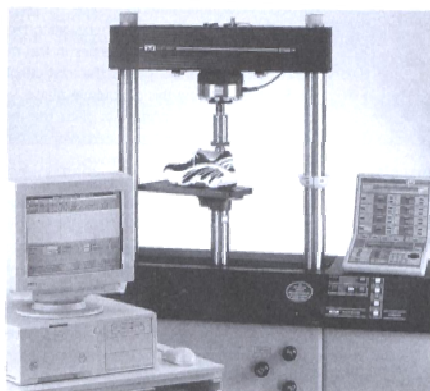


شکل ۱-۱۷. فشار وارده به مواد کف کفش در سه لحظه‌ی مجزا از مرحله‌ی استقرار.



شکل ۱-۱۸. نیروهای عمل کننده در پاشنه و جلوی پا برای دوندۀ ۷۰ کیلوگرمی. $1\text{ msec} = 1\text{ ms} = 1/1000\text{ s}$ و $1\text{ kN} = 1000\text{ N}$. (با اجازۀ آدیداس سالامون).

بودن آنها به عنوان مواد کفش‌ها مهم است. دستگاه آزمایش برای شبیه سازی شرایط واقعی دویدن باید توانایی فشرده‌سازی نمونه‌های با ضخامت بالای 20 mm را در یک فاصله زمانی 30 ms داشته باشد. هنگام اعمال نیرو در سرعت‌های بین 0.7 m.s^{-1} تا 1.6 m.s^{-1} ، نیروی آزمایش در این زمان بسیار کوتاه باید از ۰ تا حداکثر ۳۰۰۰ نیوتن افزایش یابد. شرکت آدیداس برای آزمایش خصوصیات تضعیف کنندگی کف کفش‌های موجود و بررسی و بهینه سازی مواد جدید از یک دستگاه آزمایش اینسترون^۱ استفاده می‌کند.



۱. Instron

شکل ۱-۱۹. یک دستگاه آزمایش اینسترون اعمال کننده‌ی نیرو و فشار معین به مواد جدید. (با اجازه‌ی آدیداس سلامون).

با استفاده از دستگاه‌های آزمایش مشابه با آنچه در شکل ۱-۱۹ نشان داده شده است طرح‌های کفش‌های جدید می‌تواند پیشرفت کنند و روش‌های آزمایش توسعه یابند. برای بررسی اثر کفش‌ها بر گام و رفتار غیر طبیعی پاها، اغلب حرکات دویدن با استفاده از دوربین‌های دو بعدی و سه بعدی ثبت می‌شوند. اسکن لیزری می‌تواند نیمرخ سه بعدی پای ورزشکاران را در چند ثانیه ارائه دهد.

کاربرد تحلیل حرکت در بهبود تکنیک‌های ورزشی

مورد پژوهی ۱-۲

خیلی وقت‌ها تحلیل کینماتیکی و کینتیکی مربیان و آموزش دهندگان را از بهترین روش‌های بهبود اجرای ورزشکاران آگاه می‌سازد. برخی ورزش‌ها شامل حرکات ساده بوده که در بردارنده‌ی تحلیل منطقی ساده هستند، اما برخی دیگر شامل حرکات پیچیده‌تری هستند که برای استنباط کامل نیاز به بررسی بیومکانیکی جامعی دارند. یک مثال از گروه دوم پرتاب دیسک (یکی از چهار پرتاب دو و میدانی) است. در پرتاب دیسک حرکات پیچیده در سرعت بالا و فضای کوچک انجام می‌شود. در المپیک ۱۹۹۶ آتلانتا که برای بررسی سرعت‌های رهایی، ارتفاع‌های رهایی، و زاویه‌های رهایی، سه دوربین ویدیویی با پردازش DLT استفاده می‌شد، یک تلاش برای تحلیل کامل انجام شد (آریل ۱ و همکاران، ۱۹۹۷). اطلاعات این تحقیق برای فراهم ساختن داده‌های بیومکانیکی در اینترنت جهت تحلیل در سایت‌های دور استفاده شد.

تصاویر ویدیویی سه بعدی و داده‌های صفحه‌ی نیرو (یو^۲ و همکاران، ۲۰۰۲) برای بررسی ارتباط بین مسافت رسمی پرتاب و مقادیر عکس‌العمل‌های منتخب زمین در طول پرتاب و ارتباط بین GRF و کینتیک مفصل اندام تحتانی استفاده شدند.

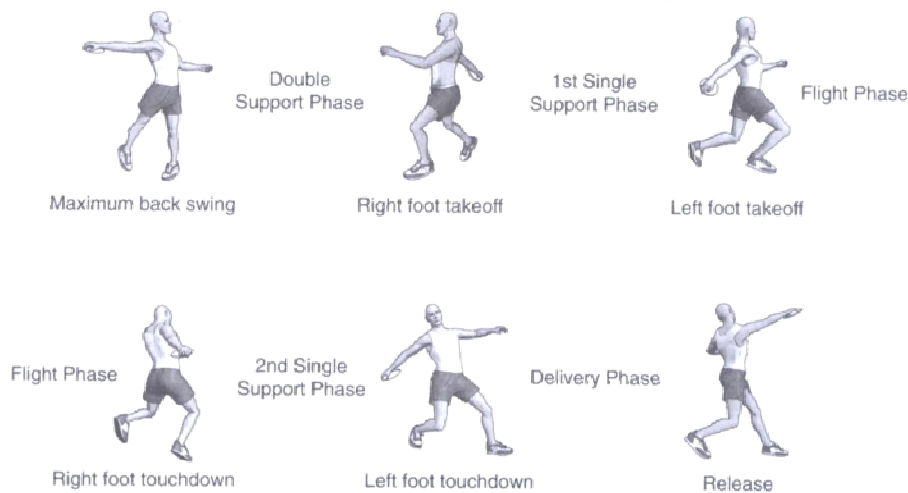
شکل ۱-۲۰ پرتاب دیسک را در ۶ لحظه‌ی مهم نشان می‌دهد: بیشترین چرخش به عقب، بلند شدن پای راست، بلند شدن پای چپ، فرود پای راست، فرود پای چپ و رهایی. این شش لحظه، پرتاب را به ۵ مرحله‌ی مهم تقسیم می‌کند: مرحله‌ی اتکای دو

۱. Ariel

۲. Yu

فصل اول: مقدمه‌ای بر تحلیل حرکت ۲۷

گانه، اولین مرحله‌ی اتکای یگانه، مرحله‌ی پرواز، دومین مرحله‌ی اتکای یگانه، و



مرحله‌ی رهایی.

شکل ۱-۲۰. شش لحظه‌ی حساس در پرتاب. (اقتباس از یو و همکاران. (۲۰۰۲))

در شکل ۱-۲۱ چپ‌نش عملی صفحه‌های نیرو (FP_s) و دوربین‌های استفاده شده در تحقیق، نشان داده شده است. $FP-1$ برای ثبت GRF ‌ها در پای چپ در مرحله‌ی اتکای دوگانه‌ی اول پرتاب، و $FP-2$ و $FP-3$ برای ثبت GRF ‌ها در مراحل اتکای یگانه‌ی دوم و رهایی استفاده شده‌اند. از پردازش DLT برای جمع‌آوری مختصات سه بعدی ۲۱ نشانگر روی بدن و مرکز دیسک برای هر آزمودنی در یک مجموعه تلاش‌ها استفاده شد. برای ضبط تصویر از شیء کنترل و اجرای آزمودنی‌ها سه دوربین $S-VHS$ با زمانبندی یکسان و سرعت فریم ۶۰ فریم برثانیه استفاده شد.

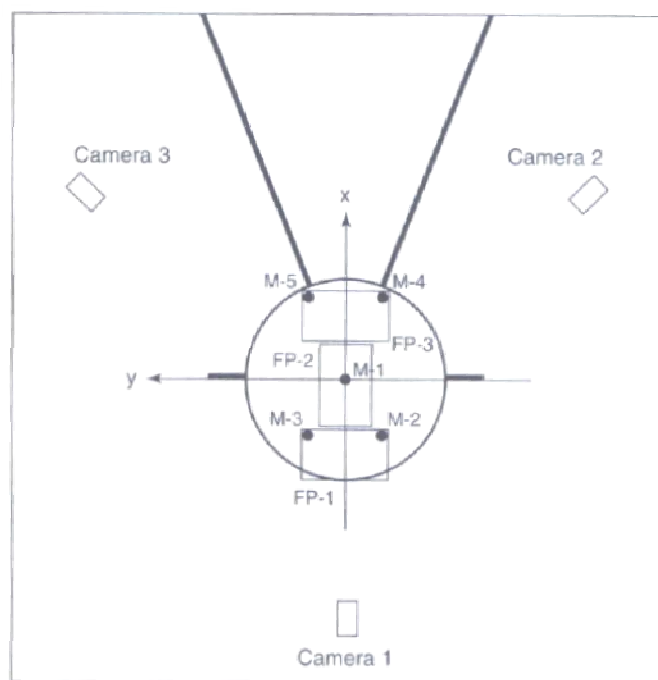
چنین نتایج تحقیقاتی می‌تواند به دو دسته تقسیم شود:

۱. تاثیر GRF روی اجرا:

به عنوان یک نمونه از نتایج بدست آمده در این دسته، ضربه‌ی محرک هنجار شده‌ی رو به جلو- رو به عقب را بر روی پای راست در مراحل

فصل اول: مقدمه‌ای بر تحلیل حرکت ۲۸

اتکای یگانه‌ی دوم و رهایی و رابطه‌ی آن را با مسافت رسمی پرتاب که در شکل ۱-۲۲ نشان داده شده است، تصور کنید. در این مثال، ضربه محرکه، مساحت زیر نمودار نیرو-زمان است (فصل



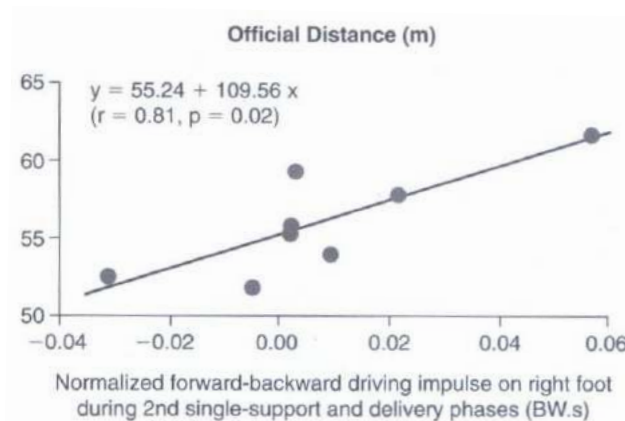
۶ را ببینید) و بوسیله‌ی تقسیم شدن بر وزن بدن هنجار شده است. گفته
شکل ۱-۲۱. نصب تجربی صفحات نیرو در یک تحقیق در
پرتاب دیسک. (با اجازه‌ی یو و همکاران (۲۰۰۲)).

می‌شود که فاصله رسمی رابطه‌ی معنی‌داری با ضربه دارد. معنی دقیق
این جمله براساس آمار پایه درک می‌شود، اما در این کتاب به این
موضوع نخواهیم پرداخت. تنها کافی است که بدانیم همبستگی، رابطه
خطی بین دو متغیر است. برای مثال در این نمودار، خط مستقیم رابطه
بین مسافت رسمی پرتاب و ضربه محرکه را نشان می‌دهد.

۲. تاثیر ممان‌های برآیند مفصل اندام تحتانی بر روی GRF ها:

فصل اول: مقدمه‌ای بر تحلیل حرکت ۲۹

ممان‌های برآیند مفصل در زانوها و ران‌ها، در مراحل اتکای یگانه‌ی اول و اتکای یگانه‌ی دوم و رهایی بوسیله‌ی استفاده از رویه‌ی دینامیک معکوس (فصل ۱۰ را ببینید) تخمین زده شده بود. مولفه‌ی بردار ممان برآیند مفصل که عمود بر صفحه‌ی مشخص شده توسط ران و ساق پا است، اشاره به ممان فلکشن-اکستنشن داشت. مولفه‌ی بردار ممان برآیند مفصل موازی با ران یا ساق پا، به ممان چرخش داخلی-خارجی اشاره داشت. مولفه‌ی بردار ممان برآیند عمود بر هر دو بردار ممان فلکشن-اکستنشن و چرخش داخلی-خارجی اشاره به بردار آبداکشن-آداکشن داشت. برای مثال، فلکشن مفصل ران را در نظر بگیرید که در شکل ۱-۲۳ نشان داده شده است.

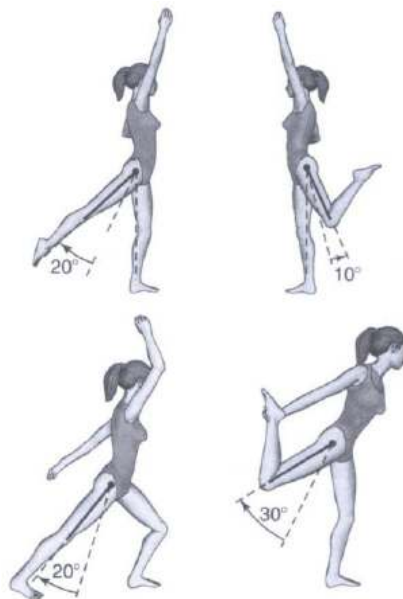


شکل ۱-۲۲. ضربه‌ی محرکه‌ی روبه جلو-روبه عقب هنگام شده در پای راست در طول مراحل اتکای یگانه‌ی دوم و رهایی پرتاب دیسک و ارتباط آن با مسافت رسمی پرتاب (با اجازه‌ی یو و همکاران (۲۰۰۲)).

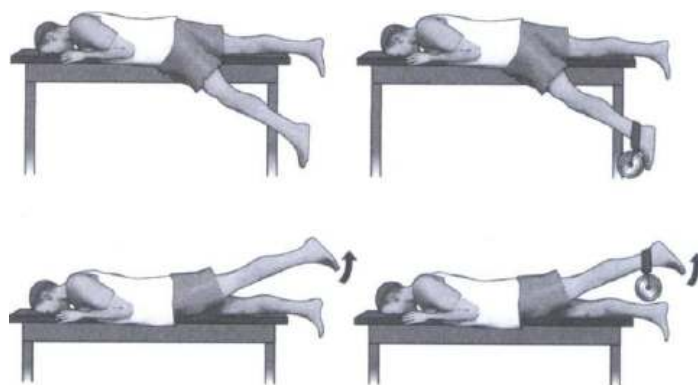
در واقع ممان فلکشن مفصل ران همان مقدار قدرت به سبب اثر چرخانندگی مفصل ران است. نظریه‌ی چرخانندگی ممان در فصل ۱۰ به صورت مشروح توضیح داده می‌شود، اما برای این مورد خاص، می‌تواند مرتبط با خم کردن زانو بدون هیچ مقاومتی، یا بر خلاف وزنه‌ی متصل به میچ پا در نظر گرفته شود.

فصل اول: مقدمه‌ای بر تحلیل حرکت ۳۰

در حالی که وزنه‌ای به میچ پا متصل است، بدلیل اینکه اکنون وزن متصل شده به وزن پا افزوده می‌شود و بدلیل اینکه وزنه در یک فاصله‌ی دور از مفصل ران قرار گرفته است، ممان فلکشن مفصل ران (شکل ۱-۲۴) باید بیشتر باشد. به عنوان مثالی از نتایج یافت شده توسط یو و همکاران (۲۰۰۲)، نمودار را در شکل ۱-۲۵ در نظر بگیرید، در اینجا مسافت رسمی پرتاب در برابر حداکثر ممان هنجار شده‌ی مفصل ران از حالت راست در طول مراحل اتکای یگانه‌ی دوم و رهایی رسم شده است.



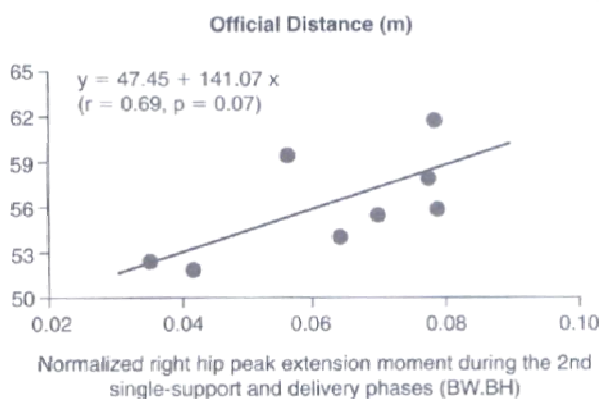
شکل ۱-۲۳. فلکشن در مفصل ران و در چند حرکت مختلف.



فصل اول: مقدمه‌ای بر تحلیل حرکت ۳۱

شکل ۱-۲۴. چپ: ممان فلکشن آسان و کمتر مفصل ران. راست: ممان سخت و بیشتر مفصل ران.

اگر چه این داده‌ها نشان دهنده‌ی ارتباط خطی هستند، اما مشخص است که داده‌ها دارای پراکندگی زیادی هستند. در این نمودار، داده‌ها برای وزن بدن و قد هنجار شده‌اند، یعنی ممان‌ها به قد و وزن تقسیم شده‌اند. همچنین داده‌های اکستنشن ران برای مشاهده‌ی ارتباط و همبستگی احتمالی بین ممان‌های اکستنشن حداکثری ران راست با



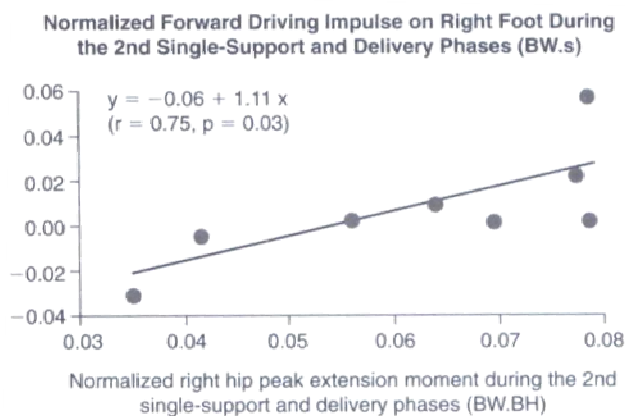
شکل ۱-۲۵. مسافت رسمی پرتاب در پرتاب دیسک رسم شده در برابر حداکثر ممان اکستنشن هنجار شده‌ی ران طی مراحل دومین اتکای یگانه و رهایی.

ضربه‌ی رو به جلوی هنجار شده در پای راست در طول مراحل اتکای یگانه دوم و رهایی بررسی شدند. ضربه‌ی نیروی آنی یا کوتاه مدت در اصطلاح عبارت است از نیرو \times زمان، یا مساحت زیر نمودار نیرو-زمان. مفهوم ضربه در فصل ۶ بیشتر مورد بحث خواهد گرفت. در نمودار شکل ۱-۲۶، ضربه با تقسیم شدن بر وزن بدن هنجار شده است (یو و همکاران، ۲۰۰۲).

این تحقیق شامل متغیرهای زیادی بود و نتیجه گیری‌های عمده عبارت بودند از:
 ۱. پرتاب کننده‌ها در طول مرحله‌ی اتکای یگانه‌ی اول باید با حداکثر قدرت و شدت ممکن بدن خود و دیسک را در جهت راستای پرتاب جلو برانند.

فصل اول: مقدمه‌ای بر تحلیل حرکت ۳۲

۲. پرتاب کننده‌های دیسک باید برای افزایش ارتفاع دیسک، در طول مرحله‌ی اتکای یگانه‌ی اول نیروی فشاری عمودی را تولید کند.
۳. فرود پر قدرت پای راست به زمین پس از پرواز در هوا می‌تواند در تولید ضربه‌های نیروی عکس العمل زمین در پای راست در مرحله‌ی اتکای یگانه‌ی دوم و مرحله‌ی رهایی برای رسیدن مسافت رسمی بیشتر، به پرتاب کننده‌های دیسک کمک کند.



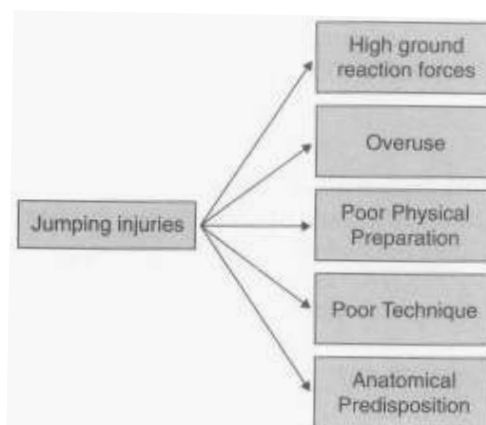
شکل ۱-۲۶. ضربه‌ی روبه جلوی هنجار شده در پای راست در طول مراحل اتکای یگانه‌ی دوم و رهایی که در برابر ممان‌های اکستنشن حداکثری ران راست رسم شده است. پرتاب دیسک. (با اجازه‌ی یو و همکاران (۲۰۰۲)).

۴. پرتاب کننده‌ها باید برای رسیدن به مسافت رسمی بیشتر، در طول مرحله‌ی اتکای یگانه‌ی دوم و مرحله‌ی رهایی پای راست خود را به جلو و راست حرکت دهد.
۵. پرتاب کننده‌های دیسک باید جهت به حداکثر رساندن مسافت رسمی، پای چپ خود را با حداکثر قدرت ممکن به سمت بالا و عقب حرکت دهد تا نیروی فشاری عمودی حداکثری بدست آید. قدرت‌های اکستنشن زانو و ران پای چپ برای حرکت پر قدرت پای چپ در طول مرحله‌ی رهایی، از اهمیت زیادی برخوردار هستند.

مربیان ورزش‌های میدانی بر روی تکالیف مهمی از برنامه‌ی تمرین تمرکز می‌کنند که مطمئن می‌کند پیشرفت ورزشکاران در رویدادهای ورزشی همراه با پیشگیری از آسیب دیدگی است. بارنت^۱ (۲۰۰۱ ب) خلاصه‌ی دقیقی از دلایل آسیب در ورزش‌های پرشی تهیه کرد (شکل ۱-۲۷).

در فعالیت‌ها پرشی، به ویژه در فعالیت‌هایی که روی سطوح مصنوعی انجام می‌شوند، GRF های بالا فراوان هستند. فشارهای بیش از اندازه ممکن است بوسیله‌ی فاسیا، لیگامنت‌ها، تاندون‌ها و یا استخوان‌ها جذب شوند. در صورت انجام تعداد زیادی پرش، به ویژه بر روی سطوح سخت، آسیب‌ها ممکن است اتفاق بیافتند؛ اینکه صدمات بعد از چه مدتی اتفاق بیافتد بستگی به انعطاف پذیری ورزشکار دارد. نیرو ممکن است بوسیله‌ی صفحه‌های نیرو، وسایل کف کفشی، یا سایر حسگرهای نیروها اندازه‌گیری شوند، و همان طور که دیدیم این اندازه‌گیری‌های نیرو، درباره‌ی نوع کفشی که موقع پرش باید پوشید، منجر به نتیجه‌گیری‌های مهمی می‌شود.

انجام مفرط یعنی اینکه یک حرکت پرشی بارها و بارها اجرا شود؛ برای مثال، در پرش ارتفاع، یک فعالیت بسیار شدید تکرار می‌شود و توسط متر نواری اندازه‌گیری می‌شود.



۱. Burnett

فصل اول: مقدمه‌ای بر تحلیل حرکت ۳۴

شکل ۱-۲۷. خلاصه‌ی دلایل آسیب در رویدادهای ورزشی. (با اجازه‌ی بارنت، (۲۰۰۱ ب)).

آمادگی ضعیف به این معنی است که یک ورزشکار تحت تمرینات جسمانی مناسب قرار نگرفته است تا تمرینات با حجم و شدت زیاد را تحمل کند. در کل، فرود با پای تخت (با تمام کف پا) روش خوبی برای جلوگیری از مصدومیت در بسیاری از فعالیت‌های پرشی است. فرود روی پاشنه‌ی پا، زمان تماس را کاهش می‌دهد اما می‌تواند منجر به صدمه شود. فرود روی کنار پا ممکن است منجر به پیچ خوردن پا شود.

بعضی از ورزشکاران رشته‌های پرشی ممکن است یک ساختار آناتومیکی غیر انعطاف پذیر، یا عضلات نامتعادل داشته باشند که ممکن است آنها را مستعد بروز صدمات کند. بسیاری از صدمات اندام تحتانی بدلیل پرونیشن زیاد، پائین افتادن زیاد لگن، مشکلات تاندون آشیل، یا تفاوت طول پاها اتفاق می‌افتد.

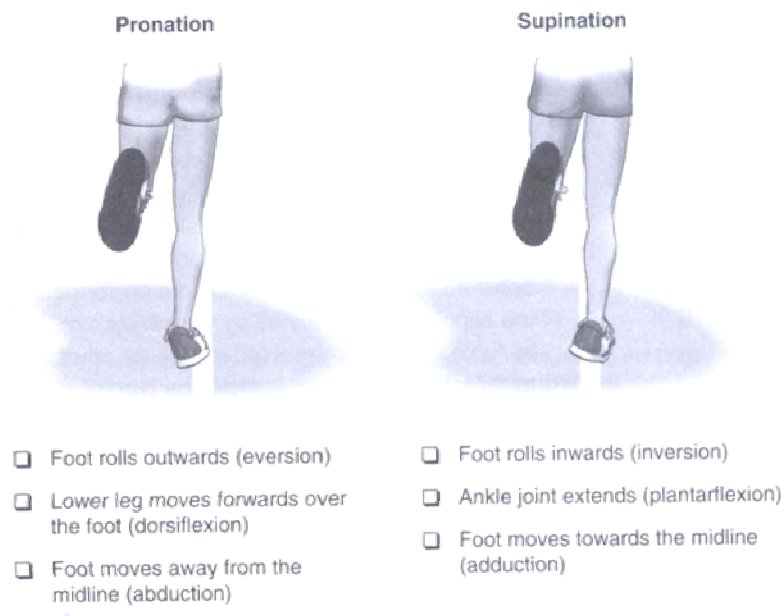
پرونیشن (شکل ۱-۲۸) به عنوان یک بخش طبیعی از گام انسان، حرکتی در مفصل مچ پا است که بعد از ضربه‌ی پا اتفاق می‌افتد. وقتی که پا پرونیشن را انجام می‌دهد، پا به سمت خارج می‌چرخد (اورشن)، ساق پا به سمت روی پا حرکت می‌کند (دورسی فلکشن)، و پا از خط وسط بدن دور می‌شود (آبداکشن). سوپینیشن بعد از پرونیشن رخ داده و شامل حرکات عکس است: چرخش پا به سمت داخل (اینورشن)، باز شدن مفصل مچ پا (پلناتر فلکشن)، و حرکت پا به سمت خط وسط بدن (آداکشن). این گونه حرکات پا و ساق پا می‌تواند با قرارگیری دوربین در پشت دوندۀ جهت ثبت تصاویر ویدیویی یا گرفتن عکس‌های ثابت، با جزئیات مشاهده شود.

تصور می‌شود پرونیشن از دلایل عمده و شایع صدمات پا، مچ پا، زانو و مهره‌های پشت است که با روش‌های مداخله‌ی اورتوپدی قابل اصلاح می‌باشد.

مثال دیگری که در ضبط ویدیویی می‌تواند سودمند باشد، افتادگی لگن در زمان استقرار یک پائی است. زمانی که تمام وزن پا در دویدن و پرش بر روی یک پا اعمال می‌شود، افتادگی لگن می‌تواند اتفاق افتد. اگر عضلات سرینی میانی (در زیر کفها) ضعیف باشند یا شخص کنترل اندکی بر روی آنها داشته باشد، در طرف مخالف پایی که وزن بدن را تحمل می‌کند، افتادگی بزرگی اتفاق خواهد افتاد (شکل ۱-۲۹). این

فصل اول: مقدمه‌ای بر تحلیل حرکت ۳۵

مشکل اغلب بعد از آسیب‌های اندام تحتانی رخ می‌دهد و معمولا برای توانبخشی به



یک فیزیوتراپ نیاز دارند. بارنت (۲۰۰۱ الف) انجام تمرینات زیر را در اندام تحتانی

شکل ۱-۲۸. پرونیشن و سوپینیشن، هر دو حرکات عادی در گام برداری انسان هستند. (اقتباس از بارنت (۲۰۰۱ ب)).

به عنوان بخشی از برنامه تمرینات منظم برای به تاخیر انداختن صدمات یا پیشگیری از صدمات پیشنهاد کرده است. تمرینات مشابه‌ای نیز می‌توانند به عنوان برنامه توانبخشی استفاده شوند.



فصل اول: مقدمه‌ای بر تحلیل حرکت ۳۶

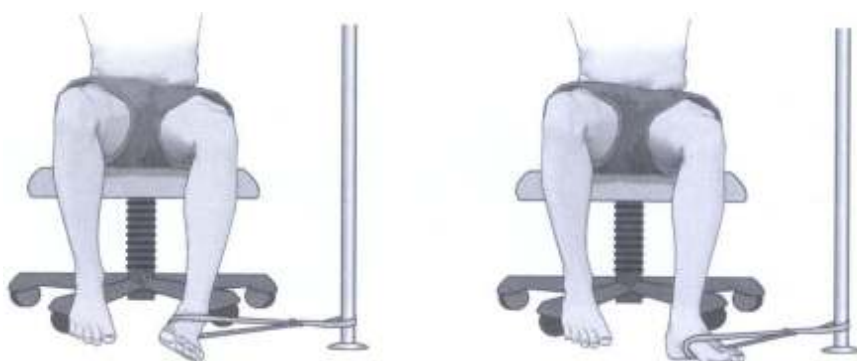
شکل ۱-۲۹. افتادگی لگن می‌تواند بعد از آسیب دیدگی در سمت مخالف پای تحمل‌کننده وزن اتفاق بیافتد.

پا: برای حفظ سلامت ساختاری پا: جمع کردن حوله یا پارچه با پا، دویدن با پای برهنه، برداشتن اشیاء با پنجه‌ی پا.

مچ پا: برای تقویت اندام تحتانی: استفاده از کش با فنر برای انجام تمرینات اینورشن، اورشن، و دورسی فلکشن؛ استفاده از یک تخته‌ی مچ پا برای انجام تمرینات مختلف؛ بالا رفتن یک طرفه از تپه؛ راه رفتن روی پنجه‌ها، پاشنه‌ها و داخل و خارج پا. عکس‌های نشان داده شده در شکل ۱-۳۰، که از ویدیو استخراج شده‌اند، اینورشن مچ پا را نشان می‌دهد که با کش انجام شده است (مانند کشش مقاوم که برای درمان استفاده شده است).

زانو: برای تقویت مفصل و جلوگیری از آسیب: حرکت اسکات. با کنترل مرحله‌ی پائین آمدن (اکستریک) اسکات، تاندون متصل به کشکک را تقویت می‌کند. همچنین ابداع تمریناتی برای بقیه‌ی قسمت‌های بدن، شامل پشت، مفاصل ران و غیره امکانپذیر است، اما این تمرینات در اینجا ارائه نشده‌اند. این کتاب در کل بر روی اصول مکانیکی و کاربردهای تحلیل حرکت بر روی ورزش‌ها و حرکت انسان متمرکز است.

فصل‌های بعدی کتاب با تحلیل پایه‌ی بردار آغاز می‌شود و بعد کینتیک و کینماتیک خطی و زاویه‌ای با مثال‌ها و مورد پژوهی‌های زیادی که با ورزش‌ها یا حرکت انسان در ارتباط هستند، ادامه پیدا می‌کند. این کتاب برای دانشجویان حرکت



شکل ۱-۳۰. یک تمرین اینورژن میچ پا که با کش تمرینی اجرا شده است در حالی که توسط دوربین ویدیویی ضبط شده است. (اقتباس از بارنت (۲۰۰۱ ب)).

انسان، حرکت شناسی یا بیومکانیک نوشته شده است که نیاز به دانش کاربردی خوبی از مکانیک دارند و می‌خواهند تحلیل حرکت را برای آزمودنی‌های خودشان به کار گیرند. موضوعات با فرض عدم داشتن دانش قبلی درباره مکانیک بیان شده‌اند. دانش ریاضی کمی به کار رفته است، اما روش‌های استفاده شده، زمانیکه برای اولین بار در متن استفاده می‌شوند با توضیحات کامل شرح داده می‌شوند.

خلاصه

در این فصل مقدماتی، برخی از روش‌ها و دستگاه‌های مدرن موجود برای تحلیل حرکت مورد مطالعه قرار گرفتند. مبانی اصلی تحلیل کینماتیک و کینتیک بیان شدند، و سه مورد پژوهی ارائه شد که سه دلیل اصلی برای انجام این چنین تحلیلی را نشان می‌دهد: کاربرد برای طراحی تجهیزات ورزشی، پیشرفت در تکنیک‌های ورزشی و پیشگیری و توانبخشی آسیب‌های ورزشی.

منابع

Ariel GB, Finch A, Penny MA (1991). *Biomechanical analyse of discus-throwing at the 1996 Atlanta Olympic games*. Presented at the XV International Symposium in Sports. Texas Women's University. Denton ,TX; June 20-28.

Burnett A(2001a). *Biomechanics of jumping: The relevance to field events athletes*. Modern Athlete and Coach 39:3-8.

Brunett A: *Jumping Injeries*(2001b). *Their cause, possible prevention and rehabilitation*. Modern Athlete and Coach 39:3-6.

Yu Bing, Broker J, Silvester LJ (2002). *Akinetic analysis of discus-throwing techniques*. Sports Biomechanics, 1(1): 25-4.

خواندنی‌های پیشنهادی

- Abdel-Aziz YI, KararaHM (۱۹۷۱). *Direct Liear transformation from comprator cordinates into object-space cordinates*. In proceedings ASP/UI Symposium on Close-Range Photogrammetry. Falls church, VA; American Society of Photogrammetry; ۱-۱۸.
- Burnett A: *Coach Information Servise*. Available at <http://www.coachesinfo.com/articles/۵۰/>
- Regtien PPL (۲۰۰۴). *Electronic Instromantation*. Delft, The netherlands: Delft University Precc.
- Dengler K, Lang A (۱۹۹۹). *Material requirements of sport shoes*. Material World ۷:۷۳۹-۷۴۰.
- Woltring HJ, Huiskes R (۱۹۹۰). *Stereophotogrammetry*. In biomechanics of Human Movement. Edited by Berme N, Capazzo A. Worthinton, OH: Bertec Corporation; ۱۰۸-۱۲۷
- Wood GA, Marshal RN (۱۹۸۶). *The Accuracy of DLT Extrapolation in three-dimentional film analysis*. J Biomech ۱۹:۷۸۱-۷۸۵.

فصل دوم

کمیت‌های برداری و نرده‌ای در مکانیک و تحلیل حرکت

اهداف فصل

ارائه‌ی درک اصولی به دانشجویان درباره‌ی کمیت‌های برداری و نرده‌ای و کاربرد آنها در مکانیک.

نتایج فصل

پس از مطالعه این فصل خواننده قادر خواهد بود تا:

- بین کمیت‌های برداری و نرده‌ای تمایز قائل شود.
- بردارها را با استفاده از روش ابتدا-به-انتهای جمع و تفریق کند.
- بردارها را با استفاده از بردارهای واحد یا مولفه‌های بردار جمع و تفریق کند.
- یک بردار را در محورهای عمود برهم به مولفه‌هایش تجزیه کند.
- از قضیه‌ی فیثاغورث جهت جمع کردن دو بردار عمود بر هم استفاده کند.
- برای جمع کردن دو بردار که بر یکدیگر عمود نیستند از قانون کسینوس استفاده کند.

فصل دوم: کمیت‌های برداری و نرده‌ای در مکانیک و تحلیل حرکت ۴۰

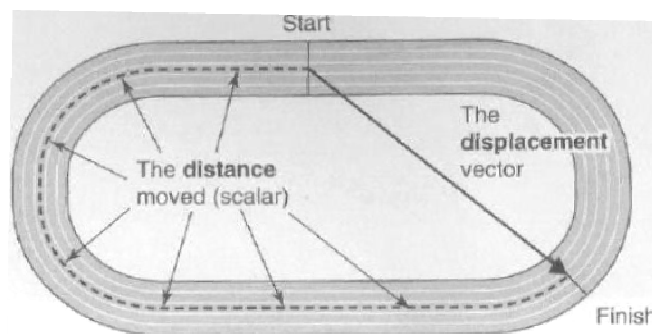
- برای اندازه‌گیری کار انجام شده توسط نیرو از حاصلضرب "داخلی" یا نرده‌ای دو بردار استفاده کند.
- برای اندازه‌گیری ممان‌ها یا گشتاورهای چرخشی از حاصلضرب "خارجی" یا برداری دو بردار استفاده کند.

۱-۲ جمع و تفریق بردارها

مطالعه‌ی مکانیک در بردارنده‌ی اندازه‌گیری کمیت‌های فیزیکی از قبیل موقعیت، جرم، سرعت، شتاب، نیرو، گشتاور اینرسی، زمان، و سرعت زاویه‌ای است. بعضی از این کمیت‌ها نرده‌ای و کمیت‌های بدون جهت هستند، زیرا می‌توان آنها را تنها با مقادیر عددی به صورت کامل توصیف کرد؛ جرم، زمان، سرعت، و گشتاور اینرسی، همه کمیت‌های نرده‌ای هستند. از سوی دیگر، کمیت‌های برداری با بزرگی و جهت توصیف می‌شوند. جابه‌جایی، سرعت، شتاب، و نیرو همگی کمیت‌های برداری هستند. در کمیت‌های برداری، اندازه یا بزرگی باید همراه با جهت باشد.

مقایسه‌ی بین جابه‌جایی و مسافت طی شده، می‌تواند تفاوت بین کمیت‌های برداری و نرده‌ای را نشان دهد. جابه‌جایی بردار حرکت است که موقعیت ابتدائی را توسط یک خط راست به موقعیت پایانی متصل می‌کنند. از طرف دیگر مسافت یک کمیت نرده‌ای است که نشانگر مجموع فاصله‌های طی شده است که همه‌ی انحرافات از مسیر مستقیم را شامل می‌شود. برای مثال شکل ۱-۲ یک دونه را نشان می‌دهد که سه چهارم پیست ۴۰۰ متری بیضی شکل را در زمان ۴۰ ثانیه می‌دود. در این مثال جابه‌جایی، d ، برداری تقریباً ۱۳۰ متری با جهت نشان داده شده است، اما مسافت طی شده، s ، تمام مسیر پیموده شده است، که ۳۰۰ متر اندازه‌گیری می‌شود. همچنین می‌توانیم بین سرعت (بردار v) و تندی تفاوت قائل شویم: سرعت جابه‌جایی تقسیم بر زمان صرف شده است که یک بردار در جهت یکسان با d است. تندی مسافت طی شده تقسیم بر زمان صرف شده و کمیتی نرده‌ای است. بنابراین در این مثال، تندی = $3,25m/s$ و سرعت = $7,5m/s$.

فصل دوم: کمیت‌های برداری و نرده‌ای در مکانیک و تحلیل حرکت ۴۱



شکل ۱-۲. تمایز بین مسافت پیموده شده (نرده‌ای) و جابه‌جایی (برداری).

۱-۱-۲ جمع کمیت‌های نرده‌ای

کمیت‌های نرده‌ای می‌توانند با روش جمع ساده به یکدیگر اضافه شوند. دو جرم 50 kg در مجموع می‌توانند 100 kg شوند. به صورت کلی، اگر $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$ کمیت‌های نرده‌ای هستند که باید با یکدیگر جمع شوند، پس مجموع همه آنها می‌شود:

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n$$

کادر ۱-۲ مثال‌هایی از کمیت‌های نرده‌ای	
جرم 80 kg	زمان 55 s
گشتاور اینرسی 0.2 kg/m^2	سرعت زاویه‌ای 10 rad/s (۱۰ رادیان بر ثانیه)

کادر ۲-۲ مثال‌هایی از کمیت‌های برداری	
سرعت 12 m/s در جهت غرب	شتاب 5 ms^{-1} از چپ به راست
نیروی 20 N عمل‌کننده به صورت عمودی رو به بالا	جابه‌جایی 5 m در امتداد خط وصل‌کننده‌ی (نقاط) A و B

بعضی وقت‌ها این فرمول در کتاب‌های مرجع و یا نشریه‌های علمی به این

شکل نیز نوشته می‌شود:

$$S = \sum_{i=1}^n S_i$$

فصل دوم: کمیت‌های برداری و نرده‌ای در مکانیک و تحلیل حرکت ۴۲

در اینجا \square (سیگما) به معنی "مجموع" است. زیرنویس "قراردادی" i به این منظور استفاده می‌شود تا نشان دهد که n جمله با مجموع i که تمامی مقادیر عددی بین ۱ تا n شامل می‌شوند، وجود دارد.

۲-۱-۲ جمع بردارها

به شرطی که جهت هر دو بردار در راستای خط راست یکسانی باشد، بردارها با یک جمع ساده با هم جمع زده می‌شوند. یک جابه‌جایی ۱۰۰ متری در راستای جنوب با یک جابه‌جایی ۲۰۰ متری در راستای جنوب در مجموع باعث یک جابه‌جایی ۳۰۰ متری در راستای جنوب می‌گردد. با این حال جمع بردارها در صورتیکه بین دو بردار زاویه‌ای وجود داشته باشد به سادگی میسر نیست. ما در این کتاب، قراردادی را پذیرفته‌ایم که بر اساس آن بردارها در متن با حروف پر رنگ و ایتالیک نشان داده می‌شوند. پس ۲ یا چند بردار اینچینی می‌توانند با استفاده از روش ابتدا-به-انتها با یکدیگر جمع شوند. اجازه دهید دو بردار را در نظر بگیریم، A (جابه‌جایی ۵۰ متری در راستای شمال) و B (جابه‌جایی ۷۵ متری در راستای جنوب شرقی) و سعی کنیم آنها را با استفاده از روش ابتدا-به-انتها با یکدیگر جمع کنیم (شکل ۲-۲).

با شروع از نقطه P ، شخص (یا هر شیئی دیگری) تحت این دو جابه‌جایی، ابتدا A و سپس B ، شخص یا شیئی ابتدا به نقطه Q حرکت خواهد کرد و سپس به نقطه‌ی R . به طور مشخص جابه‌جایی کلی یک بردار است که از نقطه‌ی P (نقطه شروع) تا نقطه‌ی R (نقطه پایان) امتداد یافته است. همچنین، اگر ابتدا B رسم شود و سپس A ، باز هم نتیجه یکسان خواهد بود. می‌توانیم این موارد را به صورت خلاصه به این صورت بیان کنیم:

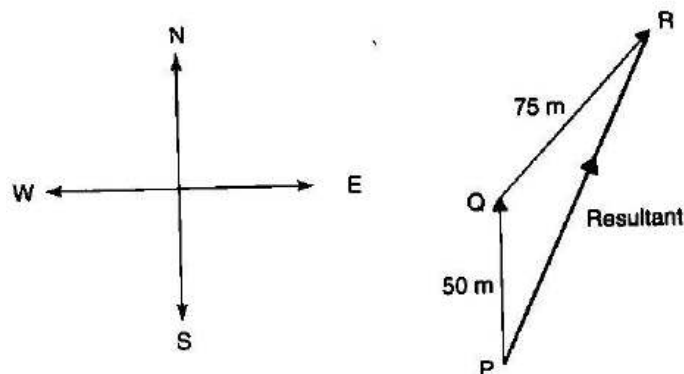
اگر مجموع دو بردار را با C نمایش دهیم آنگاه:

$$C = A + B$$

(برای مثال جابه‌جایی QR + جابه‌جایی QR = جابه‌جایی برآیند PR)

$A + B = B + A$ (ترتیب انجام جابه‌جایی‌ها مهم نیست).

فصل دوم: کمیت‌های برداری و نرده‌ای در مکانیک و تحلیل حرکت ۴۳



شکل ۲-۲. جمع دو کمیت برداری بوسیله‌ی روش ابتدا-به-انتها.

کادر ۲-۳. مثال‌هایی از جمع کمیت‌های نرده‌ای	
مجموع وزن‌های ۲۵، ۳۰ و ۴۵ kg برابر است با ۱۰۰ kg	احتیاط:
مجموع زمان‌های ۲۰، ۱۰ و ۱۵ ثانیه برابر است با ۴۵ s	
جمع گشتاورهای اینرسی ۰٫۲ و ۰٫۱ kg/m ^۲ برابر است با ۰٫۳ kg/m ^۲	
مجموع سرعت‌های زاویه‌ای ۵ و ۲٫۵ rad/s برابر است با ۷٫۵ rad/s	
مقادیر گشتاورهای اینرسی وابسته به این است که کدام محور در نظر گرفته می‌شود، طوری که ممکن است عمل جمع گشتاورهای اینرسی را به این سادگی که در اینجا عمل کردیم، انجام ندهیم. همچنین، اگر چه سرعت‌های زاویه‌ای می‌توانند به سادگی شبیه این مثال با هم جمع شوند، در عمل قوانین فیزیکی دیگری در جریان هستند، یعنی جمع کردن سرعت‌های زاویه‌ای براساس قوانین متفاوتی انجام می‌گیرد. (فصل‌های ۶ و ۷ که درباره‌ی سرعت‌ها و شتاب‌های زاویه‌ای بحث کرده‌اند را ببینید.)	

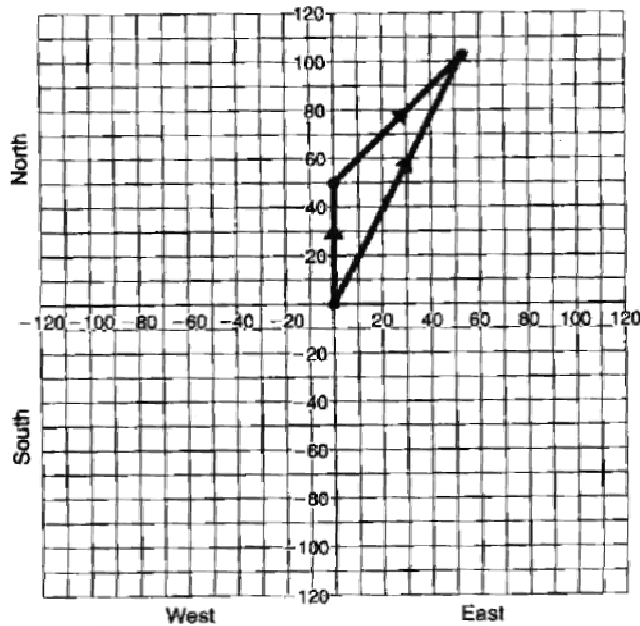
در مثال بالا بردار برآیند $115/88m$ با زاویه $27/2^\circ$ نسبت به PQ است، اما این موضوع در اینجا اثبات نخواهد شد. این موضوع را می‌توان به صورت تقریبی با استفاده از روش گرافیکی نشان داد. کاغذ شطرنجی را انتخاب کنید که هر مربع آن دارای اضلاع یک سانتیمتری است، و هر کدام از این مربع‌ها نیز توسط مربع‌های کوچک‌تر با اضلاع یک میلیمتری تقسیم بندی شده هستند. برداری با نقطه شروع نزدیک به مرکز کاغذ شطرنجی، که ما این نقطه را نقطه مبدأ $(0,0)$ می‌نامیم، رسم کنید. برای انتخاب

فصل دوم: کمیت‌های برداری و نرده‌ای در مکانیک و تحلیل حرکت ۴۴

بردار عمودی یا افقی شما می‌توانید به روش قانون "آسان-برای-استفاده" عمل کنید. به عنوان مثال اگر ما هر سانتی متر را روی کاغذ شطرنجی برای نشان دادن $10m$ انتخاب کنیم، کشیدن بردار $50m$ به سمت شمال آسان خواهد بود، زیرا این بردار بر روی کاغذ شطرنجی معادل $5cm$ خواهد بود و جهت آن از نقطه مبدأ به سمت بالا خواهد کرد. همچنین اگر بخواهیم تا زوایا را در کاغذ شطرنجی اندازه‌گیری کنیم، ضروری است تا مقیاس‌ها را در محورهای افقی (x) و عمودی (y) یکسان در نظر بگیریم. اگر بخواهیم برداری را در یک جهت رسم کنیم (به عنوان مثال برداری در جهت شمال شرقی)، باید این بردار را با استفاده از گونیا در یک زاویه 45° و در جهت مثبت محور x و جهت مثبت محور y رسم کنیم. شکل ۲-۳ دو بردار، A و B ، و برآیند آنها را نشان می‌دهد؛ در این مورد، بردار برآیند می‌تواند با استفاده از خط کش به طول $11.6cm$ و با استفاده از گونیا با زاویه‌ی 27° نسبت به بردار A ، اندازه‌گیری شود.

بزرگی $11.6cm$ تبدیل به جابه‌جایی $116m$ می‌شود و دقت آن بر اساس درصد

صرفاً به اندازه‌ی دقت اندازه‌گیری طول است. در این مورد، بردار برآیند با استفاده از



شکل ۲-۳. جمع دو جابه‌جایی A و B با استفاده از روش گرافیکی

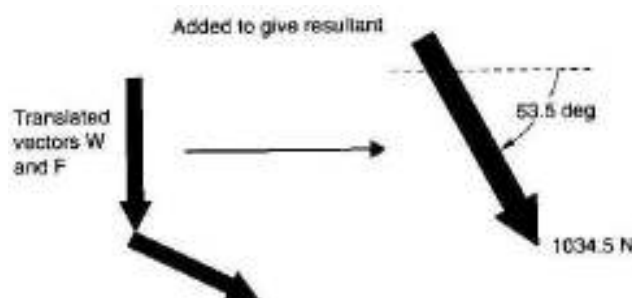
فصل دوم: کمیت‌های برداری و نرده‌ای در مکانیک و تحلیل حرکت ۴۵



شکل ۲-۴. یک فوتبالیست تحت تاثیر دو نیرو: نیروی وزن بدن که به صورت عمودی و در جهت رو به پایین بر روی مرکز ثقل او عمل می‌کند و نیرویی که بازیکن دیگر با کشیدن پیراهن او در جهت رو به پایین با زاویه 25° زیر سطح افق اعمال می‌کند.

خط کش و با دقت $\pm 0.1\text{cm}$ اندازه‌گیری می‌شود، بنابراین جابه‌جایی می‌تواند با دقت $\pm 1\text{m}$ یا در حدود $\pm 1\%$ بیان شود.

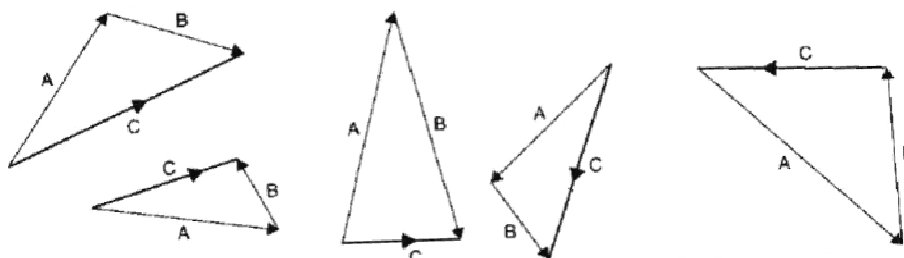
وقتی خود بردارها مشخص نیستند، همیشه نمی‌توان مشخص کرد که دو یا چند بردار چگونه به روش ابتدا-به-انتها با یکدیگر جمع شده‌اند. برای مثال بازیکن فوتبال نشان داده شده در شکل ۲-۴ را در نظر بگیرید که بازیکن دیگری پیراهن او را می‌کشد. در این وضعیت نامتعادل، به دلیل نیروی ترکیبی وزن و نیروی کشش از طرف بازیکن دیگر او در حال افتادن است و ممکن است به خود آسیب برساند. در این مورد، یک یا هر دو نیرو را می‌توان در یک صفحه رسم کرد طوری که آنها از ابتدا به انتها به هم وصل شوند. نتیجه این رسم همراه با بردار برآیند بردارهای F و W ، در شکل ۲-۵ نشان داده شده است.



شکل ۲-۵. دو بردار F و W منتقل شده به صفحه بدون چرخش، و سپس جمع کردن آنها با روش ابتدا-به-انتها و بدست آمدن بردار برآیند.

فصل دوم: کمیت‌های برداری و نرده‌ای در مکانیک و تحلیل حرکت ۴۶

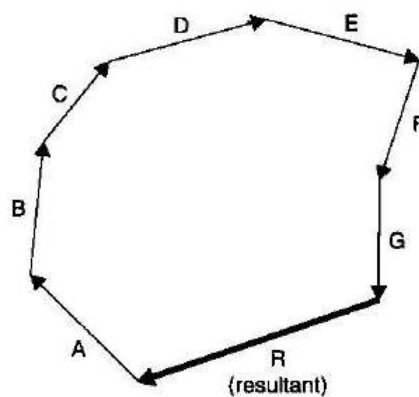
در اینجا تعدادی بردار اختیاری A و B و حاصل جمع آنها یعنی بردار C آورده



شده است:

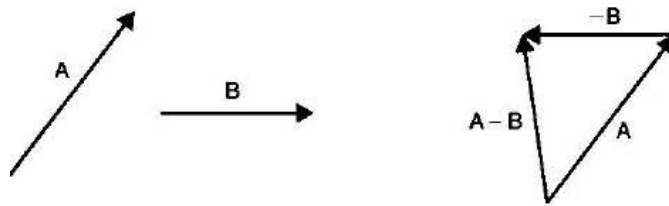
همچنین نتیجه‌گیری می‌شود که می‌توان هر تعدادی از بردارهای A ، B ، C ، D ، M ، N را با قرار دادن آنها به روش ابتدا به انتها و ساختن چند ضلعی نمودارها (شکل ۲-۶) جمع کرد. بردار برآیند R با تکمیل چند ضلعی و ایجاد شکل بسته، بدست می‌آید.

ترتیب قرار گرفتن بردارها در هنگام جمع آنها مهم نیست. دوباره، بردارها برای قرار گرفتن در وضعیت ابتدا-به-انتهای می‌توانند به صفحه شکل منتقل شوند. تفریق بردارها، مانند $A - B$ ، را می‌توان با استفاده از جمع A و B ضربدر کمیت نرده‌ای -1 بدست آورد. اثر این ضرب تغییر دادن جهت بردار B به میزان 180° است (شکل ۲-۷).



شکل ۲-۶. چند ضلعی بردارها

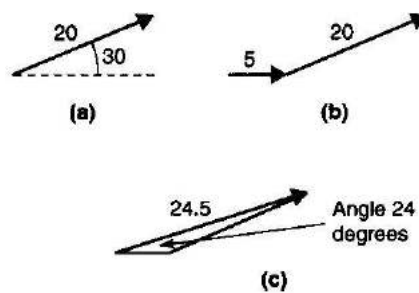
فصل دوم: کمیت‌های برداری و نرده‌ای در مکانیک و تحلیل حرکت ۴۷



شکل ۲-۷. تفریق دو بردار، مانند $A - B$

■ مثال ۲-۱

شخصی توپ بیسبال را با سرعت 20 m/s با زاویه‌ی 30° نسبت به افق پرتاب می‌کند. یک بار دیگر پرتاب مشابه‌ای را تکرار می‌کند، اما این بار قبل از پرتاب با سرعت 5 m/s در جهت پرتاب می‌دود. سرعت برآیند توپ چیست؟



- (a) سرعت توپ را در پرتاب عادی نشان می‌دهد.
 (b) به ترتیب سرعت‌هایی که به موجب دویدن و پرتاب تولید شده‌اند را نشان می‌دهد.
 (c) شکل گیری بردار برآیند را با روش ابتدا-به-انتهای نشان می‌دهد.

سرعت برآیندی که توپ با آن پرتاب می‌شود 24.5 m/s با زاویه‌ی 24° نسبت به افق است که با استفاده از روش ابتدا-به-انتهای و کاغذ شطرنجی محاسبه شده است. (اندازه‌های دقیق پاسخ‌های این سوال 24.46 m/s در زاویه 24.13° است؛ جهت مشاهده روش محاسبه، بخش ۲-۱-۴ را ببینید).

فصل دوم: کمیت‌های برداری و نرده‌ای در مکانیک و تحلیل حرکت ۴۸

۲-۱-۳ جمع دو بردار با زاویای عمود بر هم

وقتی دو بردار با زاویای عمود بر هم عمل می‌کنند، بردار برآیند را می‌توان به راحتی با هر یک از روش‌هایی که قبلاً توضیح داده شد، بدست آورد. همچنین می‌توان جواب را به طور دقیق و با استفاده از قضیه فیثاغورث برای محاسبه‌ی قطر مستطیلی که شکل خواهد گرفت محاسبه نمود.

بردار P را که با OA نشان داده شده است و بردار Q که بر بردار P عمود است و با AB نشان داده شده است را در نظر بگیرید (شکل ۲-۸). در شکل ۲-۸ بردار برآیند R با OB نشان داده شده است. قضیه‌ی فیثاغورث طول OB را به این صورت بیان می‌کند:

$$(OB)^2 = (OA)^2 + (AB)^2$$

یا

$$R^2 = P^2 + Q^2$$

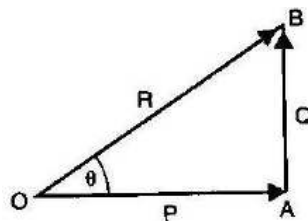
یا

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

اگر اندازه زاویه‌ی θ (تتا) خواسته شود، از این طریق تعیین می‌شود:

$$\tan \theta = OA/AB = P/Q$$

$$\theta = \tan^{-1}(P/Q)$$

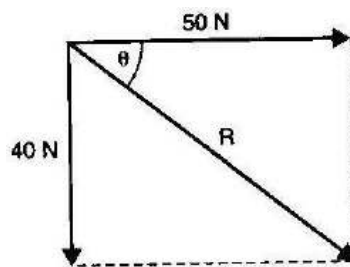


شکل ۲-۸ جمع دو بردار، P و Q ، که بر هم عمود هستند.

فصل دوم: کمیت‌های برداری و نرده‌ای در مکانیک و تحلیل حرکت ۴۹

■ مثال ۲-۲

یک اسکیت باز روی یخ خود را در امتداد سطح افقی زمین یخی با نیروی عقبی 50 N و نیروی جانبی 40 N به جلو می‌راند. نیروی برآیند جلوبرنده چه مقدار است؟



برآیند R را می‌توان براساس بزرگی و جهت محاسبه کرد:

$$R \text{ بزرگی} = \sqrt{(50)^2 + (40)^2} = \sqrt{2500 + 1600} = \sqrt{4100} = 64,03\text{ N}$$

$$\tan \theta = 40/50 = 0,8 \text{ (جهت)}$$

بنابراین:

$$\theta = \tan^{-1}(0,8) = 38,66^\circ \text{ یا } 0,6747 \text{ رادیان}$$

پیوست ۱ که در رابطه با واحدها و ریاضیات است در مورد قضیه فیثاغورث و مثلثات اطلاعات بیشتری را ارائه می‌دهد.

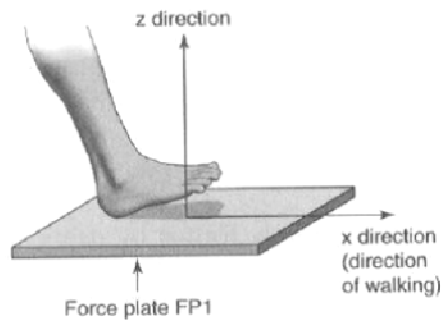
بزرگی و جهت بردارهای نیرو در هنگام راه رفتن

مورد پژوهی ۱-۲

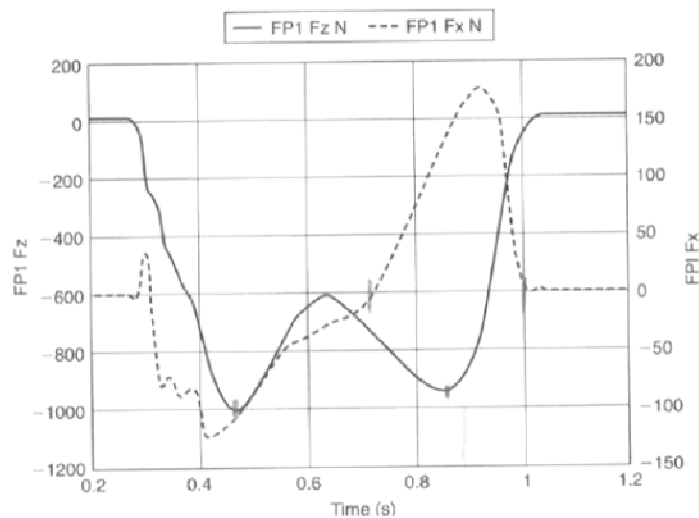
یک صفحه‌ی نیروی $AMTI$ برای اندازه‌گیری نیروی عکس العمل زمین (GRF) شخصی که روی آن راه می‌رفت، استفاده شد. برای این صفحه نیروی خاص، محور z عمودی رو به بالا است، و محورهای x و y در صفحه‌ی افقی قرار دارند. نمودار زیر

فصل دوم: کمیت‌های برداری و نرده‌ای در مکانیک و تحلیل حرکت ۵۰

صفحه‌ی نیرو و ارتباط آن را با محورهای مختصات عمود بر هم نشان می‌دهد. فرد بر روی صفحه نیرو و در جهت مثبت محور x راه می‌رود.

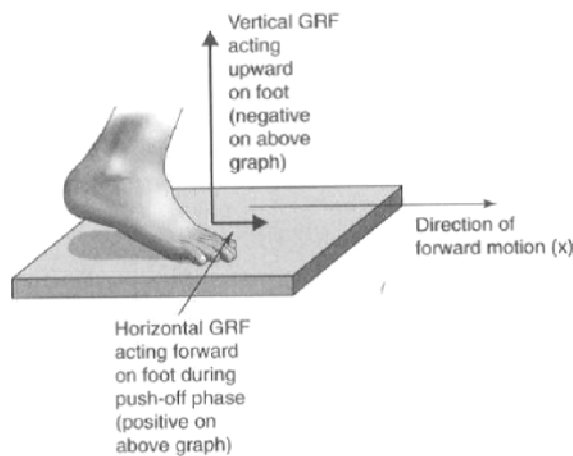


صفحه‌ی نیرو برای نیروی عکس‌العمل زمین ولتاژ خروجی متناظر با مولفه‌های x ، y و z را به صورت تابع زمان تولید می‌کند. در نمودار زیر مولفه‌های اصلی مورد نیاز، یعنی مولفه‌های x و z نیروی عکس‌العمل زمین، با به کار بردن بسامد جمع آوری اطلاعات 60 Hz برای همه‌ی مولفه‌های نیرو، نشان داده شده است.



نمودار بالا، مولفه‌های نیروی F_z و F_x گام راه رفتن طبیعی را نشان می‌دهد. مولفه‌ی عمودی F_z به صورت خط ممتد نشان داده شده است و دارای دو نقطه‌ی حداقلی در زمان‌های تقریبی 0.47 s و 0.86 s است. مولفه‌ی افقی F_x با خط نقطه چین

فصل دوم: کمیت‌های برداری و نرده‌ای در مکانیک و تحلیل حرکت ۵۱



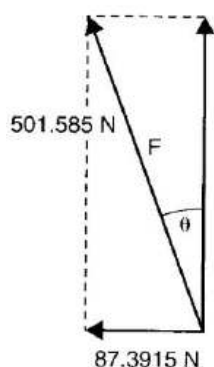
نشان داده شده است و اساساً با مقادیر منفی شروع می‌شود و در زمان تقریبی $0,72s$ به مقادیر مثبت می‌رسد. در این مثال، اهمیت علامت‌های مثبت و منفی مولفه‌های نیرو، با در نظر گرفتن نیروهای که در طول مرحله‌ی جدا شدن پا از زمین (*push-off*) بر کف پای فرد عمل می‌کنند، مشخص می‌شود.

توضیح	مولفه‌ی x نیرو (N)	مولفه‌ی z نیرو (N)	زمان t (s)
۵۰٪ از F_z حداقل	-۸۷,۳۹۱۵	-۵۰۱,۵۸۵	۰,۳۵۸۳
F_z در موضعی در حداقل	-۱۰۲,۳۷۲۹	-۹۹۰,۵۲۵	۰,۴۷
F_z در موضعی در حداقل	-۲۶,۰۳۹۱	-۶۰۵,۵۵۵	۰,۶۴
F_z در موضعی در حداقل	۱۳۴,۱۱۹۲	-۹۳۷,۱۳۵	۰,۸۶
۵۰٪ از F_z حداقل	۱۵۹,۸۰۱۶	-۴۶۹,۲۷	۰,۹۵۳۳

تصویر فوق پا را در طول مرحله‌ی جدا شدن پا از زمین در تماس با صفحه‌ی نیرو نشان می‌دهد. همچنین در شکل، مولفه‌های x و z نیروی عمل کننده بر روی پا نشان داده شده‌اند. جدول ۱-۲ مقادیر F_x و F_z را در پنج زمان منتخب نشان می‌دهد. با استفاده از این مولفه‌های نیرو، می‌توانیم زاویه θ و بزرگی نیروی F را در این زمان‌ها محاسبه کنیم. زاویه θ را در زمان $0,3583s$ می‌توان به این صورت محاسبه کرد:

$$\tan \theta = \frac{۸۷,۳۹۱۵}{۵۰۱,۵۸۵} = ۰,۱۷۴۲$$

فصل دوم: کمیت‌های برداری و نرده‌ای در مکانیک و تحلیل حرکت ۵۲

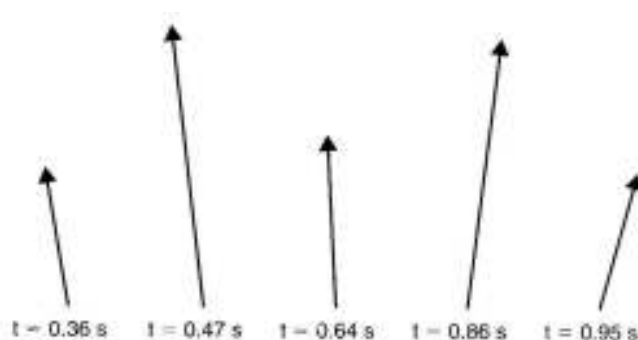


$$\theta = \tan^{-1}(0,1742) = 9,88^\circ$$

می‌توان این زاویه را زاویه مثبت نامید، هر چند چنین تمایزی اختیاری است، امتیاز این نام‌گذاری این است که هرگاه مولفه x مثبت شود، این زاویه منفی می‌شود. بزرگی نیروی عکس العمل زمین که بر روی پا عمل می‌کند عبارت است از:

$$F = \sqrt{(501,585)^2 + (87,3915)^2} = 509,14N$$

همچنین، می‌توان زاویه و بزرگی نیروهای وارده بر روی پا را در سایر زمان‌ها محاسبه کرد، طوری که جدولی از زوایا و بزرگی نیروها بدست آید (جدول ۲-۲). نمودار برداری زیر، بردار نیروی F و زاویه تقریبی انحراف آن را به درجه نشان می‌دهد.



فصل دوم: کمیت‌های برداری و نرده‌ای در مکانیک و تحلیل حرکت ۵۳

جدول ۲-۲. بزرگی و زاویه‌ی بردار نیروی برآیند در پنج زمان منتخب

زاویه‌ی θ (°)	بزرگی GRF (N)	زمان t (s)
۹,۸۸	۵۰۹,۱۴	۰,۳۵۸۳
۵,۹۰	۹۹۵,۸۰	۰,۴۷
۲,۴۶	۶۰۶,۱۱	۰,۶۴
-۸,۱۴	۹۶۴,۶۸	۰,۸۶
-۱۸,۸	۴۹۵,۷۳	۰,۹۵۳۳

۲-۱-۴ قانون متوازی الاضلاع

اگر OA و AD (شکل ۲-۹الف) دو بردار P و Q سازنده‌ی زاویه \square (فی) را نشان دهند، آنگاه برآیند R می‌تواند با استفاده از فرمول کوسینوس محاسبه شود:

$$OD^2 = OA^2 + AD^2 - 2OA \cdot AD \cos(180^\circ - \square)$$

یا، با استفاده از R ، P و Q به ترتیب برای بیان بزرگی‌های OD ، OA و AD :

$$R^2 = P^2 + Q^2 - 2 \cos P \cdot Q (180^\circ - \square)$$

$$R^2 = P^2 + Q^2 - 2P \cdot Q \cos \square \quad \text{یا}$$

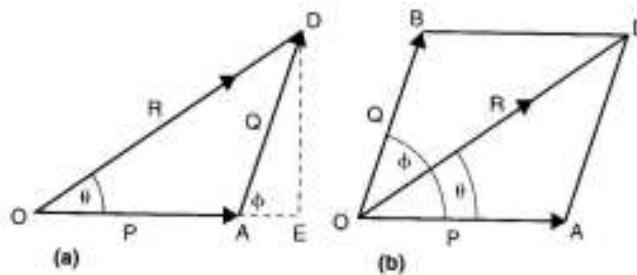
زاویه‌ی θ بین R و P بوسیله‌ی فرمول زیر محاسبه می‌شود:

$$\tan \theta = \frac{DE}{OE} = \frac{Q \sin \phi}{P + Q \cos \phi}$$

زاویه \square بین P و Q به عنوان زاویه خارجی در مثلث دیده می‌شود. به این دلیل و سایر دلایلی که بعداً بحث خواهد شد، اغلب بهتر است برای نشان دادن Q ، $AD = OB$ رسم شود (شکل ۲-۹ب) طوری که متوازی الاضلاع کامل شکل بگیرد، و قطر OD نشان دهنده‌ی R است. بنابراین، اگر OA و OB نشان دهنده اندازه و جهت برآیند دو بردار P و Q باشند، بزرگی و جهت برآیند آنها R بوسیله‌ی قطر OD متوازی الاضلاع $OADB$ نشان داده می‌شود.

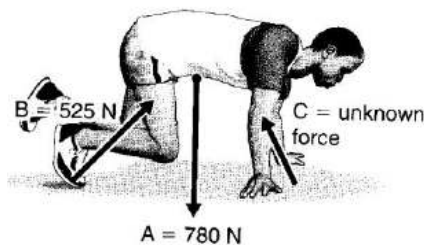
وقتی با قانون کوسینوس سر و کار داریم، ضروری است تا زوایا و طول اضلاع مثلث را با استفاده از سیستم منطقی علائم مشخص کنیم و آنها را با فرمول‌های مناسب به هم ارتباط دهیم. می‌توان این موضوع را با ارائه یک مثال شرح دهیم. یک دونه‌ی

فصل دوم: کمیت‌های برداری و نرده‌ای در مکانیک و تحلیل حرکت ۵۴



شکل ۲-۹. (A) و (B) قانون متوازی الاضلاع.

سرعت را در حالت آماده در نظر بگیرید که قبل از شلیک تپانچه بر روی بلوک‌های استارت قرار گرفته است. نیروهایی عمل کننده بر روی دونه شامل وزن او که به صورت عمودی رو به پایین عمل می‌کند، نیروی عکس‌العمل در بلوک‌ها، و نیروی عکس‌العملی که زمین بر دست‌های او اعمال می‌کند، هستند. در این مثال که در شکل ۲-۱۰ نشان داده شده است، A نشان دهنده‌ی وزن دونه است، B نشان دهنده نیروی عکس‌العملی است که بوسیله‌ی بلوک‌ها به پاها (مجموع نیروها به دو پای چپ و راست) وارد می‌شود، و C نشان دهنده مجموع نیروی عکس‌العملی است که توسط زمین به دست‌ها منتقل می‌شود.



شکل ۲-۱۰. دونه سرعت بر روی بلوک‌های استارت

تحت تاثیر سه نیرو است: وزن، A ، که mv مرکز ثقل اثر می‌کند؛ نیروی عکس‌العمل، B ، که از بلوک‌های استارت بر روی بدن او اعمال می‌شود و دارای بزرگی $525N$ با زاویه‌ی 75° نسبت به افق است؛ و C ، نیروی نامعلوم است که با بزرگی و زاویه‌ی نامشخص اعمال می‌شود. جرم دونه $78kg$ است، و بنابراین بزرگی A در حدود $780N$ است. بلوک‌های استارت با کشش سنج‌ها مجهز شده‌اند و اندازه‌گیری دقیق نیروی B را فراهم می‌کنند.

فصل دوم: کمیت‌های برداری و نرده‌ای در مکانیک و تحلیل حرکت ۵۵

اگر دونه‌ی سرعت ثابت و بدون حرکت باشد و شتابی نداشته باشد، سه نیروی A ، B و C در تعادل خواهند بود (فصل ۳ را ببینید) و می‌توانند مثلی بسته از نیروهایی را شکل دهند؛ که برآیند کلی آنها صفر خواهد بود. این حقیقت همراه با قانون کسینوس، ما را قادر به یافتن نیروی نامعلوم C می‌کند.

نیروهای A ، B و C می‌توانند در نمودار بردارها (شکل ۱۱-۲ الف) نشان داده شوند. شکل ۱۱-۲ ب نامگذاری ترجیحی عمومی هر مثلث را برای به کارگیری قانون کسینوس نشان می‌دهد. در هنگام به کارگیری قانون کسینوس، بر اساس شکل ۱۱-۲ ب، فرمول‌ها را برای قانون کسینوس به این صورت می‌توان نوشت:

$$A^2 = B^2 + C^2 - 2BC \cos \alpha$$

$$B^2 = A^2 + C^2 - 2AC \cos \beta$$

$$C^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cos \gamma$$

توصیه می‌شود که این قوانین برای جلوگیری از اشتباه و فراهم سازی پایه‌های منطقی برای محاسبات، حفظ شده و به این شکل به کار گرفته شوند. همچنین این قانون به صورت خلاصه در پیوست ۱ آورده شده است.

در شکل ۱۱-۲ الف بزرگی C مجهول است. با به کارگیری قانون کسینوس این مقدار را می‌توان بدست آورد:

$$C^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cos \gamma$$

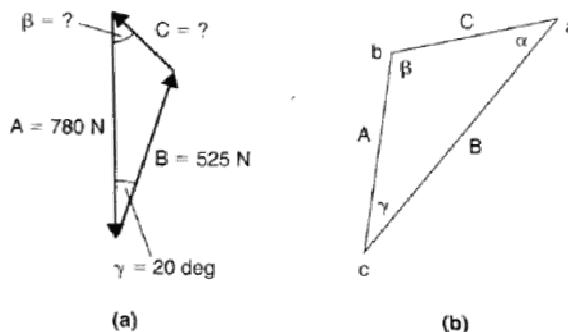
$$C^2 = 2(780)^2 + (525)^2 - 2(780)(525) \cos(20^\circ)$$

$$C^2 = 608400 + 275625 - 769608.3 = 114416.7$$

$$C = 338.25N$$

در بعضی از کتاب‌های مرجع، بزرگی بردار C به صورت $|C|$ نوشته می‌شود. این کتاب بردار را با قلم ایتالیک پر رنگ C و بزرگی آن را با C یا $|C|$ نشان می‌دهد. برای بدست آوردن زاویه‌ی عمل C در دست‌های دونه، می‌توان دوباره قانون کسینوس را به کار برد و یا از روش‌های متنوع دیگر استفاده کرد. با به کارگیری قانون کسینوس:

فصل دوم: کمیت‌های برداری و نرده‌ای در مکانیک و تحلیل حرکت ۵۶



شکل ۲-۱۱. (الف) نیروهای A ، B و C با برآیند صفر بر

روی بدن دهنده اعمال می‌شوند. نیروی C نامعلوم است و می‌توان آن را با استفاده از قانون کسینوس محاسبه کرد. مشروط به این که دهنده ساکن بوده و شتابی نداشته باشد، محاسبه‌ی C براساس قانون کسینوس صحیح است. (ب) نامگذاری عمومی مثلث قبل از به کارگیری قانون کسینوس. طول اضلاع مثلث به صورت اختیاری با نشانه‌های A ، B و C مشخص می‌شوند. زاویه مقابل ضلع A با α و زاویه مقابل ضلع B با β و زاویه مقابل ضلع C با γ نامگذاری می‌شوند. این (نامگذاری) باید همراه با دقت باشد، به طوری که فرمول قانون کسینوس بتواند به صورت صحیح به کار گرفته شود. برای مثال اگر زوایای α و β با هم عوض شوند، در هنگام محاسبه طول‌ها و زوایا اشتباه رخ خواهد داد. اگر مایل باشید می‌توانید سه گوشه را با a ، b و c نامگذاری کنید، مثلاً زاویه‌ی مقابل ضلع A را α نامید و بقیه نیز به همین ترتیب.

$$\cos \beta = \frac{-B^2 + A^2 + C^2}{2AC} = \frac{-275625 + 608400 + 114416,7}{2(780)(338,25)}$$

$$= \frac{447191,7}{528060}$$

$$= 0,8468$$

$$\beta = 32,1^\circ$$

نیروی عکس‌العملی که از سوی دست‌های دهنده به بدن او وارد می‌شود دارای

بزرگی $338N$ است و در زاویه $57/9$ نسبت به سطح افق می‌باشد.

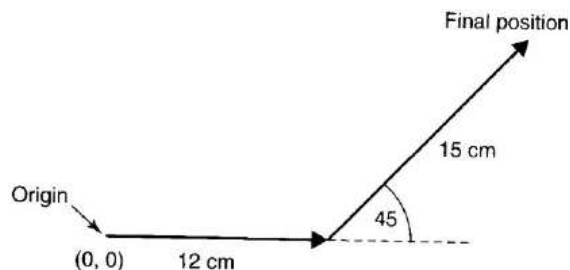
فصل دوم: کمیت‌های برداری و نرده‌ای در مکانیک و تحلیل حرکت ۵۷

■ مثال ۲-۳

یک قایق بادبانی 1200m به سمت شرق و سپس 1500m به سمت شمال شرق حرکت می‌کند. جابه‌جایی کل چقدر است؟

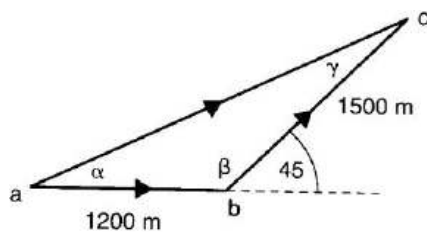
راه حل الف: روش نموداری

نمودار برداری را بر روی کاغذ شطرنجی رسم کنید، به گونه‌ای که دو جابه‌جایی انجام شده را با مقاس نشان دهد (برای مثال به ازای هر 100m جابه‌جایی 1cm رسم شود). موقعیت اولیه‌ی حرکت قایق می‌تواند در گوشه پائین و سمت چپ کاغذ شطرنجی به عنوان مبدأ مختصات $(0,0)$ در نظر گرفته شود.



با استفاده از گونیامتر، زاویه‌ی 45° بردار دوم که 1500m است، به صورت دقیق رسم می‌شود. اکنون بردار برآیند جابه‌جایی بوسیله‌ی خط (نشان داده نشده است) وصل کننده‌ی موقعیت ابتدایی به انتهای نمایش داده می‌شود. با استفاده از خط کش مشخص می‌شود که طول این مسیر 25cm (یا $2500\text{m} \pm 10\text{m}$) است، و زاویه‌ی بردار برآیند نسبت به سطح افق $1^\circ \pm 25^\circ$ است.

راه حل B: قانون کسینوس



فصل دوم: کمیت‌های برداری و نرده‌ای در مکانیک و تحلیل حرکت ۵۸

زاویه β عبارت است از $135^\circ = (180 - 45)$. α و γ مجهول هستند. اگر طول $bc = A$ $ac = B$ $ab = C$ آنگاه:

$$B^2 = A^2 + C^2 - 2AC \cos \beta \text{ (قانون کسینوس)}$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} B^2 &= 1200^2 + 1500^2 - 2(1200)(1500) \cos(135) \\ B^2 &= 1440000 + 2250000 - (3600000)(-0,7071) \\ &= 1440000 + 2250000 + 2545560 \\ &= 6235560 \\ B &= 2497,1m \end{aligned}$$

برای کامل شدن جواب، به منظور مشخص ساختن جهت برآیند ac باید یکی از زوایای α یا γ (ترجیحاً α) مشخص شود. این زاویه می‌تواند با استفاده از قانون کسینوس به این شکل محاسبه شود:

$$\begin{aligned} A^2 &= B^2 + C^2 - 2BC \cos \alpha \\ \cos \alpha &= \frac{-A^2 + B^2 + C^2}{2AC} = \frac{-2250000 + 6235560 + 1440000}{2(2497,1)(1200)} \\ &= \frac{5642560}{5993040} \\ &= 0,9053 \\ \alpha &= \cos^{-1}(0,9053) = 25,1^\circ \end{aligned}$$

یا، با روش دیگر، می‌توانیم آن را به این شکل محاسبه کنیم:

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= \frac{(BC) \sin \phi}{(AB) + (BC) \cos \phi} = \frac{1500 \sin(45)}{1200 + 1500 \cos(45)} = \frac{1060,66}{2260,66} \\ &= 0,4692 \end{aligned}$$

فصل دوم: کمیت‌های برداری و نرده‌ای در مکانیک و تحلیل حرکت ۵۹

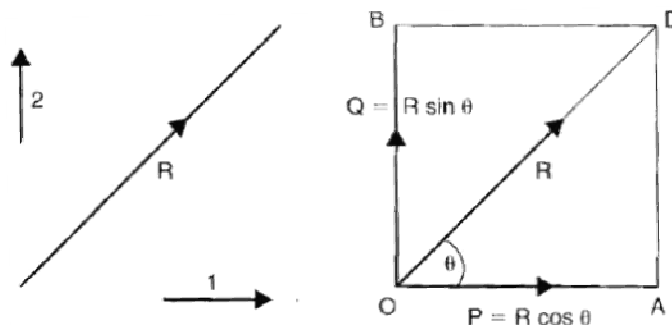
$$\alpha = \cos^{-1}(0,4692) = 25,1^\circ$$

۲-۲ تجزیه‌ی بردارها به مولفه‌ها

۱-۲-۲ تجزیه یک بردار به دو بردار عمود برهم

ما می‌توانیم با اجرای وارونه‌ی قانون متوازی الاضلاع هر بردار را به دو بردار دیگر در هر جهتی تجزیه کنیم. در این روش ابتدا قطر متوازی الاضلاع را رسم می‌کنیم، سپس اضلاع مجاور قطر را در جهت‌های انتخابی رسم می‌کنیم. حالتی که اهمیت زیادی دارد زمانی است که جهت دو بردار عمود بر یکدیگر هستند؛ در این زمان دو بردار بدست آمده مولفه‌های بردار اصلی نامیده می‌شوند. هنگام کار در سه بعد، یک بردار می‌تواند به سه مولفه در امتداد سه محور عمود بر هم تجزیه شوند.

بنابراین، با داشتن بردار مشخص R ، برای یافتن مولفه‌های عمود بر یکدیگر در دو جهت ۱ و ۲، OD را با مقیاس معین رسم می‌کنیم تا R را نشان دهد، و مستطیل $OADB$ جایی تشکیل می‌شود که OA نشان دهنده‌ی P است، یعنی مولفه در جهت ۱، و OB نشان دهنده‌ی Q است، یعنی مولفه در جهت ۲. این رویه به صورت خلاصه در شکل ۱۲-۲ خلاصه شده است.



شکل ۱۲-۲. تجزیه‌ی R در دو جهت ۱ و ۲ با زوایای عمود.

در اینجا:

$$OA/OD = \cos \theta$$

فصل دوم: کمیت‌های برداری و نرده‌ای در مکانیک و تحلیل حرکت ۶۰

$$P = R \cos \theta \quad یا \quad P/R = \cos \theta$$

و

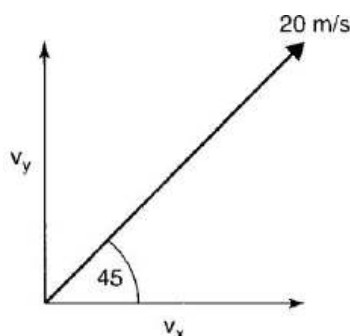
$$OB/OD = AD/OD = \sin \theta$$

$$Q = R \sin \theta \quad یا \quad Q/R = \sin \theta$$

همچنین برای آشنایی با خلاصه‌ی روش‌های ریاضیاتی پیوست ۱ را ببینید.

■ مثال ۲-۴

یک نیزه با سرعت اولیه‌ی 20 m/s و با زاویه‌ی 45 نسبت به سطح افق پرتاب شده است. این سرعت را به دو مولفه‌ی عمودی و افقی تجزیه کنید.



در نمودار فوق، مولفه‌های افقی و عمودی بدست آمده از تجزیه به ترتیب با v_x و v_y نشان داده شده‌اند.

$$v_x = 20 \cos 45 = 20(0,7071) = 14,14 \text{ m/s}$$

و

$$v_y = 20 \sin 45 = 20(0,7071) = 14,14 \text{ m/s}$$

در این مثال، v_x و v_y برابرند. سرعت اصلی 20 m/s که با زاویه‌ی 45 عمل می‌کند، به صورت کلی با عمل توأم مولفه‌های v_x و v_y برابر است و می‌تواند در تمام محاسبات با آنها جایگزین شود. با این حال باید تاکید کرد که تنها می‌توان یک بار

فصل دوم: کمیت‌های برداری و نرده‌ای در مکانیک و تحلیل حرکت ۶۱

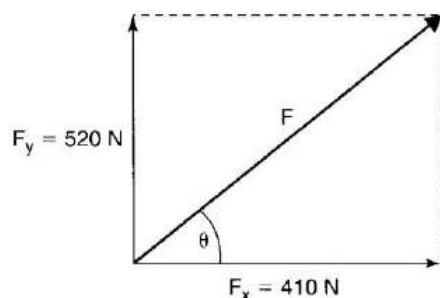
تجزیه کرد. همچنین وقتی مولفه‌ها بدست آمدند، بردار اصلی باید فراموش شود و از آن چشم پوشی کرد، زیرا توسط این مولفه‌ها جایگزین شده است.

■ مثال ۲-۵

پای یک ورزشکار GRF های افقی 410 N و عمودی 520 N تولید می‌کند. بزرگی و زاویه‌ی نیروی عکس‌العمل زمین نسبت به سطح افق چقدر است؟

جواب

در این مورد، زاویه‌ی θ که نیرو با سطح افق می‌سازد نامشخص است.



بزرگی نیروی F بدین شکل تعیین می‌شود:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{410^2 + 520^2} \quad (\text{براساس قضیه‌ی فیثاغورث})$$

$$F = 662,2\text{ N}$$

زاویه‌ای که F در آن عمل می‌کند بدین شکل تعیین می‌شود:

$$\tan \theta = \frac{520}{410} = 1,268$$

$$\theta = \tan^{-1}(1,268) = 51,7^\circ$$

فصل دوم: کمیت‌های برداری و نرده‌ای در مکانیک و تحلیل حرکت ۶۲

۲-۲-۲ بردارهای واحد در سه بعد

بردارها می‌توانند به راحتی بر اساس بردارهای واحد (یعنی بردارهایی که بزرگی آنها برابر یک است) در راستای محورهای مختصات انتخابی، بیان شوند. با توجه به محورهای α ، γ و z عمود برهم و در سمت راست (شکل ۲-۱۳)، بردارهای واحد \mathbf{i} ، \mathbf{j} و \mathbf{k} نامیده می‌شوند، و امتداد آنها به ترتیب در جهت مثبت محورهای α ، γ و z است. یعنی هر بردار \mathbf{V} را می‌توان به این صورت نوشت:

$$\mathbf{V} = V_x \mathbf{i} + V_y \mathbf{j} + V_z \mathbf{k}$$

در اینجا V_x ، V_y ، و V_z به ترتیب مولفه‌های \mathbf{V} در طول محورهای α ، γ و z هستند. این موضوع گاهی به این صورت خلاصه می‌شود:

$$\mathbf{V} = (V_x, V_y, V_z)$$

به این معنی که بردارها را می‌توان به این صورت بیان کرد: V_x واحد به راست، V_y واحد به بالا و V_z واحد عمود بر دو بردار اول. همچنین می‌توان نتیجه گرفت که بزرگی بردار \mathbf{V} می‌تواند به این صورت بیان شود:

$$V^2 = V_x^2 + V_y^2 + V_z^2 \quad \text{یا} \quad V = (V_x^2 + V_y^2 + V_z^2)^{1/2}$$

برای جمع دو بردار \mathbf{A} و \mathbf{B} بردار برآیند را می‌توان به این صورت نوشت:

$$\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = (A_x + B_x) \mathbf{i} + (A_y + B_y) \mathbf{j} + (A_z + B_z) \mathbf{k}$$

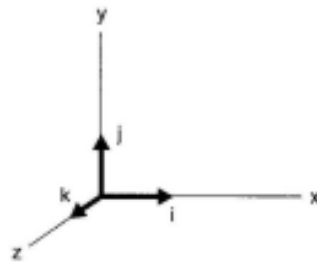
۲-۳ ضرب بردارها

۲-۳-۱ ضرب یک بردار در یک کمیت نرده‌ای

برای ایجاد بردار جدید، یک بردار می‌تواند در یک کمیت نرده‌ای ضرب شود. بنابراین، اگر بردار \mathbf{A} و کمیت نرده‌ای c را داشته باشیم، آنگاه ضرب این دو، بردار جدید $c\mathbf{A}$ است. ویژگیهای $c\mathbf{A}$ عبارتند از:

(۱) اگر c مثبت باشد، جهت آن با بردار اولیه \mathbf{A} یکسان است، اگر c منفی

فصل دوم: کمیت‌های برداری و نرده‌ای در مکانیک و تحلیل حرکت ۶۳

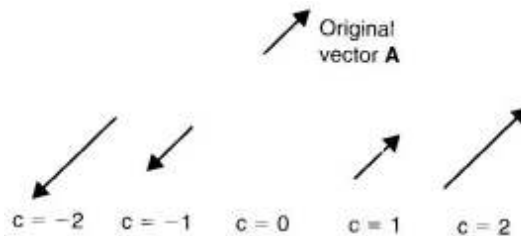


شکل ۲-۱۳. بردارهای واحد در جهت راست محورهای x ، y و z

باشد، جهت آن عکس جهت بردار A است. اگر $c = 0$ ، به طور قطع cA صفر می‌شود.

(۲) بزرگی آن بوسیله‌ی بزرگی c افزایش یا کاهش می‌یابد. طوری که اگر $c = 0.5$ باشد، آنگاه بزرگی بردار جدید یک دوم بزرگی بردار A خواهد بود. اگر $c = -3$ باشد، آنگاه بزرگی cA سه برابر A خواهد بود.

شکل ۲-۱۴ یک بردار اختیاری را نشان می‌دهد و اینکه چگونه توسط پنج کمیت نرده‌ای c تغییر می‌کند.



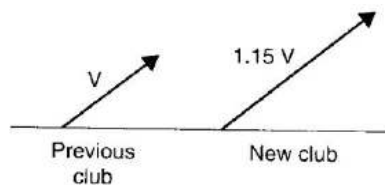
شکل ۲-۱۴. نمایش اثر ضرب کمیت‌های نرده‌ای مثبت و منفی در بردار A . بردارها در نیمه‌ی پائین شکل، نمودار cA را برای مقادیر $c = 2, 1, 0, -1, -2$ نشان می‌دهد.

سرعت بیشتر با چوب جدید گلف

مورد پژوهی ۲-۲

طراحی جدید چوب گلف، بازیکنان حرفه‌ای را قادر می‌سازد تا به سرعتی بیش از ۱۵٪ سرعت میانگین بهترین چوب‌های گلف قبلی دست یابند. در مقایسه با سرعت چوب‌های قبلی $44.72 m/s$ ، سرعت میانگین با چوب‌های جدید $51.42 m/s$ است. روی

فصل دوم: کمیت‌های برداری و نرده‌ای در مکانیک و تحلیل حرکت ۶۴



همرفته جهت ضربه بدون تغییر باقی می‌ماند.

سرعت توپ بیسبال در زمان‌های مختلف

مورد پژوهی ۳-۲

در یک بازی بیس بال، پرتاب کننده توپ را پرتاب می‌کند. مولفه‌های سرعت توپ در سه زمان متوالی در جدول ۳-۲ آورده شده‌اند. در $t = 0.675s$ توپ در دستان پرتاب کننده قرار داشته و به سمت پایین شتاب می‌گیرد. در $t = 0.800s$ و $t = 0.925s$ توپ در هوا قرار داشته و در حال نزدیک شدن به زمین است. بردارهای سرعت در این زمان‌ها را می‌توان به این صورت نوشت:

$$V = -2.733i - 2.527j - 1.863k$$

$$V = -4.008i - 4.062j - 6.741K$$

$$V = -3.911i - 3.961j - 7.405K$$

جدول ۳-۲ مولفه‌های x ، y و z سرعت توپ در سه زمان منتخب

V_z (m/s)	V_y (m/s)	V_x (m/s)	زمان t (s)
-1.863	-2.527	-2.733	0.675
-6.741	-4.062	-4.008	0.800
-7.405	-3.961	-3.911	0.925

بزرگی بردارهای سرعت برآیند به ترتیب 4.162 ، 8.628 و $9.264 m/s$ هستند.

■ مثال ۲-۶

یک توپ دو نیرو را تحمل می‌کند: وزن $W = 5N$ که به صورت عمودی و رو به پایین عمل می‌کند و نیروی پسا که در خلاف جهت سرعت توپ عمل می‌کند. سرعت توپ با $v = 15i + 18j - 20k$ تعیین می‌شود. نیروی پسا به این صورت تعیین می‌شود:

فصل دوم: کمیت‌های برداری و نرده‌ای در مکانیک و تحلیل حرکت ۶۵

$$F_d = 0.01 \times (\text{تندی})^2$$

وزن توپ و نیروی پسا را بر اساس بردارهای واحد i, j, k را محاسبه کنید. بر اساس بردارهای واحد، نیروی برآیند بر روی توپ چیست؟

جواب

وزن توپ را می‌توان به این صورت نوشت:

$$W = 0i + 0j - 5k$$

تندی توپ بوسیله‌ی بزرگی سرعت آن تعیین می‌شود:

$$v = \sqrt{(15)^2 + (18)^2 + (-20)^2} = \sqrt{225 + 324 + 400} = \sqrt{949} = 30.8 \text{ m/s}$$

بنابراین، بزرگی نیروی پسا به این صورت بدست می‌آید:

$$F_d = 0.01 \times (30.8)^2 = 9.49 \text{ N}$$

نیروی پسا را می‌توان بر اساس بردارهای واحد به این صورت نوشت:

$$F_d = (\text{بزرگی}) \times \hat{v} \text{ در اینجا } \hat{v} \text{ بردار واحد در امتداد جهت } v \text{ است.}$$

بردار واحد در امتداد جهت سرعت خواهد بود:

$$\hat{v} = \frac{15i + 18j - 20k}{30.8}$$

$$= 0.487i + 0.584j - 0.649k$$

می‌توانیم نیروی پسا را به این صورت بنویسیم:

$$F_d = 9.49 \times (0.487i + 0.584j - 0.649k)$$

$$F_d = 4.621i + 5.542j - 6.162k$$

نیروی کل می‌تواند به این صورت نوشته شود:

$$F = W + F_d$$

$$F = 4.621i + 5.542j - 11.162k$$

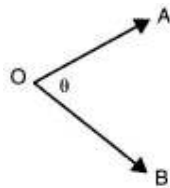
فصل دوم: کمیت‌های برداری و نرده‌ای در مکانیک و تحلیل حرکت ۶۶

۲-۳-۲ حاصلضرب نرده‌ای دو بردار

اگر دو بردار A و B را داشته باشیم، آنگاه حاصلضرب نرده‌ای (یا داخلی) آنها به این صورت تعریف می‌شود:

$$A \cdot B = A B \cos \theta$$

در اینجا A و B بزرگی بردارها هستند و زمانی که مانند شکل ۲-۱۵ انتهای آنها به هم وصل می‌شوند، θ کوچکترین زاویه‌ی ($< 180^\circ$) بین آنها است.



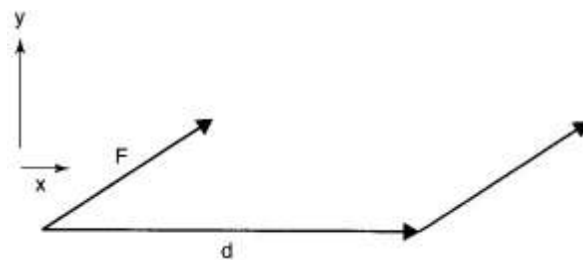
شکل ۲-۱۵. دو بردار A و B و زاویه‌ی بین آنها

بدلیل اینکه θ ، A و B همگی نرده‌ای هستند از اینرو حاصلضرب نرده‌ای $A \cdot B$ (بخوانید " A نقطه B ")، حاصلضرب نرده‌ای نامیده می‌شود. اگر دو بردار براساس بردارهای واحد بیان شوند، آنگاه:

$$A \cdot B = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = \text{حاصلضرب نرده‌ای}$$

این موضوع در مکانیک کاربرد دارد، بویژه هنگامی که کار انجام شده بوسیله‌ی نیرو، F ، که باعث جابه‌جایی، d ، می‌شود (شکل ۲-۱۶). بنابراین ما باید کار انجام شده، W ، را به عنوان حاصلضرب نرده‌ای F و d در نظر بگیریم:

$$W = F \cdot d = F d \cos \theta$$



شکل ۲-۱۶. کار انجام شده توسط نیروی F که با زاویه‌ی θ

نسبت به زمین عمل می‌کند، عبارت است از $W = F \cdot d$.

فصل دوم: کمیت‌های برداری و نرده‌ای در مکانیک و تحلیل حرکت ۶۷

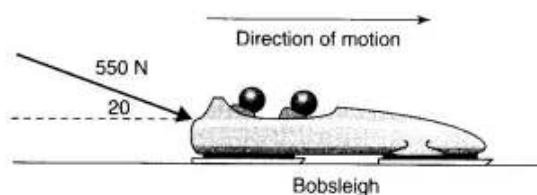
اگر F و d با استفاده از بردارهای واحد بیان شوند، پس کار انجام شده عبارت است از:

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{d} = F_x d_x + F_y d_y + F_z d_z$$

بنابراین کار انجام شده می‌تواند به عنوان بزرگی نیرو (F) ضرب در مسافت طی شده در جهت نیرو ($d \cos \theta$) در نظر گرفته شود. اگر F و d در یک خط مستقیم واقع شوند، و ($\theta = 0$)، پس $\cos \theta = 1$ ، و کار انجام شده دقیقاً برابر نیرو ضرب در مسافت طی شده است.

■ مثال ۲-۷

مردی که لوج را هل می‌دهد، نیروی 550 N را که با زاویه‌ی 20° نسبت به افق عمل می‌کند، اعمال می‌کند. کار انجام شده بر روی لوج در مسافت 20-m در راستای حرکت لوج چقدر است؟



جواب

کار انجام شده عبارت است از $\mathbf{F} \cdot \mathbf{d} = F d \cos \theta$ ، در اینجا θ زاویه بین F و d است. d بردار جابه‌جایی موازی با جهت حرکت لوج است. بنابراین، کار انجام شده عبارت است از:

$$W = 10336.7 \text{ ژول (یا نیوتن متر)}$$

■ مثال ۲-۸

مرد هل دهنده‌ی لوج، یک نیروی 516 N افقی و یک نیروی 188 N عمودی رو به پائین را اعمال می‌کند. لوج به صورت افقی 20 m به طرف پائین مسیر حرکت می‌کند. کار انجام شده بر روی لوج چقدر است؟

فصل دوم: کمیت‌های برداری و نرده‌ای در مکانیک و تحلیل حرکت ۶۸

جواب

با استفاده از بردارهای واحد i ، j و k نیروی اعمال شده بر لوج را می‌توان به این صورت نوشت:

$$\mathbf{F} = 516.8\mathbf{i} + 188.1\mathbf{j} - 0\mathbf{k}$$

با فرض اینکه لوج در راستای محور افقی x حرکت می‌کند و محور y جهت عمودی رو به بالا است.

جابه‌جایی لوج را می‌توان به این صورت نوشت:

$$\mathbf{d} = 20\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$$

پس کار انجام شده به این شکل محاسبه می‌شود:

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{d} = F_x d_x + F_y d_y + F_z d_z = 516.8(20) - 188.1(0) + 0(0)$$

$$W = 10336J$$

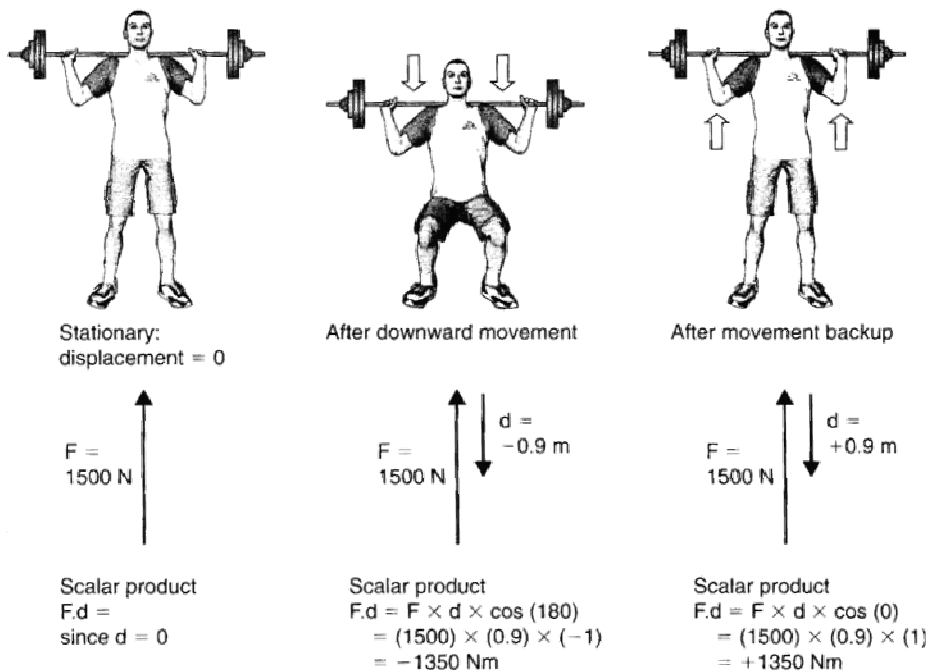
حرکت رو به بالا و رو به پایین در چمباتمه

مورد پژوهی ۲-۴

یک وزنه بردار برای شرکت در مسابقه، حرکت چمباتمه را با وزنه ۱۵۰ کیلوگرمی انجام می‌دهد. در حرکت رو به پایین، او اجازه می‌دهد تا با فلکشن زانوها وزنه با تندی ثابت و به آهستگی به پایین‌ترین سطح خود برسد. سپس وزنه را با تندی ثابت به سمت بالا بلند می‌کند تا اینکه پاهای او صاف شود. کل جابه‌جایی انجام شده $0.9m$ به پایین و سپس $0.9m$ به بالا است. وزنه بردار نیروی \mathbf{F} را در جهت بالا به هالتر وارد می‌کند، که در خلال حرکت رو به پایین و روبه بالا تقریباً ثابت است و بزرگی آن در صورت کوچک بودن شتاب‌های رو به بالا و رو به پایین، تقریباً برابر وزنه‌ی روی هالتر (وزن هالتر و وزنه) است.

این تصاویر نشان می‌دهند که پس از حرکت رو به پایین، نیروی \mathbf{F} بر روی هالتر، و جابه‌جایی \mathbf{d} هالتر در امتداد یک خط مستقیم هستند اما درست در جهت مخالف هم. در این مورد، زاویه θ برابر 180° است، کسینوس این زاویه -1 است، و کار انجام شده توسط وزنه بردار بر روی هالتر $1350Nm$ یا -1350 ژول است.

فصل دوم: کمیت‌های برداری و نرده‌ای در مکانیک و تحلیل حرکت ۶۹



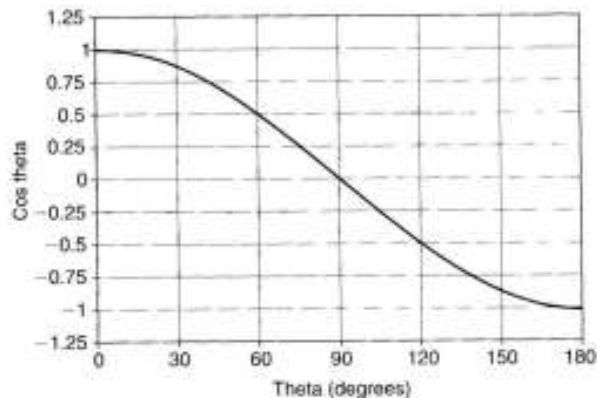
پس از حرکت رو به بالا، جابه‌جایی هالتر اکنون رو به بالا است و جهت F و d یکسان است. نتیجه گیری می‌شود که اکنون زاویه‌ی θ برابر با 0° است، کسینوس این زاویه ۱ است، و کار انجام شده توسط وزنه بردار بر روی هالتر 1350 Nm یا 1350 ژول است.

در مورد حرکت رو به پایین، کار انجام شده توسط وزنه بردار منفی است، و به صورت طبیعی این سوال مطرح است که این منفی بودن چگونه اتفاق می‌افتد و به چه معنی است. درک این موضوع مشکل است، اما درک این موضوع با گفتن اینکه هالتر بر روی وزنه بردار کار مثبت انجام می‌دهد، آسان تر می‌شود. در خلال حرکت رو به بالا علامت مثبت درست است، و وزنه بردار روی هالتر کار مثبت انجام می‌دهد. هرچند که ممکن است این مفهوم کمی مصنوعی به نظر رسد، اما در انقباض‌های عضلانی درون‌گرا و برون‌گرا کاربرد مهمی دارد. این ایده که کار انجام شده منفی است بصورت واقعی زمانی اتفاق می‌افتد که زاویه θ بیشتر از 90° باشد. در نمودار زیر رابطه‌ی تابعی کسینوس θ با θ برای مقادیر θ بین صفر تا 180° نشان داده شده است، در اینجا به

فصل دوم: کمیت‌های برداری و نرده‌ای در مکانیک و تحلیل حرکت ۷۰

روشنی می‌توان مشاهده کرد که کسینوس θ بین 90° تا 180° منفی است. بر حسب اتفاق، گاهی اوقات زوایا به رادیان بیان می‌شوند؛ اگر نیاز به تبدیل این دو به یکدیگر دارید، عامل مشترک تبدیل عبارت است از:

$$1 \text{ رادیان} = 57,29^\circ$$



اندازه‌های رادیان در فصل‌های مرتبط با حرکت چرخشی به صورت کامل توضیح داده شده است.

۲-۳-۳ حاصلضرب برداری دو بردار

حاصلضرب برداری یا خارجی دو بردار A و B به صورت یک بردار دیگر تعریف می‌شود:

$$C = A \times B$$

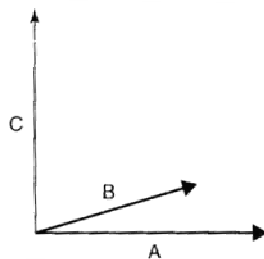
بزرگی آن عبارت است از:

$$|C| = |A||B| \sin\theta$$

در اینجا θ زاویه‌ی (کوچکتر از 180°) بین A و B است، و امتداد آن طبق قانون دست راست عمود بر هر دو بردار A و B است (شکل ۲-۱۷).

اگر زاویه‌ی θ برابر 0 باشد، آنگاه حاصلضرب خارجی دو بردار صفر است. از این رو برای مثال $A \times A = 0$. همچنین اگر زاویه بین بردارها قائمه باشد، $\theta = 90^\circ$ ، آنگاه $A \times B = AB$ ، یعنی حاصلضرب بزرگی‌های دو بردار.

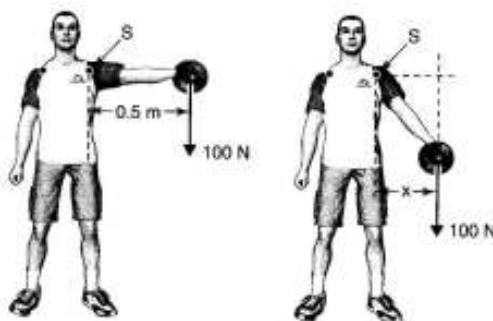
فصل دوم: کمیت‌های برداری و نرده‌ای در مکانیک و تحلیل حرکت ۷۱



شکل ۲-۱۷. بردار $C = A \times B$ بر سطح در برگیرنده‌ی A و B عمود است؛ جهت بردار C با استفاده از قانون دست راست تعیین می‌شود. انگشت شست دست راست در امتداد C قرار گیرد؛ و انگشتان دست راست در اطراف از A به B جمع می‌شوند. ممکن است تصور کنید که A و B در صفحه‌ی کف زمین قرار دارند. پس C باید در هوا بصورت عمودی رو به بالا خواهد بود.

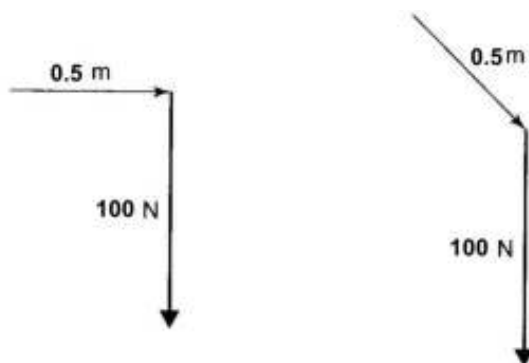
این مفهوم بویژه هنگام اندازه‌گیری گشتاور تولید شده توسط یک نیرو، مفید است. شخصی را در نظر بگیرید که جرم 10 kg را با دست باز نگه داشته است (شکل ۲-۱۸). می‌توانیم بردار r را تعریف کنیم تا جابه‌جایی نقطه‌ی اعمال وزن W را نسبت به مفصل شانه نشان دهیم. بنابراین گشتاور نیرو بوسیله‌ی فرمول زیر تعیین می‌شود:

$$M = r \times W$$



شکل ۲-۱۸. شخصی وزنه‌ی 100 N را با دست باز نگه داشته است. طول دست 0.5 m است. در شکل سمت چپ، دست در صورت افقی قرار گرفته است، و (فاصله‌ی) خط عمل وزنه از مفصل شانه 0.5 m است. در سمت راست، دست به سمت پائین آمده به طوری که نسبت به سطح افق دارای زاویه‌ی 45° است. اکنون فاصله عمودی بین خط عمل وزنه از مفصل شانه تا اندازه‌ی x کاهش یافته است.

فصل دوم: کمیت‌های برداری و نرده‌ای در مکانیک و تحلیل حرکت ۷۲



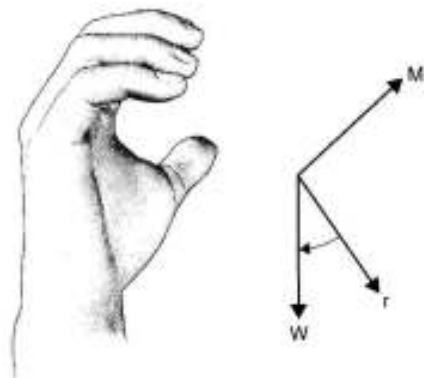
شکل ۱۹-۲. نمودارهای بردار برای دو وضعیت نشان داده شده در شکل ۱۸-۲.

در شکل ۱۹-۲ این موضوع برای دو وضعیت شکل ۱۸-۲ نشان داده شده است. نتایج برای بردار حاصلضرب خارجی در دو وضعیت عبارت‌اند از:

$$M = r F \sin\theta = 0,5 \times 100 = 50 Nm \text{ دست در حالت افقی}$$

$$M = r F \sin\theta = 0,5 \times 100 \times \sin(45) = 35,35 Nm \text{ دست در زاویه } 45^\circ$$

جهت گشتاور در هر دو شکل ۱۸-۲ و ۱۹-۲ موافق عقربه‌های ساعت است. در بردار حاصلضرب خارجی، جهت گشتاور می‌تواند به صورت قراردادی نشان داده شود. جهت بردار M به سمت صفحه‌ی کاغذ است و باید هر دوی r و W عمود باشد. این موضوع با قانون دست راست تأیید می‌شود: انگشتان از سمت r با حرکت به سمت W خم می‌شوند، یعنی جهت شست به سمت صفحه‌ی کاغذ است (شکل ۲۰-۲).



شکل ۲۰-۲. قانون دست راست برای $W \times r$ با نمایش شست رو به کاغذ.

فصل دوم: کمیت‌های برداری و نرده‌ای در مکانیک و تحلیل حرکت ۷۳

همچنین این امکان وجود دارد تا حاصلضرب برداری دو بردار را با استفاده از بردارهای واحد بیان کرد. دوباره فرض کنید که:

$$A = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}$$

و

$$B = B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k}$$

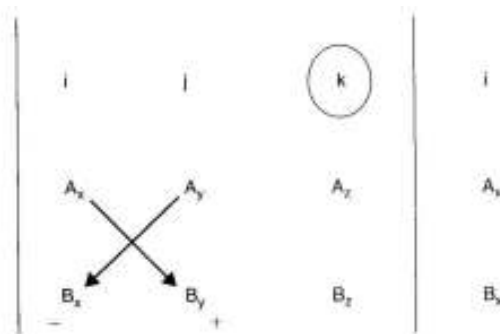
پس حاصلضرب برداری را می‌توان به این صورت نوشت:

$$A \times B = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \mathbf{i}(A_y B_z - A_z B_y) + \mathbf{j}(A_z B_x - A_x B_z) + \mathbf{k}(A_x B_y - A_y B_x)$$

فرمول:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

به عنوان **دترمینان** شناخته شده است و در یاد آوری توالی محاسبات مورد نیاز برای تعیین بردار حاصلضرب برداری، مفید است. دترمینان را به عنوان یک توالی از اعمال ضرب و جمع و تفریق برداری در نظر بگیرید (شکل ۲-۲۱). برای کسب اطلاعات بیشتر در مورد دترمینان‌ها و موضوع تحلیل بردارها اشپیگل^۱ (۱۹۵۹) را ببینید.



^۱ Spiegel

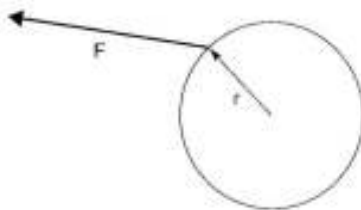
فصل دوم: کمیت‌های برداری و نرده‌ای در مکانیک و تحلیل حرکت ۷۴

شکل ۲-۲۱. محاسبه‌ی مولفه‌های بردار حاصلضرب برداری. جهت محاسبه‌ی مولفه‌ی $\vec{\tau}$ نوشتن مولفه‌ی x به صورت یک خط اضافی در سمت راست دترمینان مفید خواهد بود.

■ مثال ۲-۹

گشتاور را می‌توان به عنوان حاصلضرب برداری بیان کرد. برای مثال، یک چرخ باریک را در نظر بگیرید که آزادانه حول محور مرکزی خود در نقطه O می‌چرخد. نیروی F که بر روی لبه چرخ عمل می‌کند را در نظر بگیرید که موقعیت نقطه‌ی اعمال آن نسبت به مرکز چرخ، O ، همانطور که نشان داده شده است توسط موقعیت بردار r تعیین می‌شود.

نیروی F تمایل دارد تا چرخ را در خلاف جهت عقربه‌های ساعت بچرخاند (با فرض سکون اولیه‌ی)، طوری که سرعت زاویه‌ای ω (امگا) در جهت بیرون کاغذ و به سمت خواننده حاصل می‌شود.



گشتاور حاصل از نیروی F شروع به چرخاندن چرخ در خلاف جهت عقربه‌های ساعت می‌کند، طوری که جهت ω رو به بیرون صفحه است. بردار گشتاور به صورت $\tau = r \times F$ تعریف می‌شود و رو به بیرون صفحه است. بزرگی گشتاور عبارت است از: $\tau = r F \sin\theta$.

■ مثال ۲-۱۰

برای بدست آوردن گشتاور نیرو حول نقطه‌ی x ، نیروی F را که به این صورت تعریف می‌شود، در نظر بگیرید:

$$F = 1i + 2\sqrt{7}j + 3\sqrt{5}k$$

عمل کننده در نقطه‌ی $r = 10i + 0j - 3\sqrt{7}k$

فصل دوم: کمیت‌های برداری و نرده‌ای در مکانیک و تحلیل حرکت ۷۵

گشتاور نیرو حول مبدأ عبارت خواهد بود از:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \mathbf{r} \times \mathbf{F} \\ &= (0 \times 3,5 - (-3,7) \times 2,7, -3,7 \times 1 - 10 \times 3,5, 10 \times 2,7 - 0 \times 1) \\ &= (9,99, -38,7, 27) \end{aligned}$$

این نشان می‌دهد که گشتاور حول محور x عبارت است از:

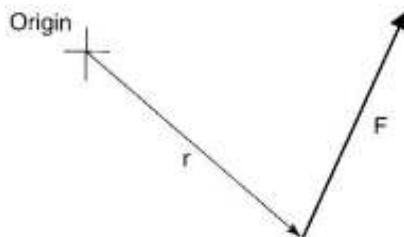
$$M_x = 9,99 \text{ Nm}$$

و حول محور y عبارت است از:

$$M_y = -38,7 \text{ Nm}$$

و حول محور z عبارت است از:

$$M_z = 27 \text{ Nm}$$



۲-۴ سیستم واحدها

این کتاب با استفاده از سیستم واحدهای SI (سیستم بین المللی) نوشته شده است. این سیستم برای جرم، طول و زمان به ترتیب واحدهای اصلی کیلوگرم، متر و ثانیه را در نظر می‌گیرد. در این بخش، واحدهای مرسوم مورد استفاده در تحلیل حرکتی و مکانیک خلاصه شده‌اند. جدول ۲-۴۴ کمیت‌های فیزیکی، واحدهای SI ، آنها و نام‌های دیگر آنها را نشان می‌دهد. همچنین، جدول تبدیل برخی از واحدهای SI را به واحدهای سیستم‌های دیگر نشان می‌دهد. اگر چه در این کتاب از سایر سیستم‌ها خیلی کم استفاده شده است، اما آشنایی با این سیستم‌ها در مواقعی که در موقعیت‌های روزمره با آنها مواجه می‌شویم، مفید است. برای مثال یک پرتاب کننده در بیس بال توپ را با

فصل دوم: کمیت‌های برداری و نرده‌ای در مکانیک و تحلیل حرکت ۷۶

سرعت 100mph رها می‌کند. در این مورد، مایل بر ساعت به دو دلیل مورد استفاده قرار گرفته است:

- (۱) واحد مایل بر ساعت به خوبی برای بیشتر مردم شناخته شده است، به طوری که آنها می‌توانند به راحتی آن را بازگو کنند.
- (۲) واحد مایل بر ساعت یک اندازه‌ی مناسب است به طوری که اعداد بدست آمده نه خیلی بزرگ هستند و نه خیلی کوچک.

همچنین در این کتاب واحدهایی از قبیل m/s و ms^{-1} (متر بر ثانیه) که قابلیت جایگزینی با هم را دارند، استفاده شده‌اند. اطلاعات بیشتر در مورد واحدهای SI در پیوست ۱ ارائه می‌شود.

جدول ۲-۴ واحدهای معمول مورد استفاده در سیستم بین‌المللی (SI)

کمیت فیزیکی	واحد SI	نام دیگر واحد	ضریب تبدیل به واحدهای دیگر
جرم	kg	<i>Kilogram</i>	$1\text{kg} = 2.2\text{lb}$
طول	m	<i>Meter</i>	$1\text{m} = 39\text{in}$
جابه‌جایی	m	<i>Meter</i>	$1\text{m} = 3.28\text{ft}$
زمان	s	<i>Second</i>	$1\text{s} = 0.0002777\text{h}$
تندی	m/s	ms^{-1}	$1\text{m/s} = 2.23\text{mph}$
سرعت	m/s	ms^{-1}	$1\text{m/s} = 3.28\text{ft/s}$
شتاب	m/s^2	ms^{-2}	$1\text{ "gee"} = 9.81\text{m/s}^2$
نیرو	N	<i>Newton</i>	$1\text{N} = 0.1\text{kg weight}$
ممان	Nm	<i>Newton-meter</i>	$1\text{Nm} = 0.72\text{lb/ft}$
ضربه	Ns	<i>Newton-second</i>	
فشار	N/m^2	<i>Pascal</i>	$1\text{N/m}^2 = 0.0001422\text{psi}$
اندازه حرکت خطی	$kg\ m/s$		
جابه‌جایی زاویه‌ای	rad	<i>Radians</i>	$1\text{rad} = 57.3^\circ$
تندی زاویه‌ای	rad/s		
شتاب زاویه‌ای	rad/s^2	$rads^{-2}$	
گشتاور	Nm		$1\text{Nm} = 0.72\text{lb/ft}$
اندازه حرکت زاویه‌ای	$kg/m^2/s$		
ضربه‌ی زاویه‌ای	Nm		

فصل دوم: کمیت‌های برداری و نرده‌ای در مکانیک و تحلیل حرکت ۷۷

$$1J/s = 0.001341hp$$

Watt

J/s

توان

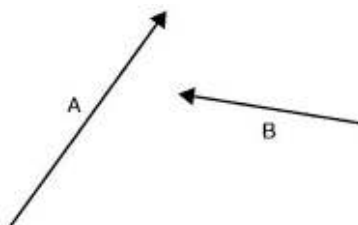
$$1kW = 1.341Ph$$

خلاصه

این فصل مفاهیم اساسی و پایه‌ی کمیت‌های نرده‌ای و برداری را معرفی کرد. جمع، تفریق، و ضرب کمیت‌های نرده‌ای و بردارها با استفاده از روش‌های ترسیمی، روش‌های مثلثاتی، و بردارهای واحد بیان شدند. سه مورد پژوهی برای نشان دادن کاربردهای ویژه‌ی بردارها در حرکت انسان، استفاده شدند. وقتی بردارهای نیرو و جابه‌جایی دارای زوایای اختیاری نسبت به یکدیگر هستند، حاصلضرب‌های نرده‌ای برای محاسبه مقادیر کار انجام شده مورد استفاده قرار گرفتند. جهت محاسبه گشتاور تولید شده بوسیله‌ی نیرویی که در موقعیت r عمل می‌کند، حاصلضرب‌های برداری با استفاده از روش‌های فرمولی و دترمینان مورد استفاده قرار گرفتند.

خودآزمایی

- موارد زیر را بر حسب برداری یا نرده‌ای بودن دسته بندی کنید:
نیرو، گشتاور، شتاب، سرعت، جرم، حجم، جابه‌جایی، مساحت، طول، و سرعت زاویه ای.
- بردارهای A و B زیر را با رویکرد ابتدا-به-انتهای آنها به هم اضافه کنید و بردار برآیند C را رسم کنید.



فصل دوم: کمیت‌های برداری و نرده‌ای در مکانیک و تحلیل حرکت ۷۸

۳. برای یافتن برآیند بردارهای نیروی زیر، روش چند ضلعی بردارها را استفاده کنید:

$20N$ عمل کننده به غرب

$35N$ عمل کننده با زاویه‌ی 60° شمال شرقی

$25N$ عمل کننده در شمال

$15N$ عمل کننده با زاویه‌ی 30° جنوب غربی

این بردارها را در کاغذ شطرنجی بکشید و اتصال ابتدا به انتها آنها را فراموش نکنید. با استفاده از کاغذ شطرنجی، بزرگی و جهت بردار برآیند را اندازه‌گیری کنید. از خط کش و گونیا برای این اندازه‌گیری استفاده کنید.

۴. یک گوی هاکلی روی یخ دارای سرعت $15m/s$ موازی با کناره‌ی زمین بازی است. همچنین دارای سرعت $5m/s$ عمود بر این کناره‌ی زمین است. از قضیه‌ی فیثاغورث برای محاسبه‌ی بزرگی سرعت برآیند گوی تا دو رقم اعشار استفاده کنید.

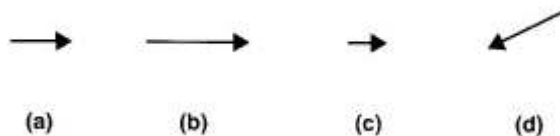
۵. برای یافتن برآیند بردارهای A و B زیر، از قانون متوازی الاضلاع استفاده کنید.



بردار B با بردار A زاویه‌ی 55° می‌سازد. این بردارها را در کاغذ شطرنجی رسم کنید، یک متوازی الاضلاع کامل تشکیل دهید، و اندازه و جهت بردار برآیند را اندازه‌گیری کنید. محاسبه‌ی بردار برآیند را این بار با استفاده از قانون کسینوس تکرار کنید. برای استنباط درباره‌ی اشتباهات درگیر در روش اول، پاسخ‌ها را با هم مقایسه کنید.

فصل دوم: کمیت‌های برداری و نرده‌ای در مکانیک و تحلیل حرکت ۷۹

۶. بردارهای زیر سرعت باد را در نقطه‌ی نزدیک به فضای پرش طول در بازی‌های المپیک نشان می‌دهد. در (a)، نمودار مربوط به سرعت



10 km/h است و باد موافق است. سرعت‌ها را برای (b)، (c)، و (d) تفسیر کنید. سرعت باد در هنگام انجام پرش طول 5 km/h است. تحت کدام موقعیت یا موقعیت‌ها، از (a) تا (d)، شما اجازه می‌دهید تا مسابقه انجام شود؟

۷. توپ گلف با سرعت 45 m/s و زاویه‌ی 10° نسبت به سطح افق پرتاب می‌شود. مولفه‌ی افقی این سرعت چقدر است؟

۸. یک نیزه با سرعت اولیه‌ی 40 m/s پرتاب می‌شود. مولفه‌ی عمودی این سرعت 29 m/s اندازه‌گیری شده است. سرعت افقی اولیه‌ی نیزه چقدر است؟

۹. میله‌ی بارفیکس به عنوان بخشی از تجهیزات ژیمناستیک، هنگامی که ژیمناست دور میله تاب می‌خورد، تحت دو نیرو قرار می‌گیرد. یک نیرو به صورت عمودی روبه بالا است که از پایه‌های نگه دارنده‌ی میله‌ی بارفیکس از کنار به میله اعمال می‌شود. این نیرو روبه بالا 750 N است. نیروی دیگر نیرویی است که از دست‌های ژیمناست هنگام آویزان شدن او بر روی میله در جهت رو به پائین و با زاویه 30° نسبت به افق به سمت راست اعمال می‌شود. مقدار این نیرو 510 N است. این نیروها را در نمودار نیرویی که نشان دهنده‌ی دو نیروی اعمال شده و نیروی برآیند آنها است، رسم کنید. از قانون کسینوس برای بدست آوردن بزرگی و جهت نیروی برآیند استفاده کنید. (در این سوال فرض شده است که بر روی دو پایه‌ی عمودی نیرو به برابر است. در این

فصل دوم: کمیت‌های برداری و نرده‌ای در مکانیک و تحلیل حرکت ۸۰

وضعیت، هر کدام $375N$. فرض می‌شود دو نیرو در ترکیب با هم یک نیروی $750N$ باشند.)

۱۰. یک بردار شتاب دارای بزرگی $16ms^{-2}$ است و جهت آن با زاویه‌ی 35° نسبت به افق رو به بالا است. مولفه‌های عمودی و افقی شتاب در امتداد محورهای x و y چقدر است؟ محورهای x و y در جهت افقی و عمودی هستند به طوری که بردار شتاب در صفحه‌ی $x-y$ قرار دارد.

۱۱. بردارهای واحد i, j, k در محورهای x, y, z قرار گرفته‌اند.

(a) یک نیرو به صورت $F = 12i + 25j + 0k$ بیان می‌شود.

مولفه‌های نیرو در محورهای x, y, z چقدر هستند؟

(b) $d = 2i + 0j + 3k$ بردار جابه‌جایی را بیان می‌کند. جابه‌جایی

کل به متر چقدر است؟

(c) $v_1 = 10i + 5j - 3k$ و $v_2 = -6i + 3j + 5k$ دو سرعت را

بیان می‌کنند که برای بدست آمدن برآیند، به صورت برداری با

هم جمع شده‌اند.

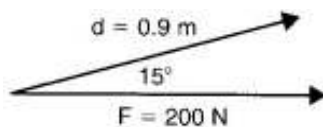
با استفاده از بردارهای واحد i, j, k عبارتی را برای بردار

برآیند $v = v_1 + v_2$ بنویسید.

۱۲. یک پارو وزن نیروی $F = 200N$ که به صورت افقی عمل می‌کند را به

پاروها اعمال می‌کند. جابه‌جایی پاروها $1.2m$ با زاویه‌ی 15° با

بالای سطح افق است.



کار انجام شده به عنوان نتیجه‌ی این نیرو و جابه‌جایی چقدر است؟

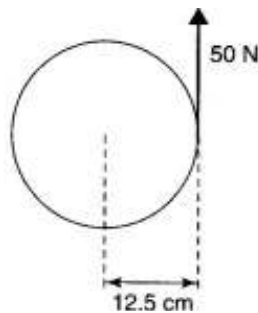
۱۳. یک پارو وزن نیروی $F = 150i - 45j + 0k$ را به پاروها اعمال می‌کند.

جابه‌جایی پارو بوسیله‌ی $d = 0.8i - 0.75j + 0.15k$ بیان می‌شود. کار

انجام شده چقدر است؟

فصل دوم: کمیت‌های برداری و نرده‌ای در مکانیک و تحلیل حرکت ۸۱

۱۴. نیروی 50 N به صورت مماس بر لبه‌ی خارجی دیسک (با زاویه‌ی قائمه) اعمال می‌شود. قطر دیسک 25 cm است. گشتاور ایجاد شده توسط این نیرو چقدر است؟ اثر این گشتاور بر روی دیسک را شرح دهید.



۱۵. نیرویی که با $F = 17i + 25j + 0k$ بیان می‌شود به نقطه‌ی A در سطح توپ اعمال می‌شود. بردار موقعیت نقطه‌ی A نسبت به مرکز توپ بوسیله‌ی $r = 0.05i - 0.04j - 0.02k$ بیان می‌شود. گشتاور تولید شده در توپ بوسیله‌ی این نیرو چقدر است؟

۱۶. بزرگی نیرو در سوال ۱۳ را محاسبه کنید. قطر توپ چقدر است؟

۱۷. توپ فوتبال با سرعتی که با $v = 10i - 2.5j + 3k$ تعیین می‌شود، در حال حرکت است. تندی توپ چقدر است؟ یک عبارت برای بردار واحد در امتداد و جهت v بنویسید. اگر نیروی پسا بوسیله‌ی $F_d = 0.15 \times v^2$ (تندی) بیان شود، یک عبارت برای نیروی پسا براساس بردارهای واحد i, j, k بنویسید.

منابع

Spiegel MR(1969). *Schaum's Outline of Vector Analysis*. New York. Schaum Publishing.

فصل سوم

کینماتیک خطی

اهداف فصل

اهداف این فصل عبارت‌اند از:

- معرفی ایده‌ی اینرسی جسم.
- بحث در مورد حالت طبیعی حرکت اشیاء.
- معرفی مبحث کینماتیک.
- توصیف حرکت بر اساس جابه‌جایی، سرعت، و شتاب.
- زمینه‌سازی برای کینتیک شناسی (شناخت نیروهای داخلی و خارجی درگیر حرکت).

نتایج فصل

بعد از مطالعه‌ی این فصل، دانشجو قادر خواهد بود تا:

- قانون اینرسی را دریابد.
- چندین روش را برای بدست آوردن سرعت یک شیء به کار گیرد.
- برای محاسبه‌ی سرعت یا شتاب از نمودارها استفاده کند.
- برای تخمین سرعت از داده‌های آزمایشی جابه‌جایی-زمان، از خط روند تغییرات استفاده کند.

فصل سوم: کینماتیک خطی ۸۴

- اثرات خطاها را بر نتایج محاسبه شده دریابد.
- معادلات قابل کاربرد زیر را برای حرکت با شتاب یکنواخت درک کرده و به کار گیرد:

$$v = u + at$$

$$s = (u + v)t/2$$

$$s = ut + at^2$$

$$v^2 = u^2 + 2as$$

- تفاوت بین حرکت با شتاب یکنواخت و دیگر حرکت‌ها با شتاب‌های غیر یکنواخت را دریابد.
- سرعت‌ها یا شتاب‌های متوسط و لحظه‌ای را محاسبه کند.
- مسیر حرکت پرتابه‌ها را با نادیده گرفتن مقاومت هوا تخمین بزند.

۳-۱ قانون اینرسی

هر جسم یا شیئی به وضعیت سکون یا حرکت یکنواخت در خط راست خود ادامه خواهد داد، مگر اینکه تحت تاثیر نیروی خارجی قرار گیرد. این تعریف، معادل تعریف نیرو به عنوان "چیزی که موجب شتاب می‌شود" است و اشاره می‌کند که اجسام دارای خاصیت اینرسی هستند-یعنی، آنها شتاب نمی‌گیرند مگر اینکه بوسیله‌ی عاملی که نیرو نامیده می‌شود تحت تاثیر قرار گیرند. **حرکت یکنواخت** یعنی اینکه سرعت ثابت است. این قانون دوباره در فصل ۴ بیان می‌شود، در اینجا این قانون به عنوان **قانون اول نیوتن** بیان می‌شود و همراه با قوانین دیگر حرکت که اولین بار توسط نیوتن بیان شدند و به صورت فرمول در آمدند، مورد بحث قرار می‌گیرد.

۳-۲ اندازه‌گیری تندى یا سرعت یک شیئی

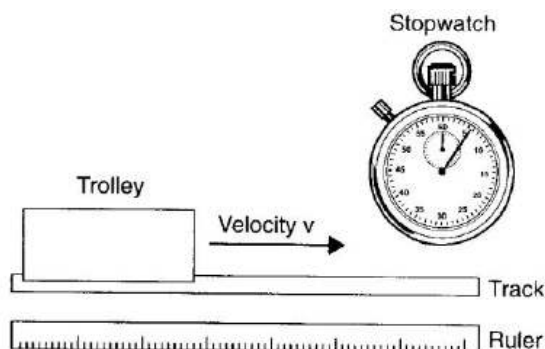
- حداقل پنج روش برای اندازه‌گیری سرعت اشیاء (معمولاً نسبت به زمین) وجود دارد:
۱. مشاهده‌ی عبور جسم از یک سری نشانگر ثابت در فواصل متغییر در طول مسیر حرکت شیئی و گرفتن زمان با کرنومتر یا زمان سنج.

فصل سوم: کینماتیک خطی ۸۵

۲. متصل کردن متر نواری کاغذی بلند به شیئی و اجازه دادن به شیئی برای کشیدن متر نواری بلند همزمان با حرکت خود. با عبور نوار از میان یک نوسانگر با بسامد ثابت، نوسانگر می‌تواند علامت‌های کوچکی را با جوهر بر روی نوار ایجاد کند. پس مسافت بین نقاط بر روی نوار، سرعت شیئی را اندازه‌گیری می‌کند.
۳. تولید امواج صوتی (یا رادار یا مایکروویوها) با بسامد مشخص برای برخورد با شیئی متحرک و ثبت امواج بازتابیده شده از شیئی. بسامد صوت می‌تواند بوسیله‌ی بازتاب از شیئی متحرک به روش مشخصی (اثر دوپلر^۱) تغییر کند به طوری که می‌توان بر اساس این تغییر بسامد سرعت شیئی را محاسبه کرد.
۴. استفاده از دوربین یا دوربین‌ها برای تعقیب حرکت شیئی و بدست آوردن سرعت بوسیله‌ی روش کالیبراسیون مناسب.
۵. استفاده از دروازه‌های نور مادون قرمز. حرکت شیئی داخل دالان نور مادون قرمز بین فرستنده و گیرنده انجام می‌گیرد، که اجازه می‌دهد زمان حرکت شیئی در مسافت معین اندازه‌گیری شود.

هر کدام از این روش‌ها هم که برای اندازه‌گیری سرعت استفاده شود، نشان دادن قانون اول نیوتن در عمل کاملاً مشکل خواهد بود. این مشکل به این خاطر است که اصطکاک همیشه نقش مهمی را در حرکت بازی می‌کند و تمایل دارد تا سرعت اشیاء را کاهش دهد و یا اشیاء را به هم بچسباند. آزمایش شکل ۳-۱ را در نظر بگیرید که در آن چرخ دستی می‌تواند با استفاده از بالشک نازکی از هوا بر روی ریل نگه داشته شود. با این چینش، نیروی اصطکاک می‌تواند عملاً به صفر کاهش یابد. اگر ریل افقی و بدون شیب باشد، چرخ دستی با نداشتن سرعت اولیه به سمت راست یا چپ، در حالت سکون کامل باقی خواهد ماند. به بیان دیگر، اگر به چرخ دستی سرعتی در جهت راست داده شود، آنگاه با تندی ثابتی به حرکت در این جهت ادامه خواهد داد. این تندی ثابت می‌تواند بوسیله‌ی کرنومتر و ابزار اندازه‌گیری مسافت که موازی با ریل است، یا بعضی از وسایل دیگر اندازه‌گیری تندی، بررسی شود. نتایج این بررسی باید شبیه به اعدادی باشد که ما

۱. Dopler effect



شکل ۱-۳. چرخ دستی قرار گرفته بر روی نواری از هوا در یک ریل هوا.

جدول ۱-۳ نشان داده‌ایم.

می‌توان دید که در فواصل زمانی یکسان، مسافت‌های طی شده برابر هستند (به عنوان مثال 10 cm در هر 0.5 s). این موضوع با قانون اول نیوتن به طور کامل سازگار است و مثالی از حرکت یکنواخت یا سرعت ثابت است. این حرکت تا رسیدن چرخ دستی به انتهای ریل، یعنی هنگامی که آزمایش به پایان می‌رسد، ادامه خواهد یافت. با گذاشتن چند وزنه‌ی (جرم‌های) سبک در داخل چرخ دستی آزمایش تحت تاثیر قرار نخواهد گرفت و نتیجه‌ی مشابه‌ای بدست خواهد آمد، اما این امر می‌تواند قابل توجه باشد که برای به حرکت در آوردن چرخ دستی به سمت راست یا چپ، نیروی اولیه‌ی بیشتری مورد نیاز است. شاید استفاده از وزنه‌های بزرگ باعث برخورد سطوح چرخ دستی و ریل با هم شوند به طوری که در این هنگام اصطکاک ایجاد شود و سرعت چرخ دستی را کاهش دهد.

جدول ۱-۳ سرعت جسم در حال پرواز در فاصله‌ی زمانی ۱ ثانیه بعد از رهایی

زمان در کرنومتر (ثانیه)	مسافت خوانده شده از خط کش (cm)
۰	۰
۵	۱۰
۱۰	۲۰
۱۵	۳۰
۲۰	۴۰
۳۰	۵۰

۳-۲-۱ معنی نموداری سرعت حرکت

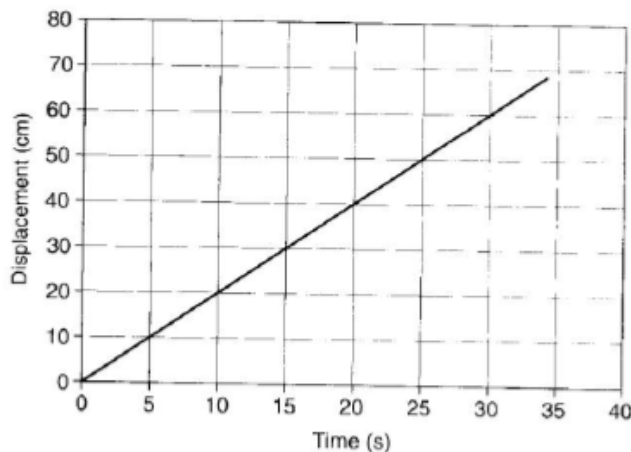
حرکت یکنوخت یا حرکت با سرعت ثابت را می‌توان به راحتی با نموداری که نشان دهنده‌ی جابه‌جایی در برابر زمان است، نشان داد. در این وضعیت اگر جابه‌جایی، سرعت و شتاب اولیه را داشته باشیم، می‌توانیم در زمان‌های مختلف سرعت را محاسبه کنیم. نمودار موجود در شکل ۳-۲ که در آن جابه‌جایی چرخ دستی در برابر زمان رسم شده است را در نظر بگیرید.

مرسوم است که متغیر مستقل (در این مورد، زمان) در محور افقی یا x رسم شود و متغیر وابسته (در این مورد، جابه‌جایی) در محور عمودی یا y رسم شود. جابه‌جایی چرخ دستی وابسته به زمان سپری شده است، اما عکس این صحیح نیست: زمان وابسته به جابه‌جایی نیست.

می‌توان مشاهده کرد که در شکل ۳-۲ خط مستقیم حاصل شده است. در این مورد، معادله برای نمودار y در برابر x به این صورت نشان داده می‌شود:

$$y = mx + c$$

در اینجا m شیب یا زاویه‌ی خط است (ثابت است) و c نقطه‌ی تقاطع خط در محور y است (این نیز ثابت است). در این مورد، خط از مبدأ عبور می‌کند، بنابراین مقدار c برابر صفر است. بنابراین معادله‌ی خط راست به این شکل ساده می‌شود:



شکل ۳-۲. نمودار داده‌های جدول ۳-۱: جابه‌جایی در برابر زمان.

فصل سوم: کینماتیک خطی ۸۸

$$y = mx$$

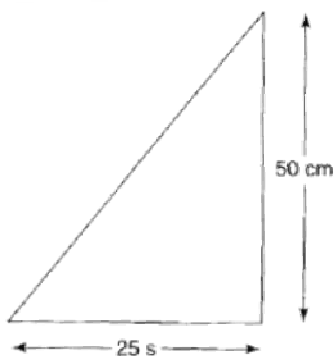
اگر ما علامت‌های s و t را به ترتیب برای جابه‌جایی و زمان استفاده کنیم، معادله را می‌توان به این شکل نوشت:

$$s = vt$$

در اینجا v شیب نمودار $s-t$ است (ثابت).

شیب نمودار بوسیله $\Delta s/\Delta t$ تعیین می‌شود، در اینجا Δs افزایش s و Δt افزایش t است، بنابراین $v = \Delta s/\Delta t$. می‌توان دید که این کمیت اندازه‌های طول تقسیم بر زمان است و در حقیقت سرعت (ms^{-1}) چرخ دستی را نشان می‌دهد.

شکل ۳-۳، نمودار جابه‌جایی چرخ دستی به عنوان تابع زمان است. در مورد خاص چرخ دستی بر روی ریل هوا و داده‌ها در جدول ۱-۳، شیب خط مستقیم می‌تواند بوسیله کشیدن مثلث قائم الزاویه‌ای که این خط راست وتر آن است، بدست آید. مثلث با هر اندازه‌ای می‌تواند استفاده شود، اما در کل هر چه مثلث بزرگتر باشد برای دقت محاسبه بهتر است. شیب این نمودار $2cm/s = 50cm/25s$ یا $0.2m/s$ است. بنابراین $v = 0.2m/s$.



شکل ۳-۳. مثلث رسم شده از نمودار شکل ۲-۳ برای محاسبه‌ی سرعت چرخ دستی.

■ مثال ۱-۳

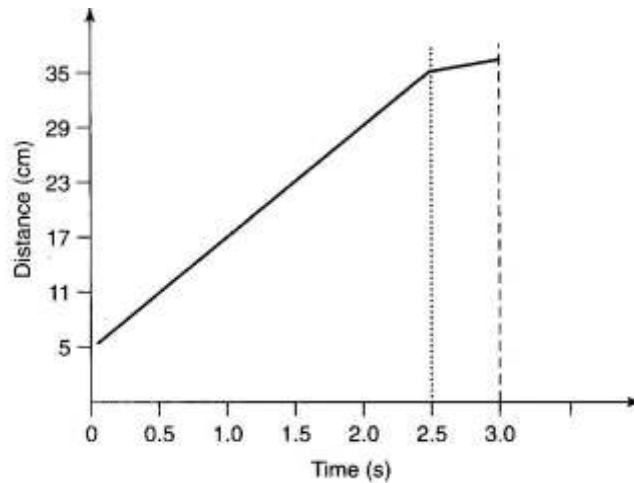
برای داده‌های زیر که نشان دهنده‌ی حرکت یک توپ‌هاکی است، نمودار جابه‌جایی-زمان را رسم کنید:

فصل سوم: کینماتیک خطی ۸۹

زمان (s)	جابه‌جایی (cm)
۵	۰
۱۲	۰٫۵
۱۷	۱٫۰
۲۳	۱٫۵
۲۹	۲٫۰
۳۵	۲٫۵
۳۶	۳٫۰

سرعت توپ‌هاکی را طی فاصله‌ی زمانی بین ۰ و ۲٫۵ ثانیه از روی نمودار محاسبه کنید. (از شیب نمودار برای بدست آوردن سرعت استفاده کنید). یک فرمول برای نمودار خط راست خود در شکل کلی $y = mx + c$ بنویسید. در معادله‌ی شما مقادیر m و c چقدر است؟ در فاصله‌ی زمانی ۲٫۵ و ۳٫۰ ثانیه چه اتفاقی برای توپ می‌افتد. اتفاق احتمالی و اثر آن را بر روی حرکت توپ توضیح دهید.

جواب



بین ۰ و ۲٫۵ ثانیه نمودار یک خط راست است؛ این سرعت ثابت است. سرعت توپ بوسیله‌ی شیب خط راست تعیین می‌شود:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{35 - 5}{2.5 - 0} = \frac{30}{2.5} = 12 \text{ cm/s}$$

فصل سوم: کینماتیک خطی ۹۰

یا اگر مسافت به متر تبدیل شود برابر با 0.12 m/s است. معادله‌ی خط راست عبارت است از:

$$s = 0.12t + 0.05$$

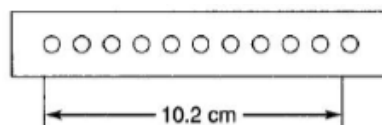
عرض از مبدأ (در $t = 0$) ۵ سانتی متر (یا 0.05 متر) است، بنابراین مقدار c 0.05 است و مقدار m برابر 0.12 است. حرکت توپ بین زمان‌های 2.5 و 3.0 ثانیه دارای وقفه شده است، شاید به دلیل مداخله‌ی یک بازیکن یا خوردن توپ به کنار زمین بازی. مسافت طی شده بین زمان‌های 2.5 و 3.0 ثانیه تنها ۱ سانتی متر است؛ قبل از این توپ با سرعت ۶ سانتی متر در هر نیم ثانیه حرکت می‌کرد.

سرعت اندازه‌گیری شده توسط دانش آموزان برای

سورتمه‌ای که سر می‌خورد

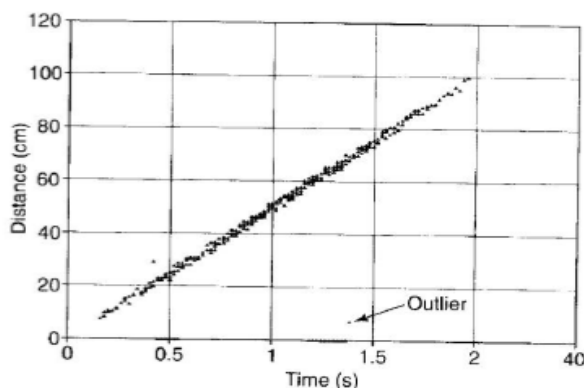
مورد پژوهی ۱-۳

از یک کلاس ۳۱ نفره از دانشجویان علوم ورزشی خواسته شد تا سرعت یک سورتمه را هنگام سرخوردن آهسته در امتداد بخش مسطح و افقی مسیر حرکت و در نزدیکی نقطه‌ی شروع اندازه‌گیری کنند. سورتمه به یک نوار کاغذی متصل می‌شد که از میان یک نوسانگر عبور می‌کرد. نوسانگر بر روی نوار نقاطی را با بسامد 50 Hz ایجاد می‌کرد. گروه‌های کار سه یا چهار نفره بودند، و از هر گروه خواسته شد تا یک نوار کاغذی اندازه‌گیری بگیرند. سرعت سورتمه با مشخص ساختن چند نقطه‌ی معین بر روی نوار و اندازه‌گیری مقدار مسافت طی شده در فاصله‌ی زمانی معین، بوسیله‌ی خط کش بدست می‌آمد. تعداد نقاط استفاده شده می‌توانست بین ۱۱ و ۱۰۰ باشد. برای مثال، ظاهر نوار پارچه‌ای برای ۱۱ نقطه می‌تواند به صورت زیر باشد:



برای ۱۱ نقطه، ۱۰ فاصله بین نقاط وجود دارد، و کل فاصله‌ی زمانی 0.2 s است. مسافت طی شده در این مثال 10.2 cm است. هر گروه ۱۰ جفت از اندازه‌های مسافت -

فصل سوم: کینماتیک خطی ۹۱



زمان را بدست آوردند و در پایان روز داده‌های همگی گروه‌ها با هم ادغام شدند. داده‌ها به صورت نموداری رسم شدند که زمان در محور افقی و مسافت در محور عمودی قرار داشت.

نمودار چند خصیصه‌ی مهم را نشان می‌دهد که دربرگیرنده‌ی خطاها یا تردیدها در فرآیند اندازه‌گیری است:

۱. دانشجویان هنگام اندازه‌گیری مسافت‌های طی شده بوسیله‌ی خط کش یا متر نواری مرتکب خطاهای تصادفی می‌شوند. به دلیل اینکه نوسانگر با یک بسامد ثابت و اصلی فعالیت می‌کند، و اینکه این بسامد با دقت زیاد در 50 Hz کنترل می‌شود، اندازه‌گیری زمان خیلی دقیق در نظر گرفته شده است.

۲. به طور قطع دو اندازه‌گیری مشکوک هستند: یکی در زمان 1.38 s که مسافت 1.41 cm است و دیگری در زمان 5.9 s که مسافت 0.42 cm است. این اندازه‌ها کاملاً از اندازه‌های دیگر جدا شده‌اند و می‌توان آنها را به طور کامل به اشباهات با مقیاس بزرگ بوسیله‌ی دانشجویان نسبت داد که هنگام ثبت نتایج اندازه‌گیری توسط آنها اتفاق افتاده‌اند. برای مثال، ممیز در جای اشتباهی قرار گرفته است و 1.41 سانتی متر به اشتباه 1.41 سانتی متر نوشته شده است. اندازه‌هایی از این قبیل دورافتاده خوانده می‌شوند که تحت شرایط خاص می‌توان آنها را کنار

فصل سوم: کینماتیک خطی ۹۲

گذاشت. برای اطلاعات بیشتر درباره‌ی تعریف آماری یک دورافتاده، به وینسنت^۱ (۲۰۰۵) رجوع کنید.

سرعت سورت‌مه می‌تواند با استفاده از جفت‌های ابتدایی و انتهایی نقاط بدست آید. یعنی $1,5\text{cm}$ ، $0,18\text{ s}$ ، و $19,7\text{cm}$ ، $1,96\text{ s}$ به این صورت:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{19,7 - 1,5}{1,96 - 0,18} = \frac{18,2}{1,78} = 10,2\text{cm/s}$$

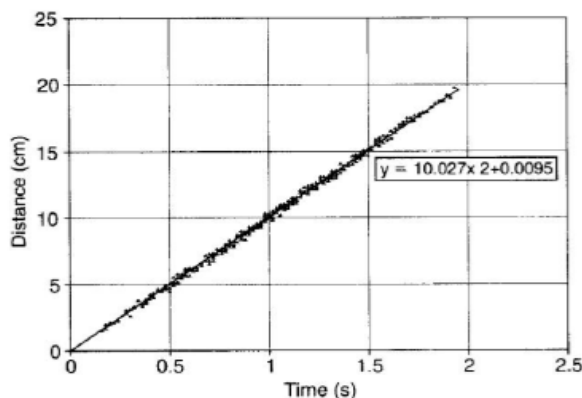
به دلیل اینکه اندازه‌گیری مسافت احتمالا دارای خطایی به اندازه‌ی $0,1\text{cm}$ است، مقدار $\Delta s = 18,2\text{cm}$ می‌تواند دارای خطای $0,2\text{cm}$ باشد، و سرعت نهایی می‌تواند دارای خطایی به اندازه‌ی $\pm 0,11\text{cm/s} = \pm (0,2/1,78)$ باشد. در واقع، فرض می‌کنیم که در اینجا خطاهای اندازه‌گیری زمان بسیار کوچک هستند. با بیان این خطاها به درصد، درصد خطا در سرعت ۷ برابر $\pm 1,1\%$ است که برابر با جمع درصد خطاها در Δs ($\pm 1,1\%$) و Δt ($0,1\%$) است. برای مباحث پایه رفع خطاها پیوست ۱ را ببینید. با این حال، تعداد زیاد اندازه‌های بدست آمده بوسیله‌ی کلاس به این معنا است که سرعت می‌تواند با دقت بالایی تخمین زده شود. در حقیقت، سرعت سورت‌مه برابر با شیب خط $s-t$ است. با گرفتن خط رگرسیون کمترین مربعات در داده‌های بدست آمده بوسیله‌ی ۳۱ دانشجو، سرعت می‌تواند به عنوان شیب این خط برآورد شود. پیوست ۱ را برای تعریف خط رگرسیون کمترین مربعات ببینید. این عمل به راحتی با استفاده از بسته‌هایی از قبیل *Excel* مایکروسافت انجام شود: خط روند تغییرات می‌تواند به داده‌ها اضافه شود و معادله‌ی خط تغییرات می‌تواند در نمودار نمایش داده شود. در نمودار زیر خط روند تغییرات خطی (درجه‌ی یک) که بوسیله‌ی *Excel* حاصل شده است همراه با حذف دو دورافتاده‌ی مشکوک، نشان داده شده است.

شیب این خط روند تغییرات (یعنی سرعت سورت‌مه) تا دو رقم اعشار $10,23\text{cm/s}$ است. امتیاز این روش این است که اندازه‌گیری براساس فقط یک جفت از مقادیر نیست، و بر اساس ۳۱۰ جفت از مقادیر است، طوری که اثرات خطاها بوسیله‌ی

۱. Vincent

فصل سوم: کینماتیک خطی ۹۳

فرآیند "میانگین گیری" حداقل می‌شود. این رویکرد معتبر است، به ویژه زمانی که بر پایه‌ی یک زمینه‌ی قابل قبول اعتقاد بر این باشد که نقاط بدست آمده می‌توانند به صورت خط راست یا تقریباً به شکل خط راست قرار گیرند و اینکه حداقل ۱۰ نقطه‌ی



داده وجود داشته باشد.

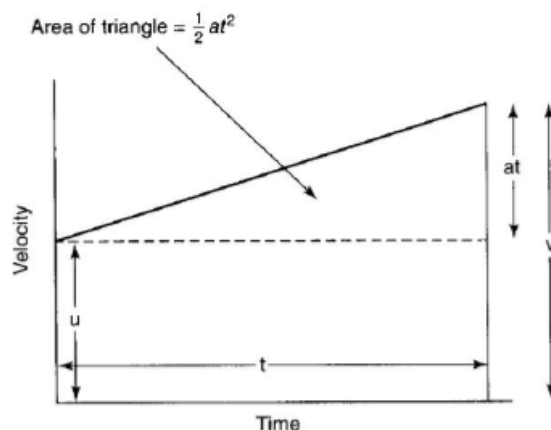
۳-۲-۲ معادلات جابه‌جایی و سرعت برای وضعیت شتاب یکنواخت شتاب نسبت تغییرات سرعت با زمان است، و واحد آن ms^{-2} است. وقتی جسمی در فواصل زمانی متوالی و مساوی دستخوش تغییرات مساوی در سرعت می‌شود آن جسم با شتاب یکنواخت (یا شتاب ثابت) حرکت می‌کند، هر چند ممکن است این فواصل زمانی کوتاه باشند. اگر شتاب یکنواخت، u سرعت اولیه‌ی، و v سرعت نهایی بعد از زمان t باشند، آنگاه از تعریف شتاب داریم:

$$v = u + at \quad (1)$$

بنابراین نمودار سرعت-زمان (شکل ۳-۴) خط راست است، اگر شتاب مثبت باشد، شیب خط رو به بالا است، و اگر شتاب منفی باشد شیب خط رو به پایین است. با یاد آوری این که برای فواصل زمانی مناسب جابه‌جایی بوسیله‌ی مساحت زیر نمودار تعیین می‌شود، با در نظر گرفتن مساحت به صورت ذوزنقه می‌توانیم ببینیم:

$$s = \frac{1}{2} (u + v)t \quad (2)$$

فصل سوم: کینماتیک خطی ۹۴



شکل ۳-۴. نمودار سرعت-زمان برای شیبی که با شتاب یکنواخت a در حال حرکت است.

و یا اینکه، با در نظر گرفتن مساحت به عنوان مستطیل و مثلث:

$$s = ut + \frac{1}{2} at^2 \quad (۳)$$

این معادله‌ها در بردارنده‌ی همه اطلاعاتی است که نمودار می‌تواند ارائه دهد. با این حال، اغلب بهتر است تا محاسبه سرعت بعد از اینکه شیب مسافت معین s را طی کرد، انجام شود. این کار می‌تواند با محاسبه‌ی t از معادله‌ی (۲) یا (۳) و سپس جایگزینی آن در معادله‌ی (۱) انجام شود. نتیجه‌ی این رویه:

$$v^2 = u^2 + 2as \quad (۴)$$

باید تاکید کرد که معادله‌های (۱) تا (۴) تنها در مواردی قابل استفاده و کاربرد هستند که شتاب یکنواخت است و حرکت مستقیم الخط است (یعنی در خط راست)، یا در صورتی که حرکت می‌تواند در امتداد دو محور عمود بر هم تجزیه شود و شتاب‌ها در امتداد دو محور ثابت هستند و می‌توانند به صورت مستقل تلقی شوند.

■ مثال ۳-۲

اسکی بازی حرکت رو به پائین خود را در بخش سرازیری پیست شروع می‌کند. او برای جلو راندن خود از وضعیت استارت، با استفاده از پاهای خود استارت پرشی را

فصل سوم: کینماتیک خطی ۹۵

انجام می‌دهد. در نتیجه، سرعت اولیه‌ی او صفر نیست و وقتی که از کنار اولین نشانگر در بخش سرازیری عبور می‌کند $۲,۵m/s$ است. با توجه به اینکه شتاب او $۳m/s^2$ است، سرعت او را هنگام عبور از کنار نشانگر دوم که در فاصله‌ی $۱۰m$ از نشانگر اول قرار گرفته است، بدست آورید. با فرض اینکه او شتاب $۳m/s^2$ را بمدت طولانی حفظ می‌کند، بعد از چند ثانیه او سرعت خود را به $۲۵m/s$ افزایش می‌دهد؟

جواب

$$u = ۲,۵$$

سرعت اولیه

$$a = ۳$$

شتاب

برای انجام بخش اول، از $v^2 = u^2 + 2as$ استفاده می‌کنیم:

$$v^2 = (۲,۵)^2 + ۲(۳)(۱۰)$$

$$= ۶,۲۵ + ۶۰$$

$$= ۶۶,۲۵$$

$$v = ۸,۱۴m/s$$

برای بخش دوم، از فرمول زیر استفاده کنید:

$$v = u + at$$

$$۲۵ = ۲,۵ + ۳t$$

در نتیجه:

$$۲۵ = ۲,۵ + ۳t$$

بنابراین:

$$t = (۲۵ - ۲,۵)/۳$$

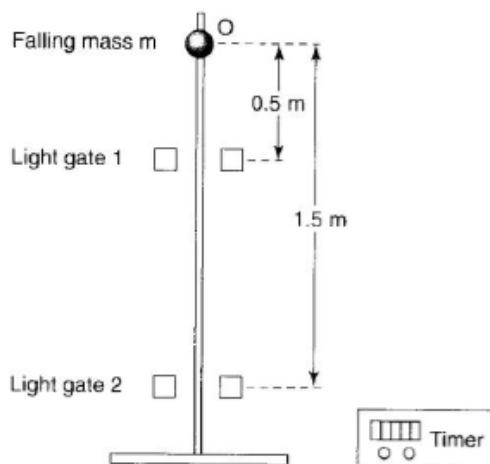
$$= ۲۲,۵/۳$$

$$= ۷,۵ s$$

■ مثال ۳-۳

فصل سوم: کینماتیک خطی ۹۶

در اندازه‌گیری مستقیم شتاب یک شیء در حال سقوط، جرم کروی سربی با سرعت صفر رها می‌شود. جرم هنگام حرکت، از دو دروازه‌ی نوری، یکی در فاصله‌ی $0.5m$ و دیگری در فاصله‌ی $1.5m$ زیر محل رهایی، عبور می‌کند. دروازه‌ی نوری اول یک زمان سنج دیجیتال را راه اندازی می‌کند، و دروازه‌ی دوم آن را متوقف می‌کند.



واضح است که مسافت طی شده توسط جرم بین دروازه‌های نوری ۱ و ۲، $1m$ است. زمان نشان داده شده توسط زمان سنج دیجیتال $0.2337s$ است. داریم:

$$s_1 = \frac{1}{2} gt^2$$

و:

$$s_2 = \frac{1}{2} gt^2$$

بنابراین:

$$t_2 - t_1 = \sqrt{\frac{2s_2}{g}} - \sqrt{\frac{2s_1}{g}}$$

بنابراین:

فصل سوم: کینماتیک خطی ۹۷

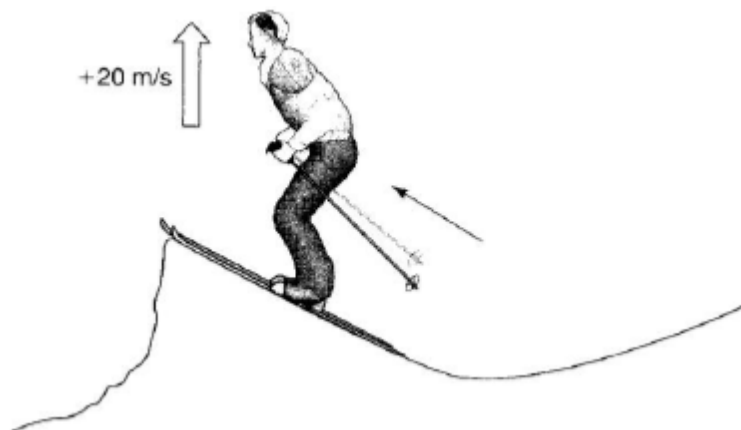
$$0,23337 = \frac{1}{\sqrt{g}} (\sqrt{3} - \sqrt{1})$$

$$\sqrt{g} = \frac{(0,732)}{0,23337} = 3,1322$$

$$g = 9,811 \text{ m/s}^2$$

■ مثال ۳-۴

یک اسکی باز در ماده آلپاین به انتهای حرکت خود در شیب راهه می‌رسد و با سرعت زیاد به سمت بالا پرش می‌کند. او با سرعت 20 m/s به بالا می‌پرد و تحت تاثیر نیروی جاذبه به صورت آزاد سقوط می‌کند.



نمودار سرعت عمودی اسکی باز را به صورت تابع زمان و نمودار سرعت را به صورت تابع جابه‌جایی رسم کنید. نموداری دیگری را برای جابه‌جایی به صورت تابع زمان t رسم کنید و بعد از ۵ ثانیه جابه‌جایی را بدست آورید.

$$\text{سرعت اولیه} = u = +20 \text{ m/s}$$

$$\text{شتاب قابل استناد به جاذبه} = 9,81 \text{ m/s}^2$$

فصل سوم: کینماتیک خطی ۹۸

به دلیل اینکه سوال بیان می‌کند که اسکی باز به صورت آزاد سقوط می‌کند، می‌توانیم فرض کنیم که هیچ اصطکاک یا نیروی مقاومی از طرف هوا وجود ندارد. نمودارهای صفحه‌ی بعد با استفاده از فرمول‌های زیر کشیده شدند:

$$v = u + at$$

$$v^2 = u^2 + 2as$$

$$s = ut + \frac{1}{2}at^2$$

جدول ۲-۳ سرعت شیء رها شده در فواصل زمانی ۱ ثانیه‌ای بعد از رهایی

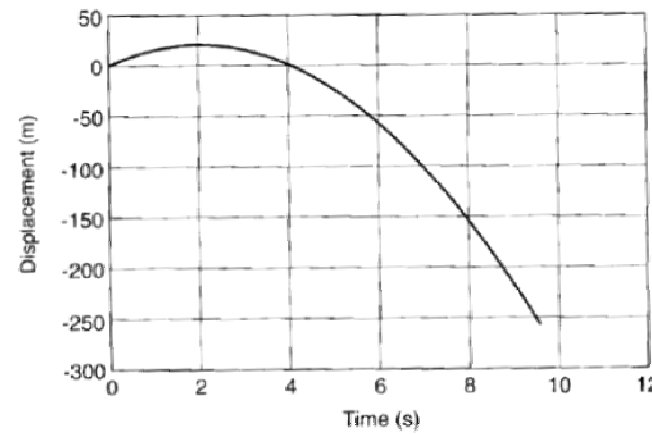
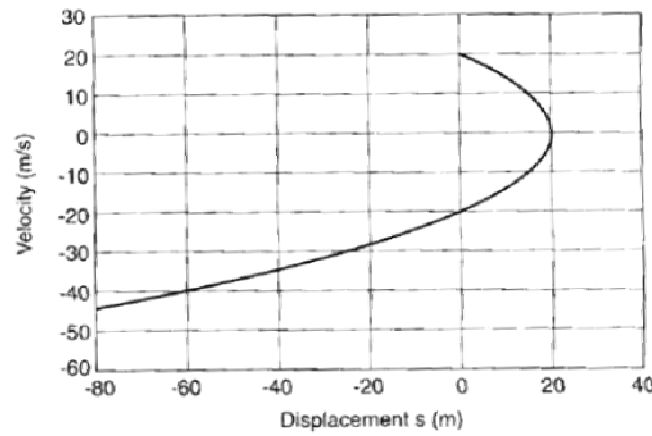
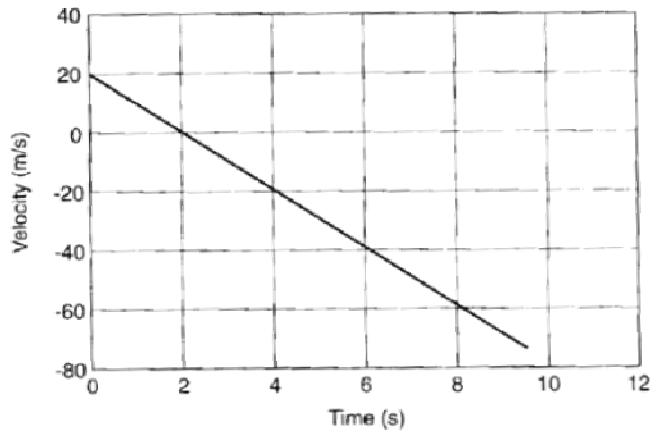
سرعت (ms^{-1})	زمان (s)
۰	۰
۹٫۸	۱
۱۹٫۶	۲
۲۹٫۴	۳
۳۹٫۲	۴
۴۹	۵
۵۸٫۸	۶

جابه‌جایی بعد از ۵ ثانیه عبارت است از $s = -۲۲٫۶m$ یا $۲۲٫۶m$ زیر نقطه‌ی شروع. اسکی باز این مثال توجه‌ی ما را به این امر معطوف می‌کند که جابه‌جایی کمیتی برداری است. در این مثال، جابه‌جایی s بعد از ۴ ثانیه منفی می‌شود، که نشان می‌دهد اکنون اسکی باز شروع به پائین آمدن از سطح نقطه‌ی شروع خود کرده است.

۳-۳ شتاب به عنوان شیب نمودار سرعت-زمان

مثال متداول برای شتاب یکنواخت، سقوط آزاد است. یک شیء در سقوط آزاد با شتاب ناشی از جاذبه، یعنی $۹٫۸۱ms^{-2}$ نزدیک ارتفاع دریا در سطح زمین، افزایش سرعت می‌دهد. مشروط به اینکه از مقاومت هوا چشم‌پوشی شود، این شتاب برای همه اشیاء ثابت است. اشیاء طوری به سمت پائین (به سمت مرکز زمین) سقوط می‌کنند که سرعت آنها در هر ثانیه به میزان $۹٫۸۱m$ افزایش می‌یابد. جدول ۲-۳ سرعت

فصل سوم: کینماتیک خطی ۹۹



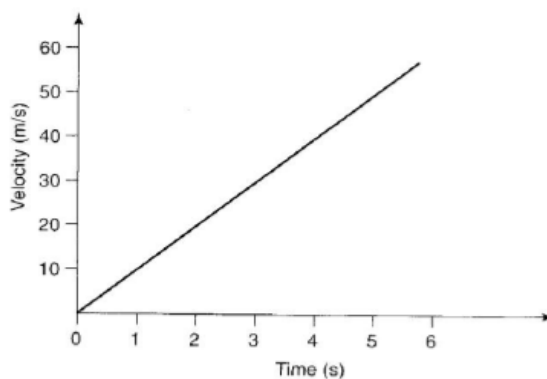
فصل سوم: کینماتیک خطی ۱۰۰

شیئی رها شده را برای ۶ ثانیه‌ی اول حرکت آن بعد از اینکه از حالت سکون رها شد نشان می‌دهد. رسم داده‌های جدول ۲-۳ در نمودار سرعت-زمان یک نمودار با خط راست خواهد بود (شکل ۳-۵).

مقدار شتاب در این مورد می‌تواند با اندازه‌گیری شیب نمودار $v-t$ تأیید شود. با تشکیل مثلث قائم الزاویه یک بار دیگر داریم:

$$\text{شیب} = \text{شتاب} = (58.8 - 0) / (6 - 0) = 9.8 \text{ms}^{-2}$$

به هر حال، شتاب‌های ثابت نمودارهای خطی v در برابر t را ایجاد می‌کنند و منجر به محاسبه‌های راحت با استفاده از فرمول‌های (۱) تا (۴) می‌شوند. چنین شتاب‌های ثابتی به ندرت در دنیای واقعی اتفاق می‌افتد، مگر اینکه تلاش‌های ویژه‌ای برای کاهش یا حذف اصطکاک و مقاومت هوا انجام گیرد. مورد پژوهی حاضر در اینجا موردی را نشان می‌دهد که در آن شتاب ثابت نیست.



شکل ۳-۵. نمودار داده‌های $v-t$ در جدول ۲-۳.

دروازه‌های نور استفاده شده برای بدست آوردن زمان

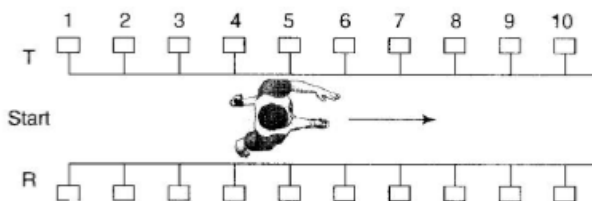
بخش‌های ۱۰ متری در دوی ۱۰۰ متر سرعت

مورد پژوهی ۲-۳

در دوی ۱۰۰ متر سرعت، زمان بخش‌های $10\text{-}m$ با مجموعه‌ای از دروازه‌های نور اندازه‌گیری می‌شود. دروازه‌های نور بوسیله‌ی یک پرتو مادون قرمز که از فضای بین فرستنده و گیرنده عبور می‌کند فعال می‌شوند؛ این سیگنال می‌تواند بوسیله‌ی عبور هر

فصل سوم: کینماتیک خطی ۱۰۱

شیئی از بین فرستنده و گیرنده قطع شود. چیش دروازه‌های نور به شکل زیر است:



دروازه‌های نور در جفت‌های فرستنده-گیرنده ($T-R$) عمل می‌کنند؛ شماره ۱ زمان سنج را به کار می‌اندازد و شماره‌ی ۲ زمان سنج را متوقف می‌کند و زمان سنج دیگری را به کار می‌اندازد. بنابراین، زمان بخش برای اولین $10m$ بدست می‌آید. زمانی که دونه به دروازه‌ی شماره‌ی ۳ رسید، زمان سنجی که با دروازه‌ی شماره‌ی ۲ به کار افتاده بود متوقف می‌شود و زمان بخش برای دومین $10m$ بدست می‌آید. زمان بخش‌ها که برای تمرین 100 متر سرعت بدست آمده است، به قرار زیر بود:

شماره‌ی دروازه‌ی نور	زمان بخش (s)
۱	۱,۵۰
۲	۱,۲۰
۳	۱,۰۵
۴	۰,۹۴
۵	۰,۹۲
۶	۰,۹
۷	۰,۸۹
۸	۰,۹
۹	۰,۹۳
۱۰	۰,۹۴

این اعداد ما را قادر به محاسبه‌ی سرعت متوسط برای مسافت‌های بخش‌های $10-m$ می‌کند. برای بدست آوردن سرعت در 10 متر اول:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{10 - 0}{1,50 - 0} = \frac{10}{1,50} = 6,67 m/s$$

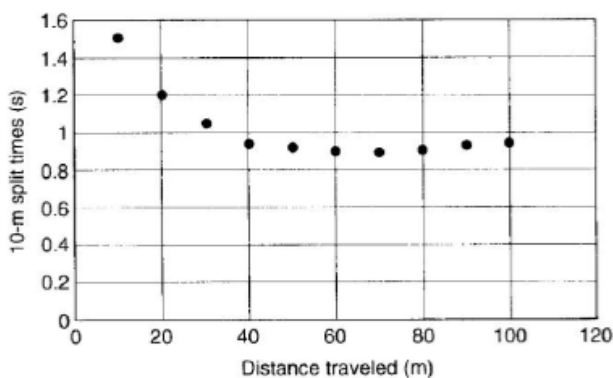
برای مسافت 10 متر دوم:

فصل سوم: کینماتیک خطی ۱۰۲

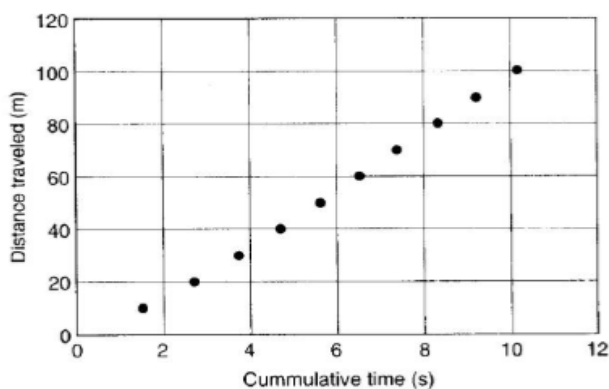
$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{20 - 10}{1.20} = \frac{10}{1} = 10 \text{ m/s}$$

با تکرار این روش برای زمان‌های بخش‌های دیگر، سرعت‌های متوسط ۰٫۶۷، ۰٫۳۳، ۰٫۵۲، ۰٫۶۴، ۰٫۸۷، ۱٫۱۱، ۱٫۲۴، ۱٫۱۱، ۱٫۰۷۵، و ۱٫۰۶۴ m/s را بدست می‌آوریم.

شکل‌های بعدی سه روش مختلف را برای ارائه‌ی این اطلاعات نشان می‌دهند. شکل اول نشان می‌دهد که زمان بخش‌ها چگونه به صورت تابع زمان تغییر می‌کنند:

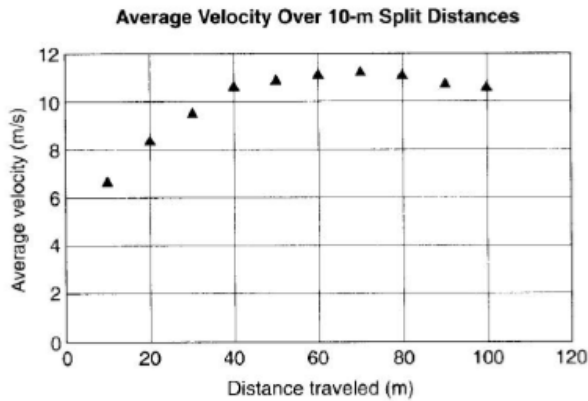


با افزودن زمان بخش‌ها به هم، زمان تجمعی بدست می‌آید که نشان می‌دهد زمان کل ۱۰٫۱۷s است. می‌توانیم مسافت پیموده شده را به صورت تابع زمان تجمعی نیز نشان دهیم:



فصل سوم: کینماتیک خطی ۱۰۳

در انتها می‌توانیم سرعت متوسط برای مجموعه‌ای از مسافت‌های بخش‌های ۱۰ متری را در برابر مسافت طی شده رسم کنیم:



شتاب متوسط برای ۱۰ متر اول با این فرمول تعیین می‌شود:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{6.67 - 0}{1.5 - 0} = 4.45 \text{ m/s}^2$$

فرمول متناظر برای ۱۰ متر دوم عبارت است از:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{8.33 - 6.67}{2.7 - 1.5} = 1.38 \text{ m/s}^2$$

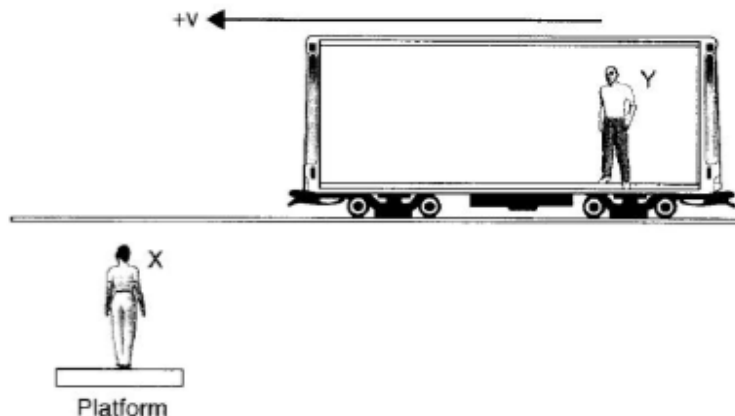
به طور قطع، این مثال، وضعیتی را نشان می‌دهد که در آن شتاب ثابت نیست و در مسافت ۱۰۰ متر تغییر می‌کند. معادله‌های (۱) تا (۴) که برای حرکت با شتاب ثابت استنتاج شده‌اند برای این داده‌ها قابل کاربرد نیستند، مگر در شکل تعدیل شده.

۳-۴ چهارچوب‌های مرجع

معمولاً سرعت‌ها بدون هیچ اشاره‌ای به چهارچوب‌های مرجع بیان می‌شوند. در این مورد، معمولاً پذیرفته شده است که چهارچوب مرجع نسبت به سطح زمین ثابت باشد. با این حال لازم به ذکر است که ممکن است چهارچوب‌های مرجعی را استفاده

فصل سوم: کینماتیک خطی ۱۰۴

کنیم که خودشان نسبت به سطح زمین در حال حرکت هستند. به عنوان مثال، قطاری را در نظر بگیرید که از ایستگاه راه آهن عبور می‌کند. سکو ثابت است، و قطار با سرعت $+V$ نسبت به سکو حرکت می‌کند (شکل ۳-۶).

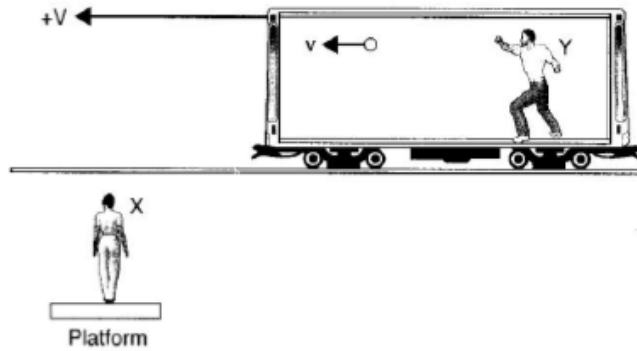


شکل ۳-۶. قطار نسبت به بیننده‌ی که در سکو ایستاده است، با سرعت v به ایستگاه نزدیک می‌شود.

بیننده‌ی X در سکو سرعت نزدیک شدن قطار را به اندازه‌ی $+V$ می‌بیند، به دلیل اینکه از نظر X سرعت از راست به چپ دیده می‌شود، علامت مثبت به طور قراردادی انتخاب شده است. با این حال، بیننده در داخل قطار می‌تواند فرض کند که خودش ساکن است (خود او چهار چوب مرجع است)، و زن X در سکو دارای سرعت $+V$ است.

چه می‌شود اگر مانند شکل ۳-۷ مرد Y در قطار توپی را به سمت سکو پرتاب کند؟ اجازه دهید فرض کنیم سرعت توپ نسبت به مرد Y در داخل قطار $+v$ است. سرعت توپ نسبت به زن X در سکو $(v + V)$ است، یعنی سرعت‌های توپ و قطار با هم. برای مرد Y در داخل قطار سرعت زن X در سکو $+V$ است و سرعت توپ $+v$ است. این موضوع می‌تواند در رویدادهای ورزشی پرتابی که در آنها ورزشکار می‌تواند در طی عمل پرتاب حرکت کند، مهم باشد. برای مثال، شکل ۳-۸ نشان می‌دهد که در پرتاب نیزه سرعت دویدن، v_r ، باید به سرعت افقی، v_h ، افزوده شود. پس سرعت برآیند نیزه (نسبت به زمین) $(v_h + v_r)$ خواهد بود، و سرعت عمودی v_v .

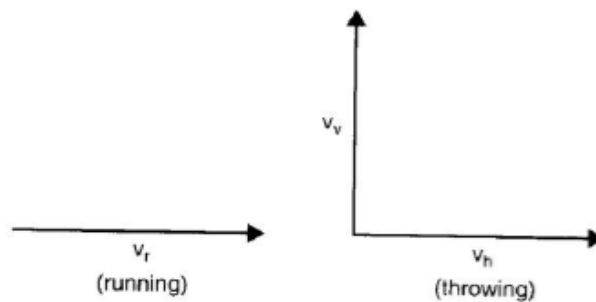
فصل سوم: کینماتیک خطی ۱۰۵



شکل ۳-۷. مرد داخل قطار توپ را در جهت سکو با سرعت v نسبت به قطار پرتاب می‌کند.

۳-۵ پرتابه‌ها

در علوم ورزشی مثال‌های زیادی است که در آنها جسم به هوا پرتاب می‌شود. در همه‌ی موارد، جسم تحت شتاب گرانشی ثابت، که در حدود $9.81 m/s^2$ و به صورت عمودی رو به پایین است، حرکت می‌کند. گالیله اولین شخصی بود که پی برد همه‌ی اشیاء مستقل از وزن آنها با سرعت یکسانی سقوط می‌کنند. بنابراین کره سربی با سرعت مشابه با سرعت کره‌ی چوبی یا شیشه‌ای سقوط می‌کند. همچنین، سرعت سقوط کره سربی کوچک با کره سربی بزرگ یکسان است. در ابتدا پذیرش این نظریه سخت بود، و هنوز هم بسیاری از افراد این مفهوم را نادرست و اغوا کننده می‌دانند. در واقع اشیاء عمدتاً به دلیل نیروهای اصطکاک متفاوت عمل کننده بر روی آنها، با سرعت‌های متفاوتی سقوط می‌کنند. توپ تنیس روی میز نسبت به توپ فولادی هم اندازه‌ی آن با سرعت کمتری سقوط می‌کند، به دلیل این که نیروی اصطکاک اثر



شکل ۳-۸. جمع کردن سرعت دویدن و پرتاب در پرتاب نیزه.

فصل سوم: کینماتیک خطی ۱۰۶

بیشتری را بر روی توپ تنیس روی میز دارد. جرم توپ تنیس کمتر است و بیشتر تحت تاثیر نیروی پسا که بر روی توپها عمل می‌کند، قرار می‌گیرد. اگر بتوان نیروی مقاوم را حذف کرد، همه‌ی اشیاء با سرعت یکسانی سقوط می‌کنند. این موضوع توسط فضانوردان آپولو که پر و ابزار آهنی را در ماه رها کردند و دیدند که در عدم حضور هوا آنها دقیقاً با هم به ماه رسیدند، به طور کامل تأیید شد. در بخش بعدی، ما اثر اصطکاک را نادیده می‌گیریم و پرتابه‌ها را به عنوان اجسامی که دارای شتاب یکنواخت هستند مورد بحث قرار می‌دهیم. می‌توانیم همه‌ی مثال‌های زیر را به عنوان اجسامی در نظر بگیریم که به صورت پرتابه حرکت می‌کنند:

- پرتاب وزنه
- پرش ارتفاع
- پرش طول
- توپ فوتبال
- توپ تنیس
- توپ گلف
- توپ بسکتبال
- پرش با اسکی

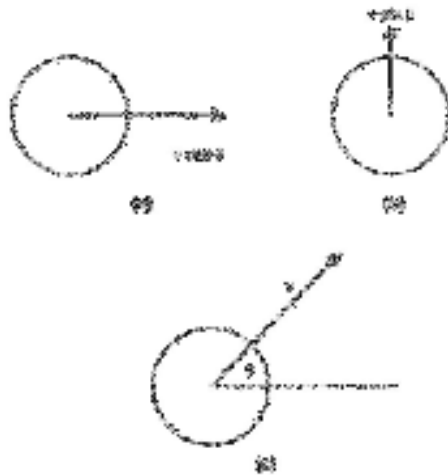
۳-۵-۱ تجزیه سرعت به مولفه‌های افقی و عمودی

یک پرتابه (مانند توپ، نیزه، بدن انسان) که با سرعت v پرتاب شده است (به عنوان مثال با ضربه‌ی پا، با ضربه دست، پرتاب) به طور کلی دارای هر دو مولفه‌ی افقی و عمودی سرعت است. اجازه دهید سرعت v را در ابتدا با زاویه‌ی θ نسبت به سطح افق در نظر بگیریم (شکل ۳-۹).

حرکت افقی

در نبود اصطکاک، مولفه‌ی افقی سرعت یعنی $v \cos \theta$ ثابت باقی می‌ماند. این موضوع نشان می‌دهد که برای محاسبه‌ی مسافت افقی طی شده، کافی است تا از فرمول زیر استفاده کرد:

فصل سوم: کینماتیک خطی ۱۰۷



شکل ۳-۹. توپ پرتاب شده با سرعت (v) و زاویه (θ) .
 (A) مولفه افقی v . (B) مولفه عمودی v . (C) بردار کلی (v) و
 زاویه (θ) آن با سطح افق.

$$\text{زمان} \times \text{سرعت افقی} = \text{مسافت افقی}$$

اگر زمان پرواز پرتابه، T ، معلوم باشد، این رابطه می‌تواند برای بدست آوردن برد پرتابه (یعنی مسافت افقی طی شده) استفاده شود. زمان پرواز می‌تواند بوسیله‌ی در نظر گرفتن حرکت عمودی پرتابه بدست آید.

حرکت عمودی

سرعت عمودی پرتابه $v \sin \theta$ است. در نبود اصطکاک، شتاب رو به پایین شتاب قابل استناد به جاذبه، g ، است. این موضوع نشان می‌دهد که سرعت رو به پایین پرتابه با آهنگ 9.81 m/s در هر ثانیه افزایش می‌یابد. به بیان دیگر سرعت رو به بالای پرتابه با آهنگ 9.81 m/s در هر ثانیه کاهش می‌یابد. این موضوع نشان می‌دهد که پرتابه در ابتدا رو به بالا حرکت می‌کند، اما سرعت رو به بالای آن با گذشت زمان کوچکتر می‌شود. سرانجام، در زمانی که ما t_{up} می‌نامیم، سرعت رو به بالا صفر می‌شود و پرتابه به حداکثر ارتفاع خود می‌رسد. می‌توانیم t_{up} را با استفاده از معادله‌ی $v = u + at$ بدست آوریم. توجه به این موضوع مهم است که این معادله می‌تواند صرفاً برای مولفه‌ی رو به بالای حرکت به کار رود. برای این منظور و اجتناب از هر اشتباهی، جهت رو به بالا را

فصل سوم: کینماتیک خطی ۱۰۸

به صورت $y+$ تعریف خواهیم کرد، بنابراین معادله‌ای که ما برای یافتن t_{up} استفاده خواهیم کرد می‌شود:

$$v_y = u_y + a_y t$$

در زمان $t = 0$ سرعت اولیه $v_{yi} = v \sin \theta$ است

در زمان $t = t_{up}$ سرعت نهایی $v_{yf} = 0$ است

شتاب $a_y = -g$ است (شتاب قابل استناد به جاذبه)

زمان t_{up} مجهولی است که ما می‌خواهیم بدست آوریم.

از این رو:

$$v_{yf} = u_{yi} + at$$

$$0 = v \sin \theta - gt_{up}$$

$$= \frac{v \sin \theta}{g} = t_{up}$$

۲۳-۵-۲ بدست آوردن زمان پرواز T

همچنین برای یافتن زمان پرواز، ما به یافتن زمان t_{down} ، یعنی زمانی که طول می‌کشد تا پرتابه از ارتفاع حداکثر دوباره به زمین برسد، نیاز داریم. جابه‌جایی عمودی را که پرتابه در هنگام فرود طی می‌کند d می‌نامیم. از این معادله استفاده خواهیم کرد:

$$s = ut + \frac{1}{2} at^2$$

اما دوباره برای تاکید بر این که تنها با مولفه‌ی عمودی سروکار داریم، بعد از s و u از پسوند y استفاده می‌کنیم. بنابراین:

$$s_y = u_y t + \frac{1}{2} a_y t^2$$

در این مورد:

$$-d = s_y = \text{جابه‌جایی عمودی}$$

$$-g = a_y = \text{شتاب عمودی}$$

$$0 = u_y = \text{سرعت اولیه}$$

فصل سوم: کینماتیک خطی ۱۰۹

$$\text{زمان} = t_{down} = t$$

بدست می آید:

$$-d = -\frac{1}{2}gt_{down}^2$$

$$t_{down} = \sqrt{\frac{2d}{g}}$$

مسافت d وابسته است به سطحی از زمین که پرتابه در آن فرود می آید. این سطح می تواند بالای سطحی باشد که پرتابه رها شده است، در همان سطحی باشد که پرتابه رها شده است، یا زیر سطحی باشد که پرتابه رها شده است. اگر پرتابه در همان سطحی که رها شده است فرود آید، آنگاه $d = h$. برای یافتن h با استفاده از $v_y^2 = u_y^2 + 2a_y s_y$ خواهیم داشت:

$$s_y = h? \text{ جا به جایی}$$

$$u_y = V \sin \theta = \text{سرعت اولیه}$$

$$v_y = 0 = \text{سرعت نهایی}$$

$$a_y = -g = \text{شتاب}$$

بنابراین:

$$0 = (v \sin \theta)^2 - 2gh$$

$$h = \frac{(v \sin \theta)^2}{2g}$$

چون، ارتفاع $h =$ فرود عمودی d ، می توانیم t_{down} را به این شکل بدست آوریم:

$$t_{down} = \sqrt{\frac{2}{g} \times \frac{(v \sin \theta)^2}{2g}}$$

$$t_{down} = \frac{v \sin \theta}{g}$$

فصل سوم: کینماتیک خطی ۱۱۰

پس، روشن است که اگر ارتفاع فرود و پرتاب یکسان باشد، منجر می شود به:

$$t_{up} = t_{down}$$

در این وضعیت، زمان پرواز T است که به روش زیر تعیین می شود:

$$T = t_{up} + t_{down} = \frac{2v \sin \theta}{g}$$

به دلیل اینکه g ثابت است، تغییر T تنها بوسیله تغییر دادن سرعت v یا $\sin \theta$ بدست می آید. در جدول زیر تغییرات $\sin \theta$ همراه با θ نشان داده شده است:

θ (°)	$\sin \theta$
۰	۰,۰۰۰۰
۱۵	۰,۲۵۸۸
۳۰	۰,۵۰۰۰
۴۵	۰,۷۰۷۱
۶۰	۰,۸۶۶۰
۹۰	۱,۰۰۰۰

■ مثال ۳-۵

زمان پرواز یک توپ راگی که با سرعت $15m/s$ با زاویه 60° نسبت به سطح افقی ضربه خورده است را محاسبه کنید.

جواب

$$T = \frac{2v \sin \theta}{g} = \frac{2 \times 15 \times \sin(60^\circ)}{9,81} = \frac{30 \times 0,8660}{9,81} = 2,65s$$

۳-۵-۳ بدست آوردن برد افقی R

با استفاده از یک پسوند x برای مشخص ساختن حرکت افقی، می توانیم برای بدست آوردن برد افقی، از فرمول زیر استفاده کنیم:

$$S_x = v_x t$$

اگر ارتفاع رهایی = ارتفاع فرود، در نتیجه برد:

فصل سوم: کینماتیک خطی ۱۱۱

$$R = v \cos \theta \times \frac{v \sin \theta}{g} = \frac{v^2 \sin \theta \cos \theta}{g}$$

به دلیل ویژگی توابع مثلثاتی، این فرمول نشان می‌دهد که زاویه‌ی مطلوب برای بیشترین برد 45° است.

۳-۵-۴ پرتابه با ارتفاع رهایی بالاتر یا پائین‌تر از ارتفاع سطح فرود در این وضعیت، مسافت سقوط عبارت است از:

$$d = x + h$$

$$d = x + \frac{(v \sin \theta)^2}{2g}$$

در اینجا $x = x_2 - x_1$ و x_2 به ترتیب ارتفاع‌های پرتاب و فرود هستند. مسلماً اگر x_2 بزرگتر از x_1 باشد (سطح پرتاب بالاتر از سطح فرود باشد) x مثبت است، و اگر x_2 کوچکتر از x_1 باشد (سطح پرتاب پائینتر از سطح فرود باشد) x منفی است. این مسافت‌های سقوط مختلف بر روی زمان سقوط t_{down} اثر خواهد گذاشت.

$$t_{down} = \sqrt{\frac{2x}{g} + \frac{(v \sin \theta)^2}{g^2}}$$

$$t_{down} = \sqrt{\frac{2gx + (v \sin \theta)^2}{g^2}}$$

بنابراین اکنون کل زمان پرواز می‌شود:

$$T = t_{up} + t_{down}$$

$$T = \frac{v \sin \theta}{g} + \sqrt{\frac{2gx + (v \sin \theta)^2}{g^2}}$$

فصل سوم: کینماتیک خطی ۱۱۲

$$= \frac{v \sin \theta + \sqrt{2gx + (v \sin \theta)^2}}{g}$$

برد اصلاح شده‌ی پرتابه اکنون می‌تواند بوسیله‌ی این فرمول محاسبه شود:

$$R = v \cos \theta \times T$$

بنابراین:

$$R = v \cos \theta \times \frac{2v \sin \theta}{g} = \frac{2v^2 \sin \theta \cos \theta}{g}$$

می‌توان مشاهده کرد که تغییر در v ، x و θ همگی بر برد R اثر می‌گذارند. باید تاکید کرد که این فرمول تنها زمانی به کار می‌رود که بتوان اصطکاک ایجاد شده توسط هوا را نادیده گرفت. این اصطکاک معمولاً باعث حرکت کند اشیاء در هوا می‌شود. پرتاب وزنه مثال خوبی است که در آن اصطکاک می‌تواند نادیده گرفته شود. در این مورد، زاویه‌ی مطلوب برای بدست آوردن برد بیشتر وابسته به سرعت پرتاب و ارتفاع پرتاب است. زاویه‌ی مطلوب معمولاً نزدیک به 45° بدست می‌شود.

■ مثال ۳-۶

یک وزنه می‌تواند با سرعت 13.2 m/s از ارتفاع 2.15 m بالای زمین پرتاب شود. زاویه‌ی مطلوب پرتاب برای رسیدن به برد حداکثر چقدر است؟

جواب

با استفاده از صفحه‌ی گسترده، و با فرض $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ ، می‌توان نشان داد که زاویه‌ی مطلوب در این وضعیت 41.9° است و برد 19.795 m است.

۳-۵-۵ مسیر سهمی شکل

مسیر دو بعدی دنبال شده توسط پرتابه به صورت سهمی است. با فرض این که حرکت پرتابه محدود به صفحه‌ی $x-y$ می‌شود و شیئی از $x = 0$ ، $y = 0$ می‌شود، داریم:

فصل سوم: کینماتیک خطی ۱۱۳

$$y = v_{yi}t - \frac{1}{2}gt^2$$

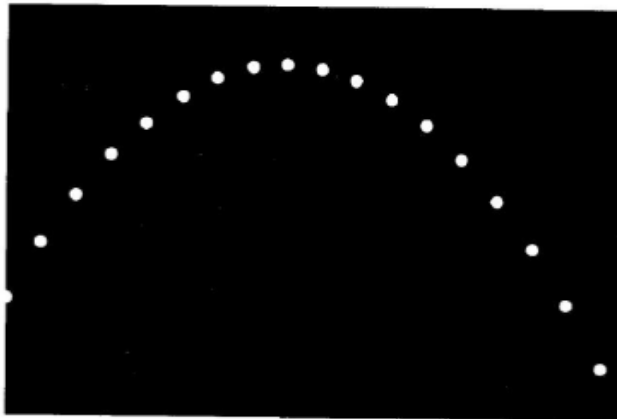
و

$$x = v_{xi}t$$

بنابراین:

$$y = \frac{v_{yi}}{v_{xi}}x - \frac{1}{2}\frac{g}{v_{xi}^2}x^2$$

این فرمول سهمی در صفحه $x-y$ است. اگر مقاومت هوا قابل اغماض باشد، برای پرتابه‌ها مسیر سهمی شکل بدست خواهد آمد. اما همیشه اینطور نیست، به خصوص اگر سرعت اولیه پرتابه زیاد باشد. شکل ۳-۱۰ توپ پرتاب شده با زاویه‌ی ۴۵ را نشان می‌دهد. در اینجا مسیر توپ به صورت متوالی با بسامد 28Hz (۲۸ تصویر در ثانیه) نشان داده شده است. سرعت پرتاب 4m/s است. این شکل چند مشخصه‌ی مهم حرکت پرتابی را نشان می‌دهد:



شکل ۳-۱۰. توپ با زاویه‌ی ۴۵ از سمت چپ پرتاب شده است. بسامد فلش 28Hz است.

۱. سرعت افقی پرتابه زمانی که رها می‌شود ثابت است. در شکل ۳-۱۰، حرکت افقی توپ بین فلش‌های چشمک زن 0.1 متر است، و در کل

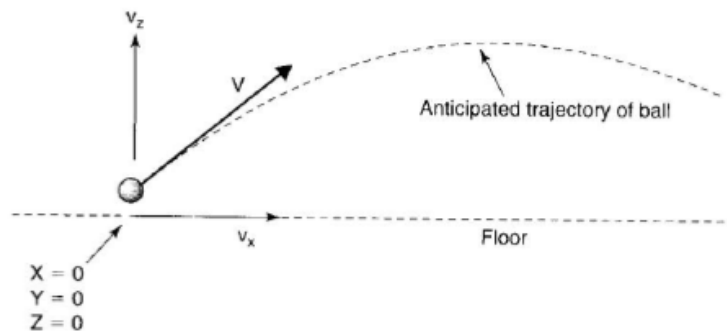
تصویر تغییر نمی‌کند.

۲. سرعت عمودی توپ با آهنگ ثابتی تغییر می‌کند. در شکل ۳-۱۰ حرکت عمودی توپ نشان می‌دهد که سرعت عمودی با سرعت مثبت یا رو به بالا شروع می‌شود، و تقریباً بعد از نهمین فلش تا صفر کاهش می‌یابد، و با سرعت منفی یا رو به پائین به پایان می‌رسد. همچنین توجه به این نکته مهم است که در دو طرف قله‌ی مسیر حرکت، سرعت رو به پائین مشابه سرعت رو به بالا است.

تحلیل حرکت توپ‌هاکی بعد از پرش از کف با استفاده از تحلیل حرکت

مورد پژوهی ۳-۳

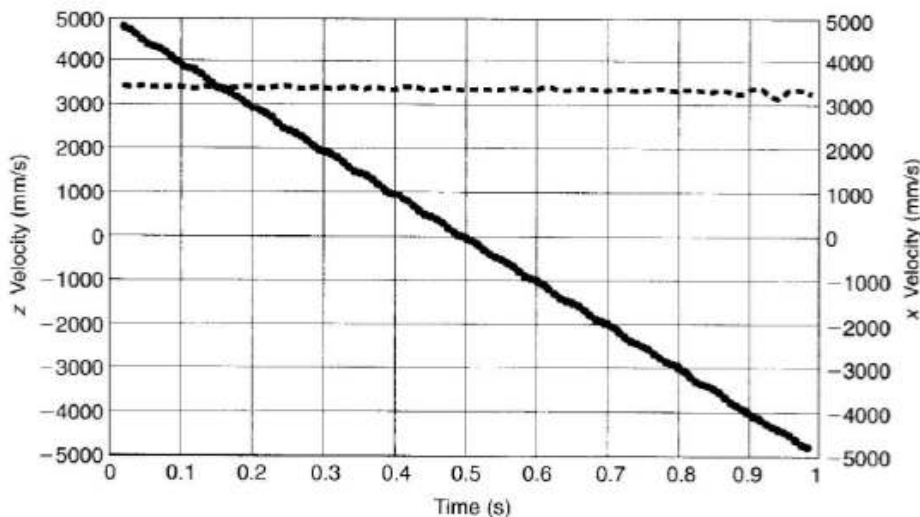
یک توپ هاکی رو به پائین و به سمت سطح صلب پرتاب می‌شود و با زاویه‌ی کمی، از سطح به بالا می‌پرد. یک سیستم تحلیل حرکت نوری-الکترونیکی برای ردیابی مسیر توپ‌هاکی تا پرش دوباره استفاده می‌شود. می‌توان فرض کرد حرکت توپ در یک صفحه واقع شده است (به عبارت دیگر می‌توان فرض کرد که توپ تنها در دو بعد حرکت می‌کند). سیستم مختصات طوری رسم می‌شود که محور z عمودی، محور x افقی، و محور y با زاویه‌ی عمود نسبت به هر دوی x و z است (اما محور y در این مورد پژوهی استفاده نمی‌شود). مبدأ سیستم مختصات در نقطه‌ی آغاز پرش قرار گرفته است. مختصات آغازین ($t = 0$) به شکل زیر می‌باشد:



مختصات x ، y و z مرکز توپ هاکی اندازه‌گیری می‌شود و هر $1/120$ ثانیه توسط سیستم اندازه‌گیری ثبت می‌شود. در اصل، سرعت افقی، v_x ، توپ باید در غیاب

فصل سوم: کینماتیک خطی ۱۱۵

مقاومت هوا ثابت باقی بماند. سرعت عمودی تحت تاثیر شتاب قابل استناد به جاذبه خواهد بود، و در اصل در هر ثانیه با آهنگ 9.81 m/s در جهت رو به پائین افزایش خواهد یافت. در اینجا نموداری است که سرعت‌های x و z توپ که بوسیله‌ی مشتق‌گیری از داده‌های جابه‌جایی‌های x و z بدست آمده است را نشان می‌دهد.

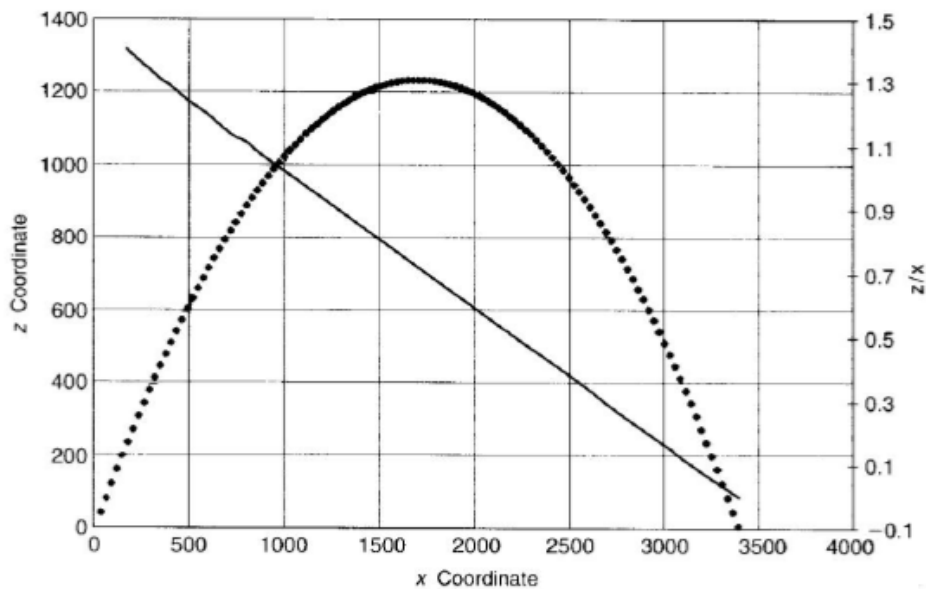


نمودار نشان می‌دهد که در واقع مولفه‌ی x سرعت که بوسیله‌ی خط تیره (خط فاصله دار) نشان داده شده است، در سرتاسر زمان آزمایش با مقدار نزدیک به 3400 mm/s ثابت است. در این فاصله‌ی زمانی از مقاومت هوا چشم پوشی شده است. در زمان تقریبی $t = 1\text{ s}$ توپ دوباره می‌پرد، و سرعت‌ها در نتیجه‌ی ضریب ارتجاعی تغییر خواهد کرد. مولفه‌ی z سرعت، که بوسیله‌ی خط پیوسته نشان داده شده است، از مقدار مثبت (رو به بالا) 5000 mm/s تا مقدار منفی (رو به پائین) -5000 mm/s تغییر می‌کند. برای تأیید سهمی شکل بودن مسیر توپ و تخمین مولفه‌های سرعت ابتدایی، شکل زیر را در نظر بگیرید که نمودارهای مختصات z (به میلی متر) در برابر x بوسیله‌ی نقطه چین نشان داده شده است و z/x در برابر x (به میلی متر) با خط پیوسته نشان داده شده است.

در اینجا مقدار z/x (خط راست پیوسته) در محور عمودی سمت راست شکل رسم شده است و مختصات z (نقاط مجزا) در محور عمودی چپ رسم شده است. این

فصل سوم: کینماتیک خطی ۱۱۶

شکل تأیید می‌کند که شکل مسیر، سهمی است. عرض از مبدا و شیب بدست آمده از خط راست به ترتیب $۱,۴۵۵۵$ و $-۰,۰۰۰۴۲۸۶\text{mm}^{-۱}$ هستند. مقدار ابتدائی سرعت x بر حسب متر بر ثانیه و از روی شیب به این صورت محاسبه می‌شود:



$$۰,۴۲۸۶ = \frac{1}{2} \frac{g}{v_x^2}$$

$$v_x = \sqrt{\frac{g}{2(-۰,۴۲۸۶)}} = ۳,۳۸۳\text{m/s}$$

با استفاده از عرض از مبدا، مقدار اولیه‌ی سرعت z را به صورت زیر است:

$$۱,۴۵۵۵ = \frac{v_z}{v_x} = \frac{v_z}{۳,۳۸۳}$$

$$v_z = ۳,۳۸۳ \times ۱,۴۵۵۵ = ۴,۹۲۴\text{m/s}$$

بردی که مستقیماً از داده‌های مختصات تخمین زده شده است، ۳۳۹۴mm یا

$۳,۳۹۴\text{m}$ است. برد محاسبه شده از فرمول $R = \frac{v^2 \sin \theta \cos \theta}{g}$ عبارت است از:

فصل سوم: کینماتیک خطی ۱۱۷

$$R = \frac{2(4,924) \times (3,383)}{9,81} = 3,396m$$

خلاصه

این فصل ایده‌های مهم حرکت یکنواخت و شتاب یکنواخت را در مطالعه‌ی کینماتیک به طور خلاصه مطرح کرد. حرکت "طبیعی" جسم، سرعت ثابت در خط راست است، اما ما در طبیعت مثال‌های به مراتب زیادی از اشیاء را می‌بینیم که ثابت هستند یا با شتاب ثابت حرکت می‌کنند. فرمول‌های قابل کاربرد برای حرکت یکنواخت و شتاب یکنواخت، برای یک نمونه پرتابه که در نبود مقاومت هوا حرکت می‌کرد، شرح داده شد و به کار گرفته شد.

خود آزمایی

۱. جدول زیر پیشروی اتومبیل مسابقه‌ی فرمول ۱ را زمانی که در مسیر مستقیم حرکت می‌کرد نشان می‌دهد. نشانگرهای مسافت در کنار مسیر و در هر ۱۰۰ متر قرار گرفته بودند، و وقت نگهدار در اتاقک مشاهده‌ی تیم^۱ زمان‌های عبور اتومبیل از نشانگر مسافت را ثبت می‌کرد. نتایج در جدول زیر نشان داده شده است:

نشانگر مسافت	زمان (ثانیه)
۱	۱,۲
۲	۲,۴
۳	۳,۶
۴	۴,۸
۵	۶,۰
۶	۷,۲
۷	۸,۴
۸	۹,۶

۱. Team Observation Hut

فصل سوم: کینماتیک خطی ۱۱۸

بین نشانگرهای مسافت ۱۰۰ متر فاصله وجود دارد. با استفاده از این داده‌ها، یک نمودار رسم کنید و از روی شیب نمودار سرعت اتومبیل را محاسبه کنید. دو مورد از گزینه‌های زیر را به عنوان توصیف کننده‌ی مناسب برای حرکت اتومبیل انتخاب کنید:

الف) سرعت ثابت نیست.

ب) نیروی برآیند بر روی اتومبیل صفر است.

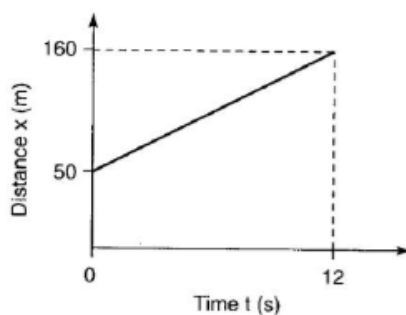
ج) نیروی رانشی که توسط چرخ‌ها به زمین اعمال شده باید صفر باشد.

د) در فاصله‌ی زمانی ۰ تا ۹٫۶s سرعت اتومبیل ثابت است.

و) شتاب اتومبیل ثابت است.

۲. یک پاراگراف کوتاه در مورد کاربرد قانون اول نیوتن برای حرکت اتومبیل بنویسید. اگر عوامل زیر نقشی را در حرکت دارند، شرح دهید: اصطکاک، جاذبه، نیروی رانشی، مقاومت هوا، و گشتاور.

۳. نمودار زیر را در نظر بگیرید، که مسافت طی شده توسط دوندۀ را در امتداد مسیر مستقیم (x) به صورت تابع زمان (t) نشان می‌دهد:



یک معادله برای x به عنوان تابع t به شکل زیر بنویسید:

$$x = mt + c$$

در اینجا m و c ثابت هستند. m و c را محاسبه کنید.

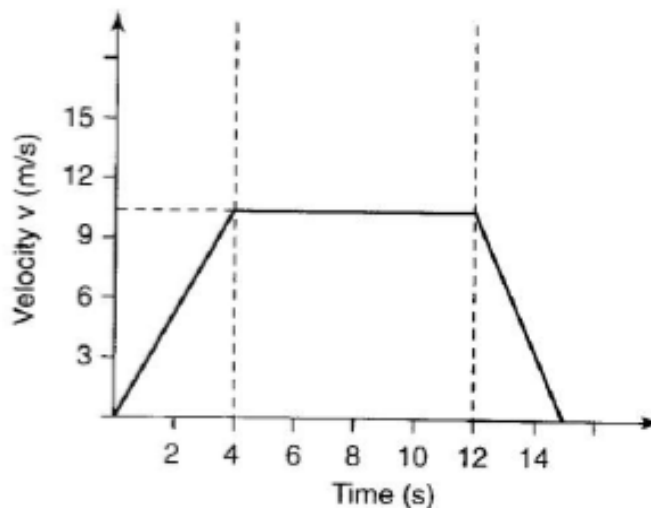
فصل سوم: کینماتیک خطی ۱۱۹

۴. مردی در مسابقات لوج سواری داخل لوج خود می‌پرد و در بخش سرازیری مسیر مسابقه در نزدیکی خط شروع، شروع به شتاب گیری می‌کند. در زمان t ، سرعت او صفر است. بعد از ۵ ثانیه، سرعت او 20 m/s است. با استفاده از معادله $v = u + at$ شتاب او را به ms^{-2} محاسبه کنید.
۵. در مسابقات لوج سواری دو نفره، شتاب لوج 4ms^{-2} است. با این دانسته که سرعت لوج هنگام عبور از نشانگر 100 m ، 10 m/s است، سرعت لوج در هنگام عبور از نشانگر 200 m چقدر است؟ فرض کنید شتاب بین 100 m و 200 m ثابت است.
۶. دنده‌ی سرعت با شروع از حالت سکون مسافت 60 m را در زمان $6/5$ دویید. سرعت متوسط دنده در این مسافت چقدر است؟
۷. توپ مهاجم نوک منچستر یونایتد در فوتبال بوسیله‌ی تکل دفاع تیم لیورپول از دست می‌رود. بازیکن دیگری از منچستر یونایتد با سرعت 6 m/s از فاصله‌ی ۱۴ متری به سمت توپ می‌دود، در حالیکه بازیکن لیورپول از فاصله‌ی ۱۳ متری با سرعت $5/5\text{ m/s}$ شروع به نزدیک شدن به سمت توپ می‌کند. کدام بازیکن زودتر به توپ می‌رسد؟
۸. قایقرانی با شروع حرکت از حالت استراحت سرعت خود را در ۵ ثانیه با شتاب یکنواخت به $3/5\text{ m/s}$ می‌رساند. شتاب قایقران چقدر است؟ سرعت بعد از ۱۰ ثانیه چقدر خواهد بود؟
۹. اتومبیل مسابقه‌ی فرمول ۱ که با سرعت 20 m/s در حال حرکت است، به بخش طولانی و مستقیم مسیر می‌رسد و با شتاب یکنواخت در زمان $5/3\text{ s}$ سرعت خود را از 20 m/s به 55 m/s می‌رساند. شتاب چقدر است؟ اگر این شتاب برای ۲ ثانیه‌ی دیگر ادامه پیدا کند، سرعت نهایی چقدر است؟

فصل سوم: کینماتیک خطی ۱۲۰

۱۰. حرکت لوج در نمودار سرعت (v) در برابر زمان (t) زیر نشان داده شده است:

- الف) در کدام دوره‌ی زمانی شتاب یکنواخت است؟
 ب) در کدام دوره‌ی زمانی لوج متوقف می‌شود؟
 ج) بین ۰ و ۵ ثانیه لوج چقدر پیشرفت می‌کند؟
 د) در دوره زمانی که شتاب ثابت است، مقدار شتاب (a) چقدر است؟ (شتاب را از شیب نمودار محاسبه کنید).



۱۱. تیم روئینگ (پاروزنی) کمبریج با سرعت ثابت 4 m/s در حال حرکت است. سکاندار دستوری برای افزایش سرعت می‌دهد، و قایق در مسافت 5 m با شتاب یکنواخت به سرعت 6 m/s می‌رسد. شتاب در مسافت ۵ متری چقدر است؟

۱۲. دوست یک دونه‌ی 5000 متر، زمان بخش‌های 400 متری دویدن او را در 5000 متر ثبت کرد. نتایج عبارت‌اند از: $27:10$ ، $26:14$ ، $25:18$ ، $1:21$ ، $1:18$ ، $16:18$ ، $17:14$ ، $17:14$ ، $1:18$ ، $1:18$ ، $1:18$ ، $19:12$ و $40:25$ (آخرین نیم بخش). (زمان‌ها با یک علامت دو نقطه که بین دقیقه و

فصل سوم: کینماتیک خطی ۱۲۱

ثانیه قرار دارد، نشان داده شده‌اند). سرعت متوسط را برای هر بخش بدست آورید. نمودار افزایش و کاهش سرعت را در طول مسیر مسابقه رسم کنید. بین کدام بخش‌ها افزایش سرعت او بیشتر است؟ در بین کدام بخش‌ها کاهش سرعت بیشترین است؟

۱۳. توپ بسکتبال به صورت عمودی به هوا پرتاب می‌شود و قبل از متوقف شدن و برگشتن به پائین $6m$ متر بالا می‌رود. توپ بسکتبال با چه سرعتی پرتاب شده است؟ g را $9.81ms^{-2}$ در نظر بگیرید.

۱۴. یک نفر در پرش طول با سرعت $10m/s$ و زاویه‌ی 25° نسبت به سطح افق پرش می‌کند. با فرض اینکه ارتفاع‌های پرش و فرود او یکسان هستند و با نادیده گرفتن اصطکاک، برد و حداکثر ارتفاع پرش کننده را محاسبه کنید. g را $9.8ms^{-2}$ در نظر بگیرید.

۱۵. وزنه‌ای با سرعت $12.5m/s$ از ارتفاع $2m$ بالای سطح زمین پرتاب می‌شود. زاویه‌ی اندازه‌گیری شده نسبت به سطح افق 42° است. مسافت افقی را که در آن وزنه با زمین برخورد می‌کند محاسبه کنید. از اصطکاک چشم پوشی کنید. g را $9.81ms^{-2}$ در نظر بگیرید.

۱۶. وزنه‌ای با سرعت $14m/s$ از ارتفاع $2.2m$ بالای سطح زمین پرتاب می‌شود. در این وضعیت زاویه‌ی مطلوب پرتاب برای حداکثر برد چیست؟ از اصطکاک چشم پوشی کنید. g را $9.81ms^{-2}$ در نظر بگیرید. (برای پاسخ دادن به سوال از صفحه گسترده استفاده کنید).

۱۷. توپ بیسبال با سرعت $15m/s$ با زاویه‌ی 30° نسبت به سطح افق پرتاب می‌شود.

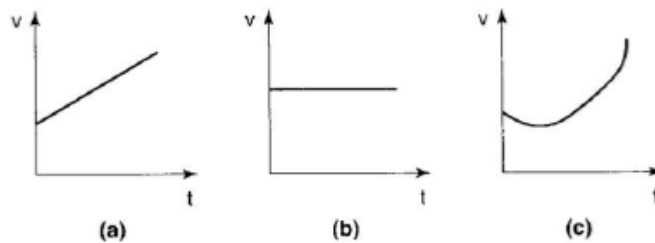
الف) هنگامی که توپ دست را ترک می‌کند مولفه‌های افقی و عمودی سرعت چقدر هستند؟

ب) هنگامی که توپ به حداکثر ارتفاع خود می‌رسد سرعت افقی آن چقدر است؟

فصل سوم: کینماتیک خطی ۱۲۲

(ج) در چه زمانی بعد از پرتاب توپ به حد اکثر ارتفاع خود می‌رسد؟
 (د) در این زمان توپ چه مسافت افقی و عمودی را طی کرده است؟
 اگر توپ از ارتفاع $1.2m$ بالای سطح زمین پرتاب شود و در نقطه‌ی 0.5 متر زیر سطحی از زمین که از آن پرتاب شده است، فرود آید، برد توپ چقدر خواهد بود؟

۱۸. سه نمودار زیر سرعت دوچرخه سوار را در سه مرحله‌ی 5-km تایم تریل نشان می‌دهد. کدام یک از این نمودارها مرتبط با حرکت با شتاب یکنواخت است؟ در کدام یک از این نمودارها، معادلات (۱) تا (۴) قابل کاربرد است؟



منبع

Vincent, WJ (۲۰۰۵). *Statistic in Kinesiology, Human Kinetics ۳rd Ed.*, Champaign, IL.

خواندنی پیشنهادی

Hall S (۲۰۰۲). *Basic Biomechanics*. McGraw-Hill Education-Europe.

فصل چهارم

تعادل

اهداف فصل

اهداف این فصل عبارتند از :

- تعریف مفهوم تعادل ایستا.
- شرح تاثیر نیرو و وضعیت گشتاور بر تعادل ایستا.
- توضیح ایده‌ی مرکز جرم (CM) یک جسم با اندازه محدود.
- توضیح روش قطعه‌ای برای محاسبه مرکز ثقل یک فرد.
- ارائه‌ی مفاهیم هیدروستاتیک و شناوری.

نتایج فصل:

پس از مطالعه‌ی این فصل، دانشجو قادر خواهد بود تا:

- بین جسمی که دارای تعادل ایستا است و جسمی که دارای تعادل ایستا نیست تمایز قائل شود.
- وضعیت‌های تعادل را برای محاسبه نیروهای ناشناخته به کار گیرد.
- برای برآورد مرکز ثقل یک شخص از روی تصویر دو بعدی، از روش قطعه‌ای استفاده کند.

فصل چهارم: تعادل ۱۲۴

- محاسبات ساده شامل محاسبه‌ی فشار هیدروستاتیک و وزن مخصوص را انجام دهد.
- نمودار جسم آزاد را رسم کرده و از آن استفاده کند.

۴-۱ شرایط تعادل ایستا

هنگامی که تمامی بخش‌های یک جسم در حالت سکون و یا حرکت با سرعت ثابت و یکسان هستند، جسم در حال تعادل است. یکی از مشخصه‌های جسم داری تعادل این است که برآیند مولفه‌های نیرو در هر جهت صفر است. دیگر ویژگی چنین جسمی این است که برآیند گشتاورهای نیروها حول هر نقطه در همان صفحه‌ای که نیرو عمل می‌کند صفر است.

تعریف دقیق نیرو در فصل ۵ ارائه شده است؛ به هر حال برای اهداف این فصل درباره‌ی تعادل، نیروها کمیت‌های برداری هستند که تمایل دارند موجب حرکت اهداف مادی (اشیاء) شوند. در این فصل **گشتاور نیرو** به عنوان میزان اثر چرخانندگی نیرو تعریف می‌شود.

در پرتو این ایده، می‌توانیم مقتضیات یک جسم را برای داشتن تعادل ایستا، به این صورت خلاصه کنیم:

$$\sum F = 0$$

و

$$\sum M = 0$$

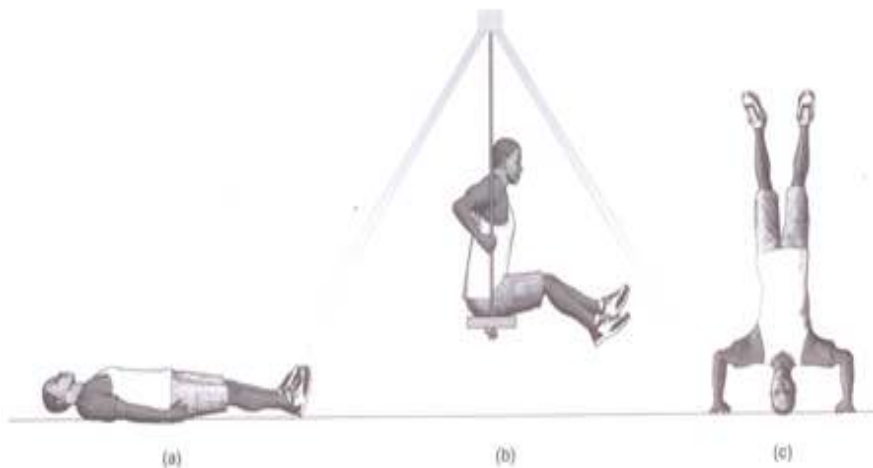
یعنی، حاصل جمع همه‌ی نیروهای عمل‌کننده بر جسم صفر است، و حاصل جمع ممان‌های همه آن نیروها صفر است. همچنین می‌توانیم بین انواع مختلف تعادل برای یک شیء بر اساس پایداری آن تفاوت قائل شویم:

- **تعادل پایدار:** یک آشفتگی کوچک در جسم، نیروی بازگرداننده‌ای تولید می‌کند تا آن را به حال تعادل برساند،
- **تعادل ناپایدار:** یک آشفتگی کوچک در جسم، منجر به یک انحراف بزرگ از تعادل می‌شود،

فصل چهارم: تعادل ۱۲۵

▪ **تعادل خنثی:** آشفته‌گی جسم، به سادگی آن را به یک موقعیت جدید (تعادل) جابه‌جا می‌کنند.

این سه نوع تعادل در شکل ۴-۱ توضیح داده شده است.



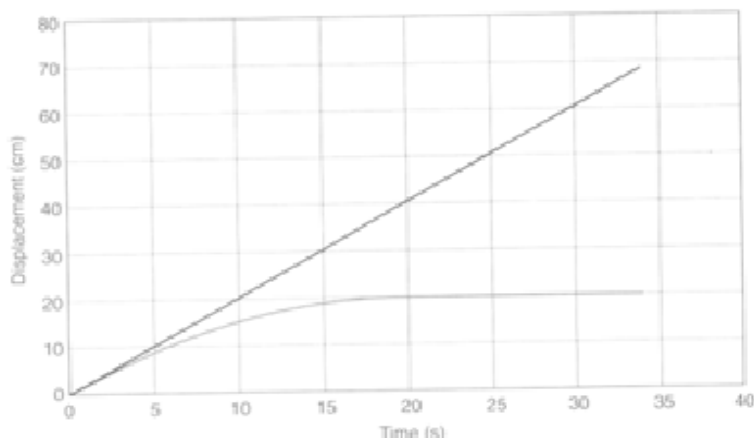
شکل ۴-۱. (a) مرد خوابیده بر روی زمین (تعادل خنثی) (b) مرد نشسته بر روی تاب (تعادل پایدار) (c) مرد در بالانس سه پایه (تعادل ناپایدار).

۴-۲ اثر اصطکاک و اهمیت آن برای ایجاد تعادل

بسیاری از اشیائی که روزمره با آنها سرو کار داریم، بدلیل اثرات نیروی اصطکاک در تعادل هستند. برای مثال یک اتومبیل که در یک سرایشی پارک شده است، به اصطکاک ترمزها تکیه می‌کند تا مانع از شتاب گرفتنش به سمت پائین سرایشی شود. اگر سطوح بدون اصطکاک بودند، اشیاء تمایل داشتند تا حتی در کوچکترین سرایشی لیز بخورند، تمایل داشتند تا در پاسخ به حتی کوچکترین نیرو یا آشفته‌گی به اطراف حرکت کنند. اشیائی که نسبت به سطحی که بر روی آن قرار گرفته‌اند ساکن هستند تحت تاثیر **اصطکاک ساکن** هستند. زمانی که سطوح نسبت به هم حرکت می‌کنند، اصطکاک به عنوان نیروی ترمزی (باز دارنده) عمل می‌کند. ما در بخش ۳-۲ دیدیم که چرخ دستی بدون اصطکاک، همیشه با سرعت ثابتی در یک مسیر افقی حرکت می‌کرد، مگر اینکه

فصل چهارم: تعادل ۱۲۶

بعضی نیروها در آن حرکت مداخله کنند. به هر حال اگر اصطکاک وجود داشت با پیشرفت زمان سرعت حرکت چرخ دستی کندتر می‌شد و سرانجام متوقف می‌شد. پس نمودار جابه‌جایی در برابر زمان احتمالاً مانند شکل ۲-۴ خواهد شد.



شکل ۲-۴. نمودار جابه‌جایی در برابر زمان برای چرخ دستی در یک مسیر مستقیم که دارای اصطکاک است، بوسیله‌ی خط پائینی نشان داده شده است. خط بالایی نشان می‌دهد که اگر اصطکاک وجود نداشت چه اتفاقی می‌افتد.

چرخ دستی با سرعت تقریبی 2 m/s شروع به حرکت می‌کند اما بلافاصله این سرعت را از دست می‌دهد. واضح است که وضعیت دارای اصطکاک کاملاً متفاوت از وضعیت بدون اصطکاک در شکل ۲-۳ به نظر می‌رسد. مشاهده می‌شود که با پیشرفت زمان منحنی شکل ۲-۴ به صورت تدریجی شیب خود را از دست می‌دهد. سرانجام منحنی افقی می‌شود، که نشان دهنده‌ی این است که تغییرات جابه‌جایی با زمان متوقف شده است؛ بنابراین سرعت صفر است. این مثالی از نتایج حاصل از اصطکاک است و در این مورد چون سطوح نسبت به یکدیگر حرکت می‌کنند، به عنوان **اصطکاک لغزشی** توصیف می‌شود. توجه کنید که چرخ دستی که با یک سرعت ثابت در یک مسیر بدون اصطکاک حرکت می‌کند نمونه‌ای از یک جسم در حال تعادل است. از طرف دیگر، یک چرخ دستی که سرعت آن به صورت تابعی از زمان کم می‌شود، جسمی را نشان می‌دهد که در تعادل نیست؛ با این حال به محض اینکه متوقف شود و

فصل چهارم: تعادل ۱۲۷

به حالت سکون درآید، در تعادل خواهد بود.
اصطکاک لغزشی مثالی از اصطکاک کینتیک می باشد. مثال‌هایی از موقعیت‌هایی که اصطکاک در آنها موثر عبارتند از:

کاهش تدریجی سرعت توپ گلف هنگام غلت خوردن در بین چمن‌ها
گرم شدن ترمزهای اتومبیل، هنگام ایستادن اتومبیل
سکون یک جسم بر روی یک سطح شیب دار (اگر اصطکاک نبود به پائین سر می خورد)
افرادی که راه می روند و نمی افتند
دوچرخه و دوچرخه سواری که از یک گوشه دور می زنند

اصطکاک همیشه وجود دارد ولی بعضی اوقات به شکل آشکار است و در برخی زمان‌های دیگر اصطکاک به شکلی وجود دارد که آشکار نیست. می‌توان در شرایط ویژه اصطکاک را تا مقادیر بسیار کم کاهش داد. مثال‌هایی از موقعیت‌های با اصطکاک کم عبارتند از:

یک اسکیت باز که در یک خط راست حرکت می‌کند
پیچ خوردن (بر روی سطح یخ)
اسکی (روی برف)

به طور خلاصه، برای اینکه جسم در تعادل باشد وجود اصطکاک ضروری نیست، اما برای بسیاری از اشیاء روی زمین، اصطکاک نیرویی است که از سر خوردن و لغزیدن آنها جلوگیری می‌کند و به طور کلی آنها را ساکن نگه می‌دارد.

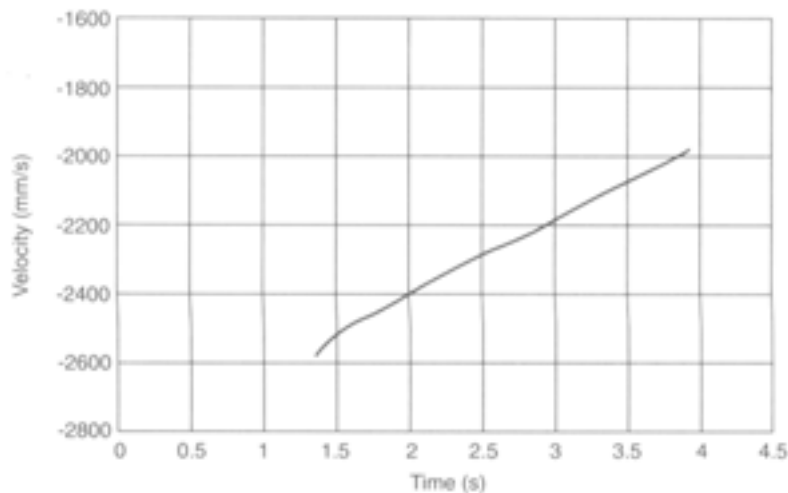
توپ هاکی غلتان بر روی سطح پلیمر سنتزی صاف

مورد پژوهی ۴-۱

توپ غلتان بدلیل تماس با کف یا سطحی که بر روی آن حرکت می‌کند، متحمل اصطکاک را می‌شود. یک توپ‌هاکی در طی غلتیدن بر روی سطح افقی صاف، با استفاده از سیستم تحلیل حرکت دنبال شد. سطح، کف سفت یک آزمایشگاه بود که با سطح پلیمری سنتزی پوشیده شده بود. نمودار زیر سرعت توپ را در یک فاصله زمانی حدوداً ۲/۵ ثانیه ای نشان می‌دهد. واحدهای سرعت میلی متر بر ثانیه هستند، و جهت

فصل چهارم: تعادل ۱۲۸

سرعت توپ، به سمت منفی محور Y سیستم اندازه‌گیری است.



سرعت اولیه توپ هاکی در زمان $1,375s$ حدود $-2575mm/s$ بود، و سرعت نهایی آن در زمان $3,933s$ در حدود $-1977mm/s$ بود. این تغییر سرعت برابر حدود 23% کاهش در سرعت است و این کاهش، در مسافت کلی غلتیدن که حدود $5,9m$ است، اتفاق می افتد. رابطه بین سرعت و زمان تقریباً خطی است. میانگین کاهش سرعت توپ در این فاصله زمانی عبارت است از:

$$a = (-1,977 - (-2,575)) / (-3,933) = 0,598m/s / 2,558.s = 0,233m/s^2$$

در این مورد، توپ هاکی در تعادل نیست، زیرا دارای شتاب است؛ با این حال به زودی در زمان تقریبی $t = 12,41s$ خواهد ایستاد، آنگاه در تعادل خواهد بود.

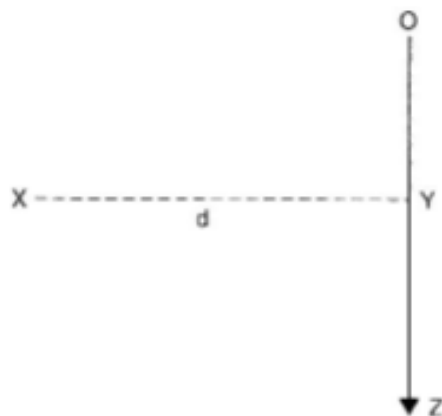
۳-۴ ممان نیرو

ممان نیرو حول یک نقطه (نشان دهنده تقاطع یک محور محتمل چرخش با صفحه کاغذ) عبارت است از تمایل نیرو برای چرخاندن جسمی که به آن اعمال می شود حول یک نقطه. ممان نیرو توسط حاصل ضرب اندازه‌گیری می شود:

فاصله عمودی از نقطه تا خط عمل نیرو \times نیرو

فصل چهارم: تعادل ۱۲۹

واحد ممان در SI (سیستم بین المللی) نیوتن متر (Nm) است. ممان‌ها در جهت عقربه‌های ساعت یا خلاف جهت عقربه‌های ساعت هستند. در شکل ۳-۴ اگر OZ نشان دهنده نیروی F باشد، ممان حول نقطه X می‌شود $F \times d$ ، در اینجا d طول خط عمود XY ، از نقطه‌ی X تا خط OZ است. برای اهداف عملی، ممان‌های در جهت عقربه‌های ساعت منفی و در خلاف جهت عقربه‌های ساعت مثبت در نظر گرفته می‌شوند. ممان نیرو در شکل ۳-۴ منفی است.



شکل ۳-۴. ممان نیرو، F ، نشان داده شده به صورت OZ حول یک نقطه، X .

■ مثال ۱-۴

مردی یک وزنه $250N$ (جرم $25kg$) را با دست‌های صاف که با بدنش زاویه 90° را می‌سازند، نگه می‌دارد. او وزنه را با دو دستش در سطح شانه‌هایش نگه می‌دارد. طول دست‌های مرد 75 cm است. ممان نیرو چقدر است؟

جواب

$$\begin{aligned} \text{ممان} &= F \times d \\ &= (250N) \times (0.75m) \\ &= 187.5Nm \end{aligned}$$

فصل چهارم: تعادل ۱۳۰

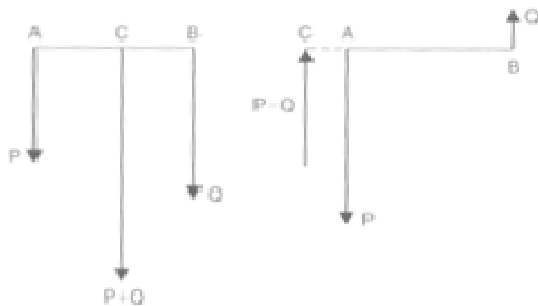
۴-۴ جمع و تفریق نیروهای موازی

بزرگی نیروی برآیند یک دسته نیروی موازی عمل کننده بر روی جسم، با انتخاب یک جهت به عنوان مثبت و دیگری به عنوان منفی و یافتن جمع جبری نیروها بدست می‌آید. خط عمل نیروی برآیند باید موازی تک تک نیروها باشد و بوسیله‌ی این حقیقت تعیین گردد که ممان نیروی برآیند حول هر نقطه باید برابر جمع جبری ممان تک تک نیروها در آن نقطه باشد. بنابراین برای P و Q که در A و B و در جهت یکسان عمل می‌کنند (شکل ۴-۴)، نیروی برآیند $(P+Q)$ از نقطه C بر روی AB طوری عبور می‌کند که (با در نظر گرفتن ممان‌ها حول A):

$$(P + Q) \times AC = Q \times AB$$

به همین نحو، اگر جهت‌های P و Q مخالف باشد، نیروی برآیند $(P - Q)$ است و خط عمل آن از C عبور می‌کند، در اینجا:

$$(P - Q) \times AC = Q \times AB$$

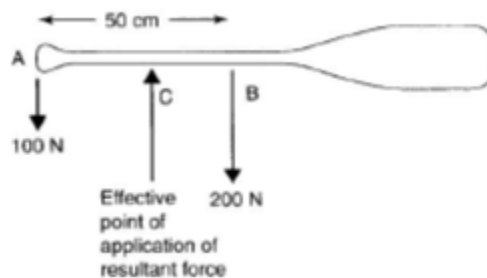


شکل ۴-۴. نیروی برآیند و خط عمل نیروهای موازی P و Q عمل کننده در نقاط A و B .

■ مثال ۲-۴

پارو قایق کانو با هر دو دست گرفته می‌شود، به طوری که دست چپ انتهای دسته را در نقطه A نگه می‌دارد و دست راست پارو را در نقطه ۵۰cm پائین دسته در نقطه B می‌گیرد. نیروی برآیند بر روی پارو و نقطه‌ی موثر عمل آن بر روی پارو چیست؟

فصل چهارم: تعادل ۱۳۱



حل

نیروی برآیند بر روی پارو عبارت است از:

$$F = 100 + 200 = 300\text{ N}$$

و نقطه اعمال آن عبارت است از:

$$(100 + 200) \times AC = 200 \times (0,5)$$

به طوریکه

$$AC = 100/300 = 0,33\text{ m}$$

نقطه C در فاصله ۰,۳۳m از A قرار دارد.

توزیع وزن بین پاهای چپ و راست

مورد پژوهی ۲-۴

از یک آزمودنی مرد به وزن ۹۰۵N خواسته می‌شود تا بر روی ابزاری پا بگذارد تا نیروی واکنش زمین (GRF) اندازه‌گیری شود. GRFهای پاهای چپ و راست دو بار با سلول فشار اندازه‌گیری می‌شوند. سلولهای فشار دارای خطاهای کوچک نزدیک به صفر ۱۰N- و ۸N- هستند که قبل از اینکه آزمودنی پای خود را بر روی دستگاه بگذارد، اندازه‌گیری شده‌اند.

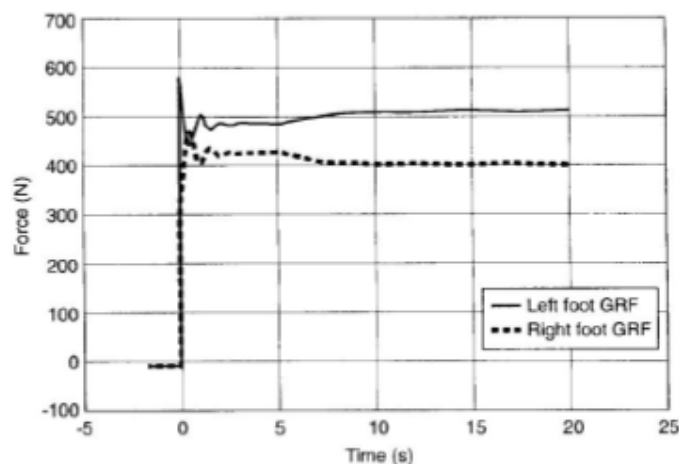
با بررسی نتایج موارد زیر حاصل شد:

- بعد از قدم اول بین ۲ تا ۳ ثانیه طول می‌کشد تا آزمودنی مستقر شود. در طول این زمان، کاهش GRF پای چپ با افزایش GRF پای راست

فصل چهارم: تعادل ۱۳۲

همراه می‌شود و بالعکس.

- به نظر می‌رسد که آزمودنی تقریباً بعد از ۵ ثانیه وزن خود را با انتقال بیشتر وزن به پای چپ باز توزیع می‌کند. به هر حال، این آزمودنی در سرتاسر تلاش، بیشتر وزن خود را بر روی پای چپ قرار می‌دهد.
- GRF ها بدلیل باز توزیع اندک وزن، نوسان و مانند آنها در هنگام آزمایش قدری تغییر می‌کنند.
- جمع GRF های پای راست و چپ همیشه یکسان و برابر با وزن آزمودنی است که به صورت نمونه برای ۵ زمان در زیر شرح داده شده است.



زمان (S)	GRF پای چپ (N)	GRF پای راست (N)	GRF پای چپ + راست (N)
۰	۵۷۷,۵	۳۲۷,۵	۹۰۵
۱	۵۰۱,۹	۴۰۳,۱	۹۰۵
۳	۴۸۳,۶	۴۲۱,۴	۹۰۵
۶	۴۸۹,۹	۴۱۵,۱	۹۰۵

۴-۵ مرکز گرانش و مرکز جرم

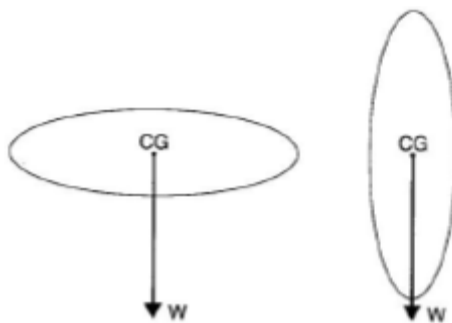
یک جسم می‌تواند به بخش‌های بسیار کوچکی تقسیم شود. هر یک از این بخش‌ها، که تنها فرض شده‌اند، نیرویی به سمت مرکز زمین تجربه می‌کنند که وزن آن بخش

فصل چهارم: تعادل ۱۳۳

کوچک است. نیرویی که ما وزن کل جسم می‌نامیم، در واقع برآیند تعداد خیلی زیادی از نیروها به نام وزن تک تک بخش‌های تشکیل دهنده جسم است، که می‌توانیم آنها را به صورت موازی در نظر بگیریم.

برای حالت‌های مختلف جسم، این نیروی برآیند دارای یک خط عمل است که همیشه می‌تواند با بکار بردن این اصل بدست آید که ممان وزن برآیند حول هر نقطه‌ای برابر جمع گشتاورهای تک تک وزن‌ها حول آن نقطه است. همه خطوط عمل وزن کل، از یک نقطه به نام مرکز گرانش جسم عبور می‌کنند که می‌تواند به صورت زیر تعریف شود:

برای همه وضعیت‌های جسم، مرکز گرانش (CG) یک جسم نقطه‌ای است که نسبت به جسم ثابت است و خط عمل کل وزن، همیشه از آن عبور می‌کند. یک جسم بیضی مسطح را در نظر بگیرید (شکل ۴-۵).



شکل ۴-۵. مرکز گرانش یک جسم بیضی فرضی، در مرکز بیضی قرار دارد. وزن جسم، W بدون توجه به جهت گیری جسم، همیشه می‌تواند به صورت عمودی به طرف پائین در نظر گرفته شود.

به شرط اینکه جسم از لحاظ مادی همگن باشد، مرکز گرانش در مرکز بیضی خواهد بود.

اصطلاح مرکز جرم (CM) نیز مورد استفاده قرار می‌گیرد، و شاید مناسبتر باشد: اگر خط عمل وزن همیشه از یک نقطه عبور کند، می‌توان گفت که کل جرم در آن نقطه جمع شده است. در حقیقت برای بیشتر اهداف دینامیکی، جسم چنان رفتار می‌کند که گمان می‌رود کل جرم در CM جمع شده است.

■ مثال ۳-۴

به شرط صاف بودن بدن و این که دست‌ها در کنار بدن قرار دارند، برای یک فرد خاص، CM در یک وضعیت معین توسط $۰,۵۲H$ از پاها اندازه‌گیری شد. در اینجا H قد شخص است. فرد در حالی که پاهایش در یک انتها، A است، بر روی یک تخته افقی دراز می‌کشد. با توجه به اطلاعات ارائه شده در انتهای سوال، ممان وزن فرد حول نقطه A را حساب کنید.

$$\text{جرم فرد} = ۸۰ \text{ Kg}$$

$$\text{قد فرد} = ۱,۹ \text{ M}$$

$$\text{شتاب گرانشی قابل استناد} = ۹,۸ \text{ m/s}^2$$

جواب:

موقعیت CM عبارت است از:

$$\text{از نقطه } A \quad ۰,۹۸۸ \text{ m} = ۰,۵۲ \times ۱,۹ \text{ m}$$

وزن عبارت است از:

$$W = mg = ۸۰ \times ۹,۸ = ۷۸۴ \text{ N}$$

گشتاور عبارت است از:

$$(۷۸۴ \text{ N}) \times (۰,۹۸۸ \text{ m}) = ۷۷۴,۶ \text{ Nm}$$

یافتن مرکز جرم فرد با استفاده از روش تخته‌ی واکنش

مورد پژوهی ۳-۴

در موارد ساده، برای تخمین موقعیت CM بدن انسان، اغلب از روش تخته‌ی واکنش استفاده می‌شود. مردی را در نظر بگیرید که بر روی یک تخته صلب افقی (در تعادل) در حالی که پاهایش در انتهای A و سرش در انتهای B قرار دارد، دراز کشیده است. تخته در انتهای A به کف نچسبیده است و برای حرکت در این نقطه آزاد است. انتهای دیگر تخته، B ، بوسیله‌ی ساده‌ترین شکل یک دستگاه اندازه‌گیری بار، یعنی یک قبان وزن سنجی، نگه داشته می‌شود.

فصل چهارم: تعادل ۱۳۵



اجازه دهید تا طول تخته را برابر L بگیریم، این طول از تکیه گاه در نقطه A تا نقطه‌ای که در آن انتهای دیگر تخته، B ، بر روی ترازوهای وزن سنجی قرار می‌گیرد، اندازه‌گیری می‌شود. می‌توانیم فرض کنیم که CM آزمودنی در حالی که به پشت دراز کشیده است و دست‌هایش در کنار بدن است، در جایی در امتداد محور تقارن بدن در فاصله X از انتهای A قرار خواهد داشت. نشان داده است که وزن، W ، از CM به صورت عمودی رو به پائین عمل می‌کند. با دراز کشیدن فرد در این وضعیت، ترازوهای وزن سنجی مقدار خواندنی، F ، را ثبت می‌کنند. نمودار، نیروی F را که به صورت عمودی به سمت بالا عمل می‌کند را در زیر انتهای B تخته نشان می‌دهد. در این وضعیت، با فرض گشتاورها حول نقطه A برای تعادل:

$$W \times X = F \times L$$

نتیجه‌گیری می‌شود که CM در فاصله X از انتهای A واقع می‌شود، (X) عبارت

است از:

$$X = \frac{F \times L}{W}$$

در این تجزیه و تحلیل از وزن خود تخته چشم پوشی شده است. اگر چه این عامل به وضوح می‌تواند منبع خطا باشد، در عمل، معمولاً ترازوها می‌توانند قبل از اینکه شخص بر روی تخته دراز بکشد فقط با خود تخته در جایگاه صفر شوند، به طوریکه وزن خود تخته بی اهمیت باشد. حتی اگر ترازوها صفر نشوند، می‌توان اعداد خوانده شده اولیه از قرائتهای بعدی کم کرد، بنابراین نتایج مشابهی حاصل می‌شود.

فصل چهارم: تعادل ۱۳۶

از یک سری آزمایش بر روی دانشجویان سال اول کارشناسی علوم ورزشی نتایج زیر حاصل شد. در جدول نشان داده شده، وزن و قد آزمودنی‌ها به ترتیب بر حسب کیلوگرم و سانتی‌متر ثبت شده‌اند؛ مقدار X نیز بر حسب سانتی‌متر و به عنوان درصدی از قد آزمودنی نشان داده شده است.

عنوان	ارتفاع CM به	ارتفاع CM (cm)	قد (cm)	جرم (kg)	آزمودنی
درصدی از قد					
۵۵,۸۹	۱۰۰,۶	۱۸۰	۷۹	۱	
۵۵,۷۰	۸۸	۱۵۸	۶۸	۲	
۵۵,۶۸	۱۰۳	۱۸۵	۷۶	۳	
۵۵,۰۷	۹۵	۱۷۲,۵	۷۳	۴	
۵۵,۷۰	۹۹,۷	۱۷۹	۷۶	۵	
۵۴,۶۴	۱۰۰	۱۸۳	۸۴	۶	
۵۵,۳۵	۸۸	۱۵۹	۵۷	۷	
۵۴,۴۰	۹۹	۱۸۲	۶۶	۸	
۵۵,۵۶	۱۰۰	۱۸۰	۷۳,۵	۹	
۵۴,۴۰	۹۹	۱۸۲	۶۶	۱۰	
۵۵,۷۴	۱۰۲	۱۸۳	۵۸	۱۱	
۵۵,۶۸	۱۰۳	۱۸۵	۸۱	۱۲	
۵۶,۳۸	۱۰۶	۱۸۸	۹۹	۱۳	
۵۵,۱۴	۱۰۲	۱۸۵	۷۵	۱۴	

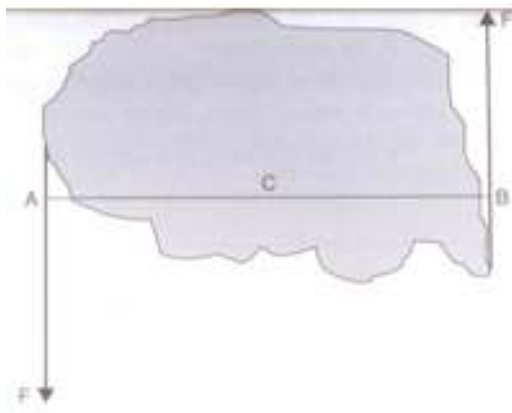
این نتایج نشان می‌دهد که مرکز گرانش بیان شده به عنوان درصدی از ارتفاع بدن، برای مجموعه‌ای از آزمودنی‌ها با قد‌ها و وزن‌های متفاوت، به طور مشهود ثابت است، خلاصه پنج عددی این داده‌ها (حداقل، ربع اول، متوسط، ربع سوم، حداکثر) عبارت است از ۵۴,۴۰، ۵۵,۰۹، ۵۵,۶۲، ۵۵,۷۰، ۵۶,۳۸.

۴-۶ جفت‌ها: دو نیروی مخالف و مساوی که در دو نقطه‌ی

مختلف اعمال می‌شوند

به طور قطع برآیند دو نیروی مخالف و مساوی که خط عمل آنها یکی نیست، صفر است. این موضوع بدین معنی نیست که آنها اثر مکانیکی ندارند، بلکه فقط این معنی را می‌دهد که نمی‌توان هیچ نیروی واحدی پیدا کرد تا جایگزین آنها شود.

فصل چهارم: تعادل ۱۳۷



شکل ۴-۶. دو نیروی F تشکیل دهنده یک جفت AB خطی است که عمود بر خط عمل نیروهای F رسم می‌شود.

در شکل ۴-۶ نیروها تمایل به چرخش جسم در جهت عکس عقربه‌های ساعت دارند. یک جفت نیروی موازی مساوی که در جهت‌های متضاد عمل می‌کنند و خط عمل آنها یکسان نیست، جفت نامیده می‌شود. با در نظر گرفتن ممان حول C (هر نقطه‌ای در طول AB)، گشتاور F در A حول C عبارت است از:

$$F \times AC$$

ممان F در B حول C عبارت است از $F \times BC$ ، هر دو عکس عقربه‌های ساعت هستند. جمع این ممان‌ها حول C عبارت است از:

$$F \times (AC + BC) = F \times AB$$

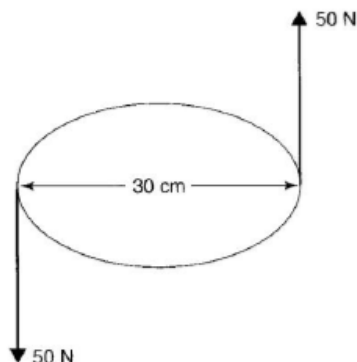
(یعنی، فاصله عمودی بین دو نیرو \times یک نیرو)

این عبارت، گشتاور جفت نامیده می‌شود و AB بازوی جفت نامیده می‌شود.

■ مثال ۴-۴

توپ راگی که در نمودار نشان داده شده است را در نظر بگیرید. ممان جفت چقدر است؟

فصل چهارم: تعادل ۱۳۸



جواب

$$\text{گشتاور جفت} = 50\text{ N} \times 0.3\text{ m} = 15\text{ Nm}$$

بازوی جفت 0.3 m است. بنابراین توپ راگی تمایل به چرخش خواهد داشت و نمی‌توان گفت که در تعادل است.

۷-۴ اجسام ساکن

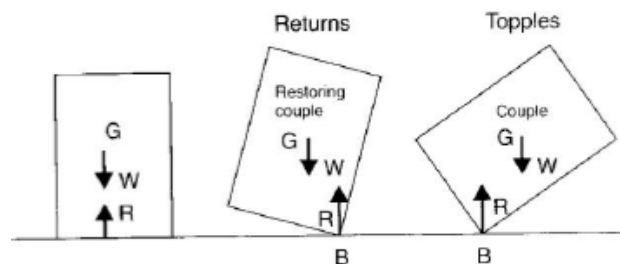
زمانی که یک جسم در حال سکون است یا نسبت به اطرافش که ما آن را ثابت فرض می‌کنیم، دارای حرکت مستقیم الخط یکنواخت است، می‌توان گفت که جسم در تعادل است. اگر جسم را معادل یک ذره واحد سنگین در نظر بگیریم که در مرکز گرانش قرار گرفته است، اینچنین استنباط می‌شود که در صورتی که جسم در حال سکون باشد، مرکز گرانش آن نمی‌تواند در هیچ جهتی دارای شتاب باشد، و بنابراین هیچ نیروی برآیندی در هیچ جهتی وجود ندارد. یعنی باید ترکیب نیروهای خارجی که بر روی جسم عمل می‌کنند، برآیندی معادل صفر را تولید کنند. برای تعادل، شروط دیگری نیز باید برآورده شود: در حالت تعادل جمع جبری ممان‌ها حول هر محور مربوط به همهی نیروهای خارجی عمل کننده بر روی جسم باید صفر باشد.

۸-۴ تعادل تحت عمل دو نیرو

جسمی را در نظر بگیرید که بر روی یک سطح افقی صاف ساکن است (شکل ۷-۴). وزن جسم، W ، با نیروی واکنش، R ، برابری می‌کند. جسم شکل ۷-۴ در تعدادی نقطه

فصل چهارم: تعادل ۱۳۹

محدود که با همواری سطح زیرین شیئی تعیین شده است، با صفحه در تماس است. نیروهای واکنش در این نقاط به همدیگر اضافه می‌شوند تا نیروی برآیند رو به بالا (نیروی واکنش برآیند)، R ، را که خط عمل آن از G ، یا CM ، می‌گذرد شکل دهند. بزرگی W و R برابر است، به طوریکه بر روی جسم نیروی برآیند و ممان چرخانده‌ی برآیند وجود ندارند.



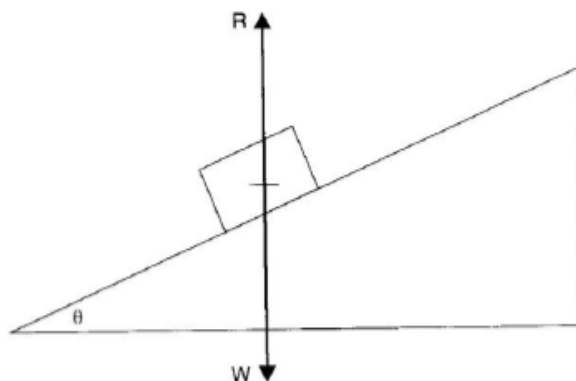
شکل ۴-۷. یک جسم بی حرکت بر روی یک صفحه افقی صاف. G مرکز گرانش را نشان می‌دهد W وزن جسم است و R نیروی واکنش اعمال شده بر جسم توسط کف است.

حالا اگر شیئی شکل ۴-۷ با بلند کردن یکی از لبه‌های پائینی طوری جابه‌جا شود که تنها خط تماس آن با کف، لبه‌ی پائینی مقابل باشد (شکل ۴-۷ وسط)، نیروی واکنش، R فوراً جابه‌جا می‌شود تا از نقطه B عبور کند، بنابراین R و W یک جفت را تشکیل می‌دهند. باید بزرگی R و W دوباره برابر باشند، اما اکنون یک جفت برگرداننده وجود دارد که تمایل دارد هنگامی که جسم رها می‌شود، آن را به موقعیت اولیه‌اش برگرداند. اگر شیئی طوری جابه‌جا شود که مرکز گرانش به بالا یا راست خط عمودی که از B می‌گذرد تغییر مکان دهد، آنگاه جفت تشکیل شده با R و W تمایل دارند تا چرخش شیئی را در جهت جابه‌جایی ادامه دهند، و اگر شیئی رها شود، واژگون خواهد شد.

■ مثال ۴-۵

هر جسمی که بر روی سطح شیب دار صاف، ساکن است، یک نیروی واکنش افقی را تحمل می‌کند تا تعادلش حفظ شود (فرض می‌شود که زاویه شیب به قدری بزرگ نیست تا سبب سر خوردن جسم شود).

فصل چهارم: تعادل ۱۴۰



می‌توان دید که نیروی واکنش، R ، مولفه‌ای به سمت بالای شیب و مولفه‌ای عمود بر شیب دارد. کافی است تا مولفه‌ی رو به بالا تنها مولفه‌ای از وزن که به سمت پائین شیب عمل می‌کند را خنثی کند و بنابراین جلوی سر خوردن آن را بگیرد. این نیروی اصطکاک است، که در فصل ۵ بیشتر توضیح داده می‌شود. اگر وزن W ، 120 N و زاویه $\theta = 40^\circ$ باشد، R_n (مولفه‌ی عمود بر سطح) و R_p (مولفه‌ی موازی سطح)، را محاسبه کنید.

جواب

R نیرویی با بزرگی 120 N است که رو به بالا عمل می‌کند.

R_n عبارت است از:

$$R_n = R \cos\theta = 120 (\cos 40^\circ) = 91.9\text{ N}$$

(به صورت عمود بر سطح و به سمت بالا عمل می‌کند)

R_p عبارت است از:

$$R_p = R \sin\theta = 120 (\sin 40^\circ) = 77.1\text{ N}$$

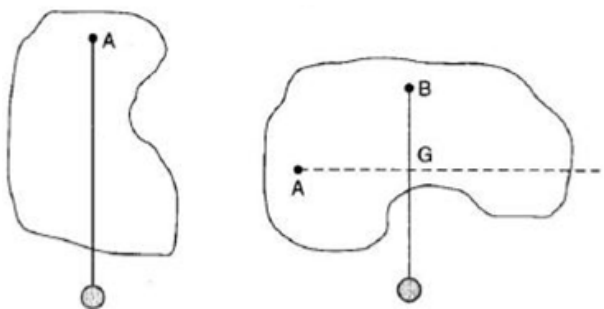
(به صورت موازی با سطح و به سمت پائین عمل می‌کند)

۹-۴ مرکز جرم یک جسم ساکن

اگر از یک صفحه نازک یک جسم به شکل دلخواه داشته باشیم، می‌توانیم چند سوراخ

فصل چهارم: تعادل ۱۴۱

تعلیق کوچک اطراف لبه‌ی صفحه در نقاط مختلف ایجاد کنیم و جسم را از یک محور صیقلی مناسب از یکی از سوراخ‌ها، A ، آویزان کنیم (شکل ۴-۸). همچنین یک بند شاقول از نخ ظریف به همان نقطه اتکا وصل می‌کنیم. به هر دو اجازه می‌دهیم تا آزادانه تاب بخورند تا به حالت سکون درآیند. مسیر بند شاقول را بر روی صفحه علامتگذاری می‌کنیم. CM به طور عمودی زیر نقطه تعلیق است، به طوریکه CM باید جایی بر روی خطی که اکنون بر روی صفحه نشان دار شده است، باشد. آزمایش با استفاده از سوراخ دیگری، B ، به فاصله‌ی حدود یک چهارم مسیر دایره‌ای از سوراخ اول تکرار می‌شود. دو خط در CM که باید بر روی هر دو خط قرار گیرد، با هم تلاقی می‌کنند. برای بررسی صحت نتایج، می‌توان این آزمایش را در چند نقطه‌ی تعلیق دیگر تکرار کرد.



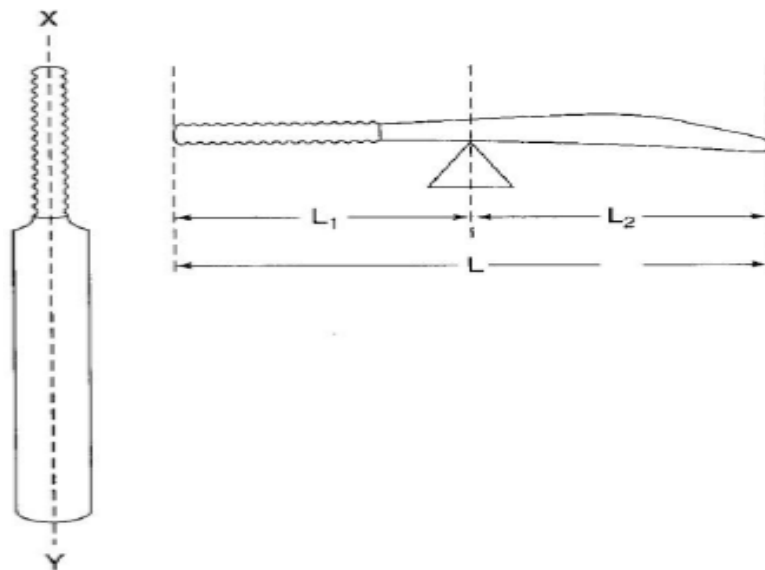
شکل ۴-۸. تعیین مکان مرکز گرانش یک صفحه نازک. A و B دو نقطه تعلیق دلخواه هستند.

روش دیگری که می‌توان برای یک شیء با شکل مناسب به کار برد، روش متعادل سازی است. در صورتی که مرکز گرانش یک شیء مستقیماً بالای نقطه‌ی اتکا باشد، بر روی یک نقطه اتکا متعادل خواهد شد. از این رو، این روش تنها اگر شیء خشن، سفت و مستقیم باشد و دارای خمیدگی نباشد، جواب می‌دهد. برای مثال چوب بیسبال، می‌تواند به سختی و با یک سری تلاش‌ها که قبل از یافتن نقطه تعادل برای متعادل سازی در نقاط مختلف انجام می‌شود، متعادل شود (شکل ۴-۹).

مکان مرکز گرانش که از سر چوب اندازه‌گیری شده است، می‌تواند به عنوان درصدی از طول کل بیان شود، برای مثال:

$$\frac{L_1}{L} = 100\%$$

فصل چهارم: تعادل ۱۴۲



شکل ۴-۹. یک چوب بیسبال متعادل شده بر روی یک تکیه‌گاه. بر اساس از تقارن، مرکز جرم باید بر روی صفحه XY با زاویه عمود نسبت به رویه چوب قرار بگیرد، فاصله آن از بالای دسته چوب، بوسیله‌ی نقطه تعادل مشخص می‌شود.

۴-۱۰ تعادل تحت عمل ۳ نیرو

اگر سه نیروی خارجی جسمی را در تعادل نگه دارند، می‌توان فرض کرد که دو تا از آنها، P و Q ، توسط برآیندشان، R ، جایگزین می‌شوند، بنابراین تنها لازم است این برآیند و نیروی سوم، S ، در نظر گرفته شوند. بنابراین برآیند هر جفت از نیروها، R ، باید مساوی و متضاد نیروی سوم باشد و در همان خطی عمل کند که S عمل می‌کند. خطوط عمل هر سه نیرو باید در صفحه یکسانی قرار بگیرند؛ در غیر اینصورت، R نمی‌تواند در امتداد خطی عمل کند که S عمل می‌کند. همگی خطوط عمل سه نیرو باید یا موازی باشند یا از یک نقطه بگذرند.

اگر P و Q موازی باشند برآیند آنها، R ، موازی آنهاست؛ بنابراین S که در همان خط R عمل می‌کند، باید موازی P و Q باشد. اگر P و Q موازی نباشند، خط عمل آنها باید در نقطه تقریبی O همدیگر را قطع کند؛ برآیند آنها نیز باید از O عبور کند، اما

فصل چهارم: تعادل ۱۴۳

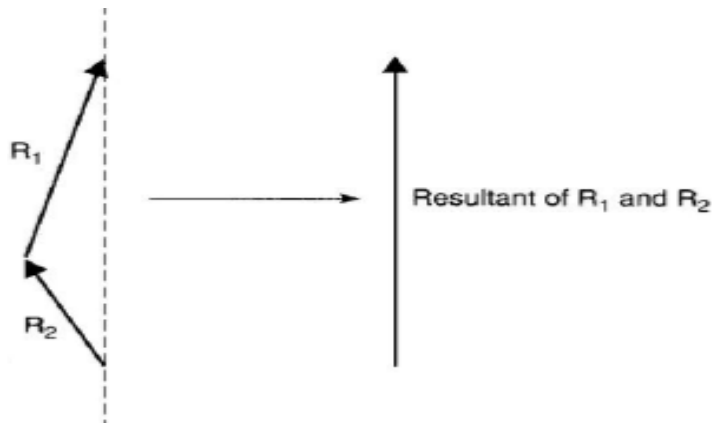
نیروی سوم مساوی و متضاد R است، بنابراین خط عمل آن نیز باید از O عبور کند. پس همه سه خط عمل در O همدیگر را قطع می‌کنند.

■ مثال ۴-۶

یک دونده دو سرعت را در موقعیت استارت در نظر بگیرید. GRF ها در دست‌ها و پاهای او عمل می‌کنند. برای سادگی ما باید فرض کنیم که نیروهای واکنش در پاهای چپ و راست او در یک نیرو در پاهای او ادغام می‌شوند و اینکه نیرو در دست‌های چپ و راست او در یک نیرو در دست‌های او ادغام می‌شوند.



توجه کنید که در این نمودار نیروهای نشان داده شده آنهایی هستند که بر روی دونده عمل می‌کنند، نه آنهایی که بر روی زمین عمل می‌کنند. برای حفظ تعادل، در این مورد، ضروری است که جمع R_1 و R_2 مساوی و مخالف W باشند.



برآیند R_1 و R_2 در بزرگی باید برابر W باشند ولی با جهت متضاد.

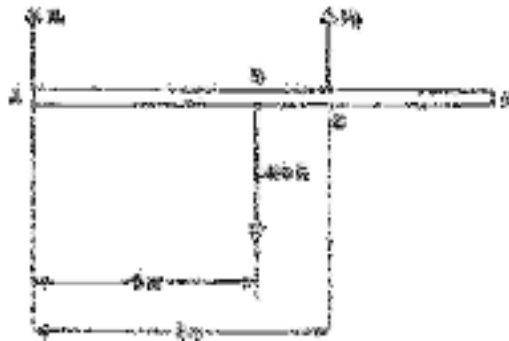
فصل چهارم: تعادل ۱۴۴

۴-۱۰-۱ سه نیروی موازی

شرط اینکه نیروی برآیند صفر باشد آنست که جمع جبری نیروها صفر باشد (یعنی هر یک از نیروها برابر و متضاد مجموع دو نیروی دیگر باشد). شرط اینکه ممان برآیند حول هر نقطه‌ای صفر باشد، آنست که جمع جبری ممان‌های همه نیروها حول هر نقطه در صفحه صفر باشد.

■ مثال ۴-۷

یک تخته همگن، AB ، که طولش $6m$ و وزنش $400N$ است در انتهای، A ، و نقطه C که $2m$ از نقطه B فاصله دارد، بر روی تکیه‌گاه گرفته است. نیروی واکنش در تکیه‌گاه‌های A و C را بیابید.



نمودار، تخته‌ی یکنواخت را که بر روی نقاط A و C قرار گرفته است نشان می‌دهد. این نمودار جسم آزاد، نیروهای عمل‌کننده بر روی تخته را نشان می‌دهد (نه آنهایی که بر روی تکیه‌گاه‌ها عمل می‌کنند). با شرط اول:

$$R_1 + R_2 = 400N$$

با در نظر گرفتن ممان‌ها حول A :

$$G \text{ در } 400N = \text{ممان وزن} = 400 \times AG = 400 \times 3$$

$$\text{در جهت عقربه‌های ساعت} = 1200Nm$$

$$C \text{ در } R_2 = \text{ممان } R_2 = R_2 \times AC$$

$$\text{در خلاف جهت عقربه‌های ساعت} = R_2 \times 4m$$

فصل چهارم: تعادل ۱۴۵

با مساوی قرار دادن این دو ممان (برای تعادل):

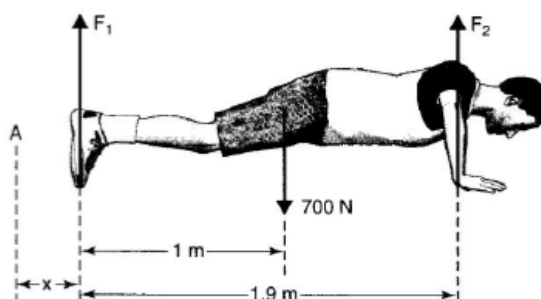
$$R_2 = 1200/4 = 300N$$

نتیجه گیری می شود که R_1 عبارت است از:

$$R_1 = 400 - R_2 = 400 - 300 = 100N$$

■ مثال ۴-۸

یک مرد به وزن $700N$ با صاف کردن دستها و پا، خود را بر روی دستها و انگشتان پایش در وضعیت پرس سینه نگه می دارد. چون این مرد در تعادل است، ما می توانیم



نیروهای واکنش را در پاها و دستها که به ترتیب F_1 و F_2 می نامیم، محاسبه کنیم. با در نظر گرفتن ممانها حول محور عبوری از انگشتان پاها برای تعادل داریم:

$$(700N) \times (1m) = F_2 \times 1.9$$

بنابراین:

$$F_2 = 700/1.9 = 368.4N$$

همچنین بدلیل اینکه نیروی برآیند کلی برای تعادل باید صفر باشد، داریم:

$$F_1 + F_2 = W$$

$$F_1 + 368.4 = 700$$

بنابراین:

$$F_1 = 331.6N$$

فصل چهارم: تعادل ۱۴۶

می‌توان ممان‌ها را حول هر محور قراردادی دیگری فرض کرد؛ ولی نتایج بالا همچنان صحیح خواهد بود. اگر ما محل عبور محور عمودی را از یک نقطه دلخواه، A در نظر بگیریم و ممان‌ها را بدست آوریم:

$$x \times ۳۳۱,۶ + (x + ۱,۹) \times ۳۶۸,۴ = (۱ + x) ۷۰۰$$

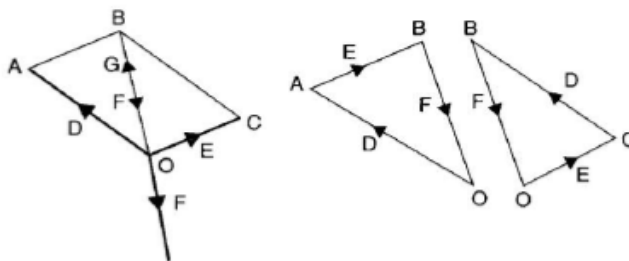
x از این معادله حذف خواهد شد، بنابراین:

$$۱,۹ \times ۳۶۸,۴ = ۷۰۰$$

یعنی اینکه معادله متوازن می‌شود، F_1 و F_2 تغییر نمی‌کنند.

۴-۱۰-۲ سه نیروی غیر موازی

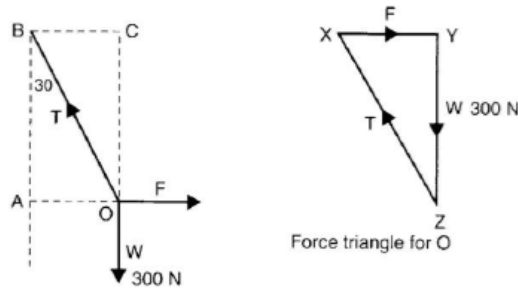
سه نیروی D ، E و F را در نظر بگیرید (شکل ۴-۱۰). F باید برابر و متضاد برآیند نیروهای D و E ، یعنی G باشد که توسط قطر OB متوازی الاضلاع $OABC$ نیروها نشان داده شده است. بدلیل اینکه OB به طور کامل G را نشان می‌دهد، BO باید به طور کامل F را نشان دهد. می‌توان برای نشان دادن D ، E و F ، نصف این متوازی الاضلاع را استفاده کرد؛ هر یک از مثلث‌های OAB یا OBC این کار را انجام خواهند داد. هر مثلثی که در نظر گرفته شود، دیده می‌شود که پیکان‌ها همگی از مسیر چرخش یکسانی تبعیت می‌کنند. بنابراین جهت و اندازه‌ی سه نیروی غیر موازی که در تعادل هستند، می‌توانند به ترتیب توسط سه ضلع یک مثلث نشان داده شوند. این قانون مثلث نیروها است. شرط اینکه ممان برآیند نیروها صفر باشد، خود به خود برآورده می‌شود.



شکل ۴-۱۰. مثلث نیروها، D ، E و F سه نیروی در تعادل را نشان می‌دهد متوازی الاضلاع $OABC$ نیروها را نشان می‌دهد.

■ مثال ۴-۹

یک کودک به وزن 300 N بر روی یک تاب که توسط طناب از یک نقطه ثابت، P آویزان است، نشسته است. یک نیروی افقی، F ، به صندلی وارد می‌شود، به طوری که طناب‌ها زاویه 30° درجه نسبت به خط عمود پیدا می‌کنند. مقدار نیروی F و مقدار کشش در طناب‌ها، T ، چقدر است؟



کودک تحت عمل سه نیروی غیر موازی در تعادل است: وزن او (یعنی 300 N) که به طور عمودی و رو به پایین عمل می‌کند؛ نیروی افقی، F ؛ و کشش، T ، در طناب‌ها در امتداد طول آنها. همه این نیروها در O با هم تلاقی دارند. مثلث نیروها برای O ، در مقیاس رسم شده نشان داده شده است. زاویه XZY ، 30° است. بدلیل اینکه:

$$\tan 30^\circ = XY/300$$

نتیجه‌گیری می‌شود که:

$$XY = F \text{ نیروی } = 300 \times (0,577) = 173\text{ N}$$

همچنین بدلیل اینکه:

$$\begin{aligned} \cos 30^\circ &= YZ/XZ \\ &= 300/XZ \end{aligned}$$

نتیجه‌گیری می‌شود که:

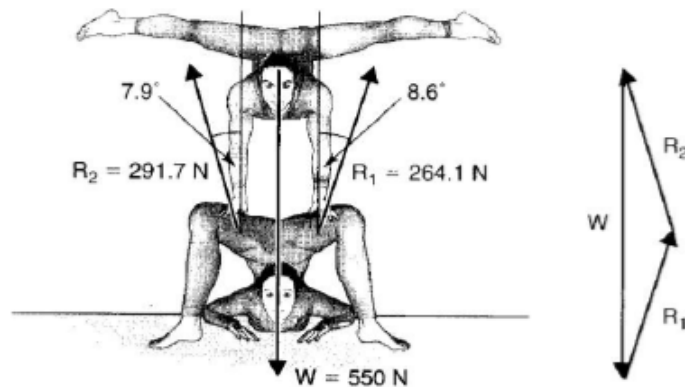
$$XZ = T \text{ کشش } = 300/(0,866)$$

فصل چهارم: تعادل ۱۴۸

$$= 364N$$

■ مثال ۴-۱۰

یک آکروبات با استفاده از یارش به عنوان تکیه‌گاه، وزنش را بر روی دستانش متعادل می‌کند. وزن آکروبات بالایی $550N$ است. نیروهای عکس‌العمل که بر روی آکروبات بالایی اعمال می‌شوند، عبارتند از:



با زاویه‌ی $8,6^\circ$ نسبت به خط عمود رو به بالا عمل می‌کند $R_1 = 264,1 N$

با زاویه‌ی $7,9^\circ$ نسبت به خط عمود رو به بالا عمل می‌کند $R_2 = 291,7 N$

می‌توان دید که این سه نیرو هنگامی که درست به هم وصل شوند، یک مثلث بسته‌ی نیروها را تشکیل می‌دهند. اثر ترکیبی R_1 و R_2 یک نیروی عمودی $550N$ به سمت بالا است تا وزن بدن را نگه دارد. مولفه‌های افقی R_1 و R_2 ($40N$ و $-40N$) هم دیگر را خنثی می‌کنند.

۴-۱۱ هیدروستاتیک و شناوری

۴-۱۱-۱ فشار هیدروستاتیک به عنوان تابعی از عمق

در هر مایعی، یک تغییر در فشار به عنوان تابعی از عمق غوطه‌وری در مایع وجود دارد. با فرض اینکه چگالی مایع $\rho \text{ kg/m}^3$ است، فشار در عمق h بر حسب N/m^2 عبارت است از:

فصل چهارم: تعادل ۱۴۹

$$P = \rho g h$$

در اینجا g شتاب قابل استناد به گرانش و h عمق زیر سطح است.

■ مثال ۴-۱۱

چگالی آب تقریباً 1000 kg/m^3 است و بیشترین مایع موجود روی زمین است. اجازه دهید تا یک غواص را در عمق 20 m در دریا نظر بگیریم. فشار کلی عمل کننده بر روی او چیست؟

با به کار بردن رابطه فشار $P = \rho g h$ ، خواهیم داشت:

$$P = (1000 \text{ kg/m}^3) \cdot (9.81 \text{ m/s}^2) \cdot (20 \text{ m})$$

$$P = 196200 \text{ N/m}^2 \text{ یا } 1.962 \times 10^5 \text{ N/m}^2$$

فشار اتمسفری بر روی زمین تقریباً $1 \times 10^5 \text{ N/m}^2$ است به طوریکه فشار کلی بر روی غواص عبارت است از:

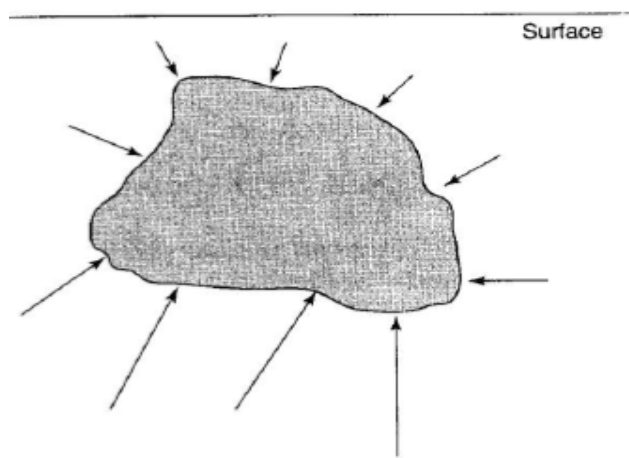
$$P = 1.962 \times 10^5 + 1 \times 10^5 = 2.962 \times 10^5 \text{ N/m}^2$$

این فشار کلی تقریباً برابر با 3 atm است.

۴-۱۱-۲ نیروی بالاران یا شناوری بر روی یک جسم غوطه‌ور

بدلیل وجود شیب فشار عمودی در یک سیال ساکن (یک مایع یا یک گاز)، یک شیء غوطه‌ور در همه نقاط سطح خود با نیروهایی مواجه است. بدلیل اینکه فشار با عمق افزایش می‌یابد، سطح زیرین جسم نسبت به سطح بالایی نیروی بیشتری را تحمل می‌کند (شکل ۴-۱۱). در نتیجه هر جسم صلب غوطه‌ور در یک سیال، نیروی عمودی رو به بالا (یک نیروی رانش به سمت بالا)، U ، را تحمل خواهد کرد، اما هیچ نیروی افقی بر روی جسم اعمال نمی‌شود. قانون ارشمیدس بیان می‌کند:

هنگامی که جسم جامدی به طور کامل یا جزعی در سیال فرو می‌رود، یک نیروی رانشی روبه بالا را تحمل می‌کند که برابر با وزن جرمی از سیال است که جابه‌جا شده است. این نیروی رانشی رو به بالا، از سیال جابه‌جا شده به طور عمودی به CM جسم اعمال می‌شود.



شکل ۴-۱۱. نیروهای عمل کننده در مرز یک شیء غوطه ور.

توجه کنید که برای جسم شناور در آب (یا سیال)، نیروی رانش رو به بالا برابر وزن جسم است، $U = W$. برای جسمی که در آب فرو می‌رود، نیروی رانش رو به بالا کمتر از وزن جسم است، $U < W$. توانایی یک جسم برای شناور شدن نه تنها به چگالی آن، بلکه به شکل آن نیز بستگی دارد. جسمی که چگالی آن کمتر از آب است، همیشه بدون توجه به شکلش شناور خواهد بود. اگر اجسام چگالتر از آب به شکلی در آیند که بتوانند حداقل به اندازه وزن خودشان آب را جابه‌جا کنند، آنها هم می‌توانند شناور بمانند.

۴-۱۱-۳ وزن مخصوص

وزن ویژه (SG) یک جسم یا یک ماده به صورت زیر تعریف می‌شود:

جرم حجم معین از آن ماده تقسیم بر جرم حجم مساوی از آب $SG =$

یا بدلیل اینکه جرم‌ها متناسب با وزن‌ها هستند:

وزن حجم معین از آن ماده تقسیم بر وزن حجم مساوی از آب $SG =$

معمولاً آب را بصورت آبی در نظر می‌گیرند که در دمای 4°C قرار دارد؛ دمایی

که چگالی آب در آن حداکثر است، $999,97\text{kg/m}^3$.

■ مثال ۴-۱۲

تعیین وزن مخصوص

وزن یک تکه سنگ در هوا $۱۳۱/۵g$ و هنگامیکه در آب فرو برده می‌شود $۸۱/۵g$ است. SG سنگ چقدر است؟

$$\text{وزن } ۵۰g = ۱۳۱/۵ - ۸۱/۵ = \text{وزن آب جابه‌جا شده}$$

بنابراین SG سنگ عبارت است از:

$$SG = (\text{وزن حجم مساوی از آب / وزن سنگ}) = ۱۳۱/۵/۵۰ = ۲/۶۳$$

توجه کنید که مشروط به اینکه چگالی آب دقیقاً $۱۰۰۰/kg/m^3$ یا $۱g/cm^3$ در نظر گرفته شود، SG محاسبه شده با این روش دقیقاً شبیه چگالی بر حسب g/cm^3 بیان می‌شود. همانطور که دیدیم، چگالی واقعی آب در دمای $۴^\circ C$ ، $۹۹۹/۹۷kg/m^3$ یا $۰/۹۹۹۹۷g/cm^3$ است. بنابراین چگالی سنگ خیلی نزدیک به $۲۶۳۰kg/m^3$ یا $۲/۶۳g/cm^3$ است.

توجه کنید که چگالی بدن انسان نزدیک به چگالی آب، $۱۰۰۰/kg/m^3$ ($۱g/cm^3$) است، بنابراین SG آن نزدیک به یک است.

۴-۱۲ روش قطعه‌ای برای تخمین مرکز جرم یک شخص

روش قطعه‌ای، برای تعیین CM یک ورزشکار می‌تواند از اطلاعات زیر استفاده کند:

- (۱) موقعیت نقاط انتهایی همه بخش‌های بدن
- (۲) جرم هر یک از بخش‌ها
- (۳) موقعیت مرکز جرم درون هر بخش

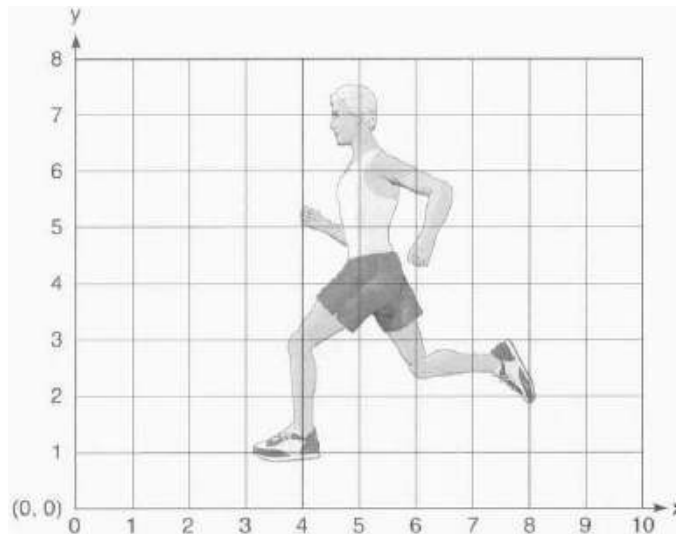
اگر با یک عکس یا یک فریم بی حرکت از ثبت ویدیویی کار شود، یک تحلیل دو بعدی حاصل می‌شود که موقعیت CM را در یک صفحه معین ارائه می‌دهد. شکل ۴-۱۲ نمونه‌ای از یک تصویر بی حرکت از یک دوندۀ را نشان می‌دهد. این تصویر برای مثال می‌تواند از یک عکس بی حرکت بدست آمده باشد و خطوط زمینه با استفاده از کاغذ رسم، کشیده شده باشند و به نمودار منتقل شده باشند. در مورد شکل

فصل چهارم: تعادل ۱۵۲

۱۲-۴ مقیاس‌های عددی بر روی محورهای X و Y مطابق با سانتی‌متر بر روی کاغذ نمودار هستند. ۱۴ بخش در نظر گرفته شده بدن عبارت‌اند از:

- تنه
- سر و گردن
- ران‌های چپ و راست
- ساق‌های چپ و راست
- پاهای چپ و راست
- بازوهای چپ و راست
- ساعدهای چپ و راست
- دست‌های چپ و راست.

هر بخش از بدن CM خود را دارد و معمولاً به صورت کسر معینی از طول بخش از انتهای پروگزیمال (نزدیک به بدن) بیان می‌شود.

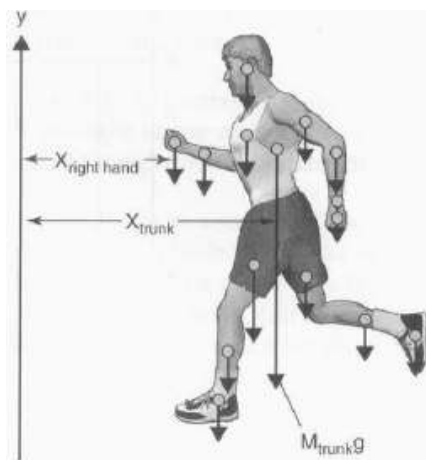


شکل ۱۲-۴. تصویر بی حرکت از یک ورزشکار در حال دویدن. یک مبداء اختیاری (در این مورد، پائین و چپ) انتخاب می‌شود، و یک سیستم مختصات $X - Y$ بصورت افقی و عمودی نشان داده می‌شود.

فصل چهارم: تعادل ۱۵۳

نقشه کار برای هر بخش، محاسبه‌ی ممان مربوط به وزن آن بخش حول محورهای x و y است. سپس این ممان‌ها به هم اضافه می‌شوند تا ممان کلی حول محورهای x و y بدست آید. با تقسیم ممان کلی بر جرم کل بدن مختصات x (یا y) برای CM بدست می‌آید. شکل‌های ۴-۱۳ و ۴-۱۴ به ترتیب وزن بخش‌های مجزای بدن و وزن کل در CM عمل می‌کند را نشان می‌دهند.

جرم هر یک از این بخش‌ها (M_i) و موقعیت مراکز جرم بخش‌ها (x_i و y_i) برای محاسبه‌ی CM کل بدن استفاده می‌شوند.



شکل ۴-۱۳. به دست آوردن ممان‌های وزن‌های ۱۴ بخش بدن حول محور y . هر دایره کوچک مرکز جرم یک بخش را نشان می‌دهد. تنها در فاصله (برای تنه و دست راست) و تنها وزن یک بخش (برای تنه) برای شفاف سازی نشانه گذاری شده است.

$$X_{CM} = \frac{\sum M_i X_i}{M_{\text{بدن}}} = \sum \frac{M_i}{M_{\text{بدن}}} X_i$$

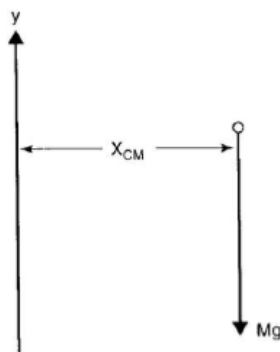
و

$$Y_{CM} = \frac{\sum M_i Y_i}{M_{\text{بدن}}} = \sum \frac{M_i}{M_{\text{بدن}}} Y_i$$

در به کار بردن این روش برای تعیین CM و جرم هر بخش، استفاده از اطلاعات پیکرسنجی درباره‌ی طول بخش‌های بدن انسان مرسوم است. پارامترهای بخش بدن

فصل چهارم: تعادل ۱۵۴

(BSPs) معمولاً به صورت مقادیر درصدی بیان می‌شوند. CM قطعه‌ای معمولاً به صورت $FL\%$ یعنی درصد طول بخش از انتهای پروگزیمال بخش، بیان می‌شود. بیشتر اطلاعات در مورد $FL\%$ و M_i براساس کار اصلی دمپستر^۱ (۱۹۵۵ و ۱۹۵۹) است. به عنوان مثال برای ساعد راست که در شکل ۴-۱۵ نشان داده شده است، مختصات x نقاط انتهایی دیستال و پروگزیمال، $۴/۱$ و $۴/۹$ واحد هستند. در نتیجه مختصه x مرکز جرم عبارت است از:



شکل ۴-۱۴. بخش در شکل ۴-۱۳ توسط یک جرم در مرکز جرم جایگزین می‌شوند. مرکز جرم در فاصله X_{mc} از محور y واقع می‌شود. بردار نیرو، برابر وزن بدن، Mg است.

$$X_i = X_{proximal} + FL \times (X_{distal} - X_{proximal})$$

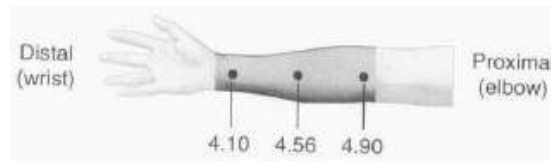
بدلیل اینکه برای بخش ساعد $FL = ۰,۴۳$:

$$X_i = ۴,۹ + ۰,۴۳ (۴,۱ - ۴,۹) = ۴,۵۶$$

می‌توان با محاسبه مشابه Y_i را برای ساعد $۰,۵۳$ تعیین کند. جدول ۴-۱ جرم بخش‌ها را به صورت درصدی از جرم کل بدن ($FM\%$) و جدول ۴-۲ فاصله درصدی CM را از انتهای پروگزیمال بخش بدن ($FL\%$) ارائه می‌دهد. جدول ۴-۳ محاسبه صفحه گسترده را برای ورزشکار مرد شکل ۴-۱۱ نشان می‌دهد. جدول ۴-۳ نشان می‌دهد که CM دونده شکل ۴-۱۲ در $x = ۵,۲۸$ و $y = ۴,۸۶$ قرار دارد. بعضی اوقات بهتر است تا این نتایج را به سیستم متفاوتی از واحدها تبدیل

۱. Dempster

فصل چهارم: تعادل ۱۵۵



شکل ۴-۱۵. محاسبه‌ی CM یک بخش واحد CM ساعد، در ۴۳% طول دست از انتهای پروگزیمال اندازه‌گیری شده است.

کنیم. اگر چه نشان دادن یک نتیجه در یک نمودار بر اساس سانتی متر قابل قبول است، تبدیل این نتایج به فاصله واقعی نیازمند انواع کالیبراسیون است. برای مثال ممکن است برای کالیبراسیون تصویر، از تصویر ساکن یک خط کش یک متری استفاده کرد و یا بهتر است که از دو خط کش یک متری با زاویه عمود نسبت به همدیگر (شکل ۴-۱۶)، که در راستای $x-y$ قرار گرفته‌اند، استفاده کرد. زمانی کالیبراسیون برای دونه صحیح خواهد بود که این اجسام کالیبراسیون همانند دونه در فاصله‌های یکسان از دوربین قرار گرفته باشند (فصل ۱ را ببینید). برای مثال در این روش می‌توان اثبات کرد که کالیبراسیون برای تصویر در شکل ۴-۱۲ عبارت است از:

$$1\text{ cm} = 0,256\text{ m}$$

در نتیجه مرکز جرم، $1,245\text{ m} = 4,8637 \times 0,256$ در بالای مبدأ قرار دارد و $1,353\text{ m} = 5,2843 \times 0,256$ در سمت چپ مبدأ قرار دارد. به هر حال سطح کف در ارتفاع $0,95\text{ cm}$ بالای مبدأ قرار دارد، بنابراین ارتفاع مرکز جرم دونه باید:

$$1,002\text{ m} = (4,8637 - 0,95) \times 0,256$$
 بالای کف باشد.

جدول ۴-۲: فاصله درصدی مرکز جرم از انتهای پروگزیمال بخش بدن ($FL\%$)			جدول ۴-۱: جرم بخش‌ها به صورت درصدی از جرم کل بدن ($FM\%$)		
زن	مرد	قطعه	زن	مرد	قطعه
۵۵	۵۵	سر و گردن	۸,۲۰	۸,۹۶	سر و گردن
۵۰	۵۰	تنه	۴۵,۰۰	۴۶,۸۶	تنه
۴۵,۸	۴۳,۶	بازو	۲,۹	۳,۲۵	بازو
۴۳,۴	۴۳	ساعد	۱,۵۷	۱,۸۷	ساعد
۴۶,۸	۴۶,۸	دست	۰,۵۰	۰,۶۵	دست
۴۲,۸	۴۳,۳	ران	۱۱,۷۵	۱۰,۵۰	ران
۴۱,۹	۴۳,۴	ساق	۵,۳۵	۴,۷۵	ساق
۵۰	۵۰	پاها	۱,۳۳	۱,۴۳	پاها

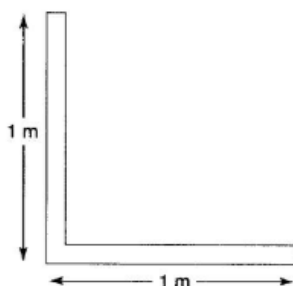
فصل چهارم: تعادل ۱۵۶

جدول ۳-۴ مرکز جرم محاسبه شده با روش صفحه گسترده*

بخش	F_{li}	F_{mi}	$X_{proximal}$	$Y_{proximal}$	X_{distal}	Y_{distal}	X_i	Y_i	$X_i \times F_{mi}$	$Y_i \times F_{mi}$
تنه	۰,۵۰۰	۰,۴۶۸	۵,۵	۴,۲	۴,۹	۶,۵	۵,۲۰۰	۵,۳۵۰	۲,۴۳۹,۰۰	۲,۵۰۳,۸۰
سر و گردن	۰,۵۵۰	۰,۰۹۰	۴,۹	۶,۵	۴,۸	۷,۶	۴,۸۴۵,۰	۷,۱۰۵	۰,۴۳۶,۰۵	۰,۶۳۹,۴۵
ران	۰,۴۳۳	۰,۱۰۵	۵,۵	۴,۲	۶,۱	۲,۸	۵,۹۸۱,۷۵	۳,۵۹۳,۸	۰,۶۰۴,۷۷۹	۰,۶۳۹,۴۵
ساق	۰,۴۳۴	۰,۰۴۸	۶,۱	۲,۸	۷,۶	۲,۵	۶,۷۵۱,۰	۲,۶۶۹,۸	۰,۳۲۴,۰۴۸	۰,۱۲۸,۱۵۰
پای	۰,۵۰	۰,۰۱۴	۷,۶	۲,۵	۸,۱	۱,۹	۷,۸۵۰,۰	۲,۲۰۰	۳,۱۰۹,۹۰	۳,۰۳۰,۸۰
ران چپ	۰,۴۳۳	۰,۱۰۵	۵,۵	۴,۲	۴,۲	۳,۲	۴,۹۳۷,۱	۳,۷۶۷,۰	۰,۵۱۸,۳۹۶	۰,۳۹۵,۵۳۵
ساق	۰,۴۳۴	۰,۰۴۸	۴,۲	۲,۲	۴,۱	۱,۵	۴,۱۵۶,۶	۲,۴۶۲,۲	۰,۱۹۹,۵۱۷	۰,۱۱۸,۱۸۶
پای چپ	۰,۵۰۰	۰,۰۱۴	۱/۴	۱,۵	۳,۳	۱,۱	۳,۷۰۰,۰	۱,۳۰۰	۰,۰۵۱۸,۰۰	۰,۰۱۸۲,۰۰
بازوی راست	۰,۴۳۶	۰,۰۳۳	۴,۶	۶,۲	۱/۴	۵,۴	۴,۳۸۲,۰	۵,۸۵۱,۲	۰,۱۴۴,۰۶	۰,۱۹۳,۰۹
ساعد راست	۰,۴۳۰	۰,۰۱۹	۴,۹	۵,۰	۱/۴	۵,۳	۴,۵۵۶,۰	۵,۱۲۹,۰	۰,۰۸۶,۵۶۴	۰,۰۹۷,۴۵۱
دست راست	۰,۴۶۸	۰,۰۰۷	۱/۴	۵,۳	۳,۷	۵,۴	۳,۹۱۲,۸	۵,۳۴۶,۸	۰,۰۲۷,۳۹۰	۰,۰۳۷,۴۲۸
بازوی چپ	۰,۴۳۶	۰,۰۳۳	۵,۴	۶,۳	۶,۱	۴,۹	۵,۷۰۵,۲	۵,۶۸۹,۶	۰,۱۸۱,۲۷۲	۰,۱۸۱,۷۵۷
ساعد چپ	۰,۴۳۰	۰,۰۱۹	۶,۲	۵,۹	۶,۱	۴,۹	۶,۱۵۷,۰	۵,۴۷۰,۰	۰,۱۱۶,۹۸۳	۰,۱۰۳,۹۳۰
دست چپ	۰,۴۶۷	۰,۰۰۷	۶,۱	۴,۸	۶,۰	۴,۵	۶,۰۵۳,۲	۴,۶۵۹,۶	۰,۰۴۲,۳۷۲	۰,۰۳۲,۶۱۷

$$\begin{aligned} 5,284,276 & X_i \times F_{mi} \text{ جمع} \\ 4,863,742 & Y_i \times F_{mi} \text{ جمع} \\ X_{CM} &= 5,28 \\ Y_{CM} &= 4,86 \end{aligned}$$

* مقادیر $X_{proximal}$, $Y_{proximal}$, X_{distal} , Y_{distal} از شکل ۴-۱۰ استخراج می‌شوند. X_i , Y_i بوسیله‌ی مقادیر F_{li} محاسبه می‌شوند. مختصات مرکز جرم با جمع کردن دو ستون انتهایی بدست می‌آید.
† همگی واحدها بر حسب سانتی متر هستند.
CM = مرکز جرم.



شکل ۴-۱۶. شیء کالیبراسیون برای ثبت تصویر دو بعدی بی حرکت

۴-۱۳ نمودارهای جسم آزاد

اکنون باید روشن باشد که هنگام در نظر گرفتن اینکه آیا جسمی در تعادل است یا نه، به طور معمول لازم است که نمودار یا نمودارهایی رسم کنیم تا نیروهای عمل کننده بر روی جسم را با احتساب بزرگی و جهت نیروهای عمل کننده نشان دهیم.

۴-۱۳-۱ محاسبه‌ی نیروهای نامعلوم

گاهی ممکن است یک یا بیشتر نیروهای عمل کننده بر روی جسم نامعلوم باشند، به طوریکه آنها باید بصورت بردارهایی با بزرگی نامعلوم و بعضی وقت‌ها زاویه‌ی نامعلوم نشان داده شوند. مشخص بودن نیروها به اندازه‌ی مشخص بودن اینکه "جسم" چیست ضروری است. اغلب در بیومکانیک جسم به عنوان کل بدن انسان تعریف می‌شود، اما در موقعیت‌های دیگر می‌تواند به عنوان یک راکت بیسبال، یک اتومبیل، یا بخشی از بدن انسان باشد (مانند، بخش پا). جسم هرطور که تعریف شود، مهم این است که برای اهدافی که از رسم نمودار جسم آزاد پی آن هستیم، تنها نیروهای عمل کننده بر روی جسم در نظر گرفته شوند و دیگر نیروها (مانند، نیروهایی که جسم بر اطرافش اعمال می‌کند) در نظر گرفته نشوند. همچنانکه در مثال‌های ۴-۶ تا ۴-۱۱ دیده می‌شود، بعضی وقت‌ها نیروهای نامعلوم می‌توانند با استناد به شرایط تعادل، $\sum F = 0$ و $\sum M = 0$ ، محاسبه شوند. شکل‌های ۴-۱۷ تا ۴-۱۹ این ایده را با مثال‌هایی از نمودارهای جسم آزاد تشریح می‌کنند.

در مورد مرد نشان داده شده در شکل ۴-۱۷ که یک سطل را نگه داشته، شرط "نیرو" برای تعادل ایستا بیان می‌کند:

$$R_{1z} + R_{2z} = W + B \quad \text{و} \quad R_{1x} + R_{2x} = 0$$

بنابراین:

$$R_{1z} + R_{2z} = 950N$$

به هر حال برای بدست آوردن مقادیر R_1 و R_2 بصورت جداگانه، این شرایط به تنهایی کافی نیست. برای انجام این کار ما نیاز داریم تا از شرط "ممان" برای تعادل کمک بگیریم. با در نظر گرفتن ممان‌ها حول پای راست مرد در O :

$$-950 \times 0.2 + R_{2z} \times 0.4 - 200 \times 0.5 = 0$$

فصل چهارم: تعادل ۱۵۸



شکل ۴-۱۷. نمودار جسم آزاد برای یک مرد نگهدارنده سطل در وضعیت ساکن. وزن مرد W و وزن سطل B است. نیروهای واکنش، R_1 و R_2 در پاهای مرد عمل می‌کنند و لزوماً مساوی نیستند. وزن مرد $750N$ و وزن سطل $200N$ است. محورها x و z به ترتیب محورهای افقی عمودی هستند و O مبدأ است.

توجه کنید، بدلیل اینکه خطوط عمل R_{1z} ، R_{1x} و R_{2x} از نقطه‌ی O می‌گذرند، آنها در این معادله‌ی اخیر وارد نمی‌شوند. نتیجه‌گیری می‌شود که:

$$R_{2z} = (100 + 190) \cdot 0.4 + 725N$$

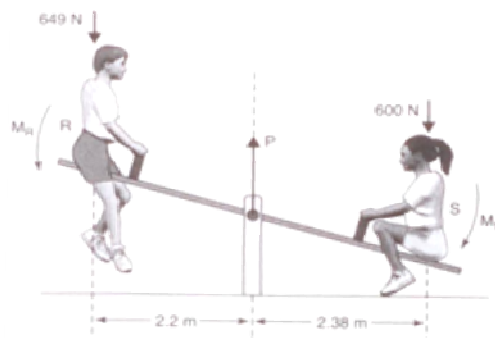
بنابراین:

$$R_{1z} = 950 - 725 = 225N$$

در شکل ۴-۱۸ دو نفر، R و S ، که بر روی الاکلنگ نشسته‌اند، نشان داده شده‌اند. به احتمال زیاد در این مورد، جسم مورد بررسی خود الاکلنگ است. از ساختار خود الاکلنگ به روشنی این اطمینان حاصل می‌شود که هیچ جابه‌جایی یکپارچه در الاکلنگ وجود ندارد؛ تنها یک چرخش حول نقطه‌ی اتکا امکانپذیر است. نیروهایی که بر روی این الاکلنگ عمل می‌کنند دو نیروی وزن، $600N$ و $649N$ ، به علاوه‌ی نیروی واکنش، P ، در لولا هستند. در شکل ۴-۱۸ این نیروی واکنش به طور عمودی رو به بالا نشان داده شده است؛ اگر چه لزوماً اینطور نیست، با این حال، بهتر است تا فرض کنیم که قسمت عمده‌ی نیرو واکنش در تکیه‌گاه، عمودی خواهد بود. با به کار بردن $\sum F = 0$:

$$P - 649 - 600 = 0$$

فصل چهارم: تعادل ۱۵۹



شکل ۴-۱۸۴. دو فرد، R و S نشسته بر روی یک الاکلنگ. وزن R ، 649 N است و در فاصله‌ی عمودی 2.2 m از تکیه‌گاه عمل می‌کند. همچنین وزن S ، 600 N است و در فاصله‌ی عمودی 2.38 m از تکیه‌گاه عمل می‌کند.

بنابراین:

$$P = 1249\text{ N}$$

با به کار بردن $\sum M = 0$ و در نظر گرفتن ممان‌ها حول تکیه‌گاه:

$$M_R + M_S = 0$$

$$-600 \times 2.38 + 649 \times 2.2 = 0$$

پاسخ معادله‌ی کنونی حداقل تا نزدیکترین 0.2 (± 0.2) اعتبار دارد!! توجه کنید که در این حالت در الاکلنگ هیچ چرخشی وجود نخواهد داشت یا چرخش کمی وجود خواهد داشت، بویژه زمانی که در تکیه‌گاه اصطکاک وجود داشته باشد. همچنین بدلیل اینکه فاصله‌ی عمودی نیروی واکنش در تکیه‌گاه، P ، از تکیه‌گاه صفر است، این نیرو در معادله‌ی ممان وارد نمی‌شود.

در برخی موقعیت‌ها، ایده‌ی تعادل می‌تواند برای بخش‌های منفرد بدن نیز استفاده شود. برای روشن ساختن این موضوع، ساق پا را که در شکل ۴-۱۹ نشان داده شده است، در نظر بگیرید. در اینجا فرض بر این است که جسم دارای تعادل است (یعنی پا در این موقعیت ساکن است یا با سرعت ثابت و بدون چرخش بخش در حال حرکت است). اگر ساق پای نشان داده شده در شکل ۴-۱۹ در تعادل باشد، آنگاه:

فصل چهارم: تعادل ۱۶۰

$$\square F = 0$$

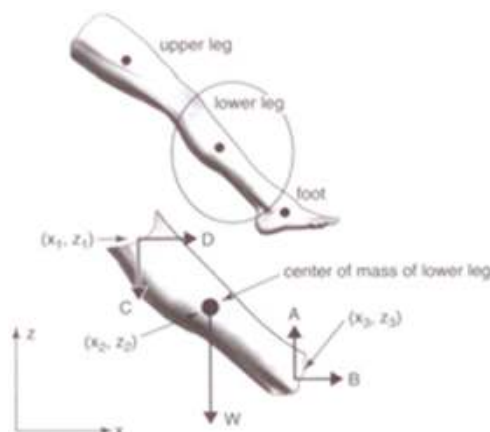
$$A - C - W = 0$$

$$D + B = 0$$

پیشروی بیشتر در این مساله ما را نیازمند استفاده از شرط ممان می‌کند. با در نظر گرفتن ممان‌ها حول مفصل زانو، $\sum F = 0$ نتیجه گرفته می‌شود:

$$-W \times (x_2 - x_1) + A \times (x_3 - x_1) + B \times (z_1 - z_3) = 0$$

توجه کنید که در این معادله‌ی آخر بدلیل اینکه وزن در جهت منفی z عمل می‌کند، بصورت $-W$ اعمال شده است. به طور مشابه بدلیل اینکه نیروی واکنش افقی در مچ پا در جهت $+x$ نشان داده می‌شود، B بصورت مثبت اعمال شده است. با نوشتن دوباره‌ی معادله و مشخص ساختن ممان‌های مثبت و منفی:



شکل ۴-۱۹. نمودار جسم آزاد برای ساق پا، وزن ساق پا را که ادر مرکز جرم عمل می‌کند، همراه با نیروهای واکنش عمودی نامعلوم، A و C ، و نیروهای واکنش افقی، B و D ، به ترتیب در مچ پا و مفصل زانو، نشان می‌دهد. همچنین پا بصورت یک سیستم متصل از بخش‌های خطی مستقیم نشان داده شده است: ران، ساق پا و پا. ساق پا (دایره) بصورت بزرگ شده نشان داده شده است.

$$[-W \times (x_2 - x_1)] + [A \times (x_3 - x_1)] + [B \times (z_1 - z_3)] = 0$$

گشتاور در جهت عکس عقربه‌های ساعت گشتاور در جهت عکس عقربه‌های ساعت گشتاور در جهت عقربه‌های ساعت

فصل چهارم: تعادل ۱۶۱

فرض کنید مختصات x و z برای زانو، CM ، و مچ پا، که بر حسب میلی متر اندازه گیری شده‌اند، بصورت زیر هستند:

$$(x_1, z_1) = (546,2, 1258,4)$$

$$(x_2, z_2) = (678,1, 1126,4)$$

$$(x_3, z_3) = (678,1, 1126,4)$$

و فرض کنید که مقدار C و W به ترتیب $410N$ و $39N$ هستند. این مجموعه معادلات اکنون می‌تواند برای بدست آوردن نیروهای دیگر استفاده شوند؛ A ، B و D . بنابراین:

$$A = C + W$$

$$A = 410 + 39 = 449N$$

همچنین:

$$[-W \times (x_2 - x_1)] + [A \times (x_3 - x_1)] + [B \times (z_1 - z_3)] = 0$$

$$[-39 \times (678,1 - 546,2)] + [449 \times (850,2 - 546,2)]$$

$$+ [B \times (1258,4 - 954,3)] = 0$$

$$-5144,1 + 136496 + 304,1 \times B = 0$$

بنابراین:

$$B = (5144,1 - 136496) / 304,1 = -431,9N$$

به طوریکه:

$$D = -B$$

$$D = 431,9N$$

اینکه B منفی بدست آمد، نشان می‌دهد که بردار B می‌تواند در جهت متضاد رسم شود (یعنی از راست به چپ عمل کند).

۲-۱۳-۴ محاسبه‌ی ممان‌های مفصل

نمودارهای جسم آزاد می‌توانند برای تخمین ممان‌های مفصل نیز استفاده شوند. برای مثال یک ژیمناست را در نظر بگیرید که بر روی یک پا ایستاده است. در شکل ۴-۲۰،

فصل چهارم: تعادل ۱۶۲

نمودار جسم آزاد را برای پا در نظر می‌گیریم. GRF بصورت R ، و وزن بخش پا بصورت mg نشان داده می‌شود. برای روشنی و سادگی، اثر چرخانندگی اعمال شده توسط عضلات ساق پا، F ، و ممان چرخاننده مربوط به آن حول مچ پا، M_a ، بصورت جداگانه در سمت راست نشان داده شده‌اند.

بدلیل اینکه هیچ ممانی حول مفصل مچ وجود ندارد، برای خلوت بودن شکل نیرویی که در مفصل مچ بر روی بخش پا به سمت پائین عمل می‌کند، حذف شده است. واضح است که بمنظور حفظ تعادل، عضلات پشت ساق پا باید یک ممان چرخشی حول مفصل مچ بوجود آورند. اگر فاصله مرکز مفصل مچ پا تا CM پا $0.7m$ اندازه‌گیری شود و فاصله مرکز مفصل مچ پا تا نیروی عکس العمل $0.3m$ باشد، پس محاسبه ممان حول مرکز مفصل مچ پا امکان پذیر است:

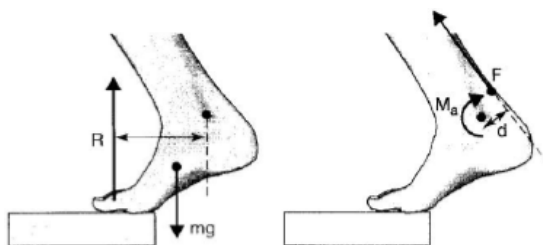
نیروی R باید برابر وزن آزمودنی باشد. اگر جرم ژیمناست $55kg$ و جرم پای او

باشد: $0.9kg$

$$=M_a (0.20 \times 539) - (0.07 \times 8.82)$$

$$=M_a 107.2Nm$$

$$M_a = (0.20 \times R) - (0.07 \times mg)$$



شکل ۴-۲۰. محاسبه‌ی گشتاور در مفصل مچ پا. Mg وزن

بخش پا را نشان می‌دهد، R نیروی واکنش زمین است که در پنجه عمل می‌کند، F نیروی اعمال شده توسط عضلات پشت ساق پا است و d بازوی ممانی نیروی F است.

این ممان تولید شده توسط نیروی عضلات پشت ساق پا در شکل ۴-۲۰ به

صورت F نشان داده شده است. اگر فاصله‌ی عمودی مرکز مفصل مچ پا تا نیرو، F ، به

فصل چهارم: تعادل ۱۶۳

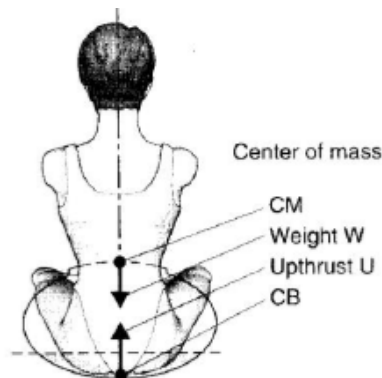
اندازه‌ی $d = ۰٫۰۴\text{ m}$ باشد، آنگاه F می‌تواند به صورت زیر محاسبه شود:

$$F = \frac{M_a}{d} = \frac{۱۰۷٫۰۲}{۰٫۰۴} = ۲۶۸۰\text{ N}$$

شناوری و پایداری در کایاک

مورد پژوهی ۴-۴

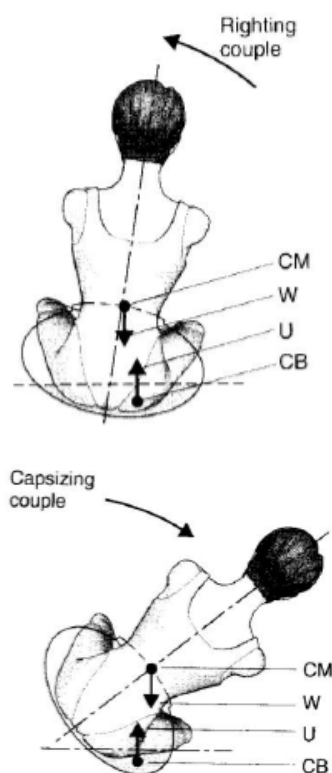
یک زن را در نظر بگیرید که در کایاک نشسته است. وزن ترکیبی، W ، که در CM عمل می‌کند، قایق را به درون آب می‌کشد. فرو رفتن قایق در آب تا زمانی ادامه می‌یابد که نیروی بالاران، U ، تولید شده توسط بخش غوطه‌ور قایق به اندازه‌ی افزایش یابد که با وزن برابر شود. می‌توان فرض کرد که نقطه‌ی عمل نیروی بالاران یک نقطه در مرکز بخش غوطه‌ور است که نام آن مرکز شناوری (CB) است (بخش ۴-۱۱ را ببینید).



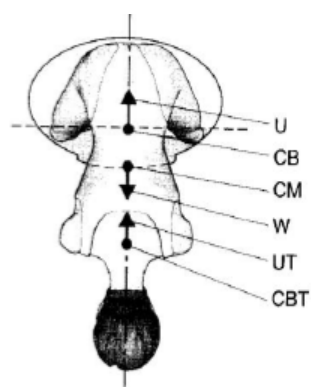
اگر کایاک به یک طرف کج شود، شکل بخش غوطه‌ور بدن و قایق تغییر می‌کند. همانگونه که نشان داده شده است، CB ، جابه‌جا می‌شود. اکنون اثر دو نیروی غیر هم خط، تولید یک جفت راست گرد است که تمایل به برگرداندن قایق به وضعیت عمودی را دارد؛ بنابراین برای زاویه‌های کوچک کج شدن، قایق در تعادل پایدار است (بخش ۴-۱۱ را ببینید).

اگر زاویه کج شدن بیشتر شود، آنگاه جابه‌جایی CB برای جبران جابه‌جایی مرکز گرانش ناکافی است، و قایق واژگون خواهد شد. اکنون این وضعیت، نمونه‌ای از تعادل ناپایدار است.

فصل چهارم: تعادل ۱۶۴



زمانی که کایاک کاملاً واژگون شد، دوباره با CM و CB که در یک خط هستند به تعادل پایدار می‌رسد. همچنین از لحظه‌ای که (تنه) غوطه‌ور می‌شود، یک نیروی شناوری اضافی بر روی تنه عمل می‌کند؛ این نیرو بصورت UT نشان داده می‌شود.

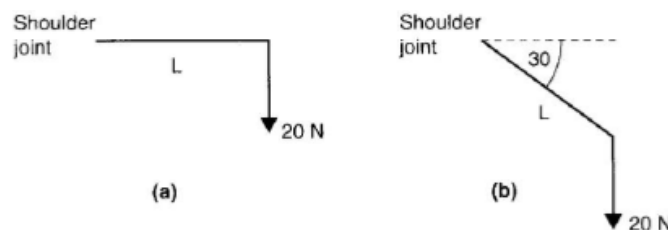


خلاصه

این فصل درباره‌ی تعادل، بر روی شرایط فیزیکی لازم برای ایجاد تعادل ایستا تمرکز داشت. تعادل ایستا شامل شرایطی برای توازن نیروها $\sum F = 0$ و توازن ممان‌ها $\sum M = 0$ است. تمایز بین اجسام در تعادل و اجسام نامتعادل با مورد پژوهی کاهش سرعت توپ‌هاکی غلتان در یک سطح صاف مسطح توضیح داده شد. CM بدن انسان توسط هر دو روش تخته‌ی واکنش و روش تحلیل قطعه‌ای تخمین زده شد. مورد پژوهی دوم روش تخته واکنش را برای یافتن CM تعدادی از افراد استفاده کرد. تعادل در یک مجموعه از موقعیت‌های رایج، شامل آنهایی که دارای دو و سه نیروی عمل کننده هستند، مطالعه شد. این فصل همچنین درباره‌ی هیدروستاتیک و شناوری و محاسبات تغییر فشار هیدروستاتیک با عمق، بحث کرد. فصل با نشان دادن اینکه شرایط لازم برای تعادل می‌توانند برای محاسبه‌ی نیروها و ممان‌های ناشناخته بر روی اندام انسان در شرایط واقعی استفاده شوند، خاتمه یافت. مورد پژوهی کایاک تغییر خاصیت پایداری تعادل بسته به موقعیت CB و CM را روشن ساخت.

خودآزمایی

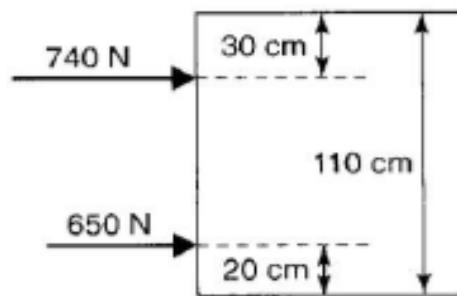
۱. یک ورزشکار یک دیسک را در دو وضعیت متفاوت در دستش نگه می‌دارد. در وضعیت اول دست او افقی است (a) و در وضعیت دوم دست او 30° درجه پائین سطح افق است (b). طول دست ورزشکار 63 cm ، و وزن دیسک 20 N است ممان این نیرو را حول مفصل شانه در دو وضعیت محاسبه کنید.



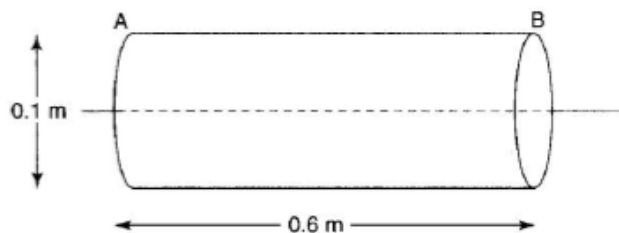
۲. دو لوج سوار به منظور شتاب دادن به یک لوج، قبل از پریدن به داخل

فصل چهارم: تعادل ۱۶۶

لوج، آنرا از پشت هل می‌دهند. لوج سوار ۱ لوج را با نیروی 650 N در فاصله 20 cm از لبه‌ی زیرین هل می‌دهد و لوج سوار ۲ با نیروی 740 N در فاصله 30 cm از لبه‌ی بالایی هل می‌دهد. نیروی برآیند بر روی لوج چیست، و نقطه اثر آن چیست؟



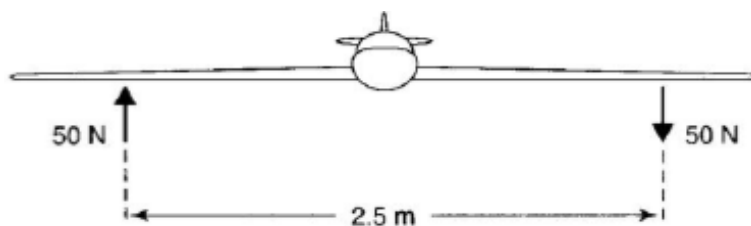
۳. برای مدل‌سازی دست افراد، دست بصورت لوله‌ی مدور در نظر گرفته می‌شود. چگالی ماده‌ی سازنده‌ی استوانه بصورت 1100 kg/m^3 در نظر گرفته می‌شود. طول آن 0.6 m ، و قطر آن 0.1 m است. موقعیت مرکز گرانش (CG) این جسم را با استفاده از استدلال‌های تقارن بدست آورید. موقعیت CG را بر روی نمودار استوانه مشخص کنید. اگر دست افقی نگه داشته شود، ممان اعمال شده حول مفصل شانه چیست؟ فرض کنید که شتاب ناشی از گرانش 9.8 m/s^2 و حجم استوانه $\pi r^2 h$ است.



۴. گلايدر بر روی بال‌هایش سطوح کنترلی دارد که خلبان را قادر به کنترل ارتفاع گلايدر می‌کند. در یک وضعیت ویژه، بال دست چپ جریان هوا را به سمت پائین هدایت می‌کند، و بال دست راست جریان هوا را به

فصل چهارم: تعادل ۱۶۷

سمت بالا هدایت می‌کند. در نتیجه یک نیرو رو به بالا بر روی بال دست چپ و یک نیرو رو به پائین بر روی بال دست راست عمل می‌کند. جفت عمل کننده بر روی گلايدر چیست؟ و اثر این جفت چه خواهد بود؟

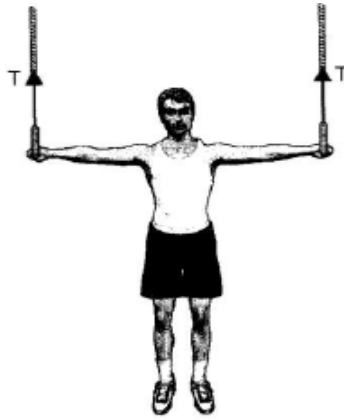


۵. همانطور که در شکل زیر نشان داده شده است یک اسکی باز بر روی یک سطح شیبدار توقف کرده است. وزن اسکی باز 800 N و زاویه‌ی سطح شیبدار نسبت به افق 35° است. مولفه‌های وزن عمود بر سطح شیبدار R_n و رو به پائین سطح شیبدار R_p را بدست آورید. اگر اسکی باز در این نقطه ساکن باشد، توضیح دهید که این سکون چگونه عملی می‌شود؟



۶. یک ژیمناست بر روی دار حلقه در حالت صلیب آویزان می‌شود. وزن ژیمناست 700 N و طناب‌ها افقی هستند. کشش در طناب‌های آویزان چیست؟

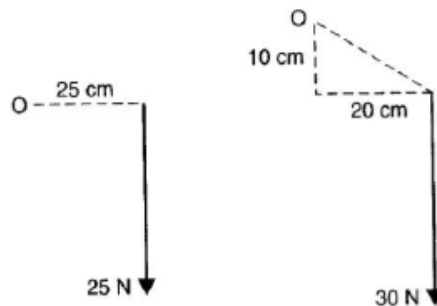
فصل چهارم: تعادل ۱۶۸



۷. ژیمناست سوال ۶ را با طناب‌های مایل، با زاویه‌ی ۱۰ نسبت به خط عمود در نظر بگیرید. کشش‌های جدید در طناب‌ها چیست؟

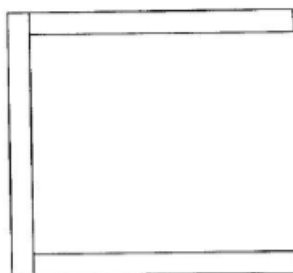


۸. ممان‌های نیروهای زیر را حول نقطه‌ی O محاسبه کنید:



فصل چهارم: تعادل ۱۶۹

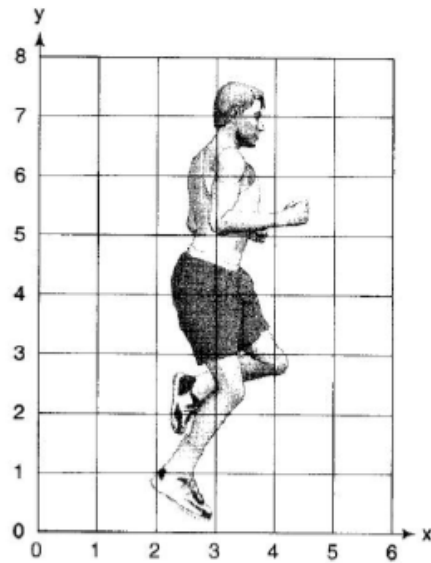
۹. لازم است تا CM شیئی زیر را پیدا کنیم: این شیئی از سه میله فلزی مسطیل متصل به هم تشکیل شده است تا شیئی C شکل را بسازد. طول هر میله 20cm ، و در بخش تقاطع $1\text{cm} \times 1\text{cm}$ است. هر میله از ماده‌ای با غلظت یکپارچه است و مرکز گرانش آن دقیقاً در وسط میله قرار دارد. پیش-بینی کنید که CM این جسم کجاست و یک آزمایش را شرح دهید که به موجب آن موقیت CM می‌تواند اندازه‌گیری شود.



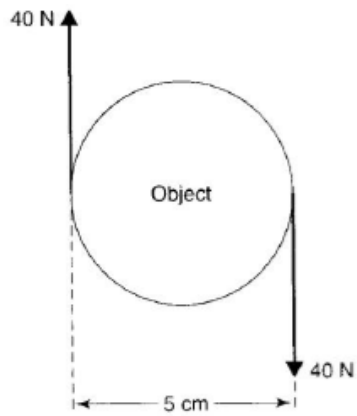
۱۰. با استفاده از روش قطعه‌ای CM شخصی را که اطلاعات آن در جدول زیر آمده است، محاسبه کنید. برای داشتن طرح کلی از وضعیت شخص به نمودار زیر مراجعه کنید (واحدهای فاصله اختیاری هستند):

جرم (kg)	مختصات مرکز جرم	قطعه
۵,۳۹	(۳,۵, ۷,۰)	سر
۳۵,۰۵	(۳,۳, ۵,۸)	تنه
۱,۸۱	(۲,۸, ۵,۷)	بازوی چپ
۱,۸۱	(۳,۲, ۵,۸)	بازوی راست
۱,۰۶	(۳,۱, ۵,۱)	ساعد چپ
۱,۰۶	(۳,۶, ۵,۲)	ساعد راست
۰,۴۱	(۳,۷, ۵,۰)	دست چپ
۰,۴۱	(۴,۴, ۵,۳)	دست راست
۶,۵۸	(۳,۶, ۳,۴)	ران چپ
۶,۵۸	(۳,۱, ۳,۴)	ران راست
۳,۰۷	(۳,۶, ۳,۵)	ساق پای چپ
۳,۰۷	(۲,۹, ۲,۰)	ساق پای راست
۰,۹۵	(۲,۴, ۲,۴)	پای چپ
۰,۹۵	(۲,۵, ۰,۵)	پای راست

فصل چهارم: تعادل ۱۷۰

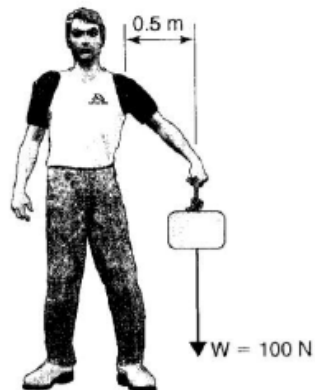


۱۱. ممان جفت بر روی شیء زیر چیست؟



۱۲. دست شخصی را که یک جرم 10 kg را نگه می‌دارد در وضعیت زیر در نظر بگیرید.
گشتاور اعمال شده توسط وزن 100 N حول مفصل شانه‌ی چپ چیست؟

فصل چهارم: تعادل ۱۷۱



منابع

Dempster WT, Gabel WC, FeltsWJL (1959). *The anthropometry of manual work space for the seated subjects*. Am J Phys Anthrop 17:289-317.

Dempster WT (1955). *Space requirements of the seated operator*" WADC-TR-55-159, Wright Patterson Air Force Base.

خواندنی‌های پیشنهادی

Hall S (2002). *Basic Biomechanics*. McGraw-Hill Education-Europe.

فصل پنجم

دینامیک ۱

اهداف فصل

هدف این فصل عبارت است از:

ارائه‌ی شناخت صحیحی از قوانین نیوتن و دینامیک از قبیل جاذبه، اندازه‌گیری جرم و نیرو، نیروهای اصطکاک و نیروهای پسا، جریان سیال و عدد رینولد، و حرکت پرتابه در حضور نیروی پسا به دانشجویان.

نتایج فصل

بعد از مطالعه‌ی این فصل، خواننده قادر خواهد بود تا:

- قوانین نیوتن را یاد بگیرد و در حرکت مستقیم الخط به کار گیرد.
- نیروی گرانشی را بر روی اشیاء محاسبه کند.
- برخی روش‌های استفاده شده برای محاسبه نیروها را بشناسد.
- محاسبات بر پایه نتایج کشش سنج و صفحه‌ی نیرو را انجام دهد.
- نتایج عملی و تئوری برای محاسبه‌ی مرکز جرم، نیرو و شتاب را با هم مقایسه کند.
- محاسبات بر اساس ضریب ثابت اصطکاک را انجام دهد.
- با استفاده از مدل ساده‌ی نیروهای پسا، خط سیر پرتابه را تخمین بزند.

۱-۵ اینرسی و جرم

اشیاء دارای خاصیتی هستند که باعث می‌شود تمایل داشته باشند تا اگر در حال سکون هستند در برابر شتاب گرفتن یا ایجاد حرکت مقاومت کنند. همچنین اگر یک شیئی قبلاً در حرکت باشد تمایل دارد تا به حرکت ادامه دهد و تمایل دارد تا در برابر تغییر سرعت و یا جهت (حرکت) مقاومت کند. این ویژگی با واژه **اینرسی** شرح داده می‌شود. تجربه‌های روزانه مشخص می‌کند که در حقیقت اشیاء بزرگ مانند قطارها دارای یک مقدار بزرگ اینرسی هستند و اشیاء کوچک مانند توپ تنیس روی میز دارای اینرسی خیلی کمی هستند. مقدار ماده‌ای که جسم از آن تشکیل شده، جرم جسم نامیده می‌شود و اندازه‌گیری مستقیم اینرسی آن جسم است. در SI (سیستم بین‌المللی واحدها) جرم به کیلوگرم محاسبه می‌شود. بدن یک فرد بزرگسال جرمی در حدود ۴۵ تا ۱۰۰ کیلوگرم برابر وزن تقریبی ۴۵۰ تا ۱۰۰ نیوتن دارد. وزن یک نیرو است و نتیجه کشش گرانشی زمین بر روی جسم می‌باشد؛ تبدیل جرم به وزن مستلزم ضرب جرم (به کیلوگرم) در شتاب گرانشی قابل استناد، با مقدار تقریبی $9.8ms^{-2}$ در سطح دریا، است. تمایز بین جرم شیئی و وزن آن مهم است. رابطه‌ی بین وزن و جرم دوباره در بخش ۷-۵ بیان می‌شود.

۲-۵ نیرو

نیرو عاملی است که می‌تواند حالت حرکت جسم را تغییر دهد. نیرو یک کنش فشاری یا کششی است و با توجه به بزرگی و در حد امکان جهت آن، می‌تواند سرعت جسم را تغییر دهد. یکی از مظاهر ساده نیرو، وزنه‌ای است که بر خلاف نیروی جاذبه بالا برده می‌شود. همه اجسام دارای وزن هستند که به منظور بلند کردن جسم از کف باید بر آن غلبه شود.

یعنی هر نیروی بالابر که به منظور حرکت دادن شیئی به بالا اعمال می‌شود، خواه بوسیله‌ی شخص، طناب‌ها، زنجیر و امثال آن اعمال شده باشد، باید حداقل مقداری برابر با وزن آن شیئی داشته باشد. نیرو کمیتهی برداری است چون باید جهت و بزرگی آن تعیین گردد تا بتوان آن را به طور کامل مشخص کرد.

۳-۵ قانون اول نیوتن

هر جسمی به حالت سکون یا حرکت در خط مستقیم ادامه خواهد داد مگر اینکه بوسیله‌ی نیروی خارجی که بر روی آن اعمال می‌شود، مجبور به تغییر آن حالت شود. همچنین این قانون به قانون اینرسی معروف است و در بخش ۳-۱ معرفی شد. برای مطالعات بیشتر درباره قوانین نیوتن و مکانیک عمومی، خواننده می‌تواند به مک کال (۲۰۰۰) مراجعه کند.

۴-۵ نیروهای گرانشی

علاوه بر نیروهایی که نتیجه تماس بین اجسام هستند به طور طبیعی نیروهای دیگری هم هستند بدون تماس دو جسم ظاهر می‌شوند. مثال متداول این نیروها، نیروی گرانش است. گرانش نیرویی است که باعث می‌شود ماه به دور زمین بچرخد و زمین به دور خورشید. گرانش همچنین نیرویی است که بلند کردن وزنه را دشوار می‌کند و نیزه را به سمت زمین بر می‌گرداند. این نیرو ضعیف است و معمولاً برای عمل متقابل بین اشیائی که روزمره با آنها سرو کار داریم، مثل توپ و باتوم قابل چشم پوشی است. به طور معمول تنها زمانی نیروهای گرانشی مهم هستند که یکی از جرم‌ها زمین باشد. نیوتن قانون گرانشی خود را به صورت زیر تعریف کرده است:

نیروی گرانشی بین هر دو جرم نقطه‌ای با حاصل ضرب جرم‌ها به صورت مستقیم و با مجذور فاصله بین آنها به طور معکوس متناسب است.

شرط جرم‌های نقطه‌ای مهم است، زیرا نیوتن پی برد که نیروی جاذبه بین دو جرم بزرگ، می‌تواند طور دیگری رفتار کند. خوشبختانه، نیوتن توانست نشان دهد که برای محاسبه‌ی نیروی جاذبه‌ی زمین و به طور کلی اجرام کروی بر روی یک شیء، می‌توان رفتار زمین را طوری در نظر گرفت که گویی همه جرم آن در مرکز زمین (مرکز گرانش) جمع شده است. اشیائی از قبیل بدن انسان که بر روی سطح زمین ایستاده است، در مقایسه با اندازه زمین به قدری کوچک هستند که می‌توانند جرم نقطه‌ای در نظر گرفته شوند. این قانون می‌تواند به شکل زیر خلاصه شود:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

در اینجا F نیرویی است که بر روی هر ذره عمل می‌کند، m_1 و m_2 جرم‌ها هستند، r فاصله بین جرم‌ها است، و G ثابت جهانی با مقدار $6.67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2 \text{ kg}^{-2}$ است. برای وضعیتی که جسم بر روی زمین است، می‌توان m_2 را جرم زمین و r را شعاع زمین فرض کنیم. بر این اساس می‌توان دید که در یک مکان معین بر روی زمین، نیروی گرانشی متناسب با جرم جسم مربوطه می‌باشد. همچنین می‌توان نتیجه گرفت که نیروی گرانش بر روی یک شیء با افزایش ارتفاع کم خواهد شد. برای مثال برای هواپیمایی که در ارتفاع 1000 m بالای سطح دریا پرواز می‌کند، نیروی گرانشی نسبت به آنکه در سطح دریا است کاهش یافته است. با این حال به دلیل اینکه شعاع زمین تقریباً 6000000 m است، اثر ارتفاع واقعاً کوچک است. شتاب ناشی از گرانش که در سطح زمین محاسبه شده است، تقریباً 9.81 ms^{-2} است. اما این مقدار با توجه به مکان دقیق در زمین و تغییر ارتفاع، حضور حفره یا غلظت جرم زیر زمین، عرض جغرافیایی، و تغییرات شکل زمین از حالت کروی، به صورت جزئی تغییر می‌کند.

۵-۵ قانون دوم نیوتن

قانون دوم نیوتن ارتباط بین نیرو، جرم، و شتاب را بیان می‌کند. قانون دوم نیوتن بیان می‌کند:

نیرویی که بر روی جسم عمل می‌کند به آن شتابی می‌دهد که در جهت نیرو است و بزرگی آن تناسب مستقیم با نیرو و تناسب عکس با جرم جسم دارد.

$$a = \frac{F}{m}$$

یا

$$F = ma$$

واحد نیرو در SI نیوتن است (N)؛ یک نیوتن نیرویی است که به جرم استاندارد

فصل پنجم: دینامیک ۱ ۱۷۷

۱kg شتابی معادل $1ms^{-2}$ می‌دهد. اطلاعات بیشتر در زمینه قوانین نیوتن و دینامیک در مک کال (۲۰۰۰) ارائه شده است.

■ مثال ۵-۱

جهت ثبت رکورد مافوق صوت در سطح خاکی (گلی) صاف در بلک روک دسرت، نوادا^۱، یک اتومبیل با موتور جت تروست SSC، استفاده شد که $10000kg$ جرم داشت، و موتورهای آن می‌توانست $200650N$ نیروی فشاری را آزاد کند. حداکثر شتابی که تروست SSC می‌توانست به آن برسد چقدر است؟

جواب

$$a = \frac{F}{m} = \frac{200650N}{10000kg} = 20.065ms^{-2}$$

۵-۶ اندازه‌گیری جرم و نیرو

۵-۶-۱ مقایسه نیروهای معلوم و نامعلوم

در آزمایشگاه‌ها، اندازه‌گیری‌های خیلی معمول و دقیق جرم با ترازوی تعادل که وزن اجرام را با هم می‌سنجد، انجام می‌شود. همچنین اندازه‌گیری‌های نیروهای نامعلوم می‌تواند بوسیله‌ی یک وزن معلوم انجام شود. به عنوان یک روش دیگر، نیرو می‌تواند با ترازوی فنری، بوسیله‌ی مطابقت دادن نیروی ناشناخته با نیروی تولید شده توسط فنر تحت کشش، اندازه‌گیری شود. ترازوی فنری می‌تواند بوسیله‌ی آویزان کردن وزن‌های معین از آن و بررسی مقدار کشش آن کالیبره (مدرج) شود.

۵-۶-۲ کشش سنج‌ها

برای اندازه‌گیری نیروها می‌توان از روش‌های الکتریکی نیز استفاده کرد. کشش سنج

۱. Black Rock Desert, Nevada

فصل پنجم: دینامیک ۱ ۱۷۸

برای نشان دادن تغییر شکل‌های خطی یا کج شدن ماده استفاده می‌شود. وقتی کشش سنج به سطح ساختاری از قبیل استخوان و یا میله‌ای فولادی متصل شد، می‌تواند حتی خم شدن‌های خیلی جزئی را در ساختار نمایان کند.

بدلیل اینکه مقدار خم شدن شیئی مرتبط با نیروی به کار رفته می‌باشد، برون داد کشش سنج می‌تواند برای اندازه‌گیری نیرو استفاده شود. در اصل کارکرد کشش سنج اولین بار توسط ویلیام تامسون^۱ (لورد کلونین^۲) توصیف شد، کسی که دریافت که مقاومت سیم فلزی بسته به کشش قابل توسعه در سیم، تغییر می‌کند. با متصل کردن چنین سیمی به سطح یک شیئی در شکل یک کشش سنج، سیم به همان اندازه که جسم کش آمده، کش خواهد آمد. بسیاری از کشش سنج‌های جدید تنوعی از نیمه رسانا هستند که نسبت به انواع فلزی اصلی دارای کارایی بالاتری هستند. طرح یک نمونه کشش سنج در شکل ۵-۱ نمایش داده شده است.

در برخی موارد، مانند میله‌های کانتیلور^۳، یک جفت کشش سنج می‌تواند در زیر و بالای میله کانتیلور طوری استفاده شوند که میله تحت فشار قرار بگیرد (مثلاً یک کشش سنج کشیده می‌شود در حالی که دیگری کوتاه می‌شود). این جفت کشش سنج‌ها می‌توانند با استفاده از اثر "کشش - فشار"، در مدار پل ویستون^۴ (شکل ۵-۲) به هم متصل شوند.

کشش سنج تحت کشش SG_1 دارای یک مقاومت افزایش یافته $R + \Delta R$ است و کشش سنج تحت فشار SG_2 دارای یک مقاومت کاهش یافته $R - \Delta R$ است. تغییر مقاومت، ΔR ، به طور مستقیم متناسب با کشش است. برای اطلاعات بیشتر در مورد ابزارهای الکتریکی، خواننده به رجتین (۲۰۰۴) مراجعه کند. ضریب معیار (GF) به عنوان تغییر کوچک در مقاومت بر حسب تغییر کوچک در مقدار کشش در امتداد محور کشش سنج تعریف شده است. GF های نمونه نزدیک ۲٫۰ هستند. بنابراین:

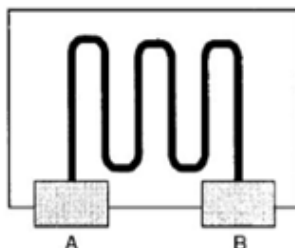
۱. William Thomson

۲. Lord Kelvin

۳. Cantilever

۴. Wheatston

$$\text{کشش} = \frac{\Delta L}{L} = (\text{به عبارت دیگر، کشش تقسیم بر طول اولیه})$$



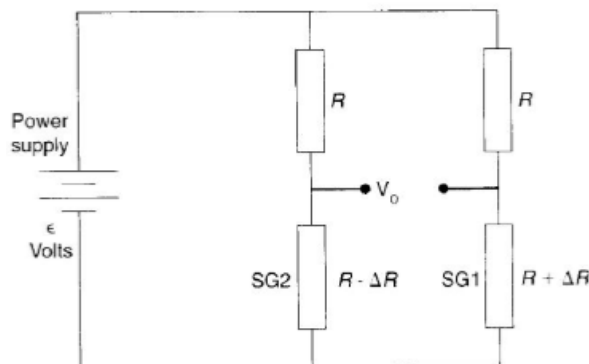
شکل ۵-۱. کشش سنج A و p پدهایی را نشان می‌دهند که می‌توانند به هم متصل شوند. کشش سنج در شکل فیلم باریکی است که می‌تواند به سطوح زیادی متصل شود. مسیر ضخم مسیر فلزی یا نیمه رسانایی است که زمانی که کشش سنج تغییر شکل می‌دهد، مقاومتش تغییر می‌کند.

و:

$$GF = \frac{\Delta R/R}{\Delta L/L}$$

بنابراین:

$$\Delta R = R \times GF \times \frac{\Delta l}{l}$$



شکل ۵-۲. یک نمونه از یک شکل از مدار پل ویستون. برای راحتی فرض کنید که مقاومت‌های $SG1$ و $SG2$ در حالی که کشش وجود ندارد R هستند و اینکه دو مقاومت ثابت دیگر در مدار نیز برابر R هستند. ولتاژ خروجی عبارت است از: $v_0 = \epsilon \frac{\Delta R}{R}$

فصل پنجم: دینامیک ۱ ۱۸۰

کشش در یک شیء، به عنوان تغییر شکل یا تغییر کوچک در هر واحد طول جسم در نتیجه‌ی نیروی اعمال شده تعریف می‌شود. کشش مثبت به عنوان کشش قابل انبساط تعریف می‌شود، و کشش منفی به عنوان کشش فشاری تعریف می‌شود. میکرو کشش به عنوان بخش‌هایی در میلیون تعریف می‌شود، بنابراین، برای مثال:

$$\frac{0.001 \text{ in}}{\text{in}} = 0.1\% \text{ کشش} = 1000 \text{ microstrain (میکرو کشش)}$$

در مدار پل ویتستون، در مقایسه با خروجی مورد انتظار برای زمانی که تنها یک کشش سنج استفاده شده است، کشش سنج ولتاژ خروجی دو برابر را نشان می‌دهد. همچنین انتظار می‌رود دیگر عوامل محیطی اثر گذار بر کشش سنج اول، دارای یک اثر مساوی در کشش سنج دوم باشند، به طوری‌که نتیجه در ولتاژ خروجی به حداقل خواهد رسید. برای مثال، افزایش دمای موثر بر $SG1$ ، به صورت مساوی بر $SG2$ نیز اثر می‌گذارد، به طوری‌که هر تغییر مقاومت قابل استناد به تغییرات دما برای هر دو کشش سنج یکسان خواهد بود. این اثر دما دارای اثر خیلی کوچک بر ولتاژ خروجی، V ، خواهد بود.

۵-۶-۳ سلول‌های فشار و صفحات نیرو

اغلب کشش سنج‌ها به سلول‌های فشار متصل می‌شوند. سلول‌های فشار ابزارهایی هستند که قادرند به نیروی تولیدی را به صورت الکترونیکی و آسان و سریع اندازه‌گیری کنند. سلول‌های فشار بسته به فشاری که باید اندازه‌گیری کنند در شکل‌ها و اندازه‌های متفاوت وجود دارند. بسیاری از ترازوهای وزن سنجی از این نوع هستند و اغلب فشار را یا به نیوتن یا کیلوگرم نشان می‌دهند. شکل ۵-۳ دو سلول فشار را نشان می‌دهد که به صورت همزمان هم برای اندازه‌گیری وزن و هم تعیین محل مرکز گرانش، CGX یک شیء که بلند شده است، استفاده می‌شوند.

همچنین کشش سنج‌ها در صفحات نیروی مرتبط با بیومکانیک، مهندسی، و تحقیقات پزشکی استفاده می‌شوند. برای مثال، صفحات نیروی $AMTI OR6-7$ صفحات نیرویی هستند که به طور خیلی رایج برای تجزیه و تحلیل گام استفاده می‌شوند. این صفحات نیروی برونادهای نیروی F_x ، F_y و F_z و برونادهای ممان M_x

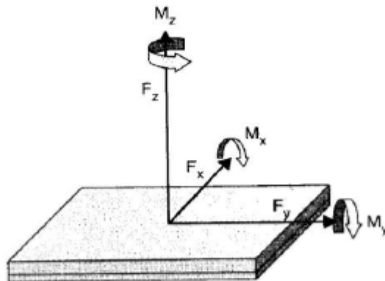
فصل پنجم: دینامیک ۱ ۱۸۱

M_z و M_y (ممان‌ها حول ۳ محور) را نشان می‌دهند و برای نیروهای عکس‌العمل زمین (GRF_s) مطلوب هستند. صفحه نیروی $OR6$ دارای ابعاد $463 \times 508 \text{ mm}$ است



(شکل ۴-۵). یک نسخه از این صفحه دارای ظرفیت عمودی F_z ، 4450 N و مقدار حساسیت F_z ، $0.17 \mu V/[VN]$ است.

شکل ۳-۵. یک نمونه سیسمن سلول فشار که برای تعیین مرکز گرانش یک شیء وزن شده، استفاده شده است. سلول‌های فشار با فاصله L از هم قرار دارند. و مرکز گرانش شیء در فاصله CGX از سلول فشار ۱ قرار دارد.



شکل ۴-۵. یک صفحه نیروی بیومکانیکی با مولفه‌های F_z و F_y ، F_x نیروی واکنش زمین در کنار ممان‌های M_x ، M_y و M_z حول محورهای x ، y و z

۱-۳-۶-۵ محاسبات و لتاژ خروجی

برای محاسبه خروجی از هر کانال (محور)، معادله زیر مورد نیاز است:

$$V_i = 0.000001 \times S \times \epsilon \times G \times (\text{نیرو})$$

در اینجا:

V = ولتاژ خروجی آمپلی فایر استفاده شده

$0/000001$ = میکروولتاژ، واحدهای حساسیت

S = میزان حساسیت

□ (اپسیلون) = ولتاژ تولیدی نیروی پل ویتستون

G = بهره تقویت آمپلی فایر

نیرو = فشار وارده به N (در صورت لزوم با "مان" به Nm جایگزین می شود)

■ مثال ۵-۲

فرض کنید فردی که $900N$ وزن دارد بر روی صفحه نیرو ایستاده است. خروجی نیرو در محور F_z چیست؟

$$\text{نیرو} = 900N$$

$$\epsilon = 10V \text{ (مقدار معمول)}$$

$$G = 4000 \text{ (متغیر؛ بعضی وقت‌ها انتخابهای دیگر 2000 یا 1000 هستند)}$$

$$S_{F_z} = 0.17 \mu V/V/N$$

$$V_o = 0.000001 \times 0.17 \times 10 \times 4000 \times 900 = 6.12 \text{ ولت}$$

فرض کنید که این سیستم به یک مبدل آنالوگ به دیجیتال (A/D) متصل است که ولتاژ خروجی را به رقم دودوئی که توسط کامپیوتر خوانده می شود تبدیل می کند. فرض کنید که مبدل A/D دارای ۱۲ رقم دودوئی با ورودی مقیاس کامل $\pm 10V$ است. یعنی برای نشان دادن یک ورودی در حدود ۲۰ ولت دارای $4096 = 2^{12}$ رقم دودوئی است. این یک تبدیل 204.8 bit/volt را بیان می کند. بنابراین نیروی عمودی $900N$ خواهد داد:

$$204.8 \text{ bit/volt} \times 6.12 \text{ volt} = 1253 \text{ bit}$$

همچنین از این مطلب برداشت می شود که کوچکترین تغییر در فشار که می توانست سبب یک تغییر (۱ عدد دودوئی) در خروجی شود، خواهد بود:

$$900/1253 = 0.72N$$

فصل پنجم: دینامیک ۱ ۱۸۳

برای کسب اطلاعات بیشتر درباره مبدل‌های A/D و اعداد دودوئی به رجتین (۲۰۰۴) مراجعه کنید.

۲-۶-۵ محاسبه COP (مرکز فشار)

به منظور محاسبه مختصات (x, y) مرکز فشار (COP) برای صفحه نیروی منفرد، مختصات به شرح زیر هستند:

$$COP(x) = \left[\frac{(M_y + (z_{,ff} \times F_x))}{F_z} \right] \times (-1)$$

$$COP(y) = \left[\frac{(M_x + (z_{,ff} \times F_y))}{F_z} \right]$$

در اینجا

$COP(x) = COP$ برای x مختصات

$COP(y) = COP$ برای y مختصات

$z_{,ff}$ = مسافت عمودی از روی صفحه تا مبدأ صفحه نیرو (عدد منفی)

F_x = نیرو در امتداد محور x

F_y = نیرو در امتداد محور y

F_z = نیرو در امتداد محور z

M_x = ممان در امتداد محور x

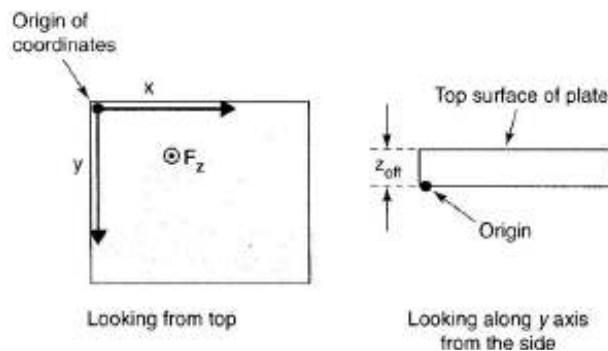
M_y = ممان در امتداد محور y

M_z = ممان در امتداد محور z

مختصات COP ، نسبت به یک مبدأ مکانی در یکی از گوشه‌های صفحه نیرو

بیان می‌شود. مبدأ فاصله عمودی z_{off} زیر سطح فوقانی صفحه قرار می‌گیرد (شکل ۵-۵)

(۵). یک مثال از استفاده‌ی COP در مورد پژوهی زیر ارائه می‌شود.



شکل ۵-۵. موقعیت مبدأ برای یک نمونه صفحه نیروی بیومکانیکی.

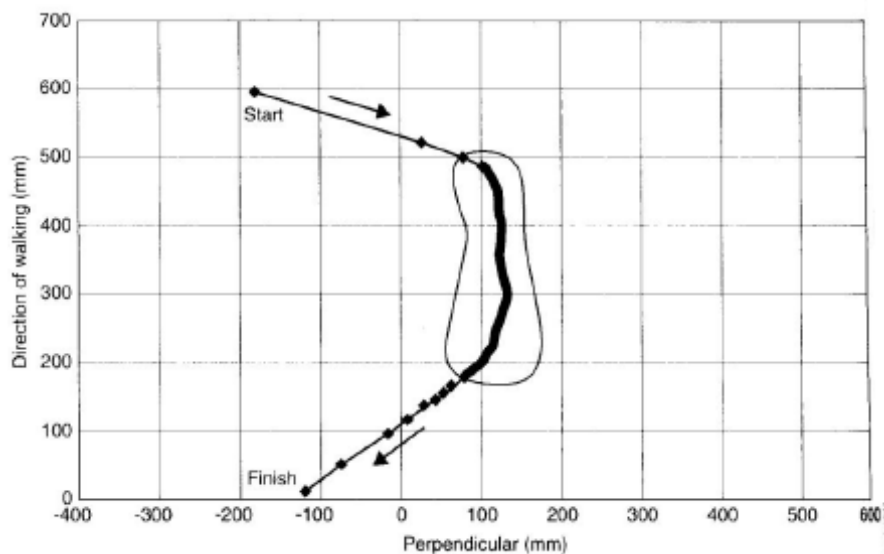
راه رفتن آزمودنی مرد با پوشیدن کفش‌های ورزشی بر

روی صفحه نیرو

مورد پژوهی ۱-۵

در گام راه رفتن معمولی، COP در طول مرحله استقرار، به صورت مداوم و یکنواخت، از پاشنه به سمت پنجه حرکت می‌کند. نمودار موقعیت COP را به صورت یک طرح $x-y$ نشان می‌دهد COP از بالای نمودار شروع می‌شود و به سمت پایین نمودار حرکت می‌کند.

همچنین می‌توان مشاهده کرد که COP نسبت به جهت حرکت به صورت عمودی حرکت می‌کند. با این حال در این مجموعه واقعی داده‌ها، سه نقطه نزدیک نقطه‌ی "شروع" و هشت نقطه نزدیک نقطه‌ی "پایان" نقاط نادرستی هستند که بوسیله‌ی محصولات مصنوعی محاسباتی و ابزاری ایجاد شده‌اند. خط COP بوسیله‌ی دسته نقاط بین $75mm$ و $125mm$ در محور عمودی نشان داده شده است.



۵-۷ شتاب قابل استناد به گرانش و وزن

فصل پنجم: دینامیک ۱ ۱۸۵

اگر ما زمین را یک کره کامل با جرم، m و شعاع، R ، در نظر بگیریم، آنگاه می‌توانیم نیرو را بر روی شیئی کوچک با جرم m در سطح زمین محاسبه کنیم.

$$F = G \frac{Mm}{R^2}$$

اگر شیئی تا ارتفاع کمی بالا برده شود و رها شود، تمایل دارد به میزان طبیعی و تقریبی 9.81 ms^{-2} شتاب بگیرد. این مقدار به عنوان g شناخته شده است، و طبیعی است که پرسید که چه ارتباطی بین g و فرمول بالا که نیوتن به منظور توصیف نیروی بین دو جرم نقطه‌ای به آن دست یافت، وجود دارد. با به کار گرفتن قوانین گرانش نیوتن، شتاب شیئی رها شده در نزدیک سطح زمین عبارت است از:

$$a = \frac{F}{m} = G \frac{M}{R^2}$$

این شتاب باید همان g باشد. همانطور که دیدیم، در مثال ما مفروضات چنین است که می‌توان زمین و شیئی کوچک را به عنوان جرم‌های نقطه‌ای در نظر گرفت و این که مسافتی که جسم از آن رها می‌شود در مقایسه با شعاع زمین خیلی کوچک است. همچنین از این ملاحظات استنتاج می‌شود که وزن یک جرم یعنی m در زمین به سادگی تعیین می‌شود:

$$W = mg$$

در اینجا m جرم به کیلوگرم است و g شتاب قابل استناد به گرانش است. واحد g ، ms^{-2} یا N/kg است.

■ مثال ۳-۵

با استفاده از اطلاعات زیر و فرض $g = GM/R$ مقدار g را بدست آورید.

$$\text{جرم زمین} = 5.98 \times 10^{24} \text{ kg}$$

$$\text{شعاع زمین} = 6.38 \times 10^6 \text{ m}$$

$$\text{ثابت گرانشی} = 6.67 \times 10^{-11} \text{ Kg}^2/\text{Nm}^2$$

جواب

فصل پنجم: دینامیک ۱ ۱۸۶

$$g = \frac{(6,67 \times 10^{-11}) \times (5,98 \times 10^{24})}{(1,06 \times 6,38 \times 10^6)^2} = 9,81 \text{ms}^{-2}$$

■ مثال ۴-۵

وزن شخصی با جرم 72kg چقدر است؟

جواب

$$\text{وزن } (W) = mg = (72 \text{kg} \times 9,81 \text{N/Kg}) = 706,32 \text{N}$$

پرش عمودی

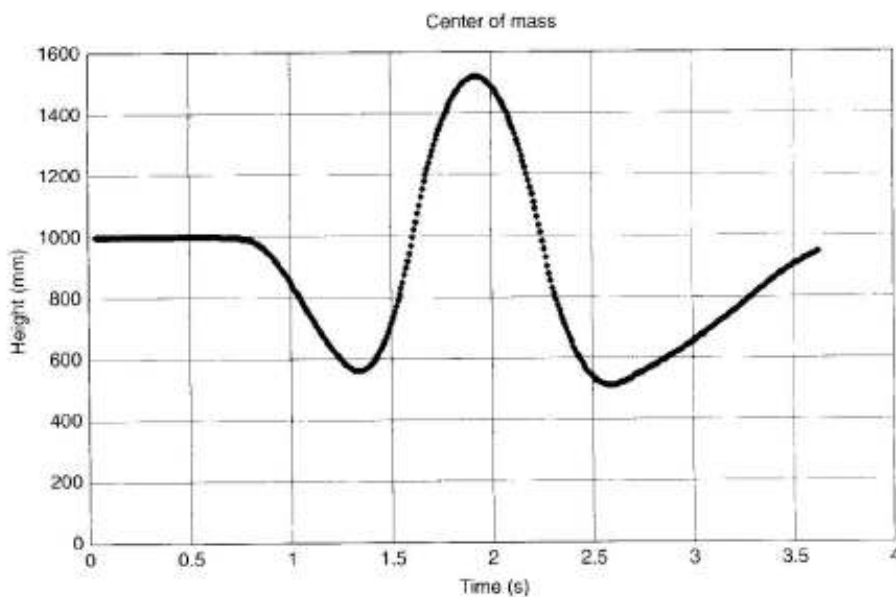
مورد پژوهی ۲-۵

یک مرد برای تلاش‌هایی شامل پرش‌های عمودی انتخاب شد. او 67 کیلوگرم وزن داشت و خواسته شد تا از روی صفحه نیرو پرش‌های عمودی را اجرا کند. برای انجام تجزیه و تحلیل همزمان سه بعدی ($3D$) حرکت در 120Hz ، یک سیستم 512Vicon استفاده شد. سی و هفت نشانگر بازتابی مطابق با موقعیت‌های آناتومیکی که بوسیله‌ی مجموعه نشانگرها تعریف شده است، به بدن آزمودنی متصل شده بود. آزمودنی در طول تلاش‌ها لباس مرطوبی را با بیشترین نشانگر متصل شده به لباس با اتصالات *Velcro* پوشید. آزمودنی همچنین پیشانی بندی را با چهار نشانگر متصله و دو مچ بند که هر یک به دو نشانگر دوتایی متصل شده بودند، پوشید. صفحه نیرو 600 نمونه در ثانیه گرفت و داده‌های سه بعدی نیروی F_x ، F_y ، و F_z را همراه با خروجی‌های ممان M_x ، M_y ، M_z ثبت کرد. شکل بعدی تصاویر لحظه‌ای آزمودنی را در مراحل مختلف پرش عمودی نشان می‌دهد. در این تلاش آزمودنی آموخته بود که بدون اینکه از حرکت دست‌ها کمک بگیرد، بپرد.

بعد از به کار بردن الگوی قطعه‌ای مناسب موقعیت مرکز جرم (CM) شخص محاسبه شد. موقعیت مرکز جرم می‌تواند در شکل دیده شود. در صحنه‌ی 100 ، موقعیت CM نشان دار شده است، و در صحنه‌های بعدی، CM با دایره کوچک در

فصل پنجم: دینامیک ۱ ۱۸۷

بالای خط عمودی همراه با موقعیت مبدأ که بوسیله‌ی ضربدر کوچک مشخص شده است، نشان داده شده است. این داده‌های $3D$ همزمان، برای پردازش‌های بعدی در فایل متنی وارد شد. این مورد پژوهی تنها حرکت عمودی (مختصات z) CM را بررسی



می‌کند. نمودار زیر موقعیت عمودی CM را در برابر زمان نشان می‌دهد.

نمودار زیر سرعت عمودی (خط سیاه) و شتاب (خط فاصله‌دار) همان نقطه را با استفاده از روش هموارسازی چهار نقطه‌ای برای هر دو نشان می‌دهد. سرعت و شتاب با استفاده از معادله‌های:

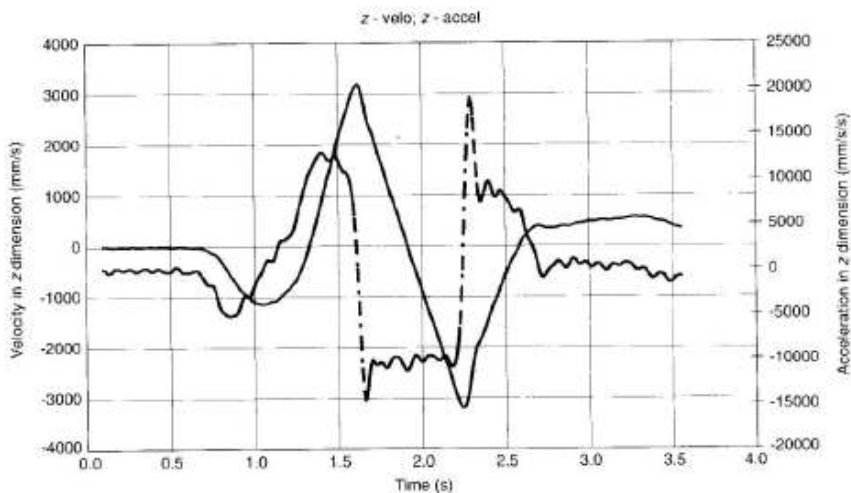
$$a_z = \frac{\Delta v_z}{\Delta t} \quad \text{و} \quad v_z = \frac{\Delta z}{\Delta t}$$

و به کارگیری درجه‌ی معین هموارسازی، از مختصات z و داده‌های زمان محاسبه شدند.

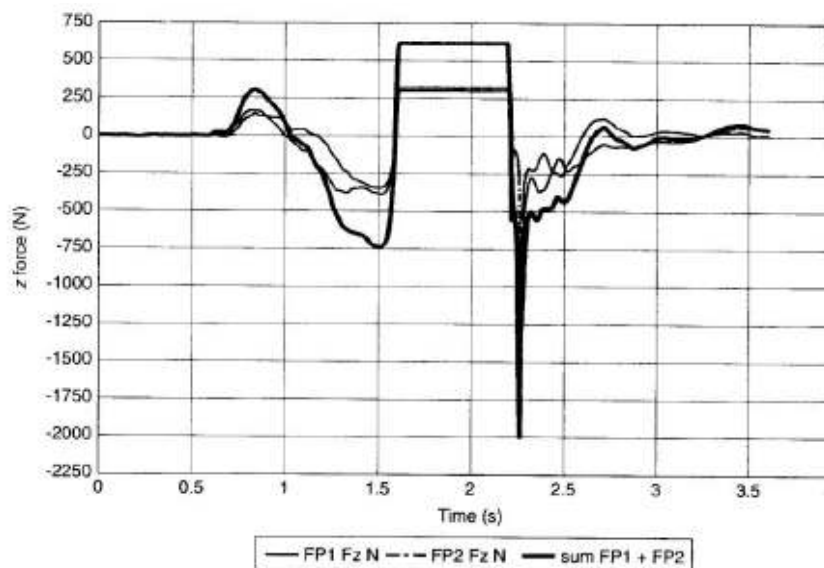
مولفه‌ی z نیرو می‌تواند برای اهداف مقایسه‌ای در سرتاسر همان فاصله زمانی نشان داده شوند. نمودار بعدی نیروی برآیند عمل‌کننده در CM را در جهت z (به بیان دیگر، با وزن بدن کاهش یافته) نشان می‌دهد.

فصل پنجم: دینامیک ۱ ۱۸۸

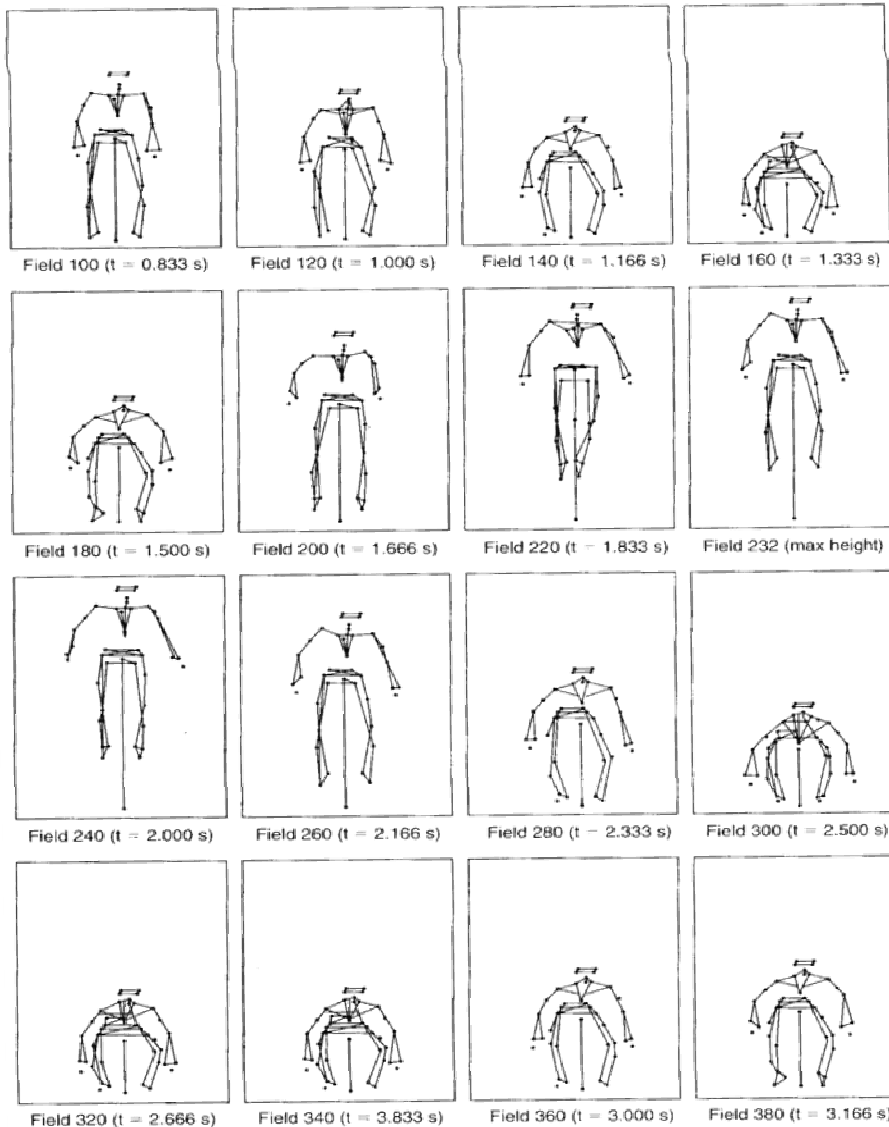
در این مورد، بدلیل اینکه نیروی نشان داده شده نیروی برآیند است، داده‌های نیروی ابتدایی قبل از آغاز پرش نزدیک صفر هستند (مثلاً در زمان‌های بین ۰/۱ و ۰/۵s). دو منحنی دو صفحه نیرو (پای راست و چپ) را به صورت جداگانه نشان می‌دهند، و منحنی مشکی پررنگ‌تر جمع دو تا را نشان می‌دهد. زمانی که فرد در میانه‌ی هوا نزدیک به 10000 mm/s^2 (10000 m/s^2 در واحدهای SI) است، همانطور که



انتظار می‌رفت افزایش سرعت تقریباً بین ۱/۶ و ۲/۲ ثانیه است. همچنین حداکثر نیروی اضافی به سمت بالا در زمان ۱/۵s و در حدود 750 N است، طوری که شتاب پیش‌بینی شده $a = F/m = 750 \text{ N}/67 \text{ kg} = 11.2 \text{ m/s}^2$ خواهد بود. همچنان که از منحنی شتاب می‌توان دید، این شتاب پیش‌بینی شده تقریباً برابر با شتاب اندازه‌گیری شده در زمان مشابه است که در حدود 12 m/s^2 بود. بنابراین، مشابه بودن این دو شتاب تأیید می‌کند که نیرو برابر است با جرم ضرب در شتاب.



فصل پنجم: دینامیک ۱ ۱۸۹



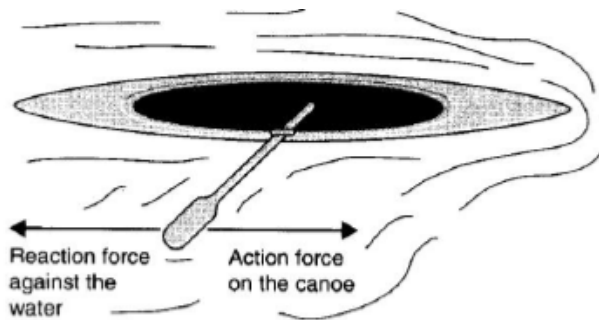
- | | |
|---------------------------------------|--|
| Field 100 Starting position | Field 240 Mid-air on way down |
| Field 120 Lowering the body | Field 260 Descending |
| Field 140 Knee flexion | Field 280 Landing |
| Field 160 Lowest preparatory position | Field 300 Knee flexion to cushion impact |
| Field 180 Knee extension | Field 320 Lowest position |
| Field 200 Take off | Field 340 Beginning to rise |
| Field 220 Mid-air on way up | Field 360 Straightening up |
| Field 232 Max height | Field 380 Movement almost complete |

A series of snapshot images of a male adult subject performing a vertical jump.

۵-۸ قانون سوم نیوتن

هنگامی که شخصی در کانو پارو می‌زند، پاروها مخالف آب به سمت عقب فشار داده می‌شوند، و کانو به سمت جلو رانده می‌شود (شکل ۵-۶). هر وقت که پارو در بین آب حرکت می‌کند، این نیروی کنش و واکنش اتفاق می‌افتد و معکوس هستند، یعنی آنها با یکدیگر برابر و مخالف هستند. مثال دیگر توپ تنیس است که بوسیله‌ی راکت تنیس ضربه می‌خورد (شکل ۵-۷). در این مثال نیز دوباره نیروهای کنش و واکنش با هم به صورت جفت اتفاق می‌افتند و برابر و متضاد یکدیگر هستند. قانون سوم نیوتن معمولاً به شکل زیر بیان می‌شود:

هرگاه جسمی نیرویی را به جسم دیگر اعمال کند، دومی نیرویی را با بزرگی مساوی و جهت عکس به اولی اعمال می‌کند.

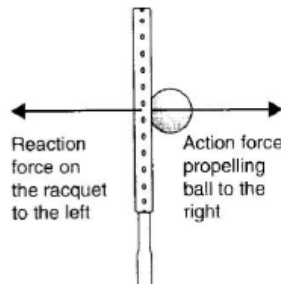


شکل ۵-۶. نیروهای عمل کننده در کانو.

طبیعی است که این نیروها به عنوان “کنش” و “واکنش” توصیف شوند، اگرچه بعضی وقت‌ها مشخص نیست که کدام کنش و کدام واکنش است. گاهی اثر ایجاد شده توسط نیروی کنش نسبت به اثری که توسط نیروی واکنش تولید می‌شود بسیار قابل ملاحظه است. در مورد کانو، نیروی کنش، کانو را به سمت جلو هل می‌دهد، اما نیروی واکنش تنها جرم معینی از آب را به سمت عقب می‌راند که قابل ملاحظه نیست. در مثال تنیس، توپ در نتیجه نیروی کنش که به مدت کوتاهی در طول برخورد توپ - راکت وجود دارد، با سرعت بالا به سمت راست رانده می‌شود. با این حال، به دلیل اینکه جرم راکت در مقایسه با جرم توپ خیلی زیاد است، سرعت راکت

فصل پنجم: دینامیک ۱ ۱۹۱

بوسیله‌ی نیروی واکنش تنها کمی کاهش می‌یابد، و تغییر در سرعت سر راکت، به طور طبیعی قابل ملاحظه نخواهد بود.



شکل ۵-۷. توپ تنیس ضربه خورده توسط راکت تنیس.

همچنین قانون سوم نیوتن در مورد اشیائی که بر روی سطح زمین یا سرازیری ساکن هستند به کار می‌رود. برای مثال شخصی با جرم 80 kg که در سطح زمین ایستاده است، دارای وزن تقریبی 800 N است که به صورت عمودی از CM به سمت پایین عمل می‌کند. شکل ۸-۵ نشان می‌دهد که نیروهای واکنش در پاها به صورت عمودی به سمت بالا عمل می‌کنند و با هم برای برابری با وزن، W ، کافی هستند. اگر شیئی در یک سطح شیبدار در حال سکون باشد، آنگاه وزن، W ، به مولفه‌های عمود بر سطح و مماس بر شیب تجزیه می‌شود.

شکل ۹-۵ وزن، W ، را در یک سطح شیبدار با شیب θ نسبت به افق نشان می‌دهد. اگر بین شیئی و سطح اصطکاک وجود نداشته باشد، آنگاه شیئی با شتابی به سمت پایین سر خواهد خورد که از قانون دوم نیوتن بدست می‌آید:

$$a = F/m = (W \sin \theta)/m$$

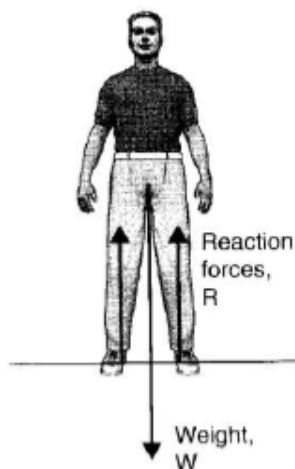
اما:

$$m = W/g$$

بنابراین:

$$a = g \sin \theta$$

نیروی واکنش طبیعی در کل سطح شیبدار $W \cos \theta$ خواهد بود. اگر بین جسم و سطح بدون اصطکاک نباشد، در این صورت دو امکان وجود دارد:

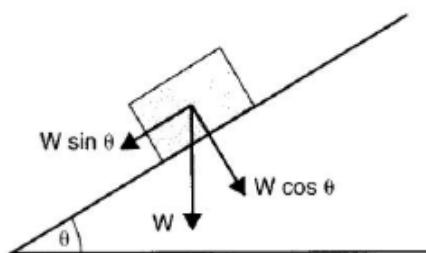


شکل ۵-۸. وزن و نیروی‌های واکنش طبیعی در پاها. دو نیروی واکنش به هم اضافه می‌شوند تا برابر (و عکس) W شوند.

(الف) ضریب اصطکاک برای تولید نیروی اصطکاک که به سمت بالای شیب و برابر و مخالف $W \sin \theta$ بر روی جسم عمل می‌کند، به اندازه کافی بزرگ است. در این صورت شیء در حال سکون باقی می‌ماند.

(ب) ضریب اصطکاک برای جلوگیری از سرخوردن خیلی کوچک است، و شیء به پائین سطح شیب‌دار سر خواهد خورد.

اصطکاک، که اثرات آن در بخش ۴-۱ ذکر شد، یک مبحث مهم در بیومکانیک است و در بخش ۵-۹ بیشتر بحث می‌شود.



شکل ۵-۹. وزن، W ، در سطح شیب دار.

۹-۵ اصطکاک

اکنون در شکل ۹-۵ یک شیء ساکن را در یک سطح خشن در نظر بگیرید.

وضعیت (الف)

ضریب اصطکاک به قدر کافی بزرگ است، به طوری که شیء ساکن می ماند. حداکثر نیروی اصطکاک موجود می تواند از فرمول زیر بدست آید:

$$F = \mu R$$

در اینجا R نیروی واکنش طبیعی است و μ ضریب اصطکاک ایستا است. به بیان دیگر نیروی اصطکاک معمولاً با نیرویی که سطوح را به هم می فشارد و نیز ناهمواری سطوح، متناسب است. مقدار نیروی مورد نیاز برای شروع حرکت یک شیء از حالت سکون معمولاً بزرگتر از نیروی مورد نیاز برای حفظ حرکت آن در یک سرعت ثابت بعد از شروع حرکت است.

$$R = W \cos\theta$$

در این مورد، برای باقی ماندن شیء در سکون، باید داشته باشیم:

$$W \sin\theta < \mu W \cos\theta$$

یا

$$\sin\theta < \mu \cos\theta$$

یا

$$\tan\theta < \mu$$

■ مثال ۵-۵

یک شیء که $50N$ وزن دارد در یک سطح خشن با شیب 50° ساکن است. ضریب اصطکاک بین شیء و سطح 0.5 است. آیا شیء به سمت پائین سطح سر خواهد خورد؟

جواب

وزن شیء برای حل بی ربط است. برای اینکه شیء ساکن بماند:

$$\tan\theta < \mu$$

فصل پنجم: دینامیک ۱ ۱۹۴

$$\tan 50^\circ = 1,1917 \text{ که بزرگتر از } \mu \text{ است}$$

بنابراین شیء به پائین سطح سر خواهد خورد.

وضعیت (الف) روشن کرد که با افزایش زاویه θ نیروی اصطکاک افزایش می‌یابد. با این حال در یک زاویه بحرانی معین، سرخوردن در شرف شروع شدن است و آنگاه نیروی اصطکاک، F ، به مقدار حدی (اصطکاک حدی) رسیده است و

$$\mu = \tan\theta$$

این ملاحظات منجر به چند نتیجه گیری درست و واضح در مورد مقدار حدی نیروی اصطکاک ساکن می‌شود:

(الف) با افزایش نیروی واکنش طبیعی، R ، می‌تواند افزایش یابد. این می‌تواند بوسیله‌ی فشار دادن دو سطح به هم به هر وسیله ممکن، دست یافتنی باشد.
(ب) حداکثر نیروی اصطکاک موجود نمی‌تواند با تغییر (ماکروسکوپی) مساحت تماس بین اشیاء تغییر کند.

(ج) نیروی اصطکاک ساکن در جلوگیری از سرخوردن یا لیز خوردن ناخواسته، مفید است. زمانی که سر خوردن شروع می‌شود، آنگاه نیروی اصطکاک، اصطکاک لغزشی نامیده می‌شود و با وضعیت (ب) توضیح داده می‌شود. نیروی اصطکاک مستقل از سرعت حرکت است.

وضعیت (ب)

نیروی اصطکاک برای جلوگیری از سرخوردن جعبه به سمت پائین سطح شیبدار به اندازه کافی بزرگ نیست.

در شکل ۵-۹ اگر زاویه θ خیلی بزرگ باشد مولفه‌ی وزن، $W \cos \theta$ ، که به صورت مماس به سمت پائین عمل می‌کند، بزرگتر از مقدار حدی نیروی اصطکاک لغزشی (یا اصطکاک جنبشی) است. اصطکاک لغزشی با فرمول زیر تعیین می‌شود:

$$F_s = \mu_s R$$

در اینجا R نیروی واکنش طبیعی است و μ_s ضریب اصطکاک لغزشی است. نیروی اصطکاک لغزشی از نیروی اصطکاک ایستا کمتر است همین‌طور μ_s کمتر از μ

فصل پنجم: دینامیک ۱ ۱۹۵

است. می‌توان شتاب جعبه را با شروع سر خوردن آن و با استفاده از قانون دوم نیوتن بدست آورد:

$$\begin{aligned} \text{نیرو} = ma &= W \sin \theta - \mu_s \\ &= W \sin \theta - \mu W \cos \theta \\ &= W(\sin \theta - \mu \cos \theta) \end{aligned}$$

بنابراین:

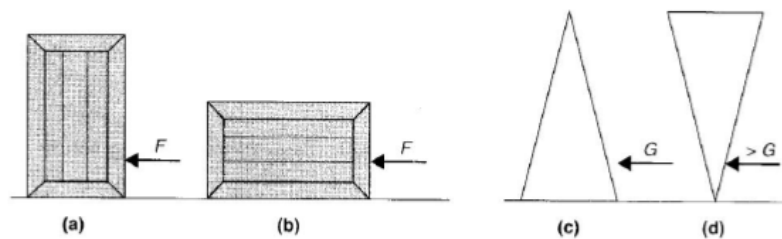
$$\text{شتاب} = a = \frac{W}{m} (\sin \theta - \mu \cos \theta)$$

این معادله نشان می‌دهد که جعبه می‌خواهد با شتاب ثابت به سمت پایین سرعت بگیرد. در عمل، با توجه به تغییرات مقدار μ_s که قابل استناد به تغییرات در زبری سطوح تماس است، ممکن است این شتاب ثابت به دست آید یا نه.

۵-۹-۱ اصطکاک و مساحت تماس

یک مفروضه‌ی الگوی استاندارد برای اصطکاک سطح، این است که مقاومت اصطکاکی بین دو سطح مستقل از مساحت تماس است. با این حال اصطکاک پدیده پیچیده‌ای است، و باید فرض کرد می‌تواند در برخی شرایط ناقص نمایان می‌شود. در مورد جعبه‌ای که با هل دادن در کف تغییر مکان می‌دهد، بدلیل اینکه نیروی اصطکاک در شکل ۵-۱۰ (a) و (b) یکسان است، درست است که بگوییم جهت و حالت جعبه بر نیروی اصطکاک اثری ندارند.

در مورد بار مثلثی شکل در شکل ۵-۱۰ (c) و (d) یک تناقض آشکار با این فرضیه وجود دارد. در شکل ۵-۱۰ (d) بار در داخل سطح فرو رفته و سبب شده تا نیروی مورد نیاز برای سر خوردن شیئی افزایش یابد. با این حال مفروضه استقلال از مساحت صحیح است، برای مثال، لاستیک‌های پهن از لاستیک‌های باریک بهتر نیستند، و مسافت ایستادن کوتاه‌تری را برای اتومبیل فراهم نمی‌کنند. همانطور که در برف اتفاق می‌افتد، در صورتی اصطکاک بیشتر می‌تواند با لاستیک‌های پهن‌تر یا بوسیله‌ی لاستیک‌ها با فشار (باد) کم تولید شود که ضریب اصطکاک افزایش یابد. لاستیک‌های پهن برف را خیلی زیاد فشرده نمی‌کنند، بنابراین ضریب اصطکاک بیشتر خواهد بود.



شکل ۵-۱۰. (a) جعبه بر روی سطح باریکش برای حرکت در امتداد کف نیازمند نیرو، F ، است. (B) جعبه بر روی سطح پهنش برای حرکت نیازمند همان نیرو، F ، است. (C) یک شیء متفاوت زمانی که بر روی سطح بزرگ خود قرار دارد. برای حرکت نیازمند نیروی (G) است. (D) شیئی ایستاده بر روی سطح تیز خود برای حرکت نیازمند نیرویی به مراتب بزرگتر از G است.

۵-۹-۲ اصطکاک و سرعت

این مفروضه که نیروی اصطکاک جنبشی مستقل از سرعت است، معمولاً صحیح است. با این حال، با افزایش سرعت، اصطکاک هوا تولید می‌شود، و به صورت مجذور سرعت، یا حتی بیشتر از مربع سرعت، افزایش می‌یابد. در برخی شرایط، سیال‌ها می‌توانند نیروی اصطکاک متناسب با سرعت را نشان دهند، که به عنوان مقاومت گران‌رو شناخته شده است. وضعیت‌هایی در ورزش وجود دارد که نیروهای اصطکاک عموماً اصطکاک لغزشی) نیاز به افزایش دارد. در زیر مثال‌هایی است که تلاش می‌شود نیروی اصطکاک افزایش یابد:

- استفاده از گچ در دست‌ها در برخی از رویدادهای ژیمیناستیک و در وزنه برداری
- خشک کردن دست‌ها به منظور بهبود گرفتن توپ در کریکت
- استفاده از رزین در برخی از ورزش‌های توپی برای ایجاد چسبندگی بهتر
- طراحی کفش‌های ورزشی برای چسبندگی خوب در انواع مختلف کفپوش‌ها
- طراحی لاستیک‌ها در اتومبیل مسابقه به منظور توانایی داشتن سرعت زیاد در پیچ‌ها

فصل پنجم: دینامیک ۱ ۱۹۷

در عوض، در برخی از شرایط، زمانی که به سر خوردن نیاز داریم، به منظور تسهیل سر خوردن به نیروی اصطکاک کم نیاز است. برخی از مثال‌های کاهش اصطکاک عبارت‌اند از:

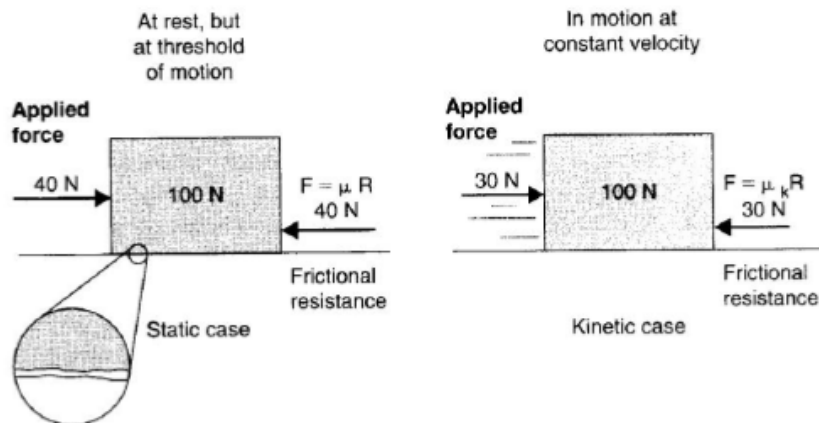
- استفاده از واکس در اسکی‌ها برای کاهش اصطکاک در برف
- چرخیدن (در یخ) و استفاده از برس‌ها برای صاف کردن مسیر
- استفاده از لباس‌های با پوست کوسه توسط شناگران
- اسکیت روی یخ

جدول ۱-۵ برخی از ضرایب اصطکاک لغزشی و ایستا را فهرست کرده است. مقادیر ارائه شده در جدول ۱-۵ تقریبی هستند، و باید به ذهن بسپاریم که اصطکاک وابسته به دما و شرایط سطوح است. اصطکاک کم یخ و برف به دلیل شکل‌گیری لایه نازک آب روان بین سطح یخ و سطوح دیگر است. همچنین توجه به این نکته خیلی مهم است که، اگر چه برای فلزات و بسیاری از مواد، نیروی اصطکاک مستقل از مساحت (ماکروسکوپی) تماس است، ضریب اصطکاک برای برخی مواد از قبیل پلاستیک و لاستیک به شکل سطوح لغزشی بستگی دارد.

جدول ۱-۵ ضرایب اصطکاک لغزشی و ساکن		مواد
μ_s	μ	
		اسکی واکس خورده روی برف
۰٫۲۰		در $21.8^\circ C$
۰٫۰۵		در $0.8^\circ C$
۰٫۶۰	۰٫۷۰	فولاد بر روی فولاد
		توپ کریکت بر روی چمن
۰٫۴۸	---	چمن سریع
۰٫۵۳	---	چمن سنگین
۰٫۵۰	۰٫۷۰	مس بر روی شیشه
~۱٫۰۰	~۱٫۰۰	لاستیک بر روی بتون

۳-۹-۵ خلاصه‌ای از اصطکاک کینیتیک و اصطکاک ساکن

به طور معمول اصطکاک بوسیله‌ی یک ضریب اصطکاک معادل با نسبت نیروی مقاوم اصطکاکی به نیروی معمولی فشار دهنده‌ی دو سطح بر هم، بیان می‌شود. نوعاً، تفاوت



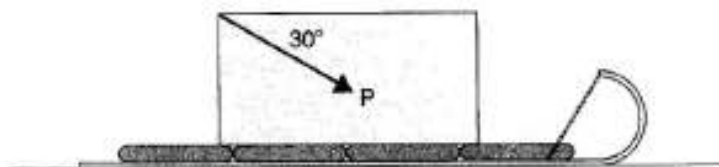
شکل ۵-۱۱. در وضعیت اصطکاک ایستا، نیروی

اصطکاک مانع حرکت می‌شود و با هر نیروی به کار رفته تا بالاتر از مقدار حدی مخالفت می‌کند، و (در نیروهای بالاتر از آستانه) جسم شروع به سرخوردن می‌کند. در وضعیت جنبشی، با یک جسم حرکت کننده با سرعت ثابت، نیروی اصطکاک جنبشی در برابر حرکت مقاومت می‌کند، اما این مقاومت مستقل از سرعت در نظر گرفته می‌شود.

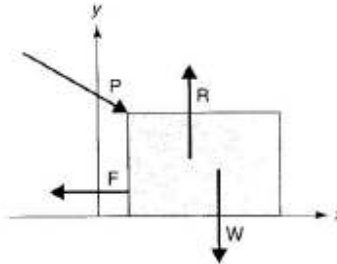
قابل ملاحظه‌ای بین ضرایب اصطکاک پویا و ایستا وجود دارد. دو مورد از اصطکاک ایستا و پویا در شکل ۵-۱۱ به شکل خلاصه نشان داده شده است.

■ مثال ۵-۶

مردی یک سورتمه را در روی سطح یخی زمین هل می‌دهد. جرم سورتمه 60 kg است، و ضریب اصطکاک لغزشی $\mu_s = 0.15$ است. مرد سورتمه را با یک زاویه 30° نسبت به افق به سمت پائین، هل می‌دهد. برای حفظ حرکت سورتمه در یک سرعت ثابت مرد باید چه نیرویی را اعمال کند؟



جواب



نمودار بالا، نمودار جسم آزاد سورتمه است. نیروهای عمل کننده بر روی سورتمه فشار (P) مرد، وزن سورتمه (W)، نیروی واکنش طبیعی (R)، و نیروی اصطکاک (F) قابل استناد به اصطکاک لغزشی هستند. به دلیل اینکه مرد سورتمه را به طرف پائین به سمت برف هل می‌دهد، بزرگی نیروی واکنش، R ، افزایش می‌یابد و فراتر از مقدار mg (وزن سورتمه) است.

مولفه‌های عمودی و افقی نیروها عبارت‌اند از:

$$P_x = P \cos 30^\circ$$

$$P_y = P \sin 30^\circ$$

$$W_x = 0$$

$$W_y = -mg$$

$$R_x = 0$$

$$R_y = R$$

$$F_x = -\mu_s R$$

$$F_y = 0$$

شتاب سورتمه در هر دو جهت x و y صفر است، بنابراین نیروی خالص در هر یک از این جهت‌ها صفر است.

$$P \cos 30^\circ + 0 + 0 - \mu_s R = 0$$

$$-P \sin 30^\circ - mg + R + 0 = 0$$

اینها دو فرمول برای نیروهای ناشناخته P و R هستند. با ضرب کردن معادله‌ی دوم با μ_s و افزودن آن به معادله‌ی اول داریم:

$$P (\cos 30^\circ - \mu_s \sin 30^\circ) - \mu_s mg = 0$$

بنابراین:

فصل پنجم: دینامیک ۱ ۲۰۰

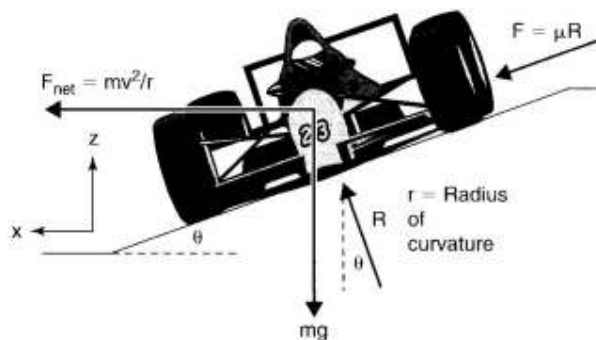
$$P = \frac{\mu_s mg}{\cos 30^\circ - \mu_s \sin 30^\circ}$$

$$= \frac{0,15 \times 60 \text{ kg} \times 9,81 \text{ m/s}^2}{\cos 30^\circ - 0,15 \times \sin 30^\circ} = 111,5 \text{ N}$$

حداکثر سرعت در مسیر شیبدار مسابقه

مورد پژوهی ۳-۵

هنگامی که اتومبیل مسابقه به پیچ می‌رسد، برای ماندن در دور قوس دایره‌ای با شعاع (r) ، نیروی مایل به مرکزی نیاز است که بوسیله‌ی نیروی اصطکاک لاستیک‌ها تأمین می‌شود. حداکثر سرعتی وجود دارد که در آن اتومبیل در آستانه سرخوردن به بالای شیب خواهد بود. در این حداکثر سرعت، v :



$$\sum F_x = m \frac{v^2}{r} = R \sin \theta + \mu R \cos \theta$$

$$\sum F_z = R \cos \theta - \mu R \sin \theta - mg = 0$$

با حل این دو معادله برای حداکثر سرعت، v :

$$v_{max} = \sqrt{\frac{rg (\sin \theta + \mu \cos \theta)}{\cos \theta - \mu \sin \theta}}$$

در یک مور خاص $\mu = 0,5$ زاویه θ شیب 15° است و شعاع قوس $10m$ است.

بنابراین حداکثر سرعتی که در دور این پیچ می‌تواند استفاده شود عبارت است از:

فصل پنجم: دینامیک ۱ ۲۰۱

$$v_{max} = \sqrt{\frac{10 \times 9,81 \times (0,2588 + (0,5 \times 0,9659))}{(0,9659 - (0,5 \times 0,2588))}}$$

$$= \sqrt{17,03} = 9,32 \text{ m/s}$$

ما می‌توانیم این وضعیت را با دو وضعیت محدود دیگر مقایسه کنیم:

$$v_{max} = \sqrt{rg \tan \theta} = 12/5 \text{ m/s: وضعیت بدون اصطکاک}$$

و

$$v_{max} = \sqrt{rg \mu} = 7 \text{ m/s: جاده‌ی مسطح، صاف}$$

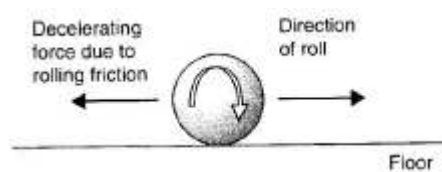
هر وقت یک شیء گرد یا چرخ مانند بر روی یک سطح بغلتد، اصطکاک غلتشی ایجاد می‌شود. توپ‌هایی از قبیل توپ‌های گلف و توپ‌های استخر وقتی که در میان چمن‌ها و یا کنار استخر می‌غلتند، اصطکاک غلتشی را تحمل می‌کنند. همراه با غلتیدن توپ‌ها، این نوع اصطکاک اتفاق می‌افتد، چون هر دوی توپ و سطحی که توپ در آن غلت می‌خورد، در محدوده‌ای که غلتیدن انجام می‌شود تغییر شکل می‌دهند. گلف مثال خوبی است که در آن بازیکن باید مقدار اصطکاک غلتشی موجود را قبل از اجرای شوت تخمین بزند. گلف باز طول چمن و اینکه خشک هست یا تر، زمین چقدر سفت یا نرم است، و جهت خواب علف‌ها (چمن) کدام سمت است را مشخص می‌کند. همه این عوامل هنگامی که توپ در میان چمن غلت می‌خورد آنرا تحت تاثیر قرار می‌دهد. اصطکاک غلتشی به طور عادی بسیار کمتر از اصطکاک لغزشی یا ایستا است. به این دلیل برای کاهش اصطکاک، جابه‌جایی بارهای سنگین معمولاً با استفاده از وسیله نقلیه سوار بر چرخ‌ها یا لوله‌ها انجام می‌شود. ضریب‌های اصطکاک غلتشی در طبقه ۰/۰۰۱ هستند به بیان دیگر، اصطکاک غلتشی در حدود ۱۰۰ تا ۱۰۰۰ بار کوچکتر از اصطکاک لغزشی و ایستا است. اصطکاک غلتشی، مشابه اصطکاک لغزشی وابسته به نیروی واکنش طبیعی است، اما همچنین می‌تواند به ابعاد توپ، ماهیت توپ، و ماهیت سطح وابسته باشد.

فصل پنجم: دینامیک ۱ ۲۰۲

اصطکاک غلتشی در توپ‌هاکی

مورد پژوهی ۴-۵

در فصل ۳، مورد پژوهی مربوط به توپ‌هاکی غلتان، کاهش سرعت $0,233 \text{ m/s}^2$ قابل استناد به اصطکاک غلتشی را نشان داد. جرم توپ‌هاکی $0,14 \text{ kg}$ است. بزرگی نیروی کاهنده‌ی سرعت، برابر جرم ضربدر کاهش سرعتی است که در فصل ۳ به اندازه $0,233 \text{ m/s/s}$ بیان شد. از این رو، نیروی اصطکاک عبارت است از:



$$F = 0,14 \text{ kg} \times -0,233 \frac{\text{m}}{\text{s}} = -0,0326 \text{ N}$$

ضریب اصطکاک غلتشی عبارت است از:

نیروی عکس العمل طبیعی / نیروی اصطکاک

بنابراین:

$$\mu = \frac{0,0326 \text{ N}}{(9,81 \text{ m/s}^2 \times 0,14 \text{ kg})} = \frac{0,0326 \text{ N}}{1,3734} = 0,0237$$

۵-۱۰ اندازه حرکت جسم

قوانین نیوتن می‌توانند به راحتی بر اساس اندازه حرکت بیان شوند. اندازه حرکت به عنوان جرم ضربدر سرعت تعریف می‌شود. به خاطر بسپارید که سرعت یک کمیت برداری است و جرم یک کمیت نرده‌ای است، می‌توان مشاهده کرد که اندازه حرکت یا p کمیت برداری است.

$$p = mv$$

فصل پنجم: دینامیک ۱ ۲۰۳

اندازه حرکت یا p برداری است که دارای جهت مشابه با سرعت است، اما بزرگی آن m بار بیشتر از v است. در سیستم واحدهای SI واحد آن $kg.m/s$ است. قانون نیوتن به سادگی بیان می‌کند که در غیاب نیروهای خارجی اندازه حرکت یک شیء ثابت باقی می‌ماند:

$$p = \text{ثابت}$$

در علم، اگر کمیتی دارای مقداری ثابت باشد، به آن کمیت حفظ شده می‌گویند. بنابراین، اندازه حرکت جسمی که تحت تاثیر هیچ نیروی خارجی نیست، حفظ شده است. در ورزش این وضعیت خیلی اتفاق نمی‌افتد. یک فضاانورد در فضای خارج از جو دارای هیچ نیروی گرانشی عمل کننده بر روی بدنش نیست، بنابراین اندازه حرکتش ثابت خواهد بود. در زمین، فردی که بی حرکت ایستاده هیچ نیروی خالص خارجی را تحمل نمی‌کند، بدلیل اینکه وزن فرد دقیقاً با GRF طبیعی برابر شده است. ترنی که در روی راه آهن بدون اصطکاک با سرعت ثابت حرکت می‌کند دارای اندازه حرکت ثابت است.

قانون دوم نیوتن می‌تواند به خوبی بر اساس اندازه حرکت بیان شود. به شرط ثابت بودن جرم یک شیء، که یک وضعیت عادی است، ما می‌توانیم جرم ضربدر شتاب را به صورت زیر تغییر دهیم:

$$ma = m \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} (mv) = \frac{dp}{dt}$$

قانون دوم می‌تواند نوشته شود:

$$F = \frac{dp}{dt}$$

این معادله بیان می‌کند که میزان تغییر در اندازه حرکت جسم برابر با نیروی خارجی خالص عمل کننده بر آن است.

■ مثال ۵-۷

دونده‌ای نیروی فشاری افقی ثابت $60N$ را به پشت فردی که در طول مسیر مسابقه جلوتر از اوست وارد می‌کند. از همه نیروهای دیگر عمل کننده بر بدن او چشم پوشی

فصل پنجم: دینامیک ۱ ۲۰۴

کنید. مقدار تغییر انداز حرکت او چیست؟ با فرض اینکه جرم 60 kg است، سرعت او بعد از 5 ثانیه چقدر خواهد بود؟

جواب

$$\text{نیروی } = 60\text{ kg.m/s}^2 = dp/dt = F = \text{میزان تغییرات اندازه حرکت}$$

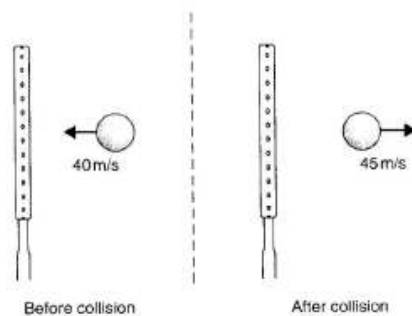
اندازه حرکت او به میزان 60 kg.m/s^2 در ثانیه تغییر می‌کند، بنابراین بعد از 5 ثانیه، اندازه حرکت او 300 kg.m/s^2 تغییر خواهد کرد.

$$v = \frac{1}{60\text{ kg}} (300\text{ kg.m/s}^2) = 5\text{ m/s} \text{ پس سرعت او خواهد بود: } 5\text{ m/s}$$

همچنین مفهوم اندازه حرکت می‌تواند برای بیان قانون سوم نیوتن استفاده شود. به دلیل اینکه نیروی کنش دقیقاً برابر و مخالف نیروی واکنش است، میزان تغییر در اندازه حرکت تولید شده توسط نیروی کنش در یک جسم، دقیقاً مخالف میزان تغییر در اندازه حرکت تولید شده توسط نیروی واکنش در جسم دیگر است. همچنین، زمان اعمال نیرو برای هر دو جسم یکسان است. بنابراین هرگاه دو جسم نیروهایی را بر دیگری اعمال کنند، حاصل تغییرات اندازه حرکت برابر و متضاد هستند.

■ مثال ۵-۸

بازیکن تنیس به توپی که با سرعت 40 m/s به او نزدیک می‌شود، ضربه فورهند درایو می‌زند. توپ تنیس، که دارای جرم 0.06 kg است، بعد از ضربه با سرعت 45 m/s دور می‌شود. تغییر در اندازه حرکت راکت تنیس چقدر است؟ اگر توپ 0.1 s با راکت تماس داشته باشد، در طول این زمان میانگین نیروی وارد به توپ (و راکت) چیست؟



فصل پنجم: دینامیک ۱ ۲۰۵

جواب

$$\text{اندازه حرکت اولیه ی توپ} = p_x = m_{vx} = 0.06 \text{ kg} \times (-40 \text{ m/s}) = -2.4 \text{ Kg.m/s}$$

$$\text{اندازه حرکت نهایی توپ} = p_x = mv_x = 0.06 \text{ kg} \times (+45 \text{ m/s}) = +2.7 \text{ Kg.m/s}$$

می‌توانیم از $dp/dt = F$ برای محاسبه میانگین نیرو در هنگام برخورد استفاده کنیم. می‌توانیم فرض کنیم که نیرو در طول زمان برخورد توپ و راکت ثابت است. به طور قطع ثابت ماندن نیرو کاملاً صحیح نیست، اما در هر موقعیتی، میانگین نیرویی را که به دنبال آن هستیم به ما خواهد داد. دوباره شکل دیفرانسیلی معادله مورد استفاده را می‌نویسیم:

$$\Delta p = p_{\text{پایانی}} - p_{\text{ابتدایی}} = \text{تغییر در اندازه حرکت}$$

$$\Delta t = t_{\text{پایانی}} - t_{\text{ابتدایی}} = \text{فاصله زمانی}$$

بنابراین:

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = \bar{F}$$

در اینجا \bar{F} میانگین یا متوسط نیرو است، بنابراین:

$$\bar{F} = \frac{p_{\text{پایانی}} - p_{\text{ابتدایی}}}{t_{\text{پایانی}} - t_{\text{ابتدایی}}} = \frac{2.7 - (-2.4)}{0.01} = 510 \text{ N}$$

واضح است که نیرو در راکت به چپ و در توپ به راست اعمال می‌شود. تغییر در اندازه حرکت توپ ۵۱۰ واحد به راست است؛ و برای راکت، ۵۱۰ واحد به چپ است. سرعت راکت در طول تماس با توپ در پاسخ به این تغییر اندازه حرکت تغییر خواهد کرد.

۵-۱۱ حرکت پرتابه، با در نظر گرفتن نیروی پسا

۵-۱۱-۱ مقدمه

معادله‌هایی که تا اینجا ارائه شدند، از نیروی اصطکاکی که از نیروی پسا ناشی می‌شود چشم‌پوشی کرده‌اند. هر جسم متحرک در میان هوا یک نیروی اصطکاک متناسب با

فصل پنجم: دینامیک ۱ ۲۰۶

مجذور سرعت یا اگر سرعت خیلی کم باشد متناسب با سرعت را تحمل می‌کند. برای اغلب پرتابه‌هایی که ما در علوم ورزشی با آنها در ارتباط هستیم، سرعت طوری است که نیروی پسا متناسب با مجذور سرعت است. نیروی پسا دارای اثر تغییر دهنده برد پرتابه و تغییر دهنده شکل مسیر حرکت در صفحه افقی - عمودی است.

۵-۱۱-۲ عدد رینولد

خصوصیات و الگوی حرکت جریان هوای اطراف کره، همراه با سرعت تغییر می‌کند، اما این وابسته به بزرگی و اندازه‌ی کره نیز هست. امکان توصیف جریان هوای اطراف توپ با استفاده از عدد رینولد وجود دارد. در مورد توپ کروی، عدد رینولد با استفاده از سرعت توپ، قطر توپ، و مشخصات فیزیکی هوا تعیین می‌شود. می‌توان نشان داد که برای توپ‌های کروی که در میان هوا حرکت می‌کنند، عدد رینولد (R) عبارت است از:

$$R = 64000 \, dv$$

اینجا d قطر توپ به متر و v سرعت آن به متر بر ثانیه است. بنابراین، برای توپ کریکت با قطر $0.072m$ که با سرعت $30m/s$ در میان هوا حرکت می‌کند، مقدار عدد رینولد عبارت است از:

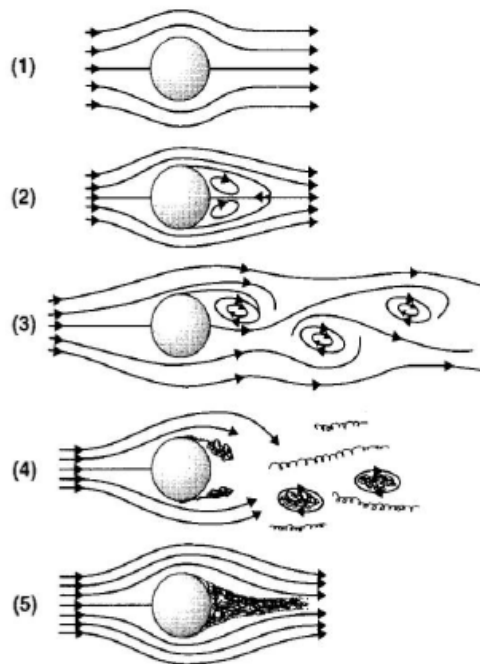
$$R = 64000 \times (30) \times (0.072) = 138240$$

آزمایش بر روی توپ‌ها در کانال‌های باد نشان داد که در محدوده‌ی وسیع اعداد رینولد از ۱۰۰۰ تا حدود ۱۵۰۰۰۰، مقاومت هوا متناسب با مجذور سرعت جریان افزایش می‌یابد. با این حال، اگر سرعت بیشتر افزایش یابد تا R به حدود ۲۰۰۰۰۰۰ برسد، توپ صاف یک کاهش ناگهانی آشکار در نیروی پسا را تجربه می‌کند که تا حدود یک چهارم مقدار یافت شده قبلی است. دلیل این کاهش ناگهانی در مقاومت هوا هنگامیکه سرعت فراتر از این مقدار بحرانی افزایش می‌یابد، رفتار لایه مرزی هوا اطراف توپ است. در شکل ۵-۱۲ برای سرعت‌های متفاوت جریان، تغییرات جریان هوا اطراف توپ نشان داده شده است.

شکل ۵-۱۲(۱) تا (۳) اعداد رینولد زیر ۲۰۰۰ را نشان می‌دهد. در شکل ۵-۱۲(۴) عدد رینولد ۱۰۰۰۰۰ است. در شکل ۵-۱۲(۵)، عدد رینولد ۱۰۰۰۰۰۰۰ است.

فصل پنجم: دینامیک ۱ ۲۰۷

شکل‌های ۵-۱۲(۱) و ۵-۱۲(۲) جریان لایه‌ای را در سرعت پائین نشان می‌دهند. هوا در جلو و پشت توپ ساکن می‌شود طوری که فشار در این نقاط بیشترین است، اما نیروی قابل استناد به اختلاف فشار بر روی توپ تقریباً صفر است. هیچ نیروی مقاوم فشاری وجود ندارد. شکل ۵-۱۲(۴) ایجاد جریان متلاطم بوسیله‌ی هوای پشت سیلندر را نشان می‌دهد که سرعتش دیگر کاسته نمی‌شود و فشار پشت توپ، دیگر زیاد نمی‌شود. بدلیل فشار بالا در جلوی توپ، توپ نیروی مقاوم فشاری زیادی را تحمل می‌کند. این وضعیت برای مقادیر R بین ۲۰۰۰ تا ۱۰۰۰۰۰۰ اتفاق می‌افتد. هنگامیکه افزایش سرعت ادامه می‌یابد، شکل ۵-۱۲(۵) نشان می‌دهد که جهت عمل ناحیه متلاطم در اطراف به سمت جلوی توپ است. اکنون این یک لایه مرزی متلاطم است. خطوط جریان از توپ جدا می‌شوند و لایه‌ی مرزی متلاطم را ایجاد می‌کنند. فشار در پشت توپ دوباره افزایش می‌یابد، و نیروی مقاوم فشاری خیلی کوچکتر می‌شود.



شکل ۵-۱۲ جریان هوای اطراف توپ هنگامی که سرعت توپ و بنابراین عدد رینولد افزایش می‌یابد. $R = 10^{-2}$ (۱)، $R = 20$ (۲)، $R = 10^3$ (۳)، $R = 10^4$ (۴)، $R = 10^6$ (۵)

فصل پنجم: دینامیک ۱ ۲۰۸

در موارد زیادی با حرکت توپ‌ها از میان هوا درگیر هستیم، که می‌تواند شامل توپ‌های گلف، بسکتبال، پرتاب وزنه، و توپ‌های فوتبال باشد. در بسیاری از بازی‌ها حداکثر سرعت توپ 30 m/s است. با در نظر گرفتن این شکل برای سرعت توپ، اعداد رینولد متناسب برای توپ‌های منتخب می‌تواند محاسبه شود:

توپ فوتبال: 425.000

توپ تنیس: 122.000

توپ گلف: 79.000

توپ اسکواش: 78.000

تنیس روی میز: 73.000

از این اعداد می‌توان دید که جریان هوا برای همه توپ‌های ورزشی متلاطم است. برای توپ فوتبال عدد رینولد بالای مقدار بحرانی است و می‌تواند از نیروی پسا کاسته شده بهره‌مند شود. سرعت توپ گلف هنگامی که توپ پایه‌ی تی شکل را ترک می‌کند، بیشتر از 30 m/s باشد.

۵-۱۱-۳ نیروی پسا و اثر آن بر حرکت

به صورت تجربی نشان داده شده است که، برای $R > 1$ ، نیروی پسا متناسب با مجذور سرعت افزایش می‌یابد. بنابراین، در هر یک از این موارد، نیروی پسا می‌تواند طوری نوشته شود که:

$$F_y = \frac{1}{2} C_D \rho A v^2$$

اینجا ρ چگالی هوا است، A مساحت سطح مقطع توپ است، v سرعت آن است، و C_D یک کمیت تجربی است که ضریب نیروی پسا نامیده می‌شود. برای اشیاء کروی، ضریب نیروی پسا دارای مقداری در حدود 0.5 است. این معاله نشان می‌دهد که برای هر شیئی در حال سقوط آزاد، از جمله پرتابه‌ها، نیروی رو به جلوی خالص عبارت است از:

$$F_y = mg - F_d = mg - \frac{1}{2} C_D \rho A v_y^2$$

بنابراین شتاب رو به جلوی خالص جرم (توپ) عبارت است از:

فصل پنجم: دینامیک ۱ ۲۰۹

$$a_y = g - \left(\frac{C_D \rho A}{2m}\right) v_y^2$$

وقتی شیء شروع به افزایش سرعت رو به پایین می‌کند، سرعت آن، v_y ، در نهایت به یک مقدار محدود خواهد رسید که توسط نیروی خالص رو به پایین تعیین می‌شود و حداکثر سرعت زمانی است که این نیرو صفر می‌شود (لحظه‌ی برخورد با کف). سرعتی که در آن اتفاق می‌افتد، به عنوان سرعت نهایی شناخته شده است و عبارت است از:

$$v_t = \sqrt{\frac{2mg}{C_D \rho A}}$$

دانستن این که سرعت نهایی کره متناسب با جذر شعاع کره افزایش می‌یابد، مفید بوده و منجر به استنتاج سودمندی می‌شود. این موضوع همچنین برای انواع توپ‌ها، مشروط به اینکه سرتاسر ساختمان توپ صلب یک شکل و همگن باشد درست است. در ورزش‌ها، به طور مستمر با این سوال مواجه هستیم که برد توپ ضربه خورده یا پرتاب شده با سرعت v چیست؟ این برد در حضور اصطکاک یا نیروی پسا چگونه تغییر می‌کند؟ اگر چه حضور نیروی پسا به صورت جهانی شناخته شده است، بدلیل اینکه ریاضیات راه حل‌های تحلیلی ساده برای محاسبه‌ی آن ندارد، در موارد زیادی نادیده گرفته می‌شود. در بخش بعدی برای این موضوع که اهمیت زیادی در بازی‌های توپی دارد راه حل عددی ارائه شده است.

۵-۱۱-۴ مدل سازی عددی حرکت توپ

برای یک توپ که از میان هوا حرکت می‌کند، شتاب عمودی به سمت بالا (در جهت y) عبارت است از:

$$a_y = -g - \frac{C_D \rho A}{2m} v_y^2$$

اینجا v_y مولفه y سرعت توپ در هر لحظه است. همچنین، شتاب افقی آن (در جهت x) عبارت است:

$$a_x = -\frac{C_D \rho A}{2m} v_x^2$$

فصل پنجم: دینامیک ۱ ۲۱۰

اینجا v_x مولفه x سرعت توپ در هر لحظه است. بوسیله‌ی روش یولر^۱ با استفاده از مراحل زمانی کوتاه، Δt و محاسبه‌ی سرعت‌ها به صورت زیر:

$$\Delta v_x = a_x \times \Delta t \quad \text{و} \quad v_y = a_y \times \Delta t$$

و محاسبه‌ی جابه‌جایی‌ها به این صورت:

$$\Delta y = v_y \times \Delta t \quad \text{و} \quad x = v_x \times \Delta t \quad \Delta$$

می‌توان برای این معادله‌ها راه حل عددی پیدا کرد. به سادگی با استفاده از یک صفحه گسترده از قبیل اکسل یا بوسیله‌ی نوشتن برنامه کوتاهی در بیسیک (BASICE)، فورتران (FORTRAN)، یا دیگر زبان‌های برنامه نویسی می‌توان به این راه حل‌ها دست یافت. برای آشنائی مختصر با محاسبات، لطفاً به پیوست ۱ مراجعه کنید. اطلاعات مورد نیاز برای محاسبه در توپ بیسبال به قرار زیر هستند:

$$r = ۳٫۶۶ \text{ cm} \quad \text{شعاع}$$

$$m = ۰٫۱۴۵ \text{ kg} \quad \text{جرم}$$

$$A = ۰٫۰۰۴۲ \text{ m}^2 \quad \text{مساحت سطح مقطع}$$

$$\rho = ۱٫۲۹ \text{ kg/m}^3 \quad \text{چگالی هوا}$$

$$C_D = ۰٫۵ \quad \text{ثابت بدون اندازه}$$

توجه کنید که ممکن است مقدار C_D در مورد توپی با درز یا با فرورفتگی تغییر کند. موفقیت در محاسبه متکی به بدست آوردن علامت صحیح برای نیروی پسا در صفحه گسترده یا برنامه است. برای مثال، شتاب در جهت y می‌تواند به این صورت محاسبه شود:

$$AY = -G - K \times VY \times ABS(VY)$$

در اینجا K ، $\frac{C_D \rho A}{2m}$ است و $ABS(VY)$ مقدار مطلق VY است. این معادله بدون

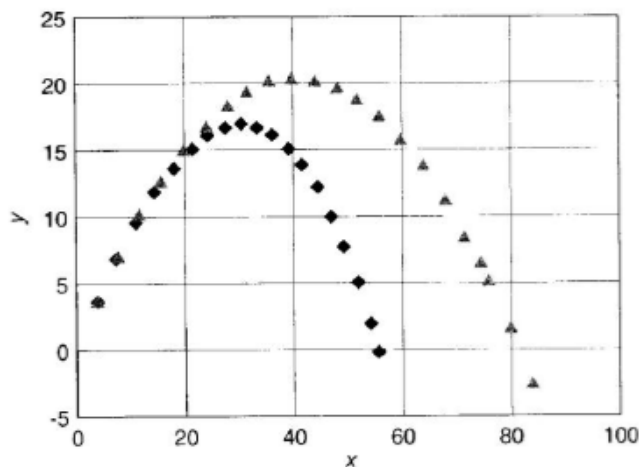
توجه به اینکه آیا VY مثبت است یا منفی، بزرگی VY را مثبت ارائه می‌دهد. مقدار K برای توپ بیسبال بسیار نزدیک به $۰٫۰۱$ بدست می‌آید. بنابراین، این مقدار برای محاسبات بعدی در نظر گرفته شده است. جدول ۵-۲ یک سرعت اولیه x برابر ۲۰ m/s

۱. Euler

فصل پنجم: دینامیک ۱ ۲۱۱

را در نظر می‌گیرد و مقادیر x ، y بدست آمده برای توپ بیسبال پرتاب شده را از $x = 0$ ، $y = 0$ با استفاده از مراحل زمانی $\Delta t = 0.01$ s را ارائه می‌دهد.

ردیف آخر در جدول ۵-۲ نتایج اولیه بدست آمده را ارائه می‌دهد که در آن y منفی است. همچنین با فرض اینکه ارتفاع فرود و پرتاب مساوی هستند، برد بدست آمده 55.67 m است. در غیاب نیروی مقاوم سیال (نیروی پسا)، برد 81.63 m خواهد بود، بنابراین برد بدست آمده در حضور نیروی پسا تنها 68.2% مقداری است که در نبود نیروی پسا خواهد بود. همچنین با نشان دادن شکل سهمی وار، مسیر x - y می‌تواند برای توپ بیسبال در غیاب نیروی پسا محاسبه شود (بخش ۳-۵ را ببینید). این شکل می‌تواند با مسیر توپ بیسبال در حضور نیروی پسا مقایسه شود. شکل ۵-۱۳ مقایسه بین دو وضعیت را نشان می‌دهد. توجه کنید که مسیر "همراه با نیروی پسا" حول محور عمودی عبوری از نقطه ارتفاع حداکثر نامتقارن است. به دلیل اینکه نیروی پسا، سرعت افقی توپ را کاهش داده است ولی شتاب رو به پایین توپ تغییر نکرده است، منحنی در سمت راست نقطه‌ای اوج دارای خمیدگی شده و در سمت راست نقطه‌ای اوج ارتفاع، دارای شیب بیشتری است.



شکل ۵-۱۳. مقایسه مسیرها برای توپ بیسبالی که در

حضور و عدم حضور نیروی پسا پرتاب شده است با استفاده از داده‌های جدول ۵-۲. سرعت‌های ابتدایی برای هر دو مسیر یکی هستند. (در حضور پسا، مربع‌های سیاه؛ نبود پسا، مثلث‌های خاکستری)

فصل پنجم: دینامیک ۱ ۲۱۲

جدول ۲-۵ مختصات x و y در برابر زمان برای توپ بیسبال پرتاب شده با m/s
 $v_x = 20 \text{ m/s}$ و $v_y = 20$

مختصات y (m)	مختصات x (m)	زمان (s)
۳٫۷۲	۳٫۹۲	۰٫۲
۶٫۹۲	۷٫۶۹	۰٫۴
۹٫۶۴	۱۱٫۳۲	۰٫۶
۱۱٫۹۱	۱۴٫۸۳	۰٫۸
۱۳٫۷۵	۱۸٫۲۱	۱٫۰
۱۵٫۱۶	۲۱٫۴۹	۱٫۲
۱۶٫۱۷	۲۴٫۶۶	۱٫۴
۱۶٫۷۸	۲۷٫۷۳	۱٫۶
۱۶٫۹۹	۳۰٫۷۱	۱٫۸
۱۶٫۸۱	۳۳٫۶۱	۲٫۰
۱۶٫۲۵	۳۶٫۴۲	۲٫۲
۱۵٫۲۹	۳۹٫۱۶	۲٫۴
۱۳٫۹۶	۴۱٫۸۲	۲٫۶
۱۲٫۲۶	۴۴٫۴۲	۲٫۸
۱۰٫۱۹	۴۶٫۹۵	۳٫۰
۷٫۷۹	۴۹٫۴۱	۳٫۲
۵٫۰۷	۵۱٫۸۲	۳٫۴
۲٫۰۳	۵۴٫۱۷	۳٫۶
-۰٫۰۹	۵۵٫۶۷	۳٫۷۳

*فرض شده است که توپ بیسبال از $\alpha = 0$ و $\gamma = 0$ حرکت

کرده و این که ارتفاع پرتاب و فرود یکسان است

در جدول ۲-۵، که برد محاسبه شده را برای یک توپ بیسبال که در چند سرعت متفاوت و با یک زاویه 45° درجه پرتاب شده است، نشان می‌دهد می‌توان اثر سرعت را هنگام وجود نیروی پسا دید. مشاهده می‌شود که که اثر نیروی پسا زمانی که سرعت‌های افقی و عمودی 5 m/s هستند، تقریباً ناچیز است. با این حال، اثر نیروی پسا با افزایش سرعت به صورت قابل توجهی افزایش می‌یابد طوری که در 25 m/s برد تا 58.8% برد قابل انتظار در عدم حضور نیروی پسا کاهش یافته است.

همچنین هنگامی که نیروی پسا بر روی جسم عمل می‌کند، تغییرات برد با زاویه پرتاب متفاوت است. جدول ۲-۴ تغییرات برد در ازای زاویه θ برای زوایای نزدیک به 45° را نشان می‌دهد. این جدول نشان می‌دهد که برای $v_x = 20 \text{ m/s}$ ، $v_y = 20 \text{ m/s}$ ، زاویه مناسب برای برد حداکثر در حدود 43.5° است. همان اطلاعات در نمودار شکل ۲-۱۴ نشان داده شده است.

فصل پنجم: دینامیک ۱ ۲۱۳

جدول ۳-۵ برد محاسبه شده برای توپ بیسبال پرتاب شده با سرعتهای متفاوت و با زاویه 45° *

برد (همراه با نیروی مقاوم سیال؛ %)	برد (بدون نیروی مقاوم سیال) (m)	برد (همراه با نیروی مقاوم سیال) (m)	v_y (m/s)	v_x (m/s)
۹۶۰،۵۰	۵،۱۰	۴،۹۲	۵	۵
۸۸،۰۰	۲۰،۴۱	۱۸،۱۴	۱۰	۱۰
۷۸،۶۰	۴۵،۹۲	۳۶،۰۸	۱۵	۱۵
۶۸،۲۰	۸۱،۶۳	۵۵،۶۷	۲۰	۲۰
۵۸،۸	۱۲۷،۵۰	۷۵،۰۳	۲۵	۲۵

* $K = 0.1$ ، $2 - 9.8 \text{ ms}^{-2}$ فرض شده است که ارتفاع پرتاب و فرود یکسان است.

جدول ۴-۵ تغییرات برد با زاویه ی پرتاب *

برد (m)	زاویه $^\circ$
۵۶،۷۹	۴۲
۵۶،۸۲	۴۳
۵۶،۸۲	۴۴
۵۶،۷۷	۴۵
۵۶،۵۸	۴۶

* توپ بیسبال پرتاب شده با سرعت 28.28 m/s و زاویه $^\circ$ اندازه گیری شده نسبت به سطح افق. مقدار k 0.0934 m^{-1} در نظر گرفته شده است.

پارامترها برای توپ گلف عبارتند از:

$$\text{جرم } m = 0.046 \text{ Kg}$$

$$\text{مساحت } A = 0.0042 \text{ m}^2$$

$$\text{شعاع } r = 3.66 \text{ cm}$$

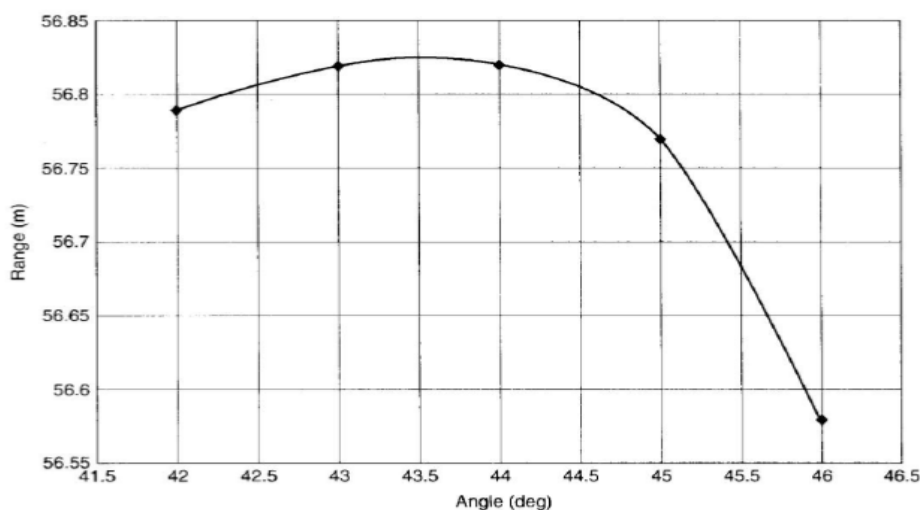
بنابراین مقدار k عبارت است از:

$$\frac{0.5 \times 1.29 \times 0.0042}{2 \times 0.46} = 0.00982 \text{ m}^{-1}$$

با مقایسه، مشخص می شود که مقادیر k برای توپ بیسبال و توپ گلف خیلی مشابه هستند. این شباهت به خاطر این است که نسبت A/m برای هر دو توپ تقریباً یکسان است و می رساند که نتایجی که برای توپ بیسبال بدست آمد به طور مشابه

فصل پنجم: دینامیک ۱ ۲۱۴

برای توپ گلف معتبر هستند. با این حال، در اینجا اثر فرورفتگی‌های روی توپ گلف و اثر چرخش، که در فصل ۱۱ توضیح داده می‌شود، نادیده گرفته شده است.



شکل ۵-۱۴. تغییرات برد با زاویه پرتاب برای توپ بیسبال پرتاب شده با استفاده از اطلاعات جدول ۴-۵.

خلاصه

فصل ۵ با خصوصیات اینرسی اشیاء مادی و حرکت طبیعی آنها شروع می‌شود. فصل همچنین قوانین اول و دوم نیوتن را معرفی می‌کند و بنابراین به صورت قراردادی روابط بین جرم، نیرو، و شتاب را برقرار می‌کند. ابزارهایی که بوسیله‌ی آنها جرم و نیرو می‌توانند اندازه‌گیری شوند، به ویژه با اشاره به ابزارهای اندازه‌گیری جدید از قبیل کشش سنج، سلول‌های فشار و صفحات نیرو، معرفی شدند. چند نمونه از کاربردهای بیومکانیک از قبیل اندازه‌گیری‌های *COP* و اندازه‌گیری‌های *GRF* در طول پرش ارتفاع مطرح شدند. از طریق مطرح ساختن قانون سوم نیوتن، ارتباط بین نیروهای کنش و واکنش به طور خلاصه بیان شد. این ارتباط به ویژه هنگام در نظر گرفتن نیروهای اصطکاکی فعال در موقعیت‌های روزمره از قبیل اشیاء ایستاده در سطوح شیبدار و اتومبیل در حال حرکت در دور پیچ مفید است. همچنین قوانین نیوتن از دیدگاه اندازه حرکت خطی شرح داده شدند. در انتها، برای روشن ساختن این موضوع که حرکت

فصل پنجم: دینامیک ۱ ۲۱۵

نمی‌تواند یکنواخت در نظر گرفته شود، به عنوان یک مثال حرکت پرتابه در حضور نیروی پسا مورد بررسی قرار گرفت.

خود آزمایی

۱. توپی با سرعت $2m/s$ در سطح صاف می‌غلتد. اگر بین سطح و توپ

اصطکاک صفر باشد، سرعت توپ چقدر است؟

(الف) بعد از $1s$

(ب) بعد از $2s$

(ج) بعد از $10m$ غلتیدن؟

این یک مورد غیر واقعی است که احتمالاً در عمل هرگز اتفاق نخواهد افتاد. چند روش را مطرح کنید که توپ واقعی ممکن است بعد از زمان معین یا بعد از غلتیدن فاصله معینی دچار کاهش سرعت شود.

۲. نیروی گرانشی بر روی بدن یک ورزشکار با جرم $80kg$ را در سطح

دریا بدست آورید. فرض کنید زمین یک جسم کاملاً کروی با شعاع

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

در $6.38 \times 10^6 m$ در سطح دریا است. قانون گرانشی نیوتن است.

اگر ورزشکار در یک استادیوم ورزشی بود که $5000m$ بالای سطح دریا است، اختلافی را که این ارتفاع در پاسخ شما به وجود خواهد آورد، محاسبه کنید.

۳. دونه سرعت شرکت کننده در مسابقه $100-m$ در مدت $1.5s$ از سکون

تا سرعت نهایی $10m/s$ سرعت می‌گیرد. اگر جرم بدن او $65kg$ باشد،

روی هم رفته نیروی خالص عمل کننده روی بدن او در فاصله زمانی s

1.5 چقدر است؟

۴. توپ فوتبال از نقطه پناستی به سمت دروازه ضربه می‌خورد. نمودار

نشان دهنده نیروی‌های آنی عمل کننده بر روی کفش و توپ را زمانی

فصل پنجم: دینامیک ۱ ۲۱۶

که این دو با هم برخورد می‌کنند، بکشید. بزرگی نیروهای درگیر را با این فرض که جرم توپ 0.2kg است و در زمان 0.1s از سرعت 0 تا 20m/s سرعت می‌گیرد، تخمین بزنید. هر مفروضه‌ای را که شما در نظر می‌گیرید بیان کنید.

۵. وزن یک جرم 25-kg چقدر است؟
۶. بین سورتمه و برف ضریب اصطکاک ایستا 0.18 و ضریب اصطکاک پویا 0.15 است. پسری با وزن 250N در سورتمه 250-N نشسته است. چه مقدار نیروی موازی با سطح افقی برای شروع حرکت سورتمه مورد نیاز است؟ چه مقدار نیرو برای حفظ حرکت سورتمه نیاز است؟
۷. جعبه 70-kg بر روی کف سر می‌خورد. ضریب اصطکاک ایستا بین جعبه و کف 0.65 است و ضریب اصطکاک پویا 0.62 است. الف) چه مقدار نیرو برای شروع حرکت جعبه لازم است؟ ب) چه مقدار نیرو برای حفظ حرکت آن لازم است؟
۸. یک سورتمه 150-kg در عرض یک سطح افقی کشیده می‌شود. اگر ضریب اصطکاک پویا 0.3 باشد، برای شتاب گرفتن سورتمه با 2m/s^2 چه مقدار نیرو مورد نیاز است؟
۹. جعبه 20-kg در حال سکون در سطح افقی بوسیله نیروی افقی 100N کشیده می‌شود. اگر شتاب بدست آمده 4m/s^2 باشد، ضریب اصطکاک پویا چقدر است؟
۱۰. یک اتومبیل 1000-kg یک منحنی با شعاع انحنای 7.5m را در یک جاده طی می‌کند. زاویه شیب در این بخش از جاده 20° است. ضریب اصطکاک بین لاستیک‌ها و سطح جاده 0.65 است. حداکثر سرعتی که اتومبیل در آن سرعت می‌تواند در پیچ بماند چقدر است؟ نیروی مایل به مرکز عمل کننده بر اتومبیل در این سرعت چقدر است؟

فصل پنجم: دینامیک ۱ ۲۱۷

۱۱. توپ گلف غلتان در یک سطح مصنوعی با ضریب اصطکاک غلتشی 0.02 مواجه می‌شود. با این دانسته که سرعت اولیه توپ الف) $2.5m/s$ و ب) $5m/s$ است، توپ در روی سطح چقدر غلت خواهد خورد؟ جرم توپ گلف $0.46kg$ است.

۱۲. اندازه حرکت دونه سرعت در سرعت $9m/s$ چقدر است؟ جرم دونه سرعت $70kg$ است.

۱۳. بازیکن تنیس یک سرویس که دارای سرعت $120mph$ است را با سرعت $85mph$ بر می‌گرداند. تغییر در اندازه حرکت توپ تنیس چقدر است؟ فرض کنید جرم توپ تنیس $0.1kg$ است و اینکه 1 مایل $1.6km$ است. (ابتدا سرعت را به متر بر ثانیه تبدیل کنید).

اگر زمان تماس راکت $5ms$ ($0.005s = 5$ میلی ثانیه) باشد، متوسط نیروی عمل کننده بر روی توپ (یا راکت) را در طول این زمان محاسبه کنید. نمودار برداری نشان دهنده نیروهای عمل کننده بر روی توپ و روی راکت را رسم کنید.

۱۴. برای محاسبه مسیر ضربه فوتبال با یک زاویه 45° با سرعت اولیه الف) 5 ، ب) 10 ، ج) 15 ، د) 20 ، و ه) $25m/s$ از روش صفحه گسترده استفاده کنید. فرض کنید جرم توپ $0.3kg$ است، شعاع آن $12.5cm$ است، و مقدار C_D آن 0.5 است. با فرض اینکه ارتفاع پرتاب و فرود یکی است. بردی را که با هر ضربه قابل دستیابی است، بدست آورید.

منابع

McCall MW(۲۰۰۰). *Classical Mechanics*. A Modern Introduction. New York: John Wiley & Sons.

Regtien PPL(۲۰۰۴). *Electronic Instrumentation*. Delft, The Netherlands: Delft University Press.

فصل ششم

دینامیک ۲

اهداف فصل

اهداف این فصل عبارت‌اند از:

- ادامه دادن بحث دینامیک شامل انرژی، کار، توان، اندازه حرکت، قوانین بقاء، و کاربرد نوسان.

نتایج فصل

بعد از مطالعه‌ی این فصل، دانشجو قادر خواهد بود تا:

- کار انجام شده توسط نیروهای ثابت و متغیر را محاسبه کند.
- محاسبات انرژی کینتیک، انرژی پتانسیل و انرژی کششی را انجام دهد.
- قانون بقاء انرژی مکانیکی را به کار گیرد.
- توان را در حرکات ساده بدست آورد.
- بقاء اندازه حرکت و تکانه را درک کند.
- بین نوسان‌های ارتجاعی و غیر ارتجاعی تمیز قائل شود.
- محاسبات ساده در نوسان‌های تضعیف شده و تضعیف نشده را دریابد و انجام دهد.

۶-۱ کار انجام شده بوسیله‌ی نیروی ثابت

اجازه دهید نیروی، F را در نظر بگیریم که به وزنه‌ای که می‌تواند حرکت کند، اعمال شده است. تحت برخی شرایط، وزنه در جهت مشابه با جهت نیروی اعمال شده حرکت خواهد کرد. بنابراین یک بردار جابه‌جایی d وجود دارد که موازی با بردار F است. می‌توان نشان داد که چنین جابه‌جایی نیازمند صرف انرژی است، یعنی کمیتی که اهمیت اساسی در حرکت انسان دارد. ما می‌گوییم کار مکانیکی بوسیله‌ی نیروی F انجام می‌شود. به طور کلی انرژی می‌تواند برای تنوع وسیعی از کارها استفاده شود؛ برخی مثال‌ها که در آنجا انرژی استفاده می‌شود عبارت‌اند از:

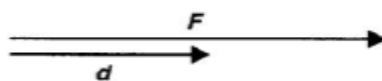
بالا بردن وزنه تا ارتفاع معین

شارژ کردن باتری

گرم کردن یک شیء تا دمای معین

جوشیدن آب

افزایش سرعت یک شیء تا سرعت معین



شکل ۶-۱. نیروی (F) و جابه‌جایی (d) که در امتداد خط راست یکسانی عمل می‌کنند. کار انجام شده به سادگی عبارت است از: $W = F \times d$.

در این مثال‌ها، می‌توان مشخص کرد که انرژی به کار رفته در برخی موارد متفاوت است؛ در حالیکه، هم گرم شدن یک شیء و هم جوشیدن آب متضمن شکلی از انرژی است که گرما نامیده می‌شود، بالا بردن وزنه و افزایش سرعت یک شیء متضمن به کارگیری نیرو در یک نقطه‌ی متحرک در شیء و استفاده از یک نوع انرژی است که به عنوان انرژی مکانیکی توصیف می‌شود. همچنین در مورد باتری که شارژ می‌شود، انرژی باز هم در شکل متفاوتی است، یعنی انرژی الکتریکی. همه این اشکال مختلف انرژی می‌توانند معادل یک دیگر نشان داده شوند، و در حقیقت، در شرایط معین، انرژی می‌تواند از شکلی به شکل دیگر تبدیل شود. نمونه‌هایی از این تبدیل

انرژی در مثال‌هایی که ما قبلاً در نظر گرفتیم دیده می‌شوند. در مورد جرم بالا برده شده، برای افزایش انرژی پتانسیل (PE) جرم، کار مکانیکی انجام شده است. در باطری شارژ شده، انرژی الکتریکی ژنراتور به شکل انرژی شیمیایی در باطری ذخیره می‌شود. گرم شدن یا جوشیدن آب بوسیله‌ی یک گرمکن الکتریکی، متضمن تبدیل انرژی الکتریکی به انرژی گرمایی است. افزایش سرعت یک شیء متضمن انجام کار برای افزایش انرژی جنبشی (KE) شیء است.

یک نیرو، F ، و حرکت در سرتاسر جابه‌جایی، d ، را در نظر بگیرید (شکل ۶-۱)، هنگامیکه نیروی به کار رفته و جابه‌جایی در یک خط راست یکسان هستند، کار انجام شده می‌تواند به صورت زیر محاسبه شود:

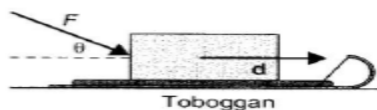
$$\text{نیرو} \times \text{مسافت طی شده} = \text{کار انجام شده}$$

در موقعیت‌های دیگر، جهت‌های عمل نیروی F و جابه‌جایی d متفاوت هستند (شکل ۶-۲). مردی را در نظر بگیرید که سورتمه را با زاویه θ نسبت به جهت حرکت سورتمه هل می‌دهد. در مورد نیروی F و جابه‌جایی d نشان داده شده در شکل ۶-۲، کار انجام شده بوسیله‌ی نیرو ضرب در مسافت حرکت در جهت نیرو، تعیین می‌شود، یعنی $W = F d \cos \theta$.

همانطور که در بخش ۷-۱ شرح داده شده است، بر اساس حاصلضرب نرده‌ای بردارها، کار انجام شده می‌تواند به سادگی به این صورت بیان شود:

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{d}$$

در واحدهای SI (سیستم بین‌المللی)، نیروها به نیوتن (N) و مسافت به متر (m) اندازه‌گیری می‌شوند، بنابراین کار، W ، می‌تواند با واحدهای Nm بیان شود. همچنین این واحدها می‌توانند به عنوان ژول (J) بیان شوند. بنابراین، هنگامی که نیروی $1N$ در طول مسافت $1m$ در همان جهت نیرو حرکت می‌کند، کار انجام شده، یک ژول خواهد بود.



شکل ۶-۲. مردی سورتمه را با نیروی (F) با یک زاویه (θ) نسبت به جهت حرکت هل می‌دهد. کار انجام شده عبارت است از $W = F d \cos \theta$.

■ مثال ۶-۱

دیسک در طول پرتاب، در یک مسافت 50 cm تحت عمل نیروی 60 N است. کار انجام شده روی دیسک چقدر است؟ فرض کنید که جهت اعمال نیرو مشابه با جهت جابه‌جایی است.

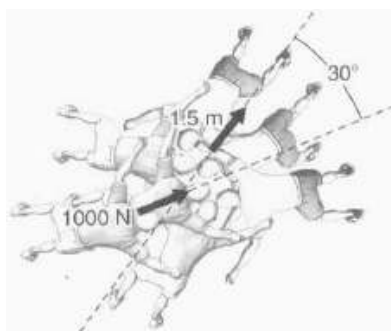
جواب

کار انجام شده عبارت است از:

$$\begin{aligned} W &= F \times d \\ &= (60\text{ N}) \times (0.5\text{ m}) \\ &= 30 \text{ ژول} \end{aligned}$$

■ مثال ۶-۲

بازیکن راگی در اسکروم (*scrum*) بازیکنان دو تیم در راگی که برای تصاحب توپ حول یک نقطه جمع شده‌اند) نیروی 1000 N را اعمال می‌کند، اما اسکروم 1.5 m در جهت 30° نسبت به نیرو حرکت می‌کند (شکل ۶-۳). کار انجام شده بوسیله‌ی بازیکن راگی در این حرکت چقدر است؟



شکل ۶-۳ بازیکن راگی نیروی 1000 N را با زاویه 30° نسبت به حرکت اسکروم اعمال می‌کند.

جواب

کار انجام شده عبارت است از:

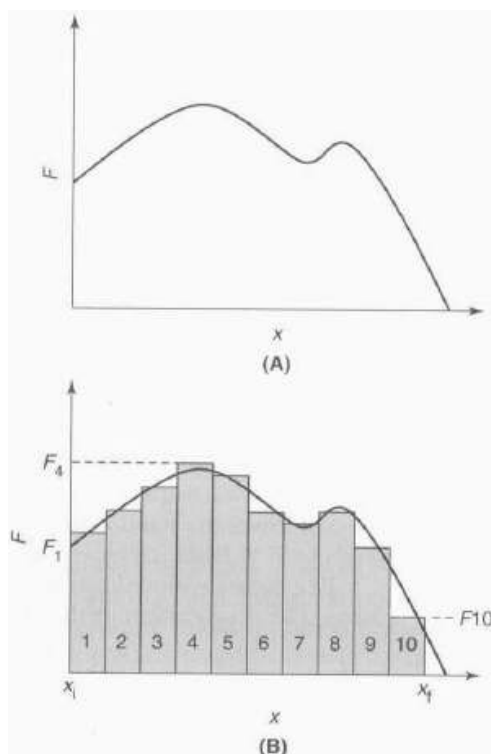
$$W = F d \cos\theta = (1000N) \times (0,866) = 1299J$$

۶-۲ کار انجام شده بوسیله‌ی نیروی متغیر

در اغلب موقعیت‌های عملی، نیروی F ثابت نیست و به مقدار زیادتر یا کمتر تغییر می‌کند. در این وضعیت، بدلیل اینکه مقدار واحدی وجود ندارد که بتوان به نیروی F نسبت داد، نمی‌توان کار انجام شده را بوسیله‌ی روش مطرح شده در بخش ۶-۱ محاسبه کرد. اجازه دهید موقعیتی را در نظر بگیریم که نیروی متغیر F و جابه‌جایی d هر دو در امتداد خط راست یکسان، محور x عمل می‌کنند. برای مثال، چنین موردی ممکن است زمانی رخ دهد که فردی تلاش می‌کند فنزی را جمع کند و همزمان با فشردن شدن فنر، نیروی مورد نیاز افزایش می‌یابد.

مثال دیگر پرتاب نیزه است. هنگام پرتاب، نیرو ثابت نیست، و از صفر افزایش می‌یابد، به حداکثر می‌رسد، و سپس هنگامی که نیزه رها می‌شود به صفر می‌رسد. اجازه دهید که تغییرات F با x را در یک شکل قراردادی فرض کنیم (شکل ۶-۴). در شکل ۶-۴(a) نشان داده شده است که نیرو با یک روند تدریجی و مداوم در محدوده x مورد نظر (به عنوان مثال بین مقادیر ابتدایی و انتهایی، x_i و x_f) تغییر می‌کند. می‌توان تصور کرد این حدود مقادیر x در شکل ۶-۴(a) به تعدادی از فواصل مساوی با عرض Δx تقسیم می‌شوند. همچنین می‌توان کرد که در درون هر فاصله Δx نیروی F می‌تواند با مقدار متوسط نیروی F در این فاصله تقریب زده شود. این تقسیم در شکل ۶-۴(b) انجام شده است و در آن تعداد چنین فواصل اختیاری ۱۰ عدد تعیین شده است. بنابراین در فاصله ۱، مقدار نیرو F_1 است. در فاصله ۲ مقدار نیرو F_2 است، و همین طور ادامه دارد، تا در انتها با دهمین فاصله و نیروی F_{10} تمام می‌شود. بدلیل اینکه نیرو در درون هر فاصله ثابت است، پس می‌توان کار انجام شده در هر یک از این فواصل را محاسبه کرد. بنابراین کار انجام شده در فاصله ۱ عبارت است از $(F_1) \times (\Delta x)$ ، کار انجام شده در فاصله ۲ عبارت است از $(F_2) \times (\Delta x)$ ، و الی آخر. در انتها با کار انجام شده در

فاصله دهم، که عبارت است از $(F_{10}) \times (\Delta x)$ تمام می‌شود. در زیر نشان داده شده که کل کار انجام شده می‌تواند تخمین زده شود:



شکل ۴-۶ (A) نمودار نیروی (F) که در یک روش قراردادی با فاصله (x) تغییر می‌کند. (B) همان نمودار به عنوان فواصل تقریب زده شده بوسیله‌ی نیرو در نظر گرفته شده است که به صورت گام به گام تغییر می‌کند (متن را ببینید).

$$W = (F_1) \times (\Delta x) + (F_2) \times (\Delta x) + \dots + (F_{10}) \times (\Delta x)$$

یا

$$W = (F_1 + F_2 + \dots + F_{10}) \times (\Delta x)$$

در اینجا $\Delta x = (x_j - x_i) / 10$ عرض هر فاصله در محور x است. ممکن است بدلیل تخمینی که در محاسبه‌ی کار انجام شده استفاده شد، خطای کوچکی در پاسخ بدست آمده برای کار انجام شده وجود داشته باشد. با این حال، خطا

پیوست ۲ ۲۲۵

می‌تواند کاملاً کوچک باشد و اگر تعداد فواصل بیشتر (مثلاً ۱۰۰) در نظر گرفته شود، حتی کمتر هم می‌شود و در این مورد، عرض فاصله به طور مشخص بسیار نازک است، پاسخ بدست آمده حتی نزدیک مقدار صحیح است، و می‌توان جمع این ۱۰۰ فاصله را به این صورت بنویسیم:

$$W = \sum_{i=1}^{100} F_i \Delta x$$

در اینجا $\Delta x = (x_f - x_i) / 100$

به صورت ریاضی، واضح است که باید اجازه داد تا تعداد فاصله‌ها تا بینهایت (∞) ادامه پیدا کنند و آنگاه مجموع، مساوی عمل ریاضی انتگرال گیری می‌شود. (ضمیمه ۱ را ببینید). آنگاه کار انجام شده به این صورت نوشته می‌شود:

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F \times dx$$

در صورت وجود راه حل دقیق و یا در غیر این صورت، وجود یک تکنیک تقریب آماری، می‌توان انتگرال را به صورت تحلیلی محاسبه کرد.

۳-۶ انرژی جنبشی

شیئی متحرک با خود انرژی حمل می‌کند. این انرژی می‌تواند با اندازه‌گیری مقدار انرژی مورد نیاز برای توقف شیئی متحرک نشان داده شود. بنابراین اشیاء متحرک دارای توانایی بالا بردن دمای اجسام دیگر و خود، بالابردن اجرام به سطح بالاتر، فشردن یا کشیدن فنرها، یا ایجاد حرکت در اشیاء دیگر هستند. بنابراین طبیعی است که پرسید جسمی که با سرعت v در حال حرکت است، دارای چه مقدار انرژی است؟ اجازه دهید توپ کریکت با جرم m را در نظر بگیریم که از وضعیت سکون پرتاب شده است. اجازه دهید فرض کنیم نیروی F که به توپ سرعت می‌دهد، بوسیله‌ی دست اعمال می‌شود، و تا زمانی که توپ دست را ترک می‌کند بزرگی آن ثابت است و نیروی برآیند کلی بر روی توپ است. این اشاره می‌کند که افزایش سرعت توپ بکنواخت خواهد بود. همچنین اجازه دهید فرض کنیم که زمان افزایش سرعت، t است. ما

پیوست ۲ ۲۲۶

می‌توان فرض کرد که توپ در انتهای زمان t با سرعت v دست را ترک می‌کند. کار انجام شده بوسیله F با: مسافت طی شده در جهت نیرو $F \times$ تعیین می‌شود. مسافت طی شده می‌تواند از روی زمان، سرعت نهایی، و نیرو تخمین زده شود. شتاب توپ عبارت است از:

$$a = \frac{F}{m}$$

سرعت نهایی توپ عبارت است از:

$$v = at$$

مسافت طی شده عبارت است از:

$$s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}a\left(\frac{v}{a}\right)^2 = \frac{1}{2}v^2 \frac{m}{F}$$

بنابراین می‌توان دید که کار انجام شده بر روی توپ عبارت است از:

$$F \times \frac{1}{2}v^2 \frac{m}{F} = \frac{1}{2}mv^2$$

این کمیت می‌تواند به عنوان معادله مفیدی برای انرژی جنبشی (KE) توپ در نظر گرفته شود. برای کاری که به منظور متوقف ساختن توپ متحرک مورد نیاز است نیز می‌توان تحلیلی مشابه، با نتایج مشابه انجام داد. فرمول نهایی برای KE عبارت است از:

$$KE = \frac{1}{2}mv^2$$

■ مثال ۳-۶

KE دونه سرعت یا جرم 70 kg که با سرعت 10 m/s در حال حرکت است را محاسبه کنید.

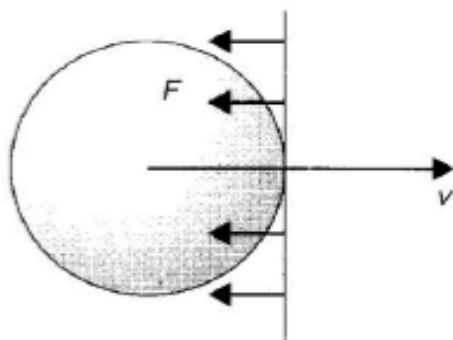
جواب

پیوست ۲ ۲۲۷

$$KE = 0,5 \times (70 \text{ kg}) \times (10 \text{ m/s})^2 = 3500 \text{ ژول}$$

■ مثال ۴-۶

برای متوقف ساختن توپ $0,5 \text{ kg}$ که با سرعت 20 m/s در حال حرکت است چقدر کار باید انجام شود؟ اگر نیروی متوقف کننده در مسافت 4 m اعمال شود، بزرگی نیروی متوقف کننده، با فرض ثابت بودن آن چقدر است؟



شکل ۵-۶. توپ بوسیله نیروی متوقف کننده، متوقف شده است.

جواب

$$\text{ژول مورد نیاز} = 0,5 \times (0,5 \text{ kg}) \times (20 \text{ m/s})^2 = 100$$

می توان نیروی متوقف کننده را F نامید (شکل ۵-۶). کار انجام شده به صورت $F \times d$ محاسبه می شود، بنابراین:

$$100 \text{ ژول} = (F) \times (0,4 \text{ m})$$

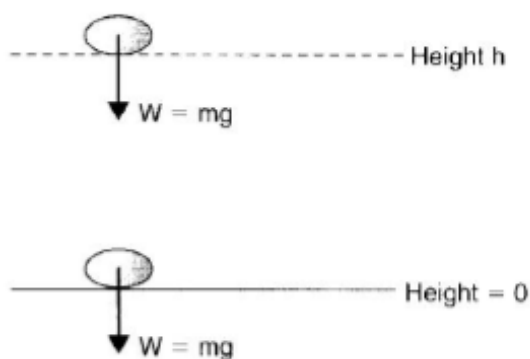
$$F = 100 / 0,4 = 250 \text{ N}$$

قبل از اتمام مبحث KE ، یادآوری این نکته مفید است که فرمول $KE = \frac{1}{2}mv^2$ در کل به طور گسترده ای قابلیت کاربرد دارد و به مواردی که در آن نیروی شتابی ثابت

است، محدود نیست. همچنین اشیاء چرخنده (مانند، توپ چرخان، صفحات گردان) دارای KE چرخشی هستند، این نیرو در فصل ۸ بیشتر بحث خواهد شد.

۴-۶ انرژی پتانسیل گرانشی

انرژی پتانسیل گرانشی، که اغلب به صورت PE خلاصه می‌شود، انرژی قابل استناد به یک شیء بوسیله‌ی موقعیت آن شیء در یک میدان گرانشی است. در بخش ۵-۷ ارتباط بین شتاب قابل استناد به گرانش و وزن یک شیء را دیدیم. چنانکه شیء نزدیک سطح زمین به بالا یا پائین حرکت کند، محاسبه کار انجام شده بر روی آن کاملاً ساده است. یک شیء به جرم M را در نظر بگیرید که از کف ($= 0$ ارتفاع) به ارتفاع جدید، h ، بالای کف بالا برده می‌شود (شکل ۶-۶).



شکل ۶-۶ جرم m از کف تا ارتفاع h بالا برده شده است.

فرض می‌شود وزن شیء که با mg تعیین می‌شود، در سرتاسر محدوده حرکت شیء ثابت باشد و ثابت فرض کردن وزن مشروط به این است که h خیلی کمتر از شعاع زمین باشد. به دلیل اینکه شعاع زمین در حدود 6000 km است، ثابت فرض کردن وزن در ارتفاع محدودیت جدی به حساب نمی‌آید. بالا بردن این شیء تا ارتفاع h نیازمند انجام کار بر روی شیء خواهد بود:

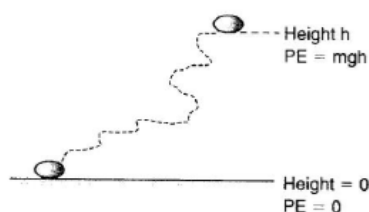
$$\begin{aligned} \text{نیرو} \times \text{مسافت طی شده در جهت نیرو} &= \text{کار انجام شده} \\ &= mg \times h \end{aligned}$$

پیوست ۲ ۲۲۹

پس فرض می‌شود این مقدار کار به صورت پایداری به عنوان PE در شیئی باقی بماند، بنابراین:

$$PE = mgh$$

همچنین از این فرمول نتیجه گیری می‌شود که PE وابسته به مسیر طی شده که نقاط را در ارتفاع h و 0 به هم متصل می‌کند، نیست. برای مثال در این مورد وزنه فاصله h را به صورت عمودی طی کرده است، اما حرکت می‌توانست بدون تغییر PE دارای جابه‌جایی‌های مارپیچ باشد. شکل ۶-۷ یک جرم را نشان می‌دهد که در امتداد یک مسیر پیچیده حرکت کرده است ولی در پایان صعود باز هم در ارتفاع h بالای زمین است.



شکل ۶-۷. یک جرم (m) در امتداد یک مسیر پیچیده از کف تا ارتفاع (h) حرکت کرده است. حتی با وجود اینکه جرم مسیر پیچیده‌ای را طی کرده است تا به ارتفاع برسد، انرژی پتانسیل این شیئی هنوز mgh است.

■ مثال ۵-۶

ورزشکار پرش نیزه با جرم 70 kg موفق به عبور از میله‌ای می‌شود که در ارتفاع 6 m بالای زمین قرار دارد. PE او را در نقطه اوج پرش محاسبه کنید. (فرض کنید $h = 6\text{ m}$ و $g = 9.81\text{ m/s}^2$).

جواب

$$PE = mgh = (70\text{ kg}) \times (9.81\text{ m/s}^2) \times (6\text{ m}) = 4120.2 \text{ ژول}$$

۵-۶ بقاء انرژی مکانیکی

آزمایش‌ها مشخص کرده‌اند که مقدار انرژی در طبیعت حفظ می‌شود (ثابت می‌ماند).

در سیستم‌های مکانیکی، انرژی سیستم یا اجزاء سازنده سیستم معمولاً می‌تواند به شکل ذیل تعریف شود:

KE (به عنوان مثال در اشیائی که در حرکت هستند)

PE گرانشی (به عنوان مثال در اجرامی که بالا یا پائین می‌روند)

انرژی پتانسیل کششی (SE)، به عنوان مثال در کشش یا بهم فشردگی فنر)

در این قبیل سیستم‌های مکانیکی، اگر سیستم از محیط خارج مجزا شود، یعنی هیچ کاری در اثر منابع خارجی بر روی سیستم یا بوسیله سیستم انجام نشود، آنگاه جمع کل همه انرژی‌های مکانیکی در سیستم مقدار ثابتی است. به بیان دیگر، اگر t_1 زمان t_1 را نشان دهد و t_2 زمان بعدی، یعنی t_2 را نشان دهد، آنگاه:

$$KE_1 + PE_1 + SE_1 = KE_2 + PE_2 + SE_2$$

این معادله صرفاً بیان می‌کند که اگر KE به هر دلیلی کاهش یابد، آنگاه جمع PE گرانشی بعلاوه PE کششی باید به همان مقدار افزایش یابند.

هر سیستمی که بخشی از آن اجرامی است که بالا برده شده‌اند یا پائین آورده شده‌اند، اجرامی است که با تغییر سرعت حرکت می‌کنند، قرقه‌ها همراه با ریسمان است، و یا فنرهای فشرده شده یا کشیده شده است، می‌تواند در زمره‌ی چنین سیستم‌های مکانیکی باشد. با این حال، یک چنین سیستمی تا حدی خیالی است، و در عمل به آسانی نمی‌توان چیزی شبیه این سیستم را پیدا کرد. همانطور که در بخش ۵-۹ بحث شد یک سیستم واقعی ناگزیر درگیر اصطکاک خواهد بود. وجود اصطکاک مشخص می‌کند که مقداری از انرژی مکانیکی در سیستم به اشکال متفاوت انرژی، عمدتاً گرما و صدا تبدیل می‌شود که تاکنون در محاسبات لحاظ نشده‌اند. یک مثال از این سیستم‌های دارای اصطکاک قرقه‌ای است که دارای اصطکاک است؛ اگر ریسمان تحت کشش سبب شود چنین قرقه‌ای بچرخد، اصطکاک موجب تولید حرارت کمی در قرقه خواهد شد، که سبب افزایش در انرژی گرمایی (حرارت) چرخ و در نهایت کل سیستم می‌شود. این انرژی گرمایی در صفحه تعادل انرژی می‌تواند با اصطلاح انرژی گرمایی (*The*) به حساب آید. همچنین جالب است که بدانید افزایش دمای،

پیوست ۲ ۲۳۱

ΔT ، یک شیئی با جرم m می‌تواند به سادگی بر اساس مقدار انرژی گرمایی داده شده به آن و ظرفیت گرمایی ویژه، c ، ماده بدست آید:

$$\Delta T = \frac{ThE}{c \times m}$$

در اینجا ΔT = افزایش دما به درجه سلسیوس؛ c = ظرفیت گرمایی ویژه به ژول بر کیلوگرم؛ m = جرم به کیلوگرم؛ و ThE = انرژی گرمایی ذخیره شده در شیئی است.

■ مثال ۶-۶

یک اسکی باز بخش سرازری ابتدایی را با سرعت $3m/s$ شروع می‌کند. بعد از زمان کوتاهی هنگامی که او از نقطه‌ی داوری عبور می‌کند، سقوط او (کاهش ارتفاع) $15m$ بود. سرعت نهایی او هنگامی که از جلوی داورها عبور می‌کند، چقدر بود؟ فرض کنید که پائین آمدن او در بخش سرازری بدون اصطکاک بود.

جواب

با فرض بقاء انرژی مکانیکی، چون در این مورد هیچ انرژی کشش مکانیکی وجود ندارد:

$$KE_1 + PE_1 = KE_2 + PE_2$$

ما می‌توانیم برای سهولت فرض کنیم که PE در شروع حرکت ۰ است. PE بعد از $m-15$ سقوط، منفی خواهد بود. بنابراین اگر سرعت بعد از پائین آمدن v باشد، با حذف کلی m و دوباره نوشتن:

$$v^2 = (9) + (2 \times 15 \times 9.81) = 303.3$$

بنابراین:

$$v = 17.4m/s$$

■ مثال ۶-۷

یک بند باز با جرم 75kg از جایگاه سیم مرتفع با فاصله 22m بر روی ساختار فرود نرم با مواد ایمنی می‌افتد، در مکان فرود او تا فاصله 1m بالای مواد جهش می‌کند.

(الف) با فرض نبود مقاومت هوا، KE بند باز را درست قبل از برخورد او با مواد برای دفعه اول محاسبه کنید.

(ب) در مورد اتفاقی که زمان فرود بند باز بر روی مواد برای این انرژی می‌افتد و سبب تغییر شکل مواد می‌شود بحث کنید. آیا انتظار دارید که دمای مواد افزایش یابد؟ دلایل خود را شرح دهید.

(ج) وقتی بند باز با سرعت صفر در ارتفاع 1 متری بالای مواد قرار داد (جهش اول) برای انرژی موجود در سیستم چه اتفاقی می‌افتد؟

جواب

PE گرانشی آغازین بند باز عبارت است از:

$$mgh = (75\text{ kg}) \times (9.81\text{ m/s}^2) \times (22\text{ m}) = 16186.5\text{ J}$$

اگر اصطکاک هوا وجود نداشته باشد، این انرژی به اندازه KE او درست قبل از برخورد با مواد برای بار اول خواهد بود.

$$KE = 16186.5\text{ J} \text{ (الف)}$$

(ب) هنگامیکه بند باز بر روی مواد فرو می‌آید، مقداری از انرژی ممکن است به انرژی کشش مکانیکی تبدیل شود، به ویژه اگر ساختار مواد از فنرها یا مواد ارتجاعی تشکیل شده باشند. همچنین، باید انتظار داشت که مقداری از انرژی به انرژی گرمایی تبدیل شود، بنابراین دمای مواد افزایش می‌یابد. همچنین ممکن است مقداری انرژی صوتی تولید شود، طوری که هنگام برخورد بند باز با مواد صدایی شنیده شود.

(ج) اگر او به ارتفاع 1m برگردد، بدون تردید، مقداری از انرژی کشش مکانیکی، اگر چه خیلی کم، در مواد ذخیره شده بود.

منتطقی خواهد بود تا فرض کنیم PE گرانشی جدید:

$$(\text{= } 75 \text{ kg}) \times (9.81 \text{ m/s}^2) \times (1 \text{ m}) = 735.75 \text{ J}$$

برابر است با انرژی کشش که در مواد ذخیره شده بود. مشخص است که ظاهراً کسر بزرگی از PE ابتدایی "از دست رفته" است، ولی بیشتر این انرژی از دست رفته هنوز به شکل انرژی گرمایی یا گرما در مواد وجود دارد. تبدیل موثر دوباره انرژی گرمایی به KE و PE مشکل است. بنابراین طبیعی است به این انرژی به عنوان "از دست رفته" و غیر قابل وصول نگاه کنیم، اگر چه ممکن است مقداری از آن با در نظر گرفتن مراحل ویژه دوباره بدست آید.

۶-۶ توان

توان، سرعت انجام کار یا سرعت انتقال انرژی است. واحد توان ژول بر ثانیه (J/s) است، همچنین به عنوان وات (W) شناخته شده است.

$$\text{توان } (W) = \frac{\text{انرژی } (J)}{\text{زمان } (s)}$$

در سیستم قدیمی واحدها، انرژی با واحدهایی که کالری نامیده می‌شد اندازه‌گیری می‌شد و به عنوان مقدار گرمای مورد نیاز برای افزایش دمای ۱g آب به اندازه $1^\circ C$ تحت شرایط محدود معین، تعریف می‌شد. می‌توانید از بخش ۶-۱ بیاد آورید که هنگامی که نقطه اعمال نیروی ۱ نیوتنی ۱ متر جابه‌جا می‌شود، کار انجام شده ۱ ژول است. آزمایش‌ها نشان داده است که یک کالری معادل $4.186 J$ است. به دلیل اینکه انرژی بسیاری از غذاها هنوز به صورت "کالری یا کیلو کالری برای g-۱۰۰ پروتئین" بیان می‌شود، به خاطر سپردن این تبدیل مفید است.

■ مثال ۶-۸

شخصی در حال انجام تمرین اسکات جرم 180-kg را در زمان $2.1s$ به مسافت $1.2m$ بلند می‌کند، توان چقدر است؟

پیوست ۲ ۲۳۴

جواب

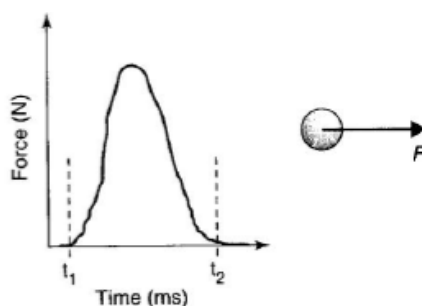
سوال خواستار سرعت انجام کار بر روی میله (هالتر) است. می‌توانیم فرض کنیم که سرعت انجام کار می‌تواند از تقسیم افزایش PE جرم بر زمان صرف شده بدست آید، بنابراین:

$$\text{توان} = \frac{(18.0 \text{ kg}) \times (9.81 \text{ m/s}^2) \times (1.2 \text{ m})}{(2.1 \text{ s})} = 100.9 \text{ W}$$

۶-۷ نیروهای ضربه‌ای و بر خوردها

۶-۷-۱ ارتباط ضربه - اندازه حرکت

نیروهایی که در فواصل زمانی خیلی کوتاه رخ می‌دهند، **نیروهای ضربه‌ای** نامیده می‌شوند. برای مثال آنها زمانی رخ می‌دهند که توپ فوتبال با پا زده می‌شود یا توپ گلف بوسیله‌ی چوب ضربه می‌خورد. این نیروها تنها زمانی اتفاق می‌افتد که دو جسم با هم تماس دارند؛ این نیروها معمولاً در واحدهای زمانی میلی ثانیه با تغییر شکل خیلی زیاد یا خیلی جزئی دو جسم در طول برخورد، اتفاق می‌افتند. اجازه دهید یک شیئی مثل تویی با جرم m را در نظر بگیریم که در معرض نیروی ضربه‌ای از قبیل ضربه‌ی باتوم قرار گرفته است (شکل ۶-۸). سرعت ابتدایی توپ 0 است، و نیرو در امتداد جهت چپ به راست اعمال می‌شود. می‌توانیم این جهت را محور x بنامیم.



شکل ۶-۸ یک توپ تحت تاثیر نیروی کوتاه-مدت (F)

از قبیل نیرویی که ممکن است در ضربه زدن با پا اتفاق افتد.

پیوست ۲ ۲۳۵

بدون تردید، این نیروی ضربه‌ای باعث حرکت توپ به راست خواهد شد. سوال این است که چه مقدار حرکت؟ بی‌تردید به دلیل اینکه نیرو از t_0 تا مقدار حداکثر افزایش می‌یابد و سپس دوباره به 0 برمی‌گردد، ثابت نیست. اگر ما فاصله بین t_1 و t_2 را به فواصل زمانی بسیار کوچک تقسیم کنیم، آنگاه می‌توانیم تقریب بزینم و بگوییم که نیرو در هر یک از این فواصل ثابت است. اگر بگوییم که نیروی F بین t و $t + \Delta t$ اعمال شده است، آنگاه با توجه به قانون دوم نیوتن می‌توانیم تغییر در سرعت توپ در طول این فاصله زمانی را محاسبه کنیم. اگر سرعت توپ در زمان t v باشد، پس شتاب توپ بوسیله‌ی تقسیم نیرو بر جرم تعیین می‌شود:

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{F}{m}$$

می‌توان از بخش ۵-۲ بیاد آورد که شتاب تغییرات سرعت تقسیم بر تغییرات زمان است. پس تغییر در سرعت عبارت است از:

$$\Delta v = \frac{F}{m} \Delta t$$

همچنین می‌توان به صورت معنی‌دار اجازه داد تا تعداد فواصل زمانی Δt به سمت بی‌نهایت میل کند به طوری که به یک فاصله یا دیفرانسیل بی‌نهایت کوچک، dt تبدیل شود. پس دیفرانسیل تغییر سرعت می‌شود:

$$dv = \frac{F}{m} dt$$

می‌خواهیم برای بدست آوردن اثر کلی نیرو، تغییر کلی سرعت را بوسیله‌ی عمل ریاضی انتگرال‌گیری (پیوست ۱) بین حدهای t_1 و t_2 اندازه‌گیری کنیم

$$v_2 - v_1 = \frac{1}{m} \int_{t_1}^{t_2} F dt$$

نتیجه این انتگرال‌گیری وابسته به بزرگی F و تغییرات آن همگام با t است. دوباره نویسی این معادله به روشنی می‌دهد:

پیوست ۲ ۲۳۶

$$mv_2 - mv_1 = \int_t^{t_1} F dt$$

انتگرال تابع نیرو نسبت به زمان بین t_1 و t_2 به عنوان ضربه تعریف می‌شود.

بنابراین:

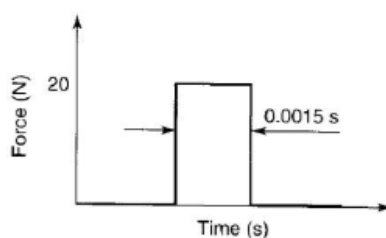
تغییر در اندازه حرکت توپ = ضربه

۶-۷-۲ حالت خاص نیروی ضربه‌ای ثابت

تویی که در حال اصابت به یک وسیله است را در نظر بگیرید که در فاصله زمانی بین t_1 و t_2 نیروی ثابتی را اعمال می‌کند. اجازه دهید تویی را در نظر گیریم که جرم آن 0.2kg است نیروی ضربه‌ای 20N به مدت 0.0015s بر آن اعمال می‌شود. این نیرو به صورت تابع زمان در شکل ۶-۹ نشان داده شده است. در عمل بعید است چنین نیروی ضربه‌ای ثابتی اتفاق افتد، اما هنگامی که با نیروهای سرو کار داریم که می‌توانند تقریباً ثابت در نظر گرفته شوند، در نظر گرفتن این حالت به عنوان یک تخمین، می‌تواند سودمند باشد. در این حالت:

$$mv_2 - mv_1 = \int_t^{t_1} F dt$$

بنابراین:



شکل ۶-۹. نمودار نیروی 20N اعمال شده به یک شیء برای 0.0015s .

پیوست ۲ ۲۳۷

$$0,2 \times (v_2 - v_1) = \int_0^{0,015} 20 dt = [20t]_0^{0,015}$$

$$= 20 \times 0,015 - 20 \times 0 = 0,3 kg.m.s^{-1}$$

این عدد برابر مساحت قرار گرفته بین منحنی $F-t$ و محور t است. (برای شرح انتگرال گیری پیوست ۱ را ببینید). نتیجه گیری می شود که تغییر سرعت $0,15m/s$ است، بنابراین اگر توپ از حالت سکون شروع به حرکت کرده باشد، سرعت نهایی آن $0,15m/s$ خواهد بود.

۶-۷-۳ برخورد در یک بعد

بسیاری از رخدادهای ورزشی متکی به برخوردهای بین اشیاء به عنوان عنصر اصلی حرکت هستند. برخوردهایی زیر را در نظر بگیرید:

توپ هاکی روی یخ یا چوب هاکی
توپ گلف و چوب گلف
دست و توپ در والیبال
توپ و باتوم در بیسبال
پا و توپ در فوتبال
توپ و توپ در بیلیارد

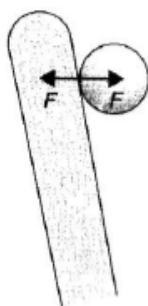
در هر یک از این موارد، نیرو بین اجزاء برخورد کننده تنها برای زمان کوتاهی وجود دارد و با توجه به قانون سوم نیوتن در دو شیء برابر و متضاد است. برای مثال شکل ۶-۱۰ و نیروهای عمل کننده بر باتوم و توپ را در طول برخورد در نظر بگیرید. بدلیل اینکه نیرو در توپ در جهت متضاد با نیرو در باتوم است، ضربه بر روی دو شیء یکسان ولی به بی تردید متضاد خواهد بود. بنابراین واضح است که تغییر در اندازه حرکت توپ، هم اندازه ی تغییر در اندازه حرکت باتوم خواهد بود، البته در جهت عکس. اگر علامت باتوم m و توپ m را به ترتیب برای جرم های با توپ و توپ اختصاص دهیم، آنگاه می توان گفت:

$$m_{\text{باتوم}}(v_{\text{باتوم}}(2) - v_{\text{باتوم}}(1)) = -m_{\text{توپ}}(v_{\text{توپ}}(2) - v_{\text{توپ}}(1)) = \int_t^{t_1} F dt$$

در اینجا $v_{\text{باتوم}}(1)$ و $v_{\text{باتوم}}(2)$ به ترتیب سرعت‌های ابتدایی و نهایی باتوم هستند و $v_{\text{توپ}}(1)$ و $v_{\text{توپ}}(2)$ سرعت‌های ابتدایی و نهایی توپ هستند.

۶-۷-۴ بقاء اندازه حرکت خطی

از بحث بخش ۶-۷-۳ نتیجه‌گیری می‌شود که اندازه حرکت خطی حفظ می‌شود. در مثال برخورد بین باتوم و توپ کاهش در اندازه حرکت باتوم از نظر بزرگی یکسان با افزایش در اندازه حرکت توپ است. بنابراین، اندازه حرکت کلی (یعنی اندازه حرکت توپ و باتوم با هم) تغییر نیافته است. به این موضوع می‌توان به عنوان یک قانون کلی نگاه کرد که دقیقاً به همان اندازه‌ی قانون دوم نیوتن که از آن استنتاج شده است، معتبر



شکل ۶-۱۰. دو جسم در برخورد (مانند باتوم و توپ) و تحت تاثیر نیروهای مساوی و متضاد (F) همان گونه که بوسیله‌ی قانون سوم نیوتن تعیین شده است.

است. با این حال، این قانون باید به احتیاط به کار برده شود، چون ما باید فهم کاملی داشته باشیم که به کدام "سیستم" اشاره می‌شود. در مورد مثال در بخش ۶-۷-۳ باتوم و توپ مجزا از چیزهای دیگر در نظر گرفته شده‌اند طوری که هیچ نیروی دیگری در نظر گرفته نشده است. در شرایط واقعی، شاید دست نگه دارنده باتوم، نیروهای اضافی را اعمال کند که در این تحلیل محاسبه نشده است.

پیوست ۲ ۲۳۹

اجازه دهید برای تقویت این نکته درباره‌ی بقاء اندازه حرکت، مورد ساده دو توپ بلیارد را در نظر بگیریم که روی میز با هم برخورد می‌کنند (شکل ۶-۱۱). اگر فرض کنیم که کیوبال با سرعت 2 m/s از چپ به راست به سمت توپ هدف ساکن پیش رانده می‌شود، در نتیجه ممکن است هر دو توپ بلیارد پس از برخورد حرکت کنند. در این مورد، انتظار داریم بقاء اندازه حرکت اعمال شود، بنابراین:

اندازه حرکت کل بعد از برخورد = اندازه حرکت کل قبل از برخورد

اگر اندازه حرکت به سمت راست را مثبت فرض کنیم:

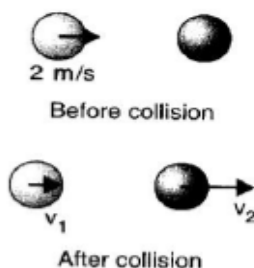
$$2m + 0 = 2m$$

اینجا m جرم توپ‌های بلیارد است.

$$2m = v_2 m + v_1 m$$

$$2m = v_2 m + m v_1$$

$$2 = v_2 + v_1$$



شکل ۶-۱۱. برخورد بین دو توپ بلیارد.

هر ترکیبی از v_2 و v_1 که این نتیجه را ارائه دهد، قابل قبول است، یعنی بقاء اندازه حرکت اعمال می‌شود. برای مثال $v_1 = 0.5$ و $v_2 = 1.5$ یا $v_1 = 0$ و $v_2 = 2$ ، یا حتی $v_1 = -1$ و $v_2 = 3$. نتیجه‌ی واقعی بوسیله‌ی بقاء انرژی یا به بیان دیگر (بخش ۶-۵ را ببینید) با برخورد به اضافه عوامل دیگری از قبیل اینکه چه چرخشی به کیوبال اعمال شده است، تعیین خواهد شد.

۶-۷-۵ برخوردهای ارتجاعی و غیر ارتجاعی

در بخش ۶-۵ به این نکته اشاره شد که اغلب می‌توان گفت انرژی مکانیکی در داخل سیستم معین ثابت است. در برخی سیستم‌ها، این به معنی تبدیل انرژی بین اشکال مختلف جنبشی، پتانسیل و کششی انرژی است. هنگام برخورد بین دو یا چند شیء، تمایز بین برخوردهایی که KE ثابت باقی می‌ماند و برخوردهایی که در آن ثابت باقی نمی‌ماند امکان پذیر است. برخوردهایی که در آن KE ثابت باقی می‌ماند به عنوان برخوردهای ارتجاعی شناخته شده‌اند، در این نوع برخوردهای KE کلی سیستم بعد از برخورد هم اندازه‌ی KE کلی قبل از برخورد است. ساده‌ترین مثال این نوع برخورد احتمالاً بالا پریدن توپ لاستیکی بر روی سطح صلب از قبیل بتون است. اگر توپ از ارتفاع h رها شود و بعد از بالا پریدن به همان ارتفاع برگردد، بی‌تردید برخورد با کف ارتجاعی است. سرعت توپ درست قبل از پرش عبارت است از:

$$v_1 = \sqrt{2gh}$$

و KE متناسب آن عبارت است از:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = mgh$$

بی‌تردید برای یک پرش "ارتجاعی"، بلافاصله بعد از پرش و بلافاصله قبل از پرش سرعت‌ها با هم برابر هستند، با این تفاوت که جهت معکوس است. می‌توانیم ضریب ارتجاعی، e ، را چنین تعریف کنیم: ضریب ارتجاعی برابر است با کسر بردارهای سرعت توپ درست بعد از برخورد (v_2) و درست قبل از برخورد (v_1):

$$e = \frac{v_2}{v_1}$$

برای یک برخورد ارتجاعی:

$$v_1 = v_2 \text{ و } e = 1$$

علاوه بر این، توپ‌ها و سطوح متفاوت، پرش‌های متفاوت و از این رو مقادیر متفاوت ضریب e را نشان می‌دهند. برای بسیاری از موارد واقعی، مقدار e کمتر از ۱ خواهد بود، و برخوردها (یا پرش) غیر ارتجاعی خواهند بود. یک مثال از یک پرش غیر ارتجاعی، توپی است که بر روی کف نرم مانند بتونه، رها می‌شود. در این مورد، ممکن است پرش خیلی کم باشد، و ضریب ارتجاعی نزدیک به ۰ خواهد بود. مقدار e در حدود $0 \leq e \leq 1$ خواهد بود که $e = 0$ متناظر با برخورد کاملاً غیر ارتجاعی (یا تغییر پذیر) و $e = 1$ متناظر با برخورد کاملاً ارتجاعی است.

■ مثال ۶-۹

شاید مثال مناسب برای شروع، مثال دو توپ بیلیارد باشد که در روی میز بیلیارد با هم برخورد می‌کنند. اجازه دهید در ابتدا فرض کنیم که در برخورد، هر دوی اندازه حرکت خطی و KE ثابت باقی می‌مانند. در ابتدا، کیوبال با سرعت v_1 حرکت می‌کند، و توپ هدف در سکون است. اجازه دهید فرض کنیم که سرعت‌های کیوبال و توپ هدف بعد از برخورد به ترتیب v_2 و v_3 هستند. وضعیت‌های قبل و بعد از برخورد در شکل ۶-۱۲ نشان داده شده‌اند. سرعت‌های دو توپ بعد از برخورد چقدر است؟

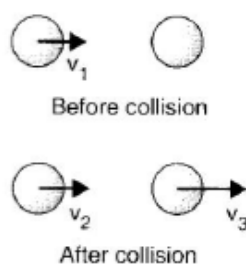
تحلیل

بقا اندازه حرکت خطی عبارت است از:

$$mv_1 = mv_2 + mv_3 \quad (1)$$

بقا KE (کاملاً ارتجاعی) عبارت است از:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}mv_3^2 \quad (2)$$



شکل ۶-۱۲. برخورد بین دو توپ بلیارد با فرض اینکه هر دوی اندازه حرکت خطی و انرژی ثابت باقی می‌مانند.

با تقسیم (۱) بر m می‌دهد:

$$v_1 = v_2 + v_3 \quad (1^*)$$

با تقسیم (۲) بر $\frac{1}{4}m$ می‌دهد:

$$v_1^2 = v_2^2 + v_3^2 \quad (2^*)$$

با جایگزینی v_1 از (۱*) در (۲*) می‌دهد:

$$(v_2 + v_3)^2 = v_2^2 + v_3^2$$

بنابراین:

$$v_2^2 + v_3^2 + 2v_2 v_3 = v_2^2 + v_3^2$$

می‌رساند که:

$$2v_2 v_3 = 0$$

این معادله تنها در صورتی می‌تواند درست باشد که $v_2 = 0$ یا $v_3 = 0$.

بی‌تردید، این تنها زمانی معنی‌دار خواهد بود که $v_2 = 0$ و $v_3 = v_1$. به بیان دیگر،

کیوبال متوقف شده است، و سرعت v_1 به توپ هدف منتقل شده است.

■ مثال ۶-۱۰

اجازه دهید فرض کنیم دو توپ بلیارد به روش مشابه‌ای با هم برخورد می‌کنند: شاخ

پیوست ۲ ۲۴۳

به شاخ و با سکون ابتدائی توپ هدف. می توان در این زمان یک برخورد غیر ارتجاعی را بین توپ‌ها در نظر گرفت (شکل ۶-۱۳).

$v_1 =$ سرعت نسبی قبل از برخورد

$(v_3 - v_2) =$ سرعت نسبی بعد از برخورد

فرض می کنیم که اکنون ضریب ارتجاعی e کوچکتر از ۱ است، داریم:

$$ev_1 = v_3 - v_2 \quad (3)$$

در صورت بقاء اندازه حرکت خطی هنوز هم داریم:

$$mv_1 = mv_2 + mv_3 \quad (4)$$

تقسیم (۴) بر m می دهد:

$$v_1 = v_2 + v_3 \quad (4^*)$$

دوباره نویسی (۳) برای v_1 می دهد:

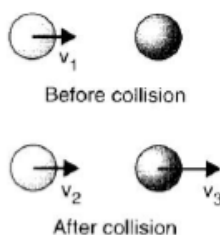
$$v_1 = \frac{1}{e}(v_3 - v_2) \quad (3^*)$$

با جایگزینی v_1 بر اساس v_2 و v_3 نتیجه می شود:

$$\frac{1}{e}(v_3 - v_2) = v_2 + v_3$$

بنابراین:

$$\frac{v_2}{v_3} = \frac{1 - e}{1 + e}$$



شکل ۶-۱۳ یک برخورد غیر ارتجاعی بین دو توپ بلیارد.

همچنین می‌توان نشان داد که:

$$v_2 = \frac{(1 - e)}{2} v_1$$

و

$$v_2 = \frac{(1 + e)}{2} v_1$$

مشخصاً اگر $e = 1$ ، $v_2 = v_1$ ، $v_2 = 0$ ، ما با وضعیت کامل ارتجاعی سر و کار داریم. اگر برخورد غیرارتجاعی باشد، مقداری از KE از دست می‌رود که با ضریب ارتجاعی تعیین می‌شود. در این وضعیت، KE کل بعد از برخورد عبارت است از:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 &= \frac{1}{2}m\left(\frac{1 - e}{2}\right)^2 v_1^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{1 + e}{2}\right)^2 v_1^2 \\ &= \frac{mv_1^2}{2} \left(\frac{1 + e^2}{2}\right) \end{aligned}$$

اندازه‌گیری ضریب ارتجاعی توپ توسط سرعت‌های برخورد و برگشت از سطح فولادی

مورد پژوهی ۱-۶

یک توپ صلب با ترکیب پلیمری سفت و جرم 0.25kg بعد از برخورد به صفحه فولادی افقی و صاف که به محکمی به زمین متصل شده است بالا می‌پرد. سرعت‌های اولیه و نهایی توپ با تحلیل داده‌های مختصات-زمان که بوسیله‌ی روش‌های اندازه‌گیری نوری-الکترونیکی حرکت بدست آمده است، اندازه‌گیری شدند. برای راحتی، می‌توان فرض کرد که توپ در صفحه‌ی $x-z$ در حال حرکت است، و این در حالی است که محور z به صورت عمودی رو به بالا است و محور x با سطح صفحه فولادی

پیوست ۲ ۲۴۵

در یک راستا قرار دارد، طوری که نقاط x در جهت حرکت افقی توپ هستند. مولفه-های سرعت نهایی و ابتدایی در جدول ۶-۱ نشان داده شده‌اند. ضریب ارتجاعی می‌تواند از کسر سرعت‌های برخورد و برگشت در جهت عمودی محاسبه شوند:

$$e = \frac{4,7986}{9,3614} = 0,5126$$

کسر سرعت‌های افقی تقریباً مقدار یکسانی را ارائه می‌دهد.

جدول ۶-۱ سرعت‌های افقی و عمودی توپ قبل و بعد از پرش		
زمان، $t(s)$	سرعت عمودی $v_z (m/s)$	سرعت افقی $v_x (m/s)$
قبل از پرش	-۹,۳۶۱۴	-۶,۷۲۱۸
بعد از پرش	۴,۷۹۸۶	-۳,۴۱۱۷

KE قبل از پرش عبارت است از:

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \times (0,25) \times (11,525)^2 = 16,6J$$

و بعد از پرش KE کاهش می‌یابد تا

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \times (0,25) \times (5,888)^2 = 4,333J$$

مقدار نهایی T ، e برابر مقدار ابتدایی است.

برای مورد توپی که در کف سفت بالا می‌پرد، ضریب ارتجاعی به راحتی از ارتفاع‌های سقوط و برگشت محاسبه می‌شود. اگر ارتفاعی که توپ از آن رها می‌شود h_d باشد و ارتفاعی که تا آن بالا می‌پرد h_b باشد، آنگاه:

$$e = \sqrt{\frac{h_b}{h_d}}$$

ضریب وابسته به توپ و سطح است. جدول ۶-۲ برخی ضریب‌های ارتجاعی برای توپ‌های که از ارتفاع $6ft$ ($1,83m$) بر روی کف چوبی سخت رها شده‌اند را نشان می‌دهد. جدول ۶-۳ برخی ضرایب ارتجاعی برای توپ والیبال که از ارتفاع $6ft$ ($1,83m$) بر روی سطوح مختلف رها شده است را نشان می‌دهد.

جدول ۲-۶ پرش و ضریب ارتجاعی انواع مختلف توپ‌ها با ارتفاع سقوط ۱٫۸۳m		
نوع توپ	ارتفاع پرش (m)	ضریب ارتجاعی
"سوپر بال"	۱٫۴۴	۰٫۸۹
توپ بسکتبال، فوتبال یا والیبال	۱٫۰۶	۰٫۷۶
توپ تنیس: قدیمی	۰٫۹۱	۰٫۷۱
توپ تنیس: جدید	۰٫۸۱	۰٫۶۷
توپ‌هاکی	۰٫۴۶	۰٫۵۰
توپ کریکت	۰٫۱۸	۰٫۳۱

جدول ۳-۶ ارتفاع پرش و ضرایب ارتجاعی برای توپ والیبال رها شده از ارتفاع سقوط ۱٫۸۳m بر روی سطوح مختلف

سطح	ارتفاع پرش (m)	ضریب ارتجاعی
"proturf"	۱٫۰۵	۰٫۷۶
چوب	۱٫۰۳	۰٫۷۵
فولاد	۱٫۰۲	۰٫۷۵
بتن	۱٫۰۰	۰٫۷۴
پا دری (ضخامت ۲٫۵cm)	۰٫۸۳	۰٫۶۷
ماسه	۰٫۶۷	۰٫۶۱
چمن	۰٫۳۴	۰٫۴۳
تشک فرود ژیمناستیک	۰٫۳۳	۰٫۴۲

. همچنین همانطور که در جدول ۴-۶ نشان داده شده است، دما بر روی ضرایب ارتجاعی موثر است.

جدول ۴-۶ ضرایب ارتجاعی برای توپ لاستیکی سفت و توپ گلف تحت شرایط دمایی متفاوت

توپ	سرد (یک ساعت در یخچال)	عادی	گرم (۱۵ دقیقه در دمای ۲۲۵°)
توپ لاستیکی	۰٫۵۷	۰٫۷۳	۰٫۸۰
توپ گلف	۰٫۶۷	۰٫۸۰	۰٫۸۴

۶-۷-۶ برخورد‌های مورب

در بسیاری از ورزش‌های توپی علاوه بر برخورد‌های قائم الزاویه یا مستقیم، برخورد‌های مورب نیز نقش مهمی ایفا می‌کنند. تجزیه سرعت به دو مولفه، یکی موازی با سطح و یکی عمود بر سطح، امکان پذیر است. در مورد توپی که از کف بالا می‌پرد، می‌توانیم (سرعت را) به مولفه‌های افقی و عمودی تجزیه کنیم (شکل ۶-۱۴).

$u =$ سرعت قبل از برخورد

$v =$ سرعت بعد از برخورد

$u_h =$ مولفه افقی سرعت قبل از برخورد

$u_v =$ مولفه‌های عمودی سرعت قبل از برخورد

$v_h =$ مولفه افقی سرعت بعد از برخورد

$v_v =$ مولفه عمودی سرعت بعد از برخورد

استنتاج می‌شود که ضریب ارتجاعی عبارت است از:

$$e = -\frac{v_v}{u_v}$$

اگر توپ و کف کاملاً سیقلی باشند:

$$u_h = v_h$$

اما اصطکاک v_h را کاهش خواهد داد. بنابراین برای سطوح خشن، u_h از v_h بزرگتر است. شکل ۶-۱۵ نشان می‌دهد که برای سطح خشن، زاویه‌ی برخورد برابر با زاویه برگشت نیست. در حقیقت دو زاویه تنها زمانی مساوی خواهند بود که اثر اصطکاک بر سرعت افقی کاملاً با اثر ارتجاعی بر سرعت عمودی برابر شود.

۶-۷-۷ بازی‌های باتوم - و - توپ و اثر حالت ارتجاعی

در بازی‌های باتوم - و - توپ، سرعت توپ بعد از برخورد می‌تواند بوسیله‌ی عوامل زیر افزایش یابد:

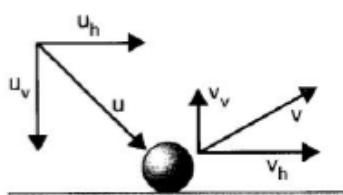
۱. افزایش جرم باتوم
۲. کاهش جرم توپ
۳. افزایش سرعت اولیه باتوم
۴. افزایش سرعت اولیه توپ
۵. افزایش زاویه برخورد
۶. افزایش مقدار ضریب ارتجاعی

اثر چرخش در پرش توپ تغییر دادن مولفه‌ی افقی سرعت ابتدایی است. در نتیجه چرخش، اثرات اصطکاک را تغییر می‌دهد. برای مثال، اگر توپ دارای پیچ عقب باشد،

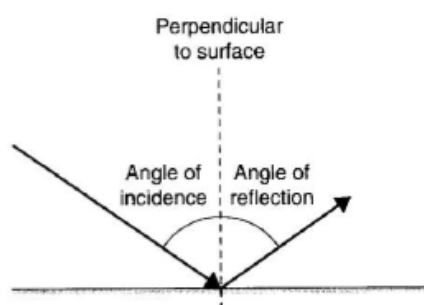
پیوست ۲ ۲۴۸

اثرات اصطکاک افزایش می‌یابد (شکل ۶-۱۶). اما اگر توپ داری پیچ رویی باشد، اثرات اصطکاک کاهش می‌یابد.

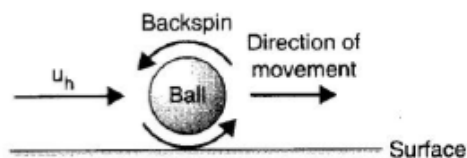
توپ تنیسی را در نظر بگیرید که (a) بدون چرخش، (b) با پیچ رویی، و (c) پیچ عقب پرتاب می‌شود. خط سیرها بعد از بالا پریدن از سطح مانند آنهایی خواهد بود که در شکل ۶-۱۹ نشان داده شده است. در حالیکه توپ با پیچ رو نسبت به توپ بدون چرخش به طور قابل ملاحظه‌ای دارای برد بیشتری است، برد توپی که به عقب می‌چرخد کاهش یافته است.



شکل ۶-۱۴. یک برخورد مورب.

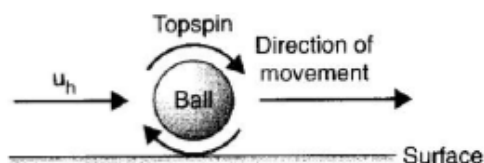


شکل ۶-۱۵. زاویه برخورد و برگشت.

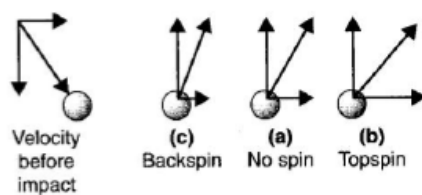


شکل ۶-۱۶. برخورد و بالا پریدن توپ از سطح با پیچ عقب.

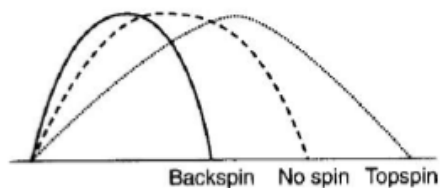
پیوست ۲ ۲۴۹



شکل ۶-۱۷. برخورد و بالا پریدن توپ از سطح با پیچ رو.



شکل ۶-۱۸. مولفه‌های سرعت قبل و بعد از برخورد برای توپ (a) بدون پیچ، (b) با پیچ رو و (c) با پیچ عقب.



شکل ۶-۱۹. خط مسیره‌های ممکن برای توپ تنیس بدون چرخش، با پیچ عقب، و پیچ رو.

۸-۶ نوسان‌ها

۶-۸-۱ فنرها و قانون هوک

فنرها و مواد قابل ارتجاعی برای ذخیره انرژی کشش ارتجاعی مفید هستند. یک مثال در این مورد استفاده از نیزه‌های ارتجاعی در پرش با نیزه است که نیروی کشش را داخل نیزه ذخیره می‌کند، و به افزایش ارتفاع دست یافتنی بوسیله‌ی پرش کننده کمک می‌کند. اجازه دهید فنر ماریپیچی را در نظر بگیریم (شکل ۶-۲۰)، که شاید ساده ترین و

پیوست ۲ ۲۵۰

بهترین مورد شناخته شده است. قانون بنیادی تعیین کننده رفتار فنرها قانون هوک است، که انبساط (افزایش طول) فنر نسبت به نیروی اعمال شده را شرح می‌دهد. **قانون هوک** بیان می‌کند که انبساط، x با نیروی اعمال شده، f متناسب است، مشروط به اینکه افزایش طول خیلی بزرگ نباشد (فراتر از حد ارتجاعی فنر):

$$F = -kx$$

ثابت k به عنوان **ثابت فنر** یا **سختی** فنر شناخته شده است و دارای واحدهای N/m است. انبساط فنر عبارت است از:

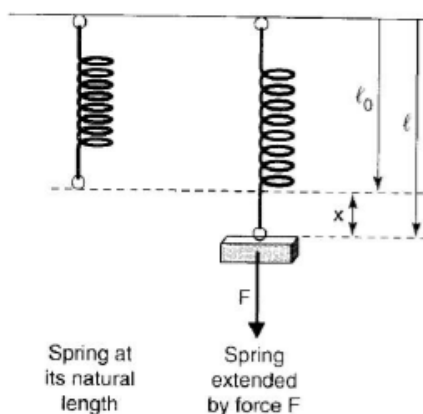
$$x = l - l_0$$

و متناسب با نیروی اعمال شده است. بی‌تردید نیرویی که در طول انبساط فنر اعمال می‌شود، کار انجام می‌دهد، و این انرژی به صورت انرژی کششی در فنر ذخیره می‌شود. واضح است که نیروی فنر در طول انبساط ثابت نیست ولی می‌توان آن را توسط قانون هوک تعیین کرد (شکل ۶-۲۱).

کل کار انجام شده می‌تواند از سطح زیر نمودار $F-x$ استخراج شود، بنابراین:

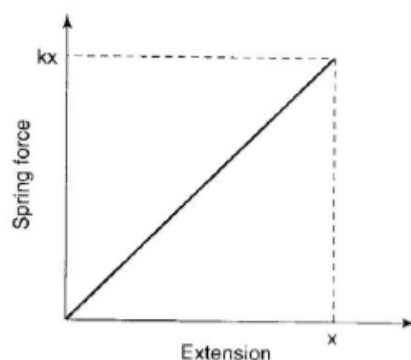
$$\text{کار انجام شده} = \frac{1}{2} \times (x) \times (kx)$$

این (کار انجام شده) می‌تواند به عنوان انرژی کشش ارتجاعی (SE) در نظر گرفته شود که اکنون در فنر ذخیره شده است. بنابراین:



شکل ۶-۲۰. فنر در معرض نیروی کشش (F) قرار می‌گیرد و به میزان (x) منبسط می‌شود.

پیوست ۲ ۲۵۱



شکل ۶-۲۱. ارتباط مستقیم الخط بین نیروی فنر و انبساط.

$$SE = \frac{1}{2} kx^2$$

می‌تواند به این صورت نیز در نظر گرفته شود:

انبساط \times میانگین نیروی فنر

$$\left(\frac{1}{2}(-kx)\right) \times (x) = \frac{1}{2} kx^2$$

برخی از فنرها برای کار در هنگام فشرده شدن طراحی شده‌اند، اما اصول یکسانی را به کار می‌برند.

۶-۸-۲ حرکت نوسانی

جرم آویزان به فنر تحت نیروی ذخیره‌ای است و اگر انبساط بزرگتر از حد ارتجاعی فنر نباشد، این نیرو متناسب با جابه‌جایی است. اگر چنین جرمی به صورت عمودی جابه‌جا شده و سپس رها شود، جرم نوسان خواهد کرد و مشروط به داشتن شرایط معین، حرکت موزون ساده‌ای (SHW) را به نمایش خواهد گذاشت. احتمالاً برای دانشجویان مکانیک و تحلیل حرکتی شناخت حرکت نوسانی دانش خوبی است، بدلیل اینکه حرکت نوسانی در اساس مکانیک بسیاری از ورزش‌ها است و در انواع مختلف

پیوست ۲ ۲۵۲

تجهیزات ورزشی به صورت ویژه‌ای به کار رفته است. برخی موارد که ممکن است در موقعیت‌های ورزشی اتفاق افتد، عبارتند از:

لرزش‌ها و نوسان‌های راکت‌ها (مانند، اسکواش، تنیس)

نوسان‌های پرده‌ها (مانند ترامپولین‌ها)

پاسخ مفاصل به کشش‌ها و فشارهای ناگهانی (مثل لیگامنت‌ها و مفصل زانو)

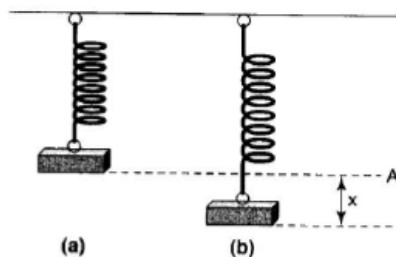
عکس‌العمل چوب‌های گلف به برخورد با توپ‌های گلف

اگر چه شرح تفصیلی هر یک از این مثال‌ها پیچیده و فراتر از حوزه‌ی این کتاب است، نگاه به مثال ساده‌تر به منظور شرح طبیعت کلی نوسان‌ها آموزنده است. اجازه دهید جرم m که از یک فنر با ثابت فنر، K ، آویزان شده است را در نظر بگیریم. شکل ۶-۲۲ (a) نشان می‌دهد که جرم m به صورت ساکن آویزان شده و در تعادل است و شکل ۶-۲۲ (b) نشان می‌دهد که جرم بوسیله‌ی کشش یا فشار به اندازه‌ی اضافی x جابه‌جا شده است. استفاده از محورهای مختصات برای توصیف حرکت جرم مناسب است. در این مورد اجازه دهید مبدأ در سطح A باشد و محور x به صورت عمودی رو به پایین باشد. برای جابه‌جایی کلی x خالص نیروی ذخیره شده در جرم m عبارت است از:

$$F = -kx$$

بنابراین با توجه به قانون دوم نیوتن، شتاب جرم عبارت است از:

$$a = F/m = F = -kx/m$$



شکل ۶-۲۲. (a) جرم m که در سطح A به صورت ساکن و در تعادل آویزان شده است. (b) جرم با نیروی خارجی به اندازه (x) جابه‌جا می‌شود؛ زمانی که جرم رها شود، تا سطح معین A نوسان خواهد کرد.

پیوست ۲ ۲۵۳

علامت منفی نشان می‌دهد که شتاب جرم رو به بالا است. بر اساس معادلات دیفرانسیلی، شتاب عبارت است از $\frac{dx^2}{dt^2}$ به طوری که اکنون داریم:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{kx}{m}$$

توجه کنید که d^2x/dt^2 مشتق سرعت dx/dt است؛ برای اطلاعات بیشتر در مورد مشتق‌گیری پیوست ۱ را ببینید. اگر ما $\omega^2 = k/m$ قرار دهیم این معادله می‌شود:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

که دارای راه‌حلی به شکل زیر است:

$$x = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) = A$$

اگر فرض کنیم که در $t = 0$ $x = X$ است، این ثابت‌های A و B را تعیین خواهد کرد. بنابراین:

$$X = A \cos(0) + B \sin(0) = A$$

بنابراین مقدار A برابر x است. همچنین بوسیله‌ی آزمایش مشخص شده است که جرم بعد از زمان T ثانیه به $x = X$ بر می‌گردد. بنابراین مقدار B صفر است. راه حل برای x عبارت است از:

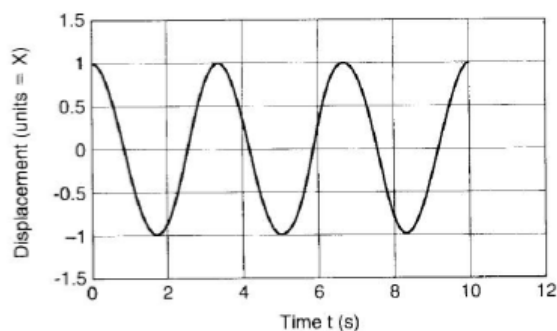
$$x = X \cos(\omega t)$$

در اینجا:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

نمودار این راه حل در شکل ۶-۲۳ نشان داده شده است، در اینجا محور عمودی با واحدهای X (جابه‌جایی اولیه) علامت گذاری شده است و محور افقی زمان بر ثانیه است. برای اهداف این شکل، مقدار ω برابر 0.6π در نظر گرفته شده است. می‌توان دید که تابع بعد از زمان 3.33 ثانیه تکرار می‌شود. این زمان به زمان تناوبی T

پیوست ۲ ۲۵۴



شکل ۶-۲۳. جابه‌جایی جرم دستخوش نوسان‌های موزن ساده با دوره زمانی s ۳.۳۳. این نوسان در نبود هیچ نیروی اصطکاکی برای همیشه ادامه خواهد داشت.

معروف است و بوسیله‌ی $\frac{2\pi}{\omega}$ تعیین می‌شود. مقدار ω وابسته به مقادیر ثابت فنر، k و جرم، m است. بسامد (تناوب) نوسان‌ها $f = 1/T$ است. این نوع حرکت اغلب به عنوان حرکت موزون ساده (SHM) بیان می‌شود.

همچنین نوشتن معادله برای سرعت جرم به عنوان تابع زمان، تحت همان شرایط ابتدایی که ما قبلاً استفاده کردیم به صورت ذیل امکان پذیر است:

$$v = -\omega X \sin(\omega t)$$

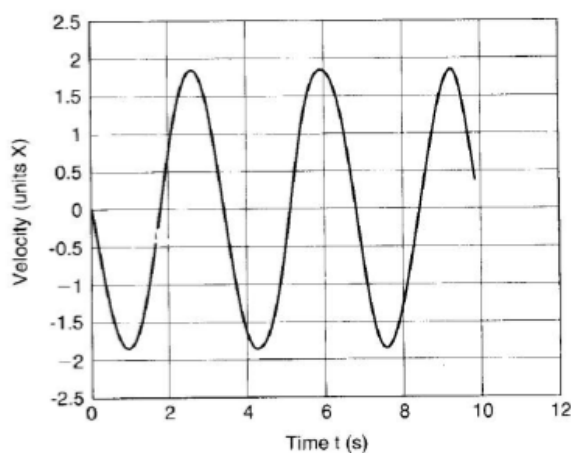
این تابع در شکل ۶-۲۴ به صورت نمودار درآمده و برای مقایسه مستقیماً زیر نمودار جابه‌جایی شکل ۶-۲۳ رسم شده است. می‌توان دید زمانی که جابه‌جایی حداکثر است، سرعت صفر است. نیز زمانی که جابه‌جایی صفر است، سرعت به صورت منفی یا مثبت حداکثر است. همچنین در هر اندازه از جابه‌جایی، x نوشتن معادله برای سرعت جرم نوسان کننده امکان پذیر است:

$$v = \omega \sqrt{X^2 - x^2}$$

همچنین KE جرم نوسان کننده می‌تواند به دو روش نوشته شود، یا به عنوان تابع زمان، t ، یا به عنوان تابع جابه‌جایی، x :

$$KE = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 X^2 \sin^2(\omega t)$$

پیوست ۲ ۲۵۵



شکل ۶-۲۴. سرعت در برابر زمان برای جرم دستخوش حرکت موزون ساده. در این شکل جرم، ثابت فنر، و شرایط آغازین با شکل ۶-۲۳ یکسان است.

یا

$$KE = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv^2 (X^2 - x^2)$$

PE گرانشی جرم نوسان کننده به سادگی به این صورت می تواند نوشته شود:

$$PE = -mgx$$

سطح A را به عنوان سطح مرجع برای اندازه گیری PE در نظر می گیریم. انرژی کشش ارتجاعی در فنر عبارت است از:

$$SE = \frac{1}{2}kx^2$$

همانطور که در بخش ۵-۶ دیده شد در سیستمی که از محیط مجزا شده است انرژی مکانیکی ثابت باقی می ماند، به طوری که برای جرم نوسان کننده در فنر در نبود اصطکاک یا انواع دیگر اتلاف انرژی، می توانیم بنویسیم که:

$$KE + PE + SE = \text{مقدار ثابت}$$

یا

$$\frac{1}{2}mv^2(x^2 - x_0^2) - mgx + \frac{1}{2}kx^2 = \text{مقدار ثابت}$$

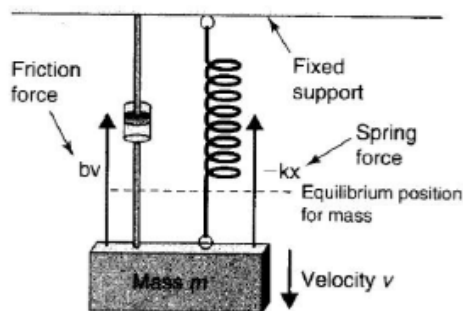
۳-۸-۶ نوسان‌های تضعیف شده

همیشه در سیستم‌های واقعی اصطکاک در تعیین زمانی که نوسان ادامه می‌یابد نقش دارد. بعضی وقت‌ها برای تعدیل رفتار دینامیکی سیستم نوسانی، اصطکاک به صورت عمدی اعمال می‌شود. در این موارد معمولاً اصطکاک به عنوان نیروی تضعیف کننده (کاهنده) ذکر می‌شود.

شکل ۶-۲۵ فنر نگهدارنده جرم را نشان می‌دهد که تحت تاثیر تضعیف کننده است. با به کار بردن قانون دوم نیوتن برای شتاب خالص جرم:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{m} \left(-b \frac{dx}{dt} - kx \right)$$

در اینجا b ضریب اصطکاک است. معادله‌ی فوق نشان می‌دهد که نیروی اصطکاک متناسب با سرعت جرم است. بنابراین با بازآرایی:



شکل ۶-۲۵. یک سیستم فنر و جرم نوسان کننده که تحت تاثیر تضعیف کننده قرار دارد. تضعیف کننده به صورت "نیروی اصطکاک bv " نشان داده شده است. نیروی فنر به صورت $-kx$ نشان داده شده است. فرض شده است که جرم با جابه‌جایی (x) که از وضعیت تعادل اندازه‌گیری شده است حرکت می‌کند.

پیوست ۲ ۲۵۷

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0$$

بر اساس بزرگی نسبی k/m و b/m این معادله سه نوع جواب خواهد داشت:

الف) اگر، $\left[\left(\frac{b}{m} \right)^2 - \frac{4k}{m} \right] < 0$ ، آنگاه جواب معادله عبارت است از روش:

$$x = e^{-bt/m} [A \cos(\omega't) + B \sin(\omega't)]$$

در اینجا:

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$$

این یک نوسان از نوع - سینوسی کامل است، اما دارای میدان نوسانی است که به صورت نمایی (توانی) به صفر کاهش می‌یابد. این را تضعیف کننده‌ی خفیف یا کم تضعیف کننده^۱ می‌نامند.

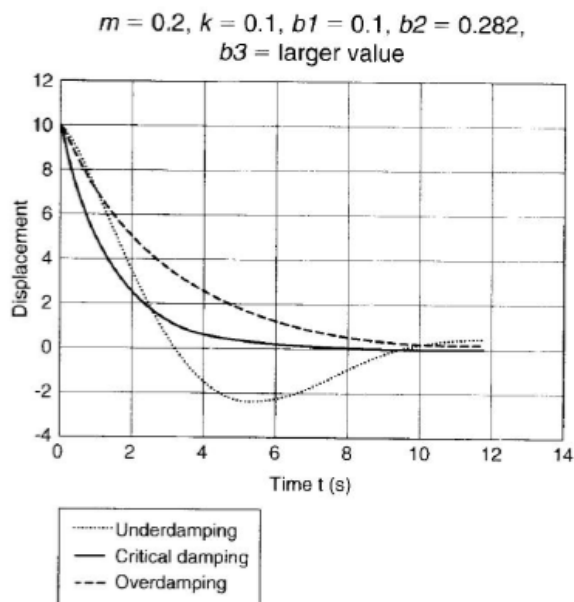
ب) اگر $\left[\left(\frac{b}{m} \right)^2 - \frac{4k}{m} \right] = 0$ ، آنگاه جواب، خاصیت بازگشت به جابه‌جایی صفر را در کوتاه‌ترین زمان ممکن و بدون نوسان نشان می‌دهد. این تضعیف کننده‌ی شدید^۲ نامیده می‌شود.

ج) اگر $\left[\left(\frac{b}{m} \right)^2 - \frac{4k}{m} \right] > 0$ ، آنگاه جواب، خاصیت بازگشت به جابه‌جایی صفر را در یک زمان بزرگتر نسبت به مورد (ب) و بدون نوسان نشان می‌دهد. هنگامی که $b^2 \gg 4mk$ ، وضعیت به عنوان فوق تضعیف کننده^۳ توصیف می‌شود.

-
۱. underdamping
 ۲. Criticaldamping
 ۳. overdamping

پیوست ۲ ۲۵۸

در مورد بیشتر نوسانگرها که در میان هوا به عنوان محیط تضعیف کننده نوسان می‌کنند، کم تضعیف کننده است که قبل از توقف کامل نوسانگر، چندین نوسان (یا تعداد زیادی نوسان) اتفاق می‌افتد. زمان در نظر گرفته شده برای از بین رفتن نوسانها



می‌تواند از زمان $t_1 = 2m/b$ تخمین زده شود، و $t_1 = 2m/b$ زمان صرف شده برای کاهش نوسانها تا $1/e$ مقدار خود است (e ثابت طبیعی مساوی با حدود 2.7 است). شکل ۶-۲۶ مثالهایی از نوع پاسخهای مورد انتظار برای هر یک از ۳ حالت تضعیف کننده را نشان می‌دهد.

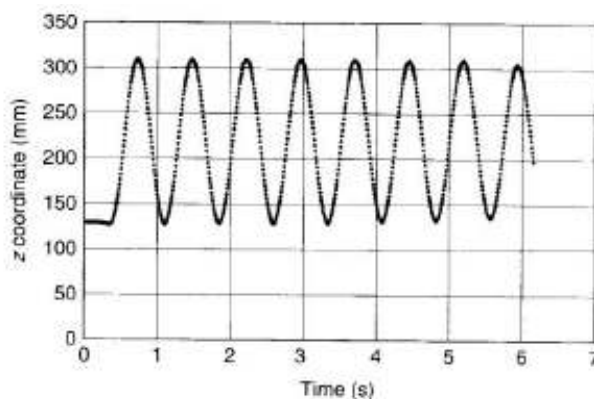
شکل ۶-۲۶. سه موقعیت تضعیف کننده. مقدار جرم 0.2 kg و مقدار ثابت فنر 0.1 N/kg بود. در مورد منحنی تضعیف شده شدید مقدار b استفاده شده 0.282 بود. در موقعیت کم تضعیف شده، 0.1 $b =$ در همه موارد جابه‌جایی ابتدایی $U = 10$ (واحد) بود.

محاسبه ضریب اصطکاک b در نوسانگر ساده جرم- فنر

مورد پژوهی ۶-۲

پیوست ۲ ۲۵۹

جرم $320g$ از فنری آویزان شده است که به صورت محکم به نگهدارنده ثابت متصل است. جرم از حالت سکون به پائین کشیده می‌شود. در نمودار ذیل جابه‌جایی جرم در جهت عمودی پس از رهایی نشان داده شده است. در این نمودار، مختصات z از یک مبدأ که با فاصله کمی زیر جرم نوسان کننده قرار گرفته است، اندازه‌گیری می‌شود. جرم در $5.242s$ هفت نوسان اولیه را تکمیل می‌کند، بنابراین زمان دوره‌ای عبارت است از:



$$T = \frac{5.242}{7} = 0.749s$$

مقدار کم تضعیف کننده باعث تغییر دامنه از $176.9mm$ در نوسان اول به $169.1mm$ در نوسان هفتم می‌شود. برای تخمین صحیح می‌توان اثر این مقدار کم تضعیف کننده را در دوره نادیده گرفت، بنابراین ثابت فنر، k می‌تواند به این صورت محاسبه شود:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

بنابراین:

$$k = 0.32 \times \left(\frac{2\pi}{0.749}\right)^2 = 22.02 N/m$$

ضریب اصطکاک، b ، می‌تواند از دامنه‌های ابتدایی و نهایی، A_1 و A_n ، و زمان، t ، مورد نیاز برای تکمیل این تعداد دوره تخمین زده شود.

پیوست ۲ ۲۶۰

$$\log_e \left(\frac{A_n}{A_1} \right) = \frac{-bt}{\gamma m}$$

$$b = -\gamma \times 0.22 \times \log_e \left(\frac{A_n}{A_1} \right) / \Delta T = 0.006 \text{ Nsm}^{-1}$$

۴-۸-۶ آونگ ها

۱-۴-۸-۶ آونگ ساده

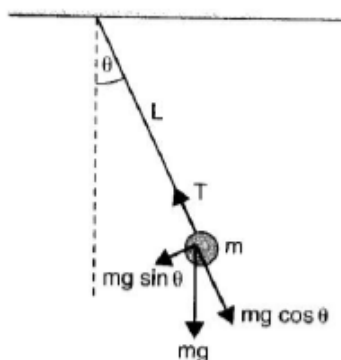
آونگ ساده شامل شاقول یا شیئی کوچکی است که از انتهای یک ریسمان سبک متصل به تکیه‌گاه ثابت و صلب آویزان است (شکل ۶-۲۷). وزن، mg به دو مولفه تجزیه می‌شود؛ یکی در امتداد جهت ریسمان ($mg \cos \theta$) و دیگری در زاویه قائم نسبت به جهت ریسمان ($mg \sin \theta$).

با فرض اینکه ریسمان قابل انبساط نیست، آونگ نوسان کننده هنگام حرکت با یک دامنه برابر در هر طرف نقطه تعادل، قوس یک دایره را طی می‌کند. شکل ۶-۲۸ نشان می‌دهد که جابه‌جایی، x آونگ در امتداد کمان می‌تواند از x بدست آید، که در اینجا زاویه‌ای است که ریسمان با خط عمود می‌سازد و L فاصله نقطه اتصال از مرکز جرم شاقول است.

اگر نیروی ذخیره شده متناسب با x یا باشد، آنگاه حرکت، حرکت موزون ساده خواهد بود. نیروی ذخیره شده، مولفه‌ی وزن مماس به کمان است:

$$F = -mg \sin \theta$$

به دلیل اینکه F متناسب با سینوس θ است و نه خود θ ، حرکت (در کل) SHM نیست. با این حال، زمانی که θ کوچک باشد، و اگر θ بر اساس رادیان بیان شود، آنگاه



پیوست ۲ ۲۶۱

شکل ۶-۲۷. آونگ ساده. وزن شاقول mg است که به

صورت عمودی عمل می‌کند، و کشش در ریسمان T است که با زاویه θ نسبت به خط عمود عمل می‌کند.

سینوس θ تقریباً برابر θ است. توجه کنید که، مطابق شکل ۶-۲۸ برای زاویه‌های کوچک θ ، x خیلی نزدیک به همان ضلع $L \sin \theta$ است. برای تخمین خیلی معتبر، برای زاویه‌های کوچک:

$$F \sim -mg \theta$$

با استفاده از این حقیقت که $x = L \theta$ داریم:

$$F \sim -\frac{mg}{L}x$$

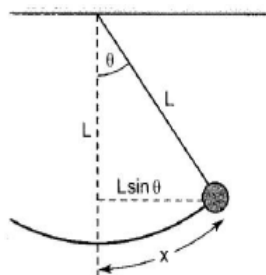
بنابراین، برای جابه‌جایی‌های کوچک، حرکت، حرکت موزون ساده است، همراه با یک نیروی موثر ثابت تعیین شده بوسیله mg/L . بنابراین دوره‌ی نوسان ساده برای جابه‌جایی‌های کوچک عبارت است از:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{mg/L}} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

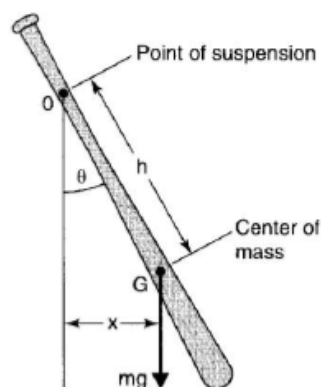
باید توجه کرد که دوره نوسان ساده وابسته به جرم نیست.

۶-۸-۴-۲ آونگ واقعی

این اصطلاح برای اجسام واقعی (و بلند) که می‌توانند به جلو و عقب نوسان کنند، به کار می‌رود. شکل ۶-۲۹ نشان می‌دهد که چوب بیسبال طوری آویزان شده است که می‌تواند هنگام مختل شدن وضعیت تعادلش نوسان کند.



شکل ۶-۲۸. جابه‌جایی (x) جرم در امتداد کمان دایره‌ای بوسیله‌ی $x = \theta L$ تعیین می‌شود، اینجا θ به رادیان اندازه‌گیری می‌شود.



می‌شود.

شکل ۶-۲۹. باتوم بیسبال آویزان شده از نقطه O .

نیروی گرانشی در G ، مرکز گرانش (مرکز جرم) باتوم بیسیال، که از نقطه چرخش، O ، فاصله‌ی h را دارد عمل می‌کند. پاندول طبیعی با استفاده از معادله‌های حرکت دورانی به بهترین شکل تجزیه و تحلیل می‌شود. در آونگ طبیعی گشتاور محاسبه شده حول نقطه O ، عبارت است از:

$$\tau = -mgh \sin \theta$$

قانون دوم نیوتن برای حرکت دورانی (بخش ۸-۲ را ببینید) بیان می‌کند:

$$\tau = I\alpha = I \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

در اینجا I ممان اینرسی باتوم حول یک محور در نقطه آویزش و عمود بر سطح

صفحه است و α شتاب زاویه‌ای است. بنابراین:

$$I \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -mgh \sin \theta$$

بنابراین:

$$\frac{d^2 \omega}{dt^2} + \frac{mgh}{I} \sin \theta = 0$$

پیوست ۲ ۲۶۳

اگر θ کوچک باشد، آنگاه $\sin\theta$ و

$$\frac{d^2\omega}{dt^2} + \left(\frac{mgh}{I}\right)\theta = 0$$

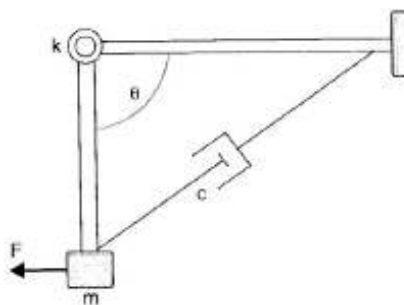
این دقیقاً معادله‌ی SHM با یک مقدار زاویه‌ای به جای جابه‌جایی خطی معمولی است. برای جابه‌جایی زاویه‌ای کوچک، دوره، T ، عبارت است از:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgh}}$$

اثرات حاد تمرین بر سفتی غیرفعال مفصل

مورد پژوهی ۳-۶

سفتی یک مفصل بین بخش‌های بدن می‌تواند بوسیله‌ی کاهش میزان نوسان‌های طبیعی بخش ساق - پا اندازه‌گیری شود. مفصل زانو به صورتی که اینجا نشان داده شده است، مانند فنر مارپیچی مدل می‌شود که گشتاور، $\tau = k\theta$ ، را تولید می‌کند:



نمودار مدل فنر-تضعیف کننده را نشان می‌دهد که برای توصیف سختی (k) و ضریب تضعیف کننده‌ی (c) زانو استفاده شد (ریچارد^۱ و همکاران ۱۹۹۶). همانطور که نشان داده شده است، رفتار ارتجاعی - چسبناکی مفصل‌های انسان می‌تواند با استفاده از مدل فنر-تضعیف کننده مدل شود. فنر مارپیچی با سختی خطی می‌تواند برای نمایش واکنش ارتجاعی رشته‌های اکتین-میوزین و بافت پیوندی در مفصل زانو استفاده شود. همانطور که نشان داده شده است، می‌توان رفتار وابسته به زمان بافت پیوندی را با

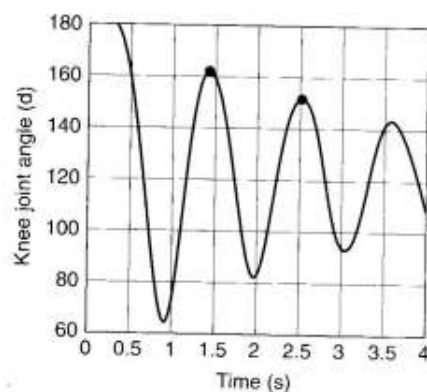
۱. Richard

پیوست ۲ ۲۶۴

استفاده از عنصر تضعیف کننده‌ی چسبناک مدل کرد. ریچارد و همکاران (۱۹۹۶) درباره تغییر سختی مفصل زانو به عنوان تابع تمرین تحقیقی را ارائه کرده‌اند. سختی فعال مفصل زانو قبل و بعد از کوشش تمرین با وزنه، که در آن خم کردن مفصل زانو با استفاده از ۷۵٪ حداکثر بار ($0.75 RM$) انجام می‌شد، اندازه‌گیری شد.

سختی غیر فعال مفصل انسان بوسیله‌ی عواملی ایجاد می‌شوند که به عوامل عضلانی مرتبط با رشته‌های اکتین و میوزین و عوامل بافت پیوندی مرتبط با فاسیا (لایه‌ی پوششی)، لیگامنت‌ها و اصطکاک در مفصل، نسبت داده می‌شوند. مشخص شده است که اثرات بلافاصله یک کوشش تمرینی از قبیل وزنه برداری، سختی مفصل درگیر را افزایش می‌دهد. لاکیه^۱ و همکاران (۱۹۸۸) پی بردند که سختی مفصل بعد از حرکات فعال یا غیر فعال افزایش می‌یابد. با این حال در مورد اثرات حاد تمرین بر سختی مفاصل بلافاصله بعد از تمرین دانش کم است.

مطالعه ریچارد (۱۹۹۶) شامل ۲۳ آزمودنی با زانوهای عادی بود. سختی غیر فعال زانو قبل و بعد از کوشش تمرین با وزنه اندازه‌گیری شد. کوشش تمرین شامل ۱۰ ست با ۱۰ فلکش^۱ اکستنشن منفرد زانو و بر اساس ۷۵ درصد $1RM$ (یک تکرار بیشینه) بود که با ۱۰ ست با ۱۰ انقباض برون گرا ادامه می‌یافت. سختی زانوی آرام سازی شده (ریکلس شده)، با استفاده از گونیامتر الکترونیکی اندازه‌گیری شد. وضعیت زانوی راست برای ۶s با (سرعت دوربین) $500 Hz$ نمونه برداری شد. در اینجا یک نمونه از نتایج برای زاویه زانو نسبت به زمان نوسان تضعیف شده زانو نشان داده شده است:



۱. Laki

ضرایب تضعیف کننده و سختی زانوی آرام سازی شده با آزمودنی‌هایی که بر روی میز نشسته بودند، تعیین شد. اندام تحتانی با زانوی کاملاً باز شده، توسط محقق نگه داشته می‌شد. به محض اینکه آزمودنی به طور کامل آرام سازی می‌کرد، سیستم ساق - پا رها می‌شد و به اندام تحتانی اجازه داده می‌شد تا به صورت آزادانه نوسان کند تا اینکه ساق پا در وضعیت عمودی به حالت سکون درآید. پنج کوشش صحیح قبل و بعد از تمرین بدست آمد. سختی از دو دوره کامل نخستین نوسان‌ها محاسبه شد. کاهش لگاریتمی (δ) نوسان عبارت است از:

$$\delta = \log_e (A_1/A_2)$$

در اینجا A_1 و A_2 زوایای مفصل زانو برای دو قله‌ی ابتدایی نوسان هستند. عامل تضعیف کننده چسبناک (ξ کسی) به شکل زیر محاسبه شد:

$$\xi = \sqrt{\frac{\delta}{2\pi^2 + \delta^2}}$$

در اینجا δ (دلتا) کاهش لگاریتمی نوسان تضعیف شده است. (اطلاعات بیشتر در مورد استخراج و اندازه‌گیری عامل تضعیف کننده‌ی چسبناک ξ در بخش خواندنی پیشنهادی ارائه شده است). بسامد طبیعی نوسان (ω) از معادله زیر تعیین شد:

$$\omega = \frac{\delta}{\xi \times T}$$

در اینجا δ کاهش لگاریتمی است، ξ (کسی) عامل تضعیف کننده‌ی چسبناک است، و T زمان بین قله‌های نوسان است. ضریب تضعیف کننده (c) به شکل ذیل بدست آمد:

$$c = 2 \xi \omega I$$

در اینجا ξ عامل تضعیف کننده‌ی چسبناک است، ω بسامد طبیعی است، و I ممان اینرسی ساق پا و پا حول مفصل زانو است. سختی غیر فعال (k) مفصل زانو با استفاده از معادله زیر بدست آمد:

$$k = I\omega^2$$

در اینجا I ممان اینرسی ساق - پا است و ω بسامد طبیعی است. همه پنج کوشش برای سختی (k) و ضریب تضعیف کننده (c) معدل گیری شدند. بعد از تمرین برای بررسی معنی داری اختلافها در سختی و تضعیف کننده، آزمون t وابسته استفاده شد.

جدول ۵-۶ میانگین و انحراف استاندارد برای سختی مفصل، ضریب تضعیف کننده، و بسامد طبیعی مفصل زانو قبل و بعد از تمرین

بعد از تمرین	قبل از تمرین	
۶,۱۵ (۲,۳۲)	۴,۵۹ (۱,۲۳)	سختی مفصل ($N(m/rad)$)
-۰,۰۱۷ (۰,۰۰۹)	-۰,۰۱۴ (۰,۰۰۶)	ضریب تضعیف کننده ($N(m/s/rad)$)
۵,۹۸ (۰,۳۳)	۶,۸۸ (۰,۹۴)	بسامد طبیعی (Hz)

نتایج:

اثرات حاده تمرین بر ضریب تضعیف کننده، بسامد طبیعی و سختی غیر فعال مفصل زانو در جدول ۵-۶ نشان داده شده‌اند. افزایش معنی دار در سختی غیر فعال مفصل زانو، ضریب تضعیف کننده و بسامد طبیعی بعد از تمرین مشاهده شد ($p < 0,05$). میانگین سختی غیر فعال زانو به صورت معنی داری از $۳۷,۸$ ($۱۴,۸۷kg$) قبل از تمرین به $۱۴,۲۸$ ($۲,۴۲kg$) بعد از تمرین کاهش یافت. نتیجه گیری می شود اثرات بلافاصله تمرین باعث یک افزایش در سفتی غیر فعال و تضعیف کننده در مفصل زانوی انسان می شود.

خلاصه:

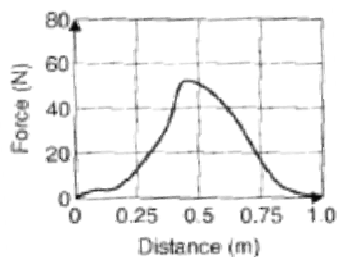
این فصل مبحث دینامیک را با معرفی مفاهیم کار، توان، و اندازه حرکت ادامه داد. کار انجام شده در نقطه اعمال نیرو برای نیروهای ثابت و برای نیروهایی که به صورت تابع مسافت تغییر می کنند، مورد بحث قرار گرفت شد. ایده‌ی اندازه گیری کار انجام شده بوسیله‌ی نیروی متغیر با استفاده از انتگرال گیری معرفی شد، اما جزئیات روشهای دیفرانسیل و انتگرال گیری در این کتاب بیان نشده است. مفهوم کلی انرژی با اشاره ویژه به PE و KE مورد بحث قرار گرفت، همچنین انرژی کششی و انرژی گرمایی نیز بیان شدند. قوانین بقاء اندازه حرکت خطی و انرژی مطرح شدند و با چند مثال مرتبط

پیوست ۲ ۲۶۷

توضیح داده شدند. انواع مختلف برخوردها نیز در نظر گرفته شد، به عنوان مثال، بین توپ‌های بیلیارد یا بین باتوم و توپ، که منجر به بحث ضربه‌ها و ارتباط آنها با اندازه حرکت شد. فرق بین برخوردهای ارتجاعی و غیر ارتجاعی بیان شد. فصل با معرفی نیروهای فنر و قانون هوک به پایان رسید. این مبحث منجر به بحث کوتاهی در مورد نوسان‌های تضعیف نشده و تضعیف شده شد. فصل با یک مورد پژوهی به پایان رسید که در آن ایده‌ی نوسان و تضعیف کننده برای تخمین سفتی غیر فعال مفصل زانو قبل و بعد از تمرین استفاده شدند.

خودآزمایی

۱. در راگبی، یک بازیکن هم تیمی خود را به مسافت کلی $2/8m$ به جلو هل می‌دهد. نیروی فشاری استفاده شده $560N$ در جهت افقی است. کار انجام شده با این نیرو را محاسبه کنید.
۲. در رقابت‌های قویترین مرد، شرکت کننده‌ها تلاش کردند تا یک قطار را در امتداد راه آهن بکشند. نیروی اعمال شده ثابت و $4575N$ است، همچنین طناب وصل کننده با یک زاویه‌ی 10° نسبت به راه آهن قرار دارد. اگر مسافت پیموده شده با قطار در طول راه آهن $15m$ باشد کار انجام شده بر روی قطار چقدر است؟
۳. در شکل زیر نیرویی که در طول پرتاب توسط دست به دیسک اعمال شده است، به صورت تابع مسافت نشان داده شده است. کار انجام شده



بر روی دیسک را با استفاده از روش تقریب زدن که در بخش ۶-۲

پیوست ۲ ۲۶۸

شرح داده شده است، تخمین بزنید. تذکر: محور افقی را به تعدادی بین ۶ تا ۱۰ بخش تقسیم کنید.

۴. یک توپ از ارتفاع $2m$ به کف می‌افتد، و با سرعت $6.3m/s$ با کف برخورد می‌کند. هنگامی که توپ کف را ترک می‌کند، سرعت رو به بالای آن $5m/s$ است. ضریب ارتجاعی را محاسبه کنید.

۵. یک توپ تنیس که با سرعت $25m/s$ حرکت می‌کند با یک راکت که با سرعت $35m/s$ در جهت مخالف در حال حرکت است، برخورد می‌کند. بعد از برخورد، توپ و راکت در جهت یکسانی به ترتیب با سرعت‌های $10m/s$ و $30m/s$ حرکت می‌کنند. ضریب ارتجاعی را محاسبه کنید.

۶. انجمن تنیس ایالت متحده می‌گوید که توپ‌ها هنگامی که از ارتفاع $254cm$ به روی کف بتونی رها شدند، باید بین 135 و $147cm$ پرش کنند. حداقل و حداکثر مقادیر ضریب ارتجاعی چقدر است؟

۷. توپ بسکتبال از ارتفاع $2m$ به روی کف ورزشگاه می‌افتد. اگر ضریب ارتجاعی بین توپ و کف 0.9 باشد، توپ تا چه ارتفاعی پرش خواهد کرد؟

۸. یک توپ بسکتبال از ارتفاع $1.83m$ که از زیر توپ اندازه‌گیری شده است رها می‌شود و تا ارتفاعی بین 1.24 و $1.37m$ که از بالای توپ اندازه‌گیری شده است پرش می‌کند. قطر توپ $0.25m$ است. محدوده-ای که ضریب ارتجاعی باید در آن باشد را محاسبه کنید؟

۹. پنج عامل که سرعت و جهت توپ را هنگامی که پای فوتبالیست را ترک می‌کند تحت تاثیر قرار می‌دهد نام ببرید؟

۱۰. توپی از ارتفاع $2m$ به روی سطح می‌افتد و با سرعت $6.3m/s$ با کف برخورد می‌کند. هنگامی که توپ کف را ترک می‌کند سرعت رو به

پیوست ۲ ۲۶۹

بالای آن $4m/s$ است. ضریب ارتجاعی بین توپ و سطح را محاسبه کنید. ارتفاعی که توپ تا آن خواهد پرید چقدر است؟

۱۱. توضیح دهید هنگامی که اصطلاحات "زاویه برخورد" و "زاویه برگشت" برای یک برخورد مورب به کار می‌روند، چه معنی دارند.

الف) چرا این دو زاویه به طور معمول برابر نیستند؟

ب) وضعیت باید به چه صورت باشد تا زاویه برخورد بیشتر از زاویه برگشت متناظر باشد؟

۱۲. دو توپ تنیس ضربه زده می‌شوند طوری که راکت تنیس مربوط به خود را در ارتفاع، سرعت و زاویه‌هایی یکسان ترک می‌کنند. یکی با پیچ رویی زده می‌شود، و دیگری بدون چرخش زده می‌شود. آنها بر روی سطح زمین بازی یکسانی فرود می‌آیند.

الف) کدام توپ در برخورد با زمین بازی دارای سرعت عمودی روبه پائین بزرگتری است؟

ب) کدام توپ بعد از تماس با زمین بازی دارای سرعت افقی بزرگتری است؟

ج) کدام توپ دارای زاویه برگشت بزرگتری است؟

د) کدام توپ در هنگام پرش تا ارتفاع بیشتری بالا می‌رود؟

ه) کدام یک به اوج ارتفاع خود بیشتر از نقطه‌ای که از آن پریده است می‌رسد؟ (هنگام پاسخ دادن به این سوال‌ها از مقاومت هوا چشم‌پوشی کنید).

۱۳. PE شیرجه روی $70kg$ را در بالای تخته شیرجه $m-10$ محاسبه کنید.

۱۴. دونه سرعت حرفه‌ای با جرم $75kg$ می‌تواند به حداکثر سرعت $11m/s$ دست یابد. KE او چقدر است؟

۱۵. با استفاده از بقاء انرژی مکانیکی، سرعت دست یافته شده بوسیله‌ی اسکی‌دایور را بعد از سقوط به مسافت $10m$ از هواپیما پیدا کنید؟ (PE ابتدایی را با KE مساوی قرار دهید).

پیوست ۲ ۲۷۰

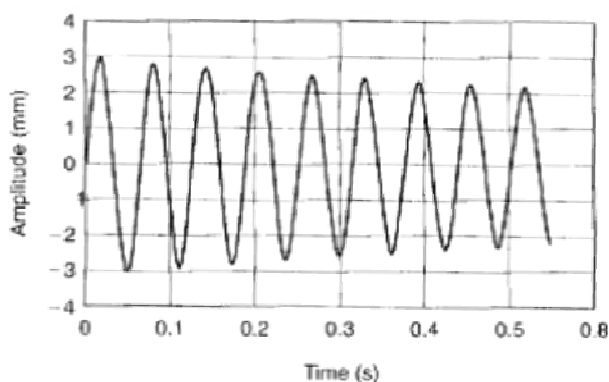
۱۶. در پرس نیمکت (پرس سینه)، وزنه‌ی 100-kg در مسافت عمودی 0.7m در زمان 0.6s بالا برده می‌شود. میانگین توان در این حرکت را محاسبه کنید.

۱۷. توپی با جرم 0.12kg با سرعت 15m/s به یک باتوم نزدیک می‌شود. هنگام برخورد، باتوم نیروی ثابت 1250N را برای زمان 0.03s به توپ اعمال می‌کند. ضربه را محاسبه کنید و پس از این سرعت نهایی توپ را هنگامی که از باتوم بر می‌گردد محاسبه کنید.

۱۸. نوسان‌های چوب گلف به صورت تابع زمان در نمودار زیر نشان داده شده است. با استفاده از نمودار، محاسبه کنید:

الف) بسامد نوسان‌ها

ب) مقدار b/m (ضریب اصطکاک تقسیم بر جرم)



منابع

Lakie M, Robson LG (1988). *Thisotropic changes in human muscle stiffness and the effects of fatigue*. QJ Eep Physiol 73 (2): 487-500.

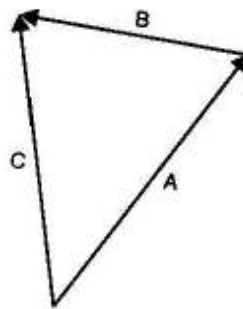
Dynamics end. ۵. New York: John Wiley & Sons.

پاسخ خودآزمایی‌ها

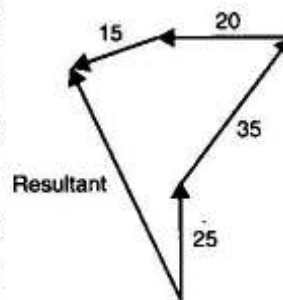
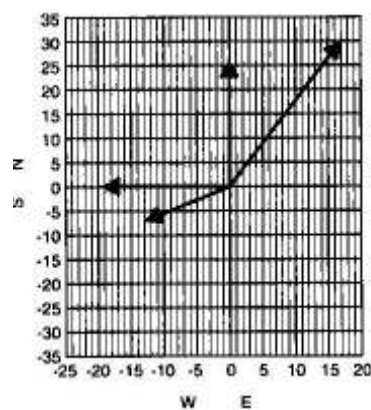
فصل ۲

۱. نیرو - برداری ، گشتاور - برداری ، شتاب - برداری ، سرعت - برداری ، جرم - نرده‌ای، حجم - نرده‌ای، جابه‌جایی - برداری، مساحت - نرده‌ای، طول - نرده‌ای، سرعت زاویه‌ای - برداری

۲.



۳.

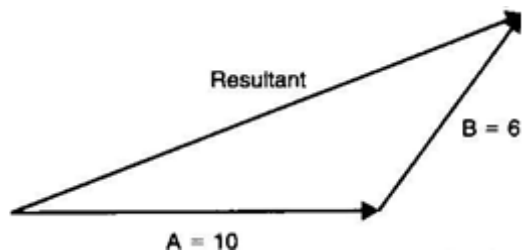


پیوست ۲ ۲۷۲

برآیند دارای بزرگی $۵۰/۲۵$ است و یک زاویه ۷۲° را با محور W می‌سازد.

۴. $۱۵/۸۱ m/s =$ سرعت برآیند

۵.



۶. در (b) سرعت باد بیشتر از $۱۰ km/h$ است و باد موافق است.

در (c) سرعت باد بیشتر از $۵ km/h$ است و باد موافق است.

در (d) سرعت باد بیشتر از $۱۰ km/h$ است اما باد مخالف است و همچنین با

یک زاویه عمل می‌کند. اجازه دهید مسابقه در (c) انجام شود.

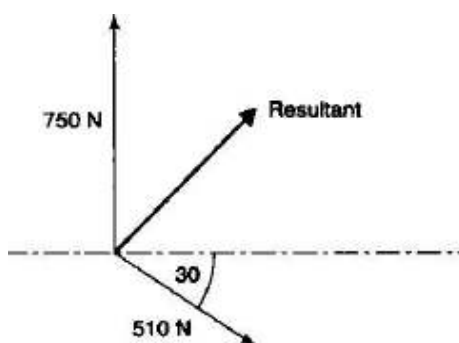
۷. $۴۵ \cos(۱۰) = ۴۴/۳ m/s =$ مولفه افقی

۸. سرعت افقی را v بنامید. بنابراین:

$$۴۰ = \sqrt{(۲۹)^2 + v^2}$$

$v = ۲۷/۵ m/s$

۹.



برآیند دارای بزرگی $۶۶۳N$ است و با یک زاویه ۴۸° نسبت به سطح افق

عمل می‌کند.

پیوست ۲ ۲۷۳

$$a_y = 9,2 m/s^2 \quad a_x = 13,1 m/s^2 \quad 10.$$

۱۱. (a) مولفه‌ها در امتداد محورهای x ، y و z به ترتیب $12N$ ، $25N$ و $0N$ هستند.

$$(b) \text{ جابه‌جایی کل} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{13} = 3,6 m$$

$$(c) \text{ سرعت برآیند} = (2, 8, 4)$$

۱۲. (یا ژول) کار انجام شده $= 231,8 Nm$

$$13. \text{ کار انجام شده} = 150 \times 0,8 + 45 \times 0,75 + 0 \times 0,15 = 153,75 J$$

$$14. \text{ گشتاور} = 50 N \times 0,25 m = 12,5 Nm$$

دیسک خواهد بود.

۱۵. گشتاور عبارت است از $\tau = -0,5i + 0,34j - 0,57k$

بزرگی این گشتاور عبارت است از $0,83 Nm$

۱۶.

$$\text{بزرگی نیرو} = 30,23 N$$

$$\text{شعاع توپ} = 0,067 m$$

۱۷.

$$\text{تندی} = 10,73 m/s$$

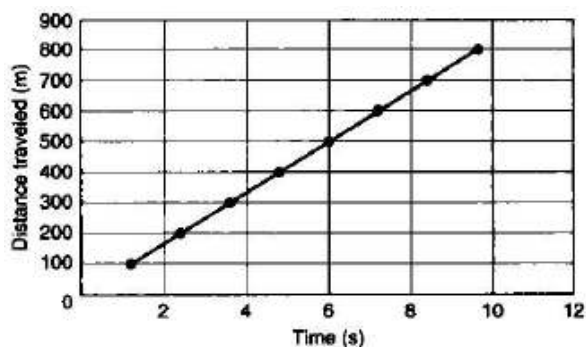
$$\text{بیان بر اساس بردار واحد} = 0,93i - 0,23j + 0,28k$$

$$\text{نیروی مقاوم سیال} = 1,73 N$$

$$\text{نیرو} = 1,61i - 0,40j + 0,48k$$

فصل ۳

۱.



پیوست ۲ ۲۷۴

اتومبیل دارای سرعت 83.3 m/s است

۲. $c = 50 \text{ m} = 9.16$

۳. $a = 4 \text{ m/s}^2$

۴. $v = 30 \text{ m/s}$

۵. $60/6.5 = 9.23 \text{ m/s}$

۶. (لیورپول) $t_1 = 2.33 \text{ s}$ ، (منچستر یونایتد) $t_2 = 2.36 \text{ s}$. پاسخ: منچستر

یونایتد

۷. $v = 7 \text{ m/s}$; $a = 7 \text{ m/s}^2$

۸. $a = (55 - 20)/5.3 = 6.60 \text{ m/s}^2$

۹. برای دوره‌ی زمانی ۰ تا ۴ ثانیه شتاب یکنواخت است. همچنین برای

زمان بین ۱۲ تا ۱۵ ثانیه، اما در اینجا کاهش سرعت یکنواخت است.

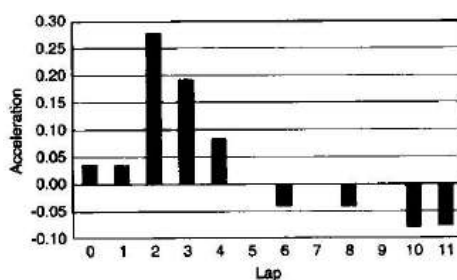
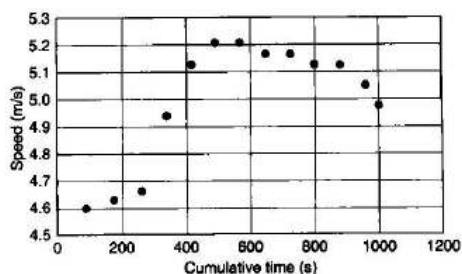
بین فاصله‌ی زمانی ۱۲ و ۱۵ ثانیه متوقف می‌شود.

بین ۰ و ۴ ثانیه، سرعت لوج به صورت یکنواخت افزایش می‌یابد.

شتاب 2.625 m/s^2 است.

۱۰. $a = 2 \text{ m/s}^2$

۱۱.



پیوست ۲ ۲۷۵

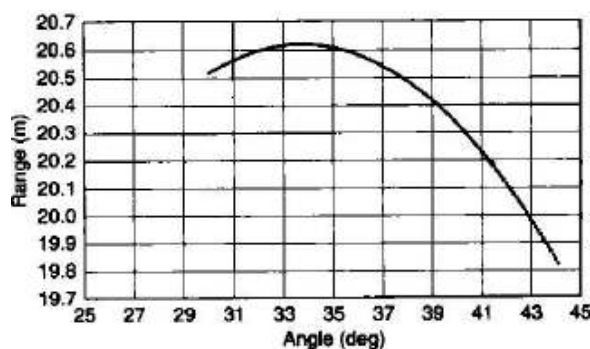
نمودار نشان می‌دهد که بزرگترین افزایش سرعت بعد از بخش ۳ اتفاق افتاد و بزرگترین کاهش سرعت بعد از بخش ۱۱ بود.

$$v = 10,85 \text{ m/s} \quad .12$$

$$h = 0,91 \text{ m} \quad R = 7,81 \text{ m} \quad .13$$

$$R = 17,81 \text{ m} \quad .14$$

.15



برد در یک زاویه‌ی تقریباً 34° حداکثر می‌شود.

$$13 \text{ m/s} = \text{سرعت افقی} \quad (a) \quad .16$$

$$7,5 \text{ m/s} = \text{سرعت عمودی}$$

$$13 \text{ m/s} = \text{سرعت افقی} \quad (b)$$

$$0,756 \text{ s} = \text{زمان در حداکثر ارتفاع} \quad (c)$$

$$d_v = 2,866 \text{ m}, \quad d_h = 0,765 \text{ s} \quad (d)$$

توپ مسافت $22,466 \text{ m}$ را طی خواهد کرد.

۱۷. (a) مربوط به شتاب یکنواخت است. (b) سرعت ثابت است؛ این

شتاب یکنواخت در مورد ویژه‌ی $a = 0$ است. (c) شتاب غیر یکنواخت

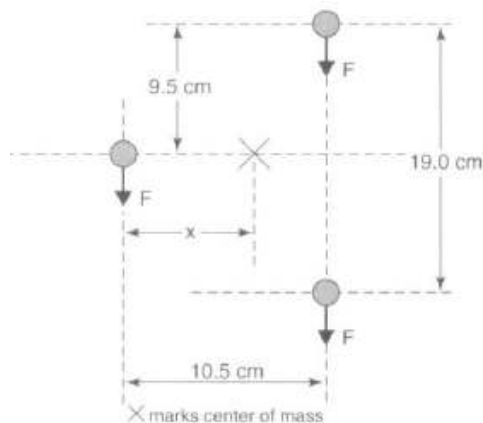
را نشان می‌دهد (شتاب وجود دارد ولی ثابت نیست). معادلات (۱) تا

(۴) می‌توانند برای (a) و (b) استفاده شوند.

فصل ۴

پیوست ۲ ۲۷۶

۱. ممان ها عبارت اند از: $13Nm$ (a) و $20N \times 0.65m = 13Nm$ و
 $20N \times 0.65m \times \cos(30^\circ) = 11.26Nm$ (b)
۲. برای مثال ممان ها را حول گوش پائین دست راست در نظر بگیرید.
 نیروی برآیند عبارت است از $1390N$ که در فاصله $51.9cm$ از این نقطه عمل می کند.
۳. حجم $\pi r^2 L = 4.71 \times 10^{-3} m^3$ است، و جرم $5.18kg$ است. مرکز جرم در محور سیلندر در فاصله $0.3m$ از یک انتها قرار دارد. ممان دست $15.25Nm = 5.18 \times 9.8 \times 0.3$ خواهد بود.
۴. $250Nm = 2 \times 50 \times 2.5 =$ جفت. گلايدر موافق عقربه های ساعت خواهد چرخید.
۵. اگر $R_p = 800 \sin(35^\circ) = 458.9N$ ؛ $R_n = 800 \cos(35^\circ) = 655.3N$
 نیروی اصطکاک برای جلوگیری از سرخوردن به پائین سطح شیب دار وجود داشته باشد این می تواند اتفاق افتد. در غیاب اصطکاک، اسکی باز به سمت پائین سطح شیب دار شتاب خواهد گرفت، اما احتمالاً او در بخش بدون برف است، یا اسکی هایش داخل سطح فرو رفته است.
۶. $350N$ کشش در هر طناب.
۷. $355.4N$ در هر طناب.
۸. $M = 30N \times 0.2m = 6Nm$ و $M = 25N \times 0.25m = 6.25Nm$
- ۹.



پیوست ۲ ۲۷۷

می‌تواند از چند گوشه‌اش آویزان شود و CM از نقطه تقاطع خطوط عمودی بدست آید.

۱۰. مرکز جرم در $۳,۳$ ، $۵,۰$ قرار دارد.

۱۱. $۲ \times ۴۰N \times ۰,۰۵m = ۴Nm$ ممان جفت

۱۲. $۱۰۰N \times ۰,۰۵m = ۵۰Nm$ ممان

فصل ۵

۱. $۲m/s$ (a), $۲m/s$ (b), $۲m/s$ (c)

در وضعیت واقعی اصطکاک غلتشی به تدریج سرعت را کاهش خواهد داد. همچنین مقاومت هوا وجود دارد.

۲.

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} = \frac{6,67 \times 10^{-11} \times ۸۰ \times ۵,۹۸ \times 10^{24}}{(1,۳۸ \times 10^7)^2}$$

$$= ۷۸۳,۹۲N$$

تکرار محاسبه با استفاده از $r = ۶,۳۸۵ \times 10^6$ می‌دهد $F = ۷۸۲,۶۹N$ اختلاف $۱,۲۳N$.

۳.

$$\text{شتاب} = ۱۰/۱,۵ = ۶,۶۶m/s^2$$

$$\text{نیرو} = ma = ۶۵ \times ۶,۶۶ = ۴۳۳,۳N$$

۴.

$$\text{شتاب} = ۲۰/۰,۰۱ = ۲۰۰۰m/s^2$$

$$\text{نیرو} = ۰,۲ \times ۲۰۰۰ = ۴۰۰N$$

با فرض اینکه شتاب یکنواخت است و برای فاصله‌ی زمانی $s - ۰,۰۱$ ثابت است.



$$W = 25 \times 9,81 = 245,25N \quad .5$$

.6

$$\text{نیروی عکس العمل طبیعی} = 500N$$

$$\text{نیروی اصطکاک ایستا} = \mu R = 0,18 \times 500 = 90N$$

$$\text{نیروی اصطکاک پویا} = \mu R = 0,15 \times 500 = 75N$$

$$F = 0,65 \times 686,7 = 446,355N ; W = 686,7N \quad (a) \quad .7$$

$$F = 0,62 \times 686,7 = 425,754N \quad (b)$$

.8

$$F = ma = 150 \times 3 = 450N$$

$$\text{نیروی اصطکاک} = 0,3 \times 150 \times 9,81 = 441,45N$$

$$\text{نیروی کل} = 891,45N$$

.9

$$\text{نیروی شتاب دهنده} = 20 \times 4 = 80N$$

$$\text{اصطکاک} = 20N$$

$$\text{ضریب اصطکاک پویا} = 20N / 196,2N = 0,102$$

.10

$$v_{max} = \sqrt{\frac{7,0 \times 9,81 \times (\sin 20^\circ + 0,10 \cos 20^\circ)}{(\cos 20^\circ - 0,10 \sin 20^\circ)}}$$

$$= \sqrt{97,72}$$

$$= 9,885m/s$$

$$.11 \quad \text{نیروی اصطکاک} = \mu R = 0,002 \times 0,46 \times 9,81 = 0,0009N$$

$$\text{جرم/نیرو} = 0,0009 / 0,46 = 0,0196m/s^2$$

پیوست ۲ ۲۷۹

$$v^2 = u^2 + 2as, \text{ مسافت غلت خورده،}$$

$$u = \text{سرعت اولیه؛ } v = 0 = \text{سرعت نهایی}$$

بنابراین:

$$u = 2,5 \text{ m/s}$$

$$s = (2,5)^2 / (2 \times 0,0196) = 159,438 \text{ m}$$

$$u = 5 \text{ m/s} \text{ و}$$

$$s = 637,75 \text{ m}$$

$$12. \text{ } mv = 70 \times 9 = 30 \text{ kg.m.s}^{-1} \text{ اندازه حرکت}$$

$$13. \text{ } 1 \text{ mph} = \frac{1609 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = 0,444 \text{ m/s}$$

$$\text{تغییر سرعت} = 205 \times 0,444 = 91,1 \text{ m/s}$$

$$\text{تغییر در اندازه حرکت توپ} = 9/11 \text{ kg.m.s}^{-1}$$

بنابراین:

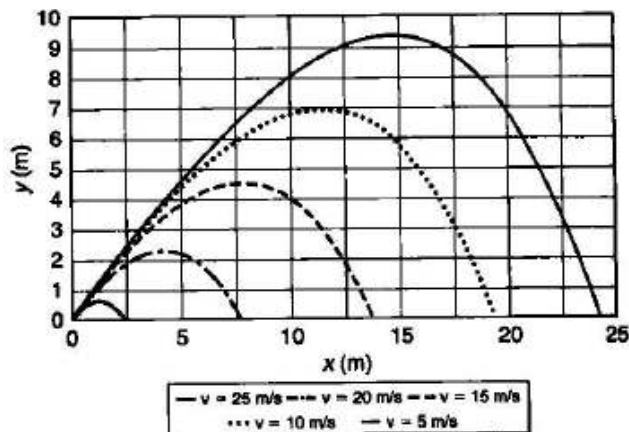
$$1822 \text{ N} = 9,11 / 0,005 = \text{زمان/تغییر اندازه حرکت} = \text{میانگین نیرو}$$

14. بردهای توپ فوتبال که از صفحه گسترده محاسبه شده اند، به صورت

زیر است:

۲,۳۵m، ۷,۷۵m، ۱۳,۷۷m، ۱۹,۳۲m و ۲۴,۱۴m به ترتیب برای سرعت

های ابتدایی ۵، ۱۰، ۱۵، ۲۰ و ۲۵m/s.



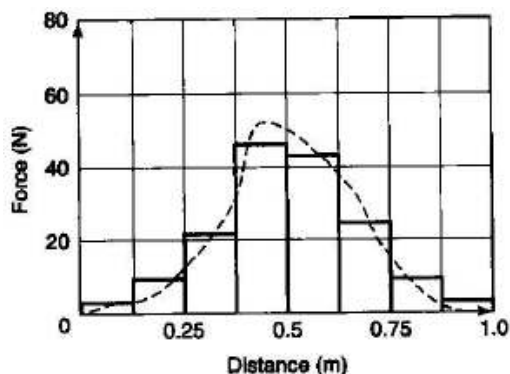
فصل ۶

پیوست ۲ ۲۸۰

۱. $W = (2,8m) \times (560N) = 1568J$

۲. کار انجام شده $= (4575) \times (15) \times \cos(10^\circ) = 67582J$

۳. محور افقی را به ۸ بخش مساوی تقسیم می‌کنیم



نیروهای میانگین تقریبی برای هشت فاصله به ترتیب عبارت‌اند از ۳,۴، ۹,۳، ۲۱,۰، ۴۴,۹، ۴۱,۵، ۲۴,۴، ۹,۳ و ۳,۴N (به وسیله‌ی اندازه‌گیری ارتفاع ستون‌ها و تبدیل آنها به نیرو تخمین زده شدند).

$$W = (F_1 + F_2 + \dots + F_8) \times (\Delta x)$$

در اینجا $\Delta x = (x_f - x_i) / 8$ عرض هر فاصله در محور x است.

در این مورد، $\Delta x = 0,125m$ و:

$$W = (3,4 + 9,3 + 21 + 44,9 + 41,5 + 24,4 + 9,3 + 3,4)$$

$$\times 0,125 = 157,2 \times 0,125 = 19,65J$$

۴. $e = 5/6,3 = 0,794$

۵. $60m/s$ = سرعت نسبی پیش (از برخورد)؛ $20m/s$ = سرعت نسبی بعد

(از برخورد)

$$e = 20/60 = 0,333$$

۶. $v_{حد\text{افز}} = \sqrt{\frac{147}{204}} = 0,761$ و $v_{حد\text{کاهش}} = \sqrt{\frac{147}{204}} = 0,729$

۷. $1 = 1,62m$ ، $0,9 = 0,81$ ، $0,9 =$

۸

۱ پرش $= 1,24 - 0,25 = 0,99m$ ؛ ۲ پرش $= 1,37 - 0,25 = 1,12m$

پیوست ۲ ۲۸۱

$$e_{\text{حداقل}} = \frac{99}{183} = 0,735 \quad (\text{اندازه گیری شده در زیر توپ})$$

$$e_{\text{حداکثر}} = \frac{14}{83} = 0,782$$

۹. سرعت پای ضربه زننده، ضریب ارتجاعی بین کفش و توپ، جرم پا، زاویه ضربه، سر ضربه خورده‌ی خارج یا مایل به مرکز توپ.

$$\frac{u^2}{2a} = \frac{16}{2 \times 9,81} = 0,815 \text{ m}, e = \frac{4}{6,3} = 0,635 \quad 10.$$

۱۱. اگر اصطکاک وجود نداشته باشد $e = -v_v / u_v$ ، اما اصطکاک $u_h = v_h$ را کاهش خواهد داد. زاویه‌ی برخورد برابر با زاویه‌ی بازتاب نخواهد بود.

۱۲. سرعت عمودی رو به پائین برای هر دو یکسان است. توپ با چرخش رویی بعد از تماس با زمین دارای سرعت بیشتری است. توپ بدون چرخش نسبت به افق دارای زاویه برگشت بیشتری است.

$$PE = mgh = 70 \times 9,81 \times 10 = 6867 \text{ J} \quad 13.$$

$$= \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(70)(11)^2 = 4547 \text{ J} \quad 14.$$

$$PE = mgh = mg(10) \quad 15.$$

$$KE_{\text{نهایی}} = \frac{1}{2}mv^2$$

$$v^2 = mg(10) \quad \text{بنابراین:}$$

$$v^2 = 20g$$

$$v = 14 \text{ m/s}$$

۱۶. 981 N = نیروی تغییر مکان یافته. (فرض می‌شود که نیروی اضافی برای شتاباندن میله به سمت بالا مورد نیاز نیست).

$$6867 \text{ J} = 981 \times 0,7 = \text{کار انجام شده}; 1144,5 \text{ W} = 6867 / 0,6 = \text{توان}$$

$$3,75 \text{ Ns} = 1250 \times 0,003 = \text{زمان} \times \text{نیرو} = \text{ضربه.}$$

$$31,25 \text{ m/s} = 3,75 / 0,12 = \text{تغییر سرعت.}$$

پیوست ۲ ۲۸۲

سرعت برگشت = $۱۶,۲۵m/s$.

۱۸. از مکان و دامنه‌ی حداکثر می‌توان بسامد نوسان‌ها و ضریب اصطکاک

را بدست آورد. برای مثال دامنه‌ی حداکثر در زمان‌های $t = ۰,۰۱۶s$ دامنه = $۲,۹۷$ ؛ دامنه = $۰,۰۷۸s$ ، $t = ۲,۸۶$ ؛ دامنه = $۰,۱۴۱s$ ، $t = ۲,۷۵$ ؛ دامنه = $۰,۲۰۴s$ ، $t = ۲,۶۵$ ؛ دامنه، یافت می‌شوند. زمان تناوبی عبارت است از

$$T = (۰,۲۰۴ - ۰,۰۱۶) = ۰,۱۸۸s$$

$$f = 1/T = ۱۵,۹۶Hz$$

بسامد زاویه ای = $۲\pi f = ۱۰۰,۳rad/s$ بسامد زاویه ای. ضریب اصطکاک، b ، عبارت

است از:

$$\begin{aligned} & \log_e \left(\frac{۲,۶۵}{۲,۹۷} \right) \\ &= \frac{-b(۰,۲۰۴ - ۰,۰۱۶)}{۲m} \log_e \left(\frac{A_n}{A_1} \right) \\ &= \frac{-bt}{۲m} \\ & b/m = ۱,۲۱۳ \end{aligned}$$