جزوه دینامیک ماشین

استاد مشکینی

مرجع تخصصی مکانیک سیالات

Peymanfbo.blogfa.com

فصل اول: مقدمات و مفاهیم اساسی

(فصل ۱ و ۲ مابی)

سینماتیک ماشین:

مطالعه و تجزیه و تحلیل راجع به حرکت نسبی اجزاء ماشین شامل تجزیه و تحلیل مکان، سرعت و شتاب

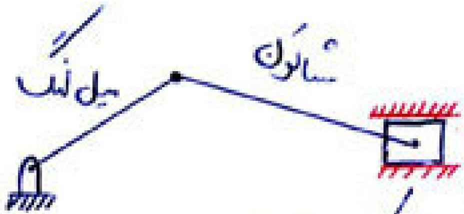
دینامیک ماشین:

مطالعه و بررسی نیروهای وارد بر اجزاء یک ماشین و حرکات ناشی از این نیروها

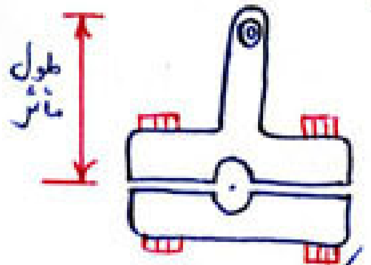
نمودار سینماتیکی: (Kinematic diagram)

نموداری است که در آن تجرید یا انطباقی از یک اهرم رسم می‌شود که در حرکت آن مکانیزم مؤثرند.

مثال: نمودار سینماتیکی یک موتور احتراق داخلی



منظور که نمودار سینماتیکی اهرمی رسم می‌شود در واقع از شکل واقعی آن اطلاعاتی در دست نیست. لذا هر نقطه از یک صفحه می‌تواند ذره‌ای از آن اهرم باشد.



(شکل واقعی شاتون)

اهرم: (Link)

✓ اهرم ساده‌ترین عضو از یک مکانیزم است که با اتصال آن به اعضاء مجاور به نحوی که این اعضاء بتوانند نسبت به هم جابه‌جا شوند، کار یا عملی خاص انجام می‌شود. شکل هندسی اهرم‌ها از اهمیت نمی‌باشد و طول مؤثر، فاصله بین مفاصل است. مثال:

این مکانیزم دارای ۴ اهرم است.

تکیه‌گاه زمین خود یک اهرم محسوب می‌شود.

✓ عضوی که حرکت یا سلوک آن تأثیری در حرکت نداشته باشد و یا صرفاً ساده‌کننده باشد، عضو حساب نمی‌شود.

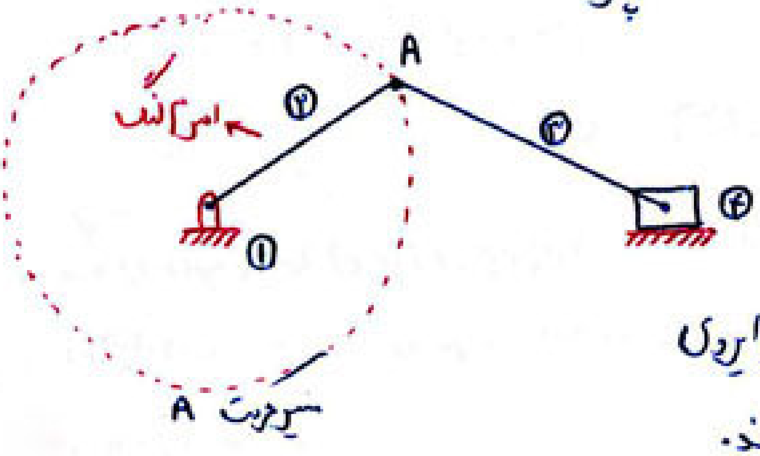
انواع اهرم:

- اهرم پایه: دستگاه مختصات مرجع به آن وصل بوده و حرکت سایر اهرم‌ها نسبت به آن تحلیل می‌شود. (زمین)
- اهرم ورودی: معمولاً متصل به اهرم پایه بوده و نیروهای سینماتیکی به آن وارد می‌شود.
- اهرم خروجی: معمولاً متصل به اهرم پایه بوده و نیروهای سینماتیکی از آن گرفته می‌شود.
- اهرم رابط: اهرم مابین اهرم ورودی و اهرم خروجی را اهرم رابط گویند.

انواع اهرم از لحاظ داشتن نوسان (حرکت):

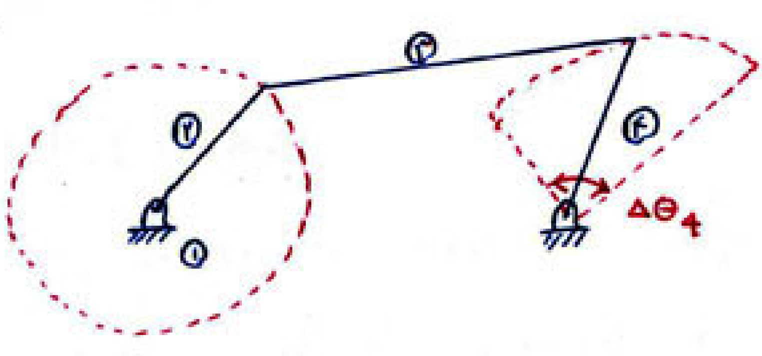
- اهرم لنگ (Crank):

اهرمی است که بتواند در خلال حرکت به میزان 360° بچرخد.



- اهرم اسب یا راک (رقصنده) Rocker:

اهرمی که در خلال حرکت بتواند بخشی از یک مسیر دایروی و یا به عبارت دیگر زاویه‌ای کمتر از 360° نوسان کند.



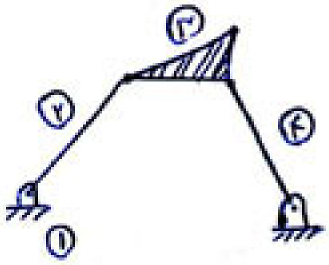
به ازای چرخش کامل اهرم ۲ (Crank) اهرم ۴ (Rocker) فقط در بازه $\Delta\Theta_4$ نوسان می‌کند.

اهرم ساده و اهرم مرکب:

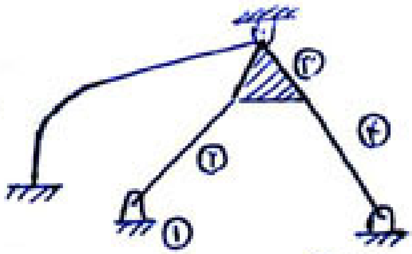
- اگر اهرمی حداکثر ۲ مفصل داشته باشد آن اهرم را اهرم ساده گویند (Simple link)
- اگر اهرمی بیش از ۲ مفصل داشته باشد آن اهرم را اهرم مرکب گویند (Complex link)

* مفصل: محل اتصال دو اهرم که بتوانند نسبت به هم جابجا شوند.

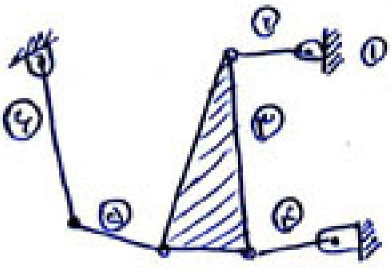
مثال: اهرمهای ساده و مرکب را مشخص نمایید:



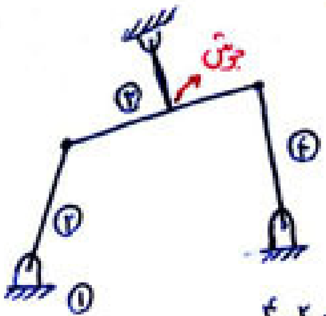
اهرمهای ساده: ۱-۲-۳-۴
اهرمهای مرکب: —



اهرمهای ساده: ۲، ۴
اهرمهای مرکب: ۱، ۳



اهرمهای ساده: ۲ و ۴ و ۵ و ۶
اهرمهای مرکب: ۱ و ۳



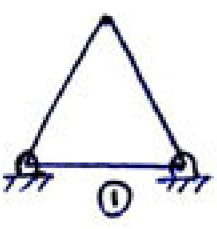
اهرمهای ساده: ۲ و ۴
اهرمهای مرکب: ۱ و ۳

(ولی بعدها خواهیم خواند که به دلیل اینکه درجه آزادی این مجموعه (۱-) است این مجموعه حرکت ندارد و کل آن زمین یا اسکلت محسوب می‌شود.)

زنجیره سینماتیکی (Kinematic chain):

- یک زنجیره سینماتیکی عبارت است از یک مجموعه میله‌های صلب که ضمن اتصال با یکدیگر می‌توانند دارای حرکت نسبی باشند. اگر یکی از میله‌ها ثابت باشد و حرکت یکی دیگر از میله‌ها باعث حرکت سایر میله‌ها گردد به نحوی که حرکت و وضعیت آن میله‌ها قابل پیش‌بینی باشد به آن زنجیره سینماتیکی مقید یا ابزار می‌گویند. همچنین اگر یکی از میله‌ها ثابت باشد و با حرکت یکی دیگر از میله‌ها حرکت و وضعیت سایر میله‌ها قابل پیش‌بینی نباشد به آن زنجیره سینماتیکی غیر مقید می‌گویند.

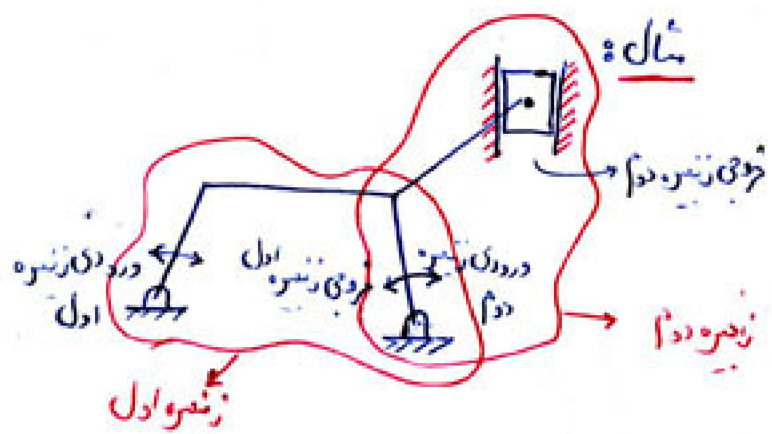
- در تعریفی دیگر اگر حرکت یکی از میله‌ها هیچگونه حرکتی در سایر میله‌ها ایجاد نکند به آن مجموعه دیگر زنجیره سینماتیکی گفته نمی‌شود و یک سازه است. (مثل مثال زیر)



یک مکانیزم (زنجیره سینماتیکی مقید) ممکن است از چندین زنجیره سینماتیکی حاصل شود. به نحوی که خروجی زنجیره اول، ورودی زنجیره دوم باشد و ...

مکانیزم ۴ میله‌ای: یک زنجیره سینماتیکی مقید

مثال:



مکانیزم ۴ میله‌ای

یک زنجیره سینماتیکی مقید با چهار عضو (شامل عضو پایه در زمین)، عضو ورودی، عضو خروجی و عضو رابط با یک درجه آزادی

رابطه گراشف: $\underset{Large}{L}+\underset{Small}{S} < P+Q$

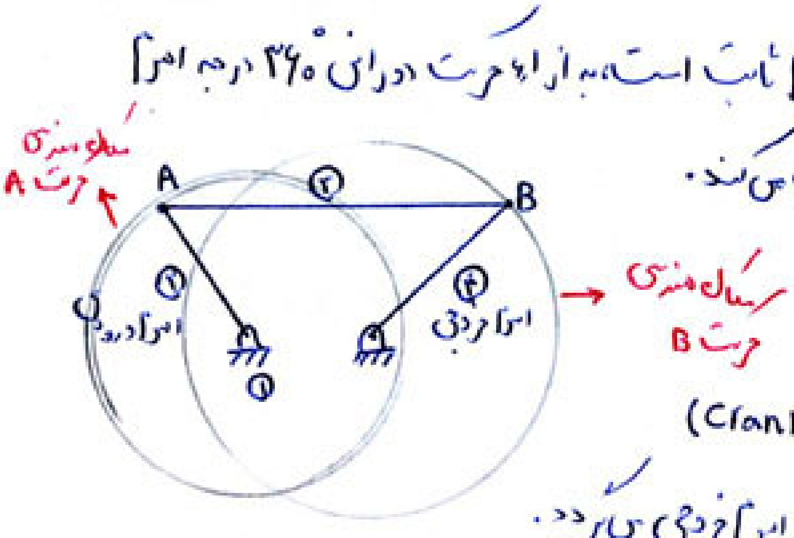
تقسیم گراشف: اگر در زنجیره ۴ میله‌ای مجموع طول کوچکترین و بزرگترین عضو از مجموع طول دو عضو دیگر کمتر باشد آن مکانیزم، مکانیزم گراشف است.

انواع حرکت در مکانیزم‌های ۴ میله‌ای:

* زنجیره یا مکانیزم لنگ-لنگ (Double crank)

در این مکانیزم اگر کوتاه‌ترین عضو به عنوان میله یا عضو ثابت است، به ازای ۱ حرکت دورانی ۳۶۰ درجه عضو ورودی، عضو خروجی نیز به میزان ۳۶۰° نوسان می‌کند.

به شرط مکانیزم گراشف



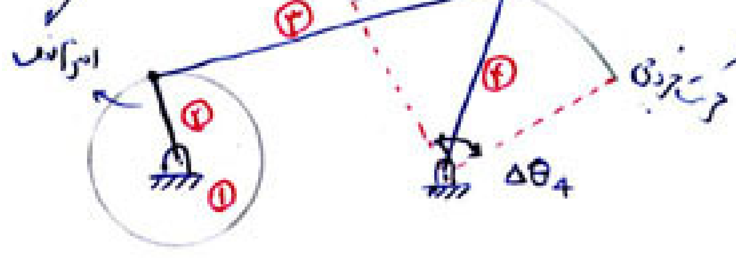
* زنجیره یا مکانیزم لنگ-اسلب (Crank-Rocker)

در این زنجیره حرکت ورودی لنگ باشد حرکت اسلبی عضو خروجی می‌گردد.

در این مکانیزم کوتاه‌ترین عضو این بار می‌تواند عضو ورودی باشد.

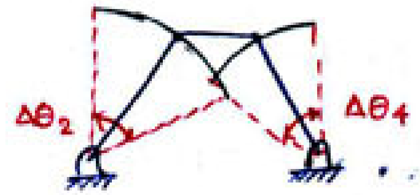
یا «کوتاه‌ترین عضو، عضو لنگ است»

به شرط مکانیزم گراشف



* زنجیره یا مکانیزم اسک - اسک (Double Rocker)

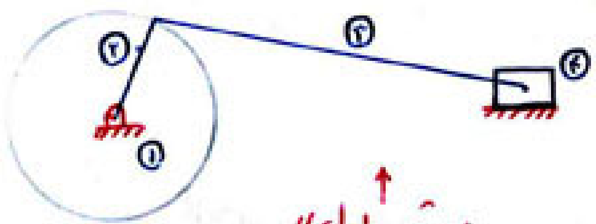
زنجیره‌ای است که اهرم‌های ورودی و خروجی می‌توانند در زاویه‌ای کمتر از 360° نوسان نمایند.



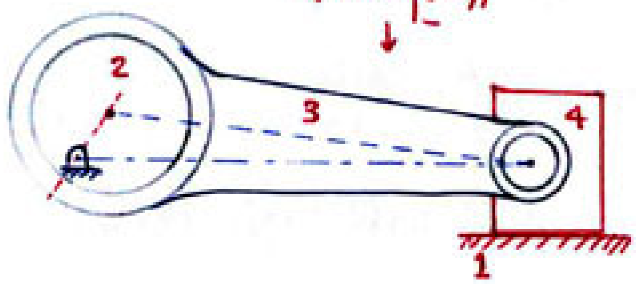
در این مکانیزم‌ها در اغلب موارد، کوتاه‌ترین اهرم، اهرم واسط است.
در صورت گراشفی بودن مکانیزم

* زنجیره یا مکانیزم لنگ - لغزنده (Slider - crank)

اگر در مکانیزم لنگ - لنگ، اهرم خروجی را با یک لغزنده تعویض نماییم آنگاه مکانیزمی حاصل می‌شود که برای تبدیل حرکت دورانی به انتقالی و برعکس می‌توان از آن استفاده نمود. کاربرد آن در موتورهای دیزل و بنزینی و سیستم‌های کمپرسور هوایی می‌باشد.



«سیستم معادل»



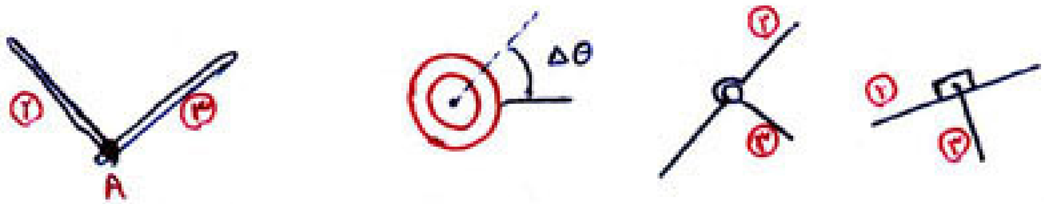
اتصالات سینماتیکی و انواع آن (Joint or Pairing Element)

تعریف مفصل: مفصل محل اتصال دو عضوی (اهرمی) است که می‌توانند نسبت به هم جابه‌جا شوند و دارای انواع مختلفی می‌باشند که از آن جمله موارد زیر را می‌توان نام برد:

۱- مفصل لولایی یا پین: (Revolute)

مفصلی است بین دو اهرم به طوری که جابه‌جایی و حرکت دورانی نسبت آن از طریق یکی از دو اهرم که به اساس محاسبات قرار می‌گیرد برابر است و درجه آزادی آن یک می‌باشد و اجازه جابه‌جایی زاویه‌ای دو اهرم (Δθ) را نسبت به یکدیگر می‌دهد.

مثال:



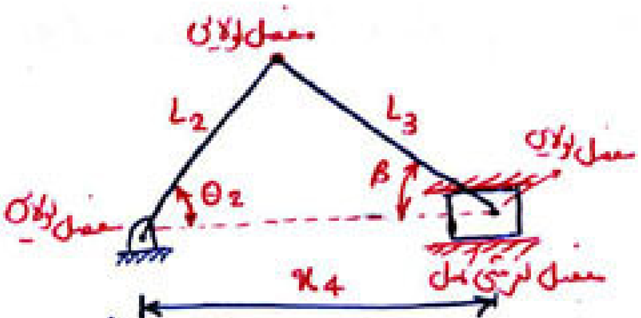
۲- مفصل لغزشی کامل: (Pure sliding)

در یک مفصل لغزشی کامل زمانی حادث می‌گردد که اعضاء در امتداد تماس مشترک نقطه تماس دارای حرکت نسبی باشند. به عبارت دیگر مفصل لغزشی کامل مفصلی است بین دو جسم به نحوی که موقعیت یکی از اجسام (اعضاء) توسط یک کمیت نسبت به جسم یا اجسام دیگر مشخص می‌شود.

در یک مفصل با تماس مستقیم موقعی لغزش پدید می‌آید که نقطه تماس در امتداد خط المرکزین واقع نشده باشد.

در تعریفی دیگر بیان می‌گردد که اگر دو جسم نسبت به هم سرعت زاویه‌ای (ω) نداشته باشند حرکت لغزشی کامل می‌باشد.

مثال:



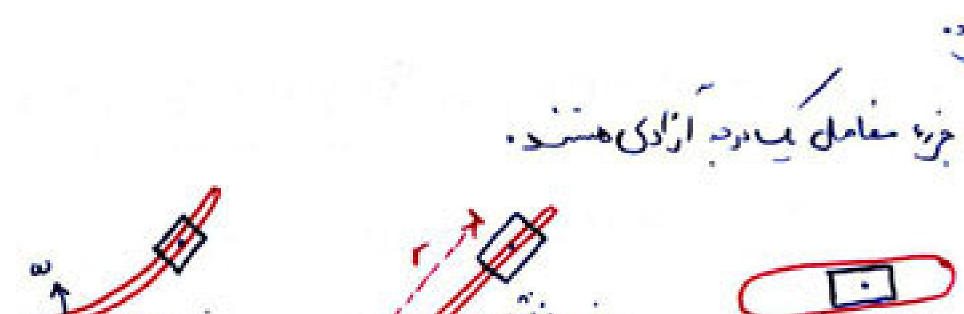
$$x_4 = x_{4/1} = L_2\cos\theta_2 + L_3\cos\beta$$

where: $\dfrac{\sin\beta}{L_2} = \dfrac{\sin\theta_2}{L_3}$

ملاحظه می‌شود که با معلوم بودن θ_2، جابجایی، سرعت و شتاب عضو ۴ نسبت به عضو 1 با یک کمیت که همان θ_2 است مشخص می‌گردد.

✓ نکته: مفاصل لغزشی کامل جزء مفاصل یک درجه آزادی هستند.

مثال:



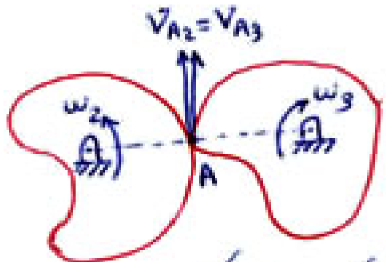
به دلیل عدم وجود ω (سرعت زاویه‌ای) و فقط با داشتن مقدار r می‌توان سرعت و شتاب را محاسبه کرد.

۳- مفصل غلتشی کامل: (Rolling Joint)

برای داشتن مفصل و تماس غلتشی سرعت‌های خطی اعضاء در نقطه تماس می‌بایست با یکدیگر یکسان بوده که ضرورتاً

نقطه تماس می بایست بر روی خط المرکزین واقع بوده باشد.

البته قرار داشتن نقطه تماس بر روی خط المرکزین امری ضروری است ولی کافی نمی باشد. زیرا فقط ممکن است در یک لحظه خاص مفصل غلتشی باشد و در سایر لحظات این شرایط برقرار باشد. به شکل زیر توجه شود.

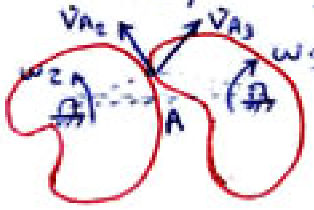


ملاحظه می گردد که تمام شرایط یک مفصل غلتشی برقرار است:

۱- نقطه تماس در خط واصل بین مراکز (خط المرکزین) واقع است.

۲- مقدار و جهت سرعت دو نقطه منطبق در نقطه تماس از دو جسم برابر است.

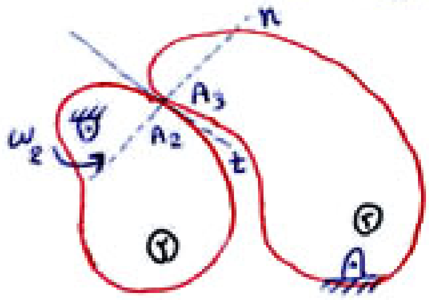
ولی مفصل فوق غلتشی خالص نیست زیرا فقط شرایط فوق در یک لحظه خاص می باشد.



(ملاحظه می گردد که در لحظه بعد شرایط مثل حالا نیست)

۴- مفصل لغزشی - غلتشی

اگر مفصل بین دو جسم که سرعت زاویه ای آنها نسبت به هم صفر نباشد از نوع غلتشی نباشد، آن مفصل از نوع غلتشی، لغزشی است.



در چنین مواقعی برای تعیین سرعت یک عضو نسبت به عضو دیگر به دو کمیت نیاز است.

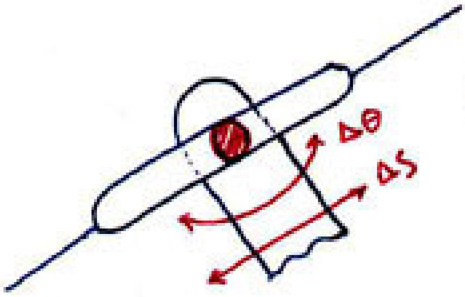
در این مفاصل در نقطه تماس سرعت نسبی ناشی از لغزش وجود دارد ($\vec{V}_{A_2/A_3}=\vec{V}_{A_2}-\vec{V}_{A_3}$)

برای تعیین سرعت زاویه ای عضو ۳ نیاز به تعیین V_{A_3} و V_{A_2/A_3} می باشد.

با توجه به این اصل که دو جسم در محل تماس در هم فرو نمی روند می توان جهت V_{A_2/A_3} را تعیین نمود. برای منظور دستگاه n-t را در محل تماس رسم می نماییم و با توجه به اینکه مولفه n سرعت همدیگر را خنثی می کنند، بنابراین فقط سرعت در راستای t وجود دارد که تفاضل سرعت های V_{A_2} و V_{A_3} باعث لغزش می گردد.

چرخ دنده ها و اتصال چنگالی (Fork Joint) دو نمونه مفصل لغزشی-غلتشی هستند.

اتصال چنگالی :

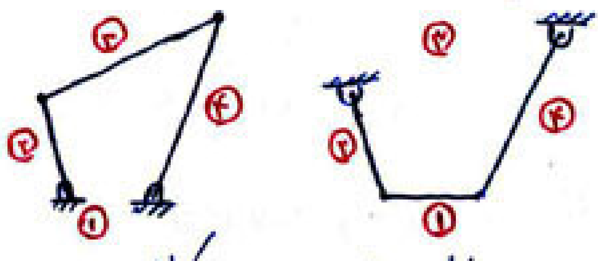


بین دو جزء سیستم هم اجازه لغزش (ΔS) و هم اجازه غلتش ($\Delta\theta$) دارد.

وارونش سینماتیکی یا برگردان :

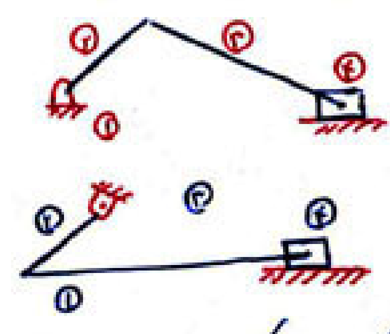
با ثابت قرار دادن میله‌ای دیگر از یک زنجیره سینماتیکی معین می‌توان یک سازوکار دیگر به دست آورد که به این عمل برگردان سازوکار می‌گویند.

به عبارت دیگر هرگاه دستگاه مختصات مرجع روی اجزاء n ام نصب گردیده و حرکات دیگر اجزاء نسبت به آن بررسی شود، سازوکار جدید را وارونش یا برگردان n ام سازوکار اصلی می‌خوانند، مثلاً در شکل‌های زیر برگردان سازوکار ۴ میله‌ای و سازوکار لنگ لغزنده قابل مشاهده می‌باشد.



«سازوکار اصلی»

«وارونش سوم»



در برگردان یک سازوکار این نکته مهم و قابل ذکر است که حرکت نسبی بین میله‌ها به هیچ وجه تغییر نمی‌کند.

به عنوان مثال در سازوکار لنگ لغزنده اگر میله ۲ به اندازه زاویه θ در جهت گردش عقربه‌های ساعت گردش نماید، میله ۴ در امتداد خطی مستقیم بر روی میله ۱ به مقدار معینی به طرف راست حرکت خواهد کرد. این مطلب بدون توجه به اینکه کدام میله ثابت است صادق خواهد بود.

حرکت در صفحه :

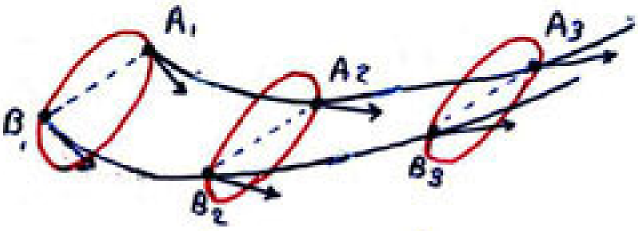
حرکت : تغییر وضعیت یک جسم (ذره مادی یا جسم صلب) نسبت به جسم دیگر که در طی زمان را حرکت گویند.

حرکت صفحه ای :

موقعی یک جسم دارای حرکت در صفحه خواهد بود که تمام نقاط آن در صفحاتی موازی با یک صفحه مبنا حرکت نمایند. این صفحه مبنا را صفحه حرکت می نامند. حرکت در صفحه می تواند یکی از سه نوع انتقالی، دورانی و ترکیب انتقالی و دورانی باشد.

حرکت انتقالی :

اگر جسمی طوری حرکت کند که تمام خطوط مستقیم واقع بر جسم همواره وضعیت های موازی همدیگر داشته باشند، جسم دارای انتقال خواهد بود.



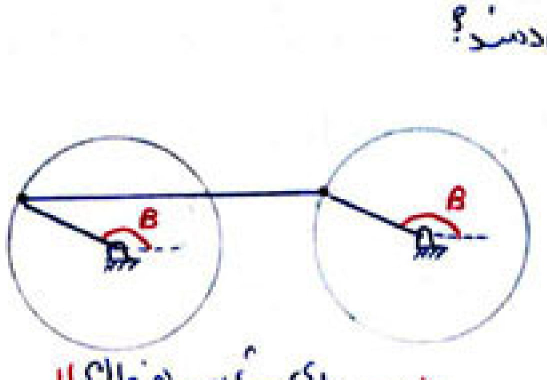
$$\overline{A_1B_1} \parallel \overline{A_2B_2} \parallel \overline{A_3B_3}$$

$\vec{V}_A = \vec{V}_B = F(t)$ (به طور مشابه برای تمام نقاط)

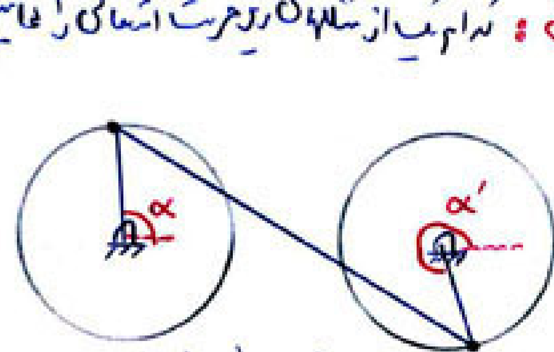
اگر مسیر حرکت تمام نقاط جسم صلب، مشابه و همزمان باشند به این معنی که مسیر همه نقاط یک منحنی بوده و در هر لحظه معین روی موقعیتهای متناظر از آن منحنی ها واقع باشند، حرکت را جزء دسته حرکت انتقالی می نامیم.

اگر مسیر مذکور، خط باشد آن را راست خط (مستقیم الخط) و در غیر این صورت خمیده خط (منحنی الخط) می نامند.

مثال : کدام یک از شکلهای زیر حرکت انتقالی را نمایش می دهند؟



« مسیرهای مشابه - همزمان »
حرکت انتقالی خمیده خط



« مسیرهای مشابه - غیر همزمان »
حرکت غیر انتقالی

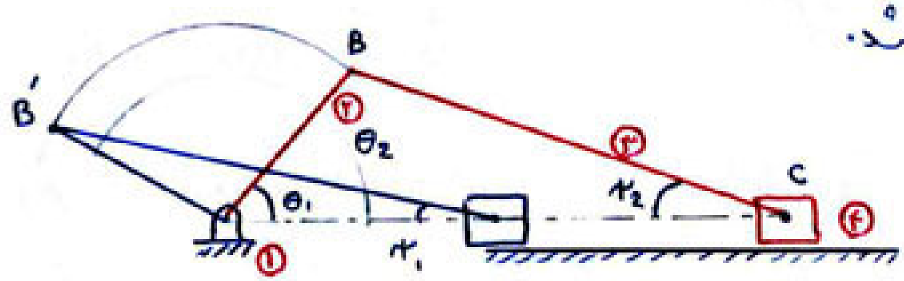
حرکت دورانی یا چرخشی:

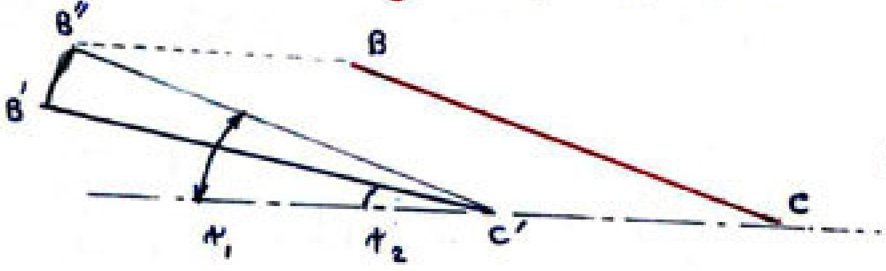
حرکتی است صفحه‌ای که در آن فاصله هر نقطه از جسم صلب در تمام طول چرخه حرکت از یک خط مستقیم (موسوم به محور دوران یا محور چرخش) یکسان و مقداری ثابت است و نقاط واقع بر روی جسم مسیر دایره‌ای را حول آن طی می‌کنند. سرعت نقاطی از جسم صلب که بر روی محور چرخش قرار دارند صفر است.

به عنوان مثال در مکانیزم لنگ ـ لغزنده، حرکت لنگ یک حرکت دورانی است.

انتقال و دوران:

ترکیبی از حرکت انتقالی و حرکت دورانی را حرکت کلی صفحه‌ای می‌گویند که اغلب قطعات ماشینها دارای حرکتی مرکب از انتقال و دوران می‌باشند. برای مثال حرکت میله رابط موتور در مکانیزم لنگ ـ لغزنده را ملاحظه نمایید. حرکت اهرم ۲ دورانی و حرکت اهرم ۴ خطی می‌باشد. اما حرکت اهرم ۳ (میله رابط) می‌تواند ترکیبی از حرکت دورانی و حرکت خطی (انتقالی) باشد.





ملاحظه می‌گردد که حرکت از BC به B'C' شامل دو قسمت می‌باشد:

$$\left.\begin{array}{l}\text{حرکت انتقالی از } BC \text{ به } B''C' \text{ به اندازه } \overline{CC'} \\ \text{حرکت دورانی از } B''C' \text{ به } B'C' \text{ به اندازه زاویه } \psi_1-\psi_2\end{array}\right\}$$

نکته: دو نوع حرکت دیگر به اسمهای حرکت مارپیچ و حرکت کروی نیز وجود دارد که در دسته حرکات صفحه‌ای نمی‌باشد.

(مراجعه به صفحه ۱۳ - دینامیک ماشین مارتین) پاورقی

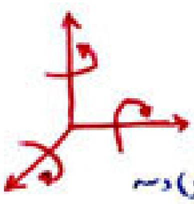
فصل دوم: درجه آزادی (Degree of Freedom)

تعریف کلی درجه آزادی:

طبق تعریف درجه آزادی برابر است با تعداد محورهای مختصات مستقل که برای تعریف حرکت نیاز است منهای تعداد روابط مانع (مقید کننده) که باعث مقید شدن آن حرکت می شوند.

به عبارت دیگر تعریف درجه آزادی عبارت است از تعداد متغیرهای (پارامترهای) مستقل یا کمترین پارامترهای مستقل که برای تعیین وضعیت جسم مورد نیاز است.

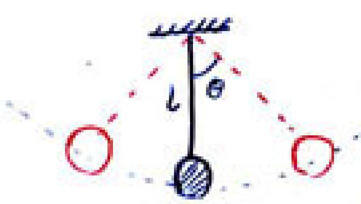
تذکر ۱: ذره در صفحه دارای (حداکثر) ۲ درجه آزادی و در فضا دارای (حداکثر) ۳ درجه آزادی می باشد. زیرا اندازه ذره ناچیز است و در نتیجه چرخش آن دور خودش مهم نیست.



تذکر ۲: جسم صلب در صفحه (حداکثر) ۳ درجه آزادی و در فضا (حداکثر) ۶ درجه آزادی دارد.

(سه جابجایی خطی و سه جابجایی زاویه ای)

مثال: درجه آزادی را تعیین نمایید.



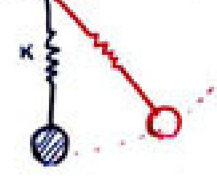
معادله نوسان: $\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = 0$

یک معادله داریم که مشتق مرتبه دوم θ را نشان می دهد که یک متغیر حذف می شود. اگر دستگاه مختصات x و y داشته باشیم درجه آزادی برابر است با:

درجه آزادی = ۲ - ۱ = ۱

در دستگاه قطبی نیز تنها متغیر θ وضعیت جسم را بیان می کند.

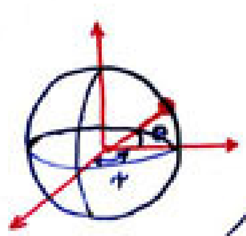
مثال: درجه آزادی را تعیین نمایید.



با وجود فنر k طول L ثابت نیست و معادله محدود کننده وجود ندارد.

درجه آزادی: ۲ = ۰ - ۲

مثال: درجه آزادی را تعیین نمایید.



(کره توخالی)

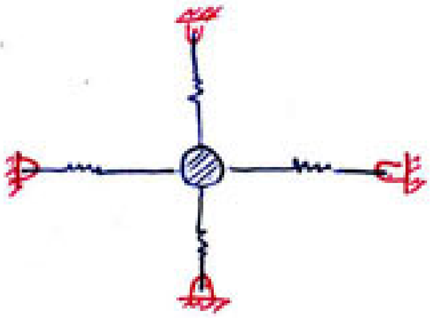
- در دستگاه x و y و z یک معادله قید وجود دارد: $x^2+y^2+z^2=r^2$

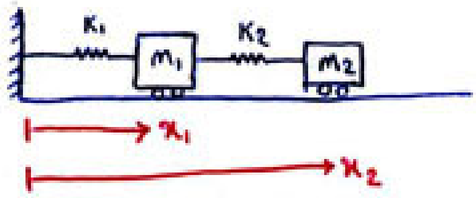
درجه آزادی: ۲ = ۱ - ۳

- در دستگاه r و θ و φ ، شعاع r محدود و θ و φ وضعیت جسم را تعیین می کنند.

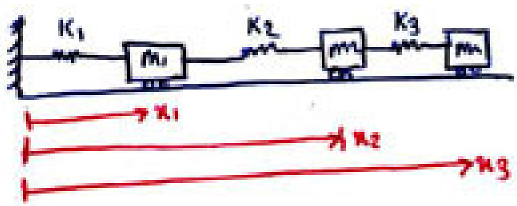
مثال: درجه آزادی شکلهای زیر را تعیین کنید. (دو صفحه)

((رابطه مانع نداریم درجه آزادی برابر ۳ می باشد))

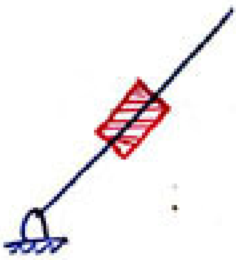




مسأله دارای ۲ درجه آزادی است. اگر یکی از دو جرم را بگیریم دیگری مستقل از آن حرکت می کند.

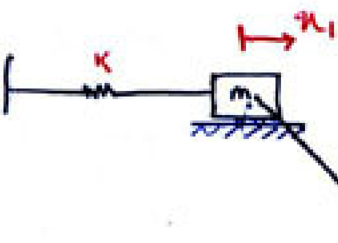


هر کدام از ۳ جرم با یک مختصه x حرکت می کنند و در نتیجه ۳ درجه آزادی داریم.



دو درجه آزادی دارد.

(تغیر r و تغیر θ) یا (x و y)



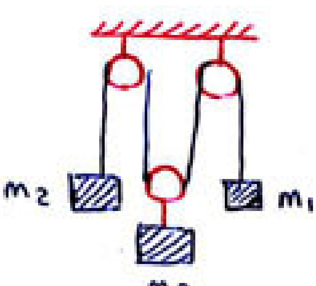
دو درجه آزادی دارد.

یکی حرکت جرم m_1 (x) و دیگری نوسان آونگ (θ)

اگر جسم الاستیک باشد هر ذره آن ۳ درجه آزادی دارد و به دلیل اتصال حرکت ذرات نسبت به هم تعداد ∞ ذره با ۳ درجه آزادی وجود دارد که ∞ درجه آزادی بوجود می آید. لذا کلیه اجسام الاستیک را جهت بررسی و تحلیل صلب درنظر می گیریم با احتساب 6 درجه آزادی در فضا.

- در سیستم طناب و قرقره درجه آزادی عبارت است از (تعداد جرمها - تعداد طنابها)

مثال: درجه آزادی = ۲ <= ۱ طناب - 3 جرم



چون ۲ درجه آزادی دارد می تواند ۲ ورودی دلخواه نیز داشته باشد

درجه آزادی در زنجیره سینماتیکی :

درجه آزادی یک زنجیره سینماتیکی عبارت است از تعداد حداقل پارامترهای مستقل که برای تعیین وضعیت اعضای یک زنجیره سینماتیکی نسبت به عضو پایه مورد نیاز می باشد. به عبارت دیگر تعداد ورودی های مورد نیاز جهت قرار دادن یک مکانیزم در وضعیت خاص را درجه آزادی گویند.

درجه آزادی یک سازوکار (مکانیزم) را می توان با استفاده از تعداد اعضا و تعداد و نوع اتصالات بکار رفته تعیین نمود. به این منظور از رابطه گروبلر (Grubler) استفاده می گردد:

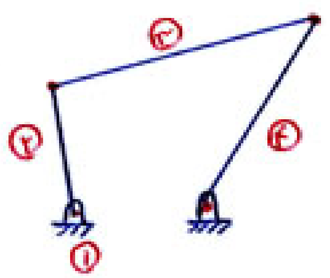
$$\boxed{DoF = 3(n-1) - 2F_1 - F_2}$$

n : تعداد اعضای مکانیزم

F_1 : تعداد مفاصل یک درجه آزادی شامل مفاصل لولایی، لغزشی یا غلتشی

F_2 : تعداد مفاصل دو درجه آزادی شامل مفاصل لغزشی-غلتشی

مثال: درجات آزادی مکانیزم های زیر را تعیین کنید:

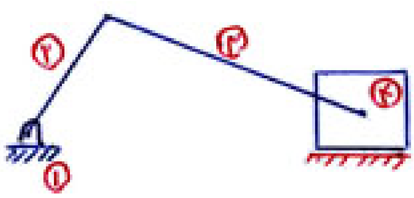


$n=4$

$F_1 = 4$ (لولا)

$F_2 = 0$

$DoF = 3(4-1) - 2\times4 - 0 = 9-8 = 1$

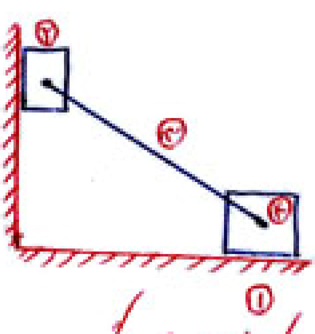


$n=4$

$F_1 = 3$ (لولا) $+ 1$ (لغزنده) $= 4$

$F_2 = 0$

$DoF = 3(4-1) - 2\times4 - 0 = 9-8 = 1$



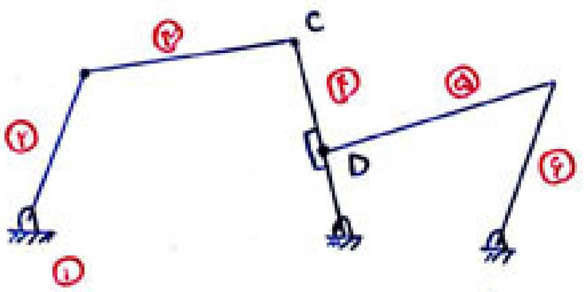
« مکانیزم بیضی نگار »

$n=4$

$F_1 = 2$ (لولا) $+ 2$ (لغزنده) $= 4$

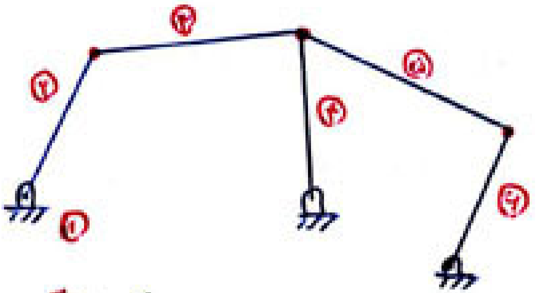
$F_2 = 0$

$DoF = 3(4-1) - 2\times4 - 0 = 9-8 = 1$



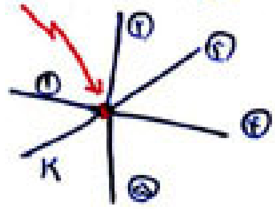
$$\begin{cases} n = 6 \\ F_1 = 7 \\ F_2 = 0 \end{cases} \qquad DoF = 3(6-1) - 2\times 7 - 0 = 1$$

حال فرض کنید C و D بر هم منطبق شده اند

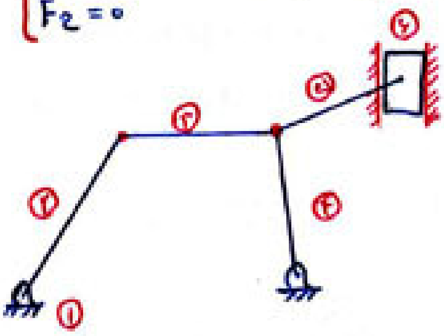


✓ نکته مهم: هرگاه K عضو در یک نقطه لولا شده باشند آن لولا یک لولای چندگانه خوانده می شود و معادل (K-1) لولای ساده می باشد

(K-1) لولا

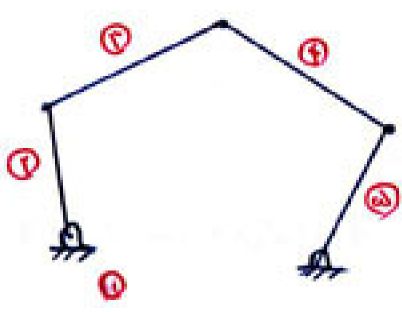


$$\begin{cases} n = 6 \\ F_1 = 7 \\ F_2 = 0 \end{cases} \qquad DoF = 3(6-1) - 2\times 7 - 0 = 1$$



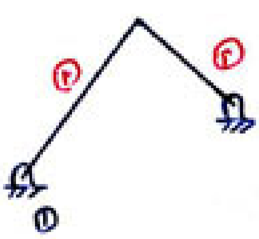
$$\begin{cases} n = 6 \\ F_1 = 7 \\ F_2 = 0 \end{cases} \qquad DoF = 3(6-1) - 2\times 7 - 0 = 1$$

✓ لغزنده چه به صورت شماتیک با یک سطح درگیر باشد چه با دو سطح در مجموع یک مفصل لغزشی از نوع F_1 محسوب می شود



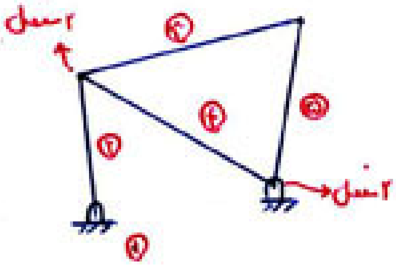
$$\begin{cases} n = 5 \\ F_1 = 5\ (\text{لولا}) \\ F_2 = 0 \end{cases} \qquad DoF = 3(5-1) - 2\times 5 - 0 = 2$$

✓ مکانیزم ۲ درجه آزادی است و جهت حرکت نیاز به ۲ ورودی دارد.



$$\begin{cases} n = 3 \\ F_1 = 3 \\ F_2 = 0 \end{cases} \qquad DoF = 3(3-1) - 2\times 3 - 0 = 0$$

زمانی که یک مکانیزم دارای درجه آزادی صفر باشد یعنی مجموعه صلب و نامتحرک بوده یا اصطلاحاً سازه نامیده می شود

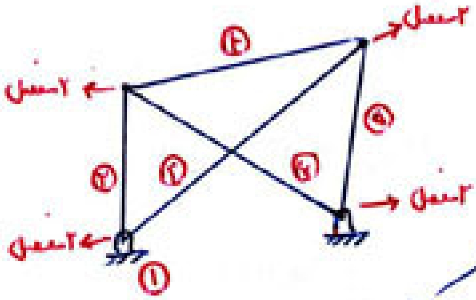


$\begin{cases} n = 5 \\ F_1 = 6 \\ F_2 = 0 \end{cases}$ $\quad DoF = 3(5-1) - 2(6) - 0 = 0$ سازه معین (صلب)

نکته: به ازای هر میله یا اهرمی که به سازه معلومی اضافه گردد، سه درجه آزادی افزایش می یابد و به ازای هر لولایی که به مکانیزم افزوده شود، دو درجه آزادی کاسته می شود.

- در نهایت افزودن هر اهرم دو مفصلی به مکانیزم باعث کاهش یک درجه آزادی می گردد. $((3(1) - 2\times2 = -1))$

در مثال بالا افزایش یک اهرم به مکانیزم ۴ میله ای باعث کاهش درجه آزادی از ۱ به صفر گردید.



$\begin{cases} n = 6 \\ F_1 = 8 \\ F_2 = 0 \end{cases}$ $\quad DoF = 3(6-1) - 2\times8 = -1$ سازه نامعین (دارای یک درجه فوق صلب)

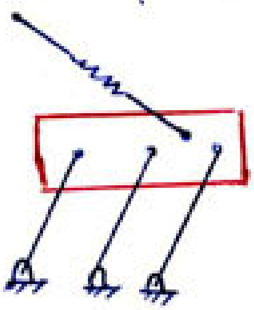
- یعنی سازه نامعین فوق نه تنها حرکت نمی کند بلکه اگر یک میله را هم برداریم باز هم حرکتی نداریم.

استثنا:

۱- رابطه گروبلر در مورد مکانیزمهایی که قسمتی از آن را می توان توسط اهرمهای موازی جایگزین و معادل نمود، صادق نیست.

۲- اگر افزودن عضو یا اتصال جدید تاثیری در حرکت نداشته باشد، یعنی با حذف آن اهرم یا عضو یا مفصل همچنان حرکت قبلی امکان پذیر باشد در این صورت دستور گروبلر دیگر درست نخواهد بود.

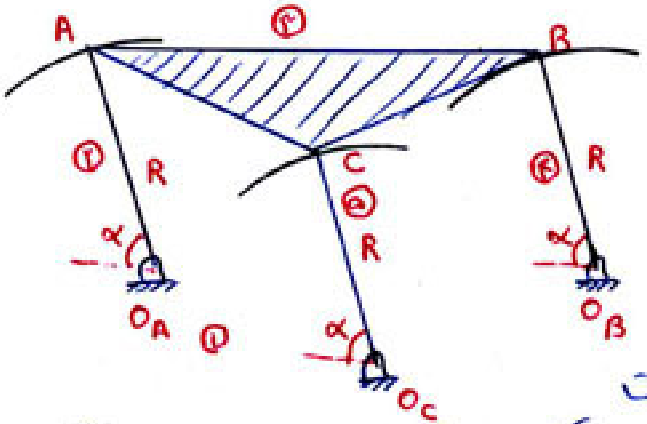
مثال:



در مکانیزم رو به رو حذف هر یک از میله ها تاثیری در حرکت ندارد و قابل حذف هستند.

$$DoF = 3(4-1) - 2\times4 - 0 = 1$$

مثال:



$n=5$
$F_1=6$
$F_2=0$

$$DoF=3(5-1)-2(6)=0$$

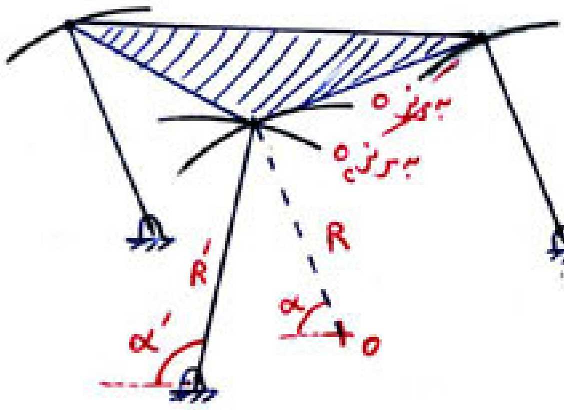
(غیر واقعی)

مکانیزم فوق، مکانیزم موازی الاضلاع می باشد و چون حرکت تمامی نقاط روی عضو یا اهرم ۲ یک حرکت انتقالی است؛ بنابراین مسیر حرکت همه نقاط این اهرم، دایره‌ای به شعاع R می باشد و اگر دوران هر نوع قیدی به مکانیزم که سبب گردد مسیر نقطه‌ای از این اهرم، همین دایره باشد، یک قید اضافی و زائد بوده و قابل حذف می باشد. مثلاً اهرم ۵ سبب می‌گردد تا نقطه C روی مسیر اولیه خود (در حالتی که اهرم ۵ وجود نداشته) باقی بماند. بنابراین وجود این اهرم (اهرم ۵) زائد و قابل حذف است.

با حذف این اهرم داریم:

$$\begin{cases} n=4 \\ F_1=4 \\ F_2=0 \end{cases} \qquad DoF=3(4-1)-2\times4-0=1$$

اما در صورتی که اهرم ۵ کمی بلند یا کوتاه باشد ($R\pm\varepsilon$) یا زاویه α کمی کم یا بیشتر باشد ($\alpha\pm\varepsilon$) آنگاه نقطه C وادار به حرکت روی مسیر دایره‌ی جدیدی می‌شود که با مسیر قبلی متفاوت شده و توسط مکانیزم موازی الاضلاع ممانعت شده و با توجه به اینکه یک نقطه واحد نمی‌تواند روی دو دایره مختلف حرکت کند، پس سازوکار قفل می‌شود.

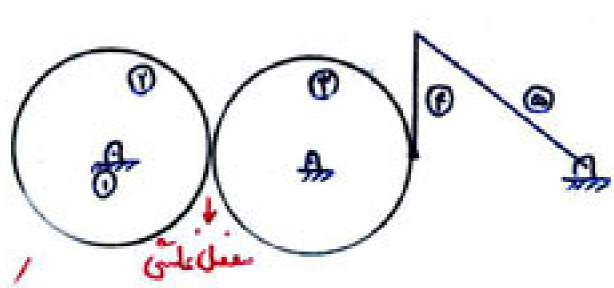


$n=5$
$F_1=6$
$F_2=0$

$$DoF=3(5-1)-2\times6=0$$

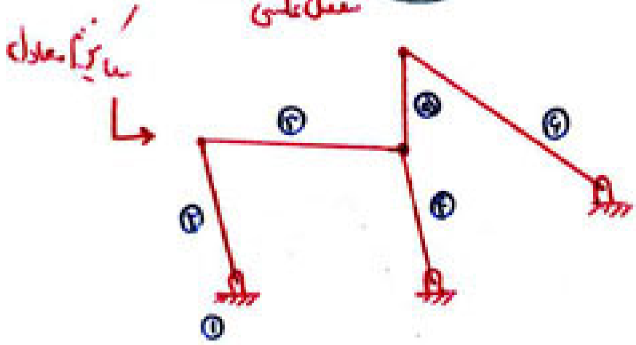
(واقعی)
(سازه صلب)

مثال:



$n=5$
$F_2=6$ $\quad DoF=3(4)-2(6)=0$
$F_2=0$

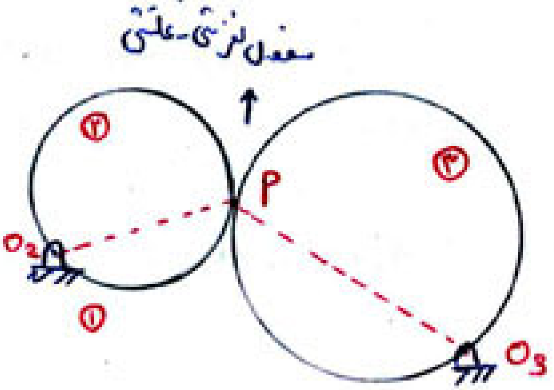
(غیرواقعی)



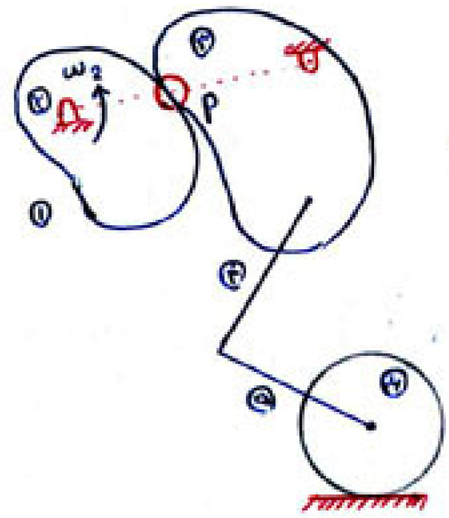
$n=6$
$F_2=7$ $\quad DoF=3(5)-2(7)=1$
$F_2=0$

(واقعی)

مثال: درجه آزادی مکانیزم‌های زیر را تعیین کنید.



$$\begin{cases} n=3 \\ F_1=2 \\ F_2=1 \end{cases} \qquad DoF=3(2)-2(2)-1=1$$



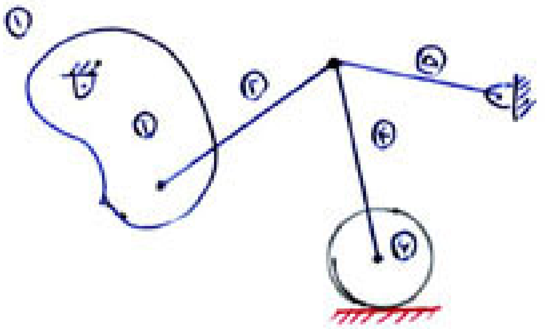
$$\begin{cases} n=6 \\ F_1=6 \\ F_2=1 \end{cases} \qquad DoF=3(5)-2(6)-1=2$$

✓ نکته: با وجود اینکه $V_{P_3}=V_{P_2}$
ولی در لحظات بعد این وضعیت برقرار نیست و مفصل لغزشی غلتشی است.

✓ نکته: هر جسم که روی زمین قرار دارد (جسم غلتان و گرد) چنانچه پین نشده باشد و اطلاعاتی از حرکت آن در دست نباشد نسبت به زمین یک مفصل غلتشی به حساب می‌آید.

تکلیف: ✓

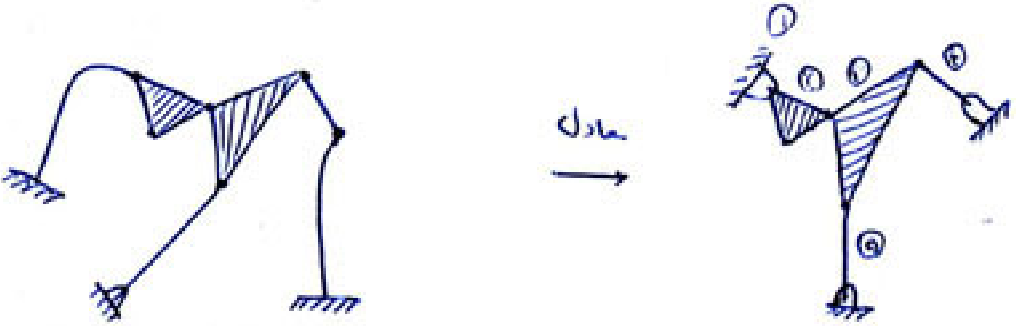
(۱)



$$\begin{cases} n=6 \\ F_1=7 \\ F_2=0 \end{cases}$$

$$DoF=3(5)-2(7)=1$$

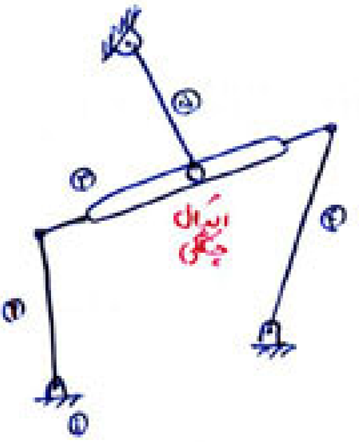
(۲)



$$\begin{cases} n=5 \\ F_1=6 \\ F_2=0 \end{cases}$$

$$DoF=3(4)-2(6)=0$$

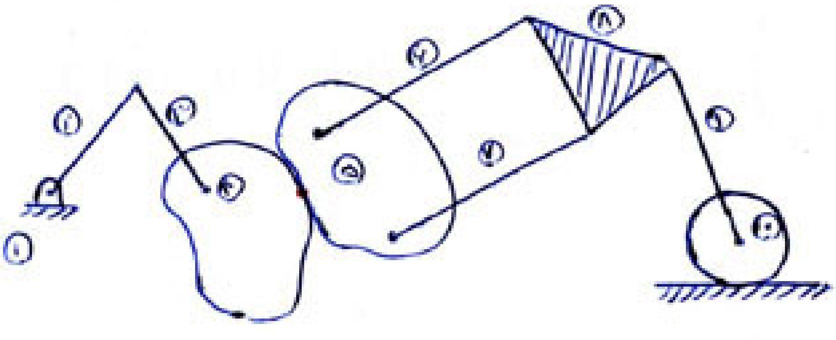
(۳)



$$\begin{cases} n=5 \\ F_1=5 \\ F_2=1 \end{cases}$$

$$DoF=3(4)-2(5)-1=1$$

(۴)

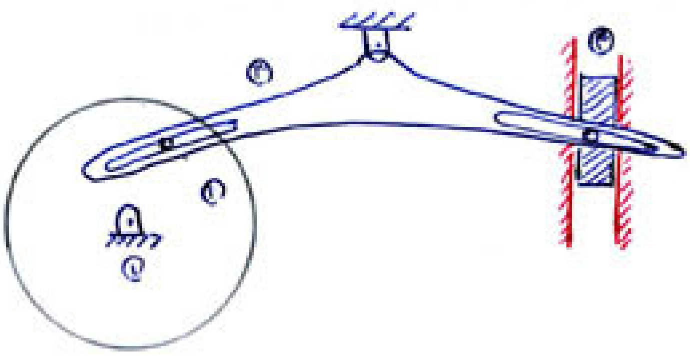


$$\begin{cases} n=10 \\ F_1=10+1 \\ F_2=0 \end{cases}$$

$$DoF=3(9)-2(11)=5$$

با توجه به اینکه بین اجزا ۵ و ۴ یک مفصل وجود دارد و تضادی در مورد لغزشی یا غلتشی بودن نمی‌توان ارائه داد و در اثر دوران دو اجزا ۴ و ۵ مشخص نیست لغزش ایجاد شود که مفصل غلتشی است.

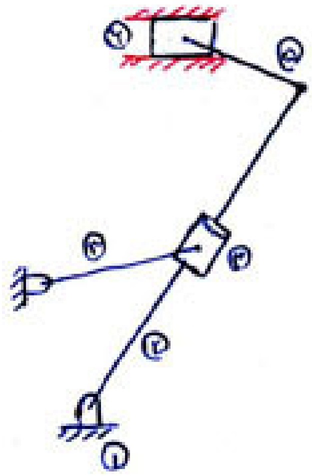
(۵)



$$\begin{cases} n=4 \\ F_1=3 \\ F_2=2 \end{cases}$$

$$DoF=3(3)-2(3)-2=1$$

6



$$\begin{cases} n=6 \\ F_1=7 \\ F_2=0 \end{cases} \qquad DoF=3(5)-2(7)=1$$

تسمه به عنوان اتصال پوششی (wrapping Pair)

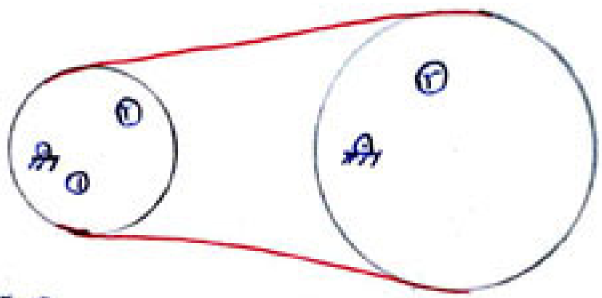
یک سیم، تسمه، زنجیر و یا هر عضو انعطاف پذیر و بدون قابلیت تغییر طول که دو عضو را بدون تماس مستقیم را به هم وصل می‌کند و یک اتصال دو درجه آزادی می‌باشد را اتصال پوششی گویند. یک درجه آزادی چرخشی جسم حول محل تماس اتصال و یک درجه دیگر انتقال منحنی الخط (دور محیط دایره) حول محل دیگر تماس اتصال می‌باشد.

پس از نوع F_2 می‌باشد.

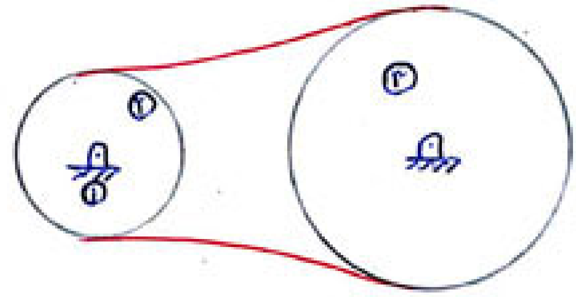
اگر در سازوکار ثابت بودن طول تسمه تضمین شود یک اتصال F_2 در نظر گرفته می‌شود و در غیر این صورت دو اتصال F_2 در نظر گرفته می‌شود.

تسمه در شمارش اعضا لحاظ نمی‌گردد (قرارداد)

مثال: درجه آزادی دو سازوکار زیر را تعیین کنید.



$$\begin{cases} n=3 \\ F_1=2 \\ F_2=2 \end{cases} \qquad DoF=3(2)-2(2)-2=0$$



$$\begin{cases} n=3 \\ F_1=2 \\ F_2=1 \end{cases} \qquad DoF=3(2)-2(2)-1=1$$

✓ نکته: مفصل بین دو چرخنده یا محل اتصال و تماس دو چرخنده یک مفصل لغزشی غلتشی با دو درجه آزادی از نوع F_2 محسوب می‌شود.

فصل سوم : مراکز آنی (Centers)

(مدل ۲ ساعتی)

اصطلاح مرکز آنی برای نشان دادن مرکز دوران یک جسم در هر لحظه مورد استفاده قرار می‌گیرد و به شکل زیر تعریف می‌شود:

تعریف ۱) مرکز آنی نقطه‌ای واقع بر یک جسم بوده که عضو دیگری به طور دائم یا لحظه‌ای حول آن دوران می‌نماید.

تعریف ۲) مرکز آنی نقطه‌ای مشترک واقع بر دو جسم می‌باشد که در سرعت‌های انتقالی آنها چه از نظر مقدار و چه از نظر امتداد و جهت با هم برابر می‌باشند و در آن نقطه سرعت نسبی بین دو جسم مورد نظر صفر است.

- مرکز آنی چرخش بین دو جسم متحرک شامل m و n را با I_{mn} یا I_{nm} نمایش می‌دهند.
- برای یک مکانیزم که شامل n عضو باشد، تعداد مراکز آنی از رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$N = \frac{n(n-1)}{2}$$

- مراکز چرخش می‌توانند آنی (Instantaneous) و یا دائم (Permanent) باشند. در موردی که محل مرکز چرخش، نسبت به دو جسم تغییر نکند آن را آنی در هر آن ثابت دائم گویند.

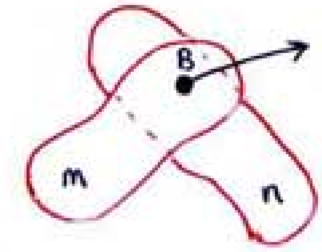
مراکز آنی بر دو نوع‌اند: ۱- مراکز آنی اولیه (Primery centers)

۲- مراکز آنی ثانویه (secondry centers)

- موقعیت مراکز چرخش اولیه با توجه به ساختمان مکانیزم معلوم بوده و نیازی به انجام فرآیند آنالیز نیست، اما موقعیت مراکز چرخش ثانویه با توجه به موقعیت مراکز چرخش اولیه و انجام فرآیندهای آنالیز معلوم می‌شود.
- هر دو نوع مرکز چرخش اولیه و ثانویه می‌توانند دائم یا آنی باشند.

۱) مرکز آنی در مفصلهای پینی (لولایی)

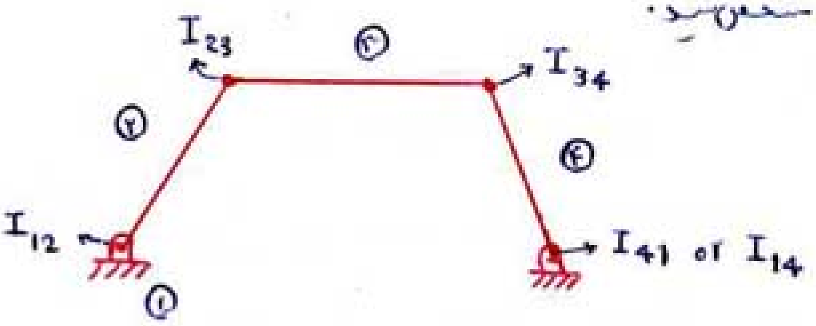
اگر دو جسم به هم لولا شده باشند، در آن نقطه سرعت دو جسم متحرک با هم برابر است و آن نقطه مرکز آنی چرخش می‌باشد.



$$(\overrightarrow{V_B})_n = (\overrightarrow{V_B})_m$$

$$\hookrightarrow I_{mn} = B$$

یعنی نقطه مفصل همان مرکز آنی اولیه چرخش می باشد.



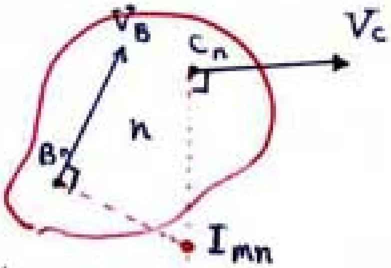
مثال: مراکز آنی چرخش از نوع پینی در شکل زیر را مشخص کنید.

$$N = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{4(3)}{2} = 6$$

از 6 مرکز آنی برای مکانیزم تعداد ۴ عدد مراکز آنی اولیه از نوع لولایی یا پینی می باشد.

۲) مرکز آنی جسم صلبی که امتداد سرعت خطی دو نقطه آن معلوم باشد:

اگر راستای سرعت دو نقطه از یک جسم صلب معلوم باشد و آن دو راستا موازی نباشند با رسم دو عمود بر راستاهای معلوم در محل برخورد آن دو عمود می توان مرکز آنی دوران آن جسم را مشخص کرد.

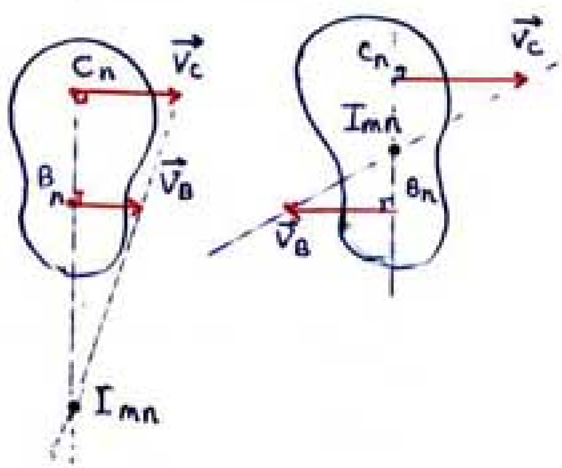


$$\vec{V}_c = \vec{\omega}_n \times \vec{IC} \qquad \vec{V}_c \perp \vec{IC}$$

$$\vec{V}_B = \vec{\omega}_n \times \vec{IB} \qquad \vec{V}_B \perp \vec{IB}$$

(زمین m)

اگر راستای سرعت دو نقطه از یک جسم صلب معلوم و آن دو راستا موازی باشند، در این صورت پس از خارج نمودن یک عمود بر راستای سرعت دو نقطه، انتهای سرعت دو نقطه را به هم وصل کرده تا مرکز چرخش از تقاطع دو خط فوق حاصل گردد.



(زمین m)

$$\vec{V}_c = \vec{\omega}_n \times IC$$

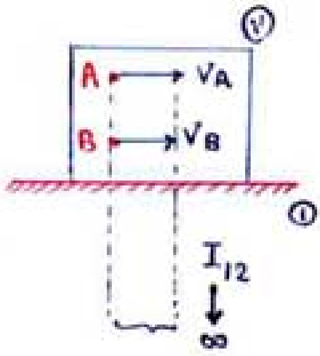
$$\vec{V}_B = \vec{\omega}_n \times IB$$

$$\omega_n = \frac{|\vec{V}_c|}{IC} = \frac{|\vec{V}_B|}{IB}$$

۳) مرکز آنی یک جسم لغزنده

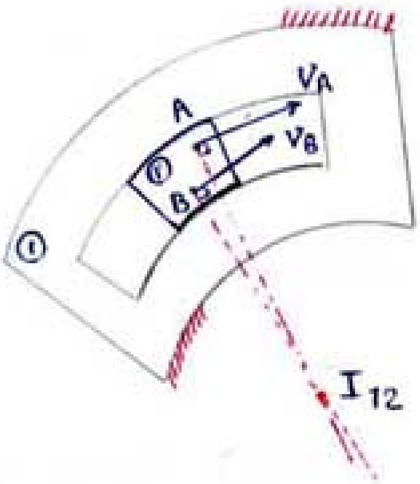
اگر حرکت بین دو جسم از نوع لغزش کامل باشد در آن صورت ممکن است یکی از حالات زیر اتفاق افتد:

الف) لغزش در امتداد مسیری مستقیم:



با توجه به اینکه سرعت دو نقطه از جسم ($\vec{V}_A$ و $\vec{V}_B$) مشخص و برابر است.
لذا رسم دو عمود بر امتداد این دو بردار، دو خط موازی است
که فرض می‌شود دو خط موازی همدیگر را در بی‌نهایت قطع می‌کنند.
لذا مرکز آنی دوران در بی‌نهایت و عمود بر سطح لغزش است.

$V = r\omega \Rightarrow \omega = \frac{V}{r}$ ، $r \to \infty \Rightarrow \omega = 0$ (جسم لغزش کامل دارد)

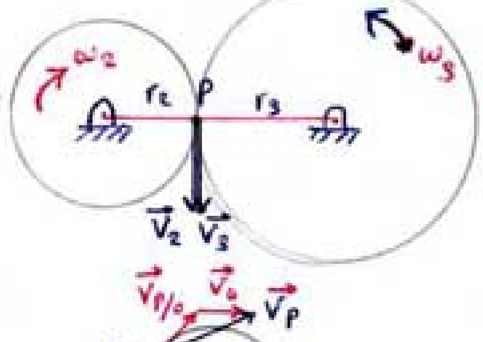


ب) لغزش در امتداد مسیر منحنی:

با توجه به مسیر منحنی شکل، وجود یک مرکز آنی دوران
در بی‌نهایت نیست بلکه در مرکز انحنای مسیر می‌باشد.

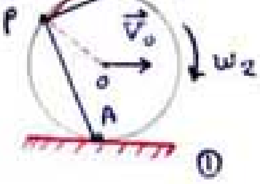
۴) مرکز آنی یک جسم غلتان

اگر یک جسم بدون لغزش روی جسم دیگری بغلتد، (جسم دیگری می‌تواند ساکن یا متحرک باشد) آنگاه به دلیل اینکه سرعت در نقطه تماس از دو جسم برابر است و سرعت نسبی برای نقاط محل تماس صفر می‌باشد، بنابراین نقطه تماس، خود مرکز آنی سرعت (دوران) دو جسم نسبت به هم است.



$\vec{V}_2 = \vec{V}_3 \Rightarrow r_2\omega_2 = r_3\omega_3$

$\vec{V}_{2/3} = 0 \Rightarrow I_{23} = P$



$\vec{V}_P = \vec{V}_{P/O} + \vec{V}_O$

(مرکز آنی دوران) $I_{12} = A$

سرعت هر نقطه P یا O یا ... را می‌توان نسبت به نقطه A بدست آورد، لذا در نقطه تماس

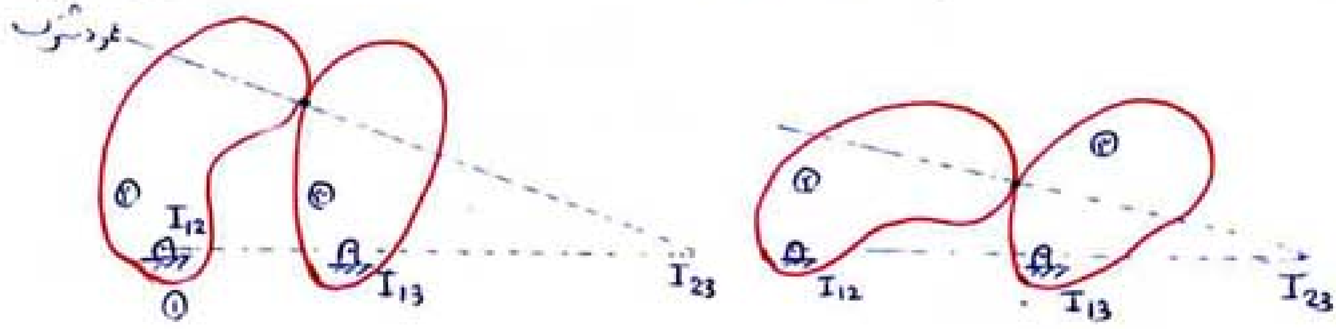
۵) مراکز آنی در تماس لغزشی - غلتشی

اگر تماس بین دو جسم از نوع غلتشی - لغزشی باشد در آن صورت برای تعیین مرکز آنی آن دو جسم نسبت به هم به شرح زیر عمل می‌کنیم:

الف) مرکز یا مراکز آنی دو جسم نسبت به یکدیگر را پیدا می‌کنیم.

ب) عمود مشترک دو سطح در نقطه تماس را رسم می‌کنیم.

پ) محل تلاقی عمود مشترک با امتداد بین مراکز بین دو جسم نسبت به یکدیگر، مرکز آنی دو جسم نسبت به یکدیگر است.



I_{23} می‌تواند جزئی از جسم ۲ یا ۳ نیز باشد.

قضیه کندی: (Arnhold Kennedy)

بنا بر قضیه کندی سه قطعه که نسبت به یکدیگر دارای حرکت نسبی می‌باشند، دارای سه مرکز آنی بوده که هر سه در یک راستا می‌باشند. یعنی اگر سه جسم صلب m و n و k داشته باشیم، با معلوم بودن I_{nk} و I_{mk} می‌توان گفت مرکز چرخش I_{nm} روی خط واصل بین دو مرکز فوق قرار دارد. (مثال شکل بالا)

روش دیاگرام دایره برای جابجایی مراکز آنی ثانویه

یکی از روشهای تعیین مراکز آنی ثانویه روش دایره می‌باشد که به ترتیب زیر عمل می‌کنیم.

۱- ابتدا دایره‌ای به شعاع دلخواه رسم می‌کنیم و به n قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم. (n تعداد اعضای مکانیزم است)

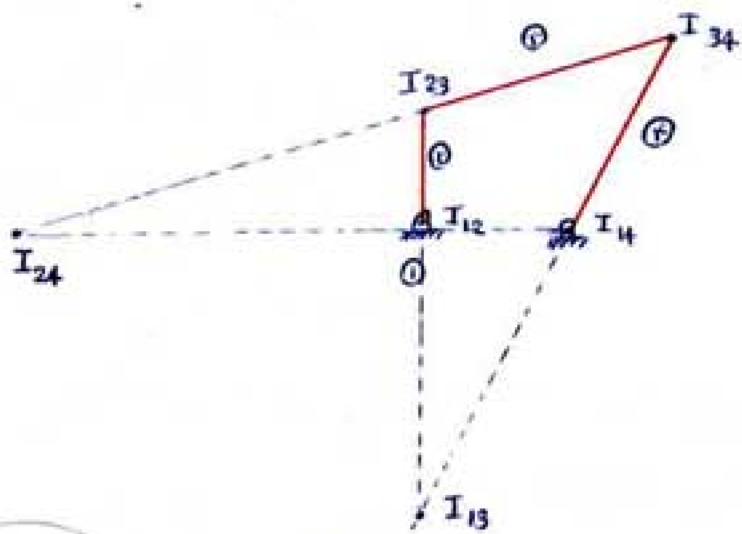
۲- به هر گره یک شماره داده می‌شود که معرف یک جسم صلب با همان شماره خواهد بود.

۳- رابطه بین هر دو گره (دو عضو) معرف یک مرکز آنی (مرکز چرخش) است. اگر این مرکز از نوع اولیه باشد آن را با خط پر و اگر مرکز مربوط مجهول باشد (ثانویه) آن را با خط نقطه‌چین مشخص می‌کنیم.

۴- برای تعیین مراکز آنی ثانویه، هر دو مثلثی را در نظر می‌گیریم که در یک ضلع نقطه‌چین مشترک و دو ضلع دیگر آنها توپر باشد.

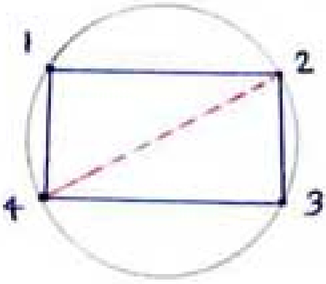
۵- بر اساس قضیه کندی، محل مرکز آنی ثانویه را بدست می‌آوریم و پس از تعیین آن خط‌چین مربوط را با خط پر بر روی دایره نمایش می‌دهیم.

مثال: کلیه مراکز آنی مکانیزم زیر را تعیین کنید.



$N = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{4(3)}{2} = 6$

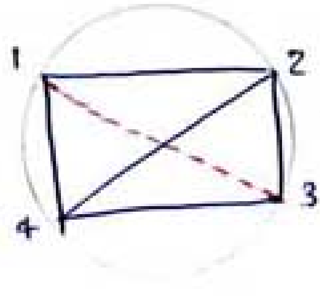
از مجموع ۶ مرکز آنی تعداد ۴ عدد مراکز آنی اولیه شامل می‌باشند. جهت تعیین ۲ مرکز آنی ثانویه از روش دایره استفاده می‌کنیم.



جهت بدست آوردن مرکز آنی ثانویه I_{24} از دو مثلث $\hat{234}$ و $\hat{214}$ استفاده می‌کنیم.

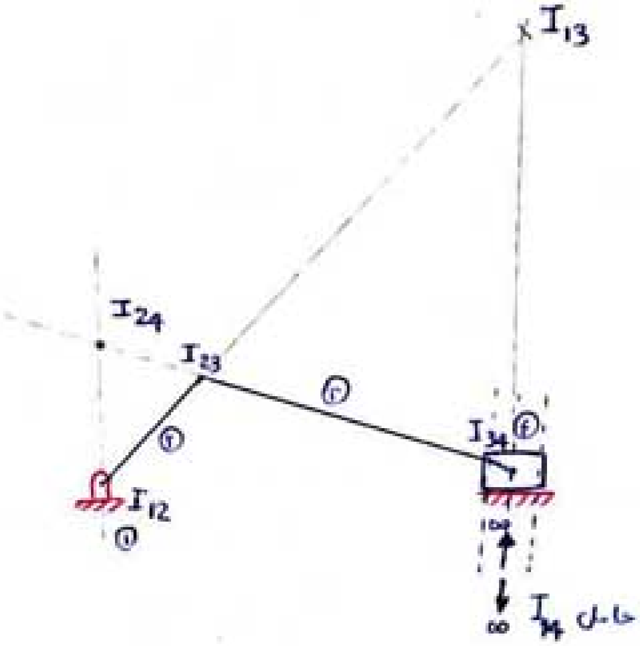
از مثلث $\hat{234}$ امتداد مراکز آنی اولیه I_{23} و I_{34} را با هم وصل می‌کنیم.

از مثلث $\hat{214}$ امتداد مراکز آنی اولیه I_{12} و I_{14} را با هم وصل می‌کنیم.



محل تقاطع دو خط I_{24} را به ما نشان می‌دهد و خط 24 را پر (کامل) می‌کنیم.

به همین ترتیب I_{13} را از دو مثلث $\hat{123}$ و $\hat{143}$ بدست می‌آوریم.



مثال: کلیه مراکز آنی مکانیزم را نشان دهید.

$$N=\frac{n(n-1)}{2}=6$$

۴ مرکز آنی اولیه هستند که I_{12} و I_{23} و I_{34} در مفاصل است و I_{14} در راستای عمود بر لغزنده و در بی‌نهایت است.

$I_{31} \rightarrow \overset{\Delta}{123}$ و $\overset{\Delta}{143}$

$I_{24} \rightarrow \overset{\Delta}{214}$ و $\overset{\Delta}{432}$

برای $\overset{\Delta}{214}$ می‌بایست I_{12} و I_{14} را به هم متصل کنیم و برای این کار، از محل I_{12} صفحه عمود به سمت بی‌نهایت رسم می‌کنیم.

«توضیحی از کاربرد مراکز آنی دوران در این مثال»:

فرض کنید ω_2 معلوم باشد. ω_3 و ω_4 را معلوم کنید:

با ترسیم مراکز آنی و مشخص بودن محل آنها می‌دانیم که I_{23} نقطه‌ای است که سرعت در جسم 2 و 3 نسبت به آن یکسان است.

از جسم ۲ $\quad V_{I_{23}}=(I_{12}-I_{23})\,\omega_2$

از جسم ۳ $\quad V_{I_{23}}=(I_{13}-I_{23})\,\omega_3$

$$\Rightarrow \omega_3=\frac{I_{12}-I_{23}}{I_{13}-I_{23}}\,\omega_2$$

حال با توجه به اینکه I_{23} بین I_{12} و I_{13} است لذا ω_3 در خلاف جهت ω_2 است.

ضمناً چون طول $\overline{I_{12}-I_{23}}$ از طول $\overline{I_{13}-I_{23}}$ کمتر است $\longleftarrow$ $\omega_2>\omega_3$

به طور کلی می‌توان تعریف کرد:

$$\omega_{\text{متحرک}}=\frac{\text{فاصله مرکز آنی محرک نسبت به ثابت تا مرکز آنی محرک نسبت به متحرک}}{\text{فاصله مرکز آنی متحرک نسبت به ثابت تا مرکز آنی محرک نسبت به متحرک}}\cdot\omega_{\text{محرک}}$$

با ترتیب فوق برای ω_4 داریم:

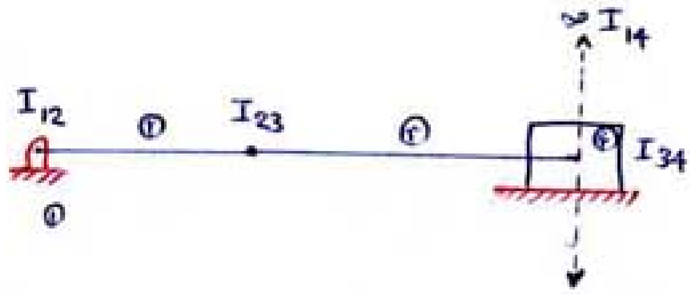
$$\omega_4=\frac{I_{12}-I_{24}}{I_{14}-I_{24}}\,\omega_2 \Rightarrow \omega_4=0$$

به سمت ∞

جسم ۴ فقط لغزش دارد که کاملاً صحیح است.

* نکته: اگر مرکز آنی دو جسم نسبت به هم مابین مراکز آنی هر دو جسم نسبت به ثابت باشد، در آن صورت جهت ω محرک خلاف جهت ω متحرک است. و اگر مابین نباشد ω محرک و متحرک هم جهت می‌باشند.

مثال: در مکانیزم مقابل در حالت ذیل مراکز آنی را مشخص کنید.



ابتدا مانند دایره شکل مقابل را رسم می‌کنیم و

از تمام مثلث‌ها استفاده می‌کنیم.

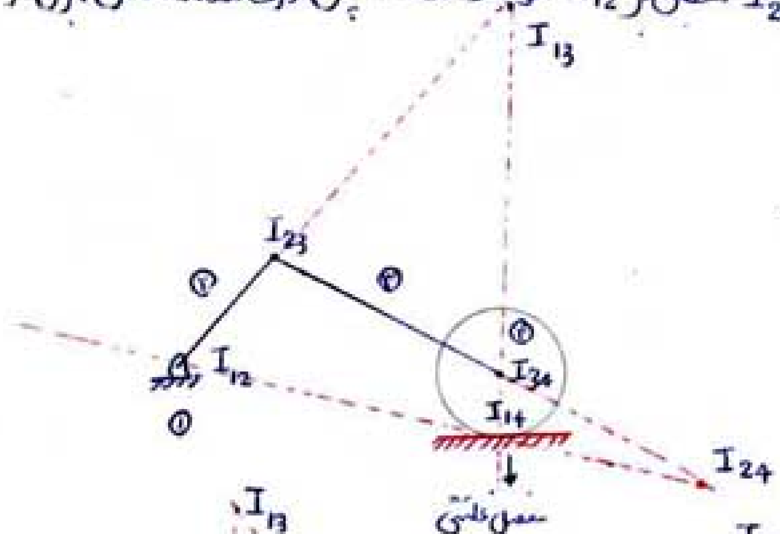
$$I_{13} \rightarrow \overset{\Delta}{123} \text{ و } \overset{\Delta}{143}$$

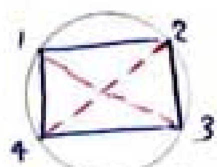
$$I_{24} \rightarrow \overset{\Delta}{214} \text{ و } \overset{\Delta}{432}$$

ملاحظه می‌گردد که I_{13} منطبق بر I_{34} و I_{24} منطبق بر I_{12} خواهد افتاد. پس در حالت‌های خاص برخی از

مراکز چرخش بر هم منطبق می‌شوند.

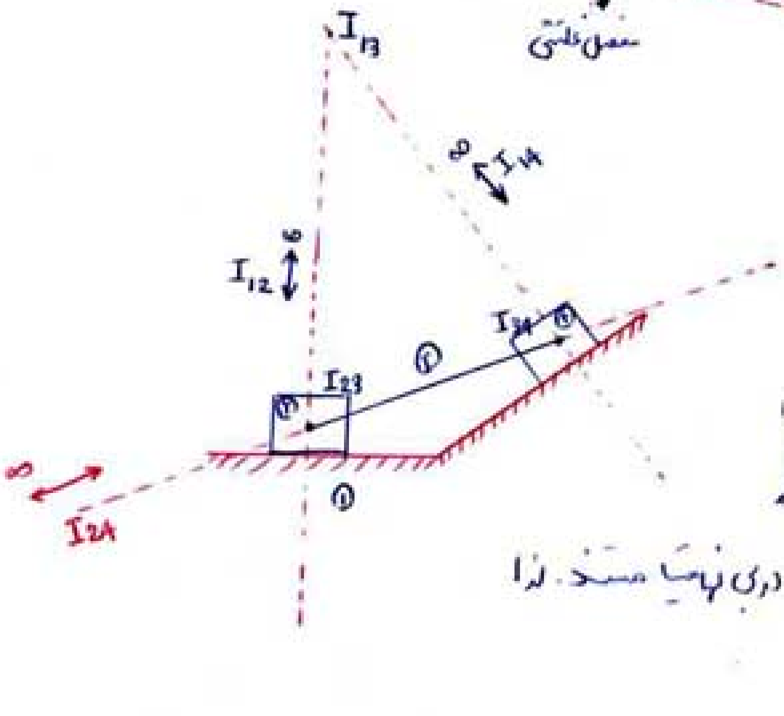
مثال: کلیه مراکز آنی مکانیزم زیر را تعیین کنید.



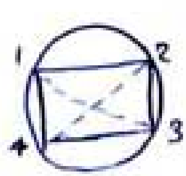


$$I_{24} \rightarrow \overset{\Delta}{214} \text{ و } \overset{\Delta}{234}$$

$$I_{13} \rightarrow \overset{\Delta}{123} \text{ و } \overset{\Delta}{143}$$



مثال: کلیه مراکز آنی مکانیزم زیر را تعیین کنید.



$$I_{13} \rightarrow \overset{\Delta}{123} \text{ و } \overset{\Delta}{143}$$

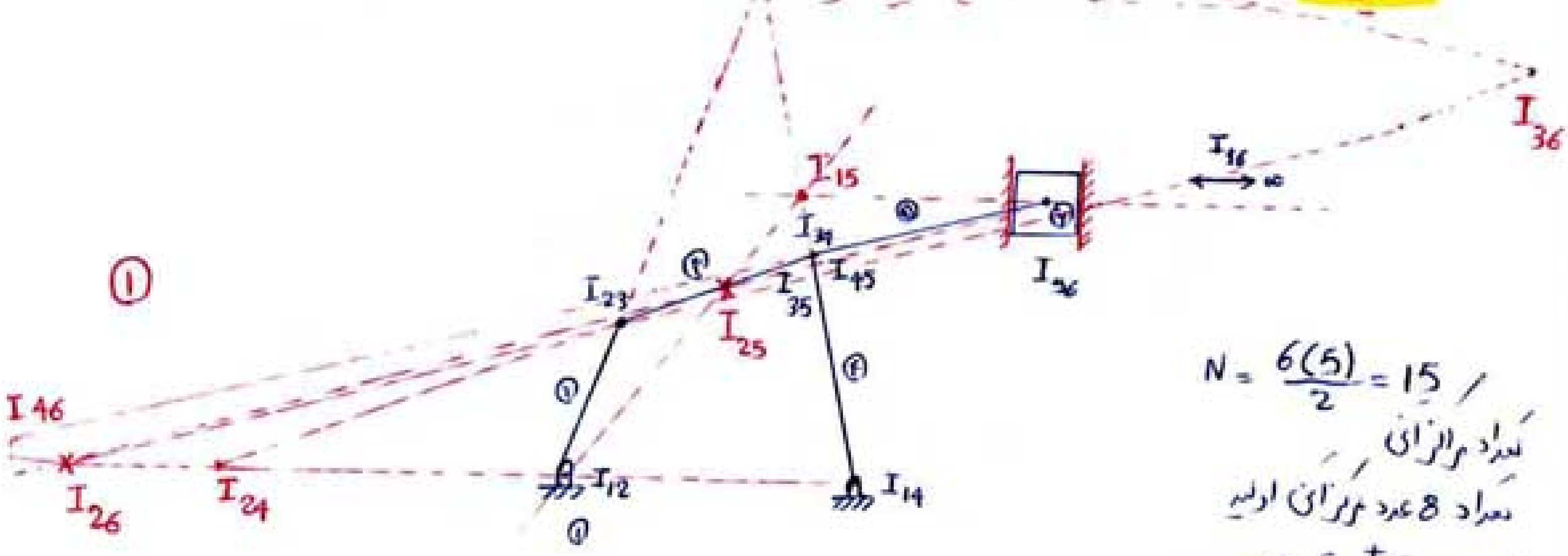
$$I_{24} \rightarrow \overset{\Delta}{412} \text{ و } \overset{\Delta}{432}$$

مکان I_{24} در امتداد پیوند ۳ است. از طرفی I_{14} و I_{12} در بی‌نهایت هستند. لذا

I_{24} در امتداد پیوند ۳ در بی‌نهایت است.

تکلیف ۸: مراکز آنی مکانیزم‌های زیر را تعیین کنید

۱



$$N = \frac{6(5)}{2} = 15$$

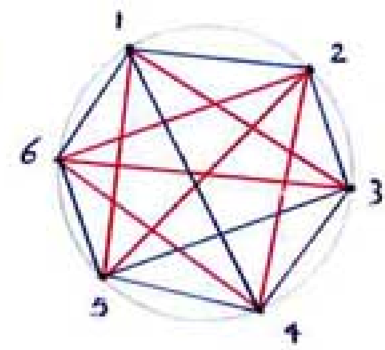
تعداد مراکز آنی

تعداد 8 عدد مراکز آنی اولیه

+

تعداد 7 عدد مراکز آنی ثانویه

برای پیدا کردن ۷ مرکز آنی ثانویه ابتدا از آنهایی شروع می‌کنیم که ۲ مثلث کامل اضلاع برای آنها یافت.



$I_{13} \rightarrow \overset{\Delta}{123}$ و $\overset{\Delta}{143}$

$I_{15} \rightarrow \overset{\Delta}{165}$ و $\overset{\Delta}{145}$

$I_{24} \rightarrow \overset{\Delta}{234}$ و $\overset{\Delta}{214}$

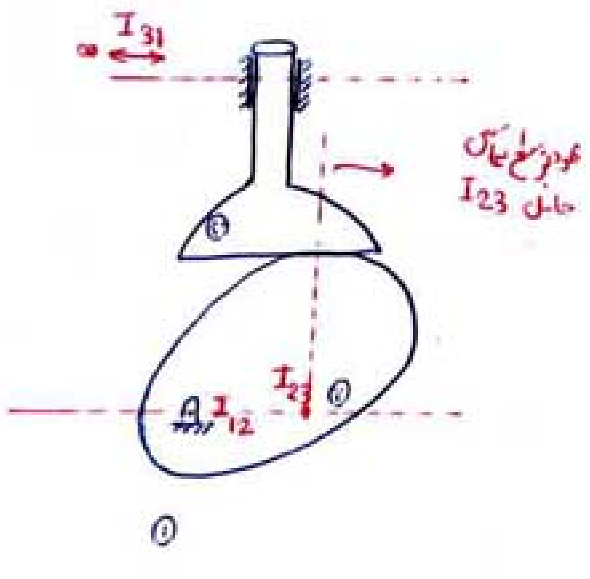
$I_{25} \rightarrow \overset{\Delta}{235}$ و $\overset{\Delta}{245}$ $\xrightarrow{\text{روی یک خط می‌افتند}}$ $\xrightarrow{\text{۲ مثلث دیگر}}$ $\overset{\Delta}{235}$ و $\overset{\Delta}{215}$

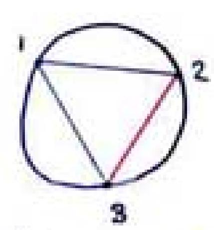
$I_{26} \rightarrow \overset{\Delta}{216}$ و $\overset{\Delta}{256}$

$I_{36} \rightarrow \overset{\Delta}{316}$ و $\overset{\Delta}{326}$

$I_{46} \rightarrow \overset{\Delta}{456}$ و $\overset{\Delta}{416}$

۲





$I_{23} \rightarrow \overset{\Delta}{213}$ و

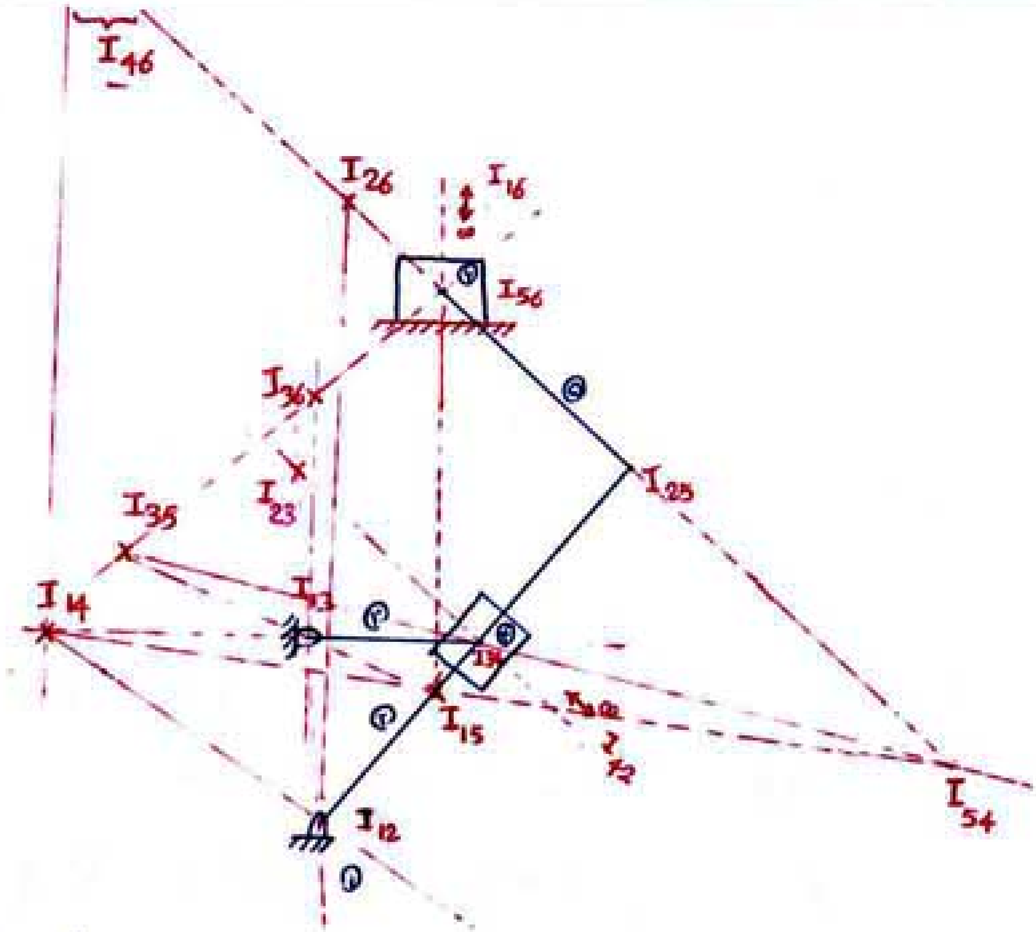
↓

عمود بر سطح تماس

$$N = \frac{3(2)}{2} = 3$$

P-29

③



$I_{15} \rightarrow \overset{\Delta}{125}$ و $\overset{\Delta}{165}$

$I_{26} \rightarrow \overset{\Delta}{612}$ و $\overset{\Delta}{652}$

$I_{14} \rightarrow \overset{\Delta}{124}$ و $\overset{\Delta}{134}$

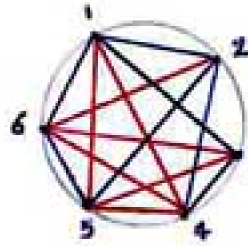
$I_{54} \rightarrow \overset{\Delta}{415}$ و $\overset{\Delta}{425}$

$I_{46} \rightarrow \overset{\Delta}{416}$ و $\overset{\Delta}{456}$

$I_{35} \rightarrow \overset{\Delta}{345}$ و $\overset{\Delta}{315}$

$I_{36} \rightarrow \overset{\Delta}{356}$ و $\overset{\Delta}{316}$

$I_{23} \rightarrow \overset{\Delta}{213}$ و $\overset{\Delta}{243}$

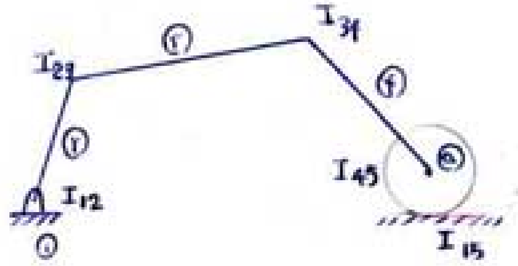


$N = \frac{6(5)}{2} = 15$

7 ← مرکزهای اولیه

8 ← مرکزهای ثانویه

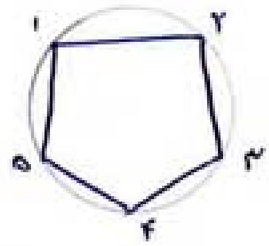
مثال: کلیه مراکز آنی مکانیزم زیر را تعیین کنید.



$$N=\frac{5(4)}{2}=10$$

ملاحظه می‌گردد ۵ مرکز آنی اولیه مشخص و ۵ مرکز آنی دیگر ثانویه و غیر مشخص هستند.

دیده می‌شود که اگر مسأله ۲ درجه آزادی باشد، الزاماً می‌بایست اطلاعاتی غیر از محل مراکز آنی اولیه در دست باشد، زیرا در غیر این صورت مسأله غیر قابل حل است.

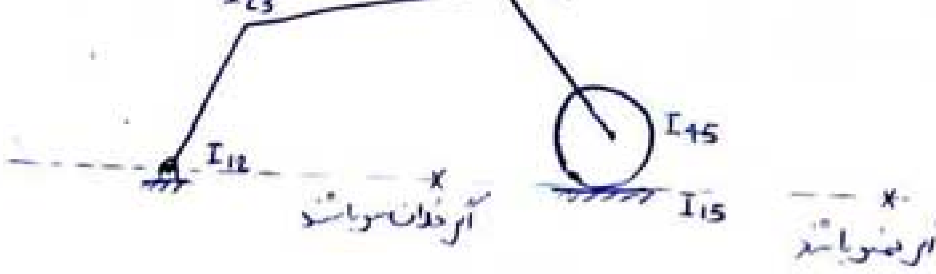


✓ اطلاعات اضافی: $\frac{\omega_2}{\omega_5}=0.5$ و ω_2 و ω_5 خلاف جهت هم حرکت می‌کنند.

پس ابتدا I_{25} را با استفاده از اطلاعات تکمیلی به دست می‌آوریم. پس از مشخص شدن تعداد کافی از مراکز آنی، سایر مراکز آنی ثانویه را به دست می‌آوریم.

I_{25} روی خط واصل I_{12} و I_{15} است.

$$\frac{\omega_2}{\omega_5}=\frac{I_{15}-I_{25}}{I_{12}-I_{25}}=\frac{1}{2}$$

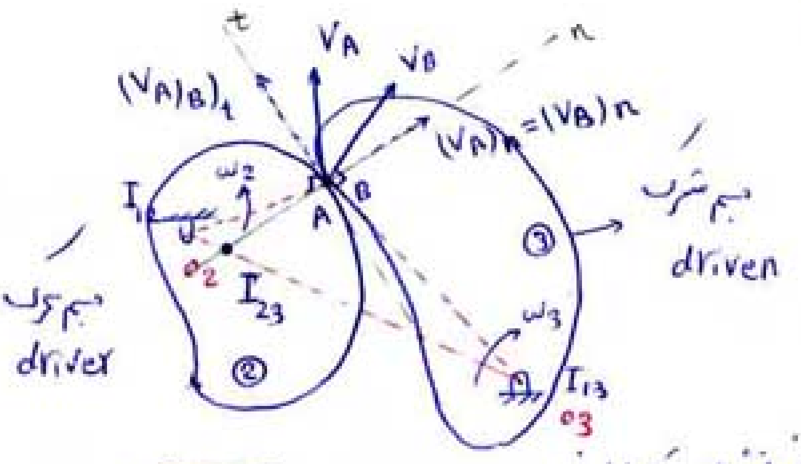


پس از تعیین این مراکز، سایر مراکز آنی قابل تعیین هستند.

حرکت لغزشی-غلتشی :

پیشتر گفته شد به مفصلی که هم لغزش و هم غلتش را توأماً داشته باشد، مفصل لغزشی-غلتشی نامیده می شود مانند اتصال چنگالی، یا به عبارت دیگر مفصلی که در تمام لحظات شرایط غلتشی خالص بودن را نداشته باشد می تواند لغزشی-غلتشی باشد. منظور از مفصل غلتشی خالص غلتش در تمام لحظات است و منظور از حرکت وضعیت در لحظه ای خاص است. پس یک مفصل لغزشی-غلتشی در زمانهای مختلف می تواند نوع حرکت متفاوتی را از خود نشان دهد :

حالت اول :



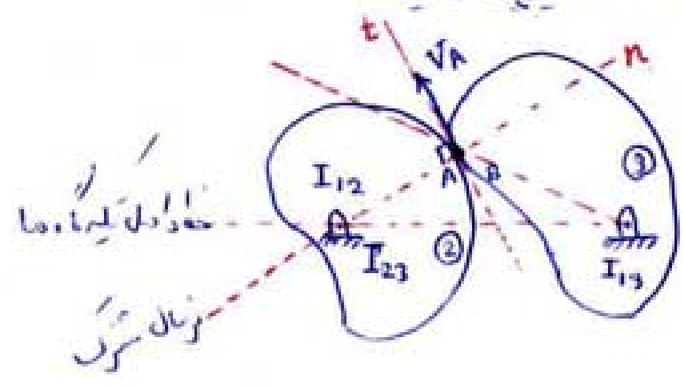
ملاحظه می گردد که حرکت از نوع لغزشی غلتشی است و با فرض معلوم بودن ω_2 و همچنین پیدا کردن مرکز آنی I_{23} در محل تقاطع خط I_{13} و I_{12} است جهت ω_2 و ω_3 خلاف هم می باشد.

$$\omega_3 = \frac{(I_{12}-I_{23})}{(I_{13}-I_{23})}\cdot\omega_2$$

* با توجه به نسبت فاصله مراکز آنی می توان تشخیص داد که کدام محرک بزرگتر است یا کدام متحرک.

I_{23} نمی تواند روی I_{13} بیفتد زیرا به ازای ω_2 مقدار ω_3 برابر ∞ می شود.
I_{23} می تواند روی I_{12} بیفتد و در آن صورت حالت درگیری پیش می آید.

حالت دوم :



$(V_A)_n=0 \Rightarrow (V_B)_n=0$

$\downarrow$

$V_B=0$ و $(V_B)_t=0$

از آنجا که $(V_A)_n$ ، مؤلفه عمودی دو سرعت باهم برابرند ، لذا $(V_A)_n=(V_B)_n=0$ به همین دلیل

$V_B=0$ و یا $\omega_3=0$ پس در این لحظه جسم 3 کاملاً ساکن است . از آنجا که لغزش تابع رابطه

$(\vec{V}_{A/B})_t=(\vec{V}_A)_t-(\vec{V}_B)_t$ است در این لحظه به دلیل صفر شدن $(\vec{V}_A)_t$ (معادل مقدار $\vec{V}_A$) ، لغزش حداکثر

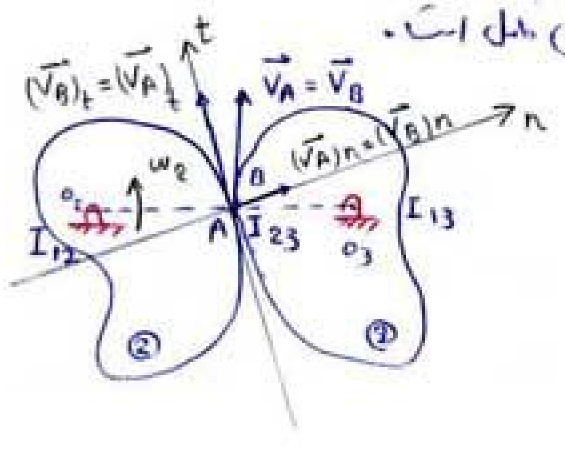
مقدار شده ، و لذا حرکت بین دو جسم به صورت لغزش کامل می‌شود.

دقیقاً مانند حالتی که جسم روی زمین می‌لغزد. (جسم ۳ زمین می‌شود و جسم ۲ لغزنده)

پس در این حالت (لحظه) حرکت لغزشی کامل می‌باشد ولی معمولاً مفصل همراه لغزش غلتشی است.

حالت سوم:

اگر حالتی در حین حرکت دو جسم بوجود آید که مرکز آنی دوران دو جسم نسبت به یکدیگر بر نقطه تماس دو جسم منطبق شود در آن صورت حرکت دو جسم بر هم از نوع غلتشی کامل است.



داریم: $(\vec{V}_B)=(\vec{V}_A)$

از آنجا که $(\vec{V}_B)_n=(\vec{V}_A)_n$

لذا $(\vec{V}_B)_t=(\vec{V}_A)_t$

$\leftarrow$ $(\vec{V}_{A/B})=(\vec{V}_A)_t-(\vec{V}_B)_t=0$

فصل چهارم: بررسی جابه‌جایی در مکانیزم‌ها

در بررسی جابه‌جایی اهرم‌ها یا ذره‌ای از یک اهرم معمولاً موقعیتی از یک مکانیزم را در نظر گرفته می‌شود که اصطلاحاً فاز نام دارد.

یک مکانیزم در طول یک سیکل حرکت خود از فازهای مختلفی عبور می‌کند که ممکن است مورد نظر باشند، لذا در بررسی جابه‌جایی یک اهرم یا ذره‌ای از آن لازم است تا فازهای مختلف حرکت بررسی شوند. برای این منظور روشهای مختلفی وجود دارد که از آن جمله می‌توان موارد زیر را نام برد:

۱- روش ترسیمی

۲- روش جبری

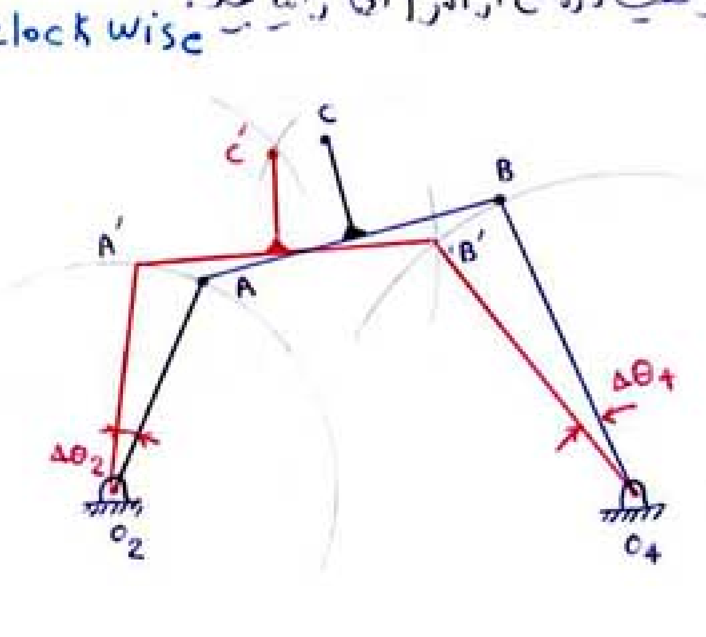
۳- روش برداری (مختلط)

۱- روش ترسیمی

روشی است که از طریق آن می‌توان موقعیت ذره یا اهرمی را از فازی خاص از یک حرکت بدست آورد.

مثال: در مکانیزم زیر اگر اهرم ② به میزان $\Delta\theta_2$ (ccw) بچرخد در آن صورت جابه‌جایی هر یک از اهرمهای دیگر و نیز موقعیت ذره c از اهرم ③ را بیابید.

counter clockwise

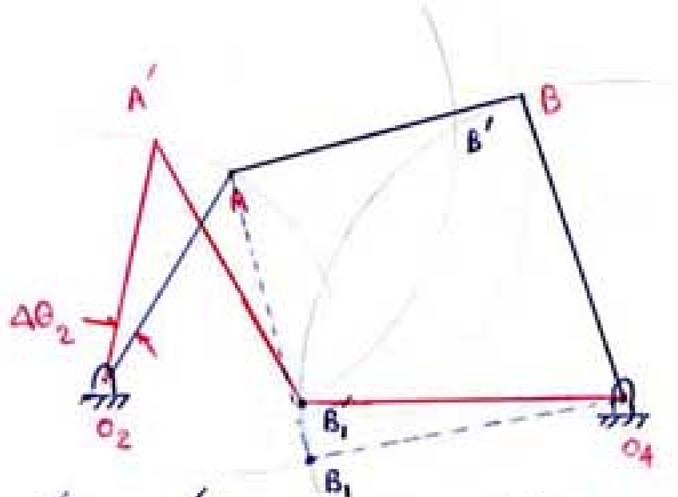


توجه شود که مسأله یک درجه آزادی است و با داشتن $\Delta\theta_2$ بقیه موارد قابل محاسبه‌اند.

مراحل کار:

- به اندازهٔ O_2A پرگار، کمانی از نقطه O_2 می‌زنیم و با توجه به زاویه $\Delta\theta_2$ در کمان مذکور موقعیت A' حاصل می‌گردد.
- به اندازه O_4B پرگار، کمانی از O_4 می‌زنیم تا کمان مسیر نقطه B بدست آید.
- از A' به اندازه AB کمانی می‌زنیم تا کمان مسیری که مسیر حرکت B را قطع کند و این نقطه را B' می‌نامیم.
- با وصل کردن A' به B' موقعیت جدید مکانیزم مشخص می‌گردد.
- از C تا A و B یک فاصله وجود دارد، بنابراین دو کمان به مرکز A' و B' با طولهای AC و BC می‌زنیم و محل تقاطع نقطه C' است، از آن به $A'B'$ عمود می‌کنیم.

نکته: به ازای زاویه $\Delta\theta_2$ حالت دیگری نیز ممکن است اتفاق بیفتد. به شکل زیر توجه کنید.



به ازای $\Delta\theta_2$ داده‌شده می‌توان دو موقعیت $A'B'$ و $A'B_1'$ بوجود آید که هر دو امکان‌پذیر است.

از دو موقعیت آن یکی قابل قبول است که به حالت قبل نزدیک‌تر باشد. با توجه به اینکه مکانیزم ابتدا از نقطه B' می‌گذرد لذا همان مکانیزم قبلی ارائه شده قابل قبول است.

اگر مکانیزم در حالت $O_2AB_1O_4$ به عنوان حالت ابتدایی باشد آنگاه مکانیزم حالت $O_2A'B_1'O_4$ حالت نزدیک‌تر و قابل قبول می‌بود.

نکته:

۱- اگر کمان رسم شده به مرکز جدید A (شکل A′) بر مسیر حرکت B مماس شود، در این صورت منحنی الحرکت اهرم ② به سمت چپ مشخص خواهد شد. تحت چنین شرایطی لغزنده ایستاده و شروع به حرکت در جهت عکس می‌نماید.

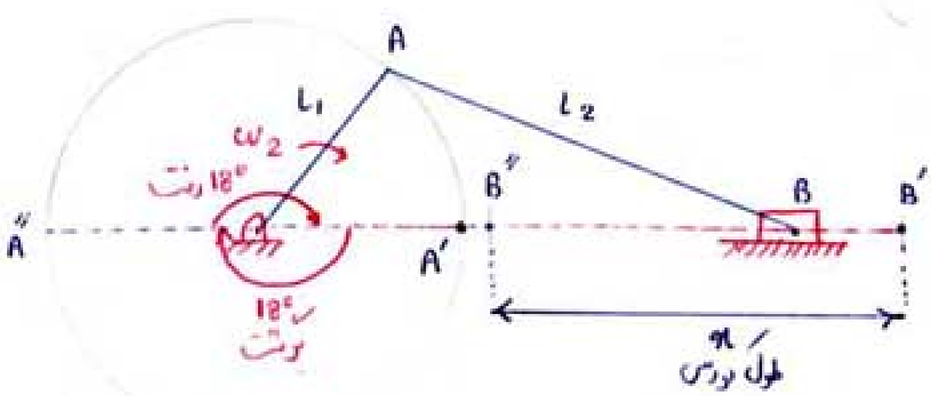
۲- اگر کمان رسم شده به مرکز جدید A (شکل A′) مسیر حرکت B را قطع نکند، این بدان معنی است که آن موقعیت برای آن مکانیزم وجود ندارد.

- مکانیزمهای بازگشت سریع (Quick Return mechanism)

از مکانیزمهای با بازگشت سریع عموماً در ماشین‌های ابزار شکل صفحه تراش و اره‌های الکتریکی استفاده می‌گردد. این مکانیزم ضمن ثابت بودن سرعت زاویه‌ای لنگ، قادر است ابزار برش ماشین را که دارای حرکت رفت و آمدی است خیلی آرام به جلو برده ولی سریع به عقب برگرداند.

به طور کلی مکانیزمهایی هستند که نسبت زمان رفت به زمان بازگشت اهرم خروجی به موقعیت اولیه بزرگتر از یک باشد.

مثال: با فرض سرعت ثابت برای اهرم ② (اهرم ورودی) آیا مکانیزم از نوع بازگشت سریع است یا خیر؟



$$x = L_1 \cos\theta_2 + L_2 \cos\beta$$

$$v = \dot{x} = -L_1 \dot{\theta}_2 \sin\theta_2 - L_2 \dot{\beta} \sin\beta$$

ملاحظه می‌گردد سرعت بلوک ثابت نیست.

از رابطه ۲ $\quad \Delta\theta_2 = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \omega t$

در دور ثابت باشد آنگاه $\alpha = 0$ ،

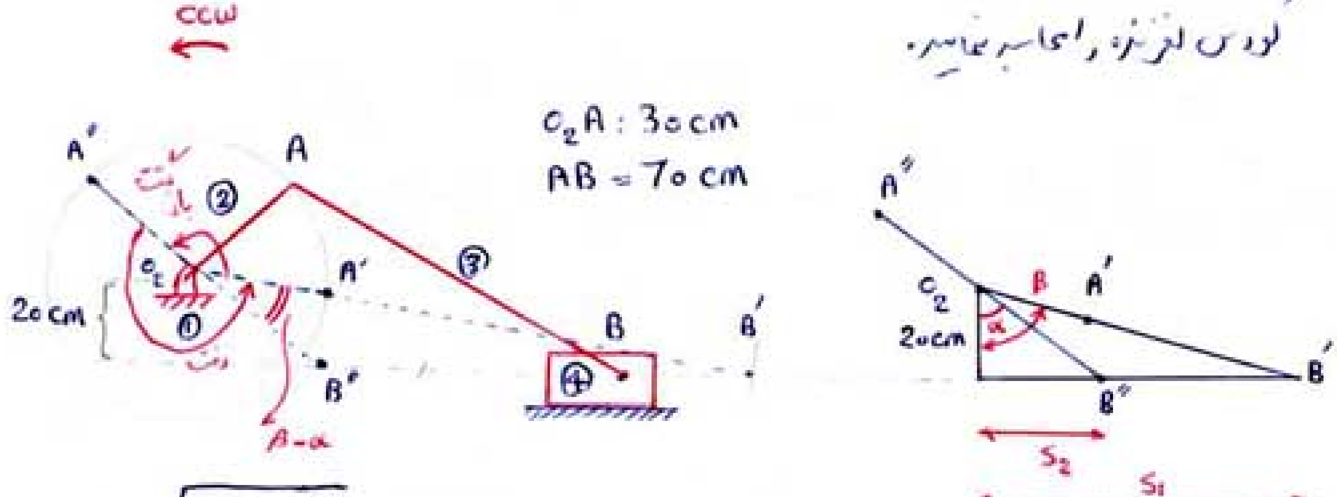
داریم $\quad \Delta\theta_2 = \omega t$

$$(\Delta\theta_2)_{\text{رفت}} = \omega . t$$

$$(\Delta\theta_2)_{\text{برگشت}} = \omega . t \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta\theta_{2\,\text{رفت}}}{\Delta\theta_{2\,\text{برگشت}}} = \frac{t_{\text{رفت}}}{t_{\text{برگشت}}}$$

بنابراین با توجه به این‌که زاویه 180° رفت و 180° برگشت آنگاه $\frac{t_{\text{رفت}}}{t_{\text{برگشت}}} = 1$ و مکانیزم از نوع بازگشت سریع نیست.

مثال: آیا مکانیزم زیر بازگشت سریع است یا خیر؟ نسبت زمان رفت به بازگشت را بیابید. همچنین طول کورس لغزنده را محاسبه نمایید.



$$S_1 = \sqrt{100^2 - 20^2} = 97.98$$

$$S_2 = \sqrt{40^2 - 20^2} = 34.64$$

$$S_2 - S_1 = 63.33\ cm$$

طول کورس لغزنده

$$\tan\alpha = \frac{34.64}{20} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$$

$$\tan\beta = \frac{97.78}{20} \Rightarrow \beta = 78.46^\circ$$

$$\beta - \alpha = 18.46^\circ$$

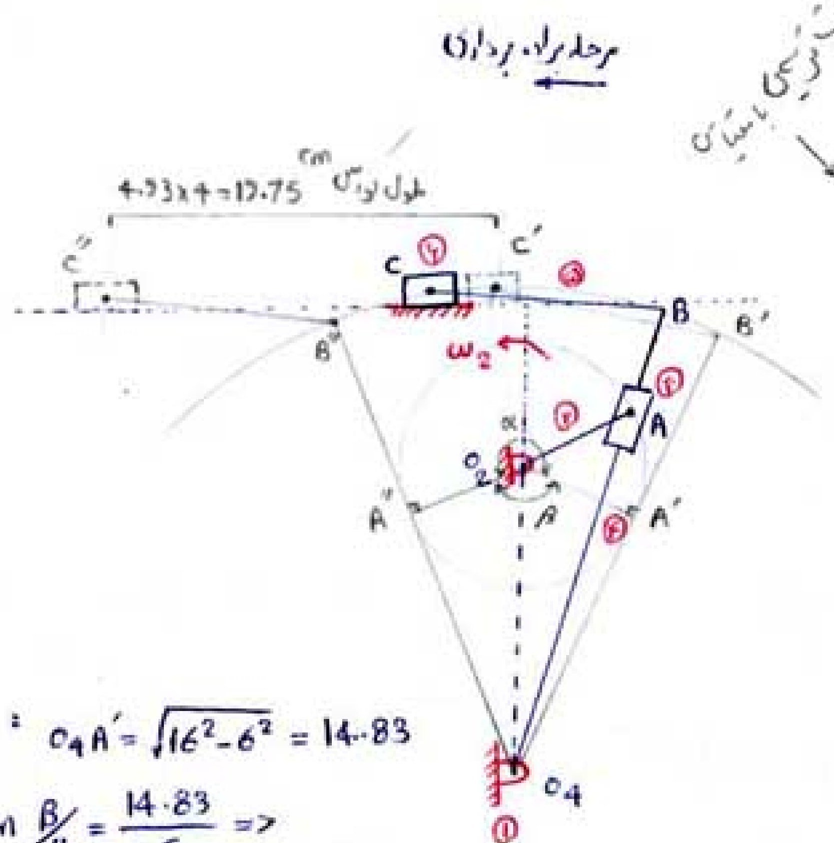
زاویه چرخش رفت $= 180^\circ + 18.46 = 198.46$

زاویه بازگشت $= 180^\circ - 18.46 = 161.54$

$$\frac{t_{\text{رفت}}}{t_{\text{برگشت}}} = \frac{\Delta\theta_{\text{رفت}}}{\Delta\theta_{\text{برگشت}}} = \frac{198.46}{161.54} = 1.23$$

پس مکانیزم بازگشت سریع است.

تکلیف: برای مکانیزم زیر که در یک دستگاه تراش کاربرد دارد، مشخص کنید: الف) آیا مکانیزم بازگشت سریع است؟
ب) محاسبه طول کورس و ج) نسبت زمان رفت به زمان برگشت؟



$O_2O_4 = 16\,cm$
$O_2A = 6\,cm$
$O_4B = 26\,cm$
$BC = 12\,cm$
O_4 تا مسیر $c = 25\,cm$
مقیاس $1\,cm = 4\,cm$

$\overset{\Delta}{O_2A'O_4}$: $O_4A' = \sqrt{16^2 - 6^2} = 14.83$

$\tan\frac{\beta}{2} = \frac{14.83}{6} \Rightarrow$

$\frac{\beta}{2} = 67.97 \Rightarrow \beta = 135.95$

$\alpha = 360 - \beta = 224.05$

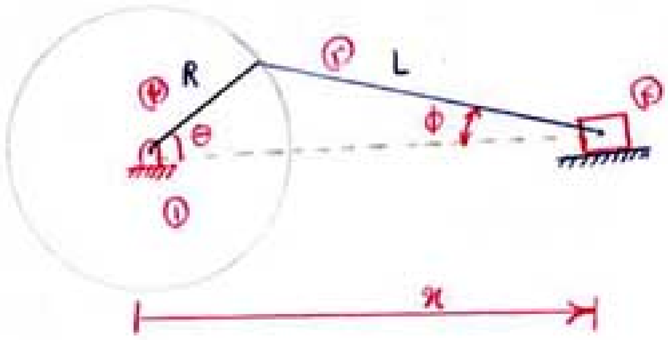
$$\frac{t_{\text{رفت}}}{t_{\text{برگشت}}} = \frac{\Delta\theta_{\text{رفت}}}{\Delta\theta_{\text{برگشت}}} = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{224.05}{135.95} = 1.64$$

مکانیزم بازگشت سریع است.

۲- روش جبری

روشی است که در آن از عبارات ریاضی برای تعیین موقعیت یک اهرم یا ذره‌ای از یک اهرم استفاده می‌شود. و با بدست آوردن معادلات جبری این توابع جابجایی، سرعت و شتاب اهرم‌ها تحلیل را ممکن می‌نماید.

مثال ۸: با در نظر گرفتن مکانیزم لنگ لغزنده در شکل زیر، معادلات مربوط به جابجایی، سرعت و شتاب لغزنده را به صورت تابعی از R و L و θ و ω بدست آورید. (فرض: ω ثابت است)



$$x = R\cos\theta + L\cos\phi \quad (1)$$

$$\frac{dx}{dt} = -R\sin\theta\,\frac{d\theta}{dt} - L\sin\phi\,\frac{d\phi}{dt} \quad (2)$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad (3)$$

$$\frac{\sin\theta}{L} = \frac{\sin\phi}{R} \Rightarrow \sin\phi = \frac{R}{L}\sin\theta \quad (4) \qquad \phi = \mathrm{Arcsin}\left(\frac{R}{L}\sin\theta\right) \quad (5)$$

با مشتق‌گیری از (۴) $\Rightarrow \cos\phi\,\dfrac{d\phi}{dt} = \dfrac{R}{L}\cos\theta\,\dfrac{d\theta}{dt} \Rightarrow \dfrac{d\phi}{dt} = \dfrac{R\omega\cos\theta}{L\cos\phi} \quad (6)$

با جایگذاری ۳، ۴ و ۶ در (۲) $\Rightarrow V = \dfrac{dx}{dt} = -R\omega\left[\sin\theta + \cos\theta\tan\phi\right] \quad (7)$

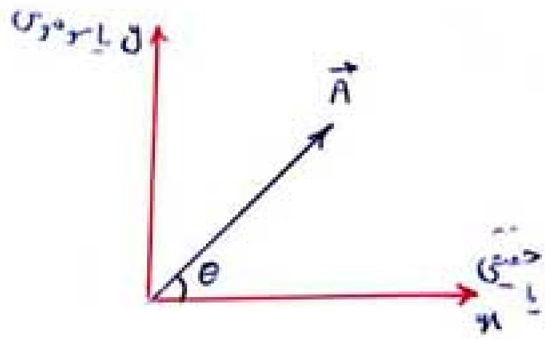
با مشتق‌گیری از (۷) $\quad A = \dfrac{d^2x}{dt^2} = -R\omega\left[\cos\theta\,\dfrac{d\theta}{dt} - \sin\theta\tan\phi\,\dfrac{d\theta}{dt} + \cos\theta \times \dfrac{1}{\cos^2\phi} \times \dfrac{d\phi}{dt}\right]$

$$\Rightarrow A = -R\omega^2\left[\cos\theta + \frac{R\cos^2\theta}{L\cos^3\phi} - \sin\theta\tan\phi\right]$$

۳- روش برداری (دقیق)

در این روش هر یک از اعضا به صورت برداری تعریف می‌شود، سپس با استفاده از عبارات جمع یا تفریق برداری مجهولات مسئله (طوری که در مثال بعد گفته خواهد شد) تعیین می‌شوند.

قبل از ذکر مثال لازم به توضیح است که چنانچه بردار A به بزرگی A در جهتی مطابق شکل زیر باشد، آن بردار را می‌توان به یکی از صورت‌های زیر نوشت.

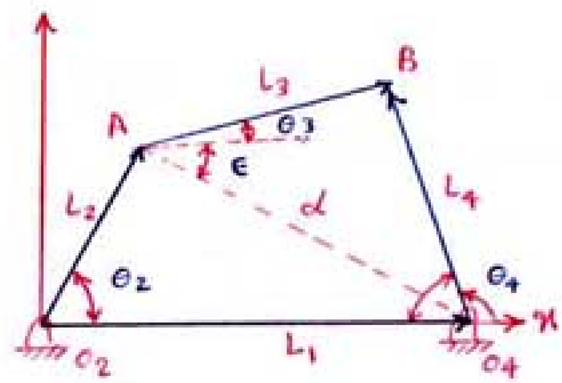


$$\vec{A} = Ae^{i\theta}$$

or

$$\vec{A} = A(\cos\theta + i\sin\theta)$$

مثال: در مکانیزم زیر موقعیت هر یک از المان‌های 3 و 4 را برحسب موقعیت المان 2 بیابید.



$$L_1 = L_1 e^{i(0)}$$

$$L_2 = L_2 e^{i(\theta_2)}$$

$$L_3 = L_3 e^{i(\theta_3)}$$

$$L_4 = L_4 e^{i(\theta_4)}$$

$$d = de^{i\epsilon}$$

از قبل می‌دانیم که اندازه d متغیر و وابسته به مقدار θ_2 می‌باشد و معلوم نیست:

✓ $$d^2 = L_1^2 + L_2^2 - 2L_1L_2\cos\theta_2$$

با توجه به شکل داریم:

$$\vec{L_2} + \vec{d} = \vec{L_1}$$

$$L_2 e^{i\theta_2} + de^{i\epsilon} = L_1 \quad \text{or} \quad L_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) + d(\cos\epsilon + i\sin\epsilon) = L_1$$

$$\Rightarrow (L_2\cos\theta_2 + d\cos\epsilon) + i(L_2\sin\theta_2 + d\sin\epsilon) = L_1$$

Real component : $L_2\cos\theta_2 + d\cos\epsilon = L_1 \Rightarrow d\cos\epsilon = L_1 - L_2\cos\theta_2$ (1)

imaginary component : $L_2\sin\theta_2 + d\sin\epsilon = 0 \Rightarrow d\sin\epsilon = -L_2\sin\theta_2$ (2)

از تقسیم ۱ بر ۲ داریم $\Rightarrow \quad \tan\epsilon = \dfrac{-L_2\sin\theta_2}{L_1 - L_2\cos\theta_2} \Rightarrow \epsilon = \tan^{-1}\left(\dfrac{+L_2\sin\theta_2}{L_2\cos\theta_2 - L_1}\right)$

همچنین با توجه به شکل داریم: $\vec{d} + \vec{L_4} = \vec{L_3}$

$$d e^{i\epsilon} + L_4 e^{i\theta_4} = L_3 e^{i\theta_3} \Rightarrow$$

$$(d\cos\epsilon + L_4\cos\theta_4) + i(d\sin\epsilon + L_4\sin\theta_4) = L_3\cos\theta_3 + iL_3\sin\theta_3$$

Real Component: $\quad d\cos\epsilon + L_4\cos\theta_4 = L_3\cos\theta_3$ ③

imaginary component: $\quad d\sin\epsilon + L_4\sin\theta_4 = L_3\sin\theta_3$ ④

از تقسیم ۴ بر ۳ داریم: $\quad \tan\theta_3 = \dfrac{d\sin\epsilon + L_4\sin\theta_4}{d\cos\epsilon + L_4\cos\theta_4} \Rightarrow \theta_3 = \tan^{-1}\left(\dfrac{d\sin\epsilon + L_4\sin\theta_4}{d\cos\epsilon + L_4\cos\theta_4}\right)$

همچنین داریم: $\quad \vec{L_2} + \vec{L_3} - \vec{L_1} = \vec{L_4}$ یا $\vec{L_2} + \vec{L_3} - \vec{L_4} = \vec{L_1}$

$$L_2 e^{i\theta_2} + L_3 e^{i\theta_3} - L_1 = L_4 e^{i\theta_4}$$

$$L_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) + L_3(\cos\theta_3 + i\sin\theta_3) - L_1 = L_4(\cos\theta_4 + i\sin\theta_4)$$

Real Component: $\quad L_2\cos\theta_2 + L_3\cos\theta_3 - L_1 = L_4\cos\theta_4$ ⑤

imaginary component: $\quad L_2\sin\theta_2 + L_3\sin\theta_3 = L_4\sin\theta_4$ ⑥

از تقسیم ۶ بر ۵ داریم: $\quad \tan\theta_4 = \left(\dfrac{L_2\sin\theta_2 + L_3\sin\theta_3}{L_2\cos\theta_2 + L_3\cos\theta_3 - L_1}\right) \Rightarrow \theta_4 = \tan^{-1}\left(\dfrac{L_2\sin\theta_2 + L_3\sin\theta_3}{L_2\cos\theta_2 + L_3\cos\theta_3 - L_1}\right)$

با داشتن θ_2 و ϵ برحسب θ_2 و حل θ_3 و θ_4 در یک دستگاه، کلیه مجهولات بدست می‌آیند.

فصل پنجم: بررسی سرعت در مکانیزمها

(فصل ۵ و ۶ مارتین)

به منظور تعیین سرعت ذره‌ای از یک اهرم یا سرعت زاویه‌ای اهرمی خاص از یک مکانیزم روشهای مختلفی وجود دارد که از آن جمله می‌توان موارد زیر را نام برد:

۱- روش مرکز آنی

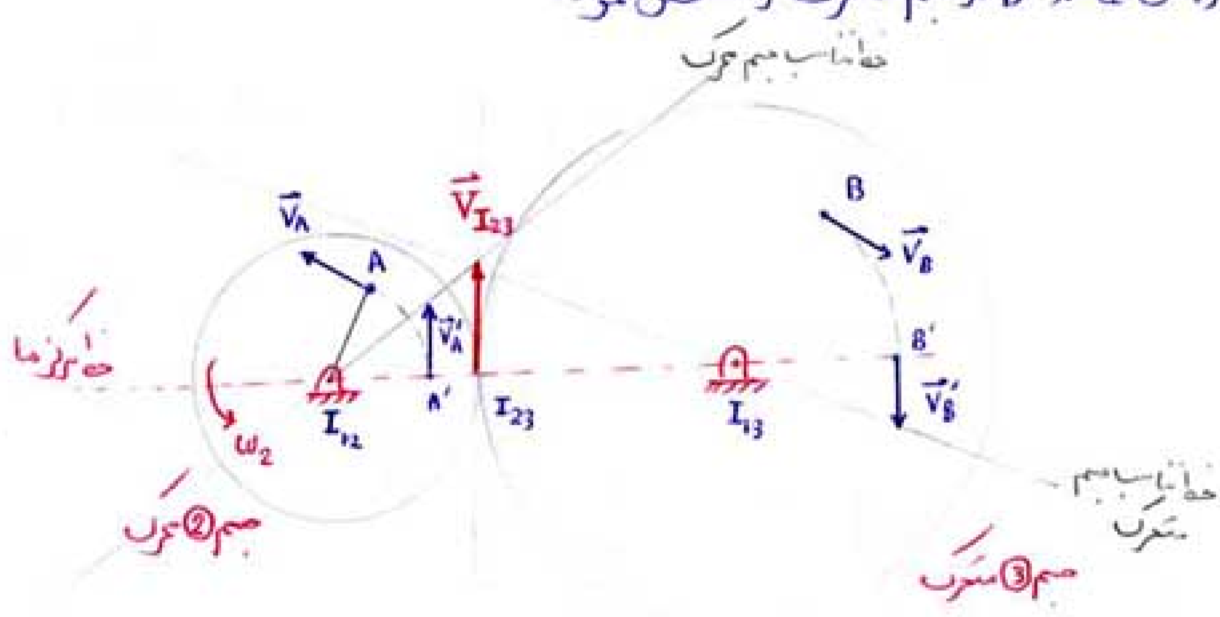
۲- روش مؤلفه

۳- روش خط موازی

۴- روش سرعت نسبی

۱- روش مرکز آنی

از این روش هم برای تعیین سرعت زاویه‌ای و هم تعیین سرعت خطی ذره‌ای از یک اهرم استفاده می‌شود.
اگر در مکانیزم سرعت ذره‌ای مانند A از جسم محرک معلوم باشد، می‌توان به شرح زیر سرعت ذره‌ای مانند B از جسم متحرک را مشخص نمود.



مراحل انجام کار:

۱- مراکز آنی جسم محرک نسبت به زمین (I_{12})، متحرک نسبت به زمین (I_{13}) و محرک نسبت به متحرک (I_{23}) را یافته که طبق قضیه کندی این سه مرکز بر روی یک خط راست قرار دارند که همان خط مرکزها می‌باشد.

۲- از نقطه A که سرعت آن معلوم است به مرکز I_{12} کمانی رسم می‌کنیم به صورتی که نقطه A و به تناسب آن سرعت V_A روی خط مرکزها منطبق شود. (A' و V'_A)

۳- از I_{12} به نوک V'_A خطی رسم می‌کنیم تا خط تناسب سرعت جسم محرک حاصل شود

۴- از I_{23} عمود بر خط مرکزها رسم می‌کنیم تا خط تناسب جسم محرک را قطع کند، بدین ترتیب $V_{I_{23}}$ حاصل شود

۵- از I_{13} به نوک $V_{I_{23}}$ خطی رسم می‌کنیم تا خط تناسب جسم 3 (متحرک) حاصل شود.

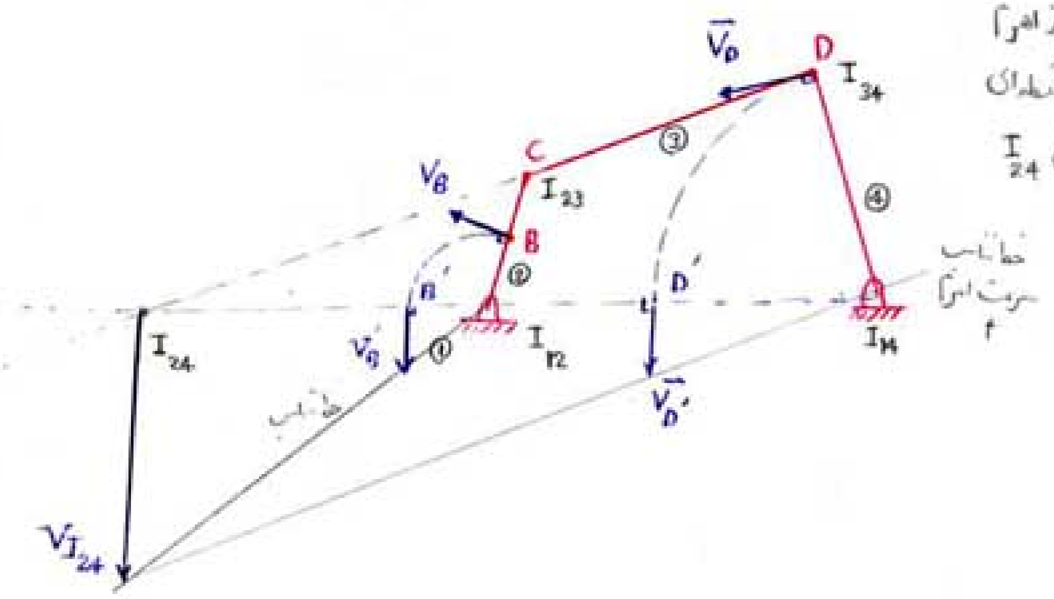
۶- به مرکز I_{13} کمانی رسم می‌کنیم تا نقطه B را روی خط مرکزها منتقل کند (B')

۷- از B' عمود بر خط مرکزها رسم کرده تا خط تناسب سرعت جسم متحرک را قطع کند، بدین ترتیب V'_B حاصل می‌شود.

۸- مجدداً به مرکز I_{13} کمانی رسم و $\vec{V'_B}$ از نقطه B' را به $\vec{V_B}$ در نقطه B منتقل می‌کنیم.

* نکته: در این مراحل باز گرداندن‌ها رعایت دقیق زاویه و تناسب الزامی است.

مثال: با توجه به شکل و دانستن سرعت نقطه B، سرعت نقطه D را بدست آورید.



چون می‌خواهیم سرعت نقطه‌ای از اهرم 4 را با توجه به معلوم بودن سرعت نقطه‌ای از اهرم 2 بدست آوریم، لذا یافتن I_{24} الزامی است.

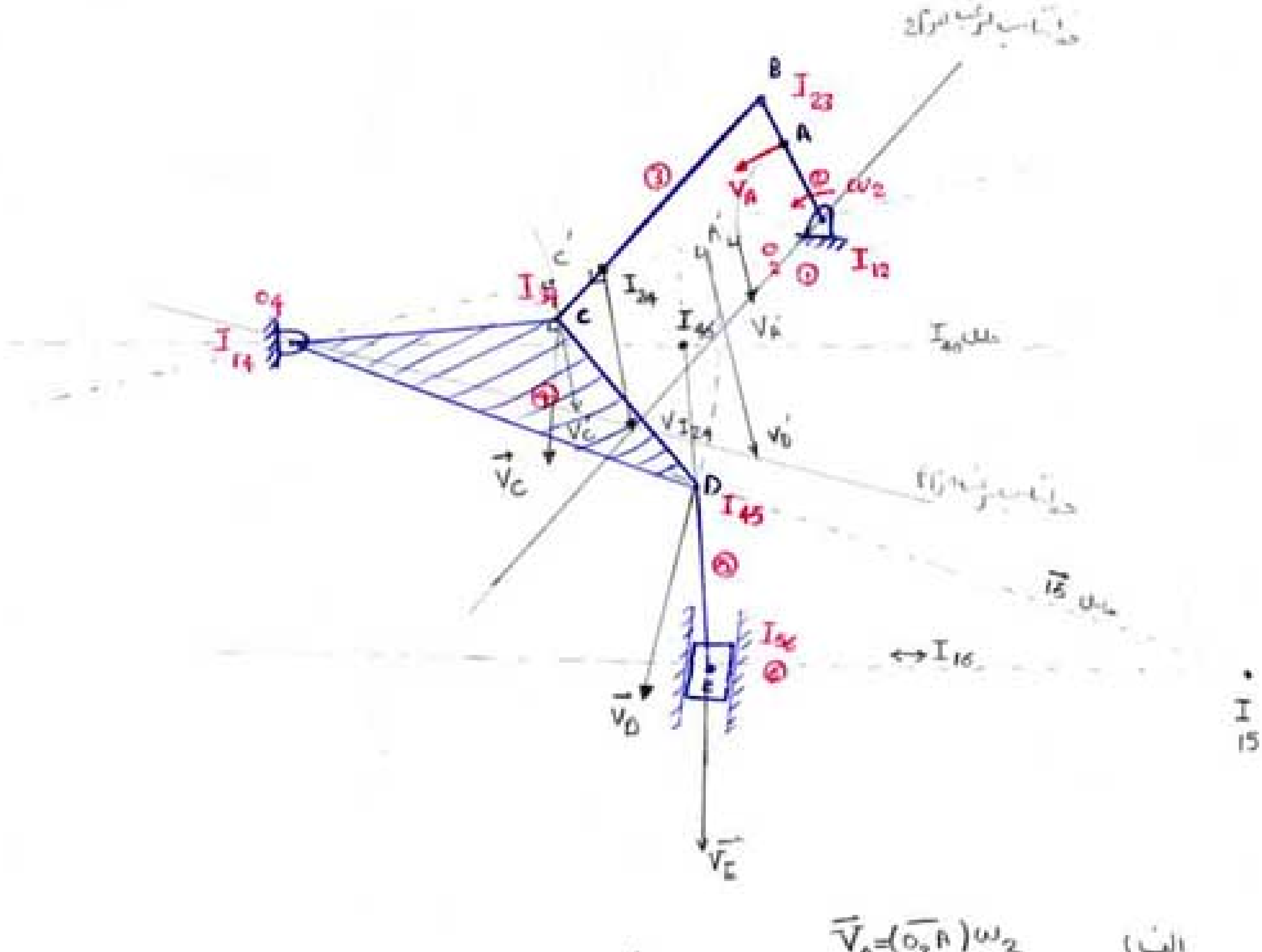
P-43

تکلیف ۵: در مکانیزم زیر اگر سرعت زاویه‌ای اهرم ② معلوم باشد. مطلوبست

الف) تعیین سرعت ذره A از این اهرم

ب) سرعت ذره C از اهرم ۴ با استفاده از روش مرکز آنی

ج) تعیین سرعت خطی اهرم ۶ با معلوم بودن سرعت نقطه A



الف) $\vec{V}_A = (\overline{O_2A})\omega_2$

ب) جهت تعیین سرعت $\vec{V}_C$ از روش مرکز آنی استفاده می‌کنیم:

ج) جهت محاسبه $\vec{V}_E$ چند راه وجود دارد که یکی از آنها را بیان می‌کنیم.

با استفاده از $\overset{\Delta}{164}$ و $\overset{\Delta}{456}$ مرکز آنی I_{15} را پیدا کرده و سپس با محاسبه $\vec{V}_D$ با استفاده از محاسبه سرعت $\vec{V}_D$:

$$\vec{V}_E = \frac{\overline{I_{15}-E}}{\overline{I_{15}-I_{45}}}\,\vec{V}_D$$

الف: با توجه به مکانیزم زیر ضمن تعیین کلیه مراکز آنی، اگر $V_A = 635 \frac{mm}{s}$ و جهت چرخش ω_2 در جهت خلاف عقربه‌های ساعت باشد، V_D را به روش مراکز آنی تعیین کنید.

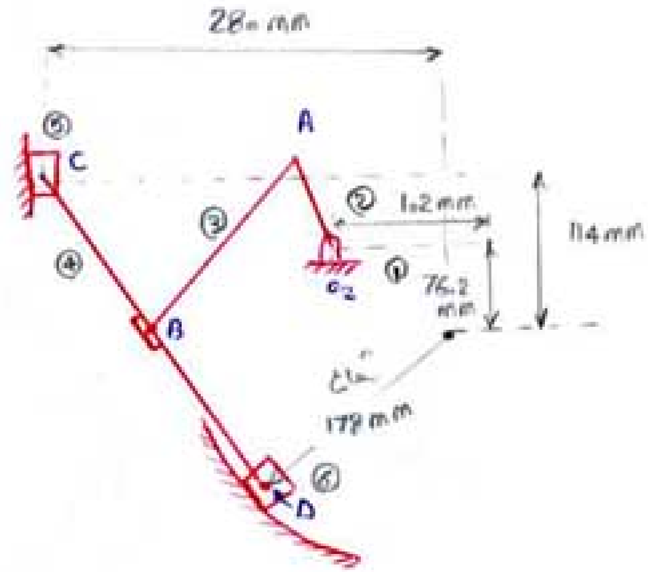
(حل مسئله ۲۹۲ مابیلتون)

$O_2A = 76.2$ mm

$AB = 178$ mm

$CD = 305$ mm

$CB = 152$ mm



۲- روش مؤلفه (Component method)

تجزیه و تحلیل سرعت مکانیزم‌ها به وسیله مؤلفه‌ها عبارت است از تجزیه سرعت به مؤلفه‌های مناسب به طوری که بتوان از روی آنها انتقال و دوران میله‌های مختلف مکانیزم را بررسی نمود.

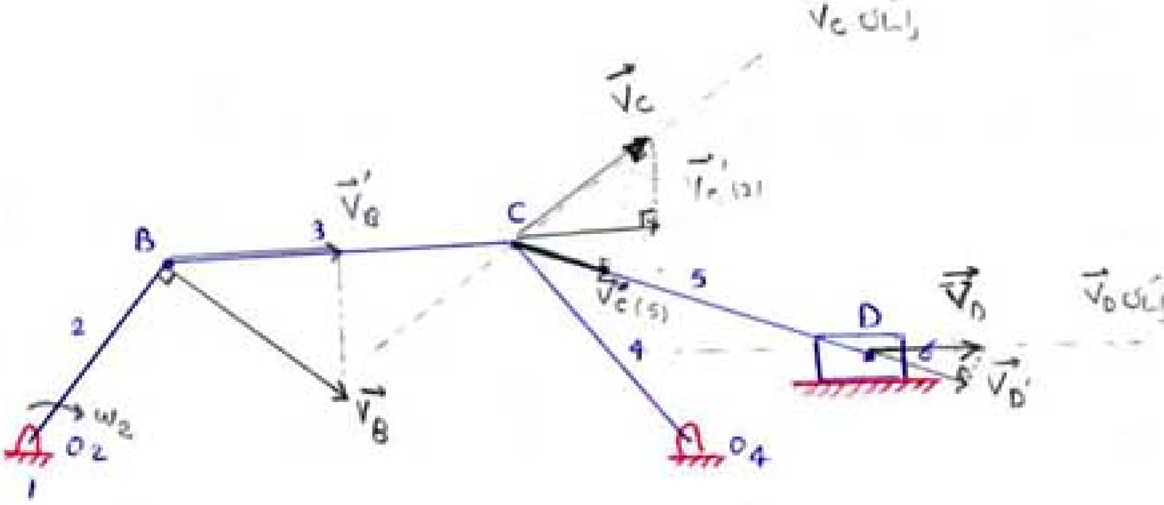
حالت اول: اگر سرعت ذره‌ای مانند A از جسم صلبی معلوم باشد و راستای سرعت ذره‌ای دیگر مانند B از همان جسم نیز معلوم باشد می‌توان برای تعیین V_B به شرح زیر عمل کرد:

۱- ابتدا مؤلفه سرعت V_A را بر رابط دو ذره تصویر می‌کنیم ($\vec{V}_A'$)

۲- $\vec{V}_B' = \vec{V}_A'$ در نقطه B را انتخاب می‌کنیم.

۳- عمود از نوک $\vec{V}_B'$ برای بردار رسم کرده تا راستای سرعت B را قطع کند، بدین ترتیب $\vec{V}_B$ حاصل می‌شود.

مثال: با معلوم بودن w_2 سرعت نقاط C و D را بدست آورید.



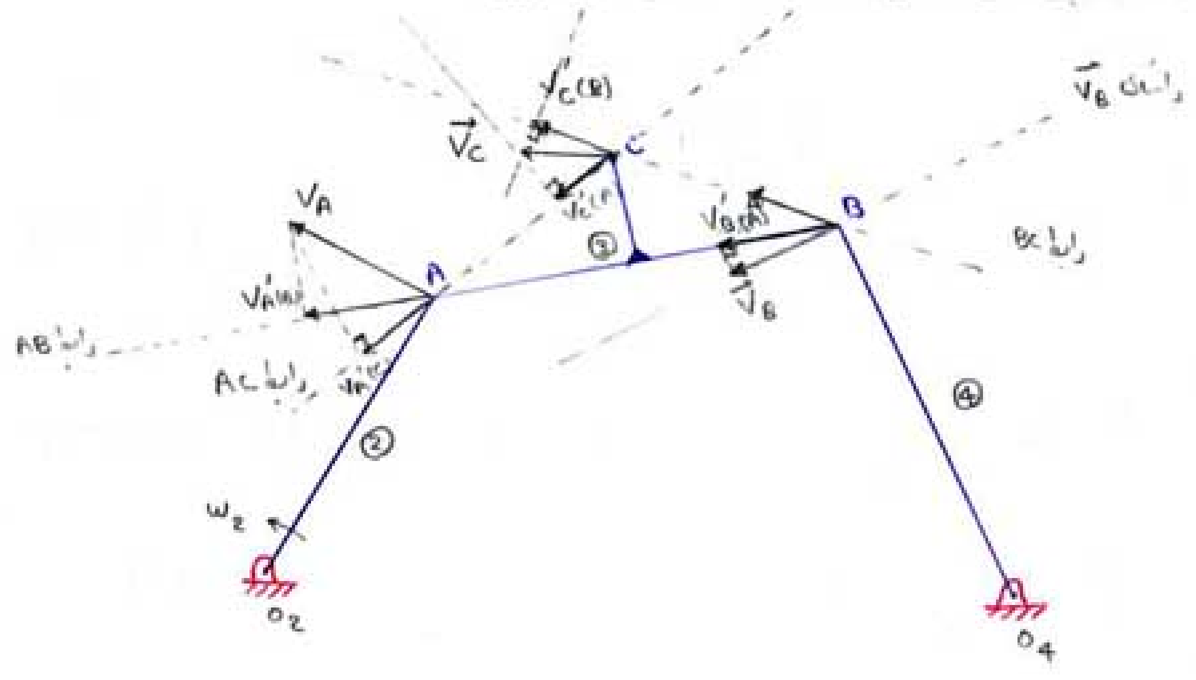
حالت دوم: اگر سرعت ذره‌ای مانند A و B از جسم صلبی معلوم باشد و بخواهیم سرعت ذره‌ای مانند C را که از آن چیزی نمی‌دانیم را تعیین کنیم به شرح زیر عمل می‌کنیم:

۱- مؤلفه سرعت V_A را بر رابط AC تصویر می‌کنیم. (V_A')

۲- مؤلفه سرعت V_B را بر رابطه BC تصویر می‌کنیم (V'_B)

۳- V'_B و V'_A را به نقطه C انتقال داده و عمود بر هر دو رسم کرده، انتهای $\vec{V}_C$ حاصل می‌شود.
نه برآیند برداری!!

مثال: با معلوم بودن ω_2 سرعت نقطه C از عضو 3 را بیابید.



حالت سوم: اگر سرعت ذره‌ای مانند A و B از جسم صلبی معلوم باشد و بخواهیم سرعت ذره‌ای مانند C روی رابطه AB را بیابیم از روش زیر استفاده می‌کنیم.

۱- مؤلفه سرعت $\vec{V}_B$ را عمود بر رابطه AB می‌یابیم.

۲- مؤلفه سرعت $\vec{V}_A$ را عمود بر رابطه AB می‌یابیم.

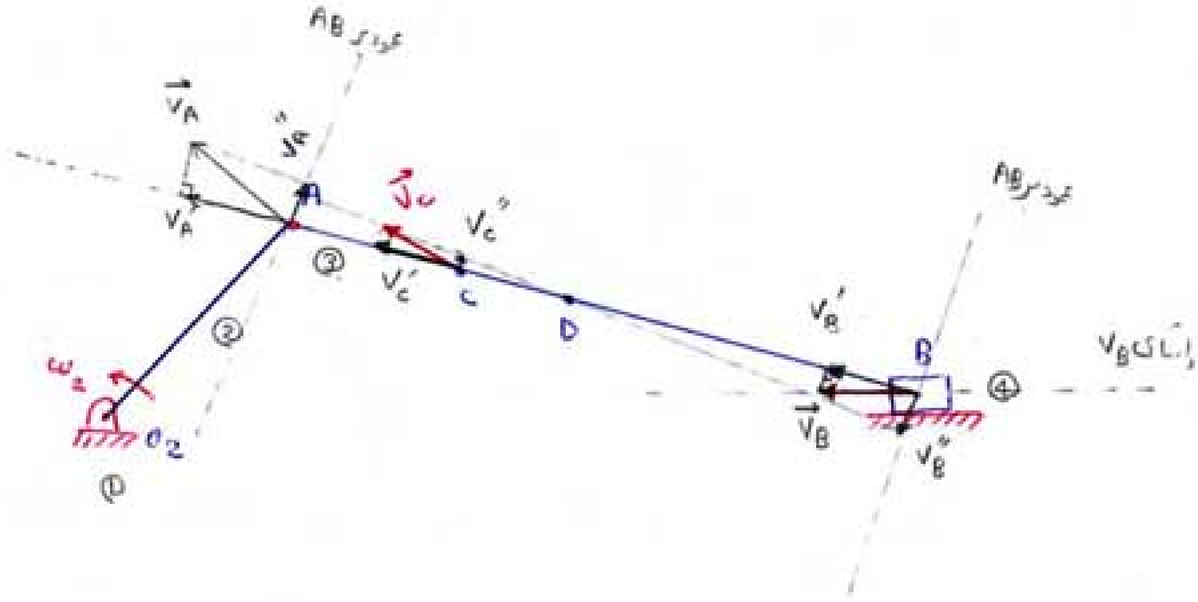
۳- خطی از نوک V''_A و V''_B رسم کرده تا در نقطه D با خط مورد نظر (AB) برخورد کند.

۴- از نقطه C عمود بر AB رسم کرده تا خط حاصل از بند ۳ را قطع کند ($\vec{V''_C}$ حاصل می‌شود)

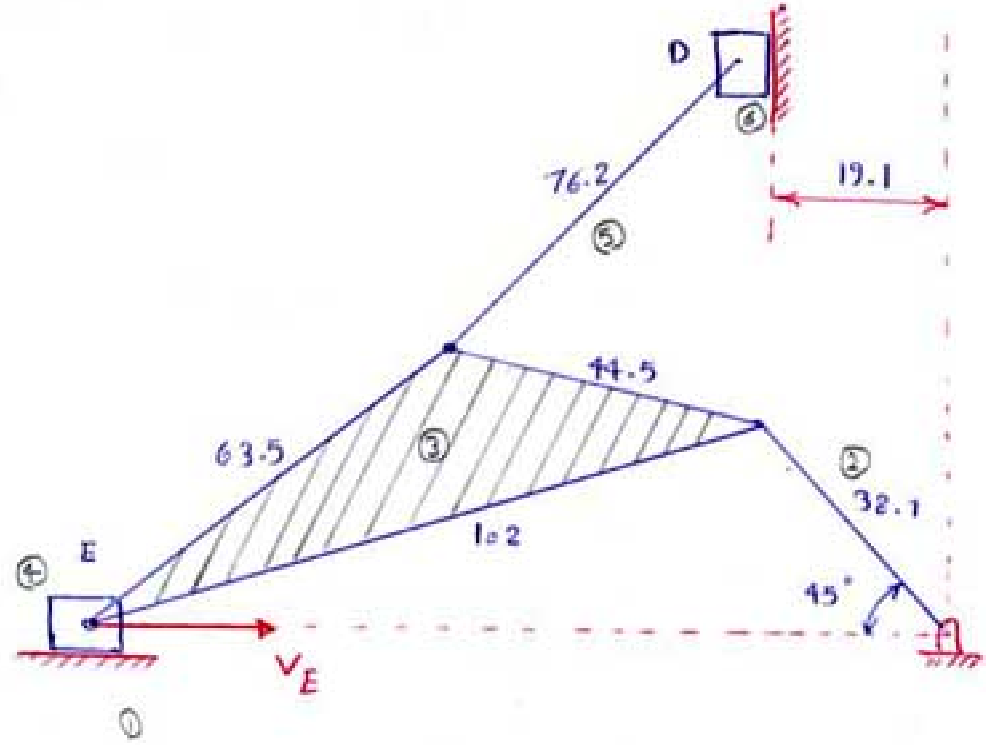
۵- $\vec{V'_C}$ را از $\vec{V'_A}$ می‌یابیم.

۶- جمع برداری $\vec{V'_C}$ و $\vec{V''_C}$ مقدار $\vec{V}_C$ را معین می‌کند.

مثال: با معلوم بودن ω_2 سرعت نقطه c را تعیین کنید.



تکلیف: سرعت نقطه E در شکل زیر برابر $4.57\ \frac{m}{s}$ می‌باشد. با استفاده از روش مؤلفه سرعت زاویه‌ای ω_2 و سرعت $\vec{V}_D$ را بیابید.



۳- روش خط موازی

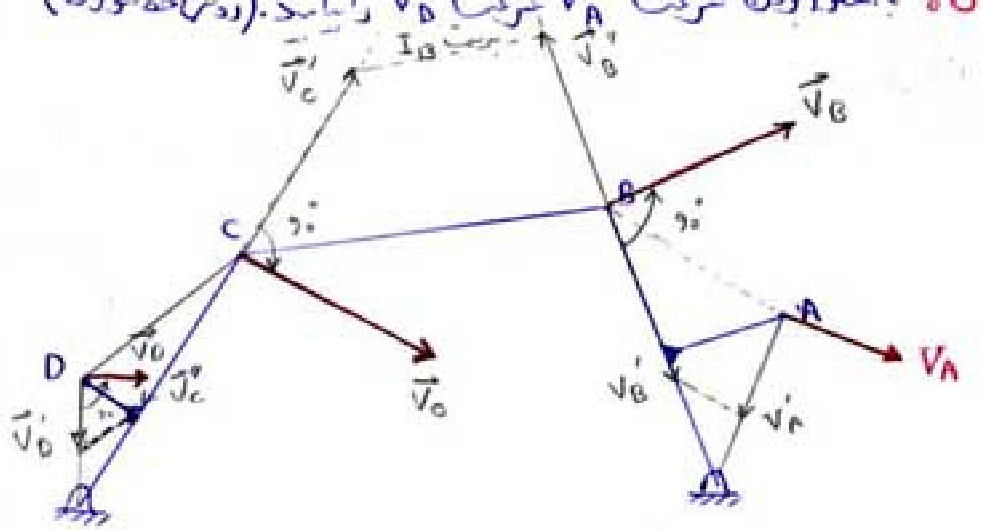
اگر دو ذره A و B بر جسم صلبی واقع باشند و سرعت جسم A معلوم و راستای رابط آن ذرات به مرکز آنی دوران آن جسم نسبت به گیره معلوم باشد (به محل دقیق نقطه مرکز آنی نیازی نیست) می توان به روش زیر سرعت نقطه B را یافت.

۱- بردار $\vec{V}_A$ را به اندازه ۹۰ درجه می چرخانیم تا بر رابط آن ذره و مرکز آنی سرعت نسبت به گیره، واقع گردد. (V'_A به سمت مرکز آنی)

۱- از نوک $\vec{V}'_A$ موازی خط AB رسم کرده تا رابط ذره B و مرکز آنی جسم نسبت به گیره را در B' قطع کند.

۳- $\vec{V}'_B$ را ۹۰ درجه بچرخانید (خلاف جهت چرخش قبلی) تا $\vec{V}_B$ حاصل شود.

مثال: با معلوم بودن سرعت V_A سرعت V_D را بیابید. (روش خط موازی)



۴- روش سرعت نسبی

روش سرعت نسبی بدان دلیل حائز اهمیت است که بدین وسیله می‌توان به طور همزمان سرعت ذرات و سرعت زاویه‌ای اجسام را پیدا نمود. همانطور که می‌دانیم اگر دو ذره بر جسم صلبی قرار داشته باشند می‌توان نوشت:

$$\vec{V}_A = \vec{V}_B + \vec{V}_{A/B} \qquad (1)$$

و به جای $\vec{V}_{A/B}$ در رابطه می‌توان نوشت:

$$\vec{V}_A = \vec{V}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}_{AB} \qquad (2)$$

که راستای آن عمود بر خط رابط AB و مقدار آن برابر $\overline{AB}\omega$ می‌باشد.

رابطه (2) زمانی صادق است که A و B متعلق به یک جسم صلب باشند.

مراحل انجام کار:

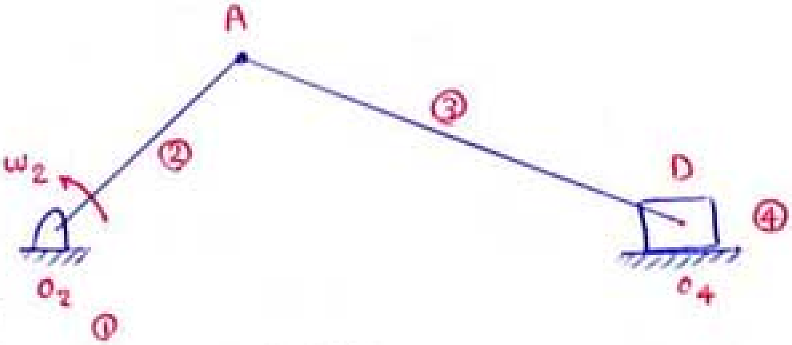
۱- ابتدا نقطه‌ای را به عنوان قطب سرعت در صفحه مشخص می‌کنیم.

۲- از قطب سرعت برداری هم‌سنگ $\vec{V}_B$ رسم می‌کنیم تا نقطه B بدست آید.

۳- می‌دانیم $\vec{V}_{A/B} = \overline{AB}\omega$ عمود بر $\overline{AB}$ است. در جهت عمود بر $\overline{AB}$ از نوک A و متناسب با جهت ω و به بزرگی $\overline{AB}\omega$ رسم می‌کنیم و نقطه بدست آمده را A می‌نامیم.

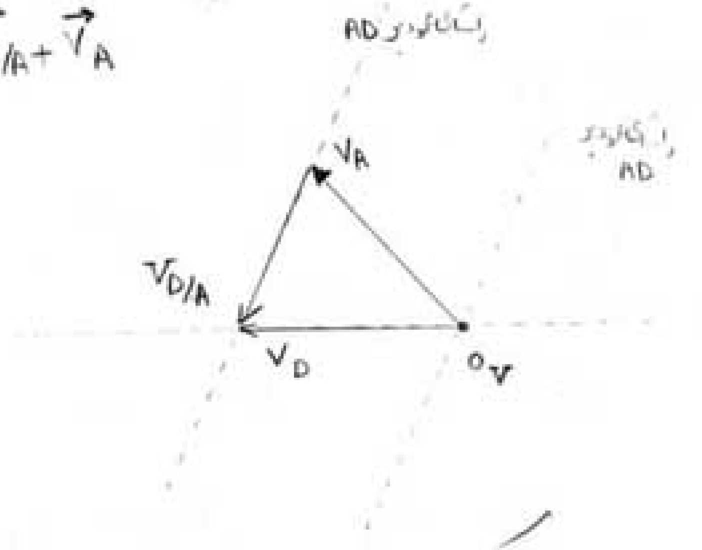
۴- رابط o_p به A معرف $\vec{V}_A$ است.

مثال: در مکانیزم زیر با معلوم بودن ω_2 با استفاده از روش سرعت نسبی سرعت زاویه‌ای اهرم 3 و سرعت لول شماره 4 را بیابید.



$$\overset{\checkmark -}{\vec{V}_D} = \overset{\checkmark -}{\vec{V}_{D/A}} + \overset{\checkmark\checkmark}{\vec{V}_A}$$

$V_A = \overline{O_2A}\,\omega_2$ معلوم است.



راستای حرکت اهرم 4

سؤال:

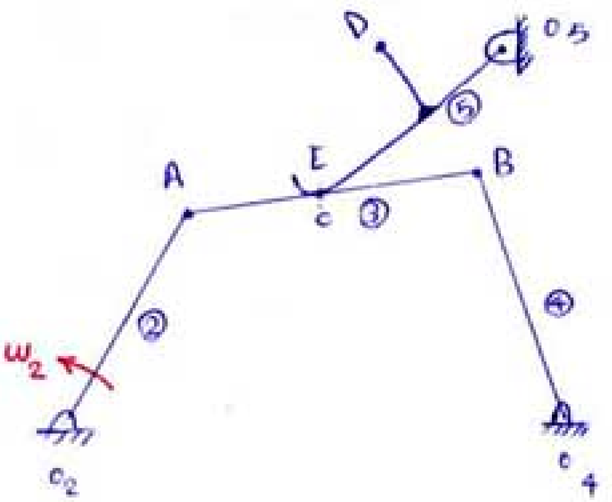
چرا $\vec{V}_D$ الزاماً از O_V باید عبور کند؟

دقت شود که هر برداری که از O_V رسم شود سرعت مطلق و هر برداری بین دو نقطه بر نمودار قطب سرعت باشد، سرعت نسبی بین آن دو نقطه است.

سرعت لولب 4 $\longleftarrow$ $\vec{V}_D$

سرعت زاویه‌ای ω_3 $\longleftarrow$ $\omega_3 = \dfrac{\vec{V}_{D/A}}{\overline{AD}}$

مثال 8 در مکانیزم زیر اگر سرعت زاویه‌ای اهرم 2 معلوم باشد، سرعت دورانی D از اهرم 5 را بیابید.



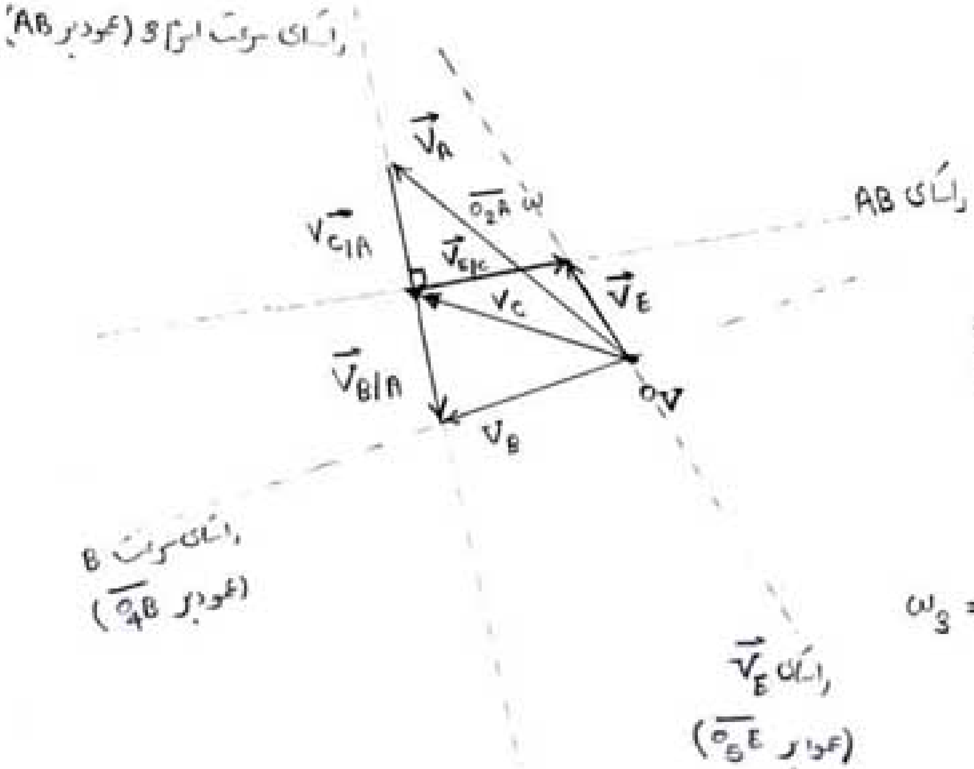
D در واقع روی اهرم 5 می‌باشد.

با داشتن ω_5 و با معلوم بودن فاصله $\overline{O_5D}$ سرعت $\vec{V}_D$ تعیین می‌گردد.

پس هدف تعیین ω_5 است که جهت بدست آوردن آن محاسبه سرعت V_E الزامیست.

مفصل بین اهرم 5 و اهرم 3 یا همان نقاط E و C از چه نوعی است؟

چون راستای خط المرکزین از یک نقطهٔ ثابت نمی‌گذرد مفصل لغزشی - غلتشی است. پس $\vec{V}_E = \vec{V}_{E/C} + \vec{V}_C$



برای A :

اندازه: $V_A = \overline{O_2A}\,\omega_2$

جهت: عمود بر $\overline{O_2A}$

برای $\underline{AB}$:

$$\overset{\checkmark\checkmark}{\vec{V}_A} + \overset{-\checkmark}{\vec{V}_{B/A}} = \overset{-\checkmark}{\vec{V}_B}$$

با معلوم شدن $\vec{V}_{B/A}$ داریم $\omega_3 = \dfrac{\vec{V}_{B/A}}{\overline{AB}}$

به این ترتیب برای نقطه C داریم:

$$\overset{\checkmark\checkmark}{\vec{V}_A} + \overset{\checkmark\checkmark}{\vec{V}_{C/A}} = \overset{--}{\vec{V}_C}$$

با توجه به معلوم بودن $\vec{V}_A$ و $\vec{V}_{C/A}$ اندازه $\vec{V}_C$ معلوم می‌شود.

می‌دانیم که با توجه به لغزشی - غلتشی بودن مفصل بین E و C اندازه سرعت نسبی در راستای مماس تماس یعنی مماس راستای AB است.

$$\overset{\checkmark -}{\vec{V}_E} = \overset{\checkmark -}{\vec{V}_{E/C}} + \overset{\checkmark\checkmark}{\vec{V}_C}$$

با معلوم شدن $\vec{V}_E$ داریم $\omega_5 = \dfrac{\vec{V}_E}{\overline{O_5E}}$

اندازه: $\underline{V_D = \overline{O_5D}\,\omega_5}$ و ساعتگرد CW است.

فصل ششم : بررسی شتاب در مکانیزم ها

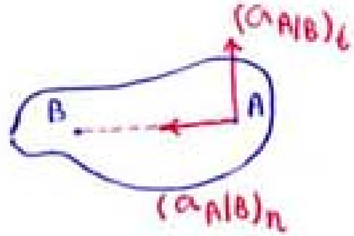
(فصل ۷ مارتین)

اگر دو ذره مانند A و B در جسم صلبی قرار داشته باشند در آن صورت رابطه بین شتاب آن دو ذره بصورت زیر است :

$$\vec{a}_{A/B} + \vec{a}_B = \vec{a}_A$$

$$(\vec{a}_{A/B})_n + (\vec{a}_{A/B})_t + \vec{a}_B = \vec{a}_A$$

برای شتاب ۲ مولفه عمودی و مماسی به شکل زیر تعریف می شوند :

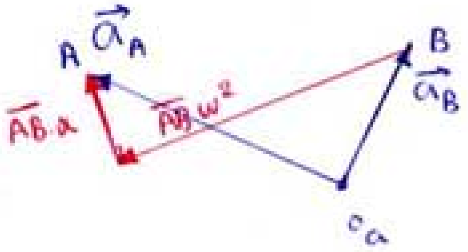


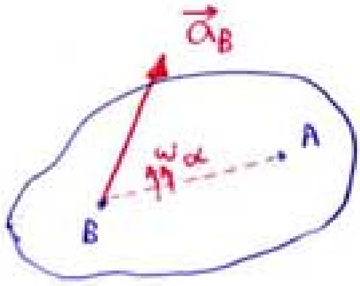
$(\vec{a}_{A/B})_n = \overline{AB}\,\omega^2$ از A به سمت B

$(\vec{a}_{A/B})_t = \overline{AB}\cdot\alpha$ عمود بر $\overline{AB}$

پس اگر در جسم صلبی شتاب نقطه ای مانند B معلوم باشد و سرعت و شتاب زاویه ای آن جسم صلب نیز مشخص باشد. برای تعیین شتاب ذره ای مانند A به شرح زیر عمل می کنیم.

۱- نقطه ای را به عنوان قطب شتاب (O_a) انتخاب می کنیم و کلیه بردارهای مطلق شتاب از این نقطه رسم می شوند و خطوط بین سایر نقاط در دیاگرام شتاب نشان دهنده شتابهای نسبی بین دو نقطه مذکور است.





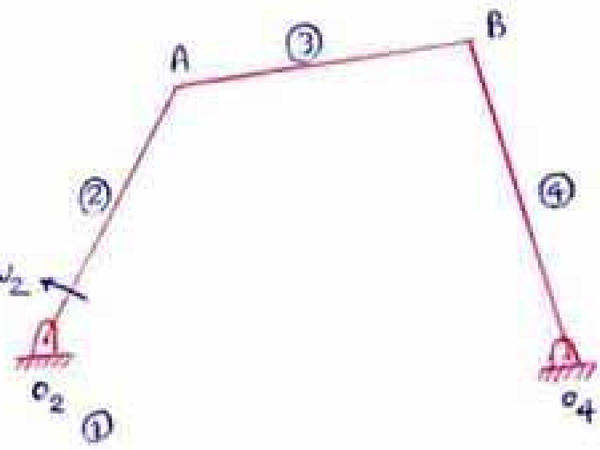
۲- از قطب شتاب بردار مشخص $\vec{a}_B$ رسم نموده و انتهای آن را B می‌نامیم.

۳- از نقطه B بردار $(a_{A/B})_n$ را به بزرگی $\overline{AB}\,\omega^2$ و از A به سمت B رسم می‌کنیم.

۴- از نوک این بردار $(a_{A/B})_t$ ، برداری به بزرگی $AB\alpha$ رسم می‌کنیم و انتهای آن را A می‌نامیم.

۵- رابط O_a به انتهای بردار مذکور (نقطه A) معرف شتاب A است. ($\vec{a}_A$)

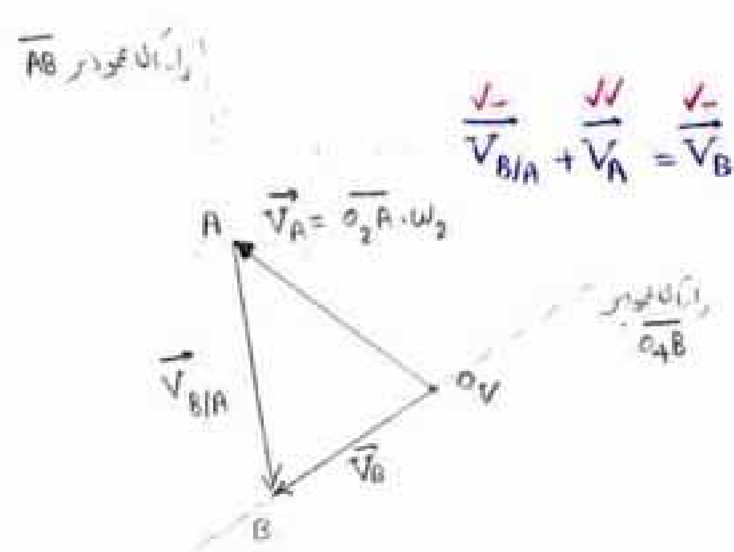
مثال: در مکانیزم زیر اگر سرعت زاویه‌ای اهرم 2 ثابت و برابر ω_2 باشد، شتاب زاویه‌ای اهرم ۴ را بیابید.



حل: روش سرعت‌ها:

برای اهرم 3 داریم:

$$\vec{V}_{B/A} + \vec{V}_A = \vec{V}_B$$



$$\omega_3 = \frac{V_{B/A}}{\overline{AB}} \quad cw \quad \text{معلوم}$$

$$\omega_4 = \frac{V_B}{\overline{O_4B}} \quad ccw \quad \text{معلوم}$$

روش شتاب‌ها:

برای اهرم 3 داریم:

$$\vec{a}_{B/A} + \vec{a}_A = \vec{a}_B$$

$$(\vec{a}_{B/A})_t + (\vec{a}_{B/A})_n + (\vec{a}_A)_t + (\vec{a}_A)_n = (\vec{a}_B)_n + (\vec{a}_B)_t$$

P-55

$(\vec{a}_{B/A})_t = \overline{AB} \cdot \alpha_3$ عمود بر AB

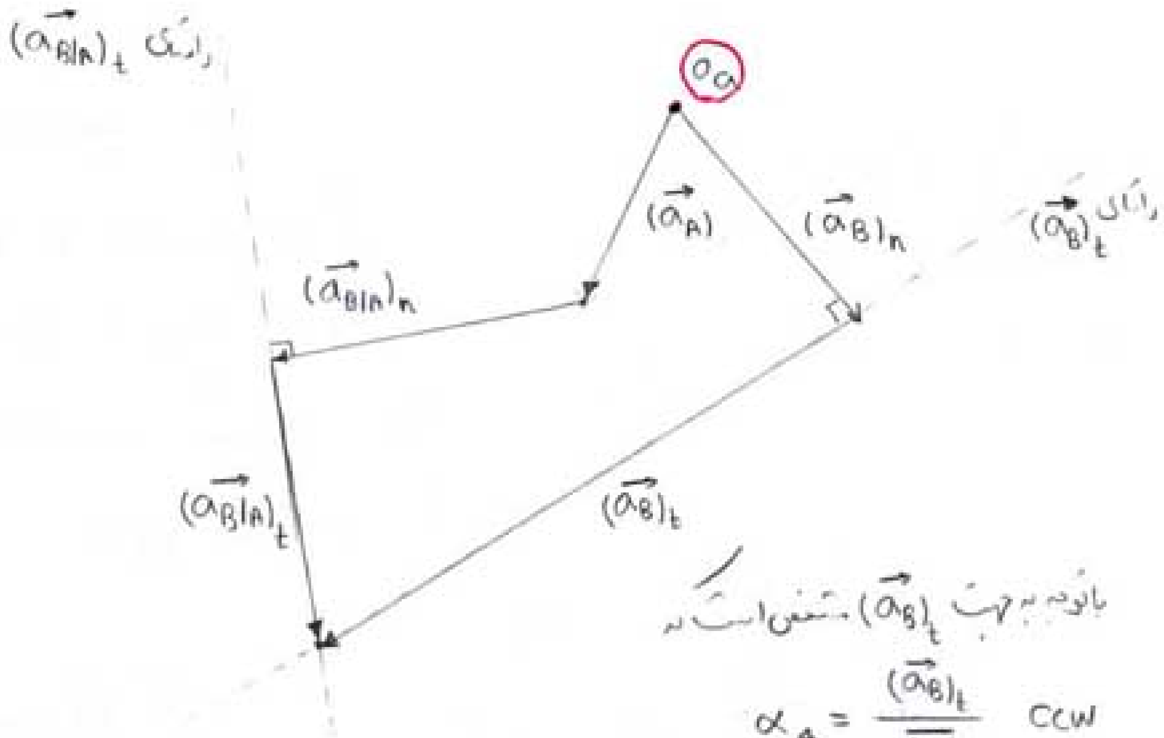
$(\vec{a}_{B/A})_n = \overline{AB} \cdot \omega_3^2$ حامل (از B به A)

$(\vec{a}_A)_t = \overline{O_2A} \cdot \alpha_2 = 0$ برابر

$(\vec{a}_A)_n = \overline{O_2A} \cdot \omega_2^2$ حامل (از A به O_2)

$(\vec{a}_B)_t = \overline{O_4B} \cdot \alpha_3$ عمود بر $\overline{O_4B}$

$(\vec{a}_B)_n = \overline{O_4B} \cdot \omega_4^2$ حامل (از B به O_4)

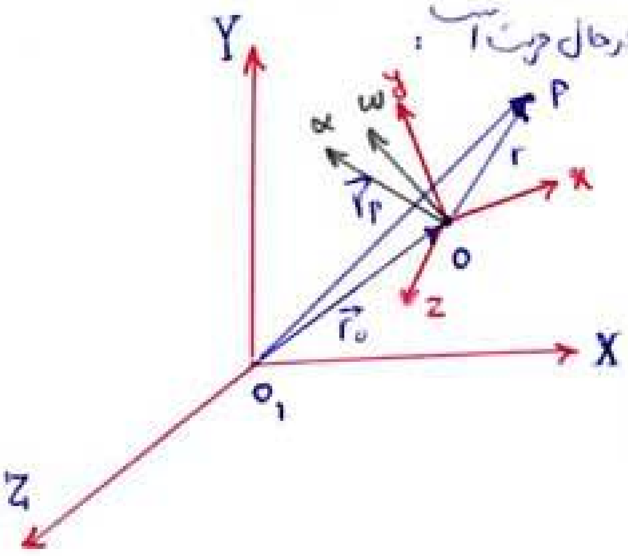


با توجه به جهت $(\vec{a}_B)_t$ مشخص است که

$$\alpha_4 = \frac{(\vec{a}_B)_t}{\overline{O_4B}} \quad \text{CCW}$$

شتاب کوریولیس :

فرض کنیم به نقطه P در فضای سه بعدی در حال حرکت است :



✓ محور مختصات ثابت : X-Y-Z

✓ محور مختصات متحرک : x-y-z
(دوران + انتقال)

✓ بردارهای یکه در راستای x و y و z : $\hat{i}$ و $\hat{j}$ و $\hat{k}$

✓ مبدأ مختصات ثابت : O_1

✓ مبدأ مختصات متحرک : O

✓ موقعیت ذره P نسبت به محور متحرک : $\vec{r}$

✓ موقعیت ذره P نسبت به محور ثابت : $\vec{r}_P$

✓ موقعیت مبدأ مختصات متحرک نسبت به مبدأ مختصات ثابت : $\vec{r}_O$

✓ سرعت و شتاب زاویه‌ای محور مختصات متحرک : $\vec{\omega}$ و $\vec{\alpha}$

نکته : وقتی محور مختصات دارای حرکت می‌باشد آنگاه مشتق زمانی $\hat{i}$ و $\hat{j}$ و $\hat{k}$ صفر نمی‌شود.

$$\vec{r}_P = \vec{r}_O + \vec{r} \qquad (1)$$

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

$$\vec{V}_P = \frac{d\vec{r}_P}{dt} = \frac{d\vec{r}_O}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{V}_P = \vec{V}_O + \frac{d}{dt}(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})$$

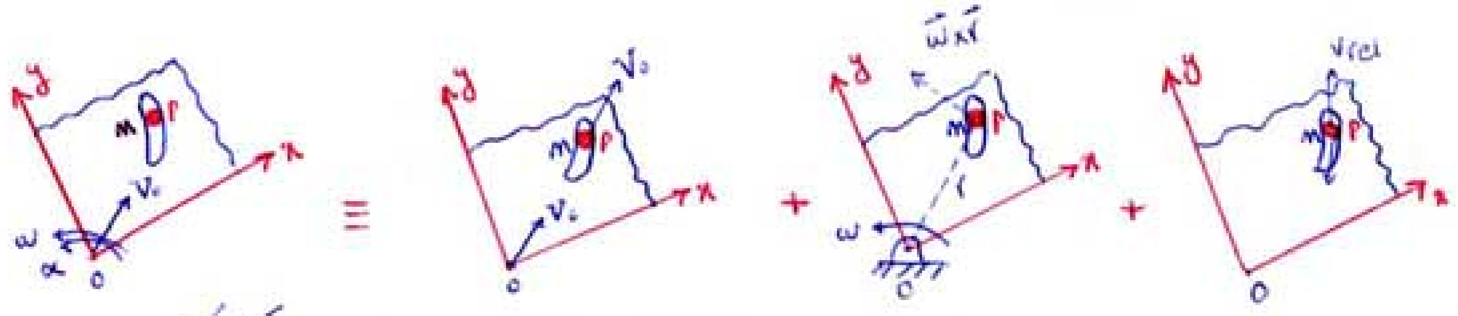
به دوران مانند x و y و z و همچنین $\hat{i}$ و $\hat{j}$ و $\hat{k}$ نسبت به زمان تغییر می‌کنند

$$\vec{V}_P = \vec{V}_O + \underbrace{(\dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k})}_{\vec{V}_{P/oxyz} = V_{Reletiv} = \vec{V}_{rel}} + (x\dot{\hat{i}} + y\dot{\hat{j}} + z\dot{\hat{k}})$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{\hat{i}} &= \vec{\omega} \times \hat{i} \\ \dot{\hat{j}} &= \vec{\omega} \times \hat{j} \\ \dot{\hat{k}} &= \vec{\omega} \times \hat{k} \end{aligned}\right\} \rightarrow \quad \vec{V}_P = \vec{V}_O + \vec{V}_{rel} + \vec{\omega} \times (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})$$

$$\boxed{\vec{V}_P = \vec{V}_O + \vec{V}_{rel} + \vec{\omega} \times \vec{r}} \qquad (2)$$

توجیه فیزیکی رابطه (2):



حرکت کلی — انتقال با سرعت $\vec V_o$ (P در داخل صفحه ثابت است) + دوران حول O (P در داخل صفحه ثابت است) + P در داخل صفحه با سرعت V_{rel} حرکت می‌کند (صفحه ثابت است)

$$\vec V_m = \vec V_o + \vec\omega\times\vec r$$
$$\vec V_P = \vec V_o + \vec\omega\times\vec r + \vec V_{rel}$$
$$\vec V_{P/m} = \vec V_P - \vec V_m = \vec V_{rel}$$

برای محاسبه شتاب ذره P از رابطه ② نسبت به زمان مشتق می‌گیریم:

$$\vec a_P = \frac{d\vec V_P}{dt} = \frac{d\vec V_o}{dt} + \frac{d}{dt}\overbrace{(\dot x\hat i + \dot y\hat j + \dot z\hat k)}^{V_{rel}} + \frac{d}{dt}(\vec\omega\times\vec r)$$

$$\vec a_P = \vec a_o + \underbrace{(\ddot x\hat i + \ddot y\hat j + \ddot z\hat k)}_{\vec a_{rel}} + \underbrace{(\dot x\dot{\hat i} + \dot y\dot{\hat j} + \dot z\dot{\hat k})}_{\omega\times\vec V_{rel}} + \vec\alpha\times\vec r + \vec\omega\times\underbrace{\frac{d\vec r}{dt}}_{\vec\omega\times\vec r + \vec V_{rel}}$$

$$\vec a_P = \vec a_o + \vec a_{rel} + \vec\alpha\times\vec r + \vec\omega\times(\vec\omega\times\vec r) + \underbrace{2\vec\omega\times\vec V_{rel}}_{\text{شتاب کوریولیس}} \qquad (3)$$

توجیه فیزیکی رابطه (3):

حرکت کلی ≡ دوران حول o (P ثابت) + حرکت انتقالی a_o (P ثابت) + صفحه ثابت و P متحرک

جمله شتاب کوریولیس ظاهر شد، پس توجیه فیزیکی ندارد. اگر جسمی روی جسم دیگری که ω دارد حرکت کند شتاب کوریولیس داریم.

$$\vec{a}_m = \vec{a}_o + \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

$$\vec{a}_p = \vec{a}_o + \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \vec{a}_{rel} + 2\vec{\omega} \times \vec{V}_{rel}$$

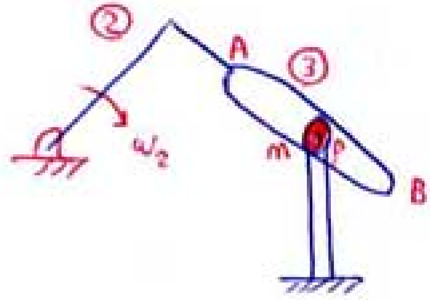
$$\vec{a}_{P/m} = \vec{a}_p - \vec{a}_m = \vec{a}_{rel} + 2\vec{\omega} \times \vec{V}_{rel}$$

روشهای دیگری نیز جهت بررسی شتاب وجود دارد که در اینجا مورد بررسی قرار نمی‌گیرند. از جمله روش ترسیم هارتمن و رابطه اویلر-ساواری (Euler-savary)

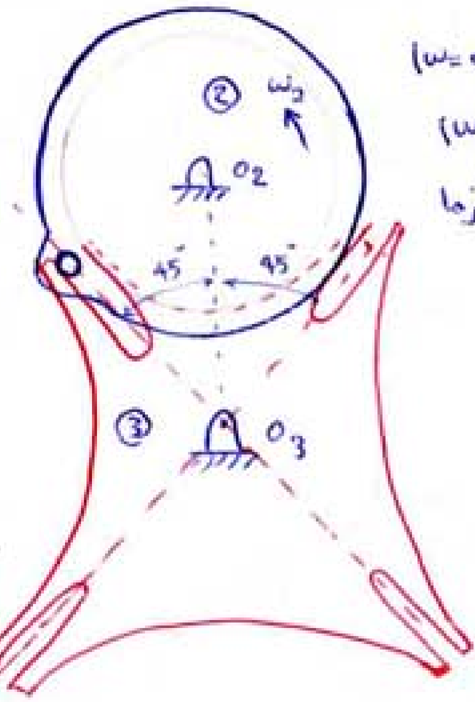
چند نکته مهم :

۱- شتاب کوریولیس داریم در اینجا

$2\omega_3 \times V_{rel}$



۲- هرجا ω یا V_{rel} صفر شود شتاب کوریولیس نداریم. مثلاً چرخ ژنوا در سه حالت زیر: (نقطه تصویری)



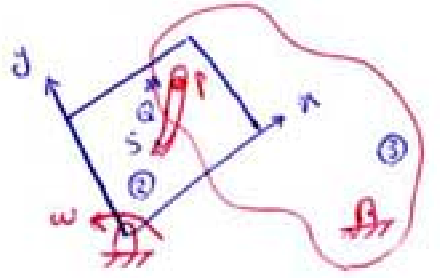
۱- موقع ورود پین به شیار ($\omega_3 = 0$)

۲- موقع خروج پین از شیار ($\omega_3 = 0$)

۳- موقعی که پین در راستای خط مرکزها قرار می‌گیرد ($\vec{V}_{rel} = 0$)

۳- اگر حرکت در صفحه در نظر گرفته شود جهت شتاب کوریولیس به صورت زیر تعیین می‌شود

« جهت سرعت نسبی را ۹۰ درجه در جهت چرخش ω می‌چرخانیم »



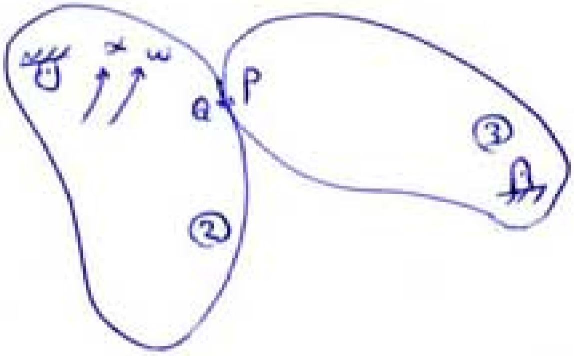
۴- نقطه P عضوی از اهرم 3 است و در لحظه اول

در تماس با m بعد با Q و بعدی می‌باشد.

شتاب کوریولیس $2\vec{\omega}_2 \times \vec{V}_{rel}$

!! ω_2 حرکت نه ω_3 حرکت !!

اما

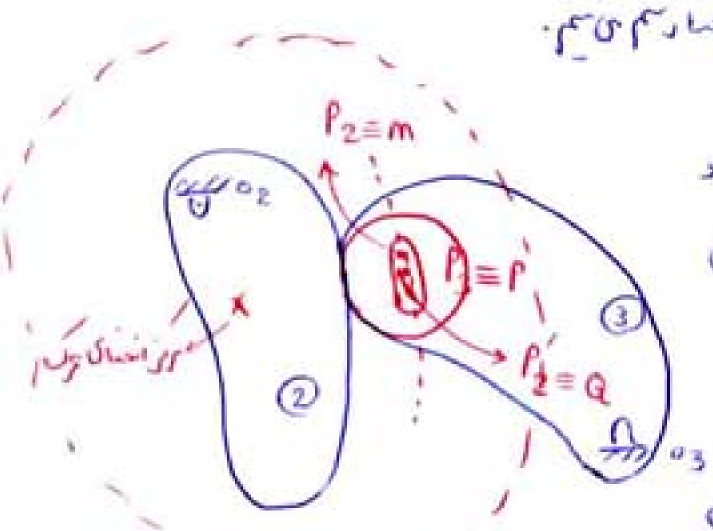


نقطه P و Q نسبت به هم $\vec{V}_{rel}$ دارند و جسم حرکت دارای ω_2 است اما شتاب کوریولیس از رابطه $2\vec{\omega}_2 \times \vec{V}_{P/Q}$ حاصل نمی‌شود، زیرا نقطه P از جسم 3 و نقطه Q از جسم 2 دائماً عوض می‌شوند. در صورتی که باید P یک نقطه ثابت از اهرم 3 باشد.

راه حل:

در محل تماس دو جسم ② و ③ یک مرکز انحنا بر تماس دو جسم (اگر جسم ② حرکت است دایره روی ③ در نظر گرفته می‌شود). جسم ② را بزرگتر فرض می‌کنیم به طوری که شیاری روی آن است که مرکز انحنا روی آن حرکت می‌کند.

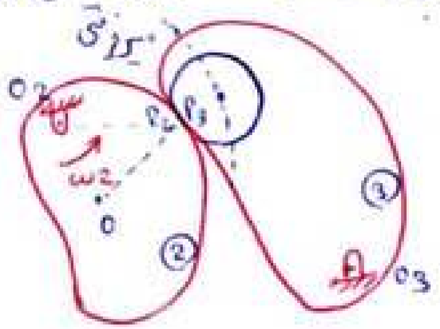
منطبق با انحنای جسم حرکت از آن مرکز انحنا رسم می‌کنیم.



مرکز انحنا همان نقطه مطلوب ما یعنی P است و نقاط Q و m محل تماس نقطه P در دو لحظه با جسم 2 است.

شتاب کوریولیس : $2 \cdot \vec{\omega}_2 \times \vec{V}_{P_3/P_2}$

مثال: در مکانیزم زیر اگر سرعت زاویه‌ای عضو ② ثابت و برابر ω_2 باشد، شتاب زاویه‌ای عضو ③ را بیابید.



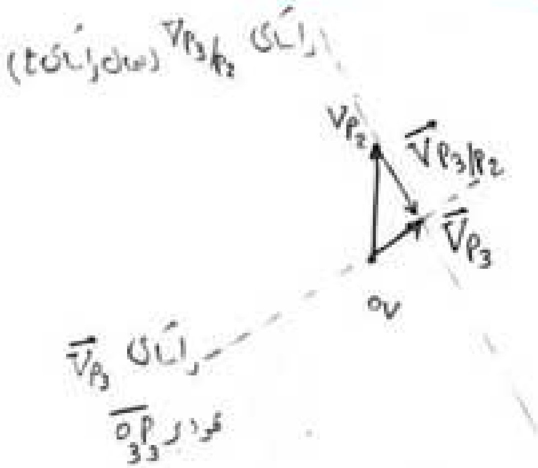
ابتدا باید سرعت V_{P_3/P_2} را حساب کنیم:

$$\overset{\checkmark -}{\vec V_{P_3/P_2}} = \overset{\checkmark -}{\vec V_{P_3}} - \overset{\checkmark\checkmark}{\vec V_{P_2}}$$

$\vec V_{P_3/P_2}$: مماس بر سطح تماس یا در راستای t

$\vec V_{P_3}$: عمود بر $\overline{O_3P_3}$

$\vec V_{P_2}$: عمود بر $\overline{O_2P_2}$



$$\omega_3 = \frac{|\vec V_{P_3}|}{\overline{O_3P_3}} \quad cw$$

بررسی شتاب‌ها:

$$\vec a_{P_3/P_2} = \vec a_{P_3} - \vec a_{P_2} = \vec a_{rel} + 2\vec\omega_2 \times \vec V_{rel}$$

$$\overset{\checkmark -}{(\vec a_{P_3})_t} + \overset{\checkmark\checkmark}{(\vec a_{P_3})_n} = \cancel{(\vec a_{P_2})_t} + \overset{\checkmark\checkmark}{(\vec a_{P_2})_n} + \overset{\checkmark -}{(\vec a_{rel})_t} + \overset{\checkmark\checkmark}{(\vec a_{rel})_n} + 2\vec\omega_2 \times \vec V_{rel}$$

$(\vec a_{P_3})_t$: $\overline{O_3P_3} \cdot \alpha_3$ — عمود بر $\overline{O_3P_3}$

$(\vec a_{P_3})_n$: $\overline{O_3P_3}\,\omega_3^2$ — از P_3 به O_3

$(\vec a_{P_2})_t$: $O_2P_2 \cdot \alpha_2 = 0$

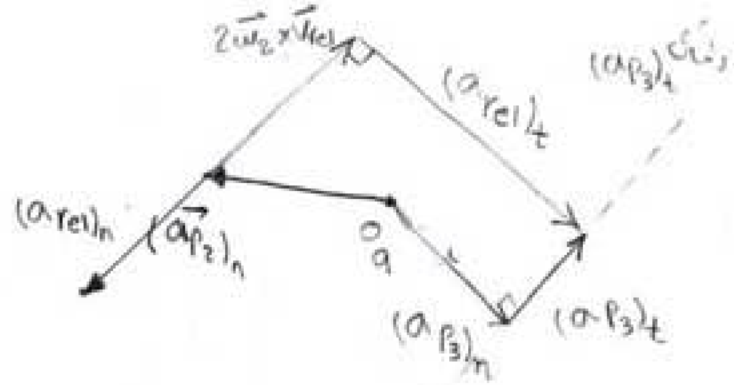
$(\vec a_{P_2})_n$: $O_2P_2 \cdot \omega_2^2$ — از P_2 به O_2

$(\vec a_{rel})_t$: $\dot V_{rel}$ — مماس بر V_{rel} (یا در جهت t)

$(\vec a_{rel})_n$: $\dfrac{|\vec V_{rel}|^2}{\overline{OP_2}}$ — از P_2 به سمت O

$2\vec\omega_2 \times \vec V_{rel}$ — مقدار معلوم و جهت (با چرخش V_{rel} به میزان 90 درجه در جهت ω_2 و از O به سمت P_2)

راستای $(a_{rel})_t$ مماس بر V_{rel}



$$\alpha_3 = \frac{|\vec a_{P_3}|_t}{\overline{O_3P_3}} \quad cw$$

فصل هفتم : مکانیزم های معادل

هنگامی که تجزیه و تحلیل شتاب یک مکانیزم تماسی مستقیم مورد نظر باشد، مسأله را می توان با جایگزین نمودن یک مکانیزم چند میله ای معادل ، ساده تر نمود.

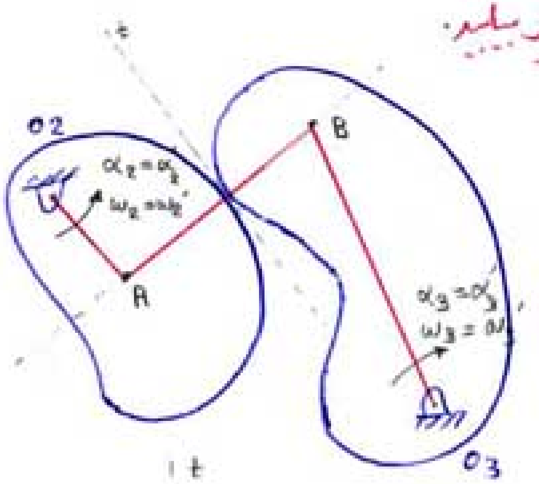
یک مکانیزم معادل ، مکانیزمی است که سرعت و شتاب زاویه ای عضو محرک و متحرک به طور لحظه ای برابر اعضای محرک و متحرک مکانیزم اولیه باشد.

روش کار :

در مکانیزم های تماس مستقیم ابتدا عمود مشترک دو سطح را در محل تماس رسم می کنیم . بر روی این عمود مشترک مراکز انحنای دو سطح را مشخص می کنیم . از مرکز دوران جسم محرک به مرکز انحنای آن و از مرکز دوران جسم متحرک به مرکز انحنای آن وصل می کنیم. مکانیزم حاصل را مکانیزم معادل می نامند.

مثال : مکانیزم های معادل را در شکل های زیر بیابید.

1)



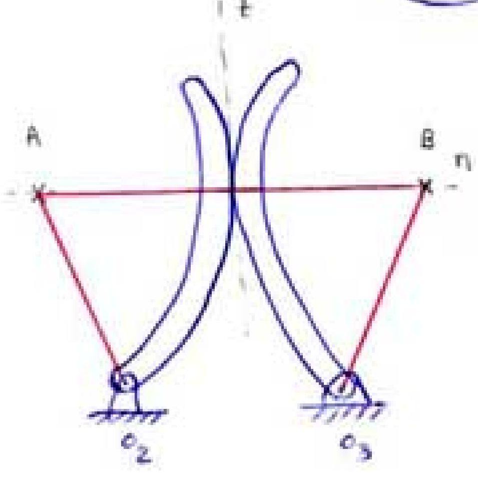
مکانیزم معادل : O_2ABO_3

دیگر شتاب کریولیس نداریم و تحلیل مسأله ساده تر می شود.

$\alpha_2 = \alpha_2'$ و $\alpha_3 = \alpha_3'$

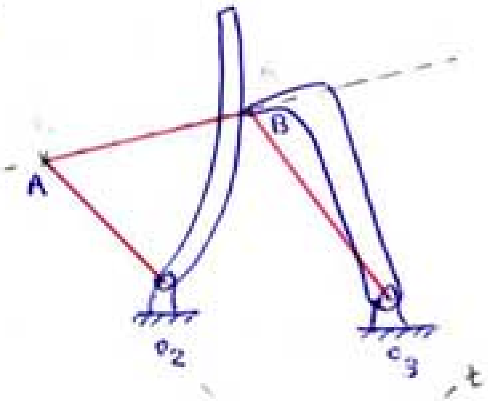
$\omega_2 = \omega_2'$ و $\omega_3 = \omega_3'$

2)



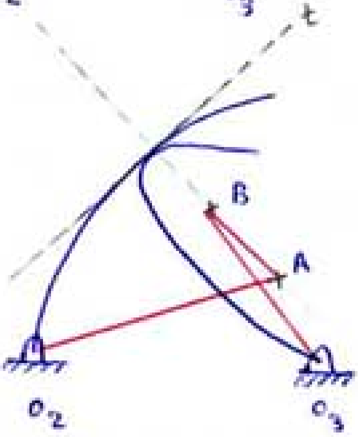
مکانیزم معادل : O_2ABO_3

3)



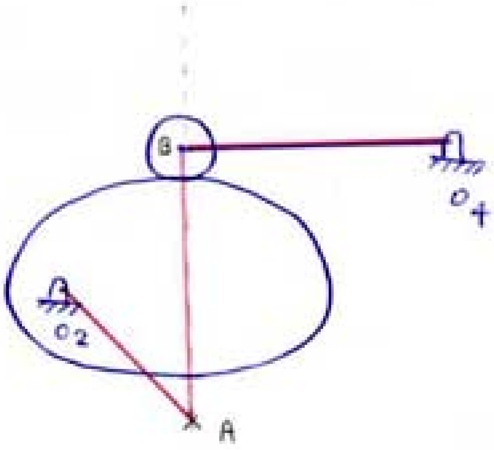
مکانیزم معادل : O_2ABO_3

4)

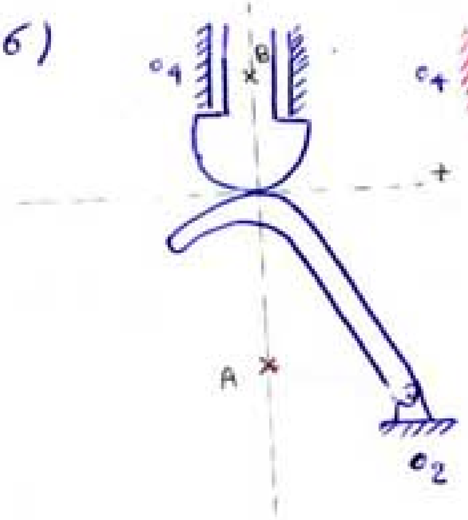


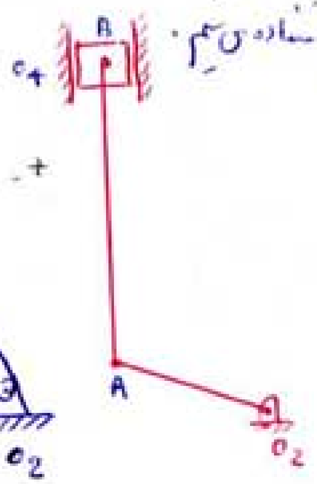
مکانیزم معادل : O_2ABO_3

5)



6)

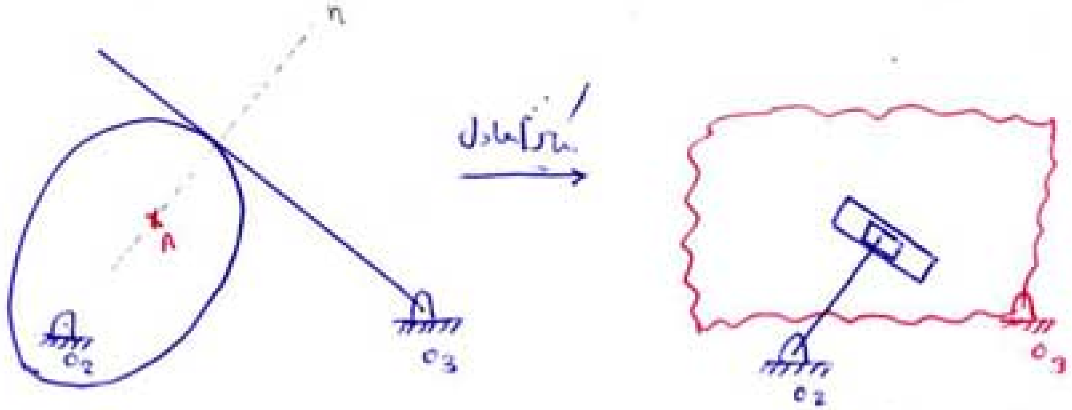




اگر حرکت بادامک داشتیم به جای آن از استفاده میکنیم.

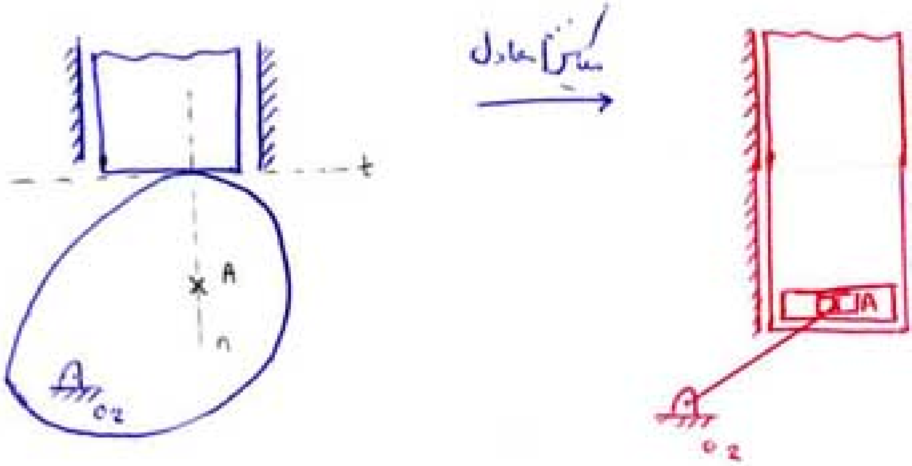
مکانیزم معادل : O_2ABO_4

7)

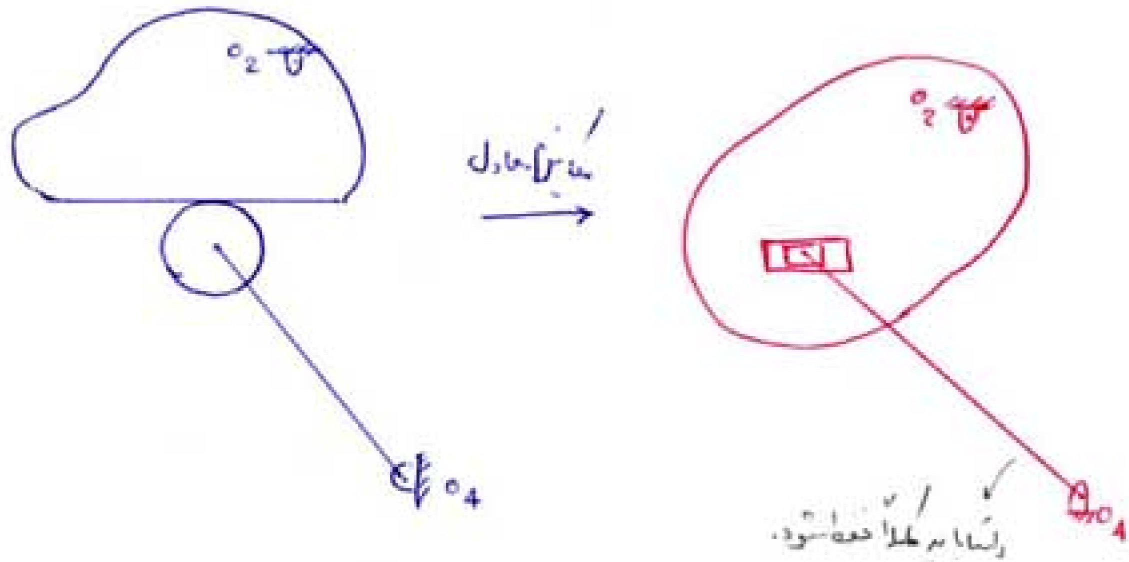


اگر مرکز انحنای یکی از اجسام درگیر در بی‌نهایت باشد به جای آن لغزنده می‌گذارند. مسیر لغزنده همیشه در جهت خط مماس در محل برخورد دو جسم است و محل آن در مرکز انحنای جسم دیگر است.

8)



9)



فصل هشتم : چرخ دنده ها

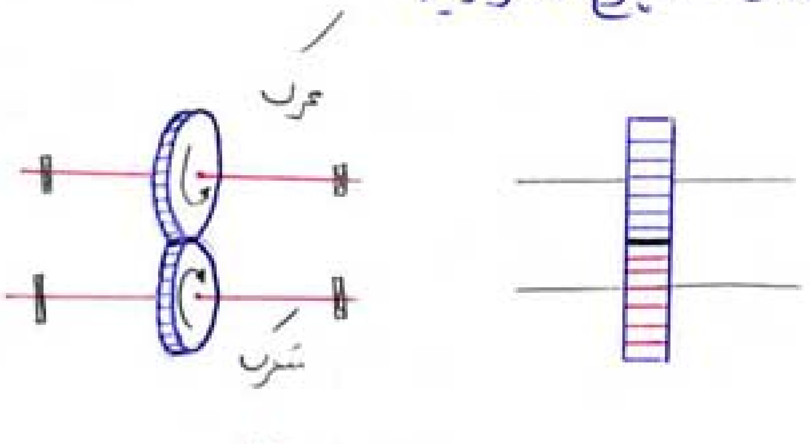
(مطالعه فصل ۱۲ و ۱۳ مارتین)

قدرت قابل انتقال توسط اعضای غلتشی محدود به اصطکاک بین سطوح درتماس است و اگر بار از حد تجاوز کند، لغزش اتفاق می افتد و برای فراهم کردن واکنش مثبت در روی سطوح تماس دندانه تعبیه می شود. اعضای حاصل موسوم به چرخ دنده می باشد.

چرخ دنده عضوی است که از آن برای انتقال توان همراه با تغییرات دور استفاده می شود که دارای انواع مختلفی می باشد که از جمله می توان موارد زیر را نام برد:

۱- چرخ دنده ساده یا صاف (Spur Gear)

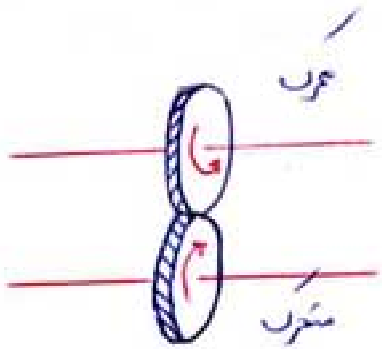
چرخ دنده ای است که برای انتقال توان بین دو شافت موازی از آن استفاده می شود. دندانه های این چرخ دنده ها با محور یا شافت چرخ دنده موازیند.

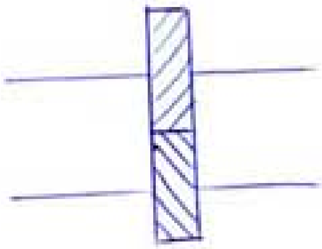


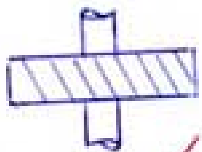
۲- چرخ دنده مارپیچ ساده (Simple Helical gear)

چرخ دنده ای است که برای انتقال توان بین دو شافت موازی از آن استفاده می شود. دندانه های این چرخ دنده ها به طور مورب نسبت به محور چرخ دنده قرار دارند. نحوه درگیری دندانه ها تدریجی بوده، ولذا از این چرخ دنده ها در مواقعی که دور بالا است استفاده می شود و به همین دلیل صدای ایجاد شده توسط

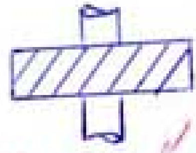
این چرخ دنده‌ها هم از چرخ دنده‌های ساده است. این چرخ دنده‌ها یا راستگرد هستند یا چپگرد.
(همانند پیچ‌ها) که در چرخ دنده‌های مارپیچ ساده همواره یک راستگرد با یک چپگرد درگیر می‌شود.



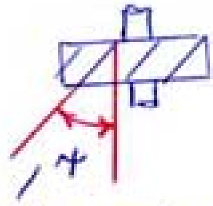




چپگرد (شیب منفی)



راستگرد (شیب مثبت)



زاویه مارپیچ (هلیکس)

زاویه مارپیچ ψ دو چرخ دنده مارپیچ ساده درگیر با هم الزاماً برابر است.

۳) چرخ دنده مارپیچ ضربدری (متقاطع)

چرخ دنده‌هایی هستند که توان را بین دو شافت متنافر انتقال می‌دهند، زاویه بین این دو شافت تابع رابطه زیر است:

زاویه بین دو شافت

$$\Sigma = \psi_1 \pm \psi_2$$

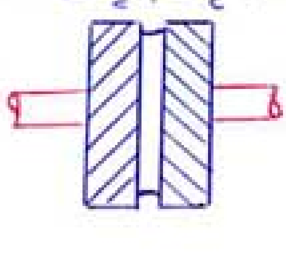
زاویه مارپیچ چرخ دنده 1

زاویه مارپیچ چرخ دنده 2

اگر هر دو چپگرد یا راستگرد باشند علامت جمع و اگر یکی چپگرد و دیگری راستگرد باشد علامت منفی داریم.

۴) چرخ دنده جناغی

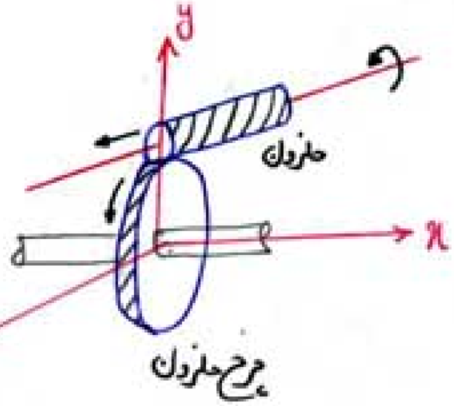
یک چرخ دنده جناغی معادل ۲ چرخ دنده مارپیچ با شیب معکوس است که پهلو به پهلو در کنار هم دیگر قرار داشته باشند و قابلیت حذف فشارهای جانبی را دارد.



۵) چرخ دنده حلزونی (worm gears)

در این چرخ دنده ها توان بین دو شافت متنافر که عموماً زاویه بین آنها 90° است منتقل می شود. محرک در این دستگاه حلزون است. لذا از این چرخ دنده ها برای کاهش دور به میزان قابل توجهی استفاده می شود.

اگر حلزون راستگرد باشد، چرخ حلزون نیز راستگرد است و بالعکس.



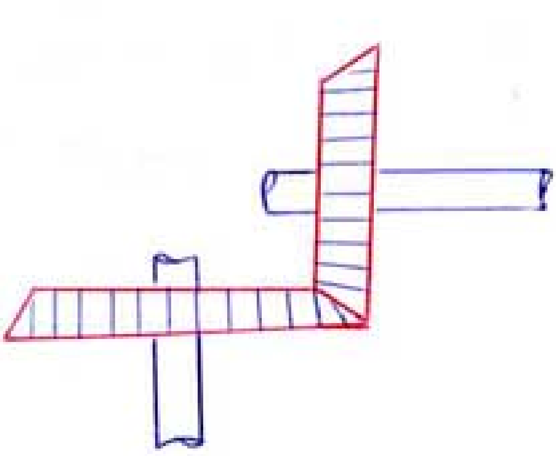
(در شکل هر دو چپ گرد هستند.)

به منظور تعیین جهت دوران چرخ دنده به ازاء دوران حلزون از قانون پیچ و مهره استفاده می شود. در این جا حلزون مانند پیچ و چرخ حلزون مانند مهره عمل می کند. بدین ترتیب که اگر حلزون با توجه به دید از سمت $-z$ ، cw بچرخد، چرخ حلزون با توجه به دید از $+x$ ، ccw خواهد چرخید.

۶) چرخ دنده مخروطی (Bevel gears)

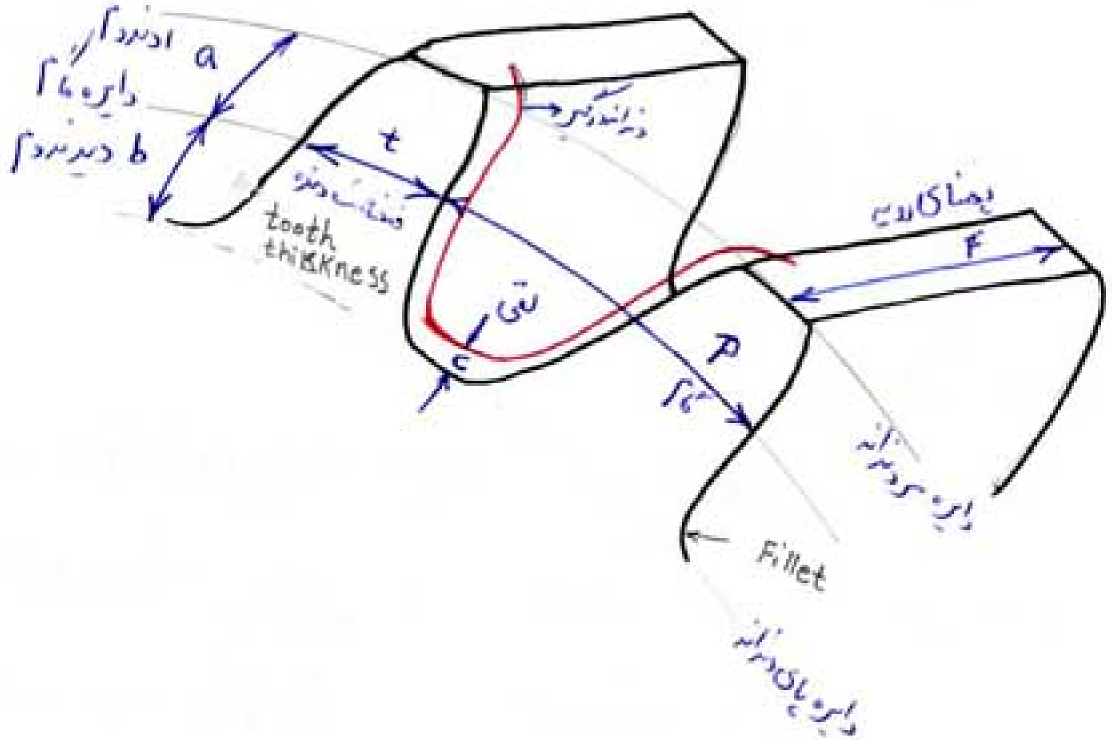
این چرخ دنده ها انواع مختلفی دارند که از مهمترین آنها می توان به مخروطی ساده و مخروطی مارپیچ اشاره کرد.

در چرخ دنده های مخروطی ساده و مخروطی مارپیچ توان بین دو شافت متقاطع که زاویه بین آنها 90° است، انتقال می یابد.



تعاریف اولیه :

اگر یک جفت دندانه از یک چرخدنده ساده را در نظر بگیریم، در آن صورت می‌توان پارامترهای زیر را به شرحی که گفته خواهد شد، تعریف کرد :



۱- دایره گام (Pitch circles) :

دایره‌ای فرضی است که از آن در امر محاسبات استفاده می‌شود، قطر این دایره را با d نمایش می‌دهند.

دوایر گام دو چرخدنده درگیر با هم مماس بوده و بر روی هم می‌غلتند.

۲- گام دندانه P (Circular pitch) :

فاصله یک نقطه واقع بر یک دندانه تا نقطه‌ی مشابه واقع بر دندانه‌ی دیگر روی دایره گام را گام دندانه می‌نامند.

گام دندانه‌ی دو چرخ دنده‌ی درگیر باید با هم برابر باشند.

۳- مدول m (module) :

در سیستم متریک طبق تعریف مدول برابر است با :

قطر بر حسب mm

$$m = \frac{d}{N}$$

تعداد دندانه

در سیستم انگلیسی گام قطری تعریف می‌شود که با P_d نمایش داده می‌شود :

Diameter Pitth

$$Dp \text{ یا } P_d = \frac{N}{d}$$

$N \rightarrow$ تعداد دندانه

$d \rightarrow$ قطر بر حسب in

رابطه گام با مدول : $NP = \pi d \rightarrow P = \pi \frac{d}{N} \Rightarrow \underline{P = \pi m}$

رابطه گام با DP : $NP = \pi d \rightarrow P \frac{N}{d} = \pi \Rightarrow \underline{P \cdot D_p = \pi}$

مدول یا Dp در چرخ دنده درگیر با هم برابر است.

۴- لقی جانبی یا عرضی (Backlash) :

فاصله آزاد بین دو دندانه که بر روی دایره‌ی گام اندازه گرفته می‌شود را لقی جانبی گویند.

۵- لقی c (Clearance) :

فاصله آزاد بین سطح بالای یک دندانه و سطح پایینی دندانه‌ی دیگر را لقی c گویند.

۶- ادندوم a (addendum) :

فاصله دایره‌ی گام تا سطح بالای دندانه را ادندوم گویند.

۷- دیدندوم b (Didendom) :

فاصله دایره‌ی گام تا سطح پایینی دندانه را دیدندوم گویند.

۸- عمق دندانه (whole depth) :

عمق دندانه برابر است : $h_t = a + b$

Pinion : چرخ دنده کوچک

Gear : چرخ دنده بزرگ

(مراجعه به صفحه ۲۰۸ جدول ۱۲-۲ ← ۴ فرم دنده استاندارد و مدل)

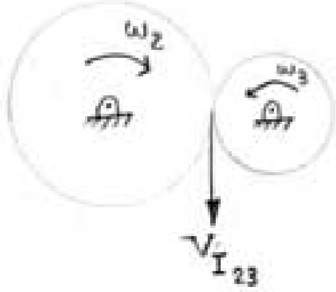
رشته چرخ‌دنده‌های معمولی:

یک جفت چرخ‌دنده درگیر را در نظر بگیرید که ۲ محرک و ۳ متحرک است.

$$V_{I_{23}} = r_2\omega_2 = r_3\omega_3 \Rightarrow$$

$$\omega_3 = \frac{r_2}{r_3}\omega_2 = \frac{d_2}{d_3}\omega_2 = \frac{N_2}{N_3}\omega_2$$

$$\Rightarrow \quad \omega_3 = \frac{N_2}{N_3}\omega_2$$



برای چرخ‌دنده ساده، مارپیچ ساده و مخروطی صادق است

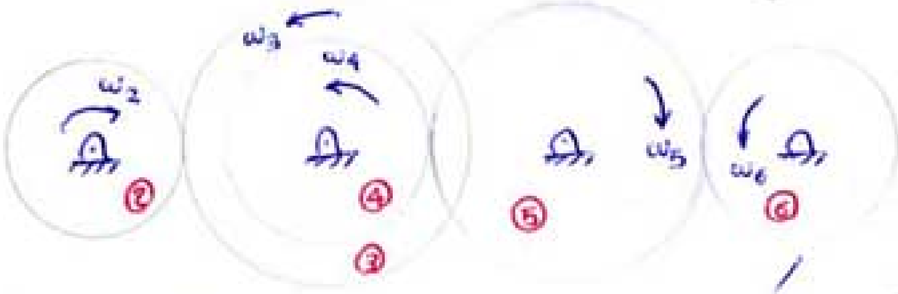
برای چرخ‌دنده حلزونی

$$\omega_{\text{چرخ حلزون}} = \frac{N_w}{N_G}\,\omega_{\text{حلزون}}$$

N_w ← تعداد راه‌های حلزون

N_G ← تعداد دندانه‌های چرخ حلزون

حال اگر چند جفت چرخ‌دنده درگیر داشته باشیم:



$$\omega_3 = \frac{N_2}{N_3}\omega_2 \quad \text{و} \quad \omega_3 = \omega_4$$

$$\omega_5 = \frac{N_4}{N_5}\omega_4 = \frac{N_4}{N_5}\cdot\frac{N_2}{N_3}\omega_2$$

$$\omega_6 = \frac{N_5}{N_6}\omega_5 = \frac{N_4}{N_6}\cdot\frac{N_2}{N_3}\cdot\frac{N_5}{N_5}\omega_2$$

بنابراین با تشکیل جدول محرک‌ها و متحرک‌ها داریم:

محرک	2	4	5
متحرک	3	5	6

که نسبت دورگیری

$$e = \frac{N_2\cdot N_4\cdot N_5}{N_3\cdot N_5\cdot N_6}$$

نسبت دورگیری

$$\boxed{e = \frac{\text{حاصل‌ضرب تعداد دندانه‌های چرخ‌دنده‌های محرک}}{\text{حاصل‌ضرب تعداد دندانه‌های چرخ‌دنده‌های متحرک}}}$$

یا VR

angular Velocity ratio

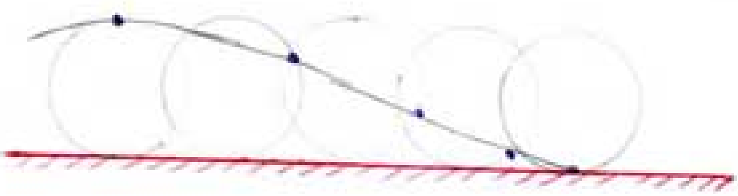
$$\omega_L = e\,\omega_F \longleftarrow \begin{cases} \omega_L = \omega_6 & \text{سرعت زاویه‌ای خروجی} \\ \omega_F = \omega_2 & \text{سرعت زاویه‌ای ورودی} \end{cases}$$

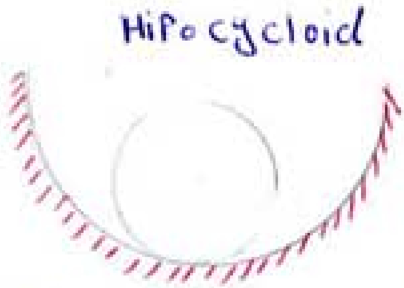
✓ چرخ‌دنده‌هایی مانند ω_5 را که در رابطه حذف می‌شوند و در دورگیری تأثیری ندارند فقط جهت ω را عوض می‌کنند

اگر e مثبت باشد جهت ω_L و ω_F یکی است و بالعکس.

رشته چرخ دنده های خورشیدی و یا اپی سیکلوئیدی :

سیکلوئید منحنی حرکت ذره از محیط یک دایره است که بر سطح افق می غلتد.





اگر سطح افق محدب شود منحنی به دست آمده اپی سیکلوئید و اگر مقعر شود هیپوسیکلوئید نام دارد.

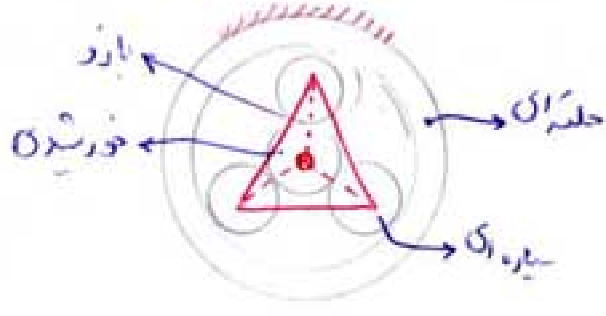
چرخدنده های خورشیدی یا Sun Gear چرخدنده هایی هستند که درجه آزادی آنها ۲ است. این مجموعه چرخدنده ها عموماً دارای اجزاء زیر می باشند :

۱- چرخدنده ای که در وسط است و بقیه چرخدنده ها به دور آن می چرخند که اصطلاحاً خورشیدی نام دارد

۲- بازویی که مرکز تعدادی از چرخدنده ها را که به دور خورشیدی می چرخند به هم متصل می کند.

۳- چرخدنده هایی که با حرکت بازو به دور خورشیدی می چرخند که آنها سیاره ای می گویند.

۴- چرخدنده حلقه ای یا رینگی که دور چرخدنده های سیاره ای قرار داشته باشد.



روش تحلیل سرعت زاویه‌ای روش جدولی:

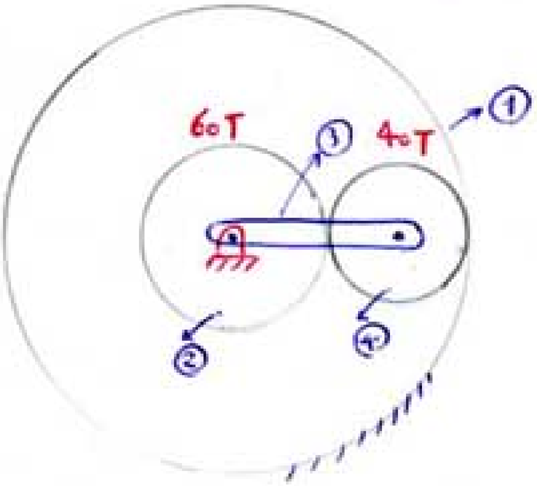
۱- ابتدا کل مجموعه را یکبار در جهت (cw) می‌چرخانیم.

۲- بازو را ثابت نگه می‌داریم و چرخ دنده‌هایی که ثابت بوده اند را یکبار در جهت (ccw) می‌چرخانیم.

۳- جمع مراحل ۱ و ۲ تعداد دورهای زده شده هر عضو را نشان خواهد داد.

توجه: جهت چرخش ساعتگرد مثبت است. توجه شود که دو چرخدنده درگیر خارجی جهت را عوض کرده و دو چرخدنده درگیر داخلی (مثل سیاره در رینگ) جهت را عوض نمی‌کند

مثال: اگر سرعت زاویه‌ای چرخدنده ② در دستگاه نشان داده شده زیر 80 rpm در جهت ccw باشد و چرخدنده حلقه‌ای ① ساکن باشد، سرعت زاویه‌ای چرخدنده ④ را بیابید.



درجه آزادی: $n=4$, $F_1=3$, $F_2=2$ $\quad DoF = 9 - 2(3) - 2 = 1$

ابتدا تعداد دندانه‌های چرخدنده رینگی را می‌یابیم:

$$\frac{1}{2}d_2 + d_4 = \frac{1}{2}d_1 \qquad M = \frac{d}{N} \ \text{or} \ d = MN$$

$$\downarrow$$

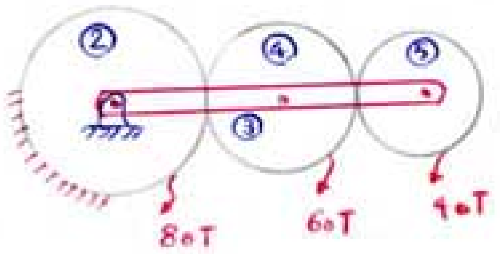
$$MN_2 + 2MN_4 = MN_1 \Rightarrow N_2 + 2N_4 = N_1 \Rightarrow N_1 = 140\,T$$

چرخدنده ①	چرخدنده ④	چرخدنده ②	بازو ③	اعمال انجام شده روی مجموعه
+1	+1	+1	+1	مجموعه یکبار دور مثبت بزند (cw)
-1	$-\frac{140}{40}$	$+\frac{140}{40} \times \frac{40}{60}$	0	بازو ثابت و چرخدنده ① یکبار دور منفی بزند
0	$-2\frac{1}{2}$	$+3\frac{1}{3}$	+1	تعداد دورهای بدست آمده

$$\frac{\omega_4}{\omega_2} = \frac{-2\frac{1}{2}}{3\frac{1}{3}} = \frac{-5/2}{10/3} = \frac{-15}{20} = -3/4$$ و $\omega_2 = 80$ rpm ccw !(منفی)

$$\Rightarrow \omega_4 = 80 \times \frac{3}{4} = 60 \text{ rpm}$$

مثال: در دستگاه خورشیدی زیر نسبت سرعت زاویه‌ای چرخدنده ⑤ به چرخدنده ④ را بیابید.



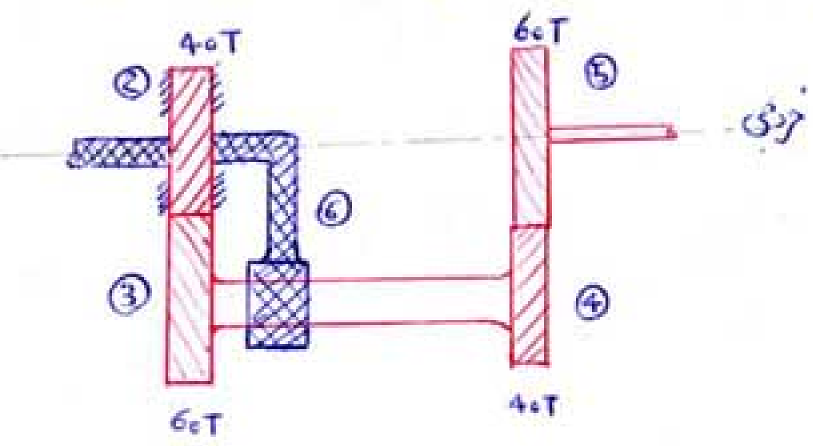
اعضای تشکیل‌دهنده مجموعه	بازو ③	چرخدنده ②	چرخدنده ④	چرخدنده ⑤
مجموعه یک دور مثبت بزند (cw)	+1	+1	+1	+1
بازو ثابت و چرخدنده ② یک دور منفی بزند	0	-1	$+\frac{80}{60}$	$-\frac{80}{60} \times \frac{60}{40}$
تعداد دورهای بدست آمده	+1	0	$+7/3$	-1

$$\frac{\omega_5}{\omega_4} = \frac{-1}{+7/3} = -3/7$$ یعنی به نسبت 3/7 و در خلاف جهت هم می‌چرخند.

اگر $\omega_3 = 60$ rpm و cw باشد: آنگاه $\omega_5 = -60$ rpm (ccw)

$\hookrightarrow$ $\omega_4 = 7/3 \times 60 = 140$ rpm cw

مثال: در گیربکس خورشیدی هم‌محور زیر سرعت زاویه‌ای شافت خروجی به شافت ورودی را بیابید.



نسبت خروجی به ورودی:

VR یا TV یا e

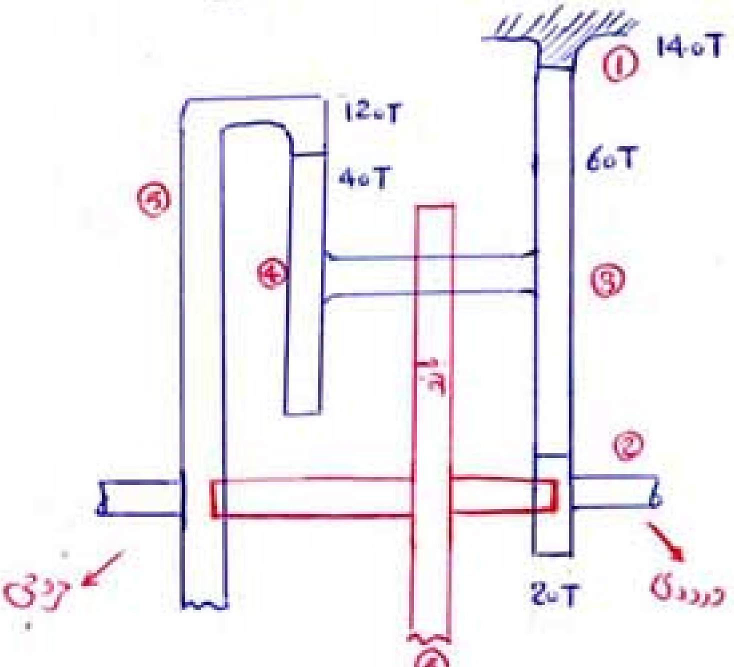
Velocity ratio — Train Value

اعضای تشکیل دهنده مجموعه	چرخ دنده ②	چرخ دنده ③	چرخ دنده ④	چرخ دنده ⑤	بازو ⑥
مجموعه یک دور مثبت بزند (cw)	+1	+1	+1	+1	+1
بازو ثابت و چرخ دنده ② یک دور منفی بزند	-1	$+\frac{40}{60}$	$+\frac{40}{60}$	$-\frac{40}{60}\times\frac{40}{60}$	0
تعداد دورهای بدست آمده	0	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{9}$	+1

$$TV = \frac{\omega_5}{\omega_6} = \frac{5/9}{1} = 5/9$$

یعنی دستگاه تعداد دور را 4/9 کاهش می‌دهد.

مثال ۵ در گیربکس خورشیدی زیر نسبت سرعت خروجی به ورودی یا (TV) را بیابید.



$$\frac{\omega_5}{\omega_2} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{8}{1}} = \frac{1}{36}$$

$$\omega_5 = \frac{1}{36}\,\omega_2$$

اعضای تشکیل دهنده مجموعه	چرخ دنده ①	چرخ دنده ②	چرخ دنده ③	چرخ دنده ④	چرخ دنده ⑤	بازو ⑥
مجموعه یک دور مثبت بزند (cw)	+1	+1	+1	+1	+1	+1
بازو ثابت و چرخ دنده ① یک دور منفی بزند	-1	$\frac{140}{60}\times\frac{60}{20}$	$-\frac{140}{60}$	$-\frac{140}{60}$	$-\frac{140}{60}\times\frac{40}{120}$	0
تعداد دورهای بدست آمده	0	+8	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$+\frac{2}{9}$	+1

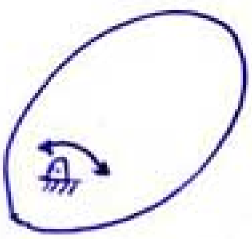
فصل نهم: بادامکها : (Cams)

بادامک عضوی از ماشین بوده که با شکل نامنظم خود به عنوان یک محرک، حرکت را به عضو دیگری به نام پیرو (follower) انتقال می‌دهد و در ماشینهای اتوماتیک مثل ماشین چاپ، ماشینهای ابزار، احتراق داخلی و ... کاربرد دارد.

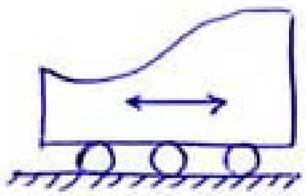
انواع بادامکها :

۱- بادامکهای دیسکی (Disk cams) یا بادامکهای دورانی (Rotating cams)

۲- بادامکهای انتقالی (Tranlation cams) یا بادامکهای رفت و برگشتی (Reciprocating cams)



(Rotating cams)

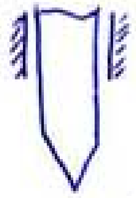


(Reciprocating cams)

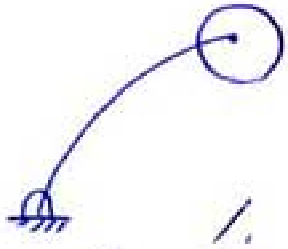
انواع پیروها :

از نظر حرکتی:
- پیروهای نوسانی یا دورانی (Osilating or Rotating)
- پیروهای رفت و برگشتی (Reciprocating)

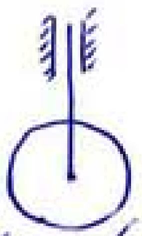
از نظر شکل:
- نوک تیز (Knife edge)
- غلتکی (Roler)
- کفشکی تخت (Flat shoe)
- کفشکی منحنی (Curve shoe)



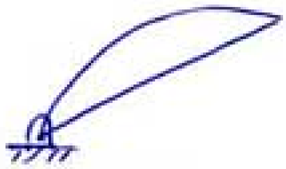
نوک تیز



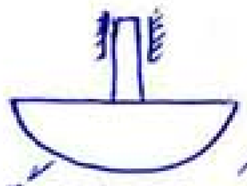
غلتکی دورانی



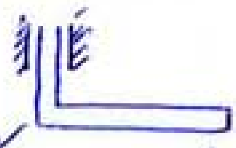
غلتکی رفت و برگشتی



کفشکی تخت دورانی



کفشکی منحنی رفت و برگشتی

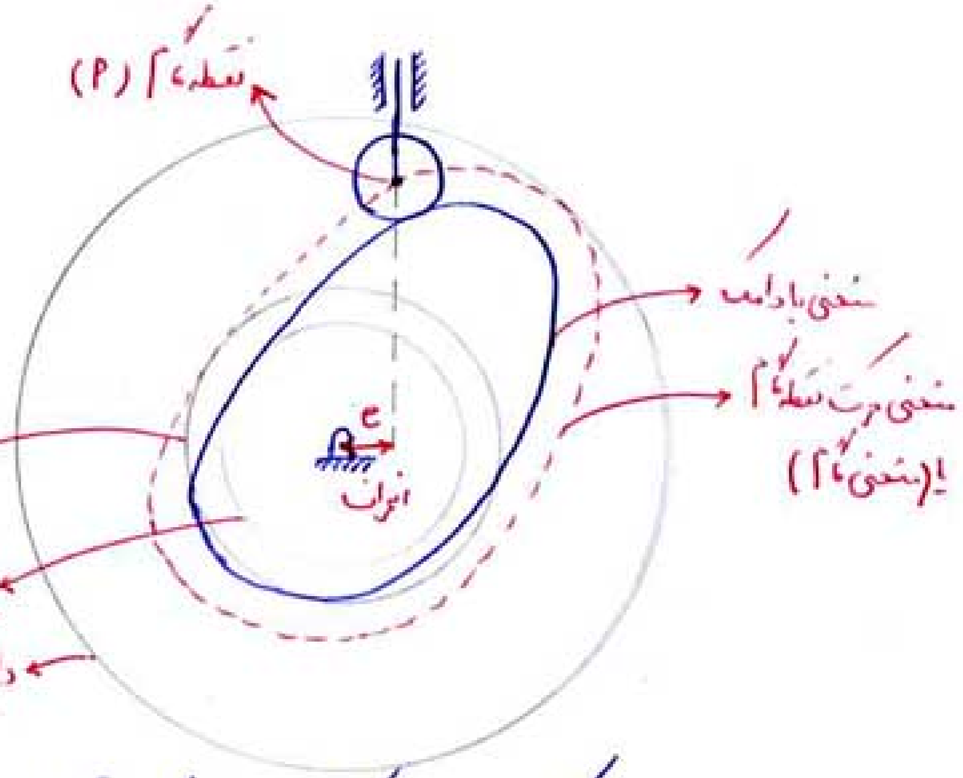


کفشکی تخت رفت و برگشتی

- برای طراحی بادامکها ابتدا رفتار پیرو را مشخص می‌کنیم و سپس براساس آن رویه (سطح) بادامک تعیین می‌گردد.

نقطه گام:

یک نقطه فرضی از پیرو است که در سازوکارهای معادل با پیرو نوک تیز، نوک پیرو در آن نقطه واقع می‌شود. بسته به نوع سازوکار معادل، ممکن است این نقطه دائم باشد، مثلاً در پیرو غلتکی و کفشکی دایروی، مرکز دایره، محل تماس فرضی (از نوع) دائم است و در کفشکی غیر دایروی، مرکز انحنا سطح در تماس پیرو بوده و آنی است. در پیرو کفشکی تخت، همان محل تماس پیرو با بادامک بوده و آنی است.
نقطه گام را با P نمایش می‌دهند و مسیر حرکت نقطه گام روی بادامک را منحنی گام می‌نامند.
مثلاً برای پیرو کفشکی تخت منحنی گام همان منحنی بادامک است.



بادامک چرخان خارج از مرکز - پیرو غلتکی رفت و برگشتی

دایره پایه:

کوچکترین دایره به مرکز چرخش بادامک که بر منحنی بادامک مماس است را دایره پایه گویند.

دایره گام:

کوچکترین دایره به مرکز چرخش بادامک که بر منحنی گام مماس است را دایره گام می‌نامند. واضح است در پیروهای غلتکی تخت یا نوک تیز این دایره بر دایره پایه منطبق است.

دایره کورس:

بزرگترین دایره به مرکز چرخش بادامک که بر منحنی گام مماس است را دایره کورس نامند.

L: کورس پیرو ، R_{min}: شعاع دایره گام ، R_{max}: شعاع دایره کورس

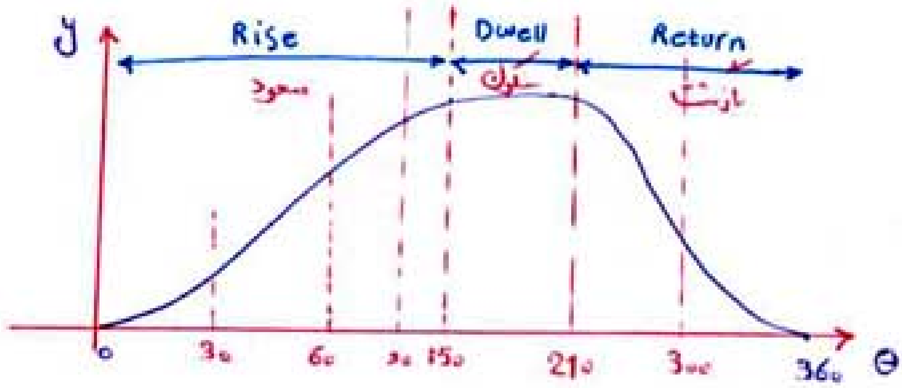
$$L = R_{max} - R_{min}$$

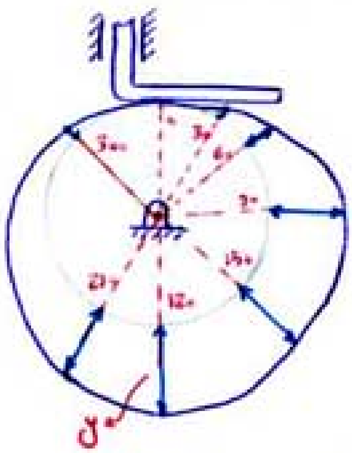
انحراف:

فاصله مرکز چرخش بادامک تا امتداد حرکت نقطه گام را انحراف (e) می‌نامند و این بادامکها را خارج از مرکز نامند.

موقعیت پیرو :

فرض کنید که موقعیت و نمودار حرکت پیرو به ازاء یک حرکت دورانی کامل بادامک به شکل زیر داده شده است. و بادامک از نوع دورانی خارج از مرکز و پیرو لغزشی تخت رفت و برگشتی باشد.





موقعیت پیرو با ل نمایش داده می شود و در پیرو رفت و برگشتی برحسب متر یا سانتی متر یا میلی متر بیان می شود [L] و در پیرو نوسانی (دورانی) بدون بعد بوده و با واحد رادیان بیان می گردد. نزدیکترین حد نقطه ها به مرکز چرخش بادامک به عنوان مبداء اندازه گیری موقعیت پیرو در نظر گرفته می شود و در بادامک دورانی مبداء $ل=0$ مماس بر دایره پایه است.

بادامک های رفت و برگشتی نیز برحسب [L] و بادامک های دورانی برحسب θ و بدون بعد و برحسب رادیان است.

می توان نوشت : $ل = F(\theta)$ (برای بادامک های دورانی)

مشتق شتاب jerk (ضربه یا تکان)

با مشتق گیری پیاپی از y نسبت به زمان می توان سرعت، شتاب و تکان پیرو را بدست آورد. برای آنکه این مشتق گیری مستقل از نحوه چرخش زمان توسط بادامک باشد، مشتق گیری پیاپی از y نسبت به موقعیت بادامک (θ) صورت گرفته و با استفاده از قاعده زنجیره ای می توان مشتق های نسبت به زمان را محاسبه نمود؛

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} \quad , \quad y' = \frac{dy}{d\theta}$$

$$\ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2} \quad , \quad y'' = \frac{d^2y}{d\theta^2}$$

$$\dddot{y} = \frac{d^3y}{dt^3} \quad , \quad y''' = \frac{d^3y}{d\theta^3}$$

$\dot{y}$: سرعت واقعی m/s

$\ddot{y}$: شتاب واقعی m/s^2

$\dddot{y}$: تکان واقعی m/s^3 (Jerk)

y' : سرعت مجازی m/rad

y'' : شتاب مجازی m/rad^2

y''' : تکان مجازی m/rad^3

$$y = f(\theta) \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}$$

$$\dot{y} = y'\dot{\theta} \quad \text{یا} \quad \dot{y} = y'\omega$$

$$\ddot{y} = y''\dot{\theta}^2 + y'\ddot{\theta} \quad \text{یا} \quad \ddot{y} = y''\omega^2 + y'\alpha$$

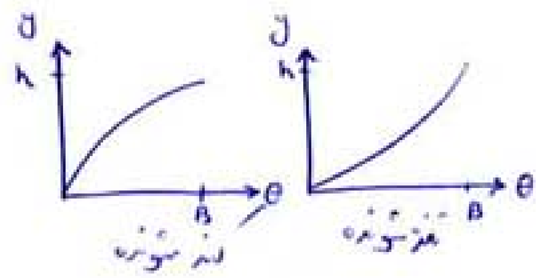
$$\dddot{y} = y'''\dot{\theta}^3 + 3y''\dot{\theta}\ddot{\theta} + y'\dddot{\theta} \quad \text{یا} \quad \dddot{y} = y'''\omega^3 + 3y''\omega\alpha + y'\dot{\alpha}$$

($\dot{\alpha}$: تکان زاویه‌ای بادامک)

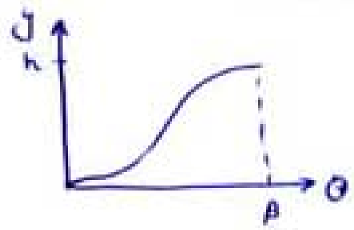
<u>انواع حرکات متداول پیرو:</u>

نوع حرکت	تغییر مکان (y)	سرعت ($\dot{y}$)	شتاب ($\ddot{y}$)
شتاب ثابت	$\frac{\theta}{\beta} \leq 0.5 \quad s = 2h\frac{\theta^2}{\beta^2}$ $\frac{\theta}{\beta} \geq 0.5 \quad s = h\left[1 - 2\left(1 - \frac{\theta}{\beta}\right)^2\right]$	$\frac{ds}{dt} = \frac{4h\omega\theta}{\beta^2}$ $\frac{ds}{dt} = \frac{4h\omega}{\beta}\left(1 - \frac{\theta}{\beta}\right)$	$\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{4h\omega^2}{\beta^2}$ $\frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{4h\omega^2}{\beta^2}$
هارمونیک ساده	$s = \frac{h}{2}\left(1 - \cos\frac{\pi\theta}{\beta}\right)$	$\frac{ds}{dt} = \frac{\pi h\omega}{2\beta}\sin\frac{\pi\theta}{\beta}$	$\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{\pi^2 h\omega^2}{2\beta^2}\cos\frac{\pi\theta}{\beta}$
سیکلوئیدی	$s = h\left(\frac{\theta}{\beta} - \frac{1}{2\pi}\sin\frac{2\pi\theta}{\beta}\right)$	$\frac{ds}{dt} = \frac{h\omega}{\beta}\left(1 - \cos\frac{2\pi\theta}{\beta}\right)$	$\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{2\pi h\omega^2}{\beta^2}\sin\frac{2\pi\theta}{\beta}$

از انواع معادلات :



۱- شتاب ثابت : $y = A\theta^2 + B\theta + C$



۲- هارمونیک ساده : $y = A\cos(a\theta) + B$ یا $y = A\sin(a\theta) + B$

۳- سیکلوئیدی : $y = A\cos(a\theta) + B\theta + C$ یا $y = A\sin(a\theta) + B\theta + C$

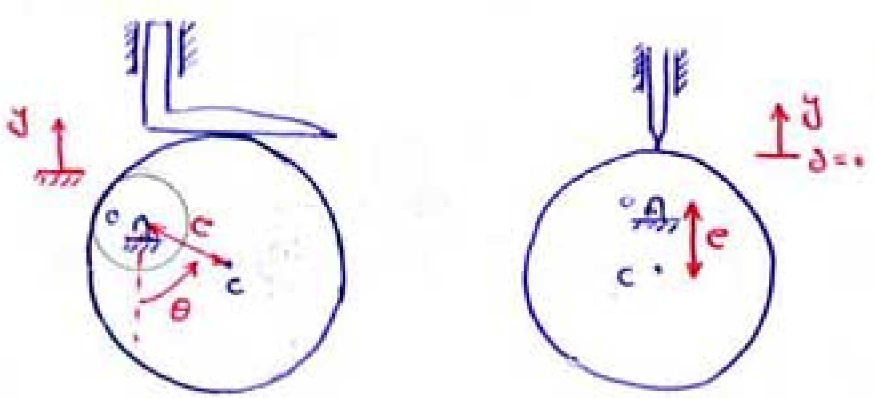
زاویه چرخش شده : θ

بیشترین تغییر مکان : h

زاویه بیشترین تغییر مکان : β

بادامک خارج از مرکز :

در این نوع بادامکها که به دلیل حذف برخی قطعات جانبی در ماشینها و ماشین‌های مشابه جای روی پیرو طراحی شده‌اند، مرکز دوران بادامک به اندازه e از مرکز دایره فاصله دارد. معادله حرکت پیرو عبارت است از



$$y = e(1 - \cos\theta)$$