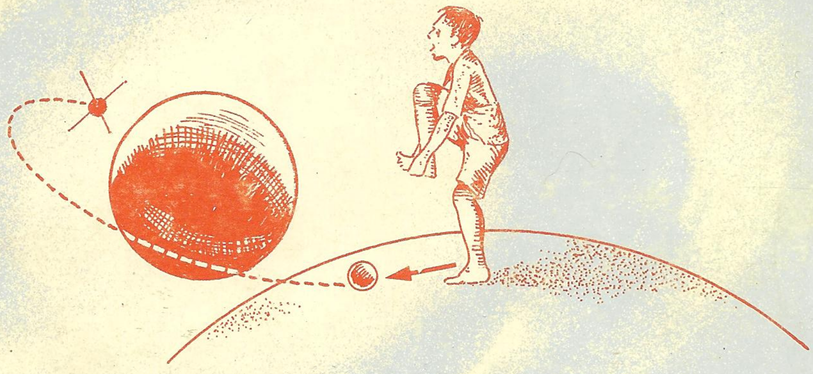
در قلمرو مکانیک

کتاب اول/ دینامیک

تألیف هامفری و توپینگ / ترجمهٔ هوشنگ شریف زاده

ویرایش دوم



درقلمرو مکانیک

کتاب اول / دینامیک

تألیف هامفری و تو پینگ

ترجمهٔ هوشنگ شریف زاده

مؤسسهٔ انتشارات فاطمی

تهران ــ ۱۳۶۷

چاپ سوم شهریورماه ۱۳۶۷
(ویرایش دوم با تجدیدنظر و تجدید حروفچینی)

انتشارات فاطمی

درقلمرومکانیک کتاب اوّل / دینامیک

A SHORTER INTERMEDIATE MECHANIC

مؤلف هامفری وتوپنیگ **Humphry & Topping**

مترجم: هوشنگ شریف زاده

چاپ چهارم: بهمن ماه ۱۳۶۷

تیراژ: ۳۳۰۰ نسخه

چاپ وصحافی: چاپخانهٔ صنوبر

نشانی تهران، خیابان دکترفاطمی، شمارهٔ ۱۵۹

تلفن: ۶۵۱۴۲۲

پیشگفتار چاپ سوم

درقلمرومکانیک ترجمه‌ای‌است‌از کتاب *A shorter Intermediate Mechanics* نوشتهٔ **هامفری** D. Humphrey و **توپینگ** J.Topping، از انتشارات مؤسسهٔ **لانگمن** Longman انگلستان. این کتاب که نخستین بار درسال ۱۹۴۹ میلادی در انگلستان به چاپ رسید و بارها ویرایش وتجدید چاپ‌شد، از پرفروشترین کتابهای مکانیک پیشدانشگاهی انگستان است.

کتابی که در دست دارید چاپ سوم ترجمهٔ قسمت دینامیک این کتاب است که چاپ اول آن درسال ۱۳۵۲ به‌وسیلهٔ **مؤسسهٔ مطبوعاتی معراجی** وچاپ دوم آن درسال ۱۳۶۳ به‌وسیلهٔ **مؤسسهٔ انتشارات فاطمی** منتشر شد. چاپ اول قسمت استاتیک به‌صورت کتابی جداگانه درآبان ۱۳۶۶ منتشرشده است. ترجمهٔ این دوقسمت با آخرین ویرایش کتاب، که نخستین بار درسال ۱۹۷۱ میلادی منتشر شد، مقابله شده است. در این ویرایش واحدهای کمیتها به واحدهای دستگاه بین‌المللی (SI) تبدیل شده‌اند.

در انتشار این کتاب گروهی از کارشناسان برگزیدهٔ فن چاپ همکاری داشته‌اند که‌از همهٔ آنها سپاسگزاری می‌کنم.

هوشنگ شریف زاده
زمستان ۱۳۶۶

فهرست مطالب

۱

دینامیك یك نقطهٔ مادی

تندی و سرعت

۱۰۱. مکانیك علمی است که درآن اثر نیروها براجسام مورد مطالعه قرارمی گیرد. بنابراین مکانیك بیشتر مربوط به‌چیزهایی است که در زندگی روزانه بـا آن سروکار داریم؛ مثلاً حرکت اتومبیلها، پرواز هواپیماها، پرتاب موشکها، مقاومت پلها و ساختمانها، نیروهایی که از طرف آب بریك کشتی وارد می‌شود، و بسیاری موارد مشابه دیگر. در بسیاری از این‌موارد برای اینکه بتوانیم مسائل‌مربوط به‌آنها را با ریاضیات ساده حل کنیم، مجبوریم که حالت ساده شده و گاهی حالت مطلوبی را درنظر بگیریم، و این ساده‌کردن مقدمـه‌ای لازم برای هرکار پیچیده است.

تحت اثر نیرو، جسم ممکن است نسبت به یك دستگاه مقایسه‌ای معین ساکن یا در حال حرکت باشد. قسمتی از مکانیك را کـه مربوط به حرکت اجسام صلب است دینامیك می‌گویند، وقسمتی راکه مربوط به‌سکون اجسام صلب است استاتیك می گویند. قسمتهایی از مکانیك را کـه مربوط به‌حرکت یـا سکون مـایعات است، به تـرتیب ئیدرودینامیك و ئیدروستاتیك می‌نامند. بحث خود را با دینامیك آغاز می کنیم.

۲۰۱. ضمن شروع مطلب، به‌منظور سادگی، فرض می‌کنیم که ابعاد جسم‌صلب درمقایسه با فاصله‌های دیگر قابل صرف‌نظرکردن باشد. چنین جسمی را **نقطهٔ مادی** می‌گوییم و آن را با یك نقطه نشان می‌دهیم.

وقتی‌کـه یك نقطهٔ مـادی وضع خـود را نسبت به مبدأ مفروض O تغییر می‌دهد، می‌گوییم که نسبت به‌نقطهٔ O حرکت می‌کند. منحنیی‌کـه از اوضاع متوالی نقطهٔ مـادی می‌گذرد، مسیر این نقطه نسبت به O نامیده می‌شود.

نقطهٔ مـادی مسیر خود را با سرعت معینی می‌پیماید. سرعت متحرك اندازهٔ تندی

متحرك را بیان می‌کند، بدون آنکه جهت حرکت را مشخص کند. بنابراین سرعت کمیتی است که فقط دارای بزرگی است، و وقتی که بزرگی آن را بدانیم، کاملاً مشخص است، و البته برحسب واحدهای انتخابی بیان می‌شود. مثلاً می‌توانیم بگوییم که سرعت متحرکی ۱۰ کیلومتر در ساعت است. عدد ۱۰ سرعت حرکت را به‌طور کامل مشخص می‌کند. چنانکه بعداً به‌تفصیل خواهیم گفت، این واحد شامل واحد طول، کیلومتر، و واحد زمان، ساعت، است.

هر کمیتی که دارای بزرگی باشد، ولی جهت نداشته باشد، کمیت اسکالر (عددی) نامیده می‌شود. بنابراین سرعت یك کمیت اسکالر است.

نیز هر کمیتی که بزرگی و جهت داشته باشد، و بنابراین برای مشخص کردن کامل آن به‌دومقدار نیازمند باشیم، کمیت برداری نامیده می‌شود.

هر کمیتی را که مطالعه می‌کنیم یا اسکالر است یا برداری. این کمیتها را درجای خود هنگامی که لازم باشد، دقیقتر تعریف خواهیم کرد.

۳.۱. واحدهای سرعت

متداولترین واحدهای طول، جرم و زمان عبارت از سانتیمتر، گرم و ثانیه است. این واحدها را غالباً دستگاه سانتیمتر ـ گرم ـ ثانیه می‌نامند و با علامت C.G.S. نمایش می‌دهند.

متداولترین واحدهای انگلیسی برای طول و جرم و زمان، فوت و پوند و ثانیه است. این دستگاه واحدها را با علامت اختصاری F.P.S. نمایش می‌دهند.

واحدهای سرعت در این دستگاهها سانتیمتر برثانیه (با علامت اختصاری cm/s) و فوت برثانیه (با علامت اختصاری ft/s) است.

در دستگاه بین‌المللی واحدها (SI)، که به‌وسیلهٔ بسیاری از کشورهای جهان پذیرفته شده است واحد طول متر (با علامت اختصاری m)، واحد جرم کیلوگرم (با علامت اختصاری kg) و واحد زمان ثانیه (با علامت اختصاری s) است. بنابراین واحد سرعت در دستگاه SI متر برثانیه و علامت آن m/s یا ms^{-1} است.

باید درنظر داشت که $1kg = 10^3 g$ است و $1000 kg$ که برابر $10^6 g$ است گاهی به‌صورت ۱ Mg نشان داده می‌شود. M به‌معنی مگا و برابر 10^6 است.

البته سرعت را با واحدهای دیگر، از قبیل کیلومتر درساعت (km/h) یا مایل در ساعت (m. p. h)، نیز می‌سنجند. واحد سرعت در دریانوردی، گره است که برابر سرعت یك مایل دریایی (۶۰۸۰ فوت یا ۱۸۵۳/۱۸۴ متر) درساعت است.

۴.۱ سرعت متوسط

اگر یك نقطهٔ مادی از نقطهٔ معینی شروع به‌حرکت کند و درمدت زمان $t_۱$ ثانیه از آغاز حرکت مسافتی برابر $s_۱$ m و پس از $t_۲$ ثانیه از آغاز حرکت مسافتی برابر $s_۲$ m بپیماید، سرعت متوسط‌آن در $t_۱$ ثانیهٔ اول $\frac{s_۱}{t_۱}$ m/s ودر $t_۲$ ثانیهٔ اول $\frac{s_۲}{t_۲}$ m/s است.

نیز چون این نقطهٔ مادی درمدت زمان $(t_۲-t_۱)$ ثانیه مسافتی برابر $(s_۲-s_۱)$ m می‌پیماید، سرعت متوسط آن‌درفاصلهٔ زمانی‌میان $t_۱$ تا $t_۲$ برابر $(s_۲-s_۱)/(t_۲-t_۱)$ m/s است. با این شیوه، در هر فاصلهٔ زمانی می‌توان سرعت متوسط را تعیین کرد؛ یعنی فقط باید افزایش مسافت را به‌مدت زمان تقسیم کرد.

مثال: قطاری از ایستگاه P به‌راه می‌افتد و به‌سوی ایستگاه S می‌رود. در میان راه در ایستگاههای Q و R، برطبق جدول زیر، توقف می‌کند. سرعت متوسط قطار را میان P تا Q، میان R تا S، نیز برای تمام مسیر تعیین کنید.

ایستگاه	زمان	فاصله از P
P مبدأ	۱۰.۰۰	۰ کیلومتر
Q مقصد	۱۱.۱۰	۸۴ «
Q مبدأ	۱۱.۱۵	۸۴ «
R مقصد	۱۲.۱۰	۱۴۲/۵ «
R مبدأ	۱۲.۱۵	۱۴۲/۵ «
S مقصد	۱۳.۱۰	۲۱۰ «

حل:

$$\text{سرعت متوسط میان P تا Q} = \frac{\text{فاصلهٔ P تا Q}}{\text{مدت زمان پیمودن مسافت میان P تا Q}}$$

$$= \frac{۸۴\text{km}}{۱\frac{۱}{۶}\text{h}} = ۷۲\ \text{km/h}\ (\text{کیلومتردرساعت})$$

$$\text{سرعت متوسط میان R تا S} = \frac{\text{فاصلهٔ R تا S}}{\text{مدت زمان پیمودن مسافت میان R تا S}}$$

$$= \frac{۶۷/۵\,\mathrm{km}}{۵۵\,\mathrm{mn}} = ۷۳/۶\,\mathrm{km/h}$$

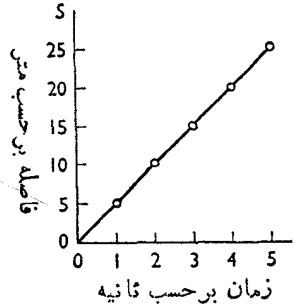
$$\text{سرعت متوسط برای تمام مسیر} = \frac{\text{طول مسیر}}{\text{مدت زمان کل}}$$

$$= \frac{۲۱۰\,\mathrm{km}}{۳\frac{۱}{۶}\,\mathrm{h}} = ۶۶/۳\,\mathrm{km/h}$$

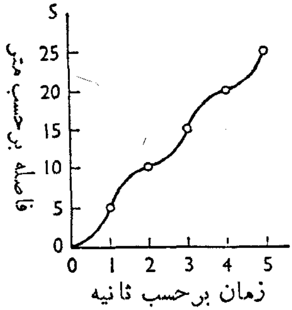
۵۰۱. به‌عنوان مثال بعدی، فرض کنید که نقطهٔ مادی طوری حرکت می‌کند که فاصله‌اش از یك نقطهٔ معین واقع برمسیر در لحظه‌های زمانی ۱، ۲، ۳، ۴، ... ثانیه به‌ترتیب ۵، ۱۰، ۱۵، ۲۰، ... متر است، بنابراین مسافتی که در هرثانیه می‌پیماید برابر ۵ m است.

سرعت متوسط درثانیه‌های متوالی ۵ m/s است. در واقع، سرعت متوسط در هر فاصلهٔ زمانی t_1 تا t_2، که درآن t_1 و t_2 هر مقدار دلخواهی مثلا ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، را می‌توانند داشته باشند، برابر ۵ m/s است؛ مثلا ممکن‌است $t_1 = ۲\,\mathrm{s}$ و $t_2 = ۴\,\mathrm{s}$ باشد. این همهٔ آن چیزی است که می‌توانیم با اطمینان استنتاج کنیم. اما احتمال دارد، و چنین احتمالی هم ناممکن نیست، کـه سرعت نقطهٔ مـادی در سراسر مسیر برای هر فاصله همان ۵ m/s باشد.

نمایش معلومات به‌وسیلهٔ نمودار بسیار مفید است. در شکل ۱ـ۱ نقاطی که نمایش داده شده‌اند مربوط به‌فاصله‌های معلوم در زمانهای معلوم هستند. بدیهی‌است که این نقاط برروی خط مستقیمی قرار گرفته‌اند که از مبدأ می‌گذرد، اما این‌خط تنها منحنیی نیست که می‌تواند از این‌نقاط بگذرد، وممکن‌است منحنیی که از این‌نقاط می‌گذرد به‌شکل ۱ـ۲ باشد.



شکل ۱ـ۱



شکل ۱ـ۲

معادلهٔ خط راستی که درشکل ۱ـ۱ نشان داده شده است $s=5t$ است، که درآن s برحسب متر فاصله‌ای است که درمدت t ثانیه پیموده شده است. ما فقط این‌را می‌دانیم که این معادله برای مقادیر ۵ ,۴ ,۳ ,۲ ,۱ ,۰ $=t$ رضایتبخش است. اما فرض درست‌بودن این معادله برای تمام مقادیر t در این فاصله، مثلا وقتی‌که ۱/۲ $=t$ یا ۲/۳ یا هر مقدار دیگری میان ۰ و ۵ است، فرضی منطقی است.

اگر این‌معادله برای تمام مقادیر t که دراین‌فاصله واقعند رضایتبخش باشد، سرعت را یکنواخت گوییم، درغیراین‌صورت سرعت را متغیر گوییم (به‌شکل ۱ـ۲ نگاه‌کنید).

مثلاً فرض‌کنید که نقطهٔ مادی فواصل ۵، ۱۱، ۱۴، ۱۹، ۲۵، ... متر را در لحظه‌های ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ... ثانیه طی کرده است. مسافتهایی‌که در ثانیه‌های متوالی طی شده است، به‌ترتیب ۶، ۳، ۵، ۶، ... متر است و با هم برابر نیستند. سرعت متوسط در این فاصله‌های زمانی ۶، ۳، ۵، ۶، ... متر برثانیه است. آشکار است که این سرعت، یکنواخت نیست.

۶.۱. سرعت یکنواخت

سرعت یکنواخت را می‌توان چنین تعریف کرد که نقطهٔ مادی در زمانهای متساوی، طولهای متساوی را در مسیر خود می‌پیماید؛ و هر چه این زمانها کوچك اختیار شوند، بازهم‌چنین شرطی‌موجود باشد. سرعت یکنواخت را با فاصله‌ای‌که در واحد زمان پیموده شده است اندازه می‌گیرند.

اگر s مسافتی باشد که درمدت t پیموده شده است، سرعت v، که یکنواخت فرض می‌شود، چنین به‌دست می‌آید.

$$s=vt \quad \text{یا} \quad v=\frac{s}{t}$$

بنابراین سرعت متوسط یك نقطهٔ مادی‌که مسافت معینی را درمدت زمان معینی پیموده است برابر است با سرعت یکنواخت نقطه‌ای مادی‌که همان مسافت را درهمان مدت معین می‌پیماید. اگر فاصله‌های زمانی را خیلی‌کوچك‌کنیم، سرعت غالباً، لحظه به‌لحظه، درسراسر مسیر تغییر خواهدکرد. بنابراین سرعت در هرلحظه، عموماً، با سرعت متوسط برای تمام یا قسمتی از مسیر برابر نخواهد بود.

۷.۱. سرعت در هرلحظه

سرعت در هرلحظهٔ t را می‌توان با تعیین سرعت حرکت دریك مدت زمان بسیار کوچك که

شامل لحظهٔ t نیز هست تعیین کرد.

مثلا اگر s برحسب متر مسافتی باشد که در مدت زمان t ثانیه پیموده شده است و $(s+\Delta s)$ متر مسافتی باشد که درمدت زمان $(t+\Delta t)$ ثانیه پیموده شده است، درآن صورت $\Delta s/\Delta t$ متر برثانیه معرف سرعت متوسط نقطهٔ مادی درفاصلهٔ زمانی میان t تا $t+\Delta t$ است. اگر Δt کوچك باشد $\Delta s/\Delta t$ تقریباً سرعت درلحظهٔ t است. سرعت در لحظهٔ t را می‌توان با علامتهای اختصاری به‌صورت $\lim\limits_{\Delta t\to ۰}(\Delta s/\Delta t)$ یا به صورت $\mathrm{d}s/\mathrm{d}t$ نوشت.

مثلا اگر $s=۵t$ باشد $s+\Delta s=۵(t+\Delta t)$ و بنابراین $\Delta s=۵\Delta t$

$$\therefore \qquad \frac{\Delta s}{\Delta t}=۵$$

بنابراین $\mathrm{d}s/\mathrm{d}t=۵$، یعنی در فاصله‌ای از زمان که رابطهٔ $s=۵t$ برقرار است، سرعت در هرلحظه $۵\ \mathrm{m/s}$ است.

مثال: اگرمسافت s که یك‌نقطهٔ مادی در t ثانیه‌می‌پیماید، برحسب‌متر $s=۴+۶t-t^۲$ باشد، سرعت متوسط را در فاصلهٔ زمانی میان $t=۲$ تا $t=۲+\epsilon$ به‌دست آورید، که درآن $\epsilon=۰/۱$ یا $\epsilon=۰/۰۱$ یا $\epsilon=۰/۰۰۱$ باشد. سرعت را درلحظهٔ $t=۲$ استنتاج کنید.

حل: مسافتی که در مدت $t=۲$ ثانیه طی می‌شود $۴+۱۲-۴=۱۲$ متر است. نیز مسافتی که درمدت $t=۲+\epsilon$ ثانیه طی می‌شود برابر است با

$$۴+۶(۲+\epsilon)-(۲+\epsilon)^۲=۱۲+۲\epsilon-\epsilon^۲ \quad \text{متر}$$

$\therefore$ مسافتی که میان $t=۲$ تا $t=۲+\epsilon$ طی می‌شود برابر است با $۲\epsilon-\epsilon^۲$ متر، و بنابراین سرعت متوسط در این فاصلهٔ زمانی برابر است با $\mathrm{m/s}\ \dfrac{(۲\epsilon-\epsilon^۲)}{\epsilon}$ یا $(۲-\epsilon)\ \mathrm{m/s}$.

$\therefore$ درفاصلهٔ $t=۲$ تا $t=۲/۱$ سرعت متوسط برابر $۱/۹\ \mathrm{m/s}$ است؛ درفاصلهٔ $t=۲$ تا $t=۲/۰۱$ سرعت متوسط برابر $۱/۹۹\ \mathrm{m/s}$ است؛ در فاصلهٔ $t=۲$ تا $t=۲/۰۰۱$ سرعت متوسط برابر است با $۱/۹۹۹\ \mathrm{m/s}$.

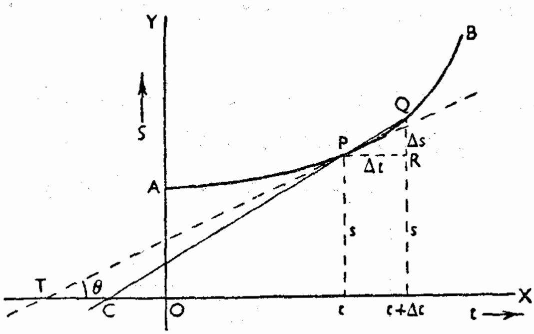
یعنی هرچه ϵ کوچکتر می‌شود سرعت متوسط به $۲\ \mathrm{m/s}$ نزدیکتر می‌شود. و این سرعت در لحظهٔ $t=۲$ ثانیه است.

ممکن است متوجه شده باشید که اگر فاصلهٔ زمانی را میان $t=۲-\epsilon$ تا $t=۲$

اختیارمی‌کردیم، سرعت متوسط برابر $(\epsilon + ۲)\ m/s$ به‌دست می‌آمدکه بازهم سرعت درلحظهٔ $t = ۲$ برابر $۲\ m/s$ می‌شد.

۱.۸. نمودار مسافت-زمان

مقدار s، مسافتی‌راکه درمدت‌زمان t پیموده می‌شود بر روی یک محور و t را برمحوری دیگر عمود برآن نقل‌می‌کنیم. از پیوستن نقطه‌هایی‌که به‌ازای‌مقدارهای مختلف t به دست می‌آیند، نموداری پدید می‌آیدکه آن را منحنی یا نمودار مسافت-زمان می‌نامند. APB درشکل ۱-۳ چنین نموداری است.



شکل ۱-۳

اگر P نقطه‌ای ازنمودار باشدکه متعلق به‌مسافت s و زمان t است، و Q نقطه‌ای باشدکه متعلق به‌مسافت $s + \Delta s$ و زمان $t + \Delta t$ است، دراین‌صورت سرعت متوسط نقطهٔ مادی درفاصلهٔ زمانی میان t و $t + \Delta t$ برابر است با $\Delta s / \Delta t$ که ضریب زاویهٔ وتر PQ است.

زیرا اگر PR به‌موازات OX رسم شود، داریم:

$$tg\, QPR = \frac{RQ}{PR} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

نیز اگر QP را امتداد دهیم تا OX را در C قطع کند، زاویه‌های QPR و PCX برابرند و درنتیجه:

$$tg\, PCX = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

حال اگر مقادیر Δt به تدریج کوچک و کوچکتر شوند، Q به‌تدریج به P نزدیکتر

می‌شود، و وقتی که Δt به‌سمت صفر میل کند، وتر QPC مماس برنمودار مسافت‌ـزمان در نقطهٔ P می‌شود. بنابراین اگرمماس PT در نقطهٔ P بامحور زمان OX زاویهٔ θ بسازد، خواهیم داشت:

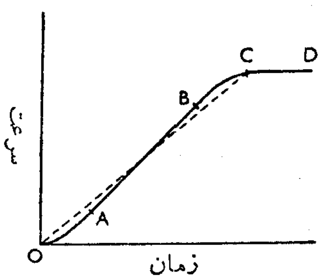
$$tg\,\theta = \lim_{\Delta t \to 0} tg\,\mathrm{PCX} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

بنابراین سرعت درلحظهٔ t برابر است با $tg\,\theta$ ، که θ زاویه‌ای است که مماس PT درنقطهٔ P با محور t ها می‌سازد.

بدیهی است که اگر سرعت یکنواخت باشد، نمودار مسافت‌ـزمان خطی راست خواهد بود که بامحور t ها زاویه‌ای برابر θ می‌سازد، به‌طوری که $tg\,\theta$ برابراست بامقدار سرعت یکنواخت.

اگرنمودار مسافت‌ـزمان خط راست نباشد، سرعت نقطهٔ مادی با زمان تغییرمی‌کند.

نمودارمسافت‌ـزمان قطاری را که میان دوایستگاه، بدون توقف، حرکت کرده است، می‌توان مطابق نمودار OABC درشکل ۱ـ۴ نمایش داد.

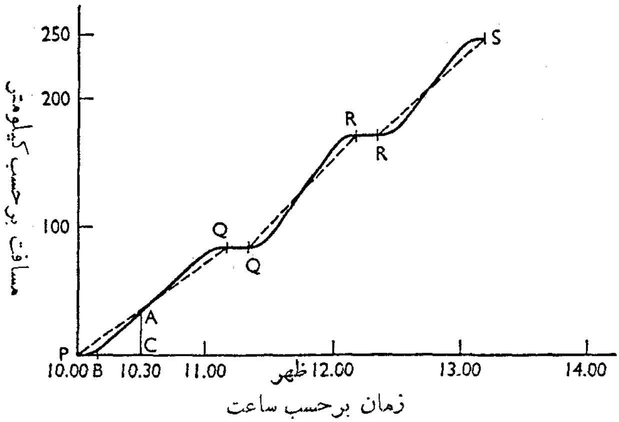


شکل ۱ـ۴

قسمت OA، که تقعرآن به‌طرف بالاست، مربوط به‌آغازسفر است که سرعت پیوسته افزایش یافته است؛ قسمت AB، که خط راست است، مربوط به‌حرکت قطار با سرعت یکنواخت، و قسمت BC، که تقعرآن به‌طرف پایین است مربوط به‌حرکت کند قطار است که منجر به‌توقف قطار شده است. به‌این نکته توجه کنید که مماس برمنحنی یا نمودار در نقطهٔ C به‌موازات محور زمان است، یعنی ضریب زاویهٔ آن صفر است.

البته اگر قطار، فاصلهٔ میان دوایستگاه را با سرعت یکنواخت می‌پیمود، نمودار مسافت‌ـزمان خط راست OC می‌شد. از این گذشته، اگر قطار درایستگاه‌دوم برای مدتی توقف می‌کرد نمودار مسافت‌ـزمان مربوط به‌آن، خط راست CD به‌موازات محور زمان می‌شد.

مثال ۱: اکنون دوباره به‌مثالی که در بند ۴.۱ بحث شد برمی‌گردیم.
نمودارهای مسافت‌ـزمان برای تمام سفر طبق شکل ۱ـ۵ است.



شکل ۱ـ۵

ضریب زاویه‌های خطچینها، سرعتهای متوسط میان ایستگاهها را به دست می‌دهند. خطهای پر، معرف حرکتهای پیوستهٔ قطار میان ایستگاهها هستند. این فاصله‌ها بیشتراوقات باسرعت یکنواخت پیموده شده‌اند. به‌این‌نکته توجه خواهید کرد که اگر درمثال بالا می‌پرسیدیم که سرعت قطار در ساعت ۱۰.۳۰ صبح چقدر بوده است، اطلاعات کافی نداشتیم که پاسخ مناسب بدهیم. درواقع می‌توان ازلحظهٔ مذکور واقع برمحور زمان خطی به‌طرف بالا رسم کرد، اما با فرض اینکه حرکت میان P و Q ، بدون توقف بوده است و مسیر حرکت، بیشتر اوقات، تقریباً با سرعت یکنواخت پیموده شده است، سرعت درساعت ۱۰.۳۰ صبح برابر است با ضریب زاویهٔ خط پر که از نقطهٔ A درشکل ۱ـ۵ رسم شده است. اگر شکل را با دقت رسم می‌کردیم، مشاهده می‌شد که این ضریب زاویه برابر است با AC/BC (شکل ۱ـ۵ را نگاه کنید).

آشکار است که اگر مسافتها را در لحظه‌های پیاپی می‌دادند، می‌توانستیم فقط سرعتهای متوسط را درفاصله‌های زمانی میان این لحظه‌ها پیدا کنیم. هرچیز دیگری بیش از این، فقط حدس وگمان است. برای آنکه سرعت را در هر لحظه بدانیم، باید مسافتی را که درهرلحظه در یك فاصلهٔ زمانی‌که شامل این لحظه است، طی‌می‌کند،بدانیم. این‌مورد را درمثال زیرکه یك‌مثال نسبتاً ایده‌آل است،

می‌توان تصور کرد.

مثال ۲: مسافتهای s که به‌وسیلهٔ یك نقطهٔ مادی درمدت زمانهای t پیموده شده است به‌شرح زیر است:

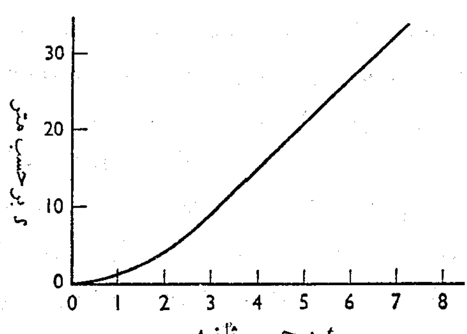
s متر	۰	۱	۴	۹	۱۵	۲۱	۲۷	۳۳
t ثانیه	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷

بنابر این سرعتهای متوسط در ثانیه‌های پیاپی به‌ترتیب برابر است با ۱، ۳، ۵، ۶، ۶، ۶، ۶ متر برثانیه. این همهٔ آن چیزی است که، به‌طور یقین می‌توانیم استنتاج کنیم.

اما روشن است که در ۳ ثانیهٔ اول سرعت یکنواخت نیست، و حال آنکه پس از آن، برطبق معلوماتی که داده شده است، ممکن است یکنواخت و بزرگی آن ۶ m/s باشد.

در واقع، به‌آسانی می‌توانیم تحقیق کنیم که معلوماتی که داده شده است برای $t=۰, ۱, ۲, ۳$ در رابطهٔ $s=t^۲$ و برای $t=۳, ۴, ۵, ۶, ۷$ در رابطهٔ $s=۶t-۹$ صدق می‌کنند.

حال اگر فرض‌کنیم که رابطهٔ $s=t^۲$ برای تمام مقادیر t میان ۰ و ۳ و رابطهٔ $s=۶t-۹$ برای تمام مقادیر t میان ۳ و ۷ صادق است، می‌توانیم سرعت را در هرلحظه تعیین کنیم (منحنی مسافت‌ـزمان که مربوط به‌این رابطه‌هاست در شکل ۱ـ۶ نشان داده شده است).



شکل ۱ـ۶

زیرا اگر

$$s = ۶t - ۹$$

دراین صورت

$$s + \Delta s = ۶(t + \Delta t) - ۹$$

$$\therefore \quad \Delta s = ۶\Delta t$$

$$\therefore \quad \frac{\Delta s}{\Delta t} = ۶$$

و بنابراین

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = ۶$$

پس سرعت در هرلحظه میان $t = ۳$ و $t = ۷$ برابر ۶ m/s است.

نیز اگر

$$s = t^۲$$

دراین صورت

$$s + \Delta s = (t + \Delta t)^۲$$

$$\therefore \quad \Delta s = (t + \Delta t)^۲ - t^۲ = ۲t\Delta t + (\Delta t)^۲$$

$$\therefore \quad \frac{\Delta s}{\Delta t} = ۲t + \Delta t$$

$$\therefore \quad \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = ۲t$$

پس سرعت در هر لحظه میان $t = ۰$ و $t = ۳$ برابر $۲t$ m/s است ، یعنی در لحظهٔ $t = ۰$ برابـر صفر و در لحظهٔ $t = ۱$ برابـر ۲ m/s و در لحظهٔ $t = ۱/۵$ برابر ۳ m/s و غیره است.

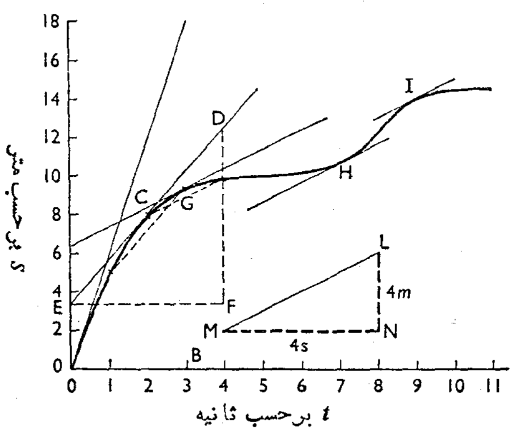
بنابراین ، یك رابطهٔ درست ریـاضی میان s و t منجر به تعیین مقدار درست سرعت در هرلحظه می‌شود. عملاً چنین رابطه‌ای میان s و t غالباً معلوم نیست، و بنابراین بـرای آنکه سرعت را در هـرلحظه تعیین‌کنیم بـاید مماسی برنمودار مسافت‌ـزمـان درنقطهٔ مناسب رسم‌کنیم. ایـن‌کار همیشه فقط بـه‌صورت تقریبی انجام می‌گیرد.

مثال ۳: جدول زیر مسافت s را که به وسیلهٔ یك نقطهٔ مادی در t ثانیه پیموده شده است به‌دست می‌دهد.

t ثانیه	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱
s متر	۰	۴/۹	۷/۸	۹/۴	۹/۹	۱۰/۰	۱۰/۱	۱۰/۶	۱۲/۲	۱۴/۰	۱۴/۴	۱۴/۵

نمودار مسافت-زمان را رسم کنید و حرکت را شرح دهید. سرعت را در ابتدای حرکت و درلحظهٔ $t = ۲$ پیدا کنید؛ نیز لحظه‌هایی را که درآن سرعت برابر ۱ m/s است پیدا کنید.

حل: نمودارمسافت-زمان درشکل۱-۷ نشان داده شده است. بدیهی است که از $t = ۰$ تا $t = ۵$ تقعر منحنی به طرف پایین است و این قسمت از نمودار مربوط به کاهش سرعت است، و درحدود $t = ۵$ سرعت شروع به افزایش می‌کند و بعداً دوباره کاهش پیدا می‌کند. در واقع، سرعتهای متوسط در ثانیه‌های متوالی عبارتند از: ۴/۹، ۲/۹، ۱/۶، ۰/۵، ۰/۱، ۰/۱، ۰/۵، ۱/۶، ۱/۸، ۰/۴ و ۰/۱ که همه برحسب متر برثانیه بیان می‌شوند. بنابراین نقطهٔ مادی با سرعت کند شونده تا حدود $t = ۵$ ثانیه حرکت می‌کند، که درآن هنگام عملاً می‌ایستد، پس ازآن درست بعد از $t = ۸$ با سرعت تند شونده می‌رود و درآن هنگام دوباره شروع به کند شدن می‌کند و در $t = ۱۱$ تقریباً ساکن می‌شود.



شکل ۱-۷

برای تعیین سرعت اولیه، با دقت هرچه تمامتر، مماس OA را برمنحنی مسافت-زمان درنقطهٔ O رسم می‌کنیم. ضریب زاویهٔ این خط BA/OB است که برابر است با تقریباً $\frac{۱۸\ \mathrm{m}}{۳\ \mathrm{s}}$، یعنی ۶ m/s.

سرعت در لحظهٔ $t=۲$ برابر است با ضریب زاویهٔ خط مماس بر منحنی در نقطهٔ C ، که برابر است با تقریباً FD/EF ، یعنی $\frac{۹/۲\,\mathrm{m}}{۴\mathrm{s}}$ یا $۲/۳\,\mathrm{m/s}$.
برای آنکه لحظه‌هایی را پیدا کنیم که در آن سرعت برابر $۱/۰\mathrm{m/s}$ است، باید برروی منحنی نقطه‌هایی‌را بیابیم که ضریب زاویهٔ مماس برمنحنی درآن نقاط برابر $۱\,\mathrm{m/s}$ باشد. این‌ضریب زاویه درشکل ۱ـ۷ به‌وسیلهٔ مثلث LMN نشان داده شده است. چون $NL=۴\,\mathrm{m}$ و $MN=۴\,\mathrm{s}$، ضریب زاویهٔ ضلع ML برابر $۱/۰\,\mathrm{m/s}$ است. اکنون باید مماسهایی را برمنحنی مسافت‌ـزمان رسم‌کنیم که به‌موازات ML هستند. این‌کار را می‌توان فقط به‌طور تقریب انجام داد. اما سه نقطه برمنحنی وجود دارد که مماسهایی که از هریك از این سه نقطه برمنحنی رسم‌می‌شود به‌موازات ML است. این سه نقطه درشکل ۱ـ۷ به‌صورت G، H، و I نمایش داده شده‌اند. این نقاط به‌ترتیب تقریباً متعلق به‌لحظه‌های $t=۳$، $t=۷$، و $t=۹$ هستند. در این لحظه‌ها سرعت تقریباً برابر $۱/۰\,\mathrm{m/s}$ است.

تمرین ۱.۱

۱ ـ قطاری درساعت ۱۱.۳۰ صبح از ایستگاه یك‌شهر به‌راه می‌افتد و درساعت ۱.۲۰ بعداز ظهر همان روز به ایستگاه شهر دیگرکه درفاصلهٔ ۱۲۰ کیلومتری شهر اول واقع است می‌رسد. سرعت متوسط قطار را برحسب‌کیلومتر درساعت و متر برثانیه تعیین کنید.

۲ ـ شخصی قایقی را دریك رودخانه در جهت جریان آب در ۲۰ دقیقه ۳ کیلومتر جلو می‌برد و همان راه را در برگشت در ۴۰ دقیقه طی می‌کند. سرعت متوسط را، (۱) درجهت جریان آب، (۲) در خلاف جهت جریان آب، (۳) برای یك رفت و برگشت تعیین کنید.

۳ ـ سال نوری، برحسب تعریف، عبارت از فاصله‌ای است که نور با سرعت یکنواخت $۳\times ۱۰^{۸}\,\mathrm{m/s}$ درمدت یك سال می‌پیماید. نشان دهید که سال نوری برابر است با $۹/۵\times ۱۰^{۱۲}\,\mathrm{km}$. درصورتی که بدانیم‌فاصلهٔ‌خورشید تا زمین‌تقریباً ۱۵۰میلیون کیلومتر است، چه مدت طول می‌کشد تا نور خورشید به‌زمین برسد.

۴ ـ اگر صوت با سرعت یکنواختی تقریباً برابر $۳۳۵\mathrm{m/s}$ درهوا منتشر شود، نشان دهید که صدای حاصل از انفجار در نقطهٔ A پس از تقریباً ۱۲ ثانیه به‌نقطهٔ B که در ۴ کیلومتری نقطهٔ انفجار قرار دارد می‌رسد. اگرصدای انفجار درست در یك لحظه به‌نقاط C و D برسد، نقطهٔ A نسبت به CD چگونه خواهد بود؟

۵ ـ یك علامت رادیویی که به‌طور قائم به‌طرف بالا در هـوا فرستاده شده است، پس از برخورد به یك لایهٔ یونیزهٔ جو به‌طرف پـایین منعکس شده است. اگر این علامت $\frac{۱}{۵۰۰}$ ثانیه پس از ارسال، دریافت شده باشد، ارتفاع لایهٔ مذکور را پیدا کنید. (امواج رادیو با سرعت یکنواخت $۳ \times ۱۰^{۸}\ \mathrm{m/s}$ حـرکت می‌کنند.) اگر علامت مذکور از کرهٔ ماه، که در ۳۹۰۰۰۰ کیلومتری زمین است، منعکس شده باشد، چه مدت پس از ارسال در زمین دریافت خواهد شد.

۶ ـ جدولهای زیر مسافت s متر را کـه به‌وسیلهٔ یك نقطهٔ مادی در t ثـانیه طی شده است بـه‌دست می‌دهند. نمودار مسافت‌ـزمان را رسم کنید، و سرعت متوسط را در ثانیه‌های متوالی تعیین کنید. رابطهٔ ممکنی میان s و t استنتاج کنید، و نوع حرکت مربوطه را در هرحالت بیان کنید.

(الف)	۵	۴	۳	۲	۱	۰	t
	۲۰	۱۶	۱۲	۸	۴	۰	s
(ب)	۵	۴	۳	۲	۱	۰	t
	۶	۶	۶	۴	۲	۰	s
(پ)	۵	۴	۳	۲	۱	۰	t
	۱۶	۱۳	۱۰	۷	۴	۱	s
(ت)	۵	۴	۳	۲	۱	۰	t
	۳۰	۲۰	۱۲	۶	۲	۰	s

۷ ـ جدولهای زیر مسافت s متر را کـه به‌وسیلهٔ یك نقطهٔ مـادی در t ثانیه طی شده است به‌دست‌می‌دهند. نمودارمسافت‌ـزمان را رسم کنید،وسرعت متوسط را به‌ترتیب در ۲ ثانیهٔ اول، ۵ ثـانیهٔ اول، و ۸ ثـانیهٔ اول پیدا کنید. نیز سرعت تخمینی را به‌ترتیب درلحظه‌های $t=۲$، $t=۵$، $t=۸$ به‌دست آورید.

(الف)	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱	۰	t
	۱۵	۱۳	۱۱	۹	۹	۹	۶	۳	۰	s
(ب)	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱	۰	t
	۱۲	۱۱/۵	۱۰	۸	۶	۴	۲	۰/۵	۰	s

۸ ـ شخصی در ساعت ۱۰ صبح از نقطهٔ A پیاده بـه‌راه افتاد و بـا سرعت $۶\ \mathrm{km/h}$ رفت تا به‌نقطهٔ B که در ۱۶ کیلومتری A است رسید. درآنجا نیم‌ساعت توقف‌کرد

و سپس با سرعت ۵ km/h به‌طرف نقطهٔ C کـه در ۱۰ کیلومتری B واقع است به‌راه افتاد. موتورسواری‌نیز درساعت ۱.۳۰ بعدازظهر ازنقطهٔ A شروع به‌حرکت کرد و با سرعت یکنواخت ۳۲ km/h به‌حرکت خود به‌طرف نقاط B و C ادامه داد. نمودارهای مسافت‌ـزمان را برای شخص پیاده و موتورسوار رسم‌کنید. از روی این‌نمودارها تعیین کنید کـه، (الف) چه وقت و درچه فاصله‌ای از نقطهٔ A، موتورسوار بـه شخص پیاده می‌رسد، (ب) چـه وقت شخص پیاده ۵ کیلومتر از موتورسوار عقب می‌افتد، (پ) اگر موتورسوار در ۲ کیلومتری نقطهٔ C توقف کند، چه‌مدت باید صبرکند تا شخص پیاده به‌او برسد.

۹ - حرکت یك اتومبیل برطبق جدول زیر داده شده است، کـه درآن s برحسب متر مسافتی را بیان می‌کند که در t ثانیه طی شده است.

t	۳	۴	۵	۶	۷	۸
s	۱۷	۲۲	۲۷	۳۵	۴۳	۵۲

سرعت متوسط را در ثـانیهٔ چهارم، ثانیهٔ پنجم، ثانیهٔ ششم وثـانیهٔ هفتم به دست آورید. منحنی‌همواری رسم‌کنیدکه نمودار مسافت‌ـزمان باشد. از روی این‌نمودار سرعت اتومبیل را درآخر ثانیه‌های چهارم، پنجم، ششم و هفتم به‌دست‌آورید.

۱۰- جدول زیر مسافت s کیلومتر را که اتومبیل در t ساعت می‌پیماید به‌دست می‌دهد. نمودار s را نسبت به t رسم‌کنید و از روی آن مقدار سرعت اتومبیل را به‌ترتیب درلحظه‌های ۲ $=t$، ۴ $=t$ و ۶ $=t$ به‌دست آورید.

t	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
s	۰	۴۰	۷۵	۹۱	۱۰۰	۱۱۵	۱۲۸	۱۵۰	۱۸۰

۱۱- سرعت یك نقطهٔ متحرك را تعریف‌کنید و توضیح دهیدکـه چگونه آن را از روی نمودار مسافت‌ـزمان به‌دست می‌آورند. اتومبیلی s کیلومتر را در t دقیقه می‌پیماید به‌طوری که:

t	۰	۱۵	۳۰	۴۵	۶۰	۷۵	۹۰	۱۰۵	۱۲۰
s	۰	۸	۲۶	۵۰	۶۶	۷۷	۸۵	۹۱	۹۶

نمودار مسافت‌ـزمـان را رسم کنید و تعیین کنید: (۱) سرعـت متوسط را، (۲) ماکزیمم‌سرعت را، (۳) لحظه‌هایی‌راکه درآن، سرعت برابر ۶۴ km/h می‌شود.

۱۲- نقطه‌ای مادی طوری حرکت می‌کندکه پس از t ثانیه به‌فاصلهٔ s متر ازنقطهٔ ثابت

O است. اگر (۱) $s=۴t+۳$، (۲) $s=۲t^۲+۳$ باشد، عبارتی که سرعت را پس از t ثانیه بیان می‌کند پیدا کنید. در هرحالت، سرعت اولیه را به‌دست آورید.

۱۳- نقطه‌ای مادی با سرعت ۳۰ m/s به‌طور قائم به‌طرف بالا پرتاب شده است. ارتفاع آن از سطح زمین پس از t ثانیه از رابطهٔ $s=۳۰t-۵t^۲$ برحسب متر به دست می‌آید. (الف) سرعت متوسط را در فاصلهٔ زمانی Δt که در لحظهٔ t ثانیه از شروع حرکت، اندازه‌گیری شده است به دست آورید؛ (ب) عبارتی پیدا کنید که سرعت را در هرلحظهٔ t به‌دست می‌دهد. (پ) تعیین کنید که درچه موقع نقطهٔ مادی به‌بالاترین ارتفاع خود می‌رسد، و در این هنگام ارتفاع آن از سطح زمین چقدر است.

۱۴- نقطه‌ای مادی دریک مسیر مستقیم طوری حرکت می‌کندکه فاصله‌اش، s، از نقطهٔ ثابت O، پس از t ثانیه برحسب متر در جدول زیر داده شده است. نمودار s را برحسب t رسم کنید و ازآن مقدار سرعت را به‌ترتیب درلحظه‌های $t=۲, ۴, ۶$ نتیجه بگیرید. درهرحالت حرکت را توجیه کنید.

(الف)

t	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
s	۰	۲	۴	۶	۶	۶	۳	۰

(ب)

t	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
s	۰	۷	۱۲	۱۵	۱۶	۱۵	۱۲	۷	۰

(پ)

t	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
s	۰	۷	۱۰	۷	۰	−۷	−۱۰	−۷	۰

۱۵- نقطه‌ای مادی در یک مسیر مستقیم ازحال سکون به‌راه می‌افتد و طوری حرکت می‌کندکه فاصله‌اش از نقطهٔ شروع حرکت پس از t ثانیه برحسب متر s است و در جدول زیر داده شده است.

t	۰	۱	۱/۵	۲	۲/۵	۳	۳/۵	۴	۴/۵	۵	۶
s	۰	۱۸	۲۹	۳۷	۴۳	۴۵	۴۰	۳۰	۲۵	۲۲	۲۰

نمودار مسافت‌ـزمان را برای این‌حرکت رسم کنید و سرعت نقطهٔ مادی را هنگامی که $t=۴/۵$ است تعیین کنید. تحقیق کنید که نقطهٔ مادی، این سرعت را منتها در خلاف جهت، در لحظه‌ای میان $t=۰$ و $t=۳$ داشت، و فاصلهٔ نقطهٔ مادی را از نقطهٔ شروع حرکت در این لحظه پیدا کنید.

۱۶ـ پیاده و دوچرخه سواری با هم از A شروع به‌حرکت می‌کنند و سرعت آنها به ترتیب $5\ \mathrm{km/h}$ و $16\ \mathrm{km/h}$ است. وقتی که دوچرخه سوار به ۳۲ کیلومتری A می‌رسد، نیم ساعت استراحت می‌کند وسپس با سرعت $12\ \mathrm{km/h}$ به‌طرف A بر می‌گردد. به‌فرض آنکه سرعتها درسراسر مسیر یکنواخت باشند نمودارهای مسافت‌ـ زمان را رسم کنید وازروی آنها تعیین کنید: (الف) پس ازچه مدت ودرچه فاصله‌ای از A دوچرخه سوار وپیاده با یکدیگرملاقات می‌کنند، (ب) درچه لحظه‌هایی در ۱۶ کیلومتری یکدیگر هستند.

۱۷ـ بریك مسیرمستقیم، جسم X از A به‌طرف B به‌راه می‌افتد و با سرعت یکنواخت $30\ \mathrm{km/h}$ پس از ۳۰ دقیقه به B می‌رسد. درآنجا ۱۰ دقیقه توقف می‌کند وسپس با سرعت $48\ \mathrm{km/h}$ به‌طرف C که ۳۰ کیلومتر دورتر است به‌راه می‌افتد. پس از ۱۰ دقیقه توقف در C با سرعت یکنواخت $60\ \mathrm{km/h}$ به‌طرف A بر می‌گردد. نموداری رسم کنید که وضع X را درهرلحظه نشان دهد، و ازروی آن تعیین کنید که پس‌ازچه مدت، جسم Y که همراه X از A به‌راه افتاده است درهنگام برگشت در ۲۰ کیلومتری A با X ملاقات می‌کند. Y باید با چه سرعت یکنواختی حرکت کند؟

۱۸ـ مسافت s سانتیمتر که به وسیلهٔ یك نقطهٔ مادی در t ثانیه پیموده می‌شود به‌وسیلهٔ رابطهٔ $s = 1/5t^2 - t$ داده شده است. سرعت نقطهٔ مادی را پس از t ثانیه تعیین کنید. لحظه‌ای راکه درآن، نقطهٔ مادی به‌طورلحظه‌ای متوقف می‌شود پیدا کنید، وحرکت را تشریح کنید.

۱۹ـ مسافت s متر که به‌وسیلهٔ یك نقطهٔ مادی در t ثانیه پیموده می‌شود به‌وسیلهٔ رابطهٔ $s = 12t - t^2$ داده شده است. سرعت اولیه ولحظه‌ای راکه درآن سرعت برابر $8\ \mathrm{m/s}$ است پیدا کنید. نتایج خود را با رسم نمودارمسافت‌ـزمان تحقیق کنید.

۲۰ـ مسافت s متر که به‌وسیلهٔ یك نقطهٔ مادی در t ثانیه پیموده‌می‌شود، از $t=0$ تا $t=4$ به‌وسیلهٔ رابطهٔ $s = 2t^2$ و از $t=4$ تا $t=8$ به وسیلهٔ رابطهٔ $s = 16t - 32$ و از $t=8$ تا $t=10$ به‌وسیلهٔ رابطهٔ $s = 80t^2 - 4t - 288$ داده شده است. نمودار مسافت‌ـزمان را رسم کنید. سرعت نقطهٔ مادی را درهریك ازاین فاصله‌های زمانی پیدا کنید وحرکت را تشریح کنید.

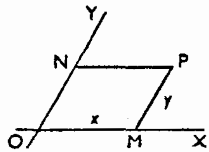
۱.۰۹ تغییرمکان

اگر یك نقطهٔ مادی در زمان t درنقطه‌ای مانند P باشد، تغییرمکان آن نسبت به نقطهٔ O ازنظر بزرگی‌ـوجهت با OP مشخص می‌شود. تغییرمکان یك کمیت برداری است، زیرا

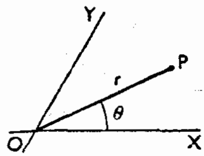
دارای بزرگی وجهت است، وبنابراین برای آنکه به‌طور کامل مشخص شود به دومقدار نیازمند هستیم.

OP وبنابراین وضع P را نسبت به O به‌دوراه می‌توان مشخص کرد.

اولاً، فرض می‌کنیم که OX و OY (شکل ۱ـ۸) دوخط راست ثابت باشندکه OP درصفحهٔ آنها واقع است. فرض می‌کنیم PM به‌موازات OY رسم شود تا OX را درM قطع کند، و PN به‌موازات OX رسم شود تاOY را درN قطع کند. دراین‌صورت PN و PM (یا OM و ON) وضع P را مشخص خواهندکرد.



شکل ۱ـ۸



شکل ۱ـ۹

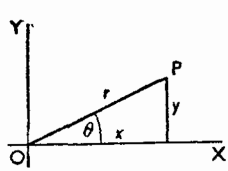
(x, y) مختصات دکارتی P مربوط به محورهای OX و OY هستند. معمولاً محورها را عمود بریکدیگرانتخاب می‌کنند.

ثانیاً، اگرطول خط OP و زاویهٔ XOP را بدانیم (شکل ۱ـ۹) وضع P مشخص خواهد شد.

(r, θ) مختصات قطبی P مربوط به‌قطب O ومحور OX هستند.

البته میان x، y و r، θ رابطه‌ای برقرار است که به زاویهٔ میان OX وOY نیز بستگی دارد.

اگر، به‌طوری که درشکل ۱ـ۱۰ نشان داده شده است، OX وOY بر یکدیگر عمود باشند، درآن صورت $x = r\cos\theta$ و $y = r\sin\theta$ است.



شکل ۱ـ۱۰

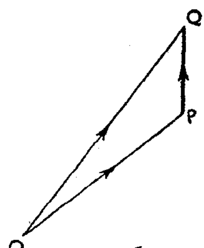
۱۰.۱. تغییرمکان OP به‌صورت $\overrightarrow{OP}$ نمایش داده می‌شود، واین نشان می‌دهدکه تغییر

مکان از O به P صورت گرفته است. (دربرخی ازکتابها آن را بـا حروف سیاه بـه‌صورت OP نشان می‌دهند، ولی ما دراین‌کتاب همه جا آن را با حروف نازك نشان می‌دهیم که بربالای آن علامت پیکان است.) به‌همین‌طـریق تغییرمکان PO، که جهت آن ازP به O است ولی بزرگی‌آن برابـر بزرگی تغییر مکان OP است، بـا علامت $\overrightarrow{PO}$ نمـایش داده می‌شود، ومی‌نویسیم:

$$\overrightarrow{OP} = -\overrightarrow{PO}$$

بنابراین درست نوشتن ترتیب حروف بسیاراهمیت دارد. طول OP بـا طول PO برابر است، اما تغییرمکان $\overrightarrow{OP}$، برابر ودرخلاف جهت تغییرمکان $\overrightarrow{PO}$ است.

اگر یك نقطهٔ مادی از P (شکل۱-۱۱) بهQ حرکت‌کند، تغییر وضع نقطهٔ مادی، یا تغییرمکان Q نسبت به P با بردار $\overrightarrow{PQ}$ نمایش داده می‌شود.



شکل ۱-۱۱

چون تغییرمکان از O بهP که به‌دنبال آن تغییرمکانی ازP به Qصورت‌گرفته‌است، ازنظرهندسی برابر تغییرمکانی است‌که از O به Q انجام‌گرفته باشد، می‌توان نوشت:

$$\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ} \qquad (۱)$$

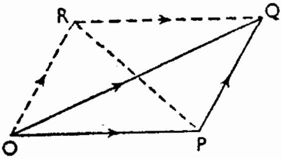
این قانون اساسی جمع تغییر مکانهاست؛ وممکن است به‌عنوان یك واقعیت تجربی، یا تعریف ماهیت فضایی‌که نقطهٔ مادی درآن حرکت می‌کند پذیرفته شود. از معادلهٔ (۱) این نتیجه به‌دست می‌آید:

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP} \qquad (۲)$$

۱۱۰۱. قانون جمع برداری

قانونی‌که برای جمع تغییرمکانها گفتیم برای تمام بردارها صادق است و بستگی به‌ماهیت

آنها ندارد، بنابراین آن را قانون جمع برداری می‌نامیم. برطبق این‌قانون مجموع هردو کمیت برداری همنوع که با $\overrightarrow{OP}$ و $\overrightarrow{PQ}$ مشخص شده‌اند برداری است‌که با $\overrightarrow{OQ}$ نمایش داده می‌شود. به‌خاطرداشته باشیدکه جمع را می‌توان همیشه به صورت نمـوداری انجام داد، یعنی با رسم مثلث OPQ (شکل ۱-۱۲).



شکل ۱-۱۲

دو بردار[1] هنگامی برابرندکه دارای بزرگی و جهت یکسان باشند. بنابرایـن، اگر (شکل ۱-۱۲) متوازی‌الاضلاع OPQR راکامل‌کنیم، داریم:

$$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{PQ} \text{ و } \overrightarrow{OP}=\overrightarrow{RQ}$$

اما برطبق قانون جمع برداری

$$\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}$$

پس
$$\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OQ} \qquad (۳)$$

واین شکل دیگری از قانون جمع بـرداری است و بـه آن قانون متوازی‌الاضلاع می‌گوییم که ممکن است به‌این صورت بیان شود: مجموع دوبردار $\overrightarrow{OP}$ و $\overrightarrow{OR}$که از هرنقطهٔ O رسم شوند با قطر $\overrightarrow{OQ}$ متوازی‌الاضلاع OPQR نمایش داده می‌شود؛ در این متوازی-الاضلاع OP و OR اضلاع مجاورند.

تفاضل دوبردار را نیزممکن است پیدا کرد.

چون
$$\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{OR}$$

نتیجه می‌شودکه
$$\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OP} \qquad (۴)$$

وبنابراین
$$\overrightarrow{RP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OR}$$

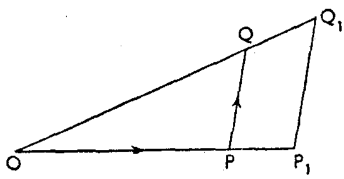
۱ــ دراینجافقط بردارهای«آزاد» موردتوجه‌هستند، نه بردارهایی‌که بریك‌خط متمرکزشده‌اند.

پس قطر $\overrightarrow{RP}$ تفاضل بردارهای $\overrightarrow{OP}$ و $\overrightarrow{OR}$ را نشان می‌دهد. بنابراین نتیجهٔ مهمی که به‌دست می‌آوریم این است که دو قطر متوازی‌الاضلاع مجموع و تفاضل بردارهایی را که با دو ضلع مجاور متوازی‌الاضلاع مشخص شده‌اند نشان می‌دهند. ما همیشه از آن استفاده خواهیم کرد.

$\overrightarrow{OQ}$ مجموع دو بردار $\overrightarrow{OP}$ و $\overrightarrow{PQ}$ غالباً برایند دو بردار نامیده می‌شود. برعکس بردارهای $\overrightarrow{OP}$ و $\overrightarrow{PQ}$ مؤلفه‌های بردار $\overrightarrow{OQ}$ نامیده می‌شوند. بدیهی است که $\overrightarrow{OQ}$ می‌تواند به‌راههای بیشمار به‌دومؤلفه تجزیه شود، زیرا عدهٔ مثلثهای OPQ که می‌توان رسم کرد بیشمار است.

۱۲۰۱. به‌خاطر داریم که $\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OP}$، که می‌تواند به‌صورت $۲\overrightarrow{OP}$ نوشته شود، برداری است به‌بزرگی ۲OP و به‌موازات $\overrightarrow{OP}$. به همین ترتیب اگر m یك کمیت اسکالر باشد، $m\overrightarrow{OP}$ برداری است به بزرگی mOP و به‌موازات $\overrightarrow{OP}$. ازاین گذشته اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار دلخواه باشند، دراین صورت

$$m(\vec{a}+\vec{b})=m\vec{a}+m\vec{b}$$



شکل ۱-۱۳

زیرا اگر OP (شکل ۱-۱۳) معرف بردار $\vec{a}$ باشد، دراین صورت $OP_1=mOP$ معرف بردار $m\vec{a}$ خواهد بود؛ نیز اگر PQ معرف‌بردار $\vec{b}$ باشد، دراین صورت P_1Q_1 که به‌موازات PQ و به‌طول m PQ رسم شده است معرف بردار $m\vec{b}$ خواهد بود. پس $OP_1/OP=P_1Q_1/PQ=m$ ، و بنابراین Q_1 بر امتداد OQ قرار می‌گیرد به طوری که $OQ_1/OQ=m$.

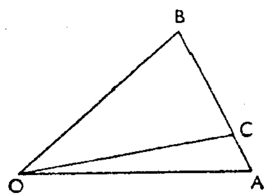
$$\therefore \qquad \overrightarrow{OQ_1} = m\overrightarrow{OQ}$$

$$\therefore \qquad \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{P_1Q_1} = m(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ})$$

یعنی
$$m\vec{a} + m\vec{b} = m(\vec{a} + \vec{b})$$

مثال ۱ : اگر OAB مثلثی دلخواه باشد، تحقیق کنید که به‌ازای تمام مقادیر m و n وقتی که C نقطه‌ای از AB باشدکه $m \times AC = n \times CB$ است، داریم:

$$m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB} = (m+n)\overrightarrow{OC}$$



شکل ۱-۱۴

حل : C هرنقطه‌ای از AB باشد، داریم

$$m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB} = m(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CA}) + n(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB})$$
$$= (m+n)\overrightarrow{OC} + m\overrightarrow{CA} + n\overrightarrow{CB}$$

چون $\overrightarrow{CA}$ و $\overrightarrow{CB}$ بر یك خط و در خلاف جهت یکدیگرند، $m\overrightarrow{CA} + n\overrightarrow{CB}$، به‌شرطی‌که $m \times AC = n \times CB$ باشد، صفرخواهدبود، و نتیجه به‌دست می‌آید.

توجه ـ اگر $m = n$ باشد، داریم

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = ۲\overrightarrow{OC}$$

که C نقطهٔ وسط AB است.

مثال ۲ : به‌طور برداری ثابت کنیدکه خطی‌که نقطه‌های وسط دوضلع یك مثلث را به هم وصل می‌کند به‌موازات ونصف ضلع سوم است.

حل : اگر E و F نقطه‌های وسط اضلاع CA و AB از مثلث ABC باشند، در این صورت :

$$\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AE}$$

$$=\frac{۱}{۲}\overrightarrow{BA}+\frac{۱}{۲}\overrightarrow{AC}$$

$$=\frac{۱}{۲}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})$$

$$\therefore \qquad \overrightarrow{FE}=\frac{۱}{۲}\overrightarrow{BC}$$

یعنی $FE=\frac{۱}{۲}BC$ و FE به‌موازات BC است.

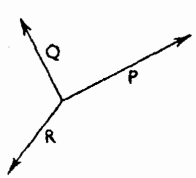
۱۳۰۱. جمع چند بردار

بدیهی‌است که باتکرارقانون جمع دوبردار می‌توان چند بردار را نیز به‌یك بردارتبدیل کرد.

برای مثال، فرض‌کنیم که می‌خواهیم مجموع سه بردار $\overrightarrow{P}$ ، $\overrightarrow{Q}$ و $\overrightarrow{R}$ را به‌دست‌آوریم (شکل ۱-۱۵). مطابق شکل (۱-۱۶) بردار $\overrightarrow{OA}$ را برای نمایش $\overrightarrow{P}$ و $\overrightarrow{AB}$ را بـرای نمایش $\overrightarrow{Q}$ رسم می‌کنیم. پس $\overrightarrow{OB}$ نمایش‌دهندهٔ $\overrightarrow{P}+\overrightarrow{Q}$ است. اگـر اکنون $\overrightarrow{BC}$ را بـرای نمایش $\overrightarrow{R}$ رسم‌کنیم، دراین صورت

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}$$

$$=(\overrightarrow{P}+\overrightarrow{Q})+\overrightarrow{R}$$



شکل ۱-۱۵

باید به‌خاطر داشت که ترتیبی که برای جمع کردن بردارها انتخاب می‌شود تأثیری درنتیجهٔ نهایی ندارد.

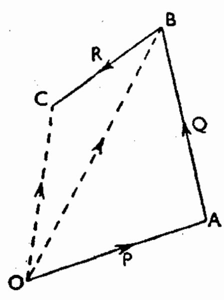
زیرا اگر بارسم $\overrightarrow{OA}$ برای نمایش $\overrightarrow{P}$ و $\overrightarrow{AD}$ برای نمایش $\overrightarrow{R}$، ابتدا $\overrightarrow{P}$ و $\overrightarrow{R}$ را جمع کنیم (شکل ۱-۱۷)، دراین صورت $\overrightarrow{OD}$ نمایش دهندهٔ $\overrightarrow{P}+\overrightarrow{R}$ خواهدبود. اگراکنون $\overrightarrow{DE}$ را برای نمایش $\overrightarrow{Q}$ رسم کنیم، دراین صورت

$$\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DE}$$
$$=(\overrightarrow{P}+\overrightarrow{R})+\overrightarrow{Q}$$

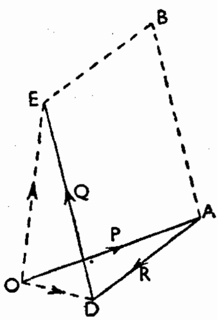
آشکار است که، براساس قاعده‌های هندسه، OE و OC متساوی و متوازی هستند. بنابراین

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{P}+\overrightarrow{Q}+\overrightarrow{R}$$

$\overrightarrow{OC}$ (یا $\overrightarrow{OE}$) مجموع بردارهای $\overrightarrow{P}$، $\overrightarrow{Q}$ و $\overrightarrow{R}$ را نمایش می‌دهد.



شکل ۱-۱۶



شکل ۱-۱۷

مثال ۱ : درصفحهٔ چهار ضلعی ABCD نقطه‌ای مانند O پیدا کنید که $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=0$ باشد.

حل : اگر E نقطهٔ وسط AB باشد، $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OE}$

و اگر F نقطهٔ وسط CD باشد، $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{OF}$

پس اگر $\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}=0$ یعنی اگر O نقطهٔ وسط EF باشد،

$$\therefore\ \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=0$$

به‌همین طریق مجموع چهار بردار مذکور هنگامی صفر خواهد بود که نقطهٔ O وسط GH باشد، که G و H نقطه‌های وسط دوضلع دیگرمقابـل یعنی BC و DA باشند. پس، همان‌طور که درهندسهٔ مقدماتی ثابت‌می‌شود EF و GH یکدیگر را نصف می‌کنند.

مثال ۲ : اگر H محل برخورد ارتفاعهای مثلث ABC و O مرکز دایرهٔ محیطی ایـن مثلث باشد، ثابت کنید که

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}$$

و

$$\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=2\overrightarrow{HO}$$

حل : اگر D وسط BC باشد، $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OD}$

اما $\overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{OD}$، زیرا OD موازی AH (هـر دوعمود بـر BC هستند) و $2OD=AH$.

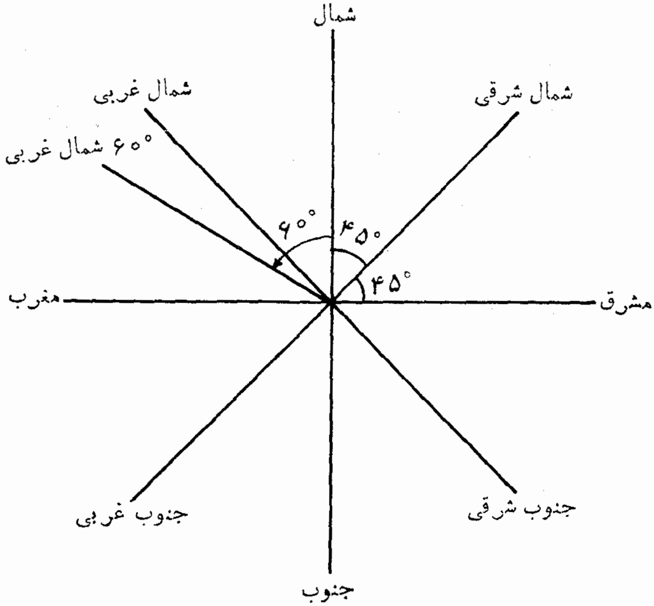
$$\therefore\quad \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{OH}$$

نیز

$$\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=(\overrightarrow{HO}+\overrightarrow{OA})+(\overrightarrow{HO}+\overrightarrow{OB})+(\overrightarrow{HO}+\overrightarrow{OC})$$
$$=3\overrightarrow{HO}+\overrightarrow{OH}$$
$$=2\overrightarrow{HO}$$

تمرین ۲.۱

۱ـ ازمحلی مانند O، شخصی ۳ کیلومتر به‌طرف مشرق مـی‌رود، و سپس ۴ کیلومتر به طرف جنوب می‌رود. ثابت‌کنید کـه او اکنون در ۵ کیلومتری نقطـهٔ O و درجهتی قراردارد که با امتداد مشرق نقطهٔ O زاویه‌ای می‌سازد که تانژانت آن بـرابر $\frac{3}{4}$ است. این شخص اکنون چند کیلومتر باید به‌طرف مغرب بـرود تـا درست درجنوب غربی نقطهٔ O قرار گیرد، یعنی به‌جایی برسد که جهتش نسبت به نقطهٔ O بـا امتداد



مغرب نقطهٔ O زاویهٔ ۴۵ درجه بسازد.

۲ـ اتومبیلی از A بـه‌راه می‌افتد و ۱۰ کیلومتر به‌طرف مغرب، ۲۰ کیلومتر بـه طرف شمال غربی، و ۳۰ کیلومتر بـه‌طرف شمال می‌رود. فـاصله‌اش را از A و جهتش را نسبت به A پیدا کنید. اگراین اتومبیل باسرعت متوسط ۵۰ کیلومتر درساعت‌مستقیماً به‌طرف A برگردد، پس ازچه مدت به A خواهد رسید؟

۳ـ دوهواپیما ازیك فرودگاه برمی‌خیزند. یکی درساعت ۱۰ صبح برمی‌خیزد و باسرعت متوسط ۴۰۰ km/h به‌طرف شمال پـرواز می‌کند. دیگری درساعت ۱۰،۱۵ صبح برمی‌خیزد و با سرعت متوسط ۴۸۰ km/h درامتداد °۶۰ شمال غربی بـه‌پرواز در می‌آید. فاصلهٔ این دوهواپیما درساعت ۱۱،۳۰ صبح چقدر است؟ جهت هـواپیمای اول را نسبت به‌هواپیمای دوم پیدا کنید.

۴ـ کشتی A در ۱۰۰ کیلومتری درجهت شمال شرقی بندر P است، وکشتی B در ۱۰۰ کیلومتری P درجهت °۱۵ شمال شرقی است. اگر A متوقف باشد، پس ازچه مدت B می‌تواند به A برسد، درصورتی که حـداکثر سرعتش ۵۰ km/h است؟ در چـه جهتی باید پیش برود؟

۵ـ نقطه‌ای مادی، دایره‌ای به‌شعاع a را با سرعت v طی می‌کند. اگرحرکت را ازنقطهٔ

A شروع کرده باشد، ثابت کنید که پس از مدت t تغییر مکان آن برابر است با $2a\sin(vt/2a)$ و با مماس بر دایره در نقطهٔ A زاویهٔ $vt/2a$ رادیان می‌سازد.

۶ ـ تغییرمکان جسم A نسبت به نقطهٔ O برابر است با:
(الف) ۹ کیلومتر درشمال شرقی، (ب) ۹ کیلومتر در $30°$ شمال‌شرقی،
(پ) ۱۲ کیلومتر در $30°$ شمال غربی، (ت) ۱۲ کیلومتر درجنوب غربی.
مؤلفه‌های تغییرمکان A را درجهتهای شرقی وغربی تعیین کنید.

۷ ـ مجموع تغییرمکانهای (الف) و (ب)، (ب) و (پ)، (الف) و (ت) را، که (الف) و (ب) و (پ) و (ت) تغییرمکانهایی هستند که درمسئلهٔ ۶ در بالا داده شده‌اند، پیدا کنید.

۸ ـ تفاضل تغییرمکانهای (الف) و(ب)، (ب) و (پ) ، (الف) و (ت) را، که درآن (الف) و (ب) و(پ) و(ت) تغییرمکانهایی‌هستند که درمسئلهٔ ۶ دربالا داده شده‌اند، پیدا کنید.

۹ ـ برداری به‌بزرگی ۱۰ واحدبا OX زاویهٔ $45°$ می‌سازد. مؤلفه‌های‌بردار را درامتداد OX وخطی که با OX زاویهٔ $75°$ می‌سازد تعیین کنید.

۱۰ـ بزرگی دو بردار به‌ترتیب ۲ و ۳ است. مجموع مؤلفه‌های آنها درامتداد OX برابر ۱ ومجموع مؤلفه‌های آنها درامتداد OY برابر ۳ است. OX و OY عمود بریکدیگرند. روشی ارائه دهید که به‌وسیلهٔ ترسیم بتوان جهتهای دو بردار راتعیین کرد، وثابت کنید که دوپاسخ وجود دارد. زاویه‌هایی راکه بردارها با محور OX می‌سازند اندازه بگیرید ونتایج را ازطریق محاسبهٔ عددی تحقیق کنید.

۱۱ـ بردارهایی به‌بزرگی ۴، ۱۰ و ۶ واحد باجهت معینی به ترتیب زاویه‌های $45°$، $90°$ و $135°$ می‌سازند. مجموع این بردارها را تعیین کنید.

۱۲ـ بردارهایی به‌بزرگی ۴، ۳، ۲ و ۱ به ترتیب درامتدادهای AB، AC، AD و AE هستند وزاویهٔ $BAC=30°$ ، زاویهٔ $CAD=30°$، و زاویهٔ $DAE=90°$ است. بزرگی مجموع این بردارها وشیب جهت آن را با AB تعیین کنید.

۱۳ـ اگر درامتداد محورهای x و y مؤلفه‌های تغییرمکان $\vec{a}$ به ترتیب ۴ و ۳ واحد، مؤلفه‌های تغییرمکان $\vec{b}$ به‌ترتیب ۱ و ۱ــ واحد ومؤلفه‌های تغییر مکان $\vec{c}$ به‌ترتیب ۲ــ و ۳ــ واحد باشد، مطلوب است بزرگی وجهت تغییرمکان:

(۱) $\vec{a}+\vec{b}$ ، (۲) $\vec{a}-\vec{c}$ ، (۳) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ ،

$\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$ (۴) ، $۲\vec{a}-\vec{b}$ (۵) ، $\vec{a}-۳\vec{b}+۴\vec{c}$ (۶)

۱۴- اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ تغییرمکانهای مسئلهٔ ۱۳ باشند، مقادیر ثابت m و n را طوری پیدا کنید که (۱) $\vec{a}+m\vec{b}$ به‌موازات محور xها باشد، (۲) $\vec{a}+n\vec{c}$، به‌موازات محور yها باشد، (۳) $\vec{a}=m\vec{b}+n\vec{c}$ باشد.

۱۵- اگر D ، E ، و F نقطه‌های وسط اضلاع BC ، CA و AB از مثلث ABC باشند، ثابت کنید که

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=۰ \ (۱) \ ، \ ۲\overrightarrow{AB}+۳\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=۲\overrightarrow{FC} \ (۲)$$

$$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=۰ \ (۳)$$

۱۶- اگر D ، E و F نقطه‌های وسط اضلاع مثلث ABC باشند و O نقطه‌ای دلخواه باشد، ثابت کنید که $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}$.

۱۷- اگر بردارهای $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ ، $\vec{c}$ و $\vec{d}$ اضلاع چهارضلعی ABCD را تشکیل داده باشند، بردارهایی را پیدا کنید که معرف اضلاع چهارضلعی EFGH باشند، که در آن E ، F ، G و H به‌ترتیب نقطه‌های وسط اضلاع AB ، BC ، CD و DA هستند. از نتیجه‌های حاصل، متوازی‌الاضلاع بودن EFGH را استنتاج کنید.

۱۸- اگر ABCD چهارضلعی دلخواهی باشد، ثابت کنید که $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}=۲\overrightarrow{EF}$ ، که E و F به ترتیب نقطه‌های وسط AB و DC هستند. نیز ثابت کنید که $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}=۴\overrightarrow{XY}$، که X و Y به‌ترتیب نقطه‌های وسط قطرهای AC و BD هستند.

۱۹- درداخل مثلث ABC نقطه‌ای مانند O چنان پیدا کنید که: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=۰$ باشد.

۲۰- X و Y به‌ترتیب محل برخورد میانه‌های دو مثلث ABC و PQR است. ثابت کنید که $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BQ}+\overrightarrow{CR}=۳\overrightarrow{XY}$.

۱۴.۱. تندی

تندی یك نقطهٔ مادی متحرك نسبت به‌نقطه‌ای مانند O ، میزان تغییرات تغییرمکان نقطهٔ

مادی را نسبت به‌نقطهٔ O نشان می‌دهد. بنابراین تندی،شامل بزرگی و جهت است ویك کمیت برداری است.

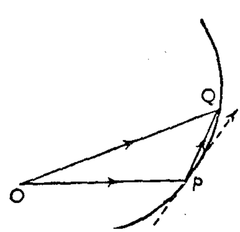
تندی یك نقطهٔ مادی هنگامی یکنواخت گفته می‌شود که نقطهٔ مادی در جهتی ثابت با سرعتی یکنواخت حرکت کند، یعنی هنگامی که هم‌جهت و هم بزرگی تندی یکنواخت باشد. پس اگر نقطهٔ مادی در مسیری مستقیم با سرعت یکنواخت حرکت کند، تندی آن یکنواخت است. اما اگر نقطهٔ مادی در مسیری منحنی، مثلاً درمسیری دایره‌شکل، حرکت کند تندی آن یکنواخت نیست. ممکن است سرعت آن یکنواخت باشد، ولی چون جهت سرعت دائماً تغییر می‌کند، تندی نمی‌تواند یکنواخت باشد.

درحالت یکنواخت، تندی نقطهٔ مادی متحرك به‌وسیلهٔ تغییرمکان آن در واحدزمان سنجیده می‌شود. اگریك نقطهٔ مادی درمدت tثانیه درامتداد مسیری مستقیم مسافتی برابر s m طی‌کند و به‌ازای تمام مقادیر t همیشه $s=vt$ باشد، v m/s تندی یکنواخت نقطهٔ مادی است.

۱۵.۱ وقتی که یك نقطهٔ مادی متحرك باتندی متغیرحرکت می‌کند، تندی آن درهرلحظه، عبارت از تغییرمکانی است که، اگر با همان تندی که درآن لحظه دارد به‌حرکت خود ادامه دهد، درواحد زمان بعدی طی می‌کند.

۱۶.۱ تندی یك نقطهٔ مادی را در هرلحظه می‌توان به‌این طریق تعیین کرد. فرض کنیم که نقطه‌ای مادی دریك صفحه در مدت زمان t از نقطهٔ P به نقطهٔ Q می‌رود (شکل ۱-۱۸). چون تغییر مکان در این فاصلهٔ زمانی $\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{PQ}$ است، تندی متوسط دراین فاصلهٔ زمانی برابر است با:

$$\frac{\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}}{t}=\frac{\overrightarrow{PQ}}{t}$$



شکل ۱-۱۸

به‌خاطر داشته باشید که این نسبت، برداری است درجهت PQ و به‌بزرگی PQ/t. بنابراین تندی متوسط به‌موازات PQ است.

اگر t کوچك باشد، $\overrightarrow{PQ}/t$ تقریباً تندی نقطهٔ مادی را در هنگامی که در وضع P است به‌دست می‌دهد. پس اگر فاصله‌های زمانی فوق‌العاده کوچك انتخاب شوند، تندی نقطهٔ P را می‌توان به‌صورت $\lim\limits_{t\to 0}\overrightarrow{PQ}/t$ نوشت.

این یك کمیت برداری است که بزرگی آن $\lim\limits_{t\to 0} PQ/t$ است و جهت آن، حدجهت وتر PQ است، یعنی جهت مماس برمسیر P در نقطهٔ P است (شکل ۱-۱۸).

۱۷۰۱. واحد تندی، تندی نقطهٔ مادی متحرکی است که تغییرمکانی برابرواحد فاصله را در واحد زمان انجام می‌دهد.

اندازهٔ عددی این واحد برابر است با اندازهٔ عددی واحد سرعت. بزرگی تندی یك نقطهٔ مادی با سرعت آن نقطه برابر است. امـا برای‌آنکه تندی یـك نقطهٔ مادی به‌طور کامل مشخص شود باید جهت حرکت مشخص شود. مثلاً v m/s درجهت شمال شرقی.

۱۸۰۱. یك نقطهٔ مادی یا یك‌جسم ممکن است دریك لحظهٔ معین، تندیهای متفاوتی‌داشته باشد. مانند شخصی که در داخل قطار متحرکی قدم می‌زند. تندی منفردی که معادل با آن چند تندی است، برایند آنها نامیده می‌شود، وآن چند تندی مؤلفه‌های این برایند هستند.

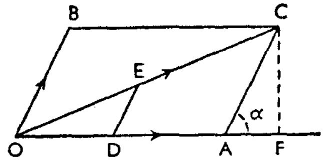
تندیها را نیز، مانند همهٔ کمیتهای برداری، می‌توان برطبق قانون متوازی‌الاضلاع با هم ترکیب کرد.

۱۹۰۱. متوازی‌الاضلاع تندیها

اگر یك نقطهٔ مادی، درآن واحد، تندیهایی داشته باشد که از نظر بزرگی و جهت باخطوط OA و OB نمـایش داده شده‌اند، دارای تندی برایندی خـواهد بود کـه با قطـر OC متوازی‌الاضلاع OACB نمایش داده می‌شود.

این مطلب از قانون متوازی‌الاضلاع دربارهٔ جمع بردارها (§ ۱-۱۱)، یا از قانون جمع تغییرمکانها استنتاج می‌شود.

اگـر OA (شکل ۱-۱۹) تندیی بـا بزرگی u، و OB تندیی بـا بزرگی v باشد،



شکل ۱-۱۹

می‌توان تصور کرد که نقطهٔ مادی با سرعت u در امتداد OA حرکت می‌کند، و در همان حال خط OA به‌موازات خودش طوری حرکت می‌کند که انتهای آن، O ، خط OB را با سرعت v می‌پیماید. در واحد زمان، نقطهٔ مادی در امتداد OA حرکت کرده است و به‌نقطهٔ A رسیده است، و خط OA در این مدت به‌وضع BC رسیده است. بنابراین نقطهٔ مادی متحرك در C خواهد بود.

درهرمدت زمان کمتری، مثلاً t ، نقطهٔ مادی مسافتی برابر ut در امتداد OA طی خواهد کرد و به D خواهد رسید، و در همین مدت OA مسافتی برابر vt به‌موازات خود پیموده است.

اگر DE را به‌موازات AC رسم کنیم تا OC را در E قطع کند،

$$\frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{OD}}=\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{OA}}=\frac{v}{u}$$

$$\therefore \qquad \mathrm{DE}=\mathrm{OD}\times\frac{v}{u}=ut\,\frac{v}{u}=vt$$

نتیجه می‌شود که DE مسافتی است که به‌وسیلهٔ خط OA پیموده شده است. بنابراین نقطهٔ مادی در E خواهد بود.

پس OC مسیری است که به‌وسیلهٔ نقطهٔ مادی طی شده است، و OC از نظر بزرگی و جهت نشان‌دهندهٔ تندیی است که برابر است با OA و OB ؛ یعنی برابر است با برایند آنها.

اگر زاویهٔ $\mathrm{AOB}=\alpha$ و CF عمود بر OA رسم شود، داریم:

$$\begin{aligned}\mathrm{OC}^{2}&=\mathrm{OF}^{2}+\mathrm{FC}^{2}\\&=(\mathrm{OA}+\mathrm{AC}\cos\alpha)^{2}+(\mathrm{AC}\sin\alpha)^{2}\\&=\mathrm{OA}^{2}+2\mathrm{OA}\times\mathrm{AC}\cos\alpha+\mathrm{AC}^{2}\end{aligned}$$

پس اگر برایند OC برابر V باشد،

$$V^{2}=u^{2}+v^{2}+2uv\cos\alpha$$

اگر u و v مؤلفه‌های تندی برهم عمود باشند،

$$V^2 = u^2 + v^2$$

۲۰.۱. تجزیهٔ تندی

می‌توان بـا استفاده از قانون متوازی‌الاضـلاع، تندی معینی را به‌دو مؤلفه تجزیه کـرد. بدیهی است که چون می‌توان با یك خط مستقیم، به‌عنوان قطرمتوازی‌الاضلاع، متوازی‌الاضلاعهـای بیشماری ساخت، تندی مفروض را نیـز می‌توان به راههای بیشماری به‌دو مؤلفه تجزیه کرد.

عملاً جهتهای این مؤلفه‌ها داده می‌شوند، و این‌جهتها معمولاً عمود بریکدیگرند. درحالت اخیر، اندازه‌های مؤلفهٔ تندی به‌سادگی به‌شرح زیر به‌دست می‌آیند:

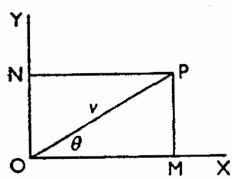
فرض کنیم که OP (شکل ۱ـ۲۰) تندی مفروض v باشد، و فرض کنیم که می‌خواهیم آن را به‌دو مؤلفه تجزیه کنیم، یکی در امتداد OX و دیگری درجهت عمود برآن یعنی درامتداد OY.

PM را عمود بر OX و PN را عمود بر OY رسم می‌کنیم.

پس OM و ON مؤلفه‌های v در امتدادهای OX و OY هستند.

اگر زاویهٔ $\mathrm{XOP} = \theta$ باشد،

$$\mathrm{OM} = v \cos\theta \quad \text{و} \quad \mathrm{ON} = v \sin\theta$$



شکل ۱ـ۲۰

پس تندی v برابر است بـا تندی $v\cos\theta$ در امتداد خطی کـه با جهت v زاویهٔ θ می‌سازد، همراه با تندی $v\sin\theta$ در امتدادی عمود بر امتداد تندی اول.

۲۱.۱. اگر x و y مختصات نقطهٔ A درهرلحظه، در دستگاه محورهای مختصات باشند، مؤلفهٔ تغییرمکانهای A درلحظهٔ t به‌موازات OX و OY به‌ترتیب عبارتند از x و y.

پس مؤلفه‌هـای سرعت A به‌موازات محورهـا، عبارت از تغییرات x و y نسبت به‌زمان است، یعنی $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ و $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$.

این مؤلفه‌های تندی را غالباً با $\dot{x}$ و $\dot{y}$ نمایش می‌دهند، یعنی $\dot{x}=dx/dt$ و $\dot{y}=dy/dt$. با توجه به‌این دومؤلفه، می‌توانیم تغییرات جهت حرکت A را حساب کنیم.

توجه به‌مؤلفه‌های تندی، به‌ویژه در حالتهایی که مسیرحرکت، یک خط مستقیم نیست، اهمیت بسیار دارد.

۲۲۰۱. هنگامی که از مؤلفهٔ تندی دریك‌جهت معین گفتگو می‌کنیم، جهت دیگری که‌تندی باید برآن تجزیه شود عمود برجهت معین است.

اگر لازم‌باشد که مؤلفه‌های تندی v درجهتهایی تجزیه شوند که باجهت v زاویه‌های α و β بسازند، آن مؤلفه‌ها را می‌توان به‌طریق زیر به‌دست‌آورد:

فرض می‌کنیم OC (شکل ۱-۲۱) تندی v را نشان دهد. OA و OB راکه با OC به‌ترتیب زاویه‌های α و β می‌سازند رسم می‌کنیم. از C خطوطی موازی OA و OB رسم می‌کنیم و متوازی‌الاضلاع OACB را می‌سازیم.

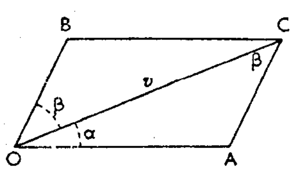
پس OA و OB، یا OA و AC مؤلفه‌های مطلوب هستند. از مثلث OAC داریم:

$$\frac{OA}{\sin\beta}=\frac{OC}{\sin A} \quad \text{و} \quad A=180^\circ-(\alpha+\beta)$$

$$\therefore \qquad OA=\frac{v\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$$

نیز

$$OB=\frac{v\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$$



شکل ۱-۲۱

تمرین ۱ـ۳

۱ ـ برایند تندیهای ۸ m/s و ۶ m/s را که با هم زاویهٔ قائمه تشکیل می‌دهند، پیدا کنید.

۲ ـ برایند تندیهای ۸ m/s و ۶ m/s را که با هم زاویهٔ ۶۰° تشکیل می‌دهند، پیدا کنید.

۳ ـ قطاری با سرعت ۳۰ m/s حرکت می‌کند. شخصی گلوله‌ای را در امتداد کف قطار ودرجهتی عمود برجهت حرکت با سرعت ۱۶ m/s پرتاب می‌کند. تندی برایند گلوله را پیدا کنید.

۴ ـ نقطه‌ای مادی برمسیری مستقیم با تندی ۱۲ m/s حرکت می‌کند. مؤلفهٔ تندی آن را درجهتی که با جهت حرکت این نقطه زاویهٔ ۳۰° می‌سازد پیدا کنید، در صورتی که جهت حرکت مؤلفهٔ دیگر با جهت حرکت اولاً ۶۰°، ثانیاً ۹۰° باشد.

۵ ـ گلوله‌ای با تندی ۲۰ m/s درجهتی که با افق زاویهٔ ۶۰° می‌سازد حرکت‌می‌کند. مؤلفه‌های تندی این گلوله را درامتدادهای افقی وقائم پیدا کنید.

۶ ـ شخصی با تندی ۵ km/h در جهت شمال غربی حرکت می‌کند. مؤلفه‌های تندی این شخص را به‌ترتیب درجهت شمال و درجهت مشرق تعیین کنید.

۷ ـ دوچرخه سواری با سرعت ۱۶ km/h در جهت ۳۰° شمال‌شرقی پیش می‌رود. مؤلفه‌های تندی اورا به‌ترتیب درجهت شمال و درجهت مشرق تعیین کنید.

۸ ـ قطرهٔ باران درهوای آرام با سرعت ۳ m/s سقوط می‌کند. اگر باد با سرعت ۴ m/s در امتداد افقی بوزد، تندی قطرهٔ باران چقدرخواهد شد؟

۹ ـ یك کشتی به‌طرف مغرب متوجه است و باد به‌طرف جنوب می‌وزد. این کشتی در مدت نیم ساعت ۶ کیلومتر در جهت ۳۰° جنوب‌غربی طی می‌کند. سرعت باد و سرعتی راکه کشتی به‌آن طرف متوجه است پیدا کنید.

۱۰ـ تندی ۱۰ m/s را به‌دو مؤلفه که با جهت این تندی به‌ترتیب زاویه‌های ۳۰° و ۴۵° می‌سازند، تجزیه کنید.

۱۱ـ تندی ۱۰ m/s را به‌دومؤلفهٔ عمود برهم طوری تجزیه کنید که (الف) هردومؤلفه با هم برابر باشند، (ب) یکی از مؤلفه‌ها دوبرابر دیگری باشد.

۱۲ـ تندی ۱۵ m/s را به‌دو مؤلفه طوری تجزیه کنیدکه جهت یکی ازآنها باجهت این تندی زاویهٔ ۳۰° بسازد و بزرگی آن نصف بزرگی مؤلفهٔ دیگرباشد.

۱۳ـ نقطه‌ای مادی در امتداد خط $y=2x+1$ با سرعت ۱۰ m/s حرکت می‌کند. مؤلفه‌های تندی را به‌موازات محورهای x و y تعیین کنید.

۱۴- نقطه‌ای مادی درامتداد یك خط مستقیم ازنقطهٔ $A\,\big|^{1}_{0}$ به‌نقطهٔ $B\,\big|^{6}_{12}$ درمدت ۲ ثانیه می‌رسد. تندی متوسط میان این دو نقطه و مؤلفه‌های موازی بـا محورها را پیدا کنید.

۱۵- نقطه‌ای مادی دایره‌ای به‌مرکز O وشعاع ۱۸ m را درمدت ۱۲ ثانیه می‌پیماید. سرعت ایـن نقطهٔ مادی را به‌فرض‌آنکه یکنواخت باشد پیدا کنید. اگـر این نقطهٔ مادی در لحظهٔ $t=0$ از نقطهٔ A بگذرد، مؤلفه‌های تندی را به‌موازات با OA و عمود برآن به‌ترتیب در لحظه‌های $t=3$، $t=4$، $t=8$ و $t=11$ ثانیه پیدا کنید.

۱۶- نقطه‌ای مادی، دایره‌ای به‌شعاع ۴۰ m را درمـدت ۸ ثانیه بـا سرعت یکنواخت می‌پیماید. تندی آن را درهرلحظه پیدا کنید. نیز جهت وبزرگی تندی متوسط را در مدتی که (الف) یك ربع دور دایره می‌زند، (ب) نیم دور دایره می‌زند، (پ) یـك دور کامل می‌زند، تعیین کنید.

۱۷- نقطه‌ای مادی دریك صفحه طوری حرکت می‌کندکه مختصات x و y آن درلحظهٔ t ثانیه به‌ترتیب $2t$ و t^2 متر است. مسیرایـن نقطه را از لحظهٔ $t=0$ تـا $t=4$ ثانیه رسم کنید. مؤلفه‌های تندی متوسط این نقطـه را به‌موازات محورها، (الف) از $t=1$ تا $t=2$، (ب) از $t=1$ تا $t=3$، و (پ) از $t=0$ تا $t=4$، رسم کنید.

۱۸- نقطه‌ای مادی در یك صفحه طوری حرکت می‌کندکه مختصات x و y آن‌درلحظهٔ t ثانیه به‌ترتیب $2t$ و t^2 متر است. نمودارهای مسافت-زمان را برای‌حرکتهایی‌که به‌موازات محورهای x و y انجام می‌گیرند از $t=0$ تا $t=5$ رسم‌کنید وازروی آنها، مؤلفه‌هـای تندی را به موازات این محورهـا در لحظه‌های $t=2$ و $t=3$ استنتاج کنید. نیز برایند تندی را دراین لحظه‌ها پیدا کنید.

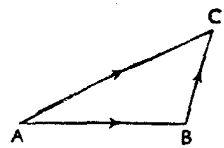
۱۹- گلوله‌ای درهوا پرتاب می‌شود وطوری حرکت می‌کندکه مختصات x و y آن‌در لحظهٔ t ثانیه به تـرتیب $15t$ و $10t-5t^2$ برحسب متر است. مسیرگلوله را از $t=0$ تا $t=2$ رسم کنید. مؤلفه‌های تندی متوسط را به‌موازات محورها در ایـن فاصله‌های زمانی پیدا کنید.

نیزتندی اولیهٔ گلوله ولحظه‌ای راکه گلـوله به‌موازات محور xهـا حرکت می‌کند پیدا کنید.

۲۰- تعیین کنیدکه درمسئلهٔ ۱۹ درچه‌لحظه‌هایی مختصات y گلوله برابر ۳/۲ m است، وبزرگی وجهت تندی را دراین لحظه‌ها تعیین کنید.

۲۳.۱. مثلث تندیها

اگر یك نقطهٔ مادی، در یك لحظه، تندیهایی داشته باشدکه به‌ترتیب با اضلاع AB و BC مثلثی نشان داده شوند، تندی برایندی خواهد داشت که با AC نشان داده می‌شود.



شکل ۱-۲۲

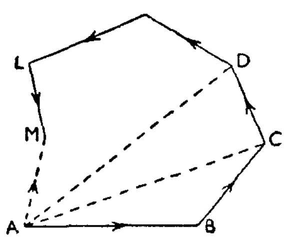
این قاعده را می‌توان بیدرنگ از قانون جمع‌برداری، یا از متوازی‌الاضلاع تندیها نتیجه گرفت. برایند $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ (شکل ۱-۲۲)، بردار مجموع آنها، یعنی $\overrightarrow{AC}$ است. می‌نویسیم

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$$

$\overrightarrow{AC}$ را می‌توان با رسم $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ دریك مقیاس، یا با محاسبه، تعیین کرد.

۲۴.۱. چندضلعی تندیها

اگر یك نقطهٔ مادی، در یك لحظه، تندیهایی داشته باشد که به ترتیب با اضلاع AB ، BC ، CD ، ... و LM یك‌چندضلعی نشان داده شوند، تندی برایندی خواهد داشت که با AM نشان داده می‌شود.



شکل ۱-۲۳

زیرا، با استفاده از مثلث تندیها، برایند AB و BC (شکل ۱-۲۳) با AC نمایش

داده می‌شود. برایند AC و CD با AD نمایش داده می‌شود، و همین‌طور برای‌تندیهای دیگر؛ بنابراین برایند همهٔ این تندیها با AM نمایش داده خواهد شد.

آشکار است که این برایند، حتی اگر اضلاع چندضلعی دریک صفحه واقع نباشند، نیز موجود است. می‌نویسیم

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\ \dots\ +\overrightarrow{LM}=\overrightarrow{AM}$$

$\overrightarrow{AM}$ رامی‌توان بارسم اضلاع چندضلعی ABCD ... LM دریک مقیاس مشترک، تعیین کرد.

۲۵۰۱. اگریک نقطهٔ مادی دارای چند تندی باشد، می‌توان از راه دیگری نیز برایند آنها را به‌دست آورد. نخست هریک از تندیها را برروی دو محور OX و OY که با هم‌زاویهٔ قائمه می‌سازند تجزیه می‌کنیم. سپس مؤلفه‌ها را در امتداد هریک از این جهتها با یکدیگر جمع می‌کنیم وتندی‌کل را در امتداد OX و نیز در امتداد OY به‌دست می‌آوریم. سپس از ترکیب این دو مؤلفه که برهم عمودند، تندی‌کل را تعیین می‌کنیم.

مثال: نقطه‌ای مادی دارای تندیهایی برابر ۲، $۴\sqrt{۲}$، ۶ و ۸ واحد است که به‌ترتیب با جهت معینی زاویه‌های °۳۰، °۴۵، °۶۰ و °۱۲۰ می‌سازند. بزرگی وجهت‌برایند آنها را تعیین کنید.

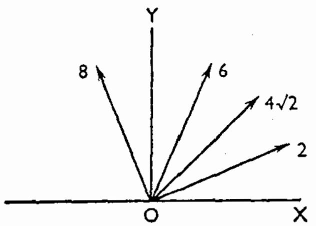
حل: فرض می‌کنیم OX (شکل ۱-۲۴) جهت مفروض باشد، و OY عمود برآن. مؤلفه‌ها در امتداد OX عبارتند از:

$$۲\ cos\ ۳۰^\circ \quad ،\quad ۴\sqrt{۲}\ cos\ ۴۵^\circ \quad ،\quad ۶\ cos\ ۶۰^\circ \quad ،\quad ۸\ cos\ ۱۲۰^\circ$$

یا

$$\sqrt{۳} \quad ،\quad ۴ \quad ،\quad ۳ \quad ،\quad -۴$$

و مجموع آنها برابر است با $۳+\sqrt{۳}$.



شکل ۱-۲۴

مؤلفه‌ها در امتداد OY عبارتند از:

$$۸ \sin ۱۲۰^\circ \text{ ، } ۶ \sin ۶۰^\circ \text{ ، } ۴\sqrt{۲} \sin ۴۵^\circ \text{ ، } ۲ \sin ۳۰^\circ$$

یا

$$۴\sqrt{۳} \quad ، \quad ۳\sqrt{۳} \quad ، \quad ۴ \quad ، \quad ۱$$

و مجموع آنها برابر است با $۵+۷\sqrt{۳}$.

بنابراین تندیهای مفروض برابرند با تندی $۳+\sqrt{۳}$ در امتداد OX و تندی $۵+۷\sqrt{۳}$ در امتداد OY.

اگر V برایند باشد،

$$V^۲=(۳+\sqrt{۳})^۲+(۵+۷\sqrt{۳})^۲$$
$$=۳۱۵/۶۳۲$$

$$\therefore \quad V=۱۷/۷۶ \quad \text{واحد}$$

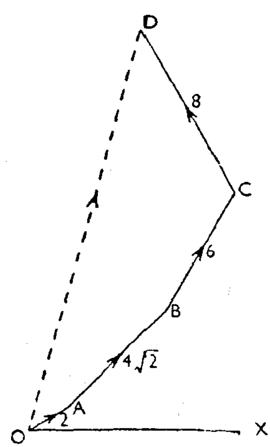
اگر θ زاویه‌ای باشدکه این برایند با OX می‌سازد،

$$tg\theta=\frac{۵+۷\sqrt{۳}}{۳+\sqrt{۳}}=\frac{۱۷/۱۲۴}{۴/۷۳۲}=۳/۶۱۸$$

$$\therefore \quad \theta=۷۴/۵^\circ \quad \text{تقریباً}$$

تندی برایند را می‌توان باافزودن بردارهای تندی، و با استفاده ازچندضلعی تندیها نیزمعین کرد.

OA (شکل ۱-۲۵) را بـه طول ۲ واحد و با زاویـهٔ ۳۰° نسبت بـه OX رسم می‌کنیم. به‌همین ترتیب AB ، BC و CD را به‌ترتیب برای نمایش $۴\sqrt{۲}$، ۶ و



شکل ۱-۲۵

۸ رسم می‌کنیم. دراین صورت $\overrightarrow{OD}$ تندی برایند را نشان خواهد داد.
بااندازه‌گیری نتیجه می‌شود که $OD = ۱۷/۸$ و زاویهٔ $DOX = ۷۴°$.

۲۶.۱. مثال ۱: قایقی با تندی $۸\ km/h$ عرض رودخانه‌ای را به طور مستقیم می‌پیماید. آب رودخانه با تندی $۶\ km/h$ جریان دارد. جهت و بزرگی تندی قایق را به‌دست آورید. اگرعرض رودخانه $۱۰۰\ m$ باشد، قایق چقدر دورتر از نقطهٔ روبه‌روی نقطهٔ عزیمت به‌ساحل روبه‌رو خواهد رسید.

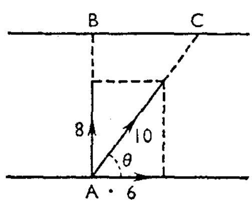
حل: مؤلفه‌های تندی‌قایق $۸\ km/h$ و $۶\ km/h$ هستند که باهم زاویهٔ قائمه‌می‌سازند.
اگر v برایند تندی قایق باشد،

$$v = \sqrt{۸^۲ + ۶^۲} = \sqrt{۶۴ + ۳۶} = ۱۰$$

اگر θ (شکل ۱-۲۶) زاویهٔ امتداد تندی برایند با ساحل باشد،

$$\theta = \mathrm{Arc}\,cos\frac{۳}{۵} \quad \text{یا} \quad cos\theta = \frac{۳}{۵}$$

اگر A نقطهٔ‌عزیمت قایق و B نقطهٔ روبه‌روی آن باشد، قایق درنقطهٔ C به‌ساحل روبه‌رو می‌رسد،



شکل ۱-۲۶

اما

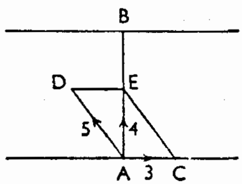
$$\frac{BC}{BA} = cotg\theta = \frac{۳}{۴}$$

$$\therefore \quad BC = \frac{۳}{۴}BA = \frac{۳}{۴} \times ۱۰۰ = ۷۵\ m$$

یعنی قایق ۷۵ متر دورتر از نقطهٔ مقابل A به‌ساحل می‌رسد.

مثال۲ : در یك رودخانه که عرض‌آن $100\,m$ است، آب با تندی $3\,km/h$ جریان‌دارد. اگرشخصی بتواند با تندی $5\,km/h$ در ایـن رودخانه قایقرانی‌کند و بخواهـد عرض رودخانه را مستقیم طی کند، درچه‌جهتی باید قایق براند. ایـن مسافت را درچه مدتی طی خواهدکرد؟

حل : فرض می‌کنیم کـه A (شکل ۱-۲۷) نقطهٔ عزیمت و AB عمود برساحل باشد. آب‌باتندی $3\,km/h$ درجهت AC جریان‌دارد وقایقران باید باتندی $5\,km/h$ در جهت AB قایق خـود را براند. اگر AC تندی جریان آب در مقیاس معینی



شکل ۱-۲۷

باشد، و AD تندی قایقران درهمـان مقیـاس باشد، در ایـن‌صورت قطـر AE متوازی‌الاضلاعی‌که دو ضلع‌مجاورآن AC و AD است باید برAB منطبق شود. اما $AE=\sqrt{5^2-3^2}=4$ پس $\cos DAE=\frac{4}{5}$، یعنی قایقران بایددرجهتی حرکت‌کندکـه‌کسینوس زاویهٔ میان امتداد حرکت و امتداد عمـود برساحل $\frac{4}{5}$ باشد.

تندی در امتداد AB برابر$4\,km/h$ و عرض رودخانه $100\,m$ است. بنابراین مدت زمان لازم برای پیمودن عرض رودخانه:

$$t=\frac{100}{4000}\,h=\frac{60\times 60}{40}\,s=90\,s \qquad \therefore$$

تمرین ۴.۱

۱- قایقی بـا تندی $5\,km/h$ عرض رودخانه را به‌طـور مستقیم می‌پیماید. سرعت آب $3\,km/h$ است. اگـر عرض رودخانه $120\,m$ باشد، قایـق چقدر دورتر از نقطهٔ روبه‌روی نقطهٔ عزیمت به‌ساحل روبه‌رو می‌رسد.

۲- قایقرانی می‌خواهد عرض رودخانه‌ای را به‌طـور مستقیم طی‌کند. اگـر او بتواند با تندیی سه برابر تندی جریان آب قایقرانی‌کند، چه انحرافی نسبت به‌جریان آب‌داشته

باشد تا بتواند عرض رودخانه را به‌طور مستقیم طی کند؟

۳ ـ دوچرخه‌سواری با تندی ۲۰ km/h حرکت می‌کند. سنگی را با تندی ۱۰ m/s در چه جهتی پرتاب کند تا برایند حرکت عمود برامتداد حرکت دوچرخه‌سوار باشد؟

۴ ـ درمحلی که باد باتندی ۲ km/h به‌طرف مشرق می‌وزد، قایقی لنگر انداخته است. دو ناوچه نیز هریك به‌فاصلهٔ ۵۰ متر از قایق، یکی در شمال آن، و دیگری در مشرق آن، لنگر انداخته‌اند. دو شناگر همقدرت که هرکدام قادرند درآب آرام با سرعت ۴ km/h شنا کنند در یك لحظه از قایق خارج می‌شوند و هرکدام به‌طرف یکی از ناوچه‌ها شنا می‌کندو پس از رسیدن به‌آن برمی‌گردد. کدام‌یك زودتر به‌قایق برمی‌گردد، وچقدر زودتر؟

۵ ـ نقطه‌ای تحت اثر تندیهای ۸، ۹و ۱۳ واحد بیحرکت مانده است. زاویه‌ای که میان جهتهای دو تندی کوچکتر وجود دارد چقدر است؟

۶ ـ نقطه‌ای دارای تندیهای ۳، ۵، ۴ و ۶ است که جهتهای آنها به‌ترتیب به‌طرف مشرق، شمال‌شرقی، شمال، وشمال غربی است. بزرگی وجهت برایند تندی را پیدا کنید.

۷ ـ نقطه‌ای دارای دو تندی متساوی در دو جهت معین است. اگر بزرگی یکی از دو تندی نصف شود، زاویه‌ای که جهت برایند باجهت سرعت دیگرمی‌سازد نیز نصف می‌شود. ثابت کنید که زاویهٔ میان دو تندی $120°$ است.

۸ ـ نقطه‌ای دارای تندیهای u_1 و u_2 است. زاویهٔ میان این دوتندی چنان است که $V = u_1$ و V برایند این دوتندی است. ثابت کنید که اگر u_1 دو برابر شود، برایند حاصل از دو تندی بر u_2 عمود خواهد شد.

۹ ـ شخصی که درآب آرام می‌تواند با سرعت ۵ km/h حرکت کند، می‌خواهدبه‌طرف دیگر رودخانه‌ای که عرض آن ۱۵۰ m است و با تندی ۸ km/h جریان دارد برود. با رسم نمودارجهتی را نشان دهیدکه این شخص با شناکردن درآن جهت، (الف) هرچه زودتر به‌نقطهٔ مقابل می‌رسد، (ب) با پیمودن کمترین فاصله به‌نقطهٔ مقابل می‌رسد. در هرحالت چه مدت طول می‌کشد و چه مسافتی باید طی کند تا به‌ساحل مقابل برسد؟

۱۰ـ یك کشتی در مسیری که در جهت $30°$ شمال‌شرقی است با سرعت ۱۸ km/h حرکت می‌کند. درعرشهٔ این کشتی، شخصی با سرعت ۱ m/s در امتدادی که عمود برجهت حرکت کشتی است عقب وجلو می‌رود. جهتهای واقعی راکه این شخص‌در آن جهتها حرکت می‌کند پیدا کنید.

۱۱ـ نقطه‌ای مادی دارای تندیهای ۴، ۹ و ۱۲متر برثانیه است که دو به‌دو با هم زاویهٔ

120° می‌سازند. برایند تندی‌را حساب کنید و با رسم چندضلعی تندیها درستی نتیجه را تحقیق کنید.

۱۲- تندیهای نقطه‌ای مادی با $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ نشان داده می‌شوند، که AB قطری از دایره و O نقطه‌ای دلخواه واقع برمحیط دایره است. ثابت کنیدکه برایند تندی با قطری که از O می گذرد نمایش داده می‌شود.

۱۳- نقطه‌ای مادی دارای تندیهای ۳ ، ۴ و ۸ کیلومتر درساعت است که به‌ترتیب با محور xها زاویه‌های 0°، 90° و 120° می‌سازند. بزرگی وجهت برایند تندیها را تعیین کنید.

۱۴- نقطه‌ای مادی دارای تندیهایی است که می‌توان بزرگی و جهت آنها را به‌وسیلهٔ اضلاع AB و AF و قطر AD یك شش‌ضلعی منتظم ABCDEF به‌ضلع v نمایش داد. برایند تندی را پیدا کنید.
چه تندی اضافی به‌موازات EA برنقطهٔ مادی‌وارد شود تا نقطه احتمالاً به‌موازات AC حرکت کند.

۱۵- نقطه‌ای مادی دارای سرعتهای v ، $2v$ ، $3\sqrt{3}v$ و $4v$ است که به‌ترتیب با محور xها زاویه‌های 0° ، 60° ، 150° و 300° می‌سازند. بزرگی و جهت برایند تندی را تعیین کنید.

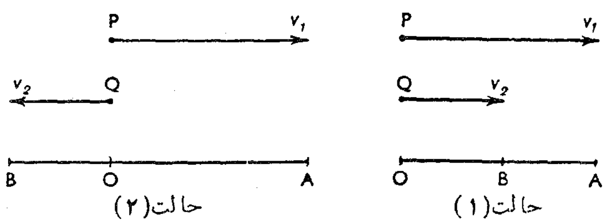
۱.۰۷۲. تندی نسبی

همهٔ تندیها، همچنان‌که همیشه تأکید کرده‌ایم، تندیهایی نسبی هستند، یعنی نسبت به‌یك دستگاه مقایسه‌ای بیان می‌شوند. تندیهایی که با آنها بیشتر آشنا هستیم، تندیهایی هستند که نسبت به زمین بیان می‌شوند. وقتی‌که قطاری با تندی ۴۰ km/h در جهت معینی حرکت‌می کند، منظورمان ۴۰ km/h نسبت به‌زمین‌است. زمین، خود، نسبت به‌خورشید حرکت می‌کند، بنابراین تندی قطار نسبت به خورشید مقداری است‌که ممکن است آن را از روی تندی قطار نسبت به زمین و تندی زمین نسبت به‌خورشید استنتاج کرد. اکنون آن را توضیح می‌دهیم.

اگرتندی یك نقطهٔ مادی مانند P نسبت به‌نقطهٔ مفروضی‌مانند O ، یا نسبت به‌یك دستگاه مقایسه‌ای که به O پیوسته است، برابر $\vec{v}_1$ باشد، و تندی Q نسبت به O برابر $\vec{v}_2$ باشد، در این صورت تندی P نسبت به Q تفاضل برداری $\vec{v}_1$ و $\vec{v}_2$ است، یعنی $\vec{v}_1 - \vec{v}_2$.
تندی Q نسبت به P بردار $\vec{v}_2 - \vec{v}_1$ است.

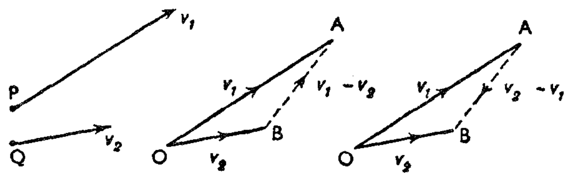
البته اگر P و Q در جهتهای متوازی حرکت کنند، تندی P نسبت به Q موازی با تندیهای P و Q است و بزرگی آن برابر است با تفاضل جبری دو تندی. پس اگر دو قطار P و Q روی ریلهای متوازی، به‌ترتیب با سرعتهای ۴۰ km/h و ۳۵ km/h، حرکت کنند سرعت قطار P نسبت به Q ، در صورتی‌که دو قطار دریك جهت حرکت کنند، برابر km/h (۴۰-۳۵)، یعنی ۵ km/h است؛ و درصورتی‌که دو قطار در خلاف جهت یکدیگر حرکت کنند برابر km/h (۴۰+۳۵) یعنی ۷۵ km/h است.

اگر $\overrightarrow{OA}$ (شکل ۱-۲۸)، به بزرگی v_1 ، و $\overrightarrow{OB}$ ، به بزرگی v_2 معرف تندیهای P و Q باشند، تندی P نسبت به Q به وسیلهٔ $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$ که برابر $\overrightarrow{BA}$ است نمایش داده می‌شود و این بردار، درصورتی‌که دوقطار دریك جهت حرکت کنند، به‌بزرگی v_1-v_2 و درصورت دیگر به‌بزرگی v_1+v_2 است. جهت این بردار با جهت P یکسان است. به همین ترتیب تندی Q نسبت به P به‌وسیلهٔ $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$ نمایش داده می‌شود.



شکل ۱-۲۸

به‌طورکلی اگر تندیهای P و Q متوازی نباشند، همان روش ترسیم را برای تفاضل برداری تندیهای آنها ممکن است به‌کار برد. از نقطهٔ دلخواهی مانند O (شکل ۱-۲۹)، بردار $\overrightarrow{OA}$ را به‌بزرگی v_1 و به‌موازات تندی P ، و ازهمان نقطه بردار $\overrightarrow{OB}$



شکل ۱-۲۹

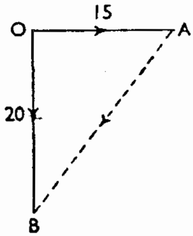
را به‌بزرگی v_2 و به‌موازات تندی Q رسم می‌کنیم.

چون
$$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}$$
است، داریم
$$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{v_1}-\overrightarrow{v_2}$$
بنابراین $\overrightarrow{BA}$ از نظر بزرگی و جهت، تندی P را نسبت به Q مشخص می‌کند. به‌طریق مشابه، تندی Q نسبت به P به‌طورکامل با $\overrightarrow{AB}$ مشخص می‌شود.

پس تندی نسبی هر دونقطهٔ متحرك دلخواه را که تندیهای معینی دارند، می‌توان با رسم یك مثلث برداری ساده مانند مثلث OAB در شکل ۱-۲۹ پیدا کرد. ضلع رابط BA یا AB تندی نسبی را مشخص می‌کند.

به‌همین‌طریق، اگر $\overrightarrow{v_2}$، تندی Q نسبت به O، و $\overrightarrow{v_1}-\overrightarrow{v_2}$، تندی P نسبت به Q، معلوم باشند، $\overrightarrow{v_1}$، یعنی تندی P نسبت به O را می‌توان با رسم همان مثلث برداری OAB تعیین کرد. فقط کافی است که $\overrightarrow{OB}$ را برای نمایش $\overrightarrow{v_2}$ و $\overrightarrow{BA}$ را برای نمایش تندی Q نسبت به P رسم کرد. در این صورت $\overrightarrow{OA}$ معرف $\overrightarrow{v_1}$ خواهد بود.

۲۸۰۱. مثال۱: یك کشتی با سرعت ۱۵ km/h به طرف مشرق می‌رود، و کشتی دیگر با سرعت ۲۰ km/h به‌طرف جنوب می‌رود. تندی کشتی دوم را نسبت به کشتی اول به‌دست آورید.



شکل ۱-۳۰

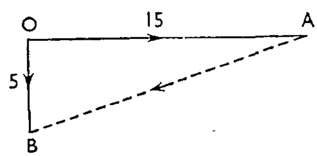
حل: اگر $\overrightarrow{OA}$ تندی کشتی اول و $\overrightarrow{OB}$ تندی کشتی دوم را نشان دهد، ضلع AB تندی کشتی دوم را نسبت به کشتی اول نشان می‌دهد.

داریم
$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}$$
$$=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$$
نیز
$$AB^۲=AO^۲+OB^۲=۲۰^۲+۱۵^۲=۶۲۵$$
$$\therefore \quad AB=۲۵$$
بنابراین تندی نسبی $۲۵\,km/h$ است و جهت آن درجهت جنوب غربی است و با امتداد جنوب زاویه‌ای می‌سازد که تانژانت آن برابر $\frac{۳}{۴}$ است.

مثال۲: در روی ریلهای افقی، قطاری با تندی $۵۴\,km/h$ حرکت می‌کند و باران با تندی $۵\,m/s$ می‌بارد. جهت ظاهری و تندی باران را برای شخصی که در این قطار نشسته است تعیین کنید.

حل : تندی قطار $۱۵\,m/s = (۳۶۰۰)/(۵۴\times۱۰۰۰)$ است.

فرض‌کنیم $\overrightarrow{OB}$ (شکل ۱-۳۱) تندی واقعی باران را نشان دهد. OA را به‌طور افقی رسم می‌کنیم تا بزرگی و جهت حرکت قطار را درهمان مقیاس نشان دهد. مثلث OAB را کامل می‌کنیم.



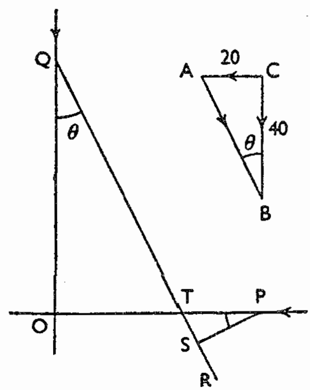
شکل ۱-۳۱

در این صورت $\overrightarrow{AB}$ تندی نسبی یا ظاهری باران است.
$$tg\,ABO=\frac{AO}{OB}=\frac{۱۵}{۵}=۳$$
بزرگی تندی نسبی برابر است با
$$\sqrt{(۱۵^۲+۵^۲)}=۵\sqrt{(۹+۱)}=۵\sqrt{۱۰}\,m/s$$

مثال۳: دریك لحظهٔ معین دواتومبیل به‌فاصلهٔ ۳۰۰ متر و ۴۰۰ متر از نقطهٔ O هستند. نقطهٔ O محل تلاقی جاده‌هایی است که این دواتومبیل درآنها حرکت می‌کنند و به‌نقطهٔ O نزدیك می‌شوند. این جاده‌ها برهم عمودند. سرعت اتومبیلها یکنواخت

و به‌ترتیب $۲۰\ m/s$ و $۴۰\ m/s$ است. پس از چه مدت فاصلهٔ دواتومبیل به‌کمترین مقدار می‌رسد و این کمترین فاصله چقدر است؟

حل: فرض می‌کنیم که P و Q (شکل ۱-۳۲) اوضاع این دو اتومبیل در لحظهٔ معین باشند. $OP = ۳۰۰\ m$ ، $OQ = ۴۰۰\ m$. چون اوضاع نسبی بعدی آنها مورد نیاز است، فرض می‌کنیم که P ساکن بماند و Q با تندی نسبی‌اش نسبت به P حرکت کند.



شکل ۱-۳۲

$\overrightarrow{CA}$ را به‌طول ۲۰ واحد، برای نمایش تندی P ، و $\overrightarrow{CB}$ را به طول ۴۰واحد، برای نمایش تندی Q رسم می‌کنیم. در این صورت $\overrightarrow{AB}$ نمایش تندی Qنسبت به P است.

$$AB^۲ = ۲۰^۲ + ۴۰^۲ = ۲۰۰۰$$

QR را به‌موازات AB رسم می‌کنیم؛ دراین صورت QR نمایش مسیرQ نسبت به P است، و بنابراین PS نمایش کوتاهترین فاصلهٔ میان P و Q است.

اما $$OT = ۴۰۰\, tg\, \theta\ m = ۲۰۰\ m$$

$\therefore$ $$TP = ۱۰۰\ m$$

و چون $$PS = TP \cos \theta$$

$$= ۱۰۰ \times \frac{۲}{\sqrt{۵}}\ m = ۴۰\sqrt{۵}\ m$$

نتیجه می‌شود که کوتاهترین فاصلهٔ میان دو اتومبیل برابر است با $۴۰\sqrt{۵}$ متر. نیز مدتی که طول می‌کشد تا به‌این وضع برسند مساوی است با

$$\frac{QS}{\text{P تندی Q نسبت به}}$$

اما

$$QS = QT + TS = \left(\frac{۴۰۰}{\cos\theta} + ۱۰۰ \sin\theta\right) m$$

$$= (۲۰۰\sqrt{۵} + ۲۰\sqrt{۵})\ m$$

$$= ۲۲۰\sqrt{۵}\ m$$

نیز سرعت Q نسبت به P مساوی است با $\sqrt{۲۰۰۰}\ m/s = ۲۰\sqrt{۵}\ m/s$.
پس مدت زمان لازم برای آنکه دواتومبیل به‌کمترین فاصله از یکدیگر برسند برابر است با

$$\frac{۲۲۰\sqrt{۵}\ m}{۲۰\sqrt{۵}\ m/s} = ۱۱\ s$$

تمرین ۵۰۱

۱ ـ دوقطار بر دومسیرمستقیم که باهم زاویهٔ قائمه می‌سازند حرکت می‌کنند. تندی یکی ۴۰ km/h و تندی دیگری ۵۰ km/h است. تندی قطار دوم را نسبت به قطار اول به‌دست آورید.

۲ ـ دربالای اتومبیل روبازی که با تندی ۲۴ km/h حرکت می‌کند، مسافری نشسته است و احساس می‌کند که باد با تندی ۱۶ km/h درجهتی عمود برجهت حرکت اتومبیل به‌صورت او می‌وزد. تندی باد را تعیین کنید.

۳ ـ قطره‌های باران با تندی ۳ m/s برزمین‌می‌افتند. اگرباد شمال با تندی ۱۸ km/h بوزد، به‌نظر شخصی که با تندی ۶ km/h به‌طرف شمال حرکت می‌کند، جهت سقوط قطره‌های باران کدام‌است؟ این‌قطره‌ها با چه تندیی به‌چتراو برخورد می‌کنند؟

۴ ـ کشتی‌بخاری باسرعت ۱۶ km/h به‌طرف شمال می‌رود، وباد باسرعت ۳۲ km/h به‌طرف شمال شرقی می‌وزد. به نظر شخصی که درکشتی نشسته است، دود به‌کدام سمت می‌رود؟

۵ ـ کشتیی با تندی ۲۴ km/h به‌طرف مشرق، وکشتی دیگری با تندی ۳۲ km/h به‌طرف شمال می‌رود. تندی کشتی دوم را نسبت به‌کشتی اول به‌دست آورید.

۶ ـ دوکشتی درجهتهای مخالف و به‌موازات یکدیگر به‌ترتیب با تندیهای ۳۲ و ۴۰ کیلومتر در ساعت درحرکتند. هنگامی که درست مقابل یکدیگرند، یعنی هنگامی که خطی که برامتداد حرکت و بروسط یك کشتی عمود است، بر امتداد حرکت و بر وسط کشتی دیگر نیز عمود است، یکی ازکشتیها به طرف کشتی دیگر تیراندازی می‌کند. اگر تندی گلوله هنگام خروج از دهانهٔ تفنگ درحال سکون $800\ m/s$ باشد، تعیین کنید که درچه جهتی باید تیراندازی شود تا کشتی دیگر مورد اصابت قرارا گیرد. از اثر نیروی جاذبه صرف‌نظر شود.

۷ ـ دوجاده در نقطهٔ P برهم‌عمودند. شخص A دریکی‌ازجاده‌ها با تندی $4/5\ km/h$ حرکت می‌کند و مشاهده می‌کند که شخص B در جادهٔ دیگر با تندی $6\ km/h$ حرکت می‌کند. در این هنگام شخص A در ۵۰ متری P و شخص B در P است. تندی A را نسبت به B تعیین کنید. نیز تعیین کنید که پس از پیمودن چه مسافتی به‌وسیلهٔ A ، این دوشخص به‌نزدیکترین فاصله از یکدیگر می‌رسند.

۸ ـ در دوجاده که با هم زاویهٔ ۶۰ درجه می‌سازند، دو اتومبیل به‌طرف محل تقاطع دوجاده نزدیك می‌شوند. تندی آنها به‌ترتیب $20\ km/h$ و $32\ km/h$ است. دریك لحظه فاصلهٔ آنها از محل تقاطع به‌ترتیب ۷۰ متر و ۴۰ متر است. تندی نسبی و فاصلهٔ آنها را از محل تقاطع، هنگامی که دو اتومبیل کمترین فاصله را از یکدیگر دارند، تعیین کنید.

۹ ـ دریك کشتی که به‌طرف مغرب با تندی $28\ km/h$ می‌رود ناظری نشسته است. به‌نظر این شخص، کشتی دیگری که در ۲ کیلومتری جنوب کشتی اوست با تندی $21\ km/h$ به‌طرف شمال شرقی می‌رود. بزرگی و جهت واقعی تندی کشتی دوم را پیدا کنید. وقتی که دوکشتی به‌کمترین فاصله از یکدیگر می‌رسند، فاصلهٔ آنها از یکدیگر چقدر است؟

۱۰ـ یك کشتی با تندی $20\ km/h$ به طرف شمال شرقی می‌رود، و کشتی دیگر، به‌نظر مسافری که درکشتی‌اول نشسته است، با تندی $10\ km/h$ به‌سمت مشرق می‌رود. جهت و بزرگی واقعی تندی کشتی دوم را تعیین کنید.

۱۱ـ دوجادهٔ مستقیم با هم زاویهٔ 60° می‌سازند. درست درلحظه‌ای که یك اتومبیل در تقاطع دوجاده است و با تندی $56\ km/h$ وارد یکی از جاده‌ها می‌شود، اتومبیل دیگر به‌فاصلهٔ ۸ کیلومتری از تقاطع با تندی $48\ km/h$ به‌طرف تقاطع درحرکت است. با رسم نمودار (یا با محاسبه) تندی نسبی اتومبیل اول را نسبت به‌اتومبیل دیگر تعیین کنید. نیز معلوم کنید که اتومبیلها پس از چه مدت به‌کمترین فاصله از

یکدیگر می‌رسند.

۱۲- دو کشتی با تندیهای ۱۶ و ۲۰ کیلومتردرساعت در امتداد دوخط متوازی وهمجهت حرکت می‌کنند. وقتی که این دو کشتی درست مقابل یکدیگر رسیدند و به‌فاصلهٔ ۳ کیلومتر از یکدیگر بودند، کشتی سریعتر 30° مسیر خود را به‌طرف کشتی دیگر منحرف می‌کند و با همان تندی به‌حرکت خود ادامه می‌دهد. معلوم کنید که این دو کشتی چقدر به‌هم نزدیك خواهند شد.

۱۳- کشتی A با تندی ۱۲ km/h به‌طرف جنوب و کشتی B با تندی ۱۶ km/h به‌طرف مشرق می‌رود. فاصلهٔ AB برابر ۲۰۰۰ m است، و AB که در سمت مغرب جهت حرکت A است با جهت حرکت A زاویهٔ 30° می‌سازد. تندی نسبی آنها را پیدا کنید، و حساب کنید که پس از چه مدت به‌نزدیکترین فاصله از یکدیگر می‌رسند؟

۱۴- شخصی می‌تواند با تندی ۳ km/h درآب آرام شنا کند. در رودخانه‌ای به عرض ۳۰۰ m آب با تندی ۱/۵ km/h جریان دارد. چقدر طول می‌کشد تا این‌شخص از یك طرف این رودخانه درست به‌طرف مقابل برسد؟

۱۵- ناوشکنی با تندی ۴۸ km/h درجهت 30° شمال شرقی‌حرکت می‌کند و درساعت ۱۲ ، کشتی بخاری را مشاهده می‌کند که با تندی ۲۰ km/h به طرف شمال می‌رود. درساعت ۱۲.۴۵ ، ناوشکن با کشتی برخورد می‌کند. فاصلهٔ ناوشکن را با کشتی درساعت ۱۲ و زاویه‌ای که امتداد ناوشکن ـ کشتی درساعت ۱۲ با امتداد شمال می‌سازد، پیدا کنید.

۱۶- در جریان آبی که با تندی ۵ km/h به سمت جنوب شرقی است، کشتی بخاری با تندی ۲۰ km/h از روی قطب‌نما به‌طرف شمال می‌راند. تندی و مسیر واقعی این کشتی را پیدا کنید. اگر این کشتی بخواهد مسیر واقعی‌اش به‌طرف شمال باشد درچه جهتی باید براند؟ در این صورت تندی واقعی کشتی درمسیرش به‌طرف شمال چقدر است؟

۱۷- رزمناوی که می‌تواند با تندی ۴۸ km/h براند، پیامی دریافت می‌کند که کشتی دشمن در ۴۶ کیلومتری و درجهت 30° شمال شرقی‌از رزمناو، با تندی ۳۲ km/h به‌طرف شمال می‌راند. (الف) به‌طریقهٔ رسم نمودار، (ب) با محاسبه، نشان دهید که این رزمناو پس از دوساعت به‌کشتی دشمن اصابت می‌کند.

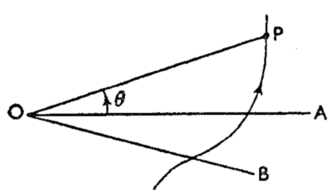
۱۸- در دوجادهٔ مستقیم و عمود برهم، دواتومبیل A و B با تندیهای ثابت ۳۰ km/h و ۴۰ km/h به‌طرف نقطهٔ C ، محل تقاطع جاده‌ها، حرکت می‌کنند. اگر در یك

لحظه AC برابر km ۰/۷۵ ، و BC برابر km ۱/۲ باشد، کوتاهترین فاصلهٔ دو اتومبیل را پس ازآن لحظه پیدا کنید.

۲۹.۱. تندی زاویه‌ای

اگر یك نقطهٔ مادی P دریك صفحه حرکت کند، و اگر O نقطهٔ ثابتی دراین صفحه باشد و OA خط مستقیم ثابتی باشد که از O می‌گذرد، در این صورت برحسب تعریف، تندی زاویه‌ای P نسبت به O عبارت است از سرعت افزایش اندازهٔ زاویهٔ AOP.

باید به‌یاد داشت که اگر خط ثابت دیگری مانند OB (شکل ۱-۳۳) که از O می‌گذرد، به‌جای OA به‌عنوان خط مبدأ پذیرفته شود، تندی زاویه‌ای نسبت به O عبارت از سرعت افزایش اندازهٔ زاویهٔ BOP خواهد بود. البته چون زاویهٔ AOB ثابت است، سرعت افزایش اندازهٔ زاویهٔ BOP با سرعت افزایش اندازهٔ زاویهٔ AOP برابر خواهد بود. بنابراین تندی زاویه‌ای نسبت به O مستقل از خطی است که به عنوان خط مبدأ از O می‌گذرد.



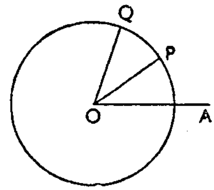
شکل ۱-۳۳

تندی زاویه‌ای برحسب رادیان برثانیه سنجیده می‌شود. تندی زاویه‌ای هنگامی‌که یکنواخت است برحسب عدهٔ رادیانهای زاویه‌ای که OP در یك ثانیه می‌چرخد اندازه‌گیری می‌شود. هنگامی‌که تندی زاویه‌ای متغیر است، اندازهٔ آن در هرلحظه برحسب زاویه‌ای سنجیده می‌شودکه، اگر درآن لحظه تندی یکنواخت می‌شد، OP در مدت یك ثانیه آن زاویه را می‌چرخید.

اگر در یك لحظه θ زاویهٔ میان OP و OA باشد، تندی زاویه‌ای برابر $d\theta/dt$ یا $\dot{\theta}$ است.

۳۰.۱ اگر یك نقطهٔ مادی P، دایره‌ای به‌مرکز O را با سرعت یکنواخت طی کند، تندی زاویه‌ای آن نسبت به O برابر با سرعت آن بخش بر شعاع دایره خواهد بود.

فرض کنیم P (شکل ۱-۳۴) وضع نقطهٔ مادی در یك لحظهٔ دلخواه باشد، و Q وضع همان نقطه دریك ثانیهٔ بعد باشد. تندی زاویه‌ای عبارت از عدهٔ رادیانهای زاویهٔ POQ است.



شکل ۱-۳۴

اما عدهٔ رادیانهای موجود در زاویهٔ POQ برابر است با OP/قوس PQ . قوس PQ دریك ثانیه پیموده شده است، و بنابراین برابر است با سرعت v .

پس اگر ω تندی زاویه‌ای، و r شعاع دایره باشد،

$$\omega = \frac{v}{r}$$

$$\therefore \qquad v = r\omega$$

اگر n عدهٔ دورهایی باشد که P دریك ثانیه به‌دور دایره می‌زند، تندی زاویه‌ای $2\pi n$ رادیان برثانیه خواهد بود.

۳۱.۱ جسمی را درنظر می‌گیریم که ابعاد مشخصی دارد (که متمایز از یك نقطهٔ مادی است) و فرض می‌کنیم که حول محور CD بچرخد (شکل ۱-۳۵). فرض خواهیم کرد که جسم صلب است، یعنی شکل و اندازهٔ آن تغییر نمی‌کند.

می‌توان تندی زاویه‌ای جسم را به‌طریق زیر پیدا کرد.

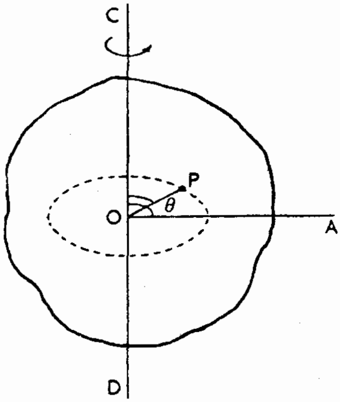
فرض می‌کنیم که P نقطهٔ مادی دلخواهی از جسم باشد، و PO عمود برمحور دوران CD رسم شده است. وقتی که جسم دوران می‌کند، نقطهٔ P دایره‌ای به‌شعاع PO حول محور می‌پیماید. تندی زاویه‌ای P نسبت به O همان تندی زاویه‌ای جسم است.

اگر OA عمود بر CD رسم شود و درفضا ثابت فرض شود، تندی زاویه‌ای برابر سرعت افزایش اندازهٔ زاویهٔ AOP خواهد بود.

آشکار است که در یك جسم صلب، این تندی زاویه‌ای برای تمام نقاط آن یکسان است و به وضع و جای نقطهٔ مادی درجسم بستگی نـدارد. البته سرعت خطی v هرنقطهٔ مادی P بستگی به‌فاصلهٔ آن نقطه از محور دارد و به‌این طریق حساب می‌شود:

$$v = \omega r$$

که درآن ω تندی زاویه‌ای، و $r = OP$ برابر فاصلهٔ P از محور دوران است.

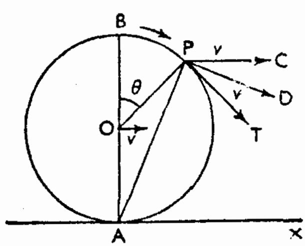


شکل ۱-۳۵

سرعت دوران جسم غالباً برحسب دور در دقیقه بیان می‌شود.

۰۳۲۰۱ می‌خواهیم تندی نقطهٔ دلخواهی از یك قرص مدور قائمی را کـه، بدون لغزش، به‌طور یکنواخت در یك صفحهٔ افقی می‌غلتد پیدا کنیم.

فرض‌کنیم که O (شکل ۱-۳۶) مرکز و r شعاع قرص، و A نقطهٔ تماس قرص بـا صفحهٔ AX ، و v تندیی باشد که O با آن تندی حرکت می‌کند.



شکل ۱-۳۶

وقتی‌که مرکز به‌طور یکنواخت در یك خط مستقیم حرکت می‌کند، قرص به‌طور یکنواخت حول مرکز می‌چرخد. و چون هر نقطه از لبهٔ قرص به‌نوبهٔ خود با زمین تماس پیدا می‌کند، آشکار است که درضمن‌آنکه مرکزمسافتی برابرمحیط قرص به‌جلو پیش می‌رود، هر نقطه نیز محیط قرص را نسبت به‌مرکز طی می‌کند. پس تندی هر نقطه از لبه نسبت به‌مرکز از نظر بزرگی برابر است با تندی v مرکز.

بنابراین تندی زاویه‌ای (ω) قرص نسبت به‌مرکزش برابر v/r است.

اگر B بالاترین نقطهٔ قرص باشد، تندی آن نسبت به O برابر v و به‌طور افقی و درهمان جهت تندی O است.

$$\therefore \qquad \text{تندی } B = v+v=2v$$

تندی A نسبت به O نیز v است، اما درجهت مخالف تندی O است.

$$\therefore \qquad \text{تندی } A = v-v=0$$

یعنی نقطهٔ A در یك آن ساکن است.

اگر P نقطه‌ای از لبهٔ قرص‌باشد به‌طوری‌که $BOP=\theta$ باشد، تندی برایند P را با ترکیب تندی آن نسبت به O ، و v در امتداد مماس PT ، وتندی O ، یعنی v به‌طور افقی و در امتداد PC ، به‌دست می‌آوریم.

$\angle CPT=\theta$ است، و اگر V تندی برایند P باشد،

$$V^2=v^2+v^2+2v^2\cos\theta$$
$$=2v^2(1+\cos\theta)=4v^2\cos^2\frac{\theta}{2}$$

$$\therefore \qquad V=2v\cos\frac{\theta}{2}$$

چون دو مؤلفه با هم برابرند، جهت این تندی در امتداد PD نیمساز زاویهٔ CPT است. اگر AP را رسم کنیم، مشاهده خواهیم کرد که

$$\angle OPA=\frac{\theta}{2}$$

نیز
$$\angle TPD=\frac{\theta}{2}$$

$$\therefore \qquad \angle APD=\angle OPT=\text{زاویه قائمه}$$

پس هرنقطه از لبهٔ قرص طوری حرکت می‌کند‌که امتداد حرکت آن برخط واصل

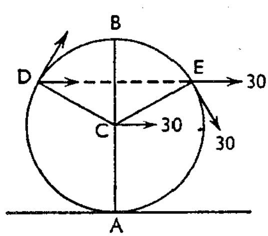
میان آن نقطه و نقطهٔ A ، یعنی پایینترین نقطهٔ قرص، عمود باشد.
نیز $AP = ۲r \cos\theta/۲$ و بنابراین تندی زاویه‌ای P نسبت به A برابر است با

$$\text{تندی زاویه‌ای قرص} = \frac{۲v \cos\frac{\theta}{۲}}{۲r \cos\frac{\theta}{۲}} = \frac{v}{r}$$

چون قرص‌صلب است، همهٔ نقطه‌های واقع بر AP باید دارای همان تندی زاویه‌ای نسبت به A باشند، و به این نتیجه می‌رسیم که همهٔ نقطه‌های قـرص در این لحظه با تندی زاویه‌ای ω نسبت به A می‌چرخند و این برابر است با تندی قرص نسبت به‌مرکزش.
نقطهٔ A مرکز آنی دوران نامیده می‌شود.

۳۳۰۱. مثال۱: چرخی به‌قطر ۱/۸ متر با تندی ۱۰۸ km/h حـرکت می‌کند. تندی و جهت حرکت هریك از دونقطهٔ چرخ را که به‌ارتفاع ۱/۳۵ m از زمین‌واقع است تعیین کنید.

حل: فـرض می‌کنیم C (شکل ۱ـ۳۷) مرکز چرخ، A نقطهٔ تماس آن بـا زمین، B بالاترین نقطه، و D و E نقطه‌هایی به‌ارتفاع ۱/۳۵ m از زمین باشند. درایـن صورت، زاویهٔ $BCE = ۶۰^\circ$ است. تندی E مرکب از تندی آن نسبت به C ، یعنی ۳۰ m/s عمود بر CE به‌طرف پایین، وتندی C ، یعنی ۳۰ m/s به‌طور افقی است. این دو تندی با هم زاویهٔ ۶۰° می‌سازند، وتنـدی برایند V نیمساز زاویهٔ میان آنهاست، یعنی با امتداد افقی زاویهٔ ۳۰° می‌سازد و در زیرخط افقی است.



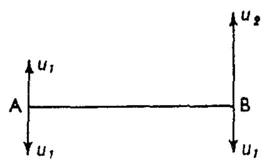
شکل ۱ـ۳۷

نیز $V=\sqrt{۳۰^۲+۳۰^۲+۲(۳۰)^۲ \cos ۶۰^\circ}=۳۰\sqrt{۳}\,\mathrm{m/s}$

مؤلفه‌های تندی D عبارتند از ۳۰ m/s به‌طور افقی و ۳۰ m/s عمود بر CD و به‌طرف بالا. برایند همان‌طورکه برای E پیدا کردیم $۳۰\sqrt{۳}$ m/s است، اما با امتداد افقی زاویهٔ ۳۰° می‌سازد و امتداد آن به‌طرف بالای خط افقی است.

مثال ۲: توضیح دهیدکه چگونه می‌توان تندی زاویه‌ای خطی راکه دو نقطه با تندیهای معلوم را به‌هم وصل می‌کند پیداکرد.

حل : فرض می‌کنیم‌که A و B (شکل ۱-۳۸) دونقطهٔ مفروض باشند. آشکار است‌که هیچ‌یك از مؤلفه‌های تندی A و B که به‌موازات AB هستند برجهت AB تأثیری ندارند، اما‌مؤلفه‌های‌عمود بر AB جهت AB راتغییر می‌دهند،مگراینکه این مؤلفه‌ها برابر و همجهت باشند.



شکل ۱-۳۸

بنابراین برای‌آنکه تندی زاویه‌ای AB را تعیین کنیم مطابق‌روش زیرعمل‌می‌کنیم: تندیهای A و B را درامتداد AB و درامتدادعمود بر AB تجزیه می‌کنیم. فرض می‌کنیم $u_۱$ و $u_۲$ به‌ترتیب مؤلفه‌های عمود بر AB درنقطه‌های A و Bباشند. باهریك از این دوتندی، تندیی برابربایکی ازآنها و درجهت مخالف، مثلاً تندی $u_۱$، ترکیب می‌کنیم.

در این صورت A به‌حال سکون درمی‌آید و B دارای تندیی‌برابر $u_۲-u_۱$ عمود بر AB می‌شود،

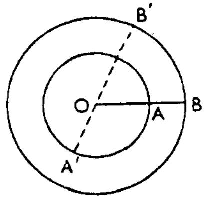
$$\therefore \qquad \text{تندی زاویه‌ای AB} = \frac{u_۲-u_۱}{AB}$$

این فقط یك تندی زاویه‌ای لحظه‌ای است، زیرا وقتی‌که جهت AB تغییرکند، مؤلفه‌های عمود بر AB تغییرخواهندکرد و بنابراین طول AB تغییر می‌کند.

مثال ۳: دوگلولهٔ کوچك A و B درجهت عقربه‌های ساعت در شیارهای هم‌مرکزی که

شعاع آنها به‌ترتیب $20\ cm$ و $30\ cm$ است حرکت می‌کنند. تندی A درشیار خودش $20\ cm/s$ و تندی B درشیارخودش $90\ cm/s$ است. دریك لحظهٔ معین دو گلوله به‌فاصلهٔ $10\ cm$ از یکدیگر قرار گرفته‌اند. چه مدت طول می‌کشد تا فاصلهٔ این دو گلوله $50\ cm$ شود؟

حل: فرض می‌کنیم O (شکل ۱-۳۹) مرکزمشترك شیارها باشد. گلوله‌ها فقط هنگامی می‌توانند به‌فاصلهٔ $10\ cm$ ازیکدیگر باشندکه برروی قطر مشترك و دریك طرف مرکز، مثلاً درنقطه‌های A و B ، باشند. این گلوله‌ها هنگامی به‌فاصلهٔ $50\ cm$ ازیکدیگرندکه برروی قطرمشترك اما در دوطرف مرکز، مثلاً در نقاط A' و B'



شکل ۱-۳۹

باشند، درآن صورت B به‌اندازهٔ $180°$ بیشتر از A طی‌کرده است.
توجه به‌تندی زاویه‌ای گلوله‌ها ساده‌تر از توجه به‌سرعت خطی آنهاست.
چون سرعت A برابر $20\ cm/s$ است، $360°$ یا 2π رادیان را در $2\pi \times \frac{20}{20}$ یعنی 2π ثانیه طی خواهدکرد. پس تندی زاویه‌ای آن‌یك‌رادیان برثانیه است.
B زاویهٔ $360°$ را در $2\pi \times \frac{6}{18}$ یعنی $2\pi/3$ ثانیه طی خواهدکرد. بنابراین تندی زاویه‌ای آن ۳ رادیان برثانیه است.

$\therefore$ تندی زاویه‌ای B نسبت به A برابر ۲ رادیان برثانیه است.

$\therefore$ مدتی‌که طول می‌کشد تا B زاویه‌ای برابر $180°$ یا π رادیان طی‌کند $\pi/2$ ثانیه است.

$\therefore$ پس از $\pi/2$ یا $1/57$ ثانیه به‌فاصلهٔ $50\ cm$ ازیکدیگرخواهند بود.

تمرین ۶.۱

۱- چرخی در هردقیقه ۳۰۰ دور حول مرکز خودش می‌چرخد. تندی زاویه‌ای هریك از نقاط چرخ را تعیین‌کنید. نیز سرعت نقطه‌ای ازچرخ راکه به‌فاصلهٔ $2\ cm$ از مرکز

چرخ قرار دارد تعیین کنید.

۲ـ نقطه‌ای با سرعت یکنواخت برمحیط دایره‌ای حرکت می‌کند. ثابت کنید که تندی زاویه‌ای آن نسبت به‌هریك از نقاط واقع برمحیط دایره مقداری است ثابت.

۳ـ ترنی با سرعت $۶۴\ km/h$ حرکت می‌کند. قطر یکی از چرخهای لوکوموتیو آن برابر $۱/۵\ m$ است. تندیهای دونقطه‌ای از این‌چرخ را که به‌ارتفاع ۱/۲متر از زمین واقعند تعیین کنید.

۴ـ چرخ طیاری به‌قطر $۷۵\ cm$ در هردقیقه ۴۸۰ دور می‌زند. جسمی که با زاویهٔ قائمه نسبت به‌صفحهٔ این چرخ حرکت می‌کند برلبهٔ خارجی این چرخ علامتی می‌گذارد. این علامت با لبهٔ چرخ زاویهٔ °۶۰ می‌سازد. سرعت جسم را تعیین کنید.

۵ـ تندی انتهای عقربهٔ ساعت‌شمار را با تندی انتهای عقربهٔ دقیقه‌شمار مقایسه کنید. طول این دوعقربه به‌ترتیب $۲\ cm$ و $۳\ cm$ است.

۶ـ چرخی به‌قطر $۲/۴\ m$ با تندی $۶\ m/s$ روی زمین می‌غلتد. تندی زاویه‌ای چرخ وبزرگی و جهت تندیهای دونقطهٔ واقع در دو انتهای قطر افقی چرخ را تعیین کنید.

۷ـ چرخهای دوچرخه‌ای به‌قطر $۷۶\ cm$ هستند. طول هریك از رکابها $۱۹\ cm$ است. دوچرخه راطوری ساخته‌اندکه وقتی که‌چرخها دو دور می‌زنند رکاب یك دورمی‌زند. تندی واقعی انتهای رکاب را درهریك ازحالتهای زیرتعیین کنید: (الف) وقتی که در بالاترین نقطه است، (ب) وقتی که درپایینترین نقطه است. دوچرخه با تندی $۱۶\ km/h$ حرکت می‌کند. همین مسئله را با این فرض که دو دور رکاب مطابق با یك دور چرخ است حل کنید.

۸ـ حلقهٔ مدوری در مسیر مستقیمی به‌طور یکنواخت درصفحهٔ خودش حرکت می‌کند. و یك نقطه از حلقه به‌طور یکنواخت به‌دور حلقه می‌گردد. تندی واقعی نقطه را هنگامی که خط واصل میان مرکز حلقه وآن نقطه باجهت حرکت حلقه زاویهٔ (الف) °۹۰، (ب) °۴۵، (پ) °۰ می‌سازدتعیین کنید. (یادآوری: دانستن هیچ گونه رابطه‌ای بین تندی حلقه وتندی نقطه ضروری نیست).

۹ـ چرخ دوچرخه‌ای $۷۰\ cm$ قطر و رکاب آن $۱۷/۵\ cm$ طول دارد. اگرهردور رکاب مطابق با سه دور چرخ باشد و سرعت دوچرخه $۲۴\ km/h$ باشد، تندی هریك از دو رکاب را هنگامی که بالای رکاب با امتداد قائم زاویه‌ای برابر θ ودرجهت جلو می‌سازد، تعیین کنید.

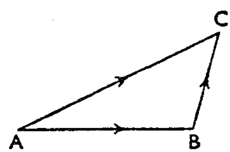
۲

شتاب

۱.۲ تغییر تندی

چون تندی هم دارای بزرگی‌است وهم دارای جهت، هرکدام از اینها را تغییردهیم،تندی تغییرخواهدکرد.

پس، فرض می‌کنیم AB (شکل ۲-۱) تندی یك نقطهٔ مادی را در یك لحظهٔ معین نشان دهد، و AC تندی آن نقطه درلحظهٔ بعد باشد. دراین‌صورت برطبق مثلث تندیها، می‌دانیم‌که BC ، هم از نظر جهت و هم از نظر بزرگی، تغییر تندی را در فاصلهٔ زمانی موردنظر نشان می‌دهد.



شکل ۲-۱

اگر $AC=AB$ باشد، دراین‌صورت سرعت ثابت‌باقی‌می‌ماند، اما درتندی تغییری حاصل می‌شودکه با BC نشان داده می‌شود. درحرکت مستقیم‌الخط فقط باید به‌تغییرات سرعت توجه کرد، اما وقتی‌که مسیر به‌صورت منحنی است باید توجه‌کردکه جهت تندی دائماً تغییر می‌کند، هرچند ممکن است سرعت ثابت باقی بماند. این‌حالت دربخش بعدی مورد توجه قرارخواهدگرفت.

۲.۲ شتاب

این اصطلاح برای نشان دادن میزان تغییر سرعت به‌کار می‌رود. شتاب یك‌کمیت برداری است، و ممکن است یکنواخت یا متغیر باشد. اگر یك نقطهٔ مادی چنان حرکت کند که

در زمانهای مساوی، و فوق‌العاده کوچك، تغییرات تنـدی همجهت و بزرگی آنهـا مساوی یکدیگر باشند، شتاب را یکنواخت می‌گویند. تغییر تندی در هرواحـد زمان، بزرگی شتاب را نشان می‌دهد.

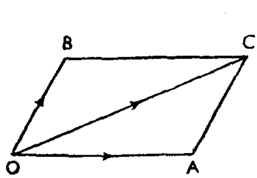
اگر شتاب یکنواخت باشد، نقطهٔ مادی باید مسیری مستقیم یا سهمی طی کند(بعداً بند ۱۲.۶ . را ببینید).

۳.۲. وقتی‌که در زمانهای مساوی تغییرات تندی از نظـر بزرگی برابر نباشند، یـا جهت آنها یکسان نباشد، شتاب را متغیر گوییم. وقتی‌که شتاب متغیر باشد، شتاب در هرلحظه، عبارت از تغییر تندیی خواهد بودکه اگرشتاب ازنظربزرگی و جهت در واحد زمان بعدی ثابت‌می‌ماند، درآن فاصلهٔ زمانی روی می‌داد. مسیرنقطهٔ مادی ممکن‌است یك‌خط‌مستقیم باشد، اما به‌طور کلی هر نوع منحنی می‌تواند باشد.

۴.۲. بزرگی واحد شتاب، شتاب نقطه‌ای مادی است‌که چنان حرکت‌کندکه تندی‌اش در هرواحـد زمان به‌اندازهٔ واحد تندی تغییر کند، مثـلاً یك‌متر در ثانیه در ثانیه یـا یك‌متر برمجذور ثانیه که غالباً به‌صورت $1\ \mathrm{m/s^2}$ یا $1\ \mathrm{ms^{-2}}$ نوشته می‌شود.

۵.۲. متوازی‌الاضلاع شتابها

اگر یك نقطهٔ مادی دارای دو شتاب باشد که از نظر بزرگی وجهت با خطوط مستقیم OA و OB نمایش داده‌می‌شوند، دارای شتاب برایندی‌خواهدبودکه با OC قطرمتوازی‌الاضلاع OACB نمایش داده می‌شود.



شکل ۲-۲

این قضیه را می‌توان از قانون جمـع برداری یا از متوازی‌الاضـلاع تندیها نتیجه گرفت. بنابراین شتابها رامی‌توان، مانند تندیها، ترکیب یا تجزیه کرد، و قضیه‌هایی‌مانند مثلث تندیها و چندضلعی تندیها برای شتابها نیزصادق است.

۶.۲. شتاب نسبی

اگر $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ (شکل ۲-۳) شتابهای دونقطهٔ مادی P و Q دریك لحظهٔ معین باشند، شتاب نسبی یکی ازآنها نسبت به‌دیگری، تفاضل برداری $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ است.

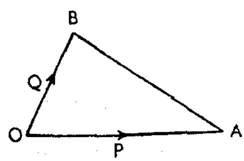
شتاب P نسبت به Q برابر است با

$$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$$

و شتاب Q نسبت به P برابر است با

$$\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AB}$$

بنابراین شتاب نسبی را نیز می‌توان به‌همان طریقی که تندی نسبی را پیداکردیم با رسم مثلث OAB تعیین کرد.



شکل ۲-۳

اگر دونقطهٔ مادی دارای شتابهایی باشندکه ازنظربزرگی با هم برابرباشند وجهت آنها یکسان باشد، شتاب نسبی آنها برابر صفر است و حرکت نسبی آنها طوری است که مثل‌اینکه یکی ازآنها شتابی ندارد.

این موضوع ما را قادر می‌سازدکه مسئلهٔحرکت اجسامی‌راکه دارای شتاب‌مشترکی هستند با حذف آن شتاب ساده‌ترکنیم.

باید توجه داشت‌که یك نقطهٔ مادی در سکون لحظه‌ای ممکن است دارای شتاب باشد، و نیز دو نقطهٔ مادی‌که تندیهای آنها درهرلحظه با هم برابر ومتوازی است (یعنی تندی نسبی ندارند) ممکن است شتاب نسبی نسبت به‌یکدیگر داشته باشند.

حرکت مستقیم‌الخط

۷.۲. اکنون حالتی را درنظرمی‌گیریم که نقطهٔ مادی با شتاب یکنواخت در یك مسیر مستقیم حرکت می‌کند. اگرتندی افزایش یابد، می‌گویندکه شتاب مثبت است؛ اگر تندی کاهش یابد، می‌گویندکه شتاب منفی است.

۸.۲. حرکت با شتاب یکنواخت

اگریك نقطهٔ مادی که در امتداد یك خط مستقیم حرکت می‌کند، درآغاز، یعنی در لحظهٔ $t=0$، دارای تندی v_0 باشد، تندی آن، v، درلحظهٔ معین بعدی t به‌این طریق‌به‌دست می‌آید.

$$v=v_0+t \text{ افزایش تندی در مدت‌زمان }$$

اگر شتاب یکنواخت و مساوی a باشد، افزایش تندی در مدت زمان t برابر است با at و بنابراین

$$v=v_0+at \qquad (۱)$$

از این گذشته، اگر x مسافتی باشدکه نقطهٔ مادی درمدت t از نقطهٔ شروع حرکت پیموده است، در این‌صورت وقتی‌که $t=0$ است $x=0$ خواهد بود و خواهیم داشت

$$x=\text{تندی متوسط}\times t$$

حال اگر شتاب یکنواخت باشد، تندی به میزان ثابتی افزایش می‌یابد و بنابراین تندی متوسط در هر فاصلهٔ زمانی میان 0 و t برابر تندی درلحظهٔ $\frac{t}{2}$ خواهد بود، یعنی برابر است با معدل تندیهای متحرك در شروع و پایان فاصلهٔ زمانی مورد نظر.

$$\therefore \qquad x=\frac{1}{2}(v_0+v)t=\frac{1}{2}(v_0+v_0+at)t$$

$$\therefore \qquad x=v_0t+\frac{1}{2}at^2 \qquad (۲)$$

می‌توان t را به‌طریق زیر از معادله‌های (۱) و (۲) حذف کرد:

$$v^2=v_0^2+2v_0at+a^2t^2=v_0^2+2a\left(v_0t+\frac{1}{2}at^2\right)$$

و از معادلهٔ (۲)،

$$=v_0^2+2ax$$

$$\therefore \qquad v^2=v_0^2+2ax \qquad (۳)$$

این معادله‌ها را می‌توان به‌طریق زیر نیز به‌دست آورد:

با توجه به علامتهای مشتق، داریم

$$\frac{d^2x}{dt^2}=a$$

چون a ثابت است با گرفتن تابع اولیه داریم

$$\frac{dx}{dt}=at+A$$

چون وقتی‌که $t=\circ$ باشد $dx/dt=v_\circ$ است، $A=v_\circ$ خواهد بود.

$$\therefore \qquad \frac{dx}{dt}=v_\circ+at$$

اما $dx/dt=v$ یعنی برابر تندی درلحظهٔ t است، و بنابراین

$$v=v_\circ+at \qquad (۱)$$

با گرفتن تابع اولیه داریم:

$$x=v_\circ t+\frac{۱}{۲}at^{۲}+B$$

و چون وقتی‌که $t=\circ$ است، $x=\circ$ است، $B=\circ$ خواهد بود:

$$\therefore \qquad x=v_\circ t+\frac{۱}{۲}at^{۲} \qquad (۲)$$

این سه‌معادلهٔ (۱) ، (۲) و (۳) معادله‌های حرکت‌نقطه‌ای مادی است که برمسیری مستقیم با شتاب یکنواخت حرکت می‌کند. اگر شتاب متغیر باشد، این معادله‌ها به‌کار نمی‌آیند. باید توجه‌کرد که در هر یك از این‌معادله‌ها a وجود دارد و از چهارکمیت $v_\circ$ ، v ، t ، x ، در هر یك از این‌معادله‌ها، سه‌تای آنها وجود دارد و یکی ازآنها وجود ندارد. این معادله‌ها دارای اهمیت بسیار هستند و باید به یاد سپرده شوند. فقط دوتای ازآنها مستقل از یکدیگرند و از هر دو معادله می‌توان معادلهٔ دیگر را به‌دست آورد. در حل مسائل، معادله‌هایی را انتخاب می‌کنیم که شامل کمیتهایی باشند که به ما داده شده‌اند و نیز شامل کمیت مجهول باشند.

با این همه، گاهی استفاده از معادلهٔ $x=(v_\circ+v)t/۲$ ، که در بالا ضمن اثبات معادلهٔ (۲) به‌آن اشاره کردیم، بسیار مناسب است.

برای یادآوری، این چهار معادله را با هم در اینجا می‌نویسیم:

$$v=v_\circ+at$$

$$x=v_\circ t+\frac{۱}{۲}at^{۲}$$

$$v^{۲}=v_\circ^{۲}+۲ax$$

$$x=\frac{۱}{۲}(v_\circ+v)t$$

مثال۱: قطاری که با شتاب یکنواخت حرکت می‌کند دو ۴۰۰ متر متوالی را به‌ترتیب

در ۲۰ ثانیه و ۳۰ ثانیه می‌پیماید. معلوم کنید که، اگر شتاب همچنان یکنواخت باقی بماند، قطار چه مسافتی خواهد پیمود تا بایستد.

حل : ما نمی‌دانیم که تندی اولیهٔ قطار چقدر بوده است، اما دو مسافت و دو زمان را می‌دانیم. قطار ۴۰۰ متر را در ۲۰ ثانیه می‌پیماید.

$$\therefore \qquad ۴۰۰ = ۲۰v_{\circ} + \frac{۱}{۲}a \times ۴۰۰ \qquad (۱)$$

که در آن $v_{\circ}$ برحسب m/s تندی قطار درشروع ۴۰۰ متر اول است و a برحسب $m/s^{۲}$ شتاب حرکت است.

نیز ۸۰۰ متر را درمدت ۵۰ ثانیه می‌پیماید.

$$\therefore \qquad ۸۰۰ = ۵۰v_{\circ} + \frac{۱}{۲}a \times ۲۵۰۰ \qquad (۲)$$

$$\therefore \qquad ۲v_{\circ} + ۲۰a = ۴۰$$

و

$$۵v_{\circ} + ۱۲۵a = ۸۰$$

که ازآن

$$a = -\frac{۴}{۱۵}\,m/s^{۲}$$

و

$$v_{\circ} = \frac{۶۸}{۳}\,m/s$$

اکنون می‌توانیم مسافت کلی را که قطار پیش از ایستادن می‌پیماید (و شامل دو ۴۰۰ متر نیز هست) حساب کنیم، زیرا اگر آن مسافت برابر x متر باشد،

$$\circ = \left(\frac{۶۸}{۳}\right)^{۲} - \frac{۸}{۱۵}x$$

$$\therefore \qquad x = \frac{۶۸^{۲} \times ۱۵}{۷۲} = ۹۶۳/۳\ m$$

در نتیجه مسافتی که پس از دو ۴۰۰ متر مفروض طی می‌شود $۹۶۳/۳ - ۸۰۰ = ۱۶۳/۳\,m$ است.

توجه- درحالتهایی‌شبیه حالت فوق که درآن مدت زمانهایی را که برای پیمودن مسافتهای پیاپی‌لازم است داده شده، برای مسافت اول معادله‌ای بنویسید و معادلهٔ دوم را

برای مجموع دومسافت بنویسید. اگر ۴۰۰ متربعدی‌را جداگانه درنظرمی گرفتیم، می‌بایستی برای تندی اولیه مقدار دیگری درنظرمی گرفتیم و نمی‌توانستیم همان مقدار را که درشروع ۴۰۰ متر اول داشت منظورکنیم.

مثال۲: قطاری از حـال سکون به‌راه می‌افتد و پس از ۳ دقیقه و پیمودن ۳/۶ کیلومتر متوقف می‌شود. بزرگترین سرعت قطار $۹۰\ \mathrm{km/h}$ بـوده است. شتاب مثبت و شتاب منفی یکنواخت بوده است. مسافتی را کـه قطار با حداکثر سرعت پیموده است تعیین کنید.

حل : باید توجه داشت‌که در مسئله نگفتیم‌که شتاب مثبت برابر شتاب منفی است.
فرض‌کنیم‌که $x_۱$ مسافتی باشدکه با شتاب مثبت $a_۱$ درمدت $t_۱$ طی شده است.
نیز $x_۲$ مسافتی باشدکه با شتاب منفی $a_۲$ درمدت $t_۲$ طی شده است.
و x مسافتی است‌که با سرعت یکنواخت درمدت t طی شده است.
با به‌کار بردن واحدهای‌کیلومتر و ساعت داریم:

$$۹۰=a_۱t_۱ \quad و \quad x_۱=\frac{۱}{۲}a_۱t_۱^۲$$

و به‌همین ترتیب

$$۹۰=a_۲t_۲ \quad و \quad x_۲=۹۰t_۲-\frac{۱}{۲}a_۲t_۲^۲$$

یا

$$=۹۰t_۲-۴۵t_۲$$

$$=۴۵t_۲$$

نیز

$$x=۹۰t$$

$$\therefore \quad x_۱+x+x_۲=۴۵t_۱+۹۰t+۴۵t_۲=۳/۶$$

$$\therefore \quad t_۱+۲t+t_۲=۰/۰۸$$

$$t_۱+t+t_۲=۰/۰۵$$

نیز چون $۳\ \mathrm{mn}=۰/۰۵\ \mathrm{h}$ است

$$\therefore \quad t=۰/۰۳$$

پس مسافتی که با حداکثرسرعت پیموده شده است برابر است با $۹۰\times۰/۰۳\ \mathrm{km}$ یعنی برابر است با ۲/۷ کیلومتر.
معلومات مسئله برای تعیین جداگانهٔ $t_۱$ و $t_۲$ کافی نیست.

مثال۳: قطارسریع‌السیری، باپیمودن $۰/۸\,\mathrm{km}$، سرعتش‌را از $۹۶\,\mathrm{km/h}$ به $۲۴\,\mathrm{km/h}$ می‌رساند. چه مدت ترمز کرده است و چه مسافت دیگری طی خواهد شد تا قطار بایستد.

حل: البته باید فرض‌کرد کـه شتاب منفی ناشی از ترمز، یکنواخت بـوده است. این شتاب منفی را $a\,\mathrm{km/h^2}$ می گیریم.

با استفاده از
$$v^2=v_0^2+۲ax$$
داریم
$$(۲۴)^2=(۹۶)^2+۱/۶a$$
$$\therefore \quad a=-\frac{۹۶^2-۲۴^2}{۱/۶}=-\frac{۱۲۰\times ۷۲}{۱/۶}=-۵۴۰۰$$
با به‌کار بردن
$$v=v_0+at$$
داریم
$$۲۴=۹۶-۵۴۰۰t$$
$$\therefore \quad t=\frac{۷۲}{۵۴۰۰}\mathrm{h}=۴۸\mathrm{s}$$
برای تعیین t' مدت زمانی‌که پس از آن طی می‌شود تا قطار بایستد، داریم
$$۰=۲۴-۵۴۰۰t'$$
$$\therefore \quad t'=\frac{۲۴}{۵۴۰۰}=\frac{۴}{۹۰۰}$$
$$\therefore \quad \text{زمان اضافی}=\frac{۴}{۹۰۰}\mathrm{h}=۱۶\mathrm{s}$$

مثال۴: دوچرخه‌سواری با سرعت $۱۸\,\mathrm{km/h}$ از اتومبیلی‌که درحال شروع به‌حرکت در همان جهت است می گذرد وبا همان سرعت به‌حرکت خود ادامه می‌دهد. اتومبیل به‌مدت ۲۰ ثانیه با شتاب $۰/۴\,\mathrm{m/s^2}$ حرکت می کند وسپس با سرعت یکنواخت به‌حرکت خـود ادامه می‌دهد. معین‌کنید اتـومبیل پس از پیمودن چه مسافتی از شروع حرکت به‌دوچرخه‌سوار خواهد رسید.

حل: مسافتی‌که اتومبیل در ۲۰ ثانیه می‌پیماید به‌این طریق به‌دست می‌آید:
$$x=\frac{۱}{۲}\times\frac{۴}{۱۰}\times ۴۰۰=۸۰\ \mathrm{m}$$
تندی اتومبیل در انتهای این مدت

$$v=\frac{۴}{۱۰}\times ۲۰=۸\,\mathrm{m/s}$$

و مسافتی که دوچرخه‌سوار در این مدت می‌پیماید برابر است با

$$\frac{۱۸۰۰۰}{۳۶۰۰}\times ۲۰=۱۰۰\,\mathrm{m}$$

تندی اتومبیل نسبت به‌دوچرخه

$$۸-۵=۳\,\mathrm{m/s}$$

در نتیجه برای آنکه اتومبیل ۸۰ — ۱۰۰ یعنی ۲۰ متر دیگر را بپیماید $\frac{۲۰}{۳}$ ثانیه طول می‌کشد و در این مدت مسافتی برابر $۵۳/۳\,\mathrm{m}=۸\times\frac{۲۰}{۳}$ خواهد پیمود. یعنی، روی هم رفته، اتومبیل مسافتی برابر $۱۳۳\frac{۱}{۳}\,\mathrm{m}$ طی خواهد کرد تا به‌دوچرخه‌سوار برسد.

تمرین ۱۰۲

۱ـ قطاری ازیك ایستگاه ازحال سکون به‌راه می‌افتد و با شتاب یکنواخت $۱/۲\,\mathrm{m/s^۲}$ حرکت می‌کند. سرعت قطار پس از ۳۰ ثانیه چقدر است، و در این مدت قطار چه مسافتی طی می‌کند؟

۲ـ جسمی از حال سکون با شتاب یکنواخت به‌راه می‌افتد و درمدت ۱۰ ثانیه به سرعت $۱۵\,\mathrm{m/s}$ می‌رسد. شتاب این جسم چقدر بوده است و درمدت ۱۰ ثانیه چه مسافتی طی کرده است؟

۳ـ اتومبیلی که با سرعت $۵۴\,\mathrm{km/h}$ حرکت می‌کند با شتاب منفی یکنواخت پس از ۵ ثانیه متوقف می‌شود. شتاب منفی اتومبیل و نیز مسافتی را که در این مدت طی کرده است پیدا کنید.

۴ـ تندی اولیهٔ جسمی که با شتاب منفی $۲\,\mathrm{m/s^۲}$ حرکت می‌کند $۱۰۰\,\mathrm{m/s}$ است. در چه زمانی تندی جسم صفر می‌شود، و تا آن موقع جسم چه مسافتی طی کرده است؟

۵ـ اتومبیلی ازحال سکون به‌راه می‌افتد و با شتاب یکنواخت حرکت می‌کند. در دهمین ثانیه پس از شروع به حرکت $۹/۵\,\mathrm{m}$ می‌پیماید. شتاب اتومبیل و مسافتی را که اتومبیل درمدت ۵ ثانیه پس از شروع حرکت پیموده است تعیین کنید.

۶ ـ جسمی ۳ ثانیه با شتاب یکنواخت حرکت می‌کند و ۲۷ مترمی‌پیماید، سپس با تندی یکنواخت به‌حرکت خود ادامه می‌دهد و درمدت ۵ ثانیه با این‌حرکت مسافتی برابر $۶۰\,\mathrm{m}$ می‌پیماید. تندی اولیه و شتاب حرکت اتومبیل را پیدا کنید.

۷ ـ اتومبیلی با شتاب یکنواخت سرعتش را از $18\,km/h$ با پیمودن $50\,m$ به $72\,km/h$ می‌رساند. شتاب اتومبیل و نیز سرعت اتومبیل را پس‌از آنکه $25\,m$ از مسافت مذکور را طی‌کرد تعیین کنید.

۸ ـ قطاری در نزدیك شدن به یك ایستگاه، دونیم کیلومتر متوالی را به‌ترتیب در ۱۶ ثانیه و ۲۰ ثانیه می‌پیماید. به‌فرض آنکه شتاب منفی قطار یکنواخت باشد، تعیین کنیدکه قطار پیش از توقف‌کامل چه‌مسافت دیگری خواهد پیمود.

۹ ـ قطاری با شتاب یکنواخت حرکت می‌کند و از «کیلومترنما» های متوالی، به‌ترتیب با تندیهای $10\,km/h$ و $20\,km/h$ می‌گذرد. حساب کنید وقتی‌که قطار به «کیلومترنمای» بعدی می‌رسد تندی آن چقدر است، و مدت زمان لازم برای طی هریك از این دوفاصلهٔ یك‌کیلومتری چقدر است؟

۱۰ـ قطاری از نقطه‌های متوالی A، B و C که هر یك به‌فاصلهٔ دوکیلومتر از نقطهٔ بعدی است عبور می‌کند. اگر برای پیمایش A تا B مدتی برابر ۱۰۰ ثانیه و برای پیمایش B تا C مدتی برابر ۱۵۰ ثانیه لازم باشد، به‌فرض‌آنکه شتاب حرکت درمسیر از A به‌بعد یکنواخت باشد، آن را تعیین‌کنید. نیز حساب‌کنیدکه قطار پس از عبور از C پس از پیمودن چه مسافتی متوقف خواهد شد.

۱۱ـ بر یك مسیر مستقیم، نقطه‌ای مادی با تندی اولیه و شتاب یکنواخت حرکت می‌کند. به‌فرض آنکه در ۶ ثانیهٔ اول $48\,m$ طی‌کند و در ۲ ثانیهٔ بعد $32\,m$ طی کند، درمدت ۱۲ ثانیهٔ اول چه مسافتی طی می‌کند؟ نیز تندی اولیه را تعیین‌کنید.

۱۲ـ نقطه‌ای مادی ازحال سکون شروع به‌حرکت می‌کند و با شتاب یکنواخت پیش می‌رود. در اواسط حرکت، وقتی‌که به‌آن توجه می‌شود، دیده می‌شود که در مدت ۴ ثانیه $12\,m$ و در ۵ ثانیهٔ بعدی $30\,m$ می‌پیماید. تعیین‌کنید: (الف) شتاب؛ (ب) تندی متحرك هنگامی‌که به‌آن توجه شده است؛ (پ) مسافتی‌که ازآن پس پیموده است.

۱۳ـ عمق چاه‌معدنی $675\,m$ است. آسانسوری در $45\,s$ ازته‌چاه بالامی‌آید. ربع اول مسافت را با شتاب مثبت یکنواخت و ربع‌آخرمسافت را با شتاب منفی‌یکنواخت طی‌می‌کند. این دوشتاب از نظر قدرمطلق برابر بوده‌اند. درصورتی‌که اواسط راه را با سرعت یکنواخت طی‌کرده باشد، این سرعت یکنواخت را تعیین‌کنید.

۱۴ـ قطاری ازحال سکون از یك ایستگاه به‌راه می‌افتد و $0/5\,km$ اولیه را با شتاب یکنواخت و $1/5\,km$ بعدی را باحرکت یکنواخت و $0/25\,km$ بقیه را باشتاب منفی یکنواخت طی می‌کند تا به‌ایستگاه دیگر برسد. طول مدت مسافرت ۵ دقیقه

است. شتاب مثبت و شتاب منفی حرکت را به‌دست آورید.

۱۵- برمسیری مستقیم، نقطه‌ای مادی ازحال سکون به‌راه می‌افتد و تا مدتی با شتاب یکنواخت حرکت می‌کند. سپس تا مدت ۱۰ ثانیه با سرعت یکنواخت ۵ m/s به‌حرکت خود ادامه می‌دهد، و سپس با شتاب یکنواخت چنان حرکت می‌کندکه‌پس از مدتی بایستد. اگر از شروع حرکت تا هنگام توقف ۱۶ ثانیه طول کشیده باشد، مسافتی‌که طی می‌شود چقدر است؟ اگر شتاب ابتدایی ۱/۵ m/s^2 باشد، شتاب نهایی راکه به‌منظور توقف به‌دست آورده است پیداکنید.

۱۶- برمسیری مستقیم، جسمی با شتاب یکنواخت فاصله‌های a، b و c را پی‌درپی و در زمانهای متساوی t می‌پیماید. (۱) رابطهٔ میان a، b و c را پیدا کنید. (۲) شتاب حرکت جسم را به‌دست آورید. (۳) سرعت اولیهٔ حرکت جسم را هنگامی که شروع به‌پیمایش فاصلهٔ a می‌کند به‌دست آورید.

۱۷- متحرکی از حال سکون به‌راه می‌افتد و قسمتی از مسیر خود را با شتاب یکنواخت a و بقیهٔ مسیر را با شتاب منفی یکنواخت $2a$ طی می‌کند تا بایستد. درصورتی‌که این مسیر را در t ثانیه پیموده باشد، ثابت‌کنیدکه طول مسیر $h=\frac{1}{3}at^2$ است.

۱۸- متحرکی با شتاب یکنواخت a برمسیری مستقیم حرکت می‌کند. تندی این متحرك وقتی که از نقطهٔ معینی می‌گذرد u است. برهمین مسیر متحرکی دیگر با شتاب $4a/3$ حرکت می‌کند. این متحرك ۳ ثانیه بعداز متحرك اول به‌نقطهٔ مذکور می‌رسد ودراین لحظه تندیش $u/3$ است. پس ازمدتی متحرك دوم خودرابه متحرك اول می‌رساند. دراین لحظه تندی متحرك اول ۸/۱ m/s وتندی متحرك دوم ۹/۳ m/s است. a و u و همچنین فاصلهٔ دو متحرك را در این لحظه از نقطهٔ مذکور پیدا کنید.

۱۹- ترمزهای قطاری قادرندکه شتاب منفی ۱/۲ m/s^2 ایجادکنند. اگرقطار با سرعت ۹۰ km/h به‌ایستگاه نزدیك شود، درچه فاصله‌ای از ایستگاه باید ترمز بگیرد تا درست در ایستگاه متوقف شود؟ اگر در فاصله‌ای برابر نصف فاصلهٔ مذکور ترمز بگیرد، با چه سرعتی به‌ایستگاه می‌رسد؟

۲۰- از دوچرخه‌سوار A که با سرعت ۱۶ km/h حرکت می‌کند دوچرخه‌سوار B که با سرعت ۲۰ km/h حرکت می‌کند سبقت می‌گیرد. در این هنگام دوچرخه‌سوار A با شتاب یکنواخت به‌سرعت خود می‌افزاید. ثابت‌کنید هنگامی به‌دوچرخه‌سوار B می‌رسدکه سرعتش ۲۴ km/h شده باشد. اگر وقتی‌که سرعتش به ۲۲ km/h

می‌رسد، با همان سرعت به‌حرکت‌خود ادامه دهد و پس ازطی ۲۰۰ متربه‌دوچرخه‌سوار B برسد شتاب حرکت اورا تعیین کنید.

۲۱- نقطه‌های P و Q بریك خط مستقیم واقعند. دریك لحظه Q با شتاب یکنواخت $3\,m/s^2$ شروع به‌حرکت می‌کند. در این لحظه P که با شتاب ثابت $2\,m/s^2$ حرکت می‌کند دارای تندیی برابر $10\,m/s$ است و ۱۸ متر از Q عقبتر است. ثابت کنیدکه دوثانیهٔ بعد، P به Q می‌رسد، اما ۱۶ ثانیه پس ازاین واقعه Q خود را به P می‌رساند.

۲۲- آسانسوری با شتاب ثابت a پایین می‌آید. پس از مدتی تندی آسانسور برای چند لحظه ثابت می‌شود و بالاخره آسانسور با شتاب منفی ثابت a متوقف می‌شود. درصورتی که مسافت کل برابر s وزمان کل پایین آمدن برابر t باشد ثابت کنیدکه مدت‌زمانی که آسانسور با سرعت ثابت حرکت می‌کرده است برابر است با

$$\sqrt{t^2-\frac{4s}{a}}$$

۲۳- نقطه‌ای مادی در مسیری مستقیم حرکت می‌کند و در دومین ثانیهٔ حرکت خود مسافتی برابر ۱۶مترو در پنجمین ثانیهٔ حرکت مسافتی برابر ۲۸متر و در یازدهمین ثانیهٔ حرکت مسافتی برابر ۵۲ متر طی می‌کند. ثابت کنیدکه اگرحرکت نقطهٔ‌مادی با شتاب یکنواخت صورت می‌گرفت این مسافتها در آن صدق می‌کرد. نیز تمام مسافتی راکه درمدت ۱۰ ثانیه از شروع حرکت طی می‌شود، تعیین کنید.

۲۴- نقطه‌ای مادی در مسیری مستقیم طوری حرکت می‌کندکه مسافتهای متوالی $12\,m$، $18\,m$ و $42\,m$ را به‌ترتیب در مدت‌زمانهای متوالی ۳ ثانیه، ۲ ثانیه و ۳ ثانیه طی کند. ثابت کنیدکه این مسافتها با مسافتهایی که یك نقطهٔ مادی با شتاب یکنواخت می‌پیماید تطبیق می‌کند.

۲۵- برمسیری مستقیم، متحرکی که با شتاب ثابت a حرکت می‌کند ازیك نقطه با تندی u می‌گذرد. وقتی که تندی متحرك به $5u$ رسید جهت شتاب عوض می‌شود، بدون آنکه بزرگی شتاب تغییرکند. ثابت کنید وقتی که متحرك به‌نقطهٔ عزیمت می‌رسد تندی آن برابر $-7u$ است.

۲۶- قطاری با شتاب‌ثابت‌حرکت می‌کند.ابتدا وانتهای قطار از یك نقطهٔ معین به‌ترتیب با تندیهای u و v می‌گذرند. تعیین کنیدکه درنصف مدت‌زمانی که تمام قطار از این نقطه می‌گذرد، چه نسبتی از طول قطار از این نقطه می‌گذرد.

۲۷- برمسیری مستقیم، متحرکی حرکت می‌کند. در یك لحظه آن را به‌فاصلهٔ a ازیك

نقطهٔ معین مشاهده می‌کنند. n ثانیه بعد آن را به‌فاصلهٔ b از آن نقطهٔ معین مشاهده می‌کنند. $۲n$ ثانیه بعد از نخستین مشاهده، آن را به‌فاصلهٔ c از همان نقطهٔ معین می‌بینند. $۳n$ ثانیه بعد از نخستین مشاهده، آن را به‌فاصلهٔ d از همان نقطهٔ معین می‌بینند.

اگر شتاب حرکت، یکنواخت باشد، ثابت کنید که $d-a=۳(c-b)$ وشتاب حرکت برابر است با

$$\frac{c+a-۲b}{n^۲}$$

تندی اولیه را نیز پیدا کنید.

۲۸- قطاری از A با شتاب یکنواخت $۰/۱۵\,m/s^۲$ شروع به‌حرکت می‌کند. پس از ۲ دقیقه قطار به‌سرعت کامل می‌رسد و یازده دقیقه باآن سرعت به‌حرکت خود ادامه می‌دهد. سپس به‌کمک ترمز شتاب ثابتی برابر $۱/۵\,m/s^۲$ ایجاد می‌کند و براثرآن در نقطهٔ B متوقف می‌شود. فاصلهٔ AB را تعیین کنید.

۲۹- نقطه‌ای مادی مسافتی برابر $۳۰۰\,m$ را با سرعت متوسط $۴\,m/s$ طی می‌کند به‌طوری که ازحالت سکون به‌راه می‌افتد ودرانتهای مسیر به‌حالت سکون درمی‌آید. این متحرك ۱۰ ثانیهٔ اول حرکت را با شتاب یکنواخت و ۲۰ ثانیهٔ آخر حرکت را نیز با شتاب منفی یکنواخت طی می‌کند. بقیهٔ حرکت را با سرعت یکنواخت پیموده است. شتاب مثبت و شتاب منفی حرکت را پیدا کنید.

۳۰- ثابت کنید که اگر یك نقطهٔ مادی با شتاب یکنواخت حرکت کند، مسافتهایی که در زمانهای متساوی متوالی طی می‌کند تشکیل یك تصاعد عددی می‌دهند.

مشاهده شده است که یك نقطهٔ مادی ۳۹۶/۹ متر را در ۳ ثانیه و ۳۹۲/۰ متر را در ۴ ثانیهٔ بعدی و ۲۶۹/۵ متر را در ۵ ثانیهٔ بعدی طی کرده است. ثابت کنید که این معلومات درمورد حرکت متحرکی که با شتاب منفی یکنواخت حرکت می‌کند صدق می‌کند، و نیز مدت زمان لازم را برای‌اینکه این متحرك متوقف شود پیدا کنید.

۳۱- قطاری از حالت سکون به‌راه می‌افتد و ابتدا با شتاب ثابت a حرکت می‌کند. سپس مدتی با سرعت ثابت v حرکت می‌کند وبالاخره باشتاب منفی ثابت a حرکت‌می‌کند تا بایستد. اگرسرعت متوسط برای طی این مسافت $۷v/۸$ باشد، ثابت کنید که‌قطار $\frac{۳}{۴}$ مدت مسافرت را با سرعت ثابت طی‌کرده است. نیز نسبت مسافتی را که با سرعت ثابت طی‌کرده است به‌کل مسافت تعیین کنید.

۳۲- در ریلهای متوازی دو قطار حرکت می‌کنند، وازیکدیگرمی‌گذرند. در هنگام عبور ازیکدیگر اولی با سرعت یکنواخت $60\ km/h$ و دومی با سرعت $15\ km/h$ و شتاب یکنواخت $0/15\ m/s^2$ حرکت می‌کنند. تعیین‌کنید پس از چه مدت وطی چه مسافتی قطار دوم دوباره به‌قطار اول می‌رسد.

۹.۲. شتابِ سقوط اجسام

می‌دانیم وقتی که جسم سنگینی به‌طرف زمین سقوط می‌کند، سرعتش به‌تدریج افزایش می‌یابد، به‌عبارت دیگر حرکت سقوطی با شتاب صورت می‌گیرد.

با آزمایشهای متعدد نشان داده‌اندکه هرگاه جسمی، دور از مقاومت هوا، سقوط کند شتاب حرکت یکنواخت خواهد بود.

نخستین آزمایشها به‌وسیلهٔ گالیله (۱۶۴۲-۱۵۶۴)، که بنیانگذار دینامیك است، انجام‌شد. کارهای گالیله به‌وسیلهٔ نیوتون (۱۷۲۷-۱۶۴۲) دنبال‌شد و بسط یافت. نیوتون قانون جاذبه را مطرح کرد و با آن نه‌تنها حرکت جسم را در نزدیکی سطح زمین، بلکه حرکت ماه را به‌دور زمین، و حرکت زمین و سیاره‌ها را به‌دور خورشید توضیح می‌داد.

شتاب جسمی که آزادانه در نزدیکی سطح زمین سقوط می‌کند (وقتی‌که مقاومت هوا قابل صرف‌نظرکردن است) به شتاب جاذبه معروف است وآن را با g نمایش‌می‌دهند. در یك مکان معین، مقدارآن برای تمام اجسام یکسان است و به‌اندازه و ترکیب شیمیایی جسم بستگی ندارد، اما مقدارآن در ارتفاعهای مختلف و از جایی به‌جای دیگر سطح زمین متفاوت است.

مقدار آن در دستگاه بین‌المللی واحدها (SI) برابر $9/81 m/s^2$ است. مقدار آن دراستوا $9/78\ m/s^2$ است.

(در مثالهای عددی، جز در مواردی‌که مقدار آن داده شده است، آن را در خلاء برابر $9/8\ m/s^2$ یا $980\ cm/s^2$ بگیرید).

۱۰.۲. حرکت قائم براثر جاذبه

وقتی‌که جسمی به‌طور قائم به‌طرف بالا پرتاب می‌شود، جهتی راکه به‌طرف بالاست جهت مثبت اختیار می‌کنیم. در این صورت جسم دارای شتاب منفی g خواهد بود. برای سادگی، فرض می‌کنیم‌که g ثابت باشد، یعنی ازتغییرات g براثر ارتفاع ونیز ازمقاومت هوا صرف‌نظر می‌کنیم. اگر v_0 تندی اولیهٔ پرتاب باشد، دراین‌صورت معادله‌های حرکت با شتاب یکنواخت چنین می‌شود:

$$v = v_{\circ} - gt \qquad (۱)$$

$$x = v_{\circ}t - \frac{۱}{۲}gt^{۲} \qquad (۲)$$

$$v^{۲} = v_{\circ}^{۲} - ۲gx \qquad (۳)$$

۱۱۰۲. بدیهی است که در بالاترین ارتفاع، تندی v باید صفر باشد. بنابراین با قراردادن $v = \circ$ در معادلهٔ (۱) مدت زمان لازم برای آنکه جسم به‌بالاترین ارتفاع برسد تعیین می‌شود.

$$t = \frac{v_{\circ}}{g} \quad \text{یا} \quad \circ = v_{\circ} - gt$$

اگر t بزرگتر از $v_{\circ}/g$ باشد، v منفی است و وقتی‌که t افزایش می‌یابد، v عدداً افزایش می‌یابد، یعنی‌جسم پس ازآنکه به‌بالاترین نقطه رسید شروع به‌پایین آمدن می‌کند و سرعتش افزایش می‌یابد.

با قراردادن $v = \circ$ درمعادلهٔ (۳) بالاترین ارتفاع به‌دست می‌آید:

$$x = \frac{v_{\circ}^{۲}}{۲g} \quad \text{یا} \quad \circ = v_{\circ}^{۲} - ۲gx$$

درنتیجه بالاترین ارتفاع برابر است با $v_{\circ}^{۲}/۲g$

۱۲۰۲. برای‌آنکه تندی جسم را هنگام رسیدن به‌نقطهٔ پرتاب پیدا کنیم در معادلهٔ (۳) می‌نویسیم $x = \circ$. دراین‌صورت

$$v^{۲} = v_{\circ}^{۲}$$

یعنی

$$v = \pm v_{\circ}$$

علامت $+$ تندی جسم را هنگام شروع حرکت، و علامت $-$ تندی آن را در هنگام مراجعت به‌نقطهٔ پرتاب نشان می‌دهد. بزرگی تندی درهنگام رسیدن به‌نقطهٔ پرتاب بابزرگی تندی‌پرتاب برابر است، اماجسم درهنگام بازگشت به‌طرف پایین حرکت‌می‌کند.

۱۳۰۲. مدت پرواز با قراردادن $x = \circ$ در معادلهٔ (۲) به‌دست می‌آید:

$$\circ = v_{\circ}t - \frac{۱}{۲}gt^{۲}$$

$$\therefore \qquad t=۲\frac{v_۰}{g} \;\text{یا}\; t=۰$$

برای ارتفاع $x=۰$ دومقدار برای t به‌دست می‌آید؛ بدیهی است که مقدار $t=۰$ مربوط به‌لحظهٔ پرتاب است، و حال‌آنکه مقدار $t=۲v_۰/g$ زمان لازم برای بازگشت به‌نقطهٔ پرتاب، یعنی مدت پرواز، را به‌دست می‌دهد.

توجه کنید که این مدت دو برابر مدت لازم برای رسیدن به‌بالاترین نقطه است.

برای هرارتفاع معینی (کمتر از بالاترین ارتفاع) در بالای نقطهٔ پرتاب، از معادلهٔ (۲) دو مقدار برای t به‌دست می‌آید، یکی مدت لازم برای‌آنکه جسم در هنگام بالارفتن به‌آن ارتفاع برسد، ودیگری مدت‌لازم برای‌آنکه درراه بازگشت دوباره به‌آن‌ارتفاع برسد.

۱۴.۲. اگرزمان لازم برای‌آنکه جسم به نقطه‌ای در زیر نقطهٔ پرتاب برسد، مورد نیاز باشد، (هنگامی که جسم به‌طرف بالا پرتاب شده است)، لازم نیست که زمان بالا رفتن و پایین آمدن و رسیدن به‌نقطهٔ پرتاب را پیدا کنیم و سپس مدت‌زمانی را که جسم به‌نقطهٔ مذکور می‌رسد تعیین کنیم. بلکه به‌سادگی می‌توانیم فاصلهٔ زیر نقطهٔ پرتاب را که x است با علامت (—) در معادلهٔ (۲) بگذاریم. مثال زیر این مطلب را روشنتر می‌کند.

مثال: جسمی را با تندی ۲۱ m/s به‌طور قائم به‌طرف بالا پرتاب کرده‌ایم. چقدر طول می‌کشد تا به ۲۸۰ متری زیر نقطهٔ پرتاب برسد؟

حل: با استفاده از:
$$x=v_۰t-\frac{۱}{۲}gt^۲$$

و معلومات $x=-۲۸۰$ ، $v_۰=۲۱$ ، $g=۹/۸$ نتیجه می‌شود

$$\therefore \qquad -۲۸۰=۲۱t-۴/۹t^۲$$
$$\therefore \qquad ۴/۹t^۲-۲۱t-۲۸۰=۰$$
$$\therefore \qquad ۷t^۲-۳۰t-۴۰۰=۰$$
$$\therefore \qquad (t-۱۰)(۷t+۴۰)=۰$$
$$\therefore \qquad t=۱۰ \;\text{یا}\; t=-\frac{۴۰}{۷}$$

بدیهی است که جواب منفی غیرممکن است وزمان لازم ۱۰ ثانیه است.

۱۵.۲. اکنون فرض می‌کنیم که جسمی بدون تندی اولیه رها شود و مسافت معینی را

به‌طور قائم سقوط کند. برای‌آنکه تندی این جسم را پس از سقوط مسافتی معین به دست آوریم جهت مثبت را به‌طرف پایین درنظر می‌گیریم. معادلهٔ حرکت چنین است:

$$v^2 = v_0^2 + 2gx$$

چون جسم ازحال سکون شروع به‌حرکت‌کرده است $v_0 = 0$ است، وبنابراین‌تندی جسم پس ازآنکه مسافتی برابر h سقوط‌کرد با رابطهٔ زیرداده می‌شود:

$$v^2 = 2gh$$

$$\therefore \qquad v = \sqrt{2gh}$$

این تندی درست برابر تندیی است‌که باید به‌یك جسم داده شود تا به‌ارتفاع h بالا برود.

تمرین ۲۰۲

۱ـ جسمی به‌طورقائم با تندی $17.5\ \mathrm{m/s}$ به‌طرف بالا پرتاب شده است. (الف)چقدر بالا خواهد رفت؟ (ب) درچه لحظه‌ای در ۱۰متری بالای نقطهٔ پرتاب است؟

۲ـ جسمی به‌طور قائم با تندی $24.5\ \mathrm{m/s}$ به‌طرف بالا پرتاب می‌شود. (الف) در چه لحظه‌ای تندی این‌جسم $4.9\ \mathrm{m/s}$ است؟ (ب) چقدر طول می‌کشد تا به‌نقطهٔ‌پرتاب برسد؟ (پ) درچه لحظه‌ای در ۱۹٫۶ متری بالای نقطهٔ پرتاب است؟

۳ـ جسمی ازحال سکون رها می‌شود. (الف) درمدت ۱۰ ثانیه چه مسافتی طی می‌کند؟ (ب) چقدر طول می‌کشد تـا ۱۰۰متر سقوط کند؟ (پ) تندیش پس از سقوط ۱۰۰متر چقدر است؟

۴ـ از بالای برجی، سنگی به‌طور قائم به‌طرف پایین وبا تندی $40\ \mathrm{m/s}$ پرتاب‌می‌کنیم. ۳ ثانیه طول می‌کشد تا سنگ به‌زمین برسد. ارتفاع برج را تعیین کنید.

۵ـ سنگی بـا تندی $35\ \mathrm{m/s}$ به‌طرف بالا به‌طور قائـم پرتاب شده است. (الف) چقدر طول می‌کشد تا به‌بالاترین نقطه مسیرخود برسد؟ در بازگشت در ۳ ثانیهٔ اول‌حرکت چه مسافتی را طی می‌کند؟

۶ـ جسمی را از بالای برجی از حال سکون رهـا می‌کنیم. در آخرین ثـانیهٔ سقوط $\frac{9}{25}$ تمام مسافت را می‌پیماید. ارتفاع برج را پیدا کنید.

۷ ـ جسمی را از سطح زمین به‌طور قائم و با تندی معینی به طرف بالا پرتاب می‌کنیم. مشاهده می‌شودکـه وقتی که جسم در ارتفاع ۴۰۰متری سطح زمین است، ۸ ثانیه طول می‌کشد تا دوباره به همین نقطه برگردد. جسم با چه تندیی پرتاب شده است

و مدت‌زمان کل پرواز چقدر است؟

۸ - وزنه‌ای از دکل کشتی سقوط می‌کند و مشاهده می‌شود که $\frac{۲}{۵}$ ثانیه طول می‌کشد تا ازعرشهٔ کشتی به ته کشتی برسد. فاصلهٔ عرشه تا ته کشتی $۷/۵\ \mathrm{m}$ است. ارتفاع دکل کشتی را نسبت به‌عرشهٔ کشتی تعیین کنید.

۹ - سنگی درحال سقوط ازمقابل پنجره‌ای که در ۲/۴۵ متری سطح زمین است می‌گذرد و بعد به‌زمین می‌رسد. سنگ از چه ارتفاعی رها شده است؟

۱۰- سنگی را به‌طور قائم با تندی $۲۱\ \mathrm{m/s}$ به‌طرف بالا پرتاب می‌کنند. تعیین کنید وقتی که تندی سنگ $۱۴\ \mathrm{m/s}$ است، سنگ در چه ارتفاعی از نقطهٔ پرتاب است. مدت‌زمان میان دو لحظه‌ای که سنگ دو این ارتفاع است چقدر است؟

۱۱- وزنه‌ای به‌طور قائم به‌طرف پایین پرتاب شده است و مسافت ۱۰۰ متر را درمدت ۴ ثانیه طی کرده است. تحقیق کنید که این وزنه ۳۰ مترآخر را در مدت تقریباً ۰/۷ ثانیه طی کرده است.

۱۲- جسمی به طور قائم به‌طرف بالا پرتاب می‌شود و در همان لحظه جسمی از بالا رها می‌شود تا با جسم اول برخورد کند. اگر در هنگام برخورد، بزرگی تندی هردو جسم برابر باشد، ثابت کنید که یکی از دو جسم مسافتی سه برابر مسافت جسم‌دیگر پیموده است.

۱۳- جسمی با سرعت $۴۲\ \mathrm{m/s}$ به‌طور قائم به‌طرف بالا پرتاب شده است. تعیین کنید پس از ۵ ثانیه جسم درکجاست، وتمام مسافتی که واقعاً طی کرده است چقدر است. اگر درضمن سقوط پس از عبور از نقطهٔ پرتاب به‌داخل چاهی به‌عمق $۷۰\ \mathrm{m}$ بیفتد، معلوم کنید که چه هنگام به ته چاه می‌رسد.

۱۴- جسمی را با تندی اولیهٔ $۲۸\ \mathrm{m/s}$ به‌طور قائم به طرف بالا پرتاب می‌کنیم. تعیین کنید که جسم تا چه ارتفاعی بالا می‌رود. دو ثانیه بعد ازهمان نقطه، جسمی را با تندی $۲۱\ \mathrm{m/s}$ به‌طور قائم به‌طرف بالاپرتاب می‌کنیم. تعیین کنید که درچه زمانی هردو جسم در یک ارتفاع هستند. تندی هر یك از این دو جسم را در این لحظه تعیین کنید.

۱۵- جسمی را به‌طور قائم به‌طرف بالا پرتاب می‌کنند. t ثانیه بعد جسم دیگری را با همان تندی به‌طرف بالا به‌طور قائم پرتاب می‌کنند. تحقیق کنید که وقتی این دو جسم به‌هم می‌رسند، تندی هریك $gt/۲$ است.

۱۶- گلوله‌ای به‌طور قائم با تندی u متر برثانیه به‌طرف بالا پرتاب می‌شود. t ثانیه بعد گلوله‌ای دیگر با همین تندی به‌طور قائم به‌طرف بالا پرتاب می‌شود. ثابت

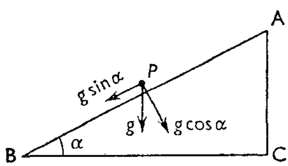
کنید که $\frac{u}{g}+\frac{t}{۲}$ ثانیه بعد از پرتاب اولین گلوله، دو گلوله به‌هم می‌رسند.

۱۷- گلوله‌ای به‌طور قائم با تندی u متر بر ثانیه به‌طرف بالا پرتاب می‌شود. t ثانیه بعد گلوله‌ای دیگر با همین تندی به‌طور قائم به‌طرف بالا پرتاب می‌شود. ثابت کنید که دو گلوله در ارتفاع $(۴u^۲ - g^۲t^۲)/۸g$ متر به‌هم می‌رسند.

۱۸- از لبهٔ بالای برجی به‌ارتفاع ۳۵ متر شخصی سنگی را به‌طور قائم با سرعت $۱۴\,\mathrm{m/s}$ به‌طرف بالا پرتاب می‌کند. تعیین کنید: (الف) ارتفاع بالاترین نقطه‌ای که سنگ به‌آنجا می‌رسد از زمین چقدر است، (ب) سرعت سنگ وقتی که به زمین می‌رسد چقدر است، (پ) مدت زمان کل پرواز چقدر بوده است.

۲.۱۶. حرکت بر سطح صیقلی شیبدار

فرض کنیم که ABC (شکل ۲-۴) مقطع قائم سطح شیبداری باشد که با افق زاویهٔ α می‌سازد، و P نقطه‌ای مادی براین سطح باشد.



شکل ۲-۴

خط AB خط بزرگترین شیب سطح است. شتاب g ، شتاب نقطه‌ای مادی که آزادانه رها می‌شود، به دومؤلفه می‌تواند تجزیه شود:

(الف) شتاب $g\sin\alpha$ درامتداد پایین سطح؛
(ب) شتاب $g\cos\alpha$ درامتداد عمود برسطح.

آشکار است که سطح ازحرکت قائم برخودش جلوگیری می‌کند، بنابراین نقطهٔ مادی مجبور است که به‌طرف پایین سطح با شتاب $g\sin\alpha$ حرکت کند.

اگر l طول سطح AB باشد، سرعتی که نقطهٔ مادی در B به‌دست آورده است از معادلهٔ

$$v^۲ = v_۰^۲ + ۲ax$$

به دست می‌آید. اگر نقطهٔ مادی بدون سرعت اولیه از A رها شده باشد $v_۰ = ۰$ است.

چون $x=l$ ، و $a=g\sin\alpha$ است، سرعت جسم در نقطهٔ B :

$$v^2=2g\sin\alpha\times l=2gh \qquad \therefore$$

که $h=AC$ است. در نتیجه

$$v=\sqrt{2gh}$$

و این درست برابرسرعت نقطهٔ مادی است که از A بدون سرعت اولیه رها شود وآزادانه همین ارتفاع را سقوط کند. اما زمان لازم برای آنکه از AB پایین بیاید برابر زمان لازم برای سقوط از A به C نیست.

زمان لازم برای آنکه از AB پایین بیاید برطبق معادلهٔ

$$x=v_0t+\frac{1}{2}at^2$$

با قراردادن $x=l$ ، $v_0=0$ ، $a=g\sin\alpha$ به‌دست می‌آید:

$$l=\frac{1}{2}g\sin\alpha\times t^2 \qquad \therefore$$

$$t=\sqrt{\frac{2l}{g\sin\alpha}} \qquad \therefore$$

زمان لازم برای آنکه نقطهٔ مادی از A به C سقوط کند به‌این ترتیب به‌دست می‌آید:

$$t=\sqrt{\frac{2h}{g}}=\sqrt{\frac{2l\sin\alpha}{g}} \quad \text{یا} \quad h=\frac{1}{2}gt^2$$

اگر نقطهٔ مادی به‌طرف بالای سطح شیبدار پرتاب شود، معادله‌های معمولی حرکت را دربارهٔ آن به‌کارمی‌بریم و درآن معادله‌ها به‌جای a مقدارش $-g\sin\alpha$ را می‌نویسیم.

اگر نقطهٔ مادی از سطح شیبدار درجهتی که با خط بزرگترین شیب، زاویه می‌سازد پایین بیاید، شتاب دیگر $g\sin\alpha$ نخواهد بود بلکه $g\sin\alpha\cos\beta$ است که β زاویه‌ای است که جهت حرکت با خط بزرگترین شیب می‌سازد.

مثال: برسطح شیبداری که با افق زاویهٔ 30° می‌سازد جسمی (الف) به‌طرف بالا، (ب) به‌طرف پایین، پرتاب شده است. اگر در هرحالت تندی اولیه $5\ m/s$ باشد، فاصله‌ای را که در ۴ ثانیه می‌پیماید و تندیی را که در انتهای ثانیهٔ چهارم به‌دست می‌آورد پیدا کنید.

حل: (الف) برای حرکت به‌طرف بالای سطح شیبدار داریم

$$v=v_{\circ}-g\sin ۳۰^{\circ}t$$

$$x=v_{\circ}t-\frac{۱}{۲}g\sin ۳۰^{\circ}t^{۲}$$

و

$$\therefore \qquad v=۵-\frac{۹/۸}{۲}\times ۴=-۱۴/۶$$

و

$$x=۵\times ۴-\frac{۹/۸}{۲\times ۲}\times ۱۶=-۱۹/۲$$

یعنی درآن لحظه جسم به‌طرف پایین سطح با سرعت $۱۴/۶\,\mathrm{m/s}$ حرکت می‌کند و $۱۹/۲\,\mathrm{m}$ پایینتر از نقطه‌ای است که حرکت را از آنجا شروع کرده است.

(ب) برای حرکت به‌طرف پایین سطح داریم

$$v=v_{\circ}+g\sin ۳۰^{\circ}t$$

و

$$x=v_{\circ}t+\frac{۱}{۲}g\sin ۳۰^{\circ}t^{۲}$$

$$\therefore \qquad v=۵+\frac{۹/۸}{۲}\times ۴=۲۴/۶$$

و

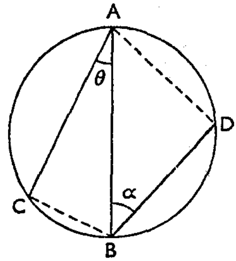
$$x=۵\times ۴+\frac{۹/۸}{۲\times ۲}\times ۱۶=۵۹/۲$$

یعنی درآن لحظه جسم به‌طرف پایین سطح با سرعت $۲۴/۶\,\mathrm{m/s}$ حرکت می‌کند و $۵۹/۲\,\mathrm{m}$ پایینتر از نقطه‌ای است که ازآنجا پرتاب شده است.

۱۷۰۲. زمان لازم برای آنکه جسمی، وتری صیقلی از یك دایرهٔ قائم را بپیماید به‌طوری که ابتدای مسیر، بالاترین نقطهٔ دایره باشد، یا اینکه انتهای مسیر پایینترین نقطهٔ دایره باشد، مقداری است ثابت و به شیب وتر بستگی ندارد.

فرض‌کنیم AB (شکل ۲-۵) قطر دایرهٔ قائم باشد، که درآن A بالاترین نقطه و AC وتر دلخواهی باشد.

فرض می‌کنیم $\angle \mathrm{BAC}=\theta$ ، و $\mathrm{AB}=d$ باشد، دراین صورت



شکل ۲-۵

$$AC = AB\cos\theta = d\cos\theta$$

شتاب به‌طرف پایین در روی AC برابر است بـا $g\cos\theta$ ، و زمان t لازم بـرای آنکه جسم از حال سکون از A حرکت کند و به C برسد به این ترتیب به‌دست می‌آید

$$x = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

با قراردادن $x = d\cos\theta$ ، $v_0 = 0$ ، $a = g\cos\theta$

$$\therefore \quad d\cos\theta = \frac{1}{2} g\cos\theta \times t^2$$

$$\therefore \quad t^2 = \frac{2d}{g}$$

$$\therefore \quad t = \sqrt{\frac{2d}{g}}$$

اما، این مدت زمان مستقل از θ است و برابر است بـا مدت زمـان سقوط قائم از A تا B.

بنابراین مدت زمان‌لازم برای‌پیمودن همهٔ وترهایی‌که از A شروع می‌شوند یکسان است.

فرض‌کنیم DB وتر دلخواهی باشدکه انتهای آن B است و $\angle ABD = \alpha$.
طول DB برابر است با $d\cos\alpha$ و شتاب به‌طرف پایین DB برابر است با $g\cos\alpha$.
زمان لازم برای آنکه جسم از حال سکون از D حـرکت کند و به B برسد به این ترتیب به‌دست می‌آید:

$$d \cos\alpha = \frac{۱}{۲} g \cos\alpha \times t^{۲}$$

$$\therefore \quad t^{۲} = \frac{۲d}{g}$$

$$\therefore \quad t = \sqrt{\frac{۲d}{g}}$$

یعنی همان مقداری است که قبلاً به‌دست آوردیم.

تمرین ۳.۲

۱ـ برسطح صیقلی شیبداری که با افق زاویهٔ ۳۰° می‌سازد، گلوله‌ای با تندی ۲۰ m/s به‌طرف بالای سطح پرتاب می‌شود. از لحظهٔ پرتاب تا هنگام توقف چه مدتی طول می‌کشد و چه مسافتی را در این مدت می‌پیماید؟

۲ـ برسطح صیقلی‌شیبداری که طول آن ۳/۶ m است گلوله‌ای حرکت می‌کند. این گلوله ازبالای سطح بدون تندی اولیه رها شده است و وقتی که همهٔ سطح شیبدار را می‌پیماید تندی آن ۶ m/s می‌شود. شیب سطح چقدر است؟

۳ـ برسطح صیقلی‌شیبداری که طول آن ۱۲ m و ارتفاع بالاترین‌نقطهٔ آن ۲/۷ m است، گلوله‌ای از بالا، بدون تندی اولیه، رها می‌شود. وقتی‌که به‌انتهای سطح شیبدار می‌رسد، تندیش چقدر خواهد بود؟ این مسافت را درچه مدتی طی خواهدکرد؟

۴ـ دو گلوله با هم از نقطهٔ O، بدون تندی اولیه رها می‌شوند. اولی برسطح صیقلی شیبداری است که با قائم O زاویهٔ ۶۰° می‌سازد و دومی برسطح شیبداری است که با قائم O زاویهٔ ۳۰° می‌سازد. هردوسطح دریك طرف قائم O قرار دارند. ثابت‌کنید که شتاب نسبی گلولهٔ اول نسبت به‌گلولهٔ دوم عمود برشتاب گلولهٔ دوم و برابر $g/۲$ است.

۵ـ سطحی است صیقلی و شیبدارکه طول آن l و ارتفاع آن h است. گلوله‌ای را از بالای این سطح با چه تندی به‌طرف پایین پرتاب‌کنیم تا درهمان مدتی به‌پایین سطح شیبدار برسدکه گلوله‌ای از ارتفاع h بدون تندی اولیه رها می‌شود؟

۶ـ برسطح شیبداری‌که با افق زاویهٔ α می‌سازد، لوله‌ای نصب شده است که AB، شیار داخلی‌آن، صیقلی‌است وبا خط بزرگترین‌شیب سطح زاویهٔ β می‌سازد. گلوله‌ای صیقلی در انتهای بالایی لوله‌گذاشته می‌شود تا پایین بیاید. چه مسافتی درمدت t ثانیه طی می‌کند؟ نیز مکان هندسی چنین نقطه‌هایی را برای مقادیر مختلف β پیدا

کنید. انتهای A همیشه دریك صفحه باقی می‌ماند.

۷ ـ مثلث قائم‌الزاویه‌ای طوری قرارگرفته است که ضلع BC افقی و ضلع BA قائم است. باروشهای هندسی راهی را پیدا کنیدکه متحرکی در کمترین مدت از B به وتر AC برسد.

۸ ـ بردایره‌ای قائم، نقطه‌ای مادی بدون تندی اولیه وتری را می‌پیماید که انتهای آن پایینترین نقطهٔ دایره است. ثابت کنید که تندی در این نقطه متناسب با طول وتر است.

۹ ـ بردایره‌ای قائم، نقطه‌ای مادی بدون تندی اولیه وتری را می‌پیمایدکه ابتدای آن یکی از دو انتهای قطر افقی دایره است. ثابت کنیدکه زمان لازم برای پیمودن وتر متناسب با ریشهٔ دوم تانژانت زاویه‌ای است که وتر با امتداد قائم درست می‌کند.

۱۰ـ خط بزرگترین شیب یك سطح صیقلی شیبدار را چگونه به سه قسمت کنیم که اگر نقطه‌ای مادی بدون تندی اولیه از بالای آن رها شود، این سه قسمت را در مدت زمانهای متساوی بپیماید؟

۱۸.۲. حرکت مستقیم‌الخط با شتاب متغیر

وقتی‌که شتاب متغیر باشد، اما از قانون معینی پیروی کند، معادلات حرکت را به‌همان طریقی‌که درحالت سادهٔ شتاب یکنواخت به‌دست‌آوردیم‌تعیین می‌کنیم. یعنی عبارت شتاب را معادل d^2x/dt^2 می‌نویسیم. در بعضی از حالتها ممکن است گرفتن تابع اولیه ساده باشد و در بعضی از حالتهای دیگر ممکن است فقط جواب تقریبی برای تابع اولیه به‌دست آید.

دربعضی از حالتها، به‌ویژه درمواردی‌که به جای یك قانون معین، مجموعه‌ای از مقادیر مربوط به‌مسافت و زمان داده شده است، روشهای نموداری به‌کار برده می‌شود. نمودار را با توجه به‌کمیتهای داده شده رسم می‌کنیم و از روی آن سایرکمیتها را که مربوط به‌حرکت هستند تعیین می‌کنیم.

در اینجا چند نمودارکه به‌این طریق می‌توان به‌کار برد توضیح داده می‌شود.

۱۹.۲. نمودار مسافت ـ زمان

قبلاً نشان داده‌ایم (۸.۱) که اگر زمان را در امتداد یك محور، و مسافتهای مربوطه را به‌موازات محور دیگری‌که هر دو از یك نقطهٔ ثابت می‌گذرند نقل‌کنیم، می‌توانیم نموداری رسم‌کنیم که آن را منحنی یا نمودار مسافت ـ زمان می‌گویند (شکل ۱-۳).

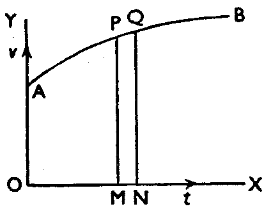
از روی ایـن منحنی مستقیماً می‌توان مسافتی را کـه در یك فاصلهٔ زمـانی معین پیموده شده است تعیین کرد. از این گذشته، شیب این منحنی در هـر نقطهٔ P برابر سرعت در لحظهٔ مربوط به P است.

بنابراین، با پیدا کردن شیب درنقاط مختلف منحنی، سرعت را در زمانهای مختلف به‌دست می‌آوریم.

اگر، همان‌طورکه در بند بعدی خواهیم گفت، نمودار سرعت را نسبت به‌زمان رسم کنیم منحنی سرعت ـ زمان به‌دست خواهد آمد. نشان خواهیم دادکه از روی این منحنی می‌توان شتاب و مسافت پیموده شده را تعیین کرد.

۲۰.۲. نمودار سرعت ـ زمان

اگـر فاصله‌هـای زمـانی پیاپی را در امتداد OX (شکل ۲ـ۶) و سرعتهای مربـوطه را به‌موازات OY نقل کنیم، منحنی APB که منحنی یا نمودار سرعت ـ زمان نامیده می‌شود به‌دست خواهد آمد.



شکل ۲ـ۶

اگر PM عمودی باشدکه از P برمحور زمان رسم شده است، دراین صورت PM سرعت را در لحظه‌ای که با OM نمایش داده می‌شود نشان می‌دهد.

از این گذشته،شیب منحنی APB در هرلحظه برابر dv/dt است، و بنابراین برابر است با شتاب مربوط به‌این نقطه.

وقتی که شتاب یکنواخت باشد، منحنی یك خط مستقیم است، و برعکس.

اگر نقطه‌ای مانند Q (شکل ۲ـ۶) ، خیلی نزدیك به P اختیارکنیم و عمود QN را رسم کنیم، دراین‌صورت $MN=\Delta t$ ، و سطح نمودار PMNQ به $PM\times\Delta t=v\Delta t$ خیلی‌نزدیك خواهد بود، که درآن v سرعت در P است، و این‌حاصل‌ضرب معرف مسافتی است که دراین فاصلهٔ زمانی Δt طی شده است.

بنابراین‌مسافتی که میان دو لحظهٔ t_1 و t_2 پیموده می‌شود برابراست باسطح زیرمنحنی

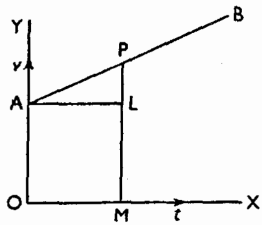
APB میان طولهای t_1 و t_2، و می‌توان آن را به‌صورت $\int_{t_1}^{t_2} v\,dt$ نوشت.

آشکار است که واحدهای این سطح برابر است با زمان × سرعت، که برابر مسافت است.

از این گذشته بزرگی این سطح بخش بر (t_2-t_1) برابر است با سرعت متوسط در این فاصلهٔ زمانی.

وقتی‌که شتاب یکنواخت و برابر a باشد، منحنی AB یك خط مستقیم است (شکل ۲-۷)، ومسافت پیموده شده درمدت $t(=\mathrm{OM})$ برابر است با

مساحت $\mathrm{OMPA} =$ مساحت $\triangle \mathrm{PAL} +$ مساحت مستطیل OMLA.



شکل ۲-۷

اما $\mathrm{OA}=v_0$ یعنی برابر است با سرعت اولیه، و $\mathrm{PL}=at$ یعنی افزایش سرعت درمدت t.

$$\therefore \qquad \triangle \mathrm{PAL} = \frac{1}{2} at \times t$$

$$\text{مساحت } \mathrm{OMLA} = v_0 t$$

$$\therefore \qquad \text{مسافت} = v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

که با فرمول (۲) دربند ۸.۲ مطابقت دارد.

پس از نمودار سرعت ـ زمان می‌توان اطلاعات زیر را به‌دست آورد:

(الف) سرعت در هرلحظه، که مستقیماً خوانده می‌شود؛

(ب) شتاب درهرلحظه، با تعیین ضریب زاویهٔ مماس برمنحنی در نقطه‌ای که متعلق به‌آن لحظه است؛

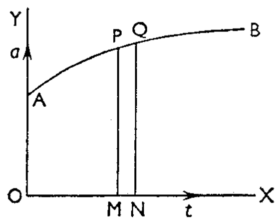
(پ) مسافتی که دریك فاصلهٔ‌زمانی معین پیموده می‌شود، با تعیین مساحت‌زیرمنحنی

میان دو خط قائم مربوط به‌لحظه‌های شروع و پایان این فاصله.

۲۱.۲. نمودار شتاب ـ زمان

اگر زمان را در امتداد محور OX (شکل ۲ـ۸) و مقادیر شتاب مربـوطه را به موازات OY نقل کنیم، منحنی یا نمودار شتاب ـ زمان APB به‌دست خواهد آمد. خط قائم PM مقدار شتاب a را درلحظهٔ $OM=t$ نشان می‌دهد. اگر برمنحنی نقطه‌ای مانند Q خیلی نزدیك به P اختیار کنیم و خط قائم QN را رسم کنیم، دراین صورت $MN=\Delta t$ خواهد بود ومساحت PMNQ به $a\Delta t$ خیلی نزدیك خواهد بود،واین تغییر سرعت را درفاصلهٔ زمانی Δt نشان می‌دهد.

بنابراین تغییر سرعت میان دولحظهٔ t_1 و t_2 برابر است با مساحت زیرمنحنی APB میان دوخط قـائم مربوط به لحظه‌هـای t_1 و t_2 و می‌تـوان آن را به صورت $\int_{t_1}^{t_2} a\,dt$ نوشت.



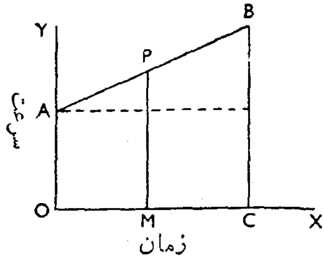
شکل ۲ـ۸

درحالتی که شتاب یکنواخت‌است، منحنی‌شتاب ـ زمان خط راستی‌است که به‌موازات محور زمان است. هرمنحنی دیگر مربوط به‌شتاب متغیر است.

۲۲.۲. مثال۱: نمودار سرعت ـ زمان مربوط به‌نقطه‌ای مادی را که برمسیری مستقیم با شتاب یکنواخت حرکت می‌کند رسم کنید، و از روی‌آن فرمول $v^2=v_0^2+2ax$ را نتیجه بگیرید.

حل: اگر OA (شکل ۲ـ۹) سرعت اولیه را نشان دهد، در این صورت، چون افزایش سرعت در فاصله‌های زمانی متساوی یکسان است، نمودار به‌صورت خط مستقیم AB خواهد بود.

ارتفاع نقطه‌ای مانند P نسبت به A برابر است بـا حاصل‌ضرب شتاب در مدت زمان که با OM نشان داده شده است.



شکل ۲-۹

مساحت زیرنمودار، مسافت پیموده شده را نشان می‌دهد.
اگـر BC معرف سرعت v بـاشد، در ایـن صورت مساحت OABC مسافت را نشان می‌دهد.

اما
$$\text{OABC مساحت} = \frac{۱}{۲}(\text{OA}+\text{CB})\times\text{OC}$$

و
$$\text{CB}-\text{OA}=a\times\text{OC}$$

$$\therefore \qquad \text{OC}=\frac{\text{CB}-\text{OA}}{a}$$

$$\therefore \qquad x=\frac{۱}{۲}\times\frac{(\text{CB}+\text{OA})(\text{CB}-\text{OA})}{a}$$

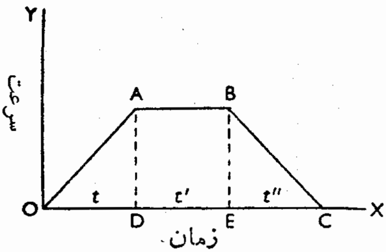
$$=\frac{۱}{۲}\,\frac{(\text{CB}^{۲}-\text{OA}^{۲})}{a}=\frac{۱}{۲}\,\frac{v^{۲}-v_{0}^{۲}}{a}$$

$$\therefore \qquad v^{۲}=v_{0}^{۲}+۲ax$$

مثال۲: قطاری از ایستگاه A به‌راه می‌افتد تـا به‌ایستگاه B که در فـاصلهٔ c از A است برسد؛ نخست حرکت تا مدتی برابر t با شتاب یکنواخت صورت می‌گیرد؛ سپس تا مدتی برابر t' تندی ثابت باقی می‌ماند؛ و سپس با شتاب یکنواخت منفی تا مدتی برابر t'' صورت می‌گیرد. حرکت را به‌صورت نمودار رسم کنید و به‌وسیلهٔ نمودار مقادیر شتاب و شتاب منفی را پیدا کنید.

حل : فرض می‌کنیم OABC (شکل ۲ـ۱۰) معرف نمودار سرعت ـ زمان باشد؛ در این صورت AB افقی است.

AD و BE را عمود بر OX رسم می‌کنیم.



شکل ۲ـ۱۰

در این صورت $c =$ مساحت OABC

$$= \mathrm{AD} \times t' + \frac{۱}{۲}\mathrm{AD}(t + t'')$$

$$= \frac{۱}{۲}\mathrm{AD}(t + t'' + ۲t')$$

$$\therefore \qquad \mathrm{AD} = \frac{۲c}{t + t'' + ۲t'}$$

اما شتاب برابر است با ضریب زاویهٔ OA یعنی برابر است با AD/OD که مساوی است با

$$\frac{۲c}{t(t + t'' + ۲t')}$$

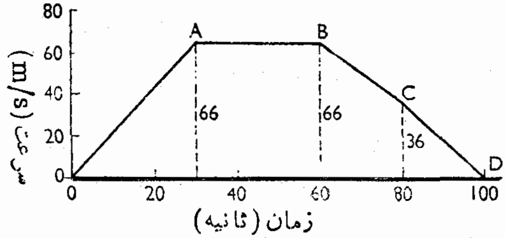
شتاب منفی = ضریب زاویهٔ BC

$$= \frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EC}}$$

$$= \frac{۲c}{t''(t + t'' + ۲t')}$$

مثال ۳: نمودار سرعت ـ زمان حرکت یك اتومبیل مطابق شکل ۲ـ۱۱ نمایش داده شده است. شتابهای اتومبیل را درفاصلهٔ زمانی‌مفروض تعیین‌کنید. نیز سرعت متوسط

در این فاصلهٔ زمانی را به‌دست آورید.



شکل ۲-۱۱

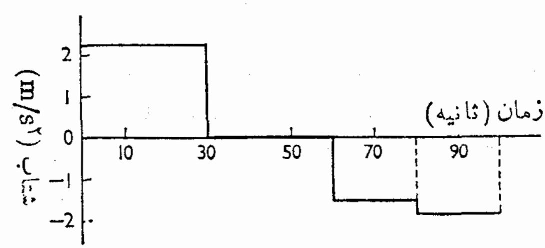
حل : چون OA خطی است مستقیم، شتاب اتومبیل در ۳۰ ثانیهٔ نخست یکنواخت و بزرگی آن $\frac{۶۶}{۳۰} m/s^۲$ است.

در ۳۰ ثانیهٔ بعد، سرعت برابر $۶۶\ m/s$ و بنابراین در تمام این مدت شتاب صفر است.

از لحظهٔ $t = ۶۰$ تا لحظهٔ $t = ۸۰$ سرعت از $۶۶\ m/s$ به $۳۶\ m/s$ می‌رسد، و شتاب یکنواخت و به‌بزرگی $\left(۳۶ - \frac{۶۶}{۲۰}\right) = -۱/۵\ m/s^۲$ است.

در ۲۰ ثانیهٔ آخر، شتاب بازهم یکنواخت است، اما بزرگی آن $-\frac{۳۶}{۲۰} m/s^۲$ است.

نمودار شتاب ـ زمان درشکل ۲ـ۱۲ نمایش داده شده است.



شکل ۲-۱۲

اما سرعت متوسط برای تمام مسیر برابر است با مسافت طی شده بخش بر ۱۰۰ ثانیه.

مسافت کل طی شده برابر ت با سطح زیر منحنی سرعت ـ زمان و بنابراین مساوی است با

$$۳۰\times۳۳+۳۰\times۶۶+۲۰\times\frac{۱}{۲}(۶۶+۳۶)+۲۰\times۱۸$$

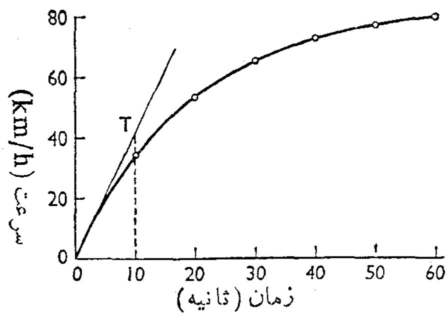
یعنی برابر است با ۴۳۵۰ m.

درنتیجه سرعت متوسط در این فاصلهٔ زمانی برابر است با ۴۳/۵ m/s.

مثال ۴: سرعت اتومبیلی دریك مسیر مستقیم طبق جدول زیرداده شده است. مسافتی که طی شده است و شتاب اولیه را پیدا کنید.

زمان برحسب ثانیه	۰	۱۰	۲۰	۳۰	۴۰	۵۰	۶۰
سرعت برحسب km/h	۰	۳۴	۵۴	۶۶	۷۴	۷۸	۸۰

حل : نمودار سرعت ـ زمان مربوطه طبق شکل ۲-۱۳ رسم می‌شود.



شکل ۲-۱۳

مساحت زیر منحنی برابر است با مسافتی که طی شده است، و این را می‌توان با استفاده از قاعدهٔ سیمسون[1]، که در جدول بالای صفحهٔ بعد نشان داده شده است، حساب کرد.

بنابراین مسافتی که در ۶۰ ثانیه طی می‌شود

$$=۶۰\times\frac{۱۰۴۸}{۱۸}\,(\mathrm{s}\times\mathrm{km/h})\ \text{واحد}$$

$$=۶۰\times\frac{۱۰۴۸}{۱۸}\times\frac{۱}{۳۶۰۰}\,\mathrm{km}$$

$$=۰/۹۷\,\mathrm{km}\ \ \text{تقریباً}$$

1- Simpson's rule

زمان	سرعت	مضرب	حاصلضرب
۰	۰	۱	۰
۱۰	۳۴	۴	۱۳۶
۲۰	۵۴	۲	۱۰۸
۳۰	۶۶	۴	۲۶۴
۴۰	۷۴	۲	۱۴۸
۵۰	۷۸	۴	۳۱۲
۶۰	۸۰	۱	۸۰
جمع		۱۸	۱۰۴۸

شتاب اولیه را ممکن‌است با رسم مماس برنمودار سرعت ـ زمان در مبدأ، و تعیین ضریب زاویهٔ آن مماس، بـه دست آورد. مماس درشکل ۲ـ۱۳ بـه‌صورت خط OT نمایش داده شده است، و ضریب زاویهٔ آن برابر است با ۴۲ km/h بـر ۱۰ ثانیه

$$\therefore \qquad \text{شتاب اولیه} = \frac{۴۲۰۰۰}{۳۶۰۰} \times \frac{۱}{۱۰}\,\mathrm{m/s^۲}$$

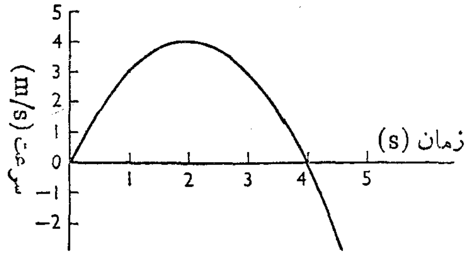
$$= ۱/۲\,\mathrm{m/s^۲} \quad \text{تقریباً}$$

این نتیجه فقط بـا تقریب درست است، زیرا مماس برمنحنی را نمی‌توان به‌طور دقیق رسم کرد.

مثال ۵: نمودار سرعت ـ زمان متحرکی را رسم کنیدکـه برمسیری مستقیم طوری حرکت می‌کند کـه سرعتش پس از t ثـانیه برابـر است بـا v متر بـر ثـانیه و از رابطهٔ $v = ۴t - t^۲$ بـه دست می‌آید. حـرکت جسم را توضیح دهید و شتاب آن را در لحظه‌های $t = ۱$ و $t = ۲$ و $t = ۴$ پیدا کنید. بـزرگترین مسافتی‌کـه در جهت شروع حرکت از نقطهٔ شروع حرکت طی می‌کند چقدر است؟

حل : مقادیر v به‌ازای t مساوی ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ درشکل ۲ـ۱۴ نقل شده است و نمودار سرعت ـ زمـان ترسیم شده است. آشکار است که سرعت درآغـاز حرکت صفر است، در لحظهٔ $t = ۲$ به ۴ m/s افزایش یافته است، سپس در لحظهٔ $t = ۴$

به‌صفر کاهش می‌یابد، و پس از آن سرعت دائماً کاهش می‌یابد. بنابراین جسم تا ۴ ثانیه به‌جلو می‌رود، و پس‌ازآن با سرعتی که دائماً افزایش‌می‌یابد برمی‌گردد.



شکل ۲-۱۴

برای آنکه شتاب را درلحظهٔ t پیدا کنیم، می‌نویسیم:

$$v = ۴t - t^۲$$

سرعت درلحظهٔ $(t + \Delta t)$ چنین به‌دست می‌آید:

$$v + \Delta v = ۴(t + \Delta t) - (t + \Delta t)^۲$$

$$\therefore \quad \Delta v = ۴\Delta t - ۲t\Delta t - (\Delta t)^۲$$

$$\therefore \quad \frac{\Delta v}{\Delta t} = ۴ - ۲t - \Delta t$$

درنتیجه

$$\frac{dv}{dt} = ۴ - ۲t$$

پس شتاب درلحظهٔ $t = ۱$ برابر $۲\ m/s^۲$ و درلحظهٔ $t = ۲$ برابر صفر و درلحظهٔ $t = ۴$ برابر $-۴\ m/s^۲$ است.

چون سرعت درلحظهٔ $t = ۴$ صفر وپس ازآن منفی است، جسم‌باید درلحظهٔ $t = ۴$ به‌طرف نقطهٔ شروع‌حرکت برگردد. بنابراین بزرگترین مسافتی که درجهت شروع حرکت طی می‌کند مسافتی‌است که درفاصلهٔ زمانی $t = ۰$ تا $t = ۴$ طی شده است، و با سطح زیرمنحنی سرعت ـ زمان دراین فاصلهٔ زمانی برابر است. این سطح با استفاده از قاعدهٔ سیمسون برابر است با

$$\frac{۰ + ۴(۳) + ۲(۴) + ۴(۳) + ۰}{۱ + ۴ + ۲ + ۴ + ۱} \times ۴$$

یعنی برابر است با

$$۳۲ \times \frac{۴}{۱۲} = ۱۰\frac{۲}{۳}$$

پس بزرگترین مسافتی که در جهت شروع حرکت طی شده است برابر $۱۰\frac{۲}{۳}$ متر است.

با گرفتن تابع اولیه نیز می‌توان مسافتی را که در فاصلهٔ زمانی $t = ۰$ تا $t = ۴$ طی می‌شود پیدا کرد

$$\int_{۰}^{۴} v\,\mathrm{d}t = \int_{۰}^{۴} (۴t - t^{۲})\,\mathrm{d}t$$

$$= \left[۲t^{۲} - \frac{۱}{۳}t^{۳} \right]_{۰}^{۴}$$

$$= ۳۲ - \frac{۶۴}{۳}$$

$$= ۱۰\frac{۲}{۳}$$

مثال ۶: شتاب یك نقطهٔ مادی t ثانیه پس از آنکه از حال سکون به‌راه افتاد برابر $(۲t - ۱)\,\mathrm{m/s^{۲}}$ است. ثابت‌کنید که این نقطهٔ مادی ۱/۵ ثانیه پس از شروع حرکت به مبدأ حرکت برمی‌گردد، و مسافتی را که نقطهٔ مادی در ۱/۵ ثانیهٔ بعدی از مبدأ می‌پیماید تعیین‌کنید. نیز تعیین‌کنید که پس از چه مدتی سرعت متحرك $۲۰\ \mathrm{m/s}$ خواهد شد.

حل : اگر نمودار شتاب ـ زمان را رسم‌کنیم، که در این حالت یك خط راست است، سطح زیرمنحنی از $t = ۰$ تا هر لحظهٔ دلخواه برابر سرعت درآن لحظه است. نیز می‌توانیم با محاسبهٔ تابع اولیه سرعت را در هرلحظه تعیین‌کنیم.

اگر در لحظهٔ t ثانیه سرعت برابر v متر بر ثانیه باشد، شتاب برابر $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{m/s^{۲}}$ خواهد بود.

بنابراین
$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = ۲t - ۱$$

و درنتیجه
$$v = t^{۲} - t + A$$

که A مقداری است ثابت.

چون درلحظهٔ $t = ۰$ سرعت v برابر صفر است نتیجه می‌شود که $A = ۰$.

اگر مسافتی را که در t ثانیه طی می‌شود به x نمایش دهیم، داریم

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v=t^۲-t$$

پس
$$x=\frac{۱}{۳}t^۳-\frac{۱}{۲}t^۲+B$$

که B مقداری است ثابت. چون در لحظهٔ $t=۰$ مسافت $x=۰$ است، $B=۰$ است.

می‌دانیم که در مبدأ $x=۰$ است، بنابراین متحرك هنگامی در مبدأ خواهد بود که

$$\frac{۱}{۳}t^۳-\frac{۱}{۲}t^۲=۰$$

یعنی درلحظه‌های $t=۰$ و $t=۱/۵$.

بنابراین نقطهٔ مادی ۱/۵ ثانیه پس از شروع حرکت به‌مبدأ باز می‌گردد. مقدار x در ۱/۵ ثانیه بعد، یعنی هنگامی که $t=۳\mathrm{s}$ است برابر است با

$$x=\frac{۱}{۳}(۳)^۳-\frac{۱}{۲}(۳)^۲=۴/۵$$

یعنی نقطهٔ مادی درآن لحظه در ۴/۵ متری مبدأ است.

نیز سرعت نقطهٔ مادی هنگامی برابر ۲۰ m/s است که

$$t^۲-t=۲۰$$

$$\therefore \quad t^۲-t-۲۰=۰$$

$$\therefore \quad (t+۴)(t-۵)=۰$$

$$\therefore \quad t=-۴ \text{ و } t=۵$$

پس سرعت نقطهٔ مادی ۵ ثانیه پس‌از شروع حرکت برابر ۲۰ m/s است. (مقدار $t=-۴$ مفهوم فیزیکی ندارد.)

تمرین ۴.۲

۱- توضیح دهید که چگونه می‌توان از روی نمودار تندی ـ زمان یك نقطهٔ مادی که برمسیری مستقیم حرکت می‌کند، شتاب و مسافت طی شده را تعیین کرد.

نمودار تندی ـ زمان متحرکی شامل دوخط مستقیم AB و BC است که مختصات A، B و C به ترتیب (۱۵ و ۰)، (۱۰ و ۱۰)، (۲۵ و ۲۰) است. عدد سمت چپ

هر پرانتز معرف زمان برحسب ثانیه و عدد سمت راست بزرگی تندی را برحسب متر برثانیه نشان می‌دهد. حرکت نقطهٔ مادی را توضیح دهید و مسافت کل طی شده را تعیین کنید.

۲ـ اگر دونده‌ای بتواند با تندی ۶ m/s شروع به‌حرکت کند و با شتاب یکنواخت بدود، با رسم نمودار، بزرگترین سرعتی را که در ظرف ۱۰ ثانیه و طی ۹۰ متر به‌دست می‌آورد تعیین کنید، و شتاب لازم را پیدا کنید.

۳ـ قطاری که به یك ایستگاه نزدیك می‌شود، دو «نیم کیلومتر» متوالی را به‌ترتیب در ۱۶ و ۲۰ ثانیه می‌پیماید. به‌فرض آنکه شتاب منفی حرکت، یکنواخت باشد، نموداری رسم کنید و تغییر تندی را با زمان در این فاصلهٔ ۳۶ ثانیه نشان دهید.

۴ـ فاصلهٔ میان دوایستگاه ۱۸۰۰ m است. قطاری برقی از حال سکون از یك ایستگاه با شتاب یکنواخت $0/5\ m/s^2$ به‌راه می‌افتد، و در ایستگاه دیگر با شتاب منفی یکنواخت $0/75\ m/s^2$ متوقف می‌شود. در قسمتی از اواسط مسیر، سرعت قطار یکنواخت بوده است. شکل کلی نمودار تندی ـ زمان را رسم کنید، و معلوم کنید که اگر تمام مسافرت ۳ دقیقه طول کشیده باشد، مقدار سرعت ثابت چقدر بوده است.

۵ـ اتومبیلی با سرعت ثابت ۱۰ m/s حرکت می‌کند. در این هنگام طوری شتاب پیدا می‌کند که با طی هر ۱۰ m تندیش ۱ m/s افزایش می‌یابد. پس از طی ۲۰۰ m، شتاب قطع می‌شود. نموداری رسم کنید که رابطهٔ v را به x و a را به x نشان دهد. سطح منحنی اخیر چه چیزی را نشان می‌دهد؟

۶ـ قطاری از حال سکون با شتاب $0/3\ m/s$ به‌راه می‌افتد، و این شتاب به‌تدریج به‌طور یکنواخت با زمان کاهش می‌یابد تا اینکه پس از ۳ دقیقه سرعت قطار ثابت می‌شود. در این هنگام، قطار را ترمز می‌کنند به‌طوری که با شتاب منفی یکنواخت به‌حرکت خود ادامه می‌دهد و پس از ۱/۲ دقیقه می‌ایستد. نمودارهای شتاب ـ زمان، تندی ـ زمان، و مسافت ـ زمان را رسم کنید. مقادیر شتاب منفی و مسافت طی شده را از شروع حرکت در لحظه‌ای که ترمزها به‌کار افتادند روی نمودارها ثبت کنید.

۷ـ قطاری از یك ایستگاه شروع به‌حرکت می‌کند، و کیلومتر اول را با شتاب یکنواخت می‌پیماید، سپس ۲ کیلومتر بعدی را با سرعت یکنواخت و بالاخره کیلومتر آخری را با شتاب منفی یکنواخت می‌پیماید تا اینکه در ایستگاه بعدی متوقف می‌شود. تمام مسافرت ۴ دقیقه طول کشیده است. نموداری رسم کنید که نشان دهد سرعت چگونه با زمان تغییر می‌کند و، از روی آن نمودار، حداکثر سرعت را تعیین کنید.

۸ـ سرعت یك قطار در دقیقهٔ اول حرکت برطبق جدول زیر بوده است:

زمان (s)	۰	۵	۱۰	۲۰	۳۰	۴۰	۵۰	۶۰
سرعت (m/s)	۰	۸/۵	۱۴/۶	۲۳	۲۹/۲	۳۳/۶	۳۷	۳۹

مسافتی را که در دقیقهٔ اول طی می‌شود و نیز مدتی‌را که قطار نصف مسافت فوق را می‌پیماید تعیین کنید.

۹ ـ رابطهٔ میان تندی اتومبیل و مسافتی‌که اتومبیل از شروع حرکت طی می‌کند طبق جدول زیر است:

تندی (m/s)	۰	۶	۱۱	۱۸	۱۸	۲۰/۵	۲۲/۳	۲۳/۸	۲۴/۸	۲۵/۵	۲۶
مسافت (m)	۰	۱۵	۳۰	۴۵	۶۰	۷۵	۹۰	۱۰۵	۱۲۰	۱۳۵	۱۵۰

نمودار تندی ـ مسافت را رسم کنید و نشان دهیدکه چگونه بـه‌کمك آن، نمودار شتاب ـ مسافت را به دست می‌آورید. در وسط مسیر شتاب برحسب m/s^2 چقدر است؟

۱۰ـ رابطهٔ میان مسافت و زمان برای‌اتومبیلی‌که ازحال سکون به‌راه افتاده است برطبق جدول زیر است:

زمان (s)	۰	۱۰	۲۰	۳۰	۴۰	۵۰	۶۰	۷۰
مسافت (m)	۰	۳۶	۱۶۰	۳۹۵	۶۶۰	۸۸۰	۱۰۴۰	۱۱۶۰

نمودار مسافت ـ زمـان را رسم کنید و از روی آن نمودارهـای سرعت ـ زمان و شتاب ـ زمان را برای ۶۰ ثانیهٔ اول استنتاج کنید.

۱۱ـ اتومبیلی از حال سکون شروع به‌حرکت می‌کند و تندی آن در انتهای فاصله‌هـای زمانی ۱۰ ثانیه در دقیقهٔ اول به‌ترتیب ۱۳، ۲۰/۵، ۲۵، ۲۸، ۲۹/۵ و ۳۰ متر برثانیه است.
نمودار تندی ـ زمـان را رسم کنید و از روی آن، نمودار تندی ـ مسافت را نتیجه بگیرید. ازآنجا مقادیر متوسط تندی را در دقیقهٔ اول، (الف) با توجه به زمـان، (ب) با توجه به‌مسافت، به‌دست آورید.

۱۲ـ در یك سفر ۸ دقیقه‌ای، سرعت قطار در فاصله‌های یك دقیقه‌ای به‌ترتیب ۰، ۲۲، ۴۲، ۵۶، ۶۰، ۶۰، ۵۲، ۳۰و ۰ کیلومتر برساعت‌بوده است. نمودار تندی ـ زمان را رسم کنید و مسافت کل طی شده را برحسب کیلومتر تخمین بـزنید. شتاب منفی را برحسب m/s^2 در انتهای سفر به‌دست آورید.

۱۳ـ تندی v اتومبیلی (برحسب m/s) با زمان t (برحسب ثانیه) برطبق فرمول

$$v = ۴۰ - t^۲$$

کاهش می‌یابد.
نمودار تندی ـ زمان را از $t = ۰$ تا $t = ۷$ رسم کنید. با روشهای نموداری مسافتی را که از $t = ۳$ تا $t = ۶$ پیموده شده است و متوسط شتاب منفی را در این فاصلهٔ زمانی تعیین کنید.

۱۴ـ قطاری که با سرعت $۳۷/۵\ m/s$ در حرکت است، موتورش خاموش می‌شود و رانندهٔ آن ترمز می‌کند. پس از t ثانیه سرعتش برحسب m/s برطبق فرمول زیر داده می‌شود:

$$v = ۳۷/۵ - t + ۰/۰۰۵t^۲$$

نمودار زمان ـ سرعت را از لحظهٔ $t = ۰$ تا لحظهٔ $t = ۵۰$ رسم کنید. شتاب منفی متوسط را در این ۵۰ ثانیه و شتاب منفی لحظه‌ای را درلحظهٔ $t = ۰$ تعیین کنید.

[مسائل زیر بهتر است به‌طریق محاسبه حل شود]

۱۵ـ مسافت $x\ m$ که نقطهٔ مادی A در t ثانیه می‌پیماید برطبق فرمول زیر داده شده است:

$$x = t^۳ - ۲t^۲ + ۳t - ۴$$

تندی و شتاب A را درلحظهٔ $t = ۴$ تعیین کنید.

۱۶ـ شتاب a یك نقطهٔ مادی P با فرمول $a = ۳t - ۲$ داده شده است. P در لحظهٔ $t = ۰$ ازمبدأ ازحال سکون شروع به‌حرکت کرده است. تندی P را درلحظهٔ $t = ۴$ و نیز فاصلهٔ آن را از O پیدا کنید.

۱۷ـ قطاری از A ازحال سکون به‌راه می‌افتد و در ایستگاه B توقف می‌کند. فاصلهٔ قطار از A برطبق فرمول $x = ۹۰t^۲ - ۴۵t^۳$ است که x برحسب کیلومتر و t برحسب ساعت است. تندی و شتاب را پس از t ساعت برحسب t پیدا کنید.
ازآنجا (الف) زمان لازم برای رسیدن از A به B، (ب) مسافت AB، (پ) بزرگترین سرعتی که قطار به‌دست می‌آورد، را تعیین کنید.

۱۸ـ در امتداد مسیری مستقیم، نقطه‌ای مادی با سرعتی حرکت می‌کند که با فرمول $(۳t^۲ - ۴t + ۳)$ متر برثانیه داده می‌شود. در این فرمول t ثانیه زمانی است که از لحظه‌ای که نقطهٔ مادی $۲\ m$ درجهت مثبت نقطهٔ ثابت O برروی مسیربوده است اندازه‌گیری شده است. پس از یك ثانیه و نیز پس از ۳ ثانیه فاصلهٔ نقطهٔ مادی را از O تعیین کنید. نیز حداقل سرعت را بیابید.

۱۹ـ شتاب اتومبیلی t ثانیه پس از آنکه ازحال سکون به‌راه می‌افتد تا هنگامی که صفر می‌شود برحسب $m/s^۲$ ازفرمول $(۷۵+۱۰t-t^۲)/۲۰$ به‌دست می‌آید. پس از آنکه شتاب حرکت صفر شد، سرعت ثابت می‌ماند. تعیین کنید: (الف) حداکثر شتاب را؛ (ب) زمان لازم برای آنکه اتومبیل به‌حداکثرسرعت برسد؛ (پ) حداکثرسرعت را.

۲۰ـ نقطه‌ای مادی که برمسیری مستقیم حرکت می‌کند، t ثانیه پس از شروع حرکت فاصله‌اش x برحسب متر از نقطهٔ ثابت برطبق فرمول زیر داده می‌شود:

$$x=۱۲t-۱۵t^۲+۴t^۳$$

پیدا کنید: (الف) سرعت و شتاب نقطهٔ مادی را پس از t ثانیه؛ (ب) مسافت طی شده میان دولحظه‌ای که درآن دولحظه سرعت به‌طور لحظه‌ای برابر صفر می‌شود.

۳

نیرو، اندازهٔ حرکت، قانونهای حرکت

۱۰۳. در بخشهای پیش حرکت را بدون درنظرگرفتن علت آن مورد مطالعه قرار دادیم. اکنون علت حرکت وتغییرات حرکت را مورد توجه قرارمی‌دهیم. این بررسی در ما اندیشهٔ نیرو را به‌وجود می‌آورد. ما نیروها را با آثاری که به‌وجود می‌آورند، مانند تمایل به‌تغییر حالت سکون یا تغییرحالت حرکت یکنواخت اجسام، تشخیص می‌دهیم. همین اثر است که در دینامیك مورد نظر است و ما با تعریف زیر آن را شروع می‌کنیم:

۲۰۳. هر عاملی که در حالت سکون یك جسم یا در حالت حرکت یکنواخت یك جسم در مسیری مستقیم تغییری ایجاد کند یا تمایل به تغییر ایجاد کند، نیرو است.

در زندگی‌روزانه با مثالهای بسیاری از حرکت اجسام که تحت اثر نیروهایی حرکت می‌کنند آشناییم. ماشین چمن‌زنی را که به‌حالت سکون در چمن افتاده است، می‌توان با کشیدن دستهٔ آن، به‌حرکت واداشت. اثر این نیرو، چرخ را به‌شتاب وامی‌دارد و سرعت چرخ را می‌توان به‌دلخواه با تغییر بزرگی نیرو تغییر داد. البته چرخ را می‌توان دوباره با واردکردن نیرویی درخلاف جهت حرکت ساکن نمود. بدیهی است که نیرو هم دارای بزرگی و هم دارای جهت است، بنابراین نیروکمیتی برداری است.

مثالهای بسیار دیگری از آثار نیروها می‌توان ارائه داد. اگر توپ فوتبال را با پا بزنیم، در جهت پا زدن شروع به‌حرکت می‌کند. هرچه پا زدن شدیدتر باشد، سرعت ابتدایی توپ بیشتر خواهد بود. یا نیز اگر گلوله‌ای رها شود تا سقوط کند، پس از برخورد با زمین به‌طرف بالا برمی‌گردد. چه نیرویی حرکات بالا و پایین را تنظیم می‌کند؟ یا اگر گلوله‌ای روی زمین طوری قرارگیرد که ساکن بماند، چه نیروهایی برآن اثر می‌کنند؟

به‌این نکته متوجه شدیم که در همهٔ این مثالها دوجسم وجود داشتند، یعنی ماشین چمن‌زنی و شخصی که دستهٔ آن را می‌گرفت و ماشین را می‌راند، توپ فوتبال و کسی که توپ را با پا می‌زد، گلوله و زمین. در هرحالت میان اجسام نیروهایی از یکی بر دیگری وارد می‌شود. می‌گوییم که بر یکی ازآنها عمل و بردیگری عکس‌العمل وارد می‌شود. اگر فقط یکی از اجسام را درنظر بگیریم می‌گوییم که نیرویی که برآن اثر می‌کند خارجی است؛ اگر هر دو جسم را درنظربگیریم، نیروها (عمل و عکس‌العمل) را نیروهای داخلی اطلاق می‌کنیم. اجسام بیشتر با یکدیگر درتماسند، اما دربعضی ازحالتها ـ مثلاً گلوله‌ای که به‌طرف زمین سقوط می‌کند یا ماه‌که به‌دور زمین می‌چرخد ـ اجسام با یکدیگر درتماس نیستند و با یکدیگر فاصله دارند.

بنابراین لازم است که به‌این موارد توجه‌کنیم: (الف) اگر جسم A را به‌حال خود رها کنیم، چگونه حرکت خواهد کرد؟ (ب) عمل یك نیروی خارجی برحرکت چگونه تأثیر خواهدکرد؟ (پ) اگر این نیروی خارجی ناشی از جسم دیگر B باشد،عمل B بر A چگونه با عکس‌العمل A بر B ارتباط دارد.

پاسخ این پرسشها به‌وسیلهٔ قانونهای حرکت نیوتون داده می‌شود، اما پیش‌از بیان این قانونها به‌یك یا دوتعریف نیازمندیم.

۳.۲ جرم یك جسم عبارت است از مقدار مادهٔ موجود در جسم.

آشکار است که این تعریف، که به وسیلهٔ خود نیوتون به‌کار برده شده است، تعریف قانع‌کننده‌ای نیست. از «مقدار ماده» چه استنباطی می‌کنیم؟ همهٔ ما با ماده آشنا هستیم و می‌توانیم آن را به عنوان یك مفهوم اساسی بپذیریم‌که به تعریف نیازمند نیست، اما درك «مقدار» که به‌معنی «حجم» نیست فوق‌العاده دشوار است.

با این‌همه، از «مقدارمادهٔ» موجود در یك جسم یا از «جرم» آن منظور یك خاصیت فیزیکی اساسی جسم است که هرگاه با تغییرحرکت جسم سروکار داریم با آن روبه‌رو می‌شویم؛ به گفتهٔ دیگر، هنگامی‌که بریك جسم نیرو وارد می‌کنیم با این خاصیت جسم روبه‌رو می‌شویم. بعداً خواهیم دید (۳.۱۱) که اصول اساسی نیوتون، که به قانونهای حرکت نیوتون معروف است،ما را به‌روشی هدایت می‌کندکه جرمهای دوجسم را مقایسه کنیم. در واقع، نشان خواهیم داد که نسبت جرم دوجسم برابر نسبت وزن آن دوجسم است. پس اگر جرم جسمی معلوم باشد، وآن را به‌عنوان واحد اساسی جرم بپذیریم، جرم هرجسم دیگر را می‌توانیم تعیین کنیم.

واحد اساسی جرم در دستگاه بین‌المللی واحدها (SI) کیلوگرم است، و آن جرم وزنه‌ای است که از پلاتین-ایریدیم ساخته شده است و شکل هندسی ساده‌ای دارد. این جرم جای کیلوگرم استانده‌ای را که پیش‌از این جرم یك دسیمترمکعب آب در دما و فشارمعینی بودگرفته است. واحد اساسی جرم در دستگاه انگلیسی پوند استاندهٔ سلطنتی است و آن جرم وزنه‌ای است که از پلاتین ساخته شده و به‌شکل استوانه‌ای است‌که ارتفاع آن تقریباً برابر با قطر آن است.

باید توجه داشت که جرم فقط دارای بزرگی است، و بنابراین یك کمیت اسکالر است.

۴.۳. اندازهٔ حرکت خطی یك نقطهٔ مادی برابر است باحاصلضرب جرم آن نقطهٔ مادی در تندی آن.

اگر m جرم یك نقطهٔ مادی و v تندی آن باشد، اندازهٔ حرکت آن نقطهٔ مادی mv است. برای واحد اندازهٔ حرکت نام خاصی وجود ندارد؛ اگر m برحسب کیلوگرم و v برحسب متر برثانیه باشد واحد اندازهٔ حرکت در دستگاه بین‌المللی واحدها kg - m/s است.

لازم است توجه داشت که اندازهٔ حرکت یك‌کمیت برداری است، یعنی هم شامل بزرگی و هم شامل جهت است، وجهت mv درجهت v است. اگرمؤلفه‌های v به‌موازات محورهای OX و OY به‌ترتیب v_1 و v_2 باشند، مؤلفه‌های اندازهٔ حرکت به‌موازات این محورها به ترتیب mv_1 و mv_2 است. به همین طریق، اگر چند نقطهٔ مادی وجود داشته باشد، اندازهٔ حرکت‌کل نقطه‌های مادی برابر بردار برایند اندازهٔ حرکتهای جداگانه است. پس اگر جسمی را با ابعاد معین، مجموعه‌ای از نقطه‌های مادی درنظر بگیریم، اندازهٔ حرکت جسم برابر با بردار برایند اندازهٔ حرکتهای نقطه‌های مادی جداگانه است. در ساده‌ترین حالت حرکت انتقالی جسم، یعنی وقتی که همهٔ نقاط جسم در مسیرهای مستقیم متوازی با تندیهای یکسان حرکت می‌کنند، اندازهٔ حرکت جسم برابر است با حاصلضرب جرم‌کل جسم درتندی آن.

البته، درحالت‌کلی، حرکت جسم، تنها یك حرکت انتقالی نیست؛ بلکه گاهی توأم با حرکت دورانی است. در این حالت کمیت دیگری به‌نام اندازهٔ حرکت زاویه‌ای برای توجیه حرکت دورانی به‌کار می‌آید. از این‌کمیت بعداً گفتگو خواهیم‌کرد. درحال حاضر، حالتی را درنظر می‌گیریم‌که اگرجسم را نتوان یك‌نقطهٔ مادی فرض‌کرد، دست‌کم حرکت

دورانی نیز نداشته باشد؛ بنابراین اندازهٔ حرکت آن برابر است با حاصلضرب جرم آن در تندی حرکت انتقالی آن.

۵.۳. قانونهای نیوتون را در بارهٔ حرکت می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد:

۱ــ هر جسم به حالت سکون یا حرکت یکنواخت درمسیر مستقیم باقی می‌ماند، مگر آنکه حالت آن جسم، به‌سبب نیروهای خارجی تغییر کند.

۲ــ تغییر اندازهٔ حرکت در واحد زمان متناسب بــا نیروی خارجی وارده است و در جهت مسیر مستقیمی صورت می‌گیرد که نیرو در آن جهت وارد شده است.

۳ــ برای هــر عملی همیشه عکس‌العملی مساوی و درخلاف جهت وجود دارد؛ یــا عملهای هر دو جسم بریکدیگر همیشه متساوی و در خلاف جهت یکدیگرند.

دو قــانون اول را بیشتر مدیــون گالیله، و چند نفر از معاصران نیوتون، به‌ویژه هویگنس، که در بسط آن سهیم بوده‌اند هستیم، اما نیوتون نخستین کسی بود که آنها را به‌شکل رسمی در کتاب خودش پرنسیپیا یا اصول[1]، که در ۱۶۸۷ میلادی منتشر شد وارد کرد. سهم نیوتون در این زمینه بسیار برجسته است.

دلیل کاملی برای این قانونها، تجربی یا به‌صورت دیگر، نمی‌توان ارائه داد.

اینها اصولی اساسی یا فرضیه‌هایی هستند که علم دینامیك نیوتونی مبتنی بر آنهاست و مانند قانونهای علمی، فقط تا آنجا که منجر به نتیجه‌هایی می‌شوند کــه با مشاهده وفق می‌دهند درست هستند.

البته تجربهٔ عادی درستی‌آنها را به‌طورکلی ثابت می‌کند، اما بایدکاملترین امتحان برای آزمایش و مشاهدهٔ دقیق انجام شود.

مثلاً، به‌فرض‌آنکه این‌قانونها درست باشند، حرکتهای ماه وسیاره‌ها را باید بتوان محاسبه‌کرد و سپس با نتیجه‌های مشاهده شده مقایسه‌کرد. وضع سیاره‌ها، زمــان کسوف و مانند اینها حساب شده‌اند و چند سال پیش در نــوتیکال آلمانالك[2] چــاپ شده‌اند. جاها و زمانهای پیشبینی شده به‌طور قابل‌توجهی بــا مشاهده تطبیق می‌کنند، و این خود دلیلی بسیار عالی بردرستی این قانونهای اساسی است.

۶.۳. در بسیاری از این محاسبه‌های نجومی قانون دیگری که به‌وسیلهٔ نیوتون بیان شده

۱ـ Principia

۲ـ Nautical Almanac

است اضافه می‌شود. آن را قانون نیوتون در بارهٔ جاذبه یا گاهی قانون جاذبهٔ نیوتون می‌نامند و به‌صورت زیر بیان می‌کنند:

هر نقطهٔ مادی، نقطهٔ مادی دیگری را با نیرویی جذب می‌کند که با حاصلضرب جرم دو نقطهٔ مادی متناسب است و با مجذور فاصلهٔ دو نقطه نسبت عکس دارد.

پس نیروی جاذبهٔ F که میان دونقطهٔ مادی به‌جرمهای m_1 و m_2 و به فاصلهٔ r اثر می‌کند به‌وسیلهٔ رابطهٔ زیر داده می‌شود:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

که درآن G، مقداری است ثابت، به‌نام ثابت جاذبه. در دستگاه SI که F برحسب نیوتون (بند ۹.۳ را نگاه‌کنید)، m_1 و m_2 برحسب کیلوگرم و r برحسب متر اندازه‌گیری می‌شوند، G به‌طور تجربی برابر $۶/۶۷۰ \times ۱۰^{-۱۱}$ به‌دست می‌آید.

آزمایشهای بسیاری به‌عمل آمده است تا درستی این قانون را مستقیماً تحقیق‌کنند، اما دلیل اصلی بردرستی آن، در این‌مورد نیز تطبیق آن با مشاهدهٔ محاسبات متعددی است که مبتنی برآن بوده است.

توجه به‌این نکته نیز جالب است‌که بعضی از مشاهده‌های نجومی‌که نمی‌توانستند با قانونهای نیوتون، و ازجمله قانون جاذبه، توجیه شوند با تئوری نسبیت که نخستین‌بار به‌وسیلهٔ اینشتین در ۱۹۰۵ پیشنهاد شد، بیان شدند. از این تئوری، مکانیك جدیدی به‌وجودآمد، که مبتنی براصولی بودکه کاملاً با اصول‌مکانیك نیوتونی تفاوت داشت. بیان ریاضی قانونهای حرکت در مکانیك نسبیتی فقط به‌طور محسوس در عبارتهایی از مکانیك نیوتونی تفاوت دارد که درآنها تندی نقطهٔ مادی بسیار زیاد و قابل مقایسه با تندی نور است.[1] برای تندیهای معمولی‌مانند تندیهایی‌که در زندگی روزمره با آنها روبه‌رو هستیم، فرمولهای دومکانیك خیلی به‌هم شبیهند، و دستگاه دینامیك نیوتونی‌که اکنون آن را شرح خواهیم داد، درست است.

به‌همین ترتیب، قانون نیوتون دربارهٔ جاذبه با تقریب کافی در بسیاری از حالتها قابل قبول است.

لازم است‌توجه‌داشت که نیرویی‌که بریك جسم وارد می‌شود و به‌سبب کشش جاذبه‌ای زمین است وزن جسم نامیده می‌شود. وزن، یك کمیت برداری است و به‌طور قائم و از بالا به‌پایین اثر می‌کند.

۱ــ تندی نور درخلأ برابر $۳ \times ۱۰^۸\ \mathrm{m/s}$ است.

۷.۳. قانون اول حرکت

این قانون در اصل، تعریفی برای نیرو است. این قانون می‌گوید که نیرو به‌جسم شتاب می‌دهد، وفقط اگر برایند نیرویی نباشدکه برجسم اثرکند، جسم با تندی یکنواخت، یعنی با سرعت یکنواخت درمسیری مستقیم، به‌حرکت خود ادامه خواهد داد.

این مفهوم نیرو که امروزه مسلم است به‌وسیلهٔ گالیله بیان شد. این مفهوم کاملاً آشکار و بدیهی نیست. زیرا درغیراین‌صورت لازم نبود که برای درك آن تا قرن هفدهم، یعنی تقریباً دوهزار سال بعد از روزهای طلایی علم یونان، صبرکنیم.

به مثال ماشین‌چمن‌زنی که در بند ۲.۳ یادآور شدیم برمی‌گردیم تا ببینیم هنگامی که به‌کشیدن دستهٔ ماشین ادامه نمی‌دهیم چه روی می‌دهد. اگر چمن مسطح باشد، حرکت ماشین چمن‌زنی کند می‌شود و بالاخره ماشین می‌ایستد. میزان کند شدن بستگی به‌عاملهای بسیار دارد، مانند صافی ماشین چمن‌زنی، نرم یا تر بودن چمن؛ اما در هرحالت، کند شدن حرکت ماشین چمن‌زنی به‌سبب بعضی از نیروهای اصطکاکی است که برمحور و سطح تماس ماشین با چمن وارد می‌شود. این نیروها همیشه هنگامی که ماشین درحال حرکت است وجود دارند. وقتی که نیرویی که بر دسته وارد می‌شود کمتر از این نیروهای اصطکاکی باشد، نیروی مؤثر حرکت دهندهٔ ماشین به‌طرف جلو است. شتاب یا شتاب منفی ماشین چمن‌زنی را می‌توان به‌دلخواه، با تغییر نیروی وارده، تغییر داد. هنگامی که نیروی وارده درست برابر نیروهای اصطکاکی باشد، ماشین به‌حرکت با سرعت یکنواخت ادامه می‌دهد. این موضوع به ما کمك می‌کند که بفهمیم چرا نگاهداشتن ماشین درحالت حرکت با تندی یکنواخت از حالت متوقف ساختن آن، یعنی حالتی که باید به ماشین شتاب داده شود، آسانتر است.

به‌همین‌طریق، اگرجسمی بر روی یك‌میز افقی به‌حال سکون باشد، برایند نیروهای وارد برآن باید صفر باشد، یعنی وزن که به‌طور قائم و به‌طرف پایین است باید با رانش میزکه درسطح تماس برجسم وارد می‌شود تعادل داشته باشد.

قانون اول در واقع حالت خاصی از قانون دوم است که هم‌اکنون به ذکر آن خواهیم پرداخت.

۸.۳. قانون دوم حرکت

قانون دوم ما را به‌تعریف واحدهای نیرو و پیریزی معادلهٔ اساسی دینامیك قادر می‌کند.
فرض‌کنید نیرویی برابر F برجرمی برابر m شتابی برابر a بدهد.

دراین صورت برطبق قانون دوم،

$$F = k \times (\text{میزان تغییر اندازهٔ حرکت})$$

که k ثابت ویژه‌ای است.

$$\therefore \quad F = k \times (\text{میزان تغییر } mv)$$

به‌فرض آنکه m مقداری است ثابت،

$$= km \times (\text{میزان تغییر } v)$$

$$= kma$$

$$\therefore \quad F = kma$$

بهتر است واحد نیرو را طوری انتخاب‌کنیم که k برابر واحد شود، یعنی هنگامی که $m = ۱$ و $a = ۱$ است، $F = ۱$ شود. اگر چنین انتخابی بکنیم واحد نیرو چنین خواهد بود.

واحد نیرو عبارت از نیرویی است که اگر بر جرم واحد وارد شود، شتابی برابر واحد به‌آن بدهد.

بنابراین معادلهٔ اساسی چنین می‌شود:

$$F = ma$$

توجه داشته باشیدکه همان‌طورکه در قانون اول بیان شد، هرگاه $F = ۰$ باشد $a = ۰$ است.

از این گذشته، $F = ma$ یك معادلهٔ برداری است، یعنی همان‌طورکه درقسمت دوم قانون دوم بیان شد، شتاب $\vec{a}$ درهمان جهتی است که نیروی $\vec{F}$ وارد می‌شود (بند ۱۲.۳ را ببینید). بنابراین باید چنین نوشت:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

۹.۳. وقتی که واحد جرم، گرم، و واحدهای‌طول و زمان، سانتیمتر و ثانیه‌اند، واحد نیرو، دین[۱] نامیده می‌شود. علامت اختصاری آن dyn است.

در دستگاه SI که متر، واحد طول، کیلوگرم، واحد جرم، ثانیه، واحد زمان است، واحد نیرو نیوتون[۲] نامیده می‌شود. یك نیوتون برابر $۱۰^۵$ دین است. علامت اختصاری نیوتون N است.

۱- dyne ۲- newton

بنابراین نیوتون (با علامت N) نیرویی است که به جرم یك کیلوگرم شتابی برابر $1\ \mathrm{m/s^2}$ می‌دهد.

$$F\,(\text{نیوتون}) = m\,(\mathrm{kg})\,a\,(\mathrm{m/s^2})$$

دین و نیوتون از واحدهای مطلق نیرو هستند، زیرا مقدار آنها همه‌جا یکسان است، و مانند واحدی که در بند بعد ذکر خواهیم کرد بستگی به‌جاذبهٔ زمین ندارد.

۳.۱۰. واحد نیرو که درکارهای فنی به‌کار می‌رود کیلوگرم نیرو (kgf) است، وآن مقدار نیرویی است که زمین با آن مقدار نیرو جسمی به‌جرم یك کیلوگرم را جذب می‌کند. این واحد ثابت نیست، بلکه درجاهای مختلف زمین دارای مقدارهای متفاوت است.

دانسته‌ایم که اجسام با شتابی که به g نشان می‌دهیم به زمین سقوط می‌کنند (بند ۹.۲). این شتاب در جاهای مختلف زمین مقدارهای متفاوت دارد. مقدار تقریبی آن $9{,}8\ \mathrm{m/s^2}$ است.

نیرویی که به‌جرم یك کیلوگرم شتابی برابر $g\ \mathrm{m/s^2}$ می‌دهد برابراست با g نیوتون بنابراین

$$1\ \mathrm{kgf} = 9{,}8\ \mathrm{N} \quad \text{تقریباً}$$

پس نیوتون برابراست با وزن جسمی به‌جرم $\frac{1}{9{,}8}$ کیلوگرم که تقریباً برابر است با $0{,}102\ \mathrm{kg}$.

۳.۱۱. پیش از این اشاره کردیم (۹.۲) که تجربه نشان داده است که در یك محل معین، اجسامی که جرمهای مختلف دارند، در خلأ، با شتاب یکسان g سقوط می‌کنند.

پس اگر W_1 و W_2 وزنهای جرمهای m_1 و m_2 در یك محل باشند، با استفاده از $F = ma$ داریم:

$$W_1 = m_1 g$$

و

$$W_2 = m_2 g$$

$$\therefore \quad \frac{W_1}{W_2} = \frac{m_1}{m_2}$$

یعنی وزنهای اجسام دریك محل متناسب با جرمهای آنهاست.

این موضوع ما را قادر می‌کند که، همان‌طور که نیوتون نشان داد، با مقایسهٔ وزنهای اجسام به‌وسیلهٔ ترازوی معمولی، جرمهای آنها را مقایسه کنیم (۳.۲ را ببینید). اگر

مجموعه‌ای از جرمها یا وزنهای استانده را به‌جاهای مختلف ببریم، نتیجه خواهیم گرفت که جرم هرجسم پیوسته در همه‌جا یکسان است.

از طرف دیگر، ترازوی فنری، شدت جاذبهٔ زمین را بر یك جسم اندازه می‌گیرد. یعنی‌وزن جسم را تعیین‌می‌کند. چنین ترازویی درجاهای مختلف زمین‌برای وزنهٔ یکسانی که به‌آن آویزان شده است نتیجه‌های متفاوت خواهد داد.

پس جرم، یك ثابت اساسی جسم است و در همه‌جا یکسان است، و حال آنکه وزن جسم از جایی به‌جای دیگر تغییر می‌کند.

۱۲.۳. قسمت دوم قانون دوم شامل اصل استقلال فیزیکی نیروهاست. تغییر اندازهٔ حرکت که به‌وسیلهٔ نیروی دلخواهی تولید شده است درجهتی روی می‌دهدکه نیرو درآن جهت وارد شده است. اگرچند نیرو بریك نقطهٔ مادی اثرکنند، هریك تغییر اندازهٔ حرکتی به‌وجود می‌آورد که کاملاً مستقل از تغییرهای اندازهٔ حرکت نیروهای دیگر است. برایند تغییر اندازهٔ حرکت همان برایند تغییرهای جداگانه‌ای است‌که بر اثر تك‌تك نیروها تولید شده است.

مثلاً اگر دونیروی $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ برجسمی به جرم m وارد شوند، شتابهایی برابر $\vec{a}_1$ و $\vec{a}_2$ تولید می‌کنندکه برطبق معادله‌های زیر داده می‌شوند:

$$\vec{F}_1 = m\vec{a}_1$$

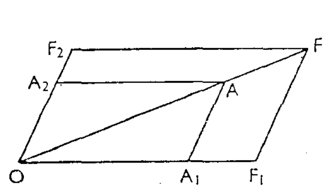
و

$$\vec{F}_2 = m\vec{a}_2$$

از جمع‌کردن این دومعادله نتیجه می‌شود:

$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = m(\vec{a}_1 + \vec{a}_2)$ ، یعنی $\vec{F} = m\vec{a}$ ، که درآن $\vec{F}$ برایند نیروهای $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ است و $\vec{a}$ برایند شتابهای $\vec{a}_1$ و $\vec{a}_2$ است.

آشکار است که $\vec{a}$ باید‌هم‌جهت با $\vec{F}$ باشد. این‌را می‌توان با رسم‌هندسی‌زیرنشان داد.



شکل ۳-۱

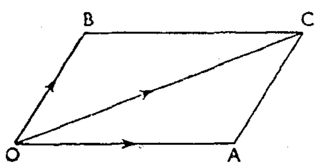
OA_1 و OA_2 را به‌ترتیب برای نشان دادن $\vec{a_1}$ و $\vec{a_2}$ رسم می‌کنیم (شکل ۳-۱). در این صورت قطر OA متوازی‌اضلاع OA_1AA_2 شتاب $\vec{a}$ را نشان می‌دهد. فرض کنیم که F_1 نقطه‌ای بر OA_1 یا امتداد OA_1 است به‌طوری که $OF_1 = m(OA_1)$ ؛ در این صورت OF_1 نشان دهندهٔ $\vec{ma_1}$ ، یعنی $\vec{F_1}$ است. به‌طریق مشابه، اگر F_2 نقطه‌ای بر OA_2 یا امتداد OA_2 باشد به‌طوری که $OF_2 = m(OA_2)$ ، دراین صورت OF_2 نشان دهندهٔ $\vec{ma_2}$ ، یعنی $\vec{F_2}$ است. اگر متوازی‌الاضلاع OA_1AA_2 را کامل کنیم و قطر OF را رسم کنیم، دراین صورت OF به‌طور کامل $\vec{ma_1}+\vec{ma_2}$ یعنی $\vec{F_1}+\vec{F_2}$ یا $\vec{F}$ را نشان می‌دهد.

اما به‌طریق هندسی از راه مثلثهای متشابه، می‌توان نشان داد که قطرهای OA و OF باید بریك امتداد قرار گیرند و OF برابر $m(OA)$ باشد، یعنی

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad \text{یا} \quad \vec{OF} = m\,\vec{OA}$$

در اینجا، در واقع، برمبنای قانون دوم نیوتون، نشان دادیم که، چون شتابها به‌صورت جمع برداری با هم ترکیب می‌شوند، نیروها نیز به‌این‌صورت با یکدیگر ترکیب می‌شوند. این نتیجه را غالباً متوازی‌الاضلاع نیروها می‌گویند که ممکن است به‌صورت زیر بیان شود:

اگر بر یك نقطهٔ مادی که در O واقع است دو نیرو وارد شود که از نظر بزرگی و جهت با خطوط OA و OB نمایش داده شوند، برایند آنها از نظر بزرگی و جهت قطر OC متوازی‌الاضلاع $OACB$ است.



شکل ۳-۲

این قضیهٔ اساسی استاتیك است (۵.۱۰ را ببینید) که در اینجا از قانونهای حرکت نیوتون آن را نتیجه گرفتیم. این نتیجه، نخستین بار به همین طریق به وسیلهٔ نیوتون به‌وضوح تنظیم شد.

۱۳.۳. قانون سوم حرکت

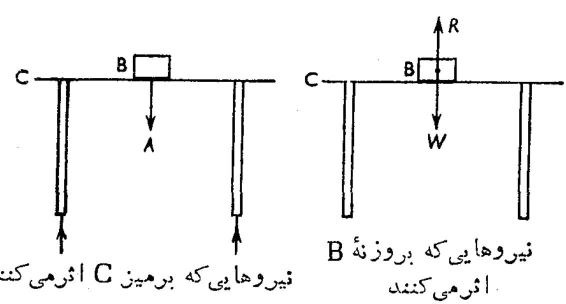
این قانون توضیح می‌دهد که اگر دوجسم B و C بریکدیگر اثر کنند، عمل B برروی C مساوی و درخلاف جهت عکس‌العمل C برروی B است.

پس اگر وزنهٔ B روی میز افقی C قرار گیرد، نیرویی به‌طرف پایین برمیز وارد می‌کند که آن را به A نمایش می‌دهیم (شکل ۳-۳) وآن عمل B برروی C است. به‌طریق مشابه وزن B تحت اثر نیرویی است به‌طرف بالا که ناشی از میز C است، و ما آن را با R نمایش می‌دهیم (شکل ۳-۳)، وآن عکس‌العمل C برروی B است.

برطبق قانون سوم نیوتون $A = R$.

به‌یاد داریم که تنها نیرویی که بر B اثرمی‌کند وزن آن W است که به‌طور قائم و به‌طرف پایین است. نیروهای دیگری که بر C اعمال می‌شوند معین نشده‌اند، اما مسلماً نیروهایی به‌طور قائم و به‌طرف بالا برپایه‌های میز و درمحل تماس آنها با زمین اعمال می‌شوند (اگر دوجسم وجود داشته باشند، بهتر آن است که دوشکل رسم شود و نیروهایی که برهرجسم وارد می‌شود جداگانه مشخص شود).

دراین حالت، و دربسیاری حالتهای دیگر، راه مستقیمی برای اثبات اینکه A و R برابرند نداریم. اما مثالی در ئیدروستاتیك وجود دارد که درآن می‌توان مستقیماً نیروهای عمل و عکس‌العمل را اندازه‌گیری کرد ونشان داد که با یکدیگر برابر و درخلاف جهت یکدیگرند.



شکل ۳-۳

فعلاً تأکید می‌کنیم که این قانون، که آن را مدیون نبوغ نیوتون هستیم، تا آنجا که نتیجه‌های مبتنی برآن با مشاهده وفق می‌دهد، درست است.

مثال جالب توجهی از عمل و عکس‌العمل به وسیلهٔ حرکت ماه به‌دور زمین ارائه می‌شود. عمل ماه برروی زمین کشش جاذبه است که حرکت ماه را به‌دور زمین دریك مسیر

تقریباً دایره‌ای تأمین می‌کند. عکس‌العمل ماه برروی زمین، کشش جاذبه‌ای است برابر و درخلاف جهت عمل زمین برروی ماه، و این‌عکس‌العمل، جزر و مد اقیانوسها را تولید می‌کند. مثال دیگری ازعمل و عکس‌العمل، هواپیماهای جت است. هوا به‌داخل محفظه‌ای مکیده می‌شود و پس ازگرم شدن از سوراخ باریکی به‌بیرون رانده می‌شود. رانده شدن هوا به بیرون، تولید عکس‌العملی مساوی و درخلاف جهت بر روی هواپیما می‌کند و در نتیجه هواپیما را به‌جلو می‌راند.

در اینجا اشاره می‌کنیم که بر اساس قانون سوم، بعداً، یکی از مهمترین اصول دینامیك را که اصل اندازهٔ حرکت خطی نامیده می‌شود، نتیجه خواهیم گرفت. این اصل را ممکن است به‌صورت زیر بیان کرد:

در هر دستگاه که شامل نقاطی مادی است که یکدیگر را جذب می‌کنند یا با یکدیگر برخورد دارند، اندازهٔ حرکت خطی در هرجهت ثابت دلخواه، بدون تغییر باقی می‌ماند، مگرآنکه درآن جهت یك نیروی خارجی وارد شود.

این اصل، دربخش بعدکه مربوط به‌ضربه است مورد استفاده قرار خواهدگرفت.

۳.۱۴. در معادلهٔ $F=ma$، نیروی F و در نتیجه شتاب a ممکن است ثابت یا متغیر باشد.

فعلاً حالتهایی‌را درنظرمی‌گیریم که اینها ثابت هستند، وحرکت دریك مسیرمستقیم صورت می‌گیرد.

۳.۱۵. اصطکاك

دربسیاری از مسائل فرض می‌شودکه سطحی‌که جسم برآن واقع است، صیقلی است، یعنی میان سطح و جسم نیرویی‌که مایل باشد از حرکت جسم در امتداد سطح جلوگیری کند وجود ندارد. تنها نیرویی‌که برجسم اثر می‌کند و به‌سبب تماس آن با سطح است عمود برسطح است، و آن را عکس‌العمل قائم می‌نامند. البته این یك حالت ایده‌آل است، و در تمام حالتهای واقعی، هنگامی‌که جسمی برروی یك سطح حرکت می‌کند نیرویی به‌نام اصطکاك وارد عمل می‌شودکه مایل است از حرکت جسم‌جلوگیری کند. به‌وسیلهٔ آزمایش معلوم‌شده است‌که، وقتی‌که جسمی برروی جسم دیگرحرکت می‌کند و با آن تماس دارد، نسبت نیرویی‌که مایل است از حرکت جلوگیری‌کند به عکس‌العمل قائم میان دو سطح مقداری است ثابت که فقط بستگی به ماهیت دو سطح تماس دارد. این مقدار ثابت را

ضریب اصطکاك دینامیکی برای سطوح موردنظر می‌گویند. اگر R عکس‌العمل قائم میان دوسطح و F نیروی اصطکاك باشد

$$F=\mu R \quad \text{یا} \quad \frac{F}{R}=\mu$$

که درآن μ ضریب اصطکاك دینامیکی است.

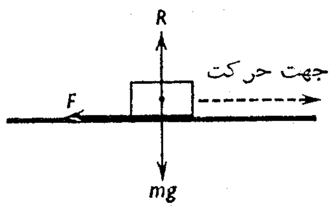
مساحت سطح تماس هرقدر باشد، این نتیجه درست است. ما آن را برای یك نقطهٔ مادی به‌کار می‌بریم.

اگر یك جسم یا یك نقطهٔ مادی روی سطحی افقی درحال حرکت باشد (شکل۳ـ۴) وهیچ نیروی دیگری که نسبت به افق مایل‌باشد برآن وارد نشود، عکس‌العمل‌قائم عبارت خواهد بود از

$$R=mg$$

و بنابراین

$$F=\mu mg$$



شکل ۳ـ۴

اگر یك نقطهٔ مادی برروی سطح شیبداری‌که با افق زاویهٔ α می‌سازد حرکت‌کند، و نیروهای دیگری، جز درامتداد سطح شیبدار، برآن وارد نشوند، عکس‌العمل میان سطح و نقطهٔ مادی برابر است با

$$mg\cos\alpha$$

و بنابراین

$$F=\mu mg\cos\alpha$$

اگر هر نیروی دیگری، از قبیل نیروی‌کشش نخ، وجود داشته باشد و مایل باشد که نقطهٔ مادی را در روی سطح بکشد، عکس‌العمل قائم سطح و بنابراین اصطکاك را کم می‌کند. به طریق مشابه اگر نقطه تحت تأثیر نیروهایی باشد که مایلند آن را در روی سطح به‌طرف بالا بکشند، اصطکاك زیاد خواهد شد.

۳.۱۶. مثال۱: چه نیرویی به جسمی به جرم $۹\ \mathrm{kg}$ در مدت یک دقیقه تندیی برابر $۲۵\ \mathrm{km/h}$ می‌دهد؟

حل: چون یکی از سرچشمه‌های اشتباه در حل مسائل دینامیک به‌کار بردن واحدهای نادرست است بهتر است که همیشه اندازه‌گیری و محاسبه‌ها را در واحدهای SI انجام داد. در این دستگاه داریم:

$$۲۵\ \mathrm{km/h} = \frac{۲۵ \times ۱۰۰۰}{۳۶۰۰} = \frac{۲۵۰}{۳۶}\ \mathrm{m/s}$$

اکنون باید شتاب لازم را برای آنکه پس از ۶۰ ثانیه به‌جسم چنین تندیی بدهد حساب کنیم:

با به‌کار بردن $v = v_\circ + at$

$$\frac{۲۵۰}{۳۶} = ۶۰a$$

$$\therefore \quad a = \frac{۲۵}{۲۱۶}\ \mathrm{m/s^۲}$$

جرمی‌که نیرو برآن اعمال شده است برابر است با $۹\ \mathrm{kg}$. نیروی لازم برای‌آنکه به‌چنین‌جرمی شتابی برابر a بدهد، با استفاده ازمعادلهٔ $F = ma$ به‌دست می‌آید:

$$F = ۹ \times \frac{۲۵}{۲۱۶}\ \mathrm{N}$$

$$= \frac{۲۵}{۲۴}\ \mathrm{N}$$

مثال۲: لوکوموتیو و قطاری روی هم $۲۰۳\ \mathrm{Mg}$ جرم دارند. لوکوموتیو می‌تواند قطار را با نیرویی برابر نیروی وزن $۳/۷۷\ \mathrm{Mg}$ بکشد. مقاومت در مقابل حرکت قطار $\frac{۱}{۱۰۰}$ وزن آن است، و هنگامی‌که ترمز گرفته می‌شود مقاومتی برابر یك پنجم وزن قطار به‌وجود می‌آید. قطار از حال سکون به‌راه می‌افتد و تندی آن به‌طور یکنواخت اضافه می‌شود تا به $۴۰\ \mathrm{km/h}$ برسد. در این‌هنگام موتور خاموش می‌شود و ترمزها نیز به‌کار می‌افتند. تعیین‌کنید تمام مسافتی‌که تا قبل از توقف می‌پیماید و مدت زمان‌کل این حرکت را.

حل: وقتی‌که قطار حرکت می‌کند نیروی کشش برابر است با $۳/۷۷ \times ۱۰۰۰g\ \mathrm{N}$،

زیرا $1\,\mathrm{Mg} = 1000\,\mathrm{kg}$. مقاومت درمقابل حرکت قطار برابر $203 \times 10 g\,\mathrm{N}$ است. بنابراین نیروی شتاب دهنده برابر است با

$$\therefore \qquad (3770 - 2030) g\,\mathrm{N} = 1740 g\,\mathrm{N}$$

$$\therefore \qquad \text{شتاب} = \frac{F}{m} = \frac{1740 \times 9/8}{203 \times 1000}\,\mathrm{m/s^2}$$

$$= 0/084\,\mathrm{m/s^2}$$

نیز

$$40\,\mathrm{km/h} = \frac{40 \times 1000}{3600}\,\mathrm{m/s}$$

برای اینکه ببینیم قطار چه مسافتی را می‌پیماید تا با شتاب $0/084\,\mathrm{m/s^2}$ به تندی $\frac{100}{9}\,\mathrm{m/s}$ برسد می‌نویسیم:

$$v^2 = v_0^2 + 2ax$$

پس

$$\left(\frac{100}{9}\right)^2 = 0/168x$$

$$\therefore \qquad x = \frac{10^4}{81 \times 0/168}$$

$$= 734/7\,\mathrm{m}$$

برای پیدا کردن زمان لازم می‌نویسیم:

$$v = v_0 + at$$

$$\frac{100}{9} = 0/084t$$

$$\therefore \qquad t = 132/3\,\mathrm{s}$$

برایند نیروهای کندکننده برابر است با $\left(\frac{1}{100} + \frac{1}{5}\right)$ وزن قطار و بنابراین

$$\therefore \qquad \text{شتاب منفی} = 0/21 \times 9/8\,\mathrm{m/s^2}$$

برای آنکه تعیین کنیم چه مسافتی طی می‌شود تا تندی قطار از $\frac{100}{9}\,\mathrm{m/s}$ به‌صفر برسد می‌نویسیم:

$$0 = \left(\frac{100}{9}\right)^2 - 2 \times 0/21 \times 9/8x$$

$$\therefore \quad x = \frac{10^4}{81 \times 0/42 \times 9/8}\,\mathrm{m}$$

$$= 30/0\ \mathrm{m}$$

برای اینکه تعیین کنیم پس از چه مدت قطار متوقف می‌شود می‌نویسیم:

$$0 = \frac{100}{9} - 0/21 \times 9/8t$$

$$\therefore \quad t = \frac{100}{9 \times 0/21 \times 9/8} = 5/4\,\mathrm{s}$$

مسافت کلی که طی شده است ۷۶۴/۷ متر است.

مدت زمان کل برابر است با ۱۳۷/۷ ثانیه.

توجه- وقتی که قطار با تندی یکنواخت حرکت می‌کند، برایند نیروهایی که برآن وارد می‌شوند صفر است، یعنی در این حالت کشش موتور باید درست برابر با مقاومتها باشد. اگر کشش بیشتر از مقاومتها باشد، قطار شتاب پیدا خواهد کرد.
اگر جسمی در امتداد سطح شیبدار با تندی یکنواخت پایین بیاید، مؤلفهٔ وزن آن جسم در امتداد سطح شیبدار باید مساوی با مقاومت باشد.

مثال۳: برمسیری افقی، قطاری با سرعت یکنواخت ۴۸ km/h حرکت می‌کند و به‌یک سربلندی می‌رسد که شیب آن به‌نسبت ۱ به ۷۵ است. نیرویی که موتور در این مسیر وارد می‌کند با نیرویی که در مسیر افقی وارد می‌کرد تفاوتی ندارد. قطار پیش از آنکه متوقف شود چه مسافتی در این مسیرطی خواهد کرد؟ فرض می‌کنیم که مقاومت ناشی از اصطکاك و مانند آن براین‌مسیر با مقاومتی که در مسیرافقی اعمال می‌شد برابر است.

حل : چون بر مسیر افقی، قطار به‌طور یکنواخت حرکت می‌کند کشش موتور برابر است با مقاومت. وقتی که قطار به سطح شیبدار می‌رسد، این نیروها باز هم برابرند، اما اکنون مؤلفهٔ وزن قطار که به طرف پایین سطح شیبدار است حرکت قطار را کند می‌کند.
اگر جرم قطار $m\,\mathrm{kg}$ باشد، مؤلفهٔ وزن آن به طرف پایین سطح شیبدار $(mg/75)\,\mathrm{N}$ خواهد بود، و چون این نیرو، برایند نیرویی است که به‌موازات

امتداد سطح شیبدار وارد می‌شود، شتاب منفی حرکت $\frac{g}{۷۵}\,\mathrm{m/s^۲}$ خواهد بود.
تندی اولیه برابر است با ۴۸ km/h، یعنی

$$\frac{۴۸۰۰۰}{۳۶۰۰}\,\mathrm{m/s} \quad \text{یا} \quad \frac{۴۰}{۳}\,\mathrm{m/s}$$

مسافتی‌که پیموده می‌شود تا این تندی را از دست بدهد،

$$۰=\left(\frac{۴۰}{۳}\right)^۲-\frac{۲\times ۹/۸}{۷۵}x$$

$$\therefore \quad x=\frac{۱۶۰۰\times ۷۵}{۹\times ۱۹/۶}=۶۸۰\ \mathrm{m}$$

$$=۰/۶۸\,\mathrm{km}$$

مثال۴: لوکوموتیوی به‌جرم ۱۱۰ Mg به **واگنی** به جرم ۳۰ mg متصل‌شده است و‌آن را مـی‌کشد. مقاومت در مقابل حـرکت لـوکومـوتیو $\frac{۱}{۱۰۰}$ وزن آن است، و مقاومت در مقابل حـرکت **واگنی** $\frac{۱}{۱۵۰}$ وزن آن است. اگـر نیروی کل محرك که لوکوموتیو اعمال می‌کند برابروزن جسمی به‌جرم ۳ Mg باشد، کشش درمحل اتصال چقدر خواهد بود؟

حل: باید ابتدا شتابی را که در لوکوموتیو و واگن تولید می‌شود پیدا کنیم.

$$\text{مقاومت کل}=\left(\frac{۱۱۰}{۱۰۰}+\frac{۳۰}{۱۵۰}\right)\times ۱۰^۳\times ۹/۸\,\mathrm{N}$$

$$=۱۳۰۰\times ۹/۸\,\mathrm{N}$$

$$\text{نیروی شتاب دهنده}=(۳۰۰۰-۱۳۰۰)\times ۹/۸\,\mathrm{N}$$

$$=۱۷۰۰\times ۹/۸\,\mathrm{N}$$

$$\text{جرم کل}=(۱۱۰+۳۰)\times ۱۰۰۰=۱۴۰\times ۱۰^۳\,\mathrm{kg}$$

$$\therefore \quad \text{شتاب}=\frac{۱۷۰۰\times ۹/۸}{۱۴۰۰۰۰}\,\mathrm{m/s^۲}$$

$$=۰/۱۱۹\,\mathrm{m/s^۲}$$

نیروی شتاب‌دهندهٔ واگن برابر است با

$$۳۰ \times ۱۰۰۰ \times ۰/۱۱۹ \, \mathrm{N}$$
$$= ۳۵۷۰ \, \mathrm{N}$$

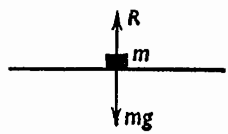
اما مقاومت ــ کشش درمحل اتصال = نیروی شتاب‌دهنده

و مقاومت واگن برابر است با

$$۳۰۰۰۰ \times \frac{۱}{۱۵۰} \times ۹/۸ \, \mathrm{N} = ۱۹۶۰ \, \mathrm{N}$$

$\therefore$ کشش درمحل اتصال $= (۳۵۷۰ + ۱۹۶۰) \, \mathrm{N} = ۵۵۳۰ \, \mathrm{N}$

مثال۵: جسمی به‌جرم m کیلوگرم برسطحی افقی قرار دارد و آن سطح با شتاب قائم $a \, \mathrm{m/s^۲}$ به‌طرف بالا حرکت می‌کند. نیروی فشارمیان جسم و سطح را پیدا کنید.



شکل ۳-۵

حل : فرض می‌کنیم عکس‌العمل میان جسم و سطح $R \, \mathrm{N}$ باشد، آشکار است که چون جسم به‌طرف بالا با شتاب حرکت می‌کند، R بزرگتر از وزن mg است.

نیروی برایند به‌طرف بالا که برجسم اثر می‌کند برابر است با $(R - mg) \, \mathrm{N}$

$$\therefore \qquad R - mg = ma$$
$$\therefore \qquad R = m(g + a)$$

اگر سطح با شتاب a به‌طرف پایین‌حرکت می‌کرد، وزن mg در این‌حالت بزرگتر از R می‌بود. در این حالت نیروی برایند به‌طرف پایین که برجسم اثر می‌کند برابر است با $(mg - R) \, \mathrm{N}$.

$$mg - R = ma$$
$$\therefore \qquad R = m(g - a)$$

اگر در حالت اخیر $a = g$ شود، در این صورت $R = ۰$ خواهد بود، یعنی میان جسم و سطح نیروی فشاری اعمال نمی‌شود.

مثال۶: گلولهٔ تفنگی از میان دوتخته به طور متوالی عبور می‌کند، و مقاومت متوسط

تختهٔ دوم ۵۰ درصد بیشتر از مقاومت متوسط تختهٔ اول است. تندی اولیه $800\ \mathrm{m/s}$ است، و گلوله درضمن عبور از هر تخته $160\ \mathrm{m/s}$ از تندیش کاهش می‌یابد. ثابت کنید که ضخامت تخته‌ها به‌نسبت ۲۷ و ۱۴ است.

حل : چون مقاومت تختهٔ دوم ۵۰ درصد بیشتر از تختهٔ اول است، شتاب منفی حاصل درآن ۱/۵ برابر شتاب منفی حاصل در تختهٔ اول خواهد بود.

فرض می‌کنیم a شتاب منفی حاصل در تختهٔ اول برحسب $\mathrm{m/s^2}$ باشد، در این صورت شتاب منفی حاصل در تختهٔ دوم $\frac{3}{2}a$ خواهد بود.

فرض می‌کنیم x_1 و x_2 ضخامت تخته‌ها باشد، در این صورت داریم:

$$640^2 = 800^2 - 2ax_1$$

$$480^2 = 640^2 - 3ax_2$$

$$\therefore \quad 2ax_1 = 1440 \times 160$$

$$3ax_2 = 1120 \times 160$$

$$\therefore \quad \frac{2x_1}{3x_2} = \frac{144}{112} = \frac{9}{7}$$

$$\therefore \quad \frac{x_1}{x_2} = \frac{27}{14}$$

توجه- درمسئله‌هایی شبیه مثال ۶، باید دقت بسیار داشت که این دوحالت را از یکدیگر تمیز داد: (الف) وقتی‌که جسم به‌طور افقی حرکت می‌کند، (ب) وقتی‌که جسم به‌طور قائم حرکت می‌کند.

درحالت (الف) اگر v_0 تندی اولیه، m جرم، x مسافت طی شده، R مقاومت متوسط، و a شتاب منفی حرکت باشد،

$$a = \frac{v_0^2}{2x} \quad \text{یا} \quad 0 = v_0^2 - 2ax$$

درنتیجه

$$R = ma = m\frac{v_0^2}{2x}$$

درحالت (ب) معادلهٔ اول به‌همان صورت است، یعنی:

$$0 = v_0^2 - 2ax$$

اما اکنون وزن mg جسم به‌طور قائم و به طرف پایین اثر می‌کند. بنابراین برایند نیروی کند کننده دیگر R نیست بلکه درصورتی‌که جسم به‌طرف پایین‌حرکت کند $R-mg$ است، و بنابراین

$$R-mg=ma$$

یعنی هنگامی‌که جسم به‌طور قائم حرکت می‌کند، مقاومت به‌اندازهٔ وزن جسم از مقاومت درحالتی‌که جسم به‌طور افقی حرکت می‌کند بیشتر است.

تمرین ۳.۱

۱ ـ شتاب حرکت را در هریک از دوحالت زیر پیدا کنید: (الف) نیرویی برابر $6\,\mathrm{N}$ برجسمی به‌جرم $12\,\mathrm{kg}$ وارد می‌شود، (ب) نیرویی برابر $6\,\mathrm{N}$ برجسمی به‌جرم $12\,\mathrm{g}$ وارد می‌شود.

۲ ـ چه نیرویی می‌تواند جسمی به‌جرم $12\,\mathrm{kg}$ را در مدت ۵ دقیقه از حال سکون به‌سرعت $15\,\mathrm{km/h}$ برساند؟

۳ ـ جسمی به‌جرم $100\,\mathrm{kg}$ تحت تأثیرنیرویی برابر $7\,\mathrm{N}$ است. چه مدت طول می‌کشد تا تندی جسم به $15\,\mathrm{km/h}$ برسد؟

۴ ـ کشتیی به‌جرم $10000\,\mathrm{Mg}$ موتورهایش را خاموش می‌کند و دراین‌حال با پیمودن مسافت $90\,\mathrm{m}$ سرعتش از $12\,\mathrm{km/h}$ به $10\,\mathrm{km/h}$ می‌رسد. به فرض آنکه مقاومت در مقابل حرکت یکنواخت باشد، مقدار مقاومت را برحسب نیوتون حساب کنید.

۵ ـ از سطح شیبداری که شیب آن $\frac{1}{112}$ است ارابه‌ای با سرعت یکنواخت پایین می‌آید. اگر همین ارابه از پایین سطح شیبدار با سرعت $18\,\mathrm{km/h}$ به‌طرف بالا رانده شود، تا قبل از توقف چه مسافتی از سطح شیبدار بالا خواهد رفت؟

۶ ـ قطاری با سرعت $60\,\mathrm{km/h}$ حرکت می‌کند. در این هنگام قطار ترمز می‌کند و پس از پیمودن $0/5\,\mathrm{km}$ می‌ایستد. نیرویی که از طرف ترمزها اعمال شده است برحسب نیوتون بر هر کیلوگرم چقدر است؟ نیز مدت زمان پس از ترمزگرفتن تا توقف کامل چقدر است؟

۷ ـ نیرویی برابر وزن جسمی به‌جرم ۱۰ گرم برجسمی به‌جرم ۲۱۸ گرم به‌مدت ۵ ثانیه اعمال می‌شود. تندی ناشی از آن و مسافتی را که جسم در این مدت طی می‌کند حساب کنید.

۸ - بزرگی نیرویی را پیدا کنید که برجسمی به‌جرم ۱ kg به‌مدت ۵ ثانیه اعمال می‌شود وآن را ازحال سکون به‌راه می‌اندازد و در این مدت ۱۰ m جلو می‌برد.

۹ - مقاومت ناشی از اصطکاك و غیره در مقابل حرکت قطاری $\frac{۱}{۱۶۰}$ وزن قطار است. اگر قطار در ریلهای افقی با سرعت ۷۲ km/h حرکت کند و دراین هنگام به‌پای مسیرشیبداری به شیب $\frac{۱}{۱۵۰}$ برسد و موتـورش را خاموش کند، چه مسافتی از این جادهٔ شیبدار بالا خواهد رفت تا متوقف شود؟

۱۰- قطاری کـه به طور یکنواخت جـاده‌ای افقی را بـا سرعت ۸۰ km/h می‌پیماید به‌یك سربالایی‌می‌رسد که شیب‌آن $\frac{۱}{۷۵}$ است. نیرویی کـه موتور به هنگام بالارفتن ازسربالایی اعمال می‌کند ثابت و برابر $\frac{۱}{۱۰۰}$ وزن قطـار است. مقاومت (بـر اثـر اصطکاك و مانند آن) ثابت و برابر $\frac{۱}{۱۵۰}$ وزن کل قطار است. ثـابت کنید کـه قطار پس از بالارفتن ۲/۵ km سرانجام متوقف خواهد شد.

۱۱- برمسیری مستقیم مشاهده می‌شود که جسمی به‌جرم ۲۵ گرم در ثانیه‌هـای متوالی به‌ترتیب در ۳۶۹، ۶۱۵ و ۸۶۱ سانتیمتری مبدأ است. ثابت کنید کـه این حرکت ناشی از اعمال نیرویی‌ثابت است. مقدار این‌نیروی ثابت را تعیین کنید.

۱۲- برسطح شیبداری بـه‌شیب $\frac{۱}{۱۴۰}$ ارابه‌ای از حال سکون به‌راه می‌افتد و تندی آن پس‌از ده دقیقه به ۲۵ km/h می‌رسد. مقاومت درمقابل‌حرکت را برحسب نیوتون برای هر کیلوگرم جرم ارابه تعیین کنید.

۱۳- نیرویی برابر با وزن ۱ Mg به‌مدت ۳ ثانیه برجسمی به‌جرم ۵ تن اعمال می‌شود. تندی حاصله و مسافتی را که جسم در این مدت طی می‌کند تعیین کنید.

۱۴- جسمی به‌جرم ۱۰ kg برمیزی افقی قرار دارد و میز به‌سمت بـالا حرکت می‌کند. (الف) میز باتندی ثابت ۵ m/s حرکت می‌کند، (ب) میز باشتاب ثابت ۵ $m/s^۲$ حرکت می‌کند. در هرحالت عکس‌العمل میز را تعیین کنید.

۱۵- شخصی به‌جرم ۷۰ kg روی کف آسانسوری ایستاده است. هنگامی‌که آسانسور با شتاب یکنواخت ۴ $m/s^۲$، (الف) به‌طرف‌بالا، (ب) به‌طرف پایین، حرکت می‌کند، عکس‌العمل کف آسانسور را تعیین کنید.

۱۶- کفهٔ ترازویی‌که درآن وزنه‌ای به‌جرم ۵۰ g نهاده شده است با شتاب ثابت به‌بالا کشیده مـی‌شود، و عکس‌العمل میان جـرم و کفه ۰/۵ N است. شتاب کفه را تعیین کنید.

۱۷- جسمی که وزن آن $13\,N$ است در یك آسانسور به‌وسیلهٔ یك ترازوی فنری مجدداً توزین شده است و وزن آن برابر $12\,N$ به‌دست آمده است. شتاب آسانسور در لحظهٔ توزین چقدر بوده است؟

۱۸- قطاری به‌جرم $160\,Mg$ از ایستگاه شروع به حرکت می‌کند. نیرویی که موتور وارد می‌کند، گذشته از خنثی کردن مقاومتها، $\frac{1}{64}$ وزن قطار است و تا هنگامی وارد می‌شود که سرعت قطار به $60\,km/h$ برسد. این سرعت تا هنگامی که قطار ترمز می‌کند ثابت می‌ماند. ترمز سبب می‌شود که شتابی منفی برابر $0/75\,m/s^2$ به وجود آید و قطار در مجموع پس از پیمودن $8\,km$ متوقف شود. پیدا کنید: (۱) مدت زمانی که با حرکت شتابدار پیموده شده است. (۲) مدت زمانی که با شتاب منفی پیموده شده است. (۳) کل مدت حرکت را.

۱۹- نیرویی که موتور یك قطار وارد می‌کند $\frac{1}{80}$ وزن کل قطار است. حداکثر نیروی ترمز $\frac{1}{30}$ وزن قطار است. تعیین کنید چه مدتی طول می‌کشد تا این قطار که از حالت سکون به‌راه افتاده است و از یك سربالایی به‌طول $4/8\,km$ و شیب $\frac{1}{240}$ بالا می‌رود دوباره به‌حالت سکون درآید. ترمزها هنگامی به‌کار می‌افتند که موتور قطار هم خاموش می‌شود.

۲۰- دریك آسانسور، ترازویی فنری کار گذاشته‌اند. وقتی که آسانسور با شتاب معینی بالا می‌رود این ترازو نشان می‌دهد که جرم جسم $10\,kg$ است. وقتی که آسانسور با شتابی دوبرابر شتاب بالارفتن، پایین می‌آید، این ترازو جرم جسم را $7\,kg$ نشان می‌دهد. جرم واقعی جسم، و شتاب بالارفتن آسانسور را تعیین کنید.

۲۱- سپری از دوصفحهٔ چوبی وآهنی که به‌ترتیب $4\,cm$ و $2\,cm$ ضخامت دارند ساخته شده است و به‌طور قائم قراردارد. گلوله‌ای که به‌طور افقی پرتاب شده است نخست درآهن نفوذ می‌کند و سپس $2\,cm$ درچوب فرو می‌رود. گلولهٔ مشابه دیگری که با همان تندی ازطرف دیگر به‌طور افقی به سپر پرتاب شده است، پس از عبور از چوب، $1\,cm$ درآهن فرو می‌رود. مقاومت متوسطی را که به‌وسیلهٔ آهن و چوب اعمال می‌شود تعیین کنید.

۲۲- گلوله‌ای به‌جرم ۱۰۰ گرم که با تندی $150\,m/s$ حرکت می‌کند درقطعه چوب ثابتی $8\,cm$ نفوذ می‌کند. اگر تخته‌ای به‌ضخامت $4\,cm$ باشد و همان گلوله با همان تندی به‌این تخته که ثابت است و مقاومت آن در مقابل حرکت یکنواخت و

با مقاومت قطعه چوب اولی یکسان است برخوردکند با چه تندیی از طرف دیگر خارج خواهد شد؟

۲۳ـ گلوله‌ای به‌جرم $30\ g$ با تندی $294\ m/s$ به‌داخل قطعه چوبی پرتاب شده است و پس از $\frac{1}{150}$ ثانیه متوقف شده است. مقاومتی را که از طرف چوب اعمال می‌شود، به‌فرض آنکه یکنواخت باشد، تعیین کنید.

۱۷.۳. حرکت نقطه‌های مادی وابسته

در بند پیش حرکت یك جرم منفرد را درنظرگرفتیم. اکنون حالتهای ساده‌ای از حرکت دوجرم را که به وسیلهٔ نخ محکم سبکی به‌یکدیگر بسته شده‌اند در نظر می‌گیریم. در چنین حالتهایی برای هر یك از جرمها، همان‌طورکه خواهیم دید، معادلهٔ $F = ma$ را به‌کار می‌بریم.

باید دانست که نخی که دوجرم متحرك را به‌یکدیگر متصل می‌کند درحالت کشش است، و نخ نیروهای مساوی با کششهای دوانتهای خود برجرمها اعمال می‌کند. اگر نخ سبك باشد (یعنی اگر وزن آن قابل صرف‌نظرکردن باشد)، کشش درسراسر نخ یکسان است. اما اگر نخ سنگین باشد، کشش نقطه به‌نقطه تغییر می‌کند و این تغییر بستگی دارد به‌وزن واحد طول نخ. اگر نخ محکم نباشد، کشش همراه با تغییر طول نخ تغییر می‌کند.

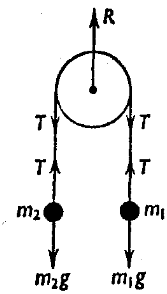
همچنین اگرنخ از دور قرقره‌ای گذشته باشد، فقط درصورتی‌که قرقره بدون اصطکاك و نخ سبك باشد، کشش نخ در دوطرف یکسان است. درغیر این‌صورت کشش نخ درجایی که از قرقره جدا می‌شود بستگی به‌ضریب اصطکاك و طول نخی دارد که با قرقره درحال تماس است.

به‌منظور آسان‌کردن حل مسائل، عموماً فرض می‌کنیم نخ سبك و محکمی از دور قرقره یا میخ بدون اصطکاکی عبورکرده است. درچنین حالت مطلوبی، کشش در سراسر نخ ثابت خواهد بود.

مثال۱: نخ سبك و محکمی از شیار قرقرهٔ ثابتی می‌گذرد. به‌یك طرف نخ وزنه‌ای به‌جرم m_1 و به‌طرف دیگروزنه‌ای به‌جرم m_2 می‌آویزیم. برایند حرکت دستگاه وکشش نخ را تعیین کنید.

حل: کشش نخ درطرفین قرقره یکسان است؛ آن را T می‌گیریم. فرض می‌کنیم که m_1 بزرگتر از m_2 است. در این صورت m_1 به‌طرف پایین حرکت خواهد کرد و

$m_۲$ به‌طرف بالا حرکت خواهد کرد، و چون نخ محکم است، شتاب $m_۲$ به طرف بالا با شتاب $m_۱$ به‌طرف پایین برابر است. فرض می‌کنیم که این شتاب برحسب $\mathrm{m/s^۲}$ برابر a باشد.



شکل ۳-۶

نیروهایی که بر $m_۱$ اثر می‌کنند $m_۱g$ به‌طرف پایین و T به‌طرف بالاست. برایند این دو نیرو به‌طرف پایین $m_۱g-T$ است.

با به‌کار بردن $F=ma$

داریم

$$m_۱g-T=m_۱a \qquad (۱)$$

برایند نیروهایی که بر $m_۲$ به‌طرف بالا وارد می‌شود $T-m_۲g$ است.

$$\therefore \qquad T-m_۲g=m_۲a \qquad (۲)$$

اکنون معادله‌های (۱) و (۲) را برای پیدا کردن a و T حل می‌کنیم:

از جمع کردن آنها با یکدیگر:

$$(m_۱-m_۲)g=(m_۱+m_۲)a$$

$$\therefore \qquad a=\frac{m_۱-m_۲}{m_۱+m_۲}g$$

از معادلهٔ (۱):

$$T=m_۱(g-a)$$

$$=m_۱\left(۱-\frac{m_۱-m_۲}{m_۱+m_۲}\right)g$$

$$=\frac{۲m_۱m_۲}{m_۱+m_۲}g$$

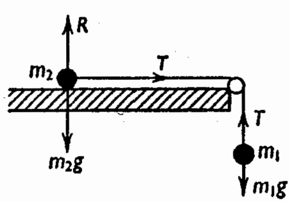
اگر قسمتهایی از نخ که با قرقره درتماس نیست، به‌طورقائم آویزان باشد، نیروی فشار R وارد برقرقره برابر است با

$$R = 2T = \frac{4m_1m_2}{m_1+m_2}g$$

مثال۲: وزنه‌ای به‌جرم m_2 روی میزی افقی قرار دارد و به‌وسیلهٔ نخ نازك و محکمی که ازشیارقرقره‌ای می‌گذرد به‌وزنه‌ای به‌جرم m_1 متصل است. وزنهٔ m_1 به‌طورآزاد آویزان است. برایند حرکت وکشش نخ را تعیین کنید.

حل: جرم m_1 به‌طرف پایین و جرم m_2 در امتداد میز حرکت خواهد کرد. چون نخ محکم، یعنی غیرقابل اتساع است، شتابهای m_1 و m_2 متساوی هستند؛ فرض می‌کنیم که این‌شتاب برحسب $\mathrm{m/s^2}$ برابر a باشد. کشش نخ را برحسب نیوتون برابر T می‌گیریم. نیروهایی که بر m_1 وارد می‌شوند m_1g به‌طرف پایین و T به‌طرف بالاست. برایند نیروهای وارد بر m_1 برابر m_1g-T است. با استفاده از معادلهٔ $F=ma$:

$$m_1g - T = m_1a \qquad (1)$$



شکل ۳-۷

چون m_2 روی میز افقی است، نیروی وزنش در امتداد حرکت اثر نمی‌کند. این نیرو با نیروی R ، عکس‌العمل سطح، خنثی می‌شود ($R=m_2g$). بنابراین نیرویی که در امتداد افقی بر وزنهٔ m_2 وارد می‌شود T ، نیروی کشش نخ، است. خواهیم داشت

$$T = m_2a \qquad (2)$$

از جمع کردن (۱) و (۲)،

$$m_1g = (m_1+m_2)a$$

$$\therefore \qquad a=\frac{m_۱}{m_۱+m_۲}g$$

با به‌کاربردن این مقدار در رابطهٔ (۲):

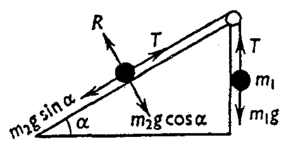
$$T=\frac{m_۱ m_۲}{m_۱+m_۲}g$$

در این حالت نیرویی که بر قرقره وارد می‌شود برایند دو نیروی T است که برهم عمودند. این نیرو برابر با P است، به‌طوری که

$$\therefore \qquad P=\sqrt{T^۲+T^۲}=T\sqrt{۲}$$

$$=\frac{\sqrt{۲}\, m_۱ m_۲}{m_۱+m_۲}g$$

مثال۳: وزنه‌ای به‌جرم $m_۲$ کیلوگرم برسطح شیبداری که با افق زاویهٔ α می‌سازد قرار دارد و به‌وسیلهٔ نخ سبك و محکمی که از شیار قرقره‌ای گذشته به وزنه‌ای به‌جرم $m_۱$ کیلوگرم بسته شده است. قرقره دربالای سطح شیبدار است و وزنهٔ $m_۱$ به‌طور قائم آویزان است. برایند حرکت و کشش نخ را تعیین کنید.



شکل ۳-۸

حل : چون نخ محکم و غیرقابل اتساع است، کشش نخ درتمام طول آن یکسان است. آن را برحسب نیوتون برابر T فرض می‌کنیم. شتابهای دوجرم برابرند. شتاب را برحسب $\mathrm{m/s^۲}$ به a نمایش می‌دهیم. نیروهایی که بر $m_۱$ وارد می‌شوند $m_۱g$ قائم و به‌طرف پایین و T قائم و به‌طرف بالاست. اگر $m_۱$ به طرف پایین حرکت کند:

$$m_۱g-T=m_۱a \qquad (۱)$$

نیروهایی که بر $m_۲$ به‌موازات سطح اثر می‌کنند، $m_۲g\sin\alpha$ به‌طرف پایین سطح و T به‌طرف بالای سطح است. برایند این نیروها، نیرویی است که وزنه را به‌طرف بالا می‌برد، بنابراین برابر $T-m_۲g\sin\alpha$ است.

$$\therefore \quad T - m_2 g \sin\alpha = m_2 a \qquad (2)$$

چون m_2 نمی‌تواند عمود برسطح حرکت کند، می‌توان نوشت:

$$R - m_2 g \cos\alpha = 0$$

ازجمع (۱) و (۲):

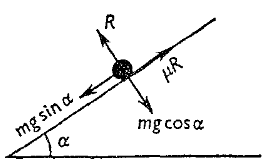
$$g(m_1 - m_2 \sin\alpha) = (m_1 + m_2)a$$

$$\therefore \quad a = \frac{m_1 - m_2 \sin\alpha}{m_1 + m_2} g$$

برای اینکه m_1 به‌طرف پایین حرکت کند باید $a > 0$، یعنی $m_1 > m_2 \sin\alpha$ باشد. در این صورت به‌ازای a می‌توان T را از رابطهٔ (۱) به‌دست آورد.

توجه- درمسائل عددی که مانند مسائل بالا باشد، نباید مقادیرعددی را درفرمولهایی که به‌دست آمده است گذاشت، بلکه باید هرمسئله را مانند مثالهای (۱) تا (۳) حل کرد و ازهمان‌آغاز به‌جای حروف عددهای مربوطه را قرارداد.

مثال۴: نقطه‌ای مادی به‌پایین سطح شیبداری که با افق زاویه α می‌سازد می‌لغزد. اگر μ ضریب اصطکاك باشد، حرکت را بررسی کنید.



شکل ۳-۹

حل: فرض می‌کنیم که m جرم نقطهٔ مادی باشد و R عکس‌العمل قائم سطح؛ پس μR نیروی اصطکاك است.

چون در امتداد عمود برسطح حرکتی وجود ندارد، عکس‌العمل سطح باید برابر مؤلفهٔ عمود برسطح وزن نقطهٔ مادی باشد.

$$\therefore \quad R = mg \cos\alpha$$

برایند نیروهایی که برگلوله وارد می‌شوند، به‌طرف پایین برابراست با

$$mg \sin\alpha - \mu R$$
$$= mg \sin\alpha - \mu mg \cos\alpha$$

$F = ma \to a = \frac{F}{m}$

شتاب به‌طرف پایین سطح برابر است با

$$\frac{mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha}{m} = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$$

که مثبت است و درنتیجه $\sin\alpha > \mu\cos\alpha$ یا $tg\,\alpha > \mu$ است.

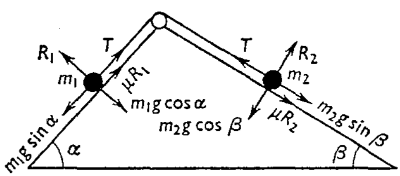
اگر $\sin\alpha < \mu\cos\alpha$ یعنی $tg\,\alpha < \mu$ باشد، شتابی به‌طرف پایین وجود نخواهد داشت و بدیهی است که گلوله به‌طرف بالا هم نمی‌تواند حرکت کند. دراین‌صورت گلوله بیحرکت برسطح باقی می‌ماند. باید توجه داشت که در این حالت مقدار نیروی اصطکاك باید برابر $mg\sin\alpha$ باشد، که این مقدار کمتراز هنگامی است که جسم به‌حال حرکت درمی‌آید.

اگر گلوله به‌طرف بالای سطح پرتاب شود، برایند نیروهایی که بر گلوله وارد می‌شوند به‌طرف پایین است و مقدار آن

$$mg\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha$$

است، و حرکت برسطح کند شونده است.

مثال۵: دونقطهٔ مادی به جرمهای m_1 و m_2 روی دوسطح شیبدار مطابق شکل به‌وسیلهٔ نخ سبك و محکمی به‌یکدیگر بسته شده‌اند. این نخ از شیار قرقره‌ای که بالای دوسطح قرار دارد می‌گذرد. اگر هر دوسطح ازنظر اصطکاك مثل هم باشند، برایند حرکت را بررسی کنید.



شکل ۳-۱۰

حل: فرض می‌کنیم که m_1 و m_2 به‌ترتیب برسطوحی قرار گرفته باشند که زاویه‌های شیب آنها با افق به‌ترتیب α و β است. فرض‌می‌کنیم که m_1 به‌طرف پایین‌حرکت می‌کند و T کشش نخ است.

چون وزنه‌ها نمی‌توانند در امتداد عمود برسطح حرکت کنند، عکس‌العمل هرسطح برابر مؤلفهٔ عمود برسطح وزنهٔ مربوطه است. یعنی $m_1 g\cos\alpha$ برای m_1 و $m_2 g\cos\beta$ برای m_2.

چون m_1 به‌طرف پایین حرکت می‌کند، اصطکاك به‌طرف بالا عمل می‌کند. بنابراین مجموع نیروهایی که به‌طرف پایین بر m_1 وارد می‌شوند برابر است با

$$m_1 g \sin\alpha - T - \mu m_1 g \cos\alpha$$

و مجموع نیروهایی که به‌طرف بالا بر m_2 وارد می‌شوند برابر است با

$$T - m_2 g \sin\beta - \mu m_2 g \cos\beta$$

پس اگر a شتاب دستگاه باشد،

$$m_1 g \sin\alpha - T - \mu m_1 g \cos\alpha = m_1 a \qquad (۱)$$

$$T - m_2 g \sin\beta - \mu m_2 g \cos\beta = m_2 a \qquad (۲)$$

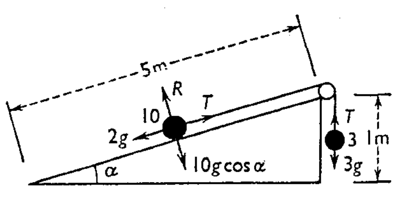
ازجمع رابطه‌های (۱) و (۲):

$$a(m_1 + m_2) = g(m_1 \sin\alpha - m_2 \sin\beta - \mu m_1 \cos\alpha - \mu m_2 \cos\beta)$$

که ازآن a به‌دست می‌آید.

اگر مقدار a را دریکی از رابطه‌های (۱) یا (۲) به‌کار ببریم T به‌دست می‌آید.

مثال۶: دو وزنه یکی به‌جرم ۱۰ kg و دیگری به‌جرم ۳ kg به‌وسیلهٔ نخ نازکی که از شیار قرقره‌ای گذشته است به‌یکدیگرمتصل هستند. قرقره در بالای سطح شیبداری است که طول آن ۵ m و ارتفاع‌آن ۱ m است. وزنهٔ سنگین‌تر روی سطح شیبدار و وزنهٔ دیگر درست در نزدیکی قرقره به طور قائم آویزان است. طول نخ ۵ m است. شتاب وزنه‌ها و کشش نخ را به‌دست آورید. پس‌از آنکه وزنهٔ ۳ کیلوگرمی به‌زمین برخوردکرد چه مدت طول خواهدکشید تا نخ دوباره سفت شود؟



شکل ۳-۱۱

حل : فرض می‌کنیم که T کشش نخ و a شتاب وزنه‌ها باشد.

برایند نیروهایی که بروزنهٔ ۳ کیلوگرمی به‌طرف پایین وارد می‌شوند

$$(۳g - T)\ \mathrm{N}$$

براینـد نیروهایی که بروزنهٔ ۱۰ کیلوگرمی به‌طرف بالای سطح وارد می‌شود:

$$T-۱۰\times\frac{۱}{۵}g=(T-۲g)\,\mathrm{N}$$

∴ بنابراین معادله‌های حرکت عبارتند از:

$$۳g-T=۳a$$

و

$$T-۲g=۱۰a$$

که ازجمع آنها نتیجه می‌شود:

$$۱۳a=g$$

$$\therefore\quad a=\frac{g}{۱۳}$$

پس

$$T=۲g+۱۰a=۲g+\frac{۱۰}{۱۳}g=\frac{۳۶}{۱۳}g$$

وقتی‌که وزنهٔ ۳ کیلوگرمی به‌زمین می‌رسد، وزنه‌ها مسافت ۱ m را ازحال سکون بـا شتاب $g/۱۳$ طی خواهندکرد. بنابـراین تندی وزنـه هنگام رسیدن به زمین برحسب m/s

$$v^۲=۲\times\frac{g}{۱۳}\times۱=\frac{۲\times۹/۸}{۱۳}$$

$$\therefore\quad v=۱/۲۲\ \mathrm{m/s}$$

وزنهٔ ۳ کیلوگرمی پس‌از رسیدن به‌زمین‌متوقف می‌شود وکشش نخ ازمیان می‌رود. وزنهٔ دیگرکه تندیش در این هنگام همان ۱/۲۲ m/s است با شتاب منفی $g/۵$ بالا می‌رود و پس از مدتی متوقف می‌شود و مجدداً برمی‌گردد. وقتی‌که به نقطهٔ قبلی رسید مایل‌است‌که بازهم پایین برود. در این‌هنگام نخ کشیده و سفت می‌شود. معادلهٔ حرکت وزنه، هنگامی‌که کشش نخ ازبین رفت

$$x=-\frac{۱}{۲}at^۲+v_{\circ}t$$

است. هنگامی‌کـه نـخ سفت می‌شود x مجدداً برابر صفر است. پس زمـان لازم از رابطهٔ

$$\circ=-\frac{۱}{۲}\times\frac{g}{۵}t^۲+۱/۲۲t$$

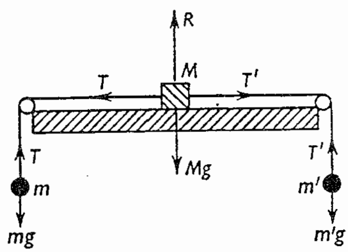
به‌دست می‌آید.

$$t = \frac{۱/۲۲}{۰/۹۸}$$
$$= ۱/۲۵\,\mathrm{s}$$

∴

پس از این مدت زمان نخ دوباره سفت می‌شود.

مثال۷: جرم M kg روی میزی افقی قرار دارد و به وسیلهٔ دوقطعه نخ محکم به دوجرم m و m' کیلوگرم متصل است ($m' > m$). این دوجرم در دوطرف میز آویزان هستند. شتاب دستگاه وکشش نخ را به‌دست آورید.



شکل ۳-۱۳

حل: اگر T نیوتون کشش نخی باشد که به m متصل است و T' نیوتون کشش نخی باشد که به m' متصل است و شتاب دستگاه برحسب $\mathrm{m/s^2}$ برابر a باشد، خواهیم داشت

$$m'g - T' = m'a \qquad \text{برای } m' \text{،} \qquad (۱)$$

$$T - mg = ma \qquad \text{برای } m \text{،} \qquad (۲)$$

$$T' - T = Ma \qquad \text{برای } M \text{،} \qquad (۳)$$

ازجمع کردن این معادله‌ها

$$(m' - m)g = (m' + m + M)a$$

$$a = \frac{m' - m}{m' + m + M}\, g$$

∴

مقادیر T' و T را با حذف a از معادله‌های (۱) و (۲) می‌توان به‌دست آورد

$$T' = m'g\left(\frac{۲m+M}{m+m'+M}\right)$$

$$T = mg\left(\frac{۲m'+M}{m+m'+M}\right)$$

تمرین ۲۰۳

۱- دو وزنه به‌جرمهای ۶ و ۱۰ کیلوگرم به‌وسیلهٔ نخ سبك و محکمی که از شیار قرقرهٔ ثابتی گذشته است آویزانند. تعیین کنید: (الف) شتاب حرکت را؛ (ب) کشش نخ را؛ (پ) نیرویی که برقرقره وارد می‌شود.

۲- دو وزنه به‌جرمهای ۵ و ۷ کیلوگرم به‌وسیلهٔ نخ سبك ومحکمی که ازشیار قرقرهٔ ثابتی گذشته است آویزانند. شتاب گلوله‌ها وکشش نخ را تعیین کنید.

۳ - دو وزنه به‌جرمهای ۷ و ۹ کیلوگرم به‌وسیلهٔ نخ سبك و محکمی که از شیار قرقرهٔ ثابتی گذشته است آویزانند. شتاب گلوله‌ها و کشش نخ را تعیین کنید.

۴ - دونقطهٔ مادی به‌جرمهای ۲۰ و ۳۰ گرم به‌وسیلهٔ نخ سبك و محکمی که از شیار قرقرهٔ ثابتی گذشته است آویزانند. شتاب گلوله‌ها وکشش نخ را تعیین کنید.

۵ - جسمی به‌جرم ۹ kg بر سطح افقی میزی قرار دارد و به‌نخ سبك و محکمی متصل است که از شیار قرقره‌ای که در انتهای میز قرار دارد گذشته است. انتهای دیگر نخ به‌جسمی به‌جرم ۷ kg بسته شده و این جسم آویزان است. شتاب گلوله‌ها وکشش نخ و نیرویی که برقرقره وارد می‌شود چقدر است؟

۶ - درمسئلهٔ ۵، فرض می‌کنیم که وزنهٔ ۷ کیلوگرمی از لبهٔ سطح که ۲/۱ m بالاتر از سطح زمین است شروع به‌حرکت کند. نخ که طول آن ۴/۲ m است برلبهٔ میز عمود است. (الف) تعیین کنید که چه مدت طول می‌کشد تا وزنهٔ ۷ کیلوگرمی به زمین برسد؛ (ب) چه مدت دیگر طول می‌کشد تا وزنهٔ ۹ کیلوگرمی به‌لبهٔ میز برسد؟

۷ - وزنه‌ای به‌جرم ۵ kg برمیزی قرار داردکه ارتفاع آن ۱/۸ m است. فاصلهٔ این وزنه تا لبهٔ میز ۵/۴ m است. این‌وزنه به‌وسیلهٔ نخ سبك ومحکمی به‌طول ۵/۴ m به‌یك وزنهٔ دیگربه‌جرم ۳ kg که در کنارلبه است متصل‌است. اگروزنهٔ ۳ کیلوگرمی ناگهان ازکنار لبه سقوط‌کند، تعیین کنید: (الف) چه‌مدت طول می‌کشد تا این‌وزنه به‌زمین برسد؛ (ب) چه مدت طول می‌کشد تا وزنه ۵ کیلوگرمی به‌لبهٔ میز برسد؟

۸ - وزنه‌ای به‌جرم ۵ kg برسطح شیبداری قرار داردکه ارتفاع آن ۴ m و طول آن ۲۰ m است. این نقطهٔ مادی به نخ نازك و محکمی بسته شده است و نخ از شیار

قرقره‌ای که دربالای سطح است گذشته و طرف دیگر نخ به‌وزنهٔ ۳ kg، که آویزان است، متصل است. شتاب وزنه‌ها و کشش نخ را تعیین کنید.

۹ - اگر درمسئلهٔ قبل، وزنهٔ ۵ kg در ابتدا در پایین‌سطح شیبدار و وزنهٔ ۳ kg درست دربالای سطح شیبدار آویزان باشد، تعیین کنید: (الف) چه مدت طول می‌کشد تا وزنهٔ ۳ kg به‌زمین برسد؛ (ب) چه‌مدت دیگر طول می‌کشد تا نخ رابط میان دو وزنه دوباره سفت شود؟

۱۰- دووزنه یکی به‌جرم $\frac{1}{4}$ kg و دیگری بـه‌جرم $7\frac{3}{4}$ kg به‌وسیلهٔ نخ محکم و سبکی به‌طول ۱/۵ m به‌یکدیگر بسته شده‌اند و برروی میزی به‌بلندی ۰/۷۵ m واقعند. نـخ به‌طور مستقیم و عمود بـر کنارهٔ میز است. جسم سبکتر نـاگهان ازکنارهٔ میز سقوط می‌کند. تعیین کنید: (الف) چـه مدت طول می‌کشد تـا جرم سبکتر به زمین برسد؛ (ب) چه مدت طول می‌کشد تا جسم دیگر به‌کنارهٔ میز برسد؟

۱۱- جسمی به‌جرم ۲ kg در پایین سطح شیبداری‌که طول آن ۹ m و ارتفاع آن ۳ m است قرار دارد. این وزنه به‌وسیلهٔ نخ سبك و محکمی به‌طول ۹ m کـه در امتداد خط بزرگترین شیب سطح قرارمی‌گیرد به وزنه‌ای به‌جرم ۱ kg متصل است. وزنهٔ اخیر درست در بـالای سطح شیبدار در سمت دیگر سطح آویـزان است. دستگاه را به‌حال خود می‌گذارند تـا حرکت کند. به‌فرض آنکه وزنهٔ آویزان پس از رسیدن به زمین متوقف شود، تعیین کنیدکه وزنهٔ ۲ کیلوگرمی تا قبل‌از آنکه برای نخستین بار بایستد چه مسافتی طی خواهدکرد.

۱۲- وزنه‌ای به‌جرم ۵ kg برسطح صیقلی شیبداری که با افق زاویهٔ ۳۰° می‌سازد قرار دارد. نخی سبك‌که از شیار صیقلی قرقره‌ای ثابت‌که در بالاترین نقطهٔ سطح شیبدار نصب شده است می‌گذرد، این‌وزنه را به‌وزنهٔ ۲ کیلوگرمی‌که آویزان است متصل می‌کند. تعیین‌کنید شتاب هریك از دو وزنه را با فرض اینکه تمام حرکت درسطحی قائم، که از قرقره و خط بزرگترین شیب می‌گذرد، روی می‌دهد. کشش نخ را نیز تعیین کنید.

۱۳- وزنـه‌ای به‌جرم ۵ kg برمیز افقی ناصافی قـرار دارد و به‌وسیلهٔ نخی‌کـه از شیار قرقره‌ای گذشته است به وزنهٔ ۳ kg که آویزان است متصل شده است. اگرضریب اصطکاك میان وزنـهٔ ۵ کیلوگـرمی و میز برابر $\frac{1}{5}$ باشد، شتاب برایند وکشش نخ را تعیین کنید.

۱۴- وزنه‌ای است به‌جرم ۴ kg کـه برمیز افقی ناصافی قـرار دارد (ضریب اصطکاك $\frac{1}{2}$

است) و به‌وسیلهٔ نخ سبك و محکمی به‌وزنهٔ ۳ کیلوگرمی که آویزان است، متصل است. مسافتی را که هر یك از وزنه‌ها در مدت ۷ ثانیه می‌پیماید و نیز تندی آنها را درآخر این مدت حساب کنید.

۱۵- نقطه‌ای مادی برسطح شیبدار ناصافی که زاویهٔ آن با افق 45° و ضریب اصطکاك آن $\frac{3}{4}$ است حرکت می‌کند. نشان دهید که مدت زمانی که این نقطهٔ مادی فاصلهٔ معینی را ازحال سکون پایین می‌آید دوبرابر مدت زمانی است که برای پایین آمدن همین فاصله، اگر سطح صاف بود، لازم است.

۱۶- دوسطح ناصاف، که بلندی هر دو یکسان است، و یکی با افق زاویهٔ 30° می‌سازد و دیگری زاویهٔ 60° می‌سازد، پهلو به پهلوی یکدیگر قرار گرفته‌اند. در بالای دوسطح، قرقرهٔ شیارداری نصب شده و از شیار آن نخ سبك و محکمی عبورکرده است. وزنه‌ای به‌جرم $4\ \mathrm{kg}$ برسطح شیبدار ۳۰ درجه‌ای و وزنه‌ای به‌جرم $12\ \mathrm{kg}$ برسطح دیگر واقع است. نخی به این دو وزنه متصل است. اگر ضریب اصطکاك هریك از دوسطح $\frac{1}{2}$ باشد، شتاب حرکت را پیدا کنید.

۱۷- سطح شیبداری است که طول آن $15\ \mathrm{m}$ و ارتفاع آن $9\ \mathrm{m}$ است. ضریب اصطکاك برابر $\frac{1}{2}$ است. نقطه‌ای مادی از بالاترین نقطهٔ سطح به راه می‌افتد و برسطح شیبدار می‌لغزد تا به‌انتهای آن برسد. معین کنید تندی آن درموقع رسیدن به‌انتهای سطح چقدر است و این نقطهٔ مادی درچه مدتی این سطح را می‌پیماید.

۱۸- نخ سبك و محکمی از شیار صاف قرقره‌ای ثابت عبورکرده است. به یك طرف آن وزنهٔ $4\ \mathrm{kg}$ و به‌طرف دیگرآن دو وزنه هریك برابر $3\ \mathrm{kg}$ آویزان می‌کنیم. شتاب بالارفتن وزنهٔ $4\ \mathrm{kg}$ را پیدا کنید.
اگر پس‌ازآنکه وزنهٔ $4\ \mathrm{kg}$ که ازحال سکون به‌راه افتاده است و $2/5\ \mathrm{m}$ بالا رفته است، یکی از وزنه‌های $3\ \mathrm{kg}$ حذف شود، وزنهٔ $4\ \mathrm{kg}$ چقدر دیگر بالا خواهد رفت؟

۱۹- قطاری درحال سکون است و رانندهٔ لوکوموتیو آن مشاهده می‌کند که در روی ریلهای قطار که شیب $\frac{1}{60}$ دارند ارابه‌ای در فاصلهٔ $0/8\ \mathrm{km}$ قطار به‌طرف قطار پیش می‌آید. او ناگهان قطار را به‌راه می‌اندازد و با شتاب $0/15\ \mathrm{m/s^2}$ به‌عقب می‌رود. اگر ارابه درست هنگامی متوقف شود که به‌قطار می‌رسد، تعیین کنید که تندی آن هنگامی که رانندهٔ قطار آن را مشاهده‌کرده است چقدر بوده است؟ فرض

کنیدکه اصطکاك درمقابل حرکت ارابه $\frac{1}{160}$ وزن ارابه باشد.

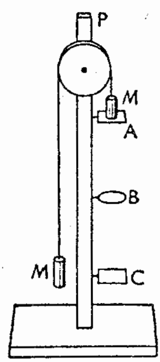
۲۰- اتـومبیلی به‌جرم $2/5\ \mathrm{Mg}$ بـه‌وسیلهٔ طنابی در روی سطح شیبداری به شیب $\frac{1}{10}$ با شتاب $1\ \mathrm{m/s^2}$ به‌بالای سطح کشیده می‌شود. اگرمقاومت اصطکاك ثابت و برابر $\frac{1}{100}$ وزن اتومبیل باشد، کشش طناب برحسب نیوتون چقدر خواهد بود؟

۱۸.۳. ماشین آتوود

درساده‌ترین شکل، این ماشین مطابق شکل ۳-۱۳ از دو وزنه با جرمهای متساوی (M) که به‌وسیلهٔ نخ سبکی‌که از شیار قرقرهٔ سبك P گذشته است، تشکیل شده است.

محور قرقره، افقی است به‌طوری‌که قرقره می‌تواند با اصطکاك بسیارکم بچرخد.

اگروزنه‌ها به‌حرکت درآورده شوند، با تندیی‌که دریك‌مدت‌کوتاه تقریباً ثابت است حرکت خواهند کرد، و مقدار این تندی را می‌توان با اندازه‌گیری مدت زمانی‌که یکی از وزنه‌ها مسافت معینی را طی می‌کند تعیین‌کرد.



شکل ۳-۱۳

این مـاشین برای تحقیق قـانونهای حرکت و بـه دست آوردن مقدار تقریبی g به‌کار می‌رود. وزنه‌ها را با افزایش سرباری به‌جرم معلوم m که برروی یکی ازآنها قرار می‌دهند به‌حرکت درمی‌آورند. این سربار از روی صفحهٔ A ، کـه متصل به‌پایه‌ای کـه قرقره به‌آن نصب است برداشته می‌شود.

حلقهٔ B درپایین پایه به‌پایه متصل است و ابعاد آن به اندازه‌ای است‌که وزنهٔ M می‌تواند ازآن عبورکند، اما سربار m نمی‌تواند ازآن بگذرد. ازآن پس، وزنه‌ها با تندی

یکنواخت حرکت خواهندکرد. مدت زمانی‌که وزنه از B به‌صفحهٔ C، که درفاصلهٔ معینی از B قرار دارد، می‌رسد به‌وسیلهٔ کرونومتر اندازه‌گیری می‌شود.

فاصلهٔ از A تا B نیز معلوم است.

اما تا وقتی‌که سربار برداشته نشده است، شتاب دستگاه برابر است با

$$\frac{mg}{۲M+m}$$

اگر $AB=h_۱$ باشد، تندی v درهنگام رسیدن به‌حلقه برابر است با

$$v^۲=۲\,\frac{mg}{۲M+m}\,h_۱$$

اگر مسافت BC برابر $h_۲$ باشد، و t مدت زمان لازم برای آنکه وزنه از B به C برود،

$$v=\frac{h_۲}{t}$$

$$\therefore \qquad \frac{h_۲^۲}{t^۲}=\frac{۲mgh_۱}{۲M+m}$$

$$\therefore \qquad g=\frac{h_۲^۲}{۲mh_۱t^۲}(۲M+m)$$

۱۹.۳. دلایل اصلی بر بیدقتی‌درنتایج آزمایش به‌قرار زیر است:

(الف) قرقره، هرقدرهم‌سبك باشد، برای‌آنکه بچرخد احتیاج به‌مقداری نیرو دارد. خطای مربوط به‌وزن قرقره را دربخش ۹ تشریح خواهیم‌کرد.

(ب) درمحور قرقره مقداری اصطکاك وجود دارد، که می‌توان با اضافه‌کردن سربار کوچك اضافی به‌وزنه‌ای که دارای سربار m است، مقدارآن را کم‌کرد. جزم این سربارکوچك اضافی را آن قدر باید تغییر داد تا وزنه‌ها (پس از حذف m) به‌طور یکنواخت حرکت کنند.

(پ) نخ ممکن‌است روی قرقره بلغزد و چون قرقره کاملاً صیقلی نیست، تولید اصطکاك خواهد شد.

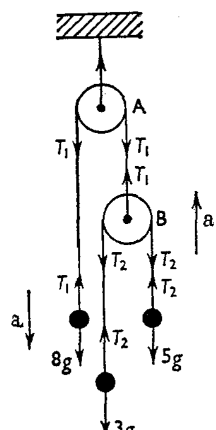
از اثر اصطکاك نمی‌توان به‌طورکامل جلوگیری کرد، اما می‌توان با افزودن سرباری اضافی، همان‌طورکه در قسمت (ب) گفته شد، قسمتی از اثر آن را خنثی کرد.

(ت) اندازه‌گیری مدت زمان صحیح برای‌آنکه M از B به C برسد بسیار دشوار است. درماشینهای آتوود که به تازگی می‌سازند سعی می‌شود که حتی‌المقدور خطاهای ناشی از موارد فوق‌الذکر کم شود.

۲۰.۳. در مثالهای قبل شتاب اجزای مختلف دستگاه متحرك یکسان بود. اگر جز آن باشد، باید ارتباط میان اجزای مختلف دستگاه تعیین شود. در این‌گونه مسائل نیز روش اساسی استفاده از معادلهٔ $F = ma$ برای هریك از اجزای دستگاه است.

مثال ۱: به یك طرف نخ سبك و محکمی که از شیار صاف قرقرهٔ ثابتی می‌گذرد وزنهٔ ۸ کیلوگرمی می‌آویزیم. به‌طرف دیگرآن قرقرهٔ سبکی‌آویزان می‌کنیم. ازشیارقرقره نخ سبك ومحکمی می‌گذرانیم و به‌یك‌طرف نخ وزنهٔ ۵ کیلوگرمی و به‌طرف دیگر آن وزنهٔ ۳ کیلوگرمی‌آویزان می‌کنیم. شتاب وزنهٔ ۸ کیلوگرمی و کشش نخی را که این وزنه به‌آن آویزان است تعیین کنید.

حل: فرض می‌کنیم که مطابق شکل ۳-۱۴، A قرقرهٔ ثابت و B قرقرهٔ متحرك باشد. نیز فرض می‌کنیم که وزنهٔ ۸ کیلوگرمی به‌طرف پایین حرکت می‌کند، و شتاب آن برابر a است. بنابراین قرقرهٔ B با شتاب a به‌طرف بالا حرکت می‌کند.



شکل ۳-۱۴

وزنهٔ ۵ کیلوگرمی نسبت به B به‌طرف پایین حرکت می‌کند و وزنهٔ ۳ کیلوگرمی نسبت به B به طرف بالا حرکت می‌کند. فرض می‌کنیم که شتاب این دو وزنه

برابر a' باشد. بنابراین شتاب این وزنه‌ها به‌طرف بالا نسبت به‌قرقرهٔ ثابت A به‌ترتیب $(a-a')$ و $(a+a')$ است.

اگر کششهای نخها $T_۱$ و $T_۲$ و نیروهایی‌که بر هریك از وزنه‌ها وارد می‌شوند همانهایی باشند که درشکل نشان داده‌ایم، معادله‌های حرکت را می‌توان چنین نوشت:

برای وزنهٔ ۸ کیلوگرمی:

$$۸a=۸g-T_۱ \qquad (۱)$$

برای قرقرهٔ B :

$$\circ=T_۱-۲T_۲ \qquad (۲)$$

برای وزنهٔ ۵ کیلوگرمی:

$$۵(a-a')=T_۲-۵g \qquad (۳)$$

برای وزنهٔ ۳ کیلوگرمی:

$$۳(a+a')=T_۲-۳g \qquad (۴)$$

از این چهار معادله، چهار مجهول $T_۱$، $T_۲$، a و a' به‌دست می‌آید.

a' را از معادله‌های (۳) و (۴) حذف می‌کنیم:

$$۳\circ a=۸T_۲-۳\circ g$$

اما از معادله‌های (۱) و (۲):

$$۸a=۸g-۲T_۲$$

$$\therefore \qquad ۶۲a=۲g$$

$$\therefore \qquad a=\frac{g}{۳۱}$$

نیز

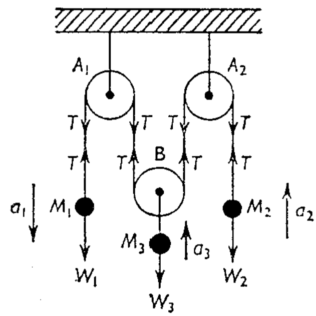
$$T_۱=۸g-۸a=۷\frac{۲۳}{۳۱}g$$

مثال۲: $A_۱$ و $A_۲$ دوقرقرهٔ ثابتند که مرکزهای آنها بریك خط افقی واقعند. نخ سبك و محکمی ازشیار قرقره‌های $A_۱$ و $A_۲$ می‌گذرد. به‌یك‌طرف نخ وزنهٔ $W_۱$ وبه‌طرف دیگر آن وزنهٔ $W_۲$ می‌آویزیم. قرقرهٔ دیگری که به آن وزنهٔ $W_۳$ آویزان است جایی قرار می‌گیرد که از شیار این قرقره قسمتی از نخ که میان A و B است بگذرد. اگر فاصلهٔ میان قرقره‌های A و B آن‌قدر باشد که تمام قسمتهای نخ،

جز قسمتهایی که با قرقره‌ها در تماس است، به‌طور قائم قرار گیرند، ثابت کنید که وقتی که تمام وزنه‌ها درحال حرکتند، کشش نخ برابر است با

$$\frac{4}{W_1^{-1}+W_2^{-1}+4W_3^{-1}}$$

همچنین ثابت کنید که شرط آنکه W_3 ساکن و W_1 و W_2 درحال حرکت باشند



شکل ۳-۱۵

این است که

$$4W_1W_2=W_3(W_1+W_2)$$

حل : آشکار است که مسافتی که به‌وسیلهٔ B پیموده می‌شود نصف مجموع جبری مسافتهایی است که به‌وسیلهٔ W_1 و W_2 پیموده می‌شود. زیرا اگر W_1 و W_2 هر دو به‌طرف پایین بروند و یکی مسافت x_1 طی کند و دیگری مسافت x_2، مسافتی که B به‌طرف بالا می‌رود برابر $\frac{1}{2}(x_1+x_2)$ است؛ نیز اگر W_1 به‌اندازهٔ x_1 پایین بیاید و W_2 به اندازهٔ x_2 بالا برود، B به اندازهٔ $\frac{1}{2}(x_1-x_2)$ بالا خواهد رفت.

فرض می‌کنیم W_1 با شتاب a_1 به‌طرف پایین بیاید، و W_2 و W_3 به‌ترتیب با شتابهای a_2 و a_3 به‌طرف بالا بروند و فرض می‌کنیم T کشش نخ باشد.

پس

$$a_3=\frac{1}{2}(a_1-a_2)$$

معادله‌های حرکت عبارتند از

$$W_۱ - T = M_۱ a_۱ \qquad :W_۱ \text{ برای} \qquad (۱)$$

$$T - W_۲ = M_۲ a_۲ \qquad :W_۲ \text{ برای} \qquad (۲)$$

$$۲T - W_۳ = M_۳ a_۳ \qquad :W_۳ \text{ برای} \qquad (۳)$$

که در آن $W_۱ = M_۱ g, \quad W_۲ = M_۲ g, \quad W_۳ = M_۳ g$

اما $۲a_۳ = a_۱ - a_۲$ و بنابراین از (۱) و (۲) و (۳) نتیجه می‌شود

$$۲ \times \frac{۲T - W_۳}{M_۳} = \frac{W_۱ - T}{M_۱} - \frac{T - W_۲}{M_۲}$$

$$\therefore \quad \frac{۴T}{M_۳} + \frac{T}{M_۱} + \frac{T}{M_۲} = ۲g + g + g$$

$$\therefore \quad T = \frac{۴g}{M_۱^{-۱} + M_۲^{-۱} + ۴M_۳^{-۱}}$$

$$= \frac{۴}{W_۱^{-۱} + W_۲^{-۱} + ۴W_۳^{-۱}}$$

اگر $W_۳$ ساکن بماند، باید $a_۳$ صفر باشد.

از معادلهٔ (۳) نتیجه می‌شود: $a_۳ = \frac{۲T}{M_۳} - g$

$$= \frac{۸g}{\frac{W_۳}{W_۱} + \frac{W_۳}{W_۲} + ۴} - g$$

$$= \frac{۴g - \frac{W_۳}{W_۱} g - \frac{W_۳}{W_۲} g}{\frac{W_۳}{W_۱} + \frac{W_۳}{W_۲} + ۴}$$

و این هنگامی صفر است که صورت کسر صفر باشد، یعنی

$$\frac{W_۳}{W_۱} + \frac{W_۳}{W_۲} = ۴$$

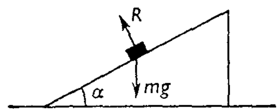
یا

$$۴W_۱ W_۲ = W_۳ (W_۱ + W_۲)$$

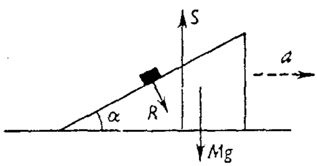
مثال۳: منشوری به جرم M که قاعدهٔ آن مثلث قائم‌الزاویه است برسطح افقی صافی طوری قرار گرفته است که یکی از وجوه آن قائم باشد. بر وجه دیگر منشور که

با افق زاویهٔ α می‌سازد وزنه‌ای به‌جرم m بدون اصطکاك می‌لغزد و در نتیجه منشورهم درسطح افقی حرکت می‌کند. نشان دهیدکه شتاب حرکت منشور برسطح افقی $\frac{mg\sin\alpha\cos\alpha}{M+m\sin^{2}\alpha}$ است، و نیز عکس‌العمل منشور را درمقابل وزنه به‌دست آورید.

حل: در شکل ۳ـ۱۶ الف، نیروهایی را که بر جرم m اثرمی‌کنند معرفی کرده‌ایم: mg نیروی وزن، و R عکس‌العمل که عمود بروجه منشور است.



شکل ۳-۱۶ الف



شکل ۳-۱۶ ب

درشکل ۳ـ۱۶ ب، نیروهایی را که برمنشور اثر می‌کنند معرفی کرده‌ایم: نیروی R مساوی و غیرهمسو با نیرویی که بروزنهٔ m وارد می‌شود؛ نیروی وزن منشور یعنی mg؛ و نیروی عکس‌العمل سطح افقی درمقابل منشور یعنی S.
منشور به‌طور افقی با شتاب a حرکت خواهد کرد. وزنهٔ m با شتاب a' نسبت به‌منشور بر وجه منشور به‌طرف پایین حرکت می‌کند. بنابراین شتاب m نسبت به‌سطح افقی برایند تصویر a' نسبت به‌سطح افقی و a است. یعنی شتاب نسبی حرکت m نسبت به‌سطح افقی و به‌طرف چپ برابر است با $a'\cos\alpha - a$.
معادله‌های حرکت عبارتند از:

برای m:
$$ma'\sin\alpha = mg - R\cos\alpha \qquad (۱)$$
و
$$m(a'\cos\alpha - a) = R\sin\alpha \qquad (۲)$$
برای M:
$$Ma = R\sin\alpha \qquad (۳)$$
و
$$0 = S - R\cos\alpha - Mg \qquad (۴)$$

از معادله‌های (۲) و (۳) نتیجه می‌شود:

$$m(a'\cos\alpha - a) = Ma$$

$$\therefore \qquad ma'\cos\alpha = (M+m)a$$

و از معادله‌های (۱) و (۳) نتیجه می‌شود:

$$\frac{(M+m)a\sin\alpha}{\cos\alpha}=mg-\frac{Ma\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\therefore\qquad (M+m)a\sin^{۲}\alpha=mg\sin\alpha\cos\alpha-Ma\cos^{۲}\alpha$$

$$\therefore\qquad (M+m\sin^{۲}\alpha)a=mg\sin\alpha\cos\alpha$$

نیز از معادلهٔ (۳)

$$R=\frac{Ma}{\sin\alpha}$$

$$=\frac{Mmg\cos\alpha}{M+m\sin^{۲}\alpha}$$

مثال۴: طناب سبکی از شیار صاف یك قرقره گذشته است. به یك طرف آن سنگی به‌جرم ۷۰ kg و به‌طرف دیگر آن شخصی به جرم ۸۴ kg آویزان است. شتاب حرکت شخص را پیدا کنید. اگر این شخص خودش را از طناب بالا بکشد به‌طوری‌که شتابش به‌طرف پایین نصف حالت قبل باشد، سنگ با چه شتابی بالا خواهد رفت؟ نشان دهید که شتاب شخص به طرف بالا نسبت به‌طناب $\frac{g}{۱۰}$ است.

حل: اگر a شتاب شخص هنگامی‌که خودش را از طناب بالا نمی‌کشد و T کشش طناب درآن هنگام باشد، داریم

$$۸۴g-T=۸۴a$$

و

$$T-۷۰g=۷۰a$$

$$\therefore\qquad ۱۵۴a=۱۴g$$

$$\therefore\qquad a=\frac{۱}{۱۱}g$$

وقتی‌که شخص خودش را بالا می‌کشد، باید برطناب نیرویی مثلاً برابر با F N وارد کند و طناب نیز چنین نیرویی برشخص درجهت عکس وارد می‌کند. در این حالت شتاب به‌طرف پایین $\frac{۱}{۱۲}g$ است.

می‌نویسیم:

$$۸۴g-F=۸۴\times\frac{۱}{۲۲}g$$

$$\therefore \qquad F=۸۴g-\frac{۸۴g}{۲۲}$$

اگر A شتاب سنگ به‌طرف بالا باشد، می‌توان نوشت:

$$F-۷۰g=۷۰A$$

$$\therefore \qquad ۱۲g-\frac{۶}{۱۱}g-۱۰g=۱۰A$$

$$\therefore \qquad A=\frac{۸}{۵۵}g$$

شتاب شخص نسبت به‌طناب برابر است با

$$\frac{۸}{۵۵}g-\frac{۱}{۲۲}g=\frac{۱}{۱۰}g$$

تمرین ۳.۳

۱ـ نخی نازك از بالای شیار صاف قرقره‌ای می‌گذرد و به دو انتهای آن وزنه‌هایی به‌جرم m و $۵m$ کیلوگرم آویزان شده است. شتاب وزنه‌ها وکشش نخ را تعیین کنید. واحدهایی را که به کار می‌برید به‌روشنی بیان کنید.
نخی‌که یك‌انتهای آن ثابت است از زیر قرقرهٔ صاف و متحرك A ،که جرم‌آن m کیلوگرم است، می‌گذرد، سپس از بالای قرقره‌ای ثابت و بالاخره از زیرقرقرهٔ متحرك B ، که جرم آن $۵m$ کیلوگرم است، می‌گذرد. انتهای دیگر نخ به‌محور قرقرهٔ A متصل است. تمام قسمتهای آویزان نخ، به‌طور قائم هستند. نشان دهیدکه کشش نخ برابرکشش نخ درقسمت اول این مسئله است، نیز شتاب قرقرهٔ A با شتاب وزنهٔ m کیلوگرمی قسمت اول این مسئله برابر است، اما شتاب قرقرهٔ B نصف شتاب وزنهٔ $۵m$ کیلوگرمی قسمت اول این مسئله است.

۲ـ ازشیار صاف قرقرهٔ ثابتی نخ محکم و سبکی عبورکرده است. به یك طرف نخ قرقرهٔ شیارداری به‌جرم ۱۲ kg و به انتهای دیگر نخ قرقرهٔ شیاردار دیگری به‌جرم ۸ kg آویزان شده است. از شیار قرقرهٔ سنگینتر نخ محکمی عبور می‌کند که به‌طرفین آن وزنه‌هایی به‌جرمهای ۳ و ۶ کیلوگرم آویزان است. ازشیار قرقرهٔ سبکتر نخ محکمی عبور می‌کند و به‌طرفین‌آن نخ وزنه‌هایی به‌جرمهای ۴ کیلوگرم و x کیلوگرم‌آویزان می‌کنیم. x را چنان تعیین کنیدکه نخی‌که ازقرقرهٔ ثابت گذشته است ساکن باقی‌بماند. کشش این نخ را نیز تعیین کنید.

۳- جرمهای ۵ کیلوگرمی و ۲ کیلوگرمی به دوانتهای نخ محکمی بسته شده‌اند. این نخ از روی شیارصاف دوقرقرهٔ ثابت و از زیرشیار یك قرقرهٔ متحرك به‌جرم m می‌گذرد. تمام قسمتهای نخ، به‌جز قسمتهایی که با قرقره‌ها درتماس است، قائم هستند. m را چنان تعیین کنید که اگر دستگاه را رها کنیم، قرقرهٔ متحرك ساکن بماند و در این‌حالت شتابهای دوجرم دیگر و کشش نخ را تعیین کنید.

۴- به‌یك انتهای نخ محکمی که از روی قرقرهٔ ثابتی می‌گذرد وزنه‌ای به جرم M و به‌انتهای دیگر آن قرقرهٔ سبکی می‌بندیم. از روی قرقرهٔ اخیر نخ محکمی می‌گذرد که به یك طرف آن وزنه‌ای به جرم $m_۱$ و به‌طرف دیگر آن وزنه‌ای به‌جرم $m_۲$ آویزان است. شتاب هر یك از وزنه‌ها را تعیین کنید. ثابت کنید که اگر $M=۴m_۱m_۲/(m_۱+m_۲)$ باشد، وزنهٔ M یا ساکن است یادارای تندی یکنواختی است.

۵- جسمی به‌جرم M برسطح میزصاف افقیی قرار دارد. این جسم به‌نخی بسته شده است و نخ از شیار قرقرهٔ ثابتی که در انتهای میز نصب شده می‌گذرد و پس از عبور از شیار این قرقره از زیر قرقرهٔ متحرکی به‌جرم m عبورمی‌کند و انتهای نخ به یك‌نقطه ثابت می‌شود. تمام‌قسمتهای نخ، به‌جز قسمتهایی که روی میز و درکنار قرقره‌هاست، قائم هستند. ثابت کنید که شتاب پایین آمدن m برابر $mg/(۴M+m)$ است. مؤلفه‌های افقی و قائم شتاب مرکز جرم M و m را تعیین‌کنید.

۶- یك انتهای نخ سبك و محکمی ثابت است. این نخ از زیر شیار قرقرهٔ متحرك A به‌جرم m می‌گذرد و سپس از بالای شیار قرقرهٔ ثابتی عبور می‌کند و به‌انتهای دیگر نخ وزنهٔ B به‌جرم $۳m$ آویزان می‌شود. کشش نخ و شتابهای A و B را پیدا کنید. تمام اجزای نخ، به‌جز قسمتهایی که با قرقره‌ها درتماس است، قائم است.

۷- نخی را به‌نقطهٔ A محکم می‌کنند. سپس آن را از پایینترین قسمت شیار یك قرقرهٔ B، که به‌آن وزنه‌ای به‌جرم $۲W$ بسته‌اند، می‌گذرانند وبالاخره نخ را ازبالای شیار قرقرهٔ ثابت C عبور می‌دهند و به‌انتهای دیگر نخ وزنه‌ای به‌جرم $W+w$ آویزان می‌کنند. تمام اجزای نخ، به‌استثنای قسمتهایی که با قرقره‌ها تماس دارد، قائم است. ازجرم قرقره‌ها و اصطکاك آنها صرف‌نظر می‌شود. اگردستگاه را به‌حال خود بگذاریم شروع به‌حرکت می‌کند. شتاب حرکت دستگاه را پیدا کنید.

۸- وزنه‌هایی به‌جرم $۱۰۰\,g$ و $۶۰\,g$ به‌دوانتهای نخ نازکی متصل شده‌اند. نخ ازشیار صاف قرقرهٔ ثابتی می‌گذرد. شتاب وزنه‌ها را تعیین‌کنید و ثابت‌کنیدکه‌کشش نخ برابر است با وزن وزنه‌ای به‌جرم $۷۵\,g$. اکنون قرقره را، که جرم آن $۵۰\,g$ است از

پایه‌ای کـه به‌آن ثابت شده است باز می‌کنند، و آن را به وسیلهٔ نخی دیگر به یك وزنهٔ ۱۰۰ g متصل می‌کنند. این وزنه برروی میزی افقی واقـع شده است و نخ در امتداد میز و عمود برکنارهٔ میز است. ثابت کنید کـه حرکت قرقره طوری است که انگار وزنه‌هـای دو طرف قرقره را برداشته‌اند و جـرم قرقره را بـه ۱۵۰ g رسانده‌اند.

۹ - A و B وزنه‌هـایی هستند کـه جرم آنها به‌ترتیب ۶ kg و ۳ kg است. این دو وزنه بر روی دو میز صیقلی، کـه کناره‌های آنها متوازی است، قـرار دارند. این دو وزنه به‌وسیلهٔ نخ نازکی که از میان دو میز آویزان شده است به‌یکدیگر متصل هستند. اجزای آویزان نخ قائم است و به‌قسمت انحنای نخ قرقرهٔ صاف C به‌جرم ۴ kg آویزان است. تمام اجزای نخ در یك صفحهٔ قائم قرار دارند و برکناره‌هـای میز عمودند. کشش نخ را در حـالتهای زیر پیدا کنید: (الف) A و B ثابت نگاه داشته شده‌اند؛ (ب) B ثـابت نگاه داشته شده است و A حرکت می‌کند؛ (پ) A و B هر دوحرکت می‌کنند. نشان دهید که کششها در سه حالت به‌نسبت ۲۱ و ۱۸ و ۱۴ است.

۱۰- نـخ سبك ABCD در نقطهٔ A ثـابت است و در نقطهٔ B از زیـر شیار قرقـرهٔ متحرکی به‌جرم M می‌گذرد، و در نقطهٔ C از بـالای شیار قرقرهٔ ثـابتی می‌گذرد و نقطهٔ D به وزنـه‌ای به‌جرم M' متصل است. این وزنـه آویزان است. فـرض می‌کنیم تمام اجزای نخ قائم است. ثابت کنیدکه شتاب پایین‌آمدن M برابر است با

$$\frac{M-2M'}{M+4M'}g$$

۱۱- یك انتهای نخ سبك و محکمی ثابت است. این نخ را از زیر شیار قرقرهٔ A به‌جرم M و سپس از بالای شیار یك قرقرهٔ ثـابت و پس از آن از زیر شیار قرقرهٔ متحرك B به جرم M' می‌گـذرانیم. انتهای دیگر نـخ به‌محور A بسته است. وقتی کـه دستگاه به‌حال‌حرکت است نسبت تندیهای A و B را به‌یکدیگر پیداکنید. نیزثابت کنیدکه شتاب A به‌طرف پایین برابر است با $(4M-2M')g/(4M+M')$.

۱۲- منشوری است به‌جرم ۷ kg که مقطع آن مثلث قـائم‌الزاویهٔ BAC است. زاویهٔ B برابر°۳۰ است. ضلع AB برسطح افقی و صاف میزی قراردارد. وزنه‌ای به‌جرم ۲ kg بر وتر CB می‌لغزد. ثابت‌کنیدکه این وزنه، مسافت ۵ m را بر این وجـه درمدت ۱٫۳ s طی می‌کند.

۱۳- گوه‌ای به جرم M و زاویهٔ α برسطح ناصاف افقیی که ضریب اصطکاك آن μ است

قرار دارد. گلوله‌ای به جرم m را به‌آرامی برسطح شیبدار گوه قرار می‌دهیم. ثابت کنید که اگر گوه حرکت کند، شتاب آن برابر خواهد بود با

$$\frac{m\cos\alpha(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)-\mu M}{m\sin\alpha(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)+M}g$$

۱۴- برسطح ثابت صاف شیبداری که زاویهٔ آن با افق برابر α است، گوه‌ای صاف به‌جرم M و زاویهٔ α چنان قرار گرفته است که سطح بالایی گوه افقی است. براین سطح افقی گلوله‌ای به‌جرم m قرار می‌دهیم. ثابت کنید که برایند شتاب گلوله بعد از حرکت گوه برابراست با $(M+m)g\sin^2\alpha/(M+m\sin^2\alpha)$ و نیزنیروی عکس‌العمل گوه و سطح را پیدا کنید.

۱۵- زاویهٔ یك گوهٔ صاف به‌جرم M برابر است با α. این گوه از یك سطح، بر میز صاف افقیی قرار می‌گیرد و وزنه‌ای به جرم m بر سطح دیگر آن گوه به پایین می‌لغزد. ثابت کنید که برای آنکه گوه را از حرکت باز داریم، باید نیروی افقی برابر $mg\sin\alpha\cos\alpha$ برآن اثر بدهیم. و ثابت کنید که عکس‌العمل میز درمقابل گوه برابر است با:

$$(M+m\cos^2\alpha)g$$

۱۶- طناب سبکی از شیار قرقرهٔ ثابتی گذشته است. به یك طرف طناب وزنه‌ای به جرم ۴۸ kg و به‌طرف دیگر طناب شخصی به‌جرم ۶۰ kg آویزان است. این شخص خودش را از طناب بالا می‌کشد، به‌طوری‌که شتابش به‌طرف پایین برابر $g/۱۸$ باشد. شتاب این شخص را نسبت به‌طناب و نیز شتاب وزنه را حساب کنید.

۱۷- طناب سبکی را از شیار قرقرهٔ ثابتی گذرانده‌اند. به یك طرف طناب شخصی به‌جرم ۷۲ kg آویزان شده است و با شتاب $۰/۶\ \mathrm{m/s^2}$ رو به پایین سرمی‌خورد. تعیین کنید شخصی دیگر به‌جرم ۴۸ kg با چه شتاب ثابتی از طرف دیگر طناب خود را بالا بکشاند تا طناب ثابت بماند.

۱۸- مقطع گوه‌ای به جرم M مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC است (در رأس A قائمه است). وجه BC این گوه برسطح صاف میز افقیی قرار دارد. وجوه AB و AC این گوه دارای اصطکاك هستند و ضریب اصطکاك هر یك برابر μ است. جرمهای m_1 و m_2 به‌وسیلهٔ نخ سبك و محکمی که از شیار قرقرهٔ صاف A می‌گذرد به‌یکدیگر مربوطند و به‌ترتیب بروجوه AB و AC قرار دارند. m_1 با شتاب a نسبت به گوه از AB پایین می‌آید. معادله‌های لازم برای پیدا کردن a و شتاب گوه را بنویسید.

۱۹- جسم P به‌جرم m برسطح ناصاف میز افقیی که ضریب اصطکاك آن μ است قرار

دارد. یك طرف این جسم به نخ سبك و محکمی متصل است. این نخ از شیار قرقرهٔ صاف و ثابت A که در یك انتهای میز است می‌گذرد و سپس از زیر قرقرهٔ صاف متحرك B به‌جرم m و بالاخره از بالای قرقرهٔ صاف و ثابت C عبور می‌کند. انتهای دیگر نخ به‌وزنهٔ D به‌جرم m که آویزان است، متصل‌است. تمام قسمتهای نخ، به‌جز قسمتهایی که با قرقره‌ها درتماس است، افقی یا قائم است. ثابت کنید که اگر $\frac{۳}{۵} > \mu$ باشد، P حرکت نمی‌کند و اگر $\frac{۳}{۵} < \mu$ باشد، D با شتاب $g\,\frac{(۳-\mu)}{۶}$ حرکت خواهد کرد.

۲۰- نیمکره‌ای صاف و به‌جرم M و به‌مرکز C از قسمت مسطح بر روی میزی صیقلی قرار دارد. نقطه‌ای مادی به‌جرم m درنقطه‌ای مانند A برروی نیمکره واقع است به‌طوری‌که AC با امتداد قائم زاویهٔ α می‌سازد. ثابت‌کنید که اگر نیرویی افقی با بزرگی مناسب، در سطح قائم ماربر AC برنیمکره اعمال شود، وقتی‌که نیمکره حرکت می‌کند، نقطهٔ مادی نسبت به‌نیمکره ساکن خواهد ماند. شتاب نیمکره را در این حالت پیدا کنید.

تمرینهایی برای مرور بخشهای قبل

۱ - شناگری درآب آرام می‌تواند با سرعت v پیش برود و می‌خواهد که از یك طرف رودخانه‌ای که آب آن با سرعت u جریان دارد به‌طرف دیگر برود. ثابت‌کنید که فقط اگر $v > u$ باشد می‌تواند به‌نقطهٔ A که مستقیماً مقابل اوست برسد.
اگر $v < u$ باشد و شناگر چنان شنا کند که در آن طرف رودخانه به نقطهٔ B نزدیکترین نقطهٔ ممکنه به نقطهٔ A برسد، نسبت AB را به عرض رودخانه پیدا کنید.

۲ - یك‌کشتی با سرعت ۳۲ km/h به‌طرف شمال می‌رود. در ساعت ۱۲ مشاهده می‌کند که کشتی دیگری که به فاصلهٔ ۸ km در °۴۵ شمال شرقی آن واقع است با سرعت ۲۴ km/h به‌سمت مغرب می‌رود. پس از چه مدت دو کشتی به نزدیکترین فاصله از یکدیگر می‌رسند و در این لحظه فاصلهٔ دو کشتی از یکدیگر چقدر است؟
تا چه مدتی، فاصلهٔ دو کشتی کمتر از ۸ km است؟

۳ - هواپیمایی‌مستقیم از A پروازمی‌کند و به B درشمال A می‌رسد وسپس برمی‌گردد. درتمام مدت مسافرت باد با سرعت ۶۴ km/h از جنوب به‌طرف مغرب می‌وزد.

درصورتی‌که سرعت هـواپیما در هوای آرام $320\ \mathrm{km/h}$ بـاشد و مسافرت فـوق جمعاً ۷ ساعت طول کشیده باشد، فاصلهٔ A تا B چندکیلومتر است؟

۴ـ یك کشتی بـا سرعت u به طرف شمال می‌رود و به‌نظر می‌رسد کـه بـاد از جهت θ درجهٔ شمال شرقی می‌وزد، که $0° < \theta < 45°$ است. کشتی به دورخود می‌چرخد و به‌طرف جنوب بـا همان سرعت u حـرکت می‌کند. در ایـن هنگام به نظر می‌رسد کـه باد از جهت θ درجهٔ جنوب شرقی می‌وزد. بزرگی و جهت واقعی تندی باد را تعیین کنید.

۵ـ توضیح دهیدکه منظور از اینکه می گوییم‌تندی یك‌بردار است چیست، و ازآن روشی را استنتاج کنید که تندی B نسبت به A، هنگامی‌که تندیهای A و B نسبت به‌ناظر معینی‌داده شده‌اند، معلوم می‌شود. اتومبیلی باسرعت $20\ \mathrm{km/h}$ درامتداد جاده‌ای افقی حرکت می‌کند و شخصی بـا سرعت $10\ \mathrm{km/h}$ در جـاده‌ای مستقیم و عمود برجادهٔ اتومبیل می‌دود. این شخص اتومبیل را هنگامی می‌بیند که اتومبیل درفاصلهٔ ۲۰۰ متری ازمحل تلاقی دوجاده است و خود او درفاصلهٔ ۱۵۰ متری ازمحل تلاقی دوجاده است. ثابت‌کنید که فاصلهٔ این شخص از اتومبیل هرگز از $20\sqrt{5}\ \mathrm{m}$ کمتر نخواهد شد.

۶ـ اگر تندی A معلوم و تندی B نسبت به A نیز معلوم باشد، ثابت کنید که تندی B را می‌توان تعیین کرد. برای دوچرخه‌سواری‌که باسرعت $16\ \mathrm{km/h}$ به‌طرف مشرق می‌رود، به‌نظر می‌رسدکه باد از شمال می‌وزد، و وقتی‌که این دوچرخه‌سوار با همان سرعت به‌طرف شمال می‌رود، به‌نظر می‌رسد کـه باد از جهت ۳۰ درجهٔ شمال غربی می‌وزد. بزرگی و جهت تندی باد را معلوم کنید.

۷ـ دواتومبیل در جاده‌هـای OA و OB که بـا هم زاویهٔ α می‌سازند حرکت می‌کنند. یکی‌از دواتومبیل در امتداد OA با سرعت یکنواخت u به‌طرف O می‌رود؛ درحالی کـه اتومبیل دیگر در امتداد OB بـا سرعت v از O دور می‌شود. ثابت‌کنیدکه اگر اتومبیل اول هنگامی‌که اتومبیل دوم در O است به فاصلهٔ c از O باشد، وقتی‌کـه فاصلهٔ دو اتومبیل حداقل است، نسبت فاصله‌های آنها از O برابر است با

$$\frac{v+u\cos\alpha}{u+v\cos\alpha}$$

همچنین‌ثابت‌کنیدکه فاصلهٔ دو اتومبیل پس‌ازمدت زمانی برابر $\dfrac{c(u+v\cos\alpha)}{u^2+v^2+2uv\cos\alpha}$ به‌حداقل می‌رسد.

۸ ـ در امتداد خط مستقیم ABCD، نقطه‌ای مادی با شتاب یکنواخت حرکت می‌کند. اگر فاصله‌های متوالی $AB=a$ و $BC=b$ و $CD=c$ در زمانهای متساوی طی شود، ثابت کنید که $c=۲b-a$ و نیز نسبت سرعتها در D و A برابر است با

$$\frac{۵b-۳a}{۳a-b}$$

۹ ـ قطاری به‌طول $۶۴\ \mathrm{m}$ باشتاب $۰/۱۵\ \mathrm{m/s^2}$ حرکت می‌کند. هنگامی‌که سرعت آن $۸۰\ \mathrm{km/h}$ است بـه قطاری دیگر می‌رسد کـه طول آن $۷۲\ \mathrm{m}$ است و بـا شتاب $۰/۳\ \mathrm{m/s^2}$ از جهت مخـالف در ریلهایی موازی بـا ریلهای قطار اول حـرکت می‌کند. در این‌لحظه سرعت قطار دوم $۴۰\ \mathrm{km/h}$ است. تعیین‌کنید چه مدت طول می‌کشد تا قطارهـا از یکدیگر رد شوند و سرعت آنها در انتهای این مـدت چقدر است. هریك ازقطارها درفاصلهٔ زمانی‌که ازکنار یکدیگر عبور می‌کنند، چه مسافتی را طی می‌کنند؟

۱۰ـ (الف) قطاری از یك ایستگاه بـه‌راه می‌افتد و در ایستگاه دیـگر متوقف می‌شود. مـدت مسافرت برابر T است. قطار درمدتی برابر pT با شتاب مثبت یکنواخت و درمدتی برابر qT با شتاب منفی یکنواخت حـرکت‌کرده است و اواسط راه را بـا سرعت یکنواخت V پیموده است. ثابت‌کنید که سرعت متوسط مسافرت برابراست با $\frac{۱}{۲}V(۲-p-q)$. (ب) قطاری برای پیمودن فـاصلهٔ s میان دوایستگاه طوری حرکت‌کرده است‌که مسافتی برابر ps را با شتاب مثبت یکنواخت و مسافتی برابر qs را با شتاب منفی یکنواخت طی‌کرده است و اواسط راه را بـا سرعت ثابت V پیموده است. سرعت متوسط مسافرت را تعیین‌کنید.

۱۱ـ قطاری‌که بـا سرعت $۷۲\ \mathrm{km/h}$ حرکت می‌کند از سرعت خود می‌کاهد و مسافتی برابر $۲۰۰\ \mathrm{m}$ را با شتاب منفی یکنواخت طی می‌کند. سپس $۴۰۰\ \mathrm{m}$ بعدی را بـا سرعت یکنواخت وبالاخره $۶۰۰\ \mathrm{m}$ بعدی را با شتاب مثبت یکنواخت طی می‌کند، به‌طوری‌که دوباره سرعتش به $۷۲\ \mathrm{km/h}$ می‌رسد. اگرمدت‌زمانی‌که $۴۰۰\ \mathrm{m}$ وسط را باسرعت یکنواخت طی‌کرده است برابرمجموع مدت زمانهایی باشدکه باشتابهای مثبت و منفی طی‌کرده است، مدت زمـان‌کل را برای آنکه از سرعت ۷۲ کیلومتر درساعت دوباره به‌همین سرعت برسد تعیین‌کنید.

۱۲ـ قطـاری ایستگاه A را در ساعت ۴ بعدازظهر بـه مقصد ایستگاه B ، کـه در ۳۰ کیلومتری‌آن است، ترك می‌کند و درساعت ۴.۴۰ بعدازظهر همان روز به ایستگاه

B می‌رسد. سرعت قطار درساعت ۴.۱۵ برابر ۴۸ km/h بوده است و درساعت ۴.۳۰ سرعت قطار برابر ۷۲ km/h بوده است. سرعت اخیر تا هنگامی برقرار است که ترمزها به‌کار می‌افتند، و تولید شتابی منفی می‌کنندکه قطار را پس از مدتی متوقف می‌سازد. در ۱۵ دقیقهٔ اول شتاب حرکت یکنواخت بوده است. در چه لحظه‌ای قطار از سرعتش کاسته است و شتاب منفی حرکت برحسب $m/s^۲$ چقدر بوده است؟ نمودار تندی ـ زمان را رسم کنید.

۱۳ـ جدول زیر سرعت یك اتومبیل را در فاصله‌های زمانی یك دقیقه‌ای نشان می‌دهد. مدت حرکت ۴ دقیقه بوده است:

(دقیقه) t	۰	۱	۲	۳	۴
(km/h) v	۰	۵۰	۸۰	۸۰	۰

به‌فرض آنکه شتاب در این فاصله‌های زمانی یکنواخت باشد، نمودار تندی ـ زمان را رسم کنید. از روی نمودار، یا به هر طریق دیگر، به سؤالات زیر پاسخ بدهید: (الف) مسافتی که دراین مدت پیموده شده است برحسب کیلومتر؛ (ب) مدتی که برای پیمودن ۲ کیلومتر اول لازم بوده است؛ (پ) مدتی که برای پیمودن ۳ کیلومتر اول لازم بوده است.

۱۴ـ نقطه‌ای مادی برمسیری مستقیم باشتاب یکنواختα حرکت می‌کند. تندی اولیهٔ آن برابرu است؛ ثابت کنیدکه مسافتی که درمدتt طی می‌کند ازرابطهٔ زیربه‌دست می‌آید:

$$x=ut+\frac{۱}{۲}\alpha t^{۲}$$

اتومبیلهای A و B درمسیری مستقیم به‌موازات یکدیگر حرکت می‌کنند. وقتی‌که A درنقطهٔ P ازمسیراست دواتومبیل درکنار یکدیگر دیده می‌شوند. وچون به‌نقطهٔ Q ازمسیر برسد، بازهم دواتومبیل درکناریکدیگردیده می‌شوند. به فرض آنکه A و B به‌ترتیب با شتابهای ثابت $\alpha_۱$ و $\alpha_۲$ حرکت‌کنند و تندی آنها درنقطهٔ P به‌ترتیب $u_۱$ و $u_۲$ باشد، ثابت‌کنیدکه فاصلهٔ PQ برابر است با:

$$\frac{۲(u_۱-u_۲)(u_۱\alpha_۲-u_۲\alpha_۱)}{(\alpha_۱-\alpha_۲)^۲}$$

۱۵ـ دونقطهٔ مادی P و Q دایره‌های متحدالمرکزی، به‌مرکز O و به‌شعاعهای a و $۲a$، را که دریك صفحه واقعند دریك جهت طی می‌کنند. تندیهای ثابت زاویه‌ای شعاعهای OP و OQ به‌ترتیب ۴ω و ω است و درمبدأ زمان OPQ خطی راست

است. ثابت کنید که تندی زاویه‌ای PQ ، ابتدا وقتی‌که زاویهٔ POQ حاده و کسینوس آن برابر $\frac{۴}{۵}$ است، صفرمی‌شود. نیز تانژانت زاویه‌ای را که در این لحظه، شتاب P نسبت به Q با OQ می‌سازد تعیین کنید.

۱۶- یك‌سر نخی به یك نقطه محکم شده است. سپس نخ از زیر قرقرهٔ متحرك A به‌جرم m می‌گذرد و پس‌ازآن از روی قرقرهٔ ساکنی عبور کرده و انتهای دیگرنخ به‌محور قرقرهٔ کوچك B به‌جرم m بسته شده است. نخ دیگری از شیار قرقرهٔ B می‌گذرد و به‌یك انتهای آن وزنه‌ای به‌جرم m و به‌انتهای دیگر آن وزنه‌ای به‌جرم m' متصل‌است. تمام اجزای آویزان نخ قائم است. m' نسبت به‌قرقرهٔ ساکن بیحرکت است. m' را برحسب m پیدا کنید. شتاب قرقرهٔ A را تعیین کنید.

۱۷- نخی سبك از بالای قرقره‌ای صاف که به‌سقف آسانسور ثابت شده است عبورکرده است و به دوانتهای‌آن وزنه‌های ۶ کیلوگرمی و ۷ کیلوگرمی‌آویزان است. وزنهٔ ۷ کیلوگرمی درکنار قرقره و به‌آن متصل است و وزنهٔ ۶ کیلوگرمی به وسیلهٔ نخ آویزان است. اتصال وزنهٔ ۷ کیلوگرمی را باز می‌کنیم و وزنه را رها می‌کنیم تا دستگاه به‌حرکت درآید. کشش نخ را هنگامی‌که حرکت برقرار می‌شود و مدت زمانی که طول‌می‌کشد تا وزنهٔ۷ کیلوگرمی به‌فاصلهٔ یك‌متری‌زیرقرقره برسددرهریك از دوحالت زیرتعیین کنید: (الف) وقتی‌که آسانسور حرکت نمی‌کند، (ب) وقتی‌که آسانسور با شتاب ثابت $\frac{۱}{۸}g$ به‌طورقائم بالا می‌رود.

۱۸- یك انتهای نخ سبك و محکمی به‌یك وزنهٔ ۹ kg که برروی میز افقی و صافی قرار دارد متصل شده است. نخ ازکنار میز می‌گذرد و به انتهای دیگر آن قرقرهٔ سبك و صافی متصل شده است. از روی این قرقره نخ سبك و محکم دیگری می‌گذرد و به دو انتهای نخ وزنه‌های ۵ kg و ۲ kg آویزان شده است. اگر دستگاه را، که درآن تمام قسمتهای نخ یا افقی است یا قائم، از حال سکون رها کنیم، شتاب حرکت وزنهٔ ۹ kg را در امتداد سطح میز تعیین کنید.

۱۹- نخ ناکشسانی را از دور میخ صافی می‌گذرانیم. به دو انتهای نخ دو کفهٔ ترازو که هر یك ۳۰ گرم‌جرم دارند می‌آویزیم. در یك‌کفه وزنه‌ای به‌جرم ۶۰ گرم و درکفهٔ دیگر دو وزنهٔ ۶۰ گرمی روی هم قرار می‌دهیم و دستگاه را به‌آرامی رها می‌کنیم تا کفه‌ها به‌طور قائم آویزان باشند. تعیین‌کنید شتاب دستگاه، کشش نخ، نیروی وزنی‌که هر یك از وزنه‌ها برکفه‌ها اعمال می‌کنند، و عکس‌العمل میان دو وزنه را که روی هم درکفهٔ دوم قرار دارند.

۲۵ـ نقطه‌ای مادی با تندی u به‌طور مستقیم در امتداد سطح شیبداری که با افق زاویهٔ α می‌سازد پرتاب می‌شود. زاویهٔ اصطکاك میان سطح شیبدار و نقطهٔ مادی برابر است با ε (که $\alpha > \varepsilon$ است). مسافتی را که نقطهٔ مادی بالا می‌رود و نیز تندی نقطهٔ مادی را هنگامی که به‌نقطهٔ پرتاب باز می‌گردد تعیین کنید، و ثابت کنید که اگر مدت زمانهای بالا رفتن و پایین آمدن برابر t_1 و t_2 باشد،

$$\frac{t_2^2 - t_1^2}{t_2^2 + t_1^2} = \frac{tg\varepsilon}{tg\,\alpha}$$

اگر ε بزرگتر از α باشد چه روی می‌دهد؟

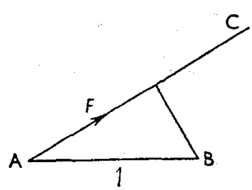
۴

کار، توان و انرژی

۰۱.۴ کار

وقتی‌که نیرویی نقطهٔ اثرخود را جابه‌جا می‌کند می‌گویندکه کار انجام داده است. اگر نیرو ثابت باشد کار انجام شده برحسب تعریف حاصلضرب نیرو درمسافتی است که نقطهٔ اثر نیرو در جهت نیرو پیموده است. کار، یك کمیت اسکالر است.

فرض‌کنیم نیرویی برابر F نقطهٔ اثر خود را از A به B جابه‌جا کند (شکل ۴-۱) که درآن $AB = l$ است.



شکل ۴-۱

دراین صورت، اگرنیرو درجهت AC، که با جهت AB زاویه‌ای برابر θ می‌سازد، اعمال شده باشدکار انجام یافته برابر است با:

$$F \times (\text{تصویر } AB \text{ بر } AC)$$
$$= Fl \cos\theta$$

این را می‌توان به‌صورت $F\cos\theta \times l$ نیز نوشت، کـه حاصلضرب تغییرمکان l در مؤلفهٔ F درجهت تغییرمکان است.

البته، اگر نیرو در جهت تغییرمکان اعمال شود $\theta = 0$ وکار انجام یافته برابر Fl، یعنی برابر حاصلضرب نیرو در تغییرمکان l است.

از این گذشته، اگر $\theta = 90^\circ$ باشد، یعنی اگر نیرو و تغییرمکان عمود برهم باشند، کار انجام‌یافته به‌وسیلهٔ آن نیرو درچنان تغییرمکانی صفراست. برعکس، اگر کار انجام‌یافته به‌وسیلهٔ نیرویی صفر باشد، نیرو یا تغییرمکان باید صفر باشند یا اینکه نیرو و تغییرمکان باید برهم عمود باشند.

نیز اگر $\theta > 90^\circ$ باشد، کار انجام یافته به‌وسیلهٔ نیرو منفی است، یا به‌بیان دیگر کار برخلاف نیرو انجام شده است.

اگرچند نیروی F_1، F_2، ...، F_n بریك نقطهٔ مادی اثر کنند، کاری که به وسیلهٔ نیروها انجام می‌گیرد در هر تغییرمکان نقطهٔ مادی برابر است با مجموع جبری کاری که به‌وسیلهٔ نیروهای F_1، F_2، ...، F_n به‌طور جداگانه انجام می‌گیرد.

۲.۴ واحدهای کار

واحد مطلق کار در دستگاه .C.G.S کاری است که به‌وسیلهٔ نیرویی برابر یك دین که نقطهٔ اثرش یك سانتیمتر در جهت نیرو تغییر مکان می‌یابد انجام می‌گیرد. این واحد را ارگ[1] می‌نامند.

کاری که به‌وسیلهٔ یك نیوتون هنگامی که نقطهٔ اثر نیرو یك متر درجهت نیرو تغییر مکان پیدا کند، انجام می‌شود برابر است با ژول[2]. ژول واحد کار در دستگاه بین‌المللی واحدها (SI) است. علامت اختصاری آن J است.

۳.۴ واحد عملی کار، کیلوگرم متر نام دارد و آن کار نیرویی است برابر یك کیلوگرم نیرو که نقطهٔ اثرش را یك متر در جهت نیرو تغییر مکان دهد. علامت اختصاری آن kgm است.

چون

$$1\,\mathrm{kgf} = g\,\mathrm{N}$$

$$1\,\mathrm{kgm} = g\,\mathrm{J}$$

یعنی تقریباً یك کیلوگرم متر برابر ۹٫۸ ژول است.

۴.۴ توان

توان عبارت ازسرعت انجام کار، یعنی‌عبارت ازکاری‌است که در واحد زمان انجام می‌گیرد. واحد توان در دستگاه .C.G.S ارگ بر ثانیه نام دارد. در دستگاه بین‌المللی،

۱- Erg ۲- Joule

واحد توان وات است وآن $1\ J/s$ است. علامت اختصاری وات W است.

واحد عملی توان ۱اسب بخار است. اسب بخار برابر است با ۷۵ kgm/s.

چون $1\ kgm/s \# 9/8\ W$ است، اسب بخار برابر است با ۷۳۶ W. علامت اختصاری اسب بخار ch است. ۱اسب بخار انگلیسی برابر ۷۴۶ W است و علامت اختصاری آن hp است.

اگر نیرویی برابر F نیوتون نقطهٔ اثر خود را در جهت نیرو با سرعت یکنواختی برابر v متر برثانیه جابه‌جا کند، کاری که در یك ثانیه انجام می‌شود Fv وات یا $Fv/736$ اسب بخار است.

درحالتی که قطار باسرعت یکنواخت v متر برثانیه حرکت می کند، کاری که به‌وسیلهٔ موتور انجام می گیرد برابراست با نیروی کشش ضرب درسرعت v، وتوان موتور برحسب اسب بخار برابر است با این حاصلضرب بخش بر ۷۳۶. اگر سرعت قطار یکنواخت و برابر v باشد، در این صورت کشش موتور برابر است با نیروی R که ناشی از اصطکاك و مانند آن است، و توان موتور برابر است با Rv.

اگر حرکت قطار توأم با شتاب انجام گیرد، کاری که در یك ثانیه انجام می گیرد برابر Rv نیست، زیرا کشش قطار در این حالت برابر R نیست.

۵.۴ مثال ۱: جرم کل لوکوموتیو و قطاری برابر ۲۰۰ Mg است. اگر لوکوموتیو بتواند قطار را باسرعت یکنواختی‌برابر ۱۰۰ km/h درسطح افقی به‌پیش‌براند، و مقاومت ناشی از اصطکاك و مانند آن $\frac{1}{200}$ وزن قطار باشد، توان موتور لوکوموتیو را تعیین کنید.

حل : چون سرعت یکنواخت است، کشش موتور برابر است با نیروی کل مقاومت، یعنی برابر است با

$$1000\,g\,\mathrm{N}$$

سرعت قطار برابر است با

$$100\times\frac{1000}{3600}=\frac{1000}{36}\ \mathrm{m/s}$$

پس کاری که دریك ثانیه انجام شده است:

$$\frac{1000}{36}\times1000\times9/8\ \mathrm{J}$$

∴

یعنی توان موتور لوکوموتیو برابر است با $۲/۷۲\,\mathrm{W} \times ۱۰^{۵}$ یا $۲۷۲\,\mathrm{kW}$.

مثال ۲: قطاری به‌جرم $۲۰۰\,\mathrm{Mg}$ می‌خواهد با سرعت یکنواخت $۶۰\,\mathrm{km/h}$ از راه‌آهن شیبداری به شیب $\frac{۱}{۱۰۰}$ بالا برود. درصورتی‌که مقاومت ناشی از اصطکاك و غیره $\frac{۱}{۲۰۰}$ وزن قطار باشد، توان موتور را تعیین کنید.

حل: مقاومت برابر است با $۱۰۰۰\,g\,\mathrm{N}$. مؤلفهٔ وزن قطار در امتداد سطح شیبدار برابر است با $۲۰۰۰\,g\,\mathrm{N}$. چون سرعت ثابت است کشش موتور باید برابر نیروی مقاومت به علاوهٔ مولفهٔ وزن قطار باشد.

$$\therefore \qquad \text{کشش} = ۱۰۰۰g + ۲۰۰۰g = ۳۰۰۰g$$

چون سرعت $\frac{۱۰۰}{۶}\,\mathrm{m/s} = \frac{۶۰۰۰۰}{۳۶۰۰}$ است.

کاری که دریك ثانیه انجام می‌شود برابر است با

$$۳۰۰۰\,g \times \frac{۱۰۰}{۶}\,\mathrm{J}$$

$$\therefore \qquad \text{توان موتور} = ۵۰۰۰۰g\,\mathrm{W}$$

$$= ۴۹۰\,\mathrm{kW}$$

مثال ۳: موتوری با توان $۲۸۰\,\mathrm{kW}$، قطاری به‌جرم $۱۵۰\,\mathrm{Mg}$ را از راه‌آهن شیبداری به شیب $\frac{۱}{۲۵۰}$ بالا می‌برد. مقاومت برابر است با وزن $۳۵۰\,\mathrm{kg}$. سرعت ماکزیمم یکنواخت قطار برحسب کیلومتر درساعت چقدر است؟

حل: ماکزیمم کاری که در هر ثانیه به وسیلهٔ موتور انجام می‌گیرد برابر است با

$$۲۸۰ \times ۱۰^{۳}\,\mathrm{J}$$

مقاومت برابر است با $۳۵۰g\,\mathrm{N}$

مؤلفهٔ وزن در امتداد سطح شیبدار برابر است با

$$۱۵۰ \times ۱۰۰۰ \times \frac{۱}{۲۵۰}\,g\,\mathrm{N} = ۶۰۰\,g\,\mathrm{N}$$

وقتی‌که قطاربا سرعت یکنواخت v متر برثانیه حرکت می‌کند، کشش قطار باید مساوی مقاومت به‌علاوهٔ مؤلفهٔ وزن باشد.

$$\therefore \qquad \text{کشش} = ۹۵۰g\,\mathrm{N}$$

و کاری که در یك ثانیه انجام می‌شود برابر است با

$$۹۵۰gv\ \mathrm{J}$$

$$\therefore \quad ۹۵۰\times۹/۸v=۲۸۰\times۱۰^{۳}$$

$$\therefore \quad v=\frac{۲۸۰\times۱۰^{۳}}{۹۵۰\times۹/۸}\mathrm{m/s}$$

$$\therefore \quad v=\frac{۲۸۰\times۳۶۰۰}{۹۵۰\times۹/۸}\mathrm{km/h}$$

$$=۱۰۸\ \mathrm{km/h}$$

مثال ۴: اتومبیلی که جرم‌آن $۷۵۰\ \mathrm{kg}$ است در روی جاده‌ای افقی ازحال سکون شروع به‌حرکت می کند و تا ۱۰ ثانیه با شتاب یکنواخت طوری پیش می‌رود که پس‌از این‌مدت سرعت‌آن به $۱۸\ \mathrm{km/h}$ برسد. اگرمقاومت درمقابل حرکت اتومبیل $۵g\ \mathrm{N}$ باشد، توان اتومبیل را ۱۰ ثانیه پس از شروع حرکت پیدا کنید.

حل : چون سرعت اتومبیل پس‌ازده ثانیه به $۱۸\times\frac{۱۰۰۰}{۳۶۰۰}=۵\ \mathrm{m/s}$ می‌رسد، شتاب یکنواخت حرکت $۰/۵\ \mathrm{m/s^2}$ است. اگر نیروی محرکی کـه به وسیلهٔ اتومبیل در این مدت اعمال می‌شود $D\ \mathrm{N}$ باشد، معادلهٔ حرکت چنین خواهد بود:

$$D-۵g=۷۵۰\times۰/۵$$

$$\therefore \quad D=۳۷۵+۴۹=۴۲۴$$

بنابراین وقتی‌که سرعت به $۵\ \mathrm{m/s}$ می‌رسد، توان اتومبیل برابر خواهد بود با

$$۵\times۴۲۴\ \mathrm{J}$$

$$\therefore \quad \text{توان}=۲/۱۲\ \mathrm{kW}$$

مثال ۵: دوچرخه‌سواری باسرعت $۱۸\ \mathrm{km/h}$ ازجادهٔ شیبداری به‌شیب $\frac{۱}{۳۰}$ بالامی‌رود. اگر جرم دوچرخه‌سوار با دوچرخـه‌اش روی هم $۸۴\ \mathrm{kg}$ ، و مقاومت در مقابل حرکت برابر نیروی وزن $۱\mathrm{kg}$ باشد، تعیین‌کنید که دوچرخه‌سوار با چه توانی کار می کند. به‌فرض آنکه دوچرخه‌سوار، نیروی قائم ثابتی بر هریك ازدو رکاب چرخ، درضمن پایین آمدن رکاب، اعمال می کند، و طول رکابها $۱۶\ \mathrm{cm}$ و قطر چرخ عقب $۱/۸\ \mathrm{m}$ است، این نیروی ثابت را تعیین کنید.

حل : مؤلفهٔ وزن در امتداد سطح شیبدار برابر است با $۲/۸g$ N.

$$\therefore \quad \text{کل نیروی مقاوم} = ۳/۸g \text{ N}$$

$$\text{کار انجام شده دریک ثانیه} = ۳/۸ \times ۹/۸ \times \frac{۱۸۰۰۰}{۳۶۰۰} \text{ J}$$

$$\therefore \quad \text{توان} = ۱۹ \times ۹/۸ \text{ W} = ۰/۱۸۶ \text{ kW}$$

قطر چرخ عقب $۱/۸$ m است، و این بدان معنی‌است که به‌ازای هر دور رکاب، چرخ به‌اندازهٔ $۱/۸\pi$ متر جلو می‌رود.

کارخارجی که دریک‌دورانجام‌می گیرد برابراست با $۳/۸ \times ۹/۸ \times ۱/۸\pi$ ژول.

نیرویی را که شخص به‌طور قائم بر رکاب وارد می کند به P نیوتون نمایش می‌دهیم. چون طول رکاب ۱۶ cm است، در هردوری که چرخ می‌زند، این نیرو در طی مسافتی برابر $۴ \times ۰/۱۶$ m اعمال می‌شود.

$$\therefore \quad \text{کار دوچرخه‌سوار} = ۴ \times ۰/۱۶ \times P \text{ J}$$

$$\therefore \quad ۰/۶۴P = ۳/۸ \times ۹/۸ \times ۱/۸\pi$$

$$\therefore \quad P = \frac{۳/۸ \times ۹/۸ \times ۱/۸\pi}{۰/۶۴} = ۳۲۹ \text{ N}$$

مثال ۶: یک کشتی جنگی با سرعت ۶۰ km/h به وسیلهٔ موتورهایی که توان آنها ۳۰۰۰۰ kW است به‌پیش می‌رود. مقاومت درمقابل حرکت کشتی را تعیین کنید، و به‌فرض‌آنکه مقاومت به‌نسبت مجذور سرعت تغییرمی کند، برای سرعت ۷۲ km/h چه توانی لازم است؟

حل : فرض می کنیم مقاومت درمقابل حرکت کشتی D N باشد. وقتی که سرعت کشتی یکنواخت است، نیروی مؤثری که به‌وسیلهٔ موتورها به‌طرف جلو اعمال می‌شود باید با نیروی‌مقاومت برابرباشد، و بنابراین وقتی که سرعت ۶۰ km/h است، کار انجام یافته در هر ثانیه $D \times ۶۰ \times \frac{۱۰۰۰}{۳۶۰۰}$ J است. پس

$$D \times \frac{۶۰۰۰۰}{۳۶۰۰} = ۳۰۰۰۰ \times ۱۰^۳$$

$$\therefore \quad D = ۱۸۰۰ \times ۱۰^۳$$

حال اگر مقاومت به نسبت مجذور سرعت تغییرکند، وقتی که سرعت به ۷۲ km/h می‌رسد، مقدار آن برابر $D \times \frac{۷۲^۲}{۶۰^۲}$ N خواهد بود. بنابراین کاری

که دریك ثانیه با این سرعت ثابت انجام می‌گیرد:

$$= D \times \frac{۷۲^{۲}}{۶۰^{۲}} \times ۷۲ \times \frac{۱۰۰۰}{۳۶۰۰} \mathrm{J}$$

$$\therefore \quad \text{توان} = ۱۸۰۰ \times ۱۰^{۳} \times \frac{۳۶}{۲۵} \times ۲۰ \, \mathrm{W}$$

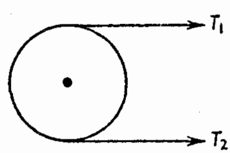
$$= ۵۱۸۴۰ \, \mathrm{kW}$$

۶.۴ انتقال توان به‌وسیلهٔ تسمه

فرض کنید تسمه‌ای از حول قرقره‌ای گذشته است و بدون آنکه روی قرقره بلغزد، قرقره را می‌چرخاند.

فرض می‌کنیم کششهای قسمتهایی از تسمه که از قرقره دور و به‌آن نزدیك می‌شود به‌ترتیب $T_۱$ و $T_۲$ نیوتون باشد $(T_۱ > T_۲)$.

این کششها هر دو به طرف خارج قرقره اثر می‌کنند، و هنگامی که تسمه مسافتی می‌پیماید کار کلی که به‌وسیلهٔ آنها انجام می‌گیرد، برابر خواهد بود با حاصلضرب اختلاف کششها درمسافتی که تسمه می‌پیماید.



شکل ۴-۲

اگر شعاع قرقره r متر باشد و قرقره در هرثانیه n دور بزند، مسافتی که به‌وسیلهٔ تسمه دریك ثانیه پیموده می‌شود برابر است با $۲\pi rn$ متر.

بنابراین کاری که دریك ثانیه به‌وسیلهٔ تسمه انجام می‌گیرد برابر است با:

$$۲\pi rn(T_۱ - T_۲) \ \mathrm{J}$$

پس توان انتقال یافته برابر است با:

$$۲\pi rn(T_۱ - T_۲) \ \mathrm{W}$$

مثال: توان، به‌وسیلهٔ یك تسمه، از محوری به‌محور دیگر، با سرعت ۲۰ m/s منتقل می‌شود. اگر کشش دوقسمت مستقیم تسمه به‌نسبت ۵ و ۲ باشند، و اگر بزرگترین

توانی که می‌تواند بدون پاره شدن تسمه منتقل شود برابر ۱۵ kW باشد، کششی را تعیین کنید که تسمه را پاره خواهد کرد.

حل: کشش واقعی درطرف کشیده‌تر، کشش حدی است. اگر $T_۱$ و $T_۲$ کششهای دوطرف برحسب نیوتون باشد، کاری که دریك ثانیه انجام می گیرد برابر است با:

$$(T_۱-T_۲)\times ۲۰\ \ \mathrm{J}$$

$$\therefore\quad (T_۱-T_۲)\times ۲۰=۱۵۰۰۰$$

$$\therefore\quad \frac{۳}{۵}T_۱=۷۵۰$$

$$\therefore\quad T_۱=۱۲۵۰\ \mathrm{N}$$

کششی بیشتر از این، تسمه را پاره خواهدکرد.

تمرین ۱۰۴

۱- جراثقالی ۲۲ بستهٔ ۱۰۰ کیلوگرمی را تا ارتفاع ۵ m بالا می‌برد. کاری را که به‌وسیلهٔ جراثقال انجام شده است تعیین کنید.

۲- اتومبیلی با سرعت ۶۰ km/h در جاده‌ای افقی که مقاومت در مقابل حرکت در آن جاده ۱۲۰ N است حرکت می کند. توان اتومبیل را تعیین کنید.

۳- اتومبیلی با سرعت یکنواخت ۴۸ km/h از جادهٔ شیبداری به‌شیب $\frac{۱}{۸}$ بالامی‌رود. اگر جرم‌کل اتومبیل برابر ۸۰۰ kg باشد، و مقاومتها قابل صرف‌نظرکردن باشند، توان اتومبیل را تعیین کنید.

۴- حداقل انرژی لازم برای آنکه موتورسیکلت سواری مسافتی برابر ۴۰۰ m را با سرعت ۲۰ km/h، (الف) دریك جادهٔ افقی، (ب) دریك جادهٔ شیبدار به‌شیب $\frac{۱}{۲۰}$ به‌طرف بالا طی کند حساب کنید. فرض‌می‌کنیم که جرم موتورسیکلت و راننده‌اش روی هم ۱۰۰ kg ، و مقاومتها در سرعت ۲۰ km/h برابر ۲۰ N باشد. حداقل توان را که برای هرحالت لازم است تعیین کنید.

۵- قطاری که جرم‌آن ۲۵۰ Mg است ازجادهٔ شیبداری به‌شیب $\frac{۱}{۲۰۰}$ باسرعت یکنواخت ۳۲ km/h بالا می‌رود. مقاومتهای ناشی از اصطکاك و غیره برابر است با وزن وزنه‌ای به‌جرم ۳ Mg. موتور با چه توانی کار می کند؟

۶ ـ یك کشتی به‌جرم $30000\ \text{Mg}$ که توان موتورهایش $22500\ \text{kW}$ است با سرعت $24\ \text{km/h}$ به‌پیش‌می‌رود. درمقابل هر Mg جرم کشتی چقدرمقاومت وجود دارد؟

۷ ـ اتومبیلی به‌جرم $1500\ \text{kg}$ با سرعت یکنواخت $48\ \text{km/h}$ درجاده‌ای افقی‌حرکت می‌کند. در این هنگام به‌سرازیریی می‌رسد که شیب آن $\frac{1}{20}$ است. راننده دنده را خلاص‌می‌کند ومشاهده می‌کند که اتومبیل با همان سرعت قبل به‌حرکت خود ادامه می‌دهد. مقاومت جاده، و توان اتومبیل را در جادهٔ افقی تعیین کنید.

۸ ـ قطاری به جرم $250\ \text{Mg}$ از راه‌آهن شیبداری به‌شیب $\frac{1}{140}$ باسرعت‌یکنواخت $48\ \text{km/h}$ بالا می‌رود. اگر مقاومتهای ناشی از اصطکاك را $\frac{1}{160}$ وزن قطار به‌حساب آوریم، توان لوکوموتیو چقدر بوده است؟
اگر وقتی‌که به‌جادهٔ افقی می‌رسد توان لوکوموتیو بتواند به $450\ \text{kW}$ برسد اما مقاومتهای ناشی‌از اصطکاك به $\frac{1}{150}$ وزن قطار افزایش یابد، حداکثر سرعتی که قطار در این جاده به‌دست می‌آورد چقدر خواهد بود؟

۹ ـ قطاری به‌جرم $100\ \text{Mg}$ با پیمودن مسافتی برابر $400\ \text{m}$ ازحال سکون به‌سرعت $48\ \text{km/h}$ می‌رسد. به‌فرض‌آنکه مقاومت درمقابل حرکت $300g\ \text{N}$ باشد، کشش موجود درمحل اتصال موتور با قطار، و حداکثر توانی که موتور درضمن پیمودن $400\ \text{m}$ اعمال می‌کند چقدر است؟ از جرم موتور ممکن است صرف‌نظر شود.

۱۰ـ لوکوموتیوی با توان $700\ \text{kW}$ و به‌جرم $90\ \text{Mg}$، قطاری را به‌جرم $120\ \text{Mg}$ از جادهٔ شیبداری به شیب $\frac{1}{84}$ بالا می‌برد. مقاومتهای ناشی‌از اصطکاك برابراست با $36g\ \text{N}$ برای هر Mg. تعیین کنید ماکزیمم سرعت یکنواختی که قطار می‌تواند درآن جادهٔ شیبدار بالا برود.

۱۱ـ قطاری به‌جرم کل $250\ \text{Mg}$ به وسیلهٔ موتوری که با $420\ \text{kW}$ کار می‌کند کشیده می‌شود. اگـر در یك لحظه مقاومت کل برابر $1750g\ \text{N}$ و سرعت $48\ \text{km/h}$ باشد، شتاب حرکت قطار برحسب km/h درثانیه چقدر خواهد بود؟

۱۲ـ واگنی به‌جرم $3\ \text{Mg}$ به‌وسیلهٔ طنابی‌محکم از روی راه‌آهن شیبداری که شیب‌آن $\frac{1}{140}$ است به‌طرف بالا کشانده می‌شود. نیروی مقاومتی که ناشی از اصطکاك وغیره است، وجود دارد کـه مقدار آن برای هر Mg جـرم واگن $20g\ \text{N}$ است. در یك لحظهٔ معین سرعت واگـن $16\ \text{km/h}$ و شتاب آن $0/6\ \text{m/s}^2$ است. کشش

طناب و توانی را که درآن لحظه مصرف می‌شود تعیین کنید.

۱۳- اتومبیلی به‌جرم $2\,\mathrm{Mg}$ با سرعت $32\,\mathrm{km/h}$ ازپایین تپه‌ای‌که طول آن $800\,\mathrm{m}$ و شیب آن $\frac{1}{112}$ است حرکت می‌کند، و پس ازآنکه به بالای تپه رسید سرعت آن $16\,\mathrm{km/h}$ می‌شود. اگر نیروی مقاوم ناشی‌از اصطکاك برابر $5g\,\mathrm{N}$ باشد، تعیین کنیدکه اتومبیل برای بالا رفتن از تپه چه‌کاری انجام داده است.

۱۴- اتومبیلی به‌جرم $2/5\,\mathrm{Mg}$ با شتاب $0/6\,\mathrm{m/s^2}$ از جادهٔ شیبداری به‌شیب $\frac{1}{50}$ بالامی‌رود. مقاومت $\frac{1}{75}$ وزن قطار است. تعیین کنید وقتی‌که سرعت اتومبیل به $32\,\mathrm{km/h}$ می‌رسد توان اتومبیل چقدر است.

۱۵- شخصی با دوچرخه‌اش $100\,\mathrm{kg}$ جرم دارد. او با سرعت $40\,\mathrm{km/h}$ از سطح شیبداری به‌شیب $\frac{1}{10}$ با شتاب منفی یکنواختی درحال بالا رفتن است، و هر وقت‌که سرعتش بیشتر از $8\,\mathrm{km/h}$ نیست مجبور به‌پازدن است. اگر به‌طورمتوسط توانی برابر $75\,\mathrm{W}$ مصرف کند، چقدر می‌تواند از شیب بالا برود؟ اگر اصلاً پا نمی‌زد تا چقدر می‌توانست از شیب بالا برود؟

۱۶- نیروی یکنواختی را تعیین کنیدکه می‌تواند جرم یك کیلوگرمی را درمدت یك ثانیه یك متر جابه‌جا کند. اگر این نیرو تا هنگامی‌که وزنهٔ فوق مسافتی برابر $100\,\mathrm{m}$ را از حال سکون بپیماید اعمال شود، کار آن را به‌دست آورید، و حداکثر توانی را که به‌دست می‌آورد تعیین کنید.

۱۷- قطاری‌که سرعت آن $48\,\mathrm{km/h}$ است به‌فاصلهٔ ۴۰۰ متری ایستگاه رسیده است. دراین هنگام موتورخاموش می‌شود وحرکت با مقاومت یکنواختی‌که مساوی $\frac{1}{100}$ وزن قطار است و درخلاف جهت حرکت اعمال می‌شود ادامه پیدا می‌کند. اگر نیروی ترمز بتواند علاوه بر نیروی مقاومت مذکور، نیروی مقاومی برابر $\frac{1}{10}$ وزن قطار اعمال کند، تعیین کنید درچه فاصله‌ای از ایستگاه باید ترمزکرد تا قطار در ایستگاه متوقف شود.

۱۸- موتور اتومبیلی با توان یکنواخت $5/6\,\mathrm{kW}$ کار می‌کند، و می‌تواند اتومبیل را با سرعت یکنواخت $30\,\mathrm{km/h}$ براند. نیروی مقاومت در مقابل حرکت اتومبیل یکنواخت است. جرم اتومبیل $1500\,\mathrm{kg}$ است. اگر این اتومبیل بخواهد از جادهٔ شیبداری به‌شیب $\frac{1}{10}$ بالا برود و توان اتومبیل به‌همان اندازه باشد و مقاومت در

مقابل حرکت نیز به‌همان اندازه ثابت و یکنواخت باشد، اتومبیل با چه سرعتی بالا خواهد رفت؟

۱۹- جرم شخصی با دوچرخه‌اش روی‌هم برابر m کیلوگرم است، و این‌شخص می‌تواند با توان H وات کار کند. حداقل سرعتی که او می‌تواند با آن سرعت روی دوچرخه‌اش تعادل خود را حفظ کند برابر است با V متر برثانیه. شیب شیبدارترین تپه‌ای راکه اومی‌تواند ازآن بالا برود، به‌فرض‌آنکه مقاومت ثابتی برابر R نیوتون درمقابل حرکت وجود دارد، تعیین‌کنید. نیروی متوسطی که او بر رکاب به‌طور عمودی اعمال می‌کند، به‌فرض‌آنکه قطر چرخ n برابرطول رکاب باشد، چقدر است؟ نتایج عددی مسئله را با فرض $m = ۷۰\ \text{kg}$ ، $V = ۶\ \text{km/h}$ ، $H = ۷۵\ \text{W}$ ، $R = ۲g\ \text{N}$ ، $n = ۱۰$ تعیین کنید.

۲۰- قطر چرخ دوچرخه‌ای ۱/۸ m و طول رکاب ۱۶ cm است. هنگامی‌که دوچرخه با سرعت ۱۸ km/h حرکت می‌کند، تعیین‌کنید: (الف) تندی رکاب را دربالاترین نقاطش، (ب) تندی رکاب را درپایینترین نقاطش. اگر جرم دوچرخه و راننده‌اش ۷۰ kg باشد، نیرویی راکه دوچرخه‌سوار بررکابها وارد می‌کند تا ازتپه‌ای به‌شیب $\frac{۱}{۵۰}$ بالا برود تعیین کنید.

۲۱- موتوری، قطاری به جرم ۲۵۰ Mg را در امتداد راه‌آهنی افقی با سرعت ۵۶ km/h به‌پیش می‌برد. مقاومت درمقابل حرکت $\frac{۱}{۲۰۰}$ وزن قطار است. توان لازم برای آنکه قطار را با همین سرعت درجادهٔ شیبداری به‌شیب $\frac{۱}{۱۶۰}$ بالا ببرد چقدر است؟

۲۲- اسب بخار لازم برای آنکه قطاری به‌جرم ۲۰۰ Mg را از جادهٔ شیبداری به‌شیب $\frac{۱}{۸۰}$ با سرعت ۴۸ km/h به‌طرف بالا ببریم‌چقدراست؟ اصطکاك درمقابل حرکت‌را $\frac{۱}{۱۰۰}$ وزن قطار درنظر بگیرید. سرعت ماکزیممی‌که می‌تواند با این توان در یك جادهٔ افقی به‌دست آورد چقدر است؟

۲۳- موتوری وزنه‌ای به‌جرم ۵۰۰ kg را از ته‌چاهی به‌عمق ۹۰ m ، به‌وسیلهٔ طنابی که نمی‌تواند بیش از ۷۵۰ kg را تحمل کند، بالا می‌کشد. حداقل زمان لازم برای آنکه وزنه را طوری بالا بیاوریم که وقتی به سطح بالای چاه می‌رسد متوقف شود چقدر است؟ حداکثر توان را که به‌وسیلهٔ موتور اعمال می‌شود تعیین کنید.

۲۴- جرم موتور و قطاری روی‌هم ۲۵۰ Mg است. حداقل توان موتور برای آنکه

موتوربتواند سرعت قطار را درطی $800\,m$ از $32\,km/h$ به $80\,km/h$ برساند چقدر است؟ نیروی کل مقاوم $\frac{1}{160}$ وزن قطار است. فرض کنید که کشش موتور ثابت است.

۲۵- قطاری به جرم $250\,Mg$ با اصطکاك ثابت و مقاومت هوا که روی‌هم $\frac{1}{140}$ وزن قطار است مواجه است. وقتی‌که توان موتور $450\,kW$ می‌شود و قطار در روی راه‌آهنی افقی به‌سرعت $40\,km/h$ می‌رسد شتاب حرکت چقدر خواهد بود؟ اگر موتور با همین توان کارکند و مقاومت تغییر نکند بزرگترین سرعت ممکن که قطار به‌دست می‌آورد چقدرخواهد بود؟

۲۶- قطاری که در روی راه‌آهنی افقی با سرعت یکنواخت $100\,km/h$ حرکت می‌کند به‌یك سربالایی به‌شیب $\frac{1}{50}$ می‌رسد و شروع به بالا رفتن از آن می‌کند. نیروی محرکی که از طرف موتور اعمال می‌شود برابر وزن $3\,Mg$ و مقاومت ناشی از اصطکاك و غیره درمقابل حرکت برابر وزن $1/5\,Mg$ و جرم‌کل قطار $200\,Mg$ است. ثابت کنید که اگر طول سربالایی بیشتر از $3/2\,km$ باشد قطار نمی‌تواند به‌بالای آن برسد و نیز توان موتور را، (الف) درست پیش از شروع بالا رفتن، (ب) درست پس ازآن، تعیین کنید.

۲۷- وقتی‌که سرعت لوکوموتیوی‌به $40\,km/h$ می‌رسد،توان لوکوموتیو به $15\,kW$ بالغ می‌شود. جرم لوکوموتیو $40\,Mg$ و مقاومت در مقابل حرکت آن $\frac{1}{320}$ وزن قطار است. اگر شتاب حرکت برای رسیدن به‌آن سرعت ثابت باشد، نیروی محرك، زمان لازم و مسافتی را که از حال سکون طی می‌کند تا به‌آن سرعت برسد تعیین کنید. حداکثر توانی که موتور می‌تواند با آن کارکند برابر است با $25\,kW$. تعیین کنید حداکثر مسافتی را که درظرف ۳ ساعت ازحال سکون طی می‌کند.

۲۸- قطاری به‌جرم $300\,Mg$ ازجادهٔ شیبداری به‌شیب $\frac{1}{120}$ با شتاب $0/15\,m/s^2$ بالامی‌رود. وقتی‌که سرعت قطار به $24\,km/h$ می‌رسد توان قطار به $900\,kW$ می‌رسد. بزرگی مقاومتها را، به استثنای مقاومت ناشی از جاذبه، که برقطار وارد می‌شوند، تعیین کنید.

۲۹- قرقره‌ای به قطر $45\,cm$ وقتی‌که به ۱۸۰ دور در دقیقه می‌رسد توانی برابر $7/5\,kW$ دریافت می‌دارد، وکشش تسمه درطرف کشیده‌تر $2/5$ برابرکشش تسمه درطرف دیگر است. کشش تسمه را در طرف کشیده‌تر تعیین کنید. اگر بزرگترین

کششی که تسمه می‌تواند تحمل کند ۲۵۰ نیوتون بر هر سانتیمتر مربع مقطع تسمه باشد و ضخامت تسمه $۱/۲\,\mathrm{cm}$ باشد، عرض تسمه را تعیین کنید.

۳۰- قطاری به‌جرم M ازحال سکون از A شروع به‌حرکت می‌کند و تا مدتی برابر $t_۱$ با شتاب یکنواخت حرکت می‌کند. در این هنگام موتور خاموش می‌شود، و قطار در نقطهٔ B متوقف می‌شود (بدون آنکه ترمز گرفته شود). فاصلهٔ از A تا B برابر است با a، و زمان کل‌حرکت از A تا B برابر است با t. مقاومت درمقابل‌حرکت قطار k برابر وزن قطار است. ثابت کنید که $t-t_۱=\dfrac{۲a}{kgt}$، وبزرگترین توانی‌که موتور به‌دست می‌آورد برابر است با $\dfrac{۲aMk^۲g^۲t}{kgt^۲-۲a}$.

۳۱- اتومبیلی به‌جرم $۱\mathrm{Mg}$ هنگامی‌که ازجادهٔ شیبداری به‌شیب $\frac{۱}{۲۰}$ با موتور خاموش پایین می‌آید به سرعت $۶۴\,\mathrm{km/h}$ می‌رسد. این اتومبیل هنگامی‌که موتور روشن است و همین‌شیب را بالامی‌آید می‌تواند به‌سرعت $۴۸\,\mathrm{km/h}$ برسد. به‌فرض‌آنکه مقاومت به‌نسبت مربع تندی تغییرمی‌کند، توان موتور را تعیین کنید.

۳۲- در راه‌آهن شیبداری که شیب آن $\frac{۱}{۳۰}$ است قطاری به جرم $۱۰۰\,\mathrm{Mg}$ با موتور خاموش پایین می‌آید و مشاهده می‌شود که حداکثر سرعت آن به $۱۲۰\,\mathrm{km/h}$ می‌رسد. مقاومتهای هوا و اصطکاك و غیره متناسب با مربع سرعت فرض می‌شود. اگر توان موتور به $۷۵۰\,\mathrm{kW}$ برسد، ثابت کنیدکه حداکثر سرعت قطار هنگام بالا رفتن از این شیب به‌شرط آنکه موتور روشن باشد تقریباً برابر $۶۴\,\mathrm{km/h}$ است.

۴-۷. انرژی

انرژی یك جسم عبارت از استعداد آن جسم برای انجام کار است. چون انرژی یك‌جسم برحسب کاری که‌آن جسم می‌تواند انجام‌دهد اندازه‌گیری می‌شود، واحدهای انرژی همان واحدهای کار هستند. بنابراین واحد انرژی در دستگاه SI همان ژول است.

انرژی یك جسم ممکن است به‌صورتهای گوناگون باشد، مثلاً گرما و الکتریسیته صورتهایی از انرژی هستند که می‌توانند به‌کار مکانیکی تبدیل شوند. اما در دینامیك ما فقط با انرژی خالص مکانیکی سروکار داریم‌که آن هم ممکن است بر دونوع باشد، جنبشی (سینتیك) یا پتانسیل.

۴.۸. انرژی جنبشی یك جسم عبارت از انرژیی است‌که آن جسم به‌سبب حرکتش داراست، و برحسب مقدار کاری که می‌تواند انجام دهد تا ساکن شود اندازه‌گیری می‌شود.

نقطه‌ای مادی به‌جرم m را که با تندی v حرکت می‌کند در نظر می‌گیریم. وفرض می‌کنیم که این نقطهٔ مادی با نیروی ثابتی برابر F که به‌آن شتابی منفی برابر a می‌دهد متوقف گردد. پس $F=ma$.

اکنون فرض می‌کنیم که x مسافتی باشد‌که نقطهٔ مادی تا وقتی‌که متوقف می‌شود می‌پیماید، دراین‌صورت:

$$0=v^2-2ax$$

$$\therefore \qquad ax=\frac{1}{2}v^2$$

اما کاری‌که به‌وسیلهٔ نقطهٔ مادی انجام می‌گیرد برابر است با $Fx=max$.

$$\therefore \qquad \text{کار انجام شده}=\frac{1}{2}mv^2$$

$$\therefore \qquad \text{انرژی جنبشی جسم}=\frac{1}{2}mv^2$$

باید توجه داشت‌که اگر m برحسب kg و v برحسب $\mathrm{m/s}$ باشد، $\frac{1}{2}mv^2$ مقدار انرژی جنبشی را برحسب ژول به‌دست می‌دهد.

۴.۹. انرژی پتانسیل یك جسم عبارت از مقدارکاری است که آن جسم می‌تواند انجام دهد تا درضمن حرکت از وضع کنونی به‌وضع معین استانده برسد.

مثالهایی از انرژی پتانسیل‌عبارتند از انرژی وزنه‌ای‌که دربالای زمین است (سطح زمین به‌عنوان وضع استانده پذیرفته می‌شود)، هوای متراکم (حجمی‌که هوا درفشار جو اشغال می‌کند به‌عنوان وضع استانده پذیرفته می‌شود)، فنرمتراکم شده یا فنری‌که‌کج شده است (شکل طبیعی فنر به‌عنوان وضع استانده پذیرفته می‌شود).

انرژی پتانسیل نقطه‌ای مادی به‌جرم m و به‌ارتفاع h از سطح زمین عبارت از کاری است‌که جسم می‌تواند ضمن سقوط به‌سطح زمین انجام دهد، و این‌کار برابر است با کاری‌که برای بالا بردن وزنه‌ای به‌جرم m و به همین ارتفاع باید انجام شود، یعنی برابر است با mgh.

۱۰.۴. جسمی به جرم m از حال سکون از ارتفاع h بالای سطح زمین سقوط می‌کند. ثابت کنید که مجموع انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل جسم در تمام مدت حرکت مقداری است ثابت.

فرض می‌کنیم تندی نقطهٔ مادی، هنگامی که مسافتی برابر x سقوط کرد و به نقطهٔ P رسید، برابر v باشد، دراین صورت:

$$v^۲ = ۲gx$$

انرژی جنبشی در P برابر است با:

$$\frac{۱}{۲}mv^۲ = mgx$$

انرژی پتانسیل در P برابر است با:

$$mg(h-x)$$

درنتیجه مجموع انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل درنقطهٔ P برابر است با:

$$mgx + mg(h-x) = mgh$$

و این مقدار، مستقل از x، و بنابراین درتمام مسیرثابت است.

وقتی‌که نقطهٔ مادی به زمین می‌رسد، تندی V آن از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$V^۲ = ۲gh$$

$$\text{انرژی جنبشی درسطح زمین} = \frac{۱}{۲}mV^۲ = mgh$$

$$= \text{انرژی پتانسیل در ارتفاع } h$$

بنابراین، درضمن رسیدن به‌زمین، تمام انرژی پتانسیل جسم به انرژی جنبشی تبدیل شده است.

۱۱.۴. اصل بقای انرژی

مثال بند قبل بیان ساده‌ای‌است از اصل یا قانون بقای انرژی. به‌شکل کلیتر این اصل چنین بیان می‌شود:

مقدار کل انرژی موجود در جهان ثابت است؛ انرژی، گرچه می‌تواند به‌صورتهای مختلف مانندگرما، نور، صوت تبدیل شود، ولی نمی‌تواند خلق یا نابود شود.[1]

۱ـ اصل بقای انرژی یکی از مهمترین اصول علم است. این اصل را گاهی به‌شکل کلیتر ←

درمثال بند قبل، وقتی‌که نقطهٔ مادی به‌زمین برخوردکرد، ظاهراً همهٔ انرژی خود را ازدست داد. در واقع انرژی جنبشی به‌صورت دیگری از انرژی، وبیشتربه‌صورت گرما، تبدیل شد.

به‌طریق مشابه، وقتی‌که جسمی را در امتداد سطح افقی ناصافی پرتاب می‌کنیم که آن سطح موجب توقف جسم می‌شود، انرژی جنبشی آن‌کم‌کم به‌گرما تبدیل‌می‌شود. در دینامیك بـا انرژیی که یك بار تبدیل شده است سروکار نداریم. بلکه باید به‌دقت به‌خاطر داشت‌که درهمهٔ حالتها، چه وقتی‌که حرکت یا تکان ناگهانی در یك دستگاه وجود داشته باشد، چه وقتی‌که درمقابل حرکت نوعی اصطکاك وجود داشته بـاشد، مقداری از انرژی مکانیکی‌همیشه ظاهراً از میان می‌رود. در واقع این انرژی به‌صورتهای‌دیگرتبدیل می‌شود.

اگر نیروهایی از این قبیل را کـه سبب تبدیل انـرژی به صورتهای دیگر می‌شوند کنار بگذاریم، می‌توانیم شکلی محدود از قانون کلی‌که فقط دربارهٔ انرژی مکانیکی قـابل قبول است به‌کار ببریم (یعنی به استثنای صورتهای دیگر انرژی)، و غالباً آن را اصل یا قانون انرژی می‌نامند.

درحالتی‌که نیروهایی از قبیل نیروی جـاذبهٔ زمین اعمال می‌شود، کاری‌کـه برای بردن یك دستگاه از وضعی به‌وضع دیگر انجام می‌شود فقط بستگی به وضع ابتدایی و وضع نهایی دارد و به‌راهی‌که برای این انتقال طی شده است بستگی ندارد. چنین نیروهایی را پاینده[1] می‌نامند، و اصل انرژی‌که در مسائل دینامیك به‌کار می‌رود ممکن است به‌صورت زیر بیان شود:

اگر دستگاهی از اجسام درحال حرکت تحت اثر دستگاهی از نیروهای پاینده قـرار داشته باشد، مجموع انرژی پتانسیل و انرژی جنبشی اجسام ثابت است.

۰۱۲۰۴ اصل انرژی بیشتر هنگامی به‌کار می‌رودکه حرکت تحت اثرنیروی جاذبه‌صورت

→

قانون بقای ماده ـ انرژی بیان می‌کنند. اینشتین نشان داده است که جرم (m) و انرژی (E)، برطبق معادلهٔ $E=mc^2$، که در آن c سرعت نور است، قابل تبدیل به یکدیگرند. این تبدیل جرم به انرژی منبع انرژی هسته‌ای است‌که در بمب اتمی و در نیروگاههـای هسته‌ای ازآن استفاده می‌شود. بـا این همه درمکانیك نیوتونی، جرم و انـرژی به‌عنوان دوکمیت فیزیکی متمایز شناخته می‌شوند، و دوقانون بقا وجـود دارد، یکی برای جرم و دیگری برای انرژی.

1 — Conservative

می‌گیرد؛ برطبق این اصل، درغیاب اصطکاك و ضربه، برای هر کاهشی از انرژی جنبشی باید مقداری معادل آن بر انرژی پتانسیل افزوده شود و برعکس.

پس برای جسمی که درسطح شیبدارصافی می‌لغزد، انرژی‌جنبشی که به‌دست می‌آورد برابر است با کاهش انرژی پتانسیل آن، و فقط بستگی به‌فاصلهٔ قائمی داردکه پایین آمده است.

انرژی جنبشیی که یك‌جسم درضمن‌لغزش برسطح شیبدار به‌دست می‌آورد برابر است با انرژی جنبشی همان جسم که در ضمن سقوط قائم از ارتفاعی برابر ارتفاع سطح شیبدار به‌دست می‌آورد. بنابراین سرعتی که درانتهای سطح شیبدار به‌دست می‌آورد با سرعتی که در انتهای سقوط به‌دست می‌آورد برابر است.

اگرحلقه‌ای را از یك دایرهٔ قائم عبور داده باشند و از پایینترین نقطه به‌طرف بالا پرتاب کنند، سرعت در هر نقطه فقط بستگی به ارتفاع قائم آن نقطه از پایین دایره دارد. به‌همین شیوه، اگرنقطه‌ای مادی ازسطح منحنی صافی به‌پایین بلغزد، سرعت درپایین سطح فقط بستگی به‌ارتفاع قائمی دارد که ازآن ارتفاع پایین آمده است.

باید خیلی دقت کرد که این اصل را درمسائلی که درآنها اصطکاك، یا هر نوع تکان یا ضربه‌ای وجود دارد، هرگز به‌کار نبریم. درچنین حالتهایی انرژی تقریباً همیشه تبدیل می‌شود.

۱۳.۴. مثال ۱: تلمبه‌ای در هر دقیقه $۴/۵\ \mathrm{m}^۳$ آب ازچاهی به‌عمق $۱۵\ \mathrm{m}$ و از راه لوله‌هایی به مقطع $۴۰\ \mathrm{cm}^۲$ بالا می‌آورد. توان تلمبه را تعیین کنید. ازآثار اصطکاك صرف‌نظر کنید. جرم $۱\ \mathrm{m}^۳$ آب را برابر $۱۰^۳\ \mathrm{kg}$ درنظر بگیرید.

حل : کاری که دریك دقیقه با بالا آوردن آب انجام می‌شود

$$= ۴/۵ \times ۱۰^۳ \times ۹/۸ \times ۱۵\ \mathrm{J}$$

$$= ۶۶/۱۵ \times ۱۰^۴\ \mathrm{J}$$

این مقدار کار برابر است با انرژی پتانسیلی که آب در هر دقیقه به دست می‌آورد.

اما انرژی جنبشی نیز به‌آب داده می‌شود. اگر تندی آب $v\ \mathrm{m/s}$ باشد، در هر ثانیه ستونی ازآب به‌طول $v\ \mathrm{m}$ و به‌مقطع $\frac{۴۰}{۱۰^۴}\ \mathrm{m}^۲$ خالی می‌شود، بنابراین حجمی ازآب که در هردقیقه از تلمبه خارج می‌شود

$$= ۰/۰۰۴۰ \times v \times ۶۰ \, \mathrm{m}^۳$$

$$= ۴/۵ \, \mathrm{m}^۳$$

$$\therefore \quad ۰/۲۴v = ۴/۵$$

$$\therefore \quad v = ۱۸/۷۵ \, \mathrm{m/s}$$

پس انرژی جنبشی که در هر دقیقه به‌آب داده می‌شود

$$= \frac{۱}{۲} \times ۴/۵ \times ۱۰^۳ \times ۱۸/۷۵^۲ \, \mathrm{J}$$

$$= ۷۹/۱۰ \times ۱۰^۴ \, \mathrm{J}$$

مقدار کل انرژی که در هر دقیقه به‌دست می‌آید برابر است با

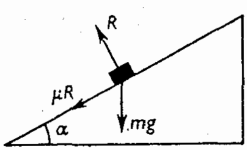
$$۱۴۵/۲۵ \times ۱۰^۴ \, \mathrm{J}$$

$$\therefore \quad \text{توان تلمبه} = ۱۴۵/۲۵ \times \frac{۱۰^۴}{۶۰} \, \mathrm{W}$$

$$= ۲۴/۲ \, \mathrm{kW}$$

مثال ۲: برسطح شیبداری که با افق زاویهٔ α می‌سازد جسمی به‌جرم m کیلوگرم را با تندی V m/s به‌طرف‌بالای سطح پرتاب می‌کنیم. تعیین کنید که‌جسم چه‌مسافتی بالا خواهد رفت، و دراین‌مدت که به‌طرف بالا می‌رود چه مقدار انرژی مکانیکی از دست می‌دهد؟

حل : نیروهایی که برجسم اثرمی‌کنند mg، نیروی‌وزن، R، عکس‌العمل قائم سطح و μR، نیروی اصطکاك، است.



شکل ۴-۳

بنابراین شتاب a به‌طرف بالای سطح شیبدار برطبق رابطهٔ زیر داده می‌شود:

$$ma = -mg \sin \alpha - \mu R$$

و
$$۰ = R - mg \cos \alpha$$

$$a=-g(\sin\alpha+\mu\cos\alpha) \qquad \therefore$$

بنابراین اگر جسم مسافتی برابر x در امتداد سطح شیبدار بالا برود تا به‌طور آنی متوقف شود، داریم:

$$0=V^2+2ax$$

$$x=\frac{V^2}{2g(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)} \qquad \therefore$$

اما کاهش انرژی جنبشی جسم برابر است با:

$$\frac{1}{2}mV^2$$

و انرژی پتانسیلی که جسم به‌دست می‌آورد برابر است با

$$mgx\sin\alpha$$

بنابراین کل انرژی مکانیکی که از دست می‌رود برابر است با:

$$\frac{1}{2}mV^2-mgx\sin\alpha$$

$$=\frac{1}{2}mV^2-\frac{1}{2}mV^2\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha+\mu\cos\alpha}$$

$$=\frac{1}{2}mV^2\frac{\mu\cos\alpha}{\sin\alpha+\mu\cos\alpha}$$

آشکار است که اگر $\mu=0$ باشد، این مقدار برابر صفر است، یعنی درسطح صاف انرژی مکانیکی از دست نمی‌رود.

مثال ۳: نخ سبك و محکمی ازشیار دوقرقرهٔ ساکن بدون اصطکاك A و B که دریك سطح افقی قرار دارند می‌گذرد. فاصلهٔ دوقرقره برابر $2a$ و به هر یك از دوطرف نخ وزنه‌ای به‌جرم m_1 متصل شده است. وزنه‌ای به‌جرم m_2 (که $m_2<2m_1$ است) به نقطه‌ای از نخ که در وسط AB است آویزان می‌کنیم. با استفاده از اصل بقای انرژی ثابت کنیدکه وزنهٔ m_2 مسافتی برابر $\frac{4am_1m_2}{(4m_1^2-m_2^2)}$ سقوط می‌کند و می‌ایستد (حرکت بعدی این وزنه مورد توجه نیست).

حل : فرض می‌کنیم m_2 مسافتی برابر با x سقوط کند تا بایستد؛ هر یك از دو وزنهٔ

m_1 مسافتی برابر $\sqrt{a^2+x^2}-a$ بالا خواهد رفت.
چون قرقره‌ها بدون اصطکاک‌کنند، مقدار انرژی پتانسیلی که وزنه‌های m_1 روی‌هم به‌دست می‌آورند برابر است با کاهش انرژی پتانسیل وزنهٔ m_2. بنابراین:

$$2m_1g(\sqrt{a^2+x^2}-a)=m_2gx$$

$$\therefore \quad 2m_1\sqrt{a^2+x^2}=m_2x+2m_1a$$

$$\therefore \quad 4m_1^2(a^2+x^2)=(m_2x+2m_1a)^2$$

$$\therefore \quad 4m_1^2x^2=m_2^2x^2+4m_1m_2xa$$

$$\therefore \quad x=\frac{4m_1m_2a}{4m_1^2-m_2^2}$$

۱۴.۴ درمسائلی که یك جسم تندی خود را بـر اثر نیروی کندکننده‌ای ازدست می‌دهد، مثلاً گلوله‌ای که ازیك‌جدار عبورمی‌کند، یا قطاری که ترمز گرفته است، می‌توانیم‌نیروی کندکننده را به‌دوطریق زیر اندازه بگیریم:

(۱) اگر مدت زمانی را کـه نیرو اثر می‌کند بدانیم، و تندیهای اولیه و نهایی v_0 و v و جرم جسم m باشد، در این‌صورت اگر F متوسط نیرو باشد،

$$Ft=m(v_0-v)$$

(۲) اگر مسافت x را کـه در هنگام اثـر نیروی کندکننده پیموده است بـدانیم، می‌توانیم متوسط نیروی کندکننده را بـا تساوی کار انجام یـافته و کاهش انرژی جنبشی به‌دست بیاوریم:

$$Fx=\frac{1}{2}m(v_0^2-v^2)$$

باید به‌خوبی درك شودکه اندازهٔ نیرویی که به‌دست می‌آید یك مقدار متوسط است. درحالت اول، زمان متوسط است و درحالت دوم مسافت متوسط است.

اگر نیرو ثابت باشد، هر دو روش یك مقدار را به‌دست می‌دهد، اما اگر نیرو ثابت نباشد مقادیر مختلفی به‌دست می‌آید، زیرا اگر

$$\frac{m(v_0^2-v^2)}{2x}=\frac{m(v_0-v)}{t}$$

باشد، داریم

$$\frac{v_0+v}{۲}=\frac{x}{t}$$

یعنی تندی متوسط x/t برابر است با معدل تندیهای اولیه و نهایی، و این جز در موردی که شتاب ثابت باشد، یعنی جز درموردی که نیرو ثابت باشد، لزوماً برقرار نیست.

تمرین ۲۰۴

۱- جسمی به‌جرم ۱۰ kg با سرعت ۲ m/s حرکت می‌کند. جسم دیگری به‌جرم ۸۰ g با سرعت ۲/۵ کیلومتر در دقیقه حرکت می‌کند. تعیین کنید: (الف) نسبت اندازهٔ حرکت آنها را به‌یکدیگر؛ (ب) نسبت انرژی جنبشی آنها را به‌یکدیگر.

۲- برجسمی به‌جرم ۳۰ kg، که در ابتدا ساکن بوده است، نیرویی برابر وزن وزنه‌ای به‌جرم ۵ kg به‌مدت ۱۰ ثانیه اعمال می‌شود. مسافتی که جسم طی می‌کند و انرژی جنبشی حاصل درجسم را به‌دست آورید.

۳- وزنه‌ای به‌جرم ۲۵۰ kg با سرعت ۱۰ km/h حرکت می‌کند. انرژی جنبشی آن را تعیین کنید. قطاری به جرم ۱۰ Mg از جادهٔ شیبداری به شیب $\frac{۱}{۹۶}$ بالاکشیده می‌شود. اصطکاک درمقابل حرکت $\frac{۱}{۱۲۰}$ وزن قطار است. اگر توان مصرف شده ۳۲ kW باشد، بالاترین سرعتی که این قطار می‌تواند به‌دست آورد چقدر است؟

۴- چند ژول انرژی‌لازم‌است تا جسمی به‌جرم ۱۸ kg را تا ارتفاع ۲ m بالا برده وسپس ازآنجا با تندی اولیهٔ ۱۲ m/s پرتاب کرد؟ توان لازم برای آنکه اتومبیلی به‌جرم ۱۴۰۰ kg بتواند درمقابل مقاومت هوا که برابر $\frac{۱}{۳۰}$ وزن اتومبیل است با سرعت ۴۸ km/h حرکت کند چقدر است؟

۵- شخصی سنگی به‌جرم ۳۰۰ g را از سطح زمین تا ارتفاع ۲ m بالا می‌آورد و سپس آن را به‌طور افقی با تندی ۶ m/s پرتاب می‌کند. چند ژول کار برروی سنگ انجام شده است؟ اگر این شخص این کار را ۲۰ مرتبه در هردقیقه انجام‌دهد، میزان متوسط توان او را تعیین کنید. از کاری که او انجام داده است تا خودش را حرکت دهد صرف‌نظر کنید.

۶- نشان دهید که تندی آب درلوله‌ای به‌مقطع ۱۰۰ $cm^۲$ که در هرثانیه ۰/۱ $m^۳$ آب از انتهای آن خارج می‌شود برابر است با ۱۰ m/s.

تلمبه‌ای آب را در این لوله تا ارتفاع ۱۲ m بالا می‌برد و درآن ارتفاع در هرثانیه

$۰/۱\ m^۳$ آب از لوله خارج می‌شود. توان تلمبه را تعیین کنید.

۷ ـ توان لازم را برای آنکه تلمبه‌ای در هر دقیقه $۲\ m^۳$ آب را از عمق $۳۰\ m$ به‌وسیلهٔ لوله‌های استوانه‌ای شکلی به‌قطر $۸\ cm$ بالا بکشد تعیین کنید. از اصطکاك صرف‌نظر شود.

۸ ـ موتوری می‌تواند مخزن آبی را که در ارتفاع $۶۰\ m$ از سطح رودخانه‌ای واقع است در مدت ۲۴ ساعت با $۱۴۰\ m^۳$ آب پر کند. به فرض آنکه فقط $\frac{۲}{۳}$ کاری که واقعاً به‌وسیلهٔ موتور انجام شده است صرف بالا بردن آب شده باشد، توان موتور را تعیین کنید.

۹ ـ موتوری آب را از عمق $۱۸\ m$ بالا می‌آورد و در هرثانیه $۰/۷۵\ m^۳$ آب با تندی $۱۴/۵\ m/s$ بیرون می‌ریزد. انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل آبی را که در هر ثانیه به‌خارج می‌ریزد به‌طور جداگانه حساب کنید، و معلوم کنیدکه موتور با چه توانی کار می کند.

۱۰ـ اگر جسمی دریك مسیرمستقیم تحت اثر نیروی ثابتی حرکت کند، ثابت کنید که افزایش انرژی جنبشی آن در هر فاصلهٔ زمانی برابر است با کاری که به‌وسیلهٔ آن نیرو انجام شده است. آسانسوری به‌جرم $۲۵۰\ kg$ از حال سکون به‌راه می‌افتد ودر مدت ۵ ثانیه با شتاب ثابت به‌ارتفاع $۱۵\ m$ بالا می‌رود. توان متوسطی را که در این مدت زمان اعمال شده است تعیین کنید.

۱۱ـ برای آنکه مخزنی به‌طول $۵۰۰\ m$ و عرض $۳۰۰\ m$ و عمق $۳/۵\ m$، به‌وسیلهٔ تلمبهٔ آب از رودخانه‌ای که به‌فاصلهٔ ۱/۵ کیلومتری مخزن و ۱۵۰ متری پایین سطح کف مخزن است، درمدت ۱۵ روزکه شب و روز کار کند پرشود، توان موتور تلمبه چقدر باید باشد؟

۱۲ـ موتوری وزنه‌ای به‌جرم $۱\ Mg$ را در مدت $۷\ s$ تا ارتفاع $۱\ m$ بالا می‌آورد. در این ارتفاع سرعتی برابر $۳\ m/s$ درجسم تولید شده است. این موتور با چه توان متوسطی کار کرده است؟

۱۳ـ دوچرخه‌سواری با دوچرخه‌اش روی‌هم $۸۰\ kg$ جرم دارد. از تپه‌ای به طول $۲۰۰\ m$ که ارتفاع قائم آن $۸\ m$ است بدون پازدن پایین می‌آید، و سرعتش از $۳\ m/s$ به $۱۰\ m/s$ می‌رسد. حساب کنید در انرژی جنبشی کل دوچرخه و دوچرخه‌سوار چه تغییری داده شده است،و درنتیجه مقدار متوسط مقاومت دربرابر حرکت را تعیین کنید.

۱۴- لنگرگاهی به طول $200\ m$ و عرض $40\ m$ و عمق $12\ m$ باید در مدت ۶ ساعت به‌وسیلهٔ تلمبه خالی شود. همهٔ آب باید تا سطحی به ارتفاع $0/6m$ بالای سطح اولیهٔ آب لنگرگاه، بالابرده شود. اگرتوان مفیدی که به‌وسیلهٔ تلمبه اعمال می‌شود ثابت باشد، تعیین کنید که مقدار آن چقدر باید باشد، و چه مدت طول خواهدکشید که لنگرگاه آنقدر خالی شودکه عمق آب فقط $2\ m$ شود.

۱۵- اتومبیلی به‌جرم $1\ Mg$ باید با طی مسیری برابر $1/6\ km$ به‌ارتفاع $32\ m$ بالا برود. این اتومبیل از حالت سکون به راه می‌افتد و در انتهای مسیر سرعتش به $60\ km/h$ می‌رسد. مقاومت اصطکاکی‌جاده برابر وزن وزنهٔ $24\ kg$ است. نسبت انرژیهای جنبشی و پتانسیل به‌دست آمده چقدر است؟ چه کسری از کل کار انجام شده ذخیره شده است؟ اگر بالارفتن اتومبیل جمعاً ۳ دقیقه طول کشیده باشد، توان متوسطی که اعمال شده است چقدر است؟

۱۶- از روی دوقرقرهٔ صاف که دریك سطح قرار دارند نخ محکمی عبور می‌دهیم. به‌وسط و دوانتهای نخ، سه وزنهٔ متساوی آویزان می کنیم به‌طوری‌که وزنهٔ وسط به‌طور قرینه میان دوقرقره و دو وزنهٔ دیگر به‌طور قائم آویزان باشد. اگر وزنهٔ وسط را آن‌قدر به‌پایین بکشیم تا نخ متصل به‌آن با امتداد افقی زاویهٔ $50°$ بسازد، وسپس آن‌را رهاکنیم، تعیین کنیدکه وقتی که وزنه‌ها دوباره به‌طورلحظه‌ای متوقف‌می‌شوند چه زاویه‌هایی با افق خواهند ساخت.

۱۷- دو وزنه که جرمهای آنها به ترتیب $240\ g$ و $250\ g$ است به‌وسیلهٔ نخ سبکی به طرفین میخ صافی آویزان هستند. پس از آنکه وزنهٔ سنگینتر از حالت سکون به‌راه افتاد و $160\ cm$ به‌پایین آمد چه مقدار انرژی پتانسیل از دست خواهد داد و ازآنجا تندیهای دووزنه را در این لحظه نتیجه بگیرید. مقدار تندیهایی را که به‌دست آورده‌اید با محاسبه از راه دیگر تحقیق کنید.

۱۸- کار را تعریف کنید و بگویید که با چه واحدهایی سنجیده می‌شود. وزنه‌ای به‌جرم $100\ kg$ به بالای تپه‌ای به ارتفاع $300\ m$ برده می‌شود. این عمل درجاده‌ای صورت می گیرد که به‌ازای هر $9\ m$ که بالا می‌رود $0/3\ m$ برارتفاع تپه افزوده می‌شود. ضریب اصطکاك این جاده برابر $\frac{1}{10}$ است. پس از آنکه وزنه در بالای تپه متوقف شد، از یك سرازیری که زاویهٔ شیب آن با افق $45°$ است روبه‌پایین حرکت می کند. ضریب اصطکاك این جاده برابر $\frac{1}{2}$ است. کارکل انجام‌شده را برای کشاندن وزنه به بالای تپه حساب کنید، و مقداری از این کارکل را که دوباره در انتهای

مسیر به‌صورت انـرژی جنبشی بـه دست می‌آورد تعیین کنید. کارکل انجام شده در مقابل اصطکاك چقدر است؟

۱۹- نقطه‌ای مادی با تندی V در امتداد سطح شیبدارناصافی که با افق زاویهٔ α می‌سازد به‌طرف بالا پرتاب می‌شود. نشان دهیدکه وقتی که این نقطهٔ مـادی دوباره دارای تندیی برابر V می‌شود در فاصله‌ای برابر

$$\frac{V^{۲}}{g}\times\frac{\cos\alpha\sin ۲\lambda}{\cos ۲\lambda-\cos ۲\alpha}$$

ازمحل پرتاب خواهد بود. λ زاویهٔ اصطکاك است که از α کوچکتر است.

۲۰- نقطه‌ای‌مادی به‌جرم M به‌دونقطهٔ مادی، هریك به‌جرم m، به‌وسیلهٔ دونخ محکم وسبك که از روی دومیخ کوچك‌صاف عبورکرده‌اند، متصل‌است. میخها دریك سطح افقی و به‌فاصلهٔ $۲c$ از یکدیگرند. نشان دهیدکـه اگر جرم M، از وضعی که نخها با امتداد قائم‌زاویهٔ θ می‌سازند، به‌وضعی که نخها با امتداد قائم‌زاویهٔ ϕ می‌سازند، سقوط کند، مقداری از انرژی پتانسیل آن کاسته می‌شود که برابر است با

$$Mgc(\cot g\,\phi-\cot g\,\theta)-۲mgc\left(\frac{۱}{\sin\phi}-\frac{۱}{\sin\theta}\right)$$

نتیجه بگیریدکه اگر هنگامی که نخها با امتداد قائم زاویهٔ α می‌سازند تعادل برقرار باشد، و دستگاه ازحالتی که نخها هر یك با امتداد قائم‌زاویهٔ θ می‌سازند رها شود، سکون لحظه‌ای بعدی دستگاه هنگامی خواهد بود که هر یك از نخها با امتداد قائم زاویه‌ای برابر ϕ بسازد، به‌طوری که

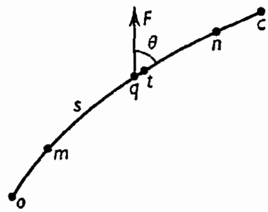
$$tg^{۲}\frac{۱}{۲}\alpha=tg\,\frac{۱}{۲}\theta\;tg\frac{۱}{۲}\phi$$

۲۱- به‌طورخلاصه اصطلاحات انرژی‌جنبشی، انرژی پتانسیل، وبقای انرژی را توضیح دهید. دو دانه تسبیح سنگین و صیقلی P و Q را در داخل نخ سبکی به‌طول $۴na$ وارد می‌کنیم و دوانتهای نخ را به‌هم می‌بندیم. نخ را از روی دومیخ صیقلی A و B که به‌فاصلهٔ $۲a$ از یکدیگر قرار دارند عبور می‌دهیم. دانه‌هـای تسبیح به‌وسیلهٔ میخها از یکدیگر جدا شده‌اند. در ابتدا دستگاه به‌حالت سکون است و دانهٔ P در وسط AB قرار داده شده است. سپس رها می‌شود. ثابت‌کنید کـه V، سرعت نسبی دو دانه تسبیح هنگام برخورد به‌یکدیگر، از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$V^{۲}=۸ga\sqrt{n-۱}\,(\sqrt{n+۱}-\sqrt{n})$$

۱۵.۴. کاری که به‌وسیلهٔ نیروی متغیر انجام می‌شود

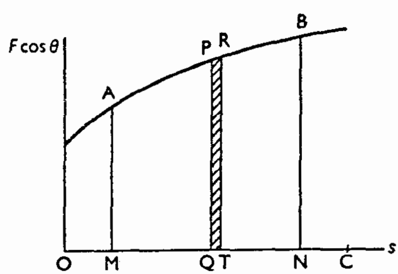
فرض می‌کنیم که نقطه‌ای مادی تحت اثر نیرویی که از حیث بزرگی یا جهت یا ازحیث هر دومتغیر است قرار دارد، و نقطهٔ مادی از نقطهٔ o به‌نقطهٔ c در امتداد مسیر omnc حرکت می‌کند. (شکل ۴-۴).



شکل ۴-۴

اگر q نقطه‌ای ازاین‌مسیر وبه‌فاصلهٔ s از o باشد، که s درامتداد منحنی‌اندازه‌گیری شده است، و t نقطهٔ مجاور آن و به‌فاصلهٔ $s+\Delta s$ باشد، کاری که به‌وسیلهٔ F درضمن حرکت از q به t انجام می‌گیرد تقریباً برابر است با $F\cos\theta \times \Delta s$، که θ زاویهٔ میان F و qt است. کارکلی‌که درضمن حرکت نقطهٔ مادی از m به n انجام می‌گیرد تقریباً برابر است با مجموع عبارتهای $F\cos\theta\times\Delta s$، یعنی $\sum F\cos\theta\times\Delta s$، که این‌عمل جمع از m تا n صورت می‌گیرد.

این عمل را می‌توان با رسم نمودار $F\cos\theta\times\Delta s$ نسبت به s نمایش داد (شکل ۴-۵) اگر PQ و OQ مقادیر $F\cos\theta$ و s مربوط به‌نقطهٔ q ازمسیرباشند، دراین‌صورت P برمنحنی APB به‌نام منحنی یا نمودار نیرو ـ مسافت قرارمی‌گیرد. AM مقدار $F\cos\theta$



شکل ۴-۵

را در m نشان می‌دهد و $OM = om = s_1$ است. نیز BN مقدار $F\cos\theta$ را در n نشان می‌دهد و $ON = on = s_2$.

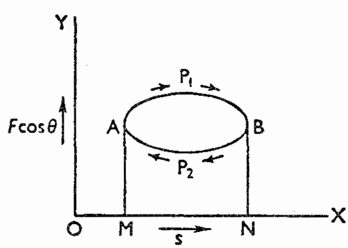
اگر RT مقدار $F\cos\theta$ در t و $OT = s + \Delta s$ باشد، در این صورت سطح هاشور خوردهٔ PQTR تقریباً برابر است با $F\cos\theta\Delta s$، و درنتیجه نمایش کاری است که به‌وسیلهٔ F هنگامی که نقطهٔ مادی از q به t رفته است، انجام شده است.

پس کاری که به‌وسیلهٔ F انجام می‌شود تا نقطهٔ مادی از m به n برود با سطح ABNM نمایش داده می‌شود، و آن در واقع به‌وسیلهٔ انتگرال $\int_{s_1}^{s_2} F\cos\theta\, ds$ نشان داده می‌شود.

بنابراین کاری را که در هر تغییر مکان به‌وسیلهٔ F انجام می‌گیرد می‌توان چه با تعیین سطح زیر منحنی نیرو ـ مسافت و چه با محاسبهٔ انتگرال مربوطه به‌دست آورد.

در اینجا فرض کردیم که منحنی AB در جهت از A به B رسم شده است، یعنی s درحال افزایش است. اگردرجهت عکس‌رسم شده بود، یعنی s کاهش می‌یافت، کار به‌وسیلهٔ سطح ABNM به دست می‌آمد که در خلاف جهت نیرو (به وسیلهٔ نیروهای دیگر) انجام گرفته است، و باید آن را تا آنجا که مربوط به‌نیروی F است، به عنوان کار منفی به‌حساب آورد.

۴.۱۶. فرض می کنیم نمودار نیرو ـ مسافت، مانند شکل ۴ـ۶، منحنی مسدودی باشد، و درجهت پیکانها رسم شده باشد.



شکل ۴ـ۶

از A شروع می‌کنیم. AP_1B قسمت بالای منحنی، بزرگی‌مؤلفهٔ نیرویی را نشان

می‌دهد که نقطهٔ اثرش مسافتی را که با MN نشان داده‌ایم پیموده است، و مساحت AP_1BNM نمایش کارمثبت یا مفیدی است که به‌وسیلهٔ نیرو انجام گرفته است. BP_2A، قسمت پایین منحنی، بزرگی نیرویی را نشان می‌دهدکه نقطهٔ اثرش مسافتی‌را که با MN نشان داده‌ایم به‌عقب برگشته است، و مساحت AP_2BNM نمایش کاری است که برخلاف نیرو انجام گرفته است.

کارکل مثبت یا مفیدی که به‌وسیلهٔ نیرو، هنگامی‌که نقطهٔ اثرش از M به N تغییر مکان یافته وسپس به‌نقطهٔ M برگشته است، برابراست با اختلاف مساحتهای AP_1BNM و AP_2BNM، یعنی برابر است با مساحت منحنی مسدود AP_1BP_2 .

۱۷۰۴. نمودارهای شاخص

برای تعیین مقدارکاری که در یك رفت و برگشت کامل پیستون یك موتور به‌وسیلهٔ فشار بخار انجام می‌گیرد یك‌دستگاه شاخص به استوانهٔ موتورمتصل می‌کنند. این دستگاه شامل استوانهٔ کوچکی‌است که محتوی پیستون سبکی‌است که به‌وسیلهٔ فنرحلقوی تنظیم می‌شود، به‌طوری‌که تغییرمکان قائم پیستون متناسب با فشار بخار در استوانهٔ اصلی است. پیستون دستگاه شاخص به‌مدادی متصل‌است که برروی یك صفحهٔ کاغذکه به دور استوانهٔ چرخانی چسبیده شده است، منحنی رسم می‌کند.

بنابراین موتور خود، نمودار نیرو ـ مسافت را رسم می‌کند. این نمودار یك‌منحنی مسدود است، و مساحت‌آن، اندازهٔ کاری را که به‌وسیلهٔ موتور درهرحرکت رفت وبرگشت پیستون انجام می‌گیرد، نشان می‌دهد.

۱۸۰۴. مثال ۱: قطاری به‌جرم ۲۶۰ Mg از حال سکون به‌راه می‌افتد و در راه‌آهن شیبداری به‌شیب $\frac{۱}{۲۰۰}$ بالا می‌رود. مقاومت درمقابل حرکت $\frac{۱}{۱۳۰}$ وزن قطار بوده است. نیروی محرك D برحسب واحدهای $۱۰^۳g$ N درفاصله‌های مختلف s برحسب متر به‌قرار زیر بوده است:

s	۰	۳۰	۶۰	۹۰	۱۲۰	۱۵۰	۱۸۰	۲۱۰	۲۴۰	۲۷۰	۳۰۰
D	۹/۰	۹/۲	۸/۲	۷/۰	۶/۲	۵/۶	۵/۱	۴/۷	۴/۴	۴/۲	۴/۰

سرعت قطار را هنگامی‌که ۲۴۰ m طی‌کرده است، نیز توان موتور را در این نقطه پیدا کنید.

حل : اگـر منحنی نمایش D را نسبت بـه s رسم کنیم، سطح زیرمنحنی تـا آنجا کـه $s=$ ۲۴۰ است، برابر است با کاری که به‌وسیلهٔ موتور برای پیمودن آن فاصله انجام شده است. این را می‌تـوان به سادگی بـا استفاده از قاعدهٔ سیمسون یـا قاعده‌های دیگر، تعیین کرد. این کار تقریباً برابر است با

$$۶/۶ \times ۱۰^{۳} \times ۹/۸ \times ۲۴۰\ \mathrm{J}$$

اما کاری که برای غلبه برمقاومت انجام گرفته است برابر است با

$$۲۲ \times ۱۰^{۳} \times ۹/۸ \times ۲۴۰\ \mathrm{J}$$

نیز کاری که برای بالا بردن قطار به‌طور قائم تا ارتفاع $\frac{۲۴۰}{۲۰۰}\,\mathrm{m}$ انجام‌شده است برابر است با

$$۱/۲ \times ۲۶۰ \times ۱۰^{۳} \times ۹/۸\ \mathrm{J}$$

اگـر تندی قطار هنگامی کـه مسافتی برابر ۲۴۰ m را می‌پیماید برابر v متر بر ثانیه باشد، انرژی جنبشی قطار برابر

$$\frac{۱}{۲} \times ۲۶۰ \times ۱۰^{۳} \times v^{۲}\ \mathrm{J}$$

پس برطبق اصل انرژی،

$$۲ \times ۱۰^{۳} \times ۹/۸ \times ۲۴۰ + ۱/۲ \times ۲۶۰ \times ۱۰^{۳} \times ۹/۸ + ۱۳۰ \times ۱۰^{۳} \times v^{۲}$$
$$= ۶/۶ \times ۱۰^{۳} \times ۹/۸ \times ۲۴۰$$

$$\therefore \quad v^{۲} = ۵۹/۷$$

$$\therefore \quad v \# ۷/۷۳$$

بنابراین سرعت قطار درحدود ۷/۷۳ m/s است.

نیز هنگامی که موتور درفاصلهٔ ۲۴۰ m است کاری که دریك ثـانیه به‌وسیلهٔ آن انجام می‌گیرد برابر است با

$$۴/۴ \times ۱۰^{۳} \times ۹/۸ \times ۷/۷۳\ \mathrm{J}$$

$$\therefore \quad \text{توان} = ۳۳۳ \times ۱۰^{۳}\,\mathrm{W}$$
$$= ۳۳۳\,\mathrm{kW}$$

مثال ۲: سرعت قطاری به‌جرم ۱۰۰ Mg برحسب زمان مطابق جدول زیر تغییرمی‌کند:

زمان (s)	۰	۱۰	۲۰	۳۰	۴۰	۵۰	۶۰
سرعت (km/h)	۰	۳۶	۵۶	۶۸	۷۶	۸۰	۸۱

قطار از جادهٔ شیبداری به‌شیب $\frac{۱}{۴۰۰}$ پایین می‌آید. توان موتور را در انتهای نیم‌دقیقهٔ اول حساب کنید. مقاومتهای هوا و اصطکاك در این لحظه $\frac{۱}{۲۰۰}$ وزن قطار است.

حل : مؤلفهٔ وزن در امتداد پایین سطح شیبدار برابر است با $۱۰۰\times\frac{۱۰^۳g}{۴۰۰}\,\mathrm{N}$ و مقاومت درمقابل حرکت برابر است با $\frac{۱}{۲}\times ۱۰^۳g\,\mathrm{N}$. پس اگر نیروی محرك در انتهای نیم‌دقیقهٔ اول برابر D نیوتون و شتاب در این لحظه برابر a متر بر مجذور ثانیه باشد، معادلهٔ حرکت عبارت است از:

$$D+\frac{۱}{۴}\times ۱۰^۳\times ۹/۸-\frac{۱}{۲}\times ۱۰^۳\times ۹/۸=۱۰۰\times ۱۰^۳a$$

$$\therefore \qquad D=۱۰^۵a+۲/۴۵\times ۱۰^۳$$

اما a ضریب زاویهٔ مماس برمنحنی سرعت ـ زمان در لحظهٔ $t=۳۰$ است، که تقریباً برابر است با $۱\,\mathrm{km/s^۲}$ یا $\frac{۱۰۰۰}{۳۶۰۰}\,\mathrm{m/s^۲}$.

$$\therefore \qquad D=\frac{۱۰^۶}{۳۶}+۲/۴۵\times ۱۰^۳=۳۰/۲۲\times ۱۰^۳$$

بنابراین نیروی محرك کل برابر است با $۳۰/۲۲\times ۱۰^۳\,\mathrm{N}$

اما سرعت در انتهای نیم‌دقیقهٔ اول برابر است با $۶۸\,\mathrm{km/h}$، یعنی

$$=۶۸\times\frac{۱۰^۳}{۳۶۰۰}\,\mathrm{m/s}$$

پس توان موتور در این لحظه برابر است با

$$=\frac{۳۰/۲۲\times ۱۰^۳\times ۶۸\times ۱۰^۳}{۳۶۰۰}\,\mathrm{W}$$
$$=۵۷۰\,\mathrm{kW}$$

مثال ۳: اتومبیلی به‌جرم $۶\,\mathrm{Mg}$ تحت اثر نیرویی‌که برطبق جدول زیر داده شده است، ازحال سکون به‌راه می‌افتد:

(ثانیه) t	۰	۲	۴	۶	۸	۱۰	۱۲	۱۴	۱۶	۱۸	۲۰
(نیوتون) $\frac{1}{10}F$	۳۰۴	۳۰۰	۲۸۳	۲۴۸	۱۹۸	۱۶۸	۱۴۶	۱۳۰	۱۲۰	۱۱۲	۱۰۸

اگر مقاومت درمقابل حرکت برابر نیروی ثابت $\frac{1}{60}$ وزن‌اتومبیل باشد، نمودار شتاب ـ زمان را رسم کنید، و تندی اتومبیل را در انتهای زمان به‌دست‌آورید.

حل : فرض می‌شودکه اتومبیل در امتداد جاده‌ای افقی‌حرکت می‌کند. بنابراین‌نیروی مؤثر به‌طرف جلو برابر $F - 10^2 \times 9/8\,\mathrm{N}$ است، بنابراین شتاب a درلحظهٔ t چنین به‌دست می‌آید:

$$F - 980 = 6 \times 10^3 a$$

$$\therefore \qquad a = \frac{F - 980}{6000}$$

اما a را می‌توان باحساب‌کردن مقادیر F جدول در زمانهای داده شده تعیین کرد و ازآنجا نمودار شتاب ـ زمان را رسم کرد. سطح زیراین‌منحنی، تندی اتومبیل را به‌دست می‌دهد. می‌توان تعیین کرد کـه تندی در لحظهٔ $t = 20$ تقریباً برابر $3/3\,\mathrm{m/s}$ است.

باید توجه داشت‌که تندی v متر برثانیه را برای اتومبیل درهرلحظه می‌توان از این منحنی به‌دست آورد، و بنابـراین تـوان اتـومبیل در لحظهٔ $t = 20$ برابر است با $1080 \times 3/3\,\mathrm{W} = 3/56\,\mathrm{kW}$.

۱۹.۴. کشش در یك نخ‌کشسان

کشش دریك نخ‌کشسان، مثالی ازنیروی متغیر است.

به تجربه معلوم شده است‌که اگر افزایش طول نخ نسبت به طول طبیعی خودش‌کم بـاشد، کشش نخ مستقیماً بـا افزایش طول نخ متناسب است. این واقعیت به‌وسیلهٔ هوك[1] کشف شد، و غالباً آن را قانون هوك می‌نامند. این قانون را می‌توان چنین بیان‌کرد:

اگر l طول طبیعی نخ‌کشسان باشد، و l' طول‌کشیده شدهٔ آن باشد، دراین صورت کشش T برطبق معادلهٔ زیر داده می‌شود:

۱ـ Hooke (۱۷۰۳ـ۱۶۳۵)

$$T=\frac{\lambda}{l}(l'-l)$$

که درآن λ ثابتی است که بستگی به‌کلفتی و مـادهٔ نخ دارد. λ را غالباً ضریب کشسانی نخ گویند.

بدیهی است که λ عبارت ازکششی است که برای دوبرابرکردن طول طبیعی نخ لازم است، و واحدهای آن نیز همان واحدهای T است.

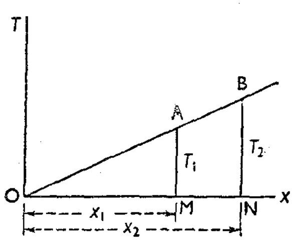
E ، ضریب یانگ، عبارت از مقدار λ برای نخی است که مساحت سطح مقطع آن برابر واحد است؛ در واقع برابر است با λ بخش برمساحت سطح مقطع، و واحدهـای آن عبارت است از واحدهای نیرو بخش برواحدهای مساحت.

۲۰.۴. کاری که با کشیدن نخ‌کشسان انجام می‌گیرد

فرض می‌کنیم که λ ضریب‌کشسانی و l طول طبیعی نخ باشد، در این صورت نیروی‌کشش برای افزایش طولی برابر x برابر است با

$$T=\frac{\lambda x}{l}$$

این‌معادله را می‌توان به‌طریق‌نموداری (شکل ۴-۷) به‌وسیله خط مستقیم OAB که با محور xها زاویه‌ای برابر θ می‌سازد نمایش داد، که درآن $tg\,\theta=\frac{\lambda}{l}$.



شکل ۴-۷

کاری که انجام می‌شود تا افزایش طول نخ از $x_۱$ به $x_۲$ برسد برابراست با مساحت ذوزنقهٔ AMNB، یعنی برابر است بـا $\frac{۱}{۲}(T_۱+T_۲)(x_۲-x_۱)$، که درآن

$$T_۲=\lambda\frac{x_۲}{l} \quad و \quad T_۱=\lambda\frac{x_۱}{l}$$

پس کار انجام شده برابر است با حاصلضرب معدل کششهای ابتدایی و نهایی در افزایش طول.

با استفاده از حساب جامعه و فاضله، می‌توان گفت که اگر افزایش طول x به‌اندازهٔ بینهایت کوچك $\mathrm{d}x$ افزایش یابد، T را ممکن است ثابت فرض کرد، و در این صورت کار انجام شده برابر است با $T\mathrm{d}x$ یا $\left(\lambda \frac{x}{l}\right) \mathrm{d}x$.

پس برای آنکه افزایش طول نخ از x_1 به x_2 برسد، کار انجام شده برابر است با

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\lambda \frac{x}{l}\right) \mathrm{d}x = \frac{\lambda}{l} \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x_1}^{x_2}$$

$$= \frac{\lambda}{l} \times \frac{x_2^2 - x_1^2}{2}$$

$$= \frac{\lambda}{l} \times \frac{x_2 + x_1}{2} (x_2 - x_1)$$

$$= \frac{1}{2} (T_2 + T_1)(x_2 - x_1)$$

پس کار انجام شده برابر است با حاصلضرب معدل کششهای ابتدایی و نهایی در افزایش طول.

بنابراین انرژی پتانسیل نخ هنگامی که به‌اندازهٔ x افزایش طول پیدا می‌کند برابر است با $\frac{1}{2} \frac{\lambda x^2}{l}$.

مثال ۱: نخ کشسانی که طول طبیعی آن $0/6\ \mathrm{m}$ است بر اثر آویزان شدن وزنه‌ای به‌جرم $1\ \mathrm{kg}$ به‌آن، افزایش طولی برابر $8\ \mathrm{cm}$ پیدا می‌کند. تعیین کنید برای آنکه طول نخ از $0/65\ \mathrm{m}$ به $0/7\ \mathrm{m}$ برسد چه مقدار کار انجام خواهد شد؟

حل: این واقعیت که وزنهٔ $1\ \mathrm{kg}$، افزایش طولی برابر $8\ \mathrm{cm}$ ایجاد می‌کند برای تعیین λ به‌کار می‌آید، زیرا

$$1 \times 9/8 = \frac{\lambda}{0/6} \times 0/08$$

کشش نخ برای افزایش طولی برابر $0/05\ \mathrm{m}$ برابر است با

$$T_{۱}=\frac{\lambda}{۰/۶}\times(۰/۰۵)=\frac{۵}{۸}\times ۹/۸\ \mathrm{N}$$

کشش نخ برای افزایش طولی برابر $۰/۱\ \mathrm{m}$ برابر است با

$$T_{۲}=\frac{\lambda}{۰/۶}\times ۰/۱=\frac{۱۰}{۸}\times ۹/۸\ \mathrm{N}$$

بنابراین معدل کششهای ابتدایی و نهایی برابر است با

$$\frac{۱}{۲}(T_{۱}+T_{۲})=\frac{۷/۵}{۸}\times ۹/۸\ \mathrm{N}$$

و افزایش طول برابر است با $۰/۰۵\ \mathrm{m}$

$$\therefore \qquad \text{کار انجام شده}=\frac{۷/۵}{۸}\times ۹/۸\times ۰/۰۵=۰/۴۶\ \mathrm{J}$$

توجه- باید دقت بسیار کرد که هنگام به‌کار بردن قانون هوك، همهٔ طولها برحسب یك واحد اندازه‌گیری شوند.

مثال ۲: یك‌طرف نخ کشسانی که طول طبیعی آن $۱/۲\ \mathrm{m}$ است به‌نقطهٔ A متصل است وبه‌طرف دیگرآن وزنه‌ای به‌جرم $۵\ \mathrm{kg}$ متصل‌است. ضریب‌کشسانی نخ طوری است که بر اثر آویزان شدن وزنهٔ $۵\ \mathrm{kg}$ به‌آن، برطول نخ $۱۵\ \mathrm{cm}$ افزوده می‌شود. وزنهٔ فوق را در A می‌بریم و ازآنجا رها می‌کنیم تا به‌طورقائم سقوط کند. درچه فاصله‌ای در زیر A متوقف خواهد شد؟

حل : چون بر اثر وزنهٔ $۵\ \mathrm{kg}$ برطول نخ $۱۵\ \mathrm{cm}$ افزوده می‌شود، می‌توان نوشت:

$$۵\times ۹/۸=\frac{\lambda}{۱/۲}\times ۰/۱۵$$

$$\therefore \qquad \lambda=۳۹۲\ \mathrm{N}$$

وقتی‌که وزنه به اندازهٔ $۱/۲\ \mathrm{m}$ سقوط می‌کند، سرعت‌آن $\sqrt{۲g\times ۱/۲}\ \mathrm{m/s}$ و انرژی جنبشی آن $\frac{۱}{۲}\times ۵\times ۲/۴g$ ژول است.

دراین هنگام وزنه به‌کشیدن نخ می‌پردازد و آن قدر به‌کشیدن نخ ادامه می‌دهد تا کاری‌که برای کشیدن نخ انجام می‌دهد برابر کاهش انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل وزنهٔ $۵\ \mathrm{kg}$ شود.

اگر هنگامی که وزنه متوقف می‌شود، افزایش طول نخ برابر x متر باشد، کشش نهایی برابر $\lambda \frac{x}{1/2}$ نیوتون، و کشش ابتدایی صفر خواهد بود. پس کاری که برای کشیدن نخ انجام می‌شود

$$=\frac{\lambda x^2}{2/4}\,\mathrm{J}$$

$$=\frac{392x^2}{2/4}=\frac{490}{3}x^2\,\mathrm{J}$$

کاهش انرژی جنبشی وزنه $\mathrm{J}\ 9/8 \times 6$ و کاهش انرژی پتانسیل وزنه $\mathrm{J}\ 5 \times 9/8\,x$ است.

$$\therefore \qquad \frac{490}{3}x^2=(6+5x)9/8$$

$$\therefore \qquad 100x^2=36+30x$$

$$\therefore \qquad x=0/755$$

بنابراین وزنهٔ فوق درفاصلهٔ ۱/۹۵۵ متری زیرنقطهٔ A متوقف می‌شود.

یادداشت (۱) ــ لازم است به این نکته توجه داشت که هنگامی که وزنه سقوط می‌کند و سبب کشش نخ می‌شود هم انرژی جنبشی و هم انرژی پتانسیل از دست می‌دهد.

یادداشت (۲) ــ درحل معادلهٔ درجهٔ دو برحسب x از علامت منها درجلو رادیکال که جواب مربوطه را منفی می‌کند صرف نظر می‌کنیم.

یادداشت (۳) ــ پس از متوقف شدن وزنه، نخ منقبض خواهد شد، و وزنه را دوباره به‌بالا خواهد کشانید. به‌فرض اینکه درضمن عمل کشیده شدن نخ هیچ گونه انرژی تلف نشود، پس‌ازآنکه وزنه به ۱/۲ متری زیرنقطهٔ A رسید دارای‌همان سرعت قبلی‌خود دراین نقطه خواهد شد و با این سرعت می‌تواند دوباره خودش را به‌نقطهٔ A برساند.

مثال ۳: حلقه‌ای به جرم m می‌تواند روی سیم صیقلی قائمی بلغزد. این حلقه به‌وسیلهٔ نخ سبك کشسانی به طول طبیعی l و به ضریب کشسانی $mg\sqrt{2}$ به نقطه‌ای به‌فاصلهٔ l ازسیم متصل شده است. ثابت کنید که اگر هنگامی که نخ بدون کشیده شدن است، حلقه شروع به‌حرکت کند، آن قدر پایین خواهد آمد که طول نخ برابر $3l$ شود.

حل : فرض می‌کنیم که وقتی که حلقه دوباره ساکن شود طول نخ برابر L باشد. پس افزایش انرژی پتانسیل نخ برابر است با

$$\frac{\frac{1}{2}mg\sqrt{2}\,(L-l)^2}{l}$$

دراین صورت حلقه، مسافتی برابر $\sqrt{L^2-l^2}$ سقوط کرده است، و بنابراین کاهش انرژی پتانسیل حلقه برابر است با $mg\sqrt{L^2-l^2}$

در انرژی جنبشی تغییری حاصل نشده است.

پس چون سیم صیقلی است

$$\frac{\frac{1}{2}mg\sqrt{2}\,(L-l)^2}{l}=mg\sqrt{L^2-l^2}$$

$$\therefore \qquad (L-l)^2=\sqrt{2}\,l\sqrt{L^2-l^2}$$

اگر طرفین را به‌توان ۲ برسانیم و بر $L-l$ تقسیم‌کنیم، خواهیم داشت:

$$(L-l)^3=2l^2(L+l)$$

$$\therefore \qquad (L^2+l^2)(L-3l)=0$$

$$\therefore \qquad L=3l$$

۴.۱۰۲ انرژی پتانسیل جاذبه‌ای

مثال دیگری از نیروی متغیر، نیروی جاذبهٔ زمین است. نیرویی که برجرم m در سطح زمین وارد می‌شود و وزن آن جسم است برابر است با mg، اما این نیرو در ارتفاع x بالای سطح زمین متفاوت است و برابر است با $mg\,\dfrac{R^2}{(R+x)^2}$، که درآن R شعاع زمین است، زیرا کشش جاذبهٔ زمین درنقطه‌ای خارج از زمین متناسب با عکس مجذور فاصلهٔ آن نقطه از مرکز زمین است.

پس کار انجام شده برای‌آنکه وزنه‌ای به‌جرم m را ازسطح زمین به‌ارتفاع h بالای سطح زمین برسانیم مطابق روش زیر به‌دست می‌آید:

$$\int_{\circ}^{h} \frac{mgR^{۲}}{(R+x)^{۲}}\,\mathrm{d}x = mgR^{۲}\left[-\frac{۱}{R+x}\right]_{\circ}^{h}$$
$$= mgR^{۲}\left[-\frac{۱}{R+h}+\frac{۱}{R}\right]$$
$$= mgR^{۲}\times\frac{h}{R(R+h)}$$
$$= \frac{mgh}{\left(۱+\frac{h}{R}\right)}$$

در بسیاری از مسائل که حل می‌کنیم، h نسبت به R کوچك است و بنابراین کار انجام‌یافته تقریباً برابر mgh است، و این‌همان‌رابطه‌ای است که قبلاً برای انرژی پتانسیل جسمی به‌جرم m در ارتفاع h بیان‌کردیم (۴-۹).

تمرین ۳.۴

۱- نیرویی برابر P نیوتون برجسمی به‌جرم ۱۶ kg وارد می‌شود وآن را ازحال سکون درجهت نیرو به‌حرکت درمی‌آورد. مقدار P درفاصلهٔ x ازمبدأ حرکت برطبق جدول زیر است:

P N	۷	۹۰	۲۰۷	۲۹۰	۲۲۵	۱۸۰	۰
x m	۰	۰/۲۸	۰/۵	۰/۹	۱/۲	۱/۵	۱/۸۵

نمودار P را برحسب x رسم‌کنید، و با استفاده از این‌مطلب‌که «تغییر انرژی جنبشی برابرکار انجام شده است»، نموداری رسم‌کنید که تندی را در هرلحظه درسراسرمسیر به‌دست بدهد.

۲- یك ماشین باری به‌جرم ۱۵ Mg از حال سکون به‌راه می‌افتد و در جاده‌ای افقی‌که مقاومت درمقابل حرکت $\frac{۱}{۷۵}$ وزن قطار است حرکت می‌کند. نیروی‌کشش موتور در فاصله‌های مختلف برحسب جدول زیر داده شده است:

فاصله (برحسب m)	۰	۱۰	۲۰	۳۰	۴۰	۵۰
نیرو (برحسب N)	۳۶/۰	۳۵/۶	۳۴/۸	۳۲/۹	۳۰/۵	۲۷/۲

تعیین‌کنید: (الف) انرژی جنبشی ماشین باری را، (ب) تندی ماشین باری را، (پ) کاری‌که به‌وسیلهٔ نیرو، درنخستین ۵۰ m پیموده شده، انجام شده است.

۳ـ جسمی را به‌جرم $1\ \mathrm{Mg}$ ازحال سکون به‌راه می‌اندازند و از سطح شیبداری به‌شیب $\frac{1}{200}$ بالا می‌برند. نیرویی‌که موجب این عمل می‌شود به‌موازات سطح شیبدار است و برحسب فاصلهٔ طی شده، مطابق جدول زیر، تغییر می‌کند:

فاصله (برحسب m)	۰	۵۰	۱۰۰	۱۵۰	۲۰۰	۲۵۰	۳۰۰	۳۵۰	۴۰۰
نیرو (برحسب N)	۴۶۰	۵۸۰	۶۰۰	۵۲۰	۴۰۰	۲۶۰	۱۴۰	۱۰۰	۴۰

اگر مقاومت درمقابل حرکت $100\ \mathrm{N}$ باشد، تندی جسم را پس از آنکه $400\ \mathrm{m}$ را پیمود تعیین کنید.

۴ـ اتومبیلی به‌جرم $1000\ \mathrm{kg}$ از حال سکون به‌راه می‌افتد. مقاومت در مقابل حرکت $\frac{1}{40}$ وزن اتومبیل‌است. هنگامی‌که اتومبیل‌مسافتی برابر s مترطی‌کرده است، نیروی وارد برآن F نیوتون است، به‌طوری‌که:

s	۰	۵	۱۰	۱۵	۲۰	۲۵	۳۰
F	۳۲۲۰	۳۱۷۰	۳۱۱۰	۳۰۳۵	۲۹۳۵	۲۸۲۵	۲۶۸۵

نمودارشتاب ـ مسافت این‌حرکت (پیوسته) را رسم کنید، وسرعت اتومبیل را هنگامی که $30\ \mathrm{m}$ طی کرده است تعیین کنید.

۵ـ قطاری به‌جرم $500\ \mathrm{Mg}$ با سرعت $40\ \mathrm{km/h}$، شروع به‌بالا رفتن ازیك‌سطح شیبدار می‌کند. نیرویی‌که موتور اعمال می‌کند ثابت وبرابر $\frac{1}{100}$ وزن‌قطاراست، ومقاومت کل R که ناشی‌ازعلتهای گوناگون، ازجمله جاذبهٔ زمین، است برحسب زمان مطابق جدول زیر تغییر می‌کند:

R (برحسب $10^3\ \mathrm{N}$)	۱۰	۱۴	۲۰	۲۸	۳۸	۴۸	۶۴
t (برحسب دقیقه)	۰	۰/۵	۱/۰	۱/۵	۲/۰	۲/۵	۳/۰

سرعت قطار را در انتهای ۳ دقیقه حساب‌کنید.

۶ـ قانون هوك را برای نخ‌کشسان بیان‌کنید.

دوانتهای نخ‌کشسانی به‌طول طبیعی $2a$ در امتداد خطی افقی ثابت شده است و به‌فاصلهٔ $2a$ ازیکدیگرند. نقطه‌ای مادی به‌جرم m به‌نقطهٔ وسط نخ متصل‌شده است و به‌حالت تعادل، ساکن است. اگر هریك از دوقسمت نخ با خط قائم زاویه‌ای برابر θ ساخته باشد، ضریب‌کشسانی نخ را تعیین‌کنید.

۷ ـ نخ کشسانی به‌طول طبیعی $2a$ است. وقتی که وزنه‌ای به‌وزن W به‌انتهای آزاد آن آویزان می‌شود افزایش طول نخ برابر b است. اکنون وزنه را برمی‌داریم و به‌وسط نخ می‌بندیم. دراین حالت فاصلهٔ دوانتهای نخ، یعنی نقطه‌های A و B، که دریك خط قائم قرار دارند بیشتر از $2a$ است. به‌فرض آنکه در وضع تعادل، قسمت پایینی نخ کشیده باقی می‌ماند، نشان دهیدکه تغییرمکان وزنهٔ W از نقطهٔ وسط AB برابر $\frac{b}{4}$ است.

۸ ـ نیروی لازم برای فشردن یك فنر، همراه با تغییرمقدار انبساط یا انقباض فنر تغییر می‌کند. اگر برای آنکه فنری را ۱ cm متراکم کنیم نیرویی برابر ۲۰ N لازم باشد، تعیین کنید برای آنکه همین فنر را ۱ cm دیگر متراکم کنیم چه کاری باید انجام داد.

۹ ـ جرم M به‌فنر سبك و کشسانی متصل است و وقتی که فنر از نقطهٔ ثابتی آویزان می‌شود، افزایش طولی برابر e پیدا می‌کند. اگر در این‌وضع، جرم کوچك m به M افزوده شود، و مجموعهٔ هر دوجرم ازحالت سکون رها شوند تا سقوط کنند، چه مقدار افزایش طول درفنر تولید می‌شود.

۱۰ـ طول نخ کشسانی را که طول طبیعی‌آن ۳ m است می‌توان با وزنهٔ ۱۰ kg به ۴ m رسانید. دوانتهای نخ را به‌دونقطهٔ A و B که در یك خط افقی به‌فاصلهٔ ۴ m از یکدیگر واقعند می‌بندیم و وزنه‌ای به‌جرم ۱۵ kg به‌نقطهٔ وسط متصل می‌کنیم، اگرهنگامی که نخ افقی‌است، وزنه ازحال‌سکون رها شود، تعیین کنید وقتی که وزنه به‌اندازهٔ ۱٫۵ m سقوط کند تندی آن چقدر خواهد بود.

۱۱ـ وزنه‌ای به‌جرم m به‌وسیلهٔ نخ کشسان سبکی به‌طول طبیعی a و ضریب کشسانی λ به‌نقطهٔ O واقع برسطح شیبدار ناصافی که زاویهٔ شیب‌آن با افق برابر θ است متصل شده است. ضریب اصطکاك برابر μ است ($\mu < tg\theta$). در ابتدا نخ در امتداد خط بزرگترین شیب سطح قرار می‌گیرد و وزنهٔ m در زیرنقطهٔ O است. هنگامی که نخ کشیده نشده است و درست طول طبیعی خودش را دارد وزنهٔ m را ازحال سکون رها می‌کنیم. تعیین کنید که این وزنه چه فاصله‌ای طی خواهدکرد تا دوباره ساکن شود. وقتی که $\mu = \frac{1}{4} tg\theta$ است، حرکت وزنه را بررسی کنید.

۱۲ـ فنری که از وزن آن می‌توان صرف‌نظر کرد در وضع قائمی ثابت شده است. و وزنهٔ W که برآن واقع است کاهش طولی برابر a تولید کرده است. ثابت کنید که اگر

وزنهٔ W از ارتفاع $\frac{۳}{۲}a$ بالای فنر به‌آزادی رها شود تا برروی فنر بیفتد، ماکزیمم کاهش طولی‌که در فنر، بر اثر حرکت ناشی از سقوط وزنهٔ W برفنر، تولید می‌شود برابر $۳a$ است.

۱۳- یك وزنهٔ ۴ kg می‌تواند فنری را ۲/۵ سانتیمتر متراکم‌کند. یك‌مدل اتومبیل‌باری به‌جرم ۲۵۰ گرم با تندی ۹۰ cm/s به این فنر برخورد می‌کند و آن را متراکم می‌کند. تعیین‌کنید فنر چه اندازه متراکم‌خواهد شد.

۱۴- نقطه‌ای مادی به‌جرم m به‌وسیلهٔ دونخ سبك‌کشسان‌که طول طبیعی هریك برابر a و ضریب‌کشسانی هر یك برابر $\frac{۱۵mg}{۱۶}$ است نگاهداری شده است. درانتهای دیگر این دو نخ به دو نقطهٔ A و B که در یك خط افقی و به فاصلهٔ $۲a$ از یکدیگرند متصل شده است. تحقیق‌کنیدکه در وضع تعادل، هریك ازنخها با خط قائم‌زاویه‌ای می‌سازدکه کسینوس آن برابر $\frac{۴}{۵}$ است. نیز تعیین‌کنید که چه مقدارکار باید انجام داد تا نقطهٔ مادی را به‌نقطهٔ وسط AB رسانید.

۱۵- به فرض آنکه بزرگی شتاب ناشی از نیروی جاذبه، از مقدار g در سطح زمین به‌صفر در مرکز زمین، به طور یکنواخت کاهش می‌یابد، نشان دهید که انرژی پتانسیل نقطه‌ای مادی به‌جرم m را در عمق x ازسطح زمین می‌توان به‌صورت $-mgx+\frac{mgx^۲}{۲R}$ نوشت، که درآن R شعاع زمین است.

۱۶- نقطه‌ای مادی به‌طور قائم با سرعت ۸۰۰ m/s به طرف بالا پرتاب شده است. تعیین‌کنید با هر یك از دوفرض زیر به چه ارتفاعی خواهد رسید. شتاب ناشی از جاذبه (الف) ثابت است، (ب) به‌طور معکوس با مربع فاصله از مرکز زمین تغییر می‌کند. (شعاع زمین را ۶۴۰۰ کیلومتر فرض کنید، و از مقاومت جو صرف‌نظر کنید).

۱۷- وزنه‌ای به‌جرم ۱۰۰ kg به‌انتهای طنابی‌آویزان شده است. این وزنه را به‌وسیلهٔ چرخ چاهی بالا می‌کشند. نیروی بالا برنده‌ای‌که برطناب وارد می‌شود درآغاز ۱۵۰g N است. هرچه وزنه بالاتر می‌آید این نیروکمتر می‌شود. نسبت کاهش آن ۱g N برای هرمتر بالاآمدن طناب است. وقتی‌که طناب ۵۰ m بالا می‌آید سرعت وزنه را تعیین‌کنید. از وزن طناب صرف‌نظرکنید.

۱۸- اتومبیلی به‌جرم ۱ Mg از حال سکون در یك جادهٔ افقی به‌راه می‌افتد. نیروی محرك که در ابتدا برآن وارد می‌شود ۴۰g N است. و این مقدار متدرجاً کاهش

می‌یابد، و کاهش آن متناسب با فاصلهٔ طی شده است. پس از پیمودن $200\ \mathrm{m}$ مقدار نیروی محرك به $15g\ \mathrm{N}$ می‌رسد. پس از آن مقدار این نیرو ثابت می‌ماند. مقاومت اصطکاکی ثابتی نیز برابر $15g\ \mathrm{N}$ وجود دارد. سرعت اتومبیل‌را درانتهای $200\ \mathrm{m}$ تعیین کنید، و یك منحنی برمبنای مسافت رسم کنید که افزایش تدریجی سرعت را از لحظهٔ شروع حرکت نشان دهد.

۱۹ـ وزنه‌ای از نقطهٔ O بـه وسیلهٔ نخ کشسانی به طول طبیعی a آویزان شده است، و وقتی که وزنه آزادانه آویزان است طول نخ برابر $\frac{5a}{3}$ است. بـا استفاده از اصل انرژی نشان دهید که اگر بگذاریم وزنه از نقطهٔ O سقوط کند، بزرگترین طول نخ درحرکت ناشی ازآن برابر $3a$ خواهد بود.

هنگامی که وزنه از فاصلهٔ $2a$ ازنقطهٔ O عبور می‌کند، سرعت آن چقدر است؟

۲۰ـ وزنـه‌ای به‌جرم $M\ \mathrm{kg}$ از حـال سکون تحت اثر نیروی ثـابت افقی $F\ \mathrm{N}$ به راه افتاده است. درهمان لحظه، جسم دیگری با همین جرم تحت اثر نیرویی ثابت که در جهت افقی اعمـال می‌شود به راه می‌افتد. میزان کار این نیرو $P\ \mathrm{J/s}$ است. اگـر پس از $T\ \mathrm{s}$ هر دوجسم دارای سرعت $V\ \mathrm{m/s}$ باشند، نشان دهید که:

$$P = \frac{1}{2} FV$$

پس ازآنکه $4T\ \mathrm{s}$ هر دوجسم حرکت کردند، نسبت سرعتهای آنها به‌یکدیگر چقدر خواهد بود؟

۴.۲۲. واحدها و ابعاد

واحدهای طول، جرم و زمان را واحدهای اصلی می‌گویند، زیرا واحدهای کمیتهای دیگر مانند سرعت، نیرو، ... را می‌توان برحسب آنها بیان کـرد. واحد سرعت، نسبت واحد مسافت در واحد زمان است، یعنی یك‌سانتیمتر برثانیه، یا یك‌متربرثانیه، ... واحد شتاب، فزایش واحد سرعت در واحد زمان است، یعنی یك‌سانتیمتر برثانیه درهرثانیه، یا یك‌متربر انیه درهرثانیه.

واحد نیرو حاصلضرب واحد جرم در واحد شتاب است. اگر واحدهای طول، جرم، زمان را به L، M و T نمایش دهیم، واحد سرعت چنین خواهد بود:

$$\text{واحد سرعت} = \frac{\text{واحد مسافت}}{\text{واحد زمان}} = \frac{L}{T} \quad \text{یا} \quad LT^{-1}$$

$$\text{واحد شتاب} = \frac{\text{واحد سرعت}}{\text{واحد زمان}} = \frac{L}{T^2} \quad \text{یا} \quad LT^{-2}$$

$$\text{واحد نیرو} = \frac{ML}{T^2} \quad \text{یا} \quad MLT^{-2}$$

$$\text{واحد کار} = \text{واحد نیرو} \times \text{واحد مسافت} = \frac{ML^2}{T^2} \quad \text{یا} \quad ML^2T^{-2}$$

اما واحد مساحت برابراست با حاصلضرب دو واحد طول یا L^2، و گفته می‌شود که مساحت دارای دوبعد طول است. حجم دارای سه بعد طول است.

این تصور بعد را تعمیم می‌دهیم به‌طوری که شامل جرم و زمان و توانهای آنها شود، به‌طوری که واحد هر کمیت برحسب واحدهای اصلی نوشته شود. در این صورت آن را ابعاد آن کمیت می گویند. پس ابعاد سرعت، یك برای طول و ۱ — برای زمان است، و ابعادکار یك برای جرم، ۲ برای طول و ۲ — برای زمان است.

۲۳.۴ ابعاد هر کمیت فیزیکی را می‌توان به‌آسانی از روی تعریفی که برای آن کمیت شده است و با نوشتن فرمول برای واحد آن برحسب M ، L و T مطابق فوق به‌دست آورد.

اندازهٔ حرکت برحسب تعریف برابر است با حاصلضرب جرم و تندی، و بنابراین فرمول ابعادی آن $MLT^{-1} = \frac{ML}{T}$ است.

تندی زاویه‌ای ازتقسیم یك زاویه برحسب رادیان (که نسبت دوطول و مستقل از واحد است) به‌زمان به‌دست می‌آید، و بنابراین فرمول ابعادی آن چنین است:

$$\frac{1}{T} = T^{-1}$$

توان از تقسیم کار بر زمان به‌دست می‌آید. بنابراین فرمول ابعادی آن چنین است:

$$\frac{ML^2}{T^3} = ML^2T^{-3}$$

ابعاد دارای دومورد استعمال مهم هستند که هم‌اکنون بیان خواهیم کرد.

۲۴.۴ در هرمعادله که میان کمیتهای فیزیکی نوشته می‌شود، ابعاد همهٔ جمله‌ها برحسب واحدهای اصلی باید یکسان باشند. درست همان‌طور که در ریاضیات جمع یا تفریق متر

وکیلوگرم غیرممکن است، جمع یا تفریق دوجمله که دارای ابعاد متفاوت هستند غیر ممکن است. این مطلب برای بررسی امکان یك فرمول کمك مؤثری می کند.

معادلهٔ حرکت را به‌صورت زیر درنظرمی گیریم:

$$v^2 = v_0^2 + 2ax$$

ابعاد v^2 عبارتند از $\frac{L^2}{T^2}$

ابعاد v_0^2 عبارتند از $\frac{L^2}{T^2}$

ابعاد $2ax$ عبارتند از $\left(\frac{L}{T^2}\right) \times L = \frac{L^2}{T^2}$

بنابراین همهٔ این‌جمله‌ها دارای ابعاد یکسان، یعنی $\frac{L^2}{T^2}$ هستند.

دربند ۱۷.۳ فرمولی‌برای کشش‌نخی که از روی قرقره عبور کرده بود به‌دست‌آوردیم که با دوجرم بستگی داشت، وآن عبارت بود از

$$T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$

ابعاد سمت راست معادله عبارتند از حاصلضرب جرم در شتاب یا $\frac{ML}{T^2}$ ، یعنی معادل ابعاد نیرو است، و همین‌طور هم می‌بایستی باشد.

دربند ۲۰.۳ ، مثال ۳، عبارتی که برای شتاب گوه به‌دست آوردیم چنین بود:

$$\frac{mg \sin\alpha \cos\alpha}{M + m \sin^2\alpha}$$

امـا ابعاد یك نسبت مثلثاتی صفر است، و چون هـرجمله درصورت و مخرج شامل جرم است، ابعاد جرم صفر است. بنابراین ابعاد همهٔ عبارت معادل ابعاد g ، یعنی‌شتاب، است و این درست است.

اگر جرم در یکی از جمله‌ها حذف شده بود آن عبارت نمی‌توانست معرف شتاب باشد.

نتیجه‌ای مـانند $\frac{V^2}{g}$ ، که V معرف تندی است، دارای ابعادی از این قرار است:

$$\left(\frac{L^{۲}}{T^{۲}}\right)\times\left(\frac{T^{۲}}{L}\right)=L$$

و بنابراین معرف طول است.

$\frac{V}{g}$ دارای ابعـاد $\left(\frac{L}{T}\right)\times\left(\frac{T^{۲}}{L}\right)=T$ است، و بنابراین معرف زمان است.

۲۵۰۴. فرمولهای ابعادی را می‌توان بـرای تعیین تغییر یك واحد بر اثر تغییراتی کـه در واحدهای اصلی داده می‌شود به‌کار برد.

فرض‌کنید M ، L و T واحدهای‌جرم، طول، و زمان دریك دستگاه و M' ، L' و T' همان واحدها در دستگاهی دیگر باشند.

درایـن صورت اگـر واحدهـای یك‌کمیت، مثلاً نیرو، در این دو دستگاه F و F' باشد داریم:

$$\frac{F}{F'}=\frac{ML}{T^{۲}}\div\frac{M'L'}{T'^{۲}}$$

یا

$$\frac{F}{F'}=\frac{MLT'^{۲}}{M'LT'^{۲}}$$

پس اگـر M ، L و T واحدهـا در دستگاه SI و M' ، L' و T' در دستگـاه C. G. S. (سانتیمتر، گرم، ثانیه) باشند، با توجه به‌اینکه $۱\,\text{kg}=۱۰۰۰\,\text{g}$ و $۱\,\text{m}=۱۰۰\,\text{cm}$ است داریم:

$$\frac{۱\text{N}}{۱\text{dyn}}=۱۰۰۰\times۱۰۰=۱۰۰۰۰۰$$

$$\therefore \qquad ۱\text{N}=۱۰^{۵}\,\text{dyn}$$

مثال: به‌فرض اینکه $۱\,\text{lb}=۰/۴۵۳\,\text{kg}$ ، $۱\,\text{ft}=۰/۳۰۵\,\text{m}$ و $g=۳۲\,\text{ft/s}^{۲}$ است، تعیین‌کنیدکه هرفوت پوندال (واحدکار در دستگاه انگلیسی) چند ژول است.

حل: ابعادکار عبارتند از

$$\frac{ML^{۲}}{T^{۲}}$$

بنابراین

$$\frac{۱\,\text{ft pdl}}{۱\,\text{J}}=\frac{ML^{۲}T'^{۲}}{M'L'^{۲}T^{۲}}$$

که درآن M برابر ۱ lb، L برابر ۱ ft، T برابر ۱ s؛ و M'، L'، T' به‌ترتیب ۱ kg، ۱ m، و ۱ s هستند.

$$\therefore \qquad \frac{\text{۱ ft pdl}}{\text{۱ J}} = ۰/۴۵۳ \times (۰/۳۰۵)^{۲}$$

$$= ۰/۰۴۲۱$$

$$\therefore \qquad \text{۱ ft pdl} = ۰/۰۴۲۱ \text{ J}$$

تمرین ۴۰۴

۱ـ اگر واحدهای جرم، طول، و زمان به‌ترتیب ۱۰۰ kg، ۱۰۰ m، و ۱۰۰ s می‌بود، واحدهای نیرو و کار را تعیین کنید.

۲ـ اگر واحدهای طول، تندی، و نیرو هریك دوبرابر شوند، نشان دهیدکه واحدهای زمان وجرم بدون تغییرباقی‌می‌مانند، و واحد انرژی به‌نسبت ۱ و ۴ افزایش‌می‌یابد.

۳ـ اگر ثانیه واحد زمان، شتاب جاذبه واحد شتاب و کیلوگرم واحد جرم باشد، واحد انرژی را تعیین کنید.

۴ـ اگر m جرم جسم برحسب کیلوگرم، V تندی آن برحسب m/s باشد، هنگامی که انرژی جسم را به‌صورت $\frac{۱}{۲}mV^{۲}$ می‌نویسیم، آن‌را با چه واحدی اندازه می‌گیریم؟ اگر واحدهای طول و جرم هریك ده برابر شوند و واحد زمان را بر ده بخش کنیم، در واحدهای زیر چه تأثیری می‌کند، (الف) شتاب، (ب) انرژی، (پ) نیرو، (ت) توان؟

۵ـ اگر ۱ kg = ۲/۲۰۴ lb، ۱ m = ۳/۲۸۱ ft، ۱ hp = ۳۳۰۰۰ ft lb/mn، $g = ۹۸۱ \text{ cm/s}^{۲}$ باشد، نشان دهیدکه ۳ hp تقریباً برابر ۲/۲۴ kW است.

۶ـ به‌فرض آنکه یك سال‌که $۳۶۵\frac{۱}{۴}$ روز است واحد زمان، فاصلهٔ زمین تا خورشید که $۱۴۸/۶ \times ۱۰^{۶}$ km است واحد طول، وجرم زمین‌واحد جرم‌باشد، انرژی‌جنبشی خورشیدرا نسبت به‌ستارگان ثابت تعیین‌کنید. تندی نسبی‌خورشید نسبت به‌ستارگان ثابت ۱۷/۶ km/s، و جرم خورشید ۳۳۲۰۰۰ برابر جرم زمین است.

۷ـ ابعاد نیرو، توان، تندی زاویه‌ای، فشار دریك نقطه از مایع را بنویسید.
اگر نیروی جاذبه میان دوجرم m و $m_{۱}$ که به‌فاصلهٔ r از یکدیگر قرار دارند، $R\frac{mm_{۱}}{r^{۲}}$ باشد، ابعاد R را تعیین‌کنید و مقدارعددی آن را هنگامی‌که واحدهای SI

به‌کار برده‌می‌شوندتعیین کنید($\text{شعاع زمین} = ۶/۳۷ \times ۱۰^{۳}\text{km}$، $g = ۹/۸۱\text{m/s}^{۲}$
$\text{جرم زمین} = ۶/۱۴ \times ۱۰^{۲۴}\text{kg}$)

۸ - درستی معادله‌های زیر را ازنظر ابعادی تحقیق کنید.

(الف) $x = v_{\circ}t + \frac{۱}{۲}gt^{۲}$

(ب) $T = ۲\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$، که درآن T زمان نوسان آونگ ساده‌ای است به‌طول l.

(پ) $E = \frac{۱}{۲}mv^{۲}$، کـه درآن E انرژی جسمی است به‌جرم m کـه با تندی v حرکت می‌کند.

(ت) $W = N\theta$ که درآن W کاری است که زوجی بـا گشتاور N انجام می‌دهد تا به‌اندازهٔ زاویهٔ θ حول یك جسم بچرخد.

۹ - اگر T زمان نوسان آونگ ساده‌ای کـه طول آن l و جرم نقطهٔ وزین آن m است به‌صورت زیرنوشته شده باشد:

$$T = Am^{x} l^{y} g^{z}$$

که درآن A، x، y، z ثابت هستند، با توجه به‌معادلهٔ ابعادی مقادیر x، y، z را تعیین کنید.

۱۰- اگر سرعت صوت دریك گازکه فشار آن p و چگالی‌آن ρ است به‌صورت زیرنوشته شود:

$$v = Ap^{x} \rho^{y}$$

که درآن A، x، y ثابت هستند، x و y را تعیین کنید.

۱۱- اگرتندی v امواج‌آب یك‌اقیانوس که چگالی‌آب‌آن ρ است به‌صورت‌زیرنوشته‌شود: $v = Ag^{x} \rho^{y} \lambda^{z}$، که درآن A، x، y و z ثابتند، g شتاب جـاذبه، و λ طول موج باشد، مقادیر x، y، z را با توجه به‌ابعاد تعیین کنید.

۱۲- نقطه‌ای مـادی به‌جرم m با تندی u به‌طور قـائم به طرف بالا پرتـاب می‌شود و به‌ارتفاع h می‌رسد. نشان دهیدکه $\frac{u^{۲}}{gh}$ بدون بعد است.

۵

ضربهٔ نیرو، برخورد اجسام کشسان

۱.۵ ضربه

اصطلاح ضربهٔ یك نیرو به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

هنگامی‌که نیروی F ثابت باشد، ضربه برابر است با حاصلضرب نیرو ومدت‌زمانی که آن نیرو اثرکرده است، یعنی برابر با Ft.

اما اگر نیروی F برجرم m اعمال شود شتابی درآن به‌وجود می‌آورد که برابر است با a، به‌طوری که:

$$Ft = mat = m(v - v_0)$$

که درآن v_0 و v تندیهای اولیه و نهایی جرم m هستند.

پس ضربهٔ نیرو = تغییراندازهٔ حرکت حاصله

وقتی‌که نیروی F متغیر باشد، ضربهٔ F برابر است با انتگرال نیرو نسبت به‌زمان، یعنی

$$\int_0^t F\mathrm{d}t$$

که درآن t مدت‌زمانی است که نیرو اعمال شده است.

اما $F = m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ وبنابراین ضربه برابر است با

$$\int_0^t F\mathrm{d}t = \int_0^t m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \Big[mv \Big]_0^t$$

$$= m(v - v_0)$$

یعنی به‌طورکلی،

ضربهٔ نیرو = تغییر اندازهٔ حرکت حاصله

۲.۵. نیروهای ضربه‌ای

فرض‌کنیم‌که F بسیار بزرگ باشد، اما فقط دریك مدت بسیارکوتاه اعمال شود. جسم‌در مدتی‌که نیرو اعمال می‌شود فقط مسافت بسیارکوتاهی را می‌پیماید، بنابراین ازتغییروضع جسم ممکن است صرف‌نظرکرد. اثرکل نیرو برحسب ضربهٔ آن، یا تغییر اندازهٔ حرکت حاصله سنجیده می‌شود.

چنین نیرویی را نیروی ضربه‌ای می گویند.

به‌طور تئوری، نیرو باید فوق‌العاده بزرگ، ومدت اثرآن فوق‌العاده کوتاه باشد. البته چنین موردی عملاً اتفاق نمی‌افتد، امـا مثالهای تقریبی مانند فرود آمـدن چکش برسندان، برخورد گلوله به‌هدف، برخورد دو گلولهٔ بیلیارد می‌تواند تصور چنین نیرویی را فراهم کند.

۳.۵. برخورد دو جسم

اگر دو جسم A و B با یکدیگر برخوردکنند، دراین‌صورت، برطبق قانون سوم نیوتون، عمل A برB، درمدت تماس آنها، مساوی و در خلاف جهت عمل B بر A است.

پس ضربهٔ A برB مساوی و درخلاف جهت ضربهٔ B بر A است. بالاخره به‌این نتیجه می‌رسیم‌که تغییراندازهٔ حرکت A با تغییراندازهٔ حرکت B برابر و درخلاف جهت یکدیگرند، و مجموع اندازهٔ حرکتهای دوجسم، کـه درجهت یکسان اندازه‌گیری شوند، براثر برخورد دو جسم، بدون تغییرباقی می‌ماند.

این مثالی از اصل بقای اندازهٔ حرکت خطی (۱۳.۳) است‌که در مسائلی‌که‌مربوط به‌برخورد و نیروهای ضربه‌ای است مورد استفاده واقع می‌شود.

فرض می‌کنیم جرم m که با تندی v حرکت می‌کند به‌جرم M کـه درحال سکون است برخوردکند، وآن را درجهت حرکت خود به‌حرکت درآورد، و دو جسم مانند یك جسم منفرد، حرکت کنند. در اندازهٔ حرکت کاهشی وجـود ندارد، بنابراین اندازهٔ حرکتی که M به‌دست می‌آورد برابر است با اندازهٔ حرکتی‌که m از دست می‌دهد.

اما اندازهٔ حرکت m قبل از برخورد mv است. پس اگر V تندی مشترك دوجسم پس از برخورد باشد،

$$(M+m)V=mv$$

$$\therefore \qquad V=\frac{m}{M+m}v$$

افزایش اندازهٔ حرکت M برابر MV، یعنی $\frac{Mmv}{(M+m)}$ است، و کاهش اندازهٔ حرکت m برابر است با $m(v-V)$، یعنی MV.

باید توجه داشت که گرچه در اندازهٔ حرکت کل ناشی از برخورد تغییری حاصل نمی‌شود، انرژی جنبشی کاهش می‌یابد.

انرژی جنبشی قبل از برخورد $\frac{۱}{۲}mv^۲$ است.

انرژی جنبشی بعد ازبرخورد برابر است با

$$\frac{۱}{۲}(M+m)V^۲=\frac{۱}{۲}\times\frac{m^۲}{M+m}v^۲$$

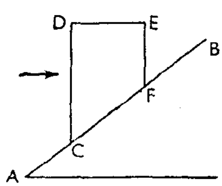
و آشکار است که این مقدار از $\frac{۱}{۲}mv^۲$ کمتر است زیرا $\frac{m}{(M+m)}$ از واحد کمتر است.

چون تقریباً در همهٔ حالتهای برخورد، انرژی جنبشی کاهش می‌یابد، در مسائلی که مربوط به‌حالتهایی‌است که درآنها نیروهای ضربه‌ای اعمال می‌شوند هرگز نباید اصل انرژی را به‌کاربرد.

۴.۵ توجه به‌این نکته نیز شایان اهمیت است که اصل اندازهٔ حرکت را می‌توان فقط در جهتی که هیچ نیروی ضربه‌ای خارجی اعمال نمی‌شود به‌کار برد.

پس، اگر گلوله‌ای به‌طور قائم به‌هدف ثابتی برخورد کند، همهٔ اندازهٔ حرکت گلوله از بین می‌رود. اگر گلوله به‌یك هدف صیقلی به‌طور مایل برخورد کند، ضربه‌ای که‌دریافت می‌کند عمود برسطح هدف است زیرا هدف صیقلی است. بنابراین به موازات سطح هدف، تغییراندازهٔ حرکت وجود ندارد، اما همهٔ اندازهٔ حرکت عمود برهدف ازمیان می‌رود.

اگر گلوله‌ای که به‌طور افقی حرکت می‌کند، به‌طور عمود بروجه قطعه‌ای که مقطع آن CDEF (شکل ۵-۱) است و برروی سطح صیقلی شیبدار AB قرار دارد اصابت کند و به‌آن متصل شود، دراین صورت تنها جهتی که می‌توان در امتدادآن اصل اندازهٔ‌حرکت



شکل ۵-۱

را به کاربرد موازی باوجه سطح شیبدار AB است. مؤلفهٔ اندازهٔ حرکت گلوله که به موازات AB است میان گلوله وقطعهٔ مزبور تقسیم می‌شود. مؤلفهٔ اندازهٔ حرکت عمود بر AB به‌وسیلهٔ عکس‌العمل ضربه‌ای سطح از میان می‌رود.

۵.۵. حرکت گلوله و تفنگ

درهنگام آتش کردن تفنگ، مادهٔ منفجره تشکیل مقدار بسیار زیادی گاز با فشار فوق‌العاده زیاد می‌دهد. این فشار به‌طور مساوی برگلوله و تفنگ درجهت لوله اثر می‌کند و گلوله را به بیرون پرتاب می‌کند.

اگر تفنگ برای حرکت درجهت لوله، آزاد باشد، اندازهٔ حرکتی که در لحظهٔ ترک لوله درگلوله به‌طرف جلو ایجاد می‌شود برابر اندازهٔ حرکتی خواهد بود که در تفنگ به‌طرف عقب تولید می‌شود.

اگر تفنگ روی سطح افقی صیقلی قرارداشته باشد ولولهٔ آن نیزافقی باشدمی‌توانیم بگوییم که اندازهٔ حرکت گلوله برابر و درخلاف جهت اندازهٔ حرکت تفنگ است (هردو افقی خواهند بود). اما اگر، همان‌طورکه غالب اوقات پیش می‌آید، لولهٔ تفنگ افقی نباشد، باید به‌خاطر داشت که اندازهٔ حرکت گلوله در امتداد افقی برابر و درخلاف جهت اندازهٔ حرکت افقی تفنگ است، اما اندازهٔ حرکت قائم که سهم تفنگ شده است ناگهان، به‌وسیلهٔ فشار ضربه‌ای سطحی که تفنگ برآن قرار دارد، از میان می‌رود.

هروسیله‌ای (مانند فنر) که برای جلوگیری ازپس‌زنی تفنگ به‌کار می‌رودنمی‌تواند در لحظهٔ آتش کردن تفنگ نیروی ضربه‌ای تولیدکند، و از اعمال اصل اندازهٔ حرکت جلوگیری نمی‌کند. دراین حالت اندازهٔ حرکت وتندی پس‌زنی را آن‌طور حساب می‌کنیم که انگار فنری وجود نداشته است.

فنر، تا هنگامی که متراکم نشود نیرویی اعمال نمی‌کند، بنابراین با صرف‌نظر کردن از مدت زمانی که گلوله صرف می‌کند تا از تفنگ جدا شود، سرعت پس‌زنی تفنگ را، اگر فنر وجود نمی‌داشت، درنظرمی‌گیریم. دراین هنگام فنرمتدرجاً تفنگ را متوقف می‌کند.

به‌همین طریق، اثرجاذبه درحالتهای برخورد قابل صرف‌نظر کردن است؛ جاذبه نیز یک نیروی ضربه‌ای نیست، و برخورد پیش ازآنکه اثرجاذبه محسوس شود، روی‌می‌دهد.

۶.۵. برخورد آب با یک سطح

برای‌آنکه فشار ناشی از یک فوارهٔ آب را که با سطح ثابتی برخورد می‌کند، یا ریزش مداوم بارانی راکه برسطح زمین می‌بارد تعیین کنیم، فقط باید اندازهٔ حرکتی را که در

هرثانیه ازمیان می‌رود حساب کنیم. در اینجا با برخوردها یا نیروهای ضربه‌ای پی‌درپی سروکار داریم. میزان اندازهٔ حرکتی که در هرثانیه ازمیان می‌رود، نیروی متوسطی را که برسطح اعمال می‌شود به‌دست می‌دهد. این نیرو درهرثانیه‌ای که اعمال می‌شود می‌تواند به‌میزان معلومی اندازهٔ حرکت تولیدکند یا ازمیان ببرد.

۷.۵ مثال ۱: گلوله‌ای به‌جرم ۳۰ g با تندی ۲۰۰ m/s به‌یک قطعه چوب به جرم ۲ kg که برسطح میزی صیقلی قرار دارد برخورد می‌کند. تعیین کنید پس‌ازآنکه گلوله به‌قطعه‌چوب چسبید گلوله وقطعه چوب با چه تندیی حرکت خواهندکرد.

حل: اندازهٔ حرکت گلوله پیش از برخورد $۰/۰۳ \times ۲۰۰$ kg m/s است. چون نیروی افقی خارجی اعمال نمی‌شود، براثر برخورد کاهشی در اندازهٔ حرکت تولید نمی‌شود، و چون در این هنگام جرم کل برابر ۲/۰۳ kg است، تندی مشترک گلوله وقطعه چوب، یعنی V برحسب m/s به‌طریق زیرحساب‌می‌شود:

$$۲/۰۳V = ۶$$

$$\therefore \qquad V = ۲/۹۶$$

مثال ۲: گلوله‌ای به‌جرم ۱۰۰ kg با تندی ۵۵۰ m/s از توپی به‌جرم ۵۰ Mg آتش می‌شود. این توپ به‌آزادی می‌تواند در جهت لوله پس‌زنی کند. تندی توپ راکه درنتیجهٔ این عمل تولید می‌شود تعیین کنید.

حل: اندازهٔ حرکت گلوله به‌طرف جلو: ۱۰۰×۵۵۰ kg m/s است. اندازهٔ حرکت توپ به‌طرف عقب برابر اندازهٔ حرکت گلوله به‌طرف جلو است. پس اگر V تندی توپ برحسب m/s باشد،

$$۵۰ \times ۱۰۰۰V = ۱۰۰ \times ۵۵۰$$

$$\therefore \qquad V = ۱/۱ \text{ m/s}$$

مثال ۳: اگر در مثال قبل، توپ در روی سطح شیبداری که شیب آن $\frac{۳}{۵}$ است قرارداشته باشد وگلوله به‌طور افقی آتش شود، تندی پس‌زنی تفنگ را حساب کنید.

حل: دراین حالت مقداری ازاندازهٔحرکت افقی که سهم توپ شده است به‌وسیلهٔسطح شیبداری که تفنگ برآن قرار دارد از میان می‌رود، وفقط می‌توانیم بگوییم که اندازهٔ حرکت توپ که موازی با سطح است برابر است با اندازهٔ حرکت گلوله که

موازی با سطح است.

اما اندازهٔ حرکت‌گلوله به‌موازات سطح برابراست با

$$۱۰۰ \times ۵۵۰ \times \text{کسینوس شیب} = ۱۰۰ \times ۵۵۰ \times \frac{۴}{۵}$$

پس اگر تندی پس‌زنی تفنگ برحسب m/s برابر V باشد،

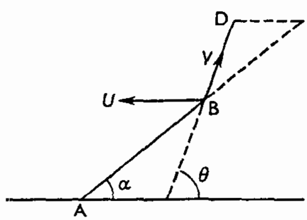
$$۵۰ \times ۱۰^۳ V = ۱۰۰ \times ۴۴۰$$

$$\therefore \qquad V = ۰/۸۸$$

مثال ۴: توپی به‌وزن W روی خطـوط آهنی صیقلی سوار شده است، و درجهت خطوط آهن آتش می‌شود. گلوله‌ای به‌وزن w با تندی V نسبت به‌زمین از آن خارج می‌شود. اگرزاویهٔ انحراف توپ برابر α باشد، ثابت‌کنیدکه جهت‌اولیهٔ حرکت گلوله با سطح زمین زاویه‌ای می‌سازدکه‌کتانژانت آن برابر است با

$$\frac{W \cot g\, \alpha}{W + w}$$

حل : فرض می‌کنیم AB (شکل ۵-۲) معرف لولهٔ توپ باشد.



شکل ۵-۲

وقتی‌که‌گلوله از لوله خارج می‌شود، توپ به‌طرف عقب حرکت می‌کند، واین یك مؤلفهٔ افقی تندی به طرف عقب به‌گلولـه می‌دهد. بنابراین جهت ابتدایی حرکت‌گلوله با افق زاویه‌ای می‌سازدکه بزرگتر از α است. فرض می‌کنیم که این زاویه θ، وتندی توپ برابر U باشد.

انـدازهٔ حرکت افقی تـوپ برابر اندازهٔ حـرکت افقی‌گلوله است و بنابرایـن $MU = mV \cos\theta$، که درآن $W = Mg$ و $w = mg$.

$$\therefore \qquad WU = wV \cos\theta \qquad (۱)$$

نیز V برایند تندی درجهت لولهٔ AB ، وتندی افقی U توپ است.
اگر BD معرف V باشد، در این صورت اگـر DC به‌طور افقی رسم شود تـا امتداد AB را در C قطع کند، CD برطبق مثلث تندیها، معرف U خواهدبود.

زاویهٔ $DCB = \alpha$ ، زاویهٔ $DBC = \theta - \alpha$

$$\frac{CD}{\sin(\theta-\alpha)} = \frac{BD}{\sin\alpha} \quad \text{و}$$

$$\therefore \qquad \frac{\sin(\theta-\alpha)}{U} = \frac{\sin\alpha}{V} \qquad (۲)$$

این معادله را در معادلهٔ (۱) ضرب می‌کنیم:

$$W \sin(\theta-\alpha) = w \sin\alpha \cos\theta$$

$$\therefore \qquad W(\sin\theta\cos\alpha - \cos\theta\sin\alpha) = w\sin\alpha\cos\theta$$

$$\therefore \qquad W(tg\,\theta\cos\alpha - \sin\alpha) = w\sin\alpha$$

$$\therefore \qquad tg\,\theta\cos\alpha = \sin\alpha + \frac{w}{W}\sin\alpha$$

$$= \frac{W+w}{W}\sin\alpha$$

$$\therefore \qquad tg\theta = \frac{W+w}{W} tg\alpha$$

$$\therefore \qquad cotg\theta = \frac{W\, cotg\alpha}{W+w}$$

مثال ۵: از لولهٔ مدوری به‌قطر ۸ cm آب با تندی ۵ m/s خارج می‌شود. تعیین‌کنید جرم آبی راکه در هردقیقه خارج می‌شود (وزن یك دسیمتر مکعب‌آب برابریك کیلوگرم است). اگرآب مستقیماً به‌یك سطح برخوردکند، ودرآنجا همهٔ‌اندازهٔ حرکت آن از میان برود، نیروی فشار فوارهٔ آب برآن سطح چقدر است؟

حل : سطح مقطع لوله $\frac{۱}{۴}\pi(۰/۰۸)^۲\ m^۲$ است و در هـرثانیه ستونی ازآب به‌طـول ۵ m خارج می‌شود.

حجم آب در هردقیقه

$$\pi(۰/۰۰۱۶) \times ۵ \times ۶۰\ m^۳$$

و جرم آن $۰/۴۸\pi \times ۱۰۰۰\ \mathrm{kg}$ ، یعنی $۱۵۰۷\ \mathrm{kg}$ است. جرم آبی‌که در هرثانیه خارج می‌شود برابر است با $۲۵/۱\ \mathrm{kg}$، و تندی آن $۵\ \mathrm{m/s}$ است.
بنابراین اندازهٔ حرکتی‌که در هرثانیه از میان می‌رود برابر است با

$$۲۵/۱ \times ۵\ \mathrm{kg\ m/s}\ \text{واحد}$$

ونیروی فشاری وارده برابر است با

$$۱۲۵/۵\ \mathrm{N}$$

مثال ۶: تیرکوبی به‌جرم $۳\ \mathrm{Mg}$ از ارتفاع $۵\ \mathrm{m}$ روی تیری به‌جرم $۱\ \mathrm{Mg}$ می‌افتد. اگرتیر $۲۴\ \mathrm{cm}$ در زمین فرو برود، مقاومت زمین را (که یکنواخت فرض می‌شود) تعیین کنید.

حل : تندی تیرکوب پس از سقوط $۵\ \mathrm{m}$ برابر است با

$$\sqrt{۲ \times ۵ \times ۹/۸} = ۹/۹\ \mathrm{m/s}$$

و اندازهٔ حرکت آن دراین هنگام برابراست با

$$۳ \times ۱۰^{۳} \times ۹/۹\ \mathrm{kg\ m/s}$$

پس از برخورد جرم متحرك $۴\ \mathrm{Mg}$ است، و اگر سرعت مشترك تیرکوب و تیر بیدرنگ پس از برخورد $V\ \mathrm{m/s}$ باشد،

$$۴ \times ۱۰^{۳} V = ۳ \times ۱۰^{۳} \times ۹/۹$$

$$\therefore \quad V = ۷/۴\ \mathrm{m/s}$$

اما این سرعت پس ازآنکه تیرکوب وتیر $۲۴\ \mathrm{cm}$ پیمودند از میان می‌رود. اگر شتاب منفی حرکت a باشد، داریم:

$$۰ = ۷/۴^{۲} - ۲a \times ۰/۲۴$$

$$\therefore \quad a = \frac{۷/۴^{۲}}{۰/۴۸} = ۱۱۴/۱$$

ونیروی ترمزکننده یعنی نیرویی که باعث این حرکت کندشونده می‌شود برابر است با

$$۴ \times ۱۰۰۰ \times ۱۱۴/۱ = ۴/۵۶ \times ۱۰^{۵}\ \mathrm{N}$$

مقاومت R زمین باید برابر نیروی ترمزکننده ووزن تیرکوب و تیرباشد.

$$\therefore \quad R = (۴ \times ۱۰^{۳} \times ۹/۸ + ۴/۵۶ \times ۱۰^{۵})$$

$$= ۴/۹۵ \times ۱۰^{۵}\ \mathrm{N}$$

تمرین ۱۰۵

۱- گلوله‌ای به‌جرم ۳۰ g با تندی ۸۴۰ m/s به‌قطعه چوبی به‌جرم ۵ kg کـه برروی میز صیقلی افقی قرار دارد برخورد می‌کند. تندی مشترك گلوله و قطعه چوب را پس ازآنکه گلوله به‌قطعه چوب چسبید تعیین کنید.

۲- گلوله‌ای به‌جرم ۲۰ g با تندی ۴۰۲۰ cm/s به‌قطعه‌چوبی به‌جرم ۴ kg که برروی میز صیقلی افقی قـرار دارد بـرخورد می‌کند. تندی مشترك گلولـه و قطعه چوب را پس ازآنکه گلوله به‌قطعه چوب جسبید تعیین کنید.

۳- توپی به‌جرم ۱۰ Mg که می‌تواند به‌آزادی درجهت لوله پس‌زنی بکند، گلولـه‌ای به جرم ۱۰۰ kg را بـا تندی ۴۰۰ m/s پرتـاب می‌کند. تندی پس‌زنی توپ را پیدا کنید.

اگرپس‌زنی توپ با نیروی مقاوم ثابتی روبه‌رو شود به‌طوری‌کـه توپ فقط ۱۲ cm عقب بیاید، بزرگی این نیرو را تعیین کنید.

۴- توپی به‌جرم ۲۰ Mg برروی سطح شیبداری که زاویهٔ شیب‌آن ۳۰ درجه است قرار دارد و گلوله‌ای به‌جرم ۲۰۰ kg را بـا تندی ۶۳۰ m/s به‌طور افقی آتش می‌کند. تندی پس‌زنی تـوپ و مسافتی را کـه توپ از سطح شیبدار بالا می‌رود تا بایستد تعیین کنید.

۵- درمدت دوساعت ۱/۲ cm باران می‌بارد. تندی بـاران در هنگام برخورد بـا زمین برابر تندی جسمی است کـه درسقوط آزاد مسافتی برابر ۲۷۰ m می‌پیمایـد. فشار متوسط ناشی از باران را بر هرمترمربع زمین تعیین کنید. جرم ۱ m³ باران ۱ Mg است.

۶- تیرکوبی به جرم ۵ Mg از ارتفاع ۳ m برروی تیری به‌جرم ۱ Mg سقوط می‌کند. اگر تیر ۸ cm در زمین فرو برود مقاومت متوسط زمین را تعیین کنید.

۷- چکشی‌به‌جرم ۲ Mg از ارتفاع ۰/۶ m برتیرناکشسان قائمی ۳۰ بار سقوط می‌کند. تیر ۱/۵ m در زمین فرو می‌رود. جرم تیر ۰/۵ Mg است. مقاومت زمین را، کـه یکنواخت فرض می‌شود، تعیین کنید.

۸- چکشی به‌جرم ۱ kg با تندی ۶ m/s برمیخی به جرم ۳۰ g فـرود می‌آید و آن را دریك قطعه چوب ثابت ۲/۵ cm فرو می‌برد. تندی مشترك میخ و چکش را درست پس‌از برخورد پیدا کنید. نیز درصد کاهش انرژی، مدت زمان حرکت میخ، و نیروی مقاوم چوب را به‌فرض آنکه ثابت باشد تعیین کنید.

۹- تیرکوبی از ارتفاع h m برتیری به‌جرم W kg فرود می‌آید. اگر مقاومت درمقابل

نفوذ تیر $Rg\,\mathrm{N}$ باشد و تیر $h\,\mathrm{cm}$ نفوذ کند، جرم تیرکوب را تعیین کنید.

۱۰- اگر توپی به‌جرم M گلوله‌ای به‌جرم m را به‌طور افقی پرتاب کند، نسبت انرژی پس‌زنی توپ را به‌انرژی گلوله پیدا کنید. اگر توپ ۵۰۰ کیلوگرمی گلوله‌ای به‌جرم ۲۵ kg با سرعت ۳۰۰ m/s خالی کند، مقاومت یکنواخت لازم برای آنکه توپ را پس از پیمودن ۱۵ cm متوقف کنیم چقدر است؟

۱۱- گلوله‌ای به‌جرم m از توپی به‌جرم M که برسطحی افقی و صیقلی قراردارد طوری آتش می‌شود که امتداد پرتاب با افق زاویه‌ای برابر α می‌سازد. اگر درلحظه‌ای که گلوله از توپ جدا می‌شود سرعت پس‌زنی توپ برابر v باشد ثابت کنید که مؤلفهٔ افقی فشار ضربه‌ای گلوله Mv است، ومؤلفه‌ای که با طول توپ زاویهٔ قائمه می‌سازد برابر است با $mv \sin\alpha$. (در هرحالت فرض آن است که فشار ضربه‌ای به دومؤلفهٔ عمود برهم تجزیه شده است).

ثابت کنید که جهت ابتدایی حرکت گلوله با افق زاویه‌ای می‌سازد که تانژانت آن برابر است با

$$\left(1+\frac{m}{M}\right) tg\,\alpha$$

۱۲- گلوله‌ای به‌جرم ۸ kg از دهانهٔ توپی به‌جرم ۵۰۰ kg به‌طور افقی پرتاب می‌شود. اگر گلوله با تندی ۵۰۰ m/s از دهانهٔ توپ خارج شود، تندی پس‌زنی توپ را حساب کنید.

مجموع انرژی جنبشی تولید شده (در گلوله و توپ) چقدر است، و اگر طول لولهٔ توپ ۲/۱ m باشد، نیروی متوسطی که بر گلوله وارد شده است چقدر است؟ هنگامی که گلوله از دهانه خارج می‌شود، توپ تا چه فاصله‌ای پس می‌نشیند؟

۱۳- گلوله‌ای به‌جرم m از تفنگی به‌جرم M که به‌وسیلهٔ نخهایی به‌طول l آویزان است آتش می‌شود. اگر انرژی جنبشی کل همان مقدار باشد که انگار گلوله از دهانهٔ تفنگ ثابتی با سرعت v پرتاب شده است، سرعتهای واقعی گلوله و تفنگ را در لحظهٔ جدایی پیدا کنید. نیز تعیین کنید که تفنگ براثر پس‌زنی تا چه ارتفاعی بالا خواهد رفت.

۱۴- برای ساختن یك مهرفولادی وزنه‌ای به‌جرم ۱۰۰ kg از ارتفاع ۱ m برروی فولاد سقوط می‌کند، و پس از آنکه ۱/۲ cm ازفولاد عبورکرد متوقف می‌شود. به‌فرض آنکه مقاومتی که از طرف فولاد اعمال می‌شود ثابت باشد، بزرگی این مقاومت را حساب کنید.

۱۵- گلوله‌ای به‌جرم m که به‌طور افقی آتش می‌شود با سرعت v به‌قطعه چوبی به‌جرم M که به‌وسیلهٔ نخ سبکی آویزان است برخورد می‌کند. مشاهده می‌شود که قطعه چوب و گلوله‌ای که به‌آن می‌چسبد بر اثر نوسان تا ارتفاع h بالای وضع ابتدایی‌خود می‌رسد. ثابت کنید که $mv=(M+m)\sqrt{2gh}$؛ فرض آن است که تمام حرکت در یك صفحهٔ قائم صورت می‌گیرد. اگر هواپیمایی به‌طور قائم با سرعت ۲۰ m/s بالا برود و جسمی به‌جرم ۱۰ kg را از ارتفاع ۶۰۰ m رها سازد، بزرگی‌ضربه‌ای را که با آن، جسم به‌زمین برخورد می‌کند تعیین کنید. واحد ضربه‌ای را که به‌کار می‌برید به‌طور واضح بیان کنید.

۱۶- گلوله‌ای به‌جرم m که با تندی v حرکت می‌کند به‌قطعه‌ای به‌جرم M، که می‌تواند درجهت حرکت گلوله حرکت کند، برخورد می‌کند و به‌آن می‌چسبد. ثابت کنید که کاهش انرژی برابر است با

$$\frac{\frac{1}{2}Mmv^{2}}{M+m}$$

اگر قطعهٔ مزبور بعداً با گلولهٔ مشابه دیگری که درهمان جهت با همان سرعت حرکت می‌کند، برخورد کند، ثابت کنید که‌دوباره کاهش انرژیی برابر $\dfrac{M^{2}mv^{2}}{2(M+2m)(M+m)}$ وجود خواهد داشت.

۱۷- قطعه چوبی به‌جرم ۰/۵ kg برروی سطح افقی ناصافی قرار دارد. ضریب اصطکاك میان قطعه چوب و سطح مزبور برابر ۰/۴ است. گلوله‌ای به‌جرم ۴۰ g با تندی ۱۵۰ m/s به‌داخل چوب پرتاب می‌شود. تعیین کنید: (الف) تندی مشترك قطعه چوب و گلوله را پس از برخورد، (ب) مسافتی را که قطعه چوب در امتداد سطح مزبور می‌پیماید، (پ) نسبت انرژیی را که بر اثر برخورد کاهش یافته است به‌انرژیی که بر اثر اصطکاك با سطح مزبور کاهش یافته است.

۱۸- ازتوپی به‌جرم M، که می‌تواند آزادانه درسطحی‌افقی پس‌زنی کند، گلوله‌ای به‌جرم m آتش شده است. انحراف لولهٔ توپ از افق‌برابر α است. ثابت کنید که زاویهٔ ϕ، که مسیر گلوله در ابتدا با افق می‌سازد ازمعادلهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$tg\,\phi=\left(1+\frac{m}{M}\right)tg\,\alpha$$

و سپس به فرض آنکه تمام انرژی ناشی از انفجار به‌گلوله و توپ منتقل می‌شود،

ثابت کنید که انرژی گلوله در دهانهٔ تـوپ به‌نسبت M و $M+m\cos^2\phi$ کمتر از حالتی است که توپ ثابت می‌بود.

۱۹- ازدهانهٔ لوله‌ای به‌سطح مقطع $0/6\ \mathrm{cm^2}$ آب به‌طورقائم باسرعت $10\ \mathrm{m/s}$ خارج می‌شود. گلوله‌ای به‌جرم $0/5\ \mathrm{kg}$ براثربرخوردآب به‌زیرآن درهوا به‌حالت‌تعادل است. ارتفاع گلوله ازسطح فواره چقدر است؟

۲۰- گلوله‌ای به‌جرم $15\ \mathrm{g}$ که با سرعت $300\ \mathrm{m/s}$ در یك قطعه چوبِ پرتاب می‌شود $7/5\ \mathrm{cm}$ درآن فرو می‌رود.

اگر گلوله با همان سرعت آتش شود و درقطعه‌ای ازهمان چوب که $5\ \mathrm{cm}$ ضخامت و $1/5\ \mathrm{kg}$ جرم دارد وآزادانه می‌تواند حـرکت کند برخورد نماید، آن قطعه را سوراخ خواهدکرد. تندیی را که گلوله از قطعه چوب خارج خواهد شد تعیین کنید.

۲۱- دریك اتومبیل مسابقه‌ای سطحی که دربرابر هوا مقاومت می کند $1/5\ \mathrm{m^2}$ مساحت دارد. اگرچگالی هوا $1/25\ \mathrm{kg/m^3}$ باشد، تعیین کنید هنگامی که سرعت اتومبیل $100\ \mathrm{km/h}$ و سرعت باد کـه از مقابل می‌وزد $16\ \mathrm{km/h}$ است، چه مقدار از توان اتومبیل جذب می‌شود تا برمقاومت باد فایق شود.

۲۲- واگنی به‌جرم $10\ \mathrm{Mg}$ که باتندی $10\ \mathrm{km/h}$ درحال حرکت است به‌واگن دیگری به‌جـرم $5\ \mathrm{Mg}$ کـه ساکن است برمی‌خورد و درهمان لحظه به‌آن وصل می‌شود. چرخهای واگن دوم به وسیلهٔ تـرمز قفل شده‌اند. ضریب اصطکاك میان چرخها و خطوط آهن $0/2$ است. دو واگن پس از برخورد چه مسافتی خواهند پیمود؟

۲۳- تیری به‌جرم $1\ \mathrm{Mg}$ بر اثر ضربه‌های وزنه‌ای به‌جرم $500\ \mathrm{kg}$ که از ارتفاع $2/5$ متری آزادانه برسرتیر سقوط می کند در زمین فرو می‌رود. این وزنه براثر برخورد با تیربه‌عقب برنمی‌گردد. تیر با هرضربه $15\ \mathrm{cm}$ در زمین فرومی‌رود. اگرمقاومت زمین یکنواخت بـاشد، مقدار این مقاومت را تعیین کنید. نیز مدت زمـان نفوذ را به‌دست آورید.

۲۴- هـدفی به جرم M بـا تندی یـکنواخت V در مسیری مستقیم حـرکت می کند. از روبه‌روی آن درجهت مخالف حـرکت هدف، گلوله‌هـایی به‌جرم m آتش می‌شود به‌طوری که به‌هدف برخورد می کنند و به‌آن می‌چسبند. تعیین کنید چند گلوله بـاید آتش شود تـا هدف درجهت عکس شروع به‌حرکت کند. نیز تعیین کنید هنگامی کـه نخستین گلوله به‌هدف می‌خورد چه مقدار از انرژی جنبشی کاسته می‌شود.

۸.۵. کششهای ضربه‌ای درنخ

فرض می‌کنیم که دونقطهٔ مادی A و B (شکل ۵-۳) به وسیلهٔ نخ انعطاف ناپذیری به‌هم مرتبط شده‌اند و برروی میز افقی صیقلی قرار دارند.

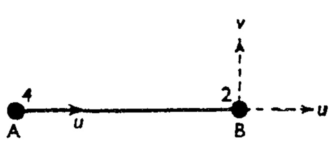
شکل ۵-۳

اکنون اگر ضربهٔ P بر یکی ازآنها اعمال شود (مثلاً بر B)، نمی‌توانیم فوراً بگوییم که B درچه جهتی حرکت خواهدکرد (مگرآنکه جهت P در امتداد AB یا عمود بر AB باشد)، زیرا درنخ یك کشش ضربه‌ای تولید می‌شود و این کشش بر B عمل‌می‌کند، و بنابراین B تحت اثر دو نیروی ضربه‌ای قرار می‌گیرد. اما می‌دانیم که A فقط تحت تأثیر کشش ضربه‌ای نخ است و بنابراین درجهت AB شروع به‌حرکت می‌کند و تندی آن برابر مؤلفهٔ تندی B دراین جهت است.

نیز می‌دانیم که برایند اندازهٔ حرکت A و B درجهت ضربه برابر است با p، وحال آنکه برایند اندازهٔ حرکت عمود براین جهت صفر است.

مثال: دوگلولهٔ A و B که جرم آنها به‌ترتیب ۴ kg و ۲ kg است برروی میز افقی صیقلی قرار دارند و به‌وسیلهٔ نخ محکم انعطاف‌ناپذیری به‌یکدیگر مرتبط شده‌اند. B درمشرق A قرار دارد. B تحت تأثیر ضربه‌ای قرار می‌گیرد، که اگر آزاد بود درجهت شمال شرقی با تندی ۲۱ m/s حرکت می‌کرد. ثابت‌کنیدکه B در واقع با تندیی درحدود ۱۵/۶۵ m/s درجهت ′۳۴°۷۱ شمال‌شرقی‌حرکت می‌کند. بزرگی کشش ضربه‌ای نخ را با بزرگی ضربهٔ وارده مقایسه کنید.

حل: بزرگی ضربهٔ وارده ۴۲ واحد ضربه است، و جهت آن شمال شرقی است. فرض می‌کنیم u و v متر برثانیه مؤلفه‌های تندی B در امتداد و عمود بر AB باشند (شکل ۵-۴). بنابراین تندی A برابر u متر برثانیه در امتداد AB است.



شکل ۵-۴

اندازهٔ حرکت درجهت AB برابر است با مؤلفهٔ ضربه در این‌جهت، یعنی برابر است با $\frac{۴۲}{\sqrt{۲}}$ واحد.

$$\therefore \qquad ۴u+۲u=\frac{۴۲}{\sqrt{۲}}$$

واندازهٔ حرکت‌عمود بر AB برابراست بامؤلفهٔ ضربه درامتداد عمود بر AB یعنی $\frac{۴۲}{\sqrt{۲}}$ واحد.

$$\therefore \qquad ۲v=\frac{۴۲}{\sqrt{۲}}$$

$$\therefore \qquad u=\frac{۷}{\sqrt{۲}} \quad \text{و} \quad v=\frac{۲۱}{\sqrt{۲}}$$

اگر V برایند تندی B باشد،

$$V^{۲}=\frac{۴۹}{۲}+\frac{۴۴۱}{۲}=\frac{۴۹۰}{۲}=۲۴۵$$

$$\therefore \qquad V=۱۵/۶۵\ \mathrm{m/s}$$

اگر θ زاویهٔ امتداد V با مشرق باشد،

$$tg\,\theta=\frac{v}{u}=۳$$

$$\therefore \qquad \theta \# ۷۱^{\circ}۳۴'$$

کشش ضربه‌ای در نخ، تندیی برابر u برای A فراهم می‌کند، یعنی تندیی برابر $\frac{۷}{\sqrt{۲}}\ \mathrm{m/s}$ درجرم ۴ کیلوگرمی.

$$\therefore \qquad \text{کشش}=\frac{۲۸}{\sqrt{۲}}\ \text{واحد ضربه}$$

$$\therefore \qquad \frac{\text{کشش ضربه‌ای}}{\text{ضربه}}=\frac{۲۸}{۴۲\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۳}=۰/۴۷$$

۹.۵ وقتی‌که دوجرم به‌وسیلهٔ نخ انعطاف ناپذیری‌که از شیار قرقره‌ای صیقلی عبورکرده است به‌یکدیگر مرتبط، و درحال حرکت باشند، و وزنه‌ای‌که پایین می‌آید متوقف شود، می‌دانیم‌که وزنهٔ دیگر به حرکت خود، تحت تأثیر نیروی جاذبه، آزادانه ادامه می‌دهد تا اینکه نخ دوباره محکم وکشیده شود. این را در مثالهای بخش گذشته مورد بررسی

قرار دادیم. اکنون می‌خواهیم ببینیم پس ازآنکه نخ دوباره کشیده و محکم شد چه روی می‌دهد. تندی مشترك دو وزنه پس از کشیده شدن نخ از تندی جرم منفرد، که پیش از کشیده شدن نخ با آن تندی حرکت می‌کرد، کمتر است، زیرا اندازهٔ حرکت این جرم باید میان دوجرم تقسیم شود.

نیز می‌توانیم تغییر تندی حاصله را در هنگامی تعیین‌کنیم که یکی از جرمها، جرمی اضافی را که قبلاً ساکن بوده است برمی‌دارد.

۱۰۰۵. مثال ۱: دوجرم m و $\text{۲}m$ کیلوگرم به‌وسیلهٔ نخ سبك انعطاف‌ناپذیری که از روی قرقره‌ای صیقلی عبور کرده است به‌یکدیگرمرتبط شده‌اند. شتاب دستگاه را تعیین کنید. اگر پس از آنکه جرمها مدت ۳ ثانیه حرکت‌کردند جرم $\text{۲}m$ به‌زمین برخوردکند (بدون آنکه به عقب برگردد) تعیین‌کنید از لحظه‌ای‌که این اتفاق روی می‌دهد چه مدت طول می‌کشد تا دستگاه به‌طور لحظه‌ای با نخ‌کشیده شده ساکن باشد.

حل : اگرشتاب مشترك برحسب $\text{m/s}^{\text{۲}}$ برابر a و کشش نخ T نیوتون باشد، معادلات حرکت عبارتند از:

$$\text{۲}mg - T = \text{۲}ma$$

$$T - mg = ma$$

$$\therefore \quad \text{۳}ma = mg$$

$$\therefore \quad a = \frac{g}{\text{۳}}$$

پس از ۳ ثانیه تندی مشترك برابر v متر برثانیه است که چنین به‌دست می‌آید:

$$v = \left(\frac{g}{\text{۳}}\right) \times \text{۳} = g$$

جرم m کیلوگرمی آزادانه تحت تأثیرنیروی‌جاذبه، با این‌تندی شروع به‌حرکت می‌کند، ومدت زمان t ثانیه که طول‌می‌کشد تا بالابرود و دوباره به‌وضع‌ابتدایی خود برسد مطابق زیر به‌دست می‌آید:

$$\text{۰} = gt - \frac{\text{۱}}{\text{۲}} \times gt^{\text{۲}}$$

$$\therefore \quad t = \text{۲}$$

وقتی‌که نخ دوباره کشیده شد، تندی آن دوباره g m/s است و اندازهٔ حرکت آن mg واحد است.

بنابراین اگر پس از کشیده شدن نخ تندی مشترك برابر V متر برثانیه باشد،

$$۲mV = mg - mV$$

$$\therefore \qquad V = \frac{۱}{۳}g$$

دستگاه با این تندی شروع به حرکت می‌کند. اما، چون جرم سنگینتر به‌طرف بالا حرکت می‌کند، شتابی منفی برابر $\frac{g}{۳}$ وجود خواهد داشت که برابر است با شتاب مثبت ابتدایی.

بنابراین t' ثانیه، یعنی زمانی‌که می‌گذرد تا دستگاه متوقف شود برابر است با:

$$\circ = \frac{g}{۳} - \frac{g}{۳}t'$$

$$\therefore \qquad t' = ۱$$

پس فاصلهٔ کل میان ضربهٔ جرم $۲m$ و سکون دستگاه برابر است با:

$$t + t' = ۳\,\text{s}$$

یادداشت. اگرجرمها به‌حال خود رها شوند، جرم سنگینتر پایین خواهد آمد و دوباره با سطح زمین برخورد خواهدکرد و حرکت تکرار خواهد شد. اما مدت زمان لازم برای آنکه وزنه برای بار دوم به‌زمین برخورد کند، فقط برابر $\frac{۱}{۳}$ مدت زمان اولیه است، زیرا فقط لازم است‌که $\frac{۱}{۳}$ تندیی‌را که درحالت اول‌داشت به‌دست‌آورد. وقتی‌که جرم‌سنگینتر دوباره به‌طرف بالا کشیده می‌شود، تندی مشترك دوباره بر ۳ تقسیم می‌شود و بنابراین مدت زمان لازم برای سکون دوبارهٔ دستگاه بازهم $\frac{۱}{۳}$ مدت زمان حالت قبل است. مدت زمان لازم برای‌آنکه جرم سنگینتردرتماس با زمین باقی‌بماند برابر است با مجموع تصاعد هندسی‌که قدر نسبت آن $\frac{۱}{۳}$ و عدهٔ جمله‌های‌آن بینهایت است.

مثال ۲: دو وزنه به‌جرمهای ۹ kg و ۷ kg به‌دوانتهای نخ سبکی که از شیار صیقلی قرقره‌ای گذشته است محکم شده‌اند. دوقسمت نخ به‌طور قائم هستند. دستگاه ازحال سکون رها می‌شود، و پس از دو ثانیه حرکت، وزنه‌ای به‌جرم ۵ kg

از حال سکون نـاگهان به وزنهٔ ۷ کیلوگرمی متصل می‌شود. تعیین کنید پس از چه مدت دستگاه دوباره به‌حال سکون درخواهد آمد. وزنه‌هـای اولیه روی‌هم چه مسافتی طی خواهند کرد؟

حل : فرض‌می‌کنیم که شتاب دستگاه برحسب $\mathrm{m/s^۲}$ برابر a و کشش‌نخ برحسب نیوتون برابر T باشد. دراین صورت:

$$۹g-T=۹a$$

و

$$T-۷g=۷a$$

$$\therefore \quad ۱۶a=۲g$$

$$\therefore \quad a=\frac{g}{۸}$$

پس از دوثانیه، تندی برابر v است، که

$$v=\frac{۱}{۸}g\times ۲=\frac{g}{۴}=۲/۴۵\ \mathrm{m/s}$$

اندازهٔ حرکت وزنهٔ ۹ کیلوگرمی برابر ۲/۴۵ × ۹ واحد و به‌طرف پایین است.
اندازهٔ حرکت وزنهٔ ۷ کیلوگرمی برابر ۲/۴۵ × ۷ واحد و به‌طرف بالاست.
اگر پس از برداشته شدن وزنهٔ ۵ کیلوگرمی، تندی مشترك برحسب متربرثانیه برابر V باشد،

$$۹\times ۲/۴۵-۹V=۱۲V-۷\times ۲/۴۵$$

$$\therefore \quad V=\frac{۳۹/۲}{۲۱}$$

اکنون وزنه‌ها ۹ کیلوگرمی و ۱۲ کیلوگـرمی هستند و اگر شتاب منفی حرکت برابر a' وکشش نخ برابر T' باشد، داریم:

$$۱۲g-T'=۱۲a'$$

و

$$T'-۹g=۹a'$$

$$\therefore \quad ۲۱a'=۳g$$

$$\therefore \quad a'=\frac{۱}{۷}g$$

t ثانیه طول می‌کشد تـا دستگاه به حـال سکون درآید و آن را می‌توان چنین حساب کرد،

$$\circ = \frac{۳۹/۲}{۲۱} - \frac{g}{۷}t$$

$$\therefore \qquad t = \frac{۳۹/۲}{۲۱} \times \frac{۷}{۹/۸} = \frac{۴}{۳}$$

در دوثانیهٔ اول حرکت وزنه‌ها مسافتی برابر $x_۱$ m می‌پیمایند، به‌طوری‌که

$$x_۱ = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۸} g \times ۴ = ۲/۴۵$$

در $\frac{۴}{۳}$ ثانیهٔ بعد، این وزنه‌ها مسافتی برابر $x_۲$ m می‌پیمایند، به‌طوری‌که

$$x_۲ = \frac{۳۹/۲}{۲۱} \times \frac{۴}{۳} - \frac{۱}{۲} \times \frac{۹/۸}{۷} \times \frac{۱۶}{۹}$$

$$= \frac{۷۸/۴}{۶۳} = ۱/۲۴$$

بنابراین مسافت‌کلی‌که پیموده می‌شود برابر است با تقریباً ۳/۶۹ m.

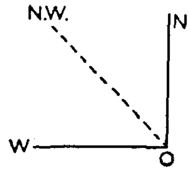
مثال ۳: جسمی به‌وزن W که با سرعت u m/s به‌طرف شمال حرکت می‌کند، نـاگهان مجبور می‌شود‌که با سرعت v m/s به‌طرف شمال غربی حرکت کند. تعیین کنید که این جسم چه ضربه‌ای دریافت‌کرده است. اگر تغییرتندی متدرجاً تحت تأثیر نیروی ثابتی روی داده باشد و T s طول‌کشیده باشد تا تغییر اثرکند، شتاب را پیدا کنید، و نشان دهید کـه اگر $v = \frac{u}{\sqrt{۲}}$ و x و y تغییرمکانهای به‌طرف‌شمال و مغرب درهرلحظه باشند، $(y+x)^۲ = ۴uTy$

حل : در این مسئله بهتر است‌که مؤلفه‌های ضربه را در امتدادهای شمال و مغرب در نظر بگیریم.

فرض‌می‌کنیم ON (شکل ۵-۵) جهت‌شمال و OW جهت مغرب را نشان‌دهد.

تندی v درجهت شمال غربی دارای مؤلفه‌هـایی برابر $\frac{v}{\sqrt{۲}}$ در جهت شمـال و $\frac{v}{\sqrt{۲}}$ درجهت مغرب است.

تغییر تندی در جهت ON برابراست بـا $\frac{v}{\sqrt{۲}} - u$، و در جهت OW بـرابر



شکل ۵ـ۵

است با $\frac{v}{\sqrt{2}}$.

بنابراین مؤلفه‌های ضربه برابرند با

$$\frac{W}{g}\left(\frac{v}{\sqrt{2}}-u\right) \text{ و } \frac{W}{g}\times\frac{v}{\sqrt{2}}$$

برایند ضربه برابر است با

$$\frac{W}{g}\sqrt{\left(\frac{v^2}{2}+u^2-\frac{2uv}{\sqrt{2}}+\frac{v^2}{2}\right)}$$

$$=\frac{W}{g}\sqrt{\left(u^2+v^2-\frac{2uv}{\sqrt{2}}\right)}$$

اگر F_1 و F_2 به‌ترتیب مؤلفه‌های نیروی ثابت در امتدادهای ON و OW باشند،

$$F_1T=\frac{W}{g}\left(\frac{v}{\sqrt{2}}-u\right) \text{ و } F_2T=\frac{W}{g}\times\frac{v}{\sqrt{2}}$$

مؤلفه‌های شتاب عبارتند از:

$$\frac{F_1g}{W} \text{ و } \frac{F_2g}{W}$$

یا

$$\frac{1}{T}\left(\frac{v}{\sqrt{2}}-u\right) \text{ و } \frac{1}{T}\times\frac{v}{\sqrt{2}}$$

برایند شتاب برابر است با:

$$\frac{1}{T}\sqrt{\left(\frac{v^2}{2}+u^2-\frac{2uv}{\sqrt{2}}+\frac{v^2}{2}\right)}$$

$$=\frac{1}{T}\sqrt{\left(v^2+u^2-\frac{2uv}{\sqrt{2}}\right)}$$

درمدت t ، تغییرمکانهای x و y چنین به‌دست می‌آیند:

$$x=ut+\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{T}\left(\frac{v}{\sqrt{۲}}-u\right)t^{۲}$$

و

$$y=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{T}\times\frac{v}{\sqrt{۲}}t^{۲}$$

اگر $v=\frac{u}{\sqrt{۲}}$ باشد داریم:

$$x=ut-\frac{u}{۴T}t^{۲}$$

و

$$y=\frac{u}{۴T}t^{۲}$$

$$\therefore \qquad y+x=ut$$

$$\therefore \qquad (y+x)^{۲}=u^{۲}t^{۲}=۴uTy$$

تمرین ۲.۵

۱ـ وزنه‌هایی به‌جرم $۱۰۰\,\mathrm{g}$ و $۸۰\,\mathrm{g}$ به‌وسیلهٔ نخ سبکی که از شیار صیقلی قرقره‌ای ثابت عبورکرده است، به‌یکدیگرمرتبط هستند. دستگاه ازحال سکون شروع به‌حرکت می‌کند و پس‌ازآنکه وزنهٔ ۸۰ گرمی مسافتی برابر $۹\,\mathrm{cm}$ بالا آمد از درون حلقه‌ای که روی آن میله‌ای به‌جرم $۴۰\,\mathrm{g}$ قراردارد می‌گذرد و میله را برمی‌دارد و با خود بالا می‌برد. نشان دهیدکه این میله تقریباً $۷/۴\,\mathrm{cm}$ بالای حلقه برده خواهد شد.

۲ـ دو وزنه به‌جرمهای $m_۱$ و $m_۲$ $(m_۱>m_۲)$ به‌وسیلهٔ نخ سبك و انعطاف‌ناپذیری که ازشیارصیقلی قرقره‌ای ثابت عبورکرده است به‌یکدیگرمرتبط هستند. دستگاه را آزاد می‌کنیم. اگر وزنهٔ سنگینتر پس از پیمودن مسافتی برابر $d\,\mathrm{m}$ به‌زمین برسد، پس از چند ثانیه این وزنه از زمین جدا می‌شود و با چه تندیی‌شروع به‌بالارفتن‌خواهدکرد؟

۳ـ دو وزنه هریك به‌جرم $۲\,\mathrm{kg}$ به‌وسیلهٔ نخی‌که ازشیار صیقلی قرقره‌ای عبورکرده است به‌یکدیگر مرتبط هستند و به‌طور قائم با تندی $۲\,\mathrm{m/s}$ حرکت می‌کنند. وزنه‌ای که بالا می‌رود از حلقه می‌گذرد بدون آنکه با حلقه تماس پیدا کند. پس از عبور از حلقه وزنه‌ای به‌جرم $۲۵۰\,\mathrm{g}$ را از روی حلقه برمی‌دارد وآن‌را باخود حمل می‌کند. تعیین کنید این وزنهٔ ۲۵۰ گرمی تا چه ارتفاعی بالا خواهد رفت و چه مدت طول می‌کشد تا دوباره روی حلقه قرار گیرد.

۴- دو وزنه یکی به‌جرم $3M$ ودیگری به‌جرم M به‌وسیلهٔ نخی که ازشیارقرقره‌ای‌می گذرد به‌یکدیگرمرتبط هستند. وزنهٔ $3M$ روی زمین قرار گرفته وتمام دستگاه به‌حال‌سکون است. وزنهٔ سومی به‌جرم M از ارتفاع h سقوط می کند و برروی وزنهٔ دوم می‌افتد وبه‌آن می‌چسبد وتمام‌دستگاه را به‌حرکت درمی‌آورد. ثابت کنیدکه جرم $3M$ تاارتفاع $\frac{h}{5}$ از زمین بالا خواهد رفت.

۵- دو وزنه یکی به‌جرم $1/5\,\mathrm{kg}$ و دیگری به جرم $2/5\,\mathrm{kg}$ به دو انتهای نخی به‌طول $4\,\mathrm{m}$ متصل شده‌اند. نخ از روی میخی عبور کرده است که در فاصلهٔ $2/4\,\mathrm{m}$ بالای میزی افقی قرار دارد. وزنهٔ ۲/۵ کیلو گرمی روی میز است و وزنهٔ دیگر در کنار میخ برده می‌شود و درآنجا رها می‌شود تا سقوط کند. ثابت کنید که این وزنه به میز اصابت نخواهد کرد.
نیز بزرگترین ارتفاعی‌که وزنهٔ ۲/۵ کیلوگرمی از میز بالا خواهد رفت ومدت زمانی که پس ازآن مدت این وزنه برای بار دوم به‌میز برخورد می کند چقدر است؟

۶- دو وزنه به جرمهای m و M به وسیلهٔ نخ سبکی که از شیار صیقلی قرقره‌ای سبك عبورکرده است به یکدیگر مرتبط هستند. قرقره دربالای سطح ناکشسان افقیی قرار دارد، و وزنهٔ M طوری قرار دارد که حرکت موجود نیست. اگر M رها شود و پس از $t\,\mathrm{s}$ به‌سطح مزبور برسد، نشان دهیدکه دستگاه ابتدا پس از مدت زمانی برابر $\frac{3Mt}{(M+m)}$ به‌حال‌سکون لحظه‌ای (با نخ‌کشیده) درخواهد آمد وبالاخره پس ازمدتی برابر $3t\,\mathrm{s}$ هنگامی که M روی سطح است به‌حال سکون درخواهد آمد.

۷- دو وزنه به‌جرمهای $90\,\mathrm{g}$ و $150\,\mathrm{g}$ به‌وسیلهٔ نخ سبك انعطاف ناپذیری به‌طول $4/2\,\mathrm{m}$ که از شیار صیقلی قرقره‌ای کوچك عبور کرده است به‌یکدیگر مرتبط هستند. قرقره درارتفاع ۳ متری بالای‌میزی قرار دارد و وزنهٔ سنگینتر برروی این‌میز به‌طور قائم در زیر قرقره قرار دارد. وزنهٔ دیگر را تا کنار قرقره بالا می‌برند و از آنجا رها می کنند. تعیین کنید سرعت دستگاه را پس ازآنکه نخ ناگهان کشیده می‌شود، و مدت زمانی را که پس از آن دستگاه برای بار اول به‌حال سکون درمی‌آید.

۸- دو وزنه یکی به‌جرم $2\,\mathrm{kg}$ و دیگری به‌جرم $3\,\mathrm{kg}$ به‌دوسرنخی سبك به‌طول $2\,\mathrm{m}$ بسته شده‌اند و برروی میز افقی صافی به‌بلندی $5\,\mathrm{m}$ قرار دارند. وزنهٔ ۲ کیلوگرمی در لبهٔ میز است و راستای نخ عمود برلبه است. اگر وزنهٔ ۲ کیلوگرمی به‌آرامی ازکنارهٔ لبه سقوط‌کند مدت زمانی‌که طول می کشد تا وزنهٔ ۳ کیلوگرمی به کنارهٔ لبه برسد چقدر است؟

۹ ـ دو وزنه که جرم هریك برابر M است به‌وسیلهٔ نخ سبك انعطاف‌ناپذیری که از روی میخی صیقلی عبور کرده است به‌یکدیگر مرتبط هستند. وزنه‌ها آزادانه تحت اثر نیروی جاذبه آویزان هستند. وزنه‌ای اضافی به‌جرم m بریکی از این دوجرم قرار می‌گیرد. وقتی‌که این جرم مسافتی برابر h پایین‌آمد وزنهٔ اضافی‌از روی‌آن برداشته می‌شود. درهمین لحظه جرم دیگر وزنهٔ اضافی مشابهی را ازحال‌سکون برمی‌دارد. ثابت کنید که دستگاه دوباره هنگامی به‌حال سکون درخواهدآمدکه جرم اولی علاوه برمسافت قبلی h مسافت دیگری برابر $\frac{4M^2h}{(2M+m)^2}$ طی‌کرده است.

۱۰ـ وزنه‌هایی به‌جرمهای $4\,\text{kg}$ و $3\,\text{kg}$ روی میزی افقی قرار دارند و به وسیلهٔ نخ شلی به‌یکدیگر مرتبط هستند. وزنهٔ اولی در امتداد میز و درجهتی مستقیماً دور از وزنهٔ دوم با تندی $21\,\text{m/s}$ پرتاب می‌شود. تندی هریك از دو وزنه راپس‌ازآنکه نخ به‌حال کشیده درآمد تعیین کنید. نیز اختلاف میان انرژیهای جنبشی دستگاه را هنگامی‌که نخ شل است و نخ کشیده است پیدا کنید.
اگر وزنهٔ دوم با نخی شل به‌وزنهٔ سوم با جرم نامعلوم متصل باشد و اگر تندی دستگاه پس ازآنکه هردو نخ به‌حالت کشیده درآمدند $8\,\text{m/s}$ بشود بزرگی جرم نامعلوم را پیدا کنید.

۱۱ـ دو وزنهٔ A و B که جرم هرکدام m است به‌وسیلهٔ نخ سبك و انعطاف‌ناپذیری به‌طول l به‌یکدیگرمرتبط شده‌اند وبرروی میزصیقلی افقی به‌فاصلهٔ $\frac{1}{2}l$ ازیکدیگر قرار دارند. وزنهٔ B ضربه‌ای افقی برابر $m\mu$ درجهتی عمود بر AB دریافت می‌کند. ضربه‌ای راکه درنخ درهنگام کشیده شدن آن وارد می‌شود، نیز تندی B را ناگهان بعد ازآن در دو حالت زیر تعیین کنید: (الف) A ثابت نگاه داشته‌شده است، (ب) A می‌تواند حرکت کند.
نشان دهید‌که وقتی‌که A ثابت است، کاهش انرژی جنبشی دو برابرکاهش انرژی جنبشی در هنگامی است‌که A می‌تواند حرکت کند.

۱۲ـ وزنه‌ای به جرم $60\,\text{g}$ با تندی $5\,\text{m/s}$ درجهت معینی حرکت می‌کند. این وزنه ناگهان تحت تأثیر ضربه‌ای قرار می‌گیردکه جهت آن را ۶۰ درجه منحرف می‌کند وتندی آن را دو برابر می‌کند. اگروزنه‌ای به‌جرم $270\,\text{g}$ که درحال سکون است تحت تأثیر ضربه‌ای معادل ضربهٔ مزبورقرارگیرد در چه‌جهتی نسبت به‌جهت‌حرکت وزنهٔ نخست و با چه تندیی شروع به‌حرکت خواهد کرد؟ نیز اگرجهت تندی وزنهٔ اول، پیش از ضربه معکوس می‌شد، تندی وجهت آن پس ازضربه چه‌می‌شد؟

۱۳- سه وزنهٔ مشابه A و B و C که جرم هریك برابر m است برروی سطحی افقی و صیقلی قرار دارند. A به‌وسیلهٔ نخهای سبك AB و AC به B و C متصل است و زاویهٔ BAC برابر $60°$ است.
ضربه‌ای برابر I در جهت BA بر A وارد می‌شود. تندیهای اولیهٔ وزنه‌ها را تعیین کنید و نشان‌دهید که A درجهتی شروع به‌حرکت‌خواهدکرد که با BA زاویه‌ای می‌سازد که تانژانت آن برابر $\frac{\sqrt{3}}{7}$ است

۱۴- سه اجسم کوچك به‌جرمهای ۴۰، ۵۰، ۶۰ گرم به‌دنبال هم در امتداد خطی مستقیم روی میزی بزرگ وصیقلی قرار دارند. فاصلهٔ میان دوجسم متوالی برابر $15\,\mathrm{cm}$ است. دونخ شل، هریك به‌طول $60\,\mathrm{cm}$ جسم اولی را به‌دومی، وجسم دومی‌را به‌سومی مربوط کرده است. جسم سوم با سرعت $4/5\,\mathrm{m/s}$ مستقیماً درجهت‌دور از دو جسم پرتاب می‌شود. تعیین کنید پس از چه‌مدت زمانی وبا چه سرعتی جسم اول شروع به‌حرکت می‌کند و نیز کاهش انرژی جنبشی را تعیین کنید.

۱۵- از عبارت «اندازهٔ حرکت یك بردار است» چه استنباطی می‌کنید؟ در مربع ABCD نقطهٔ وسط CD را به X نمایش می‌دهیم. اجسامی که جرمهای آنها به‌ترتیب ۳، ۲، ۴، ۱ کیلوگرم است درامتدادهای AX، BX، CX، DX حرکت می‌کنند. سرعتهای آنها به‌ترتیب ۵، ۶، ۳، ۸ متربرثانیه است. این سه جسم در یك لحظه به‌هم برخورد می‌کنند وبه‌صورت جسم واحدی درمی‌آیند. تندی جدید را، ترجیحاً با روشهای نموداری، تعیین کنید، نیز کاهش انرژی جنبشی را پیدا کنید.
اگرفقط سه جسم اول پس از برخورد به‌صورت جسم واحدی درآیند وجسم چهارم درجهت BD باسرعت $6\,\mathrm{m/s}$ حرکت کند، تندی نهایی‌جسم مرکب‌را حساب کنید.

۱۱.۵. برخورد اجسام‌کشسان

وقتی‌که دوکره از هرنوع مادهٔ سختی به‌هم برخورد کنند، دوباره از یکدیگر جدامی‌شوند، و دربسیاری ازحالتها، مانند وقتی‌که پیش ازبرخورد در جهتهای مخالف حرکت‌می‌کردند، جهت تندی یکی ازآنها عوض می‌شود.

کره‌ها به‌آهستگی متراکم می‌شوند، وچون عموماً مایلند که به‌شکل اول خودشان برگردند، به‌عقب برمی‌گردند.

مدت‌زمانی که‌کره‌ها با هم در تماسند ممکن است به‌دو جزء تقسیم شود، (الف) زمان متراکم شدن، (ب) زمان بازگشت، که درآن مدت دوباره شکل خود را به‌دست

می‌آورند. این خاصیت که سبب می‌شود اجسام دوباره شکل خود را به‌دست آورند، ودر اینجا پس از برخورد به‌عقب برگردند کشسانی یا الاستیسیته نامیده می‌شود. اگرجسمی مایل نباشدکه شکل خودش را به‌دست آورد، سبب نیروی بازگشت نخواهد شد. چنین جسمی را ناکشسان گویند.

وقتی که از برخورد اجسام کشسان گفتگو می‌کنیم فرض می‌کنیم که این اجسام صیقلی هستند، بنابراین تنها عملی که آنها می‌توانند بریکدیگر وارد کنند در امتداد عمود مشترك آنها برنقطهٔ تماس خواهد بود.

معمولاً اجسام را به‌صورت کره‌هایی صیقلی درنظر می‌گیرند. بنابراین عملی که بریکدیگر وارد می‌کنند در امتداد خطی است که مراکز کره‌ها را به‌هم وصل می‌کند.

وقتی که جهت حرکت درامتداد عمود مشترك برنقطهٔ تماس باشد، برخورد را مستقیم گویند.

وقتی که جهت حرکت یکی، یا هردو، در امتداد عمود مشترك نباشد، برخورد را مایل گویند.

فرض می‌کنیم که دو جسم به‌جرمهای m_1 و m_2 به‌ترتیب با تندیهای u_1 و u_2 حرکت می‌کنند، وبا یکدیگر به‌طور مستقیم برخورد می‌کنند.

اگر v_1 و v_2 تندیهای آنها بعد از برخورد باشد، برطبق اصل اندازهٔ حرکت می‌توان نوشت:

$$m_1v_1+m_2v_2=m_1u_1+m_2u_2 \qquad (1)$$

در حالتهایی که اجسام پس از برخورد با یکدیگر باقی می‌مانند، $v_1=v_2$ خواهد بود و فقط یك معادله برای تعیین این تندی کافی است.

وقتی که اجسام پس‌ازبرخورد از یکدیگرجدا می‌شوند برای تعیین v_1 و v_2 تنها این معادله کافی نیست.

آنچه را باید انتظار داشت این است که اندازه‌های v_1 و v_2 به‌مادهٔ اجسام بستگی خواهند داشت و دراین حالت اصل اندازهٔ حرکت را نمی‌توان به‌کار برد.

برای محاسبهٔ اثر کشسانی‌اجسام راهی وجود ندارد، وما مجبوریم که متکی به‌نتایج تجربی بشویم. نیوتون دربارهٔ به‌عقب برگشتن اجسام کشسان به طور تجربی بررسیهایی کرد. نتایج این آزمایشها در قانون زیر بیان شده است.

۱۲۰۵. قانون تجربی نیوتون

وقتی که دو جسم که از مواد معینی ساخته شده‌اند به‌طور مستقیم با یکدیگربرخورد کنند،

تندی نسبی بعد از برخورد با تندی نسبی قبل از برخورد نسبت ثابتی دارد و جهتهای آنها مخالف یکدیگر است. اگر اجسام به‌طور مایل با یکدیگر برخورد کنند، بازهم همین نتایج برای مؤلفه‌های تندی در امتداد عمود مشترك وجود دارد.

پس، درحالت برخورد مستقیم، اگر u_1 و u_2 تندیهای قبل از برخورد، و v_1 و v_2 تندیهای آنها بعد ازبرخورد باشد، که همهٔ آنها دریك جهت و در جهت برخورد اندازه‌گیری شده‌اند، خواهیم داشت:

$$\frac{v_1-v_2}{u_1-u_2}=-e$$

که درآن e ثابت مثبتی است که بستگی به‌ماده‌ای داردکه اجسام ازآن ساخته شده‌اند، و آن را ضریب بازگشت (وگاهی ضریب‌کشسانی) می‌گویند.

بنابراین از این قانون، معادلهٔ دومی به‌دست می‌آوریم:

$$v_1-v_2=-e(u_1-u_2) \qquad (۲)$$

به‌کمك این معادله ومعادلهٔ (۱)(۱۱.۵) می‌توانیم v_1 و v_2 را پیداکنیم.

مقدار e به‌طور قابل‌توجهی برای اجسام مختلف متفاوت است؛ برای گلوله‌های شیشه‌ای برابر ۰/۹۰، عاج ۰/۸ و سرب درحدود ۰/۲ است.

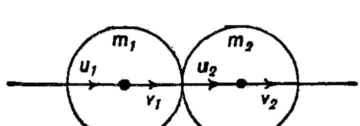
اجسامی راکه برای آنها $e=0$ است، ناکشسان می‌گویند، و اجسامی را که برای آنها $e=1$ است کشسان کامل گویند.

یادداشت. قانون نیوتون، مانند بسیاری قوانین دیگر، دقیقاً درست نیست. مقدار e برای اجسام معین در تندیهای بزرگ به‌آهستگی تغییر می‌کند، و درهرحالت این‌قانون را باید فقط به‌عنوان یك قانون تقریبی درنظرگرفت.

۱۳.۵. برخورد مستقیم دوکره

فرض می‌کنیم m_1 و m_2 دوجرم باشندکه تندیهای آنها قبل از برخورد به‌ترتیب u_1 و u_2 و بعد از برخورد v_1 و v_2 و e ضریب بازگشت باشد.

جهت تندیها مطابق شکل ۵ـ۶ نمایش داده شده‌اند.



شکل ۵ـ۶

بنابراین مطابق آنچه در بالا گفته شد، برطبق اصل اندازهٔ حرکت، داریم

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2 \qquad (1)$$

و برطبق قانون نیوتون داریم

$$v_1 - v_2 = -e(u_1 - u_2) \qquad (2)$$

رابطهٔ (۲) را در m_2 ضرب می‌کنیم وحاصل را با رابطهٔ (۱) جمع می‌کنیم:

$$(m_1 + m_2)v_1 = (m_1 - em_2)u_1 + m_2(1+e)u_2$$

رابطهٔ (۲) را در m_1 ضرب می‌کنیم وحاصل را از رابطهٔ (۱) کم می‌کنیم:

$$(m_1 + m_2)v_2 = m_1(1+e)u_1 + (m_2 - em_1)u_2$$

این دو معادله اندازه‌های v_1 و v_2 را به‌دست می‌دهند.

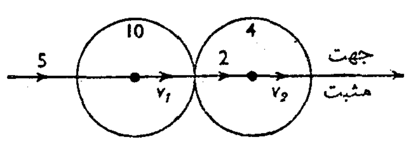
اگریکی از دو کره، مثلاً m_2، در ابتدا در جهتی مخالف جهت m_1 حرکت کند، علامت u_2 درهریك از معادله‌های (۱) و (۲) منفی خواهد بود.

مشخص کردن دقیق جهتهای v_1 و v_2 دارای اهمیت بسیار است. معمولاً جهت حرکت را از چپ به‌راست جهت مثبت انتخاب می‌کنیم وسپس فرض می‌کنیم که v_1 و v_2 هردو در این جهت هستند.

اگر یکی ازآنها، در واقع درجهت مخالف باشد، مقداری که برای آن به‌دست می‌آوریم دارای علامت منفی خواهد بود.

در نوشتن معادلهٔ (۲) باید دقت بسیارکرد که در هردو طرف تندیهای همردیف را از یکدیگرکم کرد. بهتر است نموداری رسم شود وجهت مثبت و جهتهای تندیهای هردو جسم به‌وضوح درآن نمایش داده شود.

مثال ۱: گلوله‌ای به جرم ۱۰ kg با تندی ۵ m/s حرکت می‌کند و به‌گلولهٔ دیگری به‌جرم ۴ kg که درهمان جهت با تندی ۲ m/s حرکت می‌کند برخوردمی‌کند. اگر $e = \frac{1}{2}$ باشد، تندیهای بعد از برخورد را تعیین کنید.



شکل ۵-۷

حل : فرض می‌کنیم v_1 و v_2 به‌ترتیب تندیهای کره‌های ۱۰ کیلوگرمی و ۴ کیلوگرمی بعد از برخورد باشد. برطبق اصل اندازهٔ حرکت:

$$۱۰v_۱+۴v_۲=۱۰\times ۵+۴\times ۲=۵۸$$

وبرطبق قانون نیوتون:

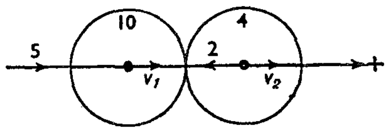
$$v_۱-v_۲=-\frac{۱}{۲}(۵-۲)=-\frac{۳}{۲}$$

$$\therefore \qquad ۱۴v_۱=۵۲ \quad \text{یا} \quad v_۱=۳\frac{۵}{۷}\,\mathrm{m/s}$$

$$\text{و} \qquad ۱۴v_۲=۷۳ \quad \text{یا} \quad v_۲=۵\frac{۳}{۱۴}\,\mathrm{m/s}$$

مثال ۲: اگرگلولهٔ ۴ کیلوگرمی مسئلهٔ قبل درجهت مخالف گلولهٔ ۱۰ کیلوگرمی حرکت می‌کرد، تندیهای بعد از برخورد را پیداکنید.

حل :



شکل ۵-۸

دراین حالت معادلات چنین خواهند شد:

$$۱۰v_۱+۴v_۲=۱۰\times ۵-۴\times ۲=۴۲$$

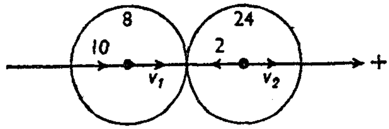
$$\text{و} \qquad v_۱-v_۲=-\frac{۱}{۲}(۵+۲)=-۳/۵$$

$$\therefore \qquad ۱۴v_۱=۲۸ \quad \text{یا} \quad v_۱=۲\,\mathrm{m/s}$$

$$\text{و} \qquad ۱۴v_۲=۷۷ \quad \text{یا} \quad v_۲=۵/۵\,\mathrm{m/s}$$

مثال ۳: گلوله‌ای به‌جرم ۸ kg که با تندی ۱۰ m/s حرکت می‌کند به طور مستقیم با گلولهٔ دیگری به‌جرم ۲۴ kg که با تندی ۲ m/s در جهت مخالف حرکت می‌کند برخورد می‌نماید. اگر $e=\frac{۱}{۲}$ باشد، تندیهای بعد از برخورد را تعیین کنید.

حل : دراین مسئله معادله‌ها عبارت خواهند بود از:



شکل ۵-۹

$$۸v_۱+۲۴v_۲=۸\times ۱۰-۲۴\times ۲=۳۲$$

و

$$v_۱-v_۲=-\frac{۱}{۲}(۱۰+۲)=-۶$$

$$\therefore \quad ۳۲v_۱=۳۲-۱۴۴=-۱۱۲$$

$$\therefore \quad v_۱=-\frac{۱۱۲}{۳۲}=-۳/۵\ \mathrm{m/s}$$

$$\therefore \quad ۳۲v_۲=۳۲+۴۸=۸۰$$

$$\therefore \quad v_۲=\frac{۸۰}{۳۲}=۲/۵\ \mathrm{m/s}$$

علامت منفی $v_۱$ نشان می‌دهد که چنانچه فرض‌کنیم جهت مثبت حرکت از چپ به‌راست است و $v_۱$ در این‌جهت است، جهت حرکت‌گلولهٔ ۸ کیلوگرمی، یعنی جهت $v_۱$، عکس‌جهت مفروض است. چون $v_۲$ مثبت است، گلولهٔ ۲۴ کیلوگرمی پس‌از برخورد ازچپ به‌راست حرکت خواهدکرد. بنابراین جهت حرکت آن نیز معکوس خواهد شد.

مثال ۴: سه‌کرهٔ صیقلی A، B و C به‌ترتیب به‌جرمهای $۳m$، m و $۲m$ روی میزی صیقلی قرار دارند به‌طوری‌که مراکز آنها در یك خط راست است. A پرتاب می‌شود تا با B برخوردکند. نشان دهید که اگر ضریب بازگشت برابر $\frac{۱}{۲}$ باشد، B پس از اولین برخورد با C به‌حالت سکون درخواهد آمد، و سپس با دومین برخورد B با C برخوردها قطع خواهد شد.

حل: فرض می‌کنیم تندی اولیهٔ A برابر u، وتندیهای A وB پس ازبرخورد به‌ترتیب $v_۱$ و $v_۲$ باشند. در این صورت،

$$۳mv_۱+mv_۲=۳mu$$

و
$$v_1 - v_2 = -\frac{1}{2}u$$

$$\therefore \quad 4v_1 = 2.5u$$

$$\therefore \quad v_1 = \frac{5}{8}u$$

نیز
$$4v_2 = 4.5u$$

$$\therefore \quad v_2 = \frac{9}{8}u$$

B سریعتر از A حرکت خواهد کرد و با C برخورد می‌کند. اگر v_2' و v_3' تندیهای B و C پس از برخورد باشند،

داریم
$$mv_2' + 2mv_3' = \frac{9}{8}mu$$

و
$$v_2' - v_3' = -\frac{1}{2} \times \frac{9}{8}u$$

$$\therefore \quad 3v_2' = 0$$

یعنی B ساکن خواهد شد.

نیز
$$3v_3' = \left(\frac{9}{8} + \frac{9}{16}\right)u = \frac{27}{16}u$$

$$\therefore \quad v_3' = \frac{9}{16}u$$

A پس از اولین برخورد با تندی $\frac{5}{8}u$ به‌حرکت خود ادامه می‌دهد و پس از آنکه B ساکن شد، دوباره با B برخورد می‌کند. اگر V_1 و V_2 تندیهای A و B پس از برخورد باشند،

$$3mV_1 + mV_2 = 3m \times \frac{5}{8}u$$

و
$$V_1 - V_2 = -\frac{1}{2} \times \frac{5}{8}u$$

از این معادله‌ها V_1 و V_2 به‌دست می‌آیند:

$$V_1=\frac{25}{64}u$$

و
$$V_2=\frac{45}{64}u$$

تندی اخیر B بزرگتر از تندی C $\left(\frac{9}{16}u\right)$ است، بنابراین B دوباره خودش را به C می‌رساند و با آن برخورد می‌کند. اگر V'_2 و V'_3 تندیهای بعد از برخورد باشند، داریم

$$mV'_2+2mV'_3=\frac{45}{64}mu+\frac{9}{16}\times 2mu=\frac{117}{64}mu$$

و
$$V'_2-V'_3=-\frac{1}{2}\left(\frac{45}{64}-\frac{9}{16}\right)u=-\frac{9}{128}u$$

از این معادله‌ها نتایج زیرحاصل می‌شود:

$$V'_3=\frac{81}{128}u \quad \text{و} \quad V'_2=\frac{36}{64}u$$

اکنون تندیهای A، B و C به‌ترتیب برابرند با $\frac{25}{64}u$ یا $\frac{50}{128}u$ و $\frac{36}{64}u$ یا $\frac{72}{128}u$ و $\frac{81}{128}u$ وهمگی در یك‌جهت هستند و دیگربرخوردی صورت نخواهد گرفت.

۱۴.۵ کاهش انرژی جنبشی در برخورد مستقیم

فرض می‌کنیم که تندیهای دوجرم m_1 و m_2 قبل و بعد از برخورد u_1 و u_2، v_1 و v_2 باشد و e ضریب بازگشت باشد.

مطابق قبل داریم،

$$m_1v_1+m_2v_2=m_1u_1+m_2u_2 \qquad (1)$$

و
$$v_1-v_2=-e(u_1-u_2) \qquad (2)$$

هردومعادله را به‌توان ۲ می‌رسانیم ومربع‌معادلهٔ دوم را در m_1m_2 ضرب می‌کنیم و حاصل را با مربع معادلهٔ اول جمع می‌کنیم. خواهیم داشت

$$(m_1^2+m_1m_2)v_1^2+m_2(m_2+m_1)v_2^2=(m_1u_1+m_2u_2)^2 \\ +e^2m_1m_2(u_1-u_2)^2$$

$$\therefore \quad m_1(m_1+m_2)v_1^2+m_2(m_2+m_1)v_2^2=(m_1u_1+m_2u_2)^2$$
$$+m_1m_2(u_1-u_2)^2+e^2m_1m_2(u_1-u_2)^2-m_1m_2(u_1-u_2)^2$$

$$\therefore \quad (m_1+m_2)(m_1v_1^2+m_2v_2^2)=(m_1+m_2)(m_1u_1^2+m_2u_2^2)$$
$$-m_1m_2(u_1-u_2)^2(1-e^2)$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2=\frac{1}{2}m_1u_1^2+\frac{1}{2}m_2u_2^2$$
$$-\frac{1}{2}\times\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}(u_1-u_2)^2(1-e^2)$$

اما $\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2$ انرژی جنبشی بعد از برخورد است، و حال آنکه $\frac{1}{2}m_1u_1^2+\frac{1}{2}m_2u_2^2$ انرژی جنبشی قبل از برخورد است.

بنابراین کاهش انرژی جنبشی برابر است با

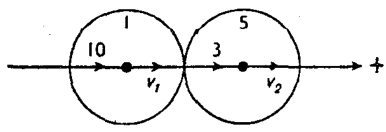
$$\frac{1}{2}\times\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}(u_1-u_2)(1-e^2)$$

مشاهده می‌شود که همیشه، جز وقتی که $e=1$ یعنی وقتی که این جمله صفر می‌شود، کاهش انرژی وجود دارد.

دربسیاری از مسائل عددی ساده‌تر آن است که تندیهای بعد از برخورد را پیدا کنیم و سپس انرژی جنبشی بعد از برخورد را از انرژی جنبشی قبل از برخورد کم کنیم. روشی که دربالا ذکر شد، کوتاهترین راه برای تعیین مقدار کاهش انرژی درحالت کلی است.

مثال ۱: کره‌ای به‌جرم ۱ kg با تندی ۱۰ m/s حرکت می‌کند و با کره‌ای دیگر به‌جرم ۵ kg که درهمان خط با تندی ۳ m/s حرکت می‌کند برخورد می‌نماید. کاهش انرژی جنبشی ضمن برخورد را تعیین کنید ونشان دهیدکه جهت حرکت کرهٔ اول معکوس می‌شود. (ضریب بازگشت ۰/۷۵ است).

حل :



شکل ۵-۱۰

اگر v_1 و v_2 برحسب m/s به‌ترتیب تندیهای کره‌های ۱ کیلوگرمی و ۵ کیلوگرمی بعد از برخورد باشد،

$$v_1+5v_2=10+15=25$$

و
$$v_1-v_2=-\frac{3}{4}(10-3)=-\frac{21}{4}$$

$$\therefore \quad 6v_1=25-\frac{105}{4} \quad \text{یا} \quad v_1=-\frac{5}{24}$$

و
$$6v_2=25+\frac{21}{4} \quad \text{یا} \quad v_2=\frac{121}{24}$$

مقدار v_1 منفی است و نشان می‌دهد که جهت حرکت کرهٔ اول معکوس‌شده است. باید به‌خاطر داشت که جهت حرکت درمقدار انرژی جنبشی تأثیری نمی‌کند. مقدار جبری v^2 چه v منفی باشد و چه مثبت باشد یکسان است.

انرژی جنبشی قبل از برخورد برابر است با

$$\frac{1}{2}\times 1\times 10^2+\frac{1}{2}\times 5\times 3^2=50+\frac{45}{2}=72/5\ \mathrm{J}$$

انرژی جنبشی بعد از برخورد برابر است با

$$\frac{1}{2}\times 1\times\frac{25}{24^2}+\frac{1}{2}\times 5\times\frac{121^2}{24^2}=\frac{5}{2\times 24^2}(5+14641)$$
$$=63/6\ \mathrm{J}$$

کاهش انرژی

$$=72/5-63/6=8/9\ \mathrm{J}$$

مثال ۲: دوجرم m و n دریك خط مستقیم حرکت می کنند. ثابت کنید که انرژی جنبشی آنها برابر است با

$$\frac{1}{2}(m+n)V^2+\frac{1}{2}\times\frac{mn}{m+n}v^2$$

که درآن V تندی مرکز جرم آنها، و v تندی نسبی آنها نسبت به‌یکدیگر است. اگرمیان این‌جرمها برخورد مستقیم روی دهد، ثابت کنید که کاهش انرژی‌جنبشی آنها برابرخواهد بود با

$$\frac{۱}{۲}\times\frac{mn}{m+n}(۱-e^۲)v^۲$$

که درآن e ضریب بازگشت است.

حل : فرض می‌کنیم که $u_۱$ و $u_۲$ تندیهای دو جرم m و n باشد. V تندی مرکز جرم آنها چنین است:

$$V=\frac{mu_۱+nu_۲}{m+n}$$

و تندی نسبی آنها $v=u_۱-u_۲$ خواهد بود.
اگر انرژی جنبشی آنها E باشد،

$$E=\frac{۱}{۲}mu_۱^۲+\frac{۱}{۲}nu_۲^۲$$

$$\therefore\quad (m+n)E=\frac{۱}{۲}m^۲u_۱^۲+\frac{۱}{۲}n^۲u_۲^۲+\frac{۱}{۲}mn(u_۱^۲+u_۲^۲)$$

$$=\frac{۱}{۲}(mu_۱+nu_۲)^۲+\frac{۱}{۲}mn(u_۱^۲+u_۲^۲)-mnu_۱u_۲$$

$$=\frac{۱}{۲}(mu_۱+nu_۲)^۲+\frac{۱}{۲}mn(u_۱-u_۲)^۲$$

$$\therefore\quad (m+n)E=\frac{۱}{۲}(m+n)^۲V^۲+\frac{۱}{۲}mnv^۲$$

$$\therefore\quad E=\frac{۱}{۲}(m+n)V^۲+\frac{۱}{۲}\times\frac{mn}{m+n}v^۲$$

اما برخورد میان دوجرم برتندی مرکز جرم اثر ندارد، و بنابراین جملهٔ اول بدون تغییر باقی می‌ماند. برطبق قانون نیوتون تندی v در e ضرب می‌شود و جهت آن معکوس می‌گردد، یعنی برابر $-ev$ می‌شود.
پس جملهٔ دوم پس از برخورد،

$$\frac{۱}{۲}\times\frac{mn}{m+n}e^۲v^۲$$

می‌شود و کاهش انرژی جنبشی برابر خواهد بود با

$$\frac{۱}{۲}\times\frac{mn}{m+n}v^۲(۱-e^۲)$$

تمرین ۳.۵

۱- کره‌ای به‌جرم $6\ \mathrm{kg}$ که با تندی $4\ \mathrm{m/s}$ حرکت می‌کند به‌کرهٔ دیگری که جرم آن $4\ \mathrm{kg}$ است و درهمان جهت با تندی $2\ \mathrm{m/s}$ حرکت می‌کند برخورد می‌نماید. اگر $e=\frac{1}{4}$ باشد، تندیهای بعد از برخورد را تعیین کنید.

۲- گلوله‌ای به‌جرم $10\ \mathrm{kg}$ که با تندی $8\ \mathrm{m/s}$ حرکت می‌کند به‌گلولهٔ دیگری به‌جرم $8\ \mathrm{kg}$ که در همان جهت با تندی $5\ \mathrm{m/s}$ حرکت می‌کند برخورد می‌نماید. اگر $e=\frac{1}{2}$ باشد، تندیهای بعد از برخورد را تعیین کنید.

۳- گلوله‌ای به‌جرم $10\ \mathrm{kg}$ که باسرعت $8\ \mathrm{m/s}$ حرکت می‌کند به‌طور مستقیم با گلولهٔ دیگری به‌جرم $8\ \mathrm{kg}$ که با سرعت $4\ \mathrm{m/s}$ درخلاف جهت آن حرکت می‌کند برخورد می‌نماید. اگر $e=\frac{1}{3}$ باشد، تندیهای بعد از برخورد را تعیین کنید.

۴- گلوله‌ای به‌جرم m که با سرعت $7\ \mathrm{m/s}$ حرکت می‌کند به‌گلولهٔ دیگری به‌جرم $2m$ که در همان جهت با سرعت $1\ \mathrm{m/s}$ حرکت می‌کند برخورد می‌نماید. اگر $e=\frac{3}{4}$ باشد، نشان دهید که گلولهٔ اول پس از برخورد ساکن خواهد شد.

۵- اگر دو کرهٔ کاملاً کشسان که جرمهای متساوی دارند با هم برخورد نمایند، نشان دهید که تندیهای آنها با یکدیگر عوض می‌شوند.

۶- دو کره به‌جرمهای m و m' و ضریب بازگشت e به‌طور مستقیم با یکدیگر برخورد می‌کنند. ثابت کنید که اندازهٔ حرکتی که از یك کره به‌کرهٔ دیگر منتقل می‌شود برابر است با

$$\frac{mm'}{m+m'}(1+e)(\text{تندی نسبی قبل از برخورد})$$

۷- گلوله‌ای به‌جرم m_1 که با تندی v_1 حرکت می‌کند به‌طور مستقیم با گلولهٔ دیگری به‌جرم m_2، که به‌حال سکون است، برخورد می‌کند. و سپس گلولهٔ دوم به‌گلولهٔ سومی به‌جرم m_3 که آن هم درحال‌سکون است برخورد می‌کند. اگرضریب بازگشت زوج اول e و ضریب بازگشت زوج دوم e' باشد، تندیهای هرسه گلوله را درست بعد از این برخوردها تعیین کنید.

۸- کرههایی به‌جرمهای $60\ \mathrm{g}$ و $90\ \mathrm{g}$ در روی خط‌المرکزین خود به‌طرف یکدیگر با تندیهای $8\ \mathrm{m/s}$ و $10\ \mathrm{m/s}$ حرکت می‌کنند، و ضریب بازگشت برابر $\frac{3}{4}$ است. تندیهای آنها را پس از برخورد، و مقدار انرژی جنبشی منتقل شده را دراین

برخورد تعیین کنید.

۹ ـ اگر تندیهای دو کره قبل از برخورد مستقیم معلوم باشند، نشان دهید که ضربه‌هایی که هر کره دریافت می‌دارد با ضریب $\frac{mm'(1+e)}{(m+m')}$ تغییر می‌کند که در آن e ضریب بازگشت و m و m' جرمهای دو کره است.

۱۰ـ دو نقطهٔ مادی در یك خط مستقیم حرکت می‌کنند. انرژی جنبشی آنها را برحسب جرمهایشان بیان کنید. نیز برحسب تندی نسبی آنها، نیز برحسب تندی مرکز ثقل بیان کنید وسپس، یا برعکس، نشان دهید که اگر نقاط مادی ناکشسان باشند، همیشه به‌وسیلهٔ برخورد آنها، انرژی جنبشی کاهش می‌یابد.

دو نقطهٔ مادی به‌جرمهای m و $14m$ به‌ترتیب باتندیهای $6u$ و u حرکت‌می‌کنند. ضریب بازگشت میان آنها برابر ۰٫۵ است. نشان دهید که، بعد از برخورد، انرژی جنبشی که یکی ازآنها به‌دست می‌آورد نصف مقداری‌است که دیگری ازدست‌می‌دهد.

۱۱ـ گلوله‌ای به‌جرم ۴ kg که با تندی ۲۰ m/s حرکت می‌کند به گلولهٔ دیگری به‌جرم ۳ kg که در همان جهت با تندی $15\frac{1}{3}$ m/s حرکت می‌کند برخورد می‌نماید. ۵ ثانیه پس از برخورد، جرم ۳ کیلوگرمی به‌مانعی برخورد می‌کند وساکن‌می‌شود. به‌فرض‌آنکه ضریب بازگشت میان دوجرم برابر $\frac{1}{2}$ باشد، تعیین کنید چه مدت‌پس‌از ساکن شدن جرم ۳ کیلوگرمی جرم دیگر دوباره با آن برخورد می‌کند.

۱۲ـ جسمی به‌جرم ۱۰ Mg که با سرعت ۲٫۴ m/s حرکت می‌کند به‌جسم دیگری به‌جرم ۵ Mg که ساکن است برخورد می‌کند. پس از برخورد سرعت جسم دوم نسبت به‌جسم اول برابر ۰٫۶ m/s می‌شود. کاهش انرژی جنبشی براثر برخوردرا تعیین کنید.

۱۳ـ کره‌ای به‌جرم ۳ kg با تندی ۷ m/s حرکت می‌کند. این کره به‌طور مستقیم با کرهٔ دیگری به‌جرم ۵ kg که به‌حال سکون‌است برخورد می‌کند. پس ازبرخوردتندیهای دو کره به‌نسبت ۲ و ۳ است. تندیهای بعد از برخورد و کاهش انرژی جنبشی را تعیین کنید.

۱۴ـ گلوله‌های A، B و C به‌جرمهای $3m$، $2m$ و $2m$، وشعاعهای متساوی‌برروی میزی صیقلی قرار دارند، به طوری که مراکز آنها بریك خط مستقیم واقع است. ضریب برخورد میان آنها برابر $\frac{1}{4}$ است. نشان دهید که اگر A با تندی V به B برخورد کند، سه‌برخورد وجودخواهد داشت، وتندیهای نهایی عبارت خواهندبوداز

$$\frac{(۵۰, ۵۷, ۶۰)}{۱۲۸} V$$

۱۵- دو واگن که جرم آنها به‌ترتیب $5\,\mathrm{Mg}$ و $3\,\mathrm{Mg}$ است برروی ریلهای یك خط‌آهن واقع هستند. اگر واگن سنگینتر با واگن سبکتر، که ساکن است، باسرعت $1/5\,\mathrm{m/s}$ برخورد کند وتندی‌نسبی واگن سبکتر نسبت به‌واگن سنگینتر، پس از جدا شدن آنها از یکدیگر برابر $0/9\,\mathrm{m/s}$ باشد، سرعت واقعی دو واگن‌را پس ازجداشدن آنها از یکدیگر تعیین کنید، و انرژی جنبشی را که براثر برخوردکاهش یافته است حساب کنید.

۱۶- A ، B و C سه کرهٔ متشابه کوچکند که به‌حال سکون، در داخل لولهٔ مستقیم و صیقلی و افقی، قرار دارند. A را به‌حرکت درمی‌آوریم تا با B برخوردکند. نشان دهیدکه پس‌ازآنکه B با C برخوردکرد، A دوباره با B برخورد خواهدکرد، و نشان دهیدکه اگر e ضریب بازگشت میان کره‌ها کمتر از $3-\sqrt{8}$ باشد سه کره‌دیگر برخوردی نخواهندکرد.

۱۷- سه کرهٔ متشابه کوچك A ، B و C در داخل لولهٔ مستقیم و صیقلی و افقی به‌حال سکون قرار دارند. ضریب بازگشت میان هردوکره برابر $0/5$ است. A با تندی u به‌طرف B پرتاب می‌شود.
تندیهای سه کره را پس‌ازآنکه B با C برخورد کرد و A برای دومین‌بار با B برخورد نمود تعیین کنید و نشان دهیدکه دیگر برخوردی وجود نخواهد داشت.

۱۸- واگنی به جرم $5\,\mathrm{Mg}$ با سرعت $1/5\,\mathrm{m/s}$ حرکت می‌کند و با واگن دیگری به‌جرم $10\,\mathrm{Mg}$ که برروی همان خطوط آهن به‌حال سکون است برخورد می‌کند. اگر واگن دوم پس از برخورد با سرعت $0/6\,\mathrm{m/s}$ حرکت‌کند، سرعت واگن اول را پس ازبرخورد تعیین‌کنید و نیزمقدارانرژی جنبشی راکه براثربرخوردکاهش می‌یابد حساب‌کنید.

۱۹- تندیهای دوکره قبل از برخورد ازنظربزرگی وجهت با طولهای OP و OQ و پس از برخورد با طولهای Op و Oq نشان داده می‌شوند (O ، P ، Q ، p و q بریك خط راست واقعند).
ثابت‌کنیدکه نسبت Qq به Pp برابر است با نسبت جرمها، ونسبت QP به qp برابراست با ضریب بازگشت.

۲۰- دوکره به‌طور مستقیم با یکدیگر برخورد می‌کنند، وضربهٔ میان آنها برابر R است. درست پیش از برخورد، تندی مرکز ثقل مشترك آنها برابر U ، وتندی نسبی کره

سریعتر نسبت به‌مرکز ثقل برابر $U_۱$ است. نشان دهید که کاهش انرژی جنبشی که به‌وسیلهٔ این کره‌ها روی می‌دهد برابر است با

$$\frac{۱}{۲}R[۲U+(۱-e)U_۱]$$

که درآن e ضریب بازگشت میان کره‌هاست.

۲۱- دو کرهٔ صیقلی به‌جرمهای m و m' به‌طورمستقیم با یکدیگر برخورد می‌کنند. تندی نسبی آنها، درست پیش از برخورد، برابر v وضریب بازگشت برابر e است.
ثابت کنید که کاهش انرژی جنبشی ناشی از برخورد برابر است با

$$\frac{۱}{۲}\times\frac{mm'v^۲(۱-e^۲)}{m+m'}$$

۲۲- گلوله‌ای به گلولهٔ دیگر که جرم‌آن m برابر است و درهمین جهت با تندی $\frac{۱}{n}$ برابر تندی این گلوله حرکت می‌کند برخورد می‌نماید. اگر نتیجهٔ برخورد منجربه‌سکون گلولهٔ اول شود ثابت کنید که ضریب بازگشت برابر است با $\frac{m+n}{(mn-m)}$، و m باید بزرگتر از $\frac{n}{(n-۲)}$ باشد.

۲۳- دو کرهٔ کاملاً کشسان به‌وزنهای W و $۲W$، به‌طور مستقیم با یکدیگر برخورد می‌کنند. درست قبل از برخورد، کرهٔ سبکتر با تندی ۹ m/s حرکت می‌کند و کرهٔ سنگینتر با تندی ۲ m/s درجهت مخالف حرکت می‌کند. کرهٔ کوچکتر پس‌از برخورد ساکن می‌شود. ضریب بازگشت، وتندی کرهٔ بزرگتر را پس از برخورد تعیین کنید.

۲۴- سه کره با جرمهای متساوی بریك خط مستقیم واقعند. اگر به کرهٔ اول، تندیی برابر u داده‌شود، نشان‌دهید که پس‌ازآنکه‌دوبرخورد روی‌داد، تندیهای کره‌ها عبارتنداز:

$$\frac{۱}{۲}(۱-e)u \text{ ، } \frac{۱}{۴}(۱-e^۲)u \text{ و } \frac{۱}{۴}(۱+e)^۲u$$

که درآن e ضریب بازگشت است.

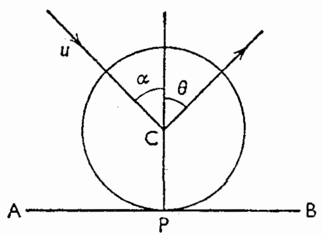
۲۵- گلوله‌ای سقوط می‌کند. یك ثانیه پس ازسقوط با گلولهٔ دیگری که دارای همان‌جرم است و با تندی ۱۵ m/s به طرف بالا حرکت می‌کند برخورد می‌نماید. تندیهای هردوگلوله را پس از برخورد تعیین کنید. ضریب بازگشت را برابر $\frac{۳}{۴}$ بگیرید.
درصدکاهش انرژی راکه ناشی از برخورد است تعیین کنید.

۲۶- دو کره به‌جرمهای $m_۱$ و $m_۲$ که با تندیهای $v_۱$ و $v_۲$ دریك جهت حرکت می‌کنند،

به‌طور مستقیم برخورد می‌کنند و به‌عقب برمی‌گردند. بزرگی اندازهٔ حرکتی را که درضمن برخورد میان کره‌ها منتقل شده است، هنگامی‌که ضریب بازگشت برابر e است تعیین کنید. اگر تندیهای پس از برخورد u_1 و u_2 باشد، نشان دهیدکه اگر $v_1+v_2+u_1+u_2=0$ باشد، هردو کره به‌یك اندازه انرژی از دست می‌دهند.

۱۵.۵. برخورد یك‌کرهٔ صیقلی با یك صفحهٔ ثابت صیقلی

فرض می‌کنیم AB (شکل ۵-۱۱) صفحهٔ ثابت، و P نقطهٔ برخوردکره با آن باشد. در این صورت اگر C مرکز کره باشد، CP عمود برصفحه درنقطهٔ P است. فرض می‌کنیم تندی کره‌در برخورد برابر u است و جهت‌حرکت‌مرکزآن با CP زاویه‌ای برابر α می‌سازد.



شکل ۵-۱۱

چون صفحه وکره صیقلی هستند، نیرویی به‌موازات صفحه وجود ندارد؛ پس مؤلفهٔ تندی کره دراین جهت، یعنی $u \sin\alpha$، بدون تغییر است.

برطبق قانون تجربی نیوتون، تندی نسبی در امتداد قائم پس از برخورد $-e$ برابر مقداری است‌که درهمین جهت قبل از برخورد اندازه‌گیری شده است.

بنابراین اگر n تندی قائم پس ازبرخورد باشد،

$$n-0=-e(u\cos\alpha-0)$$

$$\therefore \qquad n=-eu\cos\alpha$$

یعنی تندی قائم تغییرجهت می‌دهد و اندازهٔ آن e برابر می‌شود.

بنابراین تندی پس از برخورد دارای دومؤلفه است، $u\sin\alpha$ به‌موازات AB و $eu\cos\alpha$ به‌موازات قائم PC.

تندی برایند پس از برخورد برابر خواهد بود با $u\sqrt{\sin^2\alpha+e^2\cos^2\alpha}$. اگر θ زاویهٔ میان جهت حرکت وخط قائم باشد،

$$tg\theta=\frac{u\sin\alpha}{eu\cos\alpha}=\frac{1}{e}tg\alpha$$

یا
$$cotg\theta = e\, cotg\, \alpha$$

ضربهٔ وارد برصفحه که ناشی از برخورد است به‌وسیلهٔ تغییر اندازهٔ حرکت درامتداد قائم اندازه‌گیری می‌شود. اگر m جرم‌کره باشد، ضربه برابر است با

$$mu \cos\alpha + meu \cos\alpha = mu(1+e)\cos\alpha$$

اگر $e = 1$ باشد، تندی پس از برخورد برابر u است، و $\theta = \alpha$ است، یعنی کره پس از برخورد طوری برمی‌گردد که زاویهٔ انعکاس برابر زاویهٔ تابش باشد.

اگر $e = 0$ باشد، پس از برخورد در امتداد قائم تندیی وجود نخواهد داشت، وکره در امتداد صفحه با تندی $u \sin\alpha$ می‌لغزد.

اگر برخورد مستقیم باشد، تندی، به موازات صفحه، دارای مؤلفه نخواهد بود و کره در امتداد قائم با تندی eu برمی‌گردد.

مثال ۱: گلوله‌ای که با تندی ۲۰ m/s حرکت می‌کند با صفحهٔ صیقلی ثابتی برخورد می‌کند. امتداد حرکت با صفحه زاویهٔ ۳۰ درجه می‌سازد. اگرضریب بازگشت $\frac{3}{5}$ باشد، تندی و جهت حرکت گلوله را پس از برخورد پیداکنید.

حل: مؤلفهٔ تندی به‌موازات صفحه $20 \cos 30°$ یا $10\sqrt{3}$ m/s است واین براثر برخورد تغییر نمی‌کند.

مؤلفهٔ تندی عمود برصفحه $20 \sin 30°$ یا ۱۰ m/s است و این براثر برخورد تغییرجهت می‌دهد و $\frac{2}{5}$ برابر می‌شود.

بنابراین مؤلفه‌های تندی پس از برخورد، در امتداد وعمود برصفحه عبارتند از $10\sqrt{3}$ و ۴ متر برثانیه.

اگر برایند تندی V متر برثانیه باشد،

$$V^2 = 300 + 16 = 316$$

$$\therefore \quad V = \sqrt{316} = 17/7$$

جهت آن با صفحه زاویه‌ای می‌سازد که تانژانت آن برابر $\frac{4}{10\sqrt{3}}$ یا $\frac{2\sqrt{3}}{15}$ است.

مثال ۲: نقطه‌ای مادی ازارتفاع h برروی صفحهٔ‌افقی ثابتی سقوط می‌کند. اگر e ضریب بازگشت باشد، نشان دهیدکه کل مسافتی راکه نقطهٔ مادی طی می‌کند و دیگر

پس از برخورد باصفحه به‌عقب برنمی‌گردد برابر است با $\frac{(1+e^2)h}{(1-e^2)}$ و مدت زمانی‌که برای آن صرف می‌کند برابر است با:

$$\frac{1+e}{1-e}\times\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

حل : فرض می‌کنیم‌که u تندی نقطهٔ‌مادی درنخستین برخورد با صفحه باشد، بنا براین

$$u^2=2gh$$

نقطهٔ مادی بـا تندی eu برمی‌گردد. تندیی‌که بـا آن دوباره به‌صفحه برخورد می‌کند برابر eu است وتندی برگشت پس ازدومین برخورد e^2u است. به‌طریق مشابه تندیهای برگشت پس از سومین، چهارمین... بـرخورد برابرند با e^3u ، e^4u ، ... .

ارتفاعی‌که نقطهٔ مادی پس از نخستین برگشت بالا می‌رود برابر است با

$$\frac{(eu)^2}{2g}$$

وپس از دومین برگشت،

$$\frac{(e^2u)^2}{2g}$$

وهمین‌طور تاآخر

نیز $u^2=2gh$ ، بنابراین فاصله‌هـای مزبور برابرند با e^2h ، e^4h ، ... . پس کل مسافتی‌که نقطهٔ مادی می‌پیماید برابر است با

$$h+2(e^2h+e^4h+\dots \text{(تا بینهایت)}$$

$$=h+2h\frac{e^2}{1-e^2}=h\frac{1+e^2}{1-e^2}$$

مدت زمان پرواز پس از نخستین برخورد برابر است با $\frac{2eu}{g}$ ، پس از دومـیـن برخـورد $\frac{2e^2u}{g}$ است و همین‌طور تاآخر، وزمان پرواز اولیه برابر است با

$$\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

پس، کل زمان حرکت برابر است با

$$\sqrt{\frac{2h}{g}}+\frac{2u}{g}(e+e^2+e^3+ \text{... تا بینهایت})$$

$$=\sqrt{\frac{2h}{g}}+2\sqrt{\frac{2h}{g}}(e+e^2+ \dots)$$

$$=\sqrt{\left(\frac{2h}{g}\right)}\left(1+2\times\frac{e}{1-e}\right)=\sqrt{\frac{2h}{g}}\times\frac{1+e}{1-e}$$

مثال ۳: کره‌ای به‌جرم m برروی میزی‌صیقلی میان کره‌ای به‌جرم m' وصفحهٔ قائم‌ثابتی قرار دارد. این کره به‌طرف کرهٔ دیگر پرتاب می‌شود. نشان دهیدکه اگر ضریب بازگشت میان دوکره ومیان m وصفحه درهرحالت برابر $\frac{3}{5}$ باشد، درصورتی که $m'=15m$ باشد، m در دومین برخورد خود با m' ساکن خواهد شد.

حل : فرض می‌کنیم‌که u تندی پرتاب m، و v_1 و v_2 تندیهای m و m' پس از برخورد باشند. دراین صورت

$$mv_1+m'v_2=mu$$

و
$$v_1-v_2=-\frac{3}{5}u$$

$$\therefore \quad (m+m')v_1=u\left(m-\frac{3}{5}m'\right)$$

و
$$(m+m')v_2=\frac{8}{5}mu$$

این معادله‌ها با قراردادن $m'=15m$ چنین خواهند شد:

$$16mv_1=u(m-9m)=-8mu$$

$$\therefore \quad v_1=-\frac{1}{2}u$$

و
$$16mv_2=\frac{8}{5}mu$$

$$\therefore \quad v_2=\frac{1}{10}u$$

بنابراین تندی m تغییرجهت می‌دهد و با صفحه با تندی $\frac{۱}{۲}u$ برخورد می‌کند و با تندی

$$\frac{۳}{۵}\times\frac{۱}{۲}u \quad \text{یا} \quad \frac{۳}{۱۰}u$$

برمی‌گرددکه با این تندی امکان برخورد دوباره با m' را پیدا می‌کند. اگر V و V' تندیهای m و m' پس از دومین برخوردشان باشد،

$$mV+m'V'=\frac{۳}{۱۰}mu+\frac{۱}{۱۰}m'u$$

$$V-V'=-\frac{۳}{۵}\left(\frac{۲}{۱۰}\right)u=-\frac{۳}{۲۵}u$$

$$\therefore \quad (m+m')V=\frac{۳}{۱۰}mu+\frac{۱}{۱۰}m'u-\frac{۳}{۲۵}m'u$$

با قراردادن $m'=۱۵m$ داریم،

$$۱۶mV=\frac{۳}{۱۰}mu+\frac{۳}{۲}mu-\frac{۹}{۵}mu$$

$$=۰$$

بنابراین m ساکن خواهد شد.

تمرین ۴.۵

۱- گلوله‌ای ازارتفاع ۱۰ m برروی‌صفحهٔ افقی‌ثابتی‌سقوط می‌کند. ضریب‌بازگشت‌برابر $\frac{۱}{۵}$ است. ارتفاعی‌را که‌گلوله، پس‌از برخورد، تا آن ارتفاع بالا می‌رود، تعیین کنید، و مدت زمانی راکه طول می‌کشد تا دوباره به‌صفحه برسد به‌دست‌آورید. تندی بعداز دومین برگشت چقدر خواهد بود؟

۲- گلوله‌ای از ارتفاع ۱۰ m برروی صفحهٔ افقی ثابتی سقوط می‌کند. اگر تا ارتفاع ۶/۴ m برگردد، ضریب بازگشت را تعیین کنید.

۳- گلوله‌ای‌که با تندی ۱۲ m/s حرکت می‌کند با صفحهٔ صیقلی ثابتی طوری برخورد می‌کندکه جهت‌حرکتش‌با صفحه زاویهٔ ۳۰ درجه می‌سازد. اگرضریب بازگشت برابر $\frac{۱}{۲}$ باشد، بزرگی وجهت تندی‌گلوله را پس‌از برخورد تعیین کنید.

۴ ـ گلولـه‌ای از ارتفاع ۱۰ m روی سطح شیبداری می‌افتد. ضریب بازگشت برابر $\frac{۱}{۵}$ است. بزرگی و جهت تندی گلوله را پس از برخورد درحالتهای زیرتعیین کنید: شیب صفحه (الف) °۴۵، (ب) °۶۰ است.

۵ ـ گلولهٔ بیلیاردی به‌جرم ۲۱۰ g، هنگامی کـه با سرعت ۲/۴ m/s درجهتی که بـا باند، یعنی حـاشیهٔ لاستیکی دور میز بیلیارد، زاویهٔ °۳۰ می‌ساخت با آن برخورد کرد. اگر ضریب بـازگشت برابر $\frac{۷}{۸}$ باشد، کاهش انرژی جنبشی را کـه از برخورد پدید آمده است تعیین کنید.

۶ ـ مهره‌ای از ارتفاع ۴ m روی سنگی سقوط می‌کند و تـا ارتفاع ۳ m برمی‌گردد. ضریب بازگشت را تعیین کنید.

۷ ـ میز بیلیاردی به‌طول ۲/۴ m و به‌عرض ۱/۸ m است. وضع نقطه‌ای را درطرف کوتاهتر وجهت پرتاب طوری تعیین کنیدکه گلوله‌ای که ازآنجا درچنین‌جهتی پرتاب می‌شود براثر برگشت از هریك از سه باند دیگر، یعنی حاشیه‌های لاستیکی دور میز بیلیارد، مربعی طی کند. گلوله صیقلی فرض‌می‌شود وضریب کشسانی برابر $\frac{۴}{۹}$ است.

۸ ـ کره‌ای به‌جرم m که با تندی u حرکت می‌کند باصفحهٔ ثابتی برخورد می‌کند. جهت حرکت باصفحه زاویه‌ای برابر α می‌سازد. اگر e ضریب بازگشت میان کره وصفحه باشد، تعیین کنید، (الف) بزرگی و جهت تندی کره را پس از برخورد؛ (ب) کاهش اندازهٔ حرکت را؛ (پ) کاهش انرژی جنبشی را.

۹ ـ اطراف یك سینی صیقلی بیضی‌شکل را دیوارهٔ صیقلی قـائمی پوشانده است. ثـابت کنیدکه گلولهٔ کاملاً کشسانی، که از یکی‌ازکانونها در امتداد سینی درهرجهتی‌پرتاب شود، پس از دوبرخورد به کانون برخواهدگشت.

۱۰ـ اگر ورقه‌هایی ازکاغذ روی میز قراربگیرند، ضریب بازگشت به‌مقداری متناسب با ضخامت کاغذ کاهش می‌یابد. وقتی‌که گلوله‌ای روی میز لختی بیفتد پس از برخورد تا $\frac{۳}{۴}$ ارتفاع سقوط بالاخواهدرفت. وقتی‌که ضخامت کاغذ روی میز ۲/۵ cm باشد پس‌از برخورد فقط تا نصف ارتفاع سقوط بالاخواهد رفت. برای‌آنکه پس‌ازبرخورد فقط تـا $\frac{۱}{۴}$ ارتفاع سقوط بالا برود ضخامت کاغذ چقدر باید باشد؟

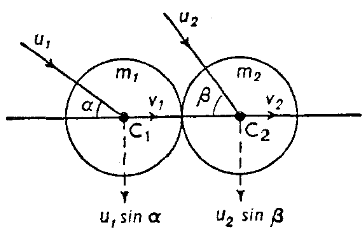
۱۱ـ خط واصل میان مرکزهای دوگلولهٔ صیقلی متساوی P و Q روی میزی صیقلی و عمود برصفحه‌ای قائم و صیقلی است. گلولهٔ P که ازصفحه دورتر است به‌طرف Q که در حـال سکون است می‌لغزد و با تندی u بـا آن برخورد می‌کند. پس از این

برخورد، Q با صفحه برخورد می‌کند و برمی‌گردد. پس از برگشت دوباره با P برخورد می‌کند و پس از آن دوباره به‌طرف صفحهٔ قائم برمی‌گردد. این‌عمل تکرار می‌شود. اگر e ضریب بازگشت‌میان گلوله‌ها و e' ضریب بازگشت میان Q وصفحه باشد، تندی P و Q را پس از نخستین برخورد Q با صفحه پیدا کنید. نشان دهید که اگر $e' < \frac{(1-e)^2}{(1+e)^2}$ باشد لزوماً برخورد سومی میان P و Q وجود خواهد داشت.

۱۲ـ گلوله‌ای به‌جرم $60\ g$ به‌طور افقی به‌طرف قطعه چوبی آتش می‌شود و با سرعت $400\ m/s$ با آن برخورد می‌کند. اگر گلوله تا $15\ cm$ درچوب نفوذ کند، نیروی مقاومت چوب را درمقابل حرکت برحسب نیوتون تعیین کنید.
اگر این قطعه از فلز بود وگلوله به‌جای نفوذ درآن، برمی‌گشت، درصورتی‌که ضریب بازگشت میان اجسام ۰/۳ می‌بود، چه مقدار انرژی جنبشی براثر برخورد کاهش می‌یافت. واحدهای نتایجی را که به‌دست می‌آورید توضیح دهید.

۱۶.۵. برخورد مایل دوکره

فرض می‌کنیم C_1 و C_2 (شکل ۵-۱۲) مرکزهای کره‌ها و m_1 و m_2 جرم آنها باشد و u_1 و u_2، تندی‌آنها، با خط‌المرکزین C_1C_2 درهنگام برخورد زاویه‌های α و β بسازند.



شکل ۵-۱۲

مؤلفه‌های تندی در امتداد عمود بر C_1C_2 عبارتند از $u_1 \sin\alpha$ و $u_2 \sin\beta$ و این مؤلفه‌ها بر اثر برخورد تغییر نمی‌کنند.

حرکت را درامتداد C_1C_2 درنظرمی‌گیریم. اگر v_1 و v_2 مؤلفه‌های تندی درامتداد این خط پس از برخورد باشند، برطبق اصل اندازهٔ حرکت داریم،

$$m_1v_1+m_2v_2=m_1u_1\cos\alpha+m_2u_2\cos\beta \tag{1}$$

و برطبق قانون نیوتون،

$$v_1 - v_2 = -e(u_1 \cos\alpha - u_2 \cos\beta) \qquad (۲)$$

از این معادله‌ها نتیجه می‌شود:

$$v_1 = \frac{(m_1 - em_2)u_1 \cos\alpha + m_2u_2(1+e)\cos\beta}{m_1 + m_2}$$

$$v_2 = \frac{m_1u_1(1+e)\cos\alpha + u_2(m_2 - em_1)\cos\beta}{m_1 + m_2}$$

تندی براینده هرکره وجهت حرکت آن را می‌توان با این‌مؤلفه‌ها ومؤلفه‌های عمود بر C_1C_2 یعنی $u_1 \sin\alpha$ و $u_2 \sin\beta$ تعیین کرد.

اگر $m_1 = m_2$ و $e = 1$ باشد، در این صورت $v_1 = u_2 \cos\beta$ و $v_2 = u_1 \cos\alpha$ یعنی کره‌ها تندیهای خود را درجهت خط‌المرکزین با یکدیگر عوض می‌کنند.

دربسیاری ازمسائل یکی از کره‌ها ساکن است. حال اگر $u_2 = 0$ باشد، معادله‌های (۱) و (۲) به‌صورت سادهٔ زیر درمی‌آیند:

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1u_1 \cos\alpha$$

و

$$v_1 - v_2 = -eu_1 \cos\alpha$$

$$\therefore \qquad v_1 = \frac{(m_1 - em_2)u_1 \cos\alpha}{m_1 + m_2}$$

$$v_2 = \frac{m_1u_1(1+e)\cos\alpha}{m_1 + m_2}$$

کرهٔ دوم در امتداد عمود برخط‌المرکزین دارای مؤلفهٔ تندی نیست. بنابراین در امتداد خط‌المرکزین حرکت خواهدکرد.

کرهٔ m_1 در امتداد عمود بر C_1C_2 دارای‌تندیی برابر $u_1 \sin\alpha$ است، بنابراین اگر θ زاویه‌ای باشدکه جهت حرکت آن با C_1C_2 می‌سازد،

$$tg\theta = \frac{u_1 \sin\alpha}{v_1} = \frac{(m_1 + m_2)\sin\alpha}{(m_1 - em_2)\cos\alpha}$$

اگر همچنین $m_1 = m_2$ باشد، نتیجه‌ها بازهم ساده‌تر خواهند شد، و داریم،

$$v_1 = \frac{1}{2}(1-e)u_1 \cos\alpha \quad \text{و} \quad v_2 = \frac{1}{2}(1+e)u_1 \cos\alpha$$

و

$$tg\theta = \frac{2\sin\alpha}{(1-e)\cos\alpha}$$

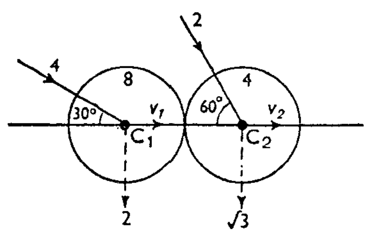
۱۷.۵ کاهش انرژی جنبشی دربرخورد مایل

تندیهای عمود بر خط‌المرکزین بدون تغییر باقی می‌مانند. بنابراین اگر به جای u_1 و u_2 به‌ترتیب $u_1 \cos\alpha$ و $u_2 \cos\beta$ قراردهیم، کاهش انرژی جنبشی مانند حالت برخورد مستقیم است. بنابراین کاهش برابر است با:

$$\frac{1}{2}\times\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}(u_1\cos\alpha-u_2\cos\beta)^2(1-e^2)$$

۱۸.۵ مثال ۱: گلوله‌ای به‌جرم $8\,\mathrm{kg}$ که با تندی $4\,\mathrm{m/s}$ حرکت می‌کند با گلوله‌ای به‌جرم $4\,\mathrm{kg}$ که با تندی $2\,\mathrm{m/s}$ حرکت می‌کند برخورد می‌کند. اگر تندیهای قبل از برخورد با خط واصل میان مرکزهای آنها در لحظهٔ برخورد به‌ترتیب زاویه‌های °۳۰ و °۶۰ بسازند، تندیهای پس از برخورد آنها را وقتی‌که $e=\frac{1}{2}$ است پیدا کنید.

حل: فرض می‌کنیم که C_1 و C_2 (شکل ۵-۱۳) مراکز گلوله‌ها باشد.



شکل ۵-۱۳

مؤلفه‌های تندی عمود بر C_1C_2 برابرند با $4\sin 30^\circ$ و $2\sin 60^\circ$ یا ۲ و $\sqrt{3}$ متر برثانیه. این مؤلفه‌ها براثر برخورد تغییری نمی‌کنند.

اگر v_1 و v_2 مؤلفه‌های تندی در امتداد C_1C_2 پس از برخورد باشند، برطبق معادلهٔ اندازهٔ حرکت داریم:

$$8v_1+4v_2=8\times 4\cos 30^\circ+4\times 2\cos 60^\circ=16\sqrt{3}+4$$

و برطبق قانون نیوتون:

$$v_1-v_2=-\frac{1}{2}(4\cos 30^\circ-2\cos 60^\circ)=-\frac{1}{2}(2\sqrt{3}-1)$$

$$\therefore \qquad 2v_1+v_2=4\sqrt{3}+1$$

و
$$2v_1-2v_2=-2\sqrt{3}+1$$

$$\therefore \qquad 3v_2=6\sqrt{3} \quad \text{یا} \quad v_2=2\sqrt{3}$$

و
$$6v_1=6\sqrt{3}+3 \quad \text{یا} \quad v_1=\frac{2\sqrt{3}+1}{2}$$

تندی کرهٔ ۸ کیلوگرمی

$$=\sqrt{\left\{4+\left(\frac{2\sqrt{3}+1}{2}\right)^2\right\}}=\sqrt{\left(\frac{29+4\sqrt{3}}{4}\right)}\ \mathrm{m/s}$$

و اگر θ زاویهٔ انحراف آن نسبت به C_1C_2 باشد،

$$tg\theta=\frac{2\times 2}{2\sqrt{3}+1}=\frac{4(2\sqrt{3}-1)}{11}$$

تندی کرهٔ ۴ کیلوگرمی،

$$=\sqrt{(3+12)}=\sqrt{15}\ \mathrm{m/s}$$

و اگر ϕ زاویهٔ انحراف آن نسبت به C_1C_2 باشد،

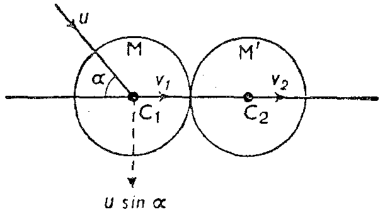
$$tg\,\phi=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{2}$$

مثال ۲: کره‌ای به‌جرم M که با تندی u حرکت می‌کند به‌طورمایل با کرهٔ ساکنی به‌جرم M' برخورد می‌کند. جهت ضربه با مسیر حرکت کرهٔ برخوردکننده زاویه‌ای برابر α می‌سازد. اگرضریب بازگشت‌برابر e باشدثابت‌کنیدکه‌کرهٔ برخوردکننده با زاویه‌ای برابر β منعکس‌می‌شود، به‌طوری که

$$tg\,\beta=\frac{M'(1+e)\,tg\,\alpha}{(M-eM')+(M+M')\,tg^2\alpha}$$

اگر $u=10\ \mathrm{m/s}$ و $\alpha=30^\circ$، $M'=2M$ و $e=0/5$ باشد، تندیهای پس از برخورد را تعیین کنید.

حل : فرض می‌کنیم C_1 و C_2 (شکل ۵–۱۴.۱) مرکزهای M و M' باشند.
مؤلفه‌های‌تندی M در امتداد و عمود بر C_1C_2 عبارتند از $u\cos\alpha$ و $u\sin\alpha$ و مؤلفهٔ اخیر بر اثر برخورد تغییری نمی‌کند.



شکل ۵-۱۴

اگر v_1 و v_2 مؤلفه‌های تندی درامتداد C_1C_2 بعد ازبرخورد باشند،

$$Mv_1+M'v_2=Mu\cos\alpha \qquad (1)$$

و

$$v_1-v_2=-eu\cos\alpha \qquad (2)$$

$$\therefore \quad (M+M')v_1=u(M-eM')\cos\alpha$$

$$\therefore \quad v_1=\frac{(M-eM')u\cos\alpha}{M+M'}$$

برای پیداکردن زاویهٔ انحراف v_1 و $u\sin\alpha$ را عمود و درامتداد جهت اولیهٔ حرکت تجزیه می‌کنیم.

مجموع مؤلفه‌های عمود برجهت اولیهٔ حرکت برابر است با

$$u\sin\alpha\cos\alpha-v_1\sin\alpha$$

$$=u\sin\alpha\cos\alpha-\frac{(M-eM')u\sin\alpha\cos\alpha}{M+M'}$$

$$=\frac{(1+e)M'u\sin\alpha\cos\alpha}{M+M'}$$

مجموع مؤلفه‌های هم‌امتداد با جهت اولیهٔ حرکت برابر است با

$$u\sin^2\alpha+v_1\cos\alpha=u\sin^2\alpha+\frac{(M-M'e)u\cos^2\alpha}{M+M'}$$

$$=\frac{u(M+M'\sin^2\alpha-eM'\cos^2\alpha)}{M+M'}$$

$$\therefore \quad tg\beta=\frac{(1+e)M'u\sin\alpha\cos\alpha}{u[M\sin^2\alpha+M'\sin^2\alpha+M\cos^2\alpha-eM'\cos^2\alpha]}$$

$$=\frac{M'(1+e)tg\,\alpha}{(M+M')tg^2\alpha+(M-eM')}$$

اگر $u=۱۰$ ، $\alpha=۳۰^\circ$ ، $M'=۲M$ ، $e=۰/۵$ باشد، داریم،

$$v_۱=\frac{\left(M-\frac{۱}{۲}\times ۲M\right)u\cos\alpha}{M+۲M}=۰$$

و

$$u\sin\alpha=۱۰\times\frac{۱}{۲}=۵$$

بنابراین تندی M برابر ۵ m/s وعمود برخط واصل میان مرکزهای کره‌هاست.
نیز از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود،

$$(M+M')v_۲=M(۱+e)u\cos\alpha$$

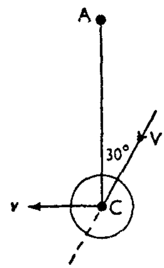
$$\therefore \qquad v_۲=\frac{M(۱+e)u\cos\alpha}{M+M'}=\frac{\frac{۳}{۲}\times۱۰\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۳}$$

$$=\frac{۵\sqrt{۳}}{۲}\ \mathrm{m/s}$$

مثال ۳: کره‌ای از یك نقطهٔ ثابت به‌وسیلهٔ نخ انعطاف‌ناپذیری آویزان است. کره‌ای دیگر با شعاع کوچك وجرمی متساوی باآن یعنی با جرمی برابر m به‌طرف پایین در جهتی که با خط قائم زاویهٔ ۳۰° می‌سازد حرکت می‌کند و بـا سرعت V باکـرهٔ اول برخورد مستقیم می‌کند. اگرضریب بازگشت میان دو کره برابر $\frac{۱}{۲}$ باشد،

ثابت کنیدکه تندی اولیهٔ کرهٔ اول پس از برخورد برابر $\frac{۳}{۵}V$ است.
نیز نیروی ضربه‌ای نخ را درلحظهٔ برخورد تعیین کنید.

حل : دراین مسئله، گرچه‌برخورد مستقیم‌است، کرهٔ معلق آزادانه نمی‌تواند درامتداد خط‌المرکزین حرکت کند. فقط می‌تواند در امتداد عمود برنخ، یعنی در امتداد افقی حرکت‌کند، و اصل اندازهٔ حرکت را فقط می‌توانیم دراین جهت به‌کاربریم.
قانون نیوتون، مانند معمول، در امتداد خط‌المرکزین به‌کار می‌رود.
فرض می‌کنیم A (شکل ۵-۱۵) نقطهٔ آویز، و C مرکز کرهٔ اول باشد.
فرض می‌کنیم v تندی افقی این کره پس از برخورد، و u تندی کرهٔ برخوردکننده پس از برخورد باشد.
چـون ضربه برکـرهٔ اخیر در امتداد خط‌المرکزین است، u درهمان امتداد خـط



شکل ۵-۱۵

مستقیمی است که جهت اولیهٔ حرکت درآن امتداد است.
اندازه حرکتهای قبل و بعد از برخورد را مساوی یکدیگر قرار می‌دهیم، نتیجه می گیریم،

$$mv+mu\cos ۶۰^\circ=mV\cos ۶۰^\circ \qquad (۱)$$

برطبق قانون نیوتون در امتداد خط‌المرکزین،

$$u-v\cos ۶۰^\circ=-\frac{۱}{۲}V \qquad (۲)$$

$$\therefore \qquad v+\frac{۱}{۲}u=\frac{۱}{۲}V$$

و

$$u-\frac{۱}{۲}v=-\frac{۱}{۲}V$$

$$\therefore \qquad \frac{۵}{۴}v=\left(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}\right)V=\frac{۳}{۴}V$$

$$\therefore \qquad v=\frac{۳}{۵}V$$

نیز

$$\frac{۵}{۴}u=-\frac{۱}{۴}V \quad \text{یا} \quad u=-\frac{۱}{۵}V$$

اندازهٔ حرکت قائم پیش از برخورد برابر $mV\cos ۳۰^\circ=\frac{\sqrt{۳}m}{۲}V$ بود.
اندازهٔ حرکت قائم بعد از برخورد برابر است با

$$-\frac{۱}{۵}mV\cos ۳۰^\circ=-\frac{\sqrt{۳}}{۱۰}mV$$

کشش ضربه‌ای درنخ برابر است با تغییر اندازهٔ حرکت حاصله، و بنابراین برابر است با

$$\frac{\sqrt{۳}}{۲}mV+\frac{\sqrt{۳}}{۱۰}mV=\frac{۳\sqrt{۳}}{۵}mV$$

تمرین ۵.۵

۱ـ کره‌ای به‌جرم ۲ kg با سرعت ۱۰ m/s حرکت می‌کند و به‌طور مایل با کره‌ای به‌جرم ۴ kg که ساکن است برخورد می‌کند. جهت حرکت کرهٔ اول با خطالمرکزین درلحظهٔ برخورد، زاویه‌ای برابر °۶۰ می‌سازد. تندیهای کره‌ها را پس‌از برخورد تعیین کنید. ضریب بازگشت برابر $\frac{۱}{۲}$ است.

۲ـ کره‌ای به‌جرم ۸ kg که با سرعت ۶ m/s حرکت می‌کند به‌طور مایل با کره‌ای به جرم ۴ kg که ساکن است برخورد می‌کند. جهت حرکت با خطالمرکزین زاویهٔ °۳۰ می‌سازد. تندیهای کره‌ها را پس‌از برخورد تعیین کنید. ضریب بازگشت $\frac{۳}{۴}$ است.

۳ـ کره‌ای به‌جرم ۲ kg با تندی ۸ m/s با کره‌ای به‌جرم ۴ kg که با تندی ۲ m/s حرکت می‌کند برخورد می‌کند. اگرتندیهای پیش‌از برخورد متوازی و همجهت باشند و با خطالمرکزین لحظهٔ برخورد زاویهٔ °۳۰ بسازند، تندیهای پس‌از برخورد را تعیین کنید. ضریب بازگشت برابر $\frac{۱}{۳}$ است.

۴ـ اگردرمثال پیش، کره‌ها در امتدادهای متوازی وغیرهمجهت حرکت می‌کردند،تندیهای پس از برخورد چقدر بود؟

۵ـ دو کرهٔ متساوی، با سرعتهای متساوی طوری با یکدیگر برخورد می‌کنندکه جهتهای حرکت آنها با خطالمرکزین درلحظهٔ برخورد زاویه‌های °۳۰ و °۶۰ می‌سازند. اگر گلوله‌ها کاملا کشسان باشند، جهتهای حرکت پس از برخورد را تعیین کنید.

۶ـ اگر درمسئلهٔ ۵، ضریب بازگشت برابر $\frac{۱}{۲}$ باشد، تندیهای گلوله‌ها را پس از برخورد تعیین کنید.

۷ـ کره‌ای به‌جرم m به‌طور مایل با کره‌ای به‌جرم M که ساکن است، برخورد می‌کند. نشان دهیدکه اگر $m=eM$ باشد، جهتهای‌حرکت پس از برخورد بریکدیگرعمودند.

۸ـ گلولهٔ صیقلی بیلیاردی باگلولهٔ متساوی دیگری‌که ساکن‌است طوری برخورد می‌کند که با خطالمرکزین درلحظهٔ برخورد زاویه‌ای‌برابر α می‌سازد.ضریب بازگشت میان

آنها برابر e است. ثابت کنید که تانژانت زاویه‌ای که، جهت‌حرکت گلولهٔ برخورد-کننده، تحت آن زاویه منحرف می‌شود برابر است با:

$$\frac{(1+e)\,tg\,\alpha}{1-e+2tg^2\alpha}$$

۹ - دو گلولهٔ صیقلی بیلیارد که با هم متساوی هستند و ضریب بازگشت میان آنها e است با تندیهای متساوی در جهتهای مخالف حرکت می‌کنند، و با یکدیگر به‌طور مایل برخورد می‌کنند. خط‌المرکزین درلحظهٔ برخورد با جهت حرکت زاویهٔ $45°$ می‌سازد. ثابت کنید که کاهش انرژی جنبشی نصف مقداری‌است که اگر برخورد مستقیم بود صورت می‌گرفت.

۱۰- کره‌ای صیقلی، که با تندی u حرکت می‌کند با کرهٔ صیقلی مشابهی که ساکن است برخورد می‌کند. جهت u درست پیش از برخورد با خط‌المرکزین زاویهٔ α می‌سازد. بزرگی و جهت تندی هر کره را پس‌از برخورد برحسب u، α و ضریب بازگشت e بیان کنید. اگر $tg^2\alpha=\frac{8}{27}$، و $e=\frac{2}{3}$ باشد، نشان دهید که تندی کرهٔ اول بر اثر برخورد نصف می‌شود.

۱۱- کره‌ای صیقلی به‌جرم m به‌طور مایل با کره‌ای به‌جرم M که ساکن است برخورد می‌کند. اگر پس از برخورد، کرهٔ اول درجهتی عمود برجهت اولیه حرکت کند، نشان دهید که $m<eM$ است که درآن e ضریب بازگشت است. نیزنشان دهید که انرژی جنبشی دو کره بر اثر برخورد به‌نسبت $e:1$ کاهش می‌یابد.

۱۲- گلولهٔ بیلیاردی ساکن است و گلولهٔ متشابه دیگری به‌طرف گلولهٔ اول نشانه روی می‌شود به‌طوری که جهت حرکت مرکز آن (وقتی که به‌طور هندسی امتداد یابد) با گلولهٔ اولی مماس شود. اگرضریب بازگشت $\frac{4}{5}$ باشد، جهتهایی را که گلوله‌ها پس‌از برخورد درآن جهتها حرکت خواهند کرد تعیین کنید، و ثابت کنید که مقدار انرژی جنبشی که به‌گلولهٔ اول منتقل شده است در حدود ۰/۶۱ برابر انرژی جنبشی، پیش از برخورد گلولهٔ دیگر است. و حال آنکه انرژی جنبشی گلولهٔ دوم پس از برخورد ۰/۲۶ انرژی اولیهٔ آن است.

۶

حرکت پرتابی

۱.۶ اکنون حرکت نقطه‌ای مادی را بررسی می‌کنیم که در میدان جاذبهٔ زمین در جهت معینی پرتاب می‌شود. برای این‌منظور فرض می‌کنیم که شتاب جاذبه مقداری است ثابت و نیزمی‌توانیم ازمقاومت هوا درمقابل حرکت صرف‌نظر کنیم. درحرکت پرتابی اصطلاحات زیر نیز پذیرفته می‌شوند:

زاویهٔ پرتاب زاویه‌ای است که جهت پرتاب با صفحهٔ افقیی که از نقطهٔ پرتاب‌می‌گذرد می‌سازد. این زاویه را زاویهٔ انحراف نیز می‌گویند.

مسیر مکان هندسی نقطه‌هایی است که نقطهٔ مادی پرتاب شده می‌پیماید.

برد فاصلهٔ میان نقطهٔ پرتاب و نقطهٔ تلاقی مسیر است با هرصفحه‌ای که از نقطهٔ پرتاب می‌گذرد.

شتاب جاذبه به‌سوی پایین است و این سبب می‌شود که مسیر پرتابی انحنا داشته باشد.

درهرصورت می‌توانیم بدون آنکه چگونگی و نوع منحنی مسیر را تعیین کنیم، نتیجه‌های مهمی به‌دست آوریم.

۲.۶ اصلِ روشی که به‌کار می‌بریم، بررسی‌جداگانهٔ مؤلفه‌های قائم و افقی‌حرکت است. چون نیروی جاذبه در امتداد افق است، هیچ‌گونه اثری برتندی نقطهٔ مادی در امتداد افقی ندارد.

پس در سرتاسر مسیر، مؤلفهٔ افقیِ تندی ثابت باقی می‌ماند.

اگرنقطهٔ مادی با تندی u و با زاویهٔ پرتاب α پرتاب شود، مؤلفه‌های افقی وقائم تندی اولیه، به‌ترتیب $u \cos \alpha$ و $u \sin \alpha$ هستند.

بنابراین درسرتاسر مسیر، مؤلفهٔ افقی تندی برابر $u\cos\alpha$ است. اما مؤلفهٔ قائم تندی براثر شتاب g درهرلحظه تغییر می‌کند و درلحظهٔ t از شروع پرتاب برابر است با:

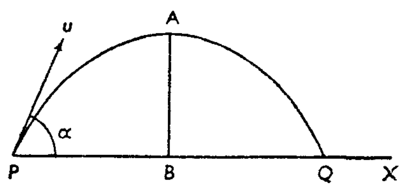
$$u\sin\alpha - gt$$

مسافتی که در امتداد افقی و درمدت زمان t پیموده می‌شود $(u\cos\alpha)t$ و مسافتی که در امتداد قائم در این مدت پیموده می‌شود برابر است با:

$$(u\sin\alpha)t - \frac{۱}{۲}gt^{۲}$$

از این نتیجه‌های ساده همهٔ مشخصات حرکت را به‌طوری‌که خواهیم‌دهید، می‌توان به‌دست آورد.

۳.۶. فرض می‌کنیم‌که نقطه‌ای مادی از P (شکل ۶ـ۱) با تندی u و با زاویهٔ پرتاب α پرتاب شود، و نیز فرض می‌کنیم‌که A بالاترین‌نقطهٔ مسیر و Q نقطه‌ای است‌که پرتابی، صفحهٔ افقیی را که از P می‌گذرد قطع‌کند.



شکل ۶ـ۱

(الف) پیدا کردن بالاترین نقطهٔ مسیر

وقتی‌که پرتابی به‌بالاترین نقطهٔ مسیر (نقطهٔ اوج) خود می‌رسد، مؤلفهٔ قائم تندی آن صفر می‌شود. مولفهٔ قائم تندی اولیه $u\sin\alpha$ بوده است. پس

$$۰ = u^{۲}\sin^{۲}\alpha - ۲gh$$

$$\therefore \quad h = \frac{u^{۲}\sin^{۲}\alpha}{۲g}$$

(ب) پیدا کردن زمان لازم برای رسیدن به‌بالاترین نقطهٔ مسیر

بازهم مولفهٔ تندی وقتی‌که به‌بالاترین نقطهٔ مسیر می‌رسد صفر است. زمان لازم برای اینکه به‌این نقطه برسد از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$0 = u \sin\alpha - gt$$

$$\therefore \qquad t = \frac{u \sin\alpha}{g}$$

(پ) پیدا کردن مدت زمان پرواز، یعنی مدت زمانی که پس از آن پرتابی به سطح افقی که از P می‌گذرد می‌رسد.

می‌نویسیم $x = ut - \frac{1}{2}gt^2$ و وقتی که $t = T$ است x را برابر صفر قرارمی‌دهیم:

$$u \sin\alpha \times T - \frac{1}{2}gT^2 = 0$$

$$\therefore \qquad T = \frac{2u \sin\alpha}{g}$$

این‌مدت زمان دوبرابر مدت زمان لازم بـرای رسیدن به‌بالاترین نقطهٔ مسیر است. این نتیجه را می‌توانستیم مستقیماً از تقارن حدس بزنیم.

(ت) پیدا کردن برد پرتاب در صفحهٔ افقیی‌که از P می‌گذرد.

درمدت زمان T نقطهٔ مادی با تندی افقی یکنواخت $u \cos\alpha$ حرکت کرده است. فاصلهٔ افقیی که می‌پیماید برابر است با

$$= u \cos\alpha \times T = \frac{2u^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g}$$

$$\therefore \qquad \text{برد } R = \frac{2u^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g} = \frac{u^2 \sin 2\alpha}{g}$$

برای‌تندی معین u برد هنگامی‌ماکزیمم‌است‌که $2\alpha = 90^\circ$، یعنی $\alpha = 45^\circ$ باشد. بنابراین برای یك تندی معین، برد پرتاب هنگامی ماکزیمم است که زاویهٔ پرتاب 45° باشد.

(ث) پیدا کردن تندی و جهت حرکت در یك لحظهٔ معین

می‌دانیم‌که مولفهٔ افقی تندی، ثابت و برابر $u \cos\alpha$ است.
مؤلفهٔ قائم تندی، v، درلحظهٔ t چنین به‌دست می‌آید:

$$v = u \sin\alpha - gt$$

$\therefore$ پس اگر V تندی برایند باشد، داریم:

$$V^2 = u^2 \cos^2\alpha + (u \sin\alpha - gt)^2$$
$$= u^2 - 2ugt \sin\alpha + g^2t^2$$

اگر θ زاویه‌ای باشدکه جهت حرکت با امتداد افقی می‌سازد،

$$tg\,\theta = \frac{\text{مولفهٔ قائم تندی}}{\text{مولفهٔ افقی تندی}} = \frac{u \sin\alpha - gt}{u \cos\alpha}$$

θ برای مقادیری از t مثبت است که $u \sin\alpha - gt$ مثبت باشد و برای مقادیری از t منفی‌است که $u \sin\alpha - gt$ منفی‌باشد. یعنی θ هنگامی‌مثبت است که $t < \frac{u \sin\alpha}{g}$ است. پس درتمام لحظه‌های‌قبل‌از رسیدن‌به‌بالاترین نقطهٔ مسیر، θ مثبت و بعدازآن θ منفی‌است.

۴.۶ برای یك تندی معین پرتاب عموماً دو زاویهٔ پرتاب وجود دارد که می‌توان برد معینی به‌دست آورد.

دیدیم‌که برد از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$R = \frac{u^2}{g} \sin 2\alpha$$

اگر R و u معلوم باشند،

$$\sin 2\alpha = \frac{gR}{u^2}$$

برای مقدار معینی از سینوس زاویهٔ 2α دو زاویهٔ کمتراز ۱۸۰ درجه وجود دارد. اگر یکی از این دو زاویه برابر 2θ باشد، زاویهٔ دیگر برابر $180 - 2\theta$ خواهد بود. پس θ و $90 - \theta$ دو زاویهٔ ممکن پرتاب هستند.

اگر $\frac{gR}{u^2} = 1$ باشد، فقط یك مقدار برای زاویهٔ پرتاب ممکن است و آن‌هم برابر $\frac{90}{2}$ یا ۴۵ درجه است. این حالتی است‌که برد به‌ازای یك تندی معین ماکزیمم است.

جهت پرتاب θ با خط قائم، همان زاویه‌ای را می‌سازدکه جهت پرتاب $90 - \theta$ با خط افقی می‌سازد. بنابراین برد هنگامی ماکزیمم است‌که جهت پرتاب در امتداد نیمساز این دوجهت باشد.

۵.۶ مثال ۱: نقطه‌ای مادی با تندی $196\ m/s$ به‌طرف بالا طوری پرتاب می‌شودکه با افق‌زاویهٔ $30°$ می‌سازد. تعیین کنید: (الف) بزرگترین ارتفاعی راکه به‌دست

می‌آورد، (ب) پس از چه مدت به صفحهٔ افقی پرتاب می‌رسد و در این مدت در امتداد افقی چه مسافتی می‌پیماید، (پ) تندی و جهت حرکت را در ارتفاع $۱۳۰\ m$.

حل : تندی اولیه درامتداد افقی،

$$= ۱۹۶ \cos ۳۰^\circ = ۱۹۶ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۹۸\sqrt{۳}\ m/s$$

تندی اولیه در امتداد قائم،

$$= ۱۹۶ \sin ۳۰^\circ = ۱۹۶ \times \frac{۱}{۲} = ۹۸\ m/s$$

(الف) اگر h بزرگترین ارتفاعی باشد که نقطهٔ مادی به‌دست می‌آورد، در این ارتفاع تندی گلوله در امتداد قائم صفر می‌شود. پس می‌توان نوشت،

$$\therefore \quad ۰ = ۹۸^۲ - ۲gh$$

$$\therefore \quad h = \frac{۹۸ \times ۹۸}{۲ \times ۹/۸} = ۴۹۰\ m$$

(ب) وقتی‌که به صفحهٔ افقی پرتاب می‌رسد، ارتفاع نقطهٔ مادی از سطح افقی پرتاب صفر است. اگر t مدت زمان مطلوب باشد،

$$\therefore \quad ۰ = ۹۸t - \frac{۱}{۲} gt^۲$$

$$\therefore \quad t = \frac{۹۸}{۴/۹} = ۲۰\ s$$

دراین مدت با تندی‌یکنواخت $۹۸\sqrt{۳}\ m/s$ مسافتی‌را در امتداد افق طی‌می‌کند که برابر است با:

$$= ۹۸\sqrt{۳} \times ۲۰ \# ۳۳۹۵\ m$$

(پ) اگر v تندی قائم در ارتفاع $۱۳۰\ m$ باشد،

$$v^۲ = ۹۸^۲ - ۲g \times ۱۳۰$$
$$= ۹۸(۹۸ - ۲۶) = ۹۸ \times ۷۲$$
$$\therefore \quad v = ۱۴ \times ۶ = ۸۴\ m/s$$

تندی افقی همان $۹۸\sqrt{۳}\ m/s$ است. و اگر θ زاویهٔ جهت حرکت با امتداد افقی باشد،

$$tg\, \theta = \frac{۸۴}{۹۸\sqrt{۳}} = \frac{۴۲\sqrt{۳}}{۱۴۷}$$

و تندی برایند برابر V است به‌طوری که

$$V^{۲}=۹۸^{۲}\times ۳+۸۴^{۲}=۷^{۲}(۵۸۸+۱۴۴)$$

$$\therefore \quad V=۷\sqrt{۷۳۲}=۷\times ۲۷/۰۵$$

$$\# ۱۸۹\ \mathrm{m/s}$$

مثال ۲: نقطه‌ای‌مادی با تندی $۱۹/۶\ \mathrm{m/s}$ پرتاب می‌شود. حداکثر بردآن‌برسطح افقی چقدر است؟ این نقطهٔ مادی با چه زاویه‌ای با افق پرتاب شود تا بردآن برابر $۱۲\ \mathrm{m}$ بشود؟

حل : اگر زاویهٔ پرتاب α باشد، مؤلفه‌های افقی وقـائم تندی اولیه $۱۹/۶\ cos\,\alpha$ و $۱۹/۶\ sin\,\alpha$ متر برثانیه است. مدت زمان پرواز برابر است بـا t ثانیه‌کـه از معادلهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$۰=۱۹/۶\ sin\,\alpha\times t-\frac{۱}{۲}gt^{۲}$$

$$\therefore \quad t=\frac{۱۹/۶}{۴/۹}sin\,\alpha=۴\ sin\,\alpha$$

دراین مدت برد افقی برابر است با

$$۱۹/۶\ cos\,\alpha\times ۴\ sin\,\alpha$$

$$=۳۹/۲\ sin\ ۲\,\alpha$$

این مقدار هنگامی ماکزیمم است که $۲\alpha=۹۰^{\circ}$ یا $\alpha=۴۵^{\circ}$ باشد، و بنابراین حداکثر برد برابر $۳۹/۲\ \mathrm{m}$ است.

وقتی‌که برد برابر $۱۲\ \mathrm{m}$ است، داریم:

$$۳۹/۲\ sin\ ۲\alpha=۱۲$$

$$\therefore \quad sin\ ۲\,\alpha=۰/۳۰۶$$

$$\therefore \quad ۲\,\alpha=۱۸^{\circ} \quad \text{یا} \quad ۱۶۲^{\circ}$$

$$\therefore \quad \alpha=۹^{\circ} \quad \text{یا} \quad ۸۱^{\circ}$$

مثال ۳: ازبالای تخته سنگی به‌بلندی $۹۸\ \mathrm{m}$ درساحل دریا سنگی را با تندی $۴۹\ \mathrm{m/s}$ چنان پرتاب می‌کنیم که با افق زاویهٔ ۳۰° بسازد. تعیین کنیدکـه سنگ در چـه فاصله‌ای از پای تخته سنگ به‌آب دریا برخورد می‌کند.

حل : مؤلفهٔ تندی اولیه درامتداد قائم $۴۹\ sin\ ۳۰^{\circ}=۲۴/۵\ \mathrm{m/s}$ است.

مؤلفهٔ تندی اولیه درامتداد افقی $۲۴/۵\sqrt{۳}\ \mathrm{m/s} = ۴۹\cos ۳۰^\circ$ است.
مدت زمانی که پس ازآن گلوله درنقطه‌ای که $۹۸\ \mathrm{m}$ پایینتر ازنقطهٔ پرتاب است می‌رسد t ثانیه است که ازمعادلهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$-۹۸ = ۲۴/۵t - ۴/۹t^۲$$

$$\therefore \quad t^۲ - ۵t - ۲۰ = ۰$$

$$\therefore \quad t = \frac{۵ \pm \sqrt{۲۵ + ۸۰}}{۲} = ۷/۶$$

دراین مدت فاصلهٔ افقیی که پیموده می‌شود برابر است با

$$۷/۶ \times ۲۴\sqrt{۳}\ \mathrm{m} \# ۳۱۶\ \mathrm{m}$$

مثال ۴: گلوله‌ای ازیک تفنگ چنان پرتاب می‌شود که مؤلفه‌های افقی‌وقائم تندی‌اولیهٔ آن به‌ترتیب u و v باشند. مکان گلوله را درلحظهٔ t پیدا کنید. اگرمؤلفهٔ افقی تندی $۶۰۰\ \mathrm{m/s}$ باشد، تعیین کنید که گلوله تحت چه زاویه‌ای پرتاب شود تا به‌هدف بخورد. هدف‌در ارتفاع $۲\ \mathrm{m}$ وبه‌فاصلهٔ $۵۰۰\mathrm{m}$ از محل پرتاب‌واقع‌است.

حل : اگر x و y فاصله‌های افقی وقائم گلوله ازمحل پرتاب درلحظهٔ t باشند، داریم:

$$x = ut \qquad (۱)$$

$$y = vt - \frac{۱}{۲}gt^۲ \qquad (۲)$$

هنگامی که $u = ۶۰۰\ \mathrm{m/s}$ و $x = ۵۰۰\ \mathrm{m}$ است،

$$t = \frac{x}{u} = \frac{۵۰۰}{۶۰۰} = \frac{۵}{۶}\mathrm{s}$$

دراین لحظه ارتفاع گلوله برابر $۲\ \mathrm{m}$ است. ازمعادلهٔ (۲) نتیجه می‌شود:

$$۲ = \frac{۵}{۶}v - \frac{۱}{۲} \times ۹/۸ \times \left(\frac{۵}{۶}\right)^۲$$

$$\therefore \quad v = ۲/۴ + ۴/۰۸$$

$$\therefore \quad v = ۶/۴۸\ \mathrm{m/s}$$

اگر θ زاویهٔ پرتاب باشد،

$$tg\theta = \frac{v}{u} = \frac{۶/۴۸}{۶۰۰} = ۰/۰۱۰۸$$

$$\therefore \quad \theta \# ۳۷'$$

مثال ۵: اگر ارتفاع نقطهٔ اوج یك گلوله h وبرد گلوله r باشد، ثابت کنید که بزرگی تندی اولیه برابراست با

$$\left[2g\left(h+\frac{r^2}{16h}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

حل : فرض می‌کنیم که u بزرگی تندی اولیه و α زاویهٔ پرتاب باشد،

(۱) برد افقی
$$r=\frac{2u^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g}$$

ارتفاع نقطهٔ اوج

(۲)
$$h=\frac{u^2 \sin^2\alpha}{2g}$$

ازتقسیم (۱) بر (۲) نتیجه می‌شود،

$$4 \cot g\,\alpha=\frac{r}{h} \quad \text{یا} \quad \cot g\,\alpha=\frac{r}{4h}$$

ازمعادلهٔ (۲) نتیجه می‌شود،

$$\sin^2\alpha=\frac{2gh}{u^2} \quad \text{یا} \quad \frac{1}{\sin^2\alpha}=\frac{u^2}{2gh}$$

$$\therefore \quad 1+\cot g^2\alpha=\frac{u^2}{2gh}$$

$$=1+\frac{r^2}{16h^2}$$

$$\therefore \quad u^2=2g\left(h+\frac{r^2}{16h}\right)$$

$$\therefore \quad u=\left[2g\left(h+\frac{r^2}{16h}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

مثال ۶: ازبالای یك برج، هدفی راکه درفاصلهٔ افقی $60\ \mathrm{m}$ است و $60\ \mathrm{m}$ درزیر نقطهٔ پرتاب قرار دارد نشانه می‌کنند و گلوله‌ای پرتاب می‌کنند. تندی پرتاب برابر است با تندی ناشی ازسقوط $30\ \mathrm{m}$ که فقط تحت اثر جاذبه از حالت سکون صورت گیرد. نشان دهیدکه دوجهت ممکن پرتاب بریکدیگر عمودند و مدت

زمانهای پرواز تقریباً برابر ۲/۷ و۶/۴۶ ثانیه است.

حل : تندی v m/s که ضمن سقوط ارتفاعی برابر ۳۰ m حاصل‌می‌شود چنین به‌دست می‌آید

$$v^{۲}=۲g\times ۳۰$$

$$\therefore \quad v=\sqrt{۶۰g}$$

اگر α زاویهٔ پرتاب باشد:

$$-۶۰=\sqrt{۶۰g}\,\sin\alpha\times t-\frac{۱}{۲}gt^{۲} \qquad (۱)$$

نیز

$$۶۰=\sqrt{۶۰g}\,\cos\alpha\times t \qquad (۲)$$

ازمعادلهٔ (۲) نتیجه می‌شود:

$$t=\sqrt{\left(\frac{۶۰}{g}\right)}\times\frac{۱}{\cos\alpha}$$

با قراردادن این مقدار درمعادلهٔ (۱):

$$-۶۰=۶۰\,tg\alpha-\frac{۳۰}{\cos^{۲}\alpha}$$

$$=۶۰\,tg\alpha-۳۰-۳۰\,tg^{۲}\alpha$$

$$\therefore \quad tg\,\alpha=\frac{۲\pm\sqrt{۴+۴}}{۲}=۱\pm\sqrt{۲}$$

یکی ازاین مقادیرمنفی است، واین نشان می‌دهدکه یکی از جهتها در زیر افق پرتاب است.

حاصلضرب دوتانژانت برابر است با

$$(۱+\sqrt{۲})(۱-\sqrt{۲})=-۱$$

واین نتیجه نشان می‌دهدکه دوجهت بریکدیگر عمودند.

اگر $tg\,\alpha_{۱}=۱+\sqrt{۲}$

و $tg\,\alpha_{۲}=۱-\sqrt{۲}$

باشد،

$$\therefore \quad \frac{۱}{\cos^{۲}\alpha_{۱}}=۱+۳+۲\sqrt{۲}$$

$$=۶/۸۲۸$$

$$\therefore \qquad \frac{۱}{cos^{۲}\alpha_{۲}} = ۱+۳-۲\sqrt{۲}$$

$$= ۱/۱۷۲$$

$$\therefore \qquad \frac{۱}{cos\alpha_{۱}} = ۲/۶۱$$

و $$\frac{۱}{cos\alpha_{۲}} = ۱/۰۸$$

$$\therefore \qquad \text{مدت زمانها} = ۲/۶۱\sqrt{\frac{۶۰}{۹/۸}} \# ۶/۴\,s$$

و $$۱/۰۸\sqrt{\frac{۶۰}{۹/۸}} \# ۲/۷\,s$$

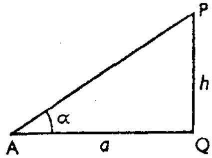
مثال ۷: ازنقطهٔ A واقع برسطح زمین، ستونی قائم تحت زاویـهٔ α دیـده می‌شود. دو گلولـه دریك لحظه ازنقطهٔ A بـه‌ترتیب تحت زاویـه‌های $\theta_{۱}$ و $\theta_{۲}$ پـرتـاب می‌شوند. درست درلحظه‌ای که گلولهٔ اولی به‌بالای ستون می‌رسد، گلولهٔ دیگر به‌پایین ستون برخورد می‌کند. ثابت کنید که

$$tg\theta_{۱} - tg\theta_{۲} = tg\,\alpha$$

حل : فرض‌می‌کنیم $u_{۱}$ و $u_{۲}$ تندیهای اولیهٔ پرتاب باشند، h بلندی ستون PQ (شکل ۶-۲) و a فاصلهٔ افقی ستون ازنقطهٔ A است.

چون هر دوگلوله یك مسافت افقی را دریك مدت پیموده‌انـد، مؤلفه‌های افقی تندی آنها باهم برابر است،

$$\therefore \qquad u_{۱}\,cos\theta_{۱} = u_{۲}\,cos\theta_{۲}$$



شکل ۶-۲

اگر t مدت زمانی باشدکه گلوله‌ها به‌ستون برخورد می‌کنند، می‌توان نوشت،

$$t=\frac{a}{u_1\cos\theta_1}=\frac{a}{u_2\cos\theta_2}$$

نیز

$$h=u_1\sin\theta_1\times t-\frac{1}{2}gt^2$$

و

$$0=u_2\sin\theta_2\times t-\frac{1}{2}gt^2$$

$$\therefore\quad h=t(u_1\sin\theta_1-u_2\sin\theta_2)$$

$$\frac{h}{u_1\cos\theta_1}=t(tg\theta_1-tg\theta_2)$$

$$\therefore\quad \frac{h}{u_1\cos\theta_1}=\frac{a}{u_1\cos\theta_1}(tg\theta_1-tg\theta_2)$$

چون $h=a\,tg\alpha$ است،

$$\therefore\quad a\,tg\alpha=a(tg\theta_1-tg\theta_2)$$

$$\therefore\quad tg\,\alpha=tg\theta_1-tg\theta_2$$

تمرین ۶.۱

۱- نقطه‌ای مادی با تندی $30\ m/s$ به‌طرف بالا طوری پرتاب می‌شود که با افق زاویهٔ 30° می‌سازد. پیدا کنید (الف) ارتفاع نقطهٔ اوج گلوله را؛ (ب) مدت زمان پرواز و برد افقی گلوله را؛ (پ) تندی و جهت حرکت را درارتفاع $4\ m$.

۲- پیدا کنید بزرگترین برد افقی گلوله را هنگامی که تندی پرتاب برابر است با (الف) $20\ m/s$، (ب) $18\ m/s$، (پ) $30\ m/s$.

۳- شخصی می‌تواند سنگی را حداکثر ۶۰ متر به‌طرف جلو پرتاب کند. سنگ را با چه تندی پرتاب کرده است و مدت زمانی که سنگ درهوا بوده است چقدراست؟

۴- گلوله‌ای به‌طورافقی‌ازنقطه‌ای که $60\ m$ ازسطح افقی بالاتر است باتندی $600\ m/s$ پرتاب می‌شود. وقتی که گلوله به‌سطح افقی می‌رسد چه فاصلهٔ افقی را طی کرده‌است؟

۵- ازبالای تخته سنگ ساحلی که بلندی آن از سطح آب $160\ m$ است، سنگی با تندی $180\ m/s$ چنان پرتاب می‌شود که زاویهٔ پرتاب 30° باشد. فاصلهٔ افقی محل برخورد سنگ با آب دریا را ازپای تخته سنگ به‌دست آورید.

۶- تندی وجهت پرتاب گلوله‌ای را پیدا کنید که ازبالای دیواری به ارتفاع $12\ m$ که به‌فاصلهٔ $32\ m$ ازمحل پرتاب است به‌طورافقی می‌گذرد.

۷- گلوله‌ای ازدهانهٔ تفنگ با تندی $300\ m/s$ طوری خارج می‌شود که با سطح افق زاویهٔ ۳ درجه می‌سازد. برد گلوله چقدراست؟

۸- کمترین تندی برای اینکه یک پرتابی بتواند فاصلهٔ افقی $100\ m$ را بپیماید چقدر است؟ این فاصله را درچه مدت می‌پیماید؟

۹- نقطه‌ای مادی با تندی $30\ m/s$ و با زاویهٔ انحرافی که تانژانت آن نسبت به‌افق برابر $\frac{3}{4}$ است پرتاب می‌شود. ثابت کنید که این پرتابی درست از بالای دیواری به بلندی $9/9\ m$ که درفاصلهٔ ۷۲ متری نقطهٔ پرتاب است می‌گذرد.

۱۰- ازبالای برجی به‌ارتفاع $30/4\ m$ جسمی با تندی $24\ m/s$ با زاویهٔ پرتاب $30°$ بالای افق پرتاب شده است. فاصلهٔ افقی نقطهٔ برخورد گلوله را با زمین ازپای برج تعیین کنید.

۱۱- ازبالای تخته سنگی به‌ارتفاع $78/4\ m$ بالای سطح آب دریا، گلوله‌ای در جهت افقی آتش می‌شود. به‌فرض آنکه تندی اولیهٔ گلوله $240\ m/s$ باشد، گلوله در چه فاصله‌ای ازپای تخته سنگ به‌آب دریا برخورد می‌کند؟ جهت حرکت گلوله هنگام برخورد با آب چه زاویه‌ای با افق می‌سازد؟

۱۲- گلوله‌ای با تندی اولیهٔ $600\ m/s$ طوری پرتاب شده است که با افق زاویهٔ $25°$ می‌سازد. تعیین کنید در چه فاصله‌ای ازنقطهٔ شروع حرکت دوباره به‌زمین برخورد خواهد کرد.

۱۳- اگردرداخل یک تونل افقی که $4/8\ m$ ارتفاع دارد، نقطه‌ای مادی باتندی $60 m/s$ پرتاب شود، حداکثر برد ممکن چقدر است؟

۱۴- گلوله‌ای طوری پرتاب می‌شود که برد آن سه برابرارتفاع اوج آن است. زاویهٔ پرتاب را تعیین کنید و اگر درچنین حالتی برد گلوله $400\ m$ باشد تندی لازم برای پرتاب ومدت زمان پرواز را پیدا کنید.

۱۵- ازنقطه‌ای که $1/3\ m$ بالای زمین ودرفاصلهٔ $6\ m$ ازدیوارقائمی به‌بلندی $4/9\ m$ است، گلوله‌ای چنان پرتاب می‌شود که مؤلفهٔ افقی تندی اولیهٔ آن $12\ m/s$ است. این گلوله درست ازبالای دیوار می‌گذرد. تعیین کنید که گلوله پس ازچه مدت‌زمانی ازلحظهٔ پرتاب به‌زمین می‌رسد.

۱۶- ازنقطهٔ A واقع دریک سطح افقی، گلوله‌ای چنان پرتاب می‌شود که درست ازبالای دیواری که برروی همین سطح ساخته شده است بگذرد. تندی جسمی که بدون تندی اولیه، از ارتفاعی برابرفاصلهٔ افقی A تا دیوار، رها شود، هنگام رسیدن به زمین برابر است با مؤلفهٔ افقی تندی گلولهٔ مزبور. ثابت کنید که گلوله درآن طرف در فاصله‌ای ازدیوارکه ۴ برابر ارتفاع دیوار است به‌زمین می‌رسد.

۱۷- حداقل تندی اولیهٔ پرتاب گلوله‌ای چقدر باشد تا درست از بالای دیواری به بلندی $10\,m$ که در فاصلهٔ $13\,m$ است بگذرد و در طرف دیگر در فاصلهٔ ۷ متری پای دیوار به‌زمین برسد؟ نقطهٔ پرتاب درهمان سطح افقی پای دیوار است.

۱۸- حداکثر برد توپی $25\,km$ است. تندی گلوله را دردهانهٔ توپ تعیین کنید، و ثابت کنید که وقتی گلوله فاصله‌ای برابر $6/4\,km$ درامتداد افقی می‌پیماید تا ارتفاعی برابر $4/8\,km$ بالا می‌رود.

۱۹- گلوله‌ای ازنقطهٔ O طوری پرتاب می‌شود که مؤلفه‌های افقی وقائم تندی آن به‌ترتیب u و v باشند. t ثانیه پس از پرتاب جهت گلوله را پیدا کنید. اگر $u=30\,m/s$ و $v=90\,m/s$ باشد، ثابت کنید که دو نقطه وجود دارد که درهریك ازآنها، جهت حرکت گلوله برخطی که آن نقطه را به O وصل می کند عمود است. اوضاع این نقطه‌ها را تعیین کنید.

۲۰- گلوله‌ای ازیك توپ پرتاب می‌شود. ۱۰ ثانیه پس از پرتاب، مشاهده می‌شود که گلوله درسطح افقی پرتاب‌منفجر می‌شود. ۳ثانیه پس از انفجار گلوله،صدای انفجار به کسی که کنار توپ است می‌رسد. زاویهٔ پرتاب وسرعتی راکه با آن سرعت گلوله پرتاب شده است تعیین کنید. (تندی صوت را $335\,m/s$ فرض کنید.)

۲۱- حداکثر برد افقی یك گلوله، به‌ازای تندی معینی برابر R است. ثابت کنید که اگر این گلوله بخواهد ازنقطه‌ای بگذرد که فاصلهٔ افقی آن از نقطهٔ پرتاب $\frac{1}{2}R$ و فاصلهٔ قائم آن ازنقطهٔ پرتاب $\frac{1}{4}R$ باشد، باید تانژانت زاویهٔ پرتاب یا برابر ۱ باشد یا برابر ۳؛ ودرحالت اخیر برد افقی آن $\frac{3}{5}R$ است.

۲۲- گلوله‌ای که با تندی v پرتاب شود می‌تواند درست به‌نقطهٔ معینی درسطح افقی پرتاب برسد. نشان دهید که اگربخواهیم علامتی واقع در ارتفاع h ازنقطهٔ مذکور را هدف قراردهیم، بدون آنکه زاویهٔ پرتاب را تغییردهیم باید تندی پرتاب را به مقدار $\frac{v^2}{(v^2-gh)^{1/2}}$ افزایش دهیم.

۲۳- اگرمدت زمان پرواز یك گلوله T وبرد افقی آن X باشد، ثابت کنید که

$$gT^2 = 2X\,tg\,\alpha$$

که درآن α زاویهٔ پرتاب است.

۲۴- گلوله‌ای که برد آن برسطح افقی پرتاب R است، درضمن پیمایش مسیرخود از

نقطه‌ای می‌گذرد که ارتفاع آن از سطح افقی پرتاب y وفاصلهٔ افقی آن از محل پرتاب برابر x است. ثابت کنید که زاویهٔ پرتاب که برابر α است از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$tg\,\alpha = \frac{y}{x} \times \frac{R}{R-x}$$

۲۵- برد افقی گلوله‌ای a وارتفاع اوج آن b است. مؤلفه‌های تندی اولیهٔ این گلوله را درامتدادهای قائم وافقی تعیین کنید.
ثابت کنید که این گلوله وقتی که فاصلهٔ افقی x را پیموده است درارتفاعی برابر $\frac{4bx(a-x)}{a^2}$ ازسطح افقی پرتاب است.

۲۶- اگر برد افقی گلوله‌ای که با تندی V پرتاب می‌شود برابر a باشد، نشان دهید که x، بالاترین ارتفاعی که گلوله به‌دست می‌آورد، ازمعادلهٔ زیر به‌دست می‌آید.

$$16gx^2 - 8V^2x + ga^2 = 0$$

توضیح دهید که چرا باید دومقدار برای x به‌دست آید.

۲۷- نشان دهید که تندی نسبی دوجسم که درجهت معینی تحت شتاب جاذبهٔ زمین حرکت می‌کنند ثابت می‌ماند. ازبالای برجی به‌ارتفاع ۵۴ m سنگی با تندی ۱۵ m/s به‌طور افقی پرتاب می‌شود، و درهمان لحظه، سنگ دیگری درهمان صفحهٔ قائم از بالای برج با تندی ۳۰ m/s وبا زاویهٔ پرتاب °۶۰ پرتاب می‌شود. نشان دهید که دو سنگ با یکدیگربرخورد خواهند کرد. تعیین کنید که در لحظهٔ برخورد ارتفاع دو سنگ ازسطح زمین وفاصلهٔ آنها ازبرج چقدراست؟

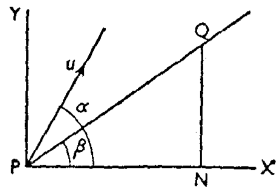
۲۸- بلندی دیواری برابر b است. ازنقطه‌ای واقع برزمین و به‌فاصلهٔ a از پای دیوار، گلوله‌ای با تندی V و زاویهٔ پرتاب α پرتاب می‌شود. تعیین کنید گلوله وقتی که از بالای دیواررد می‌شود درچه ارتفاعی ازبالای دیواراست. اگر گلوله درست به‌بالای دیوار بخورد، ثابت کنید که ارتفاع نقطهٔ اوج گلوله برابراست با

$$\frac{1}{4} \times \frac{a^2 tg^2\alpha}{a\,tg\,\alpha - b}$$

۶.۶. برد برروی سطح شیبدار

فرض می‌کنیم که نقطه‌ای مادی باتندی u و با زاویهٔ پرتاب α نسبت به افق، از نقطهٔ P (شکل ۶-۳) واقع برسطح شیبداری با زاویهٔ شیب β پرتاب شده است. جهت پرتاب در صفحهٔ قائمی است که از PQ خط بزرگترین شیب سطح شیبدارمی‌گذرد. فرض می‌کنیم PQ

برد نقطهٔ مادی، QN خط عمود برصفحهٔ افقیی باشدکه از P می‌گذرد.



شکل ۶-۳

برای تعیین مدت پرواز، حرکت را عمود برصفحه درنظرمی‌گیریم.

تندی اولیهٔ عمود برصفحه برابر است با $u\,sin(\alpha-\beta)$ وشتاب دراین جهت برابر است با $-g\,cos\,\beta$. بنابراین مدت پرواز T چنین به‌دست می‌آید:

$$\circ = u\,sin(\alpha-\beta)\times T-\frac{۱}{۲}g\,cos\,\beta\times T^{۲}$$

$$\therefore \qquad T=\frac{۲u\,sin(\alpha-\beta)}{g\,cos\,\beta}$$

تندی افقی دراین مدت، ثابت وبرابراست با $u\,cos\,\alpha$ ومسافت افقی PN که پیموده می‌شود برابر است با

$$\frac{۲u^{۲}sin(\alpha-\beta)cos\,\alpha}{g\,cos\,\beta}$$

و $PQ=\dfrac{PN}{cos\beta}$.

$$\therefore \qquad \text{برد}=\frac{۲u^{۲}\,sin(\alpha-\beta)cos\,\alpha}{g\,cos^{۲}\beta} \qquad (۱)$$

۶.۷. ماکزیمم مقدار برد برای مقدارهای معلوم u و β به‌طریق زیر به‌دست می‌آید:

$$R=\frac{۲u^{۲}\,sin(\alpha-\beta)cos\,\alpha}{g cos^{۲}\,\beta}=\frac{u^{۲}}{g\,cos^{۲}\,\beta}[sin(۲\alpha-\beta)-sin\,\beta] \qquad (۲)$$

اما چون β و u مقدارهای معلومی هستند، مقدارخارج پرانتز یعنی

$$\frac{u^{۲}}{g\,cos^{۲}\beta}$$

مقداری است ثابت، ومقدار عبارت داخل پرانتزهنگامی ماکزیمم است که $sin(۲\alpha-\beta)$ ماکزیمم است، یعنی هنگامی که

$$۲\alpha-\beta=\frac{\pi}{۲}$$

درنتیجه برای ماکزیمم برد

$$\alpha=\frac{\pi}{۴}+\frac{\beta}{۲}$$

مشاهده می‌شود که هروقت α چنین مقداری را دارد $\alpha-\beta=\frac{\pi}{۲}-\alpha$ است، یعنی جهت پرتاب، نیمساز زاویهٔ میان صفحه وخط قائم است.

مقدار ماکزیمم برد برابر است با

$$\frac{u^۲}{g\cos^۲\beta}(۱-\sin\beta)=\frac{u^۲}{g(۱+\sin\beta)} \qquad (۳)$$

۶۰۸۰ برای مقدارمعلوم برد (جزمقدار ماکزیمم) و با تندی پرتاب معلوم، ازرابطهٔ (۲) برای $sin(۲\alpha-\beta)$ مقداری به‌دست می‌آوریم.

اما برای مقدار معلوم‌سینوس دو زاویهٔ کوچکتر از ۱۸۰° به‌دست می‌آید. بنابراین دومقدار برای $۲\alpha-\beta$ بـه‌دست می‌آوریم. اگر θ یکی از آن مقدارها باشد،مقدار دیگر $\pi-\theta$ است، به‌طوری که

$$۲\alpha-\beta=\theta$$

و

$$\alpha=\frac{\theta}{۲}+\frac{\beta}{۲}$$

یا

$$۲\alpha-\beta=\pi-\theta$$

و

$$\alpha=\frac{\pi}{۲}+\frac{\beta}{۲}-\frac{\theta}{۲}$$

پس دو زاویهٔ پرتاب برای یک‌برد معلوم وجود دارد.زاویهٔ پرتاب برای یک مقدار ماکزیمم برابر است با $\frac{\pi}{۴}+\frac{\beta}{۲}$.

نیز

$$\frac{۱}{۲}\left(\frac{\theta}{۲}+\frac{\beta}{۲}+\frac{\pi}{۲}+\frac{\beta}{۲}-\frac{\theta}{۲}\right)=\frac{\pi}{۴}+\frac{\beta}{۲}$$

بنابـراین دو جهت پرتاب برای یك برد معین وجود دارد کـه نسبت بـه‌جهت برد

ماکزیمم به‌یك اندازه انحراف دارند.

۶.۹. در بندهای قبلی جهت پرتاب برحسب زاویهٔ انحراف نسبت به‌افق بیان شد. می‌توانیم جهت پرتاب را برحسب زاویهٔ انحراف نسبت به‌سطح شیبدار نیز بیان کنیم.

ضمن حل مسئله‌ها باید دقت بسیار کرد که موضوع آن به‌خوبی خوانده شود ومعلوم شود که کدام یك ازاین زاویه‌ها، خواسته شده است.

اگر θ زاویهٔ انحراف جهت پرتاب با خط بزرگترین شیب سطح شیبدار باشد، تندیهای اولیهٔ عمود و هم امتداد با سطح به‌ترتیب عبارتند از $u \sin\theta$ و $u \cos\theta$.

مدت زمان پرواز، T، چنین به‌دست می‌آید:

$$\circ = u \sin\theta \times T - \frac{۱}{۲} g \cos\beta \times T^{۲}$$

$$\therefore \qquad T = \frac{۲u \sin\theta}{g \cos\beta} \qquad (۴)$$

برد را می‌توان مطابق قبل، باتوجه به‌اینکه تندی افقی، اینك برابر $u\cos(\beta+\theta)$ است، یا باتوجه به‌حرکت به‌موازات سطح به‌دست آورد.

درمدت T مسافت (R) که به‌موازات سطح پیموده می‌شود برابراست با

$$R = u \cos\theta \times T - \frac{۱}{۲} g \sin\beta \times T^{۲} \qquad (۵)$$

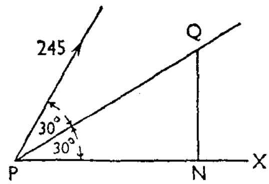
رابطه‌های (۴) و(۵) درمسئله‌هایی که مدت زمان پرواز برای برد معینی‌موردلزوم است، مفیدند. حذف θ ازاین دومعادله بسیارآسان است.

۶.۱۰. مثال ۱: ازپایین سطح شیبداری که زاویهٔ آن با افق ۳۰ درجه است،گلوله‌ای با تندی ۲۴۵ m/s و با زاویهٔ ۶۰ درجه نسبت به‌افق به طرف بالا پرتاب شده است. بردگلوله را برسطح شیبدار ومدت زمان پرواز را تعیین کنید.

حل : فرض می‌کنیم که PQ (شکل ۶-۴) معرف سطح شیبدار و Q نقطه‌ای باشد که گلوله درآن نقطه به‌سطح شیبدار می‌رسد. مؤلفهٔ افقی تندی اولیه درامتداد عمود برسطح شیبدار $۲۴۵ \sin ۳۰^\circ = ۱۲۲/۵$ m/s است.

شتاب درامتداد عمود برسطح شیبدار برابر است با

$$g \, cos ۳۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۲} g = ۴/۹\sqrt{۳} \, \mathrm{m/s^۲}$$



شکل ۶-۴

t مدت زمان پرواز از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$۰ = ۱۲۲/۵ \, t - \frac{۱}{۲} \times ۴/۹\sqrt{۳} \, t^۲$$

$$\therefore \qquad t = \frac{۲۴۵}{۴/۹\sqrt{۳}} = \frac{۵۰\sqrt{۳}}{۳} \# ۲۵/۵ \, \mathrm{s}$$

مسافتی که در این مدت زمان، گلوله به موازات امتداد افقی طی می‌کند برابر است با

$$PN = ۲۵/۵ \times ۱۲۲/۵ \, \mathrm{m}$$

بنابراین برد گلوله برسطح شیبدار

$$PQ = ۲۵/۵ \times ۱۲۲/۵ \times \frac{۲}{\sqrt{۳}} = ۴۰۸۳ \, \mathrm{m}$$

مثال ۲: گلوله‌ای با تندی $۲۰ \, \mathrm{m/s}$ و با زاویهٔ ۴۵° نسبت به‌افق پرتاب می‌شود. برد این گلوله را برسطح شیبداری که با افق زاویهٔ ۳۰ درجه می‌سازد در دو حالت زیر پیدا کنید: (الف) گلوله به طرف بالای سطح شیبدار پرتاب می‌شود، (ب) گلوله به‌طرف پایین سطح شیبدار پرتاب می‌شود.

حل : (الف) مؤلفهٔ تندی اولیه در امتداد عمود برسطح شیبدار برابر است با $۲۰ \, sin ۱۵^\circ \, \mathrm{m/s}$. مؤلفهٔ شتاب درامتداد عمود برسطح شیبدار برابراست با

$$g \, cos \, ۳۰^\circ = \frac{۹/۸\sqrt{۳}}{۲} = ۴/۹\sqrt{۳} \, \mathrm{m/s}$$

مدت زمان پرواز چنین به‌دست می‌آید:

$$۲۰\ sin ۱۵^\circ t - \frac{۴/۹\sqrt{۳}}{۲} t^۲ = ۰$$

$$\therefore \qquad t = \frac{۲۰ \times ۲sin ۱۵^\circ}{۴/۹\sqrt{۳}} = ۱/۲s$$

مؤلفهٔ افقی تندی $۲۰cos۴۵^\circ = ۱۰\sqrt{۲}$ m/s است. بنابراین مسافتی که گلوله درمدت ۱/۲s به‌موازات امتداد افقی می‌پیماید برابر است با $۱۲\sqrt{۲}$ m.

بنابراین برد گلوله برسطح شیبدار برابر است با $۱۲\sqrt{۲} \times \frac{۲}{\sqrt{۳}} = ۱۹/۶$ m

(ب) مؤلفهٔ تندی اولیه درامتداد عمود برسطح شیبدار $۲۰sin۷۵^\circ$ است. مدت زمان پرواز t ثانیه است به‌طوری که

$$۰ = ۲۰\ sin۷۵^\circ - \frac{۴/۹\sqrt{۳}}{۲} t$$

$$\therefore \qquad t = \frac{۲۰sin۷۵^\circ}{۲/۴۵\sqrt{۳}} \# ۴/۶s$$

مؤلفهٔ افقی تندی $\frac{۲۰}{\sqrt{۲}}$ m/s است وفاصله‌ای که گلوله در مدت زمان ۴/۶s به‌موازات سطح افقی می‌پیماید $۴۶\sqrt{۲}$ m است.

بنابراین برد گلوله برسطح شیبدار

$$۴۶\sqrt{۲} \times \frac{۲}{\sqrt{۳}} \# ۷۵\ m$$

مثال ۳: ثابت کنید که به‌ازای تندی پرتاب معینی، برد پرتاب برسطح شیبداری که با افق زاویهٔ α می‌سازد، به‌طرف پایین $\frac{(۱+sin\ \alpha)}{(۱-sin\ \alpha)}$ برابربرد پرتاب براین‌سطح به‌طرف بالاست.

حل: فرض می‌کنیم که u تندی پرتاب و θ زاویهٔ امتداد پرتاب با امتداد سطح شیبدار باشد. وقتی که گلوله از A (شکل ۶-۵) به‌طرف بالا پرتاب می‌شود، مدت‌زمان پرواز از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$۰ = usin\theta \times t - \frac{۱}{۲} g\ cos\ \alpha \times t^۲$$

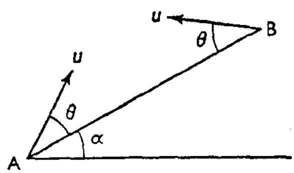
$$\therefore \qquad t=\frac{۲u \sin\theta}{g \cos\alpha}$$

برد گلوله به‌طرف بالا برابر است با

$$\frac{۲u \sin\theta}{g\cos\alpha}\times u\cos(\theta+\alpha)\times\frac{۱}{\cos\alpha}$$

$$=\frac{۲u^{۲}}{g}\times\frac{\sin\theta\cos(\theta+\alpha)}{\cos^{۲}\alpha}$$

$$=\frac{u^{۲}}{g\cos^{۲}\alpha}[\sin(۲\theta+\alpha)-\sin\alpha]$$



شکل ۶-۵

این مقدار هنگامی ماکزیمم است کـه $\sin(۲\theta+\alpha)=۱$ شود. در این صورت

$$\text{برد}=\frac{u^{۲}}{g\cos^{۲}\alpha}(۱-\sin\alpha)$$

هنگامی که گلوله از B باهمان زاویه به‌طرف پایین پرتاب می‌شود، مدت زمـان پرواز همان مقدارقبلی، یعنی $\frac{۲u\sin\theta}{g\cos\alpha}$ است. امـا مـؤلفـهٔ افقـی تـنـدی $u\cos(\theta-\alpha)$ است . بنابراین ، مسافتی که در مدت زمان $\frac{۲u\sin\theta}{g\cos\alpha}$ پیموده می‌شود برابر $\frac{۲u^{۲}\sin\theta\cos(\theta-\alpha)}{g\cos\alpha}$ وبرد گلوله برابراست با

$$\frac{۲u^{۲}\sin\theta\cos(\theta-\alpha)}{g\cos^{۲}\alpha}=\frac{u^{۲}}{g\cos^{۲}\alpha}[\sin(۲\theta-\alpha)+\sin\alpha]$$

این مقدارهنگامی ماکزیمم است که $\sin(۲\theta-\alpha)=۱$ شود. در این‌صورت

$$\text{برد}=\frac{u^{۲}}{g\cos^{۲}\alpha}(۱+\sin\alpha)$$

بنابراین نسبت این دوبرد ماکزیمم برابراست با $\dfrac{(۱+\sin\alpha)}{(۱-\sin\alpha)}$.

مثال ۴: اگر $t_۱$ و $t_۲$ کوتاهترین ودرازترین مدت زمان پرواز برای رسیدن به‌برد معینی بریك سطح شیبدار باشد، ثابت‌کنید که $t_۱^۲+t_۲^۲+۲t_۱t_۲\sin\alpha$ مقداری است ثابت و مستقل از α (α زاویهٔ سطح شیبدار با افق است). تندی پرتاب معلوم است.

حل : فرض می‌کنیم‌که V تندی پرتاب و θ زاویهٔ پرتاب نسبت به‌سطح شیبدار باشد. مؤلفهٔ تندی اولیه در امتداد عمود برسطح شیبدار $V\sin\theta$ و مدت زمان پرواز برابر است با t که ازرابطهٔ زیربه‌دست می‌آید:

$$V\sin\theta\times t-\frac{۱}{۲}g\cos\alpha\times t^۲=۰ \qquad (۱)$$

مؤلفهٔ تندی اولیه درامتداد موازی با سطح شیبدار $V\cos\theta$ و شتاب به طرف پایین‌سطح $g\sin\alpha$ است. بردگلوله درمدت زمان t ازرابطهٔ زیر به‌دست‌می‌آید:

$$R=V\cos\theta\times t-\frac{۱}{۲}g\sin\alpha\times t^۲ \qquad (۲)$$

از (۱) و(۲) نتیجه می‌شود

$$V\sin\theta\times t=\frac{۱}{۲}g\cos\alpha\times t^۲$$

$$V\cos\theta\times t=R+\frac{۱}{۲}g\sin\alpha\times t^۲$$

دو رابطهٔ بالا را مربع کرده با هم جمع می‌کنیم،

$$V^۲t^۲=R^۲+gR\sin\alpha\times t^۲+\frac{g^۲}{۴}t^۴$$

یا

$$\frac{g^۲}{۴}t^۴+t^۲(gR\sin\alpha-V^۲)+R^۲=۰$$

اگر $t_۱^۲$ و $t_۲^۲$ ریشه‌های این معادلهٔ دومجذوری باشند،

$$t_۱^۲+t_۲^۲=-\frac{۴R}{g}\sin\alpha+\frac{۴V^۲}{g^۲}$$

و
$$t_1^2 t_2^2 = \frac{4R^2}{g^2}$$

$\therefore$
$$t_1 t_2 = \frac{2R}{g}$$

$\therefore$
$$t_1^2 + t_2^2 + 2t_1 t_2 \sin\alpha$$
$$= -\frac{4R}{g}\sin\alpha + \frac{4V^2}{g^2} + \frac{4R}{g}\sin\alpha$$
$$= \frac{4V^2}{g^2}$$

این رابطه مستقل از α است.

تمرین ۶.۲

۱ـ گلوله‌ای با تندی ۹۰ m/s وبا انحراف ۶۰ درجه ازپایین سطح شیبداری که زاویهٔ شیب آن ۳۰ درجه است پرتاب می‌شود. حرکت درصفحهٔ قائمی انجام می‌گیرد که خط بزرگترین شیب سطح شیبدار را دربردارد. بردگلوله، نیز مدت زمان پرواز را پیدا کنید.

۲ـ گلوله‌ای با تندی ۳۸۴ m/s وبا انحراف °۷۵ پرتاب می‌شود. بردگلوله را برسطح شیبداری که با افق زاویهٔ °۴۵ می‌سازد در دوحالت پیدا کنید: (الف) گلوله به‌طرف بالای سطح شیبدار پرتاب می‌شود؛ (ب) گلوله به طرف پایین سطح شیبدار پرتاب می‌شود.

۳ـ ازنقطه‌ای واقع برسطح شیبداری که با افق زاویهٔ ۳۰ درجه می‌سازد، گلوله‌ای با تندی ۴۰۰ cm/s عمود برسطح شیبدار به‌طرف بالا پرتاب می‌شود. برد آن را تعیین کنید.

۴ـ حداکثر برد افقی گلوله‌ای که با تندی معین پرتاب می‌شود ۳۰۰۰ m است. حداکثر برد این گلوله به‌طرف بالا، نیزبه‌طرف پایین‌سطح شیبداری که با افق زاویهٔ ۳۰درجه می‌سازد چقدراست؟ تندی گلوله به‌همان اندازهٔ قبلی است.

۵ـ ازپایین سطح شیبداری، گلوله‌ای با تندی ۶۰۰ m/s با زاویهٔ پرتاب °۶۰ پرتاب می‌شود. اگر زاویهٔ سطح شیبدار با افق °۳۰ یا °۴۵ باشد، بردگلوله در هرحالت چقدر خواهد بود؟ حداکثر برد براین سطحها با تندی اولیهٔ داده شده چقدراست؟

۶ـ ازپایین سطح شیبداری که با افق زاویهٔ β می‌سازدگلوله‌ای به‌طرف بالا چنان پرتاب

می‌شود که امتداد پرتاب با امتداد سطح شیبدار زاویه‌ای برابر α می‌سازد. ثابت کنید که بردگلوله براین سطح برابر است با $R\dfrac{(1-tg\,\alpha\,tg\,\beta)}{cos\,\beta}$ که درآن R برد همان گلوله برسطح افقی است، هنگامی که گلوله باهمان تندی و زاویهٔ α نسبت به‌سطح افقی پرتاب شود.

۷ ـ از نقطه‌ای واقع برسطح شیبداری که با قائم زاویهٔ 2β می‌سازد، گلولهٔ سنگینی به‌طرف بالای سطح شیبدار پرتاب می‌شود. حرکت درصفحهٔ قائم خط بزرگترین شیب سطح شیبدار انجام می گیرد. تندی اولیهٔ پرتاب برابر $u\,cos\,\beta$ است و جهت اولیهٔ حرکت با امتداد قائم زاویهٔ β می‌سازد. ثابت کنید که مدت زمان پرواز گلوله u/g، بردگلوله $u^2/2g$ و تندی گلوله هنگام برخورد با سطح شیبدار $u\,sin\,\beta$ و امتداد حرکت دراین هنگام افقی است.

۸ ـ گلوله‌ای با تندی u چنان پرتاب می‌شود که امتداد حرکت آن، هنگام برخورد با سطح شیبداری که با افق‌زاویهٔ $30°$ می‌سازد، عمود برسطح شیبدارباشد. ثابت کنید که بردگلوله براین سطح برابر است با

$$\frac{4u^2}{7g}$$

۹ ـ نقطه‌ای مادی با تندی V و زاویهٔ انحراف α از روی خطی که با افق زاویهٔ β می‌سازد پرتاب می‌شود. ثابت کنید که در ضمن پرواز، جهت حرکت نقطهٔ مادی به‌اندازه‌ای می‌چرخد که کتانژانت زاویهٔ چرخش آن برابر است با

$$\frac{1}{2}\times\frac{cos\,\beta}{cos\,\alpha\,sin\,(\alpha-\beta)}-tg\,\alpha$$

۱۰ـ گلوله‌ای ازنقطه‌ای می گذرد که انحراف زاویه‌ای‌آن ازنقطهٔ پرتاب برابر θ است، و درآن نقطه به‌طورعمود با سطح شیبداری که زاویهٔ شیب‌آن نسبت به‌افق β است برخورد می کند. ثابت کنید که زاویهٔ پرتاب α که گلوله باید تحت آن زاویه پرتاب شود از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$tg\,\alpha=cotg\,\beta+2\,tg\,\theta$$

۱۱ـ اگر حداکثر بردگلوله‌ای بر یك سطح شیبدار برابر R و مدت زمان پرواز برای رسیدن به‌این برد برابر T باشد، ثابت کنید که $R=\frac{1}{2}gT^2$.

۱۲ـ گلوله‌ای از یك تفنگ با تندی $300\ m/s$ به‌طور افقی شلیك می‌شود. تفنگ در

بالای تپه‌ای واقع است که تانژانت زاویهٔ شیب آن با افق برابر $\frac{۴}{۵}$ است. تعیین کنید گلوله درچه فاصله‌ای از تفنگ به‌زمین برخورد می‌کند. سپس بزرگی و جهت تندی گلوله را هنگام برخورد با زمین تعیین کنید.

۱۳- ازنقطه‌ای واقع بریك‌تپه که زاویهٔ شیب آن ۳۰° است، گلوله‌ای باتندی $۴۸۰\ \mathrm{m/s}$ و با زاویهٔ پرتاب ۳۰° به‌طرف پایین پرتاب می‌شود. بردگلوله را در امتداد تپه و مدت زمان پرواز را تعیین کنید.

۱۴- در صفحهٔ قائم خط بزرگترین شیب سطح شیبداری‌که با افق زاویهٔ α می‌سازد، گلوله‌ای با تندی V و با زاویهٔ پرتاب $\alpha+\theta$ پرتاب می‌شود. بردگلوله بر این سطح چقدر است؟ اگر امتداد حرکت گلوله هنگام برخورد با سطح شیبدار افقی باشد ثابت کنید که

$$tg\,\theta=\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{۱+\sin^{۲}\alpha}$$

۱۱.۶. مثال ۱: گلوله‌ای چنان پرتاب می‌شودکه مؤلفه‌های افقی و قائم تندی آن به‌ترتیب u و v است و ازنقطه‌ای می‌گذردکه فاصله‌های افقی و قائم از نقطهٔ پرتاب به‌ترتیب h و k است. ثابت کنیدکه

$$۲u^{۲}k+gh^{۲}=۲uvh$$

گلوله‌ای چنان پرتاب می‌شودکه از دونقطه می‌گذردکه فاصله‌های افقی و قائم آنها از نقطهٔ پرتاب (۱۱ و۳۶) و (۱۴ و۷۲) متر است. تندی و زاویهٔ پرتاب را حساب کنید.

حل : مدت زمانی‌که گلوله فاصلهٔ افقی h را می‌پیماید برابر است با h/u. دراین مدت زمان، گلوله به‌ارتفاع k رسیده است. پس می‌توان نوشت:

$$k=v\times\frac{h}{u}-\frac{۱}{۲}g\frac{h^{۲}}{u^{۲}}$$

$$\therefore\qquad ۲u^{۲}k+gh^{۲}=۲uvh$$

اگر $h=۳۶\ \mathrm{m}$ ، $k=۱۱\ \mathrm{m}$ باشد،

$$۲u^{۲}\times۱۱+۹/۸\times۳۶^{۲}=۲uv\times۳۶\qquad(۱)$$

نیز اگر $h=۷۲\,\mathrm{m}$ ، $k=۱۴\,\mathrm{m}$ باشد،

$$۲u^۲\times ۱۴+۹/۸\times ۷۲^۲=۲uv\times ۷۲ \qquad (۲)$$

رابطهٔ (۱) را درعدد ۲ ضرب می‌کنیم:

$$۲u^۲\times ۲۲+۱۹/۶\times ۳۶^۲=۲uv\times ۷۲$$

$$\therefore \quad ۲u^۲(۲۲-۱۴)+۹/۸\times ۳۶^۲(۲-۴)=۰$$

$$\therefore \quad ۱۶u^۲=۱۹/۶\times ۳۶^۲$$

$$u \# ۴۰\,\mathrm{m/s}$$

با به‌کاربردن این مقدار در رابطهٔ (۱) نتیجه می‌شود که:

$$v=۱۶/۸\,\mathrm{m/s}$$

پس تندی پرتاب

$$V=\sqrt{u^۲+v^۲}=\sqrt{۱۶/۸^۲+۴۰^۲}=۴۳/۴\,\mathrm{m/s}$$

تانژانت زاویهٔ پرتاب

$$tg\,\theta=\frac{v}{u}=\frac{۱۶/۸}{۴۰}$$

$$\theta=\mathrm{Arc}\,tg\,۰/۴۲$$

مثال ۲: ازنقطهٔ P گلوله‌ای با تندی V و زاویهٔ پرتاب α پرتاب می‌شود و پس‌از t ثانیه به‌نقطهٔ Q می‌رسد. فاصله‌های افقی و قائم Q را از P پیدا کنید. ثابت کنیدکه اگر امتداد PQ با امتداد افقی زاویهٔ θ بسازد، و امتدادگلوله درنقطهٔ Q با امتداد افقی زاویه‌ای برابر β بسازد

$$tg\,\beta=۲tg\,\theta-tg\,\alpha$$

حل : اگر x وy به‌ترتیب فاصله‌های افقی و قائم Q از P باشند،

$$x=V\cos\alpha\times t$$

$$y=V\sin\alpha\times t-\frac{۱}{۲}gt^۲$$

اگر v و u به‌ترتیب مؤلفه‌های قائم وافقی تندی گلوله در نقطهٔ Q باشند،

$$u=V\cos\alpha$$

$$v=V\sin\alpha-gt$$

$$(۱) \qquad tg\,\theta = \frac{y}{x} = tg\,\alpha - \frac{gt}{۲V\cos\alpha} \qquad \text{اما}$$

زاویه‌ای که امتداد حرکت در نقطهٔ Q با امتداد افقی می‌سازد β است به‌طوری که

$$tg\beta = \frac{v}{u} = tg\,\alpha - \frac{gt}{V\cos\alpha}$$

اما برطبق رابطهٔ (۱):

$$\frac{gt}{V\cos\alpha} = ۲tg\,\alpha - ۲tg\,\theta$$

$$\therefore \qquad tg\,\beta = ۲tg\,\theta - tg\,\alpha$$

تمرین ۳.۶

۱ـ ثابت کنید که اگر دو گلوله همزمان از یك نقطه پرتاب شوند، امتداد خط واصل میان دو گلوله در سرتاسر حرکت تغییرجهت نمی‌دهد.

۲ـ از بالای تخته سنگی به ارتفاع h از سطح دریا گلوله‌ای پرتـاب می‌شود و حداکثر ارتفاعی کـه از سطح دریا به‌دست می‌آورد $h+b$ است. گلوله درمکانی به‌آب دریـا می‌رسد که به‌فاصلهٔ a از پای تخته سنگ است. ثابت کنید کـه زاویهٔ پرتاب گلوله از معادلهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$a^۲tg^۲\alpha - ۴ab\,tg\alpha - ۴bh = ۰$$

۳ـ گلوله‌ای از A پرتاب می‌شود و از نقاط B و C می‌گذرد. اگرفاصله‌های افقی وقائم B از A به‌ترتیب a و b باشد و AC افقی و طول آن برابر c باشد، زاویهٔ پرتاب و ارتفاع نقطهٔ اوج را تعیین کنید.

۴ـ با یك تفنگ می‌خواهیم علامتی راکه به‌فاصلهٔ تخمینی ۱۲۰۰ m است نشانه برویم. اگر تندی گلوله درلوله ۶۰۰ m/s باشد، جهتی را که لولهٔ تفنگ باید به‌آن سمت نشانه برود تعیین کنید.

اگر فاصلهٔ واقعی علامت ۱۱۵۰ m باشد، گلوله ازچه ارتفاعی بالای علامت مذکور می‌گذرد؟

۵ـ اگر با یك تندی پرتاب معین، بردگلوله‌ای نصف برد ماکزیمم باشد، ثابت کنید کـه دو زاویهٔ پرتاب ممکن‌وجود دارد. آن دو زاویه را پیدا کنید. نسبت ماکزیمم‌ارتفاع دومسیر را تعیین کنید.

۶ـ از نقطه‌ای که در ارتفاع $۳h$ بالای سطح افقی زمین قرار دارد گلوله‌ای چنان پرتاب

می‌شودکه ارتفاع نقطهٔ اوج آن از سطح پرتاب برابر h باشد. ثابت کنید که فاصلهٔ افقیی که قبل از برخورد با زمین می‌پیماید برابر است با $۶h\, cotg\, \alpha$.

۷ ـ دو گلوله دریك لحظه با تندی اولیهٔ یکسان و با زاویه‌های پرتاب α و α' در یك سطح قائم پرتاب می‌شوند. ثابت کنید که، در تمام مسیر، خطی که دو گلوله را در هرلحظه به‌یکدیگروصل می کند با امتداد قائم‌زاویه‌ای برابر $\frac{۱}{۲}(\alpha+\alpha')$ می‌سازد.

۸ ـ دو سطح شیبدار AB و AC در A دارای یال مشترك هستند. از B گلوله‌ای به‌طرف بالا پرتاب‌می‌شود، به‌طوری که درست از A و C می گذرد. حرکت درصفحهٔ قائمی که خطوط بزرگترین شیب سطوح شیبدار را دربردارد انجام می گیرد. اگر زاویه‌های‌سطوح شیبدار با افق به‌ترتیب α و β و زاویهٔ پرتاب θ باشد، ثابت کنیدکه

$$tg\, \theta = tg\, \alpha + tg\, \beta$$

۹ ـ نقطه‌ای مادی ازنقطهٔ A پرتاب می‌شود. حرکت آن را از نقطه‌ای مانند B که در مسیرآن است در زمینهٔ راستای قائمی که از A می گذرد مشاهده می کنند. ثابت کنید که به‌نظر می‌رسد نقطهٔ مادی در امتداد این راستا با حرکت یکنواخت با سرعت $\frac{۱}{۲}gt_{\circ}$ بالا می‌رودکه درآن $t_{\circ}$ مدت زمانی است که طول می کشد تا نقطهٔ مادی به B برسد.

۱۰ـ گلوله‌ای چنان پرتاب می‌شودکه از نقاط B و A که بالای سطح افقی پرتاب قرار دارند بگذرد. فاصله‌های افقي و قائم A از نقطهٔ پرتاب به‌ترتیب a و b است. فاصله‌های افقی و قائم B ازنقطهٔ پرتاب به‌ترتیب b و a است. ثابت کنید که برد افقی گلوله برابر است با $\frac{(a^{۲}+ab+b^{۲})}{(a+b)}$. نیزثابت کنیدکه تانژانت زاویهٔ پرتاب بزرگتر از ۳ است.

۱۱ـ دو گلولهٔ A و B باهم و با یك‌سرعت و دریك‌سطح قائم‌پرتاب می‌شوند. امتدادهای پرتاب عمود بریکدیگراست. ثابت کنیدکه تا هنگامی که هردو گلوله حرکت می کنند، خط واصل میان دوگلوله به‌موازات خودش حرکت می کند و فاصلهٔ میان دو گلوله به‌نسبت ثابتی زیاد می‌شود. نیز ثابت کنیدکه اگر A ابتدا به‌زمین بخورد، فاصلهٔ افقیی که B می‌پیماید چهار برابر ارتفاع ماکزیمم A است.

۱۲ـ دو گلوله با هم از دونقطهٔ A و B (که بریك خط افقی قرارندارند) با تندی اولیهٔ V و با زاویه‌های پرتاب یکسان و برابر α به‌طرف یکدیگر پرتاب می‌شوند. ثابت کنید که فاصلهٔ دوگلوله پس از مدتی برابر $h/۲V\cos\alpha$ به‌حداقل می‌رسد. دراین رابطه h فاصلهٔ افقی میان دونقطه است. نیز ثابت کنید که این حداقل فاصله برابر است با

k، فاصلهٔ قائم میان دونقطهٔ A و B.

۱۳- دوگلوله دریك لحظه از یك نقطه دریك سطح قائم پرتاب می‌شوند. سرعت پرتاب دوگلوله یکسان و برابر V است. زاویهٔ پرتاب یکی θ_1 و زاویهٔ پرتاب دیگری θ_2 است. ثابت‌کنیدکه پس از مدت زمانی برابر

$$\frac{V}{g}\times\frac{\cos\frac{1}{2}(\theta_1-\theta_2)}{\sin\frac{1}{2}(\theta_1+\theta_2)}$$

امتداد تندیهای دوگلوله با هم موازی می‌شود.

۱۴- به‌سوی هدفی که درسطح افقی پرتاب است، گلوله‌ای با زاویهٔ پرتاب $30°$ پرتاب می‌شود. اما ۶ m نزدیکتر می‌افتد. وقتی‌که زاویهٔ پرتاب را به $45°$ می‌رسانیم گلوله ۹ m دورتر می‌افتد. ثابت‌کنیدکه برای نشانه‌گیری درست، زاویهٔ پرتاب باید تقریباً برابر $33°26'$ باشد.

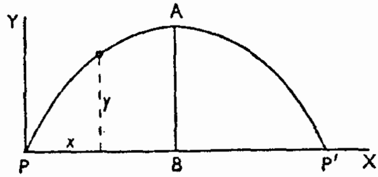
۱۵- اگر شخصی با تندی V و زاویهٔ انحراف α از زمین بجهد و درهمان لحظه سنگی با همان تندی اما با زاویهٔ انحراف β پرتاب شود، نشان دهیدکه به‌نظر این شخص چنین می‌آیدکه سنگ با تندی ثابت درجهت ثابت معینی حرکت می‌کند.
از این گذشته، ثابت‌کنید که اگر $\beta-\alpha=60°$ باشد تندی ظاهری سنگ برابر V خواهد بود.

۱۶- گلوله‌ای چنان پرتاب شده است که حداقل انرژی جنبشی آن $1/n$ انرژی جنبشی گلوله درهنگام پرتاب باشد. ثابت‌کنیدکه $\cos\alpha=\sqrt{n}/n$ است‌که α زاویهٔ پرتاب است.

۱۷- جسمی از نقطهٔ A پرتاب می‌شود. ثابت‌کنیدکه این‌جسم ازنقطهٔ B نخواهدگذشت، مگرآنکه سرعت پرتاب آن قدر باشدکه اگر با این سرعت جسم را به‌طرف بالا پرتاب‌کنیم حداقل ارتفاعی‌که بالا می‌رود برابرباشد با $\frac{1}{2}(AB+BN)$، که BN ارتفاع B ازصفحهٔ افقی مارّبر A است.

۱۲.۶. مسیر پرتابی (با صرف‌نظرکردن از مقاومت هوا) یك‌سهمی است.

فرض می‌کنیم‌که u و α تندی و زاویهٔ پرتاب از P باشد (شکل ۶-۶). PX رابه‌عنوان محور افقی مختصات و PY را به‌عنوان محور قائم مختصات می‌گیریم. پس از مدت t



شکل ۶-۶

خواهیم داشت،

$$x = u \cos\alpha \times t \qquad (۱)$$

و

$$y = u \sin\alpha \times t - \frac{۱}{۲} g t^{۲} \qquad (۲)$$

با حذف t از رابطهٔ (۲)،

$$y = x \, tg\,\alpha - \frac{g x^{۲}}{۲ u^{۲} \cos^{۲}\alpha} \qquad (۳)$$

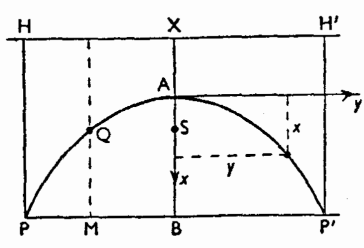
این یك معادلهٔ سهمی است که محورهای آن برهم عمودند.

وقتی که $y = ۰$ است از معادلهٔ (۳) نتیجه می‌شود،

$$x = ۰ \quad \text{و} \quad x = \frac{۲u^{۲} \cos\alpha \sin\alpha}{g}$$

مقدار $x = ۰$ مربوط به‌نقطهٔ P است و مقدار دیگر x مربوط به‌نقطهٔ P′ است که PP′ برد افقی است.

۱۳.۶. می‌توانیم معادلهٔ مسیر را به‌طریق ساده‌تری به‌دست آوریم، و آن این است که محورهای قائم و افقی را ازنقطهٔ A بالاترین نقطهٔ مسیررسم کنیم (شکل ۶-۷). می‌دانیم



شکل ۶-۷

که تندیهای افقی و قائم درنقطهٔ A برابرند با $u\cos\alpha$ و صفر.

پس درلحظهٔ t از A، اگر x را به‌طور قائم و به طرف پایین و y را به‌طور افقی اندازه بگیریم،

$$y = u\cos\alpha \times t$$

$$x = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{gy^2}{2u^2\cos^2\alpha}$$

$$\therefore \quad y^2 = \frac{2u^2\cos^2\alpha}{g} \times x$$

این‌معادلهٔ یک‌سهمی‌است‌که مبدأ آن A و محور AB قائم است. پارامتر این‌سهمی $\frac{2u^2\cos^2\alpha}{g}$ است که فقط بستگی به تندی افقی دارد.

اگر S کانون آن باشد،

$$AS = \frac{u^2\cos^2\alpha}{2g}$$

خط هادی HXH' افقی است و به‌ارتفاع $\frac{u^2\cos^2\alpha}{2g}$ بالای A است.

ارتفاع A از P برابر است با $\frac{u^2\sin^2\alpha}{2g}$.

بنابراین ارتفاع خط هادی از P برابر است با:

$$\frac{u^2\cos^2\alpha}{2g} + \frac{u^2\sin^2\alpha}{2g} = \frac{u^2}{2g}$$

این نشان می‌دهدکه ارتفاع خط هادی از نقطهٔ پرتاب فقط به تندی اولیه بستگی دارد، و برای تمام مسیرهای ممکن با این تندی معین یکسان است.

نیز مشاهده می‌شودکه ارتفاع‌خط هادی ازنقطهٔ پرتاب برابراست با ارتفاع نقطه‌ای مادی‌که اگر به‌طور قائم به‌طرف بالا پرتاب می‌شد به‌آن ارتفاع می‌رسید.

تندی قائم درنقطهٔ Q از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$v^2 = u^2\sin^2\alpha - 2g \times QM$$

تندی افقی برابر است با $u\cos\alpha$.

پس تندی برایند در نقطهٔ Q برابر است بـا $\sqrt{(u^2 - 2g \times QM)}$.

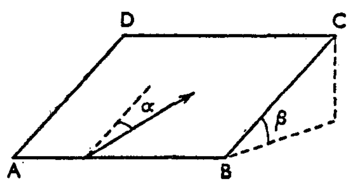
تندی نقطهٔ مادی که براثر سقوط از خط هادی به‌نقطهٔ Q ، با پیمودن مسافتی‌برابر $\frac{u^{2}}{2g}-QM$ به‌دست می‌آورد برابر است با

$$\sqrt{2g\left(\frac{u^{2}}{2g}-QM\right)}=\sqrt{(u^{2}-2g\times QM)}$$

بنابراین تندی در هرنقطه برابراست با تندیی که براثرسقوط آزاد ازخط هادی به‌آن نقطه حاصل می‌شود.

۱۴.۶. حرکت برسطح صیقلی شیبدار

فرض می‌کنیم نقطه‌ای مادی با تندی u برسطح صیقلی شیبدار ABCD (شکل ۶-۸) پرتاب شده است. شیب سطح β است و جهت پرتاب با خط بزرگترین شیب سطح زاویهٔ α می‌سازد.



شکل ۶-۸

شتاب ناشی از جاذبه دارای مؤلفه‌های $g\sin\beta$ درجهت خط بزرگترین‌شیب سطح و $g\cos\beta$ درجهت عمود برسطح شیبدار است.

مؤلفهٔ اخیر به‌وسیلهٔ عکس‌العمل سطح خنثی می‌شود، بنابراین‌نقطهٔ مادی با شتاب $g\sin\beta$ به‌موازات خط بزرگترین شیب سطح حرکت خواهدکرد.

بنابراین حرکت نسبت به‌این سطح همانند حرکتی است که دربند ۳.۶ دیدیم، با این تفاوت که در اینجا، شتاب به‌جای آنکه برابر g باشد برابر $g\sin\beta$ است.

مثال: نقطه‌ای مادی به‌طرف بالای سطح شیبداری (به‌زاویهٔ شیب 30°) طوری پرتاب شده است که جهت پرتاب با خط بزرگترین شیب سطح زاویهٔ 30° می‌سازد. تندی اولیهٔ پرتاب برابر V بوده است. معادله‌های حرکت را بنویسید و معادلهٔ مسیر را براین سطح پیدا کنید. نیز فاصلهٔ نقطهٔ مادی را هنگامی‌که دوباره به این سطح

برخورد می‌کند از نقطهٔ شروع حرکت پیدا کنید.

حل : خط افقی و خط بزرگترین شیب سطح را که از نقطهٔ شروع حرکت می‌گذرد به‌عنوان محورهای x و y انتخاب می‌کنیم. دراین صورت درلحظهٔ t پس‌از شروع حرکت،

$$x = V\sin 30^\circ \times t \qquad (1)$$

$$y = V\cos 30^\circ \times t - \frac{1}{2} g \sin 30^\circ \times t^2 \qquad (2)$$

اینها معادله‌های حرکتند که با قراردادن مقدار t از (۱) در (۲) چنین خواهیم‌داشت:

$$y = x\,\mathrm{cotg}\,30^\circ - \frac{g}{4} \times \frac{x^2}{V^2 \sin^2 30^\circ}$$

یا

$$y = \sqrt{3}x - \frac{gx^2}{V^2}$$

و این معادلهٔ مسیر است.

وقتی‌که $y = 0$ است،

$$\frac{gx^2}{V^2} = \sqrt{3}x$$

$$\therefore \qquad x = 0 \quad \text{یا} \quad x = \frac{\sqrt{3}V^2}{g}$$

مقدار $x = \frac{\sqrt{3}V^2}{g}$ فاصلهٔ نقطهٔ مادی از نقطهٔ شروع حرکت و درهنگامی است که به‌سطح برخورد می‌کند.

۱۵.۶. مسائل بیشتری دربارهٔ پرتابیها

مثالهای زیر برخورد نقطه‌های مادی پرتاب شده را نیز شامل می‌شود.

مثال ۱: گلوله‌ای در امتداد میز افقی صیقلی‌که ارتفاع آن $1/2\ \mathrm{m}$ است چنان پرتاب می‌شودکه وقتی‌که میز را ترك می‌کند، جهت حرکت آن برکنارهٔ میز عمود و تندی آن دراین هنگام $3\ \mathrm{m/s}$ باشد. نشان دهیدکه اگر ضریب بازگشت میان گلوله و زمین، که آن را صیقلی فرض می‌کنیم، برابر $\frac{1}{2}$ باشدگلوله برای بار

دوم که به‌زمین برخورد می کند درفاصلهٔ ۳ m از میز است.درچه هنگامی درفاصلهٔ ۴/۵ m از میز خواهد بود؟

حل : اگر t ثانیه طول بکشد تا گلوله به‌زمین برسد، دراین‌صورت چون سرعت درابتدا افقی است،

$$۱/۲ = \frac{۱}{۲} \times ۹/۸ t^{۲}$$

$$\therefore \quad t^{۲} = \frac{۱۲}{۴۹} \quad \text{یا} \quad t \# ۰/۵$$

بنابراین فاصلهٔ افقیی که در این مدت می‌پیماید برابر است با

$$۳ \times \frac{۱}{۲} = ۱/۵ \text{ m}$$

پس گلوله درفاصلهٔ ۱/۵ متری میز به زمین می‌خورد و سپس برمی گردد. تندی قائم آن درست قبل از برخورد با زمین $\frac{۱}{۲} g = ۴/۹ \text{ m/s}$ است وتندی افقی‌آن همان ۳ m/s است.

چون زمین صیقلی‌فرض‌شده است، تندی افقی گلوله درنتیجهٔ برخورد بدون تغییر باقی می‌ماند، اما تندی قائم به‌طرف بالاخواهد بود و مساوی با $\frac{۱}{۲}(۴/۹)\text{m/s}$ است.

بنابـراین اگر R متر فاصله‌ای باشد کـه گلوله پیش از آنکه دوبـاره بـا زمین برخوردکند بپیماید، و T ثانیه، مدت زمانی باشد کـه این عمل طول می کشد، خواهیم داشت،

$$R = ۱۳T$$

$$\text{و} \quad ۰ = ۲/۴۵T - ۴/۹T^{۲}$$

$$\therefore \quad T = \frac{۱}{۲} \quad \text{و} \quad R = ۱/۵$$

بنا براین مسافت کلی که گلوله در دومین برخورد خود با زمین از میز دور است برابر است با $(۱/۵ + ۱/۵)\text{m}$ یا ۳ m.

چون تندی افقی گلوله درنتیجهٔ برخورد با زمین تغییرنمی کند، درسرتاسر حرکت

ثابت باقی می‌ماند، و بنابراین گلوله پس از مدت زمانی برابر $\frac{۴/۵}{۳}$ یعنی ۱/۵ ثانیه درفاصلهٔ ۴/۵ متری میز است.

مثال ۲: از نقطه‌ای به‌فاصلهٔ a از یك دیوار قائم و صیقلی، گلوله‌ای پرتاب می‌شود و پس از برخورد با دیوار برمی‌گردد و به‌نقطهٔ پرتاب می‌رسد. ثابت کنیدکه تندی پرتاب u و زاویهٔ پرتاب α با معادلهٔ زیر به‌یکدیگر مربوطند:

$$u^{۲} sin ۲\alpha = ag\left(\frac{۱+e}{e}\right)$$

که درآن e ضریب بازگشت میان گلوله و دیوار است.

حل : چون دیوار صیقلی است، تندی قائم تحت تأثیر برخورد قرار نمی‌گیرد، یعنی زمان پرواز باز هم

$$\frac{۲u \, sin \, \alpha}{g}$$

خواهد بود.

گلوله با تندی افقی $u \, cos \, \alpha$ به دیوار نزدیك می‌شود و با تندی $eu \, cos \, \alpha$ از دیوار به‌عقب برمی‌گردد.

بنابراین مدتی‌که طول می‌کشد تا گلوله به‌دیوار برخوردکند و دوباره مسافت افقی a را به‌عقب برگردد، به‌ترتیب برابرند با: $\frac{a}{u \, cos \, \alpha}$ و $\frac{a}{eu \, cos \, \alpha}$

$$\therefore \quad \frac{۲u \, sin \, \alpha}{g} = \frac{a}{u \, cos \, \alpha} + \frac{a}{eu \, cos \, \alpha}$$

$$\therefore \quad \frac{۲u \, sin \, \alpha}{g} = \frac{a(۱+e)}{eu \, cos \, \alpha}$$

$$\therefore \quad u^{۲} sin ۲\alpha = ag\left(۱+\frac{۱}{e}\right)$$

تمرین ۴.۶

۱ـ نقطه‌ای مادی به‌جرم m و با زاویهٔ α نسبت به افق پرتاب می‌شود. درهمان لحظه نقطه‌ای مادی به‌جرم $۳m$ از ارتفاع $\frac{v^{۲} sin^{۲}\alpha}{g}$ که به فاصلهٔ افقی $\frac{v^{۲} \, sin \, \alpha \, cos \, \alpha}{g}$

ازنقطهٔ پرتاب نقطهٔ مادی اولی است رها می‌شود. نشان دهیدکه این‌نقطه‌های مادی با یکدیگر برخورد خواهندکرد. اگر دونقطهٔ مادی با یکدیگر ترکیب شوند، وضع نقطه‌ای را که این‌نقطه‌های مادی درآن نقطه به‌زمین برخورد خواهندکرد، نیز مدت زمانی را بیابید که طول می‌کشد تا این نقطه‌های مادی به‌زمین برسند.

۲ـ جسمی از حال سکون در امتداد سطح صیقلی شیبداری به طول l و زاویهٔ شیب α شروع به‌حرکت می‌کند و درانتهای این‌سطح با یك‌سطح افقی صیقلی برخورد می‌کند. نشان دهیدکه بردآن برسطح افقی پس‌از اولین برگشت برابر $۲el\,sin\,\alpha sin\,۲\alpha$ است که درآن e ضریب بازگشت میان جسم و سطح افقی است.

۳ـ جسمی به‌جرم $۳۰۰\,\mathrm{g}$ هنگامی‌که ازنقطهٔ A، $۱۸/۴\,\mathrm{m}$ بالای زمین، می‌گذرد تندی آن برابر $۱۳/۲\,\mathrm{m/s}$ است و در این نقطه با جسمی به‌جرم $۳۰\,\mathrm{g}$ که به‌طور قائم به‌طرف بالا حرکت می‌کند و در این نقطه تندی آن $۱۶۵\,\mathrm{m/s}$ است برخورد می‌کند و دوجسم تشکیل یك جسم می‌دهند. وضع نقطه‌ای را بیابیدکه جسم مرکب به‌زمین برخورد می‌کند.

۴ـ ازنقطه‌ای به‌فاصلهٔ a از یك دیوار صیقلی، نقطه‌ای مادی،که ارتفاع اولیه‌اش از سطح زمین برابر h است، با تندی افقی u به‌طرف دیوار پرتاب می‌شود. اگر $a < u\sqrt{۲h/g}$ باشد، نشان دهید که نقطهٔ مادی در نقطه‌ای به فاصلهٔ $e(u\sqrt{۲h/g}-a)$ ازدیواربه‌زمین برخورد می‌کند؛ e ضریب بازگشت‌میان دیوار و نقطهٔ مادی است.

۵ـ گلوله‌ای با سرعت $۱۹/۶\,\mathrm{m/s}$ با زاویهٔ انحراف ۴۵° پرتاب شده است. این‌گلوله به‌دیوار قائمی‌که درفاصلهٔ $۹/۸\,\mathrm{m}$ ازمحل پرتاب‌آن است برخورد می‌کند و به‌نقطهٔ پرتاب برمی‌گردد. ضریب بازگشت میان‌گلوله و دیوار را تعیین‌کنید.

۶ـ نقطهٔ مادی کشسانی از نقطه‌ای واقع برزمین‌که به‌فاصلهٔ a از یك دیوار قائم صیقلی است با سرعت u و با انحرافی نسبت به افق به طرف دیوار پرتاب می‌شود. ثابت کنیدکه اگر

$$u^۲ > \frac{۱+e}{e} \times ag$$

باشد، این‌گلوله پس از بازگشت ازدیوار درنقطه‌ای به‌زمین برخورد خواهدکرد که فاصله‌اش ازدیوار ازفاصلهٔ نقطهٔ پرتاب ازدیواربیشتراست. e ضریب‌بازگشت است.

۷ ـ یك نقطهٔ مادی از ارتفاع h برصفحهٔ شیبدار صیقلی و کاملاً کشسانی می‌افتد و

برمی‌گردد. تعیین کنید درچه فاصله‌ای از نقطهٔ برخورد اولیه، مجدداً با این صفحه برخورد خواهدکرد؟

۸ ـ گلوله‌ای از سطح زمین و با زاویهٔ پرتاب α نسبت به‌افق به‌طرف یك دیوار قائم صیقلی پرتاب می‌شود و پس‌از برخورد با دیوار به‌نقطهٔ پرتاب برمی‌گردد. اگرخط واصل میان نقطهٔ پرتاب و نقطهٔ برخورد با دیوار زاویه‌ای برابر θ با افق بسازد، ثابت کنید که

$$(۱+e)\,tg\,\theta = tg\,\alpha$$

که درآن e ضریب بازگشت است.

۹ ـ از نقطه‌ای واقع بریك صفحهٔ شیبدار، نقطه‌ای مادی درصفحهٔ قائمی‌که از نقطهٔ پرتاب و خط بزرگترین شیب صفحه می‌گذرد طوری پرتاب می‌شود که بزرگی تندی آن V است و امتداد پرتاب با افق زاویه‌ای برابر α می‌سازد. جهت پرتاب به‌طرف بالای صفحه است و با صفحه زاویه‌ای برابر β می‌سازد. ضریب بازگشت میان صفحه و نقطهٔ مادی برابر e است. ثابت‌کنیدکه برد نقطهٔ مادی براین صفحه در لحظهٔ دومین برخوردش با صفحه هنگامی بزرگترین مقدار را دارد که $cotg\,۲\beta = (۱+e)\,tg\,\alpha$ باشد، و این برد ماکزیمم برابر است با

$$\frac{V^{۲}(۱+e)\,tg\,\beta}{g\,cos\,\alpha}$$

که درآن β مقداری را دارد که از معادلهٔ اول به‌دست آمده است.

۱۰ـ پسر بچه‌ای توپی را با تندی V و با زاویهٔ α نسبت به‌افق پرتاب می‌کند به‌طوری که به‌دیوار صیقلی‌قائمی که به‌فاصلهٔ a از اوست برخورد می‌کند و دوباره به‌دست او برمی‌گردد. اگر ضریب بازگشت میان توپ و دیوار برابر e باشد، نشان دهیدکه

$$V^{۲} sin\,۲\alpha = \frac{ga(۱+e)}{e}$$

نیز نشان دهید که ارتفاع نقطهٔ برخورد با دیوار از نقطهٔ پرتاب متناسب با $tg\,\alpha$ است.

۱۱ـ از نقطه‌ای واقع برسطح صیقلی زمین توپی پرتاب می‌شود. این توپ به‌طور عمود با دیوارقائمی برخورد می‌کند و پس‌از مراجعت و یك بار برخورد با زمین به‌نقطهٔ پرتاب می‌رسد. اگر ضریبهای بازگشت میان دیوار و توپ و میان توپ و زمین

برابر باشند، ثابت کنیدکه هریك از این ضریبها برابر $\frac{۱}{۲}$ است.

۱۲- توپی با سرعت ۱۲ m/s از نقطه‌ای واقع بر کف اتاق طوری به‌طرف بالا پرتاب می‌شودکه زاویهٔ پرتاب آن با افق تانژانتی برابر $\frac{۴}{۳}$ دارد. این توپ به سقف اتاق (که صیقلی فرض می‌شود) که به‌فاصلهٔ ۳/۵۵ m ازکف اتاق است برخورد می‌کند و درفاصلهٔ ۹ m از محل پرتاب به‌کف اتاق می‌رسد. ضریب بازگشت میان توپ و سقف اتاق را تعیین کنید.

تمرینهایی برای مرور بخشهای قبل

۱ - (الف) شخصی به‌جرم ۷۰ kg از تپه‌ای به‌ارتفاع ۱۵۰ m درمدت ۱۴ دقیقه بالا می‌رود. توان متوسط او چقدراست؟ (ب) درمکان معینی‌عرض رودخانه‌ای ۹۰ m و عمق‌آن ۳/۶ m و تندی متوسط آب ۶ km/h است. اگر نصف‌انرژی جنبشی آب بتواند به‌کار تبدیل شود، توانی‌که تولید می‌شود چقدر خواهد بود؟

۲ - کار و توان را تعریف کنید. موتوری با توان ۴۵۰ kW قطاری را که جرم‌کل آن ۲۲۰ Mg است در امتداد جادهٔ راه‌آهن بـا خود به‌جلو می‌کشاند. مقاومتها $\frac{۱}{۱۶۰}$ وزن قطار است. شتاب قطار هنگامی‌که سرعت آن ۴۸ km/h است چقدر است؟ نیز سرعت یکنواخت قطار را وقتی‌که موتور بـا اعمال همان توان درمقابل همان مقاومتها ازجادهٔ شیبداری به‌شیب $\frac{۱}{۸۰}$ بالا می‌رود تعیین کنید.

۳ - اتومبیلی به‌جرم ۱۰۰۰ kg در امتداد جـاده‌ای افقی‌کـه مقاومت درمقابل حرکت $\frac{۱}{۲۵}$ وزن آن است رانـده می‌شود. بزرگترین سرعت اتومبیل را پیدا کنید و اگر موتور نتواند توانی‌بیشتراز ۱۰ kW تولیدکند، نیروی‌کشش‌موتور را تعیین‌کنید. اتـومبیل اکنون، یـدکی به جرم ۶۰۰ kg را در مقابل مقاومتی اضافی برابر $\frac{۱}{۲۰}$ وزن خـود می‌برد. تـوان اتـومبیل ۱۰ kW است. درلحظه‌ای‌کـه سرعت برابر ۳۲ km/h است، کشش دوطناب چقدر است؟

۴ - اتـومبیلی به جرم ۱ Mg درجـاده‌ای افقی در مقابل مقاومتی برابر $\frac{۱}{۳۰}$ وزن خود حرکت می‌کند. اگر اتومبیل نتواند توانی بیشتر از ۱۵ kW اعمال‌کند بزرگترین سرعتی‌که اتومبیل می‌تواند به‌دست آورد چقدر خواهد بود؟

اگریدکی به‌جرم $600\,\mathrm{kg}$ درمقابل مقاومتی‌اضافی برابر $\frac{1}{20}$ وزن اتومبیل با این اتومبیل کشیده شود، در لحظه‌ای‌که سرعت اتومبیل $24\,\mathrm{km/h}$ و توان موتور $15\,\mathrm{kW}$ است، کشش دوطناب چقدر خواهد بود؟

۵- لوکوموتیوی به‌جرم $60\,\mathrm{Mg}$ و توان $540\,\mathrm{kW}$، قطاری به‌جرم $480\,\mathrm{Mg}$ را از جاده‌ای به‌شیب $\frac{1}{140}$ پایین می‌برد. مقدار مقاومتهای اصطکاك چه برای لوکوموتیو و چه برای قطار $\frac{1}{100}$ وزن کل آنهاست. وقتی‌که سرعت قطار $24\,\mathrm{km/h}$ است، شتاب حرکت چقدراست؟ دراین‌لحظه کشش درمحل‌اتصال میان لوکوموتیو ونخستین واگن قطار چقدر است؟

۶- جرم یك لوکوموتیو و قطارش روی هم $500\,\mathrm{Mg}$ است. حداکثرسرعت آن وقتی‌که ازجاده‌ای به‌شیب $\frac{1}{100}$ پایین می‌آید $96\,\mathrm{km/h}$ است، و وقتی‌که از همین جاده بالا می‌رود $48\,\mathrm{km/h}$ است. به‌فرض آنکه کل مقاومت درمقابل حرکت مستقیماً با سرعت حرکت تغییرکند و درهر دوحالت توان لوکوموتیو یکسان باشد، بزرگی این توان را تعیین‌کنید.

۷- اتومبیلی به‌جرم M کیلوگرم، وقتی‌که از جادهٔ شیبداری‌که با افق زاویهٔ α می‌سازد بالا می‌رود، سرعت آن حداکثر به V کیلومتر درساعت می‌رسد. وقتی‌که ازهمین‌جاده با موتور خاموش پایین می‌آید، سرعت آن حداکثر به U کیلومتر درساعت می‌رسد. اگر مقاومت درمقابل حرکت متناسب با مجذور تندی باشد، تعیین‌کنید موتور با چه توانی‌کارکرده است. اگر مقادیر عددی زیر را داشته باشیم پاسخ خود را برحسب عدد بیان‌کنید.

$$M=900 \quad \text{و} \quad V=60 \quad \text{و} \quad U=64 \quad \text{و} \quad \sin\alpha=\frac{1}{21}$$

۸- وزنه‌ای به‌جرم $120\,\mathrm{kg}$ را با ریسمان تا ارتفاع $30\,\mathrm{m}$ بالا می‌برند. کشش ریسمان درفاصله‌های متفاوت x نسبت به‌آغاز حرکت برابر T است که برطبق جدول زیرداده شده است:

$x\,(\mathrm{m})$	۰	۳	۶	۹	۱۲	۱۵	۱۸	۲۱	۲۴	۲۷	۳۰
$\frac{1}{10}T\,(\mathrm{N})$	۱۵۰	۱۷۹	۱۹۰	۱۹۱	۱۸۵	۱۷۴	۱۵۵	۱۲۵	۸۸	۵۹	۵۰

تعیین‌کنیدکه وزنه با چه تندی به‌بالای مسیر خود می‌رسد؟

۹- جسمی که در امتداد خطی مستقیم حرکت می‌کند تحت اثر نیروی یکنواختی است که در امتداد آن خط وارد می‌شود. ثابت کنیدکه تغییر انرژی جنبشی برابرکاری است که آن نیرو انجام می‌دهد. از تفنگی‌که لولهٔ آن افقی است و ۲/۸ m بالای سطح افقی زمین‌قرار داردگلوله‌ای پرتاب می‌شود و برد آن درسطح افقی زمین ۴۰۰ m است. اگر در جلو لولهٔ تفنگ قطعه چوبی به‌ضخامت ۸ cm بگذاریم بردگلوله به ۲۵۰ m کاهش‌می‌یابد. برای آنکه گلوله به‌طور کامل‌متوقف شود، ضخامت چوبی که درمقابل لولهٔ تفنگ قرار می‌گیرد چقدر باید باشد؟ فرض می‌کنیم که مقاومت یکنواخت و درهردوحالت یکسان باشد.

۱۰- نقطه‌ای مادی به‌جرم m ، به‌وسیلهٔ دوقطعه نخ انعطاف‌ناپذیرسبك، که هریك ازآنها ازشیار صاف قرقرهٔ ثابت سبکی عبور کرده است، به‌دونقطهٔ مادی دیگر که جرم هریك برابر $۳m$ است متصل شده است. قرقره‌ها دریك خط افقی و به‌فاصلهٔ $۲a$ از یکدیگر قرار دارند. در آغاز وزنهٔ سبکتر در وسط فاصلهٔ میان دوقرقره نگاه داشته شده است و وزنه‌های سنگینترآزادانه آویزانند. اکنون اگر این‌وزنهٔ سبکتر را رها کنیم، باتوجه به‌انرژی، یا از راه دیگر، نشان دهیدکه این‌وزنه پیش‌ازآنکه به‌طور لحظه‌ای متوقف شود، مسافتی‌قائم برابر $\frac{۱۲a}{۳۵}$ سقوط خواهدکرد.

۱۱- یك دانهٔ تسبیح صیقلی به‌جرم m ازیك سیم مدور به‌قطر $۲a$ که سطح آن قائم است عبور کرده است. این دانهٔ تسبیح به‌وسیلهٔ نخ کشسانی به‌طول طبیعی $l_۰$ و ضریب کشسانی λ به‌بالاترین نقطهٔ سیم متصل شده است. دانهٔ تسبیح را می‌گیریم وآن را به‌پایین می‌کشیم تا نخ کشیده شود، و سپس آن را رها می‌کنیم. ثابت‌کنید که اگر،

$$\lambda a(۲a-l_۰) > mg(۲a+l_۰)l_۰$$

باشد، دانهٔ تسبیح به‌پایینترین نقطه خواهد رسید.

اگر l بزرگترین طولی باشدکه نخ هنگام‌حرکت به‌دست می‌آورد، ثابت‌کنیدکه دانهٔ تسبیح هنگامی‌که طول‌کشیده شدهٔ نخ $\frac{۱}{۲}(l+l_۰)$ است درسیم به‌حال تعادل است.

۱۲- به دوانتهای نخ سبکی به‌طول $۲l$ که از روی دومیخ صیقلی ثابت‌گذشته است دو وزنه هریك به‌جرم m متصل شده است. میخها دریك صفحهٔ افقی و به‌فاصلهٔ $۲a$ از یکدیگر واقعند. نقطهٔ وسط نخ در وسط فاصلهٔ دومیخ قرار دارد. اکنون وزنه‌ای به‌جرم M به‌وسط نخ‌آویزان می‌کنیم، ثابت کنیدکه وزنه‌های m شروع به‌بالا آمدن می‌کنند. هنگامی‌که اجزای نخ که میان دومیخ هستند، با هم زاویهٔ θ می‌سازند، انرژی پتانسیل سه وزنه را پیدا کنید. نشان دهیدکه اگر $M < ۲m$ باشد، و

$$l(4m^2 - M^2) > a(4m^2 + M^2)$$

و جرمهای m از زیرمیخ بالا نیایند، دستگاه هنگامی که

$$tg\,\frac{1}{2}\theta = \frac{M}{2m}$$

است به‌حالت سکون لحظه‌ای درخواهد آمد.

۱۳- گلوله‌ای به‌جرم m با سرعت u وارد قطعه چوبی می‌شود و پس از پیمودن مسافت c در آن متوقف می‌گردد. مقاومت در برابر نفوذ را، با فرض آنکه نیروی ثابتی باشد، تعیین کنید.

اگر گلوله، که با سرعت u حرکت می کند، در قطعه چوبی به‌ضخامت $\frac{3}{4}c$ که همان مقاومت را نشان می‌دهد، وارد شود، با چه سرعتی از چوب خارج خواهد شد؟ نیز مدت زمانی را که در داخل قطعه چوب می‌پیماید به‌دست آورید.

۱۴- نخ دراز انعطاف‌ناپذیری از روی یك میخ صیقلی گذشته است و به دوانتهای آن وزنه‌های A و B که جرم هریك ۱ kg است آویزانند و به حال تعادل هستند. به B وزنهٔ C، که جرم آن هم ۱ kg است، به‌وسیلهٔ نخی به‌طول ۱۵ cm، متصل می‌شود. C را نزدیك B می‌آوریم و رها می‌کنیم. تندیی را که A با آن تندی شروع به‌حرکت می‌کند و ارتفاعی را که در $\frac{1}{2}$ ثانیه بالا می‌رود پیدا کنید.

۱۵- تخته‌ای به جرم m برتخته‌ای به‌جرم M قرار دارد و این تخته نیز برروی میزی واقع است. میز صیقلی است وضریب اصطکاك میان تخته‌ها برابر μ است. ضربه‌ای به‌بزرگی $M\mu$ به‌تختهٔ زیری اعمال می‌شود. تعیین کنید پس از آنکه لغزش دوتخته قطع شد، تندی مشترك دوتخته چقدر خواهد بود؟ نشان دهید که لغزش تخته‌ها تا مدتی برابر $\dfrac{M\mu}{(M+m)\mu g}$ ادامه دارد، و در این مدت کاهش انرژی جنبشی به‌اندازهٔ کسر $\dfrac{m}{M+m}$ کل انرژی جنبشی است.

۱۶- دونقطهٔ مادی A و B که جرم‌آنها به‌ترتیب m و $2m$ است، به‌وسیلهٔ نخ انعطاف‌ناپذیری به‌طول a به‌یکدیگر متصل شده و برروی میزی افقی و ناصاف درکنار یکدیگر قرار دارند. ضریب اصطکاك میان نقطه‌های مادی و میز به ترتیب μ و $\frac{1}{2}\mu$ است.

نقطهٔ مادی A با تندی V که بزرگتر از $\sqrt{2\mu g a}$ است درامتداد سطح میز پرتاب

می‌شود. تندی را درست پس‌ازآنکه نخ، کشیده می‌شود تعیین کنید و نشان دهید که اگر $V^۲ > ۲۰\mu ga$ باشد B از A جلو خواهد افتاد.

۱۷- کرهٔ کوچکی با تندی V برروی میز افقی صافی به‌طرف دیوار قائمی حرکت می‌کند و امتداد حرکت بردیوار عمود است. درمیان راه با کرهٔ دیگری که به‌فاصلهٔ a از دیوار قائم قرار دارد برخورد مستقیم انجام می‌دهد. ضریب بازگشت میان دوکره ونیز میان یك کره و دیوار برابر $\frac{۱}{۲}$ است. ثابت کنیدکه میان دوکره فقط دوبرخورد وجود داردکه فاصلهٔ میان آنها $\frac{۱۲a}{۵V}$ است. نیز ثابت کنیدکه تندی نهایی‌اولین کره در حال دورشدن از دیوار قائم برابر $\frac{۷V}{۳۲}$ است.

۱۸- نقطه‌ای مادی به‌جرم m که به‌طور قائم سقوط می‌کند با صفحهٔ صیقلی ثابتی‌که با افق زاویهٔ α می‌سازد برخورد می‌کند. $۴۵^\circ \geqslant \alpha > ۰$ است. اگر نقطهٔ مادی به‌طور افقی برگردد، نشان‌دهیدکه ضریب بازگشت برابر $tg^۲\alpha$ است. تعیین کنیدکه چه‌کسری از انرژی جنبشی نقطهٔ مادی براثر برخوردکاهش پیدا می‌کند. اگرنقطهٔ مادی، ضربه‌ای برابر I برصفحه واردکند، تندیهای نقطهٔ مادی را هنگام برخورد و هنگام ترك صفحه برحسب I، m و α تعیین کنید.

۱۹- کرهٔ صیقلی کوچکی به‌جرم m به‌طورقائم سقوط می‌کند. این کره با سرعت u به سطح شیبداری، که یکی ازوجوه گوه‌ای صیقلی به‌جرم M است، برخورد می‌کند. سینوس زاویه‌ای که این سطح با افق می‌سازد برابر $\frac{۳}{۵}$ است. این گوه برصفحهٔ افقی صیقلی ناکشسانی واقع است. اگرضریب بازگشت میان‌کره وگوه برابر e باشد، ثابت کنید که گوه با سرعت

$$\frac{۱۲mu(۱+e)}{۹m+۲۵M}$$

در امتداد صفحه شروع به‌حرکت خواهدکرد.

۲۰- نقطه‌ای مادی که در امتداد صفحه‌ای افقی حرکت می‌کند با دیوار قائمی برخورد می‌کند و برمی‌گردد. اگر زاویه‌های حادهٔ میان دیوار و جهتهای حرکت در قبل و بعد از برخورد به‌ترتیب θ و φ باشد، ثابت کنیدکه $tg\,\varphi = e\, tg\,\theta$ ، که درآن e ضریب بازگشت است. دو نقطهٔ P و Q بر یك صفحهٔ افقی و صیقلی به ترتیب به‌فاصله‌های $۲/۴\,m$ و $۳/۶\,m$ از دیوار قائمی قرار دارند: فاصلهٔ نقطه‌های A و B، یعنی فاصلهٔ پاهای عمودهایی که از P و Q بردیوار رسم می‌شوند، $۶/۶\,m$

است. نقطه‌ای مادی از P با سرعت $3{,}3\ \mathrm{m/s}$ طوری پرتاب می‌شود که پس از برخورد با دیوار و برگشت ازآنجا از نقطهٔ Q بگذرد. اگر ضریب بازگشت برابر $\frac{9}{16}$ باشد، تعیین کنید: (الف) فاصلهٔ A از نقطهٔ برخورد چقدراست، (ب) چه‌مدت طول می‌کشد تا نقطهٔ مادی از P به Q برود.

۲۱- منظور ازضریب بازگشت چیست؟ کیسه‌ای به‌جرم M به‌نخ سبکی‌متصل شده است و نخ از روی قرقرهٔ صیقلی ثابتی‌عبور کرده است. به‌طرف دیگرنخ وزنه‌ای به‌همین جرم متصل است. گلوله‌ای به‌جرم m به‌طور قائم طوری رها می‌شودکه با تندی v به‌کیسه برخورد کند. ثابت کنیدکه کیسه با تندی $\frac{m(1+e)v}{(m+2M)}$، که درآن e ضریب بازگشت است، شروع به‌حرکت خواهدکرد. نیز مدت زمان میان برخورد اول و برخورد دوم گلوله را با کیسه تعیین کنید.

۲۲- لبهٔ بالایی سطح صیقلی ثابت شیبداری‌که با افق زاویهٔ $30°$ می‌سازد، افقی وصیقلی است. درصفحه‌ای عمود برلبه، نخی سبك از روی لبه می‌گذرد و به‌یك طرف آن نقطه‌ای مادی به‌جرم $30\ \mathrm{g}$ آزادانه آویزان است و به‌طرف دیگرآن نقطه‌ای مادی به‌جرم $90\ \mathrm{g}$ که برروی سطح شیبدار قرار دارد متصل است. ثابت کنیدکه وقتی‌که دستگاه را رها می‌کنند نقطهٔ مادی‌که آویزان است با شتاب $\frac{1}{8}g$ روبه‌بالا می‌رود. دلیل خود را به‌طورکامل بیان کنید. نقطهٔ مادی آویزان، پس از آنکه دستگاه $\frac{3}{4}\mathrm{s}$ به‌حرکت خود ادامه داد، نقطهٔ مادی دیگری به‌جرم $60\ \mathrm{g}$ را که درآغاز ساکن است به خود می‌گیرد و با خود بالا می‌برد. نوع تازهٔ حرکت را تعیین کنید و ثابت کنیدکه دستگاه پس‌از $\frac{1}{3}\mathrm{s}$ به‌حالت سکون لحظه‌ای درمی‌آید.

۲۳- بالاترین ارتفاع صفحهٔ صیقلی شیبداری‌که زاویهٔ بزرگترین شیب آن α است برابر h است. نقطه‌ای به‌جرم m_1 از پایینترین نقطهٔ این صفحه در امتداد خط بزرگترین شیب سطح با تندی u به‌طرف بالا پرتاب می‌شود. و درهمان لحظه نقطه‌ای مادی به‌جرم m_2 از بالای صفحه بدون سرعت اولیه رها می‌شود تا با نقطهٔ مادی دیگر برخوردکند. اگر نقطهٔ مادیی‌که جرم آن m_1 است بر اثر برخورد به‌حال سکون لحظه‌ای‌درآید، ثابت کنیدکه e، ضریب‌بازگشت میان‌دونقطهٔ مادی، کمتراز m_1/m_2 بوده است. نیز u را پیدا کنید.

۲۴- دوکرهٔ صیقلی‌که شعاع هریك برابر a و جرم آنها متفاوت و برابر m_1 و m_2 است درجهتهای مختلف و در امتدادهایی موازی با یکدیگر برروی میزی صیقلی حرکت

می‌کنند. تندیهای آنها به‌ترتیب v_1 و v_2 و فاصلهٔ امتدادهای آنها از یکدیگر $2a\sin\alpha$ است. این دو کره باهم برخورد می‌کنند. اگرضریب بازگشت برابر e باشد، جهت‌حرکت m_1 پس‌از برخورد باخط‌المرکزین دو کره درهنگام برخورد چه‌زاویه‌ای می‌سازد؟ درحالت مخصوص‌که $m_1=m_2$ و $v_1=v_2$ است، نشان دهیدکه پس از برخورد جهتهای‌حرکت متوازیند و باجهت‌اولیهٔ حرکت‌زاویه‌ای‌برابر θ می‌سازندکه

$$tg\,\theta=\frac{(1+e)\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha-e\cos^2\alpha}$$

۲۵- سه کرهٔ A و B و C که جرم آنها به‌ترتیب m، $2m$ و $4m$ است بر‌روی میزی صیقلی طوری قرار دارندکه مراکزآنها بریك استقامت است. B میان A و C قرار دارد وضریب بازگشت میان A و B مساوی ضریب بازگشت میان B و C است. A با تندی u مستقیماً به‌طرف B پرتاب می‌شود و C پس از آنکه از B ضربه می‌بیند با تندی $\frac{u}{4}$ به‌حرکت درمی‌آید. ثابت کنیدکه A و B به‌حال‌سکون درمی‌آیند. ضریب بازگشت را تعیین کنید.

۲۶- A و B نقطه‌هایی‌هستندکه بریك خط قائم واقعند. B در ارتفاع h بالای A است. نقطه‌ای مادی ازنقطهٔ A با تندی $2\sqrt{gh}$ به‌طور قائم به‌طرف بالا پرتاب می‌شود و درهمان لحظه نقطهٔ مادی دیگری باتندی $\sqrt{gh}$ از نقطهٔ B به‌طرف بالا و در امتداد قائم پرتاب‌می‌شود. ثابت کنیدکه این‌دو نقطهٔ مادی درارتفاع $\frac{3}{2}h$ بالای A با یکدیگر برخورد می‌کنند.

اگر نقطه‌های مادی دارای جرمهایی یکسان باشند و ضریب بازگشت میان آنها برابر $\frac{1}{2}$ باشد، سرعت نقطهٔ مادی اول را وقتی‌که به A باز می‌گردد تعیین کنید.

۲۷- میلهٔ صیقلی AB طوری ثابت شده است‌که زاویهٔ آن با افق برابر 30° است. B، انتهای پایینی آن، در ارتفاع a بالای سطح افقی است. حلقهٔ کوچکی که از میله گذرانیده شده است از نقطهٔ A ازحال‌سکون رها می‌شود. فاصلهٔ افقی نقطهٔ B را ازنقطه‌ای‌که حلقه با سطح افقی‌برخورد می‌کند تعیین کنید.

۲۸- سیمی‌صیقلی به‌شکل دایره‌ای به‌شعاع a درآورده شده است و صفحهٔ آن افقی است. از آن دو دانهٔ تسبیح کوچك گذرانده شده است. جرم‌دانه‌های تسبیح متساوی است. یکی از دانه‌ها در ابتدا ساکن است و دانهٔ دیگر در امتداد سیم با سرعت u پرتاب می‌شود. اگر ضریب بازگشت میان دانه‌های تسبیح برابر e باشد، سرعت هریك از

دانه‌ها را پس ازدومین برخورد، و نیزمدت زمان میان نخستین برخورد با برخورد دوم را تعیین کنید.

۲۹- از بالا و پایین سکوی قائمی، دریك لحظه دوگلوله به‌ترتیب با زاویه‌های پرتاب α و β پرتاب می‌شوند و هر دو در یك لحظه به‌جسم برخورد می‌کنند. ثابت کنیدکه اگر a فاصلهٔ افقی جسم ازسکو باشد، ارتفاع سکو برابر است با $a(tg\,\beta - tg\,\alpha)$.

۳۰- مربع ABCD به‌ضلع $2a$ ازگوشهٔ A چنان به‌میز افقی‌نصب شده‌است که قطر AC قائم است. گلوله‌ای از C بدون سرعت اولیه رها می‌شود و ازضلع CB، که بدون اصطکاك است، پایین می‌آید. گلوله درنقطهٔ B از مربع‌جدا شده و روی میزمی‌افتد. ثابت کنیدکه محل برخورد این گلوله با میز نقطه‌ای است که فاصلهٔ آن از A برابر $a\sqrt{6}$ است.

۳۱- نقطهٔ مادی P با سرعت V و با زاویهٔ α نسبت به افق پرتاب می‌شود. درلحظهٔ $t=0$ درنقطهٔ O که تندی آن افقی است قرار دارد. تغییرمکانهای افقی و قائم را ازنقطهٔ O پس‌از مدت t بنویسید و نشان دهیدکه مسیر P سهمی‌است که پارامترآن $2\frac{V^2}{g}\cos^2\alpha$ است. گلوله‌ای ازسه محل که ارتفاعهای آنها h ، $h+d$ و h وفاصلهٔ آنها از یکدیگر برابر a است و هر سه محل در یك صفحهٔ قائم قرار دارند عبور می‌کند. نشان دهیدکه گلوله درنقطه‌ای‌که فاصلهٔ آن ازمحل وسطی $a\sqrt{1+\frac{h}{d}}$ است با زمین برخورد می‌کند.

۳۲- برسطح شیبداری که زاویهٔ آن با افق برابر α است گلوله‌ای با تندی V پرتاب می‌شود. ثابت کنیدکه برد ماکزیمم گلوله براین سطح براست با

$$R=\frac{V^2}{g}\times\frac{1}{1+\sin\alpha}$$

نیز ثابت کنیدکه پس از مدت زمانی برابر $\frac{2}{3}$ مدت زمان پرواز، فاصلهٔ قائم گلوله ازسطح برابر است با $\frac{2R}{9}$.

۳۳- ازنقطه‌ای واقع برسطح شیبداری‌که زاویهٔ آن با افق برابر $45°$ است، گلوله‌ای با زاویهٔ θ پرتاب می‌شود. مسیرحرکت درصفحهٔ‌قائمی‌است که خط‌بزرگترین شیب صفحه را دربردارد. ثابت کنیدکه‌زاویه‌ای‌که گلوله باآن دوباره به‌سطح‌برخورد می‌کندبرابر φ است به‌طوری‌که $tg\,\varphi=\frac{(1-tg\,\theta)}{(3-tg\,\theta)}$. گلوله را با چه زاویه‌ای پرتاب‌کنیم تا

هنگامی که دوباره به‌سطح برخورد می کند حرکتش در امتداد افقی باشد؟

۳۴ـ از نقطهٔ O ، تحت زاویهٔ α ، جسم سنگینی را پرتـاب می کنیم. این جسم تحت اثر نیروی سنگینی مسیری به‌شکل سهمی می‌پیماید. اگرمحورهای مختصات را محورهای افقی و قائم به‌مبدأ O بگیریم، ثابت کنید که معادلهٔ سهمی مسیرعبارت است از

$$y = x\,tg\,\alpha\left(۱-\frac{x}{R}\right)$$

که درآن R برد افقی است.

اگر فاصلهٔ افقی میان دونقطهٔ هم ارتفاع به‌ارتفاع h ازسهمی برابر $۲a$ باشد، ثابت کنید که

$$R(R-۴h\,cotg\,\alpha)=۴a^{۲}$$

۳۵ـ ازنقطهٔ O گلوله‌ای باسرعت u وبا زاویهٔ پرتاب‌حادهٔ α به‌طرف بالاپرتاب می‌شود. ثابت کنید که فاصلهٔ گلوله از نقطهٔ O ابتدا زیاد می‌شود و سپس اگر $۹sin^{۲}\alpha > ۸$ باشد، برای مدت زمانی برابر $\frac{u}{g}\sqrt{۹\,sin^{۲}\alpha-۸}$ کم می‌شود. نیز ثابت کنید که اگر P مکان گلوله درلحظهٔ t باشد، مماس برمسیردرنقطهٔ P خط قائمی را که از O می گذرد درنقطه‌ای که با شتاب ثابت حرکت می کند قطع می کند.

۳۶ـ دوگلولهٔ سنگین A و B ازیك نقطه و دریك‌لحظه با یك‌سرعت u پرتاب می‌شوند. دوگلوله دردوجهت متقابل‌پرتاب می‌شوند. امتداد پرتاب گلوله‌ها با افق زاویه‌ای برابر α می‌سازد.

(الف) مسیر A را نسبت به B تعیین کنید.

(ب) وقتی که امتداد تندیهای دوگلوله برهم عمود می‌شوند، فاصلهٔ دوگلوله‌چقدر است؟

۳۷ـ صفحه‌ای است صیقلی که با افق زاویهٔ ۳۰° می‌سازد. ازنقطهٔ O واقع براین‌صفحه، کره‌ای کوچك بـا تندی $۱/۸\,m/s$ به‌طور عمود برصفحه پرتـاب می‌شود. درست پس‌از نخستین برخورد با صفحه، حرکت کره به‌طورافقی است. نشان‌دهیدکه ضریب بازگشت میان کره وصفحه برابر $\frac{۲}{۳}$ است.

وقتی که کره برای دومین بار با صفحه برخورد می کند فاصله‌اش از O چقدر است؟

۳۸ـ پرتابه‌ای باسرعت‌اولیهٔ $\sqrt{۲ga}$ طوری پرتاب می‌شود که به‌بـالای برجی به‌ارتفاع $\frac{۱}{۲}a$ اصابت می کند. فاصلهٔ افقی برج ازنقطهٔ پرتاب و نیز نسبت مدت زمان پرواز

دراین دومسیر را پیدا کنید.

۳۹- وزنهٔ سنگینی بـا سرعت u و زاویـهٔ انحراف α از نقطهٔ O پرتـاب می‌شود. اگر محورهایی که از O می‌گذرند افقی و قائم باشند، ثابت کنیدکـه معادلهٔ مسیر وزنه به‌صورت زیر است:

$$y = x\, tg\, \alpha - \frac{gx^2}{2u^2 \cos^2\alpha}$$

اگر α_1 و α_2 دو زاویهٔ ممکن پرتاب باشندکه اگر پرتاب تحت آن زاویه‌ها صورت گیرد مسیر از نقطه‌ای به‌مختصات (x_1 و y_1) بگذرد، نشان دهیدکه

$$tg(\alpha_1 + \alpha_2) = -\frac{x_1}{y_1}$$

۴۰- نقطه‌ای مادی از سطح زمین‌چنان پرتاب می‌شودکه ازدونقطهٔ هم‌ارتفاع که ارتفاع هردوبرابر a است و به‌فاصلهٔ b از یکدیگرند می‌گذرد. بزرگی وجهت حداقل‌تندی پرتاب را تعیین کنید.

۷

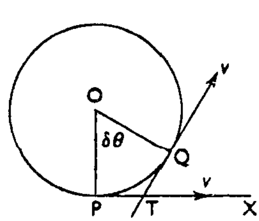
حرکت دردایره

۷.۱. دراین فصل حرکت نقطه‌ای مادی را که با سرعت یکنواخت حول دایره‌ای حرکت می‌کند مورد توجه قرارخواهیم داد. نیز به‌نقطه‌هایی‌که مربوط بـه‌حرکت نقطه‌ای مادی است که تحت اثرجاذبهٔ زمین حول دایره‌ای قائم حرکت‌می‌کند، توجه خواهیم کرد.

بدیهی است که اگرنقطه‌ای مادی حول دایره‌ای حرکت‌کند، تندی آن، اگر از نظر بزرگی تغییرنکند، ازنظر جهت دائماً درتغییر است، و بنابراین شتاب وجـود دارد. اگـر بزرگی تندی ثابت بماند، سرعت حرکت یکنواخت نامیده می‌شود، ونشان خواهیم دادکه جهت شتاب حرکت متوجه مرکز دایره است. امـا اگر سرعت متغیر بـاشد، شتاب در هر لحظه دارای مـؤلفه‌ای در امتداد مماس بر دایـره و در عین حال مؤلفه‌ای متوجه مرکز دایره دارد.

۷.۲. اگر نقطه‌ای مـادی حول دایره‌ای به شعاع r، با سرعت یکنواخت v حرکت کند، شتاب آن v^2/r و متوجه مرکز دایره است.

فرض می‌کنیم O (شکل ۷-۱) مرکز دایره، و P وضـع نقطهٔ مـادی دریك لحظهٔ دلخواه و Q وضع آن پس ازمدت زمان‌کوتاهی برابر Δt باشد.



شکل ۷-۱

فرض‌می‌کنیم که زاویهٔ کوچك POQ برابر $\Delta\theta$، وقوس‌کوچك PQ برابر Δsباشد. تندی P در امتداد مماس PT برابر v است و تندی Q درامتداد مماس TQ برابر v است و $\angle QTX = \Delta\theta$.

اگر تندی Q را درامتدادهای موازی وعمود بر PA تجزیه‌کنیم، مـؤلفه‌های آن عبارت خواهند بود از $v\, cos\, \Delta\theta$ به‌موازات PX، و $v\, sin\, \Delta\theta$ عمود بر PX.

تغییر تندی به‌موازات مماس PX برابراست با

$$v\, cos\, \Delta\theta - v$$

بنابراین شتاب متوسط به موازات مماس PX درفاصلهٔ زمانی Δt بـرابر است بـا $\dfrac{v\, cos\, \Delta\theta - v}{\Delta t}$، ودرنتیجه شتاب درامتداد مماس PX برابر است باحد عبارت فوق‌هنگامی که Δt به‌سمت صفرمیل کند، یعنی

$$lim \frac{v(cos\, \Delta\theta - ۱)}{\Delta t} = lim \frac{-۲v\, sin^{۲}\dfrac{\Delta\theta}{۲}}{\Delta t}$$

$$= lim \left\{ -v \times \frac{sin\frac{۱}{۲}\Delta\theta}{\frac{۱}{۲}\Delta\theta} \times \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \times sin\frac{۱}{۲}\Delta\theta \right\} = ۰$$

تغییر تندی به‌موازات قائم PO برابراست با $v\, sin\, \Delta\theta$، وبنابراین شتاب متوسط‌به موازات قائم PO درفاصلهٔ زمانی Δt برابراست با $\dfrac{v\, sin\, \Delta\theta}{\Delta t}$.

بنا براین شتاب P درامتداد PO برابراست با

$$lim \frac{v\, sin\, \Delta\theta}{\Delta t} = lim \frac{v\, sin\, \Delta\theta}{\Delta\theta} \times \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = v\frac{d\theta}{dt}$$

بنابراین شتاب درهرنقطهٔ دلخواه از دایره متوجه O و به بزرگی $v\dfrac{d\theta}{dt}$ است.

اما $d\theta/dt$ تندی زاویه‌ای P در دایره است، و بنابـراین اگر آن را به ω نمایش دهیم،شتاب برابر $v\omega$ ومتوجه مرکزاست.

چون $v = r\omega$ است، شتاب را ممکن است به‌صورت زیرنوشت:

$$r\omega^{۲} \quad \text{یا} \quad \frac{v^{۲}}{r}$$

۷.۳.۰ اگر جرم نقطهٔ مادی برابر m باشد، نیروی لازم برای به‌وجود آوردن چنین‌شتابی برابر mv^2/r یا $m\omega^2 r$ خواهد بود، وباید پیوسته به‌سمت مرکزدایره اعمال شود.

این نیرو را ممکن است به‌راههای مختلف فـراهم ساخت، مثلاً ممکن است نقطهٔ مادی به‌وسیلهٔ نخ انعطاف ناپذیری به O مربوط باشد، یـا اینکه ازسیم صیقلی دایـره‌ای شکلی مانند یك دانهٔ تسبیح گذرانده شده باشد. درحـالت اول، کشش نخ ودرحـالت دوم عکس‌العمل سیم نیروی متمایل به‌مرکز لازم را فراهم می‌کند.

باید دقیقاً به‌خاطر داشت که گرچه (درحالتی که نقطهٔ مـادی درانتهای یك نخ حول دایره‌ای می‌چرخد) نخ درحالت کشش است، نقطهٔ مادی تمایلی نداردکـه درامتداد شعاع دایره به‌طرف خارج حرکت کند. اگر نخ پاره شود، نقطهٔ مادی در امتداد مماس بر دایره به‌حرکت خود ادامه خواهد داد ومسیر بعدی آن مانند مسیر پرتابهٔ آزاد خواهد بود.

درحالتی که قطار، مسیری منحنی می‌پیماید نیروی لازم بـه طرف داخل انحنا، بـه وسیلهٔ فشار ریل خارجی برلبه‌های چرخهای قطارتأمین می‌شود. درمورد اتومبیل، نیروی لازم به‌وسیلهٔ اصطکاك میان چرخها و زمین تأمین می‌شود. در هر دوحالت بـا بـالا بردن سطحی که زیرچرخهای خارجی است می‌توان قسمتی یا تمام نیروی لازم را به‌طرف داخل به‌وسیلهٔ وزن قطار یا اتومبیل تأمین کرد. دراین‌صورت چرخهای خارجی بالاترازچرخهای داخلی است. این مورد را بعداً مورد توجه قرارخواهیم داد.

مثال ۱: جسمی به جرم ۵ kg بـا سرعت ۸m/s کـه در یك صفحهٔ صیقلی افقی حرکت می‌کند به‌وسیلهٔ نخی بـه طول ۴m به‌نقطهٔ ثابتی متصل شده‌است. کشش نخ را تعیین کنید.

حل : دراینجا $v = ۸\text{m/s}$ ، $r = ۴\text{m}$.

شتاب حرکت به‌طرف نقطهٔ ثابت برابراست بـا $\frac{۶۴}{۴} = ۱۶\text{m/s}^2$

بنابراین کشش نخ برابراست با $۵ \times ۱۶ = ۸۰\ \text{N}$

مثال ۲: نقطه‌ای مادی به جرم ۳ kg روی میزی صیقلی واقع است و به وسیلهٔ نخی به طول ۱٫۲m به‌نقطهٔ ثابتی ازمیزمتصل است ودرهردقیقه ۳۰۰ دورمی‌زند. کشش نخ را تعیین کنید.

حل :

۵ دور درثانیه = ۳۰۰ دور دردقیقه

$\therefore$ رادیان برثانیه ۱۰π = تندی زاویه‌ای

کشش نخ

$$mr\omega^{۲} = ۳ \times ۱/۲ \times ۱۰^{۲}\pi^{۲}\mathrm{N}$$
$$= ۳۶۰\pi^{۲}\,\mathrm{N}$$
$$\# ۳۶۰۰\,\mathrm{N}$$

مثال ۳: لوکوموتیوی به‌جرم $۸۰\,\mathrm{Mg}$ قوسی ازدایره به‌شعاع $۲۴۰\,\mathrm{m}$ می‌پیماید. سرعت حرکت $۴۸\,\mathrm{km/h}$ است. ازطرف ریلها چه نیرویی باید به‌طرف مرکز دایره وارد شود؟

حل :

$$۴۸\,\mathrm{km/h} = \frac{۴۰}{۳}\mathrm{m/s}$$

$\therefore$ $$\text{نیرو} = ۸۰ \times ۱۰۰۰ \times \left(\frac{۴۰}{۳}\right)^{۲} \times \frac{۱}{۲۴۰}\mathrm{N}$$
$$= ۰/۵۹ \times ۱۰^{۵}\,\mathrm{N}$$

مثال ۴: نقطه‌ای مادی به وسیلهٔ نخی‌کشسان به‌طول $۳۰\,\mathrm{cm}$ به نقطهٔ ثابتی ازیك میز افقی و صیقلی متصل است، و برآن میزحول نقطهٔ ثابت مذکور با سرعت ثابت دایره می‌زند. اگرضریب کشسانی نخ برابر وزن نقطهٔ مادی باشد ونقطهٔ مادی درهردقیقه ۲۰ دور بزند، نشان دهیدکه افزایش طول نخ درحدود $۵\,\mathrm{cm}$ است.

حل : فرض می‌کنیم جرم نقطهٔ مادی برابر $m\,\mathrm{kg}$ باشد.

$$\text{دور درثانیه } \frac{۱}{۳} = \text{ دور دردقیقه } ۲۰$$

بنابراین تندی زاویه‌ای برابر $\frac{۲\pi}{۳}$ رادیان برثانیه است.

اگرطول نخ برابر x متر باشد، کشش $(mr\,\omega^{۲})$ برابراست با

$$mx \times \frac{۴\pi^{۲}}{۹}\,\mathrm{N}$$

اما افزایش طول نخ برابر است با $(x - ۰/۳)$ متر، و چون ضریب کشسانی $\lambda = mg$ است، کشش نخ برحسب N برابراست با T که

$$T=\frac{mg}{۰/۳}(x-۰/۳)$$

$$\therefore \quad \frac{mg}{۰/۳}(x-۰/۳)=mx\frac{۴\pi^۲}{۹}$$

$$\therefore \quad x=۰/۳۵\ \mathrm{m} \quad \text{تقریباً}$$

بنابراین افزایش طول نخ درحدود $۵\ \mathrm{cm}$ است.

تمرین ۱۰۷

۱ـ نقطه‌ای مادی به‌جرم $۲\ \mathrm{kg}$ که برمیز صیقلی افقی قراردارد به‌وسیلهٔ نخی به طول $۱/۲\mathrm{m}$ به‌نقطهٔ ثابتی ازمیزمتصل‌شده است. اگراین نقطهٔ مادی باسرعت $۲/۴\ \mathrm{m/s}$ دایره‌ای افقی بپیماید، کشش نخ چقدر خواهد بود؟

۲ـ نخی به‌طول $۰/۶\ \mathrm{m}$ می‌تواند وزنه‌ای به‌جرم $۲۰\ \mathrm{kg}$ را، بدون آنکه پاره شود، تحمل کند. به‌یك انتهای این نخ وزنهٔ ۲ کیلوگرمی متصل می‌کنند وآن را بر روی میزی صیقلی به‌طور یکنواخت می‌چرخانند. انتهای دیگر نخ به‌نقطهٔ ثابتی ازمسیر متصل شده است. این وزنه حداکثر چند دور دردقیقه می‌تواند بزند بدون آنکه نخ پاره شود؟

۳ـ لوکوموتیوی به‌جرم $۶۰\ \mathrm{Mg}$ قوسی‌ازدایره به‌شعاع $۲۴۰\mathrm{m}$را با سرعت$۹۶\mathrm{km/h}$ می‌پیماید. ازطرف ریلها چه نیرویی باید به‌طرف مرکز دایره اعمال شود؟

۴ـ اتومبیلی به‌جرم $۲\ \mathrm{Mg}$ مسیری منحنی به‌شعاع $۸۰۰\ \mathrm{m}$ را با سرعت $۹۶\ \mathrm{km/h}$ می‌پیماید. نیروی اصطکاك لازم میان چرخها وزمین چقدراست؟

۵ـ یك انتهای نخ کشسانی به‌طول $۶۰\ \mathrm{cm}$ به‌نقطهٔ ثابتی ازیك میزصیقلی متصل است، وانتهای دیگر آن به وزنه‌ای به‌جرم $۲\ \mathrm{kg}$ که برمیز واقع است متصل است. اگر وزنهٔ ۲ کیلوگرمی به‌طورقائم به‌نخ آویزان می‌شد، افزایش‌طول نخ $۱۰\ \mathrm{cm}$ می‌شد. این‌وزنه طوری به‌حرکت درآمده است که درهردقیقه ۴۰دور به‌دورنقطهٔ ثابت‌دوران می‌کند. افزایش طول نخ را تعیین کنید.

۶ـ نخ کشسانی، که طول آن در حالت غیرکشیده برابر l است، ازیك انتها به‌نقطه‌ای ثابت شده است ووقتی که‌به‌طورقائم‌آویزان است می‌تواند وزنه‌ای به‌جرم m کیلوگرم را تحمل کند، و دراین صورت افزایش‌طول نخ به‌اندازهٔ نصف طول طبیعی نخ است. اکنون وزنه ونخ را روی میزی افقی وصیقلی قرار می‌دهیم ویك انتهای نخ را به نقطه‌ای ثابت می‌کنیم. نخ را می‌کشیم تاطول‌آن دوبرابر شود و وزنه را درامتداد

میزطوری پرتاب می‌کنیم که بتواند دایره‌ای افقی به‌دور نقطهٔ ثابت بپیماید. زمان یك دور گردش وزنه را تعیین کنید.

۷ ـ دو وزنهٔ یکسان به‌وسیلهٔ نخی که ازسوراخ میزی صیقلی عبورکرده است به‌یکدیگر متصل هستند. یکی از وزنه‌ها روی میز و وزنهٔ دیگر زیرمیزاست. وزنه‌ای که‌روی میز است، حداکثر چند دور در دقیقه دایره‌ای به شعاع ۱۵cm طی کند تا وزنهٔ دیگر به‌حال سکون باشد؟

۸ ـ میز افقی ناصافی می‌تواند حول محوری قائم دوران‌کند، و وزنه‌ای روی میز و به فاصلهٔ ۶۰cm ازمحورقراردارد. میزطوری به‌دوران درمی‌آیدکه تندی آن متدرجاً افزایش می‌یابد. اگرضریب اصطکاك میان وزنه ومیز برابر $\frac{1}{4}$ باشد، نشان دهیدکه وزنه، تا وقتی که عدهٔ دور دردقیقه از۱۹ کمتر است، حرکت نخواهدکرد.

۹ ـ قرصی افقی به دور مرکزش به طور یکنواخت دوران می‌کند، و در هرثانیه دو دور کامل‌می‌زند. نشان دهیدکه بزرگترین فاصله ازمرکزقرص برای اینکه جسم کوچکی بتواند بر روی قرص درآن فاصله ساکن بماند تقریباً برابر است با μ ۶/۲ که درآن μ ضریب اصطکاك میان جسم وقرص است.

۱۰ـ چرخهای دوچرخه‌ای به‌قطر ۷۵cm است. نسبت دندانه‌های محور رکاب به‌محور چرخ برابر$\frac{1}{2}$۲ است و طول رکاب ۲۰cm است. تندی انتهای رکاب و بزرگی و جهت شتاب رکاب را هنگامی که دربالاترین نقطهٔ مسیرش‌هست تعیین کنید. دوچرخه با سرعت ۹m/s حرکت می‌کند.

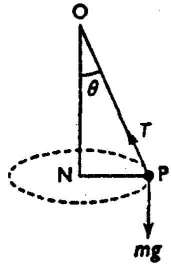
۷.۴. آونگ مخروطی

اگرنقطه‌ای مادی به‌وسیلهٔ نخی به‌نقطهٔ ثابت O بسته شده باشد و دردایره‌ای افقی‌حرکت کند، نخ مخروطی طی می‌کندکه محورش قائم است و از نقطهٔ O می‌گذرد. چنین وضعی را دربارهٔ نخ ونقطهٔ مادی آونگ مخروطی نامند.

فرض‌می‌کنیم P (شکل ۷ـ۲) نقطه‌ای مادی به‌جرم m و OP نخی‌به‌طول l باشد، وفرض می‌کنیم که ON خط قائمی باشدکه از O می‌گذرد. دراین صورت اگر PN عمود بر ON باشد، N مرکز دایرهٔ افقیی است‌که به‌وسیلهٔ P پیموده می‌شود.

فرض‌می‌کنیم T کشش نخ، θ زاویهٔ انحراف نخ نسبت به‌قائم، و ω تندی‌زاویه‌ای نقطهٔ مادی به دور N باشد.

تنهانیروهایی که برنقطهٔ مادی وارد می‌شوندکشش نخ ووزن mg نقطهٔ مادی‌است.



شکل ۷-۲

بدیهی است که P باید زیر O باشد. بنابراین کشش دارای مؤلفه‌ای به‌سمت‌بالاست که با mg تعادل پیدا می‌کند.

مؤلفهٔ افقی کشش باید نیروی لازم متمایل به‌مرکز را تأمین کند تا نقطهٔ مـادی به حرکت خود دریك دایره ادامه دهد. مقداراین نیروی متمایل به‌مرکز برابر $\mathrm{mPN}\times\omega^{2}$ یا $ml\sin\theta\times\omega^{2}$ است.

$$\therefore \qquad T\sin\theta = ml\sin\theta\times\omega^{2} \qquad (۱)$$

چون شتاب قائم وجود ندارد، مؤلفهٔ قائم T باید مساوی وزن mg باشد.

$$\therefore \qquad T\cos\theta = mg \qquad (۲)$$

از (۱) نتیجه می‌شود $\qquad T = ml\omega^{2} = 4\pi^{2}n^{2}ml$

که درآن n عدهٔ دورهایی است که P درهرثانیهٔ می‌زند.

با حذف T ازرابطهٔ (۲):

$$\cos\theta = \frac{mg}{ml\,\omega^{2}} = \frac{g}{l\omega^{2}}$$

اما $\mathrm{ON} = l\cos\theta$،

$$\therefore \qquad \mathrm{ON} = \frac{g}{\omega^{2}}$$

یعنی فاصلهٔ P اززیر O مستقل ازطول نخ است و به طور معکوس با مربع تندی زاویه‌ای تغییرمی‌کند.

اگر به‌جای تندی زاویه‌ای ω سرعت v نقطهٔ مادی P را به‌کارببریم،

$$v = \mathrm{PN}\times\omega = l\sin\theta\times\omega$$

رابطهٔ (۱) به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$T\,\sin\theta = ml\,\sin\theta \times \frac{v^2}{l^2\sin^2\theta} = \frac{mv^2}{l\,\sin\theta}$$

وازتقسیم آن بر (۲):

$$tg\,\theta = \frac{v^2}{gl\,\sin\theta}$$

$$\therefore \qquad v^2 = gl\,\sin\theta tg\theta$$

۷.۵. دستگاه تنظیم درماشین بخار

این واقعیت که، وقتی وزنه‌ای مانند آونگی مخروطی حرکت می‌کند، فاصلهٔ قائم وزنه از نقطهٔ آویزفقط به‌تندی زاویه‌ای بستگی دارد، برای تنظیم مقدار بخار در ماشین بخار به‌کار برده می‌شود و به‌این ترتیب برای دوران یك میله درداخل ماشین بخار سرعتی ثابت فراهم می‌شود.

دومیلهٔ سبك در C (شکل ۷-۳) به‌میلهٔ قائمی که به‌وسیلهٔ موتور دوران می‌کند لولا شده‌اند، ودرانتهای دیگر این میله‌ها وزنه‌های A و B قرار دارند. دومیلهٔ دیگر DF و EF به AC و BC و نیز به طوقهٔ F که می‌توانند به‌پایین و بالای میله بلغزد لولا شده‌اند.

اهرمی به F متصل است که می‌تواند دریچهٔ ورود بخار را به‌داخل موتور باز یا بسته کند. این اهرم طوری نصب شده است که وقتی F بالا می‌رود دریچه بسته می‌شود.

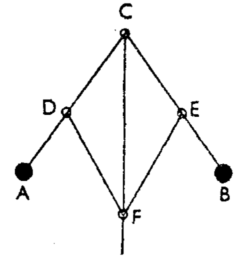
وقتی که سرعت دوران میله افزایش می‌یابد، وزنه‌های A و B بالا می‌روند و F را بالا می‌کشند، بنابراین مقداری بخار خارج می‌شود و حرکت موتورکند می‌شود. اگر سرعت خیلی کاهش پیدا کند، F پایین می‌افتد وبخار بیشتری وارد موتور می‌شود.

۷.۶. مثال ۱: جسم کوچکی، که به‌وسیلهٔ یك نخ به نقطهٔ ثابتی متصل شده است، دایره‌ای افقی با سرعت زاویه‌ای یکنواخت یك دور درثانیه طی می‌کند. ثابت کنیدکه فاصلهٔ این جسم از زیر نقطه ثابت به‌طول نخ بستگی ندارد. هنگامی که جرم جسم ۱kg، وطول نخ ۳۵ cm است کشش نخ را تعیین کنید.

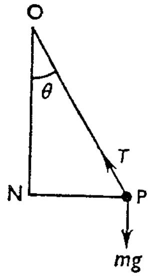
حل : فرض می‌کنیم O (شکل ۷-۴) نقطهٔ ثابت، P جسم، OP نخ باشدکه با خط قائم ON زاویهٔ θ ساخته است، و PN عمود بر ON باشد.

دراین صورت اگر m جرم جسم، T کشش نخ، و ω تندی زاویه‌ای P باشد،

$$T\,\sin\theta = m\,\text{PN}\times\omega^2 = ml\,\sin\theta\times\omega^2 \qquad (1)$$



شکل ۷-۳



شکل ۷-۴

و $$T \cos\theta = mg \qquad (۲)$$

و از (۱):

$$T = ml\omega^{۲} \qquad (۳)$$

$$\therefore \qquad l \cos\theta = \frac{mg}{m\omega^{۲}} = \frac{g}{\omega^{۲}}$$

اما $l \cos\theta$ فاصلهٔ قائم P از O است که مساوی است با $g/\omega^{۲}$، و این مقدار مستقل از طول نخ است.

وقتی‌که P یك دور در ثانیه می‌زند، $\omega = ۲\pi$ است، و اگر $m = ۱\ \mathrm{kg}$ و $l = ۰/۳۵\ \mathrm{cm}$ باشد، از رابطهٔ (۳) داریم،

$$T = ۱ \times ۰/۳۵ \times ۴\pi^{۲}$$

اگر $\pi^{۲} = ۱۰$ اختیار شود،

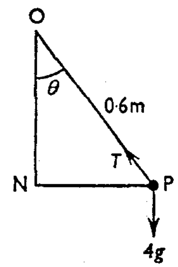
$$T = ۱۴\ \mathrm{N}$$

مثال ۲: اگر وزنهٔ یك آونگ مخروطی $۴\ \mathrm{kg}$ و طول نخ $۶۰\ \mathrm{cm}$ باشد، ماکزیمم عدهٔ دورهای آن را در هرثانیه پیداکنید. بزرگترین‌کشش قابل اطمینان نخ $۴۰۰\ \mathrm{N}$ است.

حل : فرض می‌کنیم که‌کشش نخ برابر T نیوتون، تندی زاویه‌ای برابر ω رادیان بر ثانیه و زاویهٔ انحراف نخ ازخط قائم برابر θ باشد.

در شکل ۷-۵، O نقطهٔ آویز، P وزنهٔ آونگ، PN عمود برخط قائم ON است.

$$T \sin\theta = ۴\mathrm{PN} \times \omega^{۲} = ۴ \times ۰/۶ \sin\theta \times ۴\pi^{۲} n^{۲}$$



شکل ۷-۵

که درآن n عدهٔ دور درثانیه است،

$$\therefore \qquad T = ۹/۶\,\pi^۲ n^۲$$

ماکزیمم مقدار کشش برابر N ۴۰۰ است.

$$\therefore \qquad \pi^۲ n^۲ = \frac{۴۰۰}{۹/۶} = ۴۱/۷$$

واگر $\pi^۲ = ۱۰$ گرفته شود

$$\therefore \qquad n^۲ = ۴/۱۷$$

پس ماکزیمم عدهٔ دور درهرثانیه ۲/۰۴ است.

مثال ۳: نخ کشسانی که طول کشیده نشدهٔ آن m ۰/۵ است دارای جرمی ۲/۲ کیلوگرمی به‌یك انتهاست و به‌صورت آونگی مخروطی ۶۰ دور در دقیقه می‌زند. در این صورت طول نخ m ۰/۶ است. کشش نخ را تعیین کنید وانرژی جنبشی وزنه و انرژی پتانسیل ناشی ازکشیده شدن نخ را تعیین کنید.

حل : ۶۰ دور در دقیقه = یك دور در ثانیه، یعنی برابراست با تندی زاویه‌ای ۲π رادیان درثانیه.

اگرکشش نخ T نیوتون وزاویهٔ انحراف نخ ازخط قائم θ باشد،

$$T \sin\theta = ۲/۲ \times ۰/۶ \sin\theta \times ۴\pi^۲$$

$$\therefore \qquad T = ۵/۲۸\pi^۲ \# ۵۲/۸$$

نیز

$$T \cos\theta = ۲/۲g$$

$$\therefore \qquad \cos\theta = \frac{۲/۲g}{T} = \frac{۲/۲ \times ۹/۸}{۵۲/۸} = \frac{۴۹}{۱۲۰}$$

$$\therefore \qquad \sin\theta = ۰/۹۱$$

اگر سرعت وزنه v متر بر ثانیه باشد،

$$v = ۰/۶ \sin\theta \times \omega = ۰/۶ \times ۰/۹۱ \times ۲\pi = ۱/۰۹\pi$$

بنابراین انرژی جنبشی برابر است با

$$\frac{۱}{۲}(۲/۲)(۱/۰۹\pi)^۲ = ۱/۳\pi^۲ = ۱۳ \text{ J}$$

انرژی پتانسیل ناشی‌ازکشیده شدن نخ مساوی باکاری است که براثرکشیده شدن نخ و افزایش طول آن از $۰/۵ \text{ m}$ به $۰/۶ \text{ m}$ صورت گرفته است. متوسط کششهای اولیه و نهایی برابر است با

$$\frac{T}{۲} = ۲۶/۴ \text{ N}$$

بنابراین کاری که براثرکشیده‌شدن نخ صورت‌گرفته است برابر است با $۲/۶۴$ J. و انرژی پتانسیل نیز $۲/۶۴$ J است.

مثال ۴: وزنه‌ای‌به‌جرم m در C آزادانه به‌دومیلۀ سبك CA و CB مفصل شده است. انتهای A از میلۀ CA درنقطۀ ثابت A می‌تواند بگردد. انتهای B به‌دانۀ تسبیح سنگینی به‌جرم m که در امتداد میلۀ قائم صیقلی AB آزادانه می‌لغزد مفصل‌شده است. اگر وزنۀ C دایره‌ای افقی با تندی زاویه‌ای یکنواخت ω طی کند، ثابت‌کنید که زاویۀ انحراف میله‌های CA و CB نسبت به‌خط قائم به اندازه‌ای است‌که کسینوس آن برابر $۳g/l\omega^۲$ است، که درآن l طول هریك از میله‌هاست.

حل : فرض می‌کنیم $T_۱$ و $T_۲$ کششهای AC و BC (شکل ۷-۶) و R عکس‌العمل وزنۀ m در B عمود برمیله، و θ زاویۀ BAC باشد. چون‌وزنه در B به‌طور قائم حرکت نمی‌کند،

$$T_۲ \cos\theta = mg \qquad (۱)$$

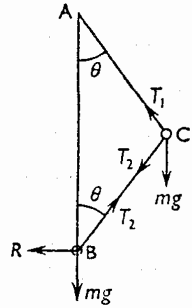
نیز چون وزنه در C به‌طور قائم حرکت نمی‌کند،

$$T_۱ \cos\theta = mg + T_۲ \cos\theta = ۲mg \qquad (۲)$$

اماچون‌وزنه در C دایره‌ای افقی‌به‌شعاع $l \sin\theta$ حول AB طی‌می‌کند، دوکشش بایستی نیرویی افقی برابر $ml \sin\theta\omega^۲$ به‌طرف AB واردکنند.

$$\therefore \quad T_1 \sin\theta + T_2 \sin\theta = ml \sin\theta \times \omega^2$$

$$\therefore \quad T_1 + T_2 = ml\omega^2$$



شکل ۷-۶

پس از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$\frac{2mg}{\cos\theta} + \frac{mg}{\cos\theta} = ml\omega^2$$

$$\therefore \quad \cos\theta = \frac{3g}{l\omega^2}$$

تمرین ۲۰۷

۱- وزنه‌ای به‌جرم m که به‌انتهای نخی به‌طول a متصل شده است برروی صفحه‌ای صیقلی و افقی دایره‌ای می‌پیماید. اگرنقطهٔ مادی n دور در دقیقه بزند، کشش نخ را با وزن وزنه مقایسه‌کنید. شخصی یک انتهای نخی به‌طول ۲۵ cm را می‌گیرد. به‌انتهای دیگر وزنه‌ای متصل شده است و وزنه، درصفحه‌ای افقی به‌طور یکنواخت ۸۰ دور در دقیقه می‌زند. نشان دهیدکه زاویهٔ انحراف نخ با خط قائم درحدود °۵۷ است.

۲- نقطه‌ای مادی‌که به‌صورت آونگی مخروطی حرکت می‌کند به انتهای نخی به‌طول ۴۰ cm متصل است. اگر زاویهٔ امتداد نخ با خط قائم ۶۰ درجه باشد، نشان دهید که نقطهٔ مادی تقریباً در هر ۱۰ ثانیهٔ ۱۱ دور می‌زند.

۳- جسم‌سنگین‌کوچکی به‌وسیلهٔ نخی به‌طول ۱/۲ m به‌نقطهٔ ثابت A متصل‌شده است، و با سرعتی یکنواخت دایره‌ای افقی می‌پیماید. اگرکشش نخ دو برابر وزن جسم

باشد، نشان دهیدکه تندی زاویه‌ای تقریباً برابر ۴ رادیان برثانیه است.

۴ ـ نخ کشسانی، که طول آن در حالت غیرکشیده برابر ۹۰ cm است، از یك انتها به‌نقطه‌ای ثابت و از انتهای دیگر به‌وزنه‌ای به‌جرم ۴ kg متصل است و به‌صورت آونگی مخروطی در هردقیقه ۴۰ دور می‌زند. اگرطول نخ ۱۰۵ cm شود، افزایش طول نخ هنگامی‌که وزنه به‌طور ساکن آویزان باشد چقدر خواهد بود؟

۵ ـ وزنه‌ای به‌جرم ۰/۵ kg به‌وسیلهٔ نخی به‌طول ۱/۵ m آویزان است و به‌صورت آونگی مخروطی در هردقیقه ۸۰ دورمی‌زند. شعاع دایره‌ای راکه می‌پیماید وکشش نخ را تعیین کنید.

۶ ـ نشان دهیدکه اگر در آونگ مخروطی زاویهٔ انحراف نخ نسبت به‌خط قائم برابر θ باشد $cos\,\theta = \frac{r\omega^2}{g}$ خواهد بود، که درآن r طول نخ و ω تندی زاویه‌ای حرکت است. اگر نخ انعطاف‌پذیر وکشش آن برابر $\frac{\lambda(r-a)}{a}$ باشد، که درآن r طول نخ کشیده شده و a طول‌طبیعی نخ باشد، کسینوس زاویه‌ای راکه نخ باخط قائم‌می‌سازد پیدا کنید و نشان دهیدکه $ma\omega^2/\lambda$ بایدکوچکتر از واحد باشد.

۷ ـ نقطه‌ای‌مادی به‌جرم ۱/۸ kg به‌انتهای‌نخی‌به‌طول ۰/۵ m متصل‌است و دایره‌ای افقی به‌میزان ۶۰ دور در دقیقه می‌پیماید. کشش نخ را برحسب نیوتون تعیین‌کنید و ثابت‌کنیدکه انتهای ثابت نخ‌کمی‌کمتر از ۲۵ cm بالای مرکز دایره است.

۸ ـ نقطه‌ای مادی به‌وسیلهٔ نخی‌ظریف به‌یك نقطهٔ ثابت متصل‌است و درصفحه‌ای افقی به‌طور یکنواخت دوران می‌کند. اگر در هر ۲ ثانیه ۳ دورکامل بزنند، نشان دهید که عمق قائم آن از زیرنقطهٔ ثابت تقریباً برابر ۱۱ cm است.

۹ ـ نقطه‌ای مادی، که به‌وسیلهٔ نخی به‌طول ۱m به‌نقطه‌ای ثابت متصل‌است، دایره‌ای افقی طی می‌کند. نخ فقط می‌تواندکششی ۱۵ برابر وزن نقطهٔ مادی را تحمل‌کند. نشان دهیدکه بزرگترین عدهٔ ممکن دور درثانیه اندکی‌کمتر از ۲ است.

۱۰ـ دووزنهٔ‌کوچك یکی‌به‌جرم ۶۰ g و دیگری‌به‌جرم ۳۰ g به‌وسیلهٔ نخ انعطاف‌ناپذیری به‌طول ۳۰ cm که از سوراخ حلقه‌ای ثابت و صیقلی عبور کرده است به‌یکدیگر متصل هستند. وزنهٔ سنگینتر آویزان است و به‌فاصلهٔ ۲۰ cm زیرحلقه است وحال آنکه وزنهٔ دیگر دایره‌ای افقی می‌پیماید. نشان دهید که سطح این دایره در ۵ سانتیمتری زیرحلقه است و نیز نشان دهیدکه وزنهٔ سبکترتقریباً درحدود ۱۳۴ دور در دقیقه می‌زند.

۱۱- دو وزنهٔ نـامتساوی به وسیلهٔ نخی به طول l کـه از سوراخ حلقهٔ ثابت و صیقلیی می‌گذرد به‌یکدیگر متصل شده‌اند. وزنهٔ سبکتر به صورت آونگی مخروطی حرکت می‌کند و حـال آنکه وزنهٔ دیگر به‌طور قـائم آویزان است. نیم زاویهٔ مخروط، و عدهٔ دورهایی را که درهرثانیه زده می‌شود تعیین کنید. طولی از نخ که آویزان است برابر a است.

۱۲- وزنه‌ای به‌جرم $۲m$ روی میز افقی وصیقلی قراردارد و به‌وسیلهٔ نخ انعطاف‌ناپذیر سبکی که ازسوراخ حلقهٔ ثابت کوچکی گذشته است به‌وزنهٔ دیگری به‌جرم m کـه در ارتفاع h بـالای میز است متصل شده است. اگر وزنهٔ $۲m$ دایره‌ای بـه شعاع $\frac{۱}{۲}h$ که مرکزش روی میز و روی خط قائم زیر حلقه است بپیماید، نشان دهیدکـه زمانی‌که طول می‌کشد تا یك بار دایره را بپیماید برابر است با

$$۲\pi\left(\frac{h\sqrt{۵}}{g}\right)^{\frac{۱}{۲}}$$

۱۳- نقطه‌ای مادی به‌وسیلهٔ دونخ همطول به‌دونقطهٔ A و B که بریك خط قائم واقعند متصل‌شده است و با سرعت زاویه‌ای یکنواخت دایره‌ای افقی‌می‌پیماید. ثابت‌کنید که برای‌آنکه هردونخ کشیده بمانند، سرعت زاویه‌ای باید از $\sqrt{\frac{۲g}{h}}$ تجاوزکند، که درآن $h=\mathrm{AB}$ است و ثـابت‌کنید کـه اگر سرعت برابر $۲\sqrt{\frac{۲g}{h}}$ بـاشد، نسبت کششهای نخها به‌نسبت ۵ و ۳ است.

۱۴- بـازوی سبك CB ، به‌طول a ، آزادانه در انتهای ثـابت C به‌صورت پـاشنهٔ در درجای خود حرکت می‌کند و در B شامل وزنه‌ای به‌جرم m است. به وسیلهٔ نخی که متصل به B می‌شود، این بازو را به وضع افقی درمی‌آورند و انتهای دیگر نخ را به‌نقطهٔ A ، که روی خط قـائم C و دربالای C به‌فاصلهٔ b ازآن است، متصل می‌کنند. بزرگی وجهت کشش CB، هنگامی‌که CB به‌طور یکنواخت و n دور در هرثانیه حول محور قائم به‌دوران درمی‌آید، چقدر است؟

۱۵- نقطه‌ای مادی به‌جرم m کـه دایره‌ای افقی می‌پیماید به‌وسیلهٔ نخی کـه به‌نقطه‌ای در ارتفاع h بالای مرکز دایره متصل است به‌حرکت خود ادامه می‌دهد. مدت‌زمان یك‌دور گردش نقطهٔ مادی را تعیین کنید.

اگر $m=۱۲۰\ \mathrm{g}$ ، $h=۱/۲\ \mathrm{cm}$ ، و طول نخ برابر $۵۰\ \mathrm{cm}$ باشد، کشش نخ را تعیین کنید.

۱۶ـ نیمکره‌ای صیقلی به‌شعاع داخلی a طوری نگاهداری شده است که سطح لبهٔ آن افقی است. در داخل این نیمکره، نقطه‌ای مادی دایره‌ای افقی به‌شعاع c کمتر از a می‌پیماید. مدت زمان یك دور دوران را تعیین کنید.

در داخل نیمکره‌ای صیقلی به‌شعاع داخلی ۲۵ cm که سطح لبهٔ آن افقی است، نقطه‌ای مادی به‌جرم m دایره‌ای افقی به‌شعاع‌داخلی ۲۴ cm می‌پیماید. نخ نازك بی‌وزنی که به‌نقطهٔ مادی متصل شده است از سوراخ صیقلی کوچکی که زیر نیمکره است عبورمی‌کند ونقطهٔ مادی دیگری به‌جرم m را که به‌حال‌سکون آویزان است حمل می‌کند. نشان دهید که سرعت نقطهٔ مادی اول کمی کمتر از ۴ m/s است.

۱۷ـ به‌وسیلهٔ نخ کشسانی به‌طول طبیعی a نقطه‌ای مادی به‌جرم m از نقطه‌ای ثابت آویزان است. کشش نخ، هنگامی که نخ به اندازهٔ x کشیده می‌شود، برابر است با λx. ثابت کنید که اگر نقطهٔ مادی دایره‌ای افقی باتندی زاویه‌ای ω بپیماید، زاویهٔ انحراف نخ نسبت به‌خط قائم θ از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

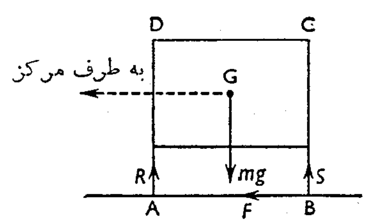
$$\omega^۲ \cos\theta = \frac{g}{a}\left(۱-\frac{m\omega^۲}{\lambda}\right)$$

۱۸ـ طول طبیعی نخ کشسانی، که یك انتهای‌آن به‌نقطه‌ای‌ثابت است، برابر aاست. اگر وزنهٔ کوچکی به‌آن متصل شود اندازهٔ e بر طولش اضافه می‌شود. اکنون وزنه را طوری به‌حرکت در می‌آورند که دایره‌ای افقی با تندی زاویه‌ای ω رادیان بر ثانیه طی کند. افزایش طول نخ و زاویهٔ انحراف نخ را با خط قائم تعیین کنید.

نشان دهید که $\omega^۲$ بایدکمتر از g/e و بزرگتر از $g/(a+e)$ باشد.

۷.۷ حرکت واگن خط‌آهن یا اتومبیل درمسیر منحنی

فرض می‌کنیم ABCD (شکل ۷ـ۷) مقطع واگن خط آهن یا اتومبیل در صفحهٔ قائمی



شکل ۷ـ۷

باشد که ازمرکزجرم G و مرکز دایره‌ای که پیموده می‌شود گذشته باشد، A و B نقطه‌هایی باشند که چرخها با زمین تماس دارند و A درسمت داخل انحنا باشد.

فرض می‌کنیم v سرعت، r شعاع دایره، و m جرم باشد. mv^{2}/r، نیروی متمایل به مرکز لازم، باید در واقع بر G، مرکز جرم، اعمال شود، اما البته عملاً می‌تواند فقط برنقاط تماس با خطوط آهن یا با زمین وارد شود.

درحالت مربوط به‌واگن خط آهن، برجستگیهای چرخها در قسمتهای داخل خطوط آهن هستند به‌طوری‌که، جز با قراردادن خط دوم در داخل انحنا و با برجستگیهای داخلی میان دوخط، تمام فشار متمایل به‌داخل به‌وسیلهٔ خط خارجی اعمال می‌شود وآن نیروی F است که درشکل نشان داده شده است.

در هرحالت، اگر انحنا زیاد باشد، فشار قابل ملاحظه‌ای برخطوط آهن‌وارد می‌شود که معمولاً می‌توان اثر آن را با بالا بردن مسیر، چنانچه قبلاً گفته شد، حذف کرد یا کاهش داد.

مسیرافقی زیان دیگری نیز دارد. همه می‌دانندکه اتومبیلی که با سرعت زیاد پیچ شدیدی را دور می‌زند به‌طرف چرخهای خارجی منحرف می‌شود.

نیروی F (برابر mv^{2}/r) که به‌طور افقی بر B وارد می‌شود برابر است با نیروی افقیی‌که بر G وارد می‌شود. این زوج نیروکه درجهت عقربه‌های ساعت است مایل است که واگن را در جهت ADCB بچرخاند، یعنی چرخهای داخلی واگن را از جا بلندکند. این پدیده به‌طور مؤثرنیروی S عکس‌العمل چرخها را در B افزایش می‌دهد و نیروی R عکس‌العمل چرخها را در A کاهش می‌دهد. این‌دونیرو و وزن mg باید با یکدیگرتشکیل زوجی بدهندکه مساوی و درخلاف جهت زوج دیگر باشد تا واگن ازجایش بلند نشود. در واقع R و S معادل با نیروی mg هستندکه به‌طور قائم به‌طرف بالا و درسمت راست G (شکل۷-۷) وبه‌فاصلهٔ x از G وارد می‌شوند، و بنابراین گشتاور زوج درخلاف جهت عقربه‌های ساعت برابر mgx است.

اگر h ارتفاع G از خطوط آهن باشد، گشتاور زوج که متمایل است چرخشی در جهت عقربه‌های ساعت تولید کند برابر است با $mv^{2}h/r$. پس به‌طورکلی

$$\frac{mv^{2}h}{r}=mgx$$

اگر فاصلهٔ میان دوخط برابر $2a$ باشد و فرض‌کنیم که G در روی خط وسط A و B است، بزرگترین مقدار x برابر a خواهد بود و این هنگامی روی خواهد دادکه $R=0$

باشد، یعنی هنگامی که چرخهای داخلی درحال ترك کردن خط آهن باشند.

بنابراین واگن، هنگامی که سرعت طوری باشد که

$$v > \sqrt{\frac{gar}{h}} \quad \text{یا} \quad \frac{mv^{2}h}{r} > mga$$

واگن حول B منحرف خواهد شد.

۰۸۰۷ این نتیجه‌ها را می‌توان به‌طریق زیر نیز به‌دست آورد:

فرض می‌کنیم R و S نیروهای قائمی باشند که بر A و B وارد می‌شوند و F برایند نیروهای افقیی باشد که به‌چرخهای خارجی وارد می‌شوند و ناشی از فشار برجستگیهای آنها برخطوط خارجی باشد (شکل ۷-۷).

دراین‌صورت چون حرکت قائم وجود ندارد،

$$R+S-mg=0 \qquad (1)$$

و چون شتاب به‌طرف داخل انحنا برابر است با v^{2}/r، داریم

$$F=m\frac{v^{2}}{r} \qquad (2)$$

از این گذشته، چون واگن حول G دوران نمی‌کند، مجموع گشتاورهای نیروها حول G باید صفر باشد*.

پس

$$Sa-Ra-Fh=0 \qquad (3)$$

$$\therefore \qquad S=\frac{1}{2}m\left(g+\frac{v^{2}h}{ra}\right)$$

و

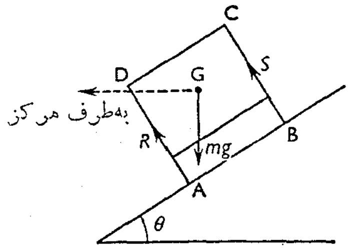
$$R=\frac{1}{2}m\left(g-\frac{v^{2}h}{ra}\right)$$

بدیهی است که فشار قائم S برخط خارجی همیشه بزرگتر از فشار قائمی است که بر خط داخلی وارد می‌شود، و نیز وقتی که $g=\frac{v^{2}h}{ra}$ باشد $R=0$ خواهد شد، یعنی فشاری که برخط داخلی وارد می‌شود از میان می‌رود. دراین هنگام واگن شروع به انحراف حول B می‌کند.

---

* تحقیق این بیان بعداً دربند ۲۶.۹ داده خواهد شد.

۹۰۷. فرض می‌کنیم مطابق (شکل ۷-۸) اتومبیل یا واگن بر جاده‌ای قرار دارد که عرض جاده دارای شیب و زاویهٔ شیب آن به‌طرف مرکز انحنایی که پیموده می‌شود برابر θ باشد.



شکل ۷-۸

مؤلفهٔ وزن، $mg\ sin\ \theta$ ، که در G وارد می‌شود به‌سمت پایین شیب است.

مؤلفهٔ شتاب متمایل به‌مرکز، یعنی v^2/r ، در امتداد پایین شیب برابر است با $\frac{v^2}{r} cos\theta$. بنابراین اگر

$$mg\ sin\ \theta = \frac{mv^2}{r} cos\ \theta$$

یا

$$tg\ \theta = \frac{v^2}{gr}$$

باشد، مؤلفهٔ وزن، به‌صورت نیروی متمایل به‌مرکزی که به‌سمت پایین شیب واردمی‌شود عمل خواهدکرد.

در این حالت فشار جانبی برجاده وارد نمی‌شود. معادله‌های حرکت را می‌توان به‌شکل زیر نیز نوشت:

$$(R+S)\ cos\ \theta - mg = 0$$

زیرا حرکت قائم وجود ندارد، و

$$(R+S)\ sin\ \theta = m\frac{v^2}{r}$$

زیرا حرکت افقی با شتاب v^2/r وجود دارد. نیزاگر گشتاورهای حول G را تعیین کنیم، چون دورانی وجود ندارد، می‌توان نوشت:

$$Ra - Sa = 0$$

که ازآن نتیجه می‌شود:

$$tg\,\theta = \frac{v^{2}}{gr} \quad \text{و} \quad R = S$$

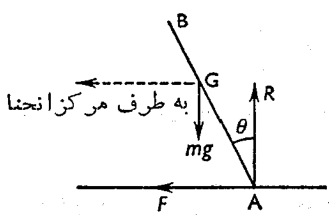
مقدار θ به‌ازای مقدارمعلوم r بستگی به v دارد.

درحالت مربوط به‌جادهٔ راه‌آهن،زاویه برای سرعت متوسط که قطار آن جاده را طی می‌کند انتخاب شده است. درسرعتهای بالاتر ازاین مقدار، فشارجانبی برخط خارجی وبه طرف خارج وجود دارد و درسرعتهای کمتر ازاین مقدار، برخط داخلی فشاری جانبی به طرف داخل وجود دارد ومؤلفهٔ وزن بزرگتر ازمقدارلازم است.

درحالت مربوط به‌جادهٔ اتومبیل، سربالا شدن عرض جاده تدریجی است. وقتی که سرعت افزایش می‌یابد، اتومبیل به‌قسمت شیبدارترجاده سرمی‌خورد.

۷. ۱۰. حرکت دوچرخه‌ای که مسیری منحنی می‌پیماید

دراین حالت، اگردوچرخه ودوچرخه سوار راست باشند، مرکزثقل به طورقائم بالای خط تماس چرخها با زمین‌قراردارد. بنابراین وزن درحول این‌نقطه گشتاوری ندارد ونمی‌تواند زوج وارونه را خنثی‌کند. به‌این دلیل دوچرخه سوار به ناچار، هنگامی‌که از پیچ عبور می‌کند، خود را به‌طرف داخل خم‌می‌کند.



شکل ۷-۹

فرض می‌کنیم AB (شکل ۷-۹) معرف دوچرخه ودوچرخه سوار و G مرکز جرم آنها باشد. F، اصطکاك زمین در A به‌طرف داخل اعمال می‌شود، ونیروهای دیگرکه اعمال می‌شوند عبارتند ازوزن mg که قائم است و ازG می‌گذرد، و عکس‌العمل زمین (R) در A.

چون درامتداد قائم حرکتی وجود ندارد،

$$R = mg$$

چون شتاب افقی برابر $v^۲/r$ است،

$$F = m\frac{v^۲}{r}$$

وچون درحول G دورانی وجود ندارد،

$$F \times \mathrm{AG}\cos\theta = R \times \mathrm{AG}\sin\theta$$

یا

$$tg\,\theta = \frac{F}{R}$$

(ممکن است تذکر دادکه این رابطه نشان می‌دهدکه برایند F و R از G می‌گذرد.)

ازاین گذشته،

$$tg\,\theta = \frac{mv^۲}{mgr} = \frac{v^۲}{gr}$$

این مقدار برابرهمان مقدار زاویه‌ای است که باید، برای جلوگیری ازهرگونه‌تمایل به‌واژگون شدن، عرض جاده نسبت به‌افق داشته باشد.

۱۱۰۷. مثال ۱: قطاری که باسرعت ۷۲ km/h حرکت می‌کند، مسیری منحنی‌می‌پیماید که شعاع متوسط آن ۳۶۰ m وفاصلهٔ میان دو ریل برابر ۱/۴ m است. تعیین کنید ریل خارجی چقدر باید بلندتر از ریل داخلی باشد تا بر ریل فشار جانبی وارد نشود.

حل : فرض می‌کنیم جرم قطار برابر m کیلوگرم و زاویه‌ای که سطح ریلها با افق می‌سازد برابر θ باشد.

سرعت قطار $\frac{۷۲ \times ۱۰۰۰}{۳۶۰۰}$ m/s یعنی برابر ۲۰m/s است.

نیروی افقی لازم به‌طرف داخل برابر $\mathrm{m} \times \frac{۲۰^۲}{۳۶۰}$ نیوتون و مؤلفهٔ این نیرو به‌موازات سطح ریلها برابر است با

$$\frac{m \times ۲۰^۲}{۳۶۰}\cos\theta$$

مؤلفهٔ وزن دراین جهت برابر است با $mg\sin\theta$. بنابراین مقدار لازم برای θ چنین به‌دست می‌آید:

$$mg\sin\theta = \frac{m \times ۴۰۰}{۳۶۰}\cos\theta$$

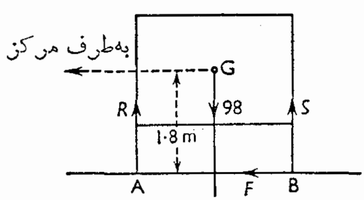
$$\therefore \qquad tg\,\theta=\frac{۱۰}{۹\times ۹/۸}=\frac{۱۰۰}{۸۸۲}$$

بلندی ریل خارجی ازریل داخلی باید $۱/۴۱\ sin\,\theta$ متر باشد. اما چون θ کوچك است می‌توان نوشت $sin\,\theta = tg\,\theta$.
بنابراین بلندی لازم برابر است با

$$۱/۴۱\times\frac{۱۰۰}{۸۸۲}=۰/۱۶\ \mathrm{m}$$

مثال ۲: واگنی بــه جـرم $۱۰\ \mathrm{Mg}$ مسیری منحنی بـه شعاع $۰/۸\ \mathrm{km}$ را بـا سرعت $۲۴\ \mathrm{km/h}$ می‌پیماید. فـاصلهٔ میان ریلها $۱/۵\ \mathrm{m}$ است؛ و مرکز ثقل واگن در $۱/۸\ \mathrm{m}$ بالای ریلهاست. اگر ریلها در یك تراز باشند، فشارقائمی که بر هر یك وارد می‌شود، وفشار افقی میان برجستگی و ریل چقدراست؟ برای اینکه بر برجستگی فشاری وارد نیاید، ریل خارجی را چقدرباید بلندتر کرد؟

حل : فرض می‌کنیم A (شکل ۷ـ۱۰) نقطهٔ تماس داخلی و B نقطهٔ تماس خارجی‌با ریلها باشد، و R و S فشارهای قائم بر A و B و F فشار افقی در B بـاشدکـه همگی برحسب $۱۰^۳\ \mathrm{N}$ اندازه‌گیری شده‌اند.



شکل ۷-۱۰

پس
$$R+S=۹۸$$

وچون سرعت $\frac{۲۰}{۳}\mathrm{m/s}$ است،

$$F=\frac{۱۰\times\left(\frac{۲۰}{۳}\right)^۲}{۸۰۰}=\frac{۵}{۹}$$

نسبت به G گشتاور می‌گیریم:

$$\circ/۷۵\,S-\circ/۷۵\,R=۱/۸\,F$$

$$\therefore \qquad S-R=۲/۴\,F$$

$$۲S=۹۸+۲/۴\,F=۹۸+۱/۳۳=۹۹/۳۳$$

$$S=۴۹/۶۷$$

$$R=۴۸/۳۳$$

اگر θ زاویهٔ لازم شیب سطح ریاها با افق باشد بـه‌طوری‌کـه ازفشار جـانبی جلوگیری شود،

$$mg\sin\theta=\frac{mv^۲}{r}\cos\theta$$

$$\therefore \qquad tg\,\theta=\frac{v^۲}{gr}=\left(\frac{۲\circ}{۳}\right)^۲\times\frac{۱}{۹/۸\times۸\circ\circ}=\frac{۱}{۱۷۶/۴}$$

ارتفاعی‌که ریل خارجی باید بلندتر ازریل داخلی باشد برابراست با

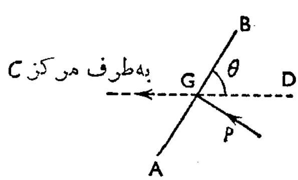
$$۱/۵\sin\theta \# ۱/۵\,tg\,\theta=\frac{۱۵}{۱۷۶۴}\,\mathrm{m}$$

$$\#\circ/۸۵\,\mathrm{cm}$$

مثال ۳: هواپیمایی به‌جرم یك تن با سرعت $۱۵\circ\ \mathrm{km/h}$ حرکت می‌کند. تعیین کنید با چه زاویه‌ای خودش راکج‌کند تا بتواند بدون لغزش جانبی، دایره‌ای افقی بـه شعاع $۲\circ\circ\ \mathrm{m}$ بزند. فرض‌می‌کنیم‌که ساختمان هواپیما طوری است‌که می‌تواند چنین‌کاری بکند و براینده فشارهوا درصفحهٔ تقارن ماشین است.

حل : فرض می‌کنیم AB (شکل ۷–۱۱) مقطع بالهای هواپیما، G مـرکـز ثقل، و CGD خط افقیی‌که از G می‌گذرد باشد ومرکز دایره درامتداد خطی باشدکـه به‌طرف C است.

فشار هوا را ممکن است به‌عنوان نیرویی مانند P که بر G اعمال می‌شود و بر



شکل ۷-۱۱

AB عمود است درنظر گرفت. فرض می‌کنیم $\angle BGD=\theta$ باشد.
اما P باید وزن mg هواپیما را تحمل کند ونیز از نیروی متمایل به‌مرکز $mv^۲/r$ در امتداد GC جلوگیری کند.

دراینجا
$$v=۱۵۰\times\frac{۱۰۰۰}{۳۶۰۰}=۴۱\frac{۲}{۳}\,\mathrm{m/s}$$

و
$$r=۲۰۰\,\mathrm{m}$$

$$\therefore \qquad P\cos\theta=mg$$

و
$$P\sin\theta=\frac{m\times ۱۲۵^۲}{۹\times ۲۰۰}$$

$$\therefore \qquad tg\,\theta=\frac{۱۲۵\times ۱۲۵}{۹\times ۲۰۰\times ۹/۸}=\frac{۶۲۵}{۷۰۵/۶}=۰/۸۸۶$$

$$\therefore \qquad \theta=۴۱^\circ\ ۳۲'$$
تقریباً

تمرین ۷.۳

۱ـ فاصلهٔ دو ریل راه‌آهن ازیکدیگر ۱/۴۱ m است ودریك منطقه طوری نصب‌شده‌اند که هریك قوسی ازدایره به‌شعاع ۸۰۰ مترتشکیل داده‌اند. سرعت متوسط قطارهایی که ازاین خط عبور می‌کنند برابر ۷۲ km/h است. تعیین کنید ریل خارجی ازریل داخلی چقدر باید بلندترباشد.

۲ـ پیچ جاده‌ای به‌شکل‌قوسی ازدایرهٔ به‌شعاع ۷۵ m است، وشیب به‌طرف پایین وداخل انحنا باافق زاویه‌ای می‌سازد که تانژانت آن برابر $\frac{۱}{۵}$ است. برای اینکه اتومبیل در این پیچ منحرف نشود با چه سرعتی باید درآن حرکت کند؟

۳ـ به‌طور واضح مزیت بالابردن سطح ریل خارجی را ازسطح ریـل داخلی هنگامی کـه ریلها مسیری منحنی تشکیل می‌دهند، توضیح دهید. اگرمسیرقوسی ازدایره به‌شعاع r باشد، وفاصلهٔ دوریل ازیکدیگر برابر b باشد وسرعت قطار دراین‌جاده برابر v باشد تعیین کنیدکه ریل خارجی چقدر باید ازریل داخلی بلندتر باشد.

۴ـ اگرشعاع انحنای مسیر ۹۰۰ m باشد و قطارمجبور باشدکـه این مسیررا بـا سرعت ۴۸ km/h بپیماید، تعیین کنیدکه، اگرفاصلهٔ دو ریل از یکدیگر ۱۴۰ cm بـاشد، سطح ریل خارجی چقدرباید ازسطح ریل داخلی بلندترباشد.

۵ ـ اتومبیلی در یك پیچ که به‌شکل قوسی ازدایره به‌شعاع ۴۵ m است و سطح جاده افقی است حرکت می کند. اگرفاصلهٔ میان چرخها برابر ۱/۳۵ m و مرکزثقل در ۰/۶ m اززمین و روی عمود منصف خط واصل میان چرخها قرار داشته باشد، حداکثر سرعت ممکن را تعیین کنید. نیزهنگامی که اتومبیل با این سرعت ماکزیمم حرکت می کند برای اینکه به‌طرف دیگر جاده منحرف نشود ضریب اصطکاك میان جاده ولاستیکهای چرخها چقدر باید باشد؟

۶ ـ اتومبیلی با سرعت ۱۲۰ km/h به پیچی می‌رسدکه شعاع انحنای آن ۱۰۰ m است. اگرکل فشاری که ازطرف اتومبیل برجاده اعمال می‌شود عمود برسطح جاده باشد، زاویه‌ای که عرض‌جاده باافق‌می‌سازد چقدراست؟اگرجرم اتومبیل ۱/۵ Mg باشدکل فشاری که برجاده وارد می‌شود چقدراست؟

۷ ـ به‌فرض‌آنکه ارتفاع مرکزثقل یك لوکوموتیو از ریلها برابر ۱/۸ m وعرض ریلها برابر ۱/۴ m باشد، بالاترین سرعتی که لوکوموتیو می‌تواند درپیچی به‌شعاع انحنای ۱۳۵ m بزند بدون آنکه واژگون شود چقدراست؟

۸ ـ قطاری که با سرعت ۶۰ km/h حرکت می کند پیچی به‌شعاع انحنای ۱۸۰ m می‌پیماید. اگرعرض‌ریلها ۱/۵ m باشد تعیین کنیدکه ریل خارجی چقدرباید بلندتر ازریل داخلی باشد تا برریلها فشارجانبی وارد نشود.

۹ ـ دوچرخه‌ای که با سرعت ۱۶ km/h حرکت می کند ازپیچی به‌شعاع انحنای ۱۵ m می گذرد. زاویهٔ انحراف صفحهٔ قائم دوچرخه را تعیین کنید. حداقل ضریب‌اصطکاك میان دوچرخه وجاده چقدر باشد تا دوچرخه به‌یك سو نلغزد؟ [فرض می‌کنیم که دوچرخه سوار وماشینش دریك صفحه‌اند.]

۱۰ـ شکل جادهٔ دوچرخه‌ای دریك پیچ مانند قوسی ازیك دایره به‌شعاع ۹۰ m است. تعیین کنید عرض جاده نسبت به‌افق چه زاویه‌ای بسازد تا دوچرخه سوار بتواند بدون هیچ عکس‌العمل جانبی میان دوچرخه و جاده با سرعت ۴۸ km/h پیچ را دور بزند. اگر موتورسیکلتی بتواند با سرعت ۹۶ km/h با اطمینان این پیچ را طی کند، حداقل ممکن برای ضریب اصطکاك میان جاده و لاستیکهای موتورسیکلت چقدراست؟

۱۱ـ اتومبیلی به‌پیچی می‌رسد که سطح جادهٔ آن افقی است وشعاع انحنای آن ۴۵ m است. اگرفاصلهٔ میان چرخها ۱/۲ m ومرکزثقل اتومبیل و بار داخل آن روی عمود منصف خط واصل‌میان چرخها و در۹۰ سانتیمتری زمین باشد، حداکثرسرعتی که اتومبیل می‌تواند بدون خطر واژگون شدن داشته باشد چقدراست؟

۱۲- هواپیمایی با سرعت $240\ km/h$ دایره‌ای افقی به شعاع $400\ m$ می‌زند. به فرض آنکه فشار هوا عمود بربالها و برمرکز ثقل هواپیما اثرکند، تعیین کنید بالها نسبت به‌خط قائم چه زاویه‌ای باید بسازند.

۱۳- درنقطه‌ای که شعاع انحنای خطوط راه‌آهن $60\ m$ است، خطوط دارای شیبی هستند که اگرقطار با سرعت $48\ km/h$ ازآن نقطه عبورکند هیچ‌گونه نیروی جانبی بر خطوط وارد نمی‌شود. اگر لوکوموتیوی به‌جرم $100\ Mg$ در این محل ساکن می‌بود دراین نقطه چه نیروی جانبی برخطوط راه آهن وارد می‌شد؟

۱۴- اتومبیلی ازپیچ جادهٔ مسابقات اتومبیلرانی با سرعت V عبور می‌کند. شیب عرضی این پیچ طوری است که عرض جاده با افق‌زاویهٔ α می‌سازد واگراتومبیلی باسرعت U، که کمتر از V است، ازاین پیچ بگذرد، تمایل آن برای واژگون شدن برابر صفراست. نشان دهیدکه وقتی‌که اتومبیل باسرعت بزرگتر V حرکت می‌کند، برای آنکه واژگون نشود، ضریب اصطکاك لازم حداقل باید برابرمقدار زیرباشد،

$$\frac{(V^2-U^2)\sin\alpha\cos\alpha}{V^2\sin^2\alpha+U^2\cos^2\alpha}$$

۱۵- خطوط راه آهن درپیچی که شعاع انحنای آن $400\ m$ است طوری ساخته شده‌است که اگرقطاری با سرعت $64\ km/h$ از آن عبورکند بر ریلها فشار جانبی وارد نمی‌شود. تعیین‌کنید هنگامی‌که سرعت قطار $32\ km/h$ است، فشارجانبی برریلها، برحسب وزن قطار، چقدراست. [ازطول قطارصرف‌نظرکنید.]

۱۶- قطاری باری طوری بارشده است‌که برهرچرخ آن نیرویی برابر $4/9 \times 10^4\ N$ فشار وارد می‌آورد. فاصلهٔ مرکزثقل قطار ازریلها برابر $1/8\ m$ و فاصلهٔ مراکز چرخها ازیکدیگر برابر $1/5\ m$ است. اگردرپیچی به‌شعاع انحنای $360\ m$، قطار با سرعت $24\ km/h$ حرکت‌کند وریلها دریك صفحهٔ افقی باشند، تغییرفشار قائم برریلها چقدراست؟

۱۷- دریك پیچ خطوط آهن، خط خارجی به‌اندازه‌ای ازخط داخلی بلندتراست که اگر قطار با سرعت v_1 ازاین پیچ بگذرد فشارجانبی آن برخط داخلی درست برابر فشار جانبی قطاری‌که باسرعت $v_2 (v_2 > v_1)$ حرکت می‌کند برخط خارجی باشد. نشان دهیدکه هنگامی‌که قطار باسرعت

$$\left[\frac{1}{2}(v_1^2+v_2^2)\right]^{\frac{1}{2}}$$

حرکت می‌کند برهیچ یك از ریلها فشارجانبی وارد نمی‌شود.

۱۸- درپیچی ازجاده به شعاع انحنای $45\ \mathrm{m}$، اتومبیلی با سرعت $48\ \mathrm{km/h}$ حرکت می‌کند. نشان دهید که اگرمیان اتومبیل و جاده فشار جانبی وجود نداشته باشد، عرض‌جاده دارای شیبی‌است که زاویهٔ آن باافق تقریباً برابر $22°$ است. اگراتومبیلی به‌جرم $1\ \mathrm{Mg}$ باسرعت $72\ \mathrm{km/h}$ این‌پیچ را دوربزند مؤلفهٔ نیرویی که درامتداد عرض جاده براتومبیل وارد می‌شود چقدرخواهد بود؟

۱۹- اتومبیلی‌به‌سرعت پیچی به‌شعاع انحنای $9/5\ \mathrm{m}$ راکه جادهٔآن افقی‌است‌می‌پیماید. اگرمرکزثقل‌اتومبیل برعمود منصف خط واصل‌میانِ‌چرخها و در ارتفاع $0/95\ \mathrm{m}$ باشد، و اگر اندازهٔ میان چرخها $1/4\ \mathrm{m}$ باشد، تعیین کنید اتومبیل با چه سرعتی می‌تواند این پیچ را، بدون آنکه درآن واژگون شود، بپیماید.

۲۰- در یك آونگ مخروطی، سرعت وزنهٔ آونگ v است و شعاع دایره‌ای که این وزنه می‌پیماید برابر r است، ونخ با خط قائم زاویه‌ای برابر α می‌سازد. ثابت کنید که $v^2 = rg\, tg\, \alpha$.

در پیچ یك جادهٔ افقی به‌شعاع انحنای $66\ \mathrm{m}$، دوچرخه‌ای حرکت می‌کند. ضریب اصطکاك میان زمین ولاستیکهای دوچرخه برابر $0/32$ است. بالاترین سرعتی‌راکه دوچرخه ممکن است باآن سرعت ازاین پیچ بگذرد تعیین کنید.

۲۱- اتومبیلی با سرعت v متر برثانیه پیچی به‌شعاع انحنای R مترمی‌پیماید. تعیین کنید اگراتومبیل تمایل به‌واژگون شدن نداشته باشد، شیب عرضی جاده نسبت به‌افق چقدر است.

ثابت کنید که اگر $v = 9$، $R = 300$ وشیب عرضی جاده برابر $\frac{1}{100}$ باشد، نیروی کل اصطکاك جانبی برچرخها باید درحدود $1/8\%$ وزن اتومبیل باشد.

حرکت در یك دایرهٔ قائم

۷.۱۲. بررسی کامل حرکت یك نقطهٔ مادی در مسیری منحنی که دریك صفحهٔ قائم است خارج ازهدف این کتاب است. اما وقتی که منحنی مسیرصیقلی باشد، می‌توانیم تندی نقطهٔ مادی را درهرنقطه به‌وسیلهٔ اصل انرژی تعیین کنیم. زمانی که برای پیمودن طول معینی ازیك قوس یا برای رسیدن به‌تندی معینی لازم است به‌آسانی تعیین نمی‌شود، و درمورد یك دایره، به‌دست آوردن مقدار واقعی آن غیرممکن است. دراینجا بعضی ازنتیجه‌هایی‌را که می‌توان‌آنها را ازمعلوماتی که دربارهٔ تندی درهروضع‌داریم کسب نمود، موردملاحظه

قرارخواهیم داد.

وقتی که نقطه‌ای مادی ازیك منحنی صیقلی به‌پایین می‌لغزد، بر طبق اصل انـرژی می‌دانیم که انرژی جنبشی حاصل برابرانرژی پتانسیل‌ازدست رفته است، زیرا عکس‌العمل منحنی‌برجهت حرکت عمود است وبنابراین کارانجام نمی‌دهد. همین‌مطلب دربارهٔ نقطه‌ای مادی که به‌وسیلهٔ نخی آویزان است و درصفحهٔ قـائمی حول نقطهٔ ثـابتی نـوسان می‌کند صدق می‌کند.

اگر m جرم نقطهٔ مادی، u تندی اولیه و v تندی نهایی باشد، و h ارتفاع قـائمی باشدکه نقطهٔ مادی سقوط می‌کند، دراین صورت،

$$\frac{۱}{۲}mv^{۲}-\frac{۱}{۲}mu^{۲}=mgh$$

$$\therefore \qquad v^{۲}-u^{۲}=۲gh \quad \text{یا} \quad v^{۲}=u^{۲}+۲gh$$

وقتی که نقطهٔ مادی به‌طرف بالای منحنی حرکت می‌کند،

$$v^{۲}=u^{۲}-۲gh$$

۱۳.۷. در مـورد حرکت در یك دایرهٔ قائم، مـاهیت مسئله، برحسب اینکه نقطهٔ مادی بتواند یا نتواند، دایره را ترك کند، تفاوت می‌کند. اگر حلقه‌ای از یـك سیم دایره شکل عبورکرده باشد، حلقه نمی‌تواند منحنی مسیررا ترك کند، اما اگرنقطهٔ مادی به‌وسیلهٔ نخی آویزان باشد، ممکن است وقتی که به‌بالای وضع افقی‌خود می‌رسد دایرهٔ مسیررا ترك کند. به‌طریق مشابه، نقطه‌ای مادی که به‌طرف پایین وخارج یك دایرهٔ قائم حرکت می‌کند، یا به‌طرف بالا و داخل یك دایرهٔ قائم پرتاب شده است، می‌تواند از منحنی خارج شود. در این حالتها مسئلهٔ معمولی، پیداکردن جایی‌است که نقطهٔ مادی دایره را ترك می‌کند.

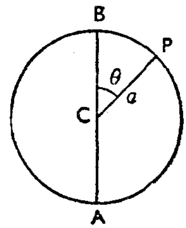
دراینجا ابتدا حالتی را بررسی‌خواهیم کردکه یك حلقه یادانهٔ تسبیح ازمیلهٔ صیقلی مدوری که دریك صفحهٔ قائم ثابت است گذرانده شده است.

۱۴.۷. حرکت حلقه‌ای که ازیك میلهٔ صیقلی مدورقائمی گذرانده شده است

فرض می‌کنیم C (شکل ۷-۱۲) مرکز میلهٔ مدور، A پایینترین نقطه، B بالاترین نقطه، و a شعاع دایره باشد. میله ثابت نگاه داشته شده است.

فرض می‌کنیم جرم حلقه m، وتندی پرتاب آن ازپایینترین نقطه برابر V باشد.

وقتی که این حلقه به‌وضع P می‌رسد، به‌طوری که $\angle BCP=\theta$ است، مسافت‌قائمی برابر $a+a\cos\theta$ بالاآمده است وتندی v آن ازمعادلهٔ انرژی به‌دست می‌آید.



شکل ۷-۱۲

$$\therefore \qquad \frac{۱}{۲}mv^{۲} = \frac{۱}{۲}mV^{۲} - mga(۱ + \cos\theta)$$

اگر V درست به‌قدری باشد که حلقه تا نقطهٔ B بالا برود، باید وقتی که $\theta = ۰$ است $v = ۰$ شود و بنابراین

$$۰ = V^{۲} - ۴ag$$

$$\therefore \qquad V = \sqrt{۴ag}$$

و با این مقدار سرعت اگر حلقه را پرتاب کنیم در B متوقف خواهد شد.

در وضع P، نیرویی که درامتداد PC است و برای ادامهٔ حرکت دورانی لازم است برابـر $mv^{۲}/a$ است ومؤلفهٔ وزن در این جهت برابراست با $mg\cos\theta$.

اگر $\frac{mv^{۲}}{a} < mg\cos\theta$ یا $v^{۲} < ag\cos\theta$

باشد، وزن بیشتر ازحدی است که برای تولید نیروی مرکزی کافی است، و در این حالت فشاری به‌طرف خارج برابر $R_۱$ برحلقه وارد می‌شود که چنین به‌دست می‌آید:

$$-R_۱ + mg\cos\theta = m\frac{v^{۲}}{a}$$

$$\therefore \qquad R_۱ = \frac{m(ag\cos\theta - v^{۲})}{a}$$

اگر $v^{۲} > ag\cos\theta$ باشد، مؤلفهٔ وزن برای تولید نیروی مرکزی کافی نیست، و دراین حالت فشاری به‌طرف داخل برابر $R_۲$ برحلقه وارد می‌شود که چنین به‌دست می‌آید:

$$R_۲ + mg\cos\theta = \frac{mv^{۲}}{a}$$

وقتی که P در زیر مرکزاست مؤلفهٔ وزن درامتداد شعاع همیشه بـه طرف دور از

اگر $$mg\cos\theta > \frac{mv^2}{a}$$

یا $$v^2 < ag\cos\theta$$

باشد، مؤلفهٔ وزن بزرگتر ازنیروی لازم برای داشتن چنان حرکتی است، ونخ شل‌خواهد شد، ونقطهٔ مادی مسیر دورانی را ترك خواهدکرد ومانند پرتابهٔ آزاد حرکت خواهدکرد.

هنگامی دایره را ترك خواهدکردکه

$$v^2 = ag\cos\theta$$

اما $$v^2 = V^2 - 2ag(1+\cos\theta)$$

$$\therefore \quad V^2 = ag\cos\theta + 2ag(1+\cos\theta)$$

$$= ag(2+3\cos\theta)$$

این معادله، مقدار θ را کـه به‌ازای آن و بـه‌ازای تندی اولیهٔ معلوم V، نخ شل می‌شود به‌دست می‌دهد.

اگرنخ درست دربالاترین نقطه شل شود، یعنی هنگامی‌که $\theta = 0$ است، بـاید چنین داشته باشیم:

$$V^2 = 5\,ag$$

یا $$V = \sqrt{5ag}$$

این کمترین تندی لازم برای آن است که نقطهٔ مادی دایره‌ای کامل طی کند.

کشش T نخ، هنگامی‌که نقطهٔ مادی در P است چنین به‌دست می‌آید:

$$T + mg\cos\theta = \frac{mv^2}{a}$$

$$\therefore \quad T = \left(\frac{mV^2}{a}\right) - 2mg(1+\cos\theta) - mg\cos\theta$$

$$= \frac{mV^2}{a} - mg(2+3\cos\theta)$$

تمام استدلالهای فوق درمورد حالتی‌که نقطهٔ مادی به‌طرف بالا و بـه داخل حلقهٔ مدور قائم صیقلیی پرتاب می‌شود نیزصدق می‌کند. دراین حالت به‌جـای کشش نخ، رانش حلقه به‌کاربرده می‌شود.

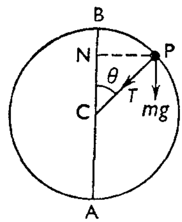
$$\therefore \qquad T = mg\cos\alpha + \frac{mV^{۲}}{a} - ۲mg(۱-\cos\alpha)$$

$$= \frac{mV^{۲}}{a} + mg(۳\cos\alpha - ۲) \qquad (۲)$$

وقتی‌که نقطهٔ مادی در A است، $\cos\alpha = ۱$، و

$$T = \frac{mV^{۲}}{a} + mg$$

بدیهی است که تا وقتی‌که P زیرشعاع افقی CD است، مؤلفهٔ وزن به‌طرف خارج اعمال می‌شود ونخ نمی‌تواند هرگزشل شود.



شکل ۷-۱۴

اگر V درست به‌اندازه‌ای باشدکه نقطهٔ مادی به‌سطح افقیی‌که ازمرکز D می‌گذرد برسد، دراین صورت برطبق (۱):

$$۰ = V^{۲} - ۲ag$$

$$\therefore \qquad V = \sqrt{۲ag}$$

اگر V بزرگتر ازاین مقدار باشد، نقطهٔ مادی‌به بالاتر ازسطح‌افقیی می‌رسد، که از مرکز می‌گذرد و دراین حالت بهتر است که زاویه‌ای را کـه نخ با CB می‌سازد در نظر بگیریم (شکل ۷-۱۴). فرض می‌کنیم این زاویه برابر θ باشد.

ارتفاع P ازA برابر $a + a\cos\theta = a(۱+\cos\theta)$ است.

پس، اگر v تندی در P باشد، ازمعادلهٔ انرژی چنین به‌دست می‌آید:

$$v^{۲} = V^{۲} - ۲ag(۱+\cos\theta)$$

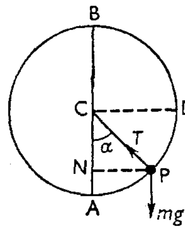
اما مؤلفهٔ وزن درامتداد نخ برابر $mg\cos\theta$ است، و بـه‌طرف C اعمال می‌شود. نیروی مرکزی لازم برای آنکه حرکت دردایره باتندی v باشد برابر است با $mv^{۲}/a$.

مرکزاعمال می‌شود، وهمیشه فشاری به‌طرف داخل برحلقه وارد می‌شود.

البته فشار برمیلهٔ مدورهمیشه برابر و درخلاف جهت فشاری است که برحلقه وارد می‌شود.

۷ ۱۵. حرکت نقطهٔ مادی آویزان دریك دایرهٔ قائم

فرض می‌کنیم نقطه‌ای مادی به‌جرم m به‌وسیلهٔ نخ سبکی به‌طول a ازنقطهٔ C آویزان‌و و درA باشد.



شکل ۷-۱۳

فرض‌می‌کنیم‌که نقطهٔ مادی درامتداد عمود برنخ با تندی V پرتاب شود. نیزفرض می‌کنیم‌که تندی آن درنقطهٔ دلخواهی مانند P ازمسیرش‌که در زیرسطح افقی مرکز قرار دارد برابر v باشد. PN را عمود بر CA رسم می‌کنیم.

دراین صورت نقطهٔ مادی مسافتی قائم برابر AN بالا رفته است، و

$$AN = a - a\cos\alpha = a(1-\cos\alpha)$$

چون T که همیشه عمود برحرکت است‌کار نمی‌کند، ازمعادلهٔ انرژی چنین به‌دست می‌آید:

$$v^2 = V^2 - 2g \times AN$$

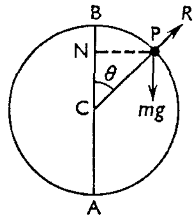
$$\therefore \qquad v^2 = V^2 - 2ag(1-\cos\alpha) \qquad (1)$$

اما مؤلفهٔ وزن درامتداد CP برابر $mg\cos\alpha$ است وبه‌طرف خارج اعمال‌می‌شود. نیرویی مساوی باکشش(T) نخ به‌طرف داخل‌برنقطه مادی اعمال می‌شود وچنین به‌دست می‌آید:

$$T - mg\cos\alpha = m\frac{v^2}{a}$$

۷. ۱۶. حرکت درخارج میلهٔ مدور قائم صیقلی

فرض می‌کنیم C (شکل ۷-۱۵) مرکز، B بالاترین نقطه و A پایینترین نقطهٔ میلهٔ مدور و a شعاع آن باشد. میله ثابت نگاه داشته شده است.



شکل ۷-۱۵

فرض‌می‌کنیم نقطه‌ای مادی به‌جرم m در B باشد و به‌آرامی جابه‌جا شود به‌طوری که به‌طرف پایین میله بلغزد. فرض می‌کنیم تندی آن هنگامی‌که به P، یعنی نقطه‌ای‌که درآنجا $\angle BCP=\theta$ است، می‌رسد برابر v باشد. PN را عمود بر CB رسم می‌کنیم. مسافت قائمی‌که نقطهٔ مادی سقوط می‌کند

$$BN=a-a\cos\theta=a(1-\cos\theta)$$

$$\therefore \qquad v^2=2ag(1-\cos\theta)$$

فرض می‌کنیم R رانش میله برنقطهٔ مادی باشد، دراین صورت، چون مؤلفهٔ وزن در امتداد شعاع برابر $mg\cos\theta$ است، نیروی برایندکه برنقطهٔ مادی درجهت PC وارد می‌شود برابراست با

$$mg\cos\theta-R$$

اما چون نقطهٔ مادی دردایره حول C باتندی v حرکت می‌کند، نیروی مرکزی به‌طرف C باید برابر mv^2/a باشد،

$$\therefore \qquad \frac{mv^2}{a}=mg\cos\theta-R$$

$$\therefore \qquad R=mg\cos\theta-\frac{mv^2}{a}$$

$$=mg\cos\theta-2mg(1-\cos\theta)$$

$$=mg(3\cos\theta-2)$$

اگر $2 > 3\cos\theta$ باشد، میان میله ونقطهٔ مادی رانش وجود دارد.

اگر $2 < 3\cos\theta$ باشد، رانش R منفی می‌شود، واین بدان معنی است که نقطهٔ مادی، میله را ترك کرده است.

وقتی که

$$3\cos\theta = 2$$

یا

$$\cos\theta = \frac{2}{3}$$

شود، رانش R برابرصفر می‌شود ونقطهٔ مادی میله را ترك می‌کند.

پس ازآن نقطهٔ مادی مانند یك پرتابی‌آزاد حرکت خواهدکرد. تندی اولیهٔ حرکت این پرتابی v مطابق زیر به‌دست می‌آید،

$$v^2 = 2ag\left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}ag$$

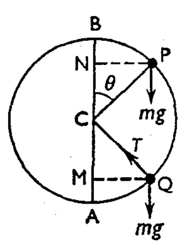
یا

$$v = \sqrt{\frac{2ag}{3}}$$

جهت اولیهٔ حرکت این پرتابی به‌طرف پایین است ونسبت به‌افق زاویه‌ای می‌سازد که‌کسینوس آن برابـر $\frac{2}{3}$ است.

۱۷۰۷. مثال ۱: نقطه‌ای مادی به‌جرم m کیلوگرم به‌وسیلهٔ نخی به‌طول a متر از نقطهٔ ثابتی آویزان شده است. این نقطهٔ مادی با تندی $2\sqrt{ag}$ متر برثانیه به طور افقی پرتاب می‌شود. تعیین‌کنید هنگامی کـه نخ شل می‌شود ارتفاع ایـن نقطهٔ مادی ازبالای نقطهٔ آویزچقدر است. نیزکشش نخ را هنگامی کـه فاصلهٔ نقطهٔ مادی اززیر نقطهٔ آویز برابـر $\frac{a}{2}$ متراست تعیین‌کنید.

حل :



شکل ۷-۱۶

فرض‌می‌کنیم C (شکل ۷-۱۶) نقطهٔ‌آویز، و A پایینترین نقطه، یعنی نقطه‌ای باشدکه نقطهٔ مادی از آنجا پرتاب شده است.

اگر وقتی‌که نخ شل می‌شود، وضع نخ CP و $\angle BCP = \theta$ باشد، در این صورت اگرتندی نقطهٔ مادی در P برابر v متر برثانیه باشد،

$$v^۲ = ۴ag - ۲ag(۱ + cos\,\theta)$$
$$= ۲ag(۱ - cos\,\theta)$$

اما چون دراین نقطه نخ شل می‌شود،

$$\frac{mv^۲}{a} = mg\,cos\,\theta$$

یا

$$v^۲ = ag\,cos\,\theta$$

$$\therefore \quad ag\,cos\,\theta = ۲ag(۱ - cos\,\theta)$$

$$\therefore \quad cos\,\theta = \frac{۲}{۳}$$

بنابراین ارتفاع آن از C برابر $a\,cos\,\theta$ یا $\frac{۲}{۳}a$ است.

دروضع Q که $CM = AM = \frac{a}{۲}$ است، $\angle ACQ = ۶۰°$ و تندی v چنین به دست می‌آید:

$$v^۲ = ۴ag - ۲g \times \frac{a}{۲} = ۳ag$$

کشش نخ T نیوتون است وچنین به‌دست می‌آید،

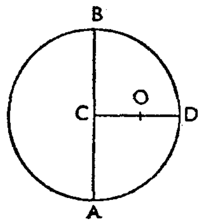
$$T - mg\,cos\,۶۰° = \frac{mv^۲}{a}$$

$$\therefore \quad T = \frac{۱}{۲}mg + ۳mg = \frac{۷}{۲}mg$$

مثال ۲: نقطه‌ای مادی به‌وسیلهٔ نخی به‌طول a ازیک نقطهٔ ثابت آویزان است. نشان دهیدکه برای آن‌که این نقطهٔ مادی دایره‌ای‌کامل بپیماید تندی شروع حرکت آن نبایستی از $\sqrt{۵ag}$ کمترباشد. این‌نقطهٔ مادی باتندی $۲\sqrt{ag}$ شروع به حرکت‌کرده است و وقتی‌که نخ افقی می‌شود به‌وسیلهٔ میخی ازحرکت قسمتی‌از

نخ جلوگیری می‌شود به‌طوری‌که نقطهٔ مادی دایره‌ای کامل می‌پیماید. تعیین کنید میخ باید درچه فاصله‌ای ازنقطهٔ ثابت قرار گیرد.

حل : نتیجهٔ قسمت اول سؤال در بحث بند ۱۵.۷ به دست آمده است. اما می‌توانیم آن نتیجه را، بدون درنظرگرفتن اوضاع شیبدارنخ، به‌دست آوریم.
فرض می‌کنیم A (شکل ۷-۱۷) پایینترین نقطه و B بالاترین نقطهٔ دایره‌ای که مرکزآن C، منطبق برنقطهٔ آویزاست، باشد.



شکل ۷-۱۷

فرض می‌کنیم تندی حرکت در A برابر V و در B برابر v باشد، در این صورت

$$v^{2} = V^{2} - 4ag$$

اما اگرنقطهٔ مادی طوری پرتاب شودکه درست دایره‌ای‌کامل بپیماید، نخ باید وقتی‌که به B می‌رسد شل نباشد،
درنتیجه mv^{2}/a نبایدکمتر از mg باشد،

یا

$$v^{2} \geqslant ag$$

$$\therefore \qquad V^{2} - 4ag \geqslant ag$$

$$\therefore \qquad V^{2} \geqslant 5ag$$

اگر $V = 2\sqrt{ag}$ باشد، تندی نقطهٔ مادی در D یعنی هنگامی‌که به سطح افقی مرکز می‌رسد برطبق معادلهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$v^{2} = 4ag - 2ag = 2ag$$

اگراکنون نخ درنقطهٔ O به‌فاصلهٔ x از D نگاه داشته شود، ونقطهٔ مادی‌درست دایره‌ای‌کامل به‌دور میخ بزند، نخ باید درست وقتی‌که نقطهٔ مادی به‌طورقائم بالای O است، یعنی وقتی‌که به فاصلهٔ x بالای O است، محکم باشد. اما در این ارتفاع تندی u چنین به‌دست می‌آید،

$$u^2 = v^2 - 2gx$$
$$= 2ag - 2gx$$

و چون نخ درست در وضعی است که می‌خواهد شل شود،

$$\frac{mu^2}{x} = mg$$

یا

$$u^2 = gx$$

$$\therefore \quad gx = 2ag - 2gx$$

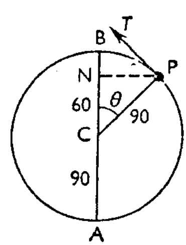
$$\therefore \quad 3gx = 2ag$$

$$\therefore \quad x = \frac{2}{3}a$$

پس فاصلهٔ میخ از نقطهٔ ثابت برابر $\frac{1}{3}a$ است.

مثال ۳: نقطه‌ای مادی از یك نقطهٔ ثابت به‌وسیلهٔ نخی به‌طول ۹۰ cm آویزان است و با سرعت اولیه‌ای شروع به‌حرکت می‌کند که هنگامی‌که به ۱/۵ m بالای پایینترین نقطه می‌رسد، نخ شل‌می‌شود. تعیین کنید که این نقطهٔ مادی چقدر دیگر بالا می‌رود.

حل :



شکل ۷-۱۸

فرض می‌کنیم C (شکل ۷-۱۸) نقطهٔ آویز، A پایینترین نقطه از دایرهٔ قائمی باشد که مرکز آن C است.

نخ در وضع CP یعنی در وضعی‌که $cos\,\theta=\frac{۲}{۳}$ است شل می‌شود.

اما اگر تندی در P برابر v متر بر ثانیه باشد، در این صورت چون نخ شل شده است،

$$\frac{mv^{۲}}{۰/۹}=mg\,cos\,\theta$$

$$\therefore\qquad v^{۲}=۰/۹g\,cos\,\theta=۰/۶g$$

$$\therefore\qquad v=\sqrt{۰/۶g}=\sqrt{۵/۸۸}=۲/۴۲$$

اکنون نقطهٔ مادی به‌صورت پرتابی‌آزاد با تندی اولیهٔ ۲/۴۲ m/s در امتداد مماس PT حرکت خواهدکرد به‌طوری‌کـه کسینوس زاویهٔ انحراف آن نسبت بـه‌افق برابر $\frac{۲}{۳}$ باشد.

مؤلفهٔ قائم تندی برابر است با

$$۲/۴۲\,sin\,\theta=\frac{۲/۴۲}{۳}\sqrt{۵}\,\mathrm{m/s}$$

اگر h متر ارتفاعی باشدکه نقطهٔ مادی پس ازآن بالا می‌رود،

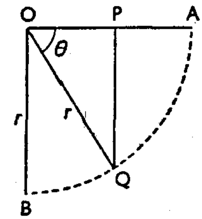
$$۰=\frac{۵/۸۸}{۹}\times۵-۲\times۹/۸\,h$$

$$\therefore\qquad h=\frac{۱}{۶}\,\mathrm{m}$$

مثال ۴: نقطه‌ای مادی به‌وسیلهٔ نخ‌کشسانی به‌طول r به‌نقطهٔ ثابت O متصل است. این نقطهٔ مادی را ازنقطه‌ای‌که برافق O واقع‌است و به‌فاصلهٔ $r\,cos\,\theta$ از O است رها می‌کنند تا سقوط‌کند. نشان‌دهیدکه تندی‌نقطهٔ مادی، هنگامی‌که به‌خط قائم ودر زیر O می‌رسد، برابر است با $\sqrt{۲gr(۱-sin^{۳}\theta)}$.

حل : فرض می‌کنیم OA (شکل ۷–۱۹) افقی و برابر r ، OB قائم و برابر r و P نقطه‌ای از OA باشدکه نقطهٔ مادی ازآنجا سقوط می‌کند.

در این صورت، چون $OP=r\,cos\,\theta$ است، نقطهٔ مادی دایره‌ای را که از A و B می‌گـذرد و مـرکز آن O است در نقطهٔ Q قطع می‌کند، به‌طوری‌کـه $\angle POQ=\theta$.



شکل ۷-۹۹

دراین‌نقطه، نقطهٔ مادی مسافت قائم PQ را، که مساوی $r\sin\theta$ است، سقوط کرده است و بنابراین تندی u چنین به‌دست می‌آید:

$$u^{2}=2gr\sin\theta$$

اما وقتی‌که نخ محکم می‌شود، همهٔ تندی درجهت نخ ازمیان می‌رود و نقطهٔ مادی درامتداد QB شروع به‌حرکت می‌کند وتندی‌آن برابرمؤلفهٔ u درامتداد عمود بر OQ ، یعنی $u\cos\theta$ است.

پس اگر v تندی حرکت در دایره درنقطهٔ Q و پس‌از محکم‌شدن نخ باشد،

$$v^{2}=2gr\sin\theta\cos^{2}\theta$$

وقتی‌که نقطهٔ مادی به B می‌رسد، مسافت دیگری برابر

$$r-r\sin\theta=r(1-\sin\theta)$$

سقوط‌کرده است و تندی V در این نقطه چنین به‌دست می‌آید،

$$\begin{aligned}V^{2}&=v^{2}+2gr(1-\sin\theta)\\&=2gr\sin\theta\cos^{2}\theta+2gr(1-\sin\theta)\\&=2gr(\sin\theta-\sin^{3}\theta+1-\sin\theta)\\&=2gr(1-\sin^{3}\theta)\end{aligned}$$

$$\therefore\qquad V=\sqrt{2gr(1-\sin^{3}\theta)}$$

مثال ۵: روی سیم مدور ثابت و صیقلیی به‌شعاع a که صفحهٔ آن قائم است دانهٔ تسبیحی می‌لغزد. AB قطرقائم است. این دانهٔ تسبیح با سرعت V ازنقطهٔ A بالاترین نقطهٔ سیم پرتاب شده است و درنقطهٔ B با دانهٔ تسبیحی به‌همان جرم برخورد می‌کند و دوجرم درحالی‌که به‌هم چسبیده‌اند طوری حرکت می‌کنند‌که درست به‌نقطهٔ A می‌رسند. نشان دهیدکه $V^{2}=12ga$.

حل : اگر v_1 تندی دانهٔ تسبیح هنگامی‌که به B می‌رسد باشد، دراین‌صورت برطبق معادلهٔ انرژی،

$$\frac{1}{2}mv_1^2=\frac{1}{2}mV^2+2mga$$

$$\therefore \qquad v_1^2=V^2+4ga \qquad (1)$$

فرض می‌کنیم جرم مرکب $2m$ با تندی v_2 شروع به‌حرکت بکند. چون مقدار حرکت ثابت باقی می‌ماند، داریم،

$$2mv_2=mv_1$$

$$\therefore \qquad v_2=\frac{1}{2}v_1$$

جرم مرکب درصورتی درست به‌نقطهٔ A می‌رسدکه

$$\frac{1}{2}(2m)v_2^2=2mg(2a)$$

باشد، یعنی درصورتی‌که

$$v_2^2=4ga$$

یا برطبق معادلهٔ (۲) درصورتی‌که

$$v_1^2=16ga$$

یا برطبق معادلهٔ (۱) درصورتی‌که

$$V^2=12ga$$

تمرین ۴۰۷

۱ـ وزنه‌ای به‌جرم $60\,g$ کـه به‌وسیلهٔ نخی به‌طول $1/2\,m$ به‌نقطهٔ ثابتی متصل شده است، حول این نقطه دایره‌ای قائم می‌پیماید. برای آنکه وزنهٔ فوق دورانهای کامل انجام دهد، حداقل تندی آن در پـایینترین نقطه چقدر بـاید بـاشد؟ نیز در این حالت وقتی‌که وزنه در ۶۰ سانتیمتری زیر قطر افقی دایره است کشش نخ چقدراست؟

۲ـ نقطهٔ مادی سنگینی به‌آزادی دایرهٔ قائمی به‌شعاع l را می‌پیماید. این نقطهٔ مادی با تندی u از A، پـایینترین نقطهٔ دایره، پرتاب شده است، و درست به‌نقطه‌ای مانند B می‌رسد. با به‌کاربردن اصل انرژی نشان دهید کـه $u=\sqrt{\frac{g}{l}}\times AB$.

۳ ـ وزنه‌ای به‌جرم 1 g ازنخی به‌طول 1 m آویزان است و مانند آونگ در قوسی که بزرگی کل آن یك رادیان است نوسان می کند. شتاب مرکزی و کشش نخ را هنگامی که وزنه از پایینترین نقطه می گذرد تعیین کنید.

۴ ـ وزنه‌ای که به یك نخ انعطاف‌ناپذیری متصل است دایره‌ای قائم به‌شعاع 60 cm می‌پیماید. اگر بیشترین و کمترین کشش نخ به‌نسبت ۱۱ و ۱ باشد، حداقل‌تندی وزنه را به‌طور تقریب تعیین کنید.

۵ ـ وزنه‌ای به‌جرم 200 g به وسیلهٔ نخی به‌طول 90 cm به‌نقطهٔ ثابتی متصل است. نخ را کشیده و افقی نگاه می‌داریم و وزنه را رها می کنیم تا سقوط کند. وقتی که نخ با افق زاویهٔ θ می‌سازد سرعت وزنه چقدر است؟ نیز کشش نخ را وقتی که قائم است، و وقتی که با قائم زاویهٔ 30° می‌سازد تعیین کنید.
وقتی که وزنه بـه‌پایینترین نقطهٔ مسیر می‌رسد حلقه‌ای به‌جرم 100 g را می گیرد و با خود حمل می کند. این دوجرم تا چه ارتفاعی بالا خواهند رفت؟

۶ ـ وزنه‌ای به‌جرم 1 kg کـه به انتهای تارکشسانی بسته شده است بـا سرعت ثابت 6 m/s دایره‌ای قائم می‌زند. طول طبیعی تار 1/8 m است و به‌ازای هرکششی برابر 10 N به‌اندازهٔ 0/1 m برطول آن افزوده می‌شود. طول تار را در بـالا و پایین مسیر وزنه تعیین کنید.

۷ ـ به انتهای نخی به‌طول 1/2 m وزنه‌ای سنگین بسته شده است. انتهای دیگر نخ به‌نقطه‌ای ثابت شده است. وقتی که نخ در وضع افقی است وزنه را رهـا می کنند. وقتی که نخ به‌حال قائم درمی‌آید، وسط نخ به‌مانعی برمی‌خورد، به‌طوری که وزنه به‌دور مانع دایره‌ای به‌شعاع 0/6 m می‌زند. تعیین کنید پیش‌ازآنکه نخ شل شود وزنه تا چه ارتفاعی بالا خواهد رفت.

۸ ـ اتومبیلی به‌جرم 1 Mg با سرعت 48 km/h از زیر پلی می گذرد. جادهٔ زیر پل به‌صورت قوسی از دایره به‌شعاع 19 m است. عکس‌العمل میان اتومبیل و جاده را در پایینترین نقطهٔ قوس تعیین کنید.

۹ ـ برروی رودخانه‌ای پلی زده شده است که به‌صورت قوسی از دایره به‌شعاع 15 m است. بالاترین سرعتی (برحسب کیلومتر در ساعت) که یك موتورسیکلت می‌تواند با آن سرعت از پل عبورکند، بدون آنکه در بالاترین نقطهٔ پل از جاده جدا شود، چقدر است؟

۱۰ـ در داخل حلقهٔ صیقلی مدوری به‌شعاع a که درصفحهٔ قـائمی ثابت است، نقطه‌ای مادی به‌جرم m تا 180° نـوسان می کند. اگر در نقطه‌ای دلخواه سرعت برابر v

باشد، ثابت‌کنید که درآن نقطه فشار برحلقه برابر $\frac{3mv^2}{2a}$ است.

۱۱- سنگی به‌جرم ۴۵۰ g که به انتهای نخی به‌طول ۰٫۹ m بسته شده است دایره‌ای افقی می‌پیماید. انتهای دیگرنخ ثابت است. اگرنخ فقط بتواندکششی برابر ۲۵ N را تحمل کند، بزرگترین تندیی که سنگ می‌تواند داشته باشد چقدر است و در این حالت سنگ چند دور درثانیه می‌زند؟
اگرسنگ حول دایره‌ای قائم دوران کند، بزرگترین تندیی‌که سنگ می‌تواند در بالاترین نقطهٔ مسیرش داشته باشد تا بتواند بدون پاره شدن نخ دایره‌ای کامل بزند چقدر است؟

۱۲- یکی از دوانتهای نخی به‌طول ۶ m به‌نقطهٔ A ثابت شده است و در B انتهای دیگر نخ وزنهٔ کوچکی به‌جرم ۴۵ kg متصل است. نخ را به‌طورکشیده و افقی نگاه می‌داریم و وزنه را رها می‌کنیم تا سقوط کند. کشش نخ را هنگامی‌که قائم است تعیین‌کنید. نخ در وضع قائم به‌میخی‌که در ۳٫۶ متری زیر A است می‌رسد، به‌طوری‌که وزنه مسیرجدیدی به‌شعاع ۲٫۴ m پیدا می‌کند. نشان دهیدکه کشش نخ دراین صورت دوبرابر می‌شود و تعیین‌کنید که آیا وزنه می‌تواند دایره‌ای کامل به‌دور میخ بزند یا خیر.

۱۳- لولهٔ مدور صیقلیی دریك صفحهٔ قائم به‌طور ثابت نگاه داشته شده است. وزنه‌ای به‌جرم m که می‌تواند در داخل لوله بلغزد به‌آرامی از بالاترین نقطهٔ داخل لوله رها می‌شود. تعیین‌کنید وقتی‌که وزنه درفاصلهٔ زاویه‌ای θ از بالاترین نقطهٔ لوله است فشار میان وزنه و لوله چقدر است. نیز مؤلفهٔ قائم شتاب وزنه را، هنگامی که $\theta = 120°$ است تعیین‌کنید.

۱۴- در روی‌کره‌ای صیقلی به شعاع r از نقطه‌ای‌که ارتفاع قائم آن از بالاترین نقطهٔ کره برابر $\frac{1}{2}r$ است، وزنه‌ای به‌آرامی رها می‌شود تا ازکره به‌پایین بلغزد. ثابت کنید که این وزنه، کره را در ارتفاع $\frac{1}{3}r$ بالای مرکز ترك می‌کند. از این گذشته، نشان دهیدکه وقتی‌که وزنه درفاصلهٔ $r\sqrt{2}$ ازقطر قائم‌کره است، ارتفاع قائم آن از زیر مرکزکره برابر $4r$ است.

۱۵- نخی که به دوانتهای آن دو وزنهٔ سنگین با جرمهای متساوی بسته شده‌اند از شیار قرقره‌ای صیقلی عبورکرده است. در وضع تعادل هریك از وزنه‌ها همتراز با مرکز قرقره است. یکی از وزنه‌ها را به‌آرامی به‌طرف پایین حرکت می‌دهیم، به‌طوری

که دستگاه تحت اثر جاذبهٔ زمین شروع به حرکت کند. تعیین کنید که وقتی که وزنهٔ دوم از بالاترین نقطهٔ قرقره می گذرد چه فشاری برقرقره اعمال می کند و ثابت کنید که این وزنه هنگامی قرقره را ترك خواهدکرد که قوسی در حدود $108/5^\circ$ پیموده است.

۱۶- دونقطهٔ مادی m و m' درلولهٔ صیقلی مدوری که سطح آن قائم است با هم و از دوانتهای یك قطر افقی شروع به پایین آمدن کرده‌اند، به‌طوری که در پایینترین نقطه با یکدیگر برخورد می کنند. نشان دهیدکه ارتفاع قائمی که این دو وزنه پس از برخورد بالا خواهند رفت به‌نسبت

$$[(2e+1)m-m']^2 \quad \text{و} \quad [(2e+1)m'-m]^2$$

است که درآن e ضریب بازگشت میان دوجرم است.

۱۷- وزنه‌ای سنگین به‌یك انتهای نخ کشسانی به‌طول $1/8\,\mathrm{m}$ بسته شده است. انتهای دیگر نخ به‌نقطهٔ O متصل است. وزنه را طوری نگاه می‌دارندکه نخ کشیده بماند و وزنه درنقطه‌ای به‌ارتفاع $0/9\,\mathrm{m}$ بالای O باشد، و سپس آن را رها می کنند. تندی وزنه را درست پس‌از آنکه نخ دوباره محکم شد و نیز ارتفاعی‌را که دوباره ازO بالاتر می‌رود تعیین کنید.

۱۸- وزنه‌ای سنگین به مانند آونگ ساده‌ای به‌طول a آویزان است. این وزنه هنگامی که در پایینترین وضع است به‌طورافقی پرتاب می‌شود. بزرگی تندی آن برابر است با بزرگی تندی جسمی که از ارتفاع h سقوط کرده است. نشان دهیدکه اگر نخ در حرکت بعدی شل‌شود، این شل‌شدن هنگامی روی می‌دهدکه نقطهٔ مادی درارتفاع قائم $\frac{2}{3}(h-a)$ بالای نقطهٔ ثابت است.

۱۹- وزنه‌ای که به‌وسیلهٔ نخی به‌طول a از یك نقطهٔ ثابت آویزان است، به‌طور افقی پرتاب می‌شود به‌طوری که قسمتی از دایره‌ای را در یك صفحهٔ قائم طی می کند. نشان دهید که اگر سهمی مسیر این وزنه، وقتی که نخ شل می‌شود از نقطهٔ اولیهٔ پرتاب بگذرد، تندی پرتاب $\sqrt{\frac{7}{2}ga}$ است. نشان دهیدکه درحرکت بعدی، وزنه میان دونقطه که ارتفاع قائم آنها $\frac{1}{16}a$ بالای نقطهٔ اولیهٔ پرتاب است نوسان خواهدکرد.

۲۰- به‌وسیلهٔ نخی به‌طول $0/6\,\mathrm{m}$ وزنه‌ای به‌نقطهٔ O متصل است. این‌وزنه با تندی

$3/6\ m/s$ از نقطه‌ای که $0/6\ m$ بالای O است پرتاب می‌شود. ثابت‌کنید که اگر وزنه دایره‌های کامل قائم بزند نخ همچنان کشیده می‌ماند. اما اگر نخ نتواند کششی بیشتر از ۵ برابر وزن وزنه را تحمل کند، ثابت‌کنید که نخ پاره خواهد شد. در این صورت هنگامی که نخ پاره می‌شود وزنه در چه فاصلهٔ قائمی در زیر O است؟

۸

حرکت تناوبی ساده

۱۰۸. اکنون به‌بررسی نوع مهمی از حرکت نوسانی خواهیم پرداخت. اگر وزنه‌ای که از یك فنرحلقه‌ای آویزان است به‌طور قائم از وضع تعادل خود پایین کشیده شود و رها گردد، حول این وضع نوسان خواهدکرد. در این حالت، مانند بسیاری حالتهای دیگر، معلوم‌شده است که وزنه دارای شتابی است که همیشه متوجه وضع تعادل است و بزرگی آن تقریباً متناسب با فاصلهٔ نقطهٔ مادی از این وضع است.

۲۰۸. این نوع حرکت در طبیعت بسیار عادی است. چنین حرکتی را حرکت تناوبی ساده می‌نامند و ممکن است آن را به‌صورت زیر تعریف‌کرد:

وقتی‌که نقطه‌ای مادی چنان حرکت کند که شتاب آن در امتداد مسیرش مستقیماً متوجه نقطه‌ای ثابت از آن مسیر، و مستقیماً متناسب با فاصله‌اش از آن نقطهٔ ثابت باشد، می‌گویند که نقطهٔ مادی دارای حرکت تناوبی ساده است.

فرض می‌کنیم تغییرمکان نسبت به‌نقطهٔ O از مسیر برابر x ، و بزرگی شتابی که متوجه O است از این فاصله برابر $\omega^2 x$ باشد، که در آن ω مقداری است ثابت. در این صورت چون شتاب درجهتی مخالف جهت افزایش x است، می‌توان نوشت:

(۱) شتاب درجهت افزایش x برابر است با $-\omega^2 x$

این معادلهٔ اساسی حرکت تناوبی ساده است و ممکن است آن را به‌صورت زیرنوشت:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \qquad (۲)$$

که درآن t معرف زمانی است‌که نقطهٔ مادی درفاصلهٔ x از O است.

۳.۸ ابتدا حالتی را درنظر می‌گیریم که حرکت در یك خط مستقیم صورت می‌گیرد، اما باید توجه داشت که هرحرکتی که بتوان آن را با معادله‌ای مانند معادلهٔ (۲) نمایش داد، که درآن x تغییرمکان نسبت به‌وضع ثابتی باشد، حرکت تناوبی‌ساده است. مثلاً x ممکن است فاصلهٔ نقطه‌ای مانند P واقع بریك منحنی باشدکه در امتداد منحنی‌ازنقطهٔ ثابتی‌واقع برمنحنی اندازه‌گیری شده است. در این صورت P در امتداد منحنی دارای حرکت تناوبی ساده است.

x ممکن‌است دریك جسم زاویه‌ای باشدکه با خط ثابتی‌ساخته شود. آن جسم‌حول محورثابتی که از O می‌گذرد حرکت می‌کند، و خطی که درفضا ثابت است یکی از خطوطی است که از O می‌گذرد. دراین صورت جسم‌حول محوری که از O می‌گذرد حرکت تناوبی ساده انجام می‌دهد.

جواب معادلهٔ (۲) به‌طریق ریاضی، یعنی مقدار x برحسب t، همیشه به یك شکل است، و وقتی که x معرف تغییرمکانی از هر نوع از وضع ثابت باشد، معادله معرف همین نوع حرکت است خواه x تغییرمکانی‌مستقیم یا منحنی یا زاویه‌ای باشد.

می‌توان تحقیق کرد که حل عمومی معادلهٔ (۲)

$$x = a\cos(\omega t + \alpha)$$

است که درآن a و α مقادیر ثابت اختیاری هستند.

این جواب را درحالت مخصوص یعنی حرکت بریك خط مستقیم به‌طریقی ساده اما بسیار مفید به‌کمك رسم هندسی به‌دست خواهیم‌آورد.

۴.۸ حرکت تناوبی ساده در یك خط مستقیم

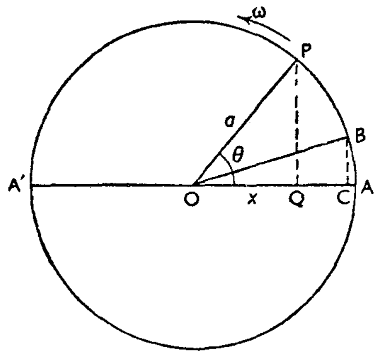
حرکت تناوبی ساده در یك خط مستقیم را می‌توان مستقیماً با رسم هندسی تعیین کرد. فرض می‌کنیم نقطه‌ای مانند P بردایره‌ای به‌شعاع a با تندی زاویه‌ای یکنواخت ω حول مرکز O حرکت می‌کند.

فرض می‌کنیم AOA' (شکل ۸-۱) قطر دلخواهی از دایره است، و نقطهٔ دیگری مانند Q در امتداد AOA' طوری حرکت می‌کند که PQ همیشه عمود بر قطر AOA' است.

دراین صورت وقتی که P دایره می‌زند، Q در امتداد قطر حرکتی نوسانی می‌کند و از این‌سو به‌آن‌سو می‌رود. می‌توان نشان داد که حرکت Q حرکت تناوبی ساده است.

زیرا شتاب P درجهت PO برابر $a\omega^2$ است. اما شتاب Q باید مساوی مؤلفهٔ شتاب P درجهت QO باشد.

پس شتاب Q برابراست با $a\omega^2 \cos\theta$ و متوجه O است، که در آن $\theta = \angle POQ$.
اگر $OQ = x$ باشد، در این صورت $\cos\theta = \frac{x}{a}$ و شتاب Q به‌طرف O برابر است با $\omega^2 x$. بنابراین حرکت Q در امتداد AOA' تناوبی ساده است.



شکل ۸-۱

مشخصات دیگر حرکت Q را می‌توان به‌دست آورد. اگر تندی Q را به v نمایش دهیم، خواهیم داشت:

$$v = \text{مؤلفهٔ تندی P به‌موازات } A'A$$
$$= -a\omega \sin\theta$$
$$\therefore \quad v = \pm\omega\sqrt{a^2 - x^2}$$

دو علامت مربوط به‌دو جهت حرکت Q در امتداد AOA' است.

ازاین گذشته، تغییرمکان Q ازمرکز O در هرلحظهٔ t چنین به‌دست می‌آید:

$$x = a\cos\theta$$

اما اگر مبدأ t لحظه‌ای باشدکه P و Q در A هستند، $\theta = \omega t$ خواهد بود و بنابراین

$$x = a\cos\omega t$$

اما اگر P در ابتدا درنقطهٔ B باشد، که $\angle BOA = \alpha$ است، به‌طوری‌که Q در ابتدا در C باشد، دراین صورت $\theta = \omega t + \alpha$ است، و

$$x = a\cos(\omega t + \alpha)$$

این‌شکل کلی تغییرمکان x است و بدیهی است که می‌توان آن را به‌شکل زیر نوشت:

$$x = a_1 \cos \omega t + a_2 \sin \omega t$$

که درآن a_1 و a_2 مقادیرثابتی هستندکه برحسب a و α قابل بیان هستند.

ازاین گذشته زمان تناوب T مربوط به‌یك نوسان کامل، یعنی زمانی که طول می‌کشد تا Q از A حرکت کند و به A' برود وسپس به A برگردد، برابر است با زمانی که طول می‌کشد تا P یك بار دایره را بپیماید. پس

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

نیز، زمان t لازم برای آنکه Q از A حرکت کند و به‌نقطه‌ای به‌فاصلهٔ x از O برسد برابر است بازمانی که نقطهٔ مادی دیگر درامتداد دایره از A تا P برود، یعنی برابراست با θ/ω، که درآن θ زاویهٔ AOP است.بنابراین مدت زمانی که Q هرفاصله‌ای را درامتداد مسیرش می‌پیماید می‌توان معلوم کرد.

۸. ۵. دراینجا فرمولهای حرکت تناوبی ساده را باهم می‌نویسیم. این فرمولها عبارتند از:

(۱) شتاب $$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

(۲) تندی $$v = \pm\omega\sqrt{a^2 - x^2}$$

(۳) تغییرمکان $$x = a \cos(\omega t + \alpha)$$

(۴) زمان تناوب یك نوسان کامل $$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

بایدتوجه‌داشت که بااستفاده ازروشهایی که درانتگرال گیری مرسوم است معادله‌های (۲) و (۳) را می‌توان ازمعادلهٔ (۱) نتیجه گرفت.

۸. ۶. O به مرکز حرکت موسوم است.

ماکزیمم مقدار تغییرمکان برابر a است، وآن را دامنهٔ حرکت می‌نامند.

اگر x به‌شکل $a \cos(\omega t + \alpha)$ نوشته شود، مقدار α را عصر می‌نامند. فاز[1] حرکت عبارت ازمدتی است که طول می‌کشد تا نقطهٔ مادی از ماکزیمم فاصله‌اش a، درجهت مثبت به‌آن نقطه برسد.

فرض می‌کنیم

۱ــ دراینجا تعریف فاز با تعریفی که نویسندگان دیگرازفازکرده‌اند تفاوت دارد.

$$x=a\cos(\omega t+\alpha)$$

دراین صورت، لحظهٔ $t_\circ$ که درآن $x=a$ است ازرابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\omega t_\circ+\alpha=\circ$$

درنتیجه فاز درلحظهٔ t برابراست با $\frac{\omega t+\alpha}{\omega}=t+\frac{\alpha}{\omega}=t-t_\circ$.

برای دوحرکت تناوبی ساده که دارای زمان تناوب یکسانی‌هستند ومعادله‌های آنها به‌صورت

$$x=a_۱\cos(\omega t+\alpha_۱)$$

$$x=a_۲\cos(\omega t+\alpha_۲)$$

است، اختلاف فازبرابراست با $\frac{\alpha_۱-\alpha_۲}{\omega}$

اگر $\alpha_۱=\alpha_۲$ باشد حرکتها همفازند. اگر $\alpha_۱-\alpha_۲=\pi$ باشد حرکتها درفاز مقابل یکدیگرند.

۸.۷. مثال ۱: اگرزمان تناوب حرکت تناوبی ساده‌ای ۸ ثانیه، ودامنهٔ حرکت $۱/۲\ \mathrm{m}$ باشد، حداکثرتندی ونیزتندی متحرك را هنگامی‌که به‌فاصلهٔ $\circ/۶\ \mathrm{m}$ از مرکز تعادلش هست تعیین کنید.

حل : چون زمان تناوب

$$T=\frac{۲\pi}{\omega}$$

است، خواهیم داشت:

$$\omega=\frac{۲\pi}{T}=\frac{۲\pi}{۸}=\frac{\pi}{۴}$$

دامنهٔ حرکت

$$a=۱/۲\ \mathrm{m}$$

تندی وقتی‌که تغییرمکان برابر x است،

$$v=\omega\sqrt{a^۲-x^۲}$$

ماکزیمم تندی هنگامی است‌که $x=\circ$ است، ودرآن صورت،

$$v=\omega a=\frac{\pi}{۴}\times ۱/۲=۰/۹۴\,\mathrm{m/s}$$

وقتی که $x=۰/۶\,\mathrm{m}$ است،

$$v=\frac{\pi}{۴}\sqrt{۱/۲^۲-۰/۶^۲}=۰/۸۲\,\mathrm{m/s}$$

مثال ۲: اگرشتاب نقطه‌ای مادی که برخطی‌مستقیم حرکت تناوبی‌ساده‌ای انجام می‌دهد، هنگامی که تغییرمکان نسبت به‌وضع مرکزی برابر x است مساوی $\omega^۲x$ باشد، ثابت کنید که تندی v نقطهٔ مادی چنین به‌دست می‌آید،

$$v^۲=\omega^۲(a^۲-x^۲)$$

که a دامنهٔ حرکت است.

اگرتغییرمکان، تندی وشتاب یك نقطهٔ مادی که حرکت تناوبی‌ساده انجام‌می‌دهد در لحظهٔ معینی به ترتیب $۷/۵\,\mathrm{cm}$، $۷/۵\,\mathrm{cm/s}$، $۷/۵\,\mathrm{cm/s^۲}$ باشد، بزرگترین تندی نقطهٔ مادی وزمان تناوب حرکت را تعیین کنید.

حل : قسمت اول دربند ۴.۸ ثابت شده است.

چون وقتی که $x=۰/۰۷۵\,\mathrm{m}$ است، شتاب برابر $۰/۰۷۵\,\mathrm{m/s^۲}$ است،

$$۰/۰۷۵=\omega^۲\times ۰/۰۷۵$$

$$\therefore\qquad \omega=۱$$

نیزچون وقتی که $x=۰/۰۷۵\,\mathrm{m}$ است تندی $v=۰/۰۷۵\,\mathrm{m/s^۲}$ است،

$$(۰/۰۷۵)^۲=\omega^۲[a^۲-(۰/۰۷۵)^۲]$$

چون $\omega=۱$ است

$$\therefore\qquad a^۲=۲(۰/۰۷۵)^۲$$

$$a=۰/۰۷۵\sqrt{۲}\,\mathrm{m}$$

$\omega a=$ بزرگترین تندی‌وقتی که $x=۰$ است

$$\therefore\qquad =۰/۰۷۵\sqrt{۲}\,\mathrm{m/s}=۰/۱۰۶\,\mathrm{m/s}$$

نیززمان تناوب حرکت

$$=\frac{۲\pi}{\omega}=۲\pi \text{ ثانیه}$$

مثال ۳: اگر تغییرمکان نقطه‌ای متحرك درلحظه‌ای معین به صورت معادله‌ای به‌شکل

زیرداده شده باشد،

$$x = a\cos\omega t + b\sin\omega t$$

نشان دهید که حرکت آن نقطه، تناوبی ساده است.

اگر $a = ۳$ ، $b = ۴$ ، $\omega = ۲$ باشد، زمان تناوب، دامنه وماکزیمم تندی و ماکزیمم شتاب حرکت را تعیین کنید.

حل : باید نشان دهیم که شتاب مستقیماً برحسب تغییرمکان تغییرمی کند.

اما
$$x = a\cos\omega t + b\sin\omega t$$

$$= c\cos(\omega t + \alpha) \qquad (۱)$$

که درآن $a = c\cos\alpha$ و $b = -c\sin\alpha$، یعنی

$$c = \sqrt{a^۲ + b^۲}$$

و
$$tg\,\alpha = -\frac{b}{a}$$

می‌توان مستقیماً تحقیق کرد که

$$\frac{d^۲x}{dt^۲} = -\omega^۲ x$$

نیزمی‌توانیم، همان‌طورکه در بند ۴.۸ بیان شد، x را به‌طریق هندسی بیان کنیم، و به‌این نتیجه برسیم که شتاب درهرفاصلهٔ x برابر $-\omega^۲x$ است. نتیجه می‌شود که حرکت تناوبی ساده است.

از رابطهٔ (۱) اگر $\omega = ۲$ باشد، زمان تناوب برابر است با $\frac{۲\pi}{\omega} = \pi$. از این گذشته، از رابطهٔ (۱) نتیجه می‌شود که بزرگترین مقدار x برابر c است.

$$\therefore \qquad \text{دامنه} = c$$

$$= \sqrt{۳^۲ + ۴^۲} = ۵$$

تندی درهرزمان

$$\frac{dx}{dt} = -c\omega\sin(\omega t + \alpha)$$

بنابراین ماکزیمم تندی برابر $c\omega = ۱۰$ است.

ازاین گذشته، ماکزیمم شتاب هنگامی است که x ماکزیمم است، یعنی وقتی که

$۵ = x$ است.

$$\therefore \qquad ۲۰ = ۵\omega^۲ = \text{ماکزیمم شتاب}$$

مثال ۴: درانتهای سه ثانیهٔ متوالی، فاصلهٔ متحرکی که حرکت تناوبی ساده دارد از وضع تعادلش به‌ترتیب ۱ و ۵ و ۵ واحد طول است. نشان دهید که زمان تناوب‌حرکت، از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$T = \frac{۲\pi}{\text{Arc}\cos\frac{۳}{۵}} \quad \text{ثانیه}$$

حل : فرض می‌کنیم $x = a\sin\omega t$ باشد. وقتی که $t = T$ است، $x = ۱$ است. وقتی که $t = T + ۱$ است، $x = ۵$ است؛ نیز وقتی که $t = T + ۲$ است، $x = ۵$ است. با به‌کاربردن این معلومات درمعادلهٔ حرکت

$$۱ = a\sin\omega T$$

$$۵ = a\sin(\omega T + \omega) = a\sin\omega T\cos\omega + a\cos\omega T\sin\omega$$

$$۵ = a\sin(\omega T + ۲\omega) = a\sin\omega T\cos ۲\omega + a\cos\omega T\sin ۲\omega$$

در دومعادلهٔ اخیر به‌جای جملهٔ $a\sin\omega T$ یك می‌گذاریم:

$$\cos\omega + a\cos\omega T\sin\omega = ۵ \qquad (۱)$$

$$\cos ۲\omega + a\cos\omega T\sin ۲\omega = ۵ \qquad (۲)$$

بنابراین

$$\therefore \quad \sin ۲\omega\cos\omega + a\cos\omega T\sin\omega\sin ۲\omega = ۵\sin ۲\omega$$

و

$$\sin\omega\cos ۲\omega + a\cos\omega T\sin ۲\omega\sin\omega = ۵\sin\omega$$

$$\therefore \quad \sin ۲\omega\cos\omega - \cos ۲\omega\sin\omega = ۵\sin ۲\omega - ۵\sin\omega$$

$$\therefore \quad \sin\omega = ۵\sin ۲\omega - ۵\sin\omega$$

$$\therefore \quad ۶\sin\omega = ۱۰\sin\omega\cos\omega$$

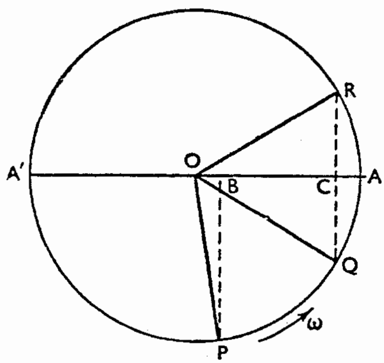
ازاین معادله نتیجه می‌شود که $\sin\omega = ۰$ ، یا $\cos\omega = \frac{۳}{۵}$.

اگر $\sin\omega = ۰$ باشد ω باید برابرصفریا دامنه برابر π باشد، و این مقادیر در معادله‌های (۱) و (۲) صدق نمی‌کنند. بنابراین جواب $\sin\omega = ۰$ قابل قبول نیست.

ازجواب دیگر نتیجه می‌شود که $\omega = \mathrm{Arc}\ cos\frac{۳}{۵}$ وبنابراین زمان تناوب حرکت

$$T = \frac{۲\pi}{\omega} = \frac{۲\pi}{\mathrm{Arc}\ cos\frac{۳}{۵}} \quad \text{ثانیه}$$

این مسئله را می‌توان به‌روش زیرنیزحل کرد:
فرض می‌کنیم که نقطه برخط A′OA حول مرکز O (شکل ۸-۲) حرکت می‌کند. وفرض می‌کنیم که a = OA. این نقطه دریك لحظه در نقطهٔ B است که ۱ = OB است و درثانیهٔ بعد در C است، به‌طوری‌که ۵ = OC، ودرثانیهٔ بعد دوباره در C است، یعنی درثانیهٔ آخر به A رفته و دوباره به C برگشته است.



شکل ۸-۲

می‌توان فرض کردکه این نقطه تصویرنقطه‌ای است‌که برمحیط دایره با حرکت یکنواخت وبا تندی زاویه‌ای ω حرکت می‌کند ودرلحظه‌های متوالی گفته شده به‌ترتیب درنقطه‌های P، Q و R است. بنابراین زاویه‌های POQ و QOR باید باهم مساوی وبرابر ω باشند.

مطابق شکل، زاویهٔ QOA برابراست با زاویهٔ AOR که برابر است با $\frac{۱}{۲}\omega$.

پس (۱) $$\mathrm{OB} = ۱ = a\ cos\frac{۳\omega}{۲}$$

و (۲) $$\mathrm{OC} = ۵ = a\ cos\frac{\omega}{۲}$$

$$\therefore \qquad ۵\ cos\,\frac{۳\omega}{۲}=cos\,\frac{\omega}{۲}$$

$$\therefore \qquad ۵\left(۴cos^{۳}\frac{۱}{۲}\omega-۳cos\,\frac{۱}{۲}\omega\right)=cos\frac{۱}{۲}\omega$$

$$\therefore \qquad ۲۰\ cos^{۳}\frac{۱}{۲}\omega=۱۶\ cos\,\frac{۱}{۲}\omega$$

$$\therefore \qquad cos\,\frac{۱}{۲}\omega=۰ \quad \text{یا} \quad cos^{۲}\frac{۱}{۲}\omega=\frac{۱۶}{۲۰}=\frac{۴}{۵}$$

اما $cos\,\frac{۱}{۲}\omega=۰$ درمعادلهٔ (۲) صدق نمی‌کند و باید حذف شود، بنابراین‌تنها جواب قابل‌قبول چنین است:

$$cos^{۲}\frac{۱}{۲}\omega=\frac{۴}{۵}$$

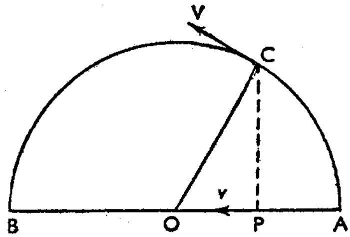
یا
$$cos\,\omega=۲\,cos^{۲}\frac{۱}{۲}\omega-۱=\frac{۳}{۵}$$

$$\therefore \qquad \text{زمان تناوب}=\frac{۲\pi}{\omega}=\frac{۲\pi}{\mathrm{Arc}\ cos\,\frac{۳}{۵}}$$

مثال ۵: متحرکی با حرکت تناوبی ساده میان A و B برمسیری مستقیم حرکت می‌کند. اگر P نقطه‌ای بر AB باشد، به‌طوری که $\frac{AP}{PB}=\frac{۱}{۳}$ باشد، ثابت‌کنید که زمان لازم برای رسیدن متحرك از A به P نصف زمان لازم برای رسیدن متحرك از P به B است. نیز ثابت کنید که انرژی جنبشی متحرك در نقطهٔ P برابر $\frac{۳}{۴}$ ماکزیمم انرژی جنبشی متحرك است.

حل : فرض‌می‌کنیم که O مرکزحرکت باشد، و $OA=OB=a$. دایره‌ای به‌مرکز O و به‌شعاع a (شکل ۸-۳) می‌زنیم. CP را عمود بر AB رسم می‌کنیم.
چون $\frac{۱}{۳}=\frac{AP}{PB}$ است، $AP=\frac{۱}{۲}a$ و $PB=\frac{۳}{۲}a$.

$$\therefore \qquad cos\,\angle COP=\frac{OP}{OC}=\frac{۱}{۲}$$



شکل ۸-۳

و بنابراین $\angle COP = ۶۰^\circ$

بنابراین قوس AC نصف قوس CB است. اگر متحرکی بر این دایره به‌طور یکنواخت حرکت کند، مدت زمان پیمودن AC نصف مدت زمان پیمودن CB است. آشکاراست که تصویر این‌متحرك نیز برخط AB، برای پیمودن AP مدت زمانی نصف مدت زمان لازم برای پیمودن PB لازم دارد.

اما تندی متحرك در P:

$$v = V \sin ۶۰^\circ$$

که درآن V سرعت نقطه‌ای مادی است که بردایره حرکت می‌کند.

درنتیجه انرژی جنبشی متحرك در P:

$$= \frac{۱}{۲} m v^۲ = \frac{۱}{۲} m V^۲ \sin^۲ ۶۰^\circ$$

$$= \frac{۳}{۴}\left(\frac{۱}{۲} m V^۲\right)$$

$$= \frac{۳}{۴} \text{(ماکزیمم انرژی جنبشی نقطهٔ مادی)}$$

مثال ۶: نقطه‌ای مادی بـا حرکت تناوبی ساده برخطی مستقیم حرکت می‌کند و در ۳ s یك نوسان کامل انجام می‌دهد. دورترین فاصله‌اش از مرکز نیرو ۱/۲ m است. ماکزیمم شتاب وماکزیمم تندی‌آن را حساب کنید. اگر نقطهٔ مادی، هنگامی که در دورترین فاصله‌اش از مرکز نیرو است، ضربه‌ای دریافت‌کند که به‌آن تندیی برابر u متر برثانیه بدهد، دامنهٔ جـدید را تعیین کنید. مقدار u چقدر باشد تـا دامنهٔ حرکت به‌جای ۱/۲ m برابر ۱/۵ m شود؟

حل : چون زمان تناوب $3\,\mathrm{s}$ است،

$$\frac{2\pi}{\omega}=3$$

$$\therefore \qquad \omega=\frac{2\pi}{3}$$

$$\therefore \qquad \text{ماکزیمم شتاب}=\left(\frac{2\pi}{3}\right)^2\times 1/2\ \mathrm{m/s^2}$$

$$=\frac{16\pi^2}{30}\,\mathrm{m/s^2}$$

$$\therefore \qquad \text{ماکزیمم تندی}=\left(\frac{2\pi}{3}\right)\times 1/2\ \mathrm{m/s}$$

$$=0/8\pi\ \mathrm{m/s}$$

فرض می‌کنیم دامنهٔ جدید برابر $A\,\mathrm{m}$ باشد.

دراین صورت چون تندی جدید، هنگامی‌که $x=1/2\ \mathrm{m}$ است برابر $u\,\mathrm{m/s}$ است، خواهیم داشت:

$$u^2=\omega^2(A^2-1/2^2)$$

$$\therefore \qquad u^2=\frac{4\pi^2}{9}(A^2-1/44)$$

$$\therefore \qquad A^2=\frac{9u^2}{4\pi^2}+1/44$$

یا

$$A=\frac{\sqrt{9u^2+5/76\pi^2}}{2\pi}$$

اگر $A=1/5$ باشد، در این صورت $u^2=0/36\pi^2$ یا $u=0/6\pi$ خواهد بود.

تمرین ۱۰۸

۱ـ نقطه‌ای مادی بریك خط مستقیم حرکت تناوبی ساده‌ای دارد. زمان یك‌نوسان کامل را در هر یك از حالتهای زیر تعیین کنید: (الف) شتاب در فاصلهٔ $1/2\ \mathrm{m}$ برابر $2/4\ \mathrm{m/s^2}$ است، (ب) شتاب درفاصلهٔ $20\ \mathrm{cm}$ برابر $3/2\ \mathrm{m/s^2}$ است.

۲ ـ دامنهٔ حرکت تناوبی سادهٔ نقطه‌ای مادی $1/5\ m$ است. شتاب در فاصلهٔ $0/6\ m$ از وضع متوسط برابر $1/2\ m/s^2$ است. تندی نقطهٔ مادی را هنگامی که در وضع متوسط است، نیز هنگامی که درفاصلهٔ $1/2\ m$ از این وضع است تعیین کنید.

۳ ـ نقطه‌ای مادی که دارای حرکت تناوبی ساده است، هنگامی که از وضع متوسط خود می‌گذرد، تندیش $1/8\ m/s$ است، و شتاب آن در $0/6\ m$ از وضع متوسط $2/4\ m/s^2$ است. دامنه و زمان تناوب نوسان را تعیین کنید.

۴ ـ نقطه‌ای مادی که دارای حرکت تناوبی‌ساده است درفاصله‌های $0/9\ m$ و $1/2\ m$ از وضع مرکزی به‌ترتیب دارای تندیهای $0/9\ m/s$ و $1/2\ m/s$ است. زمان تناوب و ماکزیمم شتاب را تعیین کنید.

۵ ـ نقطه‌ای مادی دارای حرکت تناوبی ساده با زمان تناوب π ثانیه است، و ماکزیمم تندی آن $2/4\ m/s$ است. دامنهٔ حرکت و نیز تندی نقطهٔ متحرك را هنگامی که درفاصلهٔ $0/9\ m$ از وضع مرکزی است تعیین کنید.

۶ ـ اگر نقطه‌ای مادی نوسانهای تناوبی ساده‌ای با زمان تناوب ۲ ثانیه انجام دهد، و دامنهٔ حرکت $0/9\ cm$ باشد، ماکزیمم تندی و ماکزیمم شتاب را تعیین کنید.

۷ ـ نقطه‌ای مادی ازحال‌سکون شروع به‌حرکت می‌کند و دارای حرکت تناوبی‌ساده‌ای با زمان تناوب $2T$ می‌شود. نشان دهیدکه این نقطهٔ مادی، $\frac{1}{4}$ ازکل مسافتی‌راکه تا پیش از سکون لحظه‌ای می‌پیماید در $\frac{1}{3}$ زمان T می‌پیماید و در $\frac{1}{6}$ زمان T نصف ماکزیمم تندی را به‌دست می‌آورد.

۸ ـ نقطه‌ای مادی که دارای حرکت تناوبی ساده است از دونقطهٔ A و B که به‌فاصلهٔ $56\ cm$ از یکدیگرند با تندیهای متساوی می‌گذرد وبرای‌رسیدن از A به B مدت ۲ ثانیه طول می‌کشد. پس از دوثانیهٔ دیگر نقطهٔ مادی مجدداً در B است. زمان تناوب و دامنهٔ نوسان را تعیین کنید.

۹ ـ نقطه‌ای مادی در هردقیقه ۱۵۰ نوسان تناوبی ساده انجام می‌دهد، و بزرگترین شتابی که به‌دست می‌آورد $3\ cm/s^2$ است. بزرگترین‌تندی و بزرگترین‌فاصلهٔ میان دو وضع انتهایی را تعیین کنید.

۱۰ـ برخطی مستقیم، نقطه‌ای مادی حول نقطهٔ O که براین خط واقع است حرکت تناوبی ساده انجام می‌دهد. وقتی که تغییرمکان این نقطهٔ مادی نسبت به O برابر x_1 است تندی آن برابر v_1 است، وهنگامی که تغییرمکان آن برابر x_2 است تندی آن برابر v_2 است. نشان دهیدکه زمان تناوب حرکت برابر است با

$$۲\pi\sqrt{\frac{x_۱^۲-x_۲^۲}{v_۲^۲-v_۱^۲}}$$

۱۱- تندی نقطه‌ای مادی که برخطی مستقیم حرکت می‌کند برطبق معادلهٔ زیر داده شده است:

$$v=k\sqrt{a^۲-x^۲}$$

که درآن k و a مقدارهای ثابتی هستند، و x فاصلهٔ نقطهٔ مادی از نقطهٔ ثابتی است که برخط واقع است. ثابت کنید که حرکت از نوع تناوبی ساده است، و دامنه و زمان تناوب حرکت را تعیین کنید.

۱۲- نقطه‌ای مادی، حول مرکز O ، حرکت تناوبی ساده‌ای به‌زمان تناوب T انجام می‌دهد، و از نقطه‌ای مانند P با تندی v درجهت OP می‌گذرد. ثابت کنید مدت زمانی که طول می‌کشد تا این نقطهٔ مادی دوباره از P بگذرد برابراست با

$$\frac{T}{\pi}\,\mathrm{Arc}\,tg\,\frac{vT}{۲\pi \mathrm{OP}}$$

۱۳- اگر سرعتهای نقطه‌ای مادی که دارای حرکت تناوبی ساده است درفاصله‌های $x_۱$ و $x_۲$ از مرکز حرکت برابر $v_۱$ و $v_۲$ باشد، زمان تناوب، دامنه و ماکزیمم سرعت و ماکزیمم شتاب را پیدا کنید. اگر $x_۱=۰/۶\ \mathrm{m}$ ، $x_۲=۰/۹\ \mathrm{m}$ ، $v_۱=۱/۵\ \mathrm{m/s}$ و $v_۲=۱/۲\ \mathrm{m/s}$ باشد مقادیر عددی را حساب کنید.

۱۴- ثابت کنید که درحرکت تناوبی ساده که زمان تناوب آن T است، اگر در یك لحظه شتاب برابر f و تندی برابر v باشد، در این‌صورت $f^۲T^۲+۴\pi^۲v^۲$ مقداری است ثابت. مقدار عددی این مقدار ثابت را هنگامی که زمان تناوب حرکت ۲ ثانیه و دامنهٔ حرکت $۰/۷\ \mathrm{m}$ است تعیین کنید.

۱۵- برخط مستقیم OAB جسمی دارای حرکت تناوبی ساده است، و هنگامی که در نقطه‌های A و B به‌فاصله‌های a و b از O است تندی‌حرکت صفر است وهنگامی که در وسط فاصلهٔ دونقطهٔ A و B است تندی حرکت برابر v است. نشان دهید که زمان تناوب کامل برابراست با $\frac{\pi(b-a)}{v}$.

۱۶- نقطهٔ P دایره‌ای به‌شعاع a و مرکز O با تندی زاویه‌ای یکنواخت ω می‌پیماید. نشان‌دهید که نقطهٔ Q که قطر AOB دایره را چنان می‌پیماید که PQ همیشه عمود بر AOB است، دارای شتابی است که متناسب با OQ است.

اگر $Q_۱$ و $Q_۲$ نقطه‌های وسط OA و OB باشند، مدت زمانی راکه طول‌می‌کشد

تا نقطهٔ Q از Q_1 به Q_2 برود، نیزتندی نقطهٔ Q را در Q_2 و Q_1 تعیین کنید.

۱۷- دریك حرکت تناوبی ساده، عده نوسانهای کامل در هردقیقه ۴۵ است. تندی در نقطه‌ای که به‌فاصلهٔ ۲/۵ cm از وضع متوسط است برابراست با ۳۰ cm/s. بزرگترین فاصله‌ای که این نقطهٔ مادی ازوضع متوسط به‌دست می‌آورد چقدراست؟ اگر A وB به‌ترتیب نقطه‌هایی به‌فاصله‌های ۲/۵ cm و ۵ cm از مرکز حرکت باشند، زمانی راکه طول می‌کشد تانقطهٔ مادی از A به B برود تعیین کنید.

۱۸- نقطه‌ای که دارای حرکت تناوبی ساده است،هرنوسان کامل را در ۳ s انجام‌می‌دهد. دامنهٔ حرکت در هریك از دوطرف وضع متوسط برابر ۵ cm است. ماکزیمم تندی وماکزیمم شتاب را حساب کنید. نیزتندی وشتاب را، هنگامی که نقطهٔ مادی به فاصلهٔ ۲/۵ cm ازمرکز است، تعیین کنید.

۱۹- نشان دهیدکه درحرکت تناوبی ساده، تندی متوسط (درضمن حرکت ازیك انتهای مسیر به‌انتهای دیگر) نسبت به‌مسافت برابراست با $\pi/4$ ضرب درتندی ماکزیمم، ونسبت به‌زمان برابر است با $2/\pi$ ضرب درتندی ماکزیمم.

۲۰- نقطه‌ای مادی دارای حرکت تناوبی ساده‌ای است و هنگامی که ازیك وضع از حال سکون حرکت می‌کند و به‌وضع دیگرمی‌رود، فاصله‌اش‌ازنقطهٔ وسط مسیر در۳ ثانیهٔ متوالی به‌ترتیب x_1 و x_2 و x_3 است. ثابت کنیدکه زمان یك نوسان کامل برابر است با

$$\frac{2\pi}{\operatorname{Arc}\cos\left(\frac{x_1+x_3}{2x_2}\right)}$$

۲۱- نقطه‌ای مادی که باشتاب $-\mu x$ حرکت می‌کند در دولحظهٔ دلخواه دارای اوضاع x_1 وx_2 وتندیهای v_1 وv_2 است. درلحظه‌ای که ازنظر زمانی میان این دولحظه است وضع وتندی آن $\bar{x}$ و $\bar{v}$ است. نشان دهیدکه

$$\frac{x_1-x_2}{v_2-v_1}=\frac{\bar{v}}{\mu\bar{x}}$$

$$\frac{x_1+x_2}{v_1+v_2}=\frac{\bar{x}}{\bar{v}}$$

۲۲- اگر دریك حرکت تناوبی ساده، a دامنه و n عدهٔ دورهای کامل درهرثانیه باشد، تندی را درهروضع برحسب هریك ازدوکمیت زیر تعیین کنید: (الف) فاصله از مرکز، (ب) زمانی که ازلحظهٔ سکون نقطهٔ مادی متحرك طول کشیده است. نشان

دهیدکه زمانی‌که طول می‌کشد تا نقطهٔ مادی ازوضع ماکزیمم تندی به‌وضعی برسد که تندی آن نصف تندی ماکزیمم باشد $\frac{1}{6n}$ ثانیه است.

۲۳- دایره‌ای به‌شعاع a باسرعت زاویه‌ای یکنواخت در داخل دایرهٔ ثابتی به‌شعاع $2a$ می‌چرخد. ثابت کنیدکه هرنقطه ازمحیط‌دایرهٔ متحرك خطی مستقیم با حرکت‌تناوبی ساده انجام می‌دهد.

۲۴- پیستونی به‌جرم $10\,\text{kg}$ دارای مسیری است به طول $1/2\text{m}$. اگر امتداد حرکت روی محور xها باشد، نمودارهایی رسم کنیدکه بزرگی تندی ونیروی شتاب‌دهنده را درهرنقطه ازمسیر نشان دهد. فرض کنید حرکت تناوبی ساده است.

۲۵- نقطهٔ P برخطی مستقیم حول نقطهٔ ثابت O طوری حرکت می‌کندکه شتاب آن در هرلحظه متوجه O ومساوی μOP است. ثابت کنیدکه تندی حرکت برابر است با $\sqrt{\mu(\text{OA}^2-\text{OP}^2)}$، که درآن A یکی از نقطه‌هایی است که P در آنجا به‌وضع سکون درمی‌آید.
اگر Q نقطه‌ای بر OA باشد به‌طوری که $2\text{OQ}^2=\text{OA}^2$، نشان دهیدکه زمان حرکت از O به Q برابر زمان حرکت از Q تا A است.

۲۶- نقطه‌ای مادی در هردقیقه ۱۵۰ نوسان تناوبی ساده انجام می‌دهد وبزرگترین‌شتاب آن $3\,\text{m/s}^2$ است. تعیین کنید: (الف) بیشترین تندی آن را، (ب) تندی متوسط حرکت را ازیك انتها به‌انتهای دیگر.

۲۷- نقطه‌ای مادی با حرکت تناوبی ساده‌ای بر خطی مستقیم حرکت می‌کند. وقتی‌که فاصله‌اش از وضع متوسط به‌ترتیب $0/3\text{m}$ و $0/6\text{m}$ است تندی آن به‌ترتیب $0/9\,\text{m/s}$ و $0/6\,\text{m/s}$ است. طول مسیر وزمان تناوب حرکت را تعیین کنید.

۲۸- نقطه‌ای مادی‌که حرکت تناوبی ساده انجام می‌دهد درهردقیقه ۱۰۰ ارتعاش کامل می‌کند، وتندی آن ضمن گذشتن ازوضع متوسط $4/5\,\text{m/s}$ است. طول مسیرچقدر است؟ تندی آن درهریك ازحالتهای زیرچقدر است: (الف) وقتی‌که درنیمه راه میان وضع متوسط وانتهای مسیراست؟ (ب) وقتی‌که پس از ترك وضع متوسط، مدت زمانی برابرنصف مدت زمان لازم برای رسیدن به‌انتهای مسیرطی‌شده باشد؟

۸.۰۸ نیروی لازم برای تولید حرکت تناوبی ساده

چون نیروی F که درجرم m شتابی برابر a تولید می‌کند برابر ma است، نتیجه می‌شود که (اگر m ثابت باشد) F باید ازهمان قانون a پیروی کند. پس درحالت حرکت تناوبی

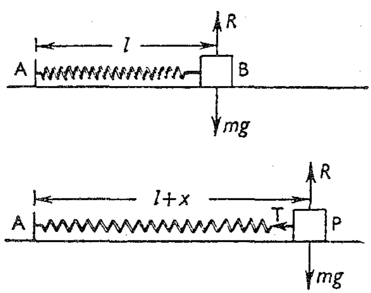
ساده، نیرو باید همیشه متوجه وضع مرکزی یا وضع تعادل باشد، و بزرگی آن باید مستقیماً متناسب با تغییر مکان نسبت به آن وضع باشد.

نیرویی که مایل است جسم کشسان را به شکل یا اندازهٔ طبیعی برگرداند عموماً از همین نوع است. مثلاً نیرویی که پس از متراکم کردن یا منبسط کردن یك فنر حلقه‌ای وارد می‌شود از همین نوع نیرو است.

ساده‌ترین حالت آن است که نقطه‌ای مادی در صفحه‌ای افقی و صیقلی واقع باشد و به‌وسیلهٔ یك فنر به نقطهٔ ثابتی که در صفحه است متصل باشد، و در جهت طول فنر جا به‌جا شود.

فرض می‌کنیم A (شکل ۸-۴) نقطهٔ ثابت، AB طول طبیعی فنر (l)، و λ ضریب کشسانی فنر باشد.

اگر نقطه‌ای مادی به‌جرم m به‌انتهای B فنر متصل باشد، در این صورت B وضع تعادل است، و اگر نقطهٔ مادی در امتداد خط AB جا به‌جا و رها شود، همان‌طور که نشان خواهیم داد، حول B نوسان خواهد کرد.



شکل ۸-۴

اگر P وضع نقطهٔ مادی پس از جا به‌جا شدن باشد به‌طوری که $BP = x$، در این صورت کشش، یعنی نیرویی که به‌طرف B اعمال می‌شود، اگر قانون هوك برقرار باشد، برابر است با $\lambda x/l$، و این تنها نیرویی است که بر m وارد می‌شود و مایل است که در امتداد AB تولید حرکت بکند.

$$\therefore \qquad m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\lambda}{l}x$$

$$\therefore \qquad \text{شتاب در جهت AB} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\lambda}{ml}x$$

بنابراین حرکت حول B حرکت تناوبی ساده است که B مرکزحرکت است و به‌جای ثابت ω^2 درمعادلهٔ حرکت λ/ml قرارداده شده است.

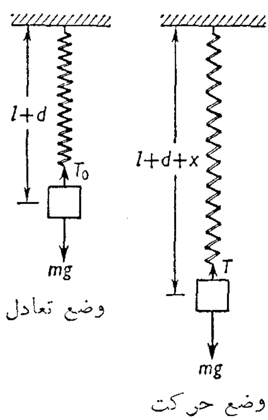
بنابراین زمان تناوب نوسان برابراست با

$$2\pi\sqrt{\frac{ml}{\lambda}}$$

بدیهی است که ثابت ω، وبنابراین زمان تناوب حرکت، فقط بستگی به‌ماده وطول فنر وجرم نقطهٔ مادی دارد، و به‌دامنهٔ نوسان بستگی ندارد. اگرنقطهٔ مادی تا نقطهٔ C $(BC=a)$ کشیده وسپس رها شود، ازنقطهٔ B خواهدگذشت و به‌نقطهٔ C' درطرف دیگر که به‌همان فاصلهٔ C از B است می‌رسد وسپس ازآن نقطه برمی‌گردد وپس ازگذشتن ازB به C می‌رسد واین عمل مرتباً تکرارمی‌شود. دامنه برابراست بافاصلهٔ وضع تعادل تا وضع دیگری که نقطهٔ مادی ازحال سکون ازآنجا رها شده است.

۸. ۹. نقطهٔ مادی که ازیک فنرآویزان است

فرض می‌کنیم که نقطه‌ای مادی به‌جرم m به‌وسیلهٔ فنری که طول طبیعی آن برابر l و ضریب کشسانی آن λ است، ازنقطه‌ای ثابت (شکل ۸-۵) آویزان است. وقتی که نقطهٔ



شکل ۸-۵

مادی به‌حال تعادل آویزان است، افزایش طول فنر برابر d است به‌طوری که

$$mg=\frac{\lambda}{l}d$$

اگر نقطهٔ مادی به‌طور قائم جا به‌جا وسپس رها شود، درخطی قائم نوسان خواهد کرد، ومی‌توانیم نشان دهیم که حرکت آن حول وضع تعادل، به‌عنوان مرکز، حرکت تناوبی ساده است.

زیرا اگر درلحظهٔ t نقطهٔ مادی تغییرمکانی برابر x درطرف پایین وضع تعادل داشته باشد، به‌طوری که طول فنر برابر $l+d+x$ باشد، خواهیم داشت:

کشش فنر
$$T=\frac{\lambda}{l}(d+x)$$

برایند نیرویی که به‌طرف بالا وارد می‌شود

$$T-mg=\frac{\lambda}{l}(d+x)-mg$$

اما
$$mg=\frac{\lambda}{l}d$$

بنابراین نیرویی که باعث بازگشت می‌شود برابر $\lambda x/l$ است، وبنابراین متناسب با تغییرمکان نسبت به‌وضع تعادل است.

پس نقطهٔ مادی با حرکت تناوبی‌ساده حول‌وضع تعادل حرکت خواهدکرد واین‌وضع تعادل، مرکزحرکت خواهد بود.

تیزشتاب حرکت به‌طورقائم وبه‌طرف پایین وبرابر است با

$$\frac{d^{۲}x}{dt^{۲}}=-\frac{\lambda}{ml}x$$

وبنابراین زمان تناوب یك نوسان‌کامل برابرخواهد بود با

$$۲\pi\sqrt{\frac{ml}{\lambda}}$$

دامنهٔ نوسان به‌تغییرمکان اولیه بستگی دارد. اگرنقطهٔ مادی به‌اندازهٔ فاصلهٔ a از وضع تعادل به‌پایین کشیده شود $a<(l+d)$، وسپس رها گردد، دوباره تا فاصله‌ای برابر a تا بالای وضع تعادل خواهد رفت، ودامنهٔ حرکت برابر a خواهد بود.

درمورد فنر، مانعی ندارد که نقطهٔ مادی آن‌قدر بالا رود کـه فنر فشرده شود، زیرا اگر $a>d$ باشد، قانون تراکم فنرشبیه قانون انبساط فنراست، وحرکت مربوط بـه آن ازنوع تناوبی ساده است.

اما اگرنقطهٔ مادی، به‌جای فنر، به‌وسیلهٔ نخ‌کشسانی آویزان شده بـاشد، آنچه در

بالا گفته شد، فقط تا هنگامی که نخ به‌طور کشیده باقی بماند صدق می‌کند. اگر نقطهٔ مادی آن‌قدر بالا برود که نخ دیگر کشیده نباشد، حرکت از آن پس حرکت قائم آزادی است که تحت اثر جاذبهٔ زمین صورت می‌گیرد. این مورد هنگامی روی خواهد داد که نقطهٔ مادی به‌اندازهٔ فاصلهٔ a ، که بزرگتر از افزایش طول اولیهٔ d است، پایین کشیده شود.

۸. ۱۰. مثال ۱: فنری حلقه‌ای به‌ازای هر کیلوگرم افزایش بار به‌اندازهٔ $2/5\ \mathrm{cm}$ افزایش طول پیدا می‌کند. این فنر آویزان است و به‌آن وزنهٔ $2\ \mathrm{kg}$ بسته شده است و به‌ارتعاش درآمده است. زمان تناوب را پیدا کنید.

حل : فرض می‌کنیم AB (شکل ۸-۶)، طول طبیعی فنر، برابر l متر باشد. جرم $2\ \mathrm{kg}$ طول آن را به‌اندازهٔ $5\ \mathrm{cm} = 0/05\ \mathrm{m}$ افزایش خواهد داد. بنابراین درحالت تعادل، وزنه درنقطهٔ O خواهد بود به‌طوری که $OB = 5\ \mathrm{cm}$. اگر λ ضریب کشسانی باشد،

$$g = \frac{\lambda}{l} \times \frac{0/05}{2}$$

$$\therefore \qquad \frac{\lambda}{l} = 40\, g$$

شکل ۸-۶

اگر P وضع جا به‌جا شدهٔ نقطهٔ مادی باشد، و $OP = x$ متر باشد، کشش T، برحسب نیوتون، دراین وضع، چنین خواهد بود:

$$T = \frac{\lambda}{l}(0/05 + x)$$

$$= 40\, g(0/05 + x)$$

نیرویی که موجب بازگشت می‌شود،

$$T - ۲g = ۲g + ۴۰\,gx - ۲g$$
$$= ۴۰\,gx$$

$$\therefore \qquad \text{شتاب} = \frac{۴۰\,gx}{۲} = ۲۰\,gx$$

$$\therefore \qquad \text{زمان تناوب} = \frac{۲\pi}{\sqrt{۲۰g}} = \frac{۲\pi}{\sqrt{۱۹۶}} = \frac{\pi}{۷}\,\mathrm{s}$$

مثال ۲: نخ کشسان سبکی است که چون وزنهٔ معینی به‌آن آویزان شود برطولش به‌اندازهٔ $e_\circ$ افزوده می‌شود. ثابت کنید که اگر وزنه را درامتداد خط قائم طوری جا به جا کنیم کـه مقدار تغییرمکان بزرگتر از $e_\circ$ نباشد، و سپس آن را رهـا کنیم، در مدت $۲\pi\sqrt{e_\circ/g}$ به‌وضع ابتدایی خود، یعنی همین وضع، بازگشت خواهد کرد.

حل: فرض می‌کنیم جرم وزنه برابر m، ضریب کشسانی نخ برابر λ و طـول طبیعی نخ برابر l باشد. چون وزن mg به‌اندازهٔ فاصلهٔ $e_\circ$ برطول نخ می‌افزاید،

$$mg = \frac{\lambda}{l} e_\circ$$

$$\therefore \qquad \frac{\lambda}{l} = \frac{mg}{e_\circ}$$

برای افزایش دیگر x، کشش عبارت است از:

$$\frac{\lambda}{l}(e_\circ + x) = mg + \frac{mg}{e_\circ}x$$

وبنابراین نیروی برگشت دهنده برابراست با $\frac{mg}{e_\circ}x$.

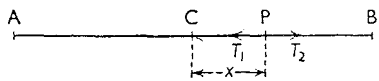
بنابراین شتاب برابراست با $\frac{g}{e_\circ}x$، وحرکت ازنوع تناوبی ساده است.

زمان لازم برای بازگشت به‌وضع اول از محلی که وزنه رها می‌شود برابر است با یك تناوب کامل و بنابراین برابر است با $۲\pi\sqrt{e_\circ/g}$.

یادداشت ــ در بیان مسئله، تأکید شده است که جابه‌جایی بزرگتر از $e_\circ$ نیست، **بنابراین حرکت، تناوبی ساده است.**

مثال۳ : نقطه‌ای مادی به‌جرم m برمیزی صیقلی قراردارد و به‌وسیلهٔ دوقطعه نخ‌متشابه و کشیده شدهٔ کشسان به‌دونقطهٔ A و B از میزمتصل است. ثابت کنیدکه اگر نقطهٔ مادی درجهت خط AB طوری جا به‌جا شودکه هیچ یك ازدوقطعه نخ، شل نشود، وسپس رها گردد، نوسانهای تناوبی ساده‌ای انجام خواهد داد.

حل :



شکل ۸-۷

فرض می‌کنیم $l_\circ$ طول طبیعی هر قطعه نخ، λ ضریب کشسانی، و l طول کشیده شده باشد.

وضع تعادل نقطهٔ مادی در C (شکل ۸-۷) است که وسط AB است و $AC = CB = l$.

فرض می‌کنیم نقطهٔ مادی به‌وضع P، یعنی به‌طرف B، برود و $CP = x$ باشد.

کشش در AP برابراست با

$$T_۱ = \frac{\lambda}{l_\circ}(l - l_\circ + x)$$

وکشش در PB برابر است با

$$T_۲ = \frac{\lambda}{l_\circ}(l - l_\circ - x)$$

بنابراین نیروی برایندی که مایل‌است نقطهٔ مادی را به C برگرداند برابراست‌با

$$T_۱ - T_۲ = ۲\frac{\lambda}{l_\circ}x$$

یعنی نیروی برگشت دهنده متناسب با تغییرمکان از C است و بنابرایـن حرکت ازنوع تناوبی ساده است که درآن C مرکزحرکت است.

شتاب حرکت برابراست با

$$\frac{۲\lambda}{ml_\circ}x$$

و زمان تناوب برابراست با

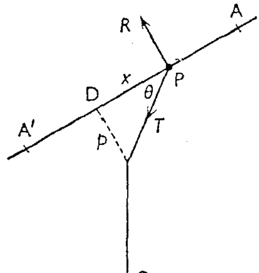
$$۲\pi\sqrt{\frac{ml_\circ}{۲\lambda}}$$

یادداشت ـ اگر نقطهٔ مادی آن قدرجا به‌جا شود که یکی از نخها شل شود، دراین صورت برای قسمتی از حرکت که در آن هردو نخ محکم و کشیده شده هستند شتاب برابر مقدار فوق است. اما برای قسمت دیگر حرکت که در آن یکی از نخها شل شده‌اند شتاب برابر است با $\frac{\lambda}{ml_\circ}x$.

دراین‌صورت حرکت کامل ازدوحرکت سادهٔ تناوبی، بازمانهای تناوب متفاوت تشکیل شده است. زمان تناوب تمام حرکت $۲\pi\sqrt{\frac{ml_\circ}{۲\lambda}}$ است، که این فقط جزئی اززمان تناوب قسمتی دیگرازحرکت است.

مثال ۴: نخ کشسانی ازیك انتها به‌نقطهٔ O که بر میزافقی صیقلیی واقع است ثابت شده است. این نخ ازحلقهٔ ثابت C می‌گذرد، و OC طول‌غیرکشیدهٔ نخ است. انتهای دیگرنخ به‌وزنهٔ کوچکی به‌جرم m که می‌تواند روی سیم افقی صیقلی‌ثابتی‌بلغزد متصل‌است. وزنه را تانقطهٔ A واقع برسیم‌بالامی‌برند وسپس آن‌را رهامی‌کنند. نشان دهیدکه این وزنه حرکت تناوبی ساده انجام خواهد داد. انتهای دیگر مسیر وزنه را مشخص کنید.

حل :



شکل ۸-۸

فرض می‌کنیم D (شکل ۸-۸) نقطه‌ای باشدکه محل تلاقی عمود از C بر سیم

است. دراین صورت D وضع تعادل m است.

اگر وزنهٔ m درنقطهٔ P باشد، افزایش طول نخ CP است، واگر l طول طبیعی و λ ضریب کشسانی نخ باشد، کشش T چنین به‌دست می‌آید:

$$T=\frac{\lambda}{l}\mathrm{CP}$$

تنها نیروی‌دیگری‌که بر m وارد می‌شود عکس‌العمل قائم R است که‌میان وزنه و سیم صیقلی پدید می‌آید.

اگر $\mathrm{DP}=x$ و $\angle \mathrm{DPC}=\theta$ باشد، مؤلفهٔ T درامتداد سیم برابراست با

$$T\cos\theta=\frac{\lambda}{l}\mathrm{CP}\cos\theta=\frac{\lambda}{l}x$$

بنابراین نیرویی‌که مایل است m را به‌طرف D حرکت دهد متناسب با تغییر مکان از D است، وحرکت حول D تناوبی ساده است. انتهای دیگر مسیر وزنه در A' درطرف دیگر D خواهد بود، به‌طوری‌که $\mathrm{DA}'=\mathrm{DA}$.

مثال ۵: وزنه‌ای به‌جرم m که از فنری آویزان است سبب افزایش طولی برابر a در فنر شده است. اگر وزنه‌ای به جرم M بر m افزوده شود، زمان تناوب حرکتی را که می‌توان با این وزنه‌ها وفنر فراهم کرد تعیین کنید و دامنهٔ نوسان را به‌دست آورید.

حل : اگرطول طبیعی برابر l وضریب‌کشسانی برابر λ باشد، خواهیم داشت:

$$mg=\frac{\lambda a}{l}$$

درحرکت حاصل،وقتی‌که M اضافه می‌شود، درلحظهٔ t افزایش کل طول رابرابر $(a+x)$ می گیریم. دراین‌صورت شتاب حرکت بـه طرف پایین، $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$، چنین به‌دست می‌آید:

$$(M+m)\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=(M+m)g-\lambda\frac{a+x}{l}$$

$$=Mg-\lambda\frac{x}{l}$$

(زیرا mg برابر $\frac{\lambda a}{l}$ است)

$$=-\frac{\lambda}{l}\left(x-\frac{Mgl}{\lambda}\right)$$

$$\therefore \qquad \frac{d^{2}x}{dt^{2}}=-\frac{\lambda}{l(M+m)}\times\left(x-\frac{Mgl}{\lambda}\right)$$

بنابراین شتاب به‌طرف پایین مستقیماً متناسب با $x-\frac{Mgl}{\lambda}$ ، یعنی متناسب با فاصلهٔ مجموعهٔ دوجرم ازنقطه‌ای به‌فاصلهٔ Mgl/λ در زیر وضع تعادل m است. پس حرکت حول این نقطه، که مرکزحرکت است، ازنوع تناوبی ساده است.

$$\therefore \qquad \text{زمان تناوب}=2\pi\sqrt{\frac{l(M+m)}{\lambda}}=2\pi\sqrt{\frac{(M+m)a}{mg}}$$

ازاین گذشته، چون مجموعهٔ دوجرم درابتدا هنگامی که $x=0$ است به‌حال سکون است، دامنهٔ حرکت برابـراست با $\frac{Mgl}{\lambda}$ یعنی $\frac{Ma}{m}$.

نتیجهٔ اخیررا می‌توان با استفاده ازمعادلهٔ انرژی نیزپیدا کرد:

اگردامنه برابر b باشد، مجموعهٔ دوجرم باید به‌اندازهٔ فاصله‌ای برابر $2b$ پایین بیاید تا به‌حال سکون لحظه‌ای درآید. پس انرژی پتانسیلی که ضمن پایین آمدن مسافتی برابر $2b$ ازدست می‌رود باید مساوی مقدارانرژیی باشد کـه فنر براثر افزایش طول به‌دست می‌آورد.

$$\therefore \qquad (M+m)g\times 2b=\text{کشش متوسط}\times\text{افزایش طول}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{l}\right)\times\{(a+2b)+a\}\times 2b$$

$$\therefore \qquad (M+m)g=\frac{\lambda(a+b)}{l}$$

$$=\frac{mg(a+b)}{a}$$

$$\therefore \qquad a(M+m)=m(a+b)$$

$$\therefore \qquad b=\frac{Ma}{m}$$

تمرین ۸.۲

۱ـ فنری حلقه‌ای شامل قلابی به‌جرم ۱ kg است، ووقتی که وزنه‌ای بـه‌جرم ۵ kg به

قلاب آویزان می‌شود ۵ cm به‌طول فنر افـزوده می‌شود. قلاب و وزنهٔ مربوط بـه آن را ۷/۵ cm دیگر به‌پایین می کشیم و سپس رها می کنیم. تـا چـه ارتفاعی بـالا خواهد رفت وزمان تناوب نوسان چقدرخواهد بود؟

۲ـ فنری براثر افزایش وزن معینی به‌آن، به اندازهٔ ۲ cm برطـولش افـزوده می‌شود. اگر وزنه به‌طورقائم به‌طرف پایین تا مسافتی برابر ۱ cm آورده شود و سپس رهـا گردد زمان نوسان چقدرخواهد بود؟ تیزتندی‌وشتاب‌را هنگامی که وزنه در ۰/۵ cm زیرمحل تعادل است تعیین کنید.

۳ـ جسمی به‌جرم ۵ kg ازفنری آویزان است و درهرثانیه سه نوسان‌کامل به‌طور قـائم انجام می‌دهد. تعیین کنید این فنر بر اثر وزنه‌ای به‌جرم ۴ kg که به‌حال سکون به‌آن آویزان شود چقدرافزایش طول پیدا می کند.

۴ـ نقطه‌ای مادی به‌جرم ۰/۵ kg تحت اثر نیروی متغیری قرار گرفته است کـه آن را وادار به‌حرکت تناوبی‌ساده کرده‌است. ماکزیمم سرعتی که به‌دست‌می‌آورد ۱/۵ m/s وزمان تناوب کامل‌آن ۲ s است. تعیین کنید: (الف) دامنهٔ حرکت را، (ب) ماکزیمم توان نیروی وارده را.

۵ـ جسمی به‌وسیلهٔ یك فنر از نقطه‌ای ثابت آویزان است ونوسان قـائم انجام می‌دهـد. نشان دهید که زمان تناوب نوسان $2\pi\sqrt{l/g}$ است، که l افزایش طول فنر است کـه درنتیجهٔ وزن جسم که به‌فنر آویزان است تولید شده است.

۶ـ نخ کشسانی که طول طبیعی آن $2a$ است می‌تواند وزنه‌ای را تحمل کند کـه طول آن را حداکثر به $3a$ برساند. اکنون یك انتهای نخ را به‌نقطه‌ای ازیك میز افقی صیقلی می‌بندیم، وهمان وزنه‌را که می‌تواند روی میزحرکت کند به‌انتهای دیگرنخ‌می‌بندیم. ثابت کنید که اگر وزنه تا هرفاصله‌ای کشیده شود وسپس رها گردد، نخ دوباره پس از مدت زمان $\frac{1}{2}\pi\sqrt{a/g}$ شل خواهد شد.

۷ـ اگرنقطه‌ای مادی نوسان تناوبی با دامنهٔ a و زمان تناوب T انجام دهد، ثابت کنید که پس‌از مدت زمان $\theta T/2\pi$ ازلحظهٔ شروع حرکت درفاصلهٔ x ازمرکز خواهد بود وبا سرعت $\frac{2\pi\sqrt{a^2-x^2}}{T}$ درحال حرکت است، $a\sin\theta = x$ است.

نخ کشسانی میان دو نقطه که برمیزافقی صیقلی واقعند کشیده شده است. نقطه‌ای‌مادی به‌جرم معین به‌نقطهٔ وسط بسته شده است، وپس ازآنکه به‌طرف یکی از ایـن‌نقطه‌ها کشیده شد، به‌طوری که نخ بازهم محکم باشد، رها می‌شود. نشان دهید که این‌نقطهٔ مـادی نوسانهایی انجام خواهـد دادکـه زمان تناوب‌آن مستقل از تغییرمکان اولیهٔ

نقطهٔ مادی است.

۸ - نخ کشسانی، میان دو نقطهٔ A و B، که برمیزی افقی به‌فاصلهٔ ۲٫۷ m ازیکدیگرند، کشیده شده است. به‌نقطهٔ وسط این نخ وزنه‌ای متصل می‌کنیم وآن را ۲٫۵ cm درجهت نخ جا به‌جا می‌کنیم. اگر کشش اولیهٔ نخ دوبرابر وزن جسم باشد، زمان تناوب حرکت وماکزیمم تندی جسم را پیدا کنید.

۹ - فنری حلقه‌ای به‌طول ۶۰ cm ازیك انتها آویزان است. اگر کششی معادل ۳۰ N برآن وارد شود طول فنردوبرابرمی‌شود. وزنه‌ای به‌جرم ۱٫۵ kg به‌انتهای پایینی فنرآویزان و رها می‌شود. تعیین کنید پیش ازآنکه ساکن شود چقدر سقوط می کند و زمان نوسان کامل آن چقدراست.

۱۰- اگر دو وزنهٔ نامتساوی با هم به‌یك انتهای نخ کشسانی که انتهای دیگر آن ثابت است، آویزان شوند، و یکی ازآنها ازنخ جدا شود، نشان دهیدکه‌آیا وزنهٔ دیگر، برحسب‌آنکه وزنهٔ جدا شده، وزنهٔ سبکتر است یا وزنهٔ سنگینتر، نوسانهای تناوبی ساده انجام خواهد داد یا خیر.

۱۱- وزنه‌ای به‌جرم ۰٫۵ kg به‌فنری آویزان است و درحال تعادل ۲٫۵ cm برطول آن افزوده است. اگر فنر به‌اندازهٔ ۱۲٫۵ cm کشیده شود و به انتهای آن وزنهٔ ۱٫۵ kg بسته شود و سپس وزنه رها گردد، عدهٔ نوسانهایی که در دقیقه صورت می گیرد و ماکزیمم تندی را درضمن نوسان تعیین کنید.

۱۲- وزنه‌ای به‌جرم ۵ kg از فنری آویزان است و موجب افزایش طولی برابر ۲۵ cm درفنرشده است. اگر وزنه به‌اندازهٔ ۲٫۵ cm دیگر به‌پایین کشیده شود و سپس رها گردد، زمان تناوب حرکت، نیز تندی را هنگامی که وزنه در ۱٫۲۵ cm بالای پایینترین نقطه است، و کشش فنر را دربالای مسیر تعیین کنید.

۱۳- به‌فنرحلقه‌ای سبکی وزنه‌ای به‌جرم ۶ kg آویزان است. اگر وزنه‌ای اضافی به‌جرم ۱٫۵ kg بروزنهٔ اولیه افزوده شود برطول فنر ۵ cm افزوده می‌شود. این وزنهٔ اضافی ناگهان برداشته می‌شود. زمان تناوب نوسان وزنهٔ ۶ کیلو گرمی، کشش فنر، وتندی این‌وزنه را هنگامی که در ۲٫۵ cm بالای پایینترین نقطه است تعیین کنید.

۱۴- فنری سبك بطور قائم آویزان است وبه‌آن وزنه‌ای برابر ۵ kg متصل شده است. طول این فنر با هرکیلوگرم اضافه بار ۵ cm افزایش می‌یابد. فنر را می‌کشیم تا برطول‌آن ۵ cm افزوده شود و سپس‌آن را رها می‌کنیم. نمودارهایی برای انرژی پتانسیل و انرژی جنبشی درحالتهای مختلف حرکت ناشی از این عمل رسم کنید.

۱۵- وزنه‌ای به‌جرم ۲۵ واحد غیرمشخص به‌فنری‌آویزان است. این فنر، براثر وزنه‌ای

به‌جرم ۶ واحد از همان واحدها، افزایش طولی برابر $۲/۵\ cm$ پیدا می‌کند. زمان تناوب را تحت اثر وزنهٔ اولیه تعیین کنید. اگر وقتی که وزنه را به‌فنر آویزان کردیم فنر را $۵\ cm$ پایین بکشیم و سپس رها کنیم، هنگامی که وزنه در نیمه راه میان پایینترین نقطه و وضع متوسط است تندی و شتاب آن چقدر خواهد بود؟

۱۶ـ کفهٔ ترازویی به‌جرم $۰/۵\ kg$ به‌فنرحلقه‌ای سبکی آویزان است و موجب افزایش طولی برابر $۵\ cm$ درآن شده است. سپس وزنه‌ای به‌جرم $۱\ kg$ در کفه قرارمی‌دهیم و آن را رها می‌کنیم. تعیین کنید کفه تا چه اندازه پایین می‌رود و کشش فنر، هنگامی که کفه در پایینترین نقطه است چقدر است؟ نیز زمان تناوب حرکت را پیدا کنید.

۱۷ـ وزنه‌ای به‌جرم $۲/۵\ kg$ به‌حال سکون به‌فنری سبك آویزان است افزایش طولی برابر $۵\ cm$ درآن ایجاد می‌کند. وزنهٔ دیگری به‌جرم $۱/۵\ kg$ به‌وزنهٔ اول‌طوری متصل می‌شود که آن را به حرکت درنمی‌آورد. سپس دو وزنه با هم رها می‌شوند. دامنه، زمان تناوب، و ماکزیمم تندی حرکت حاصل را تعیین کنید.

۱۸ـ وزنه‌ای به‌جرم $۵\ kg$ به‌وسیلهٔ نخ کشسانی آویزان است و هنگامی که وزنه به‌حالت سکون آویزان است افزایش‌طول نخ برابر $۵\ cm$ است. اگر انتهای بالایی ناگهان تا $۲/۵\ cm$ به طرف بالا کشیده شود و سپس ثابت گردد، بیشترین تندیی که وزنه به‌دست می‌آورد و زمان تناوب نوسان حاصل را تعیین کنید.

۱۹ـ فنری به‌طول $۲۵\ cm$ طوری است که اگر وزنهٔ یك کیلوگرمی به‌آن آویزان شود طول آن دوبرابر می‌شود. به‌انتهای پایینی این فنر کفه‌ای به‌جرم ۱۰۰ گرم بسته شده است و انتهای بالایی فنر به‌نقطه‌ای ثابت متصل است. ثابت کنید که اگروزنه ازحالت تعادل به‌طرف پایین کشیده شود و سپس رها شود نوسانهای تناوبی ساده خواهدکرد. زمان تناوب این نوسانها را پیدا کنید. همچنین ثابت کنید که اگر دامنهٔ کل نوسانها از $۵\ cm$ تجاوز کند و نقطهٔ مادی کوچکی را درکفه قرار داده باشیم، آن نقطهٔ مادی درتمام مدت نوسان درتماس باکفه باقی‌نخواهد ماند بلکه به‌تناوب ازآن جدا می‌شود.

۲۰ـ نخی کشسان میان دونقطهٔ A و B که برمیز افقی‌صیقلی قرار دارندکشیده شده است و به‌نقطهٔ وسط آن وزنه‌ای متصل است. اگر نقطهٔ مادی، مسافت کمی در امتداد عمود بر AB جابه‌جا شود، و سپس رها شود، نشان دهید که حرکت بعدی آن تناوبی ساده است. (تغییرمکان آن قدرکم است که کشش نخ ثابت فرض می‌شود.) اگر $AB = ۲/۷\ m$، کشش نخ دوبرابر وزن نقطهٔ مادی، و تغییرمکان اولیه برابر $۱/۲\ cm$ باشد، زمان تناوب و ماکزیمم تندی نقطهٔ مادی را حساب کنید.

۲۱- نقطهٔ مادی P به‌جرم m به‌وسط نخ کشسان AB، کـه طول کشیده نشدهٔ آن $۲a$ و ضریب کشسانی آن برابروزن نقطهٔ مادی‌است، بسته شده است. A و B به‌نقطه‌های ثابتی که برمیزی افقی صیقلی به‌فاصلهٔ $۳a$ از یکدیگر واقعند، متصل شده‌اند. AP درآغـاز برابر $۲a$ و PB برابر a است. ثـابت کنید که وقتی کـه P رهـا می‌شود نوسانهای تناوبی ساده‌ای انجام خواهد داد که زمان تناوب آن $۲\pi\sqrt{a/۲g}$ ودامنهٔ حرکت آن a است.

۲۲- وزنه‌ای به جرم m، به وسیلهٔ فنرسبکی که از قانون هوك پیروی می کند، از نقطهٔ ثابتی آویزان است. به‌وزنه تغییرمکان کوچکی داده می‌شود. عدهٔ نوسانهای حرکت تناوبی‌حاصل درهرثانیه برابر n است. اگرطول فنرهنگامی که دستگاه درحالت‌تعادل است، برابر l باشد، طول طبیعی فنررا پیداکنید ونشان دهیدکه وقتی که طول فنر دوبرابرطول طبیعی آن می‌شود، کشش برابر $m(۴\pi^۲n^۲l-g)$ است.

۲۳- نخ نازك کشسان OAB، که ضریب کشسانی آن λ وطول کشیده نشدهٔ آن a است، ازیك انتها به‌نقطهٔ O ثابت شده‌است؛ انتهای دیگر آن درA ازشیارقرقره‌ای‌صیقلی گذشته است، به‌طوری که $OA=a$. نقطه‌ای مادی به‌جرم m به حالت تعادل در نقطهٔ B آویزان است. نشان دهیدکه اگر ضربـهٔ افقی I برنقطهٔ مادی وارد شود، نقطهٔ مادی درامتداد خط افقی با حرکت تناوبی ساده و با دامنهٔ $I\sqrt{a/\lambda m}$ شروع به‌حرکت خواهدکرد.

۲۴- به‌فنری حلقه‌ای کفه‌ای به‌جرم ۰/۵ kg آویزان است. وقتی که وزنه‌ای بـه جرم ۲/۵ kg به‌این کفه می‌افزاییم برطول فنر ۵ cm افزوده می‌شود. کفه و وزنهٔ آن‌را ۵ cm دیگرپایین می کشیم ورها می کنیم. تاچه فاصله‌ای بالاخواهد رفت وبیشترین تندیی که به‌دست می‌آورد چقدر است؟

۲۵- دامنهٔ حرکت تناوبی ساده‌ای a وبیشترین سرعت آن V است. زمان یك نـوسان و نیزشتاب حرکت درفاصلهٔ b ازمرکزحرکت را تعیین کنید.

جسمی بر روی میزی افقی قراردارد وبه‌طورقائم حرکت تناوبی ساده‌ای بـا دامنهٔ ۵ cm انجام می‌دهد. زمان تناوب آن یك ثانیه است. بیشترین وکمترین فشاری‌را که جسم برمیز وارد می کند تعیین کنید.

۸. ۱۱. آونگ ساده

آونگ ساده ازنقطهٔ مادی سنگینی که به وسیلهٔ نخ بی‌وزنی به نقطه‌ای ثـابت متصل شده است تشکیل یافته است و درصفحه‌ای قائم نوسان می کند. بنابراین حالتی ازحرکت دریك

دایرهٔ قائم است، اما اکنون حرکتی راکه درآن تغییرمکان نسبت به‌خط قائم خیلی کوچك است به‌طورتفصیل درنظرمی‌گیریم.

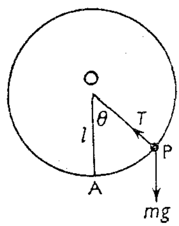
فرض می‌کنیم O (شکل ۸-۹) نقطهٔ آویز، OA وضع قـائم نخ، l طـول نخ، m جرم نقطهٔ مادی باشد.

اگرPوضع تغییرمکان یافته‌ای از نقطهٔ مادی باشد، به‌طوری‌که زاویهٔ $\theta = AOP$ خیلی‌کوچك باشد، نیرویی‌که مایل است m را بـه A برگردانـد درامتداد دایـره برابـر $mg \sin\theta$ است.

بنابراین شتاب P درامتداد دایره به‌طرف A برابراست با

$$g \sin\theta = g\theta \qquad \text{تقریباً}$$

(که θ برحسب رادیان اندازه‌گیری می‌شود وبسیارکوچك است).



شکل ۸-۹

دراین حالت شتاب P درامتداد دایره به‌طرف A برابراست با

$$\frac{g}{l}s$$

که s طول قوس AP است.

بنابراین شتاب درامتداد دایره مستقیماً متناسب بـا تغییرمکانـی است‌کـه درامتداد دایره ازنقطهٔ A، وضع تعادل، اندازه‌گیری شده است.

از این‌رو، حرکت تقریباً تناوبی ساده است کـه حول نقطهٔ A صورت می‌گیرد، و زمان تناوب نوسان‌کامل برابراست با

$$۲\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

باید به‌یاد داشت‌که این رابطه، هنگامی‌که θ به‌قدری‌کوچك باشدکـه بتوان $\sin\theta$

را برابر θ گرفت با تقریب خوبی درست است. با استفاده ازجدولهای مثلثاتی، خـوانـنده می‌تواند تحقیق کند که وقتی که $\theta = 10^\circ$ است، $\frac{\sin\theta}{\theta}$ درحدود ۰/۵ درصد با واحد تفاوت دارد.

۸.۱۲. آونگ ثانیه‌ای

زمان تناوب $2\pi\sqrt{l/g}$ زمان یك نوسان کامل رفت و برگشت است.

آونگ ثانیه‌ای آونگی است که درآن ازیك حالت سکون تا سکون بعدی (یعنی نیم نوسان کامل) یك ثانیه طول بکشد.

بنابراین زمان تناوب آونگ ثانیه‌ای برابر ۲ ثانیه است.

اگر l طول آونگ ثانیه‌ای باشد،

$$1 = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$\therefore \qquad l = \frac{g}{\pi^2}$$

واحد l بستگی به‌واحد g دارد.

اگر $g = 981\ \mathrm{cm/s^2}$ اختیار شود و $\pi = \frac{22}{7}$ فرض شود،

$$l = 99/3\ \mathrm{cm}$$

۸.۱۳. چون زمان نوسان آونگی به‌طول معلوم بستگی بـه‌مقدار g دارد، این زمان در جاهای مختلف تفاوت می‌کند، و با ارتفاع یا عمق ازسطح زمین نیزتغییرمی‌کند.

اگرتمام آونگ تحت اثرشتاب دیگری بـاشد، مثلا آونگ دریك آسانسورمتحرك، یا قطاری که درمسیر خود پیچ می‌زند قرارداشته بـاشد، شتاب ظاهـری g تغییر می‌کند و بنابراین زمان تناوب تغییرمی‌کند.

اگر زمان تناوب آونگی T ثانیه وعدهٔ نـوسانهای آن در هرثانیه n باشد، $n = \frac{1}{T}$ است.

آونگ ثانیه‌ای باید در هر روز ۸۶۴۰۰ ضربه بزند، و زمان نیم نـوسان کامل آن $\frac{86400}{86400}\mathrm{s}$ است.

اگر آونگ x ثانیه در هرروز جلو برود، زمان نیم نوسان کامل آن برابراست با

$$\frac{۸۶۴۰۰}{۸۶۴۰۰+x}\text{s}$$

اگر درهر روز x ثـانیه عقب برود زمان نیم نوسان $\frac{۸۶۴۰۰}{(۸۶۴۰۰-x)}\text{s}$ است.

این‌عبارتها درمسئله‌هایی مفید واقع می‌شوندکـه درآن تعیین‌عدهٔ ثانیه‌هایی‌که یك آونگ ثانیه‌ای عقب یا جلو می‌رود مورد نظراست.

مثالهای زیر، تغییرهایی راکه در زمان تناوب بر اثر علتهای مختلف فراهم می‌شود روشن می‌کند.

مثال ۱: طول آونگی راکه درست ثانیه را می‌زند به‌اندازهٔ $\frac{۱}{۱۰۰}$ طولش اضافه می‌کنیم. این آونگ چند ثانیه در روزعقب می‌افتد؟

حل : اگر l طول آونگی باشدکه ثانیه را می‌زند، طول جدید آونگ $\frac{۱۰۱}{۱۰۰}l$ است. اگر x عدهٔ ثانیه‌هایی باشدکه در روزعقب می‌افتد می‌توان نوشت،

$$\frac{۸۶۴۰۰}{۸۶۴۰۰}=\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

و

$$\frac{۸۶۴۰۰}{۸۶۴۰۰-x}=\pi\sqrt{\frac{۱۰۱\,l}{۱۰۰\,g}}$$

ازتقسیم این دو رابطه بریکدیگر،

$$\frac{۸۶۴۰۰-x}{۸۶۴۰۰}=\sqrt{\frac{۱۰۰}{۱۰۱}}$$

ازطرفی با محاسبه‌های تقریبی،

$$\sqrt{\frac{۱۰۰}{۱۰۱}}=\left(۱+\frac{۱}{۱۰۰}\right)^{-\frac{۱}{۲}}=۱-\frac{۱}{۲۰۰}\ \text{تقریباً}$$

پس

$$\therefore\quad \frac{۸۶۴۰۰-x}{۸۶۴۰۰}=۱-\frac{۱}{۲۰۰}$$

$$\therefore\quad \frac{x}{۸۶۴۰۰}=\frac{۱}{۲۰۰}$$

تقریباً

$$\therefore\quad x=۴۳۲\,\text{s}$$

مثال ۲: آونگی‌که ثانیه را می‌زند دریك محل $10\,s$ درروز جلو می‌رود و درمحلی‌دیگر $10\,s$ در روزعقب می‌افتد. g این دومحل را باهم مقایسه کنید.

حل : فرض می‌کنیم l طول آونگی باشد که ثانیه را می‌زند و g_1 و g_2 مقدار g در محلهای مورد نظر باشد. پس،

$$\frac{86400}{86410}=\pi\sqrt{\frac{l}{g_1}}$$

$$\frac{86400}{86390}=\pi\sqrt{\frac{l}{g_2}}$$

$$\therefore \qquad \sqrt{\frac{g_1}{g_2}}=\frac{86410}{86390}=1+\frac{2}{8639}$$

$$\therefore \qquad \frac{g_1}{g_2}=\left(1+\frac{2}{8639}\right)^2=1+\frac{4}{8639} \quad \text{تقریباً}$$

$$=\frac{8643}{8639}=1{,}0005$$

مثال ۳: آونگی‌که درست‌ثانیه را می‌زند درآسانسوری قرارمی‌گیردکه باشتاب‌یکنواخت $0{,}3\,m/s^2$ پایین می‌آید. نشان دهیدکه این آونگ در هرساعت بیش از $55\,s$ جلو می‌افتد.

حل : شتاب‌آسانسور به‌طرف بالا زیادتر از g و برابر است با $(9{,}8+0{,}3)m/s^2$. پس اگر x عدهٔ ثانیه‌هایی باشدکه درهرساعت جلو می‌افتد،

$$\frac{3600}{3600}=\pi\sqrt{\frac{l}{9{,}8}}$$

$$\text{و} \qquad \frac{3600}{3600+x}=\pi\sqrt{\frac{l}{9{,}8+0{,}3}}$$

$$\therefore \qquad 1+\frac{x}{3600}=\sqrt{\frac{10{,}1}{9{,}8}}=\left(1+\frac{3}{98}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{تقریباً}$$

$$=1+\frac{3}{196} \quad \text{تقریباً}$$

$$\therefore \qquad \frac{x}{۳۶۰۰}=\frac{۳}{۱۹۶}$$

$$\therefore \qquad x=۵۵/۱\,\mathrm{s}$$

بنابراین آونگ درهرساعت بیش از ۵۵ s جلومی‌افتد.

مثال ۴: آونگ ثانیه شماری درته معدنی به‌عمق ۰/۸ km، ۱۰ ثانیه درهر روزعقب می‌افتد. نشان دهید که در بالای کوهی به ارتفاع ۰/۸ km تقریباً ۱۵/۴ ثانیه عقب می‌افتد. شعاع زمین را ۶۴۰۰ کیلومترفرض کنید. [درداخل زمین‌وزن یك جسم‌متناسب بافاصلهٔ آن ازمرکززمین ودرخارج اززمین وزن یك جسم متناسب با مجذور فاصلهٔ آن از مرکز زمین است.]

حل : فرض می‌کنیم که $g_۱$ ، g و $g_۲$ به‌ترتیب مقادیرشتاب جاذبه در ته معدن، سطح زمین وقلهٔ‌کوه باشند. پس

$$\frac{g_۱}{g}=\frac{۶۴۰۰-۰/۸}{۶۴۰۰} \quad \text{و} \quad \frac{g_۲}{g}=\frac{۶۴۰۰^۲}{(۶۴۰۰+۰/۸)^۲}$$

$$\therefore \qquad \frac{g_۲}{g_۱}=\frac{۶۴۰۰^۳}{(۶۴۰۰+۰/۸)^۲(۶۴۰۰-۰/۸)}$$

$$=\frac{۱}{\left(۱+\frac{۱}{۸۰۰۰}\right)^۲\left(۱-\frac{۱}{۸۰۰۰}\right)}$$

$$=\left(۱+\frac{۱}{۸۰۰۰}\right)^{-۲}\left(۱-\frac{۱}{۸۰۰۰}\right)^{-۱}$$

نیز
$$\frac{۸۶۴۰۰}{۸۶۳۹۰}=\pi\sqrt{\frac{l}{g_۱}} \quad \text{و} \quad \frac{۸۶۴۰۰}{۸۶۴۰۰-x}=\pi\sqrt{\frac{l}{g_۲}}$$

فرض کردیم که آونگ، x ثانیه درهرروز درقلهٔ‌کوه عقب بیافتد، پس

$$\frac{۸۶۴۰۰-x}{۸۶۳۹۰}=\sqrt{\frac{g_۲}{g_۱}}=\left(۱+\frac{۱}{۸۰۰۰}\right)^{-۱}\left(۱-\frac{۱}{۸۰۰۰}\right)^{-\frac{۱}{۲}}$$

$$=\left(۱-\frac{۱}{۸۰۰۰}\right)\left(۱+\frac{۱}{۱۶۰۰۰}\right)$$

$$=۱-\frac{۱}{۱۶۰۰۰} \qquad \text{تقریباً}$$

$$\therefore \quad ۸۶۴۰۰ - x = ۸۶۳۹۰ - \frac{۸۶۳۹}{۱۶۰۰}$$

$$= ۸۶۳۹۰ - ۵/۴$$

$$\therefore \quad x = ۱۰ + ۵/۴ = ۱۵/۴\,\mathrm{s}$$

تمرین ۸۰ ۳

۱ـ درمکانی‌که شتاب جاذبه $۹/۸\,\mathrm{m/s^2}$ است آونگی درست ثانیه را می‌زند. اگـر این آونگ به‌مکانی برده شود که شتاب جاذبه درآن مکان $۹/۸۶\,\mathrm{m/s^2}$ باشد، آیا جلو خواهد افتاد یا عقب؟ وچند ثانیه در۲۴ ساعت؟

۲ـ طول آونگ ثانیه شمار را درمحلی‌که $g = ۹۸۱\,\mathrm{cm/s^2}$ است پیداکنید. اگر آونگ ساعت درهرهفته ۹ دقیقه عقب بیافتد، چند میلیمتر باید طول آن را تغییرداد تاساعت درست کار کند؟

۳ـ یك ساعت دیواری درهرروز x ثانیه عقب می‌افتد. ثابت‌کنید که برای آنکه ساعت درست کارکند باید طول آونگ ساعت را $\frac{x}{۴۳۲}$ درصدکوتاهتر کرد.

۴ـ درمکانی‌که $g = ۹/۸\,\mathrm{m/s^2}$ است، یك ساعت دیواری درست‌کارمی‌کند. اگر ایـن ساعت را به‌جایی ببریم که درآنجا $g = ۹/۹\,\mathrm{m/s^2}$ باشد، درهر روزچند ثانیه جلو یا عقب خواهد افتاد؟

۵ـ درمکانی که $g = ۹/۸۵\,\mathrm{m/s^2}$ است، یك ساعت دیواری درست‌کار می‌کند. بـرای اینکه این ساعت درمکانی‌که $g = ۹/۸\,\mathrm{m/s^2}$ است درست کارکند، باید طول آن‌را چند درصد تغییرداد؟

۶ـ درآسانسوری‌که با شتاب $۰/۶\,\mathrm{m/s^2}$ پایین می‌آید ساعتی‌دیواری نصب شده‌است. این ساعت به‌نسبت چند ثانیه درهرساعت عقب خواهد افتاد؟

۷ـ آونگ ساعتی در هر روز ۲۰ ثانیه جلومی‌افتد. تعیین‌کنید درطول آونگ چه تغییری باید داد تاساعت درست کار کند.
درچه ارتفاعی از سطح زمین آونگ نادرست مذکور درست‌کار خـواهدکرد؟ (شعاع زمین $۶۴۰۰\,\mathrm{km}$ است، نیروی جاذبه با مربع فاصله ازمـرکز زمین نسبت معکوس دارد.)

۸ـ آونگی‌که درسطح زمین $۱۰\,\mathrm{s}$ در روزجلومی‌افتد، وقتی‌که به ته معدنی برده می‌شود $۱۰\,\mathrm{s}$ درروزعقب می‌افتد. شتاب ناشی ازجاذبهٔ زمین را دربالا وپایین معدن مقایسه

کنید و عمق معدن را پیدا کنید.

۹ ـ ثابت کنید که اگر آونگی درهرثانیه n بار ازیك حالت سکون بـه‌حالت سکون بعدی برود، دراین صورت $g=n^2\pi^2 l$ است که l طول آونگ است.

در واحدهای قدیمی فرانسه، طول آونگی (که درآن ۱ $=n$ است) درپاریس ۳/۰۶ پای فرانسوی بوده است. اندازهٔ g را با این واحد پیدا کنید.

۱۰ـ آونگ ساده‌ای که نوسانهای کوچکی انجام می‌دهد به‌اندازهٔ $\alpha°$ نسبت به خط قـائم منحرف شده است. اگر v ماکزیمم سرعت باشد، نشان دهیدکـه زمان تناوب کامل $\frac{360\, v}{g\alpha}$ ثانیه است.

۱۱ـ وزنهٔ آونگی $0/5$ kg جرم دارد وازسقف واگن راه آهنی به‌وسیلهٔ نخی بـه طول ۹۰ cm آویزان است. قطار با سرعت ۷۲ km/h پیچی به‌شعاع انحنای ۸۰۰ m می‌زند. فاصلهٔ وزنهٔ آونگ را ازخط قائمی که از نقطهٔ آویز می‌گذرد تعیین کنید و کشش نخ را به‌دست آورید. نیززمان تقریبی نوسان‌کوچکی را کـه هنگام پیچیدن قطارصورت می‌گیرد تعیین کنید.

۹

دینامیك جسم صلب

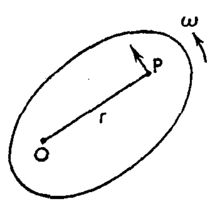
۹.۱. جسم صلب را قبلاً تعریف کرده‌ایم و گفتیم که عبارت ازجسمی است که شکل و اندازهٔ آن تغییرناپذیر است؛ بنابراین فاصله میان هر دو نقطهٔ آن همیشه یکسان است.

وقتی که همهٔ نقطه‌های چنین جسمی درصفحه‌های متوازی حرکت کنند، می‌گویند که این جسم در دو بعد حرکت می‌کند. مانند مکعبی که حول یکی از یالهایش نوسان می‌کند، یا برروی صفحه‌ای افقی، چنان حرکت می‌کندکه همیشه همان وجه با صفحه تماس دارد.

ابتدا حالتی را درنظرمی‌گیریم که درآن، خطی، ازجسم ثابت است و جسم، حول این خط دوران می‌کند، واین خط محوردوران است.

۹.۲. انرژی جنبشی جسمی که حول محوری ثابت دوران می‌کند

فرض می‌کنیم شکل ۹-۱ مقطعی ازجسم است که با تندی زاویه‌ای ω حول محور ثابتی، که از O عمود برصفحهٔ کتاب می‌گذرد، دوران می‌کند.



شکل ۹-۱

نقطه‌ای مادی ازجسم را به‌جرم m در P درنظرمی‌گیریم، به‌طوری که $OP = r$.

تندی P برابراست با $r\omega$، وبنابراین انرژی جنبشی نقطهٔ مادی m برابراست با $\frac{1}{2}mr^2\omega^2$.

انرژی جنبشی همهٔ جسم برابراست بامجموع انرژیهای جنبشی همهٔ نقطه‌های مادی جسم، یعنی برابراست با $\sum\frac{1}{2}mr^2\omega^2$، که $\sum$ علامت جمع کردن است. دراین جمع کردن

همهٔ نقطه‌های مادی جسم مورد نظرهستند، چه آنهایی که درشکل نشان داده شده‌اند وچه آنهایی که درجسم درصفحه‌های متوازی باشکل قراردارند. مقدار r برای هر نقطهٔ مادی عبارت است ازفاصلهٔ عمودی آن ازمحور دوران.

اما ω برای همهٔ نقاط مادی جسم یکسان است.

$$\therefore \qquad \sum\frac{1}{2}mr^2\omega^2=\frac{1}{2}\omega^2\sum mr^2$$

مقدار $\sum mr^2$ اهمیت بسیارزیاد دارد، و درهمهٔ مسئله‌هایی که شامل دوران جسم صلب است مطرح می‌شود. آن را گشتاور اینرسی[۱] جسم حول محوری می‌نامندکه $\sum$ نسبت به‌آن محورسنجیده شده است وعموماً آن را باحرف I نمایش می‌دهند.

پس گشتاور اینرسی یك جسم حول یك محور، باضرب کردن جرم هرنقطهٔ مادی از آن جسم درمربع فاصلهٔ آن نقطهٔ مادی ازمحور وسپس با جمع کردن نتیجه‌های آن دربارهٔ همهٔ نقطه‌های مادی آن جسم، به‌دست می‌آید.

اگرجسم ازعدهٔ معینی ازنقطه‌های مادی تشکیل شده باشد، مقدار $\sum mr^2$ باروش معمولی جمع به‌دست می‌آید. درحالتی که جسم صلب از عدهٔ نامعین و بینهایت زیادی نقطه‌های مادی تشکیل شده باشد، حاصل جمع به‌طریقهٔ انتگرال گیری به‌دست می‌آید.

اگرجسمی باتندی زاویه‌ای ω حول محورثابتی دوران کند، و گشتاور اینرسی آن حول محوربرابر I باشد، انرژی جنبشی جسم برابراست با:

$$\frac{1}{2}I\,\omega^2$$

این عبارت بامقدار $\frac{1}{2}mv^2$ که درمورد یك نقطهٔ مادی است، تطبیق می‌کند، که در آن، گشتاور اینرسی I جای جرم m، وتندی زاویه‌ای ω جای تندی خطی v راگرفته‌است.

۹. ۳. اگرجرم کل جسم برابر M باشد وفرض شود که همهٔ آن، درنقطه‌ای به‌فاصلهٔ k ازمحور متمرکزشده است، به‌طوری که Mk^2 دارای همان مقداری باشدکه گشتاوراینرسی جسم، حول این محور دارد، یعنی $Mk^2=\sum mr^2$ ، دراین‌صورت k را شعاع ژیراسیون حول این محورمی‌نامند.

شکل Mk^2 شبیه شکلی است که گشتاورهای اینرسی معمولا به آن صورت نوشته می‌شوند. برای یك جسم معین، M برای همهٔ محورها یکسان است، اما مقدار k برای محورهای مختلف متفاوت است. اگر M برحسب کیلوگرم و k برحسب مترباشد، گشتاور

اینرسی برحسب واحد $\mathrm{kgm}^۲$ سنجیده می‌شود.

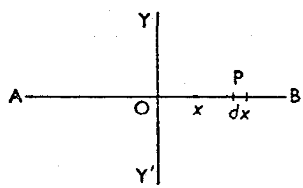
۹. ۴. گشتاور اینرسی میلهٔ یکنواخت نازکی، حول محوری که ازمرکزآن و عمود بر میله می‌گذرد

فرض می‌کنیم AB (شکل ۹-۲) نشان دهندهٔ میله، $۲a$ طول آن، O نقطهٔ وسط آن، و m جرم واحد طول میله باشد.

جرم جزئی از میله به‌طول $\mathrm{d}x$ در P برابراست با $m\mathrm{d}x$، و اگر $\mathrm{OP} = x$ باشد، گشتاوراینرسی آن جزء حول $\mathrm{YY'}$ برابراست با $mx^۲\mathrm{d}x$.

برای به‌دست آوردن گشتاور اینرسی همهٔ میله باید این‌عبارت را برای تمام طول میله جمع کنیم. یعنی باید مقدارانتگرال زیر را تخمین بزنیم.

$$\int_{-a}^{+a} mx^۲\mathrm{d}x$$



شکل ۹-۲

اما m مقداری است ثابت و $\int x^۲\mathrm{d}x$ برابر $\frac{۱}{۳}x^۳$ است.

$$\therefore \qquad \int_{-a}^{+a} mx^۲\mathrm{d}x = m\left[\frac{x^۳}{۳}\right]_{-a}^{+a} = \frac{۲}{۳}ma^۳$$

نیزاگر جرم میله برابر M باشد، $M = ۲am$.

بنابراین گشتاور اینرسی حول $\mathrm{YY'}$ برابر است با $\dfrac{Ma^۲}{۳}$

اگر محور عمود بریکی ازدوانتهای میله باشد، باید انتگرال عبارت $mx^۲\mathrm{d}x$ میان ۰ و $۲a$ حساب شود، زیرا دراین مورد x ازآن انتهای میله اندازه گیری می‌شود، در این صورت:

$$\int_{۰}^{۲a} mx^۲\mathrm{d}x = m\left[\frac{x^۳}{۳}\right]_{۰}^{۲a} = m\frac{۸a^۳}{۳} = M\frac{۴a^۲}{۳}$$

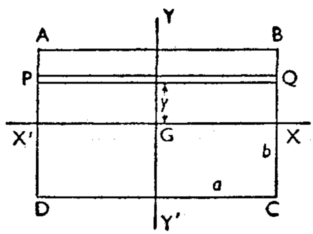
این گشتاور اینرسی میله حول محوری است که ازیکی از دو انتهای میله وعمود بر میله می‌گذرد.

گشتاوراینرسی میله حول‌محوری‌که به موازات طول میله و به‌فاصلهٔ p ازمیله است برابراست با $Mp^{۲}$، زیرا فاصلهٔ همهٔ نقطه‌های میله ازاین محوربرابر p است.

۹.۵. گشتاور اینرسی تیغهٔ مستطیل شکل یکنواخت حول محوری که از مرکزآن به موازات یکی ازاضلاع آن می‌گذرد

فرض می‌کنیم $ABCD$ (شکل ۹-۳) مستطیل، $AB = ۲a$، $BC = ۲b$ و G مرکز مستطیل باشد.

برای به‌دست آوردن گشتاور اینرسی حول XX'، موازی AB، مستطیل را به نوارهای باریکی مانند PQ به‌موازات XX' تقسیم می‌کنیم.



شکل ۹-۳

فرض می‌کنیم PQ به‌فاصلهٔ y از XX' است وعرض نوار برابر δy است.

بنابراین جرم نوار برابر $M\dfrac{\delta y}{۲b}$ است، که درآن M جرم کل مستطیل است که بنا به فرض، مستطیل یکنواخت است.

بنابراین گشتاور اینرسی نوارحول XX' برابراست با

$$M\frac{\delta y}{۲b}y^{۲}$$

زیرا نوار به‌موازات XX' است.

بنابراین گشتاور اینرسی مستطیل حول XX' برابراست با

$$\int_{-b}^{+b}\frac{M}{۲b}y^{۲}dy=\frac{M}{۲b}\left[\frac{y^{۳}}{۳}\right]_{-b}^{+b}=\frac{۱}{۳}Mb^{۲}$$

به همین ترتیب می‌توان نشان داد که گشتاور اینرسی حول YY' موازی BC برابر است با

$$\frac{۱}{۳}Ma^{۲}$$

۹. ۶. گشتاور اینرسی حلقه‌ای مدور حول محوری که ازمرکز حلقه و عمود بر صفحهٔ حلقه می‌گذرد

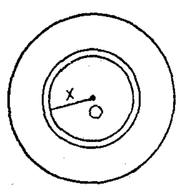
فرض می‌کنیم شعاع حلقه برابر a باشد. چون هرنقطهٔ مادی ازحلقه به‌فاصلهٔ a از محور است،

$$\sum mr^{۲} = \sum ma^{۲} = a^{۲}\sum m$$
$$= Ma^{۲}$$

که درآن M جرم حلقه است.

۹. ۷. گشتاور اینرسی قرص مدور یکنواخت حول محوری که ازمرکز قرص‌وعمود بر صفحهٔ قرص می‌گذرد

فرض می‌کنیم O (شکل ۹-۴) مرکز قرص، a شعاع و m جرم واحد سطح باشد، که ثابت فرض می‌شود.



شکل ۹-۴

قرص را به‌حلقه‌های متحدالمرکزی به‌ضخامت dx تقسیم می‌کنیم.

جرم حلقه‌ای به‌شعاع x برابر $۲\pi mx\,dx$، و گشتاور اینرسی آن، حول محوری که ازمرکز آن وعمود برصفحهٔ آن می‌گذرد، برابراست با $۲\pi mx^{۳}dx$.

گشتاور اینرسی تمام قرص‌را می‌توان با انتگرال‌گیری ازاین عبارت، وتعیین‌مقدار آن میان حدود ۰ و a به‌دست آورد.

اما $$\int_{۰}^{a} ۲\pi mx^{۳}dx = ۲\pi m\left[\frac{x^{۴}}{۴}\right]_{۰}^{a} = \frac{۲\pi ma^{۴}}{۴} = \frac{\pi ma^{۴}}{۲}$$

واگر M جرم قرص باشد،

$$\pi m a^{2} = M$$

بنابراین گشتاور اینرسی قرص حول محورش برابراست با $\frac{1}{2}Ma^{2}$.

گشتاور اینرسی استوانه‌ای یکنواخت حول محورش، به‌همین شکل‌است، مثلاً اگر M جرم استوانه و a شعاع آن باشد، گشتاور اینرسی برابراست با $M\left(\frac{a^{2}}{2}\right)$. زیرا اگر استوانه را به‌قرصهای نازك متعددی عمود برمحور تقسیم‌کنیم، گشتاور اینرسی هرقرص برابر است باجرم آن ضرب در $\frac{1}{2}a^{2}$. بنابراین گشتاور اینرسی استوانه که برابر مجموع گشتاورهای اینرسی این قرصهاست برابر بامجموع جرمها در $\frac{1}{2}a^{2}$ خواهدبود.

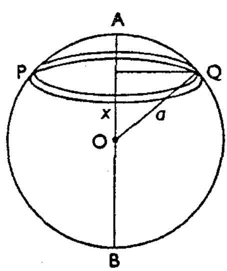
۹. ۸. گشتاور اینرسی کرهٔ توپرحول یکی ازقطرهای آن

فرض می‌کنیم O (شکل ۹-۵) مرکزکره، a شعاع، m جرم واحد حجم، و AB یکی از قطرها باشد.

کره را به‌قرصهای مدورنازکی به‌ضخامت dx وعمود برAB تقسیم می‌کنیم.

حجم قرص PQ، که به فاصلهٔ x از O است، برابر است با $\pi(a^{2}-x^{2})dx$، و گشتاور اینرسی آن حول AB برابراست با

$$\frac{1}{2}\pi m(a^{2}-x^{2})^{2}dx$$



شکل ۹-۵

گشتاور اینرسی تمام‌کره برابراست بامقدارانتگرال فوق میان حدود $-a$ و $+a$، اما چون مسلماً انتگرال نیمهٔ بالایی ونیمهٔ پایینی بایکدیگر برابرند، می‌توان مقدار

انتگرال را میان حدود ۰ و a تعیین وسپس حاصل را دو برابر کرد.

$$۲\frac{\pi m}{۲}\int_{۰}^{a}(a^{۲}-x^{۲})^{۲}\mathrm{d}x=\pi m\int_{۰}^{a}(a^{۴}-۲a^{۲}x^{۲}+x^{۴})\mathrm{d}x$$
$$=\pi m\left[a^{۴}x-\frac{۲}{۳}a^{۲}x^{۳}+\frac{۱}{۵}x^{۵}\right]_{۰}^{a}$$
$$=\pi m\frac{۸}{۱۵}a^{۵}$$

اما اگر M جرم کره باشد، به‌شرطی که m ثابت باشد $M=\frac{۴}{۳}\pi a^{۳}m$،
بنابراین گشتاور اینرسی حول قطر برابر است با $\frac{۲}{۵}Ma^{۲}$.

۹.۹ اکنون به‌اثبات دوقضیه می‌پردازیم که برای محاسبهٔ گشتاورهای اینرسی جسم حول سایرمحورها، هنگامی که گشتاورهای اینرسی جسم را حول‌محورهای استاندهٔ معینی می‌دانیم، بسیارمفید است. به‌این ترتیب ازعدهٔ زیادی انتگرال گیری اجتناب خواهد شد.

۹.۱۰. قضیهٔ محورهای متوازی

اگرگشتاور اینرسی یك جسم، به جرم M، حول محوری‌که ازمرکز جرم جسم می‌گذرد I باشد، گشتاور اینرسی حول محوری موازی با محور اول‌که به‌فاصلهٔ d ازآن است برابر $I+Md^{۲}$ است.

فرض می‌کنیم شکل ۹ـ۶ مقطعی ازجسم باشد‌که از مرکز جرم G آن می‌گذرد، و فرض می‌کنیم که گشتاور اینرسی حول محوری که ازG می‌گذرد وعمود برصفحهٔ کتاب است برابر I باشد. می‌خواهیم گشتاور اینرسی را حول محوری موازی با محور اول که از O می‌گذرد تعیین کنیم، به‌طوری که $\mathrm{GO}=d$ است.

فرض می‌کنیم P نقطه‌ای مادی بـه جرم m از جسم بـاشد، و $\mathrm{GP}=r$ و زاویـهٔ $\mathrm{OGP}=\theta$ باشد.

گشتاور اینرسی حول محوری‌که از O می‌گذرد برابر است با

$$\sum m\times \mathrm{OP}^{۲}=\sum m(r^{۲}+d^{۲}-۲dr\cos\theta)$$
$$=\sum mr^{۲}+\sum md^{۲}-۲d\sum mr\cos\theta$$

اما $\sum mr^{۲}=I$ و $\sum md^{۲}=Md^{۲}$ و $\sum mr\cos\theta=۰$ است.

نتیجهٔ اخیر ازفرمولهایی به‌دست می‌آید که برای تعیین مرکز جرم یك جسم به‌کار

می‌روند[1]. فاصلهٔ مرکزجرم ازصفحه‌ای‌که از G عمود بر GO می‌گذرد برابر است با $\frac{\sum mr\cos\theta}{\sum m}$ وچون G مرکز جرم است، این مقدار باید صفر باشد. بنابراین $\sum mr\cos\theta$ برابر صفر است.

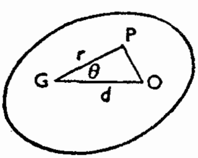
پس گشتاور اینرسی حول‌محوری موازی‌که از O می‌گذرد برابر $I+Md^2$ است.

مثلاً گشتاور اینرسی میلهٔ نازکی به‌طول $2a$ حول محوری‌که ازمرکز آن و عمود بر میله می‌گذرد برابر $\frac{1}{3}Ma^2$ است.

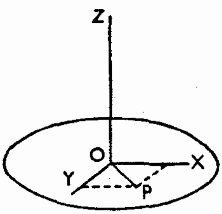
پس گشتاور اینرسی حول محوری‌که ازیك انتهای میله وعمود برآن می‌گذرد برابر است با

$$\frac{1}{3}Ma^2+Ma^2=M\frac{4a^2}{3}$$

این همان نتیجه است که به‌طریق انتگرال گیری دربند ۴.۹ به‌دست آوردیم.



شکل ۹-۶



شکل ۹-۷

۹. ۱۱. قضیهٔ محورهای متعامد

اگرگشتاور اینرسی یك تیغه حول دومحور متعامدکه‌درصفحهٔ تیغه واقعند و در O با یکدیگر متقاطعند برابر A و B باشد،گشتاور اینرسی‌حول محوری‌که ازO عمود برصفحهٔ تیغه می‌گذرد برابر $A+B$ خواهد بود.

فرض می‌کنیم OX و OY (شکل ۹-۷) دومحور متعامد و واقع در صفحهٔ تیغه، و OZ محوری عمود برصفحهٔ تیغه باشند.

اگر m جرم نقطه‌ای مادی ازتیغه در P باشد، به‌طوری‌که $OP=r$ ، گشتاور اینرسی تیغه حول OZ برابر $\sum mr^2$ است.

اما اگر x و y مختصات P دردستگاه محورهای OX و OY باشند،

۱ــ بند ۶.۱۶ را ببینید.

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$\therefore \qquad \sum mr^2 = \sum mx^2 + \sum my^2$$

اما $\sum mx^2$ گشتاور اینرسی حول OY یعنی B و $\sum my^2$ گشتاور اینرسی حول OX یعنی A است؛ بنابراین گشتاور اینرسی‌حول OZ برابر $A+B$ است.

۹. ۱۲. دربند ۹. ۵ ثابت کردیم که گشتاورهای اینرسی یك تیغهٔ مستطیل شکل به‌اضلاع $2a$ و $2b$ حول محورهایی که ازمرکزآن به‌موازات اضلاع $2b$ و $2a$ می‌گذرند، به ترتیب برابر $\frac{1}{3}Ma^2$ و $\frac{1}{3}Mb^2$ است.

ازقضیهٔ بند قبل نتیجه می گیریم که گشتاور اینرسی‌حول محوری که ازمرکزمستطیل وعمود برصفحهٔ آن می گذرد برابراست با

$$M\frac{a^2}{3} + M\frac{b^2}{3} = M\frac{a^2+b^2}{3}$$

از قضیهٔ محورهای متوازی نتیجه می‌شود که گشتاور اینرسی حول یکی ازاضلاع به طول $2a$ برابراست با

$$M\frac{b^2}{3} + Mb^2 = M\frac{4}{3}b^2$$

دربند ۹. ۷ ثابت کردیم که گشتاور اینرسی یك قرص مدورحول محوری که از مرکز آن وعمود برصفحهٔ‌آن می گذرد برابراست با $\frac{1}{2}Ma^2$. اما برطبق‌قضیهٔ بند قبل این‌مقدار برابراست با مجموع گشتاورهای اینرسی حول دوقطرمتعامد. اما گشتاوراینرسی حول همه قطرها یکسان است. پس گشتاور اینرسی حول یك قطرنصف گشتاوراینرسی حول محوری است که عمود برآن وازمرکز قرص می گذرد.

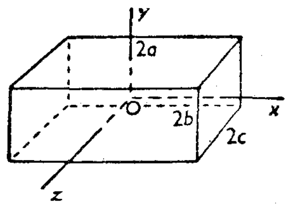
بنابراین گشتاور اینرسی حول یك قطر برابر $\frac{1}{4}Ma^2$ است.

از قضیهٔ محورهای متوازی مشاهده می‌شود که گشتاور اینرسی حول خط مماس‌برابر است با

$$M\frac{a^2}{4} + Ma^2 = M\frac{5a^2}{4}$$

۹. ۱۳. گشتاور اینرسی مکعب مستطیل حول محوری که از مرکز آن و عمود بر یك جفت ازوجوه آن می‌گذرد

فرض می‌کنیم طول اضلاع برابر $2a$ ، $2b$ و $2c$ و محورها Ox ، Oy و Oz مطابق شکل وعمود بروجوه مکعب مستطیل باشند و O مرکزمکعب مستطیل باشد.



شکل ۹-۸

برای پیداکردن گشتاور اینرسی حول Ox ، مکعب مستطیل را به ورقه‌های نازکی عمود براین محورتقسیم می‌کنیم. اضلاع هریك ازاین ورقه‌های مستطیل شکل برابر $2b$ و $2c$ است، وگشتاور اینرسی هرورقه حول Ox برابراست با حاصلضرب جرم در

$$\frac{b^2+c^2}{3}$$

پس گشتاوراینرسی تمام مکعب مستطیل برابراست با

$$M\frac{b^2+c^2}{3}$$

به‌همین طریق برای محور Oz که عمود بروجوهی است که طول اضلاع آن $2a$ و $2b$ است، گشتاور اینرسی برابراست با

$$M\frac{a^2+b^2}{3}$$

اگر مکعب مستطیل به‌شکل مکعبی به ضلع $2a$ باشد، در این صورت $b=c=a$، وگشتاور اینرسی حول هر سه محوری که از مرکز وعمود بریك جفت ازوجوه بگذرد برابر است با

$$M\frac{2a^2}{3}$$

۹. ۱۴. گشتاور اینرسی استوانه‌ای توپرحول قطری ازیك وجه انتهایی

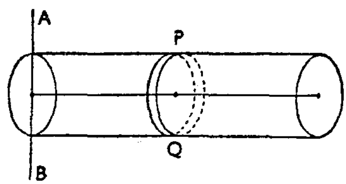
فرض‌می‌کنیم AB (شکل ۹-۹) قطری ازیك وجه انتهایی‌باشد و a شعاع، l طول‌استوانه

و m جرم واحد حجم باشد.

استوانه را به‌ورقه‌های مدوری، مانند PQ، عمود بر محور، تقسیم می‌کنیم به‌طوری که ضخامت هرورقه برابر $\mathrm{d}x$ باشد.

جرم هرورقه $\pi ma^{۲}\mathrm{d}x$ است و گشتاوراینرسی حول قطرخودش که به موازات AB است برابراست با

$$\frac{\pi ma^{۴}}{۴}\mathrm{d}x \text{ یا } \pi ma^{۲}\mathrm{d}x\frac{a^{۲}}{۴}$$



شکل ۹-۹

اگرفاصلهٔ ورقه از AB برابر x باشد، گشتاور اینرسی حول AB (برطبق قضیهٔ محورهای متوازی) برابر است با

$$\frac{۱}{۴}\pi ma^{۴}\mathrm{d}x+(\pi ma^{۲}\mathrm{d}x)x^{۲}$$

پس گشتاور اینرسی تمام استوانه حول AB با تعیین انتگرال این عبارت میان حدود $x=۰$ تا $x=l$ به‌دست می‌آید.

اما $$\int_{۰}^{l}\frac{۱}{۴}ma^{۴}\mathrm{d}x+\int_{۰}^{l}\pi ma^{۲}x^{۲}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{۱}{۴}\pi ma^{۴}l+\frac{۱}{۳}\pi ma^{۲}l^{۳}$$

حجم استوانه برابر $\pi a^{۲}l$ وجرم آن $M=\pi ma^{۲}l$ است، به‌شرط آنکه m ثابت فرض شود.

پس گشتاور اینرسی حول AB برابراست با

$$M\frac{a^{۲}}{۴}+M\frac{l^{۲}}{۳}=M\left(\frac{a^{۲}}{۴}+\frac{l^{۲}}{۳}\right)$$

گشتاور اینرسی‌حول محوری که ازمرکزثقل وعمود برمحورهای استوانه می‌گذرد،

یعنی محوری که موازی AB است برابراست با

$$M\left(\frac{a^2}{4}+\frac{l^2}{3}\right)-M\,\frac{l^2}{4}=M\left(\frac{a^2}{4}+\frac{l^2}{12}\right)$$

تمرین ۹۰۱

۱ ـ گشتاور اینرسی حلقهٔ مدوری به‌جرم M وشعاع a را حـول محوری که ازیك نقطه واقع برحلقه وعمود برسطح حلقه می‌گذرد تعیین کنید.

۲ ـ ثابت کنید که گشتاور اینرسی میله‌ای به‌طول ۲ a حول محوری که میله را با زاویهٔ قائمه و به‌فاصلهٔ b ازمرکزقطع می‌کند برابر $M\left(\frac{1}{3}a^2+b^2\right)$ است که M جرم‌میله است.

۳ ـ گشتاور اینرسی‌تیغه‌ای مربعی‌شکل، به‌جرم M وضلع ۲ a، حول محوری که ازیك گوشه وعمود برصفحهٔ تیغه می‌گذرد چقدراست؟

۴ ـ گشتاور اینرسی‌تیغه‌ای مستطیل‌شکل، به‌جرم M واضلاع ۲ a و$2b$، حول محوری که ازیك گوشه وعمود برصفحهٔ تیغه می‌گذرد چقدر است؟

۵ ـ گشتاوراینرسی حلقه‌ای مدور، به‌جرم M وشعاع a، حول قطرچقدراست؟

۶ ـ ثابت کنید که شعاعهای ژیراسیون قرص‌مدوری به‌شعاع a وحلقهٔ مدوری به‌شعاع a حول خط مماس به‌ترتیب $\frac{\sqrt{5}}{2}a$ و $\frac{\sqrt{6}}{2}a$ است.

۷ ـ ثابت کنید که گشتاور اینرسی تیغه‌ای مربع شکل، به‌جرم M وضلع ۲ a، حـول هر خطی که ازمرکزآن‌درصفحهٔ تیغه بگذرد برابراست با $\frac{1}{3}Ma^2$.

۸ ـ سه میلهٔ یکنواخت‌متساوی به‌طول l وجرم M به‌یکدیگر به‌طورمحکم متصل‌شده‌اند وتشکیل یك مثلث متساوی‌الاضلاع داده‌اند. گشتاوراینرسی میله‌ها را حول‌محوری که ازیك رأس وعمود برصفحهٔ مثلث می‌گذرد تعیین کنید.

۹ ـ ثابت کنید که گشتاوراینرسی مکعبی به‌جرم M ویال ۲ a، حول یکی‌ازیالهایش برابر $\frac{8}{3}Ma^2$ است. .

۱۰ـ ثابت کنید که گشتاور اینرسی مخروطی توپرحول محورش برابر $\frac{3}{10}Ma^2$ است، که M جرم مخروط و a شعاع قاعده است.

۱۱ـ درصفحهٔ مدوریکنواختی، که قطر آن ۱/۵ m است، سوراخی‌به‌قطر ۰/۳ m طوری

تعبیه شده است که مرکز سوراخ در۴۵ سانتیمتری مرکزصفحه است. گشتاوراینرسی صفحه رادردوحالت زیرتعیین کنید: (الف) حول قطری که ازمرکزسوراخ می‌گذرد، (ب) حول قطری که عمود برقطراولی است.

۱۲- سه ورقه مستطیل شکل، اولی ۰/۶ m × ۴ cm، دومی ۰/۹ m × ۴ cm، و سومی ۰/۳ m × ۴ cm، طوری کنارهم چیده شده‌اندکه مجموعهٔ آنها به‌شکل  درآمده است. درازترین وکوتاهترین ورقه قسمتهای بالا وپایین را تشکیل‌داده‌اند. گشتاور اینرسی شکل را حول لبهٔ خارجی کوتاهترین ورقه تعیین کنید.

۱۳- گشتاوراینرسی میلهٔ یکنواخت نازکی‌را حول محوری که ازمرکزمیله می‌گذرد و با میله زاویهٔ θ می‌سازد تعیین کنید.

۱۴- گشتاوراینرسی تیغه‌ای به‌شکل متوازی‌الاضلاع را حول محوری که ازمرکزآن وبه موازات یکی ازاضلاع می‌گذرد تعیین کنید.

۱۵- گشتاوراینرسی تیغهٔ مثلث شکل یکنواختی را درهریك از حالتهای زیرتعیین کنید: (الف) حول محوری که از یکی از رئوس و به موازات ضلع مقابل می‌گذرد، (ب) حول محوری موازی با محورقبلی که ازمرکزجرم مثلث می‌گذرد.

۱۶- نشان دهیدکه گشتاور اینرسی‌تیغه‌ای مستطیل شکل، به‌جرم M واضلاع $۲a$ و$۲b$، حول قطربرابر است با

$$\frac{۲Ma^۲b^۲}{۳(a^۲+b^۲)}$$

۱۷- گشتاور اینرسی کرهٔ توخالی نازکی را حول قطرش تعیین کنید.

۱۸- به‌فرض آنکه گشتاور اینرسی کرهٔ توپریکنواخت حول قطرش برابر $\frac{۲}{۵}Mr^۲$ است، گشتاور اینرسی نیمکرهٔ توپر یکنواخت را حول قطری که دروجه مسطح قرار دارد، استنتاج کنید.

۱۹- گشتاوراینرسی تیغهٔ نیمدایره‌ای یکنواخت را درهریك ازحالتهای زیر تعیین‌کنید: (الف) حول کنارهٔ مستقیم آن، (ب) حول محورتقارن آن.

۲۰- نشان دهیدکه گشتاور اینرسی یك کرهٔ توخالی، که شعاعهای خارجی وداخلی آن به ترتیب a وb است، حول قطرآن برابراست با

$$\frac{۲M}{۵}\times\frac{a^۵-b^۵}{a^۳-b^۳}$$

که M جرم کره است.

۲۱- چرخ‌طیارتوپری به‌قطر ۴۵ cm وضخامت ۱۰ cm به‌انتهای محوری به‌قطر ۱۰cm و طول ۷۰ cm متصل شده است. گشتاور اینرسی چرخ ومحور را حول قطر وجه خارجی چرخ طیار تعیین کنید.

۲۲- نشان دهیدکه گشتاور اینرسی استوانه‌ای توخالی که طول آن h وشعاعهای خارجی و داخلی آن R و r است، حول محوری که ازمرکزآن وعمود برطول آن می‌گذرد برابراست با

$$\frac{۱}{۴}M\left(R^{۲}+r^{۲}+\frac{۱}{۳}h^{۲}\right)$$

۲۳- چکشی از یك قطعه‌آهن به‌شکل مکعب مستطیل تشکیل‌شده است. که ابعاد آن ۱۵ cm × ۵ cm × ۵ cm است.سوراخ گردی به‌قطر ۲/۵ cm عمود بر یکی از وجوه بزرگتر دراین قطعه‌آهن تعبیه شده‌است. میلهٔ سبکی ازچوب به‌طول ۹۰ cm درسوراخ جا گرفته است ودستهٔ چکش را تشکیل داده است. گشتاوراینرسی چکش را حول خطی که ازنقطهٔ وسط انتهای دستهٔ چکش عمود بر محور دستهٔ چکش و به موازات وجه کوچك قطعه آهن رسم می‌شود تعیین کنید. (چگالی آهن را ۷۲۰۰ kg/m^{۳} بگیرید.)

۲۴- گشتاور اینرسی نیمکرهٔ نازك توخالی را در موارد زیرتعیین کنید: (الف) حول شعاعی که ازمرکز ثقل می‌گذرد؛ (ب) حول خطی که ازمرکزثقل و عمود برشعاع مزبورمی‌گذرد.

۲۵- نشان دهید که گشتاور اینرسی یك سهمی دوار حول محورش برابر است با $\frac{۱}{۳}M$ ضرب درمجذور شعاع قاعدهٔ آن.

۹. ۱۵. حرکت یك جسم صلب حول یك محور ثابت

معادلهٔ انرژی. ازاصل انرژی وانطباق آن با حرکت یك جسم صلب حول یك محور ثابت می‌توان نتایج بسیاری استنتاج کرد. دیدیم که اگر گشتاور اینرسی یك جسم حول محوری ثابت برابر I وتندی زاویه‌ای آن برابر ω باشد، انرژی جنبشی آن $\frac{۱}{۲}I\omega^{۲}$ است. پس اگرجسم ازحال سکون به‌وضعی دلخواه درآید می‌توانیم تندی زاویه‌ای آن را در هرجهت دیگرتعیین کنیم. برای این‌منظور، به‌شرط‌آنکه‌اصطکاك وجودنداشته باشد، $\frac{۱}{۲}I\omega^{۲}$ را با کاهش انرژی پتانسیل برابر می‌گیریم. این کاهش برابر حاصلضرب وزن جسم در

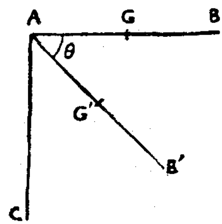
مسافتی است که مرکزثقل پایین آمده است.

نیز اگر وزنه ازنخی آویزان باشدکه نخ به‌دوریك چرخ طیار پیچیده است به‌طوری که چرخ طیار بتواند حول‌محوری افقی بچرخد و وزنه پایین بیاید، دراین صورت مجموع انرژیهای جنبشی چرخ طیار ووزنه درهر وضع باید برابر کاهش انرژی پتانسیل وزنه باشد (به‌فرض آنکه براثراصطکاك، کاهش انرژی وجود نداشته باشد).

در مثالهای زیر، این روش بیان می‌شود.

مثال ۱: میلهٔ یکنواختی، به‌طول $2a$، می‌تواند آزادانه حول یك انتهایش بچرخد. اگر انتهای دیگر میله را ثابت نگاه داریم ومیله را ازیك وضع افقی رها کنیم، نخستین بارکه میله به‌حالت قائم درمی‌آید، تندی زاویه‌ای آن چقدرخواهد بود؟

حل: فرض می‌کنیم M جرم میله، AB (شکل ۹-۱۰) وضع اولیه، A انتهای ثابت و G مرکزثقل میله باشد.



شکل ۹-۱۰

گشتاور اینرسی حول محوری که از A می‌گذرد برابر $\frac{4}{3}Ma^2$ است.

وقتی که میله سقوط می‌کند وبه‌وضع AG′B′ که $\angle BAB' = \theta$ است درمی‌آید، مرکزثقل مسافت قائمی برابر $a \sin\theta$ سقوط کرده است، وکاهش انرژی پتانسیل برابر است با $Mga\sin\theta$.

تندی‌زاویه‌ای‌برابر $d\theta/dt$ است‌وانرژی‌جنبشی برابراست‌با $\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}Ma^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$

پس تندی زاویه‌ای چنین به‌دست می‌آید.

$$\frac{2}{3}Ma^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = Mga\sin\theta$$

$$\therefore \quad \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{3g}{2a}\sin\theta$$

وقتی که میله به‌وضع قائم AC است، زاویـهٔ θ برابر $\frac{\pi}{۲}$ است وتندی زاویه‌ای برابر است با

$$\sqrt{\frac{۳g}{۲a}}$$

مثال ۲: جرم یك چرخ طیارتوپر ۴۵۰ kg، قطرآن ۰٫۶ m، وقطر محور برابر ۱۰ cm وجرم آن ۵۰ kg است. چرخ ومحور به‌کمك نخی، که حول محور پیچیده شده است و وزنه‌ای به‌جرم ۱۰ kg حمل می‌کند به‌حرکت درمی‌آید. انرژی جنبشی چرخ ومحور را هنگامی که وزنـه پس از پیمودن ۳ m، ازنقطهٔ شروع حرکت به‌زمین می‌رسد، تعیین کنید.

حل : گشتاور اینرسی چرخ $= ۴۵۰ \times \frac{۱}{۲} \times ۰٫۳^۲ \text{ kg m}^۲$

گشتاور اینـرسی محور $= ۵۰ \times \frac{۱}{۲} \times ۰٫۰۵^۲ \text{ kgm}^۲$

گشتاور اینرسی کل

$$I = ۲۰٫۲۵ + ۰٫۰۶۲۵$$
$$= ۲۰٫۳۱۲۵ \text{ kgm}^۲$$

وقتی که وزنهٔ ۱۰ kg بـه اندازهٔ ۳ m پـایین بیایـد، کاهش انـرژی پتانسیل برابر ۳۰ g ژول خواهد بود.

اگر ω تندی زاویه‌ای چرخ ومحور درهنگامی باشدکه وزنه بـه زمین می‌رسد، تندی وزنه برابر $۰٫۰۵\omega$ متر برثانیه خواهد بود.

انرژی جنبشی چرخ و محور بـرابر $\frac{۱}{۲}I\omega^۲$ ژول است، و انرژی وزنـه برابـر $\frac{۱}{۲} \times ۱۰(۰٫۰۵\omega)^۲$ یعنی مساوی $۱۲۵ \times ۱۰^{-۴}\omega^۲$ ژول است. پس بـرطبق اصل انرژی،

$$۱۰٫۱۵۶۳\,\omega^۲ + ۰٫۰۱۲۵\,\omega^۲ = ۳۰\,g$$

$$\therefore \quad \omega^۲ = \frac{۳۰ \times ۹٫۸}{۱۰٫۱۶۸۸}$$

$$\therefore \quad = \frac{۲۹۴}{۱۰٫۱۶۸۸}$$

انرژی جنبشی چرخ ومحور برابر است با

$$10/156\,\omega^2 = 294 \text{ ژول } \quad \text{تقریباً}$$

۹. ۱۶. تعیین گشتاور اینرسی چرخ طیار

روشی راکه در مثال قبل بیان کردیم می‌توان به‌منظور تعیین گشتاور اینرسی چرخ طیار تغییر داد.

چرخ ومحور به‌طورقائم روی عده‌ای بلبرینگ سوار شده‌اند تا اصطکاك کاهش یابد. معمولاً میخ کوچکی روی محور نصب شده است. یك انتهای نخی که به‌انتهای دیگرآن، وزنه آویزان می‌شود به‌حلقه‌ای بسته شده است وحلقه ازاین میخ گذشته است. این میخ برای شمردن عدهٔ دورهایی که چرخ درزمان معینی می‌زند نیز مفید واقع می‌شود. ارتفاع h که ازآن‌ارتفاع وزنه رهامی‌شود به‌دقت اندازه‌گیری می‌شود. برای تعیین عدهٔ دورهایی که چرخ می‌زند تا وزنه به‌زمین برسد به‌این طریق عمل می‌شود که وزنه را روی زمین می‌گذارند وچرخ را می‌چرخانند تا وزنه بالا بیاید و به‌نقطهٔ شروع حرکت برسد. در این صورت عده دورهایی که نخ به‌دور محور می‌پیچد برابرعدهٔ دورهایی خواهد بود که نخ از دور محور باز می‌شود تا وزنه‌ای که ازنقطهٔ شروع حرکت رها شده است به‌زمین برسد. فرض می‌کنیم این عده برابر n_1 باشد. طول نخ را طوری انتخاب می‌کنیم که وقتی که وزنه به زمین می‌رسد، حلقه ازمیخ بیرون بیاید.

وزنه ازحالت‌سکون رها می‌شود وعدهٔ دورهایی که چرخ پس ازرسیدن وزنه به‌زمین می‌زند اندازه‌گیری می‌شود. نیزمدت زمانی که طول می‌کشد تاچرخ به‌حالت سکون درآید اندازه‌گیری می‌شود. فرض می‌کنیم این اندازه‌ها به‌ترتیب n_2 و t باشند.

اصطکاك درمحل بلبرینگهاومیزان شتاب منفی‌چرخ را ثابت فرض می‌کنیم. بنابراین تندی زاویه‌ای متوسط درتمام مدتی که طول می‌کشد تا چرخ به‌حالت سکون درآید برابر نصف تندی زاویه‌ای اولیهٔ ω خواهد بود.

$$\text{تندی زاویه‌ای متوسط} = \frac{2\pi n_2}{t}$$

$$\therefore \qquad \omega = \frac{4\pi n_2}{t}$$

تندی v وزنه هنگامی که وزنه به‌زمین می‌رسد برطبق $v=\omega r$ به‌دست می‌آید که r شعاع محور چرخ طیاراست.

اگر m جرم وزنه و I گشتاور اینرسی چرخ طیار باشد، انرژیهای جنبشی آنها، هنگامی که وزنه به‌زمین می‌رسد، به‌ترتیب $\frac{1}{2}mv^2$ و $\frac{1}{2}I\omega^2$ است.

کاهش انرژی پتانسیل برابر mgh است.

اما مقداری کاربرای غلبه براصطکاك انجام شده است. فرض می کنیم مقدار کاری که برای غلبه براصطکاك در یك دور انجام می‌شود برابر w باشد، دراین صورت مقدار کاری که در n_1 دورانجام شده است $n_1 w$ خواهد بود واین مقدارکاری است که درهنگام سقوط وزنه انجام شده است.

$$\therefore \qquad mgh=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}I\omega^2+n_1 w$$

اما انرژی جنبشی چرخ، یعنی $\frac{1}{2}I\omega^2$، براثراصطکاك در n_2 دور ازمیان می‌رود.

$$\therefore \qquad n_2 w=\frac{1}{2}I\omega^2$$

$$\therefore \qquad w=\frac{1}{2}\times\frac{I\omega^2}{n^2}$$

$$\therefore \qquad mgh=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}I\omega^2\left(1+\frac{n_1}{n_2}\right)$$

همهٔ کمیتهای این معادله، به‌استثنای I، معلومند وبنابراین می‌توان I را محاسبه کرد.

اگر m برحسب کیلوگرم باشد، شعاع محور، r، وارتفاع h بایستی برحسب متر بیان شوند. دراین صورت I برحسب $\mathrm{kg\,m^2}$ بیان خواهد شد.

اگر m برحسب گرم باشد، h و r باید برحسب سانتیمتراندازه‌گیری شوند. در این صورت I برحسب واحد $\mathrm{g\,cm^2}$ اندازه‌گیری می‌شود.

تمرین ۹. ۲

۱- قرص مدور سنگینی به‌جرم ۱۰ kg وشعاع ۳۰ cm می‌تواند حول محورش در یك صفحهٔ قائم بچرخد. وزنه‌ای به‌جرم ۵ kg به‌کنارهٔ بالاترین نقطهٔ قرص متصل است. مجموعهٔ قرص‌ووزنه به‌کندی جا به‌جا می‌شوند. تندی زاویه‌ای را هنگامی‌که وزنهٔ ۵ kg درپایینترین نقطه است تعیین کنید.

۲- به‌محور یك چرخ، طنابی‌به‌طول ۳ m پیچیده شده‌است. طناب با نیروی ثابت ۱۰۰N کشیده می‌شود ووقتی‌که طناب ازمحور چرخ جدا می‌شود، چرخ در هرثانیه ۵ دور می‌زند. گشتاور اینرسی چرخ ومحوررا تعیین کنید.

۳- میلهٔ یکنواخت مستقیمی به‌طول ۱/۲ m می‌تواند آزادانه در یك صفحهٔ قائم، حول

محوری‌افقی که ازمیله می گذرد وبه‌فاصلهٔ $0/3\,\mathrm{m}$ ازیك انتهای آن است، بچرخد. میله را دروضع افقی نگاه می‌دارنـد وسپس آن‌را رها می کنند تا بچرخد. تندی‌انتهای پایینی میله را هنگامی کـه میله به‌حالت قائم درمی‌آید، نیزانـرژی جنبشی میله را تعیین کنید. جرم میله برابر $10\,\mathrm{kg}$ است.

۴ـ حلقهٔ مدوری است که ضخامت آن بسیار کـم وشعاع آن $0/9\,\mathrm{m}$ و جـرم آن $5\,\mathrm{kg}$ است. به‌نقطه‌ای ازاین حلقه وزنه‌ای به‌جرم $2/5\,\mathrm{kg}$ متصل شده است. ایـن حلقه می‌تواند حول‌محوری افقی که ازنقطه‌ای ازمحیط حلقه ودرست مقابل‌وزنه می گذرد دوران کند. اگرحلقه را بچرخانند تا وزنه دربالاترین نقطه قـرار گیرد و سپس آن‌را آزاد بگذارند تا بچرخد، در این صورت، هنگامی که وزنه بـه پایینتریـن نقطهٔ مسیر می‌رسد، تندی زاویه‌ای چقدرخواهد بود؟

۵ـ قرص مدور یکنواختی به‌جرم $50\,\mathrm{kg}$ وشعاع $0/6\,\mathrm{m}$ حول محوری افقی که ازمرکز عمود برصفحهٔ آن می گذرد می‌تواند بچرخد. وزنه‌ای به‌جرم $50\,\mathrm{kg}$ درنقطه‌ای از قرص به‌فاصلهٔ $45\,\mathrm{cm}$ ازمحور قراردارد. مجموعه را طوری نگاه می‌دارند که وزنهٔ مزبور ومحور دریك سطح افقی باشند. سپس مجموعه را رها می کنند تا به‌حرکت در آید. حداکثرتندی قرص چقدرخواهد بود؟

۶ـ دریك ماشین برش، که توان آن $4\,\mathrm{kW}$ است، عمل برش‌درهر۱۰ ثانیه صورت‌می گیرد که این عمل ۰/۸ کل انرژیی راکه دراین مدت ذخیره شده است جذب می کند. اگر عدهٔ دورها فقط میان ۱۰۰ و۱۳۰ دردقیقه تغییر کند، حداقل گشتاور اینرسی چـرخ طیار را تعیین کنید.

۷ـ سه میلهٔ یکنواخت متساوی، هریك بـه‌طول l و بـه‌جرم m، اضلاع مثلث متساوی الاضلاع ABC را تشکیل داده‌اند. گشتاور اینرسی این وسیله را حول محوری کـه از A عمود برصفحهٔ مثلث می گذرد تعیین کنید. (فرض می کنیم که گشتاور اینرسی هر میله حول محوری که از وسط آن وعمود برمیله می گـذرد برابر $\frac{1}{12}ml^2$ است.)این مثلث را ازنقطهٔ A به‌قلابی صیقلی آویزان می کنیم به‌طوری که بتواند در یك‌صفحهٔ قائم حول A دوران کند. مثلث را طوری نگاه می‌داریم که AB افقی باشد و C زیر AB واقع شود وسپس آن را ازحالت سکون رها می کنیم تا به‌حرکت درآید.حداکثر تندی زاویه‌ای آن چقدرخواهد شد؟

۸ـ حلقهٔ نازك مدور یکنواختی‌که شعاع آن a و جرم آن m است، حـول محوری افقی وثابت که عمود بر صفحهٔ حلقه می گـذرد دوران می کند. شعاع ژیـراسیون حلقه را

تعیین کنید.

اگرهنگامی که قطر OA ازاین حلقه افقی است، نقطهٔ A با سرعت V به‌طرف پایین حرکت کند، تندی زاویه‌ای حلقه، هنگامی که A به‌طورقائم در زیر O است، چقدر خواهد بود، به‌فرض آنکه حلقه بتواند آزادانه حول محور افقیی که از O می گذرد دوران کند؟ نیزنشان دهیدکه اگر $V > 2\sqrt{ga}$ باشد، حلقه می‌تواند دورانهای کامل حول محورافقی انجام دهد.

۹ - سیم یکنواختی که به‌شکل دایره‌ای به‌شعاع a درآمده است دریك صفحهٔ قائم حول نقطهٔ A که برمحیط دایره است نوسان می کند. حرکت ازحالت سکون شروع می‌شود و درآن هنگام قطر AB افقی است. تندی زاویه‌ای را هنگامی که AB قائم می‌شود تعیین کنید.

۱۰- چرخ طیاری است به‌قطر ۶۰ cm و به‌جرم ۱۰ kg که به‌محوری به‌قطر ۱۵ cm محکم شده است. محورمی‌تواند آزادانه درتکیه گاههای افقی صیقلی بچرخد. یك انتهای نخ بلند نازکی به‌محور بسته شده ونخ به دور محور پیچیده شده است و به انتهای دیگرنخ، وزنه‌ای به‌جرم ۸ kg آویزان است. چرخ را آن‌قدرمی‌چرخانند تا سرعتی برابر ۴۸۰ دور دردقیقه پیدا کند وسپس آن را آزاد می گذارند. ثابت کنید که در حدود ۳۳ دوردیگر می‌چرخد تا به‌حالت سکون درآید. [از جرمهای محور ونخ صرف نظر کنید وفرض کنیدکه جرم چرخ درمحیط آن و به‌طور یکنواخت متمرکز شده است.]

۱۱- قرصی است به‌قطر ۹۰ cm و به‌ضخامت ۳ mm که ازماده‌ای ساخته شده است که جرم حجمی‌آن ۹۰۰ kg/m^3 است. این‌قرص حول محوری‌که ازمرکزآن‌می گذرد و عمود برصفحهٔ قرص است می‌چرخد و ۲۰۰۰ دور در دقیقه می‌زند. انرژی‌جنبشی آن را تعیین کنید.

۱۲- میلهٔ یکنواخت مستقیمی به‌طول ۱/۸ m حول یکی ازدوانتهای خود درصفحهٔ قائم نوسان می کند. اگرانتهای آزاد میله هنگامی که در پایینترین وضع خود قرار دارد سرعتش برابر V باشد، حداقل V چقدرمی‌تواند باشد تامیله یك دورکامل بزند؟

اگر به‌نخی، هم طول میله، وزنه‌ای‌آویزان‌کنیم و وزنه درصفحهٔ قائم حول‌انتهای دیگرنخ نوسان‌کند، و سرعت وزنه در پایینترین وضع خود برابر V باشد، حداقل V چقدرمی‌تواند باشد تا وزنه یك دورکامل بزند؟

۱۳- قرص مدوری باضخامت یکنواخت وبا شعاع a متر وجرم M کیلوگرم با تندی زاویه‌ای ω حول محوری‌که عمود برصفحهٔ آن است و به فاصلهٔ b متر ازمرکزواقع

است می‌چرخد. انرژی جنبشی را تعیین کنید.

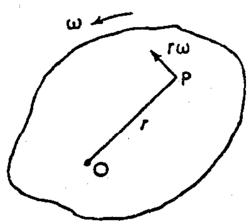
۱۴- چرخ طیاری به‌جرم ۴۵ kg وقطر ۱/۲ m به‌انتهای محوری افقی و سبك به‌قطر ۰/۳ m محکم شده است. نخ بلند وسبکی حول این‌محور پیچیده شده و به‌آن بسته شده است ودرانتهای آزاد خود وزنه‌ای به‌جرم ۹ kg حمل می کند. چرخ طیار را طوری می‌چرخانندکه ۲ دور درهرثانیه درجهتی بزندکه وزنه بالا برود. سپس ناگهان چرخ را آزاد می‌گذارند تا خودش بچرخد. تعیین‌کنید پیش ازآنکه به‌حالت سکون لحظه‌ای درآید چند دورخواهد زد.

۱۵- انتهای نخ‌کشسان سبکی به‌طول ۰/۹ m به‌نقطه‌ای ثابت شده است. انتهای دیگر نخ به‌نقطه‌ای واقع برمحیط محور یك چرخ بسته شده است به‌طوری‌که وقتی نخ، کشیده نیست به‌طور مماس برمحوراست. شعاع محور ۵ cm وجرم چرخ ومحور برابر ۱/۴ kg و شعاع ژیراسیون برابر ۱۵ cm وضریب‌کشسانی نخ برابر ۵۰ N است.

چرخ را سه دورکامل می‌چرخانیم تا نخ به‌دور محور پیچیده شود وسپس‌دستگاه را ازحالت سکون‌رها می‌کنیم. تندی زاویه‌ای چرخ را، هنگامی‌که نخ‌دوباره به‌حالت غیرکشیده می‌رسد، تعیین کنید.

۹. ۱۷. اندازهٔ حرکت زاویه‌ای یك جسم صلب

دوباره جسمی‌را درنظرمی‌گیریم که حول‌محوری ثابت باتندی زاویه‌ای ω دوران می‌کند. شکل ۹-۱۱ مقطعی ازجسم راکه عمود برمحور دوران است نشان می‌دهد. محوردوران از نقطهٔ O گذشته است.



شکل ۹-۱۱

نقطه‌ای مادی به‌جرم m در P، که $OP = r$ است، دارای اندازهٔ حرکت خطی برابر $m\omega r$ عمود برOP است. گشتاور این‌اندازهٔ حرکت حول محوری‌که ازO می‌گذرد برابر است با $(m\omega r)r$، واین را اندازهٔ حرکت زاویه‌ای نقطهٔ مادی حول O می‌نامند.

اندازهٔ حرکت زاویه‌ای تمام جسم به بزرگی $\sum m\omega r^2$ است که ازجمع کردن اندازهٔ حرکتهای زاویه‌ای همهٔ نقطه‌های مادی جسم به‌دست می‌آید.
اما چون ω برای همهٔ نقطه‌های مادی جسم یکسان است، چنین خواهیم داشت:

$$\sum m\omega r^2 = \omega \sum mr^2 = I\omega$$

که I گشتاور اینرسی جسم حول محوردوران است.

پس اندازهٔ حرکت زاویه‌ای یك جسم صلب که باتندی زاویه‌ای ω حول محوری ثابت دوران می‌کند برابر $I\omega$ است که I گشتاوراینرسی این جسم حول این محور است.

این عبارت $I\omega$ شبیه عبارت mv برای اندازهٔ حرکت خطی یك نقطهٔ مادی است که درآن مانند آنچه برای انرژی جنبشی گفتیم (بند ۲.۹ را نگاه کنید)، I جای m و تندی زاویه‌ای ω جای تندی خطی v را گرفته است.

۹. ۱۸. حرکت جسم صلب حول محوری ثابت

اصل اندازهٔ حرکت زاویه‌ای

پیش ازاین نشان داده‌ایم که برطبق فرض مسلمی که در دینامیك نیوتونی یك نقطهٔ مادی ـ که به‌قانون دوم نیوتون دربارهٔ حرکت موسوم است ـ پذیرفته شده است، تغییراندازهٔ حرکت خطی نقطهٔ مادی درواحد زمان مستقیماً متناسب بانیروی خارجیی است که برنقطهٔ مادی وارد می‌شود. در واقع، با انتخاب مناسب واحدهای نیرو، به‌این نتیجه می‌رسیم که تغییراندازهٔ حرکت خطی نقطهٔ مادی با نیروی خارجیی که برآن وارد می‌شود برابراست. این را می‌توان درمورد یك جسم صلب تعمیم داد، اما فرض مسلم دیگری باید پذیرفته شود که درآن حرکت دورانی جسم صلب نیزمنظورشود.
این فرض مسلم را می‌توان به‌صورتهای گوناگون ارائه‌کرد. یکی ازآنها ازطرف دالامبر[1] پیشنهاد شده است. این فرض منجر به‌نتیجهٔ زیر می‌شود.

تغییر اندازهٔ حرکت زاویه‌ای یك جسم صلب که حول محوری ثابت دوران می‌کند در واحد زمان برابراست باگشتاور نیروهای خارجیی که برجسم وارد شده‌اند حول‌این محور.

ازاین پس، برای اشاره به‌این فرض مسلم، آن را اصل اندازهٔ حرکت زاویه‌ای

۱ـ D'Alembert

می‌نامیم وشکل کلی آن را بعداً ارائه خواهیم کرد (۲۶.۹). در اینجا یادآوری می‌کنیم که از واردکردن چنین فرضیه‌هایی، که دالامبربا قبول این اصل ناچار به‌پذیرفتن آنهابود، تا آنجاکه فرض مسلم لازم، مربوط به‌حرکت دورانی جسم صلب است، می‌توانیم‌اجتناب کنیم. این را ما پیشنهاد می‌کنیم ودرست است. زیرا نظیرفرضیه‌های دیگـر علم، نتیجه‌ها با مشاهده‌ها سازگارند.

صورت مخصوص اصل این است‌که اندازهٔ حرکت زاویه‌ای جسم صلبی کـه حول محوری ثابت دوران می‌کند، درصورتی‌کـه مجموع گشتاورهای نیروهای خارجی حـول این محورصفر باشد، ثابت می‌ماند.

به‌طورکلی، اگر L گشتاور نیروهایی باشدکه برجسم حول محور ثابت دوران‌وارد می‌شوند، می‌توانیم بنویسیم:

$L =$ تغییر $I\omega$ در واحد زمان

$\therefore \quad L =$ تغییر ω در واحد زمان $\times I$

$\therefore \quad L =$ شتاب زاویه‌ای $\times I$

یا
$$I\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=L \qquad (۱)$$

اگر θ زاویهٔ دوران جسم در لحظهٔ t باشد، $\omega=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ است. بنابراین $\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$.

پس
$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}=\frac{L}{I}=\frac{\text{گشتاورنیروها حول محوردوران}}{\text{گشتاوراینرسی حول محوردوران}}$$

این معادله را می‌توان با معادلهٔ اندازهٔ حرکت خطی یك نقطهٔ مادی به‌جرم m که تحت اثر نیروی F واقع است و درجهت محور xها حرکت می‌کند، یعنی با معادلهٔ زیر، مقایسه کرد.

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=\frac{F}{m} \quad \text{یا} \quad m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=F$$

یادآوری می‌کنیم که همان طور که m اندازهٔ «اینرسی» نقطهٔ مـادی متحرك نسبت به حرکت دریك خط مستقیم است، به‌نظر می‌رسد که I، همان‌طورکـه ازاسمش پیداست، اندازهٔ «اینرسی» جسم صلب نسبت به‌حرکت دورانی باشد.

با انتگرال‌گیری ازمعادلهٔ (۱) مقدار $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ و θ در هر لحظـه معلوم می‌شود. مقدار

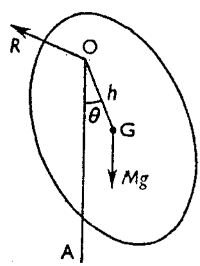
ثابتی که در هربار انتگرال‌گیری درنتیجه پیدا می‌شود از اندازه‌های اولیهٔ $d\theta/dt$ و θ تعیین می‌شود.

اکنون حالت خاصی‌را درنظرخواهیم گرفت وآن حرکت یك جسم صلب حول‌محور ثابت افقی وتحت اثرجاذبهٔ زمین است. چنین جسمی را غالباً آونگ مرکب می‌نامند.

۹ .۱۹. آونگ مرکب

صفحه قائمی راکه از محور دوران می‌گذرد بـه‌عنوان صفحهٔ مقایسه درنظـرمی‌گیریم، و صفحه‌ای راکه ازاین محور و مرکزثقل جسم می‌گذرد به‌عنوان صفحهٔ ثابت جسم درنظر می‌گیریم. اگر زاویهٔ میان این دوصفحه درلحظهٔ t برابر θ بـاشد، تندی زاویه‌ای جسم $d\theta/dt$ است.

شکل ۹-۱۲ مقطعی ازجسم را، کـه عمود برمحور دوران است و ازمرکز ثقل G می‌گذرد، ومحور را درنقطهٔ O قطع می‌کند، نشان می‌دهد.



شکل ۹-۱۲

OA خط قائمی است‌که از O می‌گذرد.

فرض می‌کنیم R معرف عکس‌العملی باشدکه درمحور برجسم وارد می‌شود.

فرض می‌کنیم $\angle AOG=\theta$ ، $OG=h$ وگشتاوراینرسی حول محوری‌که از G، به‌موازات محور دوران می‌گذرد، برابر Mk^2 باشد.

بنابراین گشتاور اینرسی حول محور دوران برابر $M(k^2+h^2)$ است. دروضعی‌که نشان داده شده است،گشتاورکلیهٔ نیروهایی‌که برجسم، حول محوری‌که از O می‌گذرد، وارد می‌شوند برابر $Mgh\sin\theta$ است.

$$\therefore \quad \frac{d^2\theta}{dt^2}=-\frac{Mgh\sin\theta}{M(k^2+h^2)}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{gh}{k^2+h^2}\sin\theta \qquad (۱) \quad \text{یا}$$

اگر θ کوچك باشد، تقریباً $\sin\theta = \theta$ ، ومعادله به‌صورت زیردرمی‌آید:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{gh}{k^2+h^2}\theta \qquad (۲)$$

این معادله، حرکت تناوبی ساده‌ای بازمان تناوب T را نشان می‌دهد، به‌طوری‌که

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{k^2+h^2}{hg}}$$

در حالت یك آونگ ساده به‌طول l، زمان تناوب برابر $2\pi\sqrt{l/g}$ است. پس $(k^2+h^2)/h$ منطبق با l است وآونگ ساده‌ای به‌طول $(k^2+h^2)/h$ دارای زمان تناوبی برابر زمان تناوب آونگ مرکب خواهد بود. بنابراین عبارت $(k^2+h^2)/h$ را طول آونگ سادهٔ معادل می گویند.

بایك بارانتگرال گیری ازمعادلهٔ (۱) نتیجهٔ زیررا می‌توان به‌دست آورد:

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{2gh}{k^2+h^2}\cos\theta + C \qquad (۳)$$

که درآن C با دانستن اندازهٔ اولیهٔ $d\theta/dt$ معلوم می‌شود.

معادلهٔ (۳) مقدار تندی زاویه‌ای را برای هر مقدار θ به‌دست می‌دهد، اما آن را می‌توان به‌طورساده‌تر ازاصل انرژی، همان‌طور که دربند ۱۵.۹ بیان شد، به‌دست آورد. در واقع معادلهٔ (۳) که دراصل همان معادلهٔ انرژی است، ازمعادلهٔ (۱)،که اصل اندازهٔ حرکت زاویه‌ای را بیان می کند، مشتق شده است. بنابراین محققاً آن دوباهم معادلند.

برای به‌دست آوردن θ برحسب زمان، نمی‌توان بدون واردکردن آنچه به توابع الپتیك موسومند، ازمعادلهٔ (۳) انتگرال گیری کرد.

بررسی این توابع، شاخه‌ای ازریاضیات عالی‌است و دراینجافقط هنگامی‌که θ کوچك است، رابطهٔ میان θ وزمان را بااستفاده ازمعادلهٔ (۲) می‌توانیم بررسی کنیم.

ازاین معادله نتیجه می‌شود،

$$\theta = A\cos(\omega t + B)$$

که درآن $\omega = \sqrt{gh/(k^2+h^2)}$ و A و B اندازه‌های ثابتی هستندکه فقط به اندازه‌های اولیهٔ $d\theta/dt$ و θ بستگی دارند.

۹. ۲۰. مرکزنوسان

صفحه‌ای که ازمرکز ثقل جسم عمود برمحور دوران می‌گذرد، محور دوران را درنقطهٔ O قطع می‌کندکه مرکز آویز نامیده می‌شود.

اگر l طول آونگ سادهٔ معادل باشد، دراین صورت طبق آنچه دربند قبل بیان شد،

$$l=\frac{k^{2}+h^{2}}{h}$$

OG (شکل ۹-۱۳) را تا C امتداد می‌دهیم، به‌طوری‌که $OC=l$ باشد. در این صورت C مرکز نوسان نامیده می‌شود. اگرتمام جرم جسم در مرکز نوسان آن متمرکز می‌بود و به‌وسیلهٔ نخی ازمرکزآویز O آویزان می‌شد، حرکت زاویه‌ای آن وزمان‌نوسان با حرکت زاویه‌ای وزمان نوسان جسمی‌که تحت همین شرایط اولیه است یکسان می‌بود.

شکل ۹-۱۳

اگرجسم ازنقطهٔ C آویزان شود، دراین صورت چون $CG=l-h$ است، طول آونگ سادهٔ معادل، برابر l' خواهد شدکه

$$l'=\frac{k^{2}+(l-h)^{2}}{l-h}$$

اما $$k^{2}=lh-h^{2}$$

$$\therefore \quad l'=\frac{lh-h^{2}+l^{2}-2lh+h^{2}}{l-h}=\frac{l(l-h)}{l-h}=l$$

$$\therefore \quad l'=l$$

پس زمان نوسان حول C برابرزمان نوسان حول O است، و اگربتوانیم بر روی خطی‌که ازمرکزثقل می‌گذرد، دونقطه درطرفین مرکز ثقل پیداکنیم‌که زمان نوسان حول یکی ازآنها برابر زمان نوسان حول دیگری باشد، در این صورت فاصلهٔ میان این نقاط، طول آونگ سادهٔ معادل خواهد بود.

از این موضوع درآونگ‌کاتر[1]، استفاده شده است. ایـن آونگ ازمیله‌ای تشکیل شده است که دارای دوکارد درطرفین مرکزثقل است و جرم متحرکی روی میله می‌توانـد بلغزد. وضع جرم طوری تنظیم می‌شودکه زمانهای نوسان حول دوکارد یکسان باشد. در این صورت فاصلهٔ میان دوکارد l است و

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

با دانستن T و l می‌توان g را تعیین کرد.

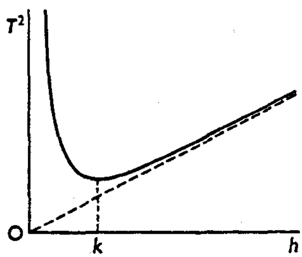
این روش دقیقی برای تعیین g است.

۹. ۲۱. حداقل زمان نوسان یك آونگ مرکب

دیدیم که زمان تناوب T چنین به‌دست می‌آید:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{k^2+h^2}{hg}}$$

نمودار T^2 برحسب h مطابق شکل ۹-۱۴ است.



شکل ۹-۱۴

اما T هنگامی‌مینیمم است که $(k^2+h^2)/h$ یا $h+k^2/h$ مینیمم باشد. این‌حالتی‌است که

$$\frac{d}{dh}\left(h+\frac{k^2}{h}\right)=0$$

یا

$$1-\frac{k^2}{h^2}=0$$

یعنی هنگامی که

$$h=k$$

۱- Kater

دراین حالت $l = 2k$.

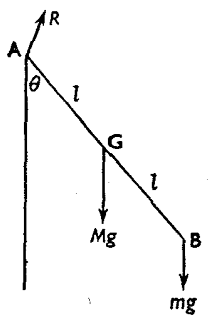
بنابراین زمان تناوب هنگامی مینیمم است که فاصلهٔ میان محور آویز و مرکزثقل برابر است باشعاع ژیراسیون حول‌محوری که ازمرکز ثقل به‌موازات محورآویزمی‌گذرد.

این فقط مینیمم مقدار را برای محورهایی‌که درجهت معین رسم می‌شوند به‌دست می‌دهد. برای تعیین مینیمم مطلق باید جهت محوری راکه از مرکزثقل می‌گذرد برای موردی‌که شعاع ژیراسیون کمترین مقدار را دارد تعیین کنیم.

۹۰۲۲. مثال ۱: میلهٔ یکنواخت وسنگین AB به‌طول $2l$ و جرم M است. وزنه‌ای به جرم m به B متصل شده‌است. این مجموعه حول محوری‌افقی‌که از A می‌گذرد آزادانه نوسان می‌کند. ثابت کنیدکه زمان نوسانهای کوچك برابراست با

$$4\pi\sqrt{\frac{(M+3m)l}{3(M+2m)g}}$$

حل:



شکل ۹-۱۵

فرض‌می‌کنیم AB (شکل ۹-۱۵) معرف میله و G مرکز ثقل آن باشد. گشتاور اینرسی میله حول محوری‌که از A می‌گذرد برابر $\frac{4}{3}Ml^2$ و گشتاور اینرسی جرم m برابر $4ml^2$ است.

بنابراین گشتاور اینرسی میله وجرم برابر است با

$$4\left(\frac{M+3m}{3}\right)l^2$$

گشتاور نیروی برگشت دهنده حول A، هنگامی‌که تغییرمکان زاویه‌ای ازخط

قائم برابر θ است، برابراست با

$$Mgl\sin\theta+2mgl\sin\theta=(M+2m)gl\sin\theta$$

پس
$$\frac{d^2\theta}{dt^2}=-\frac{(M+2m)gl}{\frac{4}{3}(M+3m)l^2}\sin\theta$$

اگر θ کوچك باشد،

$$=-\frac{3(M+2m)g}{4(M+3m)l}\theta$$

بنابراین زمان نوسان برابراست با

$$2\pi\sqrt{\frac{(4M+3m)l}{3(M+2m)g}}$$

مثال ۲: میلهٔ استوانه‌ای شکلی به‌طول $60\,\text{cm}$ و به‌شعاع $5\,\text{cm}$ می‌تواند آزادانه‌حول محوری افقی که برمحور هندسی و نیز برمقطع میله عمود است، آزادانه نوسان کند. اگرطول آونگ سادهٔ معادل، حداقل باشد، وضع محور آویزرا پیدا کنید.

حل : اگر k شعاع ژیراسیون حول محوری باشدکه از مرکز ثقل به‌موازات محور آویز می‌گذرد، h فاصلهٔ مرکز ثقل ازمحور آویز باشد و L طول آونگ سادهٔ معادل باشد،

$$L=\frac{k^2+h^2}{h}$$

و L هنگامی حداقل است که $h=k$ باشد (۲۱.۹).

اما دیدیم (۱۴.۹) که گشتاور اینرسی استوانه‌ای توپرحول محوری که ازمرکز ثقل آن عمود برمحوراستوانه می‌گذرد برابر است با

$$M\left(\frac{a^2}{4}+\frac{l^2}{12}\right)$$

که درآن a شعاع و l طول استوانه است.

دراینجا $a=5\,\text{cm}$ و $l=60\,\text{cm}$ است،

$$\therefore\qquad k^2=\left(\frac{a^2}{4}+\frac{l^2}{12}\right)=\frac{0/05^2}{4}+\frac{0/6^2}{12}=0/0306$$

$$\therefore \qquad k = ۰/۱۷۳$$

پس محورآویزبرای مینیمم زمان نوسان به‌فاصلهٔ ۱۷/۳ cm ازمرکزثقل‌است.

۹. ۲۳. حرکت چرخ طیاری‌که تحت تأثیر یك زوج قرارگرفته است

اگر $Mk^۲$ گشتاور اینرسی چرخ طیار حول محورش، و L گشتاور زوج باشد،

$$\frac{d^۲\theta}{dt^۲} = \pm \frac{L}{Mk^۲}$$

برحسب آنکه L مایل به‌افزایش یاکاهش تندی زاویه‌ای بـاشد علامت $(+)$ یا$(-)$ به کار می‌رود.

ممکن است یادآوری‌کرد که اگرگشتاور L زوج، مقداری ثابت باشد، $d^۲\theta/dt^۲$ مقداری ثابت خواهد بود وازآن می‌توان $d\theta/dt$ و θ را به‌آسانی پیداکرد.

زیرا اگر

$$\frac{d^۲\theta}{dt^۲} = \gamma \quad \text{مقداری ثابت}$$

دراین صورت

$$\frac{d\theta}{dt} = \gamma t + A$$

اگر $d\theta/dt$ را به ω نمایش دهیم ومقدارآن را درلحظهٔ $t = ۰$ به $\omega_۰$ نمایش دهیم، خواهیم داشت،

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega = \omega_۰ + \gamma t \qquad (۱)$$

به علاوه، به‌شرطی‌که درلحظهٔ $t = ۰$ مقدار θ برابرصفر باشد.

$$\theta = \omega_۰ t + \frac{۱}{۲}\gamma t^۲ \qquad (۲)$$

با حذف t ازمعادله‌های (۱) و(۲) خواهیم داشت،

$$\omega^۲ = \omega_۰^۲ + ۲\gamma\theta \qquad (۳)$$

معادله‌های (۱) و(۲) و (۳) به‌ازای‌شتاب زاویه‌ای ثابت درست شبیه معادله‌های اساسی حرکت متشابه‌التغییر یك نقطهٔ مادی، یعنی شبیه معادله‌های زیرند،

$$v^۲ = v_۰^۲ + ۲ax \,،\; x = v_۰ t + \frac{۱}{۲}at^۲ \,،\; v = v_۰ + at$$

مثال ۱: چرخ طیاری به‌جرم ۱ Mg وشعاع ژیراسیون ۱ m درهرثـانیه یك بـار گردش می‌کند. انرژی جنبشی آن چقدراست وچقدر طول می‌کشد تا چرخ تحت اثریك گشتاور اصطکاکی، که حول محور وارد می‌شود و بـزرگی آن ۶۰ Nm است، به‌حال سکون درآید.

حل : گشتاور اینرسی برابراست با ۱۰۰۰ $\mathrm{kgm^2}$ وتندی زاویه‌ای برابر است با 2π رادیان برثانیه.

انرژی جنبشی برابراست با

$$\frac{1}{2}\times 1000\times 4\pi^2\ \mathrm{J}=2000\pi^2\ \mathrm{J}$$

معادلهٔ حرکت چنین است،

$$1000\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}=-60$$

$$\therefore \quad \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}=-0/06$$

$$\therefore \quad \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=-0/06t+C$$

و وقتی‌که $t=0$ است،

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=2\pi$$

$$\therefore \quad C=2\pi$$

$$\therefore \quad \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=2\pi-0/06\,t$$

پس $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$ هنگامی‌که $0/06\,t=2\pi$ است برابر صفراست.

یا هنگامی‌که

$$t=\frac{100\pi}{3}=104/7\mathrm{s}$$

مثال ۲: گشتاور اینرسی یك قرقره به‌قطر ۱۶ cm برابـر ۰٫۰۰۸ $\mathrm{kgm^2}$ است. طناب بلندی‌که به‌انتهای آن وزنهٔ ۰٫۵ کیلوگرمی آویزان است حـول قرقره پیچیده است. در مدت ۲ ثـانیه پس ازآنکه وزنـه رها می‌شود، قرقره چـه زاویـه‌ای

می‌چرخد؟ در آن هنگام انرژیهای جنبشی قرقره و وزنه روی‌هم چقدر خواهد بود؟

حل : فرض می‌کنیم θ زاویه‌ای باشد که قرقره به‌آن اندازه می‌چرخد، x مترمسافتی باشد که درمدت t ثانیه وزنهٔ ۰٫۵ کیلوگرمی پایین می‌آید.

دراین‌صورت $x=0.08\,\theta$، $\dot{x}=0.08\,\dot{\theta}$، $\ddot{x}=0.08\,\ddot{\theta}$ که $\dot{x}$ نمایش دهندهٔ $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ است.

فرض می‌کنیم کشش طناب برابر T نیوتون باشد.

معادله‌های حرکت برای قرقره ووزنه عبارتند از

$$0.008\,\ddot{\theta}=0.08\,T \qquad (1)$$

و

$$0.5\,\ddot{x}=0.5\,g-T \qquad (2)$$

چون $\ddot{x}=0.08\,\ddot{\theta}$ است، اگرطناب روی‌قرقره‌نلغزد، معادلهٔ دوم به‌این‌صورت نوشته می‌شود،

$$0.04\ddot{\theta}=0.5g-T$$

$$\therefore \quad 0.04\ddot{\theta}=0.5g-0.1\ddot{\theta}$$

$$\therefore \quad 0.14\ddot{\theta}=0.5g$$

$$\therefore \quad 0.14\dot{\theta}=0.5gt$$

چون وقتی که $t=0$ است، $\dot{\theta}=0$ است، ثابت انتگرال‌گیری صفر است.

$$\therefore \quad 0.14\,\theta=0.25gt^2$$

ثابت انتگرال‌گیری صفر است زیرا هنگامی که $t=0$ است، $\theta=0$ است. پس وقتی‌که $t=2$ است،

$$\theta=\frac{9.8}{0.14}=70\ \ \mathrm{rad}$$

نیز $\dot{\theta}=70$ وانرژیهای جنبشی قرقره ووزنه روی هم برابر است با:

$$\frac{1}{2}(0.008)\,\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}(0.5)(0.08\,\dot{\theta})^2=0.0056\,\dot{\theta}^2$$

$$=0.0056\times 70^2\,\mathrm{J}=27.44\,\mathrm{J}$$

این مسئله را می‌توان با استفاده ازاصل انرژی نیزحل‌کرد.

اگر $\dot{\theta}$ و $\dot{x}$ تندیهای قرقره ووزنه درهنگامی باشندکه وزنه مسافتی برابر x پایین‌آمده است، دراین صورت انرژی جنبشی آن دو روی هم،

$$۰/۰۰۴\,\dot{\theta}^{۲}+۰/۲۵\dot{x}^{۲}=۰/۸۷۵\dot{x}^{۲}$$

اما کاهش انرژی پتانسیل برابراست با $۰/۵\,gx$

$$\therefore \qquad ۰/۸۷۵\dot{x}^{۲}=۰/۵\,gx$$

برای تعیین‌شتاب a ازطرفین نسبت به t مشتق می گیریم. چنین به‌دست می‌آید.

$$\therefore \qquad ۰/۸۷۵(۲\dot{x}\ \ \ddot{x})=۰/۵\,g\dot{x}$$

$$\therefore \qquad a=\ddot{x}=\frac{g}{۳/۵}$$

بنابراین شتاب پایین‌آمدن وزنه مقداری ثابت است.

فاصله‌ای که وزنه درمدت ۲ ثانیه می‌پیماید،

$$\frac{۱}{۲}\times\frac{g}{۳/۵}\times ۴=\frac{۱۹/۶}{۳/۵}\,\mathrm{m}=۵/۶\ \mathrm{m}$$

بنابراین زاویه‌ای که قرقره دراین مدت می‌چرخد برابر است با

$$\frac{۵/۶}{۰/۰۸}=۷۰\ \ \mathrm{rad}$$

نیز، وقتی که $t=۲\mathrm{s}$ است، تندی وزنه برابراست با $\frac{۲g}{۳/۵}\mathrm{m/s}$ یا $۵/۶\mathrm{m/s}$.

انرژی جنبشی کل برابر است با

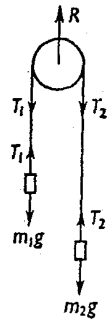
$$۰/۸۷۵\dot{x}^{۲}=۰/۸۷۵(۵/۶)^{۲}\ \mathrm{J}=۲۷/۴۴\ \mathrm{J}$$

مثال ۳: ازشیار قرقره‌ای به شعاع a که به‌وسیلهٔ محوری افقی ثابت شده است نخی می گذرد و به دوانتهای آن وزنه‌های $m_{۱}$ و $m_{۲}$ متصل است. به‌فرض آنکه اصطکاك درمحور قرقره ناچیز باشد، نشان دهیدکه اگر $m_{۲}>m_{۱}$ باشد، شتاب جرمها برابر است با

$$\frac{(m_{۲}-m_{۱})g}{m_{۲}+m_{۱}+\frac{I}{a^{۲}}}$$

که درآن I گشتاور اینرسی قرقره حول محوراست.

حل : فرض می‌کنیم کششهای دوجزء نخ $T_۱$ و$T_۲$ باشد. $T_۲$ با $T_۱$ برابرنیست، مگر آنکه شیار قرقره صیقلی باشدکه درآن حالت نخ درشیار قرقره می‌لغزد وقـرقره نخواهد چرخید. نیروهایی که بر وزنه‌ها و برقرقره وارد می‌شوند درشکل۹-۱۶ نمایش داده شده‌اند.



شکل ۹-۱۶

اگر $m_۲$ درلحظهٔ t با شتاب f پایین بیاید، $m_۱$ باشتاب f بالا خواهد رفت. نیز اگر ω تندی زاویـه‌ای قـرقره در این لحظه بـاشد، معادلـه‌های حرکت چنین خواهند بود،

برای $m_۱$: $\quad m_۱f=T_۱-m_۱g \qquad (۱)$

برای $m_۲$: $\quad m_۲f=m_۲g-T_۲ \qquad (۲)$

برای قرقره: $\quad I\dfrac{d\omega}{dt}=(T_۲-T_۱)a \qquad (۳)$

چون چهار کمیت $T_۱$ ، $T_۲$ ، f و ω مجهولند، معادلهٔ دیگری لازم است، واین معادله با این شرط‌که نخ روی شیار قرقره نمی‌لغزد تأمین می‌شود. تندی خطی هرجزء ازنخ‌که با قرقره تماس دارد برابر است با $a\omega$ ، و بنابراین شتاب خطی برابر است با $a\left(\dfrac{d\omega}{dt}\right)$. پس به‌خاطر اینکه لغزش وجود ندارد،

$$a\frac{d\omega}{dt}=f \qquad (۴)$$

معادلهٔ (۳) را می‌توان به‌این صورت نوشت:

$$\frac{I}{a^۲}\times f=T_۲-T_۱$$

با حذف $T_۲$ و $T_۱$ ازمعادله‌های (۱) و (۲) چنین‌خواهیم داشت

$$\left(\frac{I}{a^۲}+m_۲+m_۱\right)f=(m_۲-m_۱)g$$

که نشان می‌دهد شتاب وزنه‌ها ثابت است.
باید توجه داشت که ازاین نتیجه می‌توان درماشین آتوود استفاده کرد (بندهای ۱۸.۳ و ۱۹.۳ را نگاه کنید). این نشان می‌دهد که با توجه به‌دوران قرقره، برای تصحیح فرمول، باید به $(m_۲+m_۱)$، درعبارت شتاب وزنه‌های متحرك، مقدار $I/a^۲$ اضافه شود. به‌عبارت دیگر باید به‌هریك از دوجرم $m_۲$ و $m_۱$ که متحرکند $I/۲a^۲$ اضافه شود.

تمرین ۹.۳

۱ـ به میلهٔ AB، به‌طول l ووزن ناچیز، دو وزنهٔ متساوی و برابر w متصل شده‌است. یکی از وزنه‌ها به‌انتهای B ودیگری درنقطهٔ M به‌فاصلهٔ $\frac{۱}{۳}l$ از B است. زمان تناوب نوسانهای کوچك را حول محورافقیی که از A می گذرد تعیین کنید.

۲ـ میلهٔ یکنواختی به‌طول $۲a$ حول‌محوری افقی که به‌فاصلهٔ c ازمرکزمیله است نوسان می کند. ثابت کنیدکه طول آونگ سادهٔ معادل برابر است با $c+\frac{۱}{۳}\times\frac{a^۲}{c}$.
با فرض آنکه آونگ ساده‌ای به‌طول ۱ m ثانیه را بزند (ضمن نوسان از یك حالت سکون تا حالت سکون بعدی یك ثانیه طول بکشد)، ثابت کنیدکه حداقل زمان تناوب نوسان کامل برای میله‌ای به‌طول ۱ m درحدود ۱/۵ ثانیه است، و در آن صورت محور افقی به‌فاصلهٔ حدود ۲۹ cm بالای مرکزاست.

۳ـ زمان تناوب نوسانهای کوچك میلهٔ یکنواختی به‌طول ۱/۸ m حول محوری افقی که از یك انتهای آن می گذرد، درحالتی که به‌نقطهٔ وسط میله وزنه‌ای معادل وزن میله متصل شده باشد، چقدراست؟

۴ـ دریچه‌ای است به‌شکل مربع، که هرضلع آن ۱/۲ m وضخامت‌آن یکنواخت است. این دریچه به‌طورقائم به‌وسیلهٔ لولاهایش آویزان شده است. اگر آن را آزاد بگذارند تا نوسان کند و نوسانها با زاویهٔ کوچك انجام گیرد، در صورتی که اصطکاك لولاها ناچیز باشد، زمان تناوب نوسانها را پیداکنید.

۵ـ به‌یکی ازنقطه‌های محیطی قرص مدور یکنواختی به شعاع a وزنه‌ای متصل شده است که جرم آن با جرم قرص برابر است. قرص می‌تواند آزادانه حول محوری

افقی، که ازمرکزش می‌گذرد و برصفحه‌اش عمود است، بچرخد. به‌فرض آنکه شعاع ژیـراسیون قرص حول این محور برابر $\frac{a}{\sqrt{۲}}$ باشد، نشان دهید کـه طول آونگ سادهٔ معادل بـرای نوسانهای کوچك دستگاه حول وضع تعادل‌پایدارش برابر $\frac{۳a}{۲}$ است.

۶ـ چرخی است به‌قطر $۰/۶\,m$ و به‌جرم $۲۵\,kg$ که می‌توان تصورکردکه تمام جرم آن درمحیط چرخ به‌طور یکنواخت تـوزیع شده است. وقتی‌کـه این چرخ ۶۰۰ دور در دقیقه می‌زند چند ژول انرژی درچرخ ذخیره است؟ اگر به‌کمك ترمزهایی‌که برمحیط چرخ فشارمی‌آورد، چرخ را درمدت ۵۰ ثانیه ساکن‌کنند، نیروی ترمزرا تعیین‌کنید، به‌فرض آنکه ضریب اصطکاك میان لقمه ترمز ومحیط چرخ برابر ۰/۱ است.

۷ـ چرخ طیاری به‌جرم $۱۰۰\,kg$ حول محورش ۱۵۰ دور دردقیقه می‌زند، وتحت تأثیر زوج اصطکاکی ثابتی است به‌طوری‌که درمدت ۱۰ ثانیه با تندی ۱۰۰ دور دردقیقه می‌چرخد. تعیین‌کنید پیش ازآنکه متوقف شود چند دور دیگر خواهد زد. اگر اندازهٔ زوج برابر $۵۰\,N$ باشد، شعاع ژیراسیون چرخ را تعیین‌کنید.

۸ـ چرخی حول محوری ثـابت می‌چرخـد و ازطرف تکیه‌گـاههای محور چـرخ، زوج اصطکاکی‌ثابتی برچرخ وارد می‌شود. اگرچرخ را طوری به‌چرخش درآورندکه ۲۰۰ دور دردقیقه بزند و درمدت ۱/۵ دقیقه به‌حال سکون درآید، تعیین‌کنیدکـه در این مدت چند دورمی‌زند.

اگرگشتاورراینرسی چرخ حول‌محور برابر $۲۷۰\,kgm^۲$ باشد،گشتاور زوج‌اصطکاکی را تعیین‌کنید.

۹ـ چرخ طیارتوپری‌که قطرآن $۰/۶\,m$ است برای آنکه محور ازآن بگذرد سوراخ‌شده است. جرم این چرخ $۴۵۰\,kg$ است. به این چرخ محوری متصل شده است که قطر آن $۱۰\,cm$ وجرم آن $۵۰\,kg$ است. انرژی جنبشی چرخ ومحورهنگامی‌که ۱۲۰۰ دور در دقیقه می‌زنند چقدر است؟ چه زوج یکنواخت‌کندکننده‌ای باید برچـرخ وارد شود تا درمدت ۲ دقیقه آن را به حالت سکون در آورد، و درایـن مدت زاویـه‌ای که خواهد چرخید چقدراست؟

۱۰ـ دوچرخ مدور متساوی، هریك به جرم $۱۰۰\,kg$ و به‌شعاع $۴۸\,cm$ آزادانه دریك صفحهٔ افقی حول مراکزشان می‌چرخند.

میلهٔ رابطی به جرم $۴۰\,kg$ با محیط هر یك از دو چـرخ تماس دارد، وهمیشه بـه موازات خط‌المرکزین چرخهااست. نشان دهیدکه درصورتی‌که اصطکاك نباشد تندی زاویه‌ای چرخها ثابت است، وانرژی جنبشی‌کل دستگاه را ، اگرچرخها ۵۰ دوردر

دقیقه بزنند، وجرم آنها درمحیطشان متمرکزشده باشد، تعیین کنید.
اگردستگاه براثر گشتاورهای کندکننده‌ای که برهریك ازچرخها وارد می‌شود، پس‌از انجام ۶۰ دوران متوقف شود، گشتاورها را به‌فرض آنکه ثابتند تعیین کنید.

۱۱- استوانهٔ مدور یکنواختی به‌جرم M می‌تواند آزادانه حول محورش، که در وضعی افقی ثابت شده است، بچرخد. نخ انعطاف‌ناپذیر سبکی حول استوانه پیچیده شده و به‌انتهای آزاد آن، نقطه‌ای مادی به‌جرم m متصل است. اگردستگاه را به‌حرکت درآوریم، نشان دهید که نقطهٔ مادی با شتاب یکنواختی برابر مقدار زیر پایین خواهد آمد:

$$\frac{۲mg}{M+۲m}$$

۱۲- چرخ طیاری است به‌جرم ۵۰ kg که دارای محوری افقی به شعاع ۵ cm است. حول این محور، نخی پیچیده شده و به انتهای آزاد نخ وزنه‌ای به‌جرم ۵ kg آویزان است. اگر وزنهٔ ۵ کیلوگرمی درمدت ۱۶ ثانیه پس ازشروع حرکت ازحال سکون مسافتی برابر ۶ مترپایین بیاید، شعاع ژیراسیون چرخ طیار را تعیین کنید.

۱۳- بسته‌ای به جرم m به‌انتهای ریسمان سبکی که حول چرخی به‌جرم M پیچیده شده است آویزان است. اگرچرخ بتواند آزادانه حول محورش، که افقی است، بچرخدو اگرتمام جرم درمحیط چرخ متمرکزشده باشد، سرعت بستهٔ فوق هنگامی که مسافتی برابر x ازحالت سکون پایین آمده است چقدراست؟

۱۴- وزنه‌ای به‌جرم ۵ kg به‌انتهای نخی‌سبك که چندین بارحول‌قرقره‌ای به‌قطر ۰/۹m پیچیده شده است آویزان است. قرقره روی محوری افقی سوارشده است به طوری که حول آن آزادانه می‌تواند بچرخد. پس ازشروع حرکت ازحالت سکون، وزنه درمدت ۵ ثانیه مسافتی برابر ۴/۸ m سقوط می‌کند. ثابت کنیدکه، اگر درتکیه گاههای محورقرقره اصطکاکی‌وجود نداشته باشد، گشتاور اینرسی قرقره ۲۵ kgm^{۲} خواهد بود؟

۱۵ - چرخ طیاری است به‌جرم ۱kg وشعاع ژیراسیون ۱۵ cm که باتندی ۲۰ دور در دقیقه می‌چرخد، وبراثرزوج اصطکاکی‌ثابتی، که برتکیه گاههای محوروارد می‌شود، در مدت ۳ دقیقه به‌حالت سکون درمی‌آید. بزرگی این زوج را تعیین کنید. اگرنخ بدون لغزش از دورمحیط چرخ، که شعاع آن ۲۰ cm است، عبورکند و به‌هر دو انتهایش وزنه‌هایی آویزان باشد، که جرم یکی ازآنها ۳۰ گرم است، جرم وزنهٔ دیگرچقدرباشد تا اگر چرخ‌را به‌حرکت درآوریم این‌وزنه باتندی ثابت پایین‌بیاید؟

۱۶- وزنه‌ای به‌جرم $2/5\ kg$ به‌نخی متصل است که دور محیط چرخ طیاری به‌شعاع $30\ cm$ پیچیده شده است. جرم چرخ طیار $150\ kg$ است. پایین‌آمدن وزنه‌موجب چرخش چرخ طیار می‌شود. پس ازآنکه وزنه درمدت ۶ ثانیه مسافتی برابر $5/4\ m$ ازحالت سکون پایین آمد، ناگهان وزنه برداشته می‌شود و چرخ پس از ۵۰ دور متوقف می‌شود. اگرنیروهای اصطکاك درتمام مدت ثابت، و برابرنیروی مماسی F نیوتون باشندکه برمحیط چرخ وارد می‌شود، بزرگی F و شعاع ژیراسیون چرخ طیار را تعیین کنید.

۱۷- استوانهٔ توپر یکنواختی به‌جرم $28\ kg$ وقطر $0/3\ m$ می‌تواند حول محورش که افقی است، بچرخد. یك انتهای نخی به‌استوانه متصل است ونخ به دور استوانه پیچیده شده است. به‌انتهای دیگرنخ وزنه‌ای به جرم $2\ kg$ آزادانه آویزان است. اگر دستگاه ازحالت سکون شروع به‌حرکت کند و زوج اصطکاکی برابر $1/5\ Nm$ براستوانه وارد شود، تعیین کنید پس از ۳ ثانیه وزنهٔ ۲ کیلوگرمی چه اندازه پایین خواهدآمد.

۱۸- قرقره‌ای به‌جرم $20\ g$ وشعاع ژیراسیون $10\ cm$ حول محوری افقی که ازمرکزش می‌گذرد می‌چرخد. نخ انعطاف ناپذیر سبکی به‌دور قرقره افتاده است. نخ طوری ناصاف است که حول قرقره نمی‌لغزد. جرمهای $40\ g$ و $50\ g$ به دوانتهای نخ متصل است. اگر بتوان از اصطکاك محور قرقره صرف‌نظرکرد، شتاب وزنه‌ها را هنگامی که حرکت برقراراست تعیین کنید.

نیز، حداقل زوج اصطکاکی لازم راکه بتواند با وارد شدن برقرقره از حرکت قرقره جلوگیری کند تعیین کنید.

۱۹- ثابت کنیدکه انرژی‌جنبشی‌جسمی که باتندی زاویه‌ای ω حول محوری ثابت‌می‌چرخد برابر $\frac{1}{2}I\omega^2$ است که I گشتاور اینرسی جسم حول محوراست.

به دوانتهای نخی که ازشیارقرقره‌ای به‌جرم $5\ g$ عبورکرده است وزنه‌های $2\ g$ و $3\ g$ متصل شده است. شعاع قرقره $4\ cm$ است. اگردستگاه ازحالت سکون شروع به‌حرکت کند، معادلهٔ انرژی را، هنگامی که وزنهٔ سنگینتر به‌اندازهٔ x سانتیمترپایین آمده است، به‌دست‌آورید. اگرشتاب دستگاه $\frac{g}{10}$ باشد شعاع ژیراسیون قرقره را تعیین کنید.

۲۰- از روی قرقرهٔ سنگینی به‌قطر $20\ cm$ و گشتاوراینرسی 2×10^5 واحد SI نخ نازك سبکی عبورکرده است. به‌یك انتهای نخ وزنهٔ ۱ کیلوگرمی و به‌انتهای دیگر نخ

وزنهٔ ۱/۲ کیلوگرمی آویزان است. میان نخ وقرقره لغزشی وجود ندارد ومشاهده شده است که وزنهٔ سنگینتر درمدت ۴ ثانیه پس ازشروع حرکت مسافتی برابر ۲ متر پایین می‌آید.
مقدار گشتاور اصطکاك راکه ثابت است و درضمن حرکت برتکیه‌گاههای قرقره‌وارد می‌شود تعیین کنید.

۲۱- توضیح دهیدکه منظور ازاصل اندازهٔ حرکت‌زاویه‌ای چیست. لولهٔ راست یکنواختی به‌جرم M وطول $۲a$ آزادانه حول نقطهٔ وسطش می‌تواند بچرخد. دوانتهای‌لوله بسته است وداخل لوله مقداری‌گرد به‌جرم m وجود داردکه به‌طور یکنواخت در طول‌لوله توزیع شده است. لوله را دریك سطح افقی باتندی زاویه‌ای ω به‌دوران درمی‌آورند. گرد داخل‌لوله به‌روی دوانتهای لوله می‌لغزد ودرآنجا باقی‌می‌ماند. نشان دهیدکه وقتی‌که تمام‌گرد در دو انتهای لوله متمرکز شد، تندی زاویه‌ای به $(M+m)\omega/(M+۳m)$ کاهش می‌یابد.

۹. ۲۴. حرکت عمومی یك جسم صلب در دوبعد

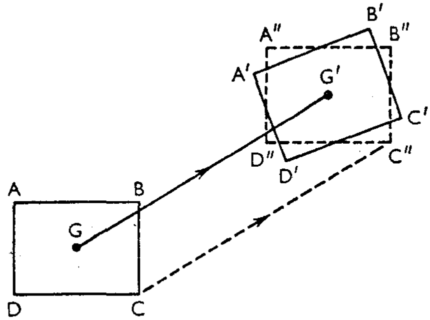
تا اینجا توجه خود را به‌حرکت جسم صلب حول محوری ثابت معطوف داشتیم. اکنون حالت‌کلیتری از حرکت را، که هیچ نقطه‌ای از جسم ثابت نیست، در دو بعد در نظر می‌گیریم.

می‌توان نشان دادکه یك جسم صلب را می‌توان ازیك وضع دلخواه به‌وضع‌دلخواه دیگر، به‌این ترتیب بردکه ابتدا نقطه‌ای ازآن را (مثلاً مرکزجرم آن را)، بدون دوران به‌وضع جدید برد وسپس جسم را حول این نقطه دوران داد.

قسمت اول این تغییر مکان به انتقال موسوم است؛ دراین حرکت همهٔ نقاط مادی جسم صلب دریك جهت و به‌یك اندازه حرکت می‌کنند. درقسمت دوم تغییرمکان، هر یك ازنقاط مادی جسم حول نقطهٔ انتخاب شده، قوسی ازدایره می‌پیماید.

مثلاً مستطیل ABCD (شکل ۹-۱۷) می‌تواند با نخستین حرکت، بدون دوران، از وضع ABCD به‌وضع A″B″C″D″ در آید. سپس با دوران حول G′ به وضع A′B′C′D′ درآید. درحرکت انتقالی، همه نقطه‌های مادی مستطیل به‌یك اندازه و به موازات GG′ حرکت می‌کنند.

نتیجه می‌شودکه اگر جسم به‌طور دائم در حرکت باشد، حرکتش را در هر لحظه می‌توان ترکیبی‌ازدوحرکت دانست که‌یکی با تندی‌انتقالی برابرتندی نقطهٔ معینی ازجسم، مثلاً مرکزجرم، ودیگری با تندی زاویه‌ای حول محوری که ازنقطهٔ انتخابی می‌گذرد



شکل ۹-۱۷

صورت می‌گیرد.

در واقع می‌توان نشان داد که

I- انرژی جنبشی یك جسم صلب درهرلحظه برابراست با انرژی جنبشی تمام جرم، که بنا به‌فرض در مرکز جرم G متمرکز شده است، و باتندی G درحال حرکت است به‌علاوهٔ انرژی جنبشی حرکت دورانی حول G.

II- اندازهٔ حرکت زاویه‌ای یك جسم صلب درهرلحظه حول هرمحور برابراست با اندازهٔ حرکت زاویه‌ای، حول آن محورکه تمام جرم بنا به‌فرض در مرکز جرم G متمرکز شده است و با تندی G درحال حرکت است، به‌علاوهٔ اندازهٔ حرکت زاویه‌ای، مربوط به حرکت دورانی حول G حول محوری موازی با محوراول که از G می‌گذرد.

۹.۲۵ فرض می‌کنیم M جرم جسم، V تندی مرکز جرم آن، ω تندی زاویه‌ای حول محوری که ازمرکزجرم می‌گذرد و Mk^2 گشتاور اینرسی حول این محورباشد.

بنابراین انرژی جنبشی جسم صلب

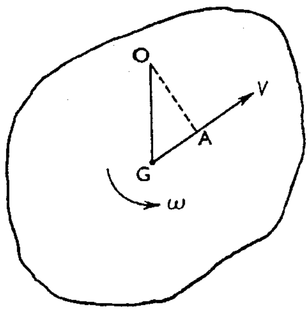
$$=\frac{1}{2}MV^2+\frac{1}{2}Mk^2\omega^2$$

نیزاندازهٔ حرکت زاویه‌ای جسم صلب حول محوری که از نقطه‌ای مانند O به موازات محوردوران می‌گذرد، برابر است با $MVp+Mk^2\omega$، که در آن p طول عمود OA از O درجهت حرکت مرکزجرم است. (باید درمورد علامت دوجزء اندازهٔ حرکت زاویه‌ای دقت بسیارکرد. درشکل ۹-۱۸ هردومثبت هستند.)

مثلاً اگرقرص مدوری به‌شعاع a وجرم m درامتداد صفحهٔ افقی ناصافی باتندی زاویه‌ای ω بغلتد، تندی مرکزجرم برابر ωa است.

بنابراین انرژی جنبشی حرکت انتقالی برابر $\frac{1}{2}m(\omega a)^2$ است. اما انرژی جنبشی حرکت دورانی حول محوری افقی که از مرکز جرم G می‌گذرد برابر $\frac{1}{2}I\omega^2$ است که $I=\frac{1}{2}ma^2$.

بنابراین انرژی جنبشی کل برابر است با $\frac{3}{4}m\omega^2a^2$.



شکل ۹-۱۸

این را می‌توان به صورت $\frac{1}{2}I'\omega^2$ نوشت که در آن $I'=\frac{3}{2}ma^2$، به عبارت دیگر، I' گشتاور اینرسی قرص حول محوری است که به موازات محور قرص از A می‌گذرد و A نقطه‌ای از محیط قرص است که با صفحهٔ افقی در تماس است. همان طور که قبلاً دیدیم، نقطهٔ A نقطه‌ای است که به‌طور لحظه‌ای ساکن است.

نیز اندازهٔ حرکت زاویه‌ای قرص که از G می‌گذرد برابراست با $I\omega=\frac{1}{2}ma^2\omega$.

اما اندازهٔ حرکت زاویه‌ای قرص حول محوری که به‌موازات محور قرص از A می‌گذرد برابراست با

$$(m\omega a)a+I\omega=\frac{3}{2}ma^2\omega=I'\omega$$

۹. ۲۶. معادله‌های دوبعدی حرکت جسم صلب

درمورد حرکت انتقالی وحرکت دورانی جسم صلب، برای نیروهایی که تولید حرکت می‌کنند، دوفرض مسلم اساسی باید درنظر گرفت.

این‌دوفرض مسلم عبارتند از اصل اندازهٔ حرکت خطی واصل اندازهٔ حرکت زاویه‌ای

که ممکن است به‌صورتهای زیربیان شوند.

I ـ میزان تغییراندازهٔ حرکت خطی یك جسم صلب درهرجهت دلخواه، برابر است با مجموع مؤلفه‌های نیروهای خارجی درآن جهت.

II ـ میزان‌تغییراندازهٔ حرکت زاویه‌ای یك جسم صلب حول هرمحور ثابت دلخواه برابر است با مجموع جبری گشتاورهای نیروهای خارجی حول این محور.

اما اندازهٔ حرکت خطی یك جسم صلب را،که به‌صورت مجموع برداری نقطه‌های مادی تشکیل دهندهٔ جسم تعریف شده است، می‌توان برابراندازهٔ حرکت تمام جرم آن، که درمرکزجرم G متمرکزشده است، وباتندی G حرکت می‌کند، دانست. بنابراین اصل اندازهٔ حرکت خطی به‌صورت زیربیان خواهد شد.

(الف) حرکت مرکزجرم یك جسم صلب، که برآن جسم نیروهای غیر مشخصی وارد شده‌اند، باحرکت درموردی‌که تمام جرم در مرکز جرم متمرکز شود وهمهٔ نیروها به موازات جهتهای قبلی براین نقطه وارد شوند، یکسان است.

اگر M جرم جسم وV تندی مرکزجرم جسم درلحظهٔ t باشد، داریم:

$$M\frac{dV}{dt}=V \text{ مجموع مؤلفه‌های همهٔ نیروها درجهت } \qquad (1)$$

به‌طریق مشابه، به‌سبب رابطهٔ II ازبند ۲۴.۹، اصل اندازهٔ حرکت زاویه‌ای به صورت زیربیان خواهد شد.

(ب) میزان تغییر اندازهٔ حرکت زاویه‌ای جسم حول محوری که از وضع سکون مرکز جرم وعمود برصفحهٔ حرکت می‌گذرد برابراست با مجموع جبری‌گشتاورهای نیروهای خارجی حول این محور.

به‌گفتهٔ دیگر، حرکت دورانی جسم درهرلحظه همانند حرکتی است‌که اگر مرکز جرم ثابت می‌بود وهمان نیروها برجسم اعمال می‌شدند، روی می‌داد.

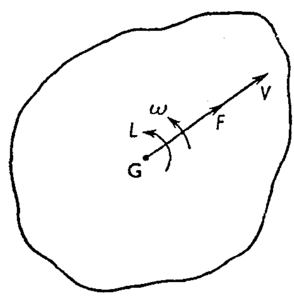
اگرI گشتاور اینرسی جسم حول‌محور دورانی باشدکه از وضع سکون G می‌گذرد، و ω تندی زاویه‌ای، حول این محور، درلحظهٔ t باشد داریم،

$$I\frac{d\omega}{dt}=\text{گشتاورهمهٔ نیروها حول این محور} \qquad (2)$$

معادله‌های (۱) و(۲) وشرایط هندسی دلخواه، برای حل مسائل حرکت یك جسم

صلب در دوبعد، هنگامی که نیروهای دلخواهی برجسم وارد شوند، کافی است.

نتیجه‌های (الف) و(ب) که معادله‌های (۱) و (۲) برآنها مبتنی‌هستند، ممکن‌است با توجه به‌این‌واقعیت که یك عده نیروهای متقارب که بریك جسم صلب اثرمی‌کنند معادل نیروی F هستندکه برمرکز جرم G وارد می‌شوند، و با توجه به‌گشتاور زوج L، تحقیق شوند. این نیروی F برابرمجموع برداری همهٔ نیروهایی است که برجسم وارد می‌شوند وممکن است مسئول حرکت انتقالی‌جسم شناخته شود. وحال‌آنکه گشتاور L برابر گشتاور همهٔ نیروها حول محوری است که از G می‌گذرد وحرکت دورانی جسم را حول این‌محور فراهم می‌کند. همان طور که درشکل ۹-۱۹ نشان داده شده است، V در جهت F است و ω درجهت L.



شکل ۹-۱۹

۹.۲۷. مثال۱: چرخی به‌قطر ۰/۹ m و به‌جرم ۳۲ kg، که می‌توان آن را چنین تصور کرد که جرم درمحیط چرخ متمرکزشده است، با سرعت ۱۸ km/h در امتداد جاده‌ای افقی می‌غلتد. انرژیی راکه درچرخ ذخیره است تعیین کنید.
اگر این‌چرخ به‌تپه‌ای برسدکه شیب جادهٔ آن به‌نسبت ۱ به ۵ است، تعیین کنید پیش ازآنکه متوقف شود تاچه مسافتی ازتپه بالاخواهد رفت؟ (درحرکت‌غلتشی درمقابل اصطکاك کارانجام نمی‌گیرد.)

حل : گشتاوراینرسی چرخ حول محوردورانش برابراست با

$$۳۲ \times \left(\frac{۰/۹۰}{۲}\right)^{۲} \mathrm{kgm}^{۲}$$

چون مرکز با تندی $۱۸ \times \frac{۱۰۰۰}{۳۶۰۰} \mathrm{m/s}$ حرکت می‌کند، تندی زاویه‌ای برابر

$\frac{۱۰۰}{۹} = ۰/۴۵ \div ۵$ رادیان برثانیه خواهد بود.

$$\text{انرژی جنبشی دوران} = \frac{۱}{۲} \times ۳۲ \times \left(\frac{۰/۹۰}{۲}\right)^۲ \times \left(\frac{۱۰۰}{۹}\right)^۲ \text{J}$$

$$\text{انرژی جنبشی ناشی ازانتقال} = \frac{۱}{۲} \times ۳۲ \times ۲۵ \text{ J}$$

$$\text{انرژی کل جنبشی} = ۴۰۰ + ۴۰۰ = ۸۰۰ \text{ J}$$

چرخ ازتپه تا آنجا بالا می‌رودکه افزایش انرژی پتانسیل‌آن برابر انرژی‌جنبشی آن درسطح افقی باشد (فرض می‌کنیم که هنگامی که شروع به بالا رفتن ازتپه می‌کند تغییری درسرعت آن داده نمی‌شود).

پس اگرارتفاع قائمی که بالا می‌رود x مترباشد،

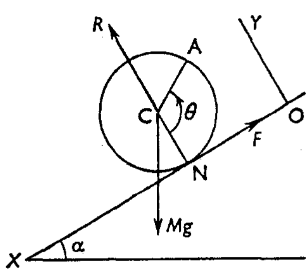
$$۳۲ \times ۹/۸\, x = ۸۰۰$$

$$\therefore \quad x = \frac{۸۰۰}{۳۲ \times ۹/۸} = ۲/۵۵$$

بنابراین مسافتی که ازتپه بالا می‌رود برابراست با $۱۲/۷۵\ \text{m}$.

مثال ۲: کرهٔ توپری به‌جرم M وشعاع a از سطح شیبداری به‌طرف پایین می‌غلتد. این سطح شیبدار به‌اندازه‌ای ناصاف است که ازحرکت لغزشی کره جلوگیری‌می‌کند. حرکت کره را مشخص کنید.

حل : فرض می‌کنیم α زاویهٔ سطح شیبدار با افق باشد، و O (شکل ۹ـ۲۰) نقطهٔ



شکل ۹ـ۲۰

تماس سطح شیبدار باکره درهنگامی باشدکه کره درابتدا ساکن بود. مرکزکره را به C ونقطهٔ تماس اولیهٔ کره‌را با سطح شیبدار به A، ونقطهٔ تماس کره را باسطح شیبدار درلحظهٔ t به N نشان می‌دهیم.

O را مبدأ، ON را محور x ها و CA را به‌عنوان خط ثابت جسم، وخط عمود برسطح را به‌عنوان خط ثابت درفضا برای اندازه‌گیری تندی زاویه‌ای درنظر می‌گیریم وفرض می‌کنیم که زاویهٔ ACN برابر θ است.

نیروهای خارجیی که برکره وارد می‌شوند عبارتند از اصطکاك F به طرف بالای سطح، عکس‌العمل R عمود برسطح، ووزن کره درامتداد قائم وبه طرف پایین. حرکت مرکزجرم را به‌موازات ونیز عمود برسطح درنظرمی‌گیریم.

$$M\ddot{x} = Mg \sin \alpha - F \qquad (۱)$$

و

$$M\ddot{y} = R - Mg \cos \alpha \qquad (۲)$$

حول مرکزجرم C گشتاور می‌گیریم، درنتیجه،

$$Mk^2\ddot{\theta} = Fa \qquad (۳)$$

چون‌کره با سطح درتماس باقی می‌ماند،

$$\ddot{y} = 0$$

$$\therefore \quad R = Mg \cos \alpha$$

چون لغزش وجود ندارد،

$$x = a\theta$$

$$\therefore \quad \ddot{x} = a\ddot{\theta} \qquad (۴)$$

نیز $k^2 = \frac{2}{5}a^2$ و از (۳) و (۴) چنین داریم،

$$F = \frac{2}{5}Ma\ddot{\theta} = \frac{2}{5}M\ddot{x}$$

درنتیجه از (۱):

$$\therefore \quad \frac{7}{5}M\ddot{x} = Mg \sin \alpha$$

$$\therefore \quad \ddot{x} = \frac{5}{7}g \sin \alpha$$

از (۱):

$$F = \frac{2}{7}Mg \sin \alpha$$

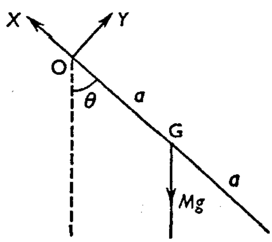
و
$$R = Mg \cos\alpha$$

$$\therefore \qquad \frac{F}{R} = \frac{۲}{۷} tg\,\alpha$$

بنابراین ضریب اصطکاك لازم برای جلوگیری ازلغزش، کمتر از $\frac{۲}{۷} tg\,\alpha$ نیست.

مثال ۳: میلهٔ نازك یکنواختی به‌طول $۲a$ ازیك انتهای O به‌لولای صافی متصل‌شده‌است ومی‌تواند ازیك وضع افقی بیفتد. نشان دهیدکه نیروی فشار افقیی که برلولا وارد می‌شود، هنگامی که میله با خط قائم زاویهٔ $۴۵°$ می‌سازد بزرگترین‌مقدار را دارد و نیزنشان دهیدکه نیروی فشاری قائم دراین حالت $\frac{۱۱}{۸}$ برابر وزن میله است.

حل :



شکل ۹-۲۱

فرض می‌کنیم G (شکل ۹-۲۱) مرکزثقل میله باشد.
فرض می‌کنیم M جرم میله و θ زاویهٔ انحراف میله‌ازخط قائم درلحظهٔ t باشد.
مؤلفه‌های عکس‌العملی راکه در O وارد می‌شوند، درامتداد عمود بر میله به ترتیب به X و Y نمایش می‌دهیم.

تندی G برابر $a\left(\frac{d\theta}{dt}\right)$ وعمود برمیله است. بنابراین شتاب آن درامتداد عمود بر میله برابر $a\left(\frac{d^۲\theta}{dt^۲}\right)$ و به‌طرف O برابر $a\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^۲$ است (زیرا G دایره‌ای به شعاع a را باتندی زاویه‌ای متغیر $\frac{d\theta}{dt}$ می‌پیماید).

بنابراین معادله‌های حرکت G چنین هستند:

$$Ma\frac{d^2\theta}{dt^2}=Y-Mg\sin\theta \qquad (۱\text{– الف})$$

و
$$Ma\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=X-Mg\cos\theta \qquad (۱\text{– ب})$$

وبا گرفتن گشتاور حول محوری که از G به‌موازات محوردوران حول O می گذرد، چنین خواهیم داشت:

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2}=-Ya \qquad (۲)$$

که درآن $I=\frac{1}{3}Ma^2$ است.

از (۱– الف) و (۲) چنین خواهیم داشت:

$$Ma^2\ddot{\theta}=\frac{1}{3}Ma^2\ddot{\theta}-Mga\sin\theta$$

$$\therefore \qquad \frac{4}{3}Ma^2\ddot{\theta}=-Mga\sin\theta \qquad (۳)$$

یادآوری می کنیم که، مانند آنچه قبلاً در ۱۹.۹ عمل کردیم، معادلهٔ اندازهٔ حرکت زاویه‌ای را حول محورثابتی که از O می گذرد می‌توان مستقیماً نوشت. بنابراین از (۲) و(۳) یا از (۱– الف) و(۳)،

$$Y=-\frac{1}{3}Ma\ddot{\theta}=\frac{1}{4}Mg\sin\theta$$

با انتگرال گیری از (۳) یا بااستفاده ازمعادلهٔ انرژی، چنین خواهیم داشت:

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=\frac{3g}{2a}\cos\theta+C$$

چون هنگامی که $\theta=\frac{1}{2}\pi$ است $\frac{d\theta}{dt}=0$ است، C باید صفرباشد.

بنابراین از (۱– ب)،

$$X=\frac{3}{2}Mg\cos\theta+Mg\cos\theta=\frac{5}{2}Mg\cos\theta$$

نیروی فشارافقی در O

$$X\sin\theta-Y\cos\theta=\frac{5}{2}Mg\sin\theta\cos\theta-\frac{1}{4}Mg\sin\theta\cos\theta$$

$$=\frac{۹}{۴}Mg\sin\theta\cos\theta$$

$$=\frac{۹}{۸}Mg\sin ۲\theta$$

آشکار است که این مقدار هنگامی که $۲\theta=۹۰^\circ$ یعنی هنگامی که $\theta=۴۵^\circ$ است ماکزیمم است.

نیروی فشاری قائم در O برابر است با :

$$X\cos\theta+Y\sin\theta=\frac{۵}{۲}Mg\cos^{۲}\theta+\frac{۱}{۴}Mg\sin^{۲}\theta$$

و وقتی که $\theta=۴۵^\circ$ است، برابرمی‌شود با

$$\frac{۵}{۴}Mg+\frac{۱}{۸}Mg=\frac{۱۱}{۸}Mg$$

مثال ۴: محور یك دوك نخ، به‌جرم m، استوانه‌ای است بـه شعاع a و گشتاور اینرسی دوك حول محورش برابر $mk^{۲}$ است. انتهای آزاد نخ را گرفته‌ایم و دوك را رها کرده‌ایم تا ضمن پایین آمدن نخ از دورآن باز شود. محوردوك در جهت افقی ثابت باقی می‌ماند. نشان دهید که شتاب دوك $ga^{۲}/(a^{۲}+k^{۲})$ است، و کشش نخ را پیدا کنید.

نیزنشان دهید که شتابی که باید به‌انتهای آزاد نخ به‌طرف بالا داد تا مرکز ثقل دوك ساکن باشد برابر است با $ga^{۲}/k^{۲}$.

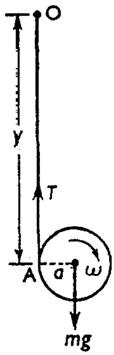
حل :

درشکل ۹ـ۲۲، انتهای نخ در O نگاهداشته شده است. فرض می کنیم T کشش نخ و ω تندی زاویه‌ای دوك‌درلحظهٔ t باشد.

اگردرلحظهٔ t محور دوك به‌فاصلهٔ y در زیر O باشد، شتاب مرکـز ثقل $\frac{d^{۲}y}{dt^{۲}}$ است ومعادله‌های حرکت عبارتند از

$$m\frac{d^{۲}y}{dt^{۲}}=mg-T \qquad (۱)$$

$$mk^{۲}\frac{d\omega}{dt}=Ta \qquad (۲)$$



شکل ۹-۲۲

اما شتاب نقطهٔ A ازنخ هنگامی‌که ازمحور دوك جدا می‌شود برابراست با $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-a\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$ وبدیهی است‌که برابرصفر است. پس

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=a\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} \tag{۳}$$

از (۱) و (۲)

$$m\left(a\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+k^2\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\right)=mga$$

$$\therefore \quad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\left(a+\frac{k^2}{a}\right)=ga$$

$$\therefore \quad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=\frac{ga^2}{a^2+k^2}$$

پس

$$T=m\left(g-\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\right)=\frac{mgk^2}{a^2+k^2}$$

اگر به O شتابی برابر f به‌طرف بالا داده شود، کشش‌جدید نخ را به T_1 وتندی زاویه‌ای دوك را درلحظهٔ t به ω_1 نمایش می‌دهیم.

چون مرکزثقل ساکن است،

$$T_1-mg=0$$

وچون دوك با شتاب زاویه‌ای $\frac{\mathrm{d}\omega_1}{\mathrm{d}t}$ می‌چرخد،

$$mk^2\frac{\mathrm{d}\omega_1}{\mathrm{d}t}=T_1\times a$$

$$\therefore \qquad k^{2}\frac{d\omega_1}{dt}=ga$$

اما شتاب نقطهٔ A نخ، دراین‌حالت برابر $a\left(\frac{d\omega_1}{dt}\right)$ است و نیز برابر f است.

پس
$$a\frac{d\omega_1}{dt}=f$$

$$\therefore \qquad f=\frac{ga^{2}}{k^{2}}$$

تمرین ۴.۹

۱- نشان دهیدکه شتاب یك قرص مدور یکنواخت‌که ازسطح شیبداری‌که زاویهٔ انحراف آن با افق برابر α است به‌پایین می‌غلتد، درصورتی‌که ناصافی سطح به‌قدری باشد که ازلغزش قرص جلوگیری کند، برابراست با $\frac{2}{3}g\sin\alpha$.

۲- حلقهٔ مدور نازك یکنواختی ازیك سطح شیبدارناصاف‌که زاویهٔ آن با افق برابر α است به‌پایین می‌غلتد. ناصافی سطح به اندازه‌ای است‌که ازلغزش حلقه جلوگیری می‌کند. نشان دهیدکه شتاب پایین آمدن حلقه برابر $\frac{1}{2}g\sin\alpha$ است. نیز نشان دهید که حداقل ضریب اصطکاك سطح برای جلوگیری ازلغزش برابر $\frac{1}{2}tg\,\alpha$ است.

۳- یك انتهای نخی‌که به دوریك دوك پیچیده شده است ثابت است و دوك در یك خط قائم سقوط می‌کند. محور دوك افقی می‌ماند و قسمت باز شدهٔ نخ، قائم است. اگر محور دوك استوانهٔ توپری به‌شعاع a وجرم M باشد، نشان دهیدکه شتاب مرکز دوك برابر است با $\frac{2}{3}g$ وکشش نخ برابر است با $\frac{1}{3}Mg$.

۴- تیرآهنی را برروی سه غلتك قرارداده و آن را با سرعت ۰٫۲ km/h به‌جلوفشار می‌دهیم. قطرهریك ازغلتکها ۱۵ cm است. اگر لغزشی وجود نداشته باشد، سرعت حرکت آنها به‌طرف جلوچقدرخواهد بود؟ اگرجرم تیرآهن ۱ Mg و جرم هریك از غلتکها ۱۰۰ kg باشد، انرژی جنبشی دستگاه را تعیین کنید.

۵- جرم‌کل یك واگن راه‌آهن ۲ Mg است. این واگن دارای دوجفت چرخ است که‌جرم هر جفت ازآنها با محوری‌که به آن متصل است ۲۴۰ kg است. شعاع ژیراسیون هرچرخ ۲۵ cm است. فاصلهٔ مرکزمحور تا ریل برابر ۳۶ cm است. انرژی‌جنبشی

واگن را هنگامی کـه با سرعت ۱۸ m/s حرکت می‌کند تعیین کنید. اگر این واگن بتوانـد به‌کمك ترمزها، بدون آنکه چرخها برروی ریلها بلغزند، در مدت ۸۰ ثانیه به‌حالت سکون درآید، نیروی کندکنندهٔ حرکت را که به‌وسیلهٔ ریلها اعمال می‌شود، به‌فرض آنکه ثابت باشد، تعیین کنید.

۶ـ ثابت کنیدکـه گشتاور اینرسی یك لولهٔ استوانه‌ای شکل یکنواخت به‌جرم M، حول محورش، بـرابر $\frac{1}{2}M(a^2+b^2)$ است، که درآن a و b شعاعهای داخلی وخارجی لوله است.

لوله از حالت سکون بـه‌راه می‌افتد و در عین حال کـه محورش افقی است از سطح شیبداری که زاویهٔ آن با افق برابر α است، پایین می‌آید. نشان دهید که T مـدت زمانی که طول می‌کشد تا لـولـه مسافت l را در امتداد سطح بپیماید از ایـن رابطه به‌دست می‌آید:

$$l\left(3+\frac{a^2}{b^2}\right)=gT^2 \sin\alpha$$

۷ـ مرکزجرم استوانه‌ای مدور به‌شعاع r درمحورش قـراردارد وشعاع ژیراسیون ایـن استوانه حول‌محورش برابر k است. ثابت کنیدکه وقتی که این‌استوانه ازسطح‌شیبداری با زاویهٔ α به‌طرف پایین می‌غلتد شتاب آن برابراست با

$$\frac{r^2 g \sin\alpha}{r^2+k^2}$$

۸ـ ثابت کنیدکه اگر تندی دورانی یك جسم صلب صفرباشد، مجموع گشتاورهای نیرو-هایی که برآن اثرمی‌کنند نسبت به مرکزجرم آن باید برابرصفرباشد، حتی اگـرجسم دارای شتاب انتقالی باشد.

مرکـز ثقل میزی در ۱/۲ m بـالای یك سطح افقی صاف و درنیمه راه میان جفت پایه‌های عقب وجلواست. فاصلهٔ این پایه‌ها ازیکدیگر ۱/۵ m است. جرم میز M کیلوگرم است. نیرویی برابر $\frac{1}{4}Mg$ نیوتون، به‌طورافقی در ۰/۹ m بالای سطح افقی و بروسط جفت پایه‌های جلویی وارد می‌شود ومیز را شتابدار می‌کند. نیروی‌عکس-العمل سطح افقی راکه به‌طرف بالا برهریك ازجفت پایه‌ها وارد می‌شود تعیین کنید.

۹ـ حلقهٔ مدورنازکی به‌وزن W می‌تواندآزادانه حول مماس افقی ثابتی حرکت کند. این حلقه از وضعی رها می‌شودکه قائم است به‌طوری‌کـه مرکزش، دریك صفحهٔ قـائم، دایره‌ای عمود برمماس می‌پیماید. نشان دهید در اوضاعی که حلقه قائم است، کشش

تکیه‌گاه یا $\frac{11}{3}W$ یا W است.

۱۰- انتهای میلهٔ یکنواختی به‌وزن W می‌تواند آزادانه حول لولای صیقلی ثابتی بچرخد. انتهای دیگرمیله آزاد است. میله را دروضع افقی نگاه می‌دارند وآن را رهامی‌کنند تا به حرکت درآید. ثابت کنید هنگامی که میله با خط قائم زاویهٔ θ می‌سازد، نیروی فشاریی که برلولا وارد می‌شود برابراست با $\frac{1}{4}W\sqrt{1+99\cos^2\theta}$.

۱۱- استوانهٔ مدور توپر یکنواختی تحت اثرجاذبهٔ زمین حول یك مولد افقی دورانهای کامل انجام می‌دهد. ثابت کنیدکه تکیه‌گاه باید بتواند حداقل $\frac{11}{3}$ وزن استوانه را تحمل کند.

۱۲- تیغهٔ مدور یکنواختی به وزن W می‌تواند در یك صفحهٔ قائم حول محوری عمود برصفحه‌اش که ازنقطه‌ای واقع برمحیطش می‌گذرد بچرخد. اگرازحالت سکون از وضعی شروع به‌حرکت کندکه قطری که ازاین نقطه می‌گذرد افقی باشد، ثابت کنید که مؤلفه‌های افقی وقائم نیروی فشاریی که برمحور، درهنگامی که این قطر با افق زاویهٔ θ می‌سازد، وارد می‌شوند برابرند با

$$\frac{1}{3}W\,(4-3\cos 2\theta) \quad \text{و} \quad W\sin 2\theta$$

۱۳- تیغهٔ یکنواختی به‌شکل مربع ABCD، به‌ضلع $2a$، در صفحهٔ خودش، و حول محوری که از A عمود برصفحه می‌گذرد نوسان می‌کند. در وضع نهایی ضلعی از مربع به‌طورقائم وبه‌طرف پایین‌است. نشان دهیدکه بزرگترین‌تندی گوشهٔ C برابر $[6ga(\sqrt{2}-1)]^{\frac{1}{2}}$ است. ثابت کنید که، هنگامی که AC به‌طورقائم است، نیروی فشاریی که برمحور وارد می‌شود ۱٫۴۴ برابر وزن تیغه است.

۱۴- مکعبی یکنواخت حول یکی ازیالهایش که افقی‌است نوسان می‌کند. دربالاترین‌وضع، مرکز مکعب ومحور دوران همترازند. نیروی فشاریی راکه در هروضع برمحور وارد می‌شود پیداکنید ونشان دهیدکه این نیرومیان $\frac{1}{4}W$ و $\frac{5}{2}W$ تغییرمی‌کند، که W وزن مکعب است. (گشتاور اینرسی مکعبی به‌جرم M وضلع $2a$ نسبت به محوری که از مرکزمکعب و به موازات یال آن می‌گذرد برابر $\frac{2}{3}Ma^2$ است.)

۱۵- مکعب یکنواختی می‌تواند آزادانه حول یکی از یالهایش که افقی است بچرخد. نشان دهید که طول آونگ سادهٔ معادل آن برابر $\frac{2}{3}a$ است که a طول قطر یکی از

وجوه مکعب است. نیزنشان دهیدکه اگرمکعب ازحال سکون و از بالاترین وضع خود رها شود، مؤلفهٔ قائم نیروی فشاریی که بریال ثابت وارد می‌شود، هنگامی که مکعب به‌اندازهٔ زاویه‌ای برابر $\operatorname{Arc}\cos\left(\frac{۱}{۳}\right)$ می‌چرخد، خنثی می‌شود.

۱۶- استوانه‌ای به‌شعاع a وجرم M که گشتاور اینرسی‌آن نسبت به‌محورش $Mk^۲$است آزادانه حول‌محورسبکی که به‌آن‌تکیه دارد می‌چرخد ودرامتداد دومیلهٔ افقی‌صیقلی که عمود بر طول استوانه‌اند می‌لغزد. نخ سبکی حول استوانه پیچیده شده است و انتهای آزاد نخ به‌طور افقی ازشیارصیقلی قرقره‌ای ساکن‌گذشته است ووزنه‌ای به جرم m را حمل می‌کند. نشان دهیدکه هنگامی که دستگاه آزادانه حرکت می‌کند، کشش نخ برابر است با

$$\frac{Mmk^۲g}{(M+m)k^۲+ma^۲}$$

تمرینهایی برای مرور بخشهای قبل

۱- نقطه‌ای مادی باسرعت u ازپایینترین نقطهٔ یك کرهٔ توخالی صیقلی ثابت طوری پرتاب می‌شودکه درسطح داخلی‌کره بلغزد. شعاع‌کره برابر a است. ثابت کنیدکه اگر $۲ga < u^۲ < ۵ga$ باشد، نقطهٔ مادی، کره را درارتفاعی‌برابر $(u^۲+ga)/۳g$ بالای نقطهٔ شروع ترك خواهدکرد.

اگر $u=\sqrt{\frac{۷ga}{۲}}$ باشد، نشان دهیدکه نقطهٔ مادی‌کره را ترك می‌کند و در نقطهٔ شروع باآن برخورد می‌کند.

۲- ازبالاترین نقطهٔ کرهٔ ثابت صیقلیی، نقطه‌ای مادی به‌آرامی ازحال سکون شروع به حرکت می‌کند. شعاع‌کره برابر a است. این نقطهٔ مادی پس از ترك‌کره تحت اثر جاذبهٔ زمین آزادانه حرکت می‌کند. بزرگی وجهت تندی این نقطهٔ مادی هنگامی که با صفحهٔ افقی ثابتی، که با پایینترین نقطهٔ کرهٔ درتماس است، برخورد می‌کند چقدراست؟

۳- جرم‌کوچك m به وسیلهٔ نخ سبك انعطاف‌ناپذیری به‌طول a به نقطهٔ ثابت O متصل است. وقتی‌که به‌طورقائم در زیرO و به حال سکون است، با سرعت افقی uکه $u^۲=kga$ است پرتاب می‌شود. هنگامی‌که نخ با امتداد قائمی‌که به‌طرف پایین‌است زاویهٔ θ می‌سازد عبارتی را به‌دست‌آوریدکه‌کشش نخ را به‌دست بدهد و ازآن‌حداقل k راکه جرم مذکور بتواند دایره‌ای‌کامل دریك صفحهٔ افقی بزند نتیجه بگیرید.

اگر k ازاین مقدارحداقل زیادترشود، نشان دهید کـه k دیگرهرچه باشد، اختلاف میان بیشترین و کمترین کشش نخ یکسان می‌ماند.

۴ـ وزنـه‌ای به‌جرم m به‌وسیلهٔ نخی به‌طول l به نقطهٔ O متصل است. این وزنـه را در نقطهٔ C به‌فاصلهٔ $l\sqrt{\frac{3}{2}}$ از O وهمتراز با O نگاه می‌داریـم وسپس آن را رهـا می‌کنیم. نشان دهیدکـه هنگـامی کـه نخ نـاگهان محکـم می‌شود ضربه‌ای برابـر $\frac{1}{2}m\sqrt{gl}$ برنخ وارد می‌شود وفـوراً پس ازآن،کشش نخ برابر $\frac{5\,mg}{4}$ می‌گردد.

۵ـ مسیری منحنی‌که شعاع انحنای آن r است به‌وسیلهٔ یك اتومبیل با سرعت u پیموده می‌شود. نشان دهیدکه اگرفشارجانبی برچرخها وارد نشود، عرض جاده دارای‌شیبی است‌که زاویهٔ‌آن باافق برابر $\mathrm{Arc}\,tg\dfrac{u^2}{gr}$ است. اگراین اتومبیل درهمین‌پیچ باسرعتی برابرvکه بزرگتراز u است حرکت کند،نشان دهیدکه‌نیروی‌فشاری جانبی‌که‌برچرخها وارد می‌شود برابر $W(v^2-u^2)/(u^4+g^2r^2)^{\frac{1}{2}}$ است، که W وزن اتومبیل است.

۶ـ A نقطهٔ ثابتی است‌که ارتفاع آن ازبالای سطح افقی صیقلی‌کاملاً کشسانی برابر h است. نخ سبك انعطاف ناپذیری به‌طول l (که $l>h$ است) ازیك انتها به‌نقطهٔ A متصل است وبه‌انتهای دیگر آن وزنهٔ سنگینی متصل است. وزنه را همتراز بـا A طوری نگاه می‌دارندکه نخ به‌طورکشیده قرارگیرد. سپس وزنه را ازحال سکون رها می‌کنند. نشان‌دهیدکه هنگامی‌که وزنه برای باردوم به‌حال‌سکون لحظه‌ای درمی‌آید ارتفاع آن ازسطح برابر h^5/l^4 است.

۷ـ یك انتهای میلهٔ سبکی به طول $0{,}6\ \mathrm{m}$ طوری لـولا شده است کـه میله آزادانـه می‌تواندحرکت‌کند. میله به‌طور قائم آویزان است و به‌انتهای پایینی آن وزنه‌ای به جرم $0{,}5\ \mathrm{kg}$ متصل است. اگراین وزنه به طورافقی با تندی $4{,}8\ \mathrm{m/s}$ پرتـاب شود، نشان دهیدکه میله درست به‌وضعی خواهد رسیدکه وزنه به‌طورقائم بالای‌لولا قرارگیرد. کشش میله را هنگامی‌کـه افقی است، نیز زاویه‌ای‌کـه میله، هنگامی‌کـه فشاری وارد نمی‌کند تعیین کنید.

۸ـ زمان دوران یك آونگ مخروطی را تعیین‌کنید. دوانتهای نخ سبکی به‌طول $2a$ به دونقطهٔ A و B که بریك خط قائم واقعند متصل شده است. A در بالای B است و $AB=2c$. نخ ازیك حلقهٔ‌کوچك صیقلی به‌جرم m عبور می‌کند. نشان دهیدکه‌اگر حلقه دایره‌ای افقی وهمتراز با B بزند، تندی v آن از رابطهٔ $v^2=\dfrac{(a^2-c^2)g}{c}$ به

دست می‌آید.

۹ ـ نخ سبك انعطاف ناپذیری ازیك حلقهٔ صیقلی کوچك A، که ثابت است و صفحهٔ آن افقی است عبور کرده است. به‌انتهای B نخ وزنه‌ای به جرم M به‌حال سکون آویزان است. به‌انتهای C نخ وزنه‌ای به‌جرم m بسته شده است. اگر C دایره‌ای افقی به‌شعاع a و به‌فاصلهٔ b در زیر A بپیماید، نسبت M/m وتندی زاویه‌ای صفحهٔ BAC را بیابید.

اگر B به فاصلهٔ d در زیر A باشد و نخ AC ناگهان بریده شود، t ثانیه پس از بریده شدن نخ فاصله‌های افقی وقائم میان B و C را پیدا کنید.

۱۰ـ نقطه‌ای مادی دایره‌ای به‌شعاع r باتندی زاویه‌ای یکنواخت ω می‌پیماید، بزرگی وجهت شتاب آن را پیدا کنید.

پنج میلهٔ سبك، هریك به‌طول a، به‌هم متصل شده‌اند که تشکیل یك لوزی OACB را داده‌اند. قطر AB لوزی میله‌ای است که هریك ازدوانتهای آن به‌دومیله متصل شده است. نقطه‌هایی مادی به جرمهای m_1 وm_2 و m_3 به‌ترتیب به A و B و C متصل شده‌اند. این داربست لوزی شکل، باتندی زاویه‌ای ω دریك صفحهٔ افقی، حول محورقائم ثابتی که از O می‌گذرد، دوران می‌کند. نیروهایی را که برمیله‌ها وارد می‌شوند پیدا کنید. کششها وعکس‌العملهایی را که برمیله‌ها وارد می‌شوند از یکدیگرمتمایز کنید.

۱۱ـ نقطه‌ای مادی مجبوراست که درداخل لولهٔ مدورافقیی به‌شعاع a که پایینترین نقطهٔ آن A است و AB و CD قطرهای قائم وافقی لوله‌اند حرکت کند. این نقطهٔ مادی با سرعت u ازنقطهٔ C به‌طرف پایین پرتاب می‌شود ونیروی فشاریی که ازطرف لوله برآن وارد می‌شود، هنگامی که ازنقطهٔ وسط قوس BD می‌گذرد از خارج به داخل تغییرجهت می‌دهد. u را تعیین کنید وببینید نقطهٔ مادی با چه سرعتی به B می‌رسد. اگرقسمتی ازلوله که میان B وC است برداشته شده باشد، تعیین کنید که نقطهٔ مادی درچه نقطه‌ای لوله را ترك خواهدکرد.

۱۲ـ حرکت تناوبی ساده را تعریف کنید و از روی تعریف خود ثابت کنید که اگر سرعت یك نقطهٔ مادی درچنان حرکتی، هنگامی که فاصله‌اش ازوضع متوسط x است، برابر v باشد، دراین‌صورت

$$v^2T^2 = 4\pi^2(a^2 - x^2)$$

که a دامنه وT زمان تناوب حرکت‌است. اگرهنگامی که فاصلهٔ نقطهٔ مادی ازوضع

متوسط برابر $\frac{2a}{3}$ است، تندی سه‌برابرشود وزمان‌تناوب تغییری نکند، دامنهٔجدید حرکت را تعیین کنید.

۱۳- نقطه‌ای مادی که حرکت تناوبی ساده انجام می‌دهد ازیك نقطهٔ معین، درفاصله‌های زمانی متناوب $2s$ و $6s$، با سرعت $0/9 m/s$ می‌گذرد. زمان تناوب، دامنه و ماکزیمم سرعت حرکت را تعیین کنید.
نقطهٔ معین‌مذکورفاصلهٔ میان دووضع سکون‌لحظه‌ای را به‌چه نسبتی‌تقسیم می‌کند؟

۱۴- روی‌سکویی که به‌طورافقی‌عقب وجلومی‌رود وحرکت تناوبی‌ساده بادامنهٔ $0/6m$ و درهردقیقه ۲۰ نوسان‌کامل انجام می‌دهد وزنه‌ای قراردارد. اگروزنه نسبت به سکو، درضمن‌حرکت‌سکو، ساکن‌بماند، نشان دهیدکه ضریب اصطکاك کمتراز $0/274$ نیست.

۱۵- (الف) اگرنقطه‌ای مادی حرکت تناوبی ساده انجام دهد، نشان دهیدکه سرعت متوسط آن برای پیمودن مسیرکامل دریك جهت نسبت به‌حداکثر سرعت آن تقریباً برابر $0/64$ است. (ب) نقطه‌ای مادی که حرکت تناوبی ساده انجام می‌دهد، سرعتش ضمن گذشتن ازیك نقطه و بازگشت به‌آن نقطه درفاصله‌های زمانی t_1، t_2، t_1، t_2، ... برابر V است. ثابت کنیدکه ماکزیمم سرعت نقطهٔ مادی برابراست با

$$\frac{V}{\cos\left\{\frac{(\pi t_1 - t_2)}{2(t_1 + t_2)}\right\}}$$

۱۶- نشان دهیدکه درنوسانهای کوچك، گلولهٔ آونگ حرکت تناوبی ساده انجام می‌دهد، وسپس زمان تناوب را پیدا کنید. نقطهٔ مادی سنگینی درنقطهٔ C به نخ سبکی که به نقطهٔ ثابت A متصل است بسته شده است. نقطهٔ وسط نخ (وقتی‌که نخ به‌طورقائم آویزان است) به‌لبهٔ افقی B که نقطهٔ وسط AC است گیر می‌کند. نقطهٔ مادی را به‌صورت یك آونگ درصفحهٔ عمود براین لبه به‌نوسان درمی‌آورند. به این ترتیب درقسمتی ازحرکت، نقطهٔ مادی حول A نوسان می‌کند و درقسمت دیگرحول B نوسان‌می‌کند. مدت‌زمانهای پیمودن این‌دوجزء حرکت را ونیزدامنه‌های زاویه‌ای را (که‌کوچك فرض می‌شوند) باهم مقایسه کنید.

۱۷- یك انتهای نخ‌کشسان سبکی ثابت است وانتهای دیگرآن به‌وزنه‌ای به‌جرم m که آزادانه تحت اثرجاذبهٔ زمین‌آویزان است متصل‌است. نشان دهیدکه اگر به‌نقطهٔ مادی تغییرمکان قائم کوچکی نسبت به‌وضع تعادلش داده شود، این نقطهٔ مادی

نوسانهای تناوبی‌ساده‌ای بازمان تناوب $۲\pi\sqrt{am/\lambda}$ انجام‌خواهد داد. که a طول طبیعی نخ و λ ضریب کشسانی نخ است.

اکنون وزنه را به نقطهٔ وسط نخ می‌بندیم و دوانتهای نخ را به دونقطه‌که در یك خط قائم‌مند ثابت می‌کنیم. درهروضع تعادل هر دو جزء نخ به حالت کششند. نشان دهیدکه اگربه نقطهٔ مادی تغییر مکان قائم‌کوچکی داده‌شود، نقطهٔ مادی‌نوسانهای تناوبی ساده‌ای با زمان تناوب $\pi\sqrt{am/\lambda}$ انجام خواهد داد.

۱۸- نقطهٔ مادیP به‌جرمm تحت اثر دونیرو درامتداد خط مستقیم AB حرکت‌می‌کند. یکی ازآن دونیرو برابر $۲\mu m\,\mathrm{AP}$ و به‌طرف نقطهٔ A و دیگری $\mu m\,\mathrm{BP}$ و بـه طرف نقطهٔ B است. اگرμ ثابت باشد، ثابت‌کنیدکه حرکت P تناوبی ساده بازمان تناوب $\frac{۲\pi}{\sqrt{۳\mu}}$ خواهد بود.

اگر $\mathrm{AB}=۲a$ باشد و نقطهٔ مادی درنقطهٔ وسط AB به‌حال سکون لحظه‌ای در آید، فاصلهٔ A را از نقطه‌ای که درآن دوباره بـه حال سکون لحظه‌ای در می‌آید تعیین کنید.

۱۹- انتهای نخ‌کشسانی‌به‌طول طبیعی a وضریب‌کشسانی λ به‌نقطهٔ ثابت A که برمیزی افقی وصیقلی واقع است متصل شده است. به انتهای دیگر نخ وزنـه‌ای به‌جرم m متصل است. اگروزنه را درامتداد میزبکشیم وبه فاصلهٔ $۲a$ از A ببریم وسپس آن را رها کنیم، ثابت‌کنیدکه تا هنگامی‌که کشش نخ ازمیان نرفته است، حرکت‌نوسانی ساده انجام‌خواهد داد. نشان دهیدکه طول نخ پس‌ازمدت زمانی‌برابر $\frac{۱}{۲}\pi\sqrt{ma/\lambda}$ برابر a خواهد شد ونیزنقطهٔ مادی پس‌از مدت زمانی برابر $\left(\frac{۱}{۲}\pi+۱\right)\sqrt{ma/\lambda}$ به‌نقطهٔ A خواهد رسید.

۲۰- برای آنکه نخ‌کشسان سبکی به طـول طبیعی l وضریب‌کشسانی λ را بـه‌اندازهٔ x بلندتر کنیم چه مقدارکار باید انجام داد؟ انتهای چنین نخی به‌طول طبیعی l وضریب کشسانی mg به‌نقطهٔ ثابت O متصل است. انتهای دیگرنخ به نقطه‌ای مـادی به جرم m متصل است. این نقطهٔ مادی را درامتداد قائم از نقطهٔ O به‌طرف بالا بـا انرژی جنبشی $\frac{۱}{۲}(n^۲+۲)mgl$ پرتاب می‌کنیم. نشان دهیدکه نقطهٔ مادی پس از مدت زمانی برابر

$$\{(n^{2}+2)^{1/2}-n+\mathrm{Arc}\,tg\, n\}\left(\frac{l}{g}\right)^{\frac{1}{2}}$$

شروع به‌پایین‌آمدن خواهدکرد.

۲۱- شعاع قرص‌مدور یکنواختی به‌جرم m برابر a است. ثابت کنیدکه گشتاوراینرسی آن حول‌محوری که ازمرکزش عمود برصفحهٔ‌آن می‌گذرد برابراست با $\frac{1}{2}ma^{2}$.

اگر $m=50\,\mathrm{kg}$، $a=1/2\,\mathrm{m}$ باشد و قرص حول محورش بـا سرعت زاویه‌ای ۵۰ دور در دقیقه بچرخد، انرژی جنبشی آن را تعیین کنید.

۲۲- گشتاوراینرسی قرص‌نازك مدوری به‌جرم M وشعاع a حول محوری که ازمرکزش عمود برصفحهٔ قرص می‌گذرد چقدراست؟

نقطه‌ای مادی به‌جرم m به‌بالاترین نقطهٔ قرص مدوری چسبیده است. جرم قـرص M وشعاع آن a است وقرص می‌تواند آزادانه حول محوری افقی‌که از مـرکزش عمود برصفحهٔ قرص می‌گذرد دوران کند. اگردستگاه را به‌آرامی ازحال سکون رها کنیم تا به‌حرکت درآید تندی زاویه‌ای قرص را درمـواقع زیـرتعیین کنید: (الف) هنگامی‌که نقطهٔ مادی همترازمحوراست؛ (ب) هنگامی‌که نقطهٔ مادی به‌طورقـائم درزیر محوراست.

۲۳- ثابت کنیدکه گشتاوراینرسی کرهٔ توپر یکنواختی به‌جرم M وشعاع a حول قطربرابر $\frac{2Ma^{2}}{5}$ است. نتیجه بگیریدکه شعاع ژیراسیون نیمکرهٔ توپر یکنواختی به‌شعاع a، حول هر محوری‌که ازمرکزسطح مستوی آن بگذرد برابر $a\sqrt{\frac{2}{5}}$ است.

دونیمکرهٔ توپریکنواخت ومتشابه طوری هستندکه یکی از آنها می‌تواند آزادانـه حول محورتقارنش،که ثابت است، آزادانه بچرخد ودیگری، حول محورثابتی کـه منطبق برمماس بردایرهٔ سطح مستوی است می‌تواند آزادانه بچرخد. نسبت‌تندیهای زاویه‌ای آنها را هنگامی‌که انرژی جنبشی‌آنها برابریکدیگراست، تعیین کنید.

۲۴- ثابت کنیدکه برای یك آونگ مرکب که دریك صفحهٔ قائم حول محوری افقی، کـه آونگ آزادانه به‌آن لولا شده است، نوسانهای کوچك انجام می‌دهد، زمان تناوب برابر است با

$$2\pi\sqrt{\frac{k^{2}+h^{2}}{gh}}$$

که درآن k شعاع ژیراسیون حول محوری متوازی‌است‌که ازمرکزثقل می‌گذرد و

h فاصلهٔ لولا ازمرکزثقل است.

میلهٔ نایکنواخت AB به طول a به‌صورت یك آونگ مرکب نوسان می‌کند. ابتدا حول محوری افقی که از A می‌گذرد نوسان می‌کند و بار دیگر حول محوری افقی که از B می‌گذرد. اگرطولهای آونگ سادهٔ معادل به‌ترتیب $\frac{3a}{4}$ و $\frac{2a}{3}$ بـاشد، نسبت AG/GB را، که G مرکزثقل میله است، تعیین کنید.

نیزنشان دهیدکه $k^2 = \frac{5a^2}{49}$.

۲۵ـ صفحهٔ مدوریکنواختی به‌شعاع a وجرم M است. نشان دهیدکه گشتاور اینرسی‌آن حول محوری که از مرکزش و عمود برصفحه‌اش می‌گذرد برابر $\frac{1}{2}Ma^2$ است.

چهارنقطهٔ مادی، هریك به‌جرم m، به‌چهارنقطهٔ این صفحه طوری ثابت شده‌اندکه رئوس یك مربع را تشکیل داده‌اند. دستگاه می‌تواند آزادانـه در یك صفحهٔ قـائم حول هرنقطهٔ ثابتی ازمحیط بچرخد. زمان تناوب نوسانهای کـوچك را تعیین کنید.

۲۶ـ جسم صلبی می‌تواند حول محوری ثابت بچرخد. ثابت کنید کـه طول آونگ سادهٔ معادل آن k^2/h است، که k شعاع ژیراسیون جسم حول محور و h فـاصلهٔ مرکز ازمحوراست. زمان‌تناوب نوسانهای کوچك‌جسم را تعیین کنید. میلهٔ‌نازك‌یکنواختی به‌جرم m و به طول $2a$ می‌تواند آزادانه حـول انتهای O آن بچرخـد. نقطه‌ای مادی بـه جـرم $\frac{4m}{3}$ می‌تـوانـد بـه هرنقطـه‌ای ازمیله متصل شود. ثـابت‌کنید که طول آونگ سادهٔ معادل، هنگامی که نقطه بـه فاصلهٔ $\frac{a}{2}$ از O متصـل شود، حداقل است.

۲۷ـ معادلات‌کافی برای تعیین شتاب زاویـه‌ای یك جسم صلب سنگین کـه حول محور افقی ثابتی می‌چرخد، برای تعیین عکس‌العملهای محور بر روی جسم را بنویسید. قرص مدوریکنواختی درصفحهٔ خودش حول نقطهٔ ثابتی‌که بر محیطش واقـع است نوسان می‌کند. نشان‌دهیدکه اگرقطری که ازنقطهٔ ثابت می‌گذرد به‌اندازهٔ دوزاویهٔ قائمه نوسان کند، مؤلفهٔ افقی‌عکس‌العمل برروی نقطهٔ ثابت، هنگامی که قطرمذکور با افق زاویهٔ 45° بسازد، ماکزیمم است.

۲۸ـ میلهٔ یکنواخت OA، به‌طول $2a$، به‌محور افقی‌صیقلیی‌که از O می‌گذرد لولاشده است وطوری نگاه داشته شده است‌که مرکزثقل G آن به‌ارتفاع z_0 بالای افق O باشد. سپس ازحال سکون رها می‌شود. درحرکت حاصل، وقتی‌که G به‌فاصلهٔ افقی

x از O است وارتفاع آن از بالای افق O برابر z است، نشان دهیدکه تندی زاویه‌ای وشتاب زاویه‌ای میله به‌ترتیب برابرند با

$$\left\{\frac{۳g}{۲a^{۲}}(z_{۰}-z)\right\}^{\frac{۱}{۲}} \text{ و } \frac{۳gx}{۴a^{۲}}$$

نشان دهیدکه عکس‌العمل در O درابتدا وقتی‌که $z=\frac{۲}{۳}z_{۰}$ است قائم می‌شود.

۲۹ـ ارابه‌ای ازیك تخته به‌جرم m تشکیل شده است‌که به‌طور متقارن ومحکم، برروی چهارچرخ، که هریك قرص مدور توپریکنواختی به‌جرم M است، سوارشده است. ارابه روی سطحی‌که با افق زاویهٔ α می‌سازد طوری قرارداده می‌شودکه محورهای چرخها افقی باشد. شتاب ارابه را به‌طرف پایین‌سطح، با فرض اینکه حرکت به‌طور کامل غلتشی است، تعیین کنید. اگرکرهٔ توپر یکنواختی همراه باارابه هر دوازبالای سطح شیبدار ازحالت سکون و ازیك خط افقی رهاشوند و هردوباهم به‌پایین سطح برسند، نسبت جرم تخته به‌جرم چرخها چقدرخواهد بود؟

۳۰ـ چرخ طیاریکنواختی به‌شعاع ۱۵ cm می‌تواندآزادانه حول محورش‌که افقی وثابت است بچرخد. نخ سبکی‌ازروی چرخ طیارمی‌گذرد و به‌دوانتهای آن وزنه‌های ۱/۵ و۱ کیلوگرمی متصل است. دستگاه از حالت سکون و دروضعی رها می‌شودکه قسمتهایی ازنخ‌که با چرخ درتماس نیست به‌طورقائمند. مشاهده می‌شودکه هریك از وزنه‌ها در مدت ۳ ثانیه مسافتی برابر ۲/۷ m طی می‌کند. به‌فرض آنکه نخ، لغزش نمی‌کند، گشتاور اینرسی چرخ طیار را حول محورش و نیزکششهای اجزای قائم نخ را تعیین‌کنید.

پاسخها

تمرین ۱.۱ (صفحهٔ ۱۹)

۱ ـ ۷۲، ۲۰.

۲ ـ ۹، ۴/۵، ۶ کیلومتر درساعت.

۳ ـ $8\frac{1}{3}$ دقیقه.

۴ ـ A روی عمود منصف CD است.

۵ ـ ۳۰۰ km؛ ۲/۶ s.

۶ ـ الف) $s=4t$؛

ب) $s=2t$، دراین‌صورت $s=6$؛

پ) $s=3t+1$؛

ت) $s=t(t+1)$.

۷ ـ الف) ۳ m/s، ۱/۸، $1\frac{7}{8}$؛

۳ m/s، ۰، ۲.

ب) ۱ m/s، ۱/۶، ۱/۵؛

۲ m/s، ۲، ۰.

۸ ـ الف) ۱۴/۰۹؛ ۲۰/۹ km.

ب) ۱۳/۵۸.

پ) ۳۱ دقیقه.

۹ ـ ۵ m/s، ۵، ۸، ۸؛

۵ m/s، ۷، ۸، ۹.

۱۰ـ ۴۰ km/h، ۱۹، ۲۹.

۱۱ـ (۱) ۴۸ km/h؛

(۲) ۹۶ km/h؛

(۳) تقریباً ۲۰ و ۵۰ دقیقه.

۱۲ـ (۱) ۴، ۴؛ (۲) $4t$، ۰.

۱۳ـ الف) $30-10t-5\Delta t$؛

ب) $30-10t$؛

پ) $t=3$، $s=45$ m.

۱۴ـ الف) ۲ m/s، ۰، ۳؛

ب) ۴ m/s، ۰، ۴؛

پ) ۰ m/s، ۸، ۰.

۱۵ـ ۸ cm/s. ۴۲ cm.

۱۶ـ الف) ۳ ساعت و ۳۹ دقیقه، و

۱۸/۲ km؛

ب) ۱ ساعت و ۲۷ دقیقه، و ۲ ساعت و ۴۲ دقیقه ازآغاز.

۱۷ـ ۱۱۲/۵ دقیقه؛ $10\frac{2}{3}$ km/h.

۱۸ـ $(3t-1)$ m/s، $\frac{1}{3}$ s.

۱۹ـ ۱۲ m/s، ۲ s، ۱۰ s.

۲۰ـ $4t$، ۱۶، $80-8t$ m/s.

تمرین ۲.۱ (صفحهٔ ۳۱)

۱ - ۷ km.

۲ - ۵۰٫۳ km؛ $28^\circ 40'$ شمال‌غربی؛ ۱٫۰۰۶ ساعت.

۳ - ۶۰۰ km، 60° شمال شرقی.

۴ - ۶۲ دقیقه، 30° شمال‌غربی.

۶ - الف) $9\frac{\sqrt{2}}{2}$، $9\frac{\sqrt{2}}{2}$؛

ب) ۴٫۵، $9\frac{\sqrt{3}}{2}$؛

پ) $-6\sqrt{3}$، ۶؛

ت) $-6\sqrt{2}$، $-6\sqrt{2}$.

۷ - (۱) ۱۷٫۸۵ km، $37/5^\circ$ شمال شرقی؛

(۲) ۱۵ km، $23^\circ 8'$ شمال‌غربی؛

(۳) ۳ km جنوب غربی.

۸ - (۱) ۲٫۳۵ km، $37/5^\circ$ جنوب غربی؛

(۲) ۱۵ km، $6^\circ 52'$ شمال‌شرقی؛

(۳) ۲۱ km شمال‌شرقی.

۹ - ۵٫۱۸، ۷٫۳۲.

۱۰- 5°، 110°.

۱۱- ۱۷٫۱ واحد با زاویهٔ $95^\circ 16'$.

۱۲- ۷٫۷ واحد، 29°.

۱۳- (۱) $\sqrt{29}$ بازاویهٔ $21^\circ 48'$ با Ox؛

(۲) $6\sqrt{2}$ و 45°؛

(۳) $\sqrt{10}$ و $-18^\circ 26'$؛

(۴) $\sqrt{74}$ و $54^\circ 28'$؛

(۵) $7\sqrt{2}$ و 45°؛

(۶) $\sqrt{85}$ و $220^\circ 36'$.

۱۴- (۱) $m=3$؛ (۲) $n=2$؛

(۳) $m=\frac{6}{5}$، $n=-\frac{7}{5}$.

تمرین ۳.۱ (صفحهٔ ۴۰)

۱ - ۱۰ m/s.

۲ - ۱۲٫۱۶ m/s.

۳ - ۳۴ m/s با زاویهٔ 62° نسبت به جهت حرکت.

۴ - $6\sqrt{3}$ m/s، $8\sqrt{3}$ m/s.

۵ - ۱۰ m/s؛ ۱۷٫۳۲ m/s.

۶ - $\frac{5}{\sqrt{2}}$ km/h، $-\frac{5}{\sqrt{2}}$ km/h

۷ - $8\sqrt{3}$ km/h، ۸ km/h.

۸ - ۵ m/s با زاویهٔ $\mathrm{Arc}\,tg\left(\frac{3}{4}\right)$ نسبت به‌افق.

۹ - ۶ km/h، $6\sqrt{3}$ km/h.

۱۰- ۷٫۳ m/s، ۵٫۲ m/s.

۱۱- $5\sqrt{2}$ m/s؛ $2\sqrt{5}$ m/s، $4\sqrt{5}$ m/s.

۱۲- ۵٫۳۵ m/s، ۱۰٫۷ m/s.

۱۳- $2\sqrt{5}$ m/s، $4\sqrt{5}$ m/s.

۱۴- $\frac{۱}{۲}$۶؛ $\frac{۱}{۲}$۲، ۶ واحد برثانیه.

۱۵- ۳π m/s؛ -۳π، ۰؛

$\frac{-۳\sqrt{۳}\pi}{۲}$، $\frac{-۳\pi}{۲}$؛

$\frac{۳\sqrt{۳}\pi}{۲}$، $\frac{-۳\pi}{۲}$؛

$\frac{۳\pi}{۲}$، $\frac{۳\sqrt{۳}\pi}{۲}$(m/s).

۱۶- ۱۰π m/s به‌طور مماس؛

الف) $۲۰\sqrt{۲}$ m/s با زاویهٔ ۴۵° نسبت به‌تندی اولیه؛

ب) ۲۰m/s عمودبرتندی‌اولیه؛

پ) ۰.

۱۷- الف) ۲ m/s، ۳؛

ب) ۲ m/s، ۴؛

پ) ۲ m/s، ۴.

۱۸- ۲ m/s، ۴، $۲\sqrt{۵}$؛

۲ m/s، ۶، $۲\sqrt{۱۰}$.

۱۹- ۱۵ m/s، ۰؛ $۵\sqrt{۱۳}$ m/s؛ ۱s.

۲۰- ۰/۴، ۱/۶s؛ $۳\sqrt{۲۹}$ m/s، Arc tg (± ۰/۴).

تمرین ۴۰۱ (صفحهٔ ۴۶)

۱ - ۷۲ m.

۲ - زاویهٔ Arc $cos\left(\frac{۱}{۳}\right)$ با امتداد جریان.

۳ - زاویهٔ $۱۲۳^\circ۴۵'$ با جهت حرکت.

۴ - کسی که روبه‌شمال می‌رود؛ ۰/۲۷ دقیقه زودتر.

۵ - $۸۰^\circ۲۵'$.

۶ - تقریباً ۱۲؛ درحدود ۷۹° شمال شرقی.

۹ - الف) مستقیم؛ ۱/۸ دقیقه؛ ۲۴۰ m؛

ب) بازاویهٔ Arc $cos\left(\frac{۵}{۸}\right)$ نسبت به امتداد جریان؛ ۲/۳ دقیقه؛ ۱۸۷ m.

۱۰- $۱۸^\circ۴۲'$ شمال شرقی؛ $۴۱^\circ۱۸'$ شمال شرقی.

۱۱- ۷ m/s؛ ۳۸° نسبت به‌تندی ۱۲.

۱۳- ۳/۹ km/h درامتداد XO.

۱۴- $۳v$ به‌موازات AD؛ $v\sqrt{۳}$.

۱۵- v، ۱۲۰°.

تمرین ۵.۱ (صفحهٔ ۵۳)

۱- ۶۴/۰۳ km/h بازاویهٔ ۳۸°۴۰′ نسبت به جهت قطار دوم.

۲- ۲۸/۸۵ km/h بازاویهٔ ۳۳°۴۱′ نسبت به جهت اتومبیل.

۳- $\mathrm{Arc}\,tg\;0/45$ باافق؛ ۷/۳ m/s.

۴- $\mathrm{Arc}\,tg\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)$ جنوب‌غربی.

۵- ۴۰ km/h؛ $\mathrm{Arc}\,tg\left(\frac{3}{4}\right)$ شمال غربی.

۶- $\mathrm{Arc}\,sin\left(\frac{1}{40}\right)$ درجلو کشتی.

۷- ۷/۵ km/h؛ $\mathrm{Arc}\,tg\left(\frac{3}{4}\right)$ با جهت A.

۸- ۲۸ km/h؛ ۴۰/۴ و ۷/۳ m.

۹- ۱۹/۸ km/h؛ ۴۱°۳۱′ شمال غربی؛ $\sqrt{2}$ km.

۱۰- ۳۰°۲۲′ شمال‌شرقی؛ ۲۸ km/h.

۱۱- ۹۰/۱۶ km/h؛ ۲۷°۲۸′ شمال شرقی؛ درحدود ۴/۵ دقیقه.

۱۲- ۰/۳۹ km.

۱۳- ۲۰ km/h؛ ۵/۵ دقیقه.

۱۴- ۶/۹۳ دقیقه.

۱۵- ۲۴/۲ km؛ ۴۸°۴′ شمال‌شرقی.

۱۶- ۱۶/۸ km/h؛ ۱۲°۷′ شمال شرقی؛ ۱۰°۱۱′ شمال‌غربی؛ ۱۶/۱ km/h.

۱۸- ۰/۱۲ km.

تمرین ۶.۱ (صفحهٔ ۶۲)

۱- 10π rad/s؛ ۶۲/۸ cm/s.

۳- ۱۱۴/۵ km/h با زاویهٔ ۲۶°۳۳′ بالا و پایین افق.

۴- ۳۲/۷ m/s.

۵- ۱ : ۱۸.

۶- ۵ rad/s؛ ۸/۵ m/s با زاویهٔ ۴۵° بالا و پایین افق.

۷- ۲۰ km/h؛ ۱۲ km/h؛ ۳۲ km/h؛ صفر.

۸- $u+v$؛ $\sqrt{u^2+v^2+\sqrt{2}\,uv}$؛ $\sqrt{u^2+v^2}$؛ که درآن u تندی‌حلقه و v تندی نقطه است.

۹- $4\sqrt{37+12\cos\theta}$ km/h

تمرین ۱.۲ (صفحهٔ ۷۲)

۱- ۳۶ m/s، ۵۴۰ m.

۲- ۱/۵ m/s²، ۷۵ m.

۳- ۳ m/s²، ۳۷/۵ m.

۴- ۵۰ s، ۲۵۰۰ m.

۵ - $۱\ \mathrm{m/s^۲}$، $۱۲/۵\ \mathrm{m}$.

۶ - $۶\ \mathrm{m/s}$، $۲\ \mathrm{m/s^۲}$.

۷ - $۳/۷۵\ \mathrm{m/s^۲}$، $۱۴/۶\ \mathrm{m/s}$.

۸ - $۶۶۷/۴\ \mathrm{m}$.

۹ - $۱۰\sqrt{۷}\ \mathrm{km/h}$، ۴ دقیقه، ۲/۵۸ دقیقه.

۱۰- $\frac{۴}{۷۵}\ \mathrm{m/s^۲}$، $۰/۸۲\ \mathrm{km}$.

۱۱- $۱۳۲\ \mathrm{m}$، $۵\ \mathrm{m/s}$.

۱۲- $\frac{۲}{۳}\ \mathrm{m/s^۲}$، $۱\frac{۲}{۳}\ \mathrm{m/s}$، $۲\frac{۱}{۱۲}\ \mathrm{m}$.

۱۳- $۲۲/۵\ \mathrm{m/s}$.

۱۴- $۰/۱\ \mathrm{m/s^۲}$؛ $۰/۲\ \mathrm{m/s^۲}$.

۱۵- $۶۵\ \mathrm{m}$؛ $۱/۸۷۵\ \mathrm{m/s^۲}$.

۱۶- $۲b=a+c$؛ $F=\frac{c-b}{t^۲}$؛ $u=\frac{۳a-b}{۲t}$.

۱۸- $u=۰/۹\ \mathrm{m/s}$؛ $F=۰/۱۵\ \mathrm{m/s^۲}$؛ $۲۱۶\ \mathrm{m}$.

۱۹- $۲۶۰\ \mathrm{m}$؛ $۱۷/۷\ \mathrm{m/s}$.

۲۰- $\frac{۵}{۷۲}\ \mathrm{m/s^۲}$.

۲۳- $۳۰۰\ \mathrm{m}$.

۲۶- $\frac{۳u+v}{۴(u+v)}$.

۲۷- $u=\frac{۴b-c-۳a}{۲n}$.

۲۸- $۱۳/۱\ \mathrm{km}$.

۲۹- $۰/۵\ \mathrm{m/s^۲}$؛ $۰/۲۵\ \mathrm{m/s^۲}$.

۳۰- $۳\ \mathrm{s}$ بیشتر.

۳۱- $\frac{۶}{۷}$.

۳۲- $۱۶۶\frac{۲}{۳}\ \mathrm{s}$؛ $۲\frac{۷}{۹}\ \mathrm{km}$

تمرین ۲.۲ (صفحهٔ ۸۰)

۱ - الف) $۱۵/۶\ \mathrm{m}$؛
ب) $\frac{۵}{۷}\ \mathrm{s}$، و $۲\frac{۶}{۷}\ \mathrm{s}$.

۲ - الف) پس از $۲\ \mathrm{s}$؛ ب) $۵\ \mathrm{s}$؛
پ) $۱\ \mathrm{s}$ و $۴\ \mathrm{s}$.

۳ - الف) $۴۹۰\ \mathrm{m}$؛ ب) $۴/۵\ \mathrm{s}$؛
پ) $۴۴/۳\ \mathrm{m/s}$.

۴ - $۱۶۴/۱\ \mathrm{m}$.

۵ - الف) $۳\frac{۴}{۷}\ \mathrm{s}$؛ ب) $۱۰/۵\ \mathrm{m}$.

۶ - $۱۲۲/۵\ \mathrm{m}$.

۷ - $۹۶/۸\ \mathrm{m/s}$؛ $۱۹/۸\ \mathrm{s}$.

۸ - $۱۴/۴\ \mathrm{m}$.

۹ - از $۰/۳\ \mathrm{m}$ بالای پنجره.

۱۰- $۱۲/۵\ \mathrm{m}$؛ $۲\frac{۶}{۷}\ \mathrm{s}$.

۱۳- $۸۷/۵\ \mathrm{m}$؛ $۹۲/۵\ \mathrm{m}$؛ $۱۰\ \mathrm{s}$.

۱۴- $۴۰\ \mathrm{m}$، $۴/۹\ \mathrm{s}$ پس ازآنکه نخستین جسم آغاز به‌حرکت کرد؛ ۲۰، $۷/۴\ \mathrm{m/s}$.

۱۸- $۴۵\ \mathrm{m}$، $۲۹/۷\ \mathrm{m/s}$، $۴/۵\ \mathrm{s}$.

تمرین ۳.۲ (صفحهٔ ۸۶)

۱ - $۴۰/۸\,\mathrm{m}$؛ $۴/۱\,\mathrm{s}$.

۲ - $۳۰^\circ ۴۰'$.

۳ - $۷/۲۷\,\mathrm{m/s}$؛ $۳/۳\,\mathrm{s}$.

۵ - $\sqrt{\frac{g}{۲h}}\,\frac{l^۲-h^۲}{l}$.

۶ - $\frac{۱}{۲}gt^۲\sin\alpha\cos\beta$. دایره‌ای به‌قطر $\frac{۱}{۴}gt^۲\sin\alpha$ که A بالاترین‌نقطهٔ آن است.

۷ - فرض می‌کنیم نیمساز $\angle BCA$ خط BA را در D، و دایره‌ای به‌مرکز D و شعاع BD خط CA را در E قطع کند، دراین‌صورت BE خط سیر مطلوب است.

۱۰- ۱ : ۳ : ۵.

تمرین ۴.۲ (صفحهٔ ۹۸)

۱ - سرعت یکنواخت برای نخستین $۱۰\,\mathrm{s}$، و شتاب $\frac{۳}{۲}\,\mathrm{m/s^۲}$؛ $۲۷۵\,\mathrm{m}$.

۲ - $۱۲\,\mathrm{m/s}$؛ $۰/۶\,\mathrm{m/s^۲}$.

۴ - $۱۱/۲\,\mathrm{m/s}$.

۵ - افزایش در $\frac{۱}{۲}v^۲$.

۶ - $\frac{۳}{۸}\,\mathrm{m/s^۲}$؛ $۲۷\,\mathrm{m/s}$؛ $۳۲۴۰\,\mathrm{m}$.

۷ - $۲۵\,\mathrm{m/s}$.

۸ - $۱۵۷۱\,\mathrm{m}$؛ $۳۸\,\mathrm{s}$.

۹ - $۲/۸\,\mathrm{m/s^۲}$.

۱۱- $۲۳/۲\,\mathrm{m/s}$؛ $۲۵\,\mathrm{m/s}$.

۱۲- $۵/۴\,\mathrm{km}$؛ $۰/۱۲\,\mathrm{m/s^۲}$.

۱۳- $۵۷\,\mathrm{m}$؛ $۹\,\mathrm{m/s^۲}$.

۱۴- $۰/۷۵\,\mathrm{m/s^۲}$؛ $۱\,\mathrm{m/s^۲}$.

۱۵- $۳۵\,\mathrm{m/s}$؛ $۲۰\,\mathrm{m/s^۲}$.

۱۶- ۱۶، ۱۶.

۱۷- $۱۳۵t^۲ - ۱۸۰t$، $۲۷۰t - ۱۸۰$، $\frac{۴}{۳}$ ساعت، $۵۳\frac{۱}{۳}\,\mathrm{km}$، $۶۰\,\mathrm{km/h}$.

۱۸- $۴\,\mathrm{m}$؛ $۲۰\,\mathrm{m}$؛ $۱\frac{۲}{۳}\,\mathrm{m/s}$.

۱۹- $۵\,\mathrm{m/s^۲}$؛ $۱۵\,\mathrm{s}$؛ $۵۶\frac{۱}{۴}\,\mathrm{m/s}$.

۲۰- $۳۰\,\mathrm{m/s}$؛ $۴۲\,\mathrm{m/s^۲}$؛ $۶\frac{۳}{۴}\,\mathrm{m}$.

تمرین ۱۰۳ (صفحهٔ ۱۲۲)

۱ - $\frac{۱}{۲}$ m/s^{۲}؛ ۵۰۰ m/s^{۲}.

۲ - $\frac{۱}{۶}$ N.

۳ - تقریباً ۶۰ s.

۴ - ۱٫۹ × ۱۰^{۵}.

۵ - ۷۱٫۴ m.

۶ - $\frac{۵}{۱۸}$ N؛ ۱ دقیقه.

۷ - ۲۲۵ cm/s؛ ۵۶۱٫۹ cm.

۸ - ۰٫۸ N.

۹ - ۱٫۶ km.

۱۱- ۰٫۰۶۱۵ N.

۱۲- ۰٫۰۵۸ N.

۱۳- ۵٫۸۸ m/s؛ ۸٫۸۲ m.

۱۴- الف) ۹۸ N؛ ب) ۱۴۸ N.

۱۵- الف) ۹۶۶ N؛ ب) ۴۰۶ N.

۱۶- ۰٫۲ m/s^{۲}.

۱۷- $\frac{g}{۱۳}$ به‌طرف پایین.

۱۸- الف) ۱۰۹ s؛ ب) ۲۲٫۲ s؛
پ) ۵۴۶ s.

۱۹- ۳۷۹ s.

۲۰- ۹ kg؛ $\frac{g}{۹}$.

۲۱- ۲ : ۱.

۲۲- ۷۵$\sqrt{۲}$ m/s.

۲۳- ۱۳۲۳ N.

تمرین ۲۰۳ (صفحهٔ ۱۳۴)

۱ - الف) ۲٫۴۵ m/s^{۲}؛
ب) ۷$\frac{۱}{۲}$ g N؛ پ) ۱۵g N.

۲ - الف) ۱٫۶۳ m/s^{۲}؛
ب) $\frac{۵}{۶}$ g N.

۳ - الف) ۱٫۲۲ m/s^{۲}؛
ب) ۰٫۰۷۷ N.

۴ - الف) ۱۹۶ cm/s^{۲}؛
ب) ۰٫۲۴ N.

۵ - الف) ۴٫۳ m/s^{۲}؛
ب) ۳$\frac{۱۵}{۱۶}$ g N؛
پ) $\frac{۶۳\sqrt{۲}}{۱۶}$ g N.

۶ - الف) ۱ s؛ ب) $\frac{۱}{۲}$ s.

۷ - الف) ۱ s؛ ب) ۱ s.

۸ - الف) ۲٫۴۵ m/s^{۲}؛
ب) ۲$\frac{۱}{۴}$ g N.

۹ - الف) $۱/۸۱\,\mathrm{s}$؛ ب) $۴/۵۲\,\mathrm{s}$.

۱۰- الف) $۲/۲\,\mathrm{s}$؛ ب) $۱/۱\,\mathrm{s}$.

۱۱- $۴\,\mathrm{m}$.

۱۲- $\frac{۱}{۱۴}g\,\mathrm{m/s^۲}$؛ $۲\frac{۱}{۷}g\,\mathrm{N}$.

۱۳- $\frac{۱}{۴}g\,\mathrm{m/s^۲}$؛ $۲\frac{۱}{۴}g\,\mathrm{N}$.

۱۴- $۹/۸\,\mathrm{m/s}$؛ $۳۴/۳\,\mathrm{m}$.

۱۶- $۲/۲\,\mathrm{m/s^۲}$.

۱۷- $۷/۶۷\,\mathrm{m/s}$؛ $۳/۹۱\,\mathrm{s}$.

۱۸- $۱/۹۶\,\mathrm{m/s^۲}$؛ $۳/۵\,\mathrm{m}$.

۱۹- $۸/۸\,\mathrm{m/s}$.

۲۰- $۵۱۹۵\,\mathrm{N}$.

تمرین ۳.۳ (صفحهٔ ۱۴۵)

۱ - $۶/۵\,\mathrm{m/s^۲}$؛ $\frac{۵}{۳}mg\,\mathrm{N}$.

۲ - $۱۲\,\mathrm{kg}$؛ $۲۰g\,\mathrm{N}$.

۳ - $۵\frac{۵}{۷}\mathrm{kg}$؛ $۴/۲\,\mathrm{m/s^۲}$؛

$۲\frac{۶}{۷}g\,\mathrm{N}$.

۴ - برای M،

$$\frac{۴m_۱m_۲-M(m_۱+m_۲)}{۴m_۱m_۲+M(m_۱+m_۲)}g$$ ؛

برای $m_۱$،

$$\frac{۴m_۱m_۲+M(m_۱-۳m_۲)}{۴m_۱m_۲+M(m_۱+m_۲)}g$$ ؛

برای $m_۲$،

$$\frac{M(۳m_۱-m_۲)-۴m_۱m_۲}{۴m_۱m_۲+M(m_۱+m_۲)}g$$.

۵ - $$\frac{۲Mmg}{(m+۴M)(m+M)}$$ ؛

$$\frac{m^۲g}{(m+۴M)(m+M)}$$.

۶ - $\frac{۹}{۱۳}mg\,\mathrm{N}$؛ A، $\frac{۵}{۱۳}g$؛

B، $\frac{۱۰}{۱۳}g$.

۷ - $$\frac{۲wg}{۳W+۲w}$$ برای $(W+w)$؛

$$\frac{wg}{۳W+۲w}$$ برای $۲W$.

۸ - $\frac{g}{۴}$.

۹ - الف) $۲g\,\mathrm{N}$؛ ب) $۱\frac{۵}{۷}g\,\mathrm{N}$؛

پ) $۱\frac{۱}{۳}g\,\mathrm{N}$.

۱۱- ۱ : ۲.

۱۴- $$\frac{M(M+m)g\cos\alpha}{M+m\sin^۲\alpha}$$.

۱۶- $\frac{۱۳}{۷۲}g$؛ $\frac{۱}{۸}g$.

۱۷- $۴\,\mathrm{m/s^۲}$.

تمرینهایی برای مرور بخشهای قبل

۱ – v ؛ $\sqrt{u^۲-v^۲}$.

۲ – ۱۲/۱۲، ۱/۱۳ km، ۲۴ دقیقه.

۳ – $۷۶۸\sqrt{۲}$ km.

۴ – u از ۲θ شمال شرقی.

۶ – ۲۰ km/h از °۵۴ شمال غربی.

۹ – ۴ s؛ ۳۵/۱ m/s؛ ۸۹ m؛ ۴۷ m.

۱۰– $\dfrac{V}{۱+p+q}$.

۱۱– ۱۲۰ s.

۱۲– ۱۶/۳۵؛ $\dfrac{۱}{۱۵}$ m/s^۲.

۱۳– ۳/۵ km؛ $۲\dfrac{۳}{۸}$ دقیقه؛ ۳ دقیقه و ۸ ثانیه.

۱۵– $\dfrac{۸}{۹}$.

۱۶– $\dfrac{m}{۲۱}$؛ $\dfrac{۵g}{۲۱}$.

۱۷– $۶\dfrac{۶}{۱۳}\,g$ N؛ ۱/۶ s؛ $۷\dfrac{۷}{۲۶}\,g$ N، ۱/۵ s.

۱۹– ۲/۴۵ m/s^۲؛ ۰/۱۱۲۵g، ۰/۰۷۵g، ۰/۰۹۰g، ۰/۰۴۵ g N.

تمرین ۱۰۴ (صفحهٔ ۱۶۲)

۱ – ۱۱۰۰۰ J.

۲ – ۲۰۰۰ J.

۳ – ۱۳/۱ kW.

۴ – ۸۰۰۰ J؛ ۲۷۶۰۰ J؛ ۰/۱۱ kW، ۰/۳۸ kW.

۵ – ۳۷۰/۲ kW.

۶ – ۱۱۲/۵ N.

۷ – ۷۵g N؛ ۹/۸ kW.

۸ – ۴۴۶/۴ kW، ۹۹/۲ km/h.

۹ – ۲۵۱۶۲ N؛ ۳۳۵/۵ kW.

۱۰– ۲۵/۶ km/h.

۱۱– ۰/۲۱.

۱۲– ۲۵۹۸ N؛ ۱۱/۵۵ kW.

۱۳– $۱/۲\times۱۰^۵$ J.

۱۴– ۲۰/۶ kW.

۱۵– ۶۸/۳ m؛ ۶۰/۵ m.

۱۶– ۲ N؛ ۲۰۰ J؛ ۴۰ W.

۱۷– ۵۱ m.

۱۸– ۹/۴ km/h.

۱۹– ۱ در $\dfrac{mgV}{H-VR}$؛ $\dfrac{Hn}{V}$؛ ۱ در ۲۷؛ ۴۵۰ N.

۲۰- الف) ۲۱/۲ km/h؛

ب) ۱۴/۸ km/h، $۷\frac{۷}{۸}\,g$ N.

۲۱- ۴۲۸/۷ kW.

۲۲- ۵۸۸ kW؛ ۸۶/۴ km/h.

۲۳- ۷/۴ s؛ ۱۷۸/۲ kW.

۲۴- ۱۴۰۳ kW.

۲۵- ۰/۰۹۲ $m/s^{۲}$؛ ۹۲/۶ km/h.

۲۶- الف) ۴۰۸ kW؛ ب) ۸۱۷ kW.

۲۷- ۱۳۵۰ N؛ ۵۹/۳ دقیقه؛

۱۹/۷۵ km؛ ۲۱۴ km.

۲۸- $۶۵/۵ \times ۱۰^{۳}$ N.

۲۹- ۲۹۴۶ N؛ ۹/۸ cm.

۳۱- ۱۰/۲ kW.

تمرین ۲.۴ (صفحهٔ ۱۷۵)

۱ - الف) ۶ : ۱؛ ب) ۳۶ : ۱۲۵.

۲ - $۸۱\frac{۲}{۳}$ m؛ ۴۰۰۱ J.

۳ - ۹۶۴/۵ J؛ ۱۷/۴ m/s.

۴ - ۱۶۴۹ J؛ ۶/۱ kW.

۵ - ۱۱/۲۸ J؛ ۳/۷۶ W.

۶ - ۱۶/۸ kW.

۷ - ۱۰/۵۳ kW.

۸ - ۱/۴۳ kW.

۹ - ۱۳۲ kJ؛ ۷۸/۸ kJ؛

۲۱۰/۸ kW.

۱۰- ۸/۲۵ kW.

۱۱- ۵۹۶ kW.

۱۲- ۲/۰۴ kW.

۱۳- ۳۶۴۰ J؛ ۱۳/۲ N.

۱۴- ۲۸۷/۵ kW؛ ۱/۷۶ ساعت.

۱۵- ۰/۴۴۳۰؛ ۰/۵۵؛ ۴/۶ kW.

۱۶- $۵^{\circ}۸'$.

۱۷- ۰/۱۵۶۸ J؛ ۰/۸ m/s.

۱۸- $۱/۱۸ \times ۱۰^{۶}$ J؛ $\frac{۱}{۸}$؛

$۱/۰۳ \times ۱۰^{۶}$ J.

تمرین ۳.۴ (صفحهٔ ۱۹۰)

۱ - الف) $۱/۶۵ \times ۱۰^{۵}$ J؛

ب) $۰/۶۷ \times ۱۰^{۵}$ J؛

پ) ۳/۲ m/s.

۳ - تقریباً ۱۳/۰ m/s.

۴ - تقریباً ۱۲/۹ m/s.

۵ - ۶۴ km/h.

۶ - $\frac{۱}{۲} \times \frac{mg}{cotg\,\theta - \cos\theta}$.

۸ - ۰/۳ J.

۹ - $\left(۱ + \frac{۲m}{M}\right)e$.

۱۰- ۳/۱۳ m/s.

۱۱- $\frac{2mga(\sin\theta-\mu\cos\theta)}{\lambda}$.

۱۳- ۱/۱۴ cm.

۱۴- $\frac{11}{12}mga$.

۱۶- الف) ۳۲/۶۵؛ ب) ۳۲/۸ km.

۱۷- ۱۵/۷ m/s.

۱۸- ۴/۹۵ m/s.

۱۹- $\sqrt{\frac{5ga}{2}}$.

۲۰- ۲ : ۱.

تمرین ۴.۴ (صفحهٔ ۱۹۸)

۱ - ۱N؛ ۱۰۰J.

۳ - $9/8^2$ J.

۴ - J؛ الف) $\times 1000$؛ ب) $\times 10^5$؛
پ) $\times 10^4$؛ ت) $\times 10^6$.

۶ - ۲۳۱۹۰۰۰.

۷ - $\frac{L^3}{MT^2}$؛ $6/482\times 10^{-11}$.

۹ - ۰، $\frac{1}{2}$، $-\frac{1}{2}$.

۱۰- $\frac{1}{2}$، $-\frac{1}{2}$.

۱۱- $\frac{1}{2}$، ۰، $\frac{1}{2}$.

تمرین ۱.۵ (صفحهٔ ۲۰۸)

۱ - ۵/۰۱ m/s.

۲ - ۲۰ cm/s.

۳ - ۴ m/s؛ $\frac{2}{3}\times 10^6$ N.

۴ - ۵/۴۵ m/s؛ ۳/۰۳ m.

۵ - $0/12$ N/m^2.

۶ - $15/9\times 10^5$ N.

۷ - $122/5\times 10^3 g$ N.

۸ - ۵/۸۲ m/s؛ ۲/۹۱ درصد؛
۰/۰۰۸۶ s؛ ۷۰۵ N.

۹ - $\frac{R-2W+\sqrt{R^2+400RW-400W^2}}{202}$

۱۰- $\frac{m}{M}$؛ $4/84\times 10^5$ N.

۱۲- ۸ m/s؛ $1/016\times 10^6$ J؛
$4/83\times 10^5$ N؛ ۳/۳ cm.

۱۳- $v\sqrt{\frac{M}{M+m}}$؛ $\frac{mv}{M}\sqrt{\frac{M}{M+m}}$؛
$\frac{m^2v^2}{2Mg(M+m)}$.

۱۴- $833g$ N.

۱۵- ۱۱۰۲ kg m/s.

۱۷- الف) ۱۱/۱ m/s؛
ب) ۱۵/۷ m؛ پ) ۱ : ۱۲/۵.

۱۹- ۱/۷۱ m.

۲۰- $۱۷۱/۹\ \mathrm{m/s}$.

۲۱- $۵۴/۱\ \mathrm{kW}$.

۲۲- $۰/۸۷\ \mathrm{m}$.

۲۳- $۴/۲\times ۱۰^{۴}\ \mathrm{N}$؛ $۰/۱۳\mathrm{s}$.

۲۴- $\frac{MV}{mv}$؛ $\frac{۱}{۲}\times\frac{Mm(V+v)^{۲}}{(M+m)}$.

تمرین ۲.۵ (صفحهٔ ۲۱۹)

۲ - $\mathrm{s}\ \sqrt{\frac{۲d(m_۱-m_۲)}{g(m_۱+m_۲)}}۲$؛ $\frac{m_۲}{m_۱+m_۲}\sqrt{\frac{۲gd(m_۱-m_۲)}{m_۱+m_۲}}$.

۳ - $۳/۰۷\ \mathrm{m}$؛ $۶/۵\ \mathrm{s}$.

۵ - $۰/۹\ \mathrm{m}$؛ $۱\frac{۵}{۷}\mathrm{s}$.

۷ - $۱/۰۵\ \mathrm{m/s}$؛ $\frac{۳\sqrt{۳}}{۷}\mathrm{s}$.

۸ - $۰/۴۵\ \mathrm{s}$.

۱۰- $۱۲\ \mathrm{m/s}$؛ $۲۷۸\ \mathrm{J}$؛ $۳/۵\ \mathrm{kg}$.

۱۱- الف) $\frac{۱}{۲}mu\sqrt{۳}$؛ $\frac{۱}{۲}u$.

ب) $\frac{۱}{۴}mu\sqrt{۳}$؛ $\frac{۱}{۴}u\sqrt{۷}$.

۱۲- عمود برجهت اصلی وزنهٔ اولی با $۱۰\frac{\sqrt{۳}}{۹}\mathrm{m/s}$؛ $۱۰\ \mathrm{m/s}$ با زاویهٔ ۶۰° نسبت به‌جهت ضربه.

۱۳- A، $\frac{۲\sqrt{۱۳}I}{۱۵m}$؛ B، $\frac{۷I}{۱۵m}$؛ C، $\frac{۲I}{۱۵m}$.

۱۴- $\frac{۱۷}{۶۰}\mathrm{s}$؛ $۱/۸\ \mathrm{m/s}$؛ $۰/۳۶۴۵\ \mathrm{J}$.

۱۵- $۲/۴\ \mathrm{m/s}$؛ $۹۴\ \mathrm{J}$؛ $۲/۲۲\ \mathrm{m/s}$.

تمرین ۳.۵ (صفحهٔ ۲۳۳)

۱ - $۳\ \mathrm{m/s}$؛ $۳/۵\ \mathrm{m/s}$.

۲ - $۶\ \mathrm{m/s}$؛ $۷/۵\ \mathrm{m/s}$.

۳ - $\frac{۸}{۹}\mathrm{m/s}$؛ $۴\frac{۸}{۹}\mathrm{m/s}$ درجهت‌عکس.

۷ - $\frac{v_۱(m_۱-em_۲)}{m_۱+m_۲}$

$$\frac{m_۱v_۱(m_۲-m_۳e')(۱+e)}{(m_۱+m_۲)(m_۲+m_۳)}$$

$$\frac{m_۱m_۲v_۱(۱+e)(۱+e')}{(m_۱+m_۲)(m_۲+m_۳)}.$$

۸ - $۱۰/۹\ \mathrm{m/s}$ و $۲/۶\ \mathrm{m/s}$، هردو درجهت عکس؛ $۲/۵۵\ \mathrm{J}$.

۱۱- $\frac{۳۵}{۵۱}\mathrm{s}$.

۱۲- $۹۰۰۰\ \mathrm{J}$.

۱۳- $۲\ \mathrm{m/s}$؛ $۳\ \mathrm{m/s}$؛ $۴۵\ \mathrm{J}$.

۱۵- $۰/۶\ \mathrm{m/s}$؛ $۱/۵\ \mathrm{m/s}$؛ $۱۳۵۰\ \mathrm{J}$.

۱۷- $\frac{۱۳}{۶۴}u$؛ $\frac{۱۵}{۶۴}u$؛ $\frac{۳۶}{۶۴}u$.

۱۸- $۰/۳ \, m/s$؛ $۳۶۰۰ \, J$.

۲۳- $\frac{۵}{۲۲}$؛ $۲/۵ \, m/s$.

۲۵- $۱۱/۹ \, m/s$؛ $۶/۷ \, m/s$،

درجهت عکس؛ ۴۲ درصد.

۲۶- $\frac{m_۱ m_۲(۱+e)(v_۱ - v_۲)}{m_۱ + m_۲}$.

تمرین ۵.۴ (صفحهٔ ۲۴۱)

۱ - $۰/۴ \, m$؛ $\frac{۴}{۷} s$؛ $۰/۵۶ \, m/s$.

۲ - $\frac{۴}{۵}$.

۳ - $۳\sqrt{۱۳} \, m/s$ با زاویهٔ $Arc\,tg\left(\frac{۱}{۲\sqrt{۳}}\right)$ با صفحه.

۴ - الف) $۲/۸\sqrt{۱۳} \, m/s$ با زاویهٔ $Arc\,tg\left(\frac{۲}{۳}\right)$ زیر افق.

ب) $۲/۸\sqrt{۱۹} \, m/s$ با زاویهٔ $Arc\,tg \frac{۷\sqrt{۳}}{۹}$ زیر افق.

۵ - $۰/۰۳۵ \, J$.

۶ - $۰/۸۶۶$.

۷ - $۰/۳۶ \, m$ ازگوشه با زاویهٔ $Arc\,tg\left(\frac{۳}{۲}\right)$.

۸ - الف) $u\sqrt{cos^۲ \alpha + e^۲ sin^۲ \alpha}$ با زاویهٔ $Arc\,tg\,(e\,tg\,\alpha)$؛

ب) $m(۱+e)u\,sin\,\alpha$ عمود بر صفحه؛

پ) $\frac{۱}{۲} mu^۲ sin^۲ \alpha(۱-e^۲)$

۱۰- $۵/۷۵ \, cm$.

۱۱- $\frac{u(۱-e)}{۲}$ به‌طرف دیوار؛

$\frac{u(۱+e)e'}{۲}$ دور از دیوار.

۱۲- $۳۲۰۰۰ \, N$؛ $۴۳۶۸ \, J$.

تمرین ۵.۵ (صفحهٔ ۲۵۰)

۱ - $۸/۶۶ \, m/s$ عمودبرخط‌المرکزین؛

$۲/۵ \, m/s$ درراستای خط‌المرکزین.

۲ - $۳/۷ \, m/s$ با زاویهٔ $Arc\,cotg\left(\frac{۵\sqrt{۳}}{۱۲}\right)$ نسبت به خط‌المرکزین؛ $۶/۱ \, m/s$ در راستای خط‌المرکزین.

۳ - $۴/۶۲ \, m/s$ با زاویهٔ ۶۰° نسبت به‌خط‌المرکزین؛ $۴/۱۶ \, m/s$ با زاویهٔ $Arc\,tg\left(\frac{\sqrt{۳}}{۷}\right)$ نسبت به خط‌المرکزین.

۴ - $۴/۰۷\ m/s$ با زاویهٔ $\mathrm{Arc}\,tg\,(-۳\sqrt{۳})$ نسبت به خط‌المرکزین؛ $۲/۳۴\ m/s$ با زاویهٔ $\mathrm{Arc}\,tg\left(\frac{۳\sqrt{۳}}{۱۱}\right)$ نسبت به خط‌المرکزین.

۵ - $\frac{۱}{۲}u\sqrt{۲}$ و $\frac{۱}{۲}u\sqrt{۶}$، هریك بازاویهٔ ۴۵° نسبت به‌خط‌المرکزین.

۶ - $۰/۸u$ و $۱/۱۶u$ بازاویهٔ $۴۰^\circ ۱۲'$ و $۴۸^\circ ۱۲'$ نسبت به‌خط‌المرکزین.

۱۰- $\frac{۱}{۲}u\sqrt{۴sin^۲\alpha+cos^۲\alpha(۱-e)^۲}$؛ $\frac{۱}{۲}u\,cos\,\alpha(۱+e)$؛ با زاویهٔ $\mathrm{Arc}\,tg\left[\frac{۲tg\,\alpha}{۱-e}\right]$ نسبت به، و در امتداد خط‌المرکزین.

۱۲- در امتداد خط‌المرکزین؛ با زاویهٔ $\mathrm{Arc}\,tg\left(\frac{۱۰\sqrt{۳}}{۳}\right)$ نسبت به‌خط‌المرکزین.

تمرین ۱.۶ (صفحهٔ ۲۶۲)

۱ - الف) $۱۱/۵\ m$؛
ب) $۳/۰۶\ s$، $۷۹/۵\ m$؛
پ) $۲۸/۶۶\ m/s$ با زاویهٔ $\mathrm{Arc}\,tg\,(۰/۴۶۶)$ نسبت به افق.

۲ - الف) $۴۰/۸\ m$؛ ب) $۳۳/۱\ m$؛
پ) $۹۱/۸\ m$.

۳ - $۱۴\sqrt{۳}\ m/s$؛ $۳/۵\ s$.

۴ - $۲۱۰۰\ m$.

۵ - $۱۸۰۰\sqrt{۳}\ m$.

۶ - $۲۵/۶\ m/s$ بازاویهٔ $\mathrm{Arc}\,tg\left(\frac{۳}{۴}\right)$ نسبت به‌افق.

۷ - $۹۶۰\ m$.

۸ - $۳۱/۳\ m/s$؛ $۴/۵\ s$.

۱۰- $۴۸\sqrt{۳}\ m$.

۱۱- $۹۶۰\ m$؛ $۹^\circ ۱۶'$ نسبت به‌افق.

۱۲- $۲۸/۱\ km$.

۱۳- $۱۱۷/۱\ m$.

۱۴- $\mathrm{Arc}\,tg\left(\frac{۴}{۳}\right)$؛ $۶۴\ m/s$؛
$۱۰/۴\ s$.

۱۵- $۲/۱\ s$.

۱۷- $۱۶/۱\ m/s$.

۱۸- $۴۹۵\ m/s$.

۱۹- فاصله‌های افقی وقائم از O برابرند با $۳۶۷\ m$؛ $۳۶۷\ m$؛ $۴۵۹\ m$؛ $۲۲۹/۵\ m$.

۲۰- $\mathrm{Arc}\,tg\,(۰/۴۹)$؛ $۱۱۱/۸\ m/s$.

۲۳- $۱۲۵۷\ m/s$؛ $۴۰/۳\ km$.

۲۵- $\frac{a}{۲}\sqrt{\frac{g}{۲b}}$؛ $\sqrt{۲gb}$.

۲۷- $۳۲/۸\,m$؛ $۱۸\sqrt{۳}\,m$.

۲۸- $b-\left(\frac{ga^{۲}}{۲V^{۲}\cos^{۲}\alpha}\right)-a\,tg\,\alpha$.

تمرین ۲.۶ (صفحهٔ ۲۷۳)

۱- $۱۰/۶\,s$؛ $۵۵۰/۸\,m$.

۲- الف) تقریباً $۷/۸\,km$؛
ب) تقریباً $۱۳/۵\,km$.

۳- $۲۱۷/۵\,m$.

۴- $۲۰۰۰\,m$؛ $۶۰۰۰\,m$.

۵- $۲۴/۵\,km$؛ $۱۹/۰\,km$؛
$۲۴/۵\,km$؛ $۲۱/۵\,km$.

۱۲- $۱۸/۸\,km$؛ $۵۶۶\,m/s$ با زاویهٔ $\text{Arc}\,tg\,(۱/۶)$ نسبت به افق.

۱۳- $۴۷\,km$؛ $۹۸\,s$.

تمرین ۳.۶ (صفحهٔ ۲۷۷)

۳- $\text{Arc}\,tg\left[\frac{bc}{a(c-a)}\right]$؛
$\frac{bc^{۲}}{۴a(c-a)}$.

۴- اندکی کمتر از °۱؛ درحدود $۰/۷\,m$.

۵- °۱۵ و °۷۵؛ $\frac{۲-\sqrt{۳}}{۲+\sqrt{۳}}$.

تمرین ۴.۶ (صفحهٔ ۲۸۵)

۱- $\frac{۹v^{۲}\sin\alpha\cos\alpha}{۲۵۶}$؛ $\frac{v\sin\alpha}{۶۴}$.

۳- $۴۸\,m$ به‌طور افقی از A.

۵- $\frac{۱}{۳}$.

۷- $۸h\sin\alpha$، که در آن α انحراف نسبت به‌صفحه است.

۱۲- $۰/۲۱۱$.

تمرینهایی برای مرور بخشهای قبل

۱- $۱۲۲/۵\,W$؛ $۳۷۵\,kW$.

۲- $۰/۰۷۹\,m/s^{۲}$؛ $۱۰/۲\,m/s$.

۳- $۲۵/۵\,m/s$؛ $۳۹۲\,N$؛
$۴۵۸/۶\,N$.

۴- $45/9\ \mathrm{m/s}$؛ $905\ \mathrm{N}$.

۵- $0/122\ \mathrm{m/s^2}$؛ $72000\ \mathrm{N}$.

۶- $1306/7\ \mathrm{kW}$.

۷- $\dfrac{5V(V^2+U^2)Mg\sin\alpha}{18U^2}$؛

$13/15\ \mathrm{kW}$

۸- $11/7\ \mathrm{m/s}$.

۹- $13/1\ \mathrm{cm}$.

۱۳- $\dfrac{mu^2}{2c}$؛ $\dfrac{1}{2}u$؛ $\dfrac{c}{u}$.

۱۴- $0/57\ \mathrm{m/s}$؛ $0/69\ \mathrm{m}$.

۱۵- $\dfrac{Mu}{M+m}$.

۱۶- $\dfrac{1}{3}(v^2-2\mu ga)^{1/2}$.

۱۸- $1:(1-e)$؛

$\dfrac{I}{m}\cos\alpha$ ، $\dfrac{I}{m}\sin\alpha$.

۲۰- $1/8\ \mathrm{m}$؛ $3\dfrac{1}{3}\ \mathrm{s}$.

۲۱- $\dfrac{2ev}{g}$.

۲۳- $\left[\dfrac{(m_1+m_2)gh}{m_1-m_2e}\right]^{1/2}$.

۲۴-

$\mathrm{Arc\,tg}\dfrac{(m_1+m_2)v_1\,tg\,\alpha}{(m_1-em_2)v_1-(1+e)m_2v_2}$.

۲۵- $\dfrac{1}{2}$.

۲۶- $\dfrac{7}{4}\sqrt{gh}$.

۲۷- $\dfrac{1}{2}a\sqrt{3}$.

۲۸- $\dfrac{1}{2}u(1+e^2)$؛ $\dfrac{2\pi a}{eu}$.

۳۳- $\mathrm{Arc\,tg}\,(2)$.

۳۶- الف) خط مستقیم در امتداد تصویر A؛ ب) $\dfrac{2u^2}{g}$.

۳۷- $1/22\ \mathrm{m}$.

۳۸- 45°؛ $71^\circ 34'$؛ $\sqrt{5}$ به ۱.

۴۰- $(2ag+bg)^{\frac{1}{2}}$ با زاویهٔ $\mathrm{Arc\,tg}\left(1+\dfrac{4a}{b}\right)^{\frac{1}{2}}$ نسبت به‌افق.

تمرین ۱۰۷ (صفحهٔ ۳۰۲)

۱- $9/6\ \mathrm{N}$.

۲- 122.

۳- $1/78\times 10^5\ \mathrm{N}$.

۴- $1/78\times 10^3\ \mathrm{N}$.

۵- $0/13\ \mathrm{m}$.

۶- $2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$.

۷- $77/2$.

۱۰- $1/92\ \mathrm{m/s}$؛ $18/4\ \mathrm{m/s^2}$.

تمرین ۲.۷ (صفحهٔ ۳۰۹)

۱ - $\frac{\pi^2 n^2 a}{900 g}$.

۴ - تقریباً ۸ cm.

۵ - ۱/۴۹۳ m؛ ۵۳ N.

۶ - $\frac{g(\lambda - ma\omega^2)}{\lambda a\omega^2}$.

۷ - $3/6\pi^2$ N.

۱۱- $\text{Arc}\cos\left(\frac{m}{M}\right)$؛ $\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{Mg}{m(l-a)}}$.

۱۴- $ma\left(4\pi^2 n^2 - \frac{g}{b}\right)$.

۱۵- ۴۹ N.

تمرین ۳.۷ (صفحهٔ ۳۲۰)

۱ - ۷/۲ cm.

۲ - ۱۲/۱ m/s.

۳ - $\frac{bv^2}{gr}$.

۴ - ۲/۸ cm.

۵ - ۸۰/۲ km/h؛ $\frac{9}{8}$.

۶ - $48°36'$؛ $2/27\times 10^3 g$ N.

۷ - ۸۱/۶ km/h.

۸ - ۲۳/۶ cm.

۹ - $7°40'$؛ ۰/۱۳۴۵.

۱۰- $11°24'$؛ ۰/۵۲.

۱۱- ۶۱/۷ km/h.

۱۲- $41°25'$.

۱۳- $28/9\times 10^3 g$ N.

۱۵- ۰/۰۶ وزن قطار.

۱۶- تقریباً $0/15\times 10^4$ N.

۱۸- $0/47\times 10^3 g$ N.

۱۹- ۲۹/۸ km/h.

۲۰- ۱۴/۴ m/s.

۲۱- $\text{Arc}\,tg\left(\frac{v^2}{gR}\right)$.

تمرین ۴.۷ (صفحهٔ ۳۳۶)

۱ - ۷/۶۷ m/s؛ ۲/۶۵ N.

۳ - ۲۳۹ cm/s^2؛ $1/24\times 10^{-3} g$ N.

۴ - ۳/۰۷ m/s.

۵ - $4/2\sqrt{\sin\theta}$ m/s؛ $0/6g$ N؛ ۰/۴ m؛ $0/3\sqrt{3}g$ N.

۶ - ۱/۸۹ m؛ ۲/۰۷ m.

۷ - ۱ m.

۸- $1/916 \times 10^{3}\,\mathrm{N}$.

۹- $12/12\,\mathrm{m/s}$.

۱۱- $8/37\,\mathrm{m/s}$؛ تقریباً $1/5$؛ $5/09\,\mathrm{m/s}$.

۱۲- $135g\,\mathrm{N}$؛ بلی.

۱۳- $mg(3\cos\theta - 2)$ به طرف بیرون؛ $\frac{3g}{4}$.

۱۵- $0/43$ وزن آن.

۱۷- $5/14\,\mathrm{m/s}$؛ $0/446\,\mathrm{m}$.

۲۰- $15\,\mathrm{cm}$.

تمرین ۱۰۸ (صفحهٔ ۳۵۲)

۱- $\pi\sqrt{2}$؛ $\frac{\pi}{2}$.

۲- $1/5\sqrt{2}\,\mathrm{m/s}$؛ $0/9\sqrt{2}\,\mathrm{m/s}$.

۳- $0/9\,\mathrm{m}$؛ π ثانیه.

۴- 2π ثانیه؛ $1/5\,\mathrm{m/s^2}$.

۵- $1/2\,\mathrm{m}$؛ $0/6\sqrt{7}\,\mathrm{m/s}$.

۶- $0/9\pi\,\mathrm{m/s}$؛ $0/9\pi^{2}\,\mathrm{m/s^2}$.

۸- $8\,\mathrm{s}$؛ $28\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$.

۹- $\frac{3}{5\pi}\,\mathrm{m/s}$؛ $\frac{6}{25\pi^{2}}\,\mathrm{m}$.

۱۱- a؛ $\frac{2\pi}{k}$.

۱۳- $2\pi\sqrt{\frac{x_2^2 - x_1^2}{v_1^2 - v_2^2}}$؛

$\sqrt{\frac{v_1^2 x_2^2 - v_2^2 x_1^2}{v_1^2 - v_2^2}}$؛

$\sqrt{\frac{v_1^2 x_2^2 - v_2^2 x_1^2}{x_2^2 - x_1^2}}$؛

$\sqrt{\frac{v_1^2 - v_2^2}{x_2^2 - x_1^2}}\sqrt{v_1^2 x_2^2 - v_2^2 x_1^2}$؛

$\frac{2}{3}\pi\sqrt{5}$؛ $0/1\sqrt{161}$؛

$0/3\sqrt{\frac{161}{5}}$؛ $0/18\sqrt{161}$.

۱۴- تقریباً ۱۹۶.

۱۶- $\frac{\pi}{3\omega}\,\mathrm{s}$؛ $\frac{\sqrt{3}}{2}a\omega$.

۱۷- $6/8\,\mathrm{cm}$؛ $0/095\,\mathrm{s}$.

۱۸- $\frac{3\pi}{10}\,\mathrm{m/s}$؛ $18\,\mathrm{m/s^2}$؛

$0/15\pi\sqrt{3}\,\mathrm{m/s}$؛ $9\,\mathrm{m/s^2}$.

۲۲- الف) $2\pi n\sqrt{a^2 - x^2}$،

ب) $2\pi n a \sin 2\pi n t$.

۲۶- الف) $\frac{0/6}{\pi}\,\mathrm{m/s}$؛

ب) $\frac{1/2}{\pi^{2}}\,\mathrm{m/s}$.

۲۷- $\frac{2/4\sqrt{10}}{5}\,\mathrm{m}$؛ $0/6\pi\sqrt{\frac{3}{5}}\,\mathrm{s}$؛

$0/080\,\mathrm{s}$.

۲۸- $\frac{2/7}{\pi}\,\mathrm{m}$؛

الف) $2/25\sqrt{3}\,\mathrm{m/s}$؛

ب) $2/25\sqrt{2}\,\mathrm{m/s}$.

تمرین ۲.۸ (صفحهٔ ۳۶۵)

۱ - ۱۵ cm؛ $\pi\frac{\sqrt{30}}{35}$ s.

۲ - $\pi\frac{\sqrt{10}}{35}$ s؛ ۰/۱۹ m/s؛
۲/۴۵ m/s^2.

۳ - ۰/۰۲۲ m.

۴ - الف) $\frac{3}{2\pi}$؛ ب) $\frac{9\pi}{16}$ W.

۸ - $\frac{\pi}{14}\sqrt{27-10l}$؛
$\frac{0/7}{\sqrt{27-10l}}$ m/s.

۹ - ۰/۵۹ m؛ $\frac{1}{5}\pi\sqrt{3}$.

۱۱ - $140\frac{\sqrt{6}}{\pi}$ در دقیقه؛ $7\frac{\sqrt{6}}{30}$ m/s.

۱۲ - $\frac{\pi\sqrt{5}}{7}$ s؛ $7\frac{\sqrt{15}}{200}$ m؛
۴/۵g N.

۱۳ - $\frac{2\pi}{7}$ s؛ ۶/۷۵g N؛ ۰/۳ m/s.

۱۵ - $5\times\frac{\sqrt{3\pi}}{42}$ s؛ ۴۲ cm/s؛
۲/۳۵ m/s^2.

۱۶ - ۲۰ cm؛ ۲/۵g N؛ $\pi\frac{\sqrt{3}}{7}$ s.

۱۷ - ۳ cm؛ $4\frac{\sqrt{10\pi}}{70}$ s؛
$21\frac{\sqrt{10}}{2}$ cm/s.

۱۸ - ۳۵ cm/s؛ $\frac{\pi}{7}$ s.

۱۹ - $\frac{\pi\sqrt{2}}{14}$ s.

۲۰ - $3\frac{\sqrt{3\pi}}{14}$ s؛ $\frac{56}{5}\sqrt{3}$ cm/s.

۲۴ - ۱۰ cm؛ ۰/۶۴ m/s.

۲۵ - $T=\frac{2\pi a}{V}$؛ $\frac{V^2 b}{a^2}$؛ تقریباً $\frac{21}{11}$.

تمرین ۳.۸ (صفحهٔ ۳۷۵)

۱ - ۲۶۵s جلو می‌افتد.

۲ - ۹۹/۴ cm؛
۱/۷۷۵ mm کوتاهتر.

۴ - ۴۴۰ s.

۵ - $\frac{100}{197}$.

۶ - ۱۱۰ s.

۷ - ۰/۰۴۶ cm؛ ۱/۵ km.

۸ - ۱/۰۰۰۵ : ۱؛ ۲/۹۷ km.

۹ - ۳۰/۲.

۱۱ - ۴/۵۹ cm؛ ۴/۹ N؛ ۱/۹۰ s.

تمرین ۱.۹ (صفحهٔ ۳۸۸)

۱ - $۲Ma^۲$.

۳ - $\frac{۸}{۳}Ma^۲$.

۴ - $\frac{۴}{۳}M(a^۲+b^۲)$.

۵ - $\frac{۱}{۲}Ma^۲$.

۸ - $\frac{۳}{۲}Ml^۲$.

۱۱- الف) $\frac{۱۱۷}{۸۰۰}M$، که M جرم باقیماندهٔ صفحه است؛

ب) $\frac{۴۴۱}{۳۲۰۰}M$.

۱۲- $۰/۲۶۶M$، که M جرم کل است.

۱۳- $\frac{۱}{۳}Ml^۲sin^۲\theta$.

۱۴- $\frac{۱}{۳}Ma^۲sin^۲\theta$.

۱۵- $\frac{۱}{۲}Mp^۲$ ، $\frac{۱}{۱۸}Mp^۲$ ، که در آن p ارتفاع قائم است.

۱۷- $\frac{۲}{۳}Ma^۲$.

۱۸- $\frac{۲}{۵}Mr^۲$.

۱۹- $\frac{۱}{۴}Mr^۲$ ؛ $\frac{۱}{۴}Mr^۲$.

۲۱- $۰/۰۵۶M$، کـه M جرم چـرخ و محور است.

۲۳- $۱/۹۳۸\,\mathrm{kg\,m^۲}$.

۲۴- الف) $\frac{۲}{۳}Ma^۲$ ؛ ب) $\frac{۵}{۱۲}Ma^۲$.

تمرین ۲.۹ (صفحهٔ ۳۹۴)

۱ - $۸/۰۸\,\mathrm{rd/s}$.

۲ - تقریباً $۰/۶\,\mathrm{kg\,m^۲}$.

۳ - $۱/۸\sqrt{۷}\,\mathrm{m/s}$ ؛ $۲۹/۴\,\mathrm{J}$.

۴ - $۴\frac{۲}{۳}\,\mathrm{rd/s}$.

۵ - $\frac{۸۴}{۱۷۰}\sqrt{۳۴}\,\mathrm{m/s}$.

۶ - $۸۶۶\,\mathrm{kg\,m^۲}$.

۷ - $\frac{۳}{۲}ml^۲$ ؛ $\sqrt{۲\frac{\sqrt{۳g}}{۳l}}$.

۹ - $\frac{\sqrt{V^۲+۴ga}}{۲a}$.

۱۰- $\sqrt{\frac{g}{a}}\,\mathrm{rd/s}$.

۱۲- $۳۸۱۳\,\mathrm{J}$.

۱۳- $\sqrt{۱۰/۸g}$؛ $\sqrt{۹g}$.

۱۴- $M\frac{a^۲+۲b^۲}{۴}\omega^۲$.

۱۵- ۷/۹.

۱۶- $۱۲/۶\pi$.

تمرین ۹.۳ (صفحهٔ ۴۱۱)

۱- $۲\pi\frac{\sqrt{۱۳l}}{۱۵g}$.

۳- $۰/۶۵\pi\,\mathrm{s}$.

۴- $\frac{۴\pi}{۷}\,\mathrm{s}$.

۶- تقریباً $۴۴۴۰\,\mathrm{J}$؛ $۳۰\pi\,\mathrm{N}$.

۷- $۱۶\frac{۲}{۳}$ دور؛ $\sqrt{\frac{۳}{\pi}}\,\mathrm{m}$.

۸- $۱۶۲۵۰\pi^۲\,\mathrm{J}$؛ $۲۱/۳\,\mathrm{Nm}$؛ ۱۲۰۰ دور.

۹- $۷۶/۸\pi^۲\,\mathrm{J}$؛ $۱/۰۱\,\mathrm{Nm}$.

۱۲- $\sqrt{\frac{۲mgx}{M+m}}$.

۱۴- $۰/۰۰۵\pi\,\mathrm{Nm}$؛ $۳۷/۸\mathrm{g}$.

۱۵- ۱/۲۹؛ $۰/۲۱\,\mathrm{m}$.

۱۶- $۲/۷\,\mathrm{m}$.

۱۷- $\frac{۱۰۰g}{۹۷۲}$؛ $۰/۹۸\,\mathrm{N\,cm}$.

۱۸- $۴\,\mathrm{cm}$.

۱۹- $۰/۰۹۱\,\mathrm{Nm}$.

تمرین ۹.۴ (صفحهٔ ۴۲۶)

۴- $۱۰۰\,\mathrm{m/h}$؛ $۱/۷۲\,\mathrm{J}$.

۵- $۳/۶۱۵\times۱۰^۵\,\mathrm{J}$؛ $۵۰۲\,\mathrm{N}$.

۸- $\frac{۱۱}{۲۰}Mg\,\mathrm{N}$ برپایه‌های عقبی؛
$\frac{۹}{۲۰}Mg\,\mathrm{N}$ برپایه‌های جلویی.

تمرینهایی برای مرور بخشهای قبل

۲- $۲\sqrt{ag}$ با زاویهٔ $\mathrm{Arc}\,tg\left(\frac{۵\sqrt{۲}}{۲}\right)$ نسبت به افق.

۷- $۹/۴\,\mathrm{N}$؛ $۵۰^\circ۱۵'$.

۹- b: $\sqrt{a^۲+b^۲}$؛ $\sqrt{\frac{g}{b}}$؛ $a\sqrt{۱+\frac{gt^۲}{b}}$؛ $d-b$.

۱۰- OA؛ $(m_1+m_2)a\omega^2$؛ OB، $(m_2+m_3)a\omega^2$؛ BC، $m_3a\omega^2$؛ AC، $m_3a\omega^2$؛ AB، $m_3a\omega^2$؛ AB درحالت کشش.

۱۱- $\left(\frac{3gr}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$؛ $\left(\frac{gr}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$؛ نقطهٔ وسط BC.

۱۲- $\frac{7a}{3}$.

۱۳- $8\,s$؛ $\frac{3/6\sqrt{2}}{\pi}\,m$؛ $0/9\sqrt{2}\,m/s$؛ $1 : 3+2\sqrt{2}$.

۱۶- $1 : \sqrt{2}$؛ $\sqrt{2} : 1$.

۱۸- $\frac{1}{6}AB$.

۲۱- $50\pi^2\,J$.

۲۲- $\frac{4mg}{a(M+2m)}$؛ $\frac{8mg}{a(M+2m)}$.

۲۳- $\sqrt{2} : \sqrt{7}$.

۲۴- $3 : 4$.

۲۵- $2\pi\sqrt{\frac{(3M+16m)a}{2M+8m}\,g}$.

۲۹- $\frac{g\sin\alpha\times(m+4M)}{m+6M}$؛ $m=M$.

۳۰- $0/1275\,kg\,m^2$؛ $13/8\,N$؛ $10/4\,N$.

فهرست موضوعی

یادداشت

درترجمه وچاپ این کتاب به‌نکته‌های زیر توجه شده است:

۱ـ واژه‌های علمی این کتاب‌همانها هستندکه امروزه درکتابهای فیزیك ومکانیك دبیرستانی به‌کار رفته‌اند.

۲ـ هرجا نخستین بار واژهٔ علمی خاصی به‌کاررفته است آن واژه با حروف خوابیدهٔفارسی مشخص‌شده‌است. مثلاً سرعت متوسط (صفحهٔ ۱۱)، نیرو (صفحهٔ ۱۰۳)، اندازهٔ حرکت (صفحهٔ ۱۰۵).

۳ـ نشانه‌های اختصاری واحدها وپیشوندهای آنها در این کتاب به‌شیوهٔ بین‌المللی و به همان صورتی به‌کاررفته‌اندکه درهمهٔ کتابهای معتبرجهان متداول است. این نشانه‌ها با حروف‌لاتینی معمولی مشخص شده‌اند. مثلاً kg برای کیلوگرم، Mg برای مگا- گرم، m برای متر وN برای نیوتون.

۴ـ کمیتهای فیزیکی با حروف لاتینی خوابیده مشخص شده‌اند. مثلاً g برای شتاب جاذبه، m برای جرم و F برای نیرو.

۵ـ نشانه‌های‌هندسی، مانند نقطه و خط وسطح، باحروف لاتینی معمولی مشخص‌شده‌اند. مثلاً A نشان دهندهٔ نقطهٔ هندسی، و AB نشان دهندهٔ خط هندسی است. با رعایت این شیوه بهتر بودکه نشانه‌های دیگر ریاضی، مانند خطهای مثلثاتی و لگاریتم و حد نیز با حروف لاتینی معمولی نشان داده شوند. اما دراین کتاب با حروف خوابیده مشخص شده‌اند. مثلاً $cos\ \alpha$، $sin\ \mathrm{ABC}$، $\mathrm{Arc}\,tg\ x$، $log\ y$ و $lim\frac{x}{t}$.

۶ـ برای پرهیز ازهزینهٔ بیشتر درچاپ‌کتاب، ناگزیر ازنمودارها وتصویرهای‌کتاب اصلی استفاده شده است و به‌همین سبب عددهای روی نمودارها به‌همان صورت لاتینی باقی مانده‌اند.

۷ـ فهرست الفبایی موضوعی ،که برای هر دوجلد کتاب جداگانه فراهم شده است ، به خواننده کمك می‌کند تا هرمفهوم یااصطلاحی راکه بخواهد دربارهٔ آن بیشترمطالعه کند، با مراجعه به‌صفحه‌ای‌که به‌آن اشاره شده است، به‌آسانی بیابد.

۸ـ پاسخ تمرینها که برای هردو جلدکتاب جداگانه فراهم شده است ، به‌خواننده‌اطمینان می‌دهدکه شیوهٔ او درحل مسئله درست بوده است.