

# Incompressible viscous flow through pipes

**Mohsen Soltanpour**

Email: [soltanpour@kntu.ac.ir](mailto:soltanpour@kntu.ac.ir)

URL: <http://sahand.kntu.ac.ir/~soltanpour/>

در جریان حول یک جسم، حتی اگر لزجت کم باشد، ناحیه باریکی پیرامون جسم بوجود می آید که در آن ناحیه بواسطه گرادیان سرعت بزرگی که ناشی از “چسبیدن” سیال به مرز جسم است تنش برشی حائز اهمیت می باشد. این ناحیه **لایه مرزی** نامیده می شود.

در **ورودی یک کانال یا لوله** عمدتاً لایه مرزی بسیار نازک است بطوری که در این ناحیه می توان جریان را بجز در نزدیکی جداره لوله غیر لزج در نظر گرفت.

اما این لایه در طول لوله مرتباً ضخیم تر می شود و در بسیاری از جریانها لایه مرزی سریعاً کل مقطع جریان را احاطه می کند. در چنین حالتی می توان جریان را در سراسر لوله **لزج** در نظر گرفت.

مثلاً معمولاً در لوله موئین جز در حالتی که دبی بسیار ناچیز باشد حتی اگر طول لوله کوتاه بوده و یا لزجت سیال کم باشد جریان کاملاً لزج در نظر گرفته می شود. همچنین جریان در لوله های نسبتاً طویل انتقال نفت و آب را می توان لزج به حساب آورد. اما جریان هوا در مجاری نسبتاً کوتاه مثل کانالهای تهویه و تونلهای باد را غیر از ناحیه مرزی عموماً می توان بدون اصطکاک در نظر گرفت.

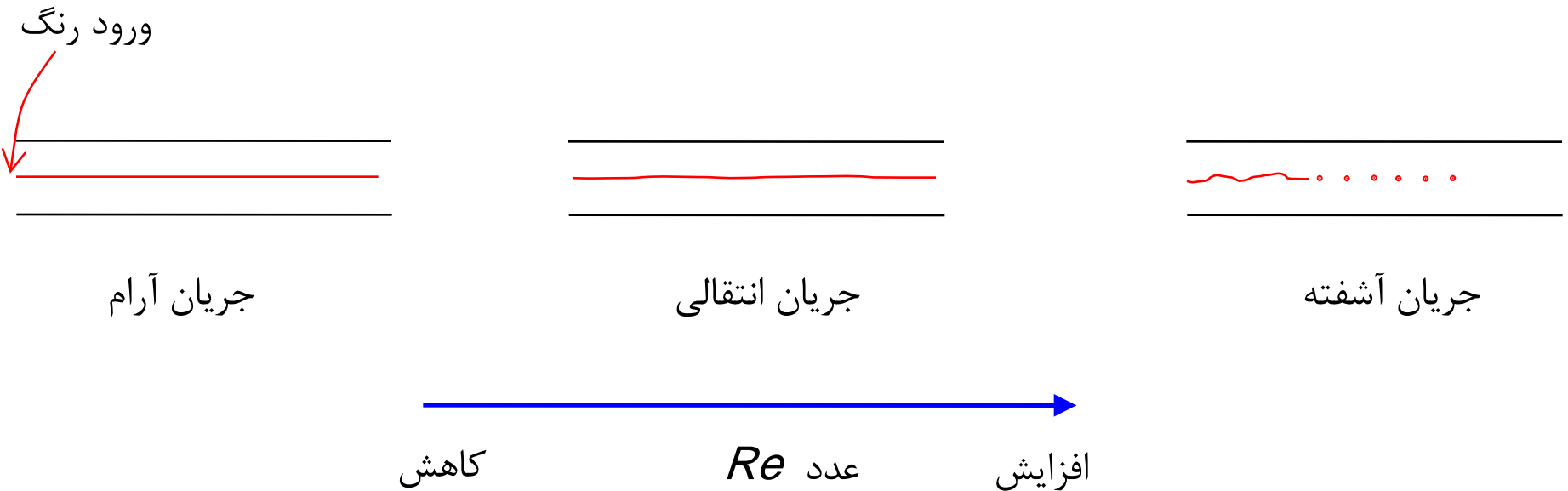
در این بخش فرض می شود که تاثیر لزجت در سراسر جریان وجود دارد و لذا تنها جریانهایی در لوله که لزج هستند بررسی می شوند.

## جریان آرام (Laminar flow)

جریانی است که در آن لایه های سیال با الگویی منظم بر روی یکدیگر می لغزند. در این حالت اگر چه حرکات ملکولی نا منظم است جریان بطور ماکروسکوپیک منظم می باشد.

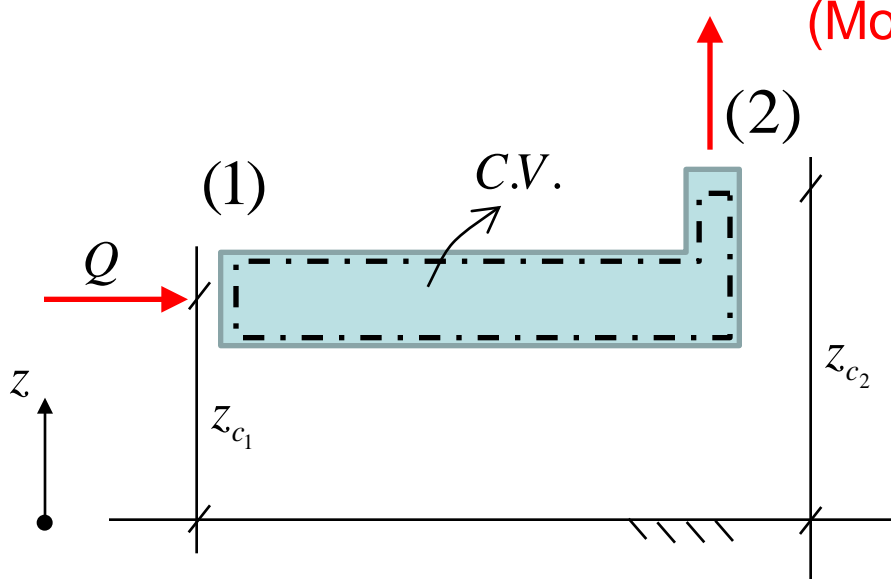
## جریان آشفته (Turbulent flow)

در این جریان نوسانات نامنظم در جریان توسعه می یابند و یک سرعت نوسانی کوچک اما ماکروسکوپیک  $v'$  به جریان منظم  $\bar{v}$  اضافه می شود.



در اعداد رینولدز کمتر از ۲۳۰۰ فقط جریان آرام می تواند برقرار شود اما این جریان می تواند تا اعداد رینولدز ۴۰۰۰۰ نیز حفظ شود.

## معادله اصلاح شده برنولی (Modified Bernoulli equation)



با در نظر گرفتن قانون اول ترمودینامیک ما بین مقاطع (1) و (2):

$$\left[ \frac{v_1^2}{2} + g(z_c)_1 + \left( u_1 + \frac{P_1}{\rho} \right) \right] + \frac{dQ}{dm} = \left[ \frac{v_2^2}{2} + g(z_c)_2 + \left( u_2 + \frac{P_2}{\rho} \right) \right] + \frac{dW_s}{dm}$$

با متوسط گیری در جریان یک بعدی:

$$\left( \frac{v_1^2}{2g} + z_1 + \frac{p_1}{\gamma} \right) = \left( \frac{v_2^2}{2g} + z_2 + \frac{p_2}{\gamma} \right) + \underbrace{\frac{1}{g} \left[ (u_2 - u_1) - \frac{dQ}{dm} \right]}_{(h_f)_T}$$

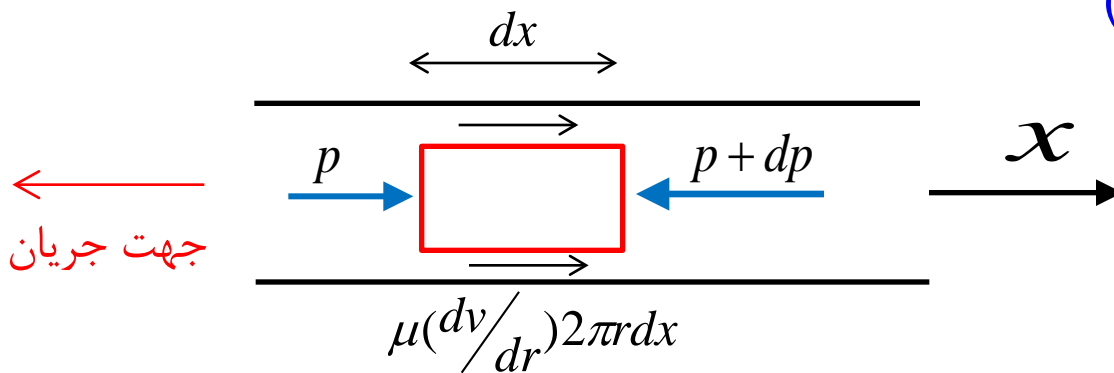
$(h_f)_T$  افت بار آبی کل (Total head loss) می باشد که افزایش انرژی داخلی سیال (تغییر  $U$ ) و انتقال حرارت از سیال داخل حجم کنترل به محیط خارج  $(\frac{dQ}{dm})$  را نشان می دهد.

$$\left(\frac{v_1^2}{2g} + z_1 + \frac{p_1}{\gamma}\right) = \left(\frac{v_2^2}{2g} + z_2 + \frac{p_2}{\gamma}\right) + (h_f)_T \Rightarrow \boxed{(h_f)_T = (h_f)_P + (h_f)_M}$$

$(h_f)_P$ : افت بار آبی در لوله های افقی و مایل

$(h_f)_M$ : افت بار آبی در زانویی که افت موضعی (Minor loss) نامیده می شود.

### معادله هیگن-پویسلی (Hagen-Poiseuille)



هیگن در سال ۱۸۳۹ و پویسلی در سال ۱۸۴۰ مستقلاً جریان تراکم ناپذیر آرام در لوله را بررسی کردند. المان کوچک استوانه ای شکلی به طول  $dx$  و قطر  $r$  در وسط لوله در نظر می گیریم. با صفر قرار دادن شتاب در جریان دائمی:

$$(p - p - dp)\pi r^2 + \mu\left(\frac{dv}{dr}\right)(2\pi r)dx = 0$$

$$-\pi r^2 dp + \mu\left(\frac{dv}{dr}\right)(2\pi r)dx = 0$$

پروفیل سرعت در جهت جریان ثابت می ماند.\* بنابراین:

$$\int_r^0 \frac{dp}{2\mu dx} r dr = \int^v dv \quad \frac{dp}{2\mu dx} \left(\frac{r^2}{2}\right) + C_1 = v$$

با توجه به اینکه در  $r = \frac{D}{2}$  سرعت  $v=0$  است:

$$C_1 = \frac{-dp}{\mu dx} \left( \frac{D^2}{16} \right) \implies v = \frac{-dp}{4\mu dx} \left( \frac{D^2}{4} - r^2 \right)$$

پس معادله سرعت سهمیگون است.

$$Q = \iint v dA = \int_0^{D/2} \frac{-dp}{4\mu dx} \left( \frac{D^2}{4} - r^2 \right) (2\pi r dr)$$

$$= \frac{-\pi dp}{4\mu dx} \left[ \frac{D^2}{4} \times \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^{D/2} = \frac{-\pi dp D^4}{128\mu dx} \implies \frac{-dp}{dx} = \frac{128\mu Q}{\pi D^4}$$

$$\frac{-(p_2 - p_1)}{(x_2 - x_1)} = \frac{128\mu Q}{\pi D^4} \quad \text{و} \quad \begin{cases} \Delta p = p_1 - p_2 \\ L = x_2 - x_1 \end{cases} \implies \Delta p = \frac{128\mu QL}{\pi D^4}$$

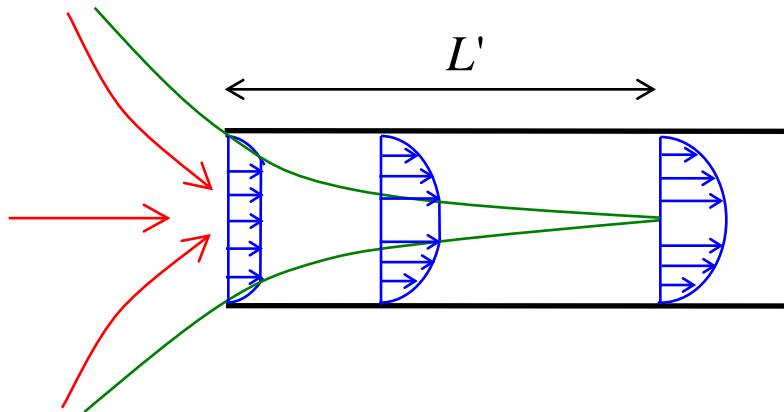
بنابراین افت بار آبی لوله ای با قطر ثابت  $D$  در جریان آرام برابر است با (معادله هیگن-پویسلی):\*

$$(h_f)_P = \frac{\Delta p}{\gamma} = \frac{128\mu QL}{\pi D^4 \gamma} = \frac{32\mu \nu L}{D^2 \gamma}$$

مشاهده می شود که با صرف نظر کردن از زبری لوله، تلفات انرژی با لزجت، طول لوله و دبی بطور مستقیم و با توان چهارم قطر به طور معکوس متناسب است.

وضعیتی که خطوط جریان مستقیم و موازی بوده پروفیل سرعت در تمام لوله یکسان باشد، **جریان آرام کاملا توسعه یافته** (Fully developed laminar flow) نامیده می شود. در این حالت اثر لزجت در تمام مقطع منتشر شده است.

در ابتدای لوله چنین وضعیتی برقرار نمی شود یعنی در ابتدا جریان تقریبا یکنواخت است و با جلو رفتن در لوله اثرات لزجت بیشتر در جریان توسعه می یابد. فاصله  $L'$  از دهانه لوله تا محلی که جریان آرام کاملا توسعه یافته برقرار می شود با رابطه تجربی زیر می تواند تعیین شود (رابطه لنکار - Langhaar):



$$L' = 0.058 R_{ey} \cdot D$$

### جریان آشفته (Turbulent flow)

در اغلب حالات عملی (مثلا جریان آب در شبکه های آبرسانی)، عدد رینولدز معمولا بالا بوده و جریان آشفته است. در جریان آشفته بدلیل اثر آشفتگی تنشهای دیگری نیز علاوه بر تنشهای لزج معمولی وجود دارند که **تنشهای ظاهری** (Apparent stress) نامیده می شوند.

در جریان آشفته تغییرات فشار  $\Delta P$  در طول لوله به کمیت‌های زیر وابسته است (لوله افقی فرض می‌شود):

۱-  $D$ ، قطر لوله

۲-  $L$ ، طول لوله

۳-  $\mu$ ، لزجت

۴-  $V$ ، متوسط سرعت‌های متوسط زمانی در یک مقطع ( $q/A$ )

۵-  $\rho$ ، جرم مخصوص

۶-  $e$ ، متوسط تغییرات شعاعی لوله (مقیاسی از زبری لوله)

بنابراین:

$$\Delta P = f(D, L, \mu, v, \rho, e)$$

با استفاده از آنالیز ابعادی می‌توان چهار گروه بی بعد زیر را بدست آورد:

$$\frac{\Delta P}{\rho v^2} = G\left(\frac{\rho v D}{\mu}, \frac{L}{D}, \frac{e}{D}\right)$$

از آنجایی که تغییر فشار با طول لوله تناسب مستقیم دارد:

$$\frac{\Delta P}{\rho v^2} = \frac{L}{D} H\left(\frac{\rho v D}{\mu}, \frac{e}{D}\right)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow h_f &= \frac{\Delta P}{\gamma} = \frac{L v^2}{g D} H\left(\frac{\rho v D}{\mu}, \frac{e}{D}\right) \\ &= \frac{v^2}{2g} \cdot \frac{L}{D} \cdot \underbrace{2H\left(\frac{\rho v D}{\mu}, \frac{e}{D}\right)}_f = f \frac{L}{D} \cdot \frac{v^2}{2g} \end{aligned}$$

که در آن  $f$  (تابع نامعلوم  $K$ )،  $(f = K(\frac{\rho v D}{\mu}, \frac{e}{D}))$ ، ضریب اصطکاک (friction factor) نامیده می‌شود.



$$h_f = f \frac{L}{D} \cdot \frac{v^2}{2g}$$

فرمول دارسی-ویسباخ (Darcy-Weisbach)

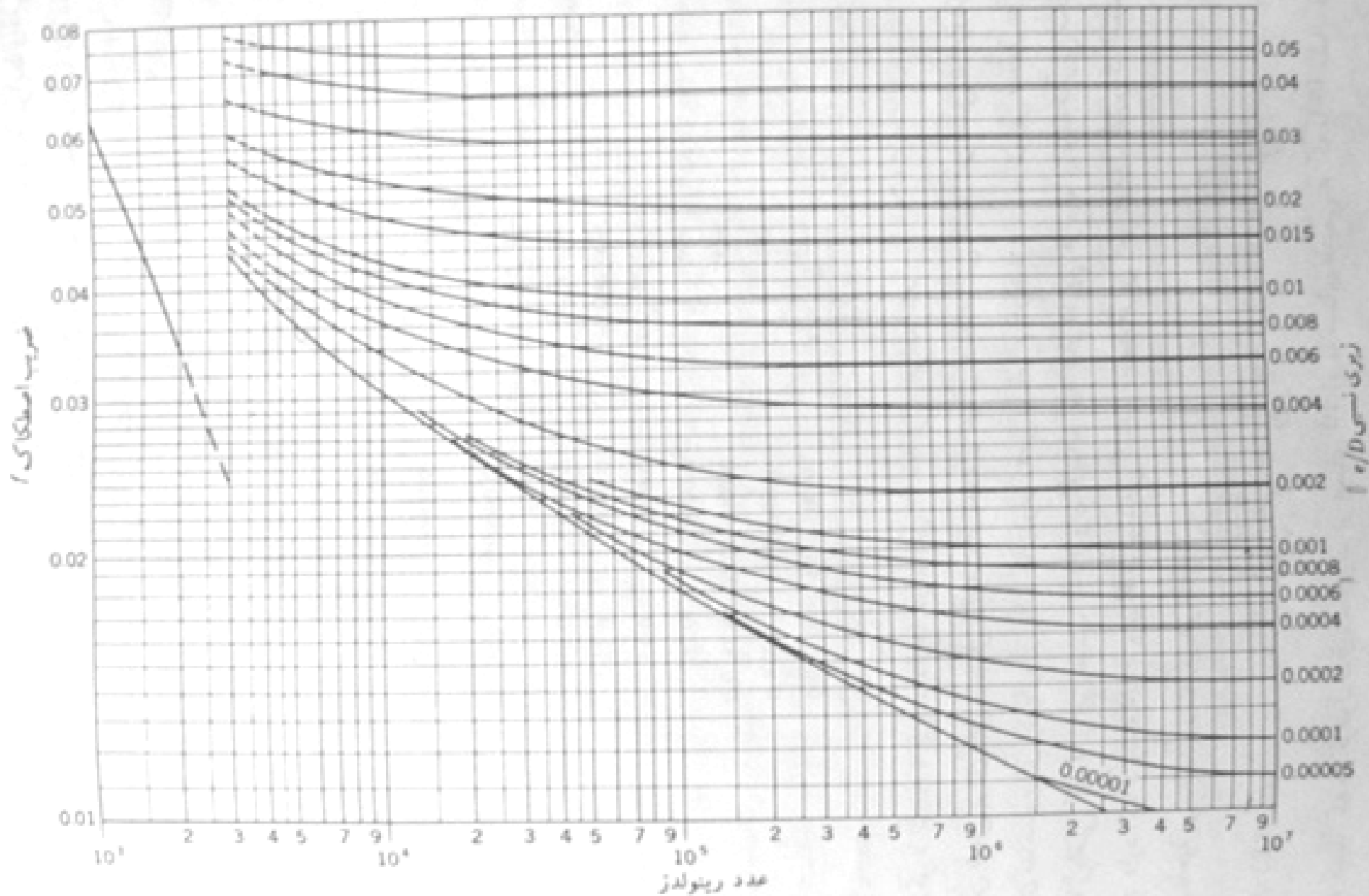
ارتباط  $f$  و  $R_{ey}$  بر مبنای آزمایشات تجربی بدست آمده است که هر دو جریان آرام و آشفته را شامل می شود. در جریان آرام با استفاده از رابطه هیگن-پویسلی:

$$\begin{cases} h_f = \frac{32\mu v L}{D^2 \gamma} \\ h_f = f \frac{L}{D} \cdot \frac{v^2}{2g} \end{cases} \Rightarrow f = \frac{64}{\frac{\rho v D}{\mu}} = \frac{64}{R_{ey}}$$

بنابراین رابطه  $f$  و  $R_{ey}$  در جریان آرام هذلولی قائم الزاویه ای است که در کاغذ لگاریتمی به خط راست تبدیل می شود (smooth pipe zone). در جریان آشفته و وضعیت بینابین ضریب  $f$  بر مبنای زبری نسبی  $(e/D)$  و عدد رینولدز  $(R_{ey})$  از **دیاگرام مودی** (moody diagram) بدست می آید. این منحنی بر اساس آزمایش و اعمال زبریهای مختلف با چسباندن دانه های شن با اندازه های گوناگون و به فواصل متفاوت بر روی دیواره لوله بدست آمده است (داده های نیکورادزه - Nikuradse's data). قسمت خطی نمودار تطابق بسیار خوبی با رابطه تئوری  $f = 64/R_{ey}$  دارد.

در اعداد بالای رینولدز ضریب اصطکاک مستقل از عدد رینولدز بوده و منحنی به خطی افقی تبدیل می شود.

# ضریب اصطکاک برای جریان در لوله (دیاگرام مودی)



زبری  $e$  در لوله های مختلف بر مبنای مطالعات مودی:

جنس (نو)	زبری (mm)	زبری (ft)
شیشه	0.0003	0.000001
لوله (ساخته شده به روش کششی)	0.0015	0.000005
آهن، فولاد	0.046	0.00015
چدن قیر اندود	0.12	0.0004
آهن گالوانیزه	0.15	0.0005
چدن	0.26	0.00085
چوب	0.18-0.9	0.0006-0.003
بتن	0.3-3.0	0.001-0.01
فولاد پرچ شده	0.9-9.0	0.003-0.03

فرمولهایی نیمه تجربی برای ارتباط  $f$ ،  $e/D$  و  $Re_y$  وجود دارند که مشهورترین آنها **فرمول کلبروک** (Colebrook) است:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 1.14 - 2 \log_{10} \left[ \frac{e}{D} + \frac{9.35}{Re_y \sqrt{f}} \right]$$

در ناحیه کاملاً زبر ( $\frac{e}{D} \gg \frac{9.35}{Re_y \sqrt{f}}$ ) با حذف جمله  $\frac{9.35}{Re_y \sqrt{f}}$  داریم:

$$f = \frac{1}{[1.14 - 2 \log_{10} (\frac{e}{D})]^2}$$

که نیاز به آزمون و خطا ندارد.

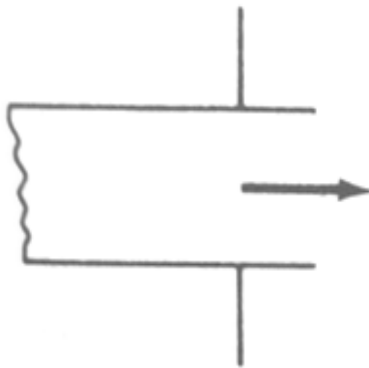
علاوه بر افت لوله ها، زانویی ها، شیرآلات و سایر اتصالات نیز انرژی جریان را کاهش می دهند. برای تعیین افت های موضعی می توان فرمول تجربی زیر را در جریان آرام و آشفته بکار برد:

$$h_f = K \frac{v^2}{2g}$$

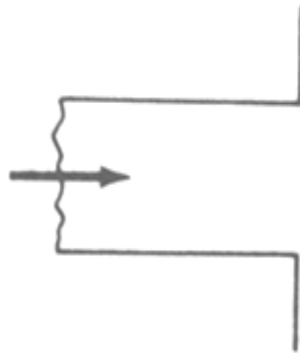
$K$ : ضریب افت موضعی  
 $v$ : سرعت متوسط

ضریب افت موضعی در حالات مختلف را می توان از اشکال و جداول مربوطه بدست آورد.

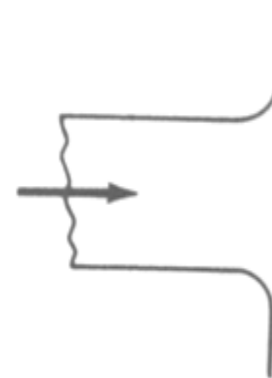
خروجی از لوله



بداخل توسعه یافته  
 $K = 1.0$

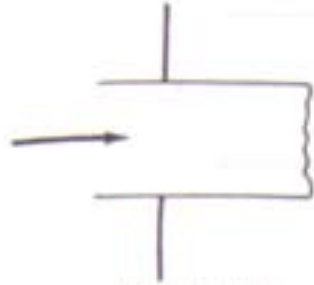


لبه تیز  
 $K = 1$

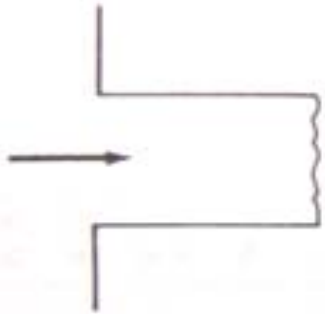


لبه گرد  
 $K = 1$

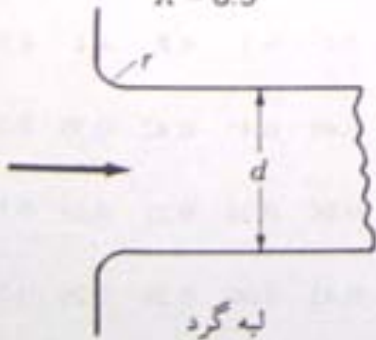
ورودی به لوله



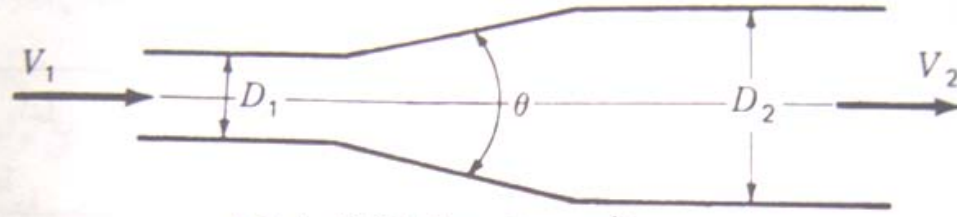
بداخل توسعه یافته  
 $K = 0.78$



لبه تیز  
 $K = 0.5$



لبه گرد

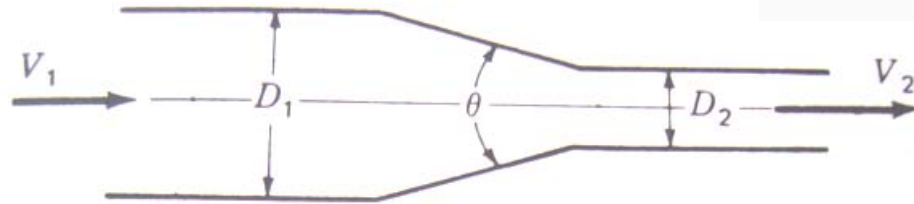


$$\theta \leq 45^\circ, K = \frac{2.6 \sin(\theta/2) [1 - (D_1/D_2)^2]}{(D_1/D_2)^4}$$

$$45^\circ < \theta \leq 180^\circ, K = \frac{[1 - (D_1/D_2)^2]}{(D_1/D_2)^4}$$

$$h_l = K \frac{V_2^2}{2}$$

ضریب افت ارتفاع برای بازشدگی تدریجی



$$\theta \leq 45^\circ, K = \frac{0.8 \sin(\theta/2) [1 - (D_2/D_1)^2]}{(D_2/D_1)^4}$$

$$45^\circ < \theta \leq 180^\circ, K = \frac{0.5 [1 - (D_2/D_1)^2] \sqrt{\sin \frac{\theta}{2}}}{(D_2/D_1)^4}$$

$$h_l = K \frac{V_1^2}{2}$$

ضریب افت برای انقباض تدریجی

قطر اسمی لوله in	قطر داخلی in	سطح مقطع داخلی in <sup>2</sup>
1/2	0.364	0.1041
3/4	0.824	0.533
1	1.049	0.864
1 1/2	1.610	2.036
2	2.067	3.356
3	3.068	7.393
4	4.026	12.73
5	5.047	20.01
6	6.065	28.89
8	7.981	50.03
10	10.020	78.85
12	12.000	113.10
14	13.000	132.73
16	15.25	182.65
18	17.250	233.71
20	19.250	291.04
22	21.250	354.66
24	23.250	424.56

## خط انرژی - خط تراز هیدرولیک (Energy line- Hydraulic grade line)

خط انرژی توصیف ترسیمی از انرژی در هر مقطع ارائه می دهد:

$$H = \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + z$$

که در آن  $H$  بار آبی کل (انرژی در واحد وزن با بعد طول) و  $Z$  ارتفاع محور لوله نسبت به تراز مبنا (datum) است. خط متصل کننده بار آبی کل ابزار مناسبی در بسیاری از مسائل جریان ارائه می دهد. در طول مسیر جریان خط انرژی شیب منفی داشته یا ناگهان سقوط می کند (به استثنای مقاطعی که پمپ وجود داشته و به سیال انرژی داده می شود).

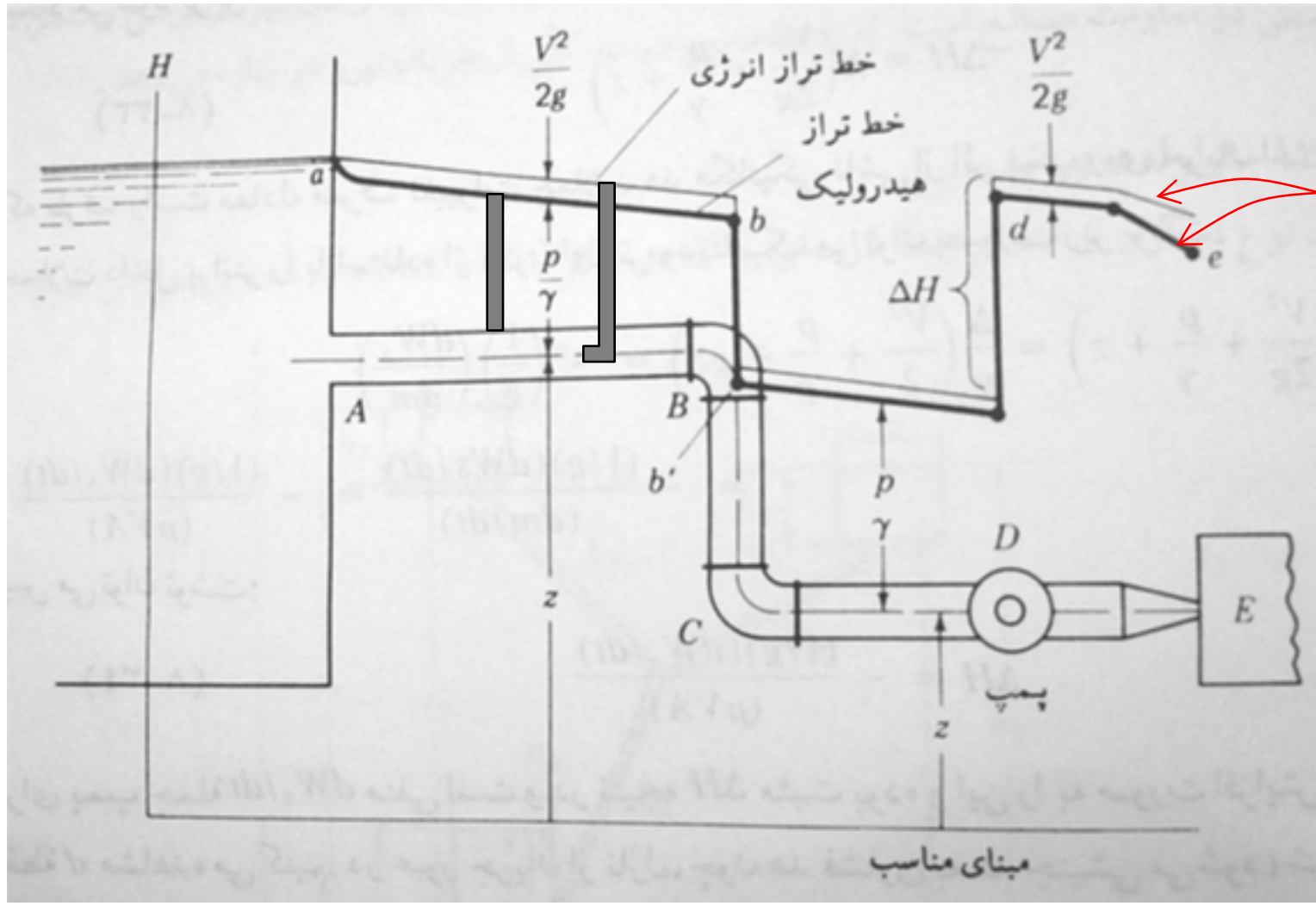
خط تراز هیدرولیکی پایین تر از خط انرژی قرار داشته و مکان هندسی نقاطی را نشان می دهد که به اندازه بار آبی فشار ( $\frac{P}{\gamma}$ ) بالاتر از محور هندسی لوله قرار دارند:

$$H_{hyd} = \frac{p}{\gamma} + z$$

در صورت ثابت بودن مقطع لوله،  $\frac{v^2}{2g}$  در طول لوله تغییر نکرده و لذا خط انرژی و خط تراز هیدرولیکی موازی خواهند بود.

شیب خط انرژی برابر است با:

$$s = \frac{h_f}{L} = \frac{f}{D} \cdot \frac{v^2}{2g} = f \frac{2Q^2}{\pi g D^3}$$



میزان افت با کاهش قطر بیشتر شده و شیب خطوط انرژی و تراز هیدرولیکی تندتر می شود.\*

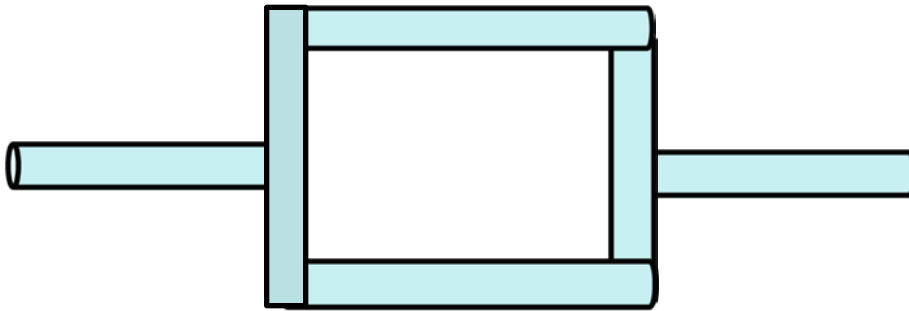


## لوله های ترکیبی، چند مسیره و انشعابی (Compound, multiple path and branching pipes)

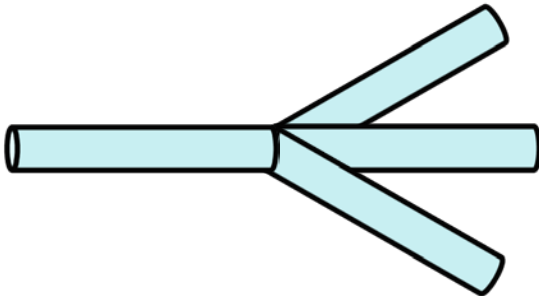
لوله های ترکیبی (compound): از یک سری لوله در سایزهای مختلف تشکیل شده است.



لوله های چند مسیره یا حلقوی (multiple path or looping): از دو یا چند لوله تشکیل می شود که شاخه ای یا بصورت موازی در پایین دست به هم متصل می شوند.



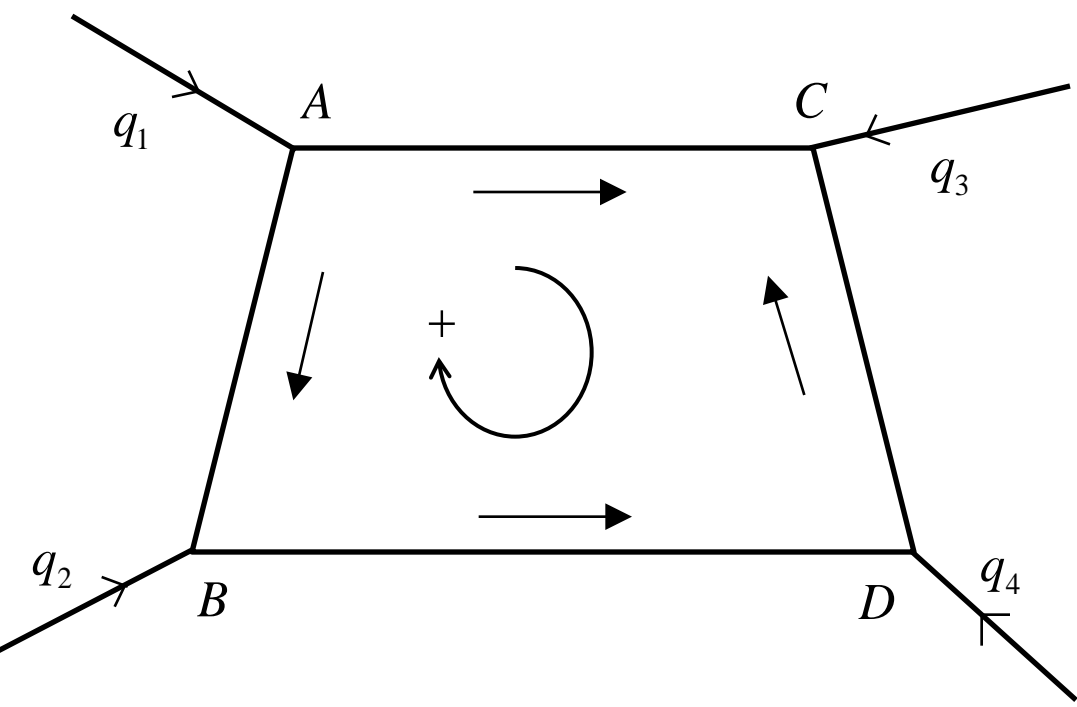
لوله های انشعابی (branching pipes): از دو یا چند لوله تشکیل می شود که در پایین دست به هم متصل نمی شوند.



در حل مسائل لوله ها معادلات حاکم باید توامان حل شوند. تحلیل سیستم شبکه های آبرسانی که آب را در یک شهر توزیع می کنند پیچیده است. در اغلب موارد عملی نسبت طول لوله به قطر آن بزرگ بوده و می توان از افتهای موضعی صرفنظر کرد. جهت حذف افتهای موضعی رابطه تجربی  $\frac{L}{D} > 2000$  پیشنهاد شده است.

### روش هاردی کراس (Hardy Cross)

در این روش که برای تحلیل شبکه لوله ها ابداع شده است جریانها داخل لوله ها فرض شده و با استفاده از تعادل افت بار آبی، دبی فرض شده تصحیح می گردد. این روش در واقع حل عددی دستگاه معادلات چند معادله چند مجهولی دبی و بار آبی است.



$$\begin{cases} \sum_i Q_i = 0 & \text{در هر گره} \\ \sum_i (h_f)_i = 0 & \text{در هر حلقه (با در نظر گرفتن جهت)} \end{cases}$$

مثلا در نقطه C می توان نوشت:

$$h_C = h_A - (h_f)_{AC}$$

و

$$h_C = h_A - (h_f)_{AB} - (h_f)_{BD} - (h_f)_{CD}$$

$$\Rightarrow (h_f)_{AC} - (h_f)_{CD} - (h_f)_{BD} - (h_f)_{AB} = 0$$

که در حلقه شکل با توجه به فرض دبی مثبت در جهت عقربه های ساعت صحیح است.

$$h_f = KQ^n$$

مثلا با فرض استفاده از رابطه دارسی - ویسباخ  $n=2$  است (اسلاید ۱۴).

اگر  $Q'$  دبی فرضی و  $Q$  دبی واقعی در یک لوله باشد:

$$\Delta Q = Q_i - Q'_i$$

$$\Rightarrow h_f = KQ_i^n = K(Q'_i + \Delta Q)^n = K(Q_i^n + nQ_i^{(n-1)} \Delta Q + \frac{n(n-1)}{2!} Q_i^{(n-2)} \Delta Q^2 + \dots)$$

$$h_f \approx K(Q_i^n + nQ_i^{(n-1)} \Delta Q)$$

$$\Rightarrow \sum_i^{loop} (h_f)_i = \sum_i^{loop} K(Q_i^n + nQ_i^{(n-1)} \Delta Q)$$

در یک حلقه

$$0 = \sum_i^{loop} KQ_i^n + \Delta Q \sum_i^{loop} KnQ_i^{(n-1)}$$

$$\Delta Q = \frac{-\sum_i^{loop} KQ_i^n}{\sum_i^{loop} KnQ_i^{(n-1)}} = \frac{-\sum_i^{loop} (h'_f)_i}{n \sum_i^{loop} \frac{KQ_i^n}{Q'_i}} = \frac{-\sum_i^{loop} (h'_f)_i}{n \sum_i^{loop} \frac{(h'_f)_i}{Q'_i}}$$

و یا

جریان و افت بار آبی در جهت عقربه های ساعت مثبت و در خلاف جهت عقربه های ساعت منفی فرض می شوند.