رئوس مطالب مدار (۲) استاد زاری

۱- عناصر تزویج (سلف‌های تزویج شده)

۲- ترانس‌ها و قضیه تلگان

۳- تجزیه و تحلیل گره و مش

۴- تجزیه و تحلیل حلقه و کات ست

۵- معادلات حالت

۶- فرکانس‌های طبیعی

۷- پاسخ فرکانسی

۸- قضایای شبکه

۹- توابع شبکه

۱۰- دوقطبی‌ها

مراجع: ۱- نظریه اساسی مدارها و شبکه‌ها ارنست کوه

۲- تحلیل مهندسی مدار ویلیام هیت

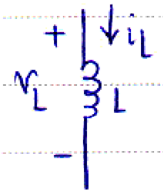
امتحان میان ترم هفته اول اردیبهشت ۵-۳ نمره شنبه

۸۷/۲/۱۴

تکالیف و کار کلاسی ۲ نمره

سلف‌های تزویج شده :

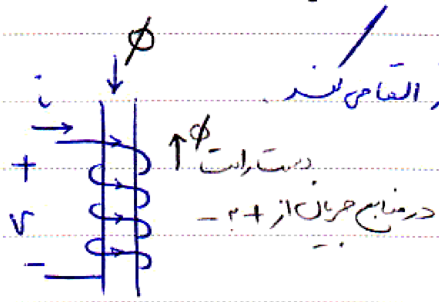
در مدارهای الکتریکی (۱) با سلف آشنا شدیم.



$$v_L = \frac{d(Li_L)}{dt} = L\frac{di_L}{dt} + i_L\frac{dL}{dt}$$

در سلف‌های خطی و تغییرناپذیر با زمان $\frac{dL}{dt} = 0$ ⟸ $v_L = L\frac{di_L}{dt}$

در واقع اگر شار متغیر با زمان $\phi(t)$، سیم‌پیچی را در بر گیرد در آن ولتاژ القا می‌کند.



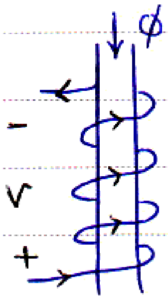
سیم‌پیچ شکل که هسته با مقدار L ها را می‌دهد.

این سیم‌پیچ یک سلف L خطی را تشکیل می‌دهد. شار پیوندی سلف به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\lambda = Li$$

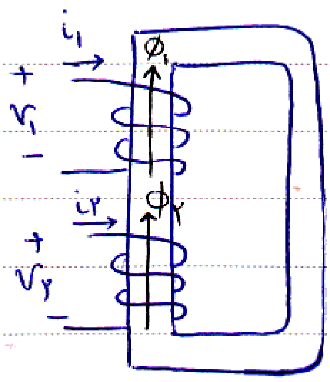
و ولتاژ القایی دو سر سلف عبارت است از : $v = \frac{d\lambda}{dt}$ ⟸ $v = \frac{d\lambda}{dt} = \frac{d(Li)}{dt} = L\frac{di}{dt}$

پلاریته ولتاژ القایی بر اساس قانون لنز به نحوی است که جریان عبوری از سیم‌پیچ سبب تولید شاری شود که با شار به وجود آورنده‌اش مخالفت کند.

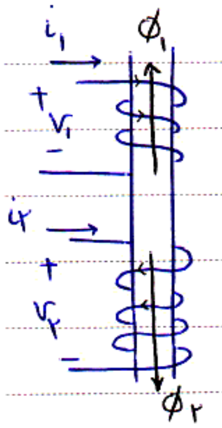


$\phi\uparrow$ شار

تذکر 3 : با توجه به روابط گفته شده، ولتاژ القایی دو سر یک سلف (سیم‌پیچ) وابسته به شار عبوری از آن است.



حال دو سیم‌پیچ زیر را در نظر بگیرید که روی یک هسته بسته شده‌اند.



کل شار عبوری از هر سیم پیچ (شار مشترک) : $\phi = \phi_1 + \phi_2$

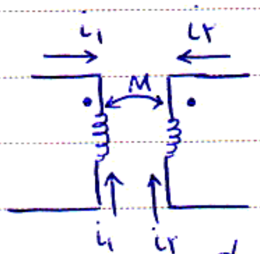
جهت مثبت به سمت بالا شار مشترک $\phi = \phi_1 - \phi_2$

می‌دانیم که ولتاژ دو سر هر سلف به شار عبوری از آن مربوط است. در مثال‌های فوق شار عبوری از هر سیم پیچ به سیم پیچ دیگر نیز وابسته است. به چنین حالتی که شار عبوری از سیم پیچ‌ها به یکدیگر وابسته باشد سلف‌های تزویج شده می‌گوییم. تزویج بین سلف‌ها می‌تواند به صورت مثبت یا منفی باشد.

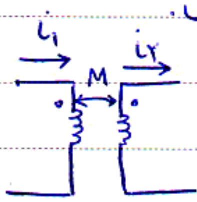
وقتی شار تولید شده یکی موافق با شار تولیدی دیگری باشد تزویج اثر مثبت و در غیر این صورت اثر منفی دارد.

قرارداد در تحلیل مدار:

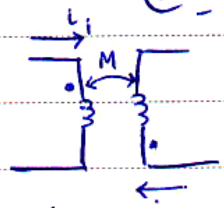
سلف‌های تزویج شده را با سرهای نقطه‌دار نشان می‌دهیم. وقتی ورود یا خروج جریان به سرهای نقطه‌دار هر دو سلف یکسان باشد تزویج مثبت و در غیر این صورت تزویج منفی است.



$\phi = \phi_1 + \phi_2$



$\phi = \phi_1 - \phi_2$



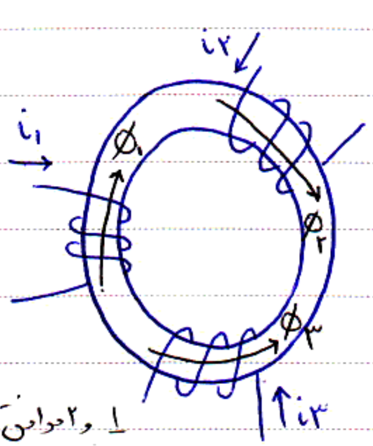
$\phi = \phi_1 + \phi_2$

در دو سر سلف تزویج شده با ضریب تزویج M شارهای پیوندی به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\begin{cases} \lambda_1 = L_1 i_1 \pm M i_2 \\ \lambda_2 = \pm M i_1 + L_2 i_2 \end{cases}$$

$$v = \frac{d\lambda}{dt}$$

$$\begin{cases} v_1 = L_1 \dfrac{di_1}{dt} \pm M \dfrac{di_2}{dt} \\ v_2 = \pm M \dfrac{di_1}{dt} + L_2 \dfrac{di_2}{dt} \end{cases}$$



۱ و ۲ موافق هم‌اند
با ۳ مخالف.

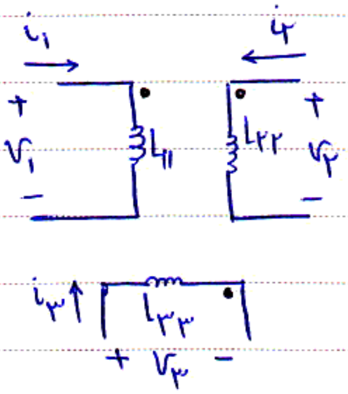
مثال) سه سلف تزویج شده زیر را در نظر بگیرید.

ماتریس اندوکتانس به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$L = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{12} & L_{22} & L_{23} \\ L_{13} & L_{23} & L_{33} \end{bmatrix}$$

عناصر قطری، اندوکتانس‌های خودی و عناصر غیر قطری، اندوکتانس‌های متقابل است.

با تعیین سرهای نقطه‌دار و سمبل مداری این سه سلف روابط ذیل را می‌نویسیم:



$$v_1 = L_{11} \frac{di_1}{dt} + L_{12} \frac{di_2}{dt} - L_{13} \frac{di_3}{dt}$$

$$v_2 = L_{12} \frac{di_1}{dt} + L_{22} \frac{di_2}{dt} - L_{23} \frac{di_3}{dt}$$

$$v_3 = -L_{13} \frac{di_1}{dt} - L_{23} \frac{di_2}{dt} + L_{33} \frac{di_3}{dt}$$ با ۱ و ۲ مخالف

مثال: روابط در حوزه فازور به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{d}{dt} \rightarrow j\omega$$

$$v_1 = (L_{11} j\omega) i_1 + (L_{12} j\omega) i_2 - (L_{13} j\omega) i_3$$

$\vdots$

موازی و جهت جریان خلاف

$\lambda_1 = -\lambda_2$

$\lambda_2 = -i_1 + 4i_2 - i_3$

$\lambda_3 = 2i_1 - i_2 + 3i_3$

$$3i_1 - i_2 + 2i_3 = i_1 - 4i_2 + i_3$$

$$\longrightarrow 2i_1 + 3i_2 = -i \quad (1)$$

$\lambda = \lambda_1 + \lambda_3$ یا $\lambda = -\lambda_2 + \lambda_3$ سری ها

λ بر اساس جریان سیم ساز برابرند

$\lambda = 5i_1 - 2i_2 + 5i \quad (2)$

$i = i_1 - i_2 \quad (3) \longrightarrow i_1 = i + i_2$

جایگذاری در (1) , (2) ،

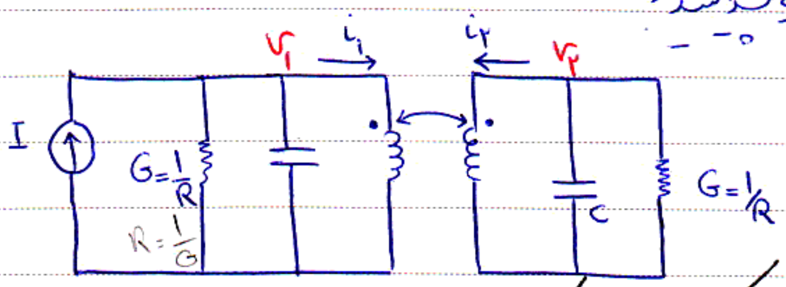
$$2i + 2i_2 + 3i_2 = -i \longrightarrow 3i = -5i_2$$

$$i_2 = -\frac{3}{5}i$$

$$\lambda = 5\underbrace{\left(i - \frac{3}{5}i\right)}_{i_1} - 2\times\left(-\frac{3}{5}i\right) + 5i \qquad \lambda = 2i + \frac{6}{5}i + 5i$$

$$\lambda = \frac{41}{5}i \longrightarrow \boxed{L_{eq} = \frac{41}{5}}$$

مثال) V_1 و V_2 را با استفاده از آنالیز گره بیابید



$$L = \begin{bmatrix} L & Lk \\ Lk & L \end{bmatrix}$$

در سلف های موازی راحت تر هم از ضریب القاء معکوس استفاده کنیم

$$\Gamma = \frac{L}{L^2(1-k^2)}\begin{bmatrix} 1 & -k \\ -k & 1 \end{bmatrix}$$

حل در حوزه فازور :

$$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{12} & L_{22} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{فازور}} j\omega \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{12} & L_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{12} & \Gamma_{22} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{فازور}} \frac{1}{j\omega} \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{12} & \Gamma_{22} \end{bmatrix}$$

خازن $X_C \longrightarrow \frac{1}{Cj\omega}$ $\qquad$ $\lambda \longrightarrow V$ در فازور

$$\Gamma = \frac{1}{j\omega L(1-k^2)} \begin{bmatrix} 1 & -k \\ -k & 1 \end{bmatrix}$$

در دو سلف تزویج شده ؟

$$\begin{cases} i_1 = \Gamma_{11}(j\omega)V_1 + \Gamma_{12}(j\omega)V_2 \\ i_2 = \Gamma_{12}(j\omega)V_1 + \Gamma_{22}(j\omega)V_2 \end{cases}$$

$$KCL: \quad I = V_1 G + V_1 C\omega j + \frac{1}{j\omega L(1-k^2)}(V_1 - kV_2)$$

$$KCL: \quad V_2 Cj\omega + V_2 G + \frac{1}{j\omega L(1-k^2)}(V_2 - kV_1) = 0$$

$$\begin{cases} I_1 = V_1\left(G + Cj\omega + \frac{1}{j\omega L(1-k^2)}\right) - \frac{k}{j\omega L(1-k^2)} V_2 \\ V_2\left(Cj\omega + G + \frac{1}{j\omega L(1-k^2)}\right) = \frac{k}{j\omega L(1-k^2)} V_1 \end{cases}$$

دو معادله دو مجهول

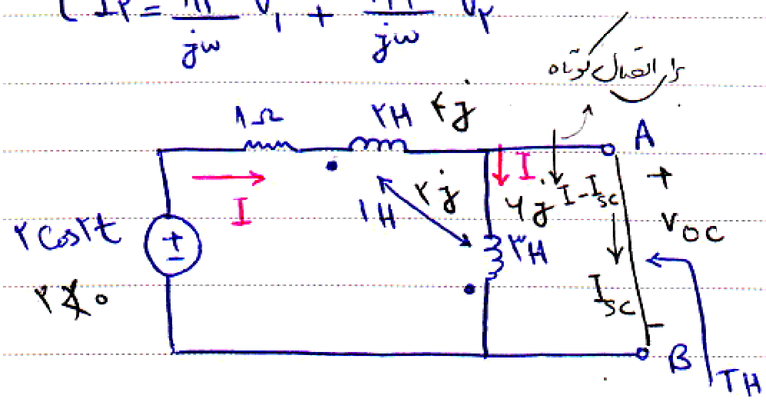
نکته) در حوزه فازور برای دو سلف تزویج شده ؟

$$\begin{cases} V_1 = L_{11} j\omega I_1 + L_{12} j\omega I_2 \\ V_2 = L_{12} j\omega I_1 + L_{22} j\omega I_2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{j\omega} \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{12} & \Gamma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} I_1 = \frac{\Gamma_{11}}{j\omega} V_1 + \frac{\Gamma_{12}}{j\omega} V_2 \\ I_2 = \frac{\Gamma_{12}}{j\omega} V_1 + \frac{\Gamma_{22}}{j\omega} V_2 \end{cases}$$

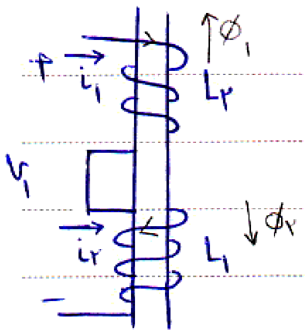
مثال) مدار معادل تونن را بیابید؟



$\omega = 2$

استفاده از معادله دیفرانسیل کامل ترین جواب را می دهد.

مثال) دو سلف تزویج شده سری



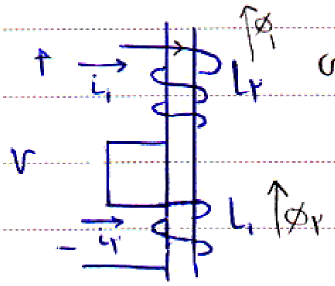
$$i_1 = i_2 = i$$

با توجه به جهت سیم پیچ ها:

$$v = v_1 + v_2$$

$$\begin{cases} v_1 = L_1 \dfrac{di}{dt} - M \dfrac{di}{dt} \\ v_2 = -M \dfrac{di}{dt} + L_2 \dfrac{di}{dt} \end{cases} \rightarrow v = \underbrace{(L_1 + L_2 - 2M)}_{L_{eq}} \dfrac{di}{dt}$$

تزویج منفی



همه روابط مثل قبلی

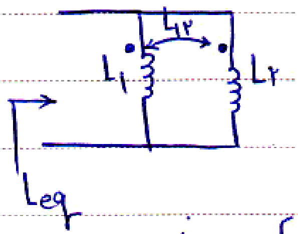
به راحتی هر سوال نشان داده در شکل زیر:

$$v = \underbrace{(L_1 + L_2 + 2M)}_{L_{eq}} \dfrac{di}{dt}$$

تزویج مثبت

در دو سلف سری تزویج شده : $L_{eq} = L_1 + L_2 \pm 2M$

سلف معادل دو سلف تزویج شده موازی :



$$\lambda = L i$$

در دو سلف تزویج شده داریم :

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{12} & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

می توانیم جریان ها را برحسب شارها بنویسیم

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{12} & L_{22} \end{bmatrix}^{-1}}_{\Gamma} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$$

ماتریس $\Gamma = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{12} & L_{22} \end{bmatrix}^{-1}$

$$\Rightarrow \begin{cases} i_1 = \Gamma_{11} \lambda_1 + \Gamma_{12} \lambda_2 \\ i_2 = \Gamma_{12} \lambda_1 + \Gamma_{22} \lambda_2 \end{cases}$$

ضرایب القا معکوس

در سلف های موازی، شارهای پیوندی با هم برابرند.

$$\lambda_1 = \lambda_2 \triangleq \lambda$$

صفحه بعد

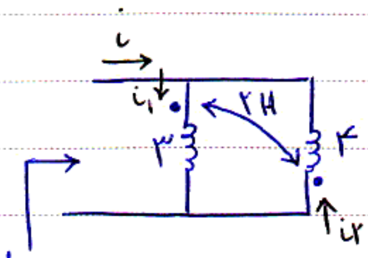
$i_1 = (\Gamma_{11} + \Gamma_{12})\lambda$

$i_2 = (\Gamma_{12} + \Gamma_{22})\lambda$

$i = i_1 + i_2 = (\Gamma_{11} + \Gamma_{22} + 2\Gamma_{12})\lambda$

$$i = (\underbrace{\Gamma_{11} + \Gamma_{22} + 2\Gamma_{12}}_{\Gamma_{eq} = \frac{1}{L_{eq}}})\lambda$$

تمرین)



$L_{eq} = ?$

$$L = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \Gamma = \frac{1}{3\times4 - 2\times2}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/4 \\ -1/4 & 3/8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = \lambda \\ \lambda_2 = -\lambda \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} i_1 = \Gamma_{11}\lambda_1 + \Gamma_{12}\lambda_2 \\ i_2 = \Gamma_{12}\lambda_1 + \Gamma_{22}\lambda_2 \end{cases}$$

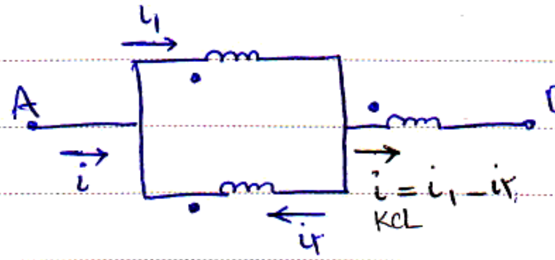
چون جهت جریان عکس

$$\begin{cases} i_1 = \frac{1}{2}\lambda + (\frac{-1}{4})\times(-\lambda) = \frac{3}{4}\lambda \\ i_2 = (\frac{-1}{4}\times\lambda) + \frac{3}{8}(-\lambda) = -\frac{5}{8}\lambda \end{cases}$$

KCL $i = i_1 - i_2 = (\frac{3}{4} + \frac{5}{8})\lambda = \frac{11}{8}\lambda$

$i = \frac{11}{8}\lambda \longrightarrow \Gamma_{eq} = \frac{1}{L_{eq}} = \frac{11}{8} \longrightarrow L_{eq} = \frac{8}{11}$

مثال) سلف معادل از دیدگاه AB را بدست آورید.



$$L = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$\lambda_1 = 3i_1 - i_2 + 2i_3$

۱ و ۳ موافق هر دو
با ۲ مخالف

$i_3 = i$

Subject:
Year. Month. Date.

در حوزه‌ی فازور حل می‌کنیم :

KVL: $2 = I + 4jI - 2jI + 6jI - 2jI$

$V_{oc} = 4jI$

$2 = (1+6j)I$

$I = \dfrac{2}{1+6j} \qquad V_{oc} = \dfrac{8j}{1+6j} = 1.29 + 0.21j = 1.307 \angle 9.24^\circ$

اتصال کوتاه :

KVL: $2 = I + 4jI - 2j(I - I_{sc})$

$2 = I(1+2j) + 2j I_{sc}$

KVL: $6j(I - I_{sc}) - 2jI = 0 \longrightarrow 4jI = 6j I_{sc} \longrightarrow \boxed{I = \dfrac{3}{2} I_{sc}}$

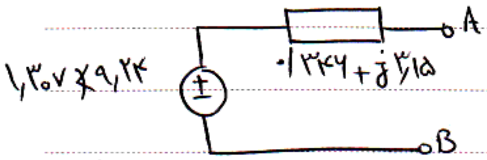
جاگذاری :

$2 = \left(\dfrac{3+6j}{2} + 2j\right) I_{sc} = \dfrac{3+10j}{2} I_{sc}$

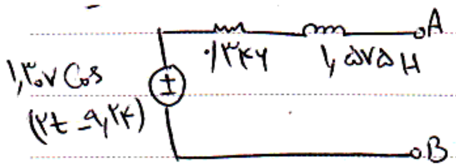
$I_{sc} = \dfrac{4}{3+10j} = 0.11 - 0.367j = 0.412 \angle -74.5$

$Z_{th} = \dfrac{V_{oc}}{I_{sc}} = \dfrac{1.307 \angle 9.24}{0.412 \angle -74.5} = 3.172 \angle 83.74 = 0.346 + j\,3.15$

مدار معادل تونن :



یا



$L j\omega = 3.15j$ ($\omega = 2$)

مدار معادل T :

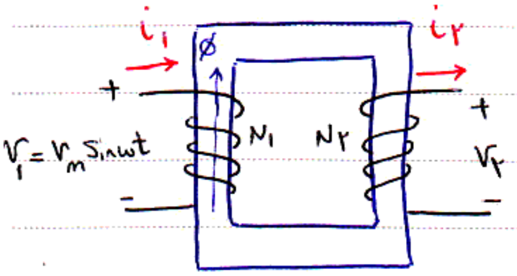
$$\begin{cases} L_a = L_1 - M \\ L_b = L_2 - M \\ L_c = M \end{cases}$$

ضریب تزویج $K = \dfrac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$

$(K \leq 1)$

PAPCO

ترانس ایده‌آل :



از یک هسته و دو سیم پیچ تشکیل شده. با اعمال ولتاژ به سیم پیچ اول

شاری در هسته جاری می‌شود که از رابطه زیر پیروی خواهد کرد :

$$V_1 = N_1 \frac{d\phi}{dt}$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{V_1}{N_1} = \frac{V_m}{N_1}\sin\omega t \longrightarrow \phi = \frac{V_m}{N_1\omega}\cos\omega t$$

این شار از سیم پیچ دوم عبور می‌کند و در آن ولتاژ زیر القا می‌شود :

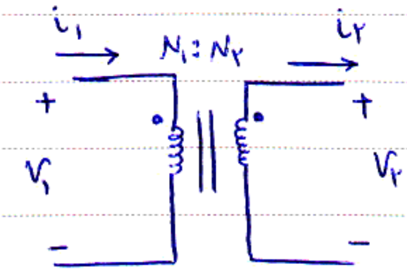
$$V_2 = N_2 \frac{d\phi}{dt} = \frac{N_2}{N_1}\underbrace{V_m \sin\omega t}_{V_1}$$

$$\longrightarrow \boxed{\frac{V_2}{V_1} = \frac{N_2}{N_1}}$$

در ترانس ایده‌آل، تلفات سیستم صفر فرض می‌شود، بنابراین قدرت لحظه‌ای دو سیم پیچ برابر است $P = Vi$

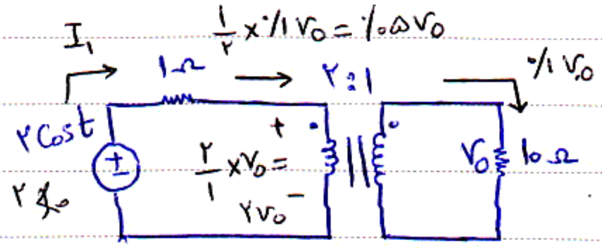
$$V_1 i_1 = V_2 i_2 \longrightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{i_2}{i_1} \longrightarrow \boxed{\frac{i_2}{i_1} = \frac{N_1}{N_2}} \qquad \frac{V_1}{V_2} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{i_2}{i_1}$$

سمبل الکتریکی :



مثال: قدرت تحویل شده از منبع را به دست آورید؟ ولتاژ خروجی را؟ (V_o)

از فازور استفاده نمی‌کنیم چون سلف و خازن نداریم.



در ترانسفورماتورها جهت جریان از سر نقطه‌دار به یکی وارد و از دیگری خارج می‌شود

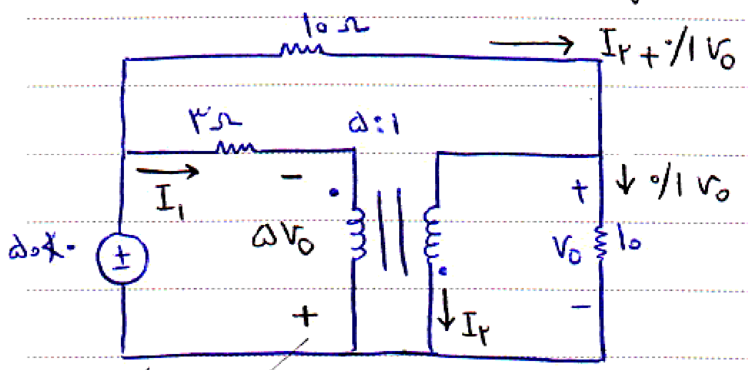
$$KVL:\ 2\cos t = 1 \times 0.05 V_0 + 2V_0$$

$$2\cos t = 2.05 V_0 \longrightarrow V_0 = 0.975 \cos t$$

$$I_1 = 0.05 V_0 = 0.0487 \cos t = 0.0487\angle 0 \qquad V_{rms} = \frac{V}{\sqrt{2}} \qquad I_{rms} = \frac{I}{\sqrt{2}}$$

$$P_{\text{قدرت منبع}} = V_{rms} \times I_{rms} = \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{0.0487}{\sqrt{2}} = 0.0487\ W$$

مثال) V_0 را بدست آورید.



ولتاژ برعکس چون جریان‌ها نقطه‌دار عکس هم هستند

$$I_1 = \frac{1}{5} I_2 \longrightarrow I_2 = 5 I_1$$

$$KVL:\ 50 = 3I_1 - 5V_0$$

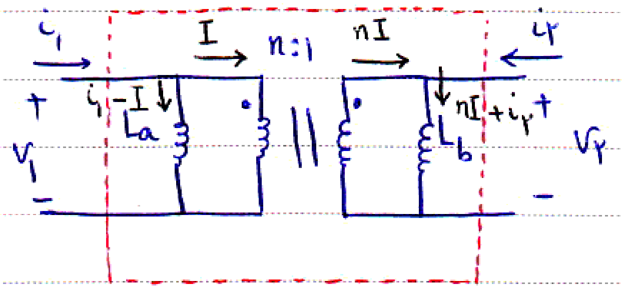
$$I_1 = \frac{50 + 5V_0}{3} \longrightarrow I_2 = \frac{250 + 25V_0}{3}$$

$$KVL:\ 50 = 10(I_2 + 0.1V_0) + V_0 \longrightarrow 50 = 10 I_2 + 2V_0$$

$$50 = \frac{2500 + 250V_0}{3} + 2V_0 \longrightarrow 150 = 2500 + 256 V_0 \longrightarrow V_0 = -9.18$$

تمرین) یکی از سرهای نقطه‌دار را عوض کرده و مجدداً V_0 را بدست آورید.

مثال) این مدار جلو را با دو سلف تزویج شده، با ماتریس القای $L = \begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix}$ معادل می‌شود.



$$v_1 = L_a \frac{d(i_1 - I)}{dt} = L_a \frac{di_1}{dt} - L_a \frac{dI}{dt} \quad (1)$$

$$v_2 = L_b \frac{d(nI + i_2)}{dt} = nL_b \frac{dI}{dt} + L_b \frac{di_2}{dt} \quad (2)$$

$$v_1 = n v_2 \longrightarrow L_a \frac{di_1}{dt} - L_a \frac{dI}{dt} = n^2 L_b \frac{dI}{dt} + nL_b \frac{di_2}{dt}$$

$$(n^2 L_b + L_a)\frac{dI}{dt} = L_a \frac{di_1}{dt} - nL_b \frac{di_2}{dt}$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{L_a}{n^2 L_b + L_a}\frac{di_1}{dt} - \frac{nL_b}{n^2 L_b + L_a}\frac{di_2}{dt} \quad (3)$$

۳ در ۱ :

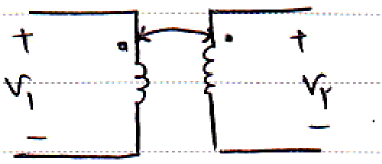
$$v_1 = L_a \frac{di_1}{dt} - \frac{L_a^2}{n^2 L_b + L_a}\frac{di_1}{dt} + \frac{nL_aL_b}{n^2 L_b + L_a}\frac{di_2}{dt}$$

$$\boxed{v_1 = \frac{n^2 L_a L_b}{n^2 L_b + L_a}\frac{di_1}{dt} + \frac{nL_aL_b}{n^2 L_b + L_a}\frac{di_2}{dt}}$$

۳ در ۲ :

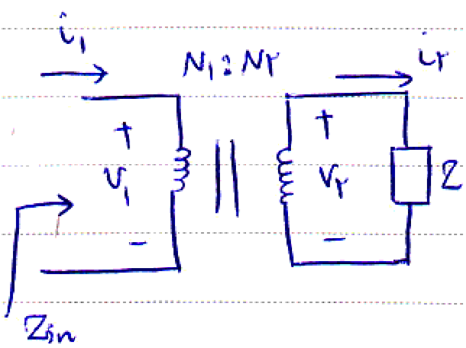
$$v_2 = \frac{nL_aL_b}{n^2 L_b + L_a}\frac{di_1}{dt} - \frac{n^2 L_b^2}{n^2 L_b + L_a}\frac{di_2}{dt} + L_b \frac{di_2}{dt}$$

$$\boxed{v_2 = \frac{nL_aL_b}{n^2 L_b + L_a}\frac{di_1}{dt} + \frac{L_aL_b}{n^2 L_b + L_a}\frac{di_2}{dt}}$$



$$L = \begin{bmatrix} \frac{n^2 L_b L_a}{n^2 L_b + L_a} & \frac{nL_aL_b}{n^2 L_b + L_a} \\ \frac{nL_aL_b}{n^2 L_b + L_a} & \frac{L_aL_b}{n^2 L_b + L_a} \end{bmatrix}$$

خاصیت ارجاع امپدانس در ترانس ایده‌آل :



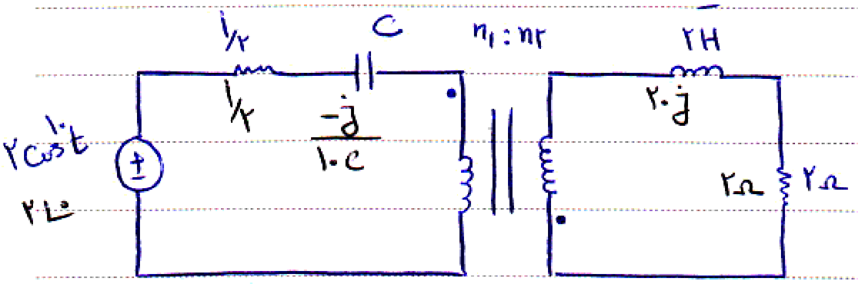
$$Z = \frac{v_2}{i_2}$$

$$Z_{in} = \frac{v_1}{i_1} = ?$$

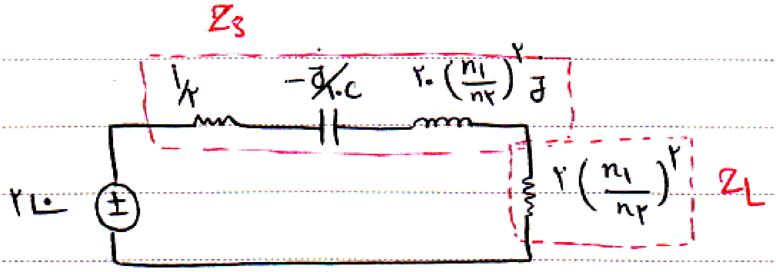
$$Z_{in} = \frac{V_1}{i_1} = \frac{\left(\frac{N_1}{N_2}\right)V_2}{\left(\frac{N_2}{N_1}\right)i_2} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 Z$$

$\longrightarrow Z_{in} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 Z \longrightarrow$ خاصیت ارجاع امپدانس (رابطه هم برای هر نقطه داری برقرار می‌باشند)

مثال) نسبت تبدیل ترانس $\left(\frac{n_1}{n_2}\right)$ و مقدار خازن را به گونه‌ای پیدا کنید که توان تحویلی به مقاومت ۲Ω حداکثر شود.



به سمت اولیه ارجاع می‌دهیم :



$$\frac{n_1}{n_2} \triangleq n$$

$$Z_s = \frac{1}{2} + j\left(20n^2 - \frac{1}{10C}\right) \qquad Z_L = 2n^2$$

شرط انتقال حداکثر توان : $Z_L = Z_s^*$

$$2n^2 = \frac{1}{2} - j\left(20n^2 - \frac{1}{10C}\right)$$

$$\begin{cases} 2n^2 = \frac{1}{2} \longrightarrow n^2 = \frac{1}{4} \longrightarrow \boxed{n = \frac{1}{2}} \\ 20n^2 - \frac{1}{10C} = 0 \longrightarrow 5 = \frac{1}{10C} \longrightarrow \boxed{C = 0.02\,f} \end{cases}$$

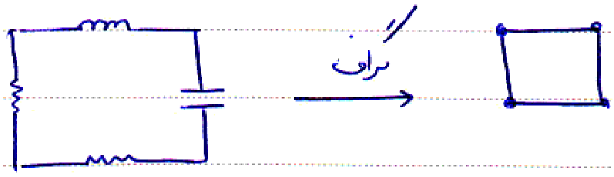
فصل دوم: گراف ها و قضیه تلگان

عناصر فشرده: عناصری می باشند که ابعاد آن ها نسبت به طول موج سیگنالی که آنها را تحریک می کنند کوچک است.

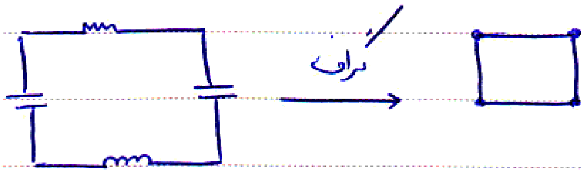
در غیر این صورت قوانین kvl و kcl دیگر برقرار نخواهد بود.

گراف:

قوانین kvl و kcl ارتباطی به ماهیت



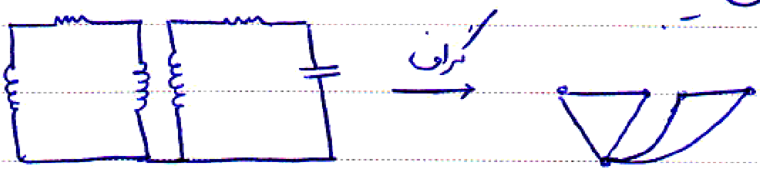
اجزای مدار ندارد و می توان به عنوان به جای هر عنصر



یک شاخه در گراف قرار داد و دو سر هر شاخه را با نقطه هایی

مشخص که گره می نامند نشان داد.

* از روی گراف نمی توان تشخیص داد شاخه ها را عناصری از چه جنس هست یا خیر



زیرگراف:

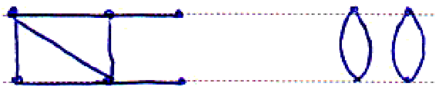
مفهوم زیرگراف به گراف مانند زیرمجموعه به مجموعه است که با حذف بعضی گره ها یا شاخه ها از یک گراف به دست می آید.

شکل گراف بالا زیرگراف

زیرگراف سره:

زیرگرافی که فقط از یک گره تشکیل شده باشد.

گراف پیوسته: به گرافی پیوسته می‌گوییم که بین هر دو گره دلخواه آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد.

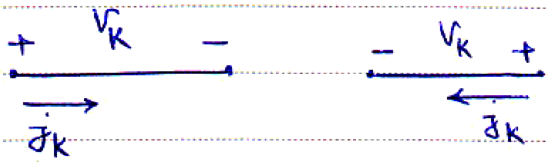


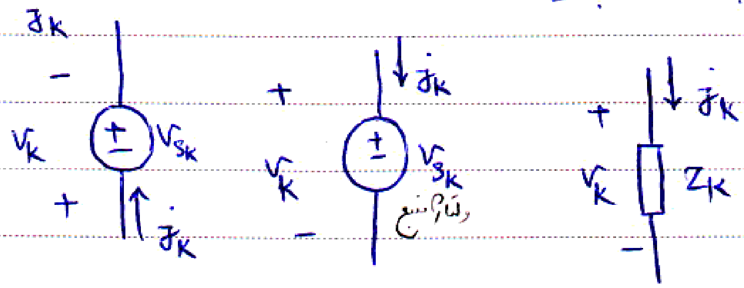
پیوسته   ناپیوسته

جهت‌های قراردادی جریان:

جهت جریان در شاخه به طور دلخواه انتخاب می‌شود ولی باید بر اساس جهت انتخاب شده علامت قطب مثبت را بگذاریم.

در جهت ورود جریان قرار می‌گیرد



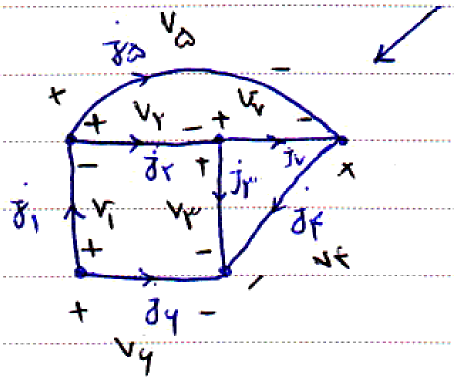


$V_k J_k > 0$ برای عناصر

$V_k J_k < 0$ برای منابع

گراف جهت‌دار:

گرافی که جریان شاخه‌ها روی آن تعیین شده باشد گراف جهت‌دار است.



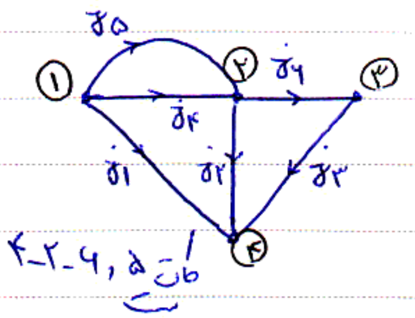
ماتریس تلاقی گره و شاخه (A_a):

در یک گراف جهت‌دار عناصر ماتریس به صورت زیر فرض می‌شود:

$$a_{ik} = \begin{cases} 1 \\ 0 \\ -1 \end{cases}$$

$$a_{ik}=\begin{cases}1 & \text{اگر شاخه } k \text{ با گره } i \text{ تلاقی داشته و جریان از گره خارج شود.}\\ 0 & \text{اگر شاخه } k \text{ و گره } i \text{ تلاقی نداشته باشند.}\\ -1 & \text{اگر شاخه } k \text{ با گره } i \text{ تلاقی داشته و جریان به آن وارد شود.}\end{cases}$$ A_a

مثال)

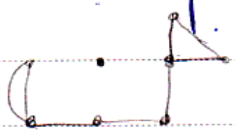


$$\begin{array}{c|cccccc} \text{گره} \backslash \text{شاخه} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$A_a=\begin{bmatrix}1&0&0&1&1&0\\0&1&0&-1&-1&1\\0&0&1&0&0&-1\\-1&-1&-1&0&0&0\end{bmatrix}$

جمع جبری جریان‌های وارد شده به یک گره صفر است. حال این قانون را تعمیم می‌دهیم.

گراف کات ست: دسته‌ای از شاخه‌های یک گراف تشکیل کات ست را می‌دهد اگر دو شرط زیر را با هم داشته باشند:



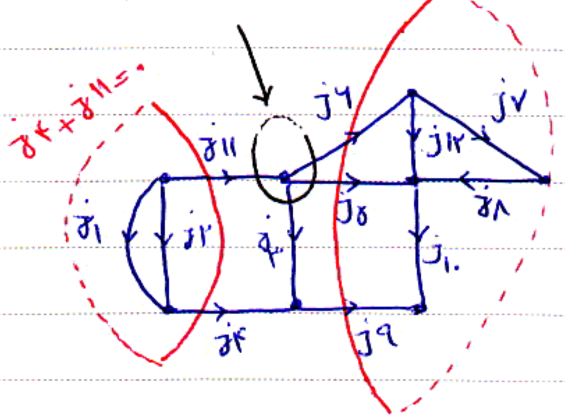
۱) حذف تمام شاخه‌های این دسته یک گراف ناپیوسته باقی بگذارد.

$j_6+j_5+j_3-j_{11}=0$

$-j_6-j_5-j_9=0$

۲) حذف تمام شاخه‌ها غیر یکی، گراف را پیوسته کند.

$j_4+j_{11}=0$



کات ست‌هایی که می‌توان تشخیص داد: ۱۱ و ۴،

کات ست ۵ و ۶ , ۹   کات ست ۷ , ۱۲ , ۶

گسترش قانون KCL: برای هر شبکه‌ی فشرده در هر لحظه از زمان، مجموع جبری جریان‌های خارج شده از کات ست صفر است.

قرارداد: اگر کات ست را با یک سطح گاوسی نشان دهیم، جریان‌های خارج شده از کات ست با علامت مثبت و جریان‌های

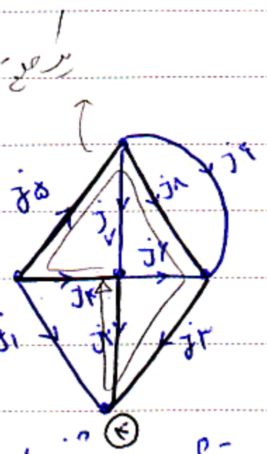
وارد شده با علامت منفی هستند. علامت‌ها در زیر نوشته در شکل

حلقه در قانون kvl : یک زیرگراف از یک گراف بوسته را حلقه می‌گویند اگر دو شرط زیر را داشته باشند:

۱) زیرگراف بوسته باشد.

۲) به هر گره فقط ۲ شاخه متصل باشد.

زیر حلقه



$$-v_4 + v_5 + v_8 + v_3 - v_2 = 0$$

قضیه تلگان: برای هر شبکه فشرده که گراف آن دارای b شاخه و n_t گره باشد جهت‌های ولتاژ و جریان شاخه‌ها با j_k و v_k مشخص شده باشند، خواهیم داشت:

$$\sum_{k=1}^{b} v_k j_k = 0$$

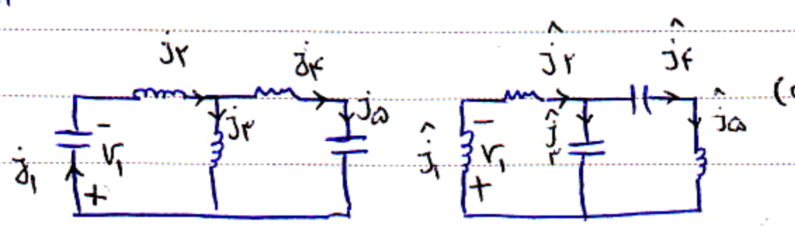
$v_k j_k > 0$ برای عناصر $\qquad$ $v_k j_k < 0$ برای منابع

تبصره: اگر دو شبکه گراف‌های یکسان داشته باشند و فقط در دو گراف شاخه‌ها را به شاخه‌ها نامگذاری کنیم و جهت‌ها را قرارداد جریان یکسان بگیریم، قضیه تلگان روابط زیر را اعمال می‌کند:

1) $\sum_{k=1}^{b} v_k j_k = \sum_{k=1}^{b} \hat{v}_k \hat{j}_k$

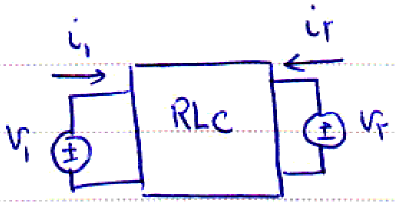
2) $\sum_{k=1}^{b} \hat{v}_k j_k = \sum_{k=1}^{b} v_k \hat{j}_k$

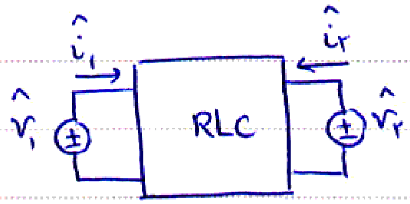
مثال)



به آزمایش زیر در جهت اثبات قضیه تلگان دقت کنید :

یک مدار RLC ثابت در نظر بگیرید که منابع آن را به صورت زیر جابجا می‌کنیم :





می‌خواهیم اثبات کنیم :
$$\hat{v}_1 i_1 + \hat{v}_2 i_2 = v_1 \hat{i}_1 + v_2 \hat{i}_2$$

$$\sum_{k=1}^{b} \hat{v}_k j_k = \sum_{k=1}^{b} v_k \hat{j}_k$$

$$\hat{v}_1 i_1 + \hat{v}_2 i_2 + \underbrace{\sum_{k=3}^{b} \hat{v}_k j_k} = v_1 \hat{i}_1 + v_2 \hat{i}_2 + \underbrace{\sum_{k=3}^{b} v_k \hat{j}_k}$$

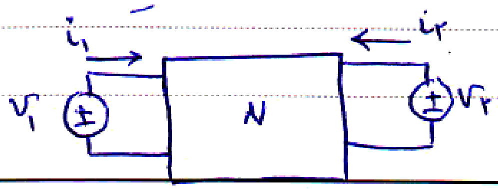
با هم برابرند

$$v_k = z_k j_k \longrightarrow \sum_{k=3}^{b} v_k \hat{j}_k = \sum_{k=3}^{b} z_k j_k \hat{j}_k$$

$$\hat{v}_k = z_k \hat{j}_k \longrightarrow \sum_{k=3}^{b} \hat{v}_k j_k = \sum_{k=3}^{b} z_k \hat{j}_k j_k$$

$$\Longrightarrow v_1 \hat{i}_1 + v_2 \hat{i}_2 = \hat{v}_1 i_1 + \hat{v}_2 i_2$$

مثال) شبکه N از عناصر RLC خطی و تغییرناپذیر با زمان تشکیل شده. اندازه‌گیری‌های زیر در آن انجام شده است :



$v_1 = 4\cos(\omega t + 60) \quad , \quad v_2 = 0$

$i_1 = \cos(\omega t + 80) \quad , \quad i_2 = 2\cos(\omega t + 70)$

$\hat{v}_1 = \cos(\omega t + 10) \quad , \quad \hat{v}_2 = 2\cos(\omega t + 20) \qquad \hat{i}_1 = ?$

به حوزه‌ی فازوری می‌بریم:

$V_1 = 4\angle 60 \qquad I_1 = 1\angle 80 \qquad \hat{V}_1 = 1\angle 10$

$V_2 = 0 \qquad I_2 = 2\angle 70 \qquad \hat{V}_2 = 2\angle 20$

اصل تعمیم تلگان:

$$V_1 \hat{I}_1 + V_2 \hat{I}_2 = \hat{V}_1 I_1 + \hat{V}_2 I_2$$

$$4\angle 60 \times \hat{I}_1 + 0 = 1\angle 10 \times 1\angle 80 + 2\angle 20 \times 2\angle 70$$

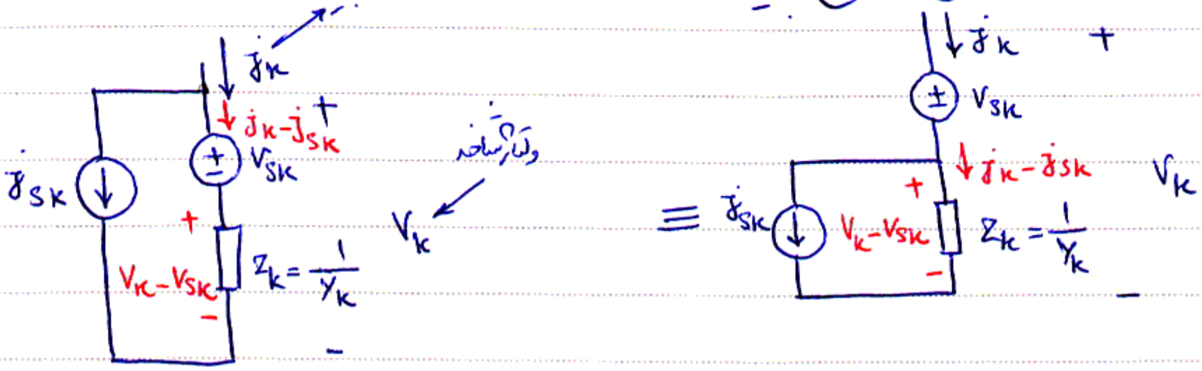
$$4\angle 60 \; \hat{I}_1 = 1\angle 90 + 4\angle 90$$

$$\hat{I}_1 = \frac{5\angle 90}{4\angle 60} = \frac{5}{4}\angle 30 \longrightarrow \hat{i}_1 = \frac{5}{4}\cos(\omega t + 30)$$

فصل ۳ : تجزیه و تحلیل گره و مش

مدل کلی یک شاخه :

یک شاخه در حالت کلی دارای منبع ولتاژ، منبع جریان و امپدانس است.



معادلات KVL و KCL در هر دو به یک نتیجه منجر می‌شود که نشان می‌دهد با هم معادلند.

بیان رابطه شاخه با KCL :

$$J_k = J_{sk} + V_k Y_k - V_{sk} Y_k$$

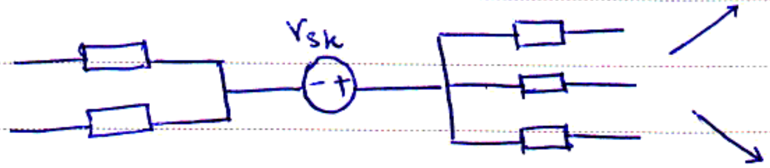
کاربرد در روش گره و کات ست.

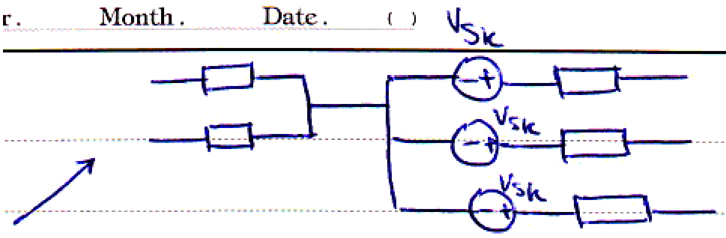
بیان رابطه شاخه با KVL :

$$V_k = V_{sk} + Z_k J_k - Z_k J_{sk}$$

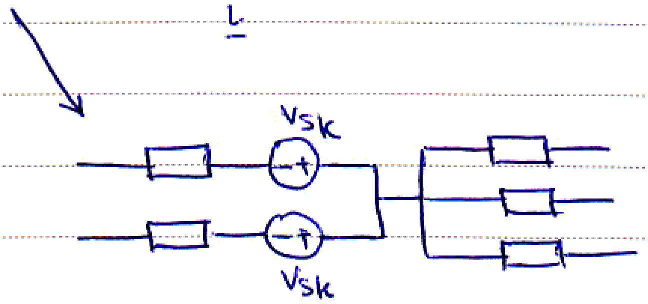
کاربرد در روش مش و حلقه اساسی.

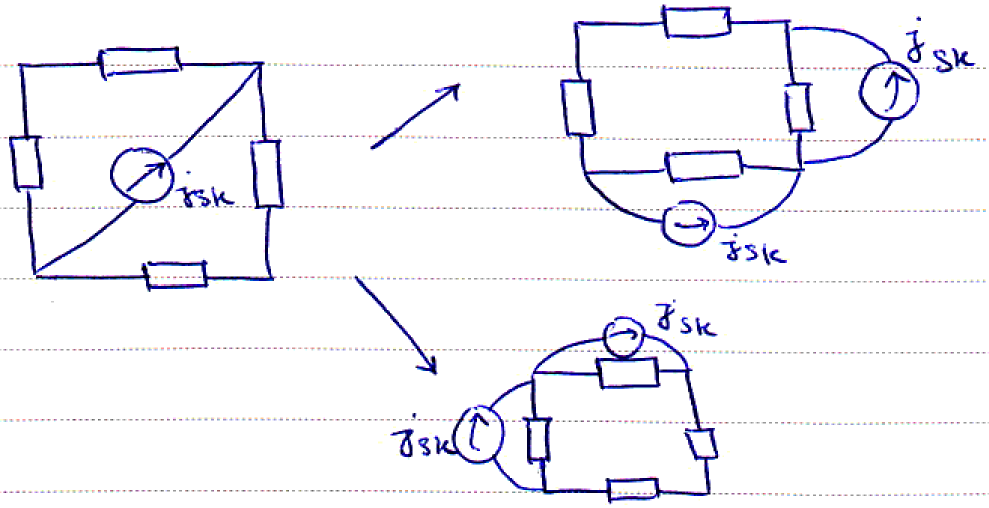
- برای اینکه حداکثر شاخه‌هایی که تنها شامل منابع هستند از شاخه‌های دیگر لازم نباشد، تبدیل را احتمالا انجام می‌دهیم که تغییری در نتیجه نهایی مدار حاصل نشود.





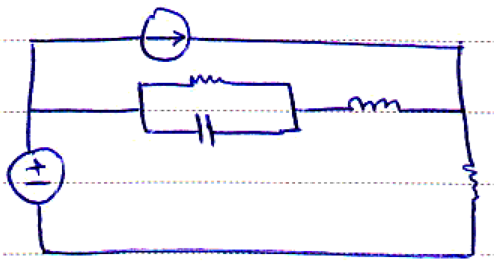
یا

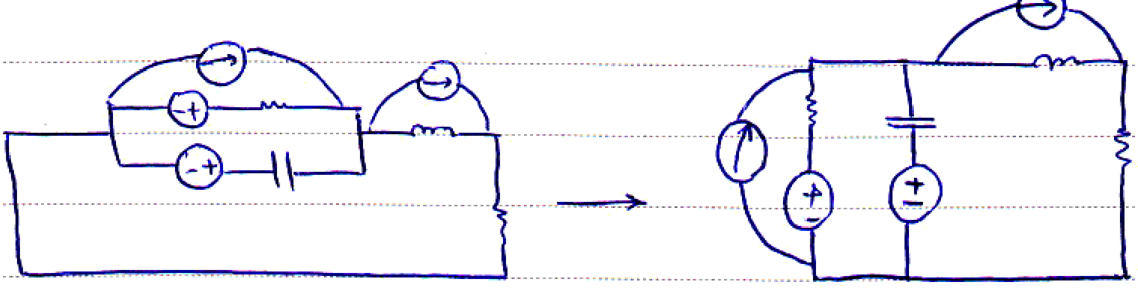




در تبدیل منابع ولتاژ اگر KVL به کار ببریم و در تبدیل منابع جریان اگر KCL به کار ببریم این معادلات ارضاء می‌شود:

به عنوان مثال:





روش‌های تبدیل منابع نورتن هم برای منابع مستقل هم برای منابع وابسته برقرار است.

تجزیه و تحلیل گره:

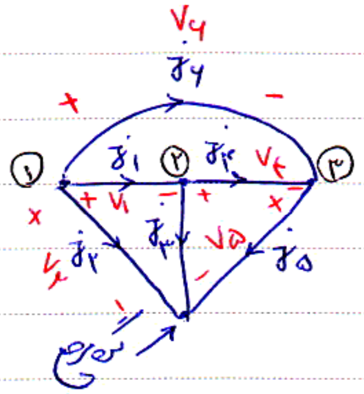
فرض کنید مداری دارای b شاخه باشد، در این صورت بردارهای زیر را تعریف می‌کنیم:

$$j=\begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ \vdots \\ j_b \end{bmatrix}$$ بردار جریان شاخه‌ها

$$V=\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_b \end{bmatrix}$$ بردار ولتاژ شاخه‌ها

در روش گره معمولاً گرهی که بیشترین اتصال به آن وجود دارد را به عنوان گره مبنا انتخاب می‌کنیم. اگر n_t تعداد کل گره‌ها باشد آنگاه $n_t = n+1$

فرض کنید گراف جهت‌دار مدار به صورت زیر باشد ←



ماتریس تلاقی گره و شاخه در روش گره به صورت زیر است: $A=(A_a)$ بدون گره مبنا

$$A.j=\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \\ j_4 \\ j_5 \\ j_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_1+j_2+j_6 \\ -j_1+j_3+j_4 \\ -j_4+j_5-j_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

تساوی قانون KCL

$$\rightarrow \boxed{A.j=0}$$

بردار ولتاژ گره‌ها را با e نمایش می‌دهیم.

$$e=\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}$$

حال می‌خواهیم $A^t.e$ را به دست آوریم:

$$A^t.e=\overbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}}^{A^t} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1-e_2 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_2-e_3 \\ e_3 \\ e_1-e_3 \end{bmatrix}$$

ولتاژ شاخه

جای سطرها و ستون‌های ماتریس A را با هم عوض می‌کنیم

$$= \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \end{bmatrix} \Longrightarrow \boxed{A^t . e = V}$$

استنباط KVL

اساس قضیه تلگان:

$$\sum_{k=1}^{b} V_k j_k = 0$$

$$\longrightarrow V_1 j_1 + V_2 j_2 + \dots + V_b j_b = 0$$

$$\sum V_k j_k = \begin{bmatrix} V_1 & V_2 & \dots & V_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ \vdots \\ j_b \end{bmatrix} = V^t . j = (A^t . e)^t . j = e^t . A . j = 0$$

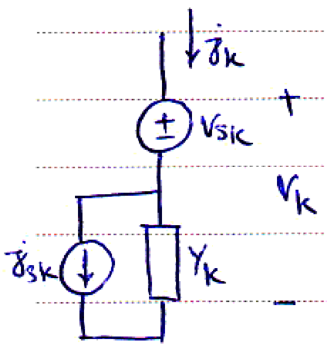
روش تجزیه و تحلیل گره:

$$V = \begin{bmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_b \end{bmatrix}$$

سه روش امکان‌پذیر است: در روش گره، ولتاژ گره‌ها یعنی e مجهول معادلات است.

۱) روش منظم ۲) روش نظری ۳) روش میانبر

۱) روش منظم:



$$j_k = j_{sk} + Y_k V_k - Y_k V_{sk}$$

این رابطه را برای تمام شاخه‌های مدار می‌نویسیم:

$$j_1 = j_{s1} + Y_1 V_1 - Y_1 V_{s1}$$

$$j_2 = j_{s2} + Y_2 V_2 - Y_2 V_{s2}$$

$$\vdots$$

$$j_b$$

$$\xrightarrow{\text{بصورت ماتریسی}} j = j_s + Y V - Y V_s$$

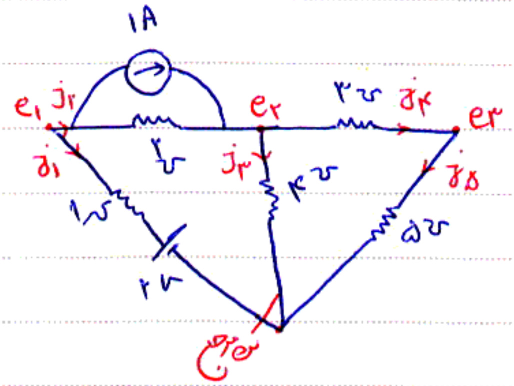
دو طرف را در A ضرب می‌کنیم:

$$\underset{\downarrow\, 0}{A . j} = A\, j_s + \underset{\downarrow\, A^t . e}{A Y V} - A Y V_s$$

$$0 = A j_s + A Y A^t . e - A Y V_s$$

$$\underbrace{A Y A^t}_{Y_n} . e = \underbrace{A Y V_s - A j_s}_{I_s} \quad (A) \longrightarrow Y_n . e = I_s$$

حُسن این است معادله A، منابع ولتاژ را به منابع جریان تبدیل می کند.



مثال) یک مدار سادهٔ مقاومتی : $V = ?$

ابتدا استفاده از رول

$$j_k = J_{sk} + Y_k V_k - Y_k V_{sk}$$

j_k ها را می نویسیم و سپس به صورت ماتریسی در می آوریم سپس:

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$j_1 = 0 + 1V_1 - 1\times 2$$

$$j_2 = 1 + 2V_2 - 2\times 0$$

$$j_3 = 0 + 4V_3 - 4\times 0$$

$$j_4 = 0 + 3V_4 - 3\times 0$$

$$j_5 = 0 + 5V_5 - 5\times 0$$

? $(Y_n) = A Y A^t$

? $(I_s) = A Y V_s - A j_s$ $\Rightarrow Y_n \, (e) = I_s \Rightarrow$?

$(V) = A^t . e$ بدست می آید.

برای مثال بعدی ۱   برای مثال بعدی ۱

$$\underbrace{\begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \\ j_4 \\ j_5 \end{bmatrix}}_{j} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{j_s} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cancel{14} & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}}_{Y} \underbrace{\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{bmatrix}}_{V} - \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cancel{14} & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}}_{Y} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{V_s}$$

$$Y_n = A Y A^t = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 9 & -3 \\ 0 & -3 & 8 \end{bmatrix} \qquad I_s = A Y V_s - A j_s = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

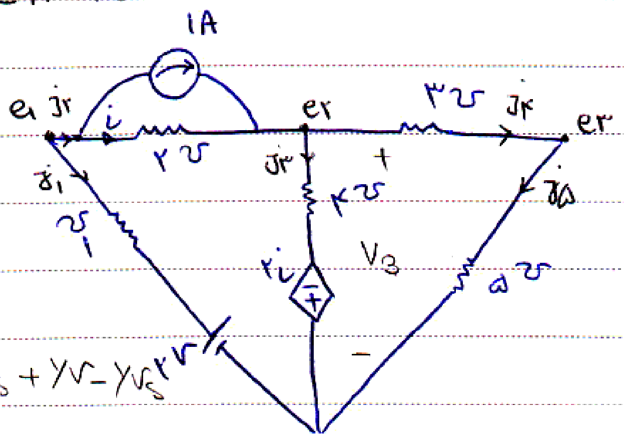
$$- \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$Y_n . e = I_s$

$$\begin{bmatrix}4&-2&0\\-2&9&-3\\0&-3&8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e_1\\e_2\\e_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix} \longrightarrow e$$ بدست می‌آید.

$V = A^t . e$

مثال)



$J = J_s + YV - YV_s$

ابتدا شکل را بدست می‌آوریم (i).

$i = j_2 - 1$

KCL: $j_2 = i + 1 \Rightarrow i = j_2 - 1$

$j_1 = 0 + 1v_1 - 1\times 2$

$j_2 = 1 + 2v_2 - 2\times 0$

$j_3 = 0 + 4(v_3 - (-2i)) = 4(v_3 + 2j_2 - 2) = 4v_3 + 8j_2 - 8 = 4v_3 + 16v_2 + 8 - 8 =$
$0 + 4v_3 + 16v_2 + 0$

$j_4 = 0 + 3v_4 - 3\times 0$

$j_5 = 0 + 5v_5 - 5\times 0$

$j_3 = 0 + 4v_3 - 4(-2i) = 4(v_3 - (-2i))$

$Y_n = AYA^t = ?$

$I_s = AYV_s - Aj_s = ?$ $\longrightarrow Y_n . e = I_s$

روش تابلوی :

در شرایط زیر از روش تابلوی استفاده می‌کنیم :

۱) منابع ولتاژ وجود داشته باشند یا اگر وجود دارند به منابع جریان تبدیل نشوند.

۲) سلف‌های تزویج شده و منابع وابسته وجود داشته باشند، در این صورت در معادلهٔ $Y_n . e = i_s$

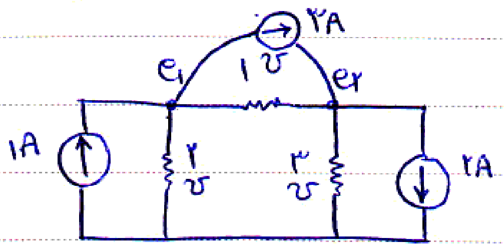
می‌توان Y_n و I_s را مستقیماً به صورت زیر مشخص داد.

$$Y_n \cdot e = i_s$$

$$Y_{ij} = \begin{cases} i = j & \text{مجموع ادمیتانس‌های متصل به گره } i \text{ ام} \\ i \neq j & -(\text{مجموع ادمیتانس‌های متصل بین گره‌های } i \text{ و } j) \end{cases}$$

i_{s_i} = (مجموع جریان‌های وارد شده به گره i (وارد شده با علامت مثبت و خارج شده با علامت منفی))

مثال)



$$\underbrace{\quad}_{\text{تعداد گره ها}} \; 2\times 2$$

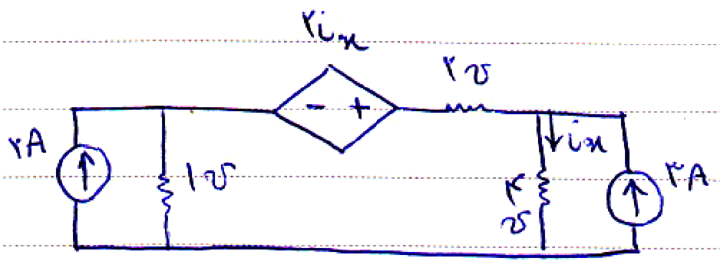
$$Y_n = \begin{bmatrix} 1+2 & -1 \\ -1 & 1+3 \end{bmatrix}$$

$$i_s = \begin{bmatrix} 1-3 \\ 3-2 \end{bmatrix} \qquad Y_n \cdot e = I_s \longrightarrow \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

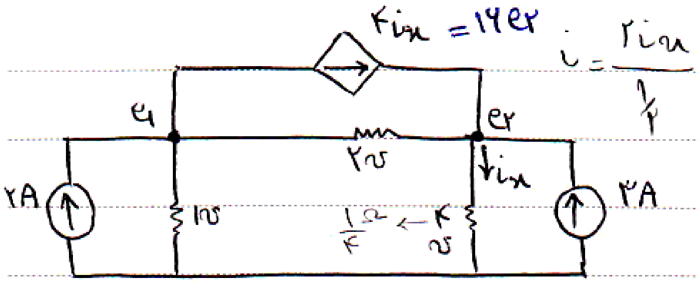
روش مباشر :

همان روش نودال است، با این تفاوت که منابع وابسته نیز می‌توانند وجود داشته باشند. در این روش، ابتدا منابع وابسته را مانند منابع مستقل در نظر می‌گیریم و معادلات را از روش نودال می‌نویسیم. در انتها اثر منابع وابسته را به ماتریس Y_n برمی‌گردانیم.

مثال)



حل: منابع ولتاژ به جریان تبدیل می‌شوند: $i = \frac{2i_x}{\frac{1}{2}} = \frac{8e_2}{\frac{1}{2}} = 16e_2$



در روش گره، ولتاژ گره‌ها یعنی e مجهول معادلات است. وقتی از روش ماتریس استفاده می‌کنیم، تمام وابستگی‌ها برحسب e نوشته می‌شوند

$i_x = \frac{e_2}{\frac{1}{4}} = 4e_2$ ، چون از آن ثابت سازی داریم، علامت عوض شده

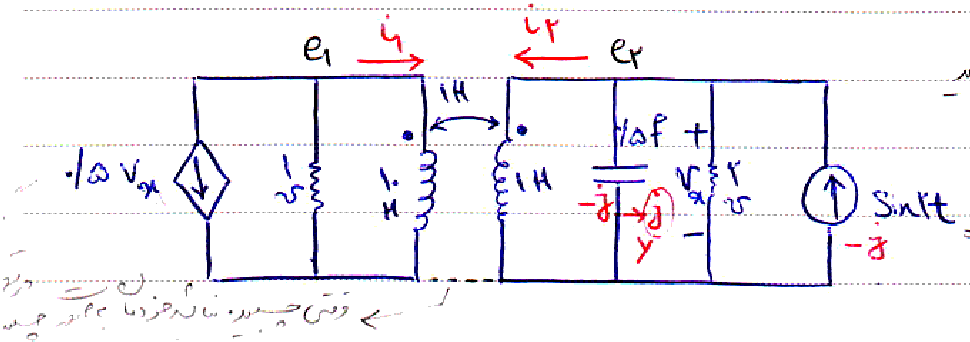
$$Y_n \cdot e = I_s \longrightarrow \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-16e_2 \\ 16e_2+3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 14 \\ -2 & -10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

تجزیه و تحلیل گره در حالت دائمی سینوسی:

وقتی منابع موجود در یک مدار در رژیم سینوسی به صورت یک فرکانس باشند می‌توان از تحلیل حالت دائمی استفاده کرد.

مثال: چون سلف تزویج شده داریم باید از تحلیل استفاده کنیم



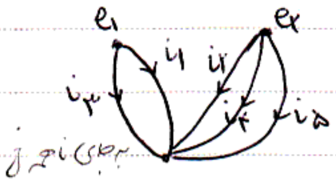
$\sin 2t = \cos(2t - 90) \to -j$

$$L = \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \Gamma = \frac{1}{10-1}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{10}{9} \end{bmatrix}$$

$$\lambda = L i \Rightarrow i = \frac{\lambda}{L} = \lambda \Gamma \xRightarrow{\text{فازور}} I = V \frac{1}{j\omega} \Gamma$$

در حوزه‌ی سینوسی ماندگار :

$$\begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{j\omega} \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{12} & \Gamma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{9j\omega} & \frac{-1}{9j\omega} \\ \frac{-1}{9j\omega} & \frac{10}{9j\omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

معادلات گره به روش منظم :

$$J_K = J_{SK} + Y_K V_K - Y_K V_{SK}$$

$$J_3 = 0/5 V_x + 1 \times V_3 \ , \ V_x = V_5$$

$$J_5 = -(-j) + 0 + 2V_5 \longrightarrow J_5 = j + 2V_5$$

$$J_4 = 0 + j \times V_4 \longrightarrow J_4 = j V_4$$

$$J_3 = 0/5 \times V_5 + V_3 \longrightarrow J_3 = 0/5 V_5 + V_3$$

$$\begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{9j\omega} & \frac{-1}{9j\omega} \\ \frac{-1}{9j\omega} & \frac{10}{9j\omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

$$J = J_S + YV - YV_S$$

$$\begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \\ J_4 \\ J_5 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ j \end{bmatrix}}_{J_S} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{9j\omega} & \frac{-1}{9j\omega} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{9j\omega} & \frac{10}{9j\omega} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0/5 \\ 0 & 0 & 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{Y_b} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad Y_n = A Y_b A^t \qquad i_s = A \cancel{Y_b V_s}^{\,0} - A J_s$$

معادلات انتگرال-دیفرانسیل :

چنانچه بخواهیم پاسخ کامل یک شبکه‌ی معین را به یک ورودی و حالت اولیه‌ی معلوم محاسبه کنیم، معادلات

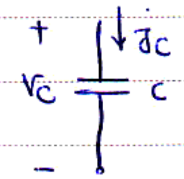
انتگرال - دیفرانسیل لازم خواهد بود.

اپراتور D:

$$\frac{d}{dt} \triangleq D$$

حال ادمیتانس های سلف و خازن را در حوزه ی انتگرال - دیفرانسیل را به دست می آوریم:

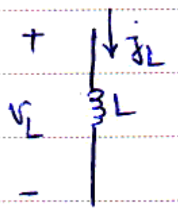
۱- خازن:



$$j_C = C\frac{d}{dt}v_C = CDv_C$$

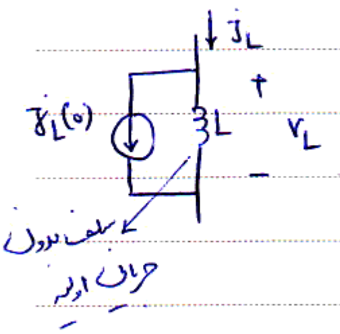
$$\boxed{Y_C = \frac{j_C}{v_C} = CD}$$

۲- سلف:



$$j_L = \frac{1}{L}\int v_L\,dt + j_L(0)$$

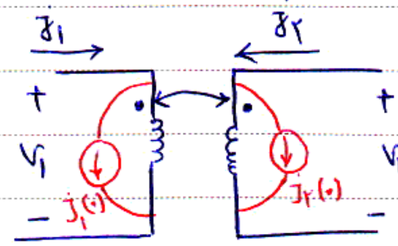
جریان اولیه سلف $j_L(0)$ را با یک منبع جریان موازی نشان می دهیم تا L از معادلات حذف شود.



$$j = \frac{1}{L}\int v_L\,dt \Rightarrow v_L = L\frac{d}{dt}j$$

$$v_L = LDj \Rightarrow \boxed{Y_L = \frac{j}{v_L} = \frac{1}{LD}}$$

برای سلف های تزویج شده نیز می توانیم آن را تعمیم دهیم:



$$\begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{D}\begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{12} & \Gamma_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} j_1(0) \\ j_2(0) \end{bmatrix}$$

شرایط اولیه

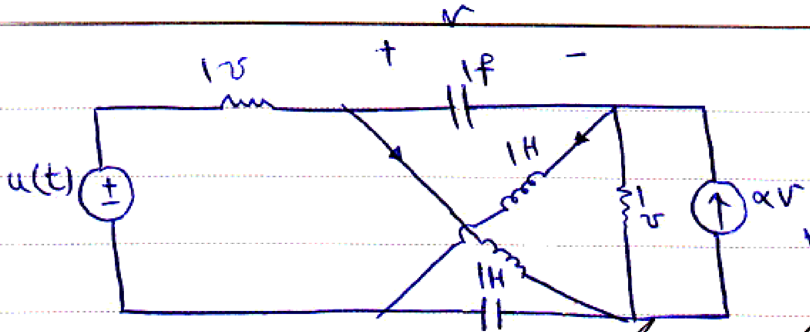
$$\lambda = Li$$

$$i = \lambda\Gamma$$

$$j = V\frac{1}{j\omega}\Gamma = V\frac{1}{D}\Gamma$$

$$j = \frac{1}{D}V\Gamma$$

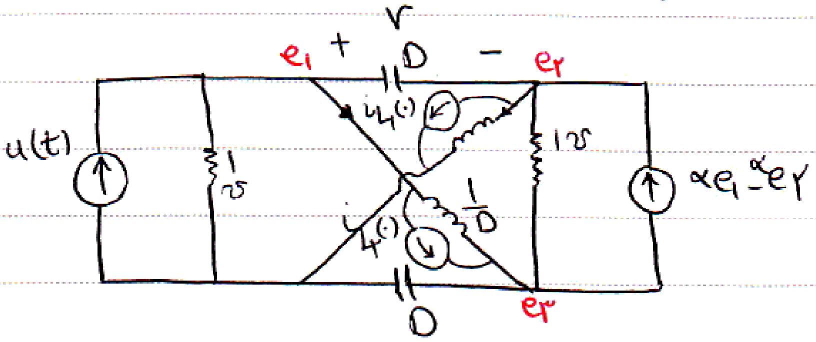
مثال) تمرین ۲۹ کتاب



$v_{C_2}(0), v_{C_1}(0)$, $i_{L_1}(0)$, $i_{L_2}(0)$

در حوزه‌ی انتگرال دیفرانسیل از روش ماتریس گره استفاده می‌کنیم

به دلیل وجود $u(t)$ ناچاریم از انتگرال دیفرانسیل حل کنیم.

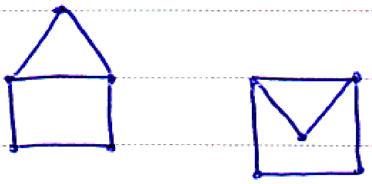


$$\begin{bmatrix} 1+D+\frac{1}{D} & -D & -\frac{1}{D} \\ -D-\alpha & 1+D+\frac{1}{D}+\alpha & -1 \\ -\frac{1}{D}+\alpha & -1-\alpha & 1+\frac{1}{D}+D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(t)-i_{L_2}(0) \\ \alpha e_1-\alpha e_2-i_{L_1}(0) \\ -\alpha e_1+\alpha e_2+i_{L_2}(0) \end{bmatrix}$$

تجزیه و تحلیل مش:

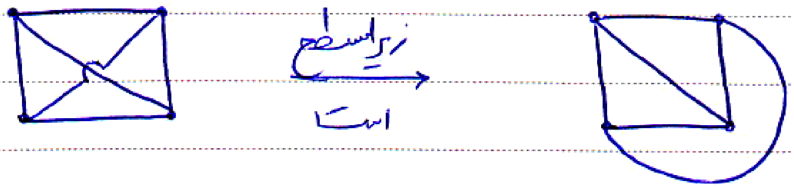
گراف‌های توپولوژیکی: گراف‌هایی هستند که از نظر رسمی تفاوت دارند ولی در واقع یک گراف هستند.

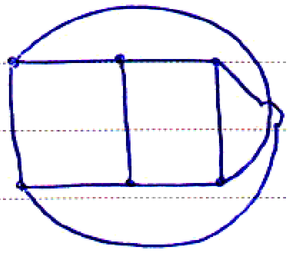
مثال)



گراف‌های مسطح: به گرافی گفته می‌شود که بتوان آن را در یک صفحه رسم کرد به نحوی که هیچ شاخه‌ای یکدیگر را قطع نکنند.

مثال)

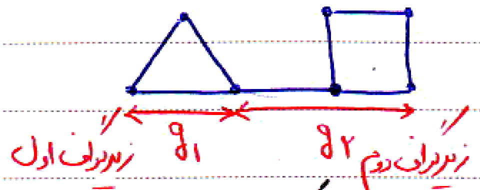




مش درونی و مش بیرونی:

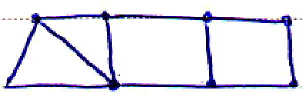
حلقه‌ای که درون آن هیچ ناحیه‌ای وجود نداشته باشد را مش درونی و از این به بعد به اختصار مش می‌گویند و حلقه‌ای که در خارج از آن هیچ ناحیه‌ای وجود نداشته باشد، مش بیرونی است.

گراف‌های لولا دار یا لولا: به گرافی لولا دار می‌گویند که بتوان آن را به دو زیرگراف ناسوده که تنها در یک گره با هم متصل است، تفکیک نمود.



گراف لولا دار

به گرافی بی‌لولا می‌گویند که هرگاه به دو زیرگراف ناسوده تفکیک شوند، حداقل در دو گره با هم متصل باشند.



گرافی بی‌لولا

توجه) وقتی در یک مدار، بیشتر منابع جریان داشته باشیم، از KCL استفاده می‌کنیم.

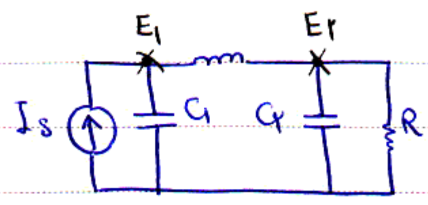
توجه) وقتی در یک مدار، بیشتر منابع ولتاژ داشته باشیم، از KVL استفاده می‌کنیم.

Subject:

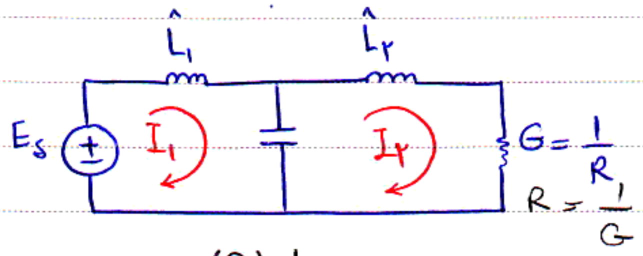
Year. Month. Date. ( )

خاصیت دوگان: این خاصیت در گراف‌های مسطح پیوسته در مورد مدارها صدق می‌کند. عناصر شبکه باید دوگانی باشند. بنابراین

عناصری مانند ترانسفورماتور، سلف‌های تزویج شده و غیره را از بحث خارج می‌کنیم. به دو مدار زیر توجه کنید:



مدار (A)



مدار (B)

مدار A:

KCL
$$I_s = E_1 C_1 j\omega + \frac{E_1 - E_2}{Lj\omega}$$

$$\boxed{I_s = E_1\left(C_1 j\omega + \frac{1}{Lj\omega}\right) - E_2 \times \frac{1}{Lj\omega}} \quad (1)$$

KCL
$$\frac{E_1 - E_2}{Lj\omega} = E_2 C_2 j\omega + \frac{E_2}{R}$$

$$\boxed{E_1 \times \frac{1}{Lj\omega} - E_2\left(\frac{1}{Lj\omega} + C_2 j\omega + \frac{1}{R}\right) = 0} \quad (2)$$

مدار B:

KVL
$$E_s = \hat{L}_1 j\omega I_1 + \frac{1}{\hat{C}j\omega}(I_1 - I_2)$$

$$\longrightarrow \boxed{E_s = I_1\left(L_1 j\omega + \frac{1}{\hat{C}j\omega}\right) - I_2 \times \frac{1}{\hat{C}j\omega}} \quad (3)$$

KVL
$$\frac{1}{\hat{C}j\omega}(I_2 - I_1) + \hat{L}_2 j\omega I_2 + R I_2 = 0$$

$$\boxed{\frac{1}{\hat{C}j\omega} I_1 - I_2\left(\frac{1}{\hat{C}j\omega} + \hat{L}_2 j\omega + R\right) = 0} \quad (4)$$

با مقایسه روابط ① با ③ و همچنین ② با ④ مشاهده می‌شود که یک تناظر یک به یک بین روابط وجود دارد.

E ⟷ I   E جانشین را با I داده و برعکس.

C ⟷ L   C جانشین را با L داده و برعکس.

$R \longleftrightarrow G=\frac{1}{R}$ R جانشین را با G داده و برعکس.

* این دو مدار (A و B) دوگان هم هستند به عبارتی اگر مدار A را حل کنیم، پاسخ آن برای مدار B قابل استفاده است.

گراف‌های دوگان:

دو گراف g و $\hat{g}$ را دوگان هم گویند، اگر سه شرط زیر را داشته باشند:

به ازای هر تعداد مش حلقه وجود دارد

۱- میان مش‌های $\hat{g}$ یا در نظر گرفتن مش بیرونی و گره‌های g یک تناظر یک به یک وجود داشته باشد.

۲- میان مش‌های g با در نظر گرفتن مش بیرونی و گره‌های $\hat{g}$ یک تناظر یک به یک وجود داشته باشد.

۳- میان شاخه‌های دو گراف یک تناظر یک به یک وجود داشته باشد به طوری که هرگاه دو مش یک گراف دارای شاخه‌ی مشترک باشند، گره‌های متناظر با این دو مش در مدار دوگان شاخه‌ای داشته باشد که این دو گره را به هم وصل می‌کند.

الگوریتم رسم مدار دوگان:

۱- برای هر یک از مش‌های g با احتساب (در نظر گرفتن) مش بیرونی، یک گره از $\hat{g}$ را انتخاب می‌کنیم.

۲- برای هر شاخه‌ی K از g و برای مش‌های نا ... مشترک است، یک شاخه از $\hat{g}$ متناظر می‌کنیم که گره‌های نا ...

$\hat{g}$ را متصل کند.

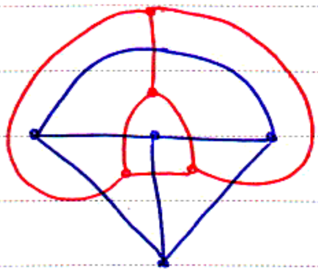
۳- بین عناصر g و $\hat{g}$ تناظر زیر را به وجود می‌آوریم؟

$L \longleftrightarrow C$

$R \longleftrightarrow G$

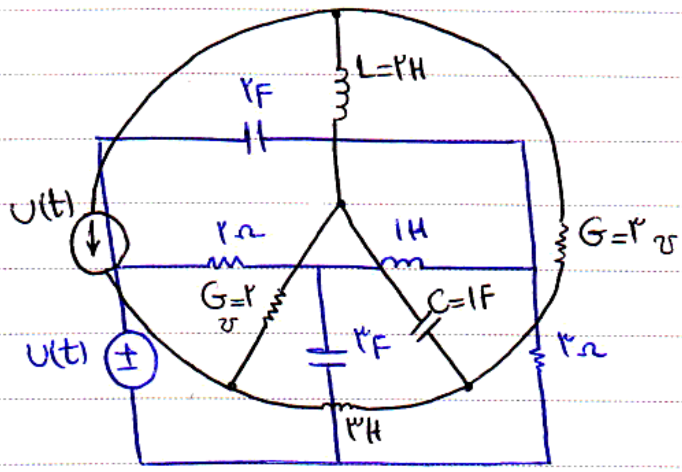
مثل منابع جریان $I \longleftrightarrow E$ مثل منابع ولتاژ

مثال) گراف های دوگان گراف زیر را به دست آورید؟



متناظر با هر مش در درون آن یک گره می‌گذاریم.

مثال) گراف دوگان مدار زیر را به دست آورید.



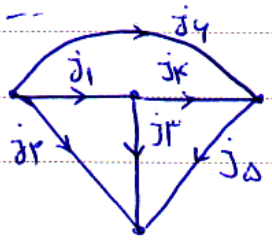
جریان به سمت مثبت منبع وارد می‌شود.

تجزیه و تحلیل مش؟

در یک مدار که دارای b شاخه و n_t گره باشد، تعداد مش ها عبارت است از:

$$L = b - n_t + 1$$

در روش مش برای هر یک از مش ها جهت عقربه های ساعت را به عنوان جهت قراردادی در نظر می‌گیریم.



$L = ۶ - ۴ + ۱ = ۳$

شاخه

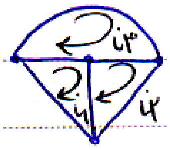
گره

V بردار ولتاژ شاخه ها $= \begin{bmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_b \end{bmatrix}$ $\qquad$ i بردار جریان مش ها $= \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_L \end{bmatrix}$

ماتریس M را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$M_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{اگر شاخه } k \text{ در مش } i \text{ام قرار داشته هم جهت با مش باشد.} \\ 0 & \text{اگر شاخه ی } k \text{ در مش } i \text{ام نباشد.} \\ -1 & \text{اگر شاخه ی } k \text{ در مش } i \text{ام قرار داشته مخالف با مش باشد.} \end{cases}$$

ماتریس M برای گراف بالا:



$$\underset{3\times 6}{M_{ik}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 6}$$

استنباط های KVL و KCL:

$$M.V = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 - V_2 + V_3 \\ -V_3 + V_4 + V_5 \\ -V_1 - V_4 + V_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

استنباط KVL: $\boxed{M.V = 0}$

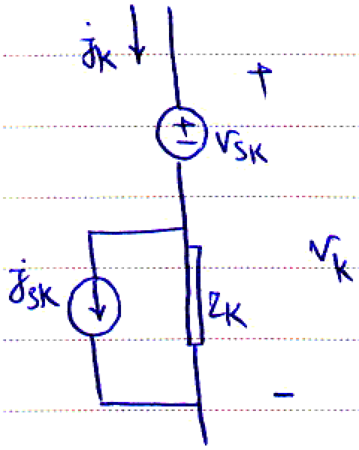
$M^t . i = ?$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_1 - i_3 \\ -i_1 \\ i_1 - i_2 \\ i_2 - i_3 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \\ j_4 \\ j_5 \\ j_6 \end{bmatrix}$$

استنباط KCL: $\boxed{M^t . i = j}$

روش آنالیز مش:

سه روش وجود دارد: مقطع، تری، بیانیر



روش مقطع:

$$V_k = V_{sk} + Z_k J_k - Z_k J_{sk}$$

وقتی رابطه‌ی بون را برای همه‌ی شاخه‌ها به صورت ماتریسی نوشته شود:

$$V = V_s + Z_b J - Z_b J_s$$

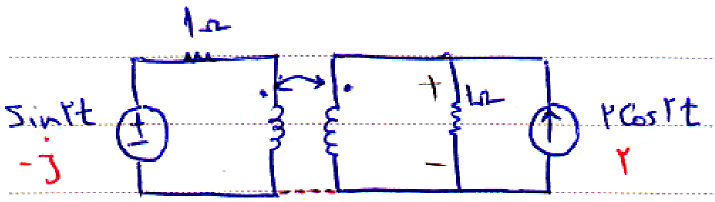
دو طرف را در M ضرب می‌کنیم:

$$\underbrace{M.V}_{0} = MV_s + MZ_b \underbrace{J}_{M^t.i} - MZ_b J_s$$

$$\overbrace{MZ_bM^t}^{Z_m} . i = \underbrace{MZ_b J_s - MV_s}_{e_s} \quad (1) \quad \Longrightarrow \quad Z_m . i = e_s$$

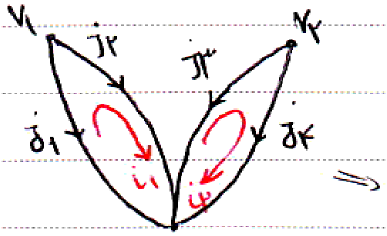
طرف راست معادله‌ی (۱) که منابع جریان مستقل را منبع ولتاژ تبدیل می‌کند.

مثال ۳)



$$L = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

گراف:



$$M = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ منابع را در گراف نمی‌کشیم.

$$V_k = V_{sk} + Z_k J_k - Z_k J_{sk}$$

ابتدا برای سلف‌های تزویج شده می‌نویسیم:

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = j\omega \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{12} & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_2 \\ J_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2j & 2j \\ 2j & 4j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_2 \\ J_3 \end{bmatrix}$$

$$V_1 = -j + 1 \times J_1 - 1 \times 0$$

$$V_4 = 0 + 1 \times J_4 - 1 \times (-2)$$

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -j \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{V_s} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2j & 2j & 0 \\ 0 & 2j & 4j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{Z_b} \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \\ J_4 \end{bmatrix} - \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2j & 2j & 0 \\ 0 & 2j & 4j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{Z_b} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}}_{J_s}$$

$$Z_m \cdot i = e_s$$

$$Z_m = M Z_b M^t = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2j & 2j & 0 \\ 0 & 2j & 4j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} -1 & 2j & 2j & 0 \\ 0 & -2j & -4j & 1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2j & -2j \\ -2j & 1+4j \end{bmatrix}$$

$$e_s = M Z_b J_s - M V_s$$

$$e_s = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2j & 2j & 0 \\ 0 & 2j & 4j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -j \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$e_s = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} j \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} j \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -j \\ -2 \end{bmatrix}$$

روش نظری :

اگر شرایط زیر در مدار برقرار باشد در معادله ی $Z_m \cdot i = e_s$ ماتریس های Z_m و e_s را می توان مستقیماً تشکیل داد.

۱) منابع جریان وجود نداشته باشند یا اگر دارند به منبع ولتاژ تبدیل شوند. (ضمناً همه ی منابع مستقل باشند)

۲) سلف های تزویج شده در مدار موجود نباشد.   تعداد مش ها L

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & \cdots & Z_{1L} \\ \vdots & & \\ Z_{L1} & \cdots & Z_{LL} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{s_1} \\ \vdots \\ e_{s_L} \end{bmatrix}$$

$$Z_{ij} = \begin{cases} i = j & \text{مجموع امپدانس های موجود در مش } i \text{ ام} \\ i \neq j & -(\text{مجموع امپدانس های مشترک بین مش } i \text{ و } j) \end{cases}$$

$e_{s_i} =$ مجموع جبری منابع ولتاژ موجود در مش i ام اگر از قطب مثبت منبع وارد شدیم با علامت منفی و اگر از قطب منفی وارد شدیم با علامت مثبت.

روش میانبر :

همان روش نظری است با این تفاوت که منابع وابسته نیز می توانند وجود داشته باشند. منابع وابسته را مثل منابع

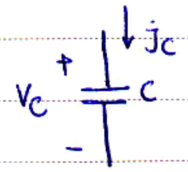
مستقل فرض می‌کنیم و وابستگی‌ها را برحسب جریان مش‌ها تعیین می‌کنیم و معادلات را به روش لوپ می‌نویسیم. در اینجا از

وابستگی‌ها را به ماتریس Z_m می‌پردازیم.

معادلات انتگرال - دیفرانسیل:

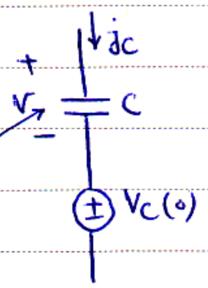
امپدانس‌های سلف و خازن را در این حوزه به دست می‌آوریم.

۱- خازن:



$$v_c = \frac{1}{C}\int j_c \, dt + v_c(0)$$

برای جدا کردن شرط اولیه از معادله آن را به صورت یک منبع ولتاژ سری با یک خازن بدون شرط اولیه نشان می‌دهیم.

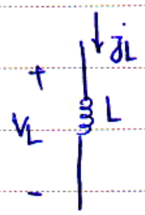


خازن بدون ولتاژ اولیه

$$v = \frac{1}{C}\int j_c \, dt \Rightarrow C\frac{dv}{dt} = j_c$$

$$CDv = j_c \longrightarrow Z_c = \frac{v}{j_c} \Rightarrow \boxed{Z_c = \frac{1}{CD}}$$

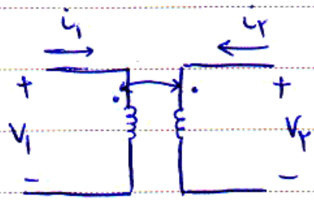
۲- سلف:



$$v_L = L\frac{dj_L}{dt} \longrightarrow v_L = LD\,j_L$$

$$Z_L = \frac{v_L}{j_L} \longrightarrow \boxed{Z_L = LD}$$

با تعمیم برای سلف‌های تزویج شده خواهیم داشت:



$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = D\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{12} & L_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

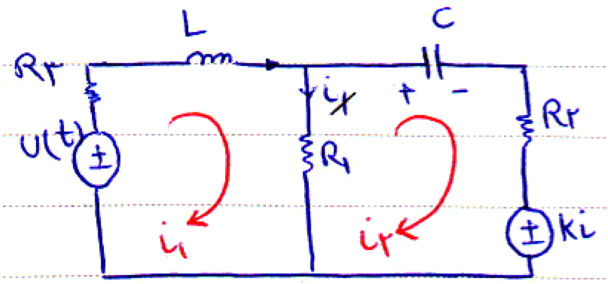
$$\lambda = Li \Rightarrow v = Lj\omega i = LDi$$

$$v = LDi$$

مثال ۴)

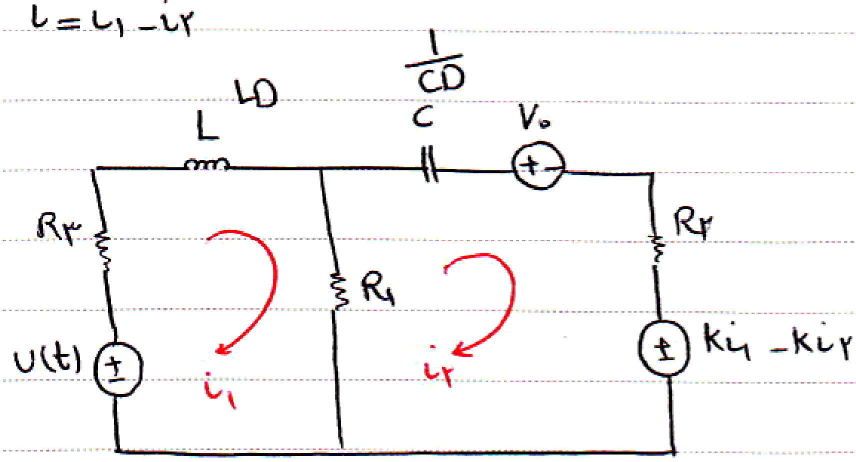
$V_C(0)=V_0$

$i_L(0)=I_0$



حل از روش ماتریسی : چون مدار در رژیم سینوسی نیست، دارای سلف و خازن است و شرایط اولیه داده شده باید در حوزه ی اپراتور دیفرانسیل حل کنیم.

$i = i_1 - i_2$



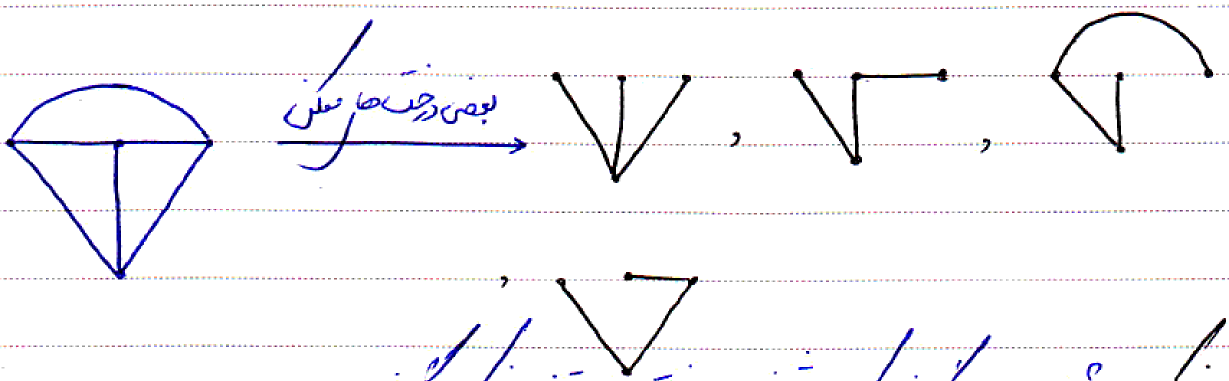
$Z_m \cdot i = e_s$

$$\begin{bmatrix} R_3 + LD + R_1 & -R_1 \\ -R_1 + K & R_1 + \frac{1}{CD} + R_2 - K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v(t) \\ -V_0 - \cancel{Ki_1} + \cancel{Ki_2} \end{bmatrix}$$

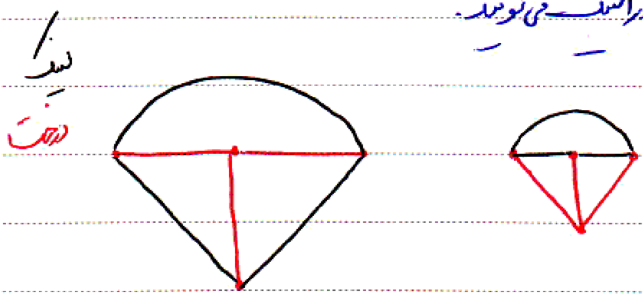
فصل ۱۱ : تجزیه و تحلیل حلقه‌ی اساسی و کات‌ست اساسی :

درخت : یک زیرگراف از یک گراف پیوسته را درخت گویند اگر ۳ شرط زیر را دارا باشند :

۱) پیوسته باشد. ۲) تمام گره‌ها را شامل شود ۳) هیچ حلقه‌ای تشکیل ندهد



لینک : شاخه‌های از گراف که از شاخه‌های درخت نیستند را لینک می‌گویند.



قضیه اساسی تئوری گراف :

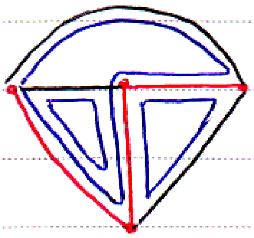
اگر گراف پیوسته‌ی G و درخت انتخابی T از آن گراف را در نظر بگیریم :

۱) بین هر دو گره‌ی دلخواه از گراف G روی درخت T یک مسیر منحصر به فرد وجود دارد.

۲) تعداد شاخه‌های درخت برابر $\overset{4-1=3}{n_t - 1}$ و تعداد لینک‌ها برابر $\overset{6-4+1=3}{b - n_t + 1}$ است.

۳) هر لینک درخت T همراه با مسیر منحصر به فرد میان دو گره آن لینک تشکیل یک حلقه می‌دهد به آن حلقه اساسی

متناظر با آن لینک می‌گویند.

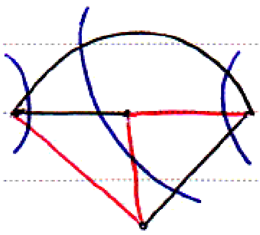


یعنی به تعداد لینک‌ها حلقه‌ی اساسی داریم.

۴) هر شاخه‌ی درخت T و تعدادی از لینک‌ها تشکیل یک کات ست منحصر به فرد را می‌دهند که به آن کات ست اساسی متناظر با آن شاخه‌ی درخت می‌گویند. یعنی به تعداد شاخه‌های درخت، کات ست اساسی داریم.

روش به دست آوردن کات ست اساسی متناظر با شاخه‌ی درخت:

شاخه‌ی درخت مورد نظر را حذف می‌کنیم، درخت به ۲ قسمت مجزا تقسیم می‌شود. لینک‌هایی که این دو قسمت مجزا را هم وصل می‌کنند به همراه آن شاخه‌ی درخت، تشکیل کات ست اساسی متناظر با آن شاخه‌ی درخت را می‌دهند.

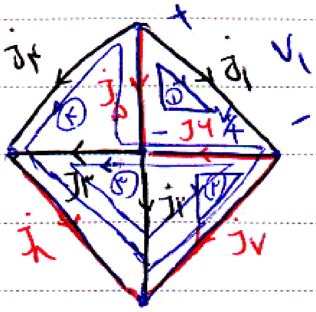


تجزیه و تحلیل حلقه‌ی اساسی:

قرارداد ۱) لینک‌ها را از ۱ تا l و درخت‌ها را از $l+1$ تا b شماره گذاری می‌کنیم.

قرارداد ۲) جهت حلقه‌ی اساسی متناظر با هر لینک را هم جهت با جریان آن لینک در نظر می‌گیریم.

فرض کنید گراف به همراه درخت انتخابی به شکل زیر باشد:



جهت‌ها اختیاری است.

حلقه‌ی اساسی متناظر با هر لینک را نشان می‌دهیم.

استنباط‌های KVL و KCL :

ماتریس B به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$B_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{اگر شاخه‌ی } j \text{ در حلقه‌ی اساسی } i \text{ بوده و با آن هم جهت باشد.} \\ 0 & \text{اگر شاخه‌ی } j \text{ در حلقه‌ی اساسی } i \text{ نباشد.} \\ -1 & \text{اگر شاخه‌ی } j \text{ در حلقه‌ی اساسی } i \text{ بوده و با آن خلاف جهت باشد.} \end{cases}$$

ماتریس B برای مثال قبلی:

$$B = \begin{array}{c} \begin{matrix} ① & ② & ③ & ④ & ⑤ & ⑥ & ⑦ & ⑧ \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

استنباط‌های KVL و KCL :

بردار ولتاژ شاخه‌ها $V = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_b \end{bmatrix}$ $\qquad$ i بردار جریان حلقه‌های اساسی $= \begin{bmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_l \end{bmatrix}$

j بردار جریان شاخه‌ها $= \begin{bmatrix} j_1 \\ \vdots \\ j_b \end{bmatrix}$

$$B \cdot V = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 - v_5 + v_6 \\ v_2 + v_6 - v_7 \\ v_3 + v_6 - v_7 + v_8 \\ v_4 - v_5 + v_6 - v_7 + v_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\boxed{B \cdot V = 0}$$ استنباط KVL

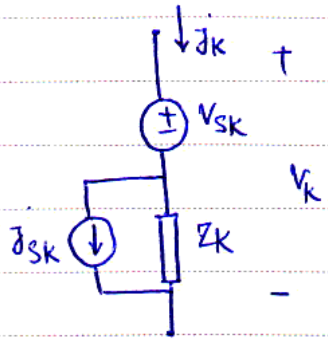
$$B^t . i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ -i_1-i_4 \\ i_1+i_2+i_3+i_4 \\ -i_2-i_3-i_4 \\ i_3+i_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \\ j_4 \\ j_5 \\ j_6 \\ j_7 \\ j_8 \end{bmatrix} \Rightarrow B^t . i = j$$

استنباط KCL

معادلات حلقه‌ای اساسی: سه روش داریم: منظم، نظری، ماتریسی

۱- روش منظم

مجدداً تعمیم عمومی برای شاخه‌ها را یادآوریم.



$$V_K = V_{SK} + Z_K j_K - Z_K j_{SK}$$

وقتی رابطه را برای تمام شاخه‌ها بنویسیم به صورت ماتریسی خواهیم داشت:

$$V = V_S + Z_b j - Z j_S$$

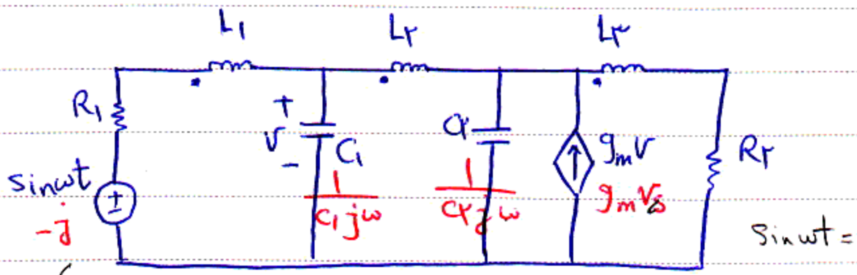
طرفین در B ضرب می‌شود:

$$\underbrace{B.V}_{0} = B V_S + B Z_b \underbrace{j}_{B^t . i} - B Z j_S$$

$$\Rightarrow \underbrace{B Z_b B^t}_{Z_B} . i = \underbrace{B Z_b j_S - B V_S}_{e_S} \quad (A) \Rightarrow \boxed{Z_B . i = e_S}$$

مولفه‌ی $B Z_b j_S$، در طرف راست رابطه‌ی (A)، عمل تبدیل منابع مستقل جریان را به منابع ولتاژ انجام می‌دهد

مثال: در مدار زیر به روش منظم حلقه‌ای اساسی را نشان دهید.



$$L = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\sin\omega t = 1\cos(\omega t - 90) = 1\angle -90 = \cos -90 + j\sin(-90) = -j$$

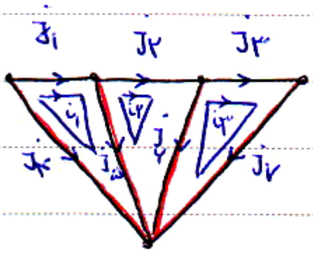
$$\sin\omega t = \cos(\omega t - 90) = e^{-j90} = \cos 90 - j\sin 90 = -j$$

$$\boxed{A\cos(\omega t + \theta) = Ae^{j\theta}}$$

در حوزه فازور کار می‌کنیم

گراف :

لینک و درخت :



$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} ① & ② & ③ & ④ & ⑤ & ⑥ & ⑦ \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

ماتریس همانی از قراردادهای ۱ و ۲

ابتدا برای سلف‌های تزویج شده :

$\lambda = L i$

$V = L j\omega i$

i بردار جریان شاخه‌ها

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = j\omega \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \end{bmatrix}$$

$$V_K = V_{SK} + Z_K J_K - Z_K J_{SK}$$

$$V_1 = 4j\omega \times j_1 + 2j\omega \times j_2 + j\omega \times j_3$$

$$V_2 = 2j\omega \times j_1 + 4j\omega \times j_2 + 2j\omega \times j_3$$

$$V_3 = j\omega \times j_1 + 2j\omega \times j_2 + 4j\omega \times j_3$$

$$V_4 = -j + R_1 \times j_4 - R_1 \times 0$$

$$V_5 = 0 + \frac{1}{C_1 j\omega} \times j_5 - \frac{1}{C_1 j\omega} \times 0$$

$$V_6 = 0 + \frac{1}{C_2 j\omega} \times j_6 - \frac{1}{C_2 j\omega} \times (-g_m V_5)$$

$$V_6 = 0 + \frac{1}{C_2 j\omega} j_6 + \frac{g_m}{C_2 j\omega}\left(\frac{1}{C_1 j\omega}\right) j_5 \Rightarrow V_6 = \frac{-g_m}{C_1 C_2 \omega^2} j_5 + \frac{1}{C_2 j\omega} j_6$$

$v_7 = 0 + R_2\, j_7 - R_2 \times 0$

به صورت ماتریسی؟

$$\begin{bmatrix}V_1\\V_2\\V_3\\V_4\\V_5\\V_6\\V_7\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}0\\0\\-j\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}}_{V_s} + \underbrace{\begin{bmatrix}4j\omega & 2j\omega & j\omega & 0 & 0 & 0 & 0\\ 2j\omega & 4j\omega & 2j\omega & 0 & 0 & 0 & 0\\ j\omega & 2j\omega & 4j\omega & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & R_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_1 j\omega} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-g_m}{C_1 C_2 \omega^2} & \frac{1}{C_2 j\omega} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_2\end{bmatrix}}_{Z_b}\begin{bmatrix}j_1\\j_2\\j_3\\j_4\\j_5\\j_6\\j_7\end{bmatrix} - \underbrace{\begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}}_{Z_b}\underbrace{\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}}_{j_s}$$

$$Z_B = B Z_b B^t$$

$$e_s = B Z_b j_s - B V_s \qquad \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_1\\i_2\\i_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$$

۲) روش تحلیلی : اگر شرایط زیر در مدار برقرار باشد در معادله‌ی $Z_B \cdot i = e_s$ ماتریس‌های Z_B و e_s را می‌توان مستقیماً تشکیل داد.

۱) منابع جریان وجود نداشته باشند و اگر دارند به منبع ولتاژ تبدیل شوند.

۲) سلف تزویج شده و منبع وابسته وجود نداشته باشد.

$$\begin{bmatrix}Z_{11} & \cdots & Z_{1L}\\ \vdots & & \\ Z_{L1} & \cdots & Z_{LL}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_1\\ \vdots\\ i_L\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}e_{s_1}\\ \vdots\\ e_{s_L}\end{bmatrix}$$

$Z_{ij} = \begin{cases} i = j & \text{مجموع امپدانس‌های موجود در حلقه اساسی i ام} \\ i \neq j & \text{مجموع امپدانس‌های مشترک بین حلقه‌ی اساسی i و j} \end{cases}$

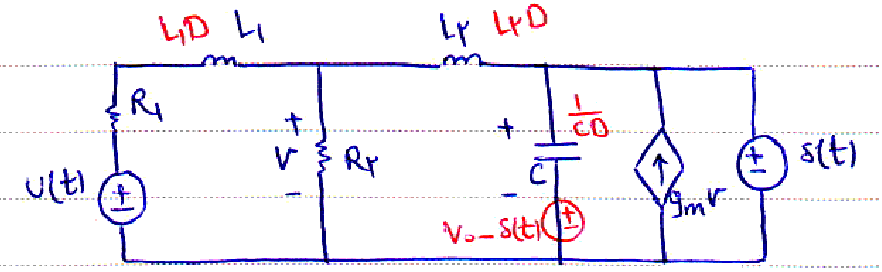
(اگر جهت حلقه‌های اساسی در شاخه‌ی مشترک یکسان بود با علامت مثبت و اگر خلاف بود با علامت منفی جمع می‌زنیم.)

e_{s_i} = مجموع منابع ولتاژ موجود در حلقه‌ی اساسی i (اگر از سر منفی وارد شدیم با علامت + و اگر از سر مثبت وارد شدیم با علامت منفی — جمع می‌زنیم.)

۴) روش مش‌ها: همان روش قبلی است.

با این تفاوت که منابع وابسته نیز می‌توانند وجود داشته باشند. وابستگی‌ها را برحسب جریان حلقه‌ها می‌نویسیم و منابع وابسته را مانند منابع مستقل فرض می‌کنیم و معادلات را به روش قبلی می‌نویسیم. در نهایت اثر وابستگی را در ماتریس Z_B برمی‌گردانیم.

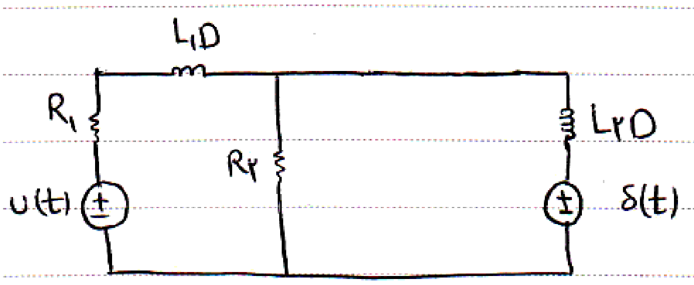
مثال)

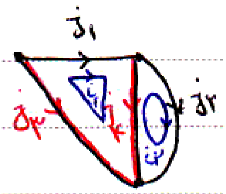


$V_C(0) = V_0$

$i_{L_1}(0) = i_{L_2}(0) = I_0$

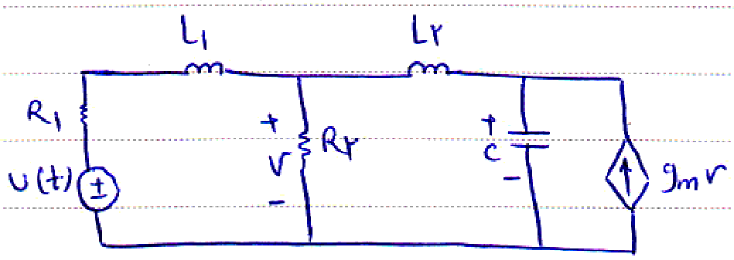
در حوزه‌ی انتگرال-دیفرانسیل حل می‌کنیم:

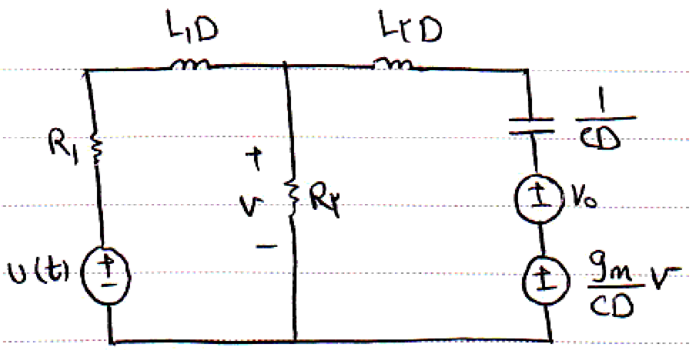


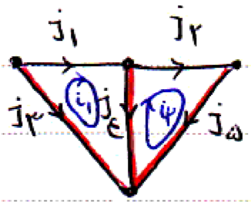


$$\begin{bmatrix} R_1+L_1D+R_2 & -R_2 \\ -R_2 & R_2+L_2D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(t) \\ -\delta(t) \end{bmatrix}$$

مثال)







$$V = R_2 i_1 - R_2 i_2$$

$$\begin{bmatrix} R_1+R_2+L_1D & -R_2 \\ -R_2+\frac{g_m R_2}{CD} & R_2+L_2D+\frac{1}{CD}-\frac{g_m R_2}{CD} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(t) \\ -V_0-\cancel{\frac{g_m R_2}{CD}}i_1+\cancel{\frac{g_m R_2}{CD}}i_2 \end{bmatrix}$$

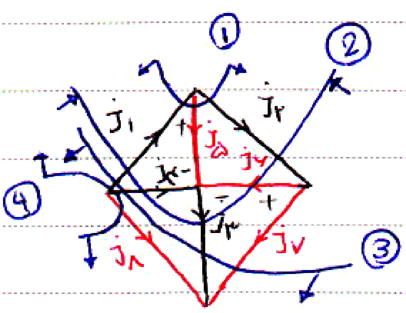
تجزیه و تحلیل کات‌ست:

با تعیین درخت مناسب در گراف مدار:

قرارداد ۱: لینک‌ها را از ۱ تا L و شاخه‌های درخت را از L+1 تا b شماره‌گذاری می‌کنیم.

قرارداد ۲: جهت کات‌ست را هم‌جهت با جهت شاخه درخت متناظر در نظر می‌گیریم.

مثال: فرض کنید یک گراف و درخت انتخابی به صورت زیر باشد:



ماتریس Q:

$$Q_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{اگر شاخه } j \text{ در کات‌ست } i \text{ بوده و با آن هم‌جهت باشد.} \\ 0 & \text{اگر شاخه } j \text{ در کات‌ست } i \text{ نباشد.} \\ -1 & \text{اگر شاخه } j \text{ در کات‌ست } i \text{ بوده و با خلاف جهت باشد.} \end{cases}$$

در مثال قبل ۸ شاخه داریم.

$$Q = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} ① & ② & ③ & ④ & ⑤ & ⑥ & ⑦ & ⑧ \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

ماتریس یکه ناشی از قراردادهای ۱ و ۲

استنباط‌های KVL و KCL :

بردار جریان شاخه‌ها :

$$j = \begin{bmatrix} j_1 \\ \vdots \\ j_b \end{bmatrix}$$

بردار ولتاژ شاخه‌ها :

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_b \end{bmatrix}$$

بردار ولتاژ شاخه‌های درخت :

$$e = \begin{bmatrix} e_{L+1} \\ \vdots \\ e_b \end{bmatrix}$$

$$Q \cdot j = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \\ j_4 \\ j_5 \\ j_6 \\ j_7 \\ j_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -j_1 + j_2 + j_5 \\ j_1 - j_2 - j_3 + j_4 + j_6 \\ -j_1 + j_3 - j_4 + j_7 \\ j_1 + j_4 + j_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

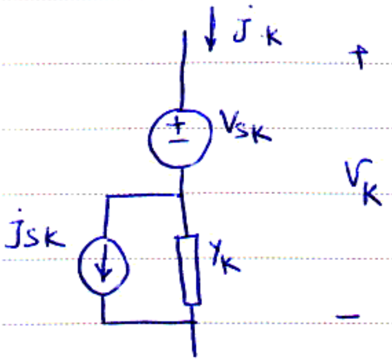
$\rightarrow \quad Q \cdot j = 0$ استنباط KCL

$$Q^t . e = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_5 \\ e_6 \\ e_7 \\ e_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \end{bmatrix} \Longrightarrow Q^t . e = V$$ ، استنباط KVL

معادلات کات ست اساسی و منظم — نظری میانید

استنباط ،

تعمیم یافته برای شاخه را مجدداً در نظر می‌گیریم .



$$j_K = j_{sK} + Y_K V_K - Y_K V_{sK}$$

وقتی این معادله را برای تمام شاخه‌ها بنویسیم ، معادلات ماتریسی زیر حاصل می‌شود :

$$j = j_s + Y_q V - Y_q V_s$$

ضرب طرفین در Q :

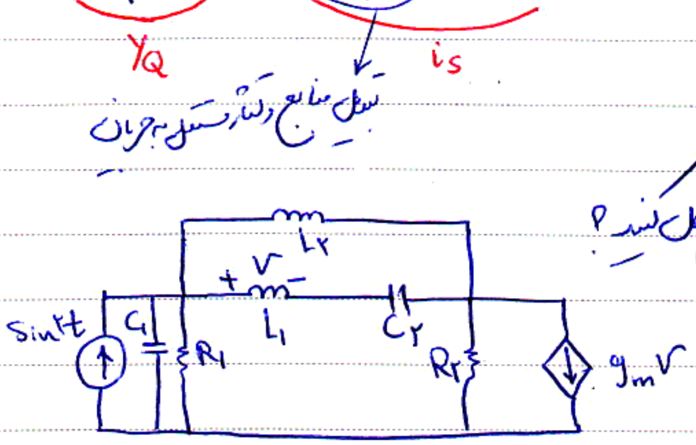
$$\underbrace{Q . j}_{0} = Q j_s + Q Y_q \underbrace{V}_{Q^t . e} - Q Y_q V_s$$

$$\underbrace{Q Y_q Q^t}_{Y_Q} . e = \underbrace{Q Y_q V_s - Q j_s}_{i_s}$$

$$\boxed{Y_Q . e = i_s}$$

تبدیل منابع ولتاژ سری به جریان

مثال) مدار زیر را به روش کات ست اساسی منظم حل کنید ؟



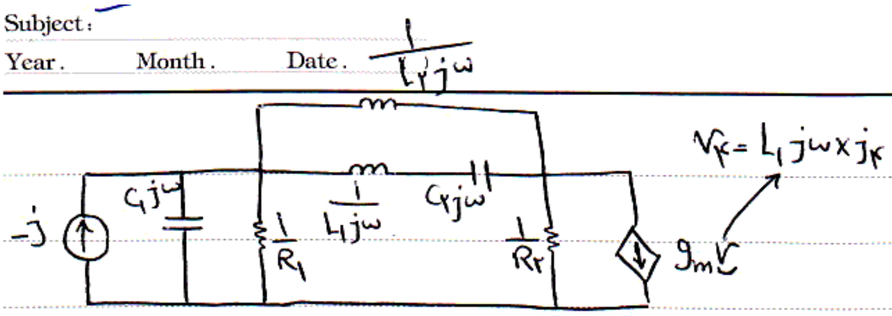
در روش کات ست

چون با ادمیتانس سروکار داریم

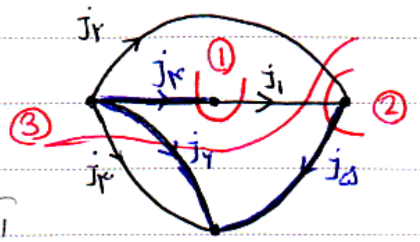
همه را به Y تبدیل کنیم

مثلاً $Z_C = \frac{1}{j\omega C} \Longleftarrow Y_C = jC\omega$ و $Z_L = Lj\omega \Longrightarrow Y_L = \frac{1}{Lj\omega}$

Subject: — Year. Month. Date.



تبدیل به Y ؟



آبی درخت

سیاه لینک

گراف ،

$$
Q = \begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} ① & ② & ③ & ④ & ⑤ & ⑥ \end{array} \\
\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

$$j_1 = 0 + C_2 j\omega \times V_1 - C_2 j\omega \times 0$$

$$j_2 = 0 + \frac{1}{L_2 j\omega} V_2 - \frac{1}{L_2 j\omega} \times 0$$

$$j_3 = -(-j) + C_1 j\omega \times V_3 - C_1 j\omega \times 0$$

$$j_4 = 0 + \frac{1}{L_1 j\omega} \times V_4 - \frac{1}{L_1 j\omega} \times 0$$

$$j_5 = g_m V + \frac{1}{R_2} V_5 - \frac{1}{R_2} \times 0$$

$$j_5 = g_m \times L_1 j\omega \left(\frac{1}{L_1 j\omega}\right) V_4 + \frac{1}{R_2} V_5 \Rightarrow j_5 = 0 + g_m V_4 + \frac{1}{R_2} V_5$$

$$-(-j)$$

$$j_6 = 0 + \frac{1}{R_1} V_6 - \frac{1}{R_1} \times 0$$

ادامه به عهده خودتان.

$$j_s = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ j \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} , \quad V_s = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$
Y_q = \begin{bmatrix}
C_2 j\omega & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{L_2 j\omega} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & C_1 j\omega & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{L_1 j\omega} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & g_m & \frac{1}{R_2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R_1}
\end{bmatrix}
$$

$$\begin{cases} Y_Q = Q Y_q Q^t \\ i_s = Q Y_q V_s - Q j_s \end{cases}$$

ادامه به عهده خودتان

۲ـ روش نودی: اگر شرایط زیر در مدار برقرار باشد می‌توان Y_Q و I_s را مستقیماً تشکیل داد:

۱) منابع ولتاژ موجود نباشند (اگر هستند، به منبع جریان تبدیل شوند).

۲) سلف تزویج شده و منبع وابسته نداشته باشیم.

$Y_{ij} = \begin{cases} i=j & \text{مجموع ادمیتانس‌های متصل به کات‌ست } i \text{ ام} \\ i\neq j & \text{مجموع ادمیتانس‌های مشترک کات‌ست‌های } i \text{ و } j \end{cases}$

(اگر جهت دو کات‌ست در شاخه مشترک یکسان بود با علامت مثبت و در غیر این صورت با علامت منفی جمع می‌زنیم)

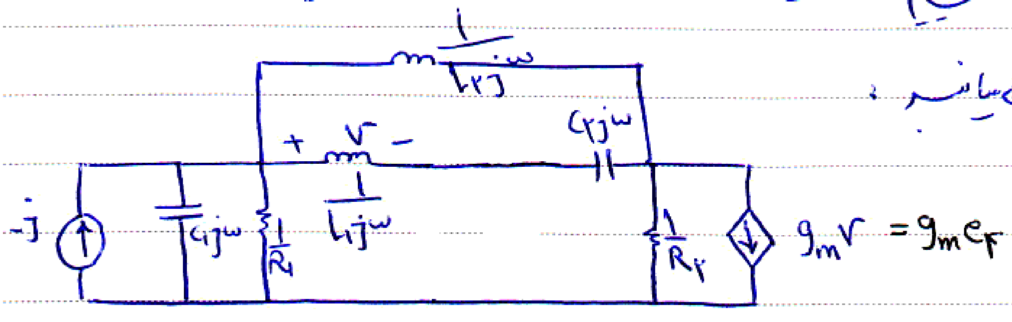
$i_{s_i} =$ مجموع جبری منابع جریان موجود در کات‌ست i ام (اگر جهت منبع مخالف جهت کات‌ست بود با علامت مثبت و در غیر این صورت با علامت منفی جمع می‌زنیم)

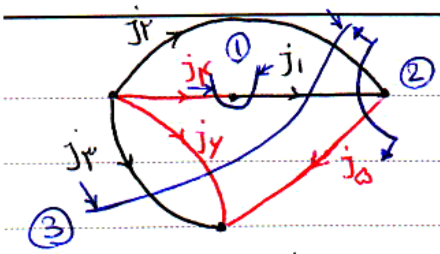
۳ـ روش عیانسر: همان روش نودی است با این تفاوت که منابع وابسته نیز می‌توانند وجود داشته باشند.

تمامی وابستگی‌ها را برحسب ولتاژ شاخه‌های درخت می‌نویسیم و منابع وابسته را مانند منابع مستقل فرض می‌کنیم.

معادلات را به روش نودی می‌نویسیم و در نهایت اثر وابستگی را به ماتریس Y_Q می‌بریم.

مثال) مثال قبل به روش عیانسر:





$$\begin{bmatrix} \frac{1}{L_1 j\omega}+C_4 j\omega & C_2 j\omega & -C_2 j\omega \\ C_2 j\omega + g_m & \frac{1}{L_2 j\omega}+C_4 j\omega+\frac{1}{R_2} & \frac{-1}{L_4 j\omega}-C_2 j\omega \\ -C_2 j\omega & \frac{-1}{L_2 j\omega}-C_2 j\omega & C_1 j\omega+\frac{1}{R_1}+C_2 j\omega+\frac{1}{L_2 j\omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_4 \\ e_5 \\ e_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overset{0}{\cancel{-j}} \\ \cancel{-g_m e_4} \\ \underset{-j}{\cancel{0}} \end{bmatrix}$$

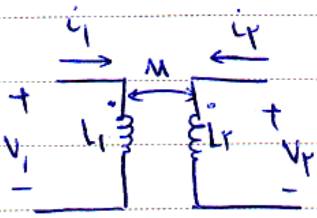
نکات مهم برای حل مسائل:

۱ـ در روش گره و کات ست اساسی منابع جریان را می‌توان به تنهایی یک شاخه در نظر گرفت.

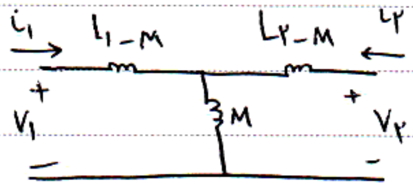
۲ـ در تحلیل مش و حلقه اساسی منابع ولتاژ را می‌توان به تنهایی یک شاخه در نظر گرفت.

۳ـ در تحلیل گره و کات ست و حلقه اساسی، گراف‌ها می‌توانند غیر مسطح باشند اما در روش مش خیر.

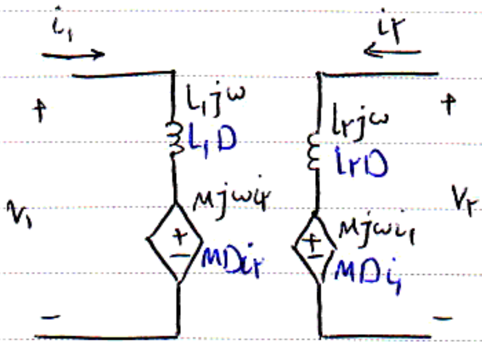
۴ـ در روش حالت ماتریسی گفته بودیم سلف تزویج شده نباید وجود داشته باشد، ولی می‌توان به جای سلف‌های تزویج شده مدار معادل قرار داد و از روش ماتریس استفاده کرد.



معادل اول: مدار معادل T

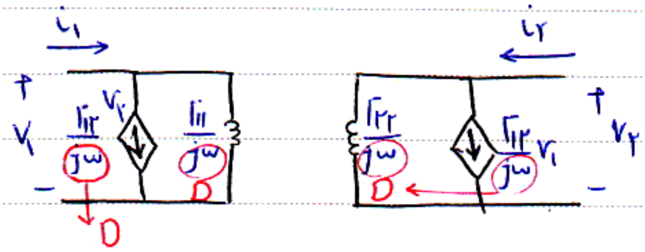


شرط استفاده از این معادل این است که سلف‌ها در مجاورت هم باشند و یا سر مشترک داشته باشند.



معادل دوم:

کاربرد در روش مش و حلقه اساسی.



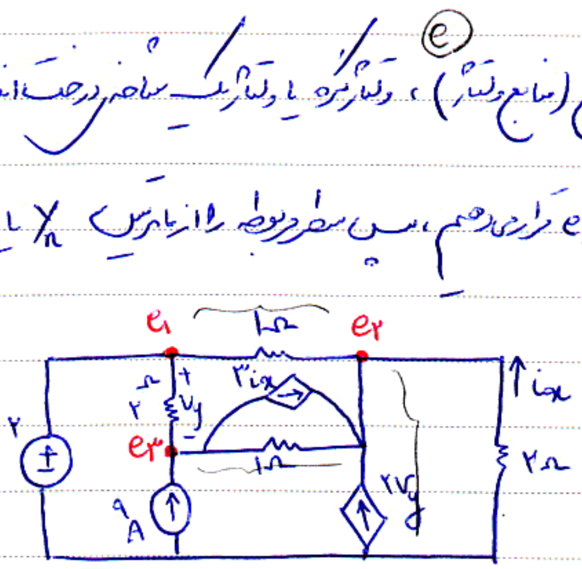
معادل سوم:

کاربرد در روش گره و کات‌ست اساسی.

۵ـ در بعضی مدارات در هنگام استفاده از روش‌های تحلیل منابع مستقلی وجود دارد که قابل تبدیل نیستند یا تبدیل آن‌ها به سختی انجام می‌شود. مثلاً منابع جریان در تبدیل‌های مش و حلقه اساسی و منابع ولتاژ در تبدیل‌های گره و کات‌ست اساسی. در این موارد به صورت زیر عمل می‌کنیم.

الف) در تحلیل‌های گره و کات‌ست اساسی، این منابع (منابع ولتاژ)، ولتاژ گره یا ولتاژ یک شاخه درخت‌اند. در این حالت در روش‌های تحلیل، ولتاژ مشخص شده را در بردار e قرار می‌دهیم، سپس سطر مربوط را از ماتریس Y_n یا Y_Q حذف می‌کنیم.

مثال) حل از روش تحلیل گره



با مداد مربوطه e_2

$Y_n \cdot e = I_s$ $\qquad i_x = \frac{-e_2}{2} \longrightarrow 3 i_x = -\frac{3}{2} e_2$ $\qquad V_y = e_1 - e_3$

$\Rightarrow 2V_y = 2e_1 - 2e_3$

$$\begin{bmatrix} 1+\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ -1-2 & 1+\frac{1}{2}+1+\frac{3}{2} & -1+2 \\ -\frac{1}{2} & -1-\frac{3}{2} & 1+\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{3}{2}e_2 + 2e_1 - 2e_3 \\ -9 + \frac{3}{2} e_2 \end{bmatrix} \qquad 9 + \frac{3}{2} e_2$$

$$\begin{bmatrix} \cancel{\frac{3}{2}} & \cancel{-1} & \cancel{-\frac{1}{2}} \\ -3 & 4 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cancel{0} \\ 0 \\ -9 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -3 & 4 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -9 \end{bmatrix}$$

$-6 + 4e_2 + e_3 = 0 \longrightarrow 4e_2 + e_3 = 6 \longrightarrow \boxed{e_3 = 6 - 4e_2}$

$-1 - \frac{5}{2} e_2 + \frac{3}{2} e_3 = -9 \longrightarrow -2 - 5e_2 + 3e_3 = -18 \longrightarrow \boxed{3e_3 - 5e_2 = -16}$

$18 - 12e_2 - 5e_2 = -16 \longrightarrow -17e_2 = -34 \longrightarrow \boxed{e_2 = 2} \qquad e_3 = 6 - 4\times 2 = -2 \rightarrow \boxed{e_3 = -2}$

$i_x = -\frac{e_2}{2} = -1$

ب) در تحلیل های مش و حلقه اساسی، این منابع (منابع جریان)، جریان یک مش یا جریان یک حلقه اساسی اند.

در این حالت در روش های تحلیلی، جریان مشخص شده را در بردار i قرار می‌دهیم، سپس سطر مربوطه را از ماتریس Z_B یا Z_m حذف می‌کنیم.

فصل ۱۲: معادلات حالت

متغیرهای حالت: کوچکترین دسته از متغیرهای شبکه است به طوریکه بتوان با دانستن آن ها در $t=t_0$ و دانستن منابع در $t>t_0$ بتوان رفتار شبکه را در هر لحظه $t\ge t_0$ تعیین کرد. اگر دست کم n متغیر حالت $x_1(t)$، $x_2(t)$، ... ، $x_n(t)$ وجود داشته باشند، بردار حالت به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$x(t)=\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

معادلات حالت: اگر معادلات دیفرانسیل یک شبکه را به صورت زیر بنویسیم می‌گوییم معادلات حالت تشکیل شده.

$$\frac{dx(t)}{dt}=f\left(x(t),u(t)\right) \qquad \frac{dx(t)}{dt}=x^{\cdot}(t)$$

بردار حالت

بردار ورودی های سیستم

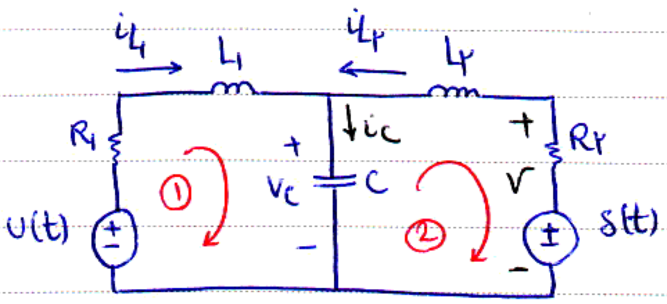
در شبکه های خطی و تغییر ناپذیر با زمان:

$$x^{\cdot}(t)=Ax(t)+Bu(t)$$

خروجی های سیستم

$$y(t)=Cx(t)+Du(t)$$

مثال) مدار زیر را در نظر بگیرید:



$$KVL\ (1): \quad -u(t)+R_1 i_{L_1}+L_1\frac{di_{L_1}}{dt}+V_C=0$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{di_{L_1}}{dt}=\frac{-R_1}{L_1}i_{L_1}-\frac{1}{L_1}V_C+\frac{1}{L_1}u(t)}$$

$KVL(2): \quad -V_C - L_2 \frac{di_{L_2}}{dt} - R_2 i_{L_2} + \delta(t) = 0$

$$\boxed{\frac{di_{L_2}}{dt} = \frac{-R_2}{L_2} i_{L_2} - \frac{1}{L_2} V_C + \frac{1}{L_2} \delta(t)}$$

$KCL: \quad i_{L_1} + i_{L_2} = C \frac{dV_C}{dt} \longrightarrow \boxed{\frac{dV_C}{dt} = \frac{1}{C} i_{L_1} + \frac{1}{C} i_{L_2}}$

براساس این معادلات می‌توان بردار حالت را به صورت زیر نقش کرد:

خروجی سیستم به صورت روبرو است:

$$V = -R_2 i_{L_2} + \delta(t)$$

حال:

$\dot{x} = Ax + BU$ ← بردار ورودی‌ها

$y = Cx + DU$ ← بردار خروجی‌ها

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{i}_{L_1} \\ \dot{i}_{L_2} \\ \dot{V}_C \end{bmatrix}}_{\dot{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{-R_1}{L_1} & 0 & \frac{-1}{L_1} \\ 0 & \frac{-R_2}{L_2} & -\frac{1}{L_2} \\ \frac{1}{C} & \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} i_{L_1} \\ i_{L_2} \\ V_C \end{bmatrix}}_{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{bmatrix} U(t) \\ \delta(t) \end{bmatrix}}_{U}$$

$$V = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -R_2 & 0 \end{bmatrix}}_{C} \underbrace{\begin{bmatrix} i_{L_1} \\ i_{L_2} \\ V_C \end{bmatrix}}_{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{bmatrix} U(t) \\ \delta(t) \end{bmatrix}}_{U}$$

به طور کلی اگر در یک سیستم، n متغیر حالت، m ورودی و k خروجی داشته باشیم، ابعاد ماتریس‌ها در فضای حالت به صورت زیر خواهد بود:

$$[\dot{x}]_{n\times1} = [A]_{n\times n}[x]_{n\times1} + [B]_{n\times m}[U]_{m\times1}$$

$$[y]_{k\times1} = [C]_{k\times n}[x]_{n\times1} + [D]_{k\times m}[U]_{m\times1}$$

سلف باید لینک باشد. باید خازن درخت باشد

کات ست یک درخت تقریباً لینک
حلقه یک لینک با تقریباً درخت

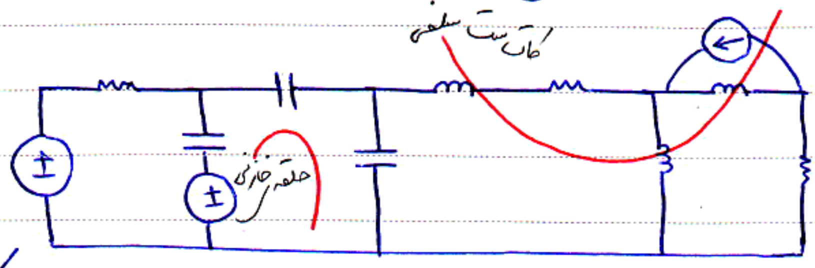
Subject:
Year. Month. Date. ( )

الگوریتم معادلات حالت:

۱ـ انتخاب متغیرهای حالت: بر اساس عناصر ذخیره کننده انرژی انجام می‌شود. در مدارهای الکتریکی، معمولاً جریان سلف‌ها و ولتاژ خازن‌ها به عنوان متغیرهای حالت انتخاب می‌شوند. به طور مشابه می‌توان شار سلف‌ها و بار خازن‌ها را به عنوان متغیرهای حالت انتخاب نمود.

۲ـ انتخاب درخت مناسب: درختی انتخاب می‌کنیم که شامل خازن‌ها بوده و شامل سلف‌ها نباشد.

سوال: آیا همیشه امکان پذیر است؟ خیر، در شرایطی که حلقه خازنی داریم، یکی از خازن‌ها را در درخت انتخاب نمی‌کنیم، همچنین در شرایطی که کات ست سلفی داریم یکی از سلف‌ها را انتخاب نمی‌کنیم. در نتیجه به تعداد حلقه‌های خازنی و کات ست‌های سلفی از معادلات حالت کم می‌شود. حلقه خازنی و کات ست سلفی را با کشتن منابع مستقل می‌توان تشخیص داد.



تعداد عناصر ذخیره کننده ۶ ؛ تعداد کات ست سلفی ۱ : تعداد حلقه خازنی ۱ : تعداد متغیرهای حالت ۶-۱-۱=۴

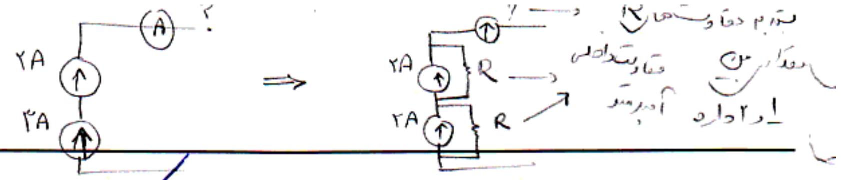
۳ـ KCL را در کات ست‌های خازنی می‌نویسیم و سعی می‌کنیم که بر حسب متغیرهای حالت نوشته شود.

۴ـ KVL را در حلقه‌های اساسی شامل سلف‌ها می‌نویسیم و سعی می‌کنیم که بر حسب متغیرهای حالت نوشته شود.

۳۰

Subject:

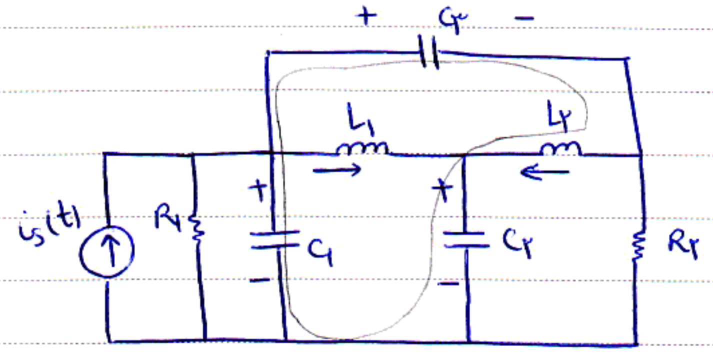
Year. Month. Date. ( )



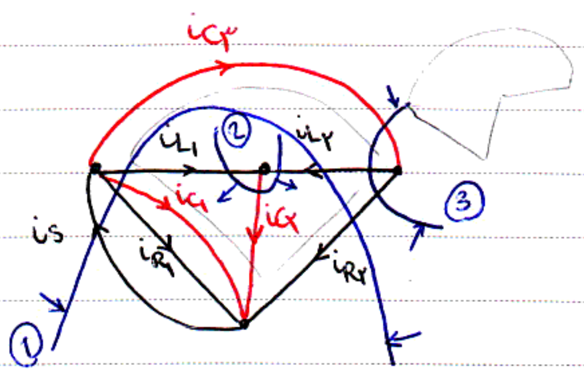
۵- درصورت وجود متغیر غیرحالت در مراحل ۳ و ۴ زیرا این متغیر غیرحالت، متغیر یک لینک بوده حلقه اساسی را در آن لینک می‌نویسیم تا متغیر به حالت تبدیل شود.

۶- درصورت وجود متغیر غیرحالت در مراحل ۳ و ۴، درصورتیکه این متغیر مربوط به یک شاخه درخت بود، کات ست اساسی را در آن شاخه درخت می‌نویسیم تا متغیر به حالت تبدیل شود.

مثال) معادلات حالت مدار زیر؟



منبع جریان را به عنوان یک شاخه مستقل درنظر بگیریم



$$x(t) = \begin{bmatrix} i_{L_1} \\ i_{L_2} \\ v_{C_1} \\ v_{C_2} \\ v_{C_3} \end{bmatrix}$$

KCL (1): $i_{L_1} + i_{L_2} + C_1 \frac{dv_{C_1}}{dt} + i_{R_1} - i_s + i_{R_2} = 0$

$$\frac{dv_{C_1}}{dt} = \frac{-1}{C_1} i_{L_1} - \frac{1}{C_1} i_{L_2} - \frac{1}{C_1} \underbrace{i_{R_1}}_{\text{غیرحالت}} - \frac{1}{C_1} \underbrace{i_{R_2}}_{\text{غیرحالت}} + \frac{1}{C_1} i_s \quad (1)$$

KCL (2): $C_2 \frac{dv_{C_2}}{dt} - i_{L_1} - i_{L_2} = 0 \longrightarrow \frac{dv_{C_2}}{dt} = \frac{1}{C_2} i_{L_1} + \frac{1}{C_2} i_{L_2}$

غیرحالت

$$KCL(3):\ C_3 \frac{dv_{C_3}}{dt} - i_{L_2} - i_{R_2} = 0 \longrightarrow \frac{dv_{C_3}}{dt} = \frac{1}{C_3} i_{L_2} + \frac{1}{C_3} i_{R_2} \quad ②$$

$$KVL(1):\ L_1 \frac{di_{L_1}}{dt} + v_{C_2} - v_{C_1} = 0 \longrightarrow \frac{di_{L_1}}{dt} = \frac{1}{L_1} v_{C_1} - \frac{1}{L_1} v_{C_2}$$

$$KVL(2):\ L_2 \frac{di_{L_2}}{dt} + v_{C_2} - v_{C_1} + v_{C_3} = 0 \longrightarrow \frac{di_{L_2}}{dt} = \frac{1}{L_2} v_{C_1} - \frac{1}{L_2} v_{C_2} - \frac{1}{L_2} v_{C_3}$$

حذف غیرحالت i_{R_1} :

$$KVL:\ R_1 i_{R_1} - v_{C_1} = 0 \longrightarrow i_{R_1} = \frac{v_{C_1}}{R_1}$$

حذف غیرحالت i_{R_2} :

$$KVL:\ R_2 i_{R_2} - v_{C_1} + v_{C_3} = 0 \longrightarrow$$

$$i_{R_2} = \frac{1}{R_2} v_{C_1} - \frac{1}{R_2} v_{C_3}$$

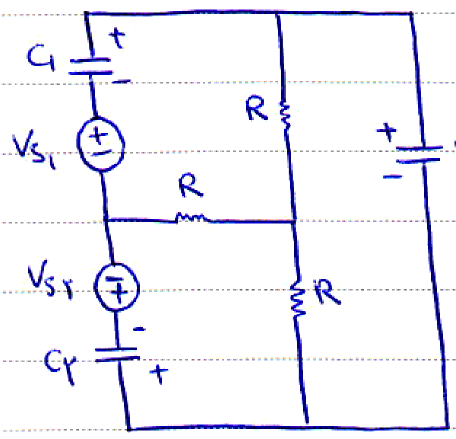
بازنویسی ① و ②

$$\frac{dv_{C_1}}{dt} = -\frac{1}{C_1} i_{L_1} - \frac{1}{C_1} i_{L_2} - \frac{1}{C_1}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) v_{C_1} - \frac{1}{R_2} v_{C_3} + \frac{1}{C_1} i_s$$

$$\frac{dv_{C_3}}{dt} = \frac{1}{C_3} i_{L_2} + \frac{1}{C_3} \frac{v_{C_1}}{R_2} - \frac{1}{C_3 R_2} v_{C_3}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_{L_1} \\ \dot{i}_{L_2} \\ \dot{v}_{C_1} \\ \dot{v}_{C_2} \\ \dot{v}_{C_3} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{L_1} & \frac{-1}{L_1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_2} & \frac{-1}{L_2} & \frac{-1}{L_2} \\ \frac{-1}{C_1} & \frac{-1}{C_1} & \frac{-1}{C_1}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) & 0 & \frac{-1}{R_2} \\ \frac{1}{C_2} & \frac{1}{C_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_3} & \frac{1}{C_3 R_2} & 0 & \frac{-1}{C_3 R_2} \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} i_{L_1} \\ i_{L_2} \\ v_{C_1} \\ v_{C_2} \\ v_{C_3} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{C_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B} i_s(t)$$

مثال) قبلاً گفتیم اگر متغیرهای حالت جبری هم نوشته شوند از تعداد متغیرهای حالت کم می‌شود مانند حلقه خازنی که گفته است



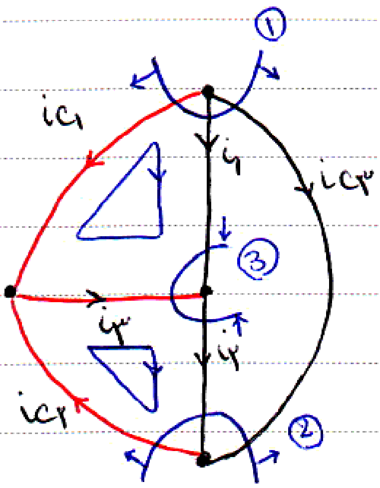
حلقه:

$$V_{C2}+V_{S2}-V_{S1}-V_{C1}+V_{C3}=0$$

$$V_{C3}=V_{C1}-V_{C2}+V_{S1}-V_{S2}$$

یعنی از متغیرهای حالت یکی کم می‌شود. از بین سه متغیر موجود،

۲ تا را به دلخواه انتخاب می‌کنیم.



$$x=\begin{bmatrix} v_{C1} \\ v_{C2} \end{bmatrix}$$

غیرحالت   غیرحالت

$$KCL(1):\quad C_1\frac{dv_{C1}}{dt}+i_1+i_{C3}=0 \longrightarrow \dot{V}_{C1}=\frac{-1}{C_1}i_1-\frac{1}{C_1}i_{C3} \qquad ①$$

غیرحالت   غیرحالت

$$KCL(2):\quad C_2\frac{dv_{C2}}{dt}-i_2-i_{C3}=0 \longrightarrow \dot{V}_{C2}=\frac{1}{C_2}i_2+\frac{1}{C_2}i_{C3} \qquad ②$$

حذف غیرحالت‌ها : i_1 متغیر لینک است حلقه اساسی این لینک را می‌نویسیم.

$$KVL:\quad Ri_1-Ri_3-V_{S1}-V_{C1}=0 \longrightarrow i_1=i_3+\frac{1}{R}V_{C1}+\frac{1}{R}V_{S1} \qquad (A)$$

غیرحالت

i_3 مربوط به یک شاخه درخت است. کات ست اساسی این شاخه را می‌نویسیم.

$$KCL(3):\quad i_3+i_1-i_2=0 \longrightarrow i_3=i_2-i_1$$

جایگذاری در (A)

$$2i_1 = i_2 + \frac{1}{R}V_{C_1} + \frac{1}{R}V_{S_1}$$

غیرحالت

$$\rightarrow \boxed{i_1 = \frac{1}{2}i_2 + \frac{1}{2R}V_{C_1} + \frac{1}{2R}V_{S_1}} \quad (B)$$

i_2 متغیر لینک است. حلقه‌ی اساسی این لینک را می‌نویسیم.

$$KVL(2): Ri_2 + V_{C_2} + V_{S_2} + Ri_3 = 0 \rightarrow i_2 = -\underbrace{i_3}_{i_1 - i_2} - \frac{1}{R}V_{C_2} - \frac{1}{R}V_{S_2}$$

$$2i_2 = i_1 - \frac{1}{R}V_{C_2} - \frac{1}{R}V_{S_2} \rightarrow \boxed{i_2 = \frac{1}{2}i_1 - \frac{1}{2R}V_{C_2} - \frac{1}{2R}V_{S_2}} \quad (C)$$

جایگذاری (C) در (B):

$$i_1 = \frac{1}{4}i_1 - \frac{1}{4R}V_{C_2} - \frac{1}{4R}V_{S_2} + \frac{1}{2R}V_{C_1} + \frac{1}{2R}V_{S_1}$$

$$\frac{3}{4}i_1 = \frac{-1}{4R}V_{C_2} - \frac{1}{4R}V_{S_2} + \frac{1}{2R}V_{C_1} + \frac{1}{2R}V_{S_1}$$

$$\boxed{i_1 = \frac{-1}{3R}V_{C_2} - \frac{1}{3R}V_{S_2} + \frac{2}{3R}V_{C_1} + \frac{2}{3R}V_{S_1}} \quad (E)$$

با جایگذاری (E) در (C)، i_2 نیز برحسب متغیرهای حالت بیان می‌شود.

$$i_2 = \frac{-1}{6R}V_{C_2} - \frac{1}{6R}V_{S_2} + \frac{1}{3R}V_{C_1} + \frac{1}{3R}V_{S_1} - \frac{1}{2R}V_{C_2} - \frac{1}{2R}V_{S_2}$$

$$\boxed{i_2 = \frac{1}{3R}V_{C_1} - \frac{2}{3R}V_{C_2} - \frac{2}{3R}V_{S_2} + \frac{1}{3R}V_{S_1}} \quad (F)$$

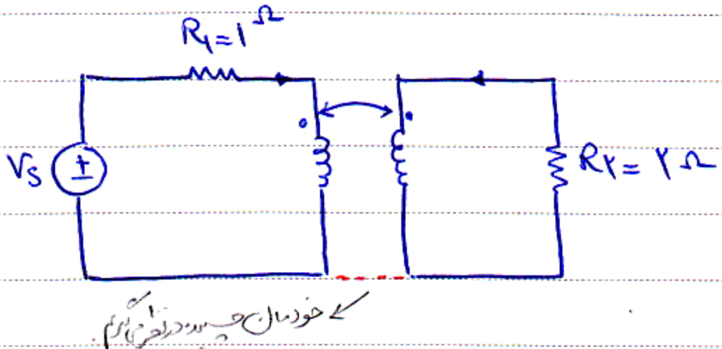
i_1 و i_2 طبق روابط E و F، هر دو به حالت تبدیل شدند.

حذف غیرحالت i_{C_3}: $V_{C_3} = V_{C_1} - V_{C_2} + V_{S_1} - V_{S_2}$: داشتیم

$$i_{C_3} = C_3 \dot{v}_{C_3} \longrightarrow i_{C_3} = C_3 \dot{v}_{C_1} - C_3 \dot{v}_{C_2} + C_3 \dot{v}_{S_1} - C_3 \dot{v}_{S_2} \quad (9)$$

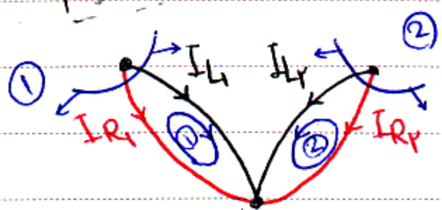
با جایگذاری g در ① و ② و استفاده از سایر روابط نامتغیر شده، معادلات حالت بدست می‌آید. ادامه بر عهده دانشجو.

مثال)



$$L = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

گراف:



برای هر یک از سلف‌ها حلقه اساسی را می‌نویسیم.

$$\lambda_1 = L_1 i_1 \pm M i_2 \xrightarrow{d/dt} v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt}$$

$$KVL(1): \quad 1 \times \frac{dI_{L_1}}{dt} + 1 \frac{dI_{L_2}}{dt} - V_s - 1 \times I_{R_1} = 0$$

غیر حالت

$$\dot{I}_{L_1} + \dot{I}_{L_2} = I_{R_1} + V_s \quad (1)$$

غیر حالت

$$KVL(2): \quad 2 \frac{dI_{L_2}}{dt} + 1 \times \frac{dI_{L_1}}{dt} - 2 I_{R_2} = 0 \longrightarrow 2\dot{I}_{L_2} + \dot{I}_{L_1} = 2 I_{R_2} \quad (2)$$

حذف غیر حالت i_{R_1}: i_{R_1} متغیر شاخه درخت است، کات ست اساسی متناظر با آن شاخه را می‌نویسیم.

$$KCL(1): \quad I_{L_1} + I_{R_1} = 0 \longrightarrow I_{R_1} = -I_{L_1} \quad (A)$$

حذف غیرحالت I_{R_2}: متغیر یک شاخه درخت است، کات ست اساسی آن را می‌نویسیم.

$$\text{kcl (2)}: \quad I_{L_2}+I_{R_2}=0 \longrightarrow \boxed{I_{R_2}=-I_{L_2}} \quad (B)$$

جایگذاری (A) در (1) و (B) در (2)،

$$\begin{cases} \dot{I}_{L_1}+\dot{I}_{L_2}=-I_{L_1}+V_s \longrightarrow \dot{I}_{L_1}=-I_{L_1}-\dot{I}_{L_2}+V_s & (3) \\ 2\dot{I}_{L_2}+\dot{I}_{L_1}=-2I_{L_2} & (4) \end{cases}$$

جایگذاری (3) در (4)،

$$2\dot{I}_{L_2}-I_{L_1}-\dot{I}_{L_2}+V_s=-2I_{L_2} \longrightarrow \boxed{\dot{I}_{L_2}=I_{L_1}-2I_{L_2}-V_s} \quad (5)$$

جایگذاری (5) در (3):

$$\dot{I}_{L_1}=-I_{L_1}-I_{L_1}+2I_{L_2}+V_s+V_s$$

$$\boxed{\dot{I}_{L_1}=-2I_{L_1}+2I_{L_2}+2V_s} \quad (6)$$

از (5) و (6)،

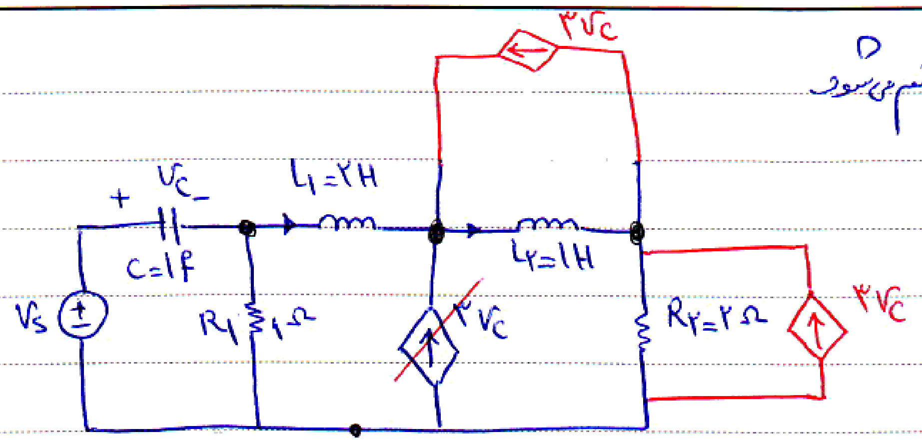
$$\begin{bmatrix} \dot{I}_{L_1} \\ \dot{I}_{L_2} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} I_{L_1} \\ I_{L_2} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}}_{B} V_s$$

نکته) در شرایطی که حلقه خازنی و کات ست سلفی داشته باشیم به دلیل اینکه متغیرهای حالت وابسته هم نوشته می‌شوند، از تعداد متغیرهای حالت کم می‌شود.

حتی منابع وابسته نیز علاوه بر شرایط فوق، ممکن است متغیرهای حالت را وابسته هم سازند، در این صورت

بازهم از تعداد متغیرهای حالت کم می‌شود

مثال)



تعداد عناصر ذخیره‌کننده انرژی ۳ است. به نظر می‌رسد ۳ متغیر حالت داشته باشیم ولی اگر دقت کنیم مشاهده می‌کنیم که

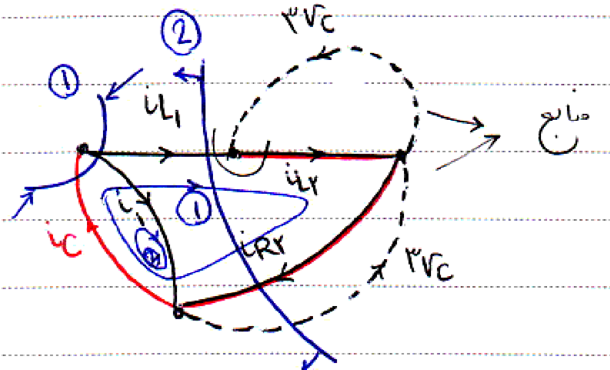
KCL : $3v_C = i_{L_2} - i_{L_1}$

یعنی یکی از متغیرهای حالت برحسب بقیه بیان می‌شود، در نتیجه ۲ متغیر حالت داریم. از ۳ متغیر موجود، ۲ تا را به دلخواه انتخاب می‌کنیم

$$x = \begin{bmatrix} i_{L_1} \\ v_C \end{bmatrix}$$

حال متغیرهای حالت را بدست می‌آوریم :

درخت :



غیرحالت

KCL (1) : $C\dfrac{dv_C}{dt} - i_1 - i_{L_1} = 0 \longrightarrow \boxed{v_C' = \dfrac{1}{C} i_{L_1} + \dfrac{1}{C} i_1}$ ①

KVL (1) : $L_1 \dfrac{di_{L_1}}{dt} + L_2 \dfrac{di_{L_2}}{dt} + R_2 i_{R_2} - V_s + v_C = 0$

غیرحالت

$L_1 i_{L_1}' + L_2 i_{L_2}' + R_2 i_{R_2} - V_s + v_C = 0$ ②

غیرحالت

حذف غیرحالت i_1 : i_1 متغیر لینک است، حلقه اساسی آن را می‌نویسیم.

$$KVL(2): R_1 i_1 - V_s + V_c = 0 \longrightarrow \boxed{i_1 = \frac{-1}{R_1}V_c + \frac{1}{R_1}V_s} \quad (A)$$

حذف غیرحالت i_{R_2} : i_{R_2} متغیر شاخه درخت است. کات ست اساسی این شاخه را می‌نویسیم.

$$KCL(2): i_{R_2} - i_{L_1} - 3V_c = 0 \longrightarrow i_{R_2} = i_{L_1} + 3V_c \quad (B)$$

حذف غیرحالت $\dot{i}_{L_2}$:

داشتیم: $i_{L_2} = i_{L_1} + 3V_c \longrightarrow \boxed{\dot{i}_{L_2} = \dot{i}_{L_1} + 3\dot{V}_c} \quad (C)$

جایگذاری (A)، (B)، (C) در (1) و (2)

$$\boxed{\dot{V}_c = \frac{1}{C} i_{L_1} - \frac{1}{R_1 C} V_c + \frac{1}{C R_1} V_s} \quad (3)$$

$$L_1 \dot{i}_{L_1} + L_2 \dot{i}_{L_1} + 3L_2 \dot{V}_c + R_2 i_{L_1} + 3R_2 V_c - V_s + V_c = 0$$

$$(L_1 + L_2)\dot{i}_{L_1} + \underbrace{\frac{3L_2}{C} i_{L_1} - \frac{3L_2}{R_1 C} V_c + \frac{3L_2}{R_1 C} V_s}_{3L_2 \dot{V}_c} + R_2 i_{L_1} + 3R_2 V_c - V_s + V_c = 0$$

$$\boxed{(L_1 + L_2)\dot{i}_{L_1} + \left(\frac{3L_2}{C} + R_2\right) i_{L_1} + \left(1 + 3R_2 - \frac{3L_2}{R_1 C}\right)V_c + V_s\left(\frac{3L_2}{R_1 C} - 1\right)V_s = 0}$$

عددگذاری :

$$\boxed{\dot{V}_c = i_{L_1} - V_c + V_s}$$

$$3\dot{i}_{L_1} + 5 i_{L_1} + 4V_c + 2V_s = 0 \longrightarrow \boxed{\dot{i}_{L_1} = -\frac{5}{3} i_{L_1} - \frac{4}{3} V_c - \frac{2}{3} V_s}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_c \\ \dot{i}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -\frac{4}{3} & -\frac{5}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_c \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix} v_s$$

نکته) در صورت لزوم می‌توان منابع را به عنوان یک شاخه مستقل در نظر گرفت، در این صورت سعی می‌شود منابع ولتاژ جزء شاخه‌های درخت و منابع جریان جزء لینک‌ها باشند.

فصل ۱۳ : تبدیلات لاپلاس

از این روش برای آنالیز مدارات خطی و تغییرناپذیر با زمان استفاده می‌شود.

ابتدا مروری بر روابط لاپلاس :

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt$$

$$\mathcal{L}\left[\int f(t)\,dt\right] = \frac{F(s)}{s} \qquad \mathcal{L}[\delta(t)] = 1$$

$$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s} \qquad \mathcal{L}[e^{\alpha t}] = \frac{1}{s-\alpha} \qquad \mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L}[\cos \beta t] = \frac{s}{s^2+\beta^2} \qquad \mathcal{L}[\sin \beta t] = \frac{\beta}{s^2+\beta^2}$$

$$\mathcal{L}[\delta^{(n)}(t)] = s^n \qquad \mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

مثال) $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^4}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{3!}\cdot\frac{3!}{s^4}\right] = \frac{1}{3!}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3!}{s^4}\right] = \frac{1}{6}t^3$

* در بسیاری از مواقع، معکوس گیری از لاپلاس و یا لاپلاس گیری از توابع از خواص تبدیل لاپلاس استفاده می‌شود.

مروری بر خواص :

۱) $\mathcal{L}\left[e^{\alpha t} f(t)\right] = F(s-\alpha)$

مثال) $\mathcal{L}\left[e^{-2t}\cos(3t)\right] = ?$

$$\mathcal{L}\{\cos(3t)\} = \frac{s}{s^2+9}$$

$$\mathcal{L}\left[e^{-2t}\cos 3t\right] = \frac{s+2}{(s+2)^2+9}$$

$$L\left[t^n f(t)\right] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(S) \qquad (٢$$

مثال)

$$L\left[t^2 e^{3t}\right] = ? \quad (-1)^2 \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{s-3}\right) = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{(s-3)^2}\right) = \frac{2}{(s-3)^3}$$

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = SF(S) - f(0^-) \qquad (٣$$

$2 = 2 \times (1) \longrightarrow L\{\delta(t)\}$

علم ضربه دارد.

$$L\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = S^n F(S) - S^{n-1} f(0^-) - S^{n-2} f(0^-) - \dots - S f(0^-) - f(0^-) \qquad (٤$$

مشتقات ضربه

$$L\left[\delta^{(n)}(t)\right] = S^n$$

نکته: باید هنگام استفاده از قاعده مشتق گیری، ضربه‌های ناشی از $f(0^-)$ ظاهر می‌شود را فراموش نکرد.

قضایای مقدار اولیه و مقدار نهایی:

قضیه مقدار نهایی:

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{S \to 0} SF(S)$$

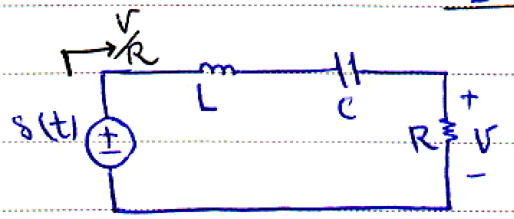
قضیه مقدار اولیه:

$$\lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{S \to \infty} SF(S)$$

شرایط اولیه صفر

یادآوری: پاسخ پله و پاسخ ضربه یک مدار همان پاسخ حالت صفر است.

مثال) در مدار زیر با استفاده از تبدیل لاپلاس، پاسخ ضربه سیستم را بدست آورید. (تابع تبدیل سیستم؟)



پاسخ ضربه ⇐

شرایط اولیه صفر

$$\delta(t) = L\frac{d}{dt}\left[\frac{v}{R}\right] + \frac{1}{C}\int \frac{v}{R}\,dt + \cancel{v_c(0)} + v$$ هدف بدست آوردن V است.

$$\delta(t) = \frac{L}{R}\frac{dv}{dt} + \frac{1}{RC}\int v\,dt + v \xrightarrow{\mathcal{L}} 1 = \frac{L}{R}\left[sV(s) - \cancel{v(0^-)}\right] + \frac{1}{RCs}V(s) + V(s)$$

$$1 = V(s)\left[\frac{Ls}{R} + \frac{1}{RCs} + 1\right]$$

$$1 = V(s)\left[\frac{LCs^2 + 1 + RCs}{Rsc}\right] \longrightarrow V(s) = \frac{RCs}{LCs^2 + 1 + RCs} \Rightarrow V(s) = \frac{\frac{R}{L}s}{s^2 + \frac{R}{L}s + 1/LC}$$

* برای به دست آوردن پاسخ در حوزه زمان باید عکس تبدیل لاپلاس را انجام داد.

بسط به کسرهای جزئی:

$$F(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0} = \frac{P(s)}{Q(s)} \qquad m \leq n$$

ریشه‌های صورت $\quad P(s) = 0 \xrightarrow{\text{صفرها}} z_1, z_2, \dots, z_m$

ریشه‌های مخرج $\quad Q(s) = 0 \xrightarrow{\text{قطب‌ها}} p_1, p_2, \dots, p_n$

۱- قطب‌ها حقیقی و ساده

$$Q(s) = (s-p_1)(s-p_2)(s-p_3)\dots(s-p_n)$$

$$F(s) = \sum_{j=1}^{n}\frac{k_j}{(s-p_j)} \qquad k_j = (s-p_j)F(s)\Big|_{s=p_j}$$

مثال:

$$F(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)} = \frac{k_1}{s+1} + \frac{k_2}{s+2}$$

$$k_1 = (s+1)F(s)\Big|_{s=-1} = \frac{2}{s+2}\Big|_{s=-1} = 2$$

$$k_2 = (s+2)F(s)\Big|_{s=-2} = \frac{2}{s+1}\Big|_{s=-2} = -2$$

$$f(t) = \left[2e^{-t} - 2e^{-2t}\right]u(t)$$

۲- قطب‌ها حقیقی ولی تکراری:

$$Q(s) = (s-p_1)^{n_1}(s-p_2)^{n_2}(s-p_3)^{n_3}\cdots(s-p_r)^{n_r}$$

$$F(s) = \frac{k_{11}}{(s-p_1)} + \frac{k_{12}}{(s-p_1)^2} + \cdots + \frac{k_{1n_1}}{(s-p_1)^{n_1}} +$$

$$\frac{k_{21}}{(s-p_2)} + \frac{k_{22}}{(s-p_2)^2} + \cdots + \frac{k_{2n_2}}{(s-p_2)^{n_2}} +$$

$$\vdots$$

$$\frac{k_{r1}}{(s-p_r)} + \frac{k_{r2}}{(s-p_r)^2} + \cdots + \frac{k_{rn_r}}{(s-p_r)^{n_r}}$$

$$k_{in_i} = (s-p_i)^{n_i}F(s)\Big|_{s=p_i}$$

$$k_{in_{i-1}} = \frac{d}{ds}\left[(s-p_i)^{n_i}F(s)\right]\Big|_{s=p_i}$$

$$k_{in_{i-2}} = \frac{1}{2!}\frac{d^2}{ds^2}\left[(s-p_i)^{n_i}F(s)\right]\Big|_{s=p_i}$$

$$k_{in_{i-3}} = \frac{1}{3!}\frac{d^3}{ds^3}\left[(s-p_i)^{n_i}F(s)\right]\Big|_{s=p_i}$$

$$\vdots$$

مثال ۵)

$$F(s) = \frac{1}{(s+1)^3 s^2}$$

$$= \frac{K_{11}}{(s+1)} + \frac{K_{12}}{(s+1)^2} + \frac{K_{13}}{(s+1)^3} + \frac{K_{21}}{s} + \frac{K_{22}}{s^2}$$

$$K_{13} = (s+1)^3 F(s)\Big|_{s=-1} = \frac{1}{s^2}\Big|_{s=-1} = 1$$

$$K_{12} = \frac{d}{ds}\Big[(s+1)^3 F(s)\Big]\Big|_{s=-1} = \frac{d}{ds}\Big[\frac{1}{s^2}\Big]\Big|_{s=-1} = \frac{-2}{s^3}\Big|_{s=-1} = 2$$

$$K_{11} = \frac{1}{2!}\frac{d^2}{ds^2}\Big[(s+1)^3 F(s)\Big]\Big|_{s=-1} = \frac{d}{ds}\Big[-\frac{1}{s^3}\Big]\Big|_{s=-1} = \frac{3}{s^4}\Big|_{s=-1} = 3$$

$$K_{22} = \Big[s^2 F(s)\Big]\Big|_{s=0} = \frac{1}{(s+1)^3}\Big|_{s=0} = 1$$

$$K_{21} = \frac{d}{ds}\Big[s^2 F(s)\Big]\Big|_{s=0} = \frac{d}{ds}\Big[\frac{1}{(s+1)^3}\Big]\Big|_{s=0} = \frac{-3}{(s+1)^4}\Big|_{s=0} = -3$$

$$f(t) = \Big[3e^{-t} + 2te^{-t} + \frac{1}{2}t^2 e^{-t} + t - 3\Big]u(t)$$

۳ـ قطب‌ها زوج:

$$s_{1,2} = \alpha \pm j\beta$$

$$F(s) = \frac{K_1}{s-(\alpha+j\beta)} + \frac{K_2}{s-(\alpha-j\beta)}$$

$$K_1 = |K| \angle \theta_K$$

تمرین) نشان دهید K_1 و K_2 زوج مزدوج‌اند.

$$K_2 = |K| \angle -\theta_K \qquad F(s) = \frac{K}{s-(\alpha+j\beta)} + \frac{K^*}{(s-(\alpha-j\beta))}$$

$$f(t) = Ke^{(\alpha+j\beta)t} + K^* e^{(\alpha-j\beta)t}$$

$$f(t) = |K| e^{j\theta_K} \cdot e^{\alpha t} \cdot e^{j\beta t} + |K| e^{-j\theta_K} \cdot e^{\alpha t} \cdot e^{-j\beta t}$$

$$f(t)=|K|\,e^{\alpha t}\left[e^{j(\beta t+\theta_K)}+e^{-j(\beta t+\theta_K)}\right]$$

$$\boxed{f(t)=2|K|\,e^{\alpha t}\cos(\beta t+\theta_K)}$$

مثال)

$$F(s)=\frac{s^2+3s+7}{(s^2+4s+8)(s+1)} \qquad P:\ -2+2j\ ,\ -2-2j\ ,\ -1$$

$$F(s)=\frac{K}{(s-(-2+2j))}+\frac{K^*}{(s-(-2-2j))}+\frac{K_1}{s+1}$$

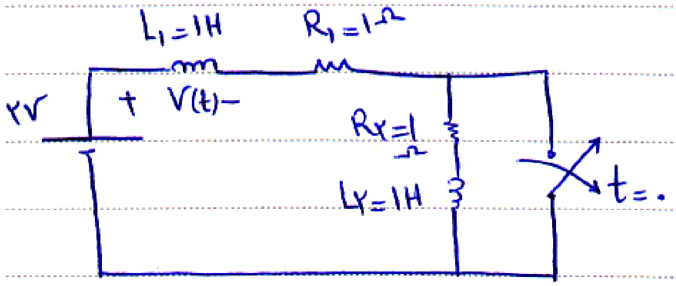
$$K=(s-(-2+2j))\,F(s)\Big|_{s=-2+2j}=\frac{(-2+2j)^2+3(-2+2j)+7}{(-2+2j+2+2j)(-2+2j+1)}=\frac{j}{4}=\frac{1}{4}\angle 90$$

$$\begin{cases}|K|=\frac{1}{4}\\ \theta_K=90\end{cases}$$

$$K_1=(s+1)\,F(s)\Big|_{s=-1}=\frac{s^2+3s+7}{s^2+4s+8}\Big|_{s=-1}=1$$

$$\longrightarrow f(t)=\left[\frac{1}{2}e^{-2t}\cos(2t+90)+e^{-t}\right]u(t)$$

مثال) در مدار زیر با استفاده از آنالیز در حوزه لاپلاس، $v(t)$ را بدست آورید.



توضیحی در مورد مدارهای کلیددار:

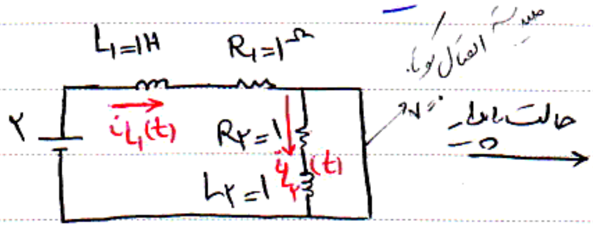
اگر در لحظه $t=t_0$، کلید تغییر وضعیت دهد آنالیز را در سه مرحله زیر انجام می‌دهیم:

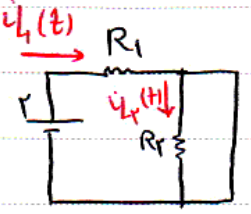
۱) $t \leq t_0$: فرض می‌شود که مدار در وضعیت پایدار خود قرار دارد، یعنی در رژیم DC، سلف‌ها اتصال کوتاه و خازن‌ها اتصال باز فرض می‌شوند و اگر در رژیم سینوسی باشیم از فازور استفاده می‌کنیم.

۲) $t = t_0$: در معادلات بخش قبل با قرار دادن $t=t_0$ شرایط اولیه را برای مرحله بعد به دست می‌آوریم.

۳) $t > t_0$: با استفاده از تبدیل لاپلاس، معادلات حاکم بر مدار را به دست می‌آوریم.

حل مثال) $t < t_0$



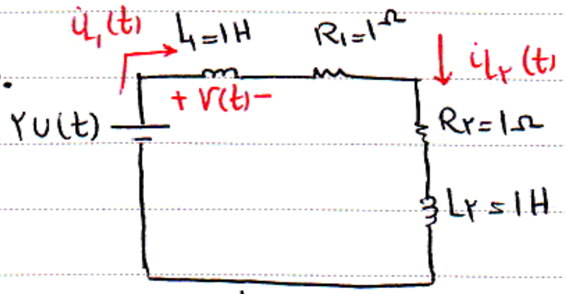


$$i_{L_1}(t) = \frac{2}{R_1} = \frac{2}{1} = 2A \quad , \quad i_{L_2}(t) = 0 \quad , \quad v(t) = 0$$

اتصال کوتاه

$$t=0 \longrightarrow \begin{cases} i_{L_1}(0) = 2 \\ i_{L_2}(0) = 0 \end{cases}$$

$t > t_0$



$$KVL: \quad 2u(t) = L_1 \frac{di_{L_1}(t)}{dt} + R_1 i_{L_1}(t) + R_2 i_{L_2}(t) + L_2 \frac{di_{L_2}}{dt}$$

$$2u(t) = \frac{di_{L_1}(t)}{dt} + i_{L_1}(t) + i_{L_2}(t) + \frac{di_{L_2}(t)}{dt}$$

نکته: اگرچه $i_{L_1}(t)=i_{L_2}(t)$ اما چون شرایط اولیه آن‌ها فرق می‌کند نمی‌توان آن‌ها را مساوی قرار داد، لذا از اشکال آن به حوزه لاپلاس رجوع می‌کنیم.

به حوزه لاپلاس می‌بریم:

$$\frac{2}{s} = sI_{L_1}(s) - \underbrace{i_{L_1}(0^-)}_{2} + I_{L_1}(s) + I_{L_2}(s) + sI_{L_2}(s) - \underbrace{i_{L_2}(0^-)}_{0}$$

$$I_{L_1}(s) = I_{L_2}(s) \triangleq I_L(s)$$

$$\frac{2}{s} = I_L(s)(2s+2) - 2 \longrightarrow \frac{2}{s} + 2 = 2I_L(s)(s+1)$$

$$\frac{2(s+1)}{s} = 2(s+1)I_L(s) \longrightarrow I_L(s) = \frac{1}{s}$$

نکته: تا رسیدن به جواب نهایی، استفاده از حوزه لاپلاس را ادامه می‌دهیم

$$\begin{cases} i_{L_1}(t) = u(t) \\ v(t) = L_1 \dfrac{di_{L_1}(t)}{dt} = 1 \times \dfrac{d}{dt}(u(t)) = \delta(t) \end{cases} \quad X$$

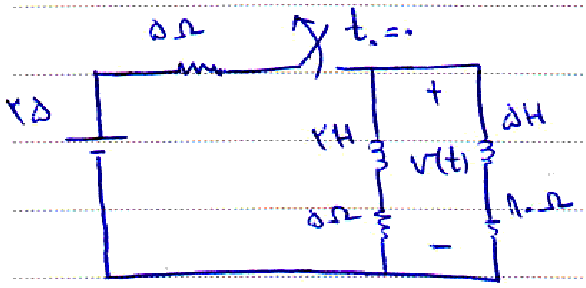
اشتباه

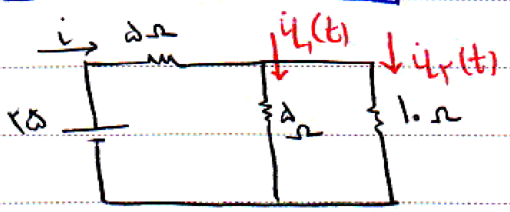
حال:

$$v(t) = L_1 \frac{di_{L_1}(t)}{dt} \xrightarrow{L} V(s) = L_1\left(sI_L(s) - i_{L_1}(0)\right) = 1 \times \left(s \times \frac{1}{s} - 2\right) = -1$$

$$V(s) = -1 \Rightarrow v(t) = -\delta(t)$$

مثال) مدار زیر را با استفاده از آنالیز در حوزه لاپلاس حل کرده و $v(t)$ را به دست آورید؟





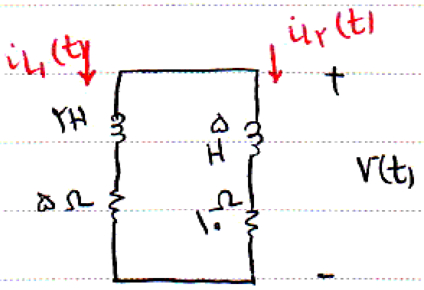
$t < 0$

$$i=\frac{25}{5+(5\|10)}=3A \qquad i_{L_1}(t)=3\times\frac{10}{15}=2A \qquad i_{L_2}(t)=3\times\frac{5}{15}=1A$$

$t=0$

$$i_{L_1}(0^-)=2A \quad , \quad i_{L_2}(0^-)=1A$$

$t>0$



$$KVL: \; 2\frac{di_{L_1}(t)}{dt}+5i_{L_1}(t)-10i_{L_2}(t)-5\frac{di_{L_2}(t)}{dt}=0$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}} 2\left[sI_{L_1}(s)-i_{L_1}(0^-)\right]+5I_{L_1}(s)-10I_{L_2}(s)-5\left[sI_{L_2}(s)-i_{L_2}(0^-)\right]=0$$

$$i_{L_1}(0^-)=2 \quad , \quad i_{L_2}(0^-)=1 \quad , \quad I_{L_2}(s)=-I_{L_1}(s)$$

$$2sI_{L_1}(s)-4+5I_{L_1}(s)+10I_{L_1}(s)+5sI_{L_1}(s)+5=0$$

$$I_{L_1}(s)\,(7s+15)=-1 \Rightarrow I_{L_1}(s)=\frac{-1}{7s+15}=\frac{-1/7}{s+\frac{15}{7}}$$

$$\begin{cases} i_{L_1}(t)=\frac{-1}{7}e^{-\frac{15}{7}t}\,u(t) \\ i_{L_2}(t)=\frac{1}{7}e^{-\frac{15}{7}t}\,u(t)\end{cases} \qquad i_{L_1}(0^+)=-\frac{1}{7} \; , \; i_{L_2}(0^+)=\frac{1}{7}$$

دقت کنید که جریان سلف‌ها تغییر ناگهانی داشته یعنی در ولتاژ دو سر آن‌ها ایجاد ضربه خواهد شد.

$$v(t)=2\frac{di_{L_1}(t)}{dt}+5i_{L_1}(t)$$

دقت کنید که از هم از $i_{L_1}(t)$ ها مستقیماً استفاده کنیم، به جوزی لاپلاس می‌گیریم:

$$V(s)=2\left[sI_{L_1}(s)-i_{L_1}(0^-)\right]+5I_{L_1}(s)$$

$$V(s)=(2s+5)I_{L_1}(s)-4 \longrightarrow V(s)=\frac{-(2s+5)}{7s+15}-4=\frac{-2s-5-28s-60}{7s+15}$$

$$V(s)=\frac{-30s-65}{7s+15}$$

حال لاپلاس معکوس می‌گیریم:

$$F(s)=\frac{-30}{7s+15}=\frac{-30/7}{s+15/7}\xrightarrow{L^{-1}}$$

$$\frac{-30}{7}e^{-15/7\,t}u(t)=f(t)$$

طبق خواص داشتیم:

$$sF(s)-f(0^-)\xrightarrow{L^{-1}}\frac{df(t)}{dt}$$

$$\Rightarrow sF(s)\xrightarrow{L^{-1}}\frac{df(t)}{dt}+f(0^-)$$

$$\frac{-30s}{7s+15}\xrightarrow{L^{-1}}\frac{d}{dt}\left(\frac{-30}{7}e^{-15/7\,t}u(t)\right)-\frac{30}{7}e^{-15/7\times 0}u(0^-)=$$

$$\frac{-30}{7}\times\left(-\frac{15}{7}\right)e^{-15/7\,t}u(t)-\underbrace{\frac{30}{7}e^{-15/7\,t}\delta(t)}_{-\frac{30}{7}\delta(t)}$$

$* \; f(t)\delta(t-T_0)=f(T_0)\delta(t-T_0)$

$$\begin{cases}\dfrac{-30s}{7s+15}\xrightarrow{L^{-1}}\dfrac{450}{49}e^{-15/7\,t}u(t)-\dfrac{30}{7}\delta(t)\\[2ex]\dfrac{-65}{7s+15}\xrightarrow{L^{-1}}\dfrac{-65}{7}e^{-15/7\,t}u(t)\end{cases}$$

$$v(t)=\frac{450}{49}e^{-\frac{15}{7}t}u(t)-\frac{30}{7}\delta(t)-\frac{45}{7}e^{-\frac{15}{7}t}u(t)$$

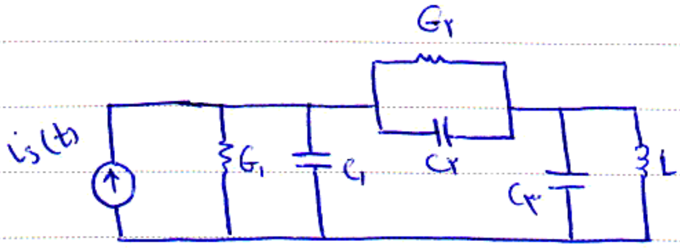
$$v(t)=\frac{-30}{7}\delta(t)-\frac{5}{49}e^{-\frac{15}{7}t}u(t)\Rightarrow$$ $v(t)$ دارای ضربه است.

تنظیم کردن معادلات جبر خطی:

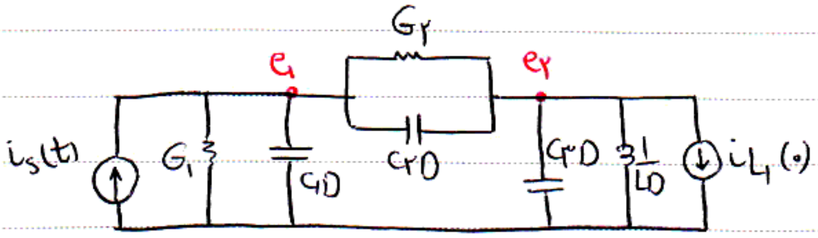
هدف انتقال معادلات حوزه انتگرال ـ دیفرانسیل به حوزه لاپلاس است.

با یک مثال مساله را بررسی می کنیم.

مثال) معادلات انتگرال ـ دیفرانسیل مدار زیر را در حوزه انتگرال ـ دیفرانسیل به روش گره به دست آورید.



$v_{C_1}(0), v_{C_2}(0), v_{C_3}(0)$ و $i_L(0)$



حوزه انتگرال ـ دیفرانسیل

از روش ماتریس:

$$\begin{bmatrix} G_1+G_2+C_1D+C_2D & -G_2-C_2D \\ -G_2-C_2D & G_2+C_2D+C_3D+\frac{1}{LD} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} i_s(t) \\ -i_L(0) \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} Df(t)\xrightarrow{L} sF(s)-f(0^-) \\ \frac{1}{D}f(t)\xrightarrow{L}\frac{F(s)}{s} \end{cases}$$

$$\begin{cases} G_1 e_1 + G_2 e_1 + C_1 De_1 + C_2 De_1 - G_2 e_2 - C_2 De_2 = i_s(t) \\ -G_2 e_1 - C_2 De_1 + G_2 e_2 + C_2 De_2 + C_3 De_2 + \frac{1}{LD} e_2 = -i_{L_1}(0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (G_1+G_2) e_1 + (C_1+C_2) De_1 - G_2 e_2 - C_2 De_2 = i_s(t) \\ -G_2 e_1 - C_2 De_1 + G_2 e_2 + (C_2+C_3) De_2 + \frac{1}{LD} e_2 = -i_{L_1}(0) \end{cases}$$

با استفاده از جدول لاپلاس :

$$(G_1+G_2)E_1(s) + (C_1+C_2)\left[sE_1(s) - e_1(0^-)\right] - G_2 E_2(s)$$

$$-C_2\left[sE_2(s) - e_2(0^-)\right] = I_s(s)$$

$$\begin{array}{cc} V_{C_1}(0^-) & V_{C_2}(0^-) \end{array}$$

① $\longrightarrow \boxed{E_1(s)\left(G_1 + G_2 + C_1 s + C_2 s\right) + E_2(s)\left(-G_2 - C_2 s\right) = I_s(s) + C_1 e_1(0^-) + C_2\left(e_1(0^-) - e_2(0^-)\right)}$

$$-G_2 E_1(s) - C_2\left[sE_1(s) - e_1(0^-)\right] + G_2 E_2(s) + (C_2+C_3)\left[sE_2(s) - e_2(0^-)\right] + \frac{1}{Ls} E_2(s)$$

$$= -\frac{i_{L_1}(0)}{s}$$

$$\begin{array}{cc} V_{C_1}(0^-) & V_{C_3}(0^-) \end{array}$$

② $\boxed{E_1(s)\left(-G_2 - C_2 s\right) + E_2(s)\left(G_2 + C_2 s + C_3 s + \frac{1}{Ls}\right) = -\frac{i_L(0)}{s} - C_2 e_1(0^-) + C_3 e_2(0^-) + C_2 e_2(0^-)}$

$V_{C_2}(0^-) \leftarrow$

معادلات را به صورت ماتریسی می نویسیم :

$$\begin{bmatrix} G_1 + G_2 + C_1 s + C_2 s & -G_2 - C_2 s \\ -G_2 - C_2 s & G_2 + C_2 s + C_3 s + \frac{1}{Ls} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1(s) \\ E_2(s) \end{bmatrix} =$$

بردار شرایط اولیه

$$\begin{bmatrix} I_s(S) \\ \\ -\frac{i_L(0)}{s} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1 e_1(0) + C_2(e_1(0) - e_2(0)) \\ C_1 V_{C_1}(0) + C_2 V_{C_2}(0) \\ -C_2 e_1(0) + C_2 e_2(0) + C_3 e_2(0) \\ -C_2 V_{C_1}(0) + C_2 V_{C_2}(0) + C_3 V_{C_3}(0) \end{bmatrix}$$

اما از تشکیل معادلات فوق، راه حل مستقیمی به صورت زیر وجود دارد:

حوزه انتگرال دیفرانسیل

روش گره $\quad Y_n . e = i_s \xrightarrow{L} Y_n(S)\ E(S) = I_s(S) + \alpha$ $\quad$ بردار شرایط اولیه

روش مش $\quad Z_m . i = e_s \xrightarrow{L} Z_m(S) . I(S) = E_s(S) + \alpha$

روش حلقه اساسی $\quad Z_B . i = e_s \xrightarrow{L} Z_B(S) . I(S) = E_s(S) + \alpha$

روش کات ست اساسی $\quad Y_Q . e = i_s \xrightarrow{L} Y_Q(S) . E(S) = I_s(S) + \alpha$

در روش های گره و کات ست اساسی، بردار شرایط اولیه شامل ولتاژ اولیه خازن ها است.

در روش های مش و حلقه اساسی، بردار شرایط اولیه شامل جریان اولیه سلف ها است.

$\frac{1}{D} \to \frac{1}{s}$

$D \to S$

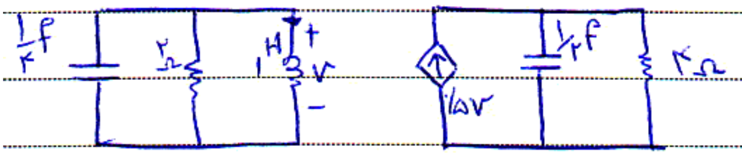
برای تبدیل معادلات انتگرال دیفرانسیل به حوزه لاپلاس در ورق حل معادلات اول اینکه D ها را به S تبدیل می‌کنیم و هرجا D داریم (یا $\frac{1}{D}$) با اعمال علامت ها حاصل ضرب، شرایط اولیه را در بردار α جمع می‌کنیم.

فرض کنید معادلات انتگرال - دیفرانسیل یک مدار در دامنه زمان به صورت زیر باشد:

$$\begin{bmatrix} 2D+\frac{1}{D} & -D & 3 \\ -D & 3D+2 & D \\ 3 & D & 5D+\frac{1}{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(t) \\ 0 \\ \delta(t) \end{bmatrix}$$

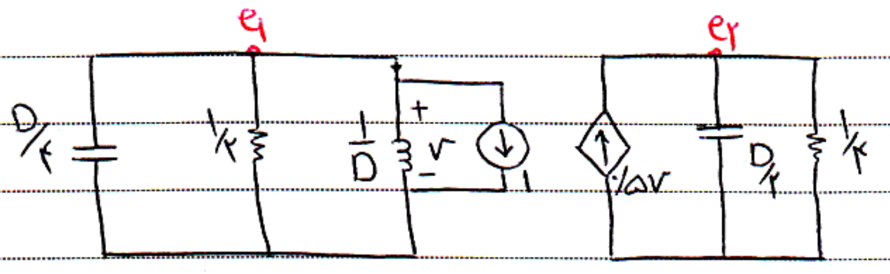
$$\begin{bmatrix} 2s+\frac{1}{s} & -s & 3 \\ -s & 3s+2 & s \\ 3 & s & 5s+\frac{1}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \\ I_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 2i_1(0^-)-i_2(0^-) \\ -i_1(0^-)+3i_2(0^-)+i_3(0^-) \\ i_2(0^-)+5i_3(0^-) \end{bmatrix}}_{\alpha}$$

مثال ۵) در مدار زیر معادلات گره را بنویسید؟ (در حوزه لاپلاس)



$i_L(0^-)=1A \qquad V_{C_1}(0^-)=2V \qquad V_{C_2}(0^-)=1V$

ابتدا معادلات انتگرال دیفرانسیل را در یکی از روش‌ها مثلاً گره می‌نویسیم.



$$\begin{bmatrix} \frac{D}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{D} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4}+\frac{D}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0.5e_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{s}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{s} & 0 \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{4}+\frac{s}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1(s) \\ E_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/s \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{4} e_1(0^-) \\ \frac{1}{2} e_2(0^-) \end{bmatrix}$$

$e_1(0^-) \rightarrow V_{C_1}(0^-) = 2$

$e_2(0^-) \rightarrow V_{C_2}(0^-) = 1$

$$\begin{bmatrix} \frac{s^2+2s+4}{4s} & 0 \\ -1/2 & \frac{2s+1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1(s) \\ E_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s-2}{2s} \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

$$E_1(s) = \frac{\begin{vmatrix} \frac{s-2}{2s} & 0 \\ 1/2 & \frac{2s+1}{4} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{s^2+2s+4}{4s} & 0 \\ -1/2 & \frac{2s+1}{4} \end{vmatrix}} = \frac{\frac{(s-2)(2s+1)}{8s}}{\frac{(s^2+2s+4)(2s+1)}{160\,s}}$$

$$E_1(s) = \frac{2s-4}{s^2+2s+4}$$

$$P_1, P_2 = -1 \pm j\sqrt{3} \qquad E_1(s) = \frac{K}{\left(s-(-1+j\sqrt{3})\right)} + \frac{K^*}{\left(s-(-1-j\sqrt{3})\right)}$$

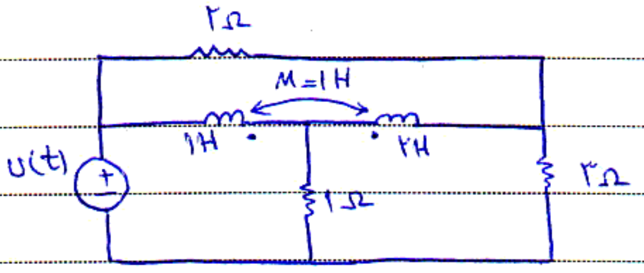
$$K = \left(s-(-1+j\sqrt{3})\right) E_1(s)\Big|_{s=-1+j\sqrt{3}} = \frac{2s-4}{s+1+j\sqrt{3}}\Bigg|_{s=-1+j\sqrt{3}} = \frac{-2+2j\sqrt{3}-4}{2j\sqrt{3}} = \frac{-3+j\sqrt{3}}{j\sqrt{3}}$$

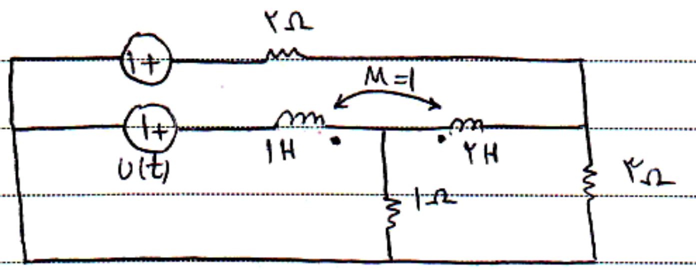
$$= \frac{2\sqrt{3}\angle 150}{\sqrt{3}\angle 90} = 2\angle 60 \quad \begin{cases} |K| = 2 \\ \angle K = 60 \end{cases}$$

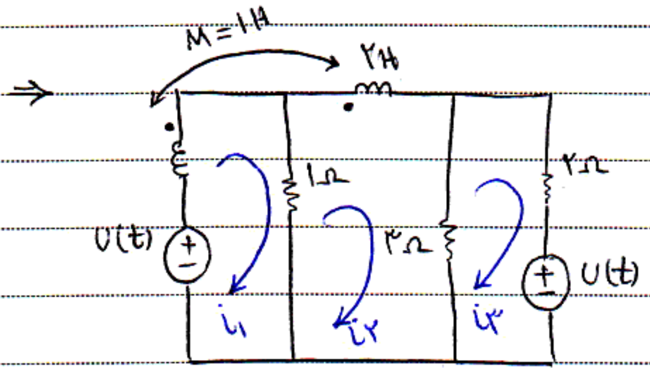
$$v(t) = 2|K|e^{\alpha t}\cos(\beta t + \angle K)$$

$$= 4e^{-t}\cos(\sqrt{3}\,t + 60)$$

مثال) با استفاده از روش لاپلاس، مدار زیر را آنالیز کنید؟

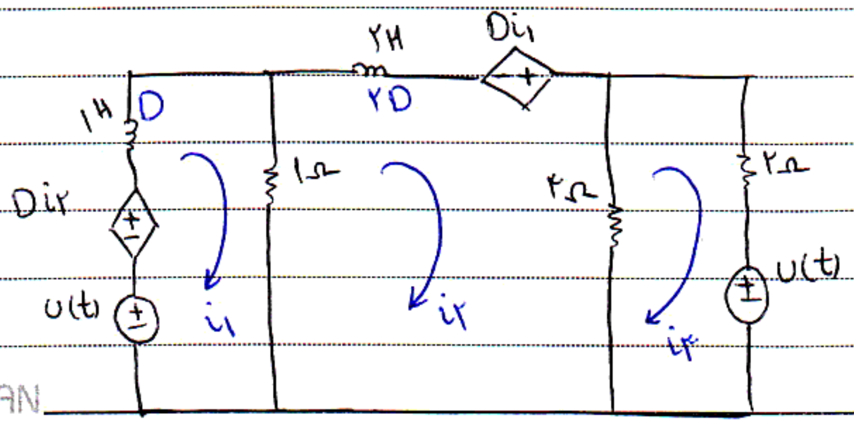


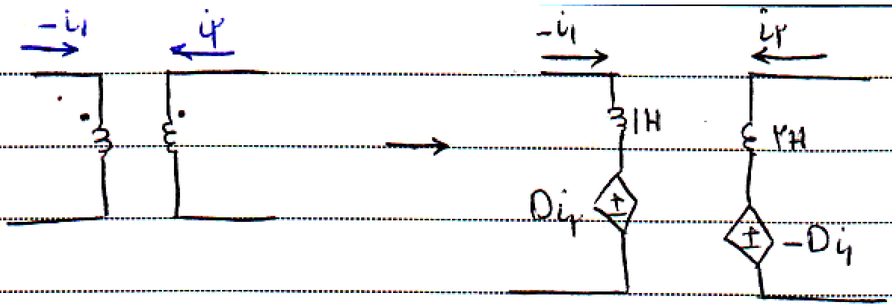




روش مش را استفاده میکنیم.

برای استفاده از روش مش باید مدار معادل سلف های تزویج شده استفاده میکنیم





$$\begin{bmatrix} D+1 & -1-D & 0 \\ -1-D & 2D+4 & -3 \\ 0 & -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v(t)+\cancel{Di_2} \\ \cancel{Di_1} \\ -v(t) \end{bmatrix}$$

$i_{L_1}(0^-)$ $\quad$ $i_{L_2}(0^-)$

$$\begin{bmatrix} s+1 & -1-s & 0 \\ -1-s & 2s+4 & -3 \\ 0 & -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \\ I_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} + i_1(0^-) - i_2(0^-) \\ 0 - i_1(0^-) + 2i_2(0^-) \\ -\frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

معادلات حالت و تبدیل لاپلاس:

در معادلات حالت داشتیم:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}} sX(s) - x(0^-) = AX(s) + BU(s)$$

$$X(s)(sI - A) = BU(s) + x(0) \Rightarrow \boxed{X(s) = (sI - A)^{-1}[BU(s) + x(0)]}$$

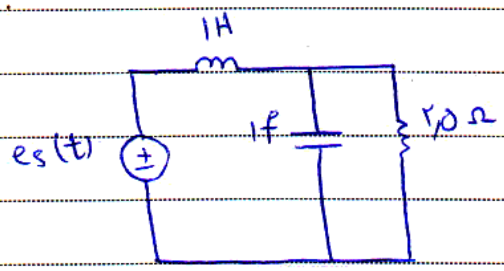
پاسخ حالت صفر $\quad x(s) = (sI - A)^{-1} BU(s)$

پاسخ ورودی صفر $\quad X(s) = (sI - A)^{-1} x(0^-)$

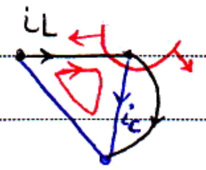
Subject: * پاسخ پله و پاسخ ضربه یک مدار همان پاسخ حالت صفر است.

Year. Month. Date. ( )

مثال: با استفاده از معادلات حالت، پاسخ پله و پاسخ ضربه مدار زیر را بدست آورید.



گراف:



$$KCL: \quad C\frac{dv_C}{dt}+\frac{v_C}{2.5}-i_L=0$$

$$\dot{v}_C=-\frac{1}{2.5}v_C+i_L$$

$$KVL: \quad L\frac{di_L}{dt}+v_C-e_s=0 \Longrightarrow \dot{i}_L=-v_C+e_s$$

$$\begin{bmatrix}\dot{v}_C\\ \dot{i}_L\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}\frac{-1}{2.5} & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}}_{A}\begin{bmatrix}v_C\\ i_L\end{bmatrix}+\underbrace{\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}}_{B}e_s$$

$$sI-A=\begin{bmatrix}s & 0\\ 0 & s\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\frac{-1}{2.5} & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2.5s+1}{2.5} & -1\\ 1 & s\end{bmatrix}$$

ماتریس یکه

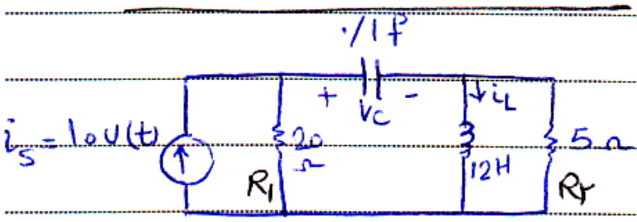
$$(sI-A)^{-1}=\frac{1}{\frac{2.5s^2+s+2.5}{2.5}}\begin{bmatrix}s & 1\\ -1 & \frac{2.5s+1}{2.5}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2.5s}{2.5s^2+s+2.5} & \frac{2.5}{2.5s^2+s+2.5}\\ \frac{-2.5}{2.5s^2+s+2.5} & \frac{6.25}{(2.5s+1)(2.5s^2+s+2.5)}\end{bmatrix}$$

پاسخ ضربه $\quad e_s(t)=\delta(t) \longrightarrow E_s(s)=1$

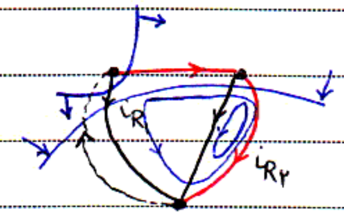
TARAN

$$x(s) = \begin{bmatrix} V_C(s) \\ I_L(s) \end{bmatrix} = \left[(sI - A)^{-1} \right] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times 1$$

مثال) در مدار زیر، معادلات حالت را بدست آورید سپس پاسخ (پاسخ حالت صفر) به ورودی را با شرایط اولیه صفر حساب کنید؟



گراف:



i_s

غیرحالت

$KCL: \; 0/1 \frac{dv_C}{dt} + i_{R_1} - 10u(t) = 0 \longrightarrow \frac{dv_C}{dt} = -10 i_{R_1} + 10 i_s$ (1)

$KVL: \; 0/2 \frac{di_L}{dt} = 5 i_{R_2} \longrightarrow \frac{di_L}{dt} = 25 i_{R_2}$ غیرحالت (2)

$KVL: \; 20 i_{R_1} - 5 i_{R_2} - v_C = 0 \longrightarrow i_{R_1} = \frac{1}{4} i_{R_2} + \frac{1}{20} v_C$ (A) ؛ رفع غیرحالت i_{R_1}

غیرحالت

$\dot{v}_C = \frac{-10}{4} i_{R_2} - \frac{1}{2} v_C + 10 i_s$ (3) ؛ (A) در (1)

$KCL: \; i_{R_2} + i_L + i_{R_1} - i_s = 0$ ؛ رفع غیرحالت i_{R_2}

$i_{R_2} = - i_L - i_{R_1} + i_s$

$i_{R_2} = - i_L - \frac{1}{4} i_{R_2} - \frac{1}{20} v_C + i_s$ ؛ (A) را در معادله بالا می‌گذاریم

TABAN

$$\frac{5}{4} i_{R_2} = -i_L - \frac{1}{20} V_C + i_s$$

$$\boxed{i_{R_2} = -\frac{4}{5} i_L - \frac{1}{25} V_C + \frac{4}{5} i_s} \quad \text{(B)}$$

(B) را در (2) و (3) قرار می‌دهیم تا معادلات حالت تولید شود.

$$\boxed{\dot{i}_L = -20 i_L - V_C + 20 i_s}$$ معادله حالت (B) در (2):

$$\dot{V_C} = 2 i_L + 0/1 V_C - 2 i_s - \frac{1}{2} V_C + 10 i_s$$ (B) در (3):

$$\boxed{\dot{V_C} = 2 i_L - 0/4 V_C + 8 i_s}$$ معادله حالت

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_L \\ \dot{V_C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 & -1 \\ 2 & -0/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ V_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 20 \\ 8 \end{bmatrix} i_s$$

محاسبه روابط i_L و V_C:

یک راه استفاده از معادلات انتگرال دیفرانسیل در هر یک از ۴ روش موجود با استفاده از معادلات لاپلاس و یک

راه استفاده از خود لاپلاس با استفاده از ماتریس A است.

داریم: $$X(S) = (SI - A)^{-1} \left[BU(S) + x(0^-) \right]$$

با شرایط اولیه صفر:

$$X(S) = (SI - A)^{-1} BU(S) = \begin{bmatrix} S+20 & 1 \\ -2 & S+0/4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 20 \\ 8 \end{bmatrix} \underbrace{\left(10 \times \frac{1}{S}\right)}_{U(S)}$$

$$X(S)=\frac{۱}{(s+۲۰)(s+۰/۴)+۲}\begin{bmatrix} s+۰/۴ & -۱ \\ ۲ & s+۲۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{۲۰۰}{s} \\ \frac{۸۰}{s} \end{bmatrix}$$

$$X(S)=\begin{bmatrix} I_L(s) \\ V_C(s) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{۲۰۰s}{s(s^۲+۲۰/۴s+۱۰)} \\ \dfrac{۸۰s+۲۰۰۰}{s(s^۲+۲۰/۴s+۱۰)} \end{bmatrix}$$

$$I_L(S)=\frac{K_۱}{s}+\frac{K_۲}{(s+۰/۵۰۵)}+\frac{K_۳}{(s+۱۹/۸۹۵)}$$

$$K_۱=\left.\frac{۲۰۰s}{s^۲+۲۰/۴s+۱۰}\right|_{s=۰}=۰$$

$$K_۲=\left.\frac{۲۰۰s}{s(s+۱۹/۸۹۵)}\right|_{s=-۰/۵۰۵}=۱۰/۳۱ \qquad K_۳=\left.\frac{۲۰۰s}{s(s+۰/۵۰۵)}\right|_{s=-۱۹/۸۹۵}=-۱۰/۳۱$$

$$\boxed{i_L(t)=۱۰/۳۱\left(e^{-۰/۵۰۵t}-e^{-۱۹/۸۹۵t}\right)u(t)}$$

محاسبه V_C به عهده‌ی دانشجویان

فصل ۱۴: فرکانس‌های طبیعی

سیستمی با سیستم زیر را در نظر بگیرید:

$$x(t) = 3\cos 3t + e^{-2t} \quad \longrightarrow \boxed{\quad} \longrightarrow \quad y(t) = \sin 3t + \cos(5t + 30^\circ) + 0.2e^{-2t} + 3e^{-4t}$$

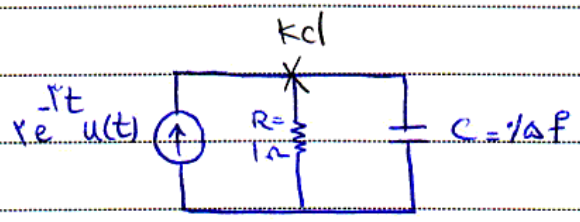
فرکانس‌های $3t$ و $2t$ که در خروجی ظاهر شده‌اند ممکن است ناشی از ورودی باشند اما فرکانس‌های $5t$ و $4t$ ناشی از وضعیت سیستم در خروجی ظاهر شده است و ارتباطی با ورودی ندارد.

بنابراین با توجه به توضیحات فوق:

✓ نکته: فرکانس‌های طبیعی در پاسخ ورودی صفر سیستم ظاهر می‌شوند.

یک راه این است که معادله دیفرانسیل حاکم بر مدار را بنویسیم. ریشه‌های معادله مشخصه همان فرکانس‌های طبیعی هستند.

مثال:



$v_C(0) = 2V$

می‌خواهیم پاسخ کامل V_C را به دست آوریم؟

پاسخ کامل V_C:

$$2e^{-3t} = 0.5\frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{1}$$

معادله دیفرانسیل مدار:

$$\boxed{\frac{dv_c}{dt} + 2v_c = 4e^{-3t}}$$

پاسخ عمومی $\quad v_c(t) = Ke^{-2t}$

پاسخ خصوصی $\quad v_c(t) = Ae^{-3t} \xrightarrow{\text{جایگذاری در معادله}} -3Ae^{-3t} + 2Ae^{-3t} = 4e^{-3t} \longrightarrow A = -4$

پاسخ کامل $\quad v_c(t) = \underbrace{v_c(t)}_{\text{عمومی}} + \underbrace{v_c(t)}_{\text{خصوصی}} \longrightarrow v_c(t) = Ke^{-2t} - 4e^{-3t}$

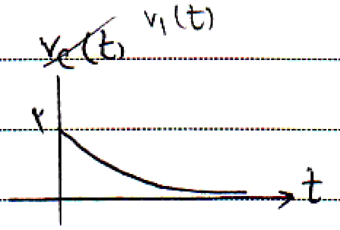
$$v_c(0) = 2 \longrightarrow K - 4 = 2 \longrightarrow K = 6$$

$$\boxed{v_c(t) = (6e^{-2t} - 4e^{-3t})\,u(t)}$$

با توجه به جواب مسئله، $s=-2$ فرکانس طبیعی سیستم است. اما $s=-3$ شاید فرکانس طبیعی باشد شاید یعنی نزدیکی باشد. در حالیکه اگر معادله مشخصه را بررسی کنیم:

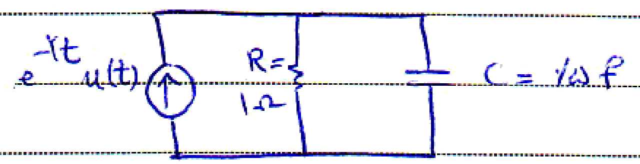
$$\frac{dv_c}{dt} + 2v_c = 0 \longrightarrow s + 2 = 0 \longrightarrow s = -2$$

پس فقط $s=-2$ فرکانس طبیعی سیستم است.



خلاف:

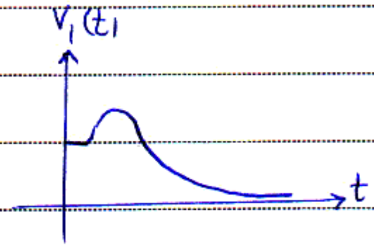
حال فرض کنید مدار به صورت زیر باشد و مدار را با فرکانس طبیعی اش تحریک کنیم:



$v_c(0) = 2V$

پاسخ کامل v_c،

$$e^{-2t} = 0.5\frac{dv_c}{dt} + \frac{v_c}{1}$$



$$\frac{dv_c}{dt} + 2v_c = 2e^{-2t}$$

پاسخ عمومی $\quad v_c(t) = kte^{-2t}$

پاسخ خصوصی $\quad v_c(t) = Ae^{-2t} \xrightarrow{\text{صدق در معادله}} -2Ae^{-2t} + 4Ae^{-2t} = 2e^{-2t} \longrightarrow \boxed{A=1}$

کامل $v_c(t) = \underset{\text{عمومی}}{v_c(t)} + \underset{\text{خصوصی}}{v_c(t)} \Rightarrow v_c(t) = kte^{-2t} + e^{-2t} \longrightarrow v_c(t) = e^{-2t}(1+kt)$

مثال) معادله مشخصه یک مدار به صورت زیر است،

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + 4i_L + 3 = 0$$

$$s^2 + 4s + 3 = 0 \quad \begin{cases} s = \frac{-4+2}{2} = -1 \\ s = \frac{-4-2}{2} = -3 \end{cases}$$

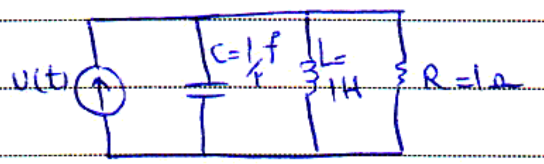
که ایجاد شده است.

انواع فرکانس‌های طبیعی $\longrightarrow$ فرکانس‌های طبیعی متغیرهای شبکه

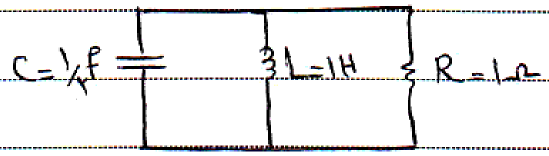
$\longrightarrow$ فرکانس‌های طبیعی کل شبکه

یعنی ممکن است یک یا تعدادی از فرکانس‌های طبیعی کل شبکه در ولتاژ یا جریان یک شاخه ظاهر نشوند.

مثال) فرکانس‌های طبیعی ولتاژ خازن را به دست آورید؟



منبع را می‌کشیم تا مدار در شرایط ورودی صفر قرار گیرد.



$$i_C + i_L + i_R = 0$$

$$C\frac{dv_C}{dt} + \frac{1}{L}\int v_C\,dt + i_L(0) + \frac{v_C}{R} = 0 \longrightarrow$$ معادله مدار

$$C\frac{d^2v_C}{dt^2} + \frac{1}{L}v_C + \frac{1}{R}\frac{dv_C}{dt} = 0$$

$$0/5\,\frac{d^2v_C}{dt^2} + v_C + \frac{dv_C}{dt} = 0$$

$$\frac{d^2v_C}{dt^2} + 2\frac{dv_C}{dt} + 2v_C = 0 \longrightarrow s^2 + 2s + 2 = 0$$ معادله مشخصه

$$S_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4j^2}}{2} \left\langle \begin{matrix} -1+j \\ -1-j \end{matrix} \right\rangle$$ فرکانس‌های طبیعی

می‌توان نشان داد قطب‌های تابع تبدیل در حوزه لاپلاس همان فرکانس‌های طبیعی سیستم هستند.

۲) در سیستم $\quad C\frac{dv_C}{dt} + \frac{1}{L}\int v_C\,dt + i_L(0) + \frac{v_C}{R} = 0$

$$\frac{dv_C}{dt} + 2\int v_C\,dt + 2v_C + 2i_L(0) = 0 \xrightarrow{L} SV_C(S) - V_C(0) + \frac{2}{S}V_C(S) + 2V_C(S) + \frac{2i_L(0)}{S} = 0$$

$$V_C(S)\left(S + \frac{2}{S} + 2\right) = V_C(0) - \frac{2}{S}i_L(0)$$

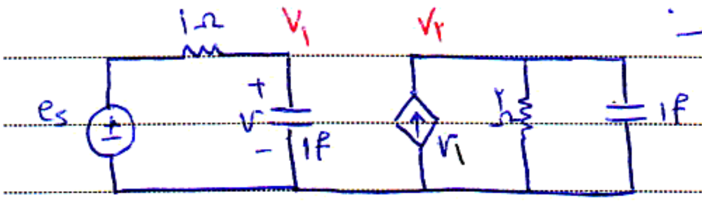
$$V_C(S) = \frac{V_C(0) - \frac{2}{s}\,i_L(0)}{S + \frac{2}{S} + 2}$$

$$V_C(S) = \frac{SV_C(0) - 2i_L(0)}{S^2 + 2S + 2}$$

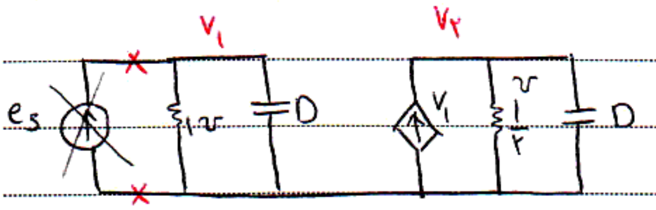
قطب‌ها $\begin{cases} S = -1 + j \\ S = -1 - j \end{cases}$

یعنی:

مثال ۲) فرکانس‌های طبیعی V_1 و V_2 را بدست آورید؟



در حالت ورودی صفر مدار را از راه گره تحلیل می‌کنیم.



$$\begin{bmatrix} D+1 & 0 \\ -1 & D+\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ V_1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} S+1 & 0 \\ -1 & S+\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(S) \\ V_2(S) \end{bmatrix} = \begin{array}{c} V_{C_1}(0^-) \\ \begin{bmatrix} V_1(0^-) \\ V_2(0^-) \end{bmatrix} \\ V_{C_2}(0^-) \end{array}$$

$$V_1(S) = \frac{\begin{vmatrix} V_1(0^-) & 0 \\ V_2(0^-) & S+\frac{1}{2} \end{vmatrix}}{(S+1)(S+\frac{1}{2})} = \frac{V_1(0^-)(S+\frac{1}{2})}{(S+1)(S+\frac{1}{2})}$$

$$V_1(S) = \frac{V_1(0^-)}{S+1} \xrightarrow{\text{فرکانس طبیعی}} \boxed{S = -1}$$

$$V_2(S) = \frac{\begin{vmatrix} S+1 & V_1(0^-) \\ -1 & V_2(0^-) \end{vmatrix}}{(S+1)(S+\frac{1}{2})} \Longrightarrow \boxed{V_2(S) = \frac{V_2(0^-)(S+1) + V_1(0^-)}{(S+1)(S+\frac{1}{2})}}$$

فرکانس‌های طبیعی $\begin{cases} S = -1 \\ S = -\frac{1}{2} \end{cases}$

۱- $s=-1$ و $s=-\frac{1}{2}$ فرکانس‌های طبیعی مدار هستند ولی $s=-\frac{1}{2}$ در تحریک V_1 ظاهر نشده.

سؤال) در مثال قبل پاسخ به ورودی‌های زیر را بدست آورید؟

$$\begin{cases} e_s(t)=u(t) \\ e_s(t)=e^{-t}\,u(t) \end{cases}$$

شرایط اولیه: $V_{C_1}(0^-)=V_{C_2}(0^-)=1$

$$\begin{bmatrix} D+1 & 0 \\ -1 & D+\frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ V_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} S+1 & 0 \\ -1 & S+\frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1(S) \\ V_2(S) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \overbrace{V_{C_1}(0^-)}^{1}+E_S \\ \underbrace{V_{C_2}(0^-)}_{1} \end{bmatrix}$$

$$V_1(S)=\frac{\begin{vmatrix} 1+E_S & 0 \\ 1 & S+\frac{1}{2} \end{vmatrix}}{(S+1)(S+\frac{1}{2})}=\frac{(1+E_S)(S+\frac{1}{2})}{(S+1)(S+\frac{1}{2})}=\frac{1+E_S}{(S+1)}$$

$$V_2(S)=\frac{\begin{vmatrix} S+1 & 1+E_S \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}{(S+1)(S+\frac{1}{2})}=\frac{S+2+E_S}{(S+1)(S+\frac{1}{2})}$$

الف) $E_S=\frac{1}{S}$

$$V_1(S)=\frac{1+\frac{1}{S}}{S+1}=\frac{\frac{S+1}{S}}{S+1}=\frac{1}{S}$$

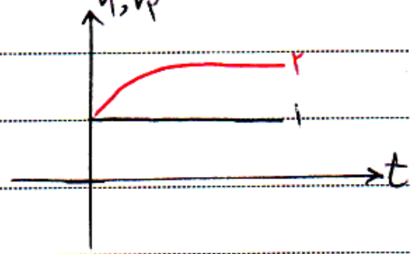
$$\Rightarrow \boxed{V_1(t)=u(t)}$$

$$V_2(S)=\frac{S+2+\frac{1}{S}}{(S+1)(S+\frac{1}{2})}=\frac{S+1}{S\,(S+\frac{1}{2})}=\frac{K_1}{S}+\frac{K_2}{S+\frac{1}{2}}$$

$$K_1 = \left.\frac{s+1}{s+\frac{1}{2}}\right|_{s=0} = 2$$

$$K_2 = \left.\frac{s+1}{s}\right|_{s=-\frac{1}{2}} = -1$$

$$V_2(s) = \frac{2}{s} - \frac{1}{s+\frac{1}{2}} \longrightarrow \boxed{V_2(t) = \left(2 - e^{-\frac{1}{2}t}\right) u(t)}$$



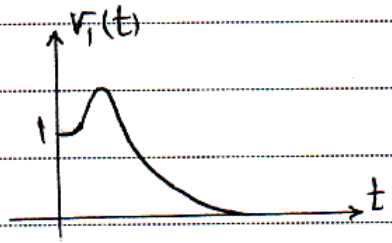
ب) $E_s = \frac{1}{(s+1)}$: این ورودی، فرکانس طبیعی مدار را تحریک می‌کند.

$$V_1(s) = \frac{1 + \frac{1}{s+1}}{s+1} = \frac{s+2}{(s+1)^2}$$

$$V_1(s) = \frac{K_{11}}{s+1} + \frac{K_{12}}{(s+1)^2}$$

$$K_{12} = (s+2)\Big|_{s=-1} = 1 \qquad K_{11} = \frac{d}{ds}\Big[(s+2)\Big]_{s=-1} = 1$$

$$\boxed{v_1(t) = \left(e^{-t} + t e^{-t}\right) u(t)} \Longrightarrow \boxed{v_1(t) = e^{-t}(1+t)\, u(t)}$$



$$V_2(s) = \frac{(s+2) + \frac{1}{s+1}}{(s+1)(s+\frac{1}{2})} = \frac{\frac{s^2+3s+3}{s+1}}{(s+1)(s+\frac{1}{2})}$$

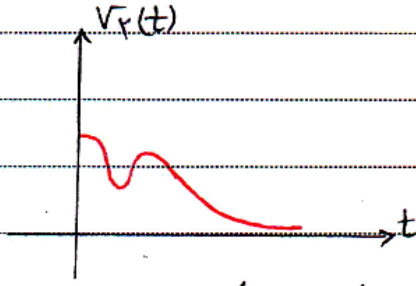
$$V_2(s) = \frac{s^2+3s+3}{(s+1)^2(s+\frac{1}{2})} = \frac{K_{11}}{s+1} + \frac{K_{12}}{(s+1)^2} + \frac{K_2}{s+\frac{1}{2}}$$

$$K_{12} = \left.\frac{s^2+3s+3}{s+\frac{1}{2}}\right|_{s=-1} = \frac{1-3+3}{-\frac{1}{2}} = -2$$

$$K_{11}=\frac{d}{ds}\left[\frac{s^2+3s+3}{s+\frac{1}{2}}\right]_{s=-1}=\left[\frac{(2s+3)(s+\frac{1}{2})-s^2-3s-3}{(s+\frac{1}{2})^2}\right]_{s=-1}=\frac{1\times(-\frac{1}{2})-1+3-3}{\frac{1}{4}}=-6$$

$$K_2=\left.\frac{s^2+3s+3}{(s+1)^2}\right|_{s=-\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1}{4}-\frac{3}{2}+3}{\frac{1}{4}}=7$$

$$v_{c2}(t)=\left(-6e^{-t}-2te^{-t}+7e^{-\frac{1}{2}t}\right)u(t)$$



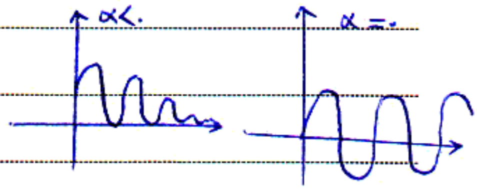
حالت‌های ممکن در فرکانس‌های طبیعی:

$$f(t)=k_1e^{s_1t}+k_2e^{s_2t}+k_3e^{s_3t}+\dots$$

۱) اگر حقیقی باشند دارای علامت منفی و اگر مختلط باشند زوج با قسمت حقیقی منفی اند. فرکانس‌های طبیعی مختلط به صورت نوسان در خروجی ظاهر می‌شوند. (به صورت $\sin$ و $\cos$)

$$S_{1,2}=\alpha\pm j\omega$$

$$f(t)=e^{(\alpha+j\omega)t}+e^{(\alpha-j\omega)t}=e^{\alpha t}\left(e^{j\omega t}+e^{-j\omega t}\right)$$



$$f(t)=2e^{\alpha t}\cos\omega t$$

α: قسمت حقیقی (ضریب میرایی)

ω: قسمت موهومی فرکانس طبیعی (فرکانس نوسان)

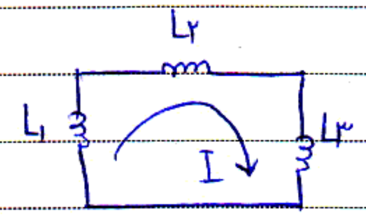
۲) هرگاه تغییر شکل مورد نظر جریان یک سلف باشد و این سلف در حلقه قرار گرفته باشد (این حلقه فقط از تعدادی سلف تشکیل شده) چون سلف‌ها ایده‌آل فرض می‌شوند ممکن است جریان ثابت I_0 در آن باقی بماند یعنی:

$$\frac{I_0}{s}\xrightarrow{L^{-1}}I_0e^{0t}u(t)$$

بدازای هر حلقه سلفی، یک فرکانس طبیعی صفر خواهیم داشت.

بنابراین $S=0$ فرکانس طبیعی جریان سلف خواهد بود.

مثال)



$$KVL: \quad L_1 \frac{dI_{L_1}}{dt} + L_2 \frac{dI_{L_2}}{dt} + L_3 \frac{dI_{L_3}}{dt} = 0$$

$$L_1\left(sI_{L_1}(s) - I_{L_1}(0^-)\right) + L_2\left(sI_{L_2}(s) - I_{L_2}(0^-)\right) + L_3\left(sI_{L_3}(s) - I_{L_3}(0^-)\right) = 0$$

$$I_{L_1}(s) = I_{L_2}(s) = I_{L_3}(s) \triangleq I_L(s)$$

$$I_L(s) = \overbrace{\frac{L_1 I_{L_1}(0^-) + L_2 I_{L_2}(0^-) + L_3 I_{L_3}(0^-)}{s(L_1+L_2+L_3)}}^{I_0} = \frac{I_0}{s}$$

اگر $S=0$ فرکانس طبیعی جریان سلف باشد فرکانس طبیعی ولتاژ سلف نخواهد بود.

$$V_L(t) = L\frac{dI_L(t)}{dt} \longrightarrow V_L(s) = L\left(s\underbrace{I_L(s)}_{\frac{I_0}{s}} - i_L(0^-)\right)$$

۳) هرگاه متغیر شبکه مورد نظر ولتاژ یک خازن باشد و این خازن فقط در حلقات شبکه‌ای متشکل از خازن تشکیل شده قرار داشته باشد چون خازن‌ها ایده‌آل فرض می‌شوند معلوم است ولتاژ ثابت V_0 در دو سر آن خازن‌ها قرار دارد

در این صورت، $V(s) = \frac{V_0}{s} \xrightarrow{L^{-1}} V_0 e^{0t} u(t)$

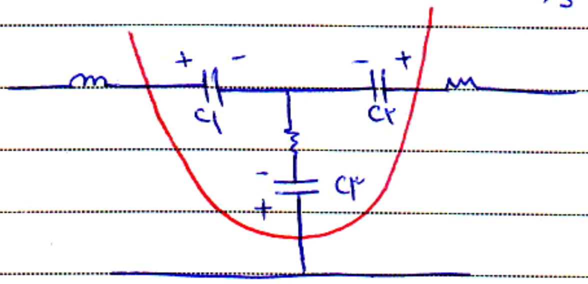
$i_C = C\frac{dv}{dt} \xrightarrow{L}$ * اگر S=۰ فرکانس طبیعی ولتاژ خازن باشد، فرکانس طبیعی جریان خازن خواهد بود.

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$I_C(S) = C\underbrace{SV_C(S)}_{1/s} - CV_C(0^-) = C(1 - V_C(0^-))$

و S=۰ فرکانس طبیعی ولتاژ خازن خواهد بود.

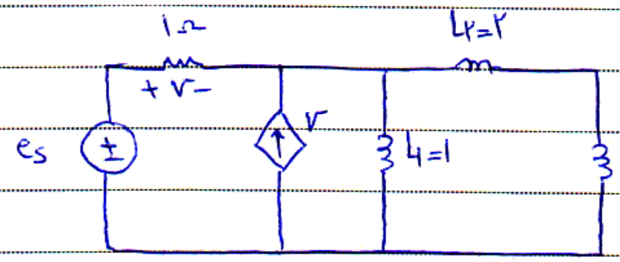


✓ به تعداد حلقه‌های سلفی و کات‌ست‌های خازنی فرکانس طبیعی صفر داریم

$$C_1\frac{dv_{C_1}}{dt} + C_2\frac{dv_{C_2}}{dt} + C_3\frac{dv_{C_3}}{dt} = 0$$

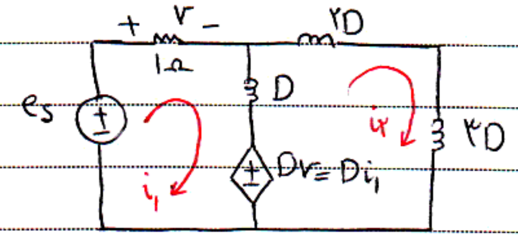
$$C_1SV_{C_1}(S) - C_1V_{C_1}(0) + C_2SV_{C_2}(S) - C_2V_{C_2}(0^-) + C_3SV_{C_3}(S) - C_3V_{C_3}(0^-) = 0$$

مثال: فرکانس طبیعی جریان سلف‌ها را بدست آورید؟

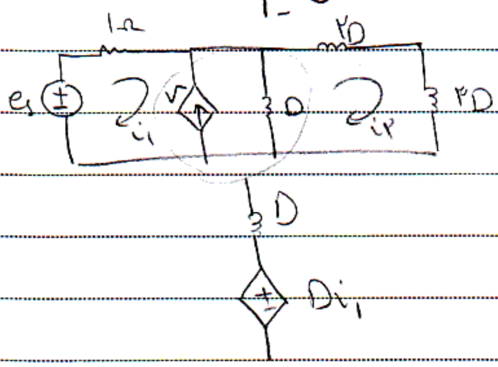


$I_{L_1}(0^-) = 1$

$I_{L_2}(0^-) = I_{L_3}(0^-) = 2$



از روش مش حل می‌کنیم.



$V = 1\times i_1 = i_1$

$$\begin{bmatrix} D+1+D & -D \\ -D-D & 4D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_s - \cancel{Di_1} \\ \cancel{Di_1} \end{bmatrix}$$

$I_{L_1}(0^-) + I_{L_2}(0^-) + I_{L_3}(0^-) = 5$

$$\begin{bmatrix} 2S+1 & -S \\ -2S & 4S \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1(S) \\ I_2(S) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_s + 2i_1(0^-) - i_2(0^-) \\ -2i_1(0^-) + 4i_2(0^-) \end{bmatrix}$$

$-2I_{L_1}(0^-) - 2I_{L_2}(0^-) + 4I_{L_2}(0^-) = 10$

TABAN

$i_1(0^-) - i_2(0^-) = I_{L_1}(0^-)$

$\longrightarrow \quad i_1(0^-) = I_{L_1}(0^-) + I_{L_2}(0^-)$

$i_2(0^-) = I_{L_2}(0^-) = I_{L_3}(0^-)$

$$\begin{bmatrix} 3s+1 & -s \\ -2s & 4s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Es+5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} Es+5 & -s \\ 10 & 4s \end{vmatrix}}{(3s+1)4s - 2s^2} = \frac{4s(Es+5)+10s}{12s^2+4s-2s^2}$$

$$\boxed{I_1(s) = \frac{4s(Es+5)+10s}{s(10s+4)}}$$

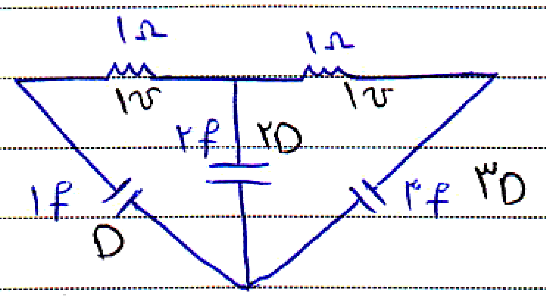
$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3s+1 & Es+5 \\ -2s & 10 \end{vmatrix}}{(3s+1)4s - 2s^2} = \frac{10(3s+1)+2s(Es+5)}{s(10s+4)}$$

$$I_{L_1}(s) = I_1(s) - I_2(s) = \frac{\boxed{}}{s(10s+4)}$$

$$I_{L_2}(s) = I_{L_3}(s) = \frac{10(3s+1)+2s(Es+5)}{s(10s+4)}$$

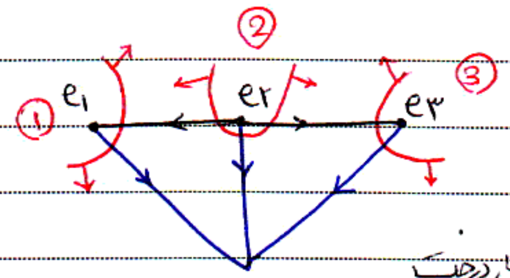
$s=0$, $s=\frac{-4}{10}$ فرکانس طبیعی جریان سلف‌ها است

مثال) فرکانس‌های طبیعی ولتاژ خازن‌ها را بدست آورید.



از روش معادلات حالت استفاده می‌کنیم

مدار خود در شرایط ورودی صفر است. (ورودی نداریم)



بردار ولتاژ شاخه‌ها در جهت

$$\begin{bmatrix} D+1 & -1 & 0 \\ -1 & 2D+2 & -1 \\ 0 & -1 & 3D+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} s+1 & -1 & 0 \\ -1 & 2s+2 & -1 \\ 0 & -1 & 3s+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{c_1}(0^-) \\ 2v_{c_2}(0^-) \\ 3v_{c_3}(0^-) \end{bmatrix}$$

$$E_1 = \frac{\begin{vmatrix} v_{c_1}(0^-) & -1 & 0 \\ 2v_{c_2}(0^-) & 2(s+1) & -1 \\ 3v_{c_3}(0^-) & -1 & (3s+1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s+1 & -1 & 0 \\ -1 & 2(s+1) & -1 \\ 0 & -1 & 3s+1 \end{vmatrix}} = \frac{v_{c_1}(0^-)\left[2(s+1)(3s+1)-1\right] + \left(2v_{c_2}(0^-)(3s+1)+3v_{c_3}(0^-)\right)}{s+1\left[2(s+1)(3s+1)-1\right]-(-1)\times(-3s-1)}$$

صورت کسر $= A$

$$= \frac{A}{2(s+1)^2(3s+1)-(s+1)-3s-1} = \frac{A}{2(s+1)^2(3s+1)-4s-2}$$

$$\frac{A}{(2s^2+4s+2)(3s+1)-4s-2} = \frac{A}{6s^3+2s^2+12s^2+4s+6s+2-4s-2}$$

$$= \frac{A}{6s^3+14s^2+6s} = \frac{A}{s(6s^2+14s+6)}$$

$s=0$ فرکانس صفر ولتاژ خازن C_1 است یعنی ولتاژ مدار در حالت دائمی یک مقدار ثابت خواهد بود.

$$e_1(\infty) = \lim_{s \to 0} sE_1(s) = \frac{v_{c1}(0^-)+2v_{c2}(0^-)+3v_{c3}(0^-)}{6}$$

e_2 و e_3 به عهده دوستان.

فرکانس های طبیعی کل مدار ۲ (فرکانس های طبیعی موجود در شبکه)

فرکانس های طبیعی شبکه، اجتماع ۲b فرکانس های طبیعی متغیرهای شاخه‌ها می‌باشد. ثابت می‌شود برای به دست آوردن فرکانس های طبیعی شبکه لازم نیست تمام فرکانس های طبیعی ۲b متغیرهای شاخه‌ها را به دست آوریم، زیرا اگر $S \neq 0$ فرکانس طبیعی جریان شاخه باشد، فرکانس طبیعی ولتاژ شاخه هم خواهد بود.

۱) شاخه مقاومت باشد.

$$j_k = I e^{st}$$

$$v_k = R j_k = \underbrace{RI}_{V} e^{st} = V e^{st}$$

۲) شاخه سلف باشد.

$$v_k = L \frac{dj_k}{dt} = L \frac{d}{dt}\left[I e^{st}\right] = \underbrace{LIs}_{V} e^{st} = V e^{st}$$

۳) شاخه خازن باشد.

$$v_k = \frac{1}{C}\int j_k\, dt + v_c(0^-) = \frac{1}{C}\int_0^t I e^{st}\, dt + v_c(0^-)$$

$$= \underbrace{\frac{I}{C} \times \frac{1}{s}}_{V} e^{st} \underbrace{+ v_c(0^-)}_{-\frac{I}{Cs}} = V e^{st} + \underbrace{v_c(0^-) - V}$$

به طور مشابه می‌توان اثبات کرد اگر $S \neq 0$ فرکانس طبیعی ولتاژ شاخه باشد، فرکانس طبیعی جریان شاخه هم خواهد بود.

$S = 0$ ممکن است فرکانس طبیعی ولتاژ شاخه باشد ولی فرکانس طبیعی جریان آن شاخه نباشد. یک مثال برای آن؟

ولتاژ جریان دوالعکس.

تعمیم: فرکانس های طبیعی غیر صفر هر شبکه ی خطی و تغییر ناپذیر با زمان همان ریشه های غیر صفر معادله ی دترمینان $p(s)$ است که $p(s)$ ماتریسی است که در یکی از ۴ روش، معادلات مدار را توصیف می کند.

در روش گره: $Y_n(s)E(s) = I_s(s) + \alpha \longrightarrow p(s) = Y_n(s)$

در روش مش: $Z_n(s)I(s) = E_s(s) + \alpha \longrightarrow p(s) = Z_n(s)$

در روش حلقه اساسی: $Z_B(s)I(s) = E_s(s) + \alpha \longrightarrow p(s) = Z_B(s)$

در روش کات ست اساسی: $Y_Q(s)\,E(s) = I_s(s) + \alpha \longrightarrow p(s) = Y_Q(s)$

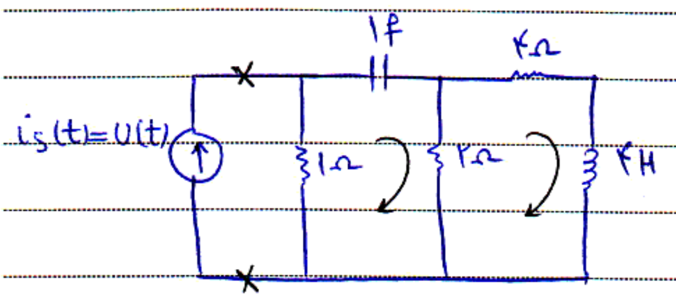
اثبات) مثلاً در روش گره:

$$E(s) = Y_n^{-1}(s)\left(I_s(s) + \alpha\right)$$

$$E(s) = \frac{\text{ماتریس دترمینان کهاد}}{\det\left(Y_n(s)\right)}\left[I_s(s) + \alpha\right]$$

ریشه های آن فرکانس های طبیعی را می دهد.

مثال) فرکانس های طبیعی شبکه را بدست آورید؟



ورودی را صفر می کنیم، دو مش داریم

$$Z_n = \begin{bmatrix} \frac{1}{D} + 3 & -2 \\ -2 & 2 + 4D + 4 \end{bmatrix}$$

$$Z_n(s)=\begin{bmatrix} \frac{3s+1}{s} & -2 \\ -2 & 4s+6 \end{bmatrix}$$

$$\det\left(Z_n(s)\right)=\frac{(3s+1)(4s+6)-4s}{s}=\frac{12s^2+18s+6}{s}=\frac{6(2s^2+3s+1)}{s}$$

$$\left|Z_n(s)\right|=0 \xrightarrow[\frac{-3\pm 1}{4}]{} \begin{cases} s=-\frac{1}{2} \\ s=-1 \end{cases}$$

مرتبه ی مدار و تعداد فرکانس های صفر:

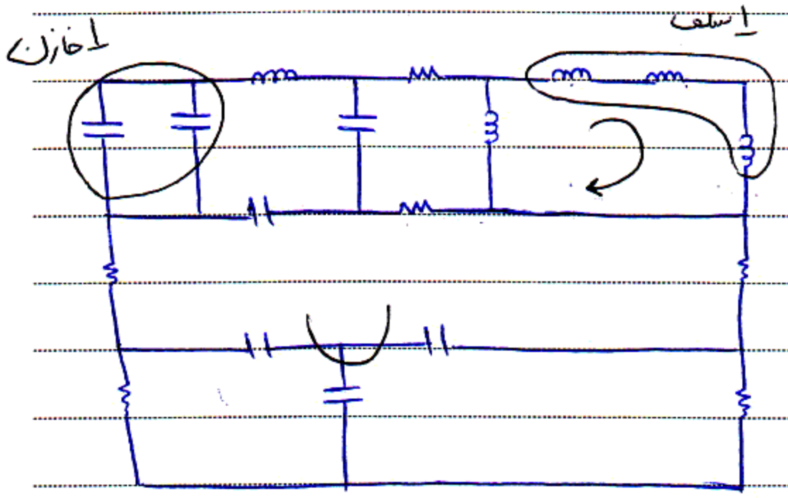
به درجه دترمینان P(s) (|P(s)|)، ~~دترمینان~~ مرتبه ی مدار می گوییم که معادل با:

(تعداد کات ست های سلفی) − (تعداد حلقه های خازنی) − (تعداد عناصر ذخیره کننده انرژی)

که برابر با تعداد فرکانس های صفر نیز هست. تعداد فرکانس های صفر غیر صفر:

(تعداد حلقه های سلفی) − (تعداد کات ست های خازنی) − (مرتبه ی مدار)

مثال)



۹ = تعداد عناصر ذخیره کننده
0 = تعداد حلقه های خازنی
0 = کات ست سلفی
→ مرتبه مدار: ۹

1 = تعداد کات ست خازنی
1 = حلقه سلفی

۹ = تعداد فرکانس های طبیعی
۷ = تعداد فرکانس های غیر صفر

فرکانس های طبیعی و معادلات حالت:

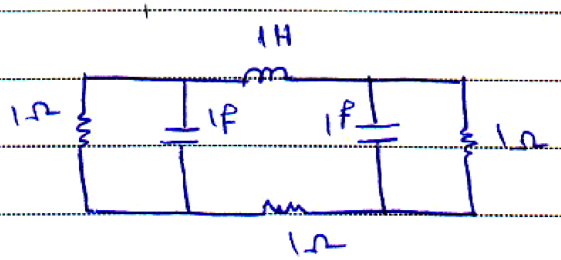
در معادلات حالت داشتیم: $X(s) = (sI - A)^{-1}\left[BU(s) + x(0^-)\right]$

در فرکانس های طبیعی → ورودی صفر $\quad X(s) = (sI - A)^{-1}\, x(0^-)$

روش دیگر به دست آوردن فرکانس های طبیعی: $|sI - A| = 0$

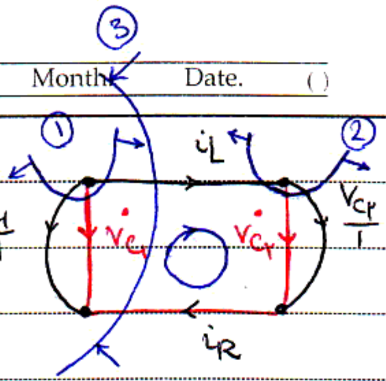
ضمناً مرتبه مدار معادل با درجه $(sI - A)$ است یعنی درجه $|(sI - A)|$ در s

مثال) با استفاده از معادلات حالت، فرکانس های طبیعی را پیدا کنید؟



وقتی از طریق معادلات حالت می‌خواهیم فرکانس های طبیعی را پیدا کنیم به ماتریس B نیاز نیست، یعنی حتی اگر مدار دارای ورودی باشد، می‌توانیم ورودی ها را بکشیم. منابع وابسته را نمی‌توانیم بکشیم.

Subject:
Year. Month Date. ( )



$$\text{KCL}: \dot{V}_{C_1} + V_{C_1} + i_L = 0 \longrightarrow \dot{V}_{C_1} = -V_{C_1} - i_L$$

$$\text{KCL}: \dot{V}_{C_2} + V_{C_2} - i_L = 0 \longrightarrow \dot{V}_{C_2} = -V_{C_2} + i_L$$

$$\text{KVL}: \dot{i}_L + V_{C_2} + i_R \times 1 - V_{C_1} = 0 \longrightarrow \dot{i}_L = V_{C_1} - V_{C_2} - i_R$$

$$\text{KCL}: i_R - i_L = 0 \longrightarrow i_R = i_L \qquad \dot{i}_L = V_{C_1} - V_{C_2} - i_L$$

حال می‌توانیم ماتریس A و سپس $(SI - A)$ را محاسبه کنیم.

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_{C_1} \\ \dot{V}_{C_2} \\ \dot{i}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{C_1} \\ V_{C_2} \\ i_L \end{bmatrix}$$

$$SI - A = \begin{bmatrix} S & 0 & 0 \\ 0 & S & 0 \\ 0 & 0 & S \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S+1 & 0 & 1 \\ 0 & S+1 & -1 \\ -1 & 1 & S+1 \end{bmatrix}$$

$\det(SI - A) = 0 \longrightarrow$ فرکانس‌های طبیعی

$$|SI - A| = (S+1)\left[(S+1)^2 + 1\right] + (S+1)$$

$$= (S+1)\left[S^2 + 2S + 2\right] + (S+1) = (S+1)(S^2 + 2S + 3) \quad \begin{cases} S_1 = -1 \\ S_2 = -1 + j\sqrt{2} \\ S_3 = -1 - j\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\frac{-2 \pm 2\sqrt{2}\,j}{2}$$

معادلات استقرار، ۳ و پاسخ حالت دائم

فصل ۱۵ : توابع شبکه

به طور کل تابع شبکه به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$H(s)=\frac{L\left[\text{پاسخ حالت صفر}\right]}{L\left[\text{منبع ورودی}\right]}$$

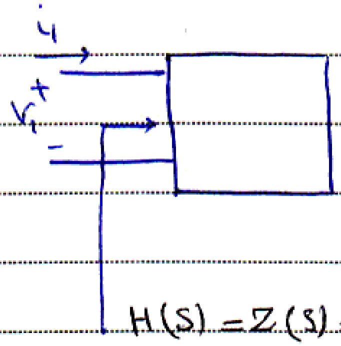
معمول است که در بررسی تابع شبکه، منبع ورودی را تابع ضربه در نظر می‌گیرند

$$H(s)=\frac{L[h(t)]}{L[\delta(t)]}=L[h(t)]$$

$h(t)$ پاسخ ضربه می‌باشد

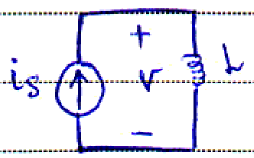
انواع تابع شبکه :

۱) امپدانس نقطه تحریک : (Z_s)



$$H(s)=Z(s)=\frac{V_1(s)}{I_1(s)}$$

مثال)

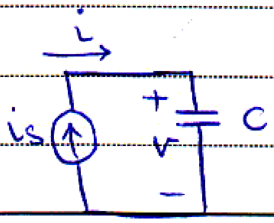


$$v=L\frac{di_s}{dt}\xrightarrow{L} LsI_s(s)-\cancel{Li_L(0^-)}$$

گفتیم که تابع شبکه در حالت صفر محاسبه می‌شود

$$\Rightarrow Z_s=\frac{V(s)}{I(s)}=Ls$$

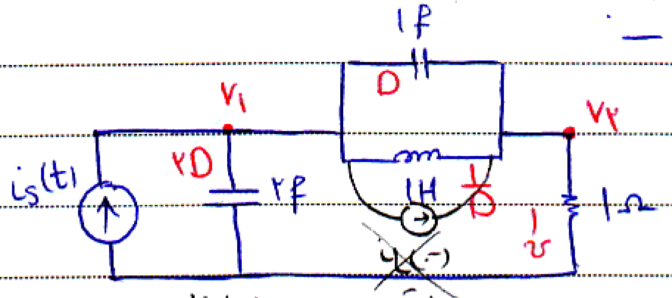
مثال)



$$v=\frac{1}{C}\int_0^t i_s dt+\cancel{v_C(0^-)}$$

$$V(s)=\frac{1}{Cs}I(s) \longrightarrow Z(s)=\frac{1}{Cs}$$

مثال) در مدار زیر امپدانس نقطه تحریک را بدست آورید؟



در حالت صفر

$$Z(s)=\frac{V_1(s)}{I_s(s)}$$

از روش گره حل می‌کنیم. هدف بدست آوردن $Z(s)$ است.

شرایط اولیه نداریم مستقیماً معادلات حوزه لاپلاس را می‌نویسیم. (D را به s تبدیل می‌کنیم.)

$$\begin{bmatrix} 2s+s+\frac{1}{s} & -(s+\frac{1}{s}) \\ -(s+\frac{1}{s}) & s+\frac{1}{s}+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I_s \\ 0 \end{bmatrix}+\underbrace{\begin{bmatrix} 2V_1(0^-)+\ldots \\ \ldots \end{bmatrix}}_{\text{بردار شرایط اولیه}=0}$$

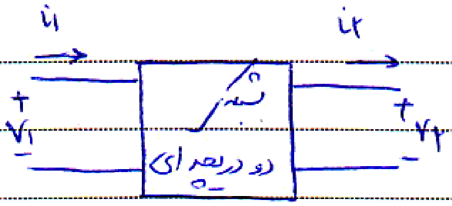
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 3s+1 & -\frac{s^2+1}{s} \\ -\frac{s^2+1}{s} & \frac{s^2+s+1}{s} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I_s \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$V_1=\frac{\frac{s^2+s+1}{s}I_s}{\frac{(3s^2+1)(s^2+s+1)}{s^2}-\frac{(s^2+1)^2}{s^2}} \Rightarrow Z(s)=\frac{V_1(s)}{I_s(s)}=\frac{s(s^2+s+1)}{(3s^2+1)(s^2+s+1)-(s^2+1)^2}$$

تعریف توابع شبکه با استفاده از دوقطبی‌ها؟

برخی توابع شبکه را با استفاده از شبکه‌های دوقطبی تعریف می‌کنیم.

۱) امپدانس نقطه تحریک: (وقتی تحریک از ورودی اعمال شود)



$$H(S)=Z(S)=\frac{V_1(S)}{I_1(S)}$$

۲) امپدانس انتقالی:

$$H(S)=\frac{V_2(S)}{I_1(S)}$$

۳) ادمیتانس انتقالی:

$$H(S)=\frac{I_2(S)}{V_1(S)}$$

۴) نسبت انتقال ولتاژ:

$$H(S)=\frac{V_2(S)}{V_1(S)}$$

۵) نسبت انتقال جریان:

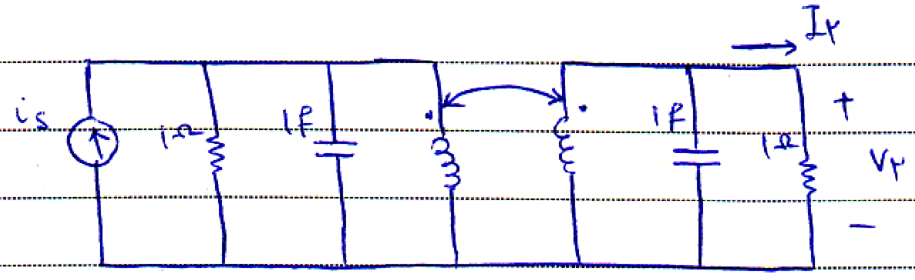
$$H(S)=\frac{I_2(S)}{I_1(S)}$$

گاهاً از ترکیب این توابع استفاده می‌کنیم

مثال $\dfrac{\left(\frac{I_1}{V_2}\right)}{\frac{V_1}{V_2}}=\dfrac{I_1}{V_1}$ ادمیتانس نقطه تحریک

مثال) در مدار زیر توابع شبکه زیر را حساب کنید.

الف) امپدانس نقطه تحریک $\frac{V_1}{I_1}$ ب) امپدانس انتقالی $\frac{V_2}{I_1}$ ج) نسبت انتقال ولتاژ $\frac{V_2}{V_1}$



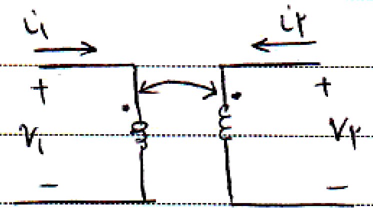
$$L=\begin{bmatrix}2&1\\1&1\end{bmatrix}$$

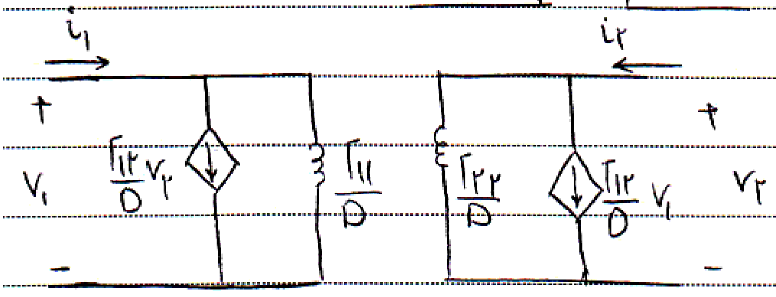
با توجه به ماهیت المان‌ها که به طور موازی‌اند بهتر است از روش ولتاژ گره‌ها استفاده می‌کنیم

TABAN

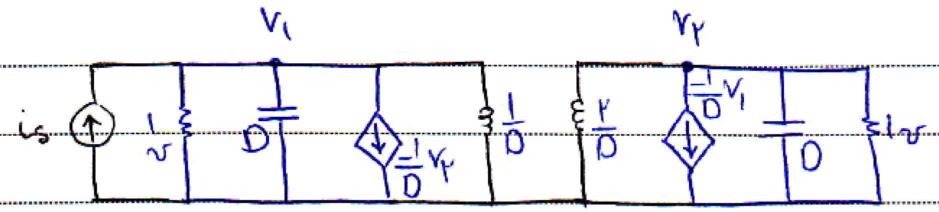
$$L=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix} \longrightarrow \Gamma = L^{-1} = \frac{1}{2-1}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \Gamma = \begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}$$





$\Rightarrow$



$$\begin{bmatrix} s+\frac{1}{s}+1 & 0\\ 0 & \frac{2}{s}+s+1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_1\\ V_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_s+\frac{1}{D}V_2\\ \frac{1}{D}V_1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{s^2+s+1}{s} & \frac{-1}{s}\\ -\frac{1}{s} & \frac{s^2+s+2}{s}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_1\\ V_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_s\\ 0\end{bmatrix}$$

$$Z(s)=\frac{V_1(s)}{I_s(s)} \qquad H_1(s)=\frac{V_2(s)}{I_s(s)} \qquad H_2(s)=\frac{V_2(s)}{V_1(s)}=\frac{H_1(s)}{Z(s)}$$

$$V_1(s)=\frac{\frac{s^2+s+1}{s}\,I(s)}{\frac{(s^2+s+1)(s^2+s+2)}{s^2}-\frac{1}{s^2}} \Rightarrow \boxed{Z(s)=\frac{s(s^2+s+1)}{(s^2+s+1)(s^2+s+2)-1}}$$

ABAN

$$V_2(s)=\frac{\frac{1}{s}\,I_s(s)}{\frac{(s^2+s+1)(s^2+s+2)}{s^2}-\frac{1}{s^2}} \Rightarrow H_1(s)=\frac{s}{(s^2+s+1)(s^2+s+2)-1}$$

$$H_2(s)=\frac{1}{s^2+s+1}$$

۱۰- پتانسیلهای قطب و صفر:

این یک روش برای تابع شبکه توابع و رسم آن در صفحه مختلط طرح می‌کنند

تابع $H(S)$ را در نظر بگیرید فرم کلی تابع شبکه:

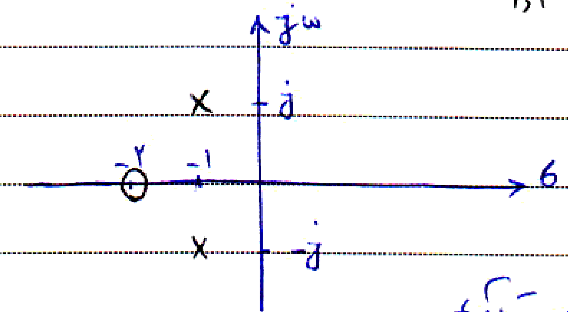
$$H(S)=\frac{b_m S^m+b_{m-1}S^{m-1}+\dots+b_1 S+b_0}{a_n S^n+a_{n-1}S^{n-1}+\dots+a_1 S+a_0} \qquad m\leq s \qquad m\leq n$$

در صفحه مختلط (σ و $j\omega$) صفرهای تابع شبکه را با علامت O و قطبها را با X نمایش می‌دهیم

برعکس به دست آمده از پتانسیلات قطب و صفر را می‌نویسیم

تابع شبکه زیر را رسم کنید:

$$H(S)=\frac{K(S+2)}{S^2+2S+2} \quad \begin{cases} z_1=-2 \\ p_{1,2}=-1\pm j \end{cases}$$



از روی شکل می‌توانیم به تابع شبکه برسیم ولی K را نمی‌توانیم به دست آوریم

برای به دست آوردن K باید در یک نقطه مشخص مقدار تابع شبکه را داشته باشیم

$$H(j\omega)=\frac{K(2+j\omega)}{2-\omega^2+2j\omega}$$ فرض کنید $H(j0)=2$

$$H(j0)=\frac{2K}{2}=2 \longrightarrow K=2 \Rightarrow H(S)=\frac{2(S+2)}{S^2+2S+2}$$

تابع شبکه در حالت دائمی سینوسی ، ورودی Sin, Cos است

$$X(S) \longrightarrow \boxed{H(S)} \longrightarrow Y(S)$$ در ورودی پله و ضربه نامعلوم

$$\boxed{H(S)=\frac{Y(S)}{X(S)}} \qquad H(j\omega)=\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} \qquad Y(j\omega)=X(j\omega)H(j\omega)$$

$$|Y(j\omega)|\angle Y(j\omega)=|X(j\omega)|\angle X(j\omega)\times|H(j\omega)|\angle H(j\omega)$$

$$|Y(j\omega)|\angle Y(j\omega)=|X(j\omega)||H(j\omega)|\angle\angle X(j\omega)+\angle H(j\omega)$$

$$\cancel{X(j\omega)}\ x(t)=A\cos(\omega t+\phi)\longrightarrow X(j\omega)=A\angle\phi$$ درحوزه دائمی سینوسی

$$|Y(j\omega)|\angle Y(j\omega)=A|H(j\omega)|\angle\phi+\angle H(j\omega)$$

$$\xrightarrow{\text{انتقال به زمان سینوسی}} y(t)=A|H(j\omega)|\cos(\omega t+\phi+\angle H(j\omega))$$

مثال) فرض کنید $$y(t)=?\Leftarrow x(t)=\cos t\,u(t)\ ,\ H(S)=\frac{S^2+4}{(S+2)(S^2+3S+4)}$$

راه حل سخت: $$X(S)=\frac{S}{S^2+1}$$

$$Y(S)=X(S)H(S)\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}}y(t)$$

$$x(t)=A\cos(\omega t+\theta)\Rightarrow X(j\omega)=A\angle\theta$$

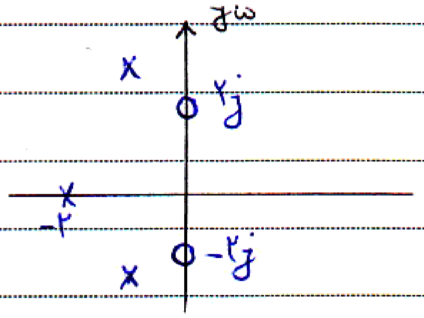
راه حل آسان: چون ورودی سیستم سینوسی تک فرکانس است از تحلیل سینوسی حالت ماندگار استفاده می‌کنیم.

$\omega = 1$

$$H(j1) = \frac{4-1}{(2+j1)(4-1+3j\omega)} = \frac{3}{(2+j1)(3+3j\omega)} = \frac{1}{(2+j)(1+j)}$$

$$H(j1) = \frac{1}{1+3j} = \frac{1}{\sqrt{10}\angle 71.5^\circ} = \frac{1}{\sqrt{10}}\angle -71.5^\circ$$

$$X(j1) = 1\angle 0$$



$$Y(j1) = 1 \times \frac{1}{\sqrt{10}} \angle\left(0 + (-71.5)\right) = \frac{1}{\sqrt{10}} \angle -71.5^\circ$$

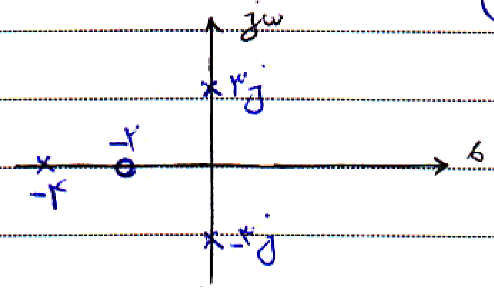
$$\rightarrow y(t) = \frac{1}{\sqrt{10}} \cos(t - 71.5^\circ)$$

تمرین) اگر $x(t) = \cos 2t \leftarrow y(t) = ?$

$$H(j\omega) = \frac{4-\omega^2}{(2+j\omega)(4-\omega^2+3j\omega)}$$

$$H(j2) = 0 \longrightarrow Y(j2) = 0 \longrightarrow y(t) = 0$$

تمرین) $x(t) = \cos 3t \quad H(s) = \dfrac{s+2}{(s^2+9)(s+4)} \quad , y(t) = ?$



$$H(j\omega) = \frac{2+j\omega}{(9-\omega^2)(4+j\omega)} \longrightarrow H(j3) = \infty$$

$$\longrightarrow Y(j3) = \infty \longrightarrow y(t) = \infty$$

✓ اگر صفر از تابع تبدیل روی محور $j\omega$ قرار داشته باشد، پاسخ حالت دائمی سینوسی به ازای آن فرکانس صفر است

TABAN

✓ اگر قطبی روی محور $j\omega$ قرار داشته باشد پاسخ حالت دائمی سینوسی به ازای آن فرکانس بی‌نهایت است.

این حالت به معنای تحریک هم‌زمان در فرکانس طبیعی است.

پاسخ فرکانسی:

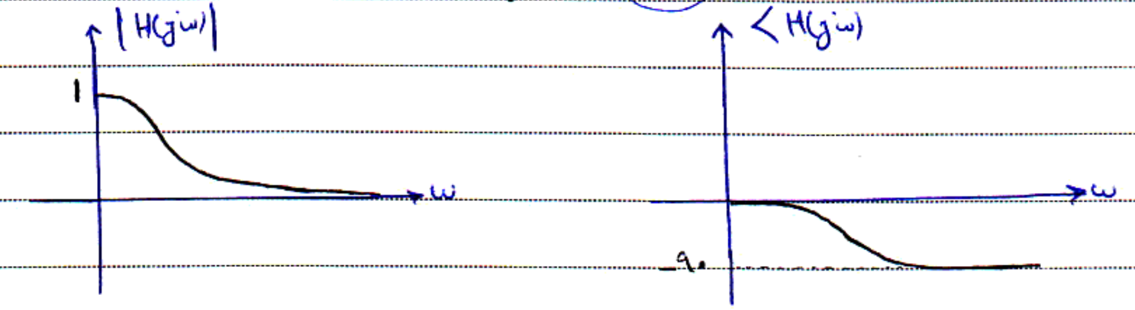
$$H(j\omega) = |H(j\omega)| \angle H(j\omega)$$

به اطلاعات بر حسب $|H(j\omega)|$ و $\angle H(j\omega)$، پاسخ فرکانسی می‌گوییم.

مثال)

$$H(s) = \frac{1}{s+1}$$

$$H(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega} = \frac{\sqrt{1} \angle 0}{\sqrt{1+\omega^2} \angle tg^{-1}\omega} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}}_{|H(j\omega)|} \angle \underbrace{-tg^{-1}\omega}_{\angle H(j\omega)}$$



در این درس به دنبال $|H(j\omega)|$ و $\angle H(j\omega)$ در یک الگوی مشخص هستیم. برای این کار به صورت زیر عمل می‌کنیم:

1) قطب‌ها و صفرهای تابع را معین می‌کنیم.

$$H(s) = \frac{K\prod_{j=1}^{m}(s-z_j)}{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)}$$

یعنی:

$$H(j\omega) = \frac{K(j\omega)\prod_{j=1}^{m}(j\omega-z_j)}{\prod_{j=1}^{n}(j\omega-p_j)}$$

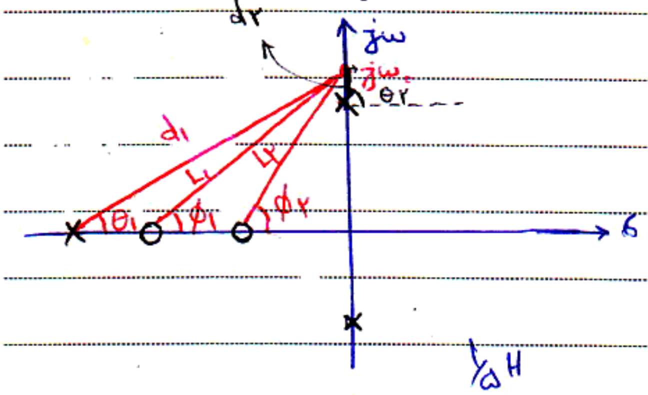
TABAN

$$|H(j\omega)| = |K(j\omega)| \cdot \sum_{j=1}^{m} |j\omega - z_j| \Big/ \sum_{j=1}^{n} |j\omega - p_j|$$

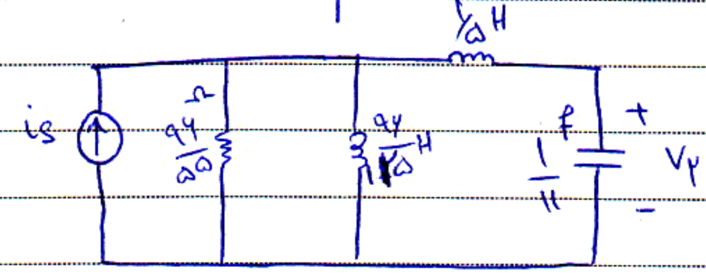
$$\angle H(j\omega) = \angle K(j\omega) + \sum_{j=1}^{m} \angle (j\omega - z_j) - \sum_{j=1}^{n} \angle (j\omega - p_j)$$

۲) قطب‌ها و صفرها را در صفحه s مشخص می‌کنیم و از قطب‌ها و صفرها به نقطه $j\omega_0$ یعنی نقطه‌ای که می‌خواهیم اندازه و فاز را در آن بدست آوریم، خطوطی را رسم می‌کنیم. هرگاه اندازه بردارهایی که از صفرها رسم می‌شوند را با L_1 و L_2 و ... و L_m و زوایای این بردارها را با محور حقیقی با ϕ_1 ، ϕ_2 و ... و ϕ_m نشان دهیم و همچنین اندازه بردارهایی را که از قطب‌ها رسم می‌شوند با d_1 ، d_2 و ... و d_n نشان دهیم و زوایای این بردارها را با محور حقیقی با θ_1 ، θ_2 و ... و θ_n نمایش دهیم:

$$|H(j\omega_0)| = \frac{|K(j\omega)| \prod_{j=1}^{m} L_j}{\prod_{j=1}^{n} d_j} \quad , \quad \angle H(j\omega_0) = \sum_{j=1}^{m} \phi_j - \sum_{j=1}^{n} \theta_j$$



مثال) مدار حل، چون H(S) در حالت صفر محاسبه می‌شود پس شرایط اولیه نداریم.



الف) $H(S)=\dfrac{V_2(S)}{I_s(S)}$

ب) جریان ورودی برابر $i_s(t)=15\cos(4t-30)$.

الف) حل از
α
طرح

$$\begin{bmatrix} \frac{55}{96}+\frac{125}{96s}+\frac{5}{s} & \frac{-5}{s} \\ \frac{-5}{s} & \frac{5}{s}+\frac{s}{11} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1(S) \\ V_2(S) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I_s(s) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{525+55s}{96s} & \frac{-5}{s} \\ \frac{-5}{s} & \frac{s^2+55}{11s} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1(S) \\ V_2(S) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I(S) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$V_2(S)=\dfrac{\frac{5}{s}I(S)}{\dfrac{(55s+525)(s^2+55)}{96\times 11 s^2}-\dfrac{25}{s^2}}$$

$$\dfrac{V_2(S)}{I_s(S)}=\dfrac{96S}{(S+5)(S^2+6S+25)}\quad Z=0,\quad P_1=-5,\quad P_{2,3}=-3\pm 4j$$

$I_s(j\omega)=15\angle -30 \Rightarrow I_s(j4)=15\angle -30$

$I_s(S)=15\angle -30 \qquad \omega_0=4$

ب) حل از طریق راه اول:

$$H(j4)=\dfrac{96\times 4j}{(5+4j)(9+24j)}=2/22-0/727j=2/334\angle -18/13$$

$I_s(j4)=15\angle -30$

$\rightarrow V_2(j4)=2/334\times 15\angle -30-18/13 \Rightarrow V_2(j4)=35/01\angle -48/13$

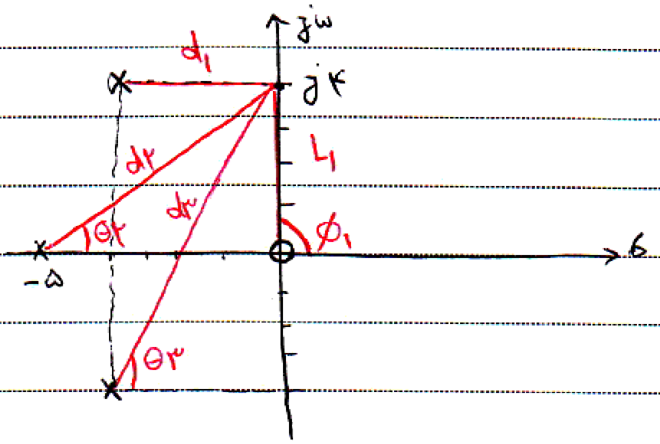
$\longrightarrow v_۲(t) = \cancel{۳۵/۰۴ \cos(۴t - ۴۸/۱۳)}$

حل از راه حل دوم : از شکلات قطب و صفر استفاده می‌کنیم

$$H(s) = \frac{V_۲(s)}{I_s(s)} = \frac{۹۶s}{(s+۵)(s^۲+۶s+۲۵)}$$

$z \longrightarrow s = ۰$

$p \longrightarrow -۵ \ , \ -۳ \pm ۴j$



$$\begin{cases} d_۱ = ۳ \\ \theta_۱ = ۰ \end{cases} \qquad \begin{cases} d_۲ = \sqrt{۵^۲ + ۴^۲} = ۶/۴ \\ \theta_۲ = tg^{-۱}\, \frac{۴}{۵} = ۳۸/۶۸ \end{cases} \qquad \begin{cases} d_۳ = \sqrt{۸^۲ + ۳^۲} = ۸/۵۴ \\ \theta_۳ = tg^{-۱}\, \frac{۸}{۳} = ۶۹/۵ \end{cases}$$

$$\begin{cases} L_۱ = ۴ \\ \phi_۱ = ۹۰ \end{cases} \qquad \left|H(j۴)\right| = \frac{|k|\, L_۱}{d_۱ d_۲ d_۳} = \frac{۹۶ \times ۴}{۶/۴ \times ۳ \times ۸/۵۴} = ۲/۳۴$$

$$\angle H(j۴) = \phi_۱ - \theta_۱ - \theta_۲ - \theta_۳ + \angle k = ۹۰ - ۳۸/۶۸ - ۶۹/۵ = -۱۸/۱۸$$

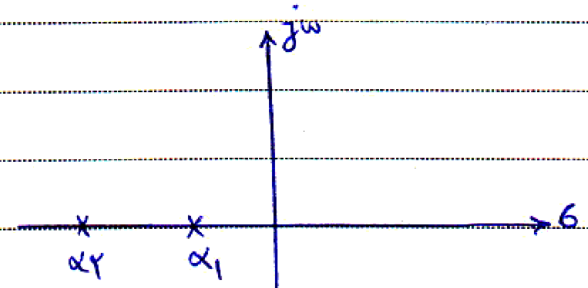
$$H(j۴) = ۲/۳۴ \angle -۱۸/۱۸$$

$$V_۲(j۴) = ۱۵ \angle -۳۰ \times ۲/۳۴ \angle -۱۸/۱۸ = ۳۵ \angle -۴۸/۱۸$$

$$v_۲(t) = ۳۵ \cos(۴t - ۴۸/۱۸)$$

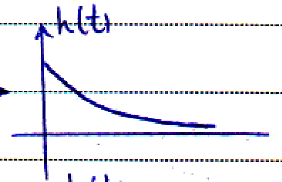
بررسی قطب‌های تابع تبدیل:

الف) قطب‌های حقیقی:



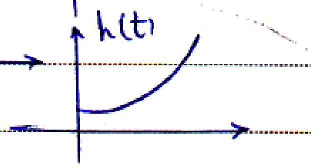
$$H(s) = \frac{k_1}{s-\alpha_1} + \frac{k_2}{s-\alpha_2} \Rightarrow h(t) = k_1 e^{\alpha_1 t} + k_2 e^{\alpha_2 t}$$

$\alpha_1 < 0 , \alpha_2 < 0 \longrightarrow$



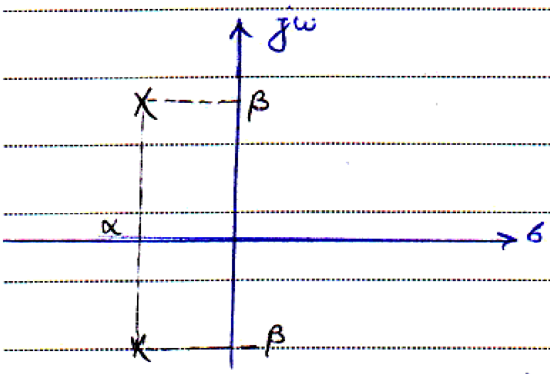
تابع پایدار است.

$\alpha_1 > 0$ یا $\alpha_2 > 0 \longrightarrow$ اگر یکی مثبت باشد.



ناپایدار

ب) قطب‌های مزدوج:



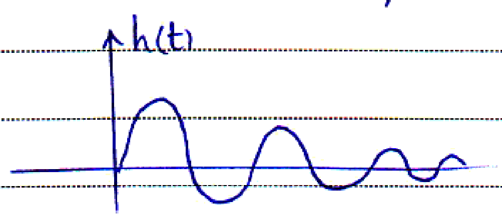
$$s_{1,2} = \alpha \pm j\omega$$

$$H(s) = \frac{K}{s-(\alpha+j\beta)} + \frac{K^*}{s-(\alpha-j\beta)}$$

$$h(t) = 2|k| e^{\alpha t} \cos(\beta t + \angle k)$$

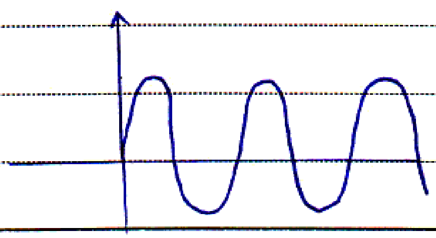
به α ضریب میرایی و به β فرکانس نوسان می‌گوییم.

$\alpha < 0$



قطب‌ها سمت چپ محور $j\omega$ $\longrightarrow$ وضعیت پایدار

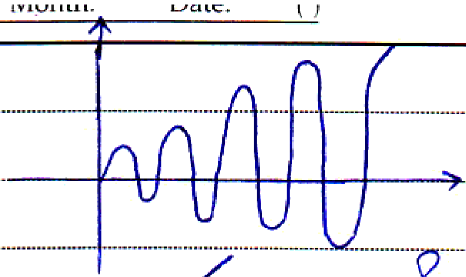
$\alpha = 0$



قطب‌ها روی محور $\longrightarrow$ وضعیت مرز پایدار

(در عمل امکان‌پذیر نیست)

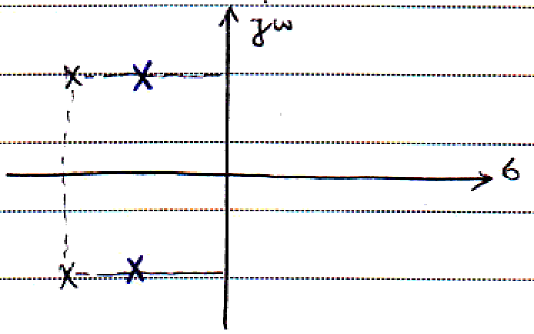
$\alpha > 0$

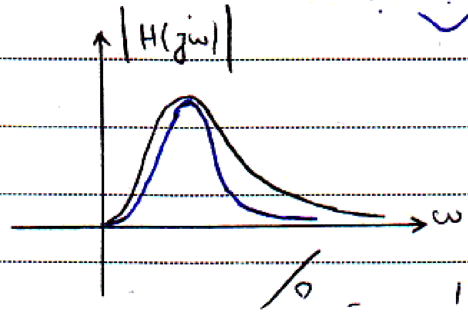


قطب‌ها سمت راست ← وضعیت ناپایدار

✓ برای مدارهای طبیعی هر قطبی چه حقیقی چه مزدوج اگر سمت راست محور $j\omega$ باشد، ایجاد ناپایداری می‌کند.

✓ وجود قطب مزدوج (مختلط) در پاسخ فرکانسی تابع شبکه ایجاد پیک‌هایی نوک تیز می‌کنند. هرچه این قطب‌ها از محور دورتر باشند پهنای باند بزرگتر است.





فرکانس‌های طبیعی و قطب‌های تابع شبکه؟

فرکانس‌های طبیعی را از یکی از روش‌های زیر بدست می‌آوریم؟

$|Y_n(s)| = 0$

یا

$|Z_m(s)| = 0$

یا

$|Z_B(s)| = 0$

یا

$|Y_Q(s)| = 0$

قابل فهم است که هر قطب تابع شبکه فرکانس طبیعی شبکه نیز هست، اما ممکن است یک فرکانس طبیعی، قطب تابع شبکه نباشد.

خاصیت تقارن در تابع تبدیل:

فرم کلی تابع تبدیل،

$$H(s)=\frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \qquad m \leq n$$

در حوزه فرکانس، $s \longrightarrow j\omega$

$(j\omega) = j\omega$

$(j\omega)^2 = -\omega^2$

$(j\omega)^3 = -j\omega^3$

$(j\omega)^4 = \omega^4$

$(j\omega)^5 = j\omega^5 = (j\omega)^3 \times (j\omega)^2$

$(j\omega)^6 = -\omega^6 = (j\omega)^4 \times (j\omega)^2$

$(j\omega)^7 = -j\omega^7$

$(j\omega)^8 = \omega^8 = (j\omega)^6 \times (j\omega)^2$

$\vdots$

$$H(j\omega)=\frac{(b_0 - b_2\omega^2 + b_4\omega^4 - \dots) + j\omega(b_1 - b_3\omega^2 + b_5\omega^4 - \dots)}{(a_0 - a_2\omega^2 - a_4\omega^4 \dots) + j\omega(a_1 - a_3\omega^2 + a_5\omega^4 \dots)}$$

$$H(j\omega)=\frac{(\text{چندجمله‌ای از } \omega^2) + j\omega(\text{چندجمله‌ای از } \omega^2)}{(\text{چندجمله‌ای از } \omega^2) + j\omega(\text{چندجمله‌ای از } \omega^2)}$$

$$\begin{cases} |H(j\omega)| = |H(-j\omega)| \\ Re[H(j\omega)] = Re[H(-j\omega)] \end{cases} \qquad \begin{cases} \angle H(j\omega) = -\angle H(-j\omega) \\ Im[H(j\omega)] = -Im[H(-j\omega)] \end{cases}$$

مثال) اطلاعات زیر از یک تابع تبدیل داده شده، حداقل تعداد قطب و ضرب‌ها چیست؟

$|H(j0)|=1$

$|H(j1)|=0 \qquad |H(j\infty)|=0$

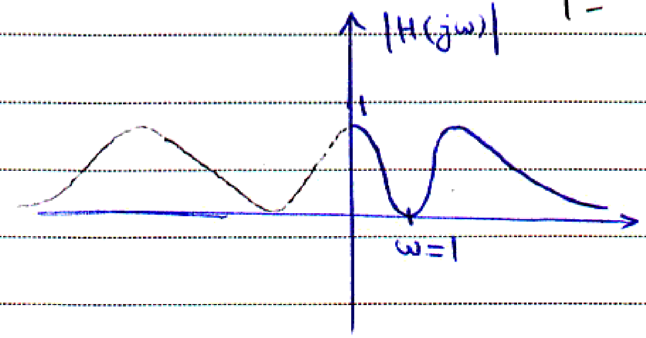
با توجه به خاصیت تقارن؛ $|H(-j1)| = 0$

پس حداقل دو صفر داریم $s = j$ و $s = -j$

با توجه به اینکه $|H(j\infty)| = 0$ یعنی درجه مخرج از درجه صورت حداقل یکی بالاتر است یعنی حداقل ۳ قطب

داریم. حتماً یکی از قطب ها حقیقی است و ممکن است دو قطب دیگر مزدوج باشند.

$$H(s) = \frac{(s-j)(s+j) = (s^2+1)}{(s-\gamma)\big(s-(\alpha+j\beta)\big)\big(s-(\alpha-j\beta)\big)}$$



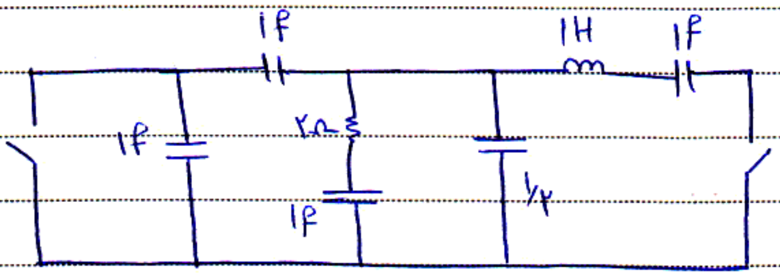
A) در مدار شکل زیر در دو حالت باز بودن کلیدها و بسته بودن کلیدها کدام گزینه صحیح است؟

۱) تعداد فرکانس های طبیعی در هر دو حالت ۵ است.

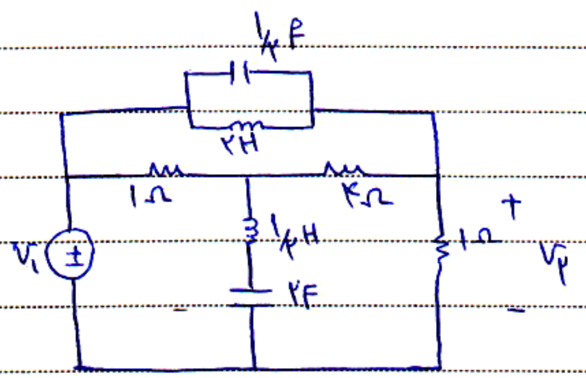
۲) تعداد فرکانس های طبیعی غیر صفر در یک حالت برابر ۱ است.

۳) تعداد فرکانس های طبیعی صفر در یک حالت برابر تعداد فرکانس های طبیعی غیر صفر در حالت دیگر است.

۴) موارد ۲ و ۳.



B) در مدار زیر تابع تبدیل $\frac{V_2}{V_1}$ کدام است؟



1) $\frac{2(s^2+1)}{(s+1)^2}$

2) $\frac{s^2+1}{(s+2)^2}$

3) $\frac{s^2+1}{s^2+s+1}$

4) $\frac{s^2+1}{(s+1)^2}$

«قضایای شبکه»

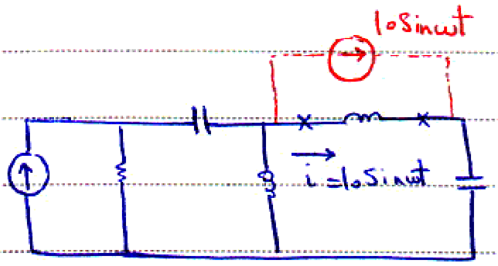
تفسیر جانشینی : کاربرد در شبکه‌های خطی، غیرخطی، تغییرپذیر و تغییرناپذیر با زمان

قضیه : هرگاه در شبکه N با مشخصات ذکر شده، عنصری با شاخه‌ای مانند k که تزویجی با سایر عناصر شبکه ندارد در نظر بگیریم،

جای آن را با این شاخه برابر با $V_k(t)$ و با جریانش برابر با $j_k(t)$ بوده و معادله تغییراتش مشخص باشد می‌توان

به جای شاخه k، منبع ولتاژی که معادله تغییراتش برابر با $V_k(t)$ یا منبع جریانی که معادله تغییراتش برابر با $j_k(t)$ باشد

قرار داد.



تفسیر جمع آثار : کاربرد در شبکه‌های خطی (تغییرپذیر یا تغییرناپذیر با زمان)

هرگاه شبکه N با مشخصات داده شده، فرض شود باشد اگر شبکه توسط تعدادی منبع مستقل تحریک شود، پاسخ

حالت صفر شبکه برابر است با جمع جبری پاسخ‌های حالت صفر ناشی از اعمال هر یک از منابع مستقل در صورتی که

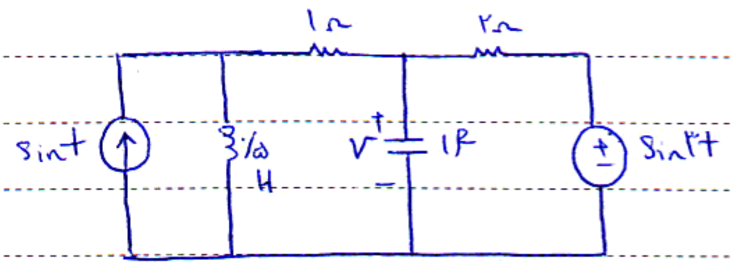
به تنهایی به شبکه اعمال شوند

تفسیر فرعی : هرگاه شبکه N خطی و تغییرناپذیر با زمان در حالت دائمی سینوسی باشد، پاسخ حالت صفر (پاسخ حالت

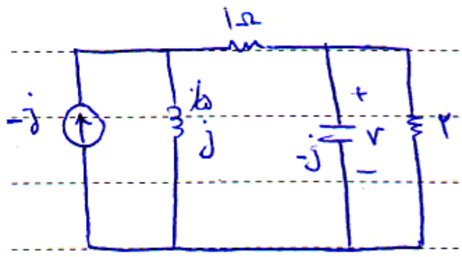
دائمی) ناشی از اعمال یک تعداد منابع سینوسی مستقل (حتی با فرکانس‌های متفاوت) برابر است با ،

مجموع جبری پاسخ‌های دائمی سینوسی ناشی از اعمال هریک از منابع وقتی به تنهایی به شبکه اعمال می‌شوند.

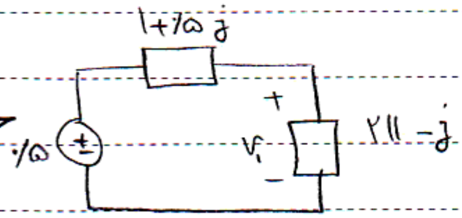
مثال: $v(t)$ را در مدار زیر بدست آورید؟

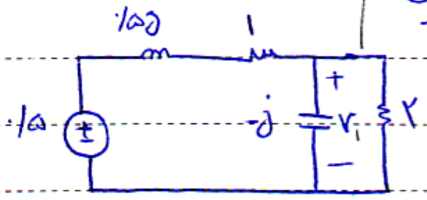


حل: از جمع آثار استفاده می‌کنیم و از تحلیل سینوسی حالت ماندگار.



$\omega = 1$



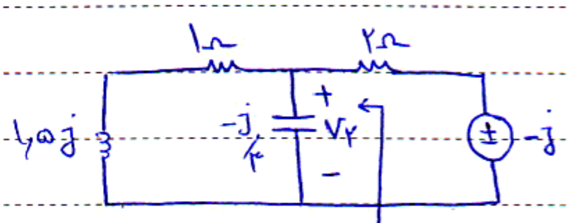


V_1 ناشی از منبع جریان

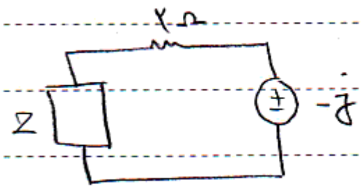
$$V_1 = \frac{(2 \| -j)}{0.5j + 1 + (2 \| -j)} \times 0.5 = \frac{0.4 - 0.8j}{0.5j + 1 + 0.4 - 0.8j} \times 0.5$$

$$V_1 = \frac{8}{41} - \frac{10}{41} j = 0.31 \angle -51.34$$

$$\Rightarrow v_1(t) = 0.31 \cos(t - 51.34)$$



$\omega = 3$



$$Z = (1 + 1.5j) \| (-j/3) = 0.047 - 0.388j$$

V_2 ناشی از منبع ولتاژ

$$V_2 = -j \times \frac{(0.047 - 0.388j)}{2 + (0.047 - 0.388j)} = -0.178 - 0.0598j = 0.187 \angle 197.7$$

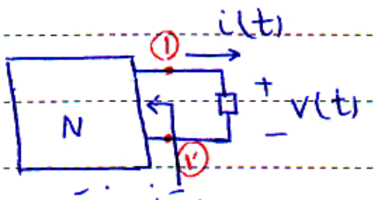
$v_2(t) = 0.187\cos(3t + 197.7)$

چون فرکانس ها متفاوت اند مجبوریم در حوزه زمان آن ها را با هم جمع کنیم. $v(t) = v_1(t) + v_2(t)$

$v(t) = 0.31\cos(t - 51.34) + 0.187\cos(3t + 197.7)$

قضیه جانشینی، معادل تونن و نورتن : کاربرد در شبکه های خطی تغییرپذیر یا تغییرناپذیر با زمان

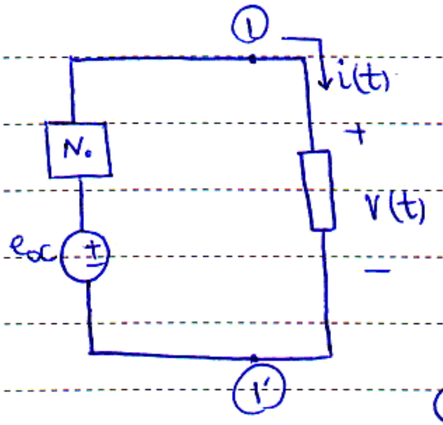
براساس این قضیه اگر شبکه N را با یک شبکه معادل تونن یا نورتن تعویض کنیم هیچگونه تغییر در شکل موج جریان (یعنی $i(t)$) و شکل موج ولتاژ (یعنی $v(t)$) در مدار بیرونی شبکه حاصل نمی شود.



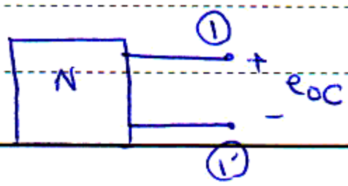
معادل تونن یا نورتن

شرط این است که تزویجی با سایر عناصر شبکه نداشته باشد.

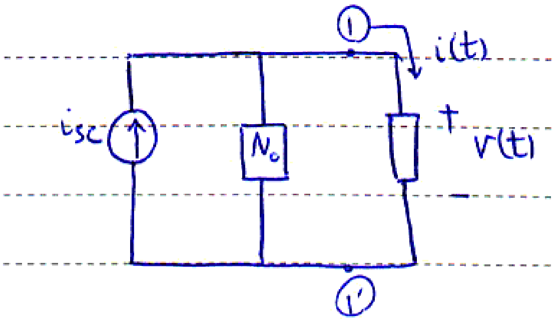
تفسیر شبکه معادل تونن: هر شبکه با مشخصات موجود را می توان با شبکه زیر معادل نمود که در آن شبکه N_0 شبکه در حالت استراحت یا شبکه معادل ورودی صفر و حالت صفر شبکه اولیه است.

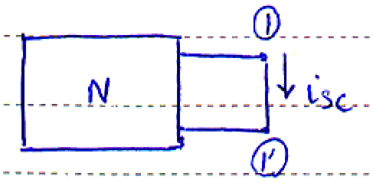


منبع ولتاژ e_{oc}، ولتاژ مدار باز دو سر (1) و (1') است که به وسیله منابع مستقل شبکه در شرایط اولیه به وجود می آید.

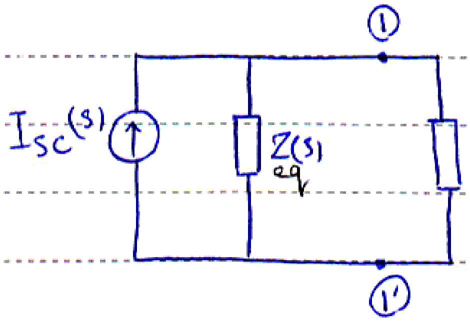


تفسیر شبکه معادل نورتن: هر شبکه با مشخصات فوق را می‌توان با شبکه زیر معادل کرد که در آن شبکه N_0 مشابه حالت قبل است و I_{sc} جریان اتصال کوتاه دو سر $(11')$ ناشی از منابع مدار و شرایط اولیه آن است.

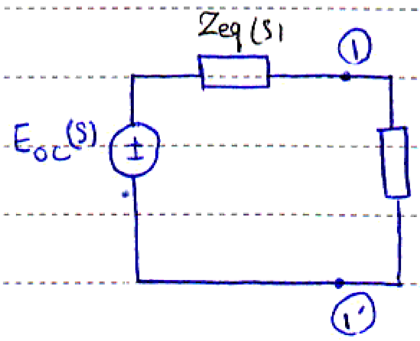




تفسیر دوم: هرگاه شبکه N خطی و تغییرناپذیر با زمان باشد می‌توان از تبدیل لاپلاس استفاده نمود و مدارهای معادل تونن و نورتن را به صورت زیر حاصل کرد



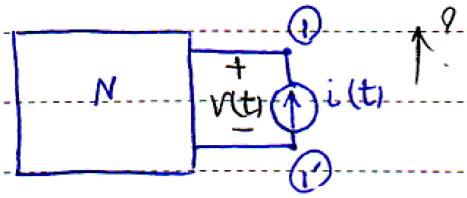
$$Z_{eq}(S) = \frac{E_{oc}(S)}{I_{sc}(S)}$$



روش‌های به دست آوردن $Z_{eq}(S)$:

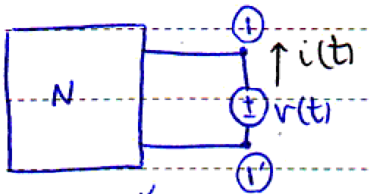
۱) روش اعمال منبع: یکی از دو روش زیر عمل می‌کنیم:

الف) یک منبع جریان $i(t)$ به دو سر $(11')$ اعمال می‌کنیم و ولتاژ دو سر آن را مانند شکل زیر به دست می‌آوریم



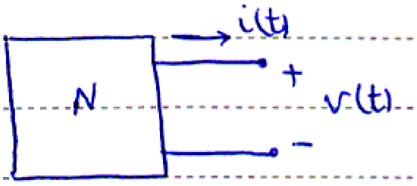
$$Z_{eq}=\frac{v(t)}{i(t)}$$

ب) یک منبع ولتاژ $v(t)$ به دو سر را اعمال می‌کنیم جریان آن را مانند شکل زیر بدست می‌آوریم.



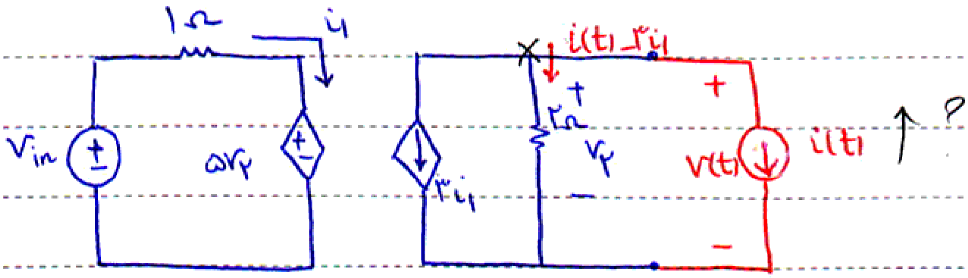
$$Z_{eq}=\frac{v(t)}{i(t)}$$

۲) معادله ولتاژ و جریان دو سر ①①′ را به صورت زیر بدست می‌آوریم (e_{oc} و i_{sc} را با ملاحظه به دست می‌آوریم)



$$v(t)=e_{oc}-Z_{eq}\,i(t)$$

مثال) معادل تونن از دیدگاه ①①′



حل تئوری: روش اعمال منبع: منبع جریان اعمال می‌کنیم

$v_2=v(t)=2(i(t)-3i_1)$

$\boxed{v(t)=2i(t)-6i_1}$ ①

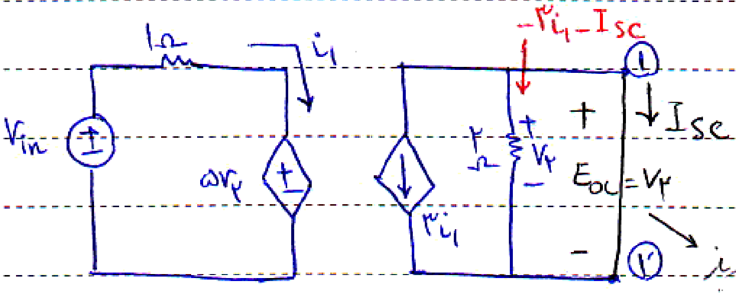
KVL: $V_{in}=i_1+5v(t) \longrightarrow \boxed{i_1=V_{in}-5v(t)}$ ②

① و ②: $v(t)=2i(t)-6V_{in}+30v(t) \Rightarrow 29v(t)=6V_{in}-2i(t)$

$$v(t) = \underbrace{\frac{6}{29} V_{in}}_{E_{oc}} \cancel{+} - \underbrace{\frac{2}{29}}_{Z_{eq}} i(t)$$

حل از طریق به دست آوردن معادل:

(روش دوم)



$\Rightarrow$ برای حالت اتصال کوتاه

برای حالت مدار باز

$$V_2 = -2\times 3 i_1 = -6 i_1 \qquad i_1 = \frac{V_{in} - 5V_2}{1} = V_{in} - 5(-6 i_1)$$

$$i_1 = V_{in} + 30 i_1 \longrightarrow i_1 = \frac{-V_{in}}{29} \qquad V_2 = \underbrace{\frac{6}{29}}_{E_{oc}} V_{in} \longrightarrow E_{oc} = \frac{6}{29} V_{in} \quad (V_2 = e_{oc})$$

$$V_2 = 0 \longrightarrow 2(-3 i_1 - I_{sc}) = 0 \Rightarrow -6 i_1 - 2 I_{sc} = 0 \longrightarrow I_{sc} = -3 i_1$$

$$KVL: \; i_1 = V_{in} - \cancel{5V_2}^{0} \Rightarrow i_1 = V_{in} \longrightarrow I_{sc} = -3 V_{in}$$

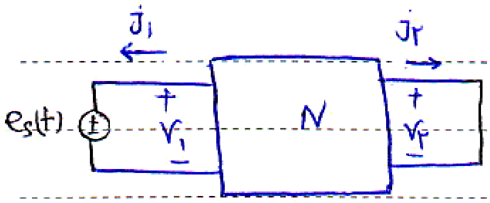
$$Z_{eq} = \frac{E_{oc}}{I_{sc}} = \frac{6/29}{-3} = -2/29$$

قضیه هم پاسخی: کاربرد در شبکه های خطی تغییر ناپذیر با زمان، بدون منابع وابسته و مستقل و بدون عنصری به نام ژیراتور و شرایط اولیه صفر. این قضیه سه نوع بیان دارد:

بیان ۱) هرگاه به شبکه N با مشخصات ذکر شده در ترکیبات الف و ب منابع زیر را اعمال کنیم خواهیم داشت:

$$j_2(t) = \hat{j}_1(t)$$

طبق قضیه تلگان :

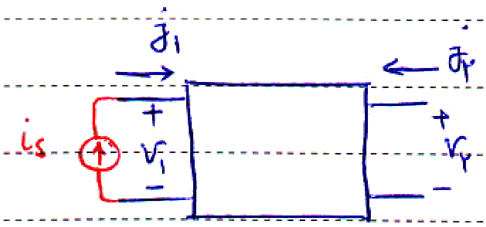


(الف)

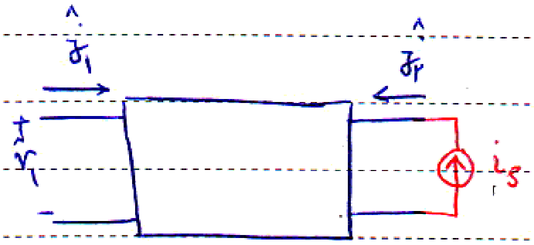
$$\underset{e_s}{v_1}\hat{j}_1 + \underset{0}{v_2}\hat{j}_2 = \underset{0}{\hat{v}_1} j_1 + \underset{e_s}{\hat{v}_2} j_2$$

$$e_s \hat{j}_1 = e_s j_2 \longrightarrow \hat{j}_1 = j_2$$

مثال ۲)



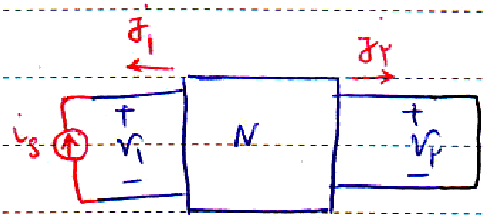
طبق قضیه تلگان :



$$v_1 \underset{0}{\hat{j}_1} + v_2 \underset{i_s}{\hat{j}_2} = \hat{v}_1 \underset{i_s}{j_1} + \hat{v}_2 \underset{0}{j_2}$$

$$v_2 i_s = \hat{v}_1 i_s \longrightarrow \boxed{v_2 = \hat{v}_1}$$

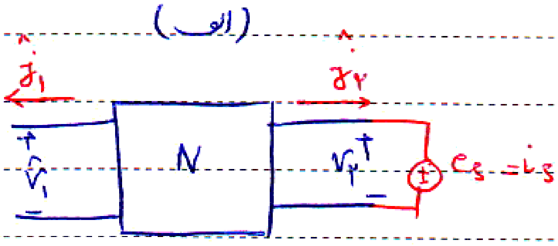
مثال سوم : با استفاده از قضیه تلگان می‌توان نشان داد :



(الف)

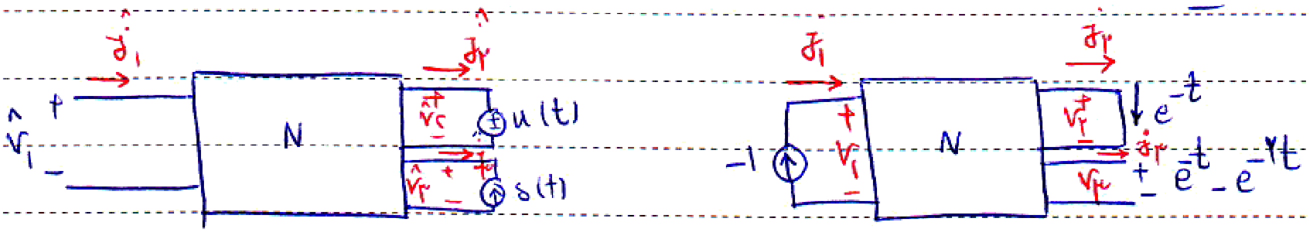
$$v_1 \underset{0}{\hat{j}_1} + \underset{0}{v_2} \hat{j}_2 = \hat{v}_1 \underset{-i_s}{j_1} + \underset{e_s}{\hat{v}_2} j_2$$

$$-\hat{v}_1 i_s + i_s j_2 = 0 \longrightarrow \boxed{\hat{v}_1 = j_2}$$



(ب)

مثال) در مدار خطی و تغییرناپذیر با زمان شکل A، اطلاعات زیر داده شده. اگر مدار را به صورت B درآوریم، ولتاژ $\hat{v}_1$ چیست؟



B   A

چون تصویر هم پاسخی تحت شرایط خطی و تغییرناپذیر بودن با زمان است می‌توان از آن قضیه تلگان را در حوزه لاپلاس بکار برد.

$$V_1\hat{J}_1 + V_2\hat{J}_2 + V_3\hat{J}_3 = \hat{V}_1 J_1 + \hat{V}_2 J_2 + \hat{V}_3 J_3$$

$$0+0+\left(\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}\right)\times(-1) = \hat{V}_1\left(-\frac{1}{s}\right)+\left(\frac{1}{s}\right)\left(\frac{1}{s+1}\right)+0$$

$$\frac{-1}{(s+1)(s+2)} = \hat{V}_1 \times \frac{-1}{s} + \frac{1}{s(s+1)}$$

$$\frac{\hat{V}_1}{s} = \frac{1}{s(s+1)} + \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{s+2+s}{s(s+1)(s+2)}$$

$$\hat{V}_1 = \frac{2}{s+2} \longrightarrow \hat{v}_1(t) = 2e^{-2t}u(t)$$

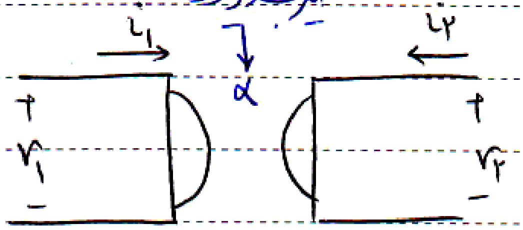
دوسرانو:

تعریف: هر شبکه‌ای که در تصویر هم پاسخی صدق کند، شبکه متقابل گفته می‌شود.

$$\begin{cases} Z_{ij} = Z_{ji} \\ Y_{ij} = Y_{ji} \end{cases}$$

ژیراتور : یک عنصر غیرخطی و تغییرناپذیر با زمان است.

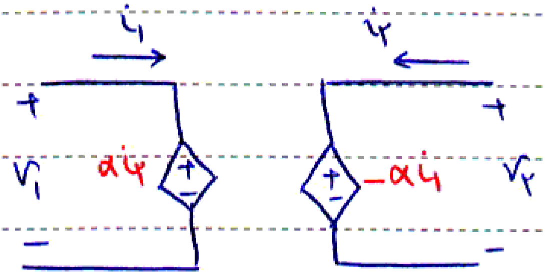
ضریب ژیراتور



$$\begin{cases} v_1 = \alpha i_2 \\ v_2 = -\alpha i_1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} i_2 = \dfrac{1}{\alpha} v_1 \\ i_1 = \dfrac{-1}{\alpha} v_2 \end{cases}$$

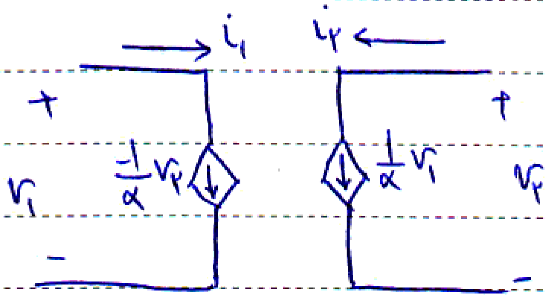
$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

مدل کاربردی ژیراتور در آنالیزهای مش و حلقه‌ی اساسی :



$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{\alpha} \\ 1/\alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

مدل کاربردی ژیراتور در آنالیزهای گره و کات ست اساسی :

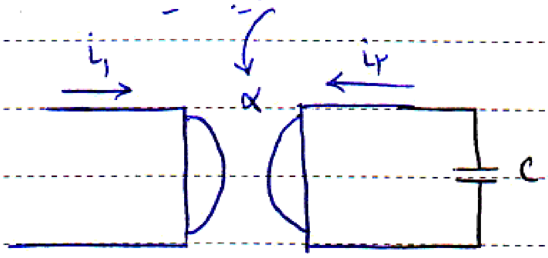


ژیراتور :

$$v_1 i_1 + v_2 i_2 = \alpha i_2 i_1 - \alpha i_2 i_1 = 0$$

مفهوم این رابطه این است که ژیراتور به شکل سلف نشان می‌دهد.

مثال) عملکرد مدار زیر را مشخص کنید؟



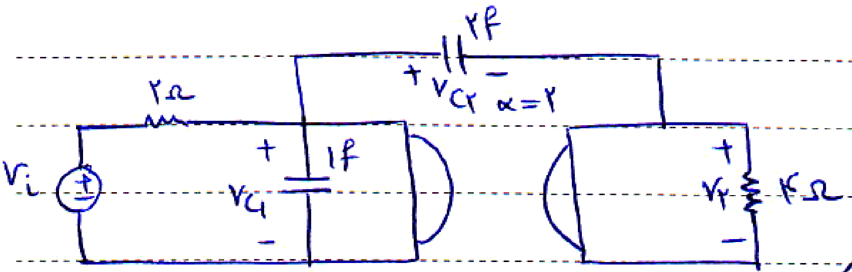
$$\begin{cases} v_1 = \alpha i_2 \\ v_2 = -\alpha i_1 \end{cases} \longrightarrow -i_2 = C\frac{dv_2}{dt}$$

$$\longrightarrow i_2 = -C\frac{dv_2}{dt}$$

$$\begin{cases} v_1 = \alpha i_2 = -\alpha C\frac{dv_2}{dt} \\ v_2 = -\alpha i_1 \end{cases} \longrightarrow v_1 = -\alpha C\frac{d}{dt}(-\alpha i_1)$$

$$\longrightarrow v_1 = \underbrace{\alpha^2 C}_{L}\frac{di_1}{dt}$$

مثال) در مدار زیر:



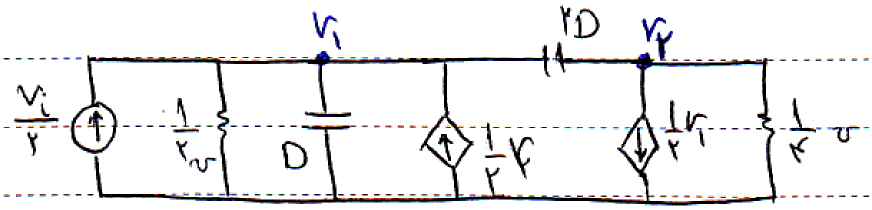
الف) فرکانس‌های طبیعی سیستم را بیابید؟

ب) تابع شبکه $\frac{V_o}{V_i}$ را بیابید؟

ج) اگر $v_i = 2\sin(t-40)$ باشد، $V_o(t)$ را بیابید؟

از روش سینوسی گره استفاده می‌کنیم.

NADERI



$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}+3D & -\frac{1}{2}-2D \\ -2D+\frac{1}{2} & 2D+\frac{1}{4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{V_i}{2}+\cancel{\frac{1}{2}V_2} \\ \cancel{-\frac{1}{2}V_1} \end{bmatrix}$$

$2V_{c2}(0^-)+V_{c1}(0^-)$

$$\begin{bmatrix} 3s+\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}-2s \\ -2s+\frac{1}{2} & 2s+\frac{1}{4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{V_i}{2}+3V_1(0^-)-2V_2(0^-) \\ -2V_1(0^-)+2V_2(0^-) \end{bmatrix}$$

$-2V_{c2}(0^-)$

$V_1(0^-)-V_2(0^-)=V_{c2}(0^-) \qquad V_1(0^-)=V_{c1}(0^-)$

شرایط اولیه ؟

$$\begin{bmatrix} \frac{6s+1}{2} & -\frac{4s+1}{2} \\ -\frac{4s-1}{2} & \frac{8s+1}{4} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{V_i}{2}+2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

دترمینان ماتریس صفر

$$\frac{(6s+1)(8s+1)}{8}-\frac{(4s+1)(4s-1)}{4}=0$$

$$(6s+1)(8s+1)-2(4s+1)(4s-1)=0$$

$$48s^2+14s+1-16s^2+2=0 \longrightarrow 32s^2+14s+3=0 \quad \begin{cases} s_1= \\ s_2= \end{cases}$$

برای بدست آوردن تابع تبدیل شرایط اولیه را صفر می‌کنیم