

۲

نمایش سیستم‌های کنترل خطی

اهداف فصل:

- ۱- آشنایی با مفهوم تابع تبدیل و بدست آوردن توابع تبدیل سیستم‌های کنترل و اجزاء آنها.
 - ۲- رسم دیاگرام‌های بلوکی و نمودارهای گذر سیگنال برای یک سیستم کنترل و بررسی چگونگی کاربرد آنها.
 - ۳- آشنایی با نمایش سیستم توسط متغیرهای حالت و مفاهیم اولیه فضای حالت.
 - ۴- مدلسازی سیستم‌های فیزیکی.
 - ۵- آشنایی با مدلسازی موتورهای DC، به عنوان یک نمونه سیستم صنعتی.
- توجه: قبل از مطالعه این فصل آشنایی با تبدیل لاپلاس و کاربردهای آن الزامی است.

۱-۲ مقدمه

در مسایل عملی مهندسی کنترل، قبل از شروع تحلیل سیستم به منظور طراحی سیستم کنترل، در دست داشتن یک مدل دقیق ریاضی از سیستم الزامی است. در واقع اولین قدم در راه طراحی سیستم کنترل برای یک سیستم، مدلسازی آن سیستم توسط بیان مشخصه‌های آن با معادلات ریاضی است. لذا بدست آوردن مدل ریاضی سیستم که نمایانگر مشخصه‌های آن است، از اهمیت فوق‌العاده‌ای برخوردار می‌باشد.

بدون شک توصیف کامل عملکرد و عملیات سیستم فیزیکی برحسب معادلات ریاضی، یک مجموعه بسیار پیچیده از تعداد زیادی معادله و روابط ریاضی را به همراه خواهد داشت که به علت پیچیدگی بیش از اندازه برای تحلیل و طراحی سیستم مناسب نخواهد بود. از طرف دیگر، مدل ریاضی سیستم فیزیکی نباید بیش از اندازه ساده باشد، ساده سازی بیش از اندازه موجب میشود که مشخصه‌های مهم سیستم در مدل آن وارد نشود و تحلیل انجام شده بر اساس مدل، غلط یا غیرکافی باشد و هم‌چنین سیستم کنترل طراحی شده براساس این چنین مدلی نامناسب خواهد بود. بنابراین در تعیین مدل ریاضی یک سیستم فیزیکی، باید مشخصه‌های مهم و اساسی سیستم در مدلسازی در نظر گرفته شوند و در این انتخاب مقدار متناهی تجربه و دید عملی لازم است.

برای سیستم‌های دینامیکی مورد بررسی در این کتاب، معادلات دیفرانسیل یک صورت مناسب برای توصیف ریاضی سیستم است.

۲-۲ توابع تبدیل

همانطور که در مقدمه اشاره شد، برای تحلیل درست و دقیق یک سیستم، بدست آوردن مدل آن لازم است. این مدل می‌تواند توسط روشهای پیشرفته شناسایی سیستم^۱ از داده‌های ورودی - خروجی^۲ سیستم، یا با ترکیب اطلاعات اجزاء جداگانه تشکیل دهنده سیستم بدست آورده شود. در هر دو صورت، با تعیین مدل می‌توان پاسخ^۳ سیستم به ورودیهای وارده به آن را بدست آورد. به عبارت دیگر، خروجی مدل ریاضی سیستم در پاسخ به ورودی اعمال

1- System identification

2- Input-output data

3- Response

شده به آن باید با خروجی سیستم واقعی در پاسخ به همان ورودی، یکسان باشد. مدل ریاضی را می توان به صورت تابعی در نظر گرفت که به ازاء ورودیهای مختلف، خروجیهای متناظر با سیستم واقعی را نشان می دهد. این چنین تابعی را تابع تبدیل^۱ می نامند.

در سیستم های دینامیکی رابطه بین ورودی سیستم $u(t)$ و خروجی سیستم $y(t)$ را می توان به صورت یک معادله دیفرانسیل به صورت زیر نوشت

$$(D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_1D + a_0)y(t) = (b_mD^m + b_{m-1}D^{m-1} + \dots + b_1D + b_0)u(t) \quad (1-2-2)$$

که در آن

$$Dy(t) = \frac{d}{dt}y(t), D^2y(t) = \frac{d^2}{dt^2}y(t), \dots$$

هم چنین ضرایب a_0, \dots, a_{n-1} و b_0, \dots, b_m مقادیر حقیقی هستند که توسط مشخصه های سیستم تعیین می گردند، مرتبه های n و m نیز مستقیماً با ساختار سیستم ارتباط دارند.

توجه کنید که با مشخص کردن اعداد صحیح n و m ، همراه با ضرایب $a_i, i=1, \dots, n-1$ و $b_j, j=1, \dots, m$ برای یک دسته داده شده مقادیر اولیه در $t=0$ پاسخ سیستم برای هر $t > 0$ را می توان با حل معادله دیفرانسیل داده شده با معادله (۱-۲-۲) بدست آورد. لیکن حل این معادله دیفرانسیل در حالت کلی کار ساده ای نیست و با بزرگ شدن اعداد صحیح n و m مشکل خواهد بود. به این دلیل برای پیدا کردن پاسخ سیستم های فیزیکی و صنعتی از این روش نمی توان استفاده نمود.

یک راه حل بسیار ساده، استفاده از تبدیل لاپلاس است. با گرفتن تبدیل لاپلاس از طرفین معادله (۱-۲-۲) و فرض شرایط اولیه صفر در $t=0$ داریم

$$(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0)Y(s) = (b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0)U(s) \quad (2-2-2)$$

که در آن $U(s)$ و $Y(s)$ نیز به ترتیب مقادیر تبدیل شده سیگنال های ورودی $u(t)$ و خروجی $y(t)$ هستند.

۱. Transfer function

معادله (۲-۲-۲) را می توان به صورت زیر نوشت

$$Y(s) = G(s)U(s) \quad (۳-۲-۲)$$

که در آن $G(s)$ مستقل از سیگنال های ورودی و خروجی، تابعی است که ورودی $U(s)$ را به خروجی $Y(s)$ تبدیل می کند (یا انتقال می دهد). بنابراین در حالت کلی، تابع تبدیل را می توان به صورت نسبت دو چند جمله ای با شرایط اولیه صفر به صورت زیر در نظر گرفت

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (۴-۲-۲)$$

درجه چند جمله ای مخرج $G(s)$ را مرتبه سیستم^۱ نامیده و سیستم را یک سیستم مرتبه m/n می نامند. ضرایب a_i ها و b_i ها در تابع تبدیل $G(s)$ ، ثابت و تغییرناپذیر با زمان هستند. کاربرد ایده تابع تبدیل به سیستم های خطی تغییرناپذیر با زمان محدود می شود.

در اینجا مراحل بدست آوردن تابع تبدیل یک سیستم فیزیکی را بیان می کنیم:

۱- معادله دیفرانسیل سیستم را بنویسید.

۲- با فرض صفر بودن کلیه شرایط اولیه، تبدیل لاپلاس معادله دیفرانسیل را پیدا کنید.

۳- نسبت خروجی $Y(s)$ به ورودی $U(s)$ را پیدا کنید. این نسبت، تابع تبدیل است.

مثال ۲-۲-۱

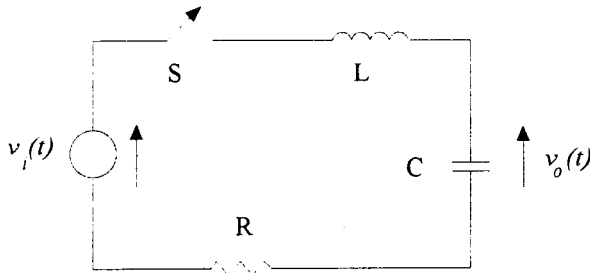
مدار سری RLC نشان داده شده در شکل ۱-۲ را در نظر بگیرید. فرض کنید که تا قبل از بسته شدن کلید S در زمان $t = t_0 = 0$ ، جریان $i(t)$ وجود ندارد و هم چنین خازن C نیز شارژ نشده باقی می ماند. مطلوب است تابع تبدیل مدار با ولتاژ ورودی $v_i(t)$ و ولتاژ خروجی $v_o(t)$ را برای $t \geq 0$ تعیین کنیم.

نخست معادله دیفرانسیل مدار را با استفاده از قانون ولتاژ کیرشف^۳ می نویسیم. با استفاده از این قانون ولتاژ ورودی $v_i(t)$ باید برابر مجموع افت ولتاژهای دو سر سلف، خازن و مقاومت باشد. یعنی آنکه

1- System order

2- n-th order system

3- Kirchhoff's voltage law



شکل ۱-۲ مدار RLC سری با ورودی $v_i(t)$

$$v_i(t) = L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i(\tau) d\tau + Ri(t)$$

برای از بین بردن عبارت انتگرالی، با مشتق‌گیری از طرفین معادله بالا داریم

$$Dv_i(t) = (LD^2 + RD + \frac{1}{C})i(t)$$

اکنون با گرفتن تبدیل لاپلاس از طرفین معادله بالا داریم

$$CsV_i(s) = (LCs^2 + RCs + 1)I(s)$$

یا

$$I(s) = \frac{Cs}{LCs^2 + RCs + 1} V_i(s)$$

تابع تبدیل بدست آمده، ولتاژ ورودی $V_i(s)$ را به جریان $I(s)$ ارتباط می‌دهد. در مرحله بعد

باید تابع تبدیل بین جریان و ولتاژ خروجی $V_o(s)$ را بدست آوریم.

ولتاژ دو سر خازن C ، که ولتاژ خروجی نیز هست، عبارتست از

$$v_o(t) = \frac{1}{C} \int i(\tau) d\tau$$

یا

$$Dv_o(t) = \frac{1}{C} i(t)$$

که تبدیل لاپلاس آن عبارتست از

$$V_o(s) = \frac{1}{Cs} I(s)$$

با جایگزینی برای $I(s)$ از معادله بالا، تابع تبدیل بین ولتاژ خروجی و ورودی چنین است

$$V_o(s) = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1} V_i(s)$$

مثال ۲-۲-۲

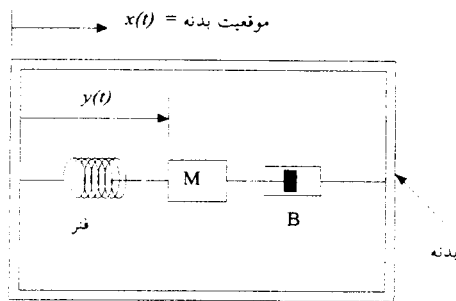
سیستم مکانیکی نشان داده شده در شکل ۲-۲ یک شتاب‌سنج^۱ ساده است. موقعیت جرم M نسبت به شتاب‌سنج $y(t)$ متناسب با شتاب بدنه است. تابع تبدیل بین شتاب ورودی $A(s)$ و خروجی $Y(s)$ را پیدا کنید.

معادله دیفرانسیل حاکم بر سیستم، از مساوی قرار دادن مجموع نیروهای عمل‌کننده بر روی جرم M ، با شتاب اینرسی آن بدست می‌آید. از قانون دوم نیوتن داریم

$$-B \frac{dy(t)}{dt} - Ky(t) = M \frac{d^2}{dt^2} (y(t) - x(t))$$

یا

$$M \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + B \frac{dy(t)}{dt} + Ky(t) = M \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = Ma(t)$$



شکل ۲-۲ شتاب‌سنج مثال ۲-۲-۲

که در آن $a(t)$ شتاب ورودی است. با فرض شرایط اولیه صفر، پس از تبدیل لاپلاس داریم

$$(Ms^2 + Bs + K)Y(s) = MA(s)$$

بنابراین تابع تبدیل شتاب‌سنج عبارتست از

$$\frac{Y(s)}{A(s)} = \frac{1}{s^2 + (B/M)s + K/M}$$

در اینجا، چند نکته مهم را در رابطه با توابع تبدیل عنوان می‌کنیم:

- ۱- تابع تبدیل یک سیستم، یک مدل ریاضی از آن سیستم است که رابطه بین متغیر ورودی و متغیر خروجی را بیان می‌دارد.
- ۲- تابع تبدیل یک خاصیت از خود سیستم است و مستقل از اندازه و ماهیت ورودی به آن می‌باشد.
- ۳- توابع تبدیل سیستم‌های فیزیکی مختلف می‌توانند یکسان باشند. در واقع توابع تبدیل ارتباط بین ورودی و خروجی را بدست می‌دهند و هیچ‌گونه اطلاعاتی در رابطه با ساختار داخلی سیستم در اختیار ما نمی‌گذارد.
- ۴- با در دست داشتن تابع تبدیل یک سیستم، می‌توان از ماهیت سیستم توسط بررسی پاسخهای آن به ورودیهای مختلف، اطلاعات مفیدی به دست آورد.

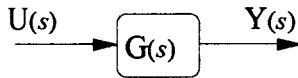
۳-۲ دیاگرام‌های بلوکی

در بخش ۲-۲ توصیف ریاضی سیستم را برحسب نمایش تابع تبدیل بررسی کردیم. اگر تنها با سیستم‌های ساده همچون مثالهای قبل سروکار داشته باشیم، ضرورتی برای نمایشهای دیگر از سیستم احساس نخواهیم کرد. لیکن اگر سیستم ساده قبل، جزئی از یک مجموعه از سیستم‌ها باشد که با هم ارتباط خاصی داشته باشند، آنگاه تابع تبدیل کل سیستم، تابع پیچیده‌ای خواهد بود که به ارتباط بین این سیستم‌ها بستگی خواهد داشت. اگر چه می‌توان با ارتباط بین سیستم‌های مختلف به صورت کاملاً جبری برخورد کرد، لیکن با زیاد شدن اجزاء سیستم، ارتباط دادن معادله‌های مختلف با سیستم‌هایی که آنها را نمایش می‌دهند، بسیار مشکل خواهد بود. یک راه حل این مشکل، نمایش دادن سیستم مورد نظر توسط دیاگرام بلوکی^۱ است، که یک نمایش گرافیکی می‌باشد. با استفاده از این نمایش، بسادگی می‌توان سیستم‌های (یا کنترل‌کننده‌های) دیگری را به مجموع سیستم کنترل اضافه و یا کم کرد. یک مزیت استفاده از دیاگرام‌های بلوکی آن است که می‌توان با سرعت و دقت زیاد، ترکیبهای مختلفی برای سیستم کنترل در نظر گرفت.

۱-۳-۲ اجزاء اصلی دیاگرام‌های بلوکی

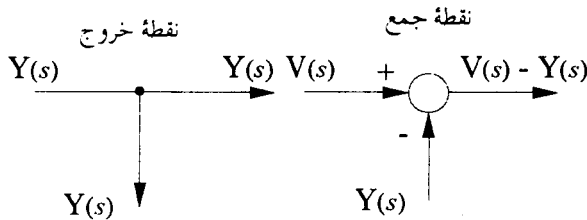
توصیف سیستم توسط تابع تبدیل که در بخش ۲-۲ معرفی گردید، به صورت دیاگرام بلوکی نشان داده شده در شکل ۳-۲ نمایش داده می‌شود. از اینرو دیاگرام بلوکی شکل ۳-۲ و معادله $Y(s) = G(s)U(s)$ نمایشهای مختلف از یک سیستم هستند و دقیقاً یک معنی را بیان می‌کنند.

همانطور که از شکل ۳-۲ مشاهده می‌گردد، سیگنال‌های $U(s)$ و $Y(s)$ بر حسب یک جهت که به پیکانها داده شده است، نشان داده شده‌اند و بلوک نیز مدل سیستم که با $G(s)$ نشان داده شده است را دربرمی‌گیرد.



شکل ۳-۲ دیاگرام بلوکی یک تابع تبدیل

دو جزء اصلی دیگر یک نمایش دیاگرام بلوکی، نقطه جمع^۱ و نقطه خروج^۲ هستند. این دو نقطه در شکل ۴-۲ نشان داده شده‌اند.



شکل ۴-۲ نقاط جمع و خروج

نقطه جمع که معمولاً با یک دایره نمایش داده می‌شود (در بعضی از کتابها از علامتهای Σ یا \times در داخل دایره استفاده می‌شود) می‌تواند هر چند تعداد سیگنال ورودی داشته باشد، هر

1- Summing point

2- Take-off point

کدام از این سیگنال‌ها یک علامت + یا - را با خود دارند که نشان دهنده عمل جمع یا تفریق آن سیگنال با سایر سیگنال‌ها است. نقطه جمع تنها یک خروجی دارد که به سایر قسمت‌های دیاگرام بلوکی وارد می‌شود. در صورت لزوم استفاده از یک متغیر در چندین محل، می‌توان از تعداد مناسبی نقاط خروج استفاده نمود.

۲-۳-۲ عملیات جبری بلوک دیاگرامی

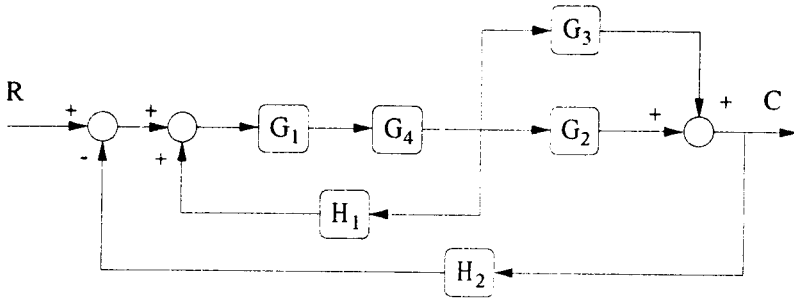
دیاگرام‌های بلوکی سیستم‌های کنترل عملی اغلب بسیار پیچیده هستند. این دیاگرام‌های بلوکی عموماً چندین حلقه فیدبک و پیش‌خور و چندین ورودی دارند. با استفاده از روش سیستماتیک کاهش بلوک‌ها و حلقه‌ها، می‌توان این دیاگرام‌های بلوکی را به صورت ساده تبدیل کرد و توابع تبدیل قسمت‌های مختلف و یا تابع تبدیل کل سیستم را بدست آورد. یک دسته از عملیات جبری دیاگرام بلوکی در جدول ۱-۲ آورده شده‌اند. برای تمرین، با بکارگیری قواعد اجزاء اصلی دیاگرام‌های بلوکی، قواعد ۱ تا ۱۳ جدول ۱-۲ را می‌توانید بسادگی اثبات کنید.

مراحل زیر را می‌توان برای کاهش دیاگرام‌های بلوکی بکار بست. در این مراحل از قواعد جدول ۱-۲ استفاده شده است.

- مرحله ۱: با استفاده از قاعده ۴ جدول ۱-۲، کلیه بلوک‌های سری را ترکیب کنید.
- مرحله ۲: با استفاده از قاعده ۵ جدول ۱-۲، کلیه بلوک‌های موازی را ترکیب کنید.
- مرحله ۳: با استفاده از قاعده ۱۳ جدول ۱-۲، کلیه حلقه‌های فیدبک جزئی را حذف کنید.
- مرحله ۴: با استفاده از قواعد ۶ و ۷ جدول ۱-۲، نقاط جمع را به طرف چپ و نقاط خروج را به طرف راست حلقه اصلی انتقال دهید.
- مرحله ۵: مراحل ۱ تا ۴ را در صورت لزوم تکرار کنید، تا دیاگرام بلوکی به صورت استاندارد فیدبک تبدیل شود.

مثال ۲-۳-۱

دیاگرام بلوکی نشان داده شده در شکل ۲-۵ را به صورت یک حلقه فیدبک تبدیل کنید.



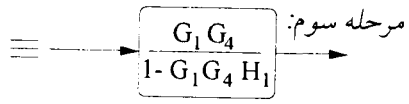
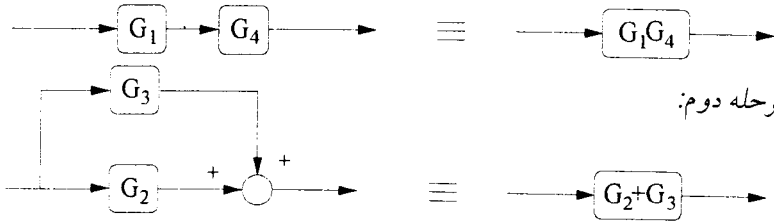
شکل ۵-۲ دیاگرام بلوکی مثال ۱-۳-۲

اکنون مراحل کاهش دیاگرام بلوکی را اجرا می‌کنیم.

مرحله اول:



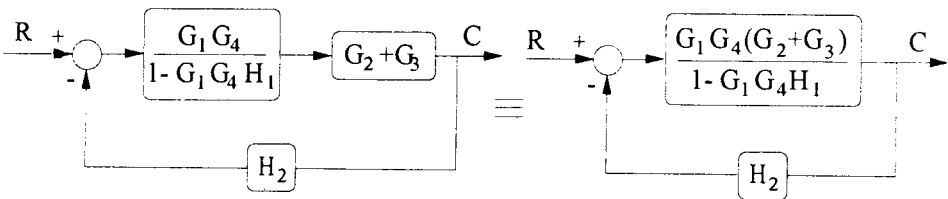
مرحله دوم:



مرحله سوم:

مرحله چهارم: در این مثال موردی ندارد

مرحله پنجم:



	دیاگرامهای بلوکی اصلی	دیاگرامهای بلوکی معادل
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
13		

جدول ۱-۲ قواعد جبر دیاگرام بلوکی

توجه کنید که در صورت لزوم با اعمال قاعده ۱۳ از جدول ۲-۱، می توان تابع تبدیل حلقه - بسته را بدست آورد.

۲-۳-۳ رسم دیاگرام بلوکی سیستم های فیزیکی

در اینجا مراحل رسم دیاگرام بلوکی برای یک سیستم را ارایه می کنیم:

مرحله ۱: معادلات توصیف کننده رفتار هر عنصر را بنویسید.

مرحله ۲: تبدیل لاپلاس معادلات بدست آمده از مرحله اول را بگیرید (شرایط اولیه را صفر فرض کنید).

مرحله ۳: هر کدام از معادلات تبدیل لاپلاس گرفته شده را به صورت یک بلوک مجزا رسم کنید.

مرحله ۴: بلوک های بدست آمده در مرحله ۳ را در یک دیاگرام بلوکی کامل، ترکیب کنید.

مثال ۲-۳-۲

مدار RC نشان داده شده در شکل ۲-۶ (الف) را در نظر بگیرید. دیاگرام بلوکی مدار را رسم کنید.

نخست معادلات مدار را می نویسیم. داریم

$$i = \frac{e_i - e_o}{R}$$

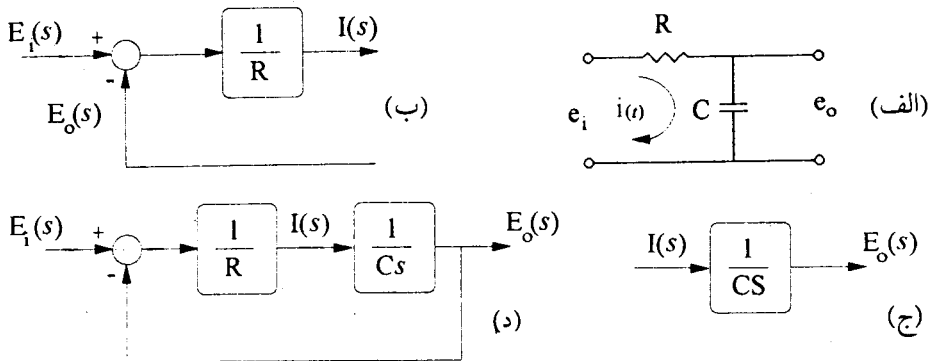
$$e_o = \frac{\int i dt}{C}$$

تبدیل لاپلاس این معادله ها، با شرط صفر بودن شرایط اولیه، عبارتند از

$$I(s) = \frac{E_i(s) - E_o(s)}{R}$$

$$E_o(s) = \frac{I(s)}{Cs}$$

معادله $I(s)$ یک عمل جمع را نشان می دهد و دیاگرام بلوکی متناظر آن در شکل ۲-۶ (ب) نشان داده شده است. معادله $E_o(s)$ دیاگرام بلوکی شکل ۲-۶ (ج) را نشان می دهد. در آخرین



شکل ۶-۲ (الف) مدار RC (ب) دیاگرام بلوکی معادله $I(s)$

(ج) دیاگرام بلوکی معادله $E_o(s)$ (د) دیاگرام بلوکی مدار RC

مرحله با سرهم کردن این دو عنصر، دیاگرام بلوکی کلی نشان داده شده در شکل ۶-۲ (د) را بدست می آوریم.

مثال ۲-۳-۳

سیستم مکانیکی نشان داده شده در شکل ۷-۲ را در نظر بگیرید. برای این سیستم یک دیاگرام بلوکی رسم کنید. با ساده کردن دیاگرام بلوکی بدست آمده، تابع تبدیل بین $X_o(s)$ و $X_i(s)$ را پیدا کنید. فرض کنید که جابجایی x_o از موقعیت تعادل هنگامیکه $x_i = 0$ است، اندازه گرفته می شود.

نخست معادلات دیفرانسیل اجزاء سیستم را می نویسیم. مجموع نیروهای عمل کننده بر روی جرم m را به صورت F تعریف کنید. معادلات سیستم عبارتند از

$$mD^2x_o = F$$

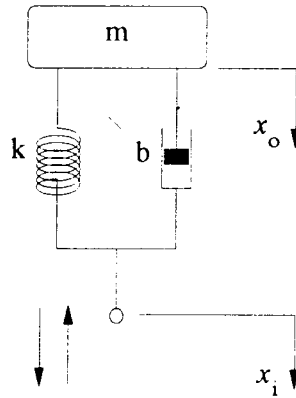
$$F = -b(Dx_o - Dx_i) - k(x_o - x_i)$$

با گرفتن تبدیل لاپلاس از این معادله ها، با فرض شرایط اولیه صفر، داریم

$$ms^2X_o(s) = F(s)$$

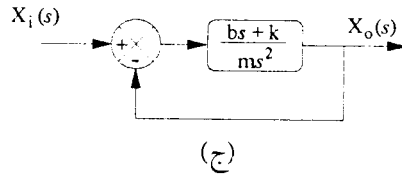
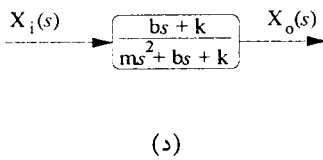
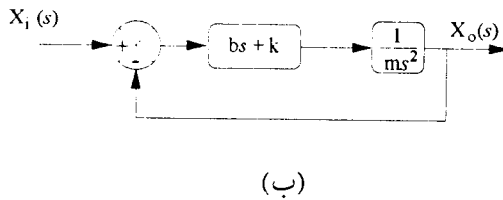
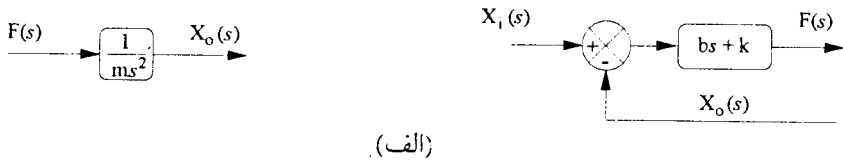
$$F(s) = -b[sX_o(s) - sX_i(s)] - k[X_o(s) - X_i(s)]$$

$$= (bs+k)[X_i(s) - X_o(s)]$$



شکل ۷-۲ سیستم مکانیکی مثال ۲-۳-۳

از معادلات تبدیل لاپلاس گرفته شده، عناصر دیاگرام بلوکی نشان داده شده در شکل ۸-۲



شکل ۸-۲ (الف) عناصر یک دیاگرام بلوکی. (ب) دیاگرام بلوکی حاصل از ترکیب عناصر. (ج) و (د) دیاگرام‌های بلوکی ساده شده.

(الف) را بدست می آوریم. با سرهم کردن مناسب این دو دیاگرام بلوکی، همانطور که در شکل ۲-۸ (ب) نشان داده شده است، دیاگرام بلوکی سیستم بدست می آید. با استفاده از قواعد ۴ و ۱۳ از جدول ۲-۱، دیاگرام بلوکی ورودی - خروجی و تابع تبدیل تبدیل سیستم، همانند شکل ۲-۸ (ج) و (د)، بدست می آید. لذا داریم

$$\frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{bs+k}{ms^2+bs+k}$$

۲-۴ نمودارهای گذر سیگنال

نمایش ترسیمی سیستم های کنترل به صورت دیاگرام های بلوکی در بخش ۲-۳ ارایه شد. یک روش دیگر برای نمایش ترسیمی سیستم های کنترل، روش نمودار گذر سیگنال^۱ است. باید توجه داشت که هر دو روش حاوی اطلاعات مشابهی در رابطه با سیستم می باشند و لذا از این نظر مزیتی بر یکدیگر نخواهند داشت.

نمودار گذر سیگنال، نمایشی تصویری از دستگاه معادلات جبری است که سیستم را توصیف می کنند. لذا باید برای اعمال روش نمودار گذر سیگنال در تحلیل سیستم های کنترل، نخست معادلات دیفرانسیل خطی سیستم را به معادلات جبری در تبدیل کرد. در واقع، همانند دیاگرام های بلوکی، نمودارهای گذر سیگنال انتقال سیگنال را در سیستم به صورت تصویری نمایش می دهند. لیکن رسم آن ساده تر از رسم دیاگرام های بلوکی است و بنابراین کار کردن با آن ساده تر می باشد.

یک نمودار گذر سیگنال از یک شبکه تشکیل می شود، که در آن گره ها توسط شاخه های جهت داده شده به هم متصل می باشند. هر گره نشان دهنده یک متغیر سیستم است و هر شاخه بین دو گره به صورت یک ضرب کننده سیگنال عمل می کند. در هر شاخه سیگنال فقط در یک جهت حرکت می کند و این جهت توسط پیکانی که بروی شاخه سوار است نشان داده می شود. برای مثال معادله ساده $x_i = f_{ij} x_j$ را در نظر بگیرید، که در آن x_j و x_i می توانند توابعی از زمان، فرکانس مختلط و یا هر کمیت دیگری باشند، f_{ij} نیز یک عمل ریاضی است که x_j به x_i انتقال می دهد. نمودار گذر سیگنال این معادله ساده در شکل ۲-۹ نشان داده شده است.

1- Signal flow graph



شکل ۹-۲ گراف جریان سیگنال معادله $x_i = t_{ij}x_j$

قبل از آنکه به بحث بیشتری در رابطه با نمودارهای گذر سیگنال و کاربرد آنها بپردازیم، به تعاریف مقدماتی زیر توجه کنید.

گره^۱: گره نقطه‌ای است که یک متغیر یا سیگنال را نشان می‌دهد.
 انتقال^۲: انتقال یک بهره حقیقی یا بهره مختلط بین دو گره است. این چنین بهره‌هایی را می‌توان برحسب تابع تبدیل بین دو گره بیان کرد.
 شاخه^۳: شاخه یک پاره خط جهت داده شده است که دو گره را به هم متصل می‌کند. بهره یک شاخه، انتقال است.
 گره ورودی^۴ یا منبع^۵: یک گره ورودی یا منبع گره‌ای است که تنها شاخه‌هایی به آن متصل است که از آن خارج می‌شوند. این گره متناظر با یک متغیر مستقل است.
 گره خروجی^۶ یا سینک^۷: یک گره خروجی یا سینک گره‌ای است که تنها شاخه‌هایی به آن متصل است که به آن وارد می‌شوند. این گره متناظر با یک متغیر وابسته است.
 گره مخلوط^۸: یک گره مخلوط گره‌ای است که شاخه‌هایی دارد که هم به آن وارد و هم از آن خارج می‌شوند.

مسیر^۹: مسیر یک پیمایش از شاخه‌های متصل در جهت پیکانهای شاخه است. اگر هیچ‌گره‌ای بیش از یکبار قطع نشود، مسیر باز است. اگر مسیر در گره‌ای که آغاز شده است، خاتمه یابد و هیچ‌گره‌ای دیگری بیش از یک بار قطع نشود، مسیر بسته است. اگر مسیری بعضی از گره‌ها را بیش از یک بار قطع کند و در گره‌ای غیر از گره‌ای که از آن آغاز کرده خاتمه یابد، نه باز است و نه بسته.

1- Node	2- Transmittance
3-Branch	4- Input node
5- Source	6- Output node
7- Sink	8- Mixed node
9- Path	

خواص نمودارهای گذر سیگنال. چند خاصیت مهم از نمودارهای گذر سیگنال عبارتند از:

۱- یک شاخه نشان دهنده وابستگی تابعی^۱ یک سیگنال به سیگنال دیگر است. سیگنال

تنها در جهتی عبور خواهد کرد که توسط پیکان شاخه مشخص گردیده است.

۲- یک گره، سیگنال‌های کلیه شاخه‌های ورودی به آن را با هم جمع می‌کند و این مجموع

را به کلیه شاخه‌هایی که از آن خارج می‌شوند، انتقال می‌دهد.

۳- هر شاخه با انتقال واحد، یک گره مانند x را به گره دیگری، نشان داده شده با α وصل

می‌کند. این شاخه‌ها را می‌توان برای تبدیل یک گره مخلوط به یک گره خروجی

(سینک) استفاده کرد.

۴- نمودار گذر سیگنال یک سیستم داده شده منحصر بفرد نمی‌باشد. با نوشتن معادلات

سیستم به صورتهای مختلف می‌توان نمودارهای گذر سیگنال متفاوتی برای یک

سیستم رسم کرد.

۱-۴-۲ جبر نمودار گذر سیگنال

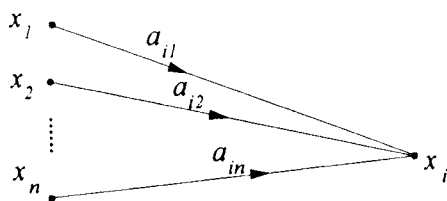
۱- قاعده جمع

مقدار متغیر در یک گره برابر است با مجموع کلیه سیگنال‌هایی که به آن گره وارد می‌شوند. به

عبارت دیگر، معادله زیر

$$x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$$

توسط نمودار گذر جریان سیگنال در شکل ۱۱-۲ نشان داده شده است.

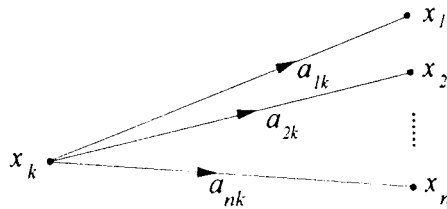


شکل ۱۱-۲ نمودار گذر سیگنال $x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$

۲- قاعده انتقال

هنگامی که از یک گره، همانطور که در شکل ۲-۱۲ نشان داده شده است، شاخه‌هایی خارج شوند مقدار متغیر در آن گره با ضرب در بهره بین دو گره (تابع تبدیل یا انتقال) به گره بعد انتقال پیدا می‌کند. به عبارت دیگر متغیرهای x_1, x_2, \dots, x_n در گره‌های نشان داده شده در شکل ۲-۱۲ عبارتند از

$$x_i = a_{ik} x_k \quad (i = 1, \dots, n)$$



شکل ۲-۱۲ نمودار گذر سیگنال (k ثابت) $i = 1, 2, \dots, n$ $x_i = a_{ik} x_k$

۳- قاعده ضرب

یک اتصال سری از $n-1$ شاخه با انتقالهای $a_{n(n-1)}, \dots, a_{43}, a_{32}, a_{21}$ را می‌توان با یک شاخه، با انتقال جدید برابر با حاصلضرب کلیه انتقالهای قبلی، جایگزین کرد. یعنی

$$x_n = a_{21} a_{32} a_{43} \dots a_{n(n-1)} x_1$$

برای نمایش تصویری قاعده ضرب به شکل ۲-۱۳ مراجعه کنید.



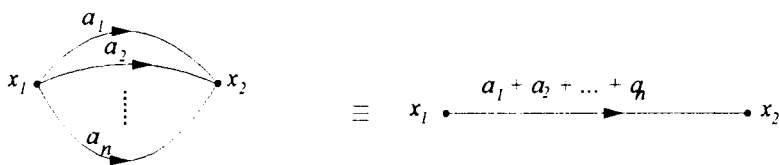
شکل ۲-۱۳ قاعده ضرب

۴- قاعده شاخه‌های موازی

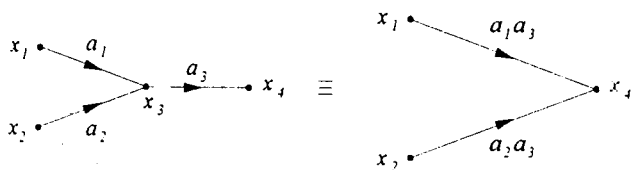
شاخه‌های موازی را می‌توان همانند شکل ۲-۱۴، با جمع کردن انتقالهای آنها با یک شاخه معادل جایگزین کرد.

۵- قاعده حذف گره مخلوط

یک گره مخلوط را می‌توان همانند شکل ۲-۱۵ حذف کرد.



شکل ۲-۱۴ قاعده شاخه‌های موازی



شکل ۲-۱۵ قاعده حذف گره مخلوط

۶- قاعده حذف حلقه

یک حلقه را می‌توان همانند شکل ۲-۱۶ حذف کرد. توجه کنید که

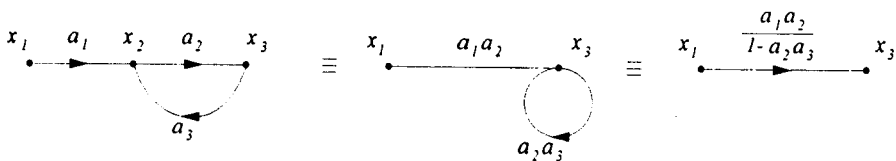
$$x_3 = a_3 x_2, \quad x_2 = a_2 x_1 + a_3 x_3$$

از اینرو

$$x_3 = a_1 a_2 x_1 + a_3 a_2 x_3$$

یا

$$x_3 = \frac{a_1 a_2}{1 - a_2 a_3} x_1$$



شکل ۲-۱۶ قاعده حذف حلقه

۲-۴-۲ نمایش نمودار گذر سیگنال سیستم‌های خطی

از نمودارهای گذر سیگنال به طور گسترده‌ای برای تحلیل سیستم‌های خطی استفاده می‌شود. نمودار را می‌توان از معادلات سیستم و یا بطور مستقیم از سیستم فیزیکی ترسیم

کرد. با بکارگیری قواعد جبری بخش ۲-۴-۱ می توان رابطه بین متغیر خروجی و ورودی را بدست آورد.

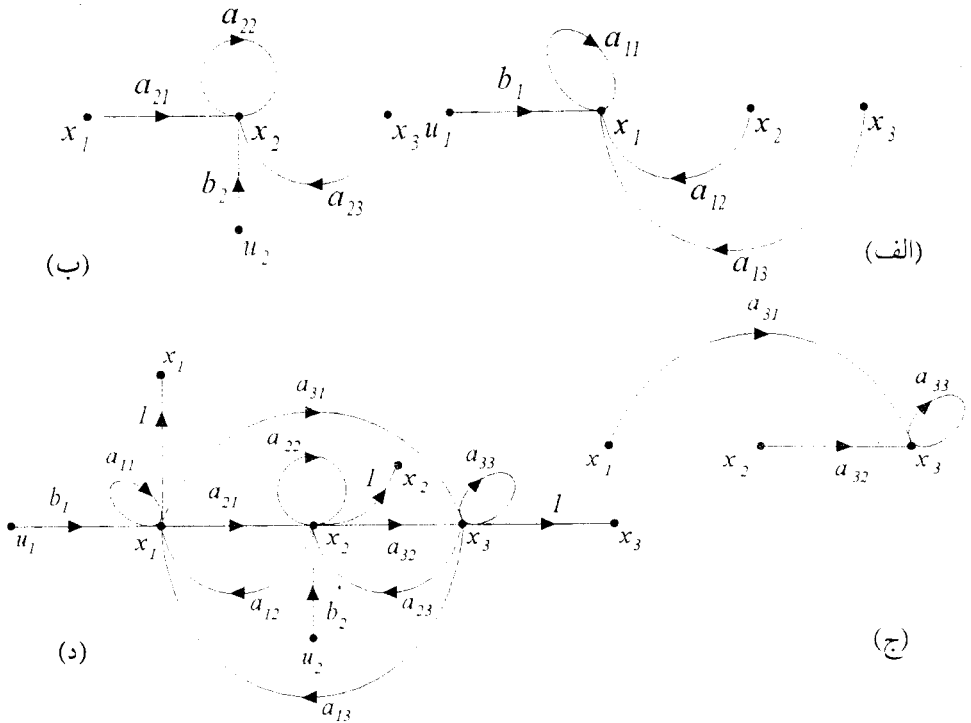
سیستم تعریف شده با مجموعه معادلات زیر را در نظر بگیرید:

$$x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + b_1u_1 \quad (۱-۴-۲)$$

$$x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + b_2u_2 \quad (۲-۴-۲)$$

$$x_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \quad (۳-۴-۲)$$

که در آن u_1 و u_2 متغیرهای ورودی و x_1 ، x_2 و x_3 متغیرهای خروجی هستند. نمایش نمودار گذر سیگنال سیستمی که با این معادلات توصیف شده است را می توان به صورت زیر بدست آورد: نخست گره های x_1 ، x_2 و x_3 را مانند شکل ۲-۱۷ (الف) جایابی کنید. توجه کنید که a_{ij}



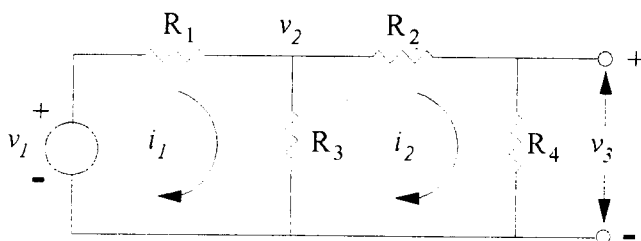
شکل ۲-۱۷ نمودارهای گذر سیگنال نشان دهنده (الف) معادله (۱-۴-۲)، (ب) معادله (۲-۴-۲)، (ج) معادله (۳-۴-۲)، (د) نمودار گذر سیگنال کامل نشان دهنده سیستم تعریف شده با معادله های (۱-۴-۲) تا (۳-۴-۲).

انتقال بین x_1 و x_2 است. توجه کنید که معادله (۲-۴-۱) بیان می‌دارد که x_1 برابر با مجموع چهار سیگنال $a_{11}x_1$ ، $a_{12}x_2$ ، $a_{13}x_3$ و b_{1u_1} است. نمودار گذر سیگنال نشان دهنده این معادله در شکل ۲-۱۷ (الف) نشان داده شده است. معادله (۲-۴-۲) بیان می‌دارد که x_2 برابر با مجموع $a_{21}x_1$ ، $a_{22}x_2$ ، $a_{23}x_3$ و b_{2u_2} است. نمودار گذر سیگنال متناظر در شکل ۲-۱۷ (ب) نشان داده شده است. به طور مشابهی، نمودار گذر سیگنال متناظر با معادله (۲-۴-۳) در شکل ۲-۱۷ (ج) نشان داده شده است.

نمودار گذر سیگنال نشان دهنده معادله‌های (۲-۴-۱)، (۲-۴-۲) و (۲-۴-۳) با ترکیب شکل‌های ۲-۱۷ (الف)، (ب) و (ج) بدست می‌آید. سرانجام، نمودار گذر سیگنال کامل برای دستگاه معادلات داده شده در شکل ۲-۱۷ (د) نشان داده شده است.

مثال ۲-۴-۲

یک نمودار گذر سیگنال برای سیستم نشان داده شده در شکل ۲-۱۸ رسم کنید. همانطور که از شکل ۲-۱۸ مشاهده می‌شود، این سیستم چهار متغیر دارد که عبارتند از: v_1 ، v_2 ، v_3 و i_1 .



شکل ۲-۱۸ سیستم مثال ۲-۴-۲

i_1 معادلات حاکم بر این سیستم عبارتند از:

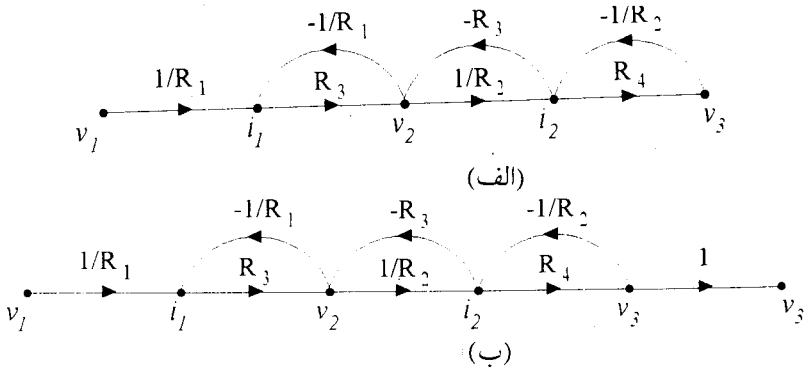
$$i_1 = \left(\frac{1}{R_1} \right) v_1 - \left(\frac{1}{R_1} \right) v_2$$

$$v_2 = R_2 i_1 - R_3 i_2$$

$$i_2 = \left(\frac{1}{R_2} \right) v_2 - \left(\frac{1}{R_2} \right) v_3$$

$$v_3 = R_4 i_2$$

دقت کنید که معادله‌ای برای v_1 ، گره ورودی، نوشته نشده است. با قرار دادن پیچ گره برای چهار متغیر و یک گره ورودی و وصل کردن شاخه‌های مناسب از معادلات حاکم بر سیستم، نمودار گذر سیگنال نشان داده شده در شکل ۲-۱۹ (الف) بدست خواهد آمد. اگر بخواهیم v_3 را به صورت یک گره خروجی نشان دهیم، با اضافه کردن یک شاخه با انتقال واحد، نمودار گذر سیگنال نشان داده شده در شکل ۲-۱۹ (ب) بدست خواهد آمد.



شکل ۲-۱۹ نمودار گذر سیگنال سیستم شکل ۲-۱۸

فرمول بهره میسن برای نمودارهای گذر سیگنال. در بسیاری از کاربردهای عملی و صنعتی، مطلوب است که تابع تبدیل (رابطه بین ورودی و خروجی) سیستم را با بکارگیری نمودار گذر سیگنال آن بدست آوریم. در نمودار گذر سیگنال، انتقال بین گره ورودی و گره خروجی، بهره کلی یا انتقال کلی نمودار بین دو گره است. برای پیدا کردن این انتقال یا بهره می‌توان از عملیات جبری ارایه شده در بخش ۲-۴-۱ برای کاهش نمودار گذر سیگنال استفاده کرد.

لیکن برای نمودارهای گذر سیگنال با تعداد زیادی گره، شاخه و حلقه، این کار مشکل شده و احتمال اشتباه در محاسبات بسیار بالا می‌رود. یک راه حل عملی و سیستماتیک برای این مسأله، استفاده از فرمول بهره میسن^۱ است.

فرمول بهره میسن، به صورت زیر است

$$P = \frac{1}{\Delta} \sum_k P_k \Delta_k \quad (۲-۴-۴)$$

که در آن

P_k = بهره مسیر یا انتقال k امین مسیر پیشرو

Δ = دترمینان نمودار

= (مجموعه کلیه بهره‌های تک حلقه‌های مجزا) - ۱

+ (مجموع حاصلضربهای بهره کلیه ترکیبهای ممکن از دو حلقه‌های مجزا)

+ ... (مجموع حاصلضربهای بهره کلیه ترکیبهای ممکن از سه حلقه‌های مجزا) -

$$= 1 - \sum_a L_a + \sum_{b,c} L_b L_c - \sum_{d,e,f} L_d L_e L_f + \dots$$

$\sum_a L_a$ = مجموع کلیه بهره‌های تک حلقه‌های مجزا

$\sum_{b,c} L_b L_c$ = مجموع حاصلضربهای بهره کلیه ترکیبهای ممکن از دو حلقه‌های مجزا

$\sum_{d,e,f} L_d L_e L_f$ = مجموع حاصلضربهای بهره کلیه ترکیبهای ممکن از سه حلقه‌های مجزا

Δ_k = کوفاکتور k ، دترمینان k امین مسیر پیشرو نمودار، پس از حذف حلقه‌هایی است

که با آن مسیر پیشرو گره مشترک دارند. یعنی آنکه، کوفاکتور Δ_k از Δ بعد از

حذف حلقه‌هایی که مسیر P_k را قطع می‌کنند، بدست می‌آید.

توجه کنید که جمعهای بالا بروی کلیه مسیرهای ممکن از ورودی به خروجی گرفته شده

است. برخلاف آنکه ممکن است استفاده از این فرمول در اولین برخورد مشکل به نظر رسد، با

اندکی تمرین مشخص خواهد شد که کاربرد آن بسیار ساده‌تر است از آنچه که به نظر می‌رسد.

به مثالهای زیر برای روشنتر شدن این مطلب توجه کنید.

مثال ۲-۴-۳

سیستم فیدبک نشان داده شده در شکل ۲-۲۰ را در نظر بگیرید. در این شکل برای H

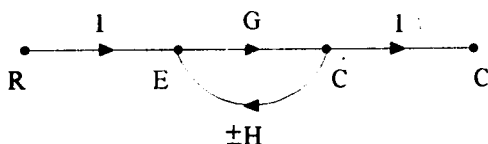
فیدبک مثبت و برای $-H$ فیدبک منفی خواهیم داشت. در این نمودار تنها یک مسیر پیشرو

وجود دارد. از اینرو

$$P_1 = G$$

و لذا $P_1 = P_2 = \dots = 0$. هم چنین تنها یک حلقه وجود دارد. بنابراین

$$L_1 = \pm GH$$



شکل ۲-۲۰ نمودار گذر سیگنال مثال ۲-۴-۳

واضح است که در این مثال $L_1=L_2=L_3=...=0$ دترمینان نمودار عبارتست از

$$\Delta = 1 - (L_1) = 1 \mp GH$$

کوفاکتور Δ_1 از Δ بعد از حذف حلقه‌هایی که مسیر P_1 را قطع می‌کنند (با آن گره مشترک دارند)، بدست می‌آید. بنابراین

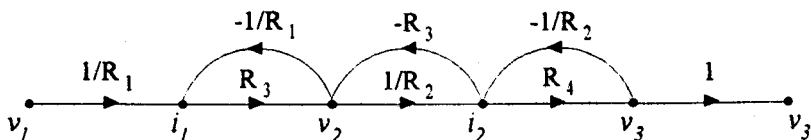
$$\Delta_1 = 1$$

سرانجام، تابع تبدیل حلقه - بسته $C(s)/R(s)$ عبارتست از

$$\begin{aligned} \frac{C(s)}{R(s)} &= P = \frac{1}{\Delta} (P_1 \Delta_1) \\ &= \frac{G}{1 \mp GH} \end{aligned}$$

مثال ۲-۴-۴

نمودار گذر سیگنال سیستم مثال ۲-۴-۲ که در شکل ۲-۱۸ رسم شده است را در نظر بگیرید. این نمودار گذر سیگنال، در شکل ۲-۲۱ داده شده است. با استفاده از نمودار شکل ۲-۲۱ تابع تبدیل حلقه - بسته را تعیین کنید.



شکل ۲-۲۱ نمودار گذر سیگنال مثال ۲-۴-۴

در اینجا مطلوب است که بهره ولتاژ $G = v_3/v_1$ را تعیین کنیم. در این نمودار تنها یک مسیر پیشرو نشان داده شده در شکل ۲-۲۲ وجود دارد.

از شکل ۲۲-۲ داریم که بهره مسیر پیشرو عبارتست از

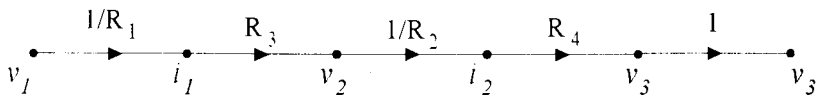
$$P_1 = \frac{1}{R_1} \cdot R_3 \cdot \frac{1}{R_2} \cdot R_4$$

$$= \frac{R_3 R_4}{R_1 R_2}$$

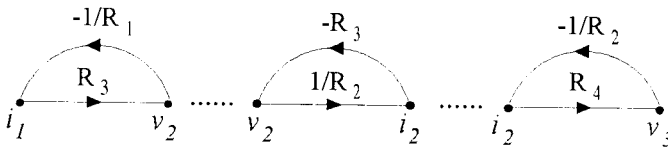
در این گراف سه حلقه به صورت نشان داده شده در شکل ۲۳-۲ وجود دارد

بهره‌های حلقه‌های گراف از شکل ۲۳-۲ عبارتند از:

$$L_1 = -\frac{R_3}{R_1} \quad L_2 = -\frac{R_3}{R_2} \quad L_3 = -\frac{R_4}{R_2}$$



شکل ۲۲-۲



شکل ۲۳-۲

همانطور که از شکل ۲۱-۲ مشاهده می‌شود، تنها دو حلقه غیر مجزا وجود دارد (دو حلقه که گره مشترکی ندارند) و لذا داریم

$$L_1 L_3 = \frac{R_3 R_4}{R_1 R_2}$$

بنابراین، دترمینان نمودار Δ عبارتست از:

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3) + L_1 L_3$$

$$= 1 + \frac{R_3}{R_1} + \frac{R_3}{R_2} + \frac{R_4}{R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_1 R_2}$$

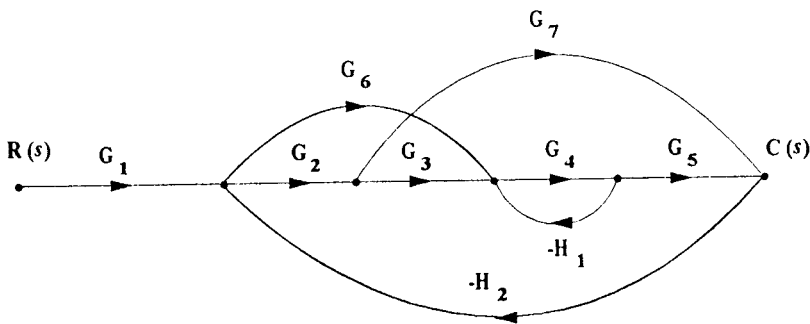
$$= \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_1 R_4 + R_2 R_3 + R_3 R_4}{R_1 R_2}$$

از آنجاییکه کلیه حلقه‌ها مسیر پیشرو P_1 را قطع می‌کنند، $\Delta_1 = 1$ سرانجام

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{P_1 \Delta_1}{\Delta} = \frac{R_1 R_4}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_1 R_4 + R_2 R_3 + R_3 R_4}$$

مثال ۲-۴-۵

سیستم نشان داده شده در شکل ۲-۲۴ را در نظر بگیرید. تابع تبدیل حلقه بسته $C(s)/R(s)$ را با استفاده از قانون بهره میسن بدست آورید.



شکل ۲-۲۴ نمودار گذر سیگنال برای سیستم مثال ۲-۴-۵

در این سیستم، سه مسیر پیشرو بین ورودی $R(s)$ و خروجی $C(s)$ وجود دارد. بهره‌های مسیر پیشرو عبارتند از

$$P_1 = G_1 G_2 G_3 G_4 G_5$$

$$P_2 = G_1 G_6 G_4 G_5$$

$$P_3 = G_1 G_2 G_7$$

در نمودار گذر سیگنال نشان داده شده، چهار حلقه وجود دارد و بهره‌های آنها عبارتند از

$$L_1 = -G_4 H_1$$

$$L_2 = -G_1 G_7 H_2$$

$$L_3 = -G_6 G_4 G_5 H_1$$

$$L_4 = -G_2 G_3 G_4 G_5 H_2$$

توجه کنید که دو حلقه L_1 و L_2 همدیگر را قطع نمی‌کنند (و یا گره مشترکی ندارند). از اینرو، دترمینان Δ بدین صورت داده می‌شود

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4) + L_1 L_2$$

کوفاکتور Δ_1 با حذف حلقه‌هایی که مسیر P_1 را قطع می‌کنند، بدست می‌آید. بنابراین، با حذف L_1, L_2, L_3 ، بدست می‌آوریم

$$\Delta_1 = 1$$

به طور مشابهی، کوفاکتور Δ_2 عبارتست از

$$\Delta_2 = 1$$

کوفاکتور Δ_3 با حذف حلقه‌هایی که مسیر P_3 را قطع می‌کنند، بدست می‌آید. بنابراین، با حذف L_3, L_4 و L_5 داریم

$$\Delta_3 = 1 - L_5$$

تابع تبدیل حلقه - بسته $C(s)/R(s)$ عبارتست از

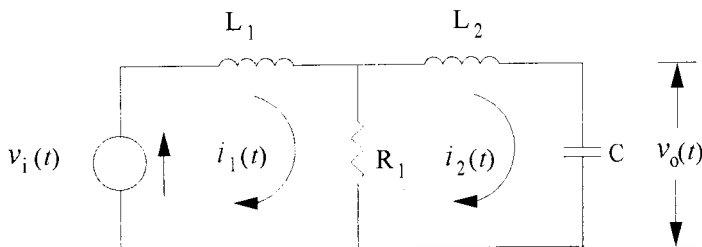
$$\begin{aligned} \frac{C(s)}{R(s)} = P &= \frac{1}{\Delta} (P_1 \Delta_1 + P_2 \Delta_2 + P_3 \Delta_3) \\ &= \frac{G_1 G_2 G_3 G_4 G_5 + G_1 G_2 G_4 G_5 + G_1 G_4 G_5 (1 + G_2 H_1)}{1 + G_2 H_1 + G_3 G_4 H_2 + G_4 G_5 H_3 + G_2 G_3 G_4 G_5 H_4 + G_2 H_1 G_3 G_4 H_5} \end{aligned}$$

۵-۲ توصیف فضای حالت سیستم‌های کنترل

در بخشهای قبل به توصیف ورودی - خروجی سیستم به صورت تابع تبدیل در حوزه s پرداختیم. مدل‌سازی سیستم با تابع تبدیل، براساس معادلات دیفرانسیل توصیف کننده رابطه بین ورودی و خروجی اجزاء دینامیکی تشکیل دهنده سیستم است. هدف از این بخش معرفی متغیر دیگری به نام حالت سیستم است و با بکارگیری این متغیر، توصیف فضای حالت سیستم را ارائه خواهیم کرد.

برای مثالی از حالت یک سیستم، یک مسابقه فوتبال را در نظر بگیرید، که در آن ورودی سیستم تلاشی است که تیم‌ها در بازی بکار می‌برند. خروجی نیز تعداد گل‌های بدست آمده در پایان مسابقه است. یک انتخاب برای حالت سیستم می‌تواند نتیجه مسابقه در هر لحظه از زمان در طول مسابقه باشد. همانطور که مشخص است از رابطه ورودی - خروجی سیستم تنها یک دید کلی از مسابقه پیدا می‌کنیم، در حالیکه با بکارگیری حالت سیستم می‌توان از جزئیات مسابقه در هر لحظه از زمان در طول مسابقه اطلاع پیدا کرد. برای مثال دیگر، مدار RLC شکل

۲-۲۵ را در نظر بگیرید. از روشهای بخشهای قبل می توان یک رابطه ورودی - خروجی برای این مدار با ورودی $v_i(t)$ و خروجی $v_o(t)$ پیدا کرد و تابع تبدیل آنرا تعیین نمود. این تابع تبدیل تنها تغییرات $v_o(t)$ را برای ولتاژهای مختلف $v_i(t)$ نشان خواهد داد. لیکن با مشاهده این رابطه نمی توان به تغییرات جریانهای ورودی $i_1(t)$ و $i_2(t)$ در دو حلقه مدار پی برد. در واقع برای زیر نظر داشتن تغییرات جریانهای دو حلقه (که به عنوان متغیرهای حالت سیستم



شکل ۲-۲۵ مدار RLC

می توانند در نظر گرفته شوند) باید از توصیفی از سیستم استفاده نمود که متغیرهایی از داخل و ساختار داخلی سیستم را نیز شامل شود. این چنین امکانی با استفاده از مدلسازی فضای حالت بدست خواهد آمد. در حالت کلی "حالت" یک مجموعه از مقادیر است، که اگر همراه با ورودی سیستم معلوم باشد (مقادیر آنها در دسترس باشد)، آنگاه می توان از رفتار و تغییرات حالتهای آینده و خروجی به طور دقیق اطلاع حاصل کرد.

حالت یک سیستم لزوماً منحصر بفرّد نیست. برای نمونه، در مثال مسابقه فوتبال متغیرهای حالت می توانند روحیات تیم در طول مسابقه باشند و همانطور که در این مثال مشهود است، برخلاف خروجی و ورودی، حالت همیشه یک متغیر قابل اندازه گیری نیست. برای یک سیستم می توان تعداد بسیار زیادی نمایش فضای حالت در نظر گرفت و این نمایشها به متغیرهای حالت انتخاب شده بستگی خواهند داشت.

در اینجا، حالت ۱، متغیرهای حالت ۲، بردار حالت ۳، و فضای حالت ۴ را تعریف می کنیم. حالت. حالت یک سیستم دینامیکی کوچکترین مجموعه از متغیرها (به نام متغیرهای

1- State

2- State variables

3- State vector

4- State space

حالت) است که اطلاع از این متغیرها در زمان $t = t_0$ همراه با اطلاع از ورودی برای $t \geq t_0$ رفتار سیستم را برای هر زمان $t \geq t_0$ به طور کامل توصیف می‌کند.

بنابراین، حالت یک سیستم دینامیکی در زمان t_0 توسط حالت در زمان t_0 و ورودی برای $t \geq t_0$ به طور منحصر بفردی تعیین می‌شود و مستقل از حالت و ورودی قبل از t_0 است. در این کتاب t_0 عموماً برابر صفر در نظر گرفته خواهد شد.

توجه کنید که مفهوم و ایده حالت به هیچ وجه منحصر به سیستم‌های فیزیکی نیست و قابل اعمال به سیستم‌های بیولوژیکی، اقتصادی، اجتماعی و سایر سیستم‌ها نیز است.

متغیرهای حالت. متغیرهای حالت یک سیستم دینامیکی، متغیرهایی هستند که کوچکترین مجموعه متغیرها را تشکیل داده و حالت سیستم دینامیکی را تعیین می‌کنند. اگر حداقل n متغیر x_1, x_2, \dots, x_n لازم است تا رفتار یک سیستم دینامیکی را بطور کامل توصیف کند، آنگاه n چنین متغیرهایی یک مجموعه از متغیرهای حالت هستند.

بردار حالت. اگر n متغیر حالت برای توصیف کامل رفتار یک سیستم داده شده کافی باشد، آنگاه این n متغیرهای حالت را می‌توان به صورت n مولفه‌های یک بردار x در نظر گرفت. این چنین برداری را یک بردار حالت می‌نامند. بنابراین، بردار حالت برداری است که حالت سیستم $x(t)$ را برای زمان $t > t_0$ با دادن حالت در $t = t_0$ و ورودی $u(t)$ برای $t \geq t_0$ بطور منحصر بفردی تعیین می‌کند.

فضای حالت. فضای n -بعدی که محورهای مختصات آن شامل محور x_1, x_2, \dots, x_n محور x_n است، فضای حالت نامیده می‌شود. هر حالت در فضای حالت به صورت یک نقطه نمایش داده می‌شود.

۲-۵-۱ بدست آوردن معادلات حالت از تابع تبدیل

سیستمی را با یک ورودی و یک خروجی در نظر بگیرید. فرض کنید که خروجی این سیستم نه تنها به ورودی آن بلکه به نرخ تغییر خروجی نیز بستگی داشته باشد. یعنی آنکه

$$y(t) = \frac{1}{a} \dot{y}(t) - \frac{b}{a} u(t) \quad (1-5-2)$$

که در آن a و b مقادیر اسکالر، $y(t)$ خروجی سیستم در زمان t و $u(t)$ ورودی سیستم در زمان t است. هم‌چنین $\dot{y}(t) = \frac{d}{dt} y(t) = Dy(t)$ معادله (۱-۵-۲) را به صورت زیر نیز می‌توان

نوشت

$$y(t) = ay(t) + bu(t) \quad (۲-۵-۲)$$

حال اگر حالت $x_1(t)$ را به صورت خروجی $y(t)$ تعریف کنیم، آنگاه

$$\dot{x}_1(t) = ax_1(t) + bu(t) \quad (۳-۵-۲)$$

$$y(t) = x_1(t) \quad \text{و}$$

معادلات بالا یک صورت بسیار ساده از معادلات حالت و خروجی و یا توصیف فضای حالت سیستم می‌باشند. اکنون این توصیف را به حالت‌های کلی‌تری تعمیم می‌دهیم.

نمایشهای ماتریسی. یک حالت کلی‌تر از معادله (۲-۵-۲)، عبارتست از

$$D^r y(t) + a_r D^{r-1} y(t) + \dots + a_1 D y(t) + a_0 y(t) = b_r u(t) \quad (۴-۵-۲)$$

اکنون متغیرهای زیر را تعریف کنید

$$x_1(t) = y(t)$$

$$x_r(t) = D x_1(t) = D y(t)$$

$$x_{r-1}(t) = D x_r(t) = D^2 y(t)$$

آنگاه معادله (۴-۵-۲) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_r(t) \\ \dot{x}_{r-1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_r(t) \\ x_{r-1}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix} u(t) \quad (۵-۵-۲)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_r(t) \\ x_{r-1}(t) \end{bmatrix} \quad \text{و}$$

یا، به عبارت کلی‌تر

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{Ax}(t) + \mathbf{Bu}(t) \quad (۶-۵-۲)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{Cx}(t) + \mathbf{Du}(t)$$

که در آن A ماتریس ضریب بردار حالت $x(t)$ است که آنرا ماتریس حالت^۱ می نامند، B را ماتریس ورودی^۲، C را ماتریس خروجی^۳ و D را ماتریس انتقال مستقیم^۴ می نامند. انتقال مستقیم یک رابطه مستقیم بین خروجی و ورودی سیستم را نشان می دهد.

اکنون حالت کلی تر را در نظر می گیریم، که در آن مشتقات ورودی نیز در معادله دیفرانسیل

سیستم حضور دارند. به عنوان مثال، معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید

$$D^r y(t) + a_r D^{r-1} y(t) + a_{r-1} D^{r-2} y(t) + \dots + a_1 y(t) = b_r D^r u(t) + b_{r-1} D^{r-1} u(t) + \dots + b_0 u(t) \quad (۷-۵-۲)$$

یا

$$(D^r + a_r D^{r-1} + a_{r-1} D^{r-2} + \dots + a_1) y(t) = (b_r D^r + b_{r-1} D^{r-1} + \dots + b_0) u(t) \quad (۸-۵-۲)$$

اکنون متغیر $z(t)$ را چنان تعریف می کنیم که

$$u(t) = (D^r + a_r D^{r-1} + a_{r-1} D^{r-2} + \dots + a_1) z(t) \quad (۹-۵-۲)$$

$$y(t) = (b_r D^r + b_{r-1} D^{r-1} + \dots + b_0) z(t)$$

و سپس حالتها را می توان به صورت زیر تعریف کرد

$$x_1(t) = z(t)$$

$$x_2(t) = Dz(t)$$

$$x_3(t) = D^2 z(t)$$

که نمایشی بدین صورت می دهند

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_r & -a_{r-1} & -a_1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (۱۰-۵-۲)$$

و

$$y(t) = \begin{bmatrix} b_r & b_{r-1} & b_0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

که در آن

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

1- State matrix

2- Input matrix

3- Output matrix

4- Direct transmission

از معادله (۲-۵-۸)، مشاهده می‌شود که صورت کلی تابع تبدیل عبارتست از

$$(D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_1D + a_0)y(t) = (b_mD^m + b_{m-1}D^{m-1} + \dots + b_1D + b_0)u(t) \quad (۲-۵-۱۱)$$

که در آن $m < n$. در این صورت بردار n -بعدی حالت برابر است با

$$\mathbf{x}^T(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ \dots \ x_n(t)]$$

با فرض شرایط اولیه صفر و گرفتن تبدیل لاپلاس از معادله (۲-۵-۱۱)، داریم

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0} \quad (۲-۵-۱۲)$$

که معادلات حالت و خروجی را در حالت کلی بدین صورت می‌دهد

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (۲-۵-۱۳)$$

$$y(t) = [b_0 \ b_1 \ \dots \ b_{n-2} \ b_{n-1}] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

توجه کنید که معادلات بالا، تنها یک نمایش از تعداد بی‌شماری نمایشهای ممکن فضای حالت تابع تبدیل (۲-۵-۱۲) است. با نمایشهای دیگر فضای حالت، در بخش بعد آشنا خواهیم شد. همانطور که قبلاً نیز اشاره شد، نمایشهای مختلف فضای حالت از سیستم، به روش تعریف متغیرهای حالت بستگی دارد.

مثال ۲-۵-۱

تابع تبدیل سیستمی عبارتست از

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s^2 + 3s + 5}{s^3 + s^2 + 2s + 1}$$

از معادله‌های (۱۲-۲-۵) و (۱۳-۲-۵)، نمایش فضای حالت این سیستم عبارتست از

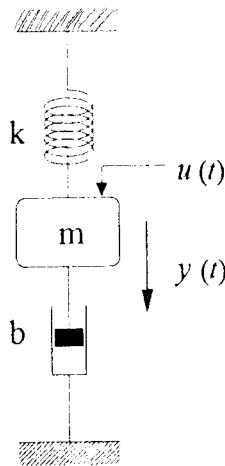
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

و

$$y(t) = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

مثال ۲-۵-۲

سیستم مکانیکی نشان داده شده در شکل ۲-۲۶ را در نظر بگیرید. در این سیستم $u(t)$ ورودی به سیستم (نیروی خارجی) و $y(t)$ خروجی سیستم (جابجایی فنر) می‌باشند.



شکل ۲-۲۶ سیستم مکانیکی.

از قانون دوم نیوتن، معادله دیفرانسیل سیستم به صورت زیر است

$$m D^2 y + b D y + k y = u$$

با تعریف متغیرهای حالت به صورت زیر

$$x_1(t) = y(t)$$

$$x_2(t) = \dot{y}(t)$$

بدست می آوریم

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{m} (-k y - b y) + \frac{1}{m} u$$

یا

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{k}{m} x_1 - \frac{b}{m} x_2 + \frac{1}{m} u$$

معادله خروجی نیز عبارتست از

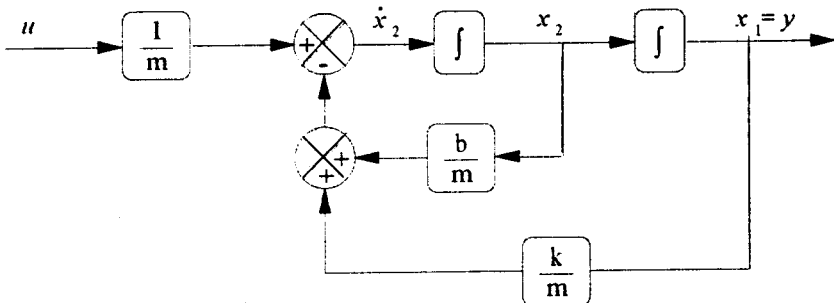
$$y = x_1$$

بنابراین معادله حالت و خروجی سیستم با تعریف بردار حالت $x^T(t) = [x_1(t) \ x_2(t)]$ به صورت زیر است

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \cdot & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} \cdot \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [1 \ \cdot] x(t)$$

دیاگرام بلوکی سیستم در شکل ۲۷-۲ رسم شده است.



شکل ۲۷-۲ دیاگرام بلوکی سیستم نشان داده شده در شکل ۲۶-۲

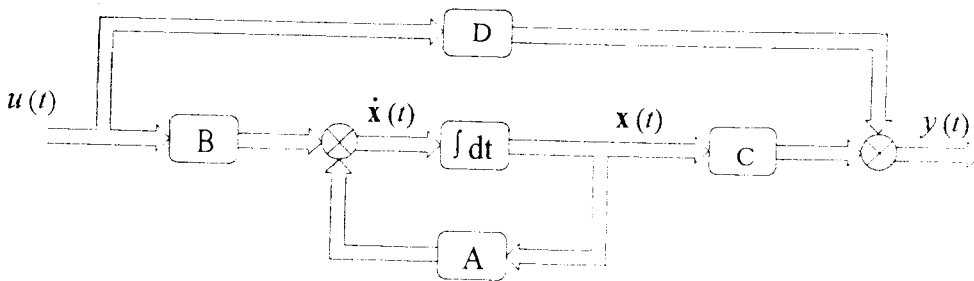
در دو مثال قبل، معادلات حالت و خروجی بدست آمده (توصیف فضای حالت سیستم) به صورت کلی زیر هستند

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (14-5-2)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad (15-5-2)$$

در واقع معادله (۱۴-۵-۲)، معادله حالت و معادله (۱۵-۵-۲)، معادله خروجی سیستم خطی و تغییرناپذیر با زمان است.

از آنجا که توصیف فضای حالت سیستم توسط متغیرهای حالت آن، از رفتار و ساختار داخلی سیستم نیز تصویری دقیق و روشن به مهندس طراح سیستم کنترل ارائه می دهد، آنرا توصیف داخلی^۱ سیستم نیز نامیده اند. و از آنجاییکه توصیف تابع تبدیل سیستم تنها یک نمایش ورودی - خروجی از سیستم است، آنرا توصیف خارجی^۲ سیستم نامیده اند. یک نمایش دیاگرام بلوکی از سیستم داده شده با معادلات (۱۴-۵-۲) و (۱۵-۵-۲) در شکل ۲-۲۸ نشان داده شده است. در این شکل خطهای دابل نشان دهنده برداری بودن متغیرها هستند.



شکل ۲-۲۸ دیاگرام بلوکی سیستم خطی زمان پیوسته تغییرناپذیر با زمان

۲-۵-۲ انتخاب متغیرهای حالت

اولین قدم در راه بکارگیری مفاهیم فضای حالت، جهت تحلیل و طراحی سیستمهای کنترل، انتخاب متغیرهای حالت سیستم است. همانطور که قبلاً اشاره شد، متغیرهای حالت

نشان دهنده ساختار یک سیستم، منحصر بفرد نیست و به هیچ وجه نیز راه منحصر بفردی برای تعیین آنها وجود ندارد. این مطلب را به خوبی در مثال مسابقه فوتبال مشاهده کردیم. دو دسته متغیرهای حالت انتخاب شده در آن مثال به ترتیب، نتیجه مسابقه در طول مسابقه و روحیات تیم در طول مسابقه بودند. هرکدام از این دو دسته متغیرهای حالت به نوبه خود می توانند اطلاعات مفیدی از ساختار داخلی مسابقه بدست دهند. در حالت کلی برای سیستم های فیزیکی، روشهای مختلفی برای تعیین متغیرهای حالت در دسترس می باشند که برای بررسی بیشتر آنها می توانید به مراجع و کتابشناسی فصل هفتم مراجعه نمایید. در اینجا، انتخاب متغیرهای حالت بر اساس متغیرهای فیزیکی^۱ ارایه خواهد شد.

انتخاب متغیرهای حالت در روش متغیرهای فیزیکی بر اساس عناصر نگهدارنده - انرژی^۲ سیستم بنا نهاده شده است. جدول ۱-۲ بعضی از عناصر متداول نگهدارنده - انرژی را که در سیستم های فیزیکی وجود دارند، همراه با معادلات انرژی متناظر نشان می دهد. متغیر فیزیکی در معادله انرژی برای هر عنصر نگهدارنده - انرژی می تواند به عنوان متغیر حالت سیستم انتخاب شود. البته باید دقت کرد، همانطور که در تعریف متغیرهای حالت یک سیستم در اول بخش آورده شده است، این مجموعه کوچکترین مجموعه متغیرهای لازم برای تعیین حالت می باشد. به عبارت دیگر اگر x_1, x_2, \dots, x_n متغیرهای حالت یک سیستم باشند، آنگاه n حداقل تعداد متغیرهای لازم برای توصیف کامل ساختار داخلی آن سیستم خواهد بود. به این چنین مدلی، مدل حالت می نیمال گویند. در اکثر کاربردهای عملی، مدل های حالت غیر می نیمال، ارزش چندانی ندارد. مدل حالت می نیمال، با انتخاب متغیرهای فیزیکی ناوابسته به عنوان

جدول ۱-۲ عناصر نگهدارنده - انرژی

متغیر فیزیکی	انرژی	عنصر
ولتاژ v	$Cv^2/2$	خازن C
جریان i	$Li^2/2$	سلف L
سرعت انتقالی v	$Mv^2/2$	جرم M
سرعت چرخشی ω	$J\omega^2/2$	ممان اینرسی J
جابجایی x	$kx^2/2$	فنر k

متغیرهای حالت، بدست آورده می شود. متغیرهای حالت ناوابسته^۱، متغیرهای حالتی هستند که نمی توان آنها را بر حسب متغیرهای حالت تعیین شده دیگر بیان کرد. به عنوان نمونه اگر برای سه متغیر حالت x_1, x_2, x_3 نوشتن یک متغیر مانند x_1 بر حسب دو متغیر دیگر، مانند $x_1 = \alpha x_2 + \beta x_3$ (و α و β اسکالرهایی غیر صفر)، امکان پذیر باشد این سه متغیر را وابسته و در غیر این صورت ناوابسته می گویند.

به مثالهای زیر برای تعیین مدل حالت می نیمال توجه کنید.

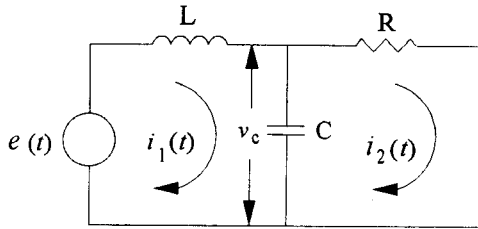
مثال ۲-۵-۳

سیستم نشان داده شده در شکل ۲-۲۹ را در نظر بگیرید. با انتخاب متغیرهای حالت فیزیکی مناسب، معادلات حالت و خروجی سیستم را بنویسید. ورودی سیستم ولتاژ $e(t)$ و خروجی آن ولتاژ خازن $v_c(t)$ است.

معادلات دیفرانسیل حاکم بر مدار عبارتند از

$$e(t) = L \frac{di_1(t)}{dt} + v_c(t)$$

$$0 = Ri_2(t) - v_c(t)$$



شکل ۲-۲۹ مدار الکتریکی مثال ۲-۵-۳

با انتخاب متغیرهای حالت به صورت $x_1 = i_1(t)$ و $x_2 = v_c(t)$ ، از معادله اول داریم

$$\dot{x}_1(t) = -\frac{1}{L}x_2(t) + \frac{1}{L}e(t)$$

معادله ولتاژ خازن عبارتست از

$$v_c(t) = \frac{1}{C} \int (i_1(t) - i_2(t)) dt$$

و بنابراین

$$\frac{dv_c}{dt} = \frac{1}{C}(i_1(t) - i_2(t))$$

$$= \frac{1}{C} \left(i_1(t) - \frac{1}{R} v_c(t) \right)$$

با جایگزینی برای $v_c(t)$ و $i_1(t)$ بدست می آوریم

$$\dot{x}_2(t) = \frac{1}{C} x_1(t) - \frac{1}{RC} x_2(t)$$

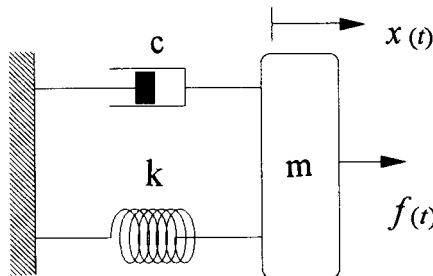
اکنون با نوشتن معادله بردار ماتریسی برای x_1 و x_2 با توجه به اینکه $y(t) = x_2(t)$ داریم

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix} e(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

مثال ۲-۵-۴

سیستم مکانیکی نشان داده شده در شکل ۲-۳۰ را در نظر بگیرید. در این سیستم نیروی ورودی $f(t)$ است و خروجی سیستم، جابجایی جرم $x(t)$ است. معادلات حالت و خروجی



شکل ۲-۳۰ سیستم مکانیکی

سیستم را بنویسید. نخست معادله دیفرانسیل حاکم بر سیستم را بدست می آوریم. از قانون دوم نیوتن داریم که برابند کلیه نیروهای خارجی عمل کننده بر m برابر با $mD^2x(t)$ می باشد، با فرض آنکه جرم از حالت سکون در $x(t) = 0$ به طرف پایین به حرکت در آورده می شود،

نیروهای عمل کننده بر آن از طرف فنر و میرا کننده c ، در جهت بالا کشیدن آن، به ترتیب عبارتند از $kx(t)$ و $D\dot{x}(t)$. بنابراین داریم

$$m \frac{d^2x(t)}{dt^2} = -kx(t) - c \frac{dx(t)}{dt} + f(t)$$

با انتخاب متغیرهای حالت به صورت $x_1(t) = x(t)$ (جابجایی فنر و جرم) و $x_2(t) = \dot{x}(t)$ (سرعت جرم)، معادلات حالت و خروجی سیستم عبارت خواهند بود از

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

مثال ۲-۵-۵

مدار الکتریکی نشان داده شده در شکل ۲-۳۱ را در نظر بگیرید. معادلات حالت و خروجی آن را برای ورودی جریان و خروجی $v_1(t)$ بنویسید.

در این مدار پنج عنصر نگهدارنده انرژی وجود دارد. این پنج عنصر عبارتند از سلف‌های L_1, L_2, L_3 و خازن‌های C_1 و C_2 . لذا می‌توان پنج متغیر حالت فیزیکی برای آن در نظر گرفت.

معادلات دیفرانسیل حاکم بر مدار عبارتند از

$$v_1(t) = L_1 \frac{d}{dt} i_1(t)$$

$$v_2(t) = L_2 \frac{d}{dt} i_2(t) + v_1(t)$$

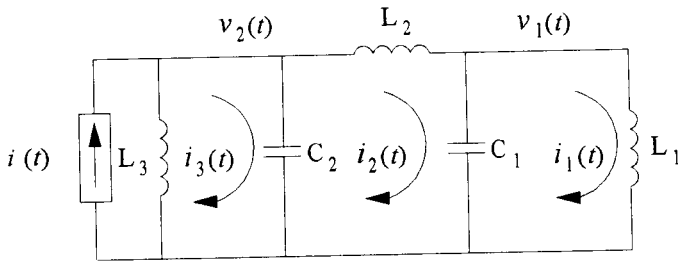
$$v_3(t) = L_3 \frac{d}{dt} i_3(t)$$

$$i_2(t) = C_1 \frac{d}{dt} v_1(t) + i_1(t)$$

$$i(t) = i_3(t) + C_2 \frac{d}{dt} v_2(t) + i_2(t)$$

با نوشتن معادله حلقه در برگیرنده L_1, L_2, L_3 و انتگرال‌گیری از آن داریم

$$L_3 i_3(t) = L_2 i_2(t) + L_1 i_1(t) + k$$



شکل ۲-۳۱ مدار الکتریکی

که در آن ثابت k تابعی از شرایط اولیه است. این معادله نشان می دهد که سه متغیر جریان در سلف ها (با فرض معلوم بودن شرایط اولیه)، مستقل نمی باشند و در واقع یکی از این جریانها را می توان به صورت ترکیب خطی از دیگران نوشت. بنابراین این مدار تنها چهار متغیر حالت فیزیکی ناوابسته دارد. این چهار متغیر را به صورت زیر انتخاب می کنیم

$$x_1(t) = v_1(t) \quad , \quad x_2(t) = v_2(t) \quad , \quad x_3(t) = i_1(t) \quad , \quad x_4(t) = i_2(t)$$

دقت کنید که دو متغیر حالت $x_3(t)$ و $x_4(t)$ را می توانستیم به صورتهای دیگر (به عنوان نمونه با استفاده از $i_2(t)$ و $i_1(t)$) نیز بنویسیم. با حذف جریان وابسته انتخاب شده $i_3(t)$ و استفاده از معادلات مدار (با فرض صفر بودن شرایط اولیه جریانها)، داریم

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & -\frac{1}{C_1} & \frac{1}{C_1} \\ \cdot & \cdot & -\frac{L_1}{L_3 C_2} & -\frac{L_2 + L_3}{L_3 C_2} \\ \frac{1}{L_1} & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\frac{1}{L_1} & \frac{1}{L_2} & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cdot \\ \frac{1}{C_2} \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix}$$

۳-۵-۲ رابطه بین تابع تبدیل و معادلات فضای حالت

در اینجا نشان خواهیم داد که چگونه از معادله فضای حالت، تابع تبدیل یک سیستم را بدست می‌آوریم. یک سیستم با تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) \quad (۱۶-۵-۲)$$

این سیستم می‌تواند با معادلات زیر در فضای حالت نمایش داده شود:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \quad (۱۷-۵-۲)$$

$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}u(t) \quad (۱۸-۵-۲)$$

که در آن $\mathbf{x}(t)$ بردار حالت، $u(t)$ ورودی، و $y(t)$ خروجی است. تبدیل لاپلاس معادله‌های (۱۷-۵-۲) و (۱۸-۵-۲) عبارتست از

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}U(s) \quad (۱۹-۵-۲)$$

$$Y(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + \mathbf{D}U(s) \quad (۲۰-۵-۲)$$

با توجه به اینکه تابع تبدیل برای شرایط اولیه صفر تعریف شده است، لذا در معادله

$$(۱۹-۵-۲)، \mathbf{x}(0) \text{ را برابر صفر قرار می‌دهیم. آنگاه داریم}$$

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{A}\mathbf{X}(s) = \mathbf{B}U(s) \quad \text{یا}$$

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \mathbf{B}U(s)$$

با پیش ضرب کردن طرفین معادله در $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ ، بدست می‌آوریم

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}U(s) \quad (۲۱-۵-۲)$$

جایگزینی معادله (۲۱-۵-۲) در معادله (۲۰-۵-۲)، می‌دهد

$$Y(s) = \left[\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D} \right] U(s) \quad (۲۲-۵-۲)$$

با مقایسه معادله‌های (۲۲-۵-۲) و (۱۶-۵-۲)، داریم

$$G(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (۲۳-۵-۲)$$

این معادله، رابطه بین تابع تبدیل سیستم و ماتریس‌های \mathbf{A} ، \mathbf{B} ، \mathbf{C} و \mathbf{D} را نشان می‌دهد.

مثال ۲-۵-۶

سیستم مکانیکی نشان داده شده در شکل ۲-۲۶ را در نظر بگیرید. معادله‌های فضای

حالت این سیستم در مثال ۲-۵-۲ بدست آورده شده‌اند. از مثال ۲-۵-۲ داریم

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ m \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0], \quad D = 0$$

با جایگزینی A, B, C و D در معادله (۲-۵-۲۳)، بدست می‌آوریم

$$\begin{aligned} G(s) &= C(sI - A)^{-1}B + D \\ &= [1 \quad 0] \left\{ \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \right\}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ m \end{bmatrix} + 0 \\ &= [1 \quad 0] \begin{bmatrix} s & -1 \\ \frac{k}{m} & s + \frac{b}{m} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ m \end{bmatrix} \end{aligned}$$

از آنجاییکه

$$\begin{bmatrix} s & -1 \\ \frac{k}{m} & s + \frac{b}{m} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{m}} \begin{bmatrix} s + \frac{b}{m} & 1 \\ -\frac{k}{m} & s \end{bmatrix}$$

داریم

$$\begin{aligned} G(s) &= [1 \quad 0] \frac{1}{s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{m}} \begin{bmatrix} s + \frac{b}{m} & 1 \\ -\frac{k}{m} & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ m \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{ms^2 + bs + k} \end{aligned}$$

که تابع تبدیل سیستم است. توجه کنید که این تابع تبدیل را می‌توانستیم مستقیماً از معادله دیفرانسیل سیستم

$$m D^2 y + b D y + k y = u$$

پس از گرفتن تبدیل لاپلاس با شرایط اولیه صفر بدست آوریم.

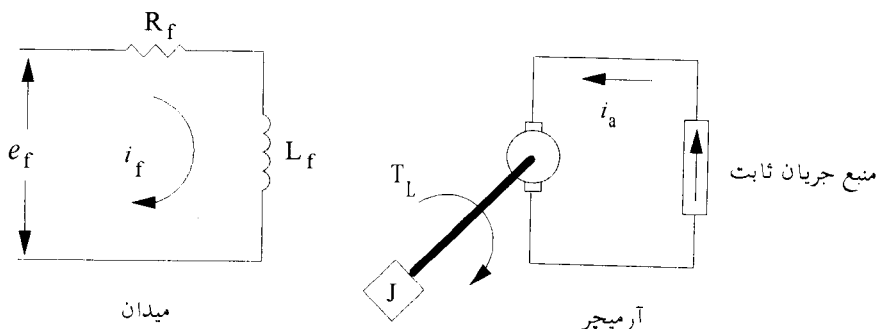
۶-۲ مدل‌سازی موتورهای DC

در این بخش با بکارگیری مفاهیم و ابزار توسعه یافته مدل‌سازی در بخشهای قبلی، به

مدلسازی موتورهای DC می‌پردازیم. موتورهای DC برای تبدیل کردن یک سیگنال ورودی الکتریکی به یک سیگنال خروجی مکانیکی بکار گرفته می‌شوند. این موتورها از لحاظ نحوه عملکرد به دو دسته کنترل میدان^۱ و کنترل آرمیچر^۲ تقسیم می‌شوند. در اینجا مدلسازی این دو دسته از موتورهای DC مورد بررسی قرار گرفته‌اند.

کنترل میدان. در کنترل میدان، همانطور که در شکل ۲-۳۲ نشان داده شده است، جریان آرمیچر ثابت نگه داشته شده است و در میدان از یک ولتاژ قابل تنظیم به عنوان ورودی به سیستم استفاده می‌شود. ولتاژ اعمال شده به میدان $e_f(t)$ است. گشتاور ایجاد شده توسط موتور متناسب با حاصلضرب جریان آرمیچر $i_a(t)$ و فلوی^۳ میدان ϕ است. بنابراین

$$T(t) = K_f \phi i_a(t) \quad (۱-۶-۲)$$



شکل ۲-۳۲ موتور DC با کنترل میدان

که در آن K_f برای هر موتوری ثابت است و به مجموع هادیهای^۴ آرمیچر، تعداد قطبهای میدان و غیره بستگی دارد. ولتاژ اعمال شده به میدان $e_f(t)$ برای کاربردهای معمولی از خروجی یک آمپلی فایر یا یک ژنراتور DC در کار بردهایی که قدرت بیشتر مورد نیاز است، تأمین می‌گردد. در مدار میدان، مقاومت سیستم پیچها R_f ، و هدایت با L_f نشان داده می‌شوند.

یک منحنی از فلوی ϕ بر حسب جریان میدان i_f در شکل ۲-۳۳ نشان داده شده است. در محدوده‌ای که جریان میدان i_f به اندازه‌ای نرسیده است که باعث اشباع در میدان شود، رابطه ϕ

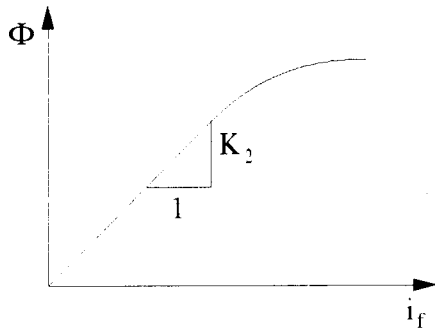
1- Field control

2- Armature control

3- Flux

4- Conductors

و i_f خطی است. و بعد از اشباع از رابطه خطی تبعیت نمی‌کند. موتورهای مورد استفاده در سیستم‌های کنترل عموماً بر روی محدوده خطی بالا عمل خواهند کرد. لذا



شکل ۲-۳۳ نمودار فلو برحسب جریان میدان

$$\phi = K_2 i_f \quad (2-6-2)$$

که در آن، K_2 شیب قسمت خطی منحنی نشان داده شده در شکل ۲-۳۳ است. با جایگزینی از معادله (۱-۶-۲) در معادله (۲-۶-۲)، داریم

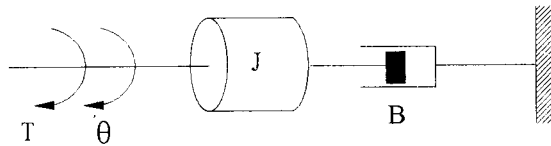
$$T = K_1 K_2 i_a i_f = K_m i_a i_f \quad (3-6-2)$$

که در آن $K_m = K_1 K_2$.

اگر همانطور که در شکل ۲-۳۴ نشان داده شده است، بار از یک ممان اینرسی و میراکننده تشکیل شده باشد و گشتاور بار T_L باشد، معادله گشتاور آرمیچر به صورت زیر نوشته می‌شود

$$T = BD\theta + JD^2\theta + T_L \quad (4-6-2)$$

که در آن θ موقعیت زاویه‌ای آرمیچر یا شفت موتور^۱ است. معادله ولتاژ مدار میدان عبارتست است



شکل ۲-۳۴ مدل بار

$$L_f Di_f + R_f i_f = e_f \quad (5-6-2)$$

و بنابراین

$$i_f = \frac{e_f}{R_f(\tau_f D + 1)} \quad (6-6-2)$$

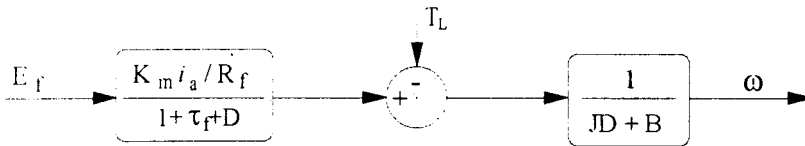
که در آن ثابت زمانی مدار میدان است. با جایگزینی T از معادله (۴-۶-۲) و i_f از معادله (۶-۶-۲) در معادله (۳-۶-۲) و به دست آوردن θ ، داریم

$$\theta = \frac{1}{JD^2 + BD} \left[\frac{(K_m i_a / R_f) e_f}{1 + \tau_f D} - T_L \right] \quad (7-6-2)$$

سرعت زاویه‌ای ω را می‌توان با مشتق‌گیری از معادله (۷-۶-۲) بدست آورد

$$\omega = D\theta = \frac{1}{JD + B} \left[\frac{(K_m i_a / R_f) e_f}{1 + \tau_f D} - T_L \right] \quad (8-6-2)$$

نمایش دیاگرام بلوکی سیستم در شکل ۳۵-۲ نشان داده شده است.



شکل ۳۵-۲ دیاگرام بلوکی یک موتور DC با کنترل میدان

برای به دست آوردن معادلات فضای حالت با فرض $T_L = 0$ ، از معادله‌های (۸-۶-۲) و

(۲-۶-۶) داریم

$$JD^2 \theta = K_m i_a i_f - BD\theta \quad (9-6-2)$$

و

$$e_f = R_f i_f + L_f Di_f \quad (10-6-2)$$

با تعریف متغیرهای حالت $x_1 = D\theta$ و $x_2 = i_f$ برای اعضاء نگهدارنده انرژی سیستم و $u(t) = e_f$

با $y(t) = D\theta$ معادله‌های فضای حالت زیر را از معادله‌های (۹-۶-۲) و (۱۰-۶-۲) برای

سیستم بدست می‌آوریم

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{B}{J} & \frac{K_m i_a}{J} \\ 0 & -\frac{R_f}{L_f} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L_f} \end{bmatrix} u(t)$$

(۱۱-۶-۲)

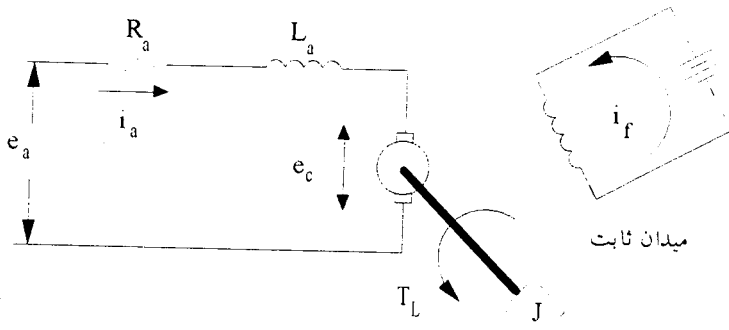
$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

کنترل آرمیچر. در موتورهای DC با کنترل آرمیچر، سرعت توسط تنظیم ولتاژ اعمال شده به آرمیچر کنترل می‌شود. این ولتاژ معمولاً توسط یک ژنراتور فراهم می‌شود. یک موتور DC با کنترل آرمیچر در شکل ۳۶-۲ نشان داده شده است. هنگامیکه موتور آرمیچر در حال چرخش است ولتاژی برابر e_c متناسب با حاصلضرب فلو و سرعت القاء می‌شود. از آنجاییکه پلاریته این ولتاژ مخالف ولتاژ اعمال شده است، به آن نیروی محرک الکتریکی بازگشتی یا emf برگشتی^۱ می‌گویند. از آنجاییکه جریان میدان ثابت است، فلو ثابت بوده و بنابراین e_c متناسب با ω می‌باشد. بنابراین

$$e_c = K_v \phi \omega \tag{۱۲-۶-۲}$$

که در آن K_v یک ثابت است و برای هر موتوری مقداری مشخص دارد. با جایگزینی برای ϕ از معادله (۲-۶-۲) در معادله (۱۲-۶-۲)، داریم

$$e_c = K_v K_f i_f \omega = K_c i_f \omega \tag{۱۳-۶-۲}$$



شکل ۳۶-۲ موتور DC با کنترل آرمیچر

که در آن $K_c = K_r K_f$. معادله ولتاژ برای مدار آرمیچر عبارتست از

$$\begin{aligned} e_a - e_c &= R_a i_a + L_a D i_a \\ &= R_a (\tau_a D + 1) i_a \end{aligned} \quad (۱۴-۶-۲)$$

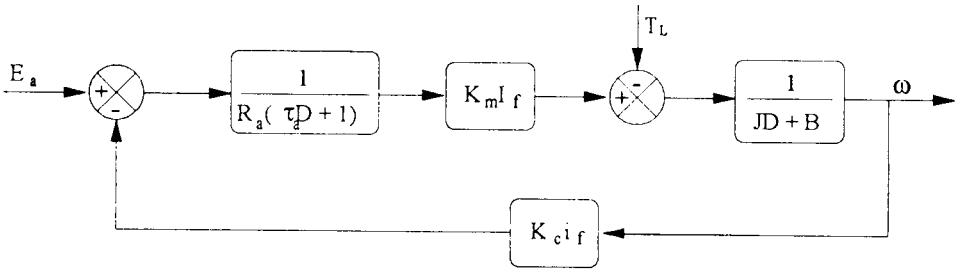
که در آن $\tau_a = L_a / R_a$ ، ثابت زمانی سیستم می‌باشد. گشتاور ایجاد شده توسط موتور عبارتست از

$$T = K_m i_f i_a \quad (۱۵-۶-۲)$$

و معادله بالانس گشتاور برای خروجی شفت عبارتست از

$$T = (BD + JD^2)\theta + T_L \quad (۱۶-۶-۲)$$

از معادله‌های (۱۴-۶-۲)، (۱۵-۶-۲) و (۱۶-۶-۲)، دیاگرام بلوکی سیستم به صورت نشان داده شده در شکل ۳۷-۲ است.



شکل ۳۷-۲ دیاگرام بلوکی یک موتور DC با کنترل آرمیچر

برای بدست آوردن نمایش فضای حالت سیستم، با فرض $T_L = 0$ ، از معادله‌های (۲-۶-۲) و (۱۴-۶-۲)، همچنین از معادله‌های (۱۵-۶-۲) و (۱۶-۶-۲)، به ترتیب داریم

$$e_a = R_a i_a + L_a D i_a + K_c i_f D \theta \quad (۱۷-۶-۲)$$

$$K_m i_f i_a = BD\theta + JD^2\theta \quad (۱۸-۶-۲)$$

با تعریف متغیرهای حالت فیزیکی $x_1 = i_a$ و $x_2 = D\theta$ (متغیرهای اعضای نگهدارنده انرژی در سیستم)، از معادله‌های (۱۷-۶-۲) و (۱۸-۶-۲)، بدست می‌آوریم

$$\dot{x}_1(t) = -\frac{K_c i_f}{L_a} x_2(t) - \frac{R_a}{L_a} x_1(t) + \frac{e_a}{L_a} \quad (۱۹-۶-۲)$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{K_m i_f}{J} x_1(t) - \frac{B}{J} x_2(t) \quad (۲۰-۶-۲)$$

با متغیرهای e_a و $D\theta$ به عنوان متغیرهای ورودی و خروجی سیستم، از معادله‌های (۲-۶-۱۹) و (۲-۶-۲۰) داریم

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{K_c i_f}{L_a} \\ \frac{K_m i_f}{J} & -\frac{B}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (2-6-21)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

مسائل

۱-۲. معادلات دیفرانسیل و شرایط اولیه حاکم بر سیستمی عبارتند از:

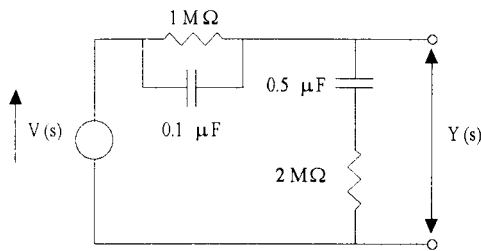
$$y(0) = 1, \quad Dy(0) = 4, \quad D^2y(t) + 6Dy(t) + 13y(t) = 5u(t) \quad (\text{الف})$$

$$y(0) = 1, \quad Dy(0) = 2, \quad D^2y(t) + 3Dy(t) + 4y(t) = 7u(t) + 2t \quad (\text{ب})$$

$$y(0) = 4, \quad Dy(0) = 5, \quad D^2y(t) + 3Dy(t) + 4y(t) = 6 \sin \omega t \quad (\text{ج})$$

توابع تبدیل متناظر سیستم را تعیین کنید. پاسخهای سیستم را بر حسب تبدیل لاپلاس پیدا کنید.

۲-۲. تابع تبدیل مدار الکتریکی نشان داده شده در شکل ۲-۳۸ را بدست آورید.

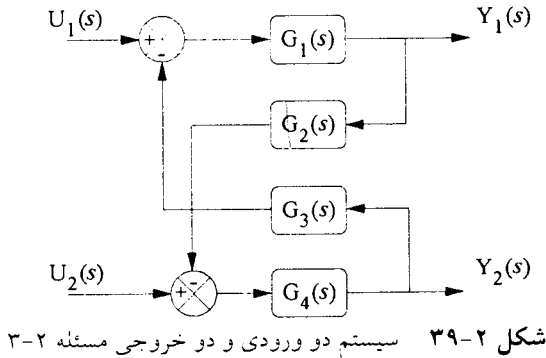


شکل ۲-۳۸ مدار الکتریکی مسئله ۲-۲

۳-۲. سیستم دو ورودی و دو خروجی نشان داده شده در شکل ۲-۳۹ را در نظر بگیرید. در

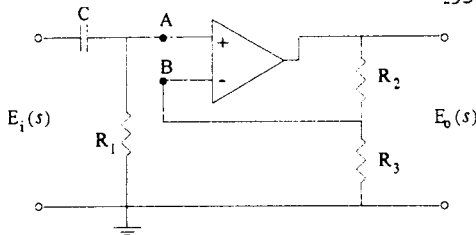
این سیستم ورودیها به ترتیب $U_1(s)$ ، $U_2(s)$ و خروجیها $Y_1(s)$ و $Y_2(s)$ می باشند.
 الف - خروجی $Y_1(s)$ را بر حسب ورودیها بدست آورید.
 ب - خروجی $Y_2(s)$ را بر حسب ورودیها بدست آورید.

اثر برابر ساختن G_1G_4 و $(G_2G_3)^{-1}$ چیست؟ با فرض $G_1G_4 \neq (G_2G_3)^{-1}$ ، مقدار G_s را چنان پیدا کنید که $Y(s) = G_s U_1(s)$ ، که در آن $Y(s) = Y_1(s) + G_s Y_2(s)$.

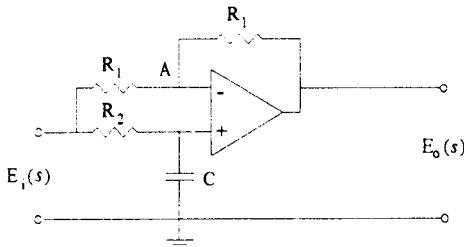


شکل ۲-۳۹ سیستم دو ورودی و دو خروجی مسئله ۲-۳

۲-۴۰ تابع تبدیل مدارهای op-amp نشان داده شده در شکلهای ۲-۴۰ و ۲-۴۱ را بدست آورید.

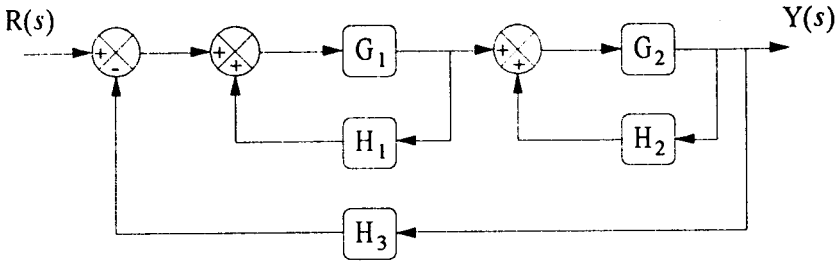


شکل ۲-۴۰ مدار تقویت کننده عملیاتی (op-amp)

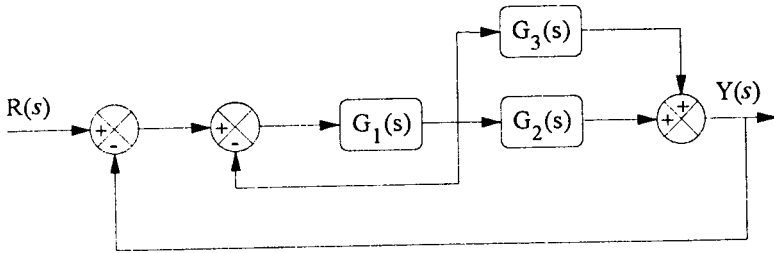


شکل ۲-۴۱ مدار تقویت کننده عملیاتی (op-amp)

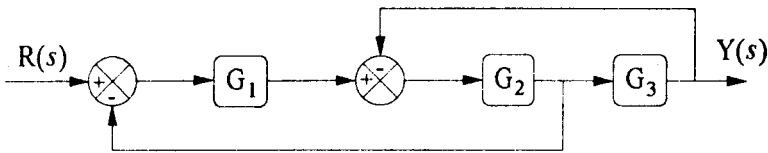
۵-۲. (الف) - با ساده کردن دیاگرام‌های بلوکی شکل‌های ۴۲-۲، ۴۳-۲، ۴۴-۲ و ۴۵-۲ تابع تبدیل کلی آنها را بدست آورید.



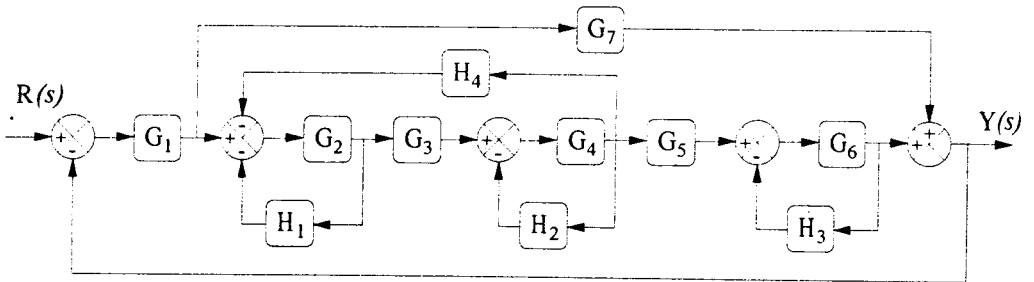
شکل ۴۲-۲ دیاگرام بلوکی مسئله ۵-۲



شکل ۴۳-۲ دیاگرام بلوکی مسئله ۵-۲



شکل ۴۴-۲ دیاگرام بلوکی مسئله ۵-۲



شکل ۴۵-۲ دیاگرام بلوکی مسئله ۵-۲

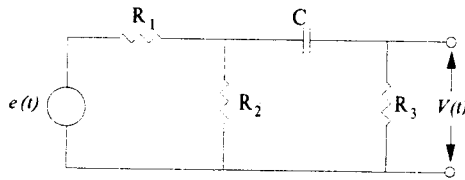
(ب) - با رسم نمودار گذر جریان متناظر دیاگرام‌های بلوکی قسمت الف - و استفاده از قانون میسن تابع تبدیل کلی دیاگرام‌های بلوکی را بدست آورید.

۶-۲- مدار نشان داده شده در شکل ۴۶-۲ را در نظر بگیرید. که در آن ورودی سیستم و خروجی آن به ترتیب عبارتند از $e(t)$ و $v(t)$

الف - دیاگرام بلوکی مدار را رسم کنید.

ب - نمودار گذر سیگنال مدار را رسم کنید.

ج - با ساده کردن دیاگرام بلوکی و استفاده از قانون میسن، تابع تبدیل مدار را پیدا کنید.

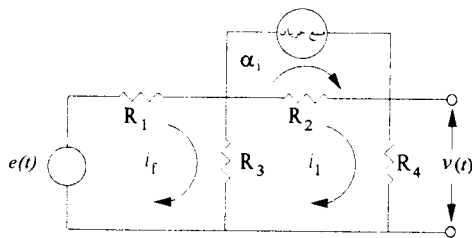


شکل ۴۶-۲ مدار مسئله ۶-۲

۷-۲- مدار نشان داده شده در شکل ۴۷-۲ را در نظر بگیرید. که در آن ورودی سیستم $e(t)$ و خروجی آن $v(t)$ می‌باشند. α نیز ثابت است.

الف - نمودار گذر سیگنال مدار را رسم کنید.

ب - تابع تبدیل مدار را پیدا کنید.

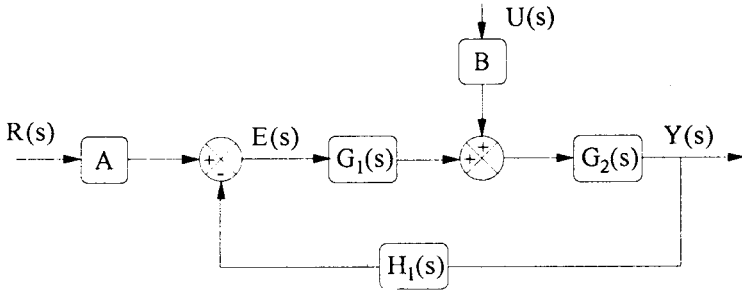


شکل ۴۷-۲ مدار مسئله ۷-۲

۸-۲- دیاگرام بلوکی نشان داده شده در شکل ۴۸-۲ را در نظر بگیرید.

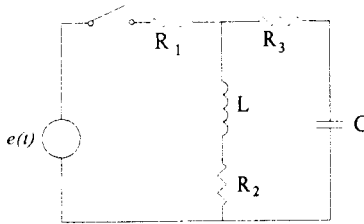
الف - نمودار گذر سیگنال معادل آنرا رسم کنید.

ب - توابع تبدیل $Y(s)/U(s)$ ، $Y(s)/R(s)$ و $E(s)/U(s)$ را پیدا کنید.



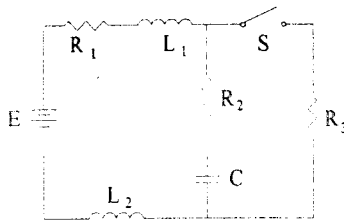
شکل ۴۸-۲ دیاگرام بلوکی مسئله ۸-۲

۹-۲- معادلات حالت مدار نشان داده شده در شکل ۴۹-۲ را بعد از آنکه کلید بسته شد، بنویسید.



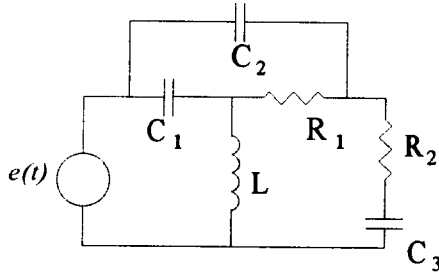
شکل ۴۹-۲ مدار مسئله ۹-۲

۱۰-۲- مدار نشان داده شده در شکل ۵۰-۲ با کلید بسته در حالت ماندگار عمل می‌کند. در زمان $t=0$ کلید باز می‌شود، معادلات حالت مدار را بنویسید



شکل ۵۰-۲ مدار مسئله ۱۰-۲

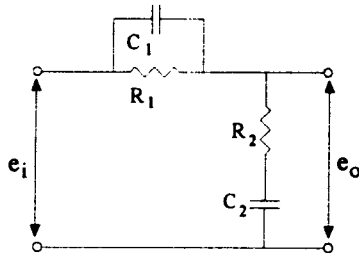
۱۱-۲- مدار نشان داده شده در شکل ۵۱-۲ را در نظر بگیرید. اگر ورودی مدار $e(t)$ و خروجی آن ولتاژ دو سه خازن C_3 باشد، معادلات حالت و خروجی آنرا بنویسید.



شکل ۵۱-۲ مدار مسئله ۱۱-۲

۱۲-۲- مدار نشان داده شده در شکل ۵۲-۲ را در نظر بگیرید.

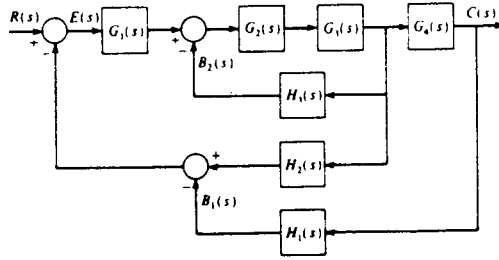
الف - با انتخاب متغیرهای حالت مناسب، معادلات حالت و خروجی مدار را بنویسید.
 ب - با استفاده از معادلات حالت و خروجی بدست آمده از الف - و همچنین، مستقیماً از معادلات دیفرانسیل مدار، تابع تبدیل آنرا بدست آورید.



شکل ۵۲-۲ مدار مسئله ۱۲-۲

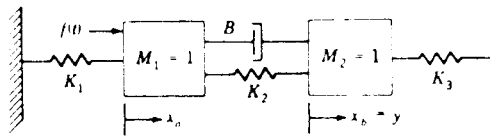
۱۳-۲- دیاگرام بلوکی سیستمی در شکل ۵۳-۲ نشان داده شده است.

الف - نمودار گذر سیگنال آنرا رسم کنید.
 ب - با بکارگیری قانون میسن تابع تبدیل سیستم را بدست آورید.



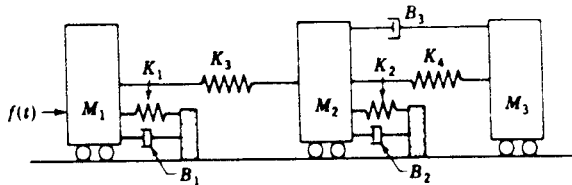
شکل ۲-۵۳ دیاگرام بلوکی مسند ۲-۱۳

۲-۱۴- سیستم مکانیکی نشان داده شده در شکل ۲-۵۴ را در نظر بگیرید.
 (الف) - تابع تبدیل بین ورودی $f(t)$ و خروجی $y(t)$ را بدست آورید.
 (ب) - با انتخاب متغیرهای حالت مناسب، معادلات حالت و خروجی سیستم را بنویسید.



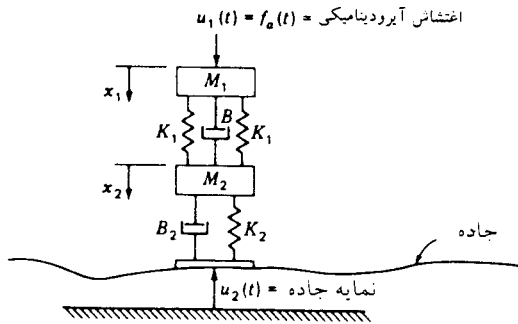
شکل ۲-۵۴ سیستم مکانیکی مسند ۲-۱۴

۲-۱۵- معادلات حالت و خروجی سیستم مکانیکی نشان داده شده در شکل ۲-۵۵ را بدست آورید.



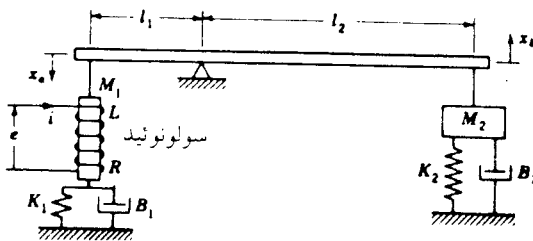
شکل ۲-۵۵ سیستم مکانیکی مسند ۲-۱۵

۱۶-۲- مدل سیستم فنر عمودی یک اتومبیل در شکل ۵۶-۲ نشان داده شده است. (الف) - معادلات دیفرانسیل حاکم بر سیستم را بنویسید. (ب) - با انتخاب متغیرهای حالت مناسب، معادلات حالت و خروجی سیستم را بدست آورید. خروجیهای سیستم جابجایی جرمها M_1, M_2 می باشند. (ج) - تابع تبدیل بین \hat{u}_1, \hat{x}_1 را که در آن $\hat{u}_1 = (B_1 D + K_1) u$ ، نیروی اعمال شده توسط جاده می باشد را پیدا کنید.



شکل ۵۶-۲ مدل سیستم فنر عمودی یک اتومبیل

۱۷-۲- یک محرک الکترومغناطیسی، یک سولنوئید^۱ را شامل می گردد که یک نیروی مغناطیسی متناسب با جریان کویل^۲، $f = K_i i$ ایجاد می کند. کویل یک مقاومت و یک هدایت^۳ دارد، به شکل ۵۷-۲ مراجعه کنید.



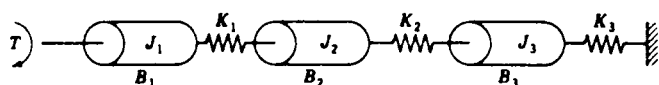
شکل ۵۷-۲ یک محرک الکترومغناطیسی

الف - معادلات دیفرانسیل سیستم را بنویسید.

- 1- Solenoid
- 3- Inductance

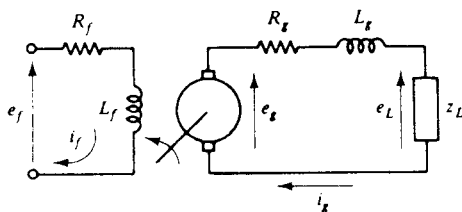
- 2- Coil

ب - با انتخاب متغیرهای حالت مناسب، معادلات حالت سیستم را بنویسید.
 ۲-۱۸- برای سیستم ممان اینرسی، میراکننده و فنر نشان داده شده در شکل ۲-۵۸، (الف) - معادلات دیفرانسیل سیستم را بنویسید. (ب) - معادلات حالت را بنویسید.



شکل ۲-۵۸ سیستم مسئله ۲-۱۸

۲-۱۹- شکل شماتیک یک ژنراتور DC در شکل ۲-۵۹ نشان داده شده است. با فرض اینکه ولتاژ ژنراتور ایجاد شده e_g متناسب با جریان میدان است و هم چنین با $Z_1 = \text{امپدانس بار}$ ، توابع تبدیل $E_g(s)/E_f(s)$ و $E_f(s)/E_g(s)$ را پیدا کنید.



شکل ۲-۵۹ یک ژنراتور DC

۲-۲۰- دینامیک بسیاری از سیستم‌های صنعتی توسط یک دستگاه معادلات دیفرانسیل غیر خطی به صورت زیر توصیف می‌شود:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), u(t)]$$

که در آن بردار $\mathbf{x}(t)$ بردار n بعدی حالت و $u(t)$ ورودی سیستم، $\mathbf{f}(\cdot)$ نیز یک تابع غیر خطی است. برای اعمال تحلیل و تئوری‌های موجود سیستم‌های خطی به سیستم‌های غیر خطی، لازم است که یک مدل خطی از اینگونه دستگاه معادلات غیر خطی در حول نقطه کار آبدست آوریم. اگر نقطه کار را با (\mathbf{x}_0, u_0) نشان دهیم، بابت سری تیلور

معادله دیفرانسیل غیر خطی سیستم حول نقطه کار و صرفنظر کردن از عبارات درجه دوم و بالاتر، داریم

$$\dot{x}_i(t) = f_i(\mathbf{x}_*, u_*) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i(\mathbf{x}, u)}{\partial x_j} \bigg|_{(\mathbf{x}_*, u_*)} (x_j - x_{*,j}) + \frac{\partial f_i(\mathbf{x}, u)}{\partial u} \bigg|_{(\mathbf{x}_*, u_*)} (u - u_*)$$

که در آن $i = 1, 2, \dots, n$ با تعریف

$$\Delta x_i = x_i - x_{*,i}, \quad \Delta u = u - u_*$$

داریم

$$\Delta \dot{\mathbf{x}}_i = \dot{x}_i - \dot{x}_{*,i}$$

از آنجایی که

$$\dot{x}_{*,i} = f_i(\mathbf{x}_*, u_*)$$

داریم

$$\Delta \dot{\mathbf{x}}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i(\mathbf{x}, u)}{\partial x_j} \bigg|_{(\mathbf{x}_*, u_*)} \Delta x_j + \frac{\partial f_i(\mathbf{x}, u)}{\partial u} \bigg|_{(\mathbf{x}_*, u_*)} \Delta u$$

معادله فوق را می توان به صورت بردار - ماتریسی زیر نوشت

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \Delta \mathbf{x} + \mathbf{B} \Delta u$$

که در آن

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u} \end{bmatrix}$$

ماتریس‌های A و B در نقطه کار محاسبه شده‌اند و این معادلات، مدل خطی شده سیستم را حول نقطه نامی نشان می‌دهند.

اگر معادلات غیر خطی حاکم بر سیستمی به صورت زیر باشند

$$\dot{x}_1(t) = x_1^2(t) - \sin^3 x_2(t) + u^2(t) = f_1(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = x_2(t) - u_1(t) + x_1(t)e^{-x_2(t)} = f_2(t)$$

معادلات خطی شده آن حول نقطه نامی (۰, ۰) را بدست آورید.

مراجع فصل دوم

- [2-1] Marshall J.E., *Control of time delay systems*, IEEControl Engineering series 10, 1978.
- [2-2] Nash p., *System modelling and optimization*, Peter peregrinus Ltd, 1981.
- [2-3] Nicholson H (ed), *Modelling of dynamical systems*, Vol. 1, Peter peregrinus Ltd, 1980.
- [2-4] Wellstead P.E., *Introduction to physical system modelling*, Academic press, 1979.
- [2-5] Ziegler, B., *Theory of Modelling and simulation*, John wiley, 1976.
- [2-6] Mclean D., *Automatic flight control systems*, Englewood cliffs, N.J: Prentice. Hall , 1990.

کتاب شناسی

مراجع [1] تا [7] به طور تفصیلی، توابع تبدیل سیستم‌های فیزیکی و قواعد کاهش توابع تبدیل را در فصول مختلف مورد بررسی قرار داده‌اند. مراجع [15] و [11]، توابع تبدیل سیستم‌های غیر مهندسی برق را (مانند بیومهندسی در مرجع [11]) مورد بررسی قرار داده‌اند. توابع تبدیل سیستم‌های کنترل فرایند، به طور مشخص در [15] بحث شده‌اند.

برای برخورد عملی‌تر با توابع تبدیل و دیاگرام‌های بلوکی، همراه با مدارهای الکتریکی متناظر سیستم‌های مورد بررسی، و همچنین مدارهای عملی و کاربردی به مرجع [18] مراجعه شود. برای مثالهای متنوع در زمینه رسم دیاگرام‌های بلوکی سیستم‌های عملی به مرجع [2] مراجعه شود.

نمودار گذر سیگنال و قانون میسن در مراجع [1] تا [4] و همچنین [6] و [11] به تفصیل آورده شده‌اند.

برای مدل‌سازی سیستم‌های متفرقه (مدارهای الکتریکی، سیستم‌های مکانیکی، سیستم‌های هیدرولیکی و سیستم‌های حرارتی) توسط متغیرهای حالت و انتخاب متغیرهای فیزیکی حالت می‌توان از مرجع [1] استفاده نمود. مدل‌سازی سیستم‌های تاخیردار^۱ در مرجع [2-1] و مرجع [3] آورده شده است.

مدل‌سازی سیستم‌های فیزیکی، به طور تخصصی در مراجع [2-2] تا [2-5]، مورد بررسی قرار گرفته‌اند. در این مراجع روشهای مختلف مدل‌سازی سیستم‌های فیزیکی (در بدست آوردن توابع تبدیل یا متغیرهای حالت) همراه با شبیه‌سازی آنها، آورده شده‌اند. برای بدست آوردن مدارهای معادل الکتریکی و یا مکانیکی سیستم‌ها به هر کدام از مراجع [2-2] تا [2-5] و برای برخورد ساده‌تر به مراجع [1]، [2]، [3] و [4] مراجعه کنید.

برای بدست آوردن توابع تبدیل و رسم دیاگرام‌های بلوکی موتورهای AC، ژنراتورها و سایر سرومکشانیزم‌ها می‌توان به مراجع [1]، [2]، [5]، [8]، [9]، [10]، [14] و [18] مراجعه کرد. برای مدل‌سازی توابع تبدیل و نمایش فضای حالت دینامیک پرواز و رسم دیاگرام‌های بلوکی متناظر به مرجع [2-6] مراجعه شود.