

# ۳

## تحلیل عملکرد گذرا و ماندگار سیستم‌های کنترل

### اهداف فصل:

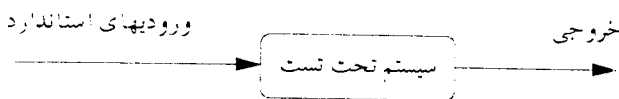
- ۱- آشنایی با ورودیهای استاندارد سیستم‌های کنترل و نقش آنها.
- ۲- پاسخ سیستم‌های کنترل: الف - حالت - گذرا. ب - حالت - ماندگار.
- ۳- معرفی سیستم‌های مرتبه اول و مرتبه دوم.
- ۴- آشنایی با مشخصه‌های حالت گذرا و ماندگار پاسخ سیستم‌های مرتبه دوم.
- ۵- نقش قطب و صفر تابع تبدیل در پاسخ سیستم.
- ۶- آشنایی با مفهوم خطا در سیستم‌های کنترل.
- ۷- اثرات فیدبک در سیستم‌های کنترل: مقایسه سیستم حلقه - باز و حلقه - بسته از نظر اغتشاش و حساسیت.
- ۸- آشنایی با مفهوم پایداری.
- ۹- بررسی روشهای تعیین پایداری سیستم‌های کنترل.

### ۱-۳ مقدمه

در فصل دوم، روشهای مختلف مدلسازی سیستم‌های کنترل را بررسی کردیم. مهندس کنترل با بکارگیری مدل بدست آمده و شبیه‌سازی آن، سیستم کنترل را طراحی می‌کند. بنابراین، طراح قبل از شروع به طراحی، بایستی با انجام یک سری تحلیلها و آزمایشات بر روی سیستم صنعتی مورد نظر، به بررسی رفتار آن بپردازد. به عبارت دیگر، آیا عملکرد سیستم بدون کنترل، قابل قبول است؟ با طرح این سؤال منطقی، ارایه دقیق و کاملی از عملکرد سیستم لازم به نظر می‌رسد.

در این فصل با بکارگیری سیگنال‌های استاندارد تست، اعمال آنها به سیستم‌های کنترل و بررسی پاسخ سیستم به آنها، بعضی از معیارهای اصلی عملکرد سیستم‌ها را ارایه خواهیم کرد. در تحلیل پاسخ حالت گذرا و ماندگار سیستم‌های کنترل عموماً از این سیگنال‌های استاندارد برای آزمودن سیستم استفاده می‌گردد. در واقع، اعمال این سیگنالها ساده است و با بررسی نتایج بدست آمده از آنها، تحلیل رفتار سیستم نیز براحتی انجام می‌پذیرد و حال آنکه تحلیل سیستم با اعمال سیگنال‌های پیچیده به آن، چندان ساده نیست. هم‌چنین، بسیاری از سیگنال‌های پیچیده در سیستم‌های کنترل را می‌توان به صورت ترکیبی از سیگنال‌های استاندارد نوشت.

خروجی سیستم نشان داده شده در شکل ۱-۳، تحت سیگنال‌های استاندارد ورودی، از دو قسمت تشکیل می‌شود. قسمت اول، عکس‌العمل اولیه سیستم به ورودی اعمال شده است. به عبارت دیگر، قسمت اول پاسخ، اولین رفتار سیستم در زمانهای اولیه به ورودی



شکل ۱-۳ سیستم با ورودیهای استاندارد

اعمال شده است که آنرا پاسخ گذاری<sup>۱</sup> سیستم می‌نامند. قسمت دوم، عکس‌العمل ماندگار سیستم می‌باشد. عکس‌العمل ماندگار سیستم را پاسخ حالت ماندگار<sup>۲</sup> سیستم می‌نامند و

1- Transient response

2- Steady-state response

عمدتاً از آن قسمت پاسخ تشکیل شده است که پس از از بین رفتن پاسخ گذرا باقی می ماند. تحلیل این دو قسمت، در تحلیل عملکرد سیستم نقش بسزایی را ایفا می کند. بسیاری از سیستم های کنترل در صنعت را می توان به صورت مدل های مرتبه دوم تقریب زد. لذا در این فصل مشخصه های مهم پاسخ حالت گذرا را با بکارگیری پاسخ پله یک سیستم مرتبه دوم ارائه خواهیم کرد.

پاسخ حالت ماندگار سیستم کنترل نیز بسیار مهم است، زیرا نشان می دهد که با گذشت زمان، پاسخ سیستم به چه سمتی میل می کند. در بسیاری از سیستم های کنترل، پاسخ حالت ماندگار با مقایسه با ورودی مرجع نشانی از دقت آن سیستم است. اگر پاسخ حالت ماندگار با ورودی فرمان داده شده به سیستم دقیقاً مطابقت نداشته باشد، سیستم دارای خطای حالت ماندگار است.

اغتشاش وارده به سیستم می تواند در عملکرد حالت گذرا و ماندگار آن تاثیر زیادی داشته باشد. همچنین حساسیت سیستم به تغییر پارامترها و یا نویز در سیستم، از مشخصه های مهم سیستم است. اثر فیدبک بر این دو پارامتر نیز در این فصل بررسی شده است. در آخرین قسمت این فصل، مهم ترین مشخصه سیستم کنترل یعنی پایداری آن مورد بررسی قرار گرفته است. پس از ارائه رابطه بین قطبهای سیستم و پاسخ حالت - گذاری آن، مشاهده می شود که پاسخ تنها در حالتی به سمت بی نهایت میل نخواهد کرد که ریشه های معادله مشخصه سیستم و یا قطبهای آن غیر مثبت بوده و یا قسمتهای حقیقی غیر مثبت داشته باشند.

### ۲-۳ ورودیهای استاندارد برای تحلیل عملکرد سیستم های کنترل

ورودی یک سیستم صنعتی در حین کار نوعاً تصادفی<sup>۱</sup> است. به عنوان مثال در یک سیستم دنبال کننده رادار ممکن است که موقعیت و سرعت هدف به طور کاملاً تصادفی تغییر کند و یا در سیستم هایی که ورودی آنها به مقدار زیادی تحت تاثیر اغتشاشات تصادفی قرار می گیرد. لیکن برای سیستم های ساده و برای بدست آوردن یک سری اطلاعات مهم و اساسی

در رابطه با سیستم، سیگنال‌های استاندارد را به سیستم اعمال و پاسخ سیستم به آنها را مطالعه می‌کنیم. با این کار می‌توان رفتار سیستم را تا حد زیادی به ورودیهای ناشناس دیگر نیز حدس زد.

استاندارد سازی سیگنال‌های ورودی نیز هنگامی که می‌خواهیم چند سیستم را با توجه به خروجی آنها مقایسه کنیم، بسیار مهم است. در اینجا چند سیگنال اساسی را که در تحلیل سیستم‌های کنترل نقش عمده‌ای دارند و بسیاری از سیگنال‌های دیگر را می‌توان با ترکیب آنها به وجود آورد، بررسی می‌کنیم.

ورودی تابع پله<sup>۱</sup>، ورودی پله ساده‌ترین نوع ورودی می‌باشد. این ورودی را می‌توان برای نمونه با سویچ کردن یک ولتاژ در یک مدار الکتریکی یا یک چرخش ناگهانی در شفت مکانیکی در نظر گرفت. اگر اندازه دامنه ورودی واحد باشد آنرا پله واحد<sup>۲</sup> می‌نامند. ورودی پله در حالت کلی به صورت نشان داده شده در شکل ۲-۳ الف می‌باشد. نمایش ریاضی ورودی پله با دامنه R عبارتست از

$$u(t) = \begin{cases} R & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (1-2-3)$$

که در آن R یک ثابت حقیقی است، یا

$$u(t) = R u_{-1}(t) \quad (2-2-3)$$

که در آن  $u_{-1}(t)$  ورودی پله واحد است. تبدیل لاپلاس ورودی پله داده شده با معادله (۱-۲-۳) عبارتست از

$$U(s) = R/s \quad (3-2-3)$$

ورودی تابع ضربه<sup>۳</sup>، ورودی ضربه، سیگنالی است که برای یک دوره زمانی تقریباً صفر با دامنه زیاد اعمال شود. اگر سیگنالی برای یک دوره زمانی کوتاه  $\delta t$  به طول انجامد، آنگاه برای  $\delta t \rightarrow 0$  سیگنال یک ضربه خواهد شد. در واقع ورودی ضربه را می‌توان به عنوان مشتق ساده ورودی پله در نظر گرفت. بنابراین تبدیل لاپلاس این ورودی عبارت است از

$$U(s) = 1 \quad (4-2-3)$$

1- Step-function

2- Unit step

3- Impulse function

اعمال سیگنالی که برای گستره زمانی  $\delta t$  و  $\delta t \rightarrow 0$  به طول انجامد و دامنه بی نهایت بزرگ داشته باشد در عمل غیر ممکن است و لذا در کاربردهای عملی این سیگنال را با سیگنالی که دامنه واحد داشته و برای یک مدت زمانی بسیار کوتاه  $\delta t$  وجود داشته باشد، تقریب می زنند. شکل سیگنال تقریبی در شکل ۲-۳ (ب) آورده شده است.

ورودی تابع شیب<sup>۱</sup> اگر از ورودی پله انتگرال گرفته شود، سیگنالی بدست خواهد آمد که دامنه آن یک تغییر ثابت نسبت به زمان خواهد داشت و یا به عبارت دیگر به طور خطی از صفر نسبت به زمان اضافه خواهد شد. ورودی شیب را ورودی سرعت<sup>۲</sup> نیز می نامند. ورودی شیب در حالت کلی به صورت نشان داده شده در شکل ۲-۳ (ج) می باشد. نمایش ریاضی ورودی شیب عبارتست از

$$u(t) = \begin{cases} Rt & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (5-2-3)$$

که در آن  $R$  یک ثابت حقیقی است. اگر  $R=1$  باشد، ورودی را ورودی شیب واحد<sup>۳</sup> می نامند.

همچنین داریم

$$u(t) = Rt u_{-1}(t) \quad (6-2-3)$$

تبدیل لاپلاس ورودی شیب بدین صورت داده می شود

$$U(s) = R/s^2 \quad (7-2-3)$$

ورودی تابع سهموی<sup>۴</sup> ورودی سهموی با انتگرال تابع شیب بدست می آید. ورودی

سهموی را ورودی شتاب<sup>۵</sup> نیز می گویند. نمایش ریاضی ورودی سهموی عبارتست از

$$u(t) = \begin{cases} Rt^2/2 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (8-2-3)$$

که در آن  $R$  یک ثابت حقیقی است و یا

$$u(t) = Rt^2/2 u_{-1}(t) \quad (9-2-3)$$

1- Ramp function

2- Velocity input

3- Unit-ramp input

4- Parabolic function

5- Acceleration input

تبدیل لاپلاس این ورودی بدین صورت داده می‌شود

$$U(s) = R/s^3 \quad (10-2-3)$$

در شکل آن نیز در شکل ۲-۳ (د) نشان داده شده است.

ورودی تابع چند جمله‌ای<sup>۱</sup> بدیهی است که با ترکیب ورودیهای پله، شیب و سهموی

می‌توان یک سیگنال ورودی برای  $t \geq 0$  به صورت زیر نوشت

$$u(t) = R_1 + R_2 t + R_3 t^2 / 2 \quad (11-2-3)$$

در واقع به سادگی مشاهده می‌شود که می‌توان عبارات انتگرال گرفته شده بیشتری را وارد

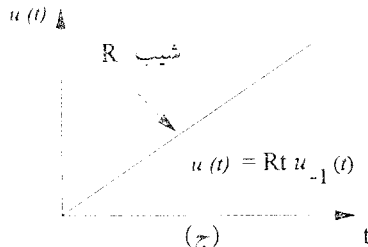
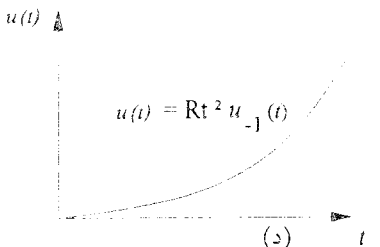
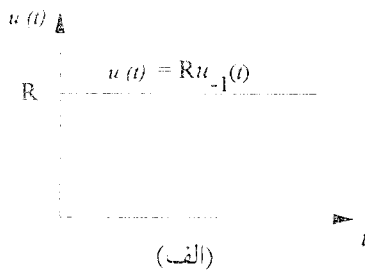
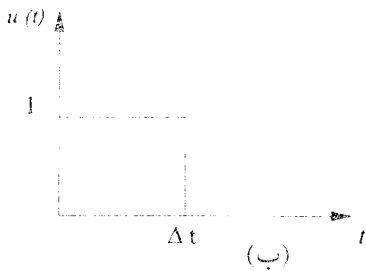
معادله داده شده در (۱۱-۲-۳) کرد و ورودی کلی زیر را برای  $t \geq 0$  تشکیل داد

$$u(t) = R_1 + R_2 t + R_3 t^2 / 2 + R_4 t^3 / 3! + \dots + R_p + t^p / p! \quad (12-2-3)$$

عبارت بالا را تابع چند جمله‌ای نامیده و برای  $t < 0$  نیز صفر می‌باشد.

ورودی تابع سینوسی<sup>۲</sup> ورودی سینوسی به صورت داده شده در زیر است

$$u(t) = \begin{cases} U \cos \omega t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (13-2-)$$



شکل ۲-۳ سیگنال‌های استاندارد ورودی (الف) تابع پله، (ب) تابع ضربه، (ج) تابع شیب، (د) تابع سهموی.

این ورودی، در تحلیل پاسخ حالت ماندگار سیستم‌های خطی، نقش بسزایی را ایفا می‌نماید. تذکر این نکته مهم است که خروجی حالت ماندگار سیستم‌های خطی به ورودی سینوسی، یک تابع سینوسی است.

### ۳-۳ پاسخ حالت ماندگار

همانطور که قبلاً نیز اشاره شد، پاسخ سیستم از دو قسمت حالت گذرا و ماندگار تشکیل شده است. اگر پاسخ سیستم به ورودی  $r(t)$  را با  $c(t)$  نشان دهیم، داریم

$$c(t) = c_{tr}(t) + c_{ss}(t) \quad (۱-۳-۳)$$

که در آن  $c_{tr}(t)$  قسمت حالت گذرای پاسخ و  $c_{ss}(t)$  قسمت حالت ماندگار پاسخ هستند. می‌توان قسمت حالت ماندگار پاسخ را به عنوان پاسخی دانست که با گذشت زمان و پس از از بین رفتن پاسخ حالت گذرا به جای می‌ماند و پاسخ سیستم را تشکیل می‌دهد. بنابراین

$$c_{ss}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} c(t) \quad (۲-۳-۳)$$

### ۱-۳-۳ پاسخ حالت ماندگار به ورودیهای پله، شیب و سهموی

سیستم داده شده با تابع تبدیل مرتبه اول زیر را در نظر بگیرید

$$G(s) = \frac{k}{s+a_0} \quad (a_0 > 0) \quad (۳-۳-۳)$$

که در آن  $k$  بهره سیستم است. خروجی سیستم برای ورودی  $R(s)$  به صورت زیر داده می‌شود

$$C(s) = G(s)R(s) \quad (۴-۳-۳)$$

برای ورودی پله واحد داریم  $R(s) = 1/s$  و لذا معادله‌های (۳-۳-۳) و (۴-۳-۳) نتیجه

می‌دهند

$$\begin{aligned} C(s) &= \frac{k}{s+a_0} \cdot \frac{1}{s} \\ &= \frac{k/a_0}{s} - \frac{k/a_0}{s+a_0} \end{aligned} \quad (۵-۳-۳)$$

عکس تبدیل لاپلاس معادله (۵-۳-۳) می‌دهد

$$c(t) = \frac{k}{a_0} - \frac{k}{a_0} \exp(-a_0 t) \quad (۶-۳-۳)$$

پاسخ زمانی داده شده با معادله (۶-۳-۳) در شکل ۳-۳ نشان داده شده است. برای بدست آوردن پاسخ حالت ماندگار می توان مستقیماً از معادله (۶-۳-۳) استفاده کرد و یا قضیه مقدار نهایی تبدیل لاپلاس را بکار گرفت. از معادله (۶-۳-۳) داریم

$$\lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = \frac{k}{a_0} \quad (7-3-3)$$

همچنین از قضیه مقدار نهایی داریم

$$\lim_{s \rightarrow 0} sC(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} c(t) \quad (8-3-3)$$

معادله (۸-۳-۳)، برای سیستم مرتبه اول در نظر گرفته شده خواهد داد

$$\lim_{s \rightarrow 0} sC(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{k}{s+a_0} \cdot \frac{1}{s} = \frac{k}{a_0} \quad (9-3-3)$$

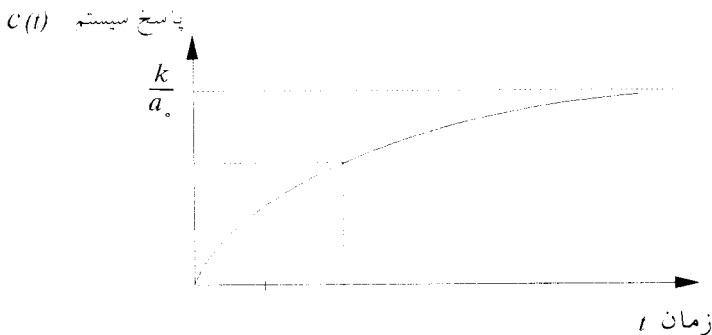
که با پاسخ داده شده با معادله (۷-۳-۳)، و نشان داده شده در شکل ۳-۳ مطابقت دارد. برای ورودی شیب واحد به سیستم داده شده با معادله (۳-۳-۳)، از معادله (۴-۳-۳) داریم

$$C(s) = \frac{k}{s+a_0} \frac{1}{s^2} \quad (10-3-3)$$

پاسخ حالت ماندگار برای این ورودی نیز همانند ورودی پله واحد از قضیه مقدار نهایی بدست می آید. بنابراین

$$\lim_{s \rightarrow 0} sC(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{k}{s+a_0} \frac{1}{s^2} = \infty \quad (11-3-3)$$

از معادله (۱۱-۳-۳) داریم که پاسخ سیستم‌های مرتبه اول برای ورودی شیب به سمت بی نهایت میل خواهد کرد. برای تمرین نشان دهید که پاسخ سیستم مرتبه اول به ورودی شیب واحد عبارتست از



شکل ۳-۳ پاسخ سیستم مرتبه اول به ورودی پله واحد



$$c(t) = \frac{k}{a_0} \left[ t - \frac{1}{a_0} + \frac{\exp(-a_0 t)}{a_0} \right] \quad (12-3-3)$$

و با پاسخ بدست آمده از قضیه مقدار نهایی مطابقت دارد.

به طور مشابهی می‌توان نشان داد که پاسخ سیستم مرتبه اول برای ورودی سهموی و ورودیهای مرتبه بالاتر به سمت بی‌نهایت میل خواهد کرد. در واقع برای ورودی سهموی با اعمال قضیه مقدار نهایی داریم

$$\lim_{s \rightarrow 0} sC(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{k}{s+a_0} \frac{1}{s^2} = \infty \quad (13-3-3)$$

پاسخ بدست آمده سیستم مرتبه اول داده شده با معادله (۳-۳-۳)، برای ورودی پله واحد را در نظر بگیرید. مقادیر  $k$  و  $a_0$  مقدار حالت ماندگار پاسخ را تعیین می‌کنند. اما با اندکی تأمل مشاهده می‌شود که  $a_0$  نه تنها در تعیین حالت ماندگار پاسخ سیستم برای ورودی پله واحد نقش دارد، بلکه سرعت رسیدن به حالت ماندگار را نیز تعیین می‌کند. در واقع برای  $t = \frac{1}{a_0}$  داریم  $c\left(\frac{1}{a_0}\right) = \frac{k}{a_0} (1 - e^{-1})$  و لذا هر چه  $a_0$  بزرگتر شود، پاسخ سیستم سریعتر به حالت ماندگار خواهد رسید. بنابراین  $a_0$  نقش مهمی را در رفتار سیستم ایفاء می‌کند. به  $1/a_0$  ثابت زمانی<sup>۱</sup> سیستم مرتبه اول می‌گویند. هر چه ثابت زمانی سیستم کوچکتر باشد پاسخ آن سریعتر خواهد بود.

تابع تبدیل یک سیستم مرتبه دوم در حالت کلی بدین صورت است

$$G(s) = \frac{k}{s^2 + a_1 s + a_0} \quad (14-3-3)$$

توجه کنید که مرتبه دوم بودن تابع تبدیل معادله (۱۴-۳-۳) به واسطه عبارت مرتبه دوم در مخرج آن است. برای بدست آوردن پاسخ حالت ماندگار سیستم به ورودی پله واحد، از قضیه مقدار نهایی داریم

$$\lim_{s \rightarrow 0} sC(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{k}{s^2 + a_1 s + a_0} \frac{1}{s} = \frac{k}{a_0} \quad (15-3-3)$$

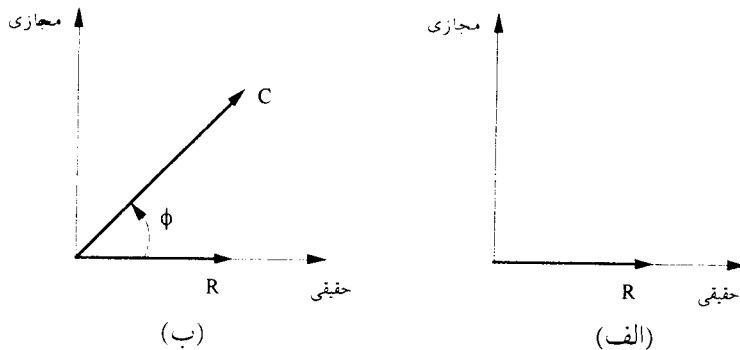
که مشابه نتیجه بدست آمده برای سیستم مرتبه اول است. پاسخ سیستم مرتبه دوم به ورودی

پله پیچیده‌تر از پاسخ سیستم مرتبه اول به ورودی پله است. این پاسخ به محل ریشه‌های مخرج تابع تبدیل بستگی دارد و در بخش ۳-۴ مفصلاً بررسی خواهد شد.

### ۲-۳-۳ ورودیهای سینوسی و چند جمله‌ای

در بخش قبل، برای تعیین پاسخ حالت ماندگار سیستم به ورودیهای پله، شیب و سهموی از تبدیل لاپلاس و قضیه مقدار نهایی استفاده شد. همانطور که مشاهده شد، برای بکارگیری این قضیه باید یک مقدار حدی وجود داشته باشد که سیگنال به آن به ازاء  $t \rightarrow \infty$  همگرا شود، در تحلیل پاسخ حالت ماندگار سیستم به ورودی سینوسی اینچنین حالتی وجود ندارد و لذا نمی‌توان از قضیه مقدار نهایی استفاده کرد.

برای ورودی سینوسی داده شده با معادله  $(۳-۲-۱۳)$ ، نمایش دیاگرام فازور آن در شکل ۳-۴ (الف) نشان داده شده است. با فرض پایداری سیستم خطی (پایداری را در بخش ۳-۸ بحث خواهیم کرد)، پاسخ حالت ماندگار سیستم خطی به ورودی سینوسی یک تابع سینوسی خواهد بود. بنابراین اگر خروجی حالت ماندگار را در پاسخ به ورودی سینوسی با  $c(t)$  نشان دهیم، یک تابع سینوسی با دامنه  $C$  و انتقال فاز  $\phi$  خواهد بود. نمایش دیاگرام فازور خروجی حالت ماندگار نیز در شکل ۳-۴ (ب)، نشان داده شده است.



شکل ۳-۴ (الف) نمایش دیاگرام فازور  $r(t) = R \cos \omega t$ ; (ب) نمایش دیاگرام فازور  $c(t) = C \cos(\omega t + \phi)$  که در آن  $c(t)$  پاسخ حالت ماندگار است.

یک ورودی چند جمله‌ای کلی یا معادله (۳-۲-۱۲) داده شده است. فرض کنید که معادله دیفرانسیل سیستمی که این ورودی به آن اعمال خواهد شد به صورت داده شده در زیر باشد

$$(a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0) c(t) = (b_m D^m + b_{m-1} D^{m-1} + \dots + b_1 D + b_0) r(t) \quad (3-3-16)$$

که در آن ضرایب ثابت  $a_i$  و  $b_i$  مشخصه‌های سیستم را تعیین می‌کنند (فصل دوم). با اعمال یک ورودی داده شده با معادله (۳-۲-۱۲) به سیستم داده شده با معادله (۳-۳-۱۶)، باید پاسخ حالت ماندگار به اندازه کافی عبارات توان  $t$  را در بر داشته تا تساوی در معادله دیفرانسیل سیستم برقرار گردد.

مثال ۳-۳-۱

برای  $m=1$  و  $n=2$ ، معادله دیفرانسیل سیستم عبارتست از

$$(a_2 D^2 + a_1 D + a_0) c(t) = (b_1 D + b_0) r(t)$$

ورودی به سیستم نیز به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود

$$r(t) = R_0 + R_1 t + R_2 \frac{t^2}{2}$$

بنابراین داریم

$$\begin{aligned} (a_2 D^2 + a_1 D + a_0) c(t) &= (b_1 D + b_0) [R_0 + R_1 t + R_2 \frac{t^2}{2}] \\ &= b_1 R_1 + b_0 R_0 + (b_1 R_1 + b_0 R_1) t + b_0 R_2 \frac{t^2}{2} \end{aligned}$$

اگر پاسخ حالت ماندگار را در حالت کلی به صورت زیر بیان کنیم

$$c(t) = c_0 + c_1 t + c_2 \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{c_k t^k}{k!}$$

با قرار دادن  $c(t)$  در معادله بالا برای آنکه در دو طرف معادله تساوی داشته باشیم، باید قرار دهیم  $k=2$  و یا

$$c(t) = c_0 + c_1 t + c_2 \frac{t^2}{2!}$$

بنابراین

$$(a_2 D^2 + a_1 D + a_0) c(t) = a_2 c_2 + a_1 c_1 + a_0 c_0 + (a_1 c_2 + a_0 c_1) t + \frac{a_0 c_2}{2} t^2$$

ضرایب خروجی حالت ماندگار  $c_0$ ،  $c_1$  و  $c_2$  را از حل دستگاه معادله‌های زیر بدست می‌آوریم

$$a_0 c_2 = b_0 R_2$$

$$a_1 c_2 + a_0 c_1 = b_1 R_2 + b_0 R_1$$

$$a_2 c_2 + a_1 c_1 + a_0 c_0 = b_2 R_2 + b_1 R_1$$

توجه کنید که مقدار  $k$  به درجه سیگنال ورودی بستگی خواهد داشت.

### ۴-۳ پاسخ حالت - گذرا

در بخش ۳-۳، پاسخ حالت ماندگار سیستم، به عنوان آن قسمت از پاسخ کلی سیستم که به ازاء  $t \rightarrow \infty$  باقی خواهد ماند، تعریف شد. به طریق مشابهی، می توان پاسخ حالت گذرای سیستم را آن قسمت از پاسخ کلی سیستم در نظر گرفت که به ازاء  $t \rightarrow \infty$  صفر خواهد شد. برای آنکه پاسخ سیستم قسمتی داشته باشد که به ازاء  $t \rightarrow \infty$  به سمت صفر میل کند و دامنه آن با افزایش زمان به سمت بی نهایت میل نکند، سیستم باید مشخصه خاصی به نام «پایداری» را برآورده سازد که در بخش ۳-۸ مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

در اینجا برای بررسی پاسخ حالت گذرا، فرض می کنیم که اولاً سیگنال ورودی به سیستم پله واحد است و ثانیاً سیستم مرتبه دوم است. اگر چه می توان به جای ورودی پله واحد از سایر ورودیها مانند ورودی شیب یا سهموی نیز استفاده کرد، لیکن اطلاعات بیشتری از آنچه توسط ورودی پله واحد بدست می آید، از اعمال این ورودیها بدست نخواهد آمد. لذا با توجه به ساده تر بودن صورت عملی اعمال ورودی پله و اینکه در عمل مشخصه های بدست آمده از تحلیل پاسخ ورودی پله برای تحلیل حالت ماندگار بسیار غنی هستند، این ورودی در تحلیل بسیاری از سیستم های عملی و صنعتی استفاده می شود. استفاده از یک تابع تبدیل مرتبه دوم در تحلیل پاسخ حالت گذرا نیز به هیچ وجه محدود کننده نیست، زیرا اگر چه ممکن است بسیاری از سیستم های عملی و صنعتی مرتبه سوم یا بالاتر باشند، لیکن می توان آنها را به خوبی با یک مدل مرتبه دوم تقریب زد. در اکثریت موارد، مدل مرتبه دوم غالب سیستم است و به عبارت دیگر، صورت کلی پاسخ سیستم توسط قسمت مرتبه دوم آن تعیین می گردد.

پاسخ یک سیستم مرتبه دوم به ورودی پله، بسته به موقعیت قطبهای آن (ریشه های چند جمله ای مرتبه دوم در مخرج تابع تبدیل) می تواند به یکی از سه صورت زیر باشد:

۱- پاسخ میرای شدید<sup>۱</sup>

۲- پاسخ میرای بحرانی<sup>۲</sup>

۳- پاسخ میرای ضعیف<sup>۳</sup>

توجه کنید که پاسخ نشان داده شده در شکل ۳-۳ برای سیستم مرتبه اول در پاسخ به ورودی پله واحد، تنها صورت پاسخ حالت گذرا و ماندگار یک سیستم مرتبه اول است. با تغییر دادن محل قطب سیستم مرتبه اول، ثابت زمانی آن تغییر می‌کند و در نهایت سرعت پاسخ کم یا زیاد خواهد شد، لیکن صورت کلی آن همانند شکل ۳-۳ خواهد بود.

### ۱-۴-۳ پاسخ میرای شدید

اگر تابع تبدیل سیستم دو ریشه حقیقی (دو قطب حقیقی) داشته باشد، آنگاه خواهیم

داشت

$$G(s) = \frac{k}{s^2 + a_1s + a_0} = \frac{k}{(s + \alpha)(s + \beta)} \quad (1-4-3)$$

پاسخ سیستم داده شده با معادله (۱-۴-۳)، به ورودی پله واحد عبارتست از

$$C(s) = \frac{k}{(s + \alpha)(s + \beta)} \frac{1}{s} \\ = \frac{k}{\alpha\beta} \left[ \frac{1}{s} + \frac{\beta}{(\alpha - \beta)} \frac{1}{s + \alpha} + \frac{\alpha}{(\beta - \alpha)} \frac{1}{s + \beta} \right] \quad (2-4-3)$$

با گرفتن عکس تبدیل لاپلاس از معادله (۲-۴-۳) بدست می‌آوریم

$$c(t) = k \left\{ \frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{(\alpha - \beta)} \left[ \frac{\exp(-\alpha t)}{\alpha} - \frac{\exp(-\beta t)}{\beta} \right] \right\} \quad (3-4-3)$$

(عملیات تبدیل به کسرهای جزئی (۲-۴-۳) و عکس تبدیل لاپلاس (۳-۴-۳) را انجام دهید.) با فرض مثبت بودن اعداد حقیقی  $\alpha$  و  $\beta$  از معادله (۳-۴-۳) داریم

$$\lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = \frac{k}{\alpha\beta} = \frac{k}{a_0} \quad (a_0 = \alpha\beta) \quad (4-4-3)$$

توجه کنید که این نتیجه با نتیجه بدست آمده از اعمال قضیه مقدار نهایی در معادله

1- Overdamped

2- Critically damped

3- Underdamped

(۱۵-۳-۳) مطابقت دارد. هم چنین توجه کنید که در  $t=0$  داریم

$$c(t) \Big|_{t=0} = k \left\{ \frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{(\alpha-\beta)} \left[ \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} \right] \right\} = 0 \quad (۵-۴-۳)$$

و

$$\frac{dc(t)}{dt} \Big|_{t=0} = 0 \quad (۶-۴-۳)$$

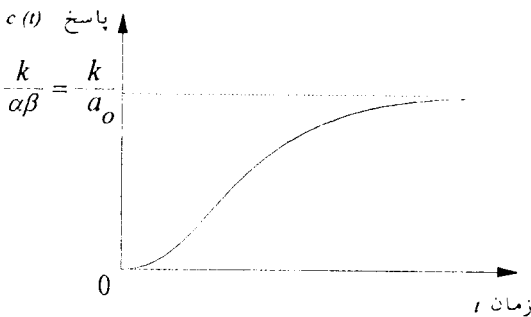
پاسخ کلی سیستم برای حالت میرای شدید در شکل ۳-۵ نشان داده شده است. نکته قابل توجه در این پاسخ آن است که همانند پاسخ سیستم مرتبه اول به ورودی پله، سیگنال خروجی همواره از یک طرف به مقدار نهایی خویش میل می کند، به عبارت دیگر هیچگاه قبل از حالت دایمی به مقدار نهایی خودش نمی رسد.

### ۲-۴-۳ پاسخ میرای بحرانی

اگر قطبهای حقیقی یک تابع تبدیل سیستم مرتبه دوم در یک مکان بر روی محور حقیقی منفی قرار گرفته باشند، داریم

$$G(s) = \frac{k}{(s + \alpha)^2} \quad (۷-۴-۳)$$

این حالت را می توان یک حالت حدی برای حالت پاسخ میرای شدید در بخش ۳-۴-۱ در نظر گرفت. اگر به تابع تبدیل داده شده با معادله (۷-۴-۳) یک ورودی پله واحد اعمال گردد،



شکل ۳-۵ پاسخ میرای شدید برای ورودی پله

داریم

$$C(s) = \frac{k}{(s + \alpha)^2} \frac{1}{s}$$

$$= \frac{k}{\alpha^2} \left[ \frac{1}{s} - \frac{1}{(s + \alpha)} - \frac{\alpha}{(s + \alpha)^2} \right] \quad (۸-۴-۳)$$

و با گرفتن عکس تبدیل لاپلاس از معادله (۸-۴-۳)، بدست می آوریم

$$c(t) = \frac{k}{\alpha^2} \{ 1 - \exp(-at) - at \exp(-at) \}$$

$$= \frac{k}{\alpha^2} \{ 1 - [1 + at] \exp(-at) \} \quad (۹-۴-۳)$$

عملیات تبدیل به کسرهای جزئی (۸-۴-۳) و عکس تبدیل لاپلاس (۹-۴-۳) را انجام دهید. با فرض  $\alpha > 0$  داریم

$$\lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = \frac{k}{\alpha^2} = \frac{k}{a_0} \quad (۱۰-۴-۳)$$

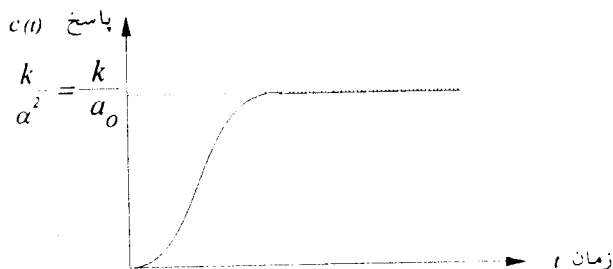
که در آن  $a_0 = \alpha^2$  برای تعیین شرایط اولیه پاسخ از معادله (۹-۴-۳)، بدست می آوریم

$$c(t) \Big|_{t=0} = 0 \quad (۱۱-۴-۳)$$

و

$$\frac{dc(t)}{dt} \Big|_{t=0} = 0 \quad (۱۲-۴-۳)$$

پاسخ زمانی کلی سیستم برای حالت میرای بحرانی در شکل ۳-۶ نشان داده شده است. در صورتیکه فرافت از مقدار حالت ماندگار پاسخ  $\frac{k}{\alpha^2}$  مجاز نباشد (به عبارت دیگر پاسخ در هیچ زمانی مقداری بیش از  $\frac{k}{\alpha^2}$  را اختیار نکند)، پاسخ میرای بحرانی سریعترین پاسخی است که می توان برای یک سیستم مرتبه دوم بدست آورد. این خاصیت در برخی از



شکل ۳-۶ پاسخ میرای بحرانی برای ورودی پله

سیستم‌های عملی و صنعتی بسیار مهم است. به عنوان مثال در یک روبات جوشکار، فرارفت از مقدار نهایی می‌تواند بسیار خطرناک باشد و حال آنکه کندی سرعت و زمان بوی زیاد در رسیدن به حالت نهایی (مانند حالت میرای شدید) نیز اصلاً مطلوب نیست، لذا در این صورت می‌توان از حالت میرای بحرانی استفاده نمود.

### ۳-۴-۳ پاسخ میرای ضعیف

مشخصه اصلی پاسخ میرای ضعیف آن است که بر خلاف دو حالت قبلی، در اثر اعمال ورودی پله، خروجی از مقدار نهایی خودش (مقدار حالت ماندگار پاسخ) فرارفته و بالا می‌زند. در این حالت دو ریشه (قطب) مخرج تابع تبدیل سیستم اعداد مختلط هستند. وجود قطبهای مختلط باعث می‌شود که پاسخ به ورودی پله نوسانی گردد. سرعت از بین رفتن این نوسانات بستگی به مقدار میرایی تابع تبدیل خواهد داشت. اگر پاسخ میرا نشود، در تئوری این نوسانات همواره باقی خواهند ماند اما در عمل هر سیستمی همواره مقداری میرایی پاسخ خواهد داشت. با افزایش مقدار میرایی، نوسانات سریعتر از بین می‌روند و با افزایش بیشتر میرایی به پاسخ میرایی بحرانی می‌رسیم که در آن نوسانات امکان شروع شدن را پیدا نمی‌کنند.

تابع تبدیل سیستم مرتبه دوم زیر را در نظر بگیرید

$$G(s) = \frac{k}{(s + \alpha + j\beta)(s + \alpha - j\beta)}$$

$$= \frac{k}{s^2 + 2\alpha s + (\alpha^2 + \beta^2)} = \frac{k}{(s + \alpha)^2 + \beta^2} \quad (13-4-3)$$

با اعمال ورودی پله واحد به سیستم داده شده با معادله (۱۳-۴-۳)، بدست می‌آوریم

$$C(s) = \frac{k}{(s + \alpha)^2 + \beta^2} \cdot \frac{1}{s}$$

$$= \frac{k}{\alpha^2 + \beta^2} \left[ \frac{1}{s} - \frac{(s + \alpha)}{(s + \alpha)^2 + \beta^2} - \frac{\alpha}{(s + \alpha)^2 + \beta^2} \right] \quad (14-4-3)$$

و با عکس تبدیل لاپلاس از معادله (۱۴-۴-۳)، داریم

$$c(t) = \frac{k}{\alpha^2 + \beta^2} \left\{ 1 - \exp(-\alpha t) \cos \beta t - \frac{\alpha}{\beta} \exp(-\alpha t) \sin \beta t \right\} \quad (15-4-3)$$



$$c(t) = \frac{k}{\alpha^2 + \beta^2} - \frac{k \exp(-\alpha t)}{\beta(\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}} \left\{ \frac{\beta}{(\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}} \cos \beta t + \frac{\alpha}{(\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}} \sin \beta t \right\} \quad (۱۶-۴-۳)$$

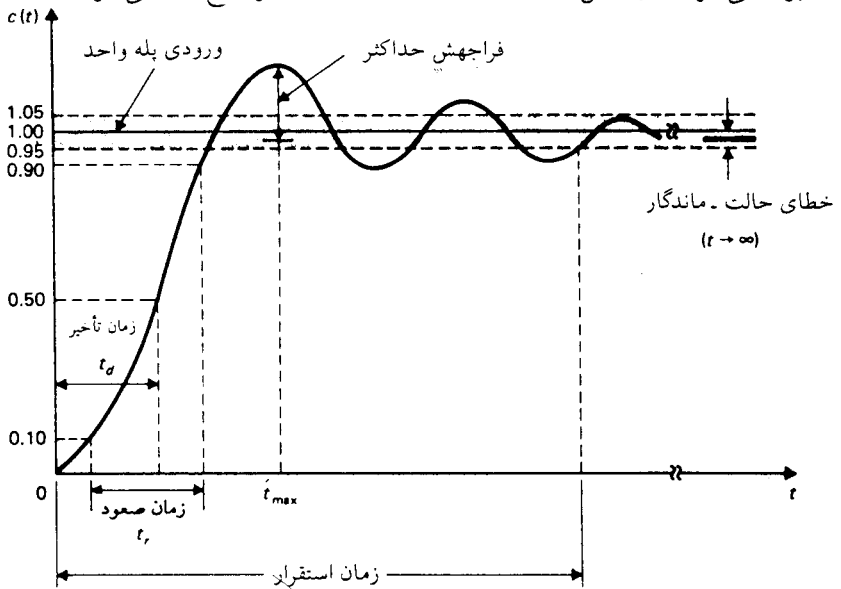
با تعریف

$$\theta = \tan^{-1} \beta / \alpha \quad (۱۷-۴-۳)$$

داریم

$$c(t) = \frac{k}{(\alpha^2 + \beta^2)} \left\{ 1 - \frac{(\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}}{\beta} \exp(-\alpha t) \sin(\beta t + \theta) \right\} \quad (۱۸-۴-۳)$$

پاسخ، همانطور که از معادله (۱۸-۴-۳) مشاهده می‌شود، یک موج سینوسی با فرکانس  $\beta$  همراه با یک عبارات میراکننده نمایی با عامل  $\alpha$  و یک مقدار حالت ماندگار داده شده با  $\frac{k}{(\alpha^2 + \beta^2)}$  است. شکل ۷-۳ پاسخ پله واحد یک سیستم مرتبه دوم را نشان می‌دهد. معیارهای عملکرد که معمولاً در حوزه زمان برای بررسی و تحلیل سیستم‌های کنترل خطی بکار برده می‌شوند، در شکل ۷-۳ نشان داده شده و در اینجا توضیح داده می‌شوند:



شکل ۷-۳ پاسخ پله واحد یک سیستم کنترل مرتبه دوم

۱- فراجش حداکثر<sup>۱</sup>. اگر حداکثر مقدار خروجی سیستم  $C(t)$  پس از اعمال ورودی یله را با  $C_{max}$  نشان دهیم و  $C_{ss}$  نیز مقدار حالت ماندگار آن بوده و  $C_{max} \geq C_{ss}$  باشد، آنگاه فراجش حداکثر را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\text{فراجش حداکثر} = C_{max} - C_{ss} \quad (3-4-19)$$

در بسیاری از موارد فراجش حداکثر را به صورت درصدی از مقدار حالت ماندگار پاسخ پله سیستم نمایش می‌دهند. یعنی آنکه

$$\text{درصد فراجش حداکثر} = \frac{\text{فراجش حداکثر}}{C_{ss}} \times 100\% \quad (3-4-20)$$

یکی از مشخصه‌های عملکرد یک سیستم در حوزه زمان، فراجش حداکثر آن است. در واقع فراجش حداکثر بسیار زیاد در عمل مطلوب نیست زیرا باعث کاهش میزان پایداری سیستم می‌گردد.

۲- زمان تاخیر<sup>۲</sup>. زمان تاخیر به زمانی گفته می‌شود که لازم است تا پاسخ پله به ۵۰٪ مقدار نهایی خودش برسد.

۳- زمان صعود<sup>۳</sup>. زمان صعود به زمانی گفته می‌شود که لازم است تا پاسخ از ۱۰ به ۹۰ درصد یا از ۵ به ۹۵ درصد یا از ۰ به ۱۰۰ درصد مقدار نهایی خودش برسد. برای سیستم‌های میرایی ضعیف معمولاً از ۰ تا ۱۰۰ درصد و برای سیستم‌های میرایی شدید اکثراً از ۱۰ تا ۹۰ درصد استفاده می‌شود.

۴- زمان استقرار<sup>۴</sup>. زمان استقرار به مدت زمانی گفته می‌شود که لازم است تا پاسخ به یک محدوده مشخص شده حول مقدار نهایی پاسخ رسیده و پس از آن نیز در آن محدوده باقی بماند. این محدوده عموماً برحسب درصدی از مقدار نهایی پاسخ مانند ۲٪ و یا ۵٪ آن بیان می‌شود.

چهار کمیت تعریف شده در بالا معیارهای مستقیمی برای سنجش عملکرد و مشخصه‌های یک سیستم کنترل هستند. اندازه‌گیری آنها در عمل سراسر است و به سادگی نیز تعریف می‌شوند.

1- Maximum overshoot

2- Delay time

3- Rise time

4- Settling time

متداولترین نحوه نوشتن تابع تبدیل یک سیستم مرتبه دوم به صورت زیر است

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (21-4-3)$$

که در آن  $\xi$  را نسبت میرایی<sup>۱</sup> و  $\omega_n$  را فرکانس طبیعی میراننده<sup>۲</sup> سیستم می نامند. از مقایسه معادله های (21-4-3) و (13-4-3) داریم  $\xi = \frac{\alpha}{\omega_n}$  و  $\omega_n^2 = \alpha^2 + \beta^2$ . به نکات زیر در رابطه با نسبت میرایی و فرکانس طبیعی میراننده توجه کنید:

۱- برای  $\xi = 0$ ،  $\beta > 0$ ، قطبهای سیستم مرتبه دوم در (13-4-3) به سمت قطبهای یک سیستم میرایی بحرانی میل خواهند کرد و در این صورت برای نسبت میرایی داریم  $\xi \rightarrow 1$ . از طرف دیگر اگر  $\xi \rightarrow 0$ ،  $\alpha > 0$  عامل میرایی نمایی در معادله (18-4-3) به صفر میل می کند و به سمت یک پاسخ نوسانی بدون میرایی (نوسانی خالص) میل خواهیم کرد، در این صورت برای نسبت میرایی داریم  $\xi \rightarrow 0$ . از اینرو برای یک پاسخ میرایی ضعیف داریم  $0 < \xi < 1$  که در آن با افزایش  $\xi$  به سمت ۱، میرایی در سیستم قوی تر خواهد شد. مقادیر  $\xi > 1$  متناظر با حالت میرای شدید می باشند (بخش 3-4-1 را ببینید).

۲- اگر نسبت میرای صفر باشد، آنگاه  $\alpha = \xi = 0$  و  $\omega_n = \beta$  در این حالت نوسانات میراننده و غیر افزایشی با فرکانس  $\omega_n$  همواره باقی خواهند ماند.

پاسخ سیستم داده شده با معادله (21-4-3) به ورودی پله واحد عبارتست از

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)} \quad (22-4-3)$$

با استفاده از عکس تبدیل لاپلاس می توان نشان داد که خروجی سیستم عبارتست از

$$c(t) = 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t + \cos^{-1} \xi) \quad t \geq 0 \quad (23-4-3)$$

معادله (23-4-3) دقیقاً همان معادله (18-4-3) است که مقادیر زیر در آن جایگزین شده اند

$$k = \alpha^2 + \beta^2, \quad \alpha = -\xi\omega_n, \quad \beta = \omega_n \sqrt{1-\xi^2}, \quad \phi = \cos^{-1} \xi$$

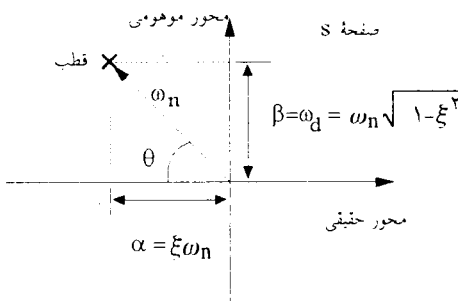
(صحت این روابط را با فرض  $k = \alpha^2 + \beta^2$  تایید کنید.) همانطور که اشاره شد  $\omega_n$  فرکانس طبیعی میراننده سیستم برای  $\xi = 0$  است. از رابطه سوم در روابط بالا داریم به ازاء  $0 < \xi < 1$  قسمت‌های موموی ریشه‌ها اندازه‌ای به مقدار زیر دارند

$$\beta = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \quad (24-4-3)$$

اگر  $\xi \neq 0$  باشد، پاسخ سیستم  $c(t)$  یک تابع غیر متناوب است و  $\beta$  تعریف شده با معادله (24-4-3) یک فرکانس نیست. لیکن به خاطر اهمیتی که  $\beta$  دارد آنرا با  $\omega_d$  نشان داده و فرکانس طبیعی میرا شده<sup>۱</sup> یا فرکانس شرطی<sup>۲</sup> می‌نامند.

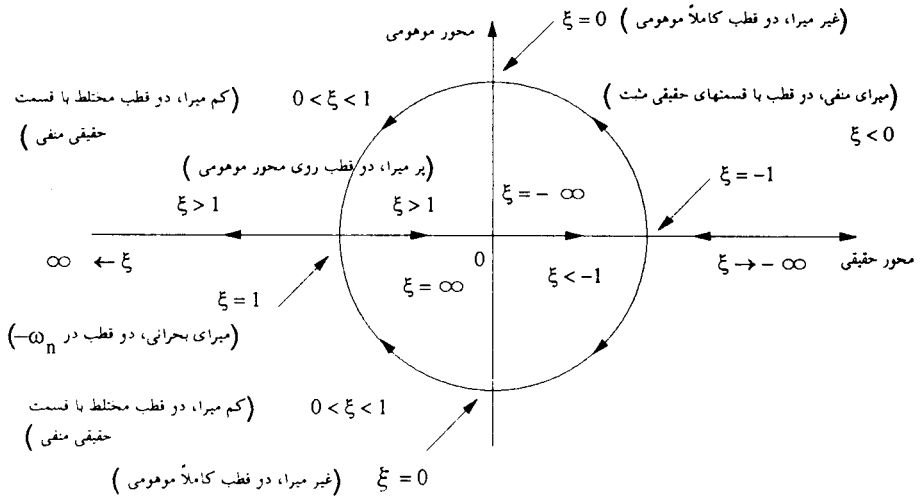
شکل ۸-۳ رابطه بین موقعیت قطبهای سیستم و  $\alpha$ ،  $\xi$ ،  $\omega_n$  و  $\beta$  را نشان می‌دهد. برای ریشه‌های مختلط مزدوج نشان داده شده،  $\omega_n$  فاصله شعاعی از ریشه‌ها به مبدا صفحه  $s$  است. عامل میرایی  $\alpha$  قسمت حقیقی ریشه‌ها، فرکانس طبیعی میرا شده  $\beta$  قسمت موهومی ریشه‌ها، نسبت میرایی  $\xi$  برابر با کسینوس زاویه بین خط شعاعی به ریشه‌ها و محور منفی است، هنگامیکه ریشه‌ها در سمت چپ صفحه  $s$  قرار گرفته باشند و یا

$$\xi = \cos \theta \quad (25-4-3)$$

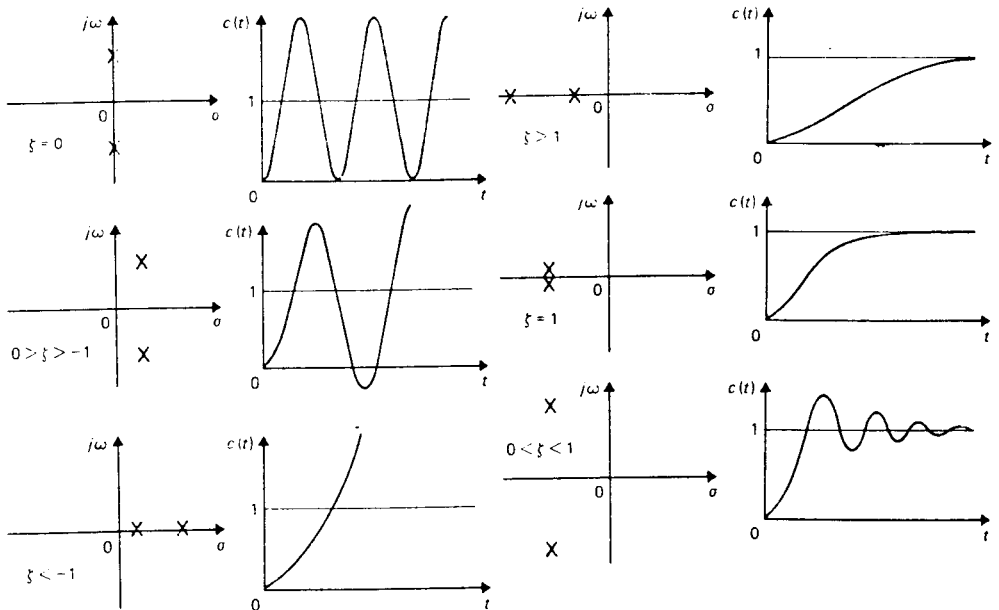


شکل ۸-۳ رابطه بین قطبهای سیستم مرتبه دوم  $\alpha$ ،  $\xi$ ،  $\omega_n$  و  $\beta$

اثر قطبهای سیستم بر روی سیستم مرتبه دوم در شکل‌های ۹-۳ و ۱۰-۳ نشان داده شده است. در شکل ۹-۳  $\omega_n$  ثابت فرض شده است و نسبت میرایی  $\xi$  از  $0$  تا  $\infty$  تغییر می‌کند.



شکل ۹-۳ مکان ریشه قطبهای سیستم مرتبه دوم داده شده با معادله (۳-۴-۲۱) هنگامیکه  $\omega_n$  ثابت فرض شده است و نسبت میرایی از  $-\infty$  تا  $\infty$  تغییر می‌کند.



شکل ۱۰-۳ مقایسه بین پاسخهای سیستم به ازاء موقعیتهای مختلف قطبهای سیستم مرتبه دوم.

شکل ۳-۱۰ پاسخهای پله واحد یک سیستم مرتبه دوم متناظر با مقادیر مختلف قطبهای سیستم را نشان می‌دهد.

در سیستم‌های عملی کنترل، تنها سیستم‌هایی که نسبت میرایی آنها مثبت اند (سیستم‌های پایدار) کاربرد دارند. شکل ۳-۱۱ پاسخهای سیستم مرتبه دوم داده شده با معادله (۳-۴-۲۳) به ورودی پله واحد را برای مقادیر مختلف نسبت میرایی بر حسب زمان نرمالیزه شده  $\omega_n t$  نشان می‌دهد. همانطور که از شکل ۳-۱۱ مشاهده می‌شود، با کاهش  $\xi$  مقدار فراجهش حداکثر بزرگتر شده و پاسخ نوسانی‌تر می‌گردد. برای مقادیر  $\xi \geq 1$  پاسخ پله واحد، نوسانی نشان نمی‌دهد (حالت میرای بحرانی و شدید).

در اینجا فراجهش حداکثر، زمان تاخیر، زمان صعود و زمان استقرار را برای یک سیستم مرتبه دوم داده شده با معادله (۳-۴-۲۱)، بدست می‌آوریم. نخست فراجهش حداکثر را تعیین می‌کنیم. زمانی را که پاسخ به حداکثر فراجهش می‌رسد، زمان ستیغ<sup>۱</sup> می‌نامند. برای تعیین زمان ستیغ از  $c(t)$  نسبت به زمان مشتق می‌گیریم و آنرا مساوی با صفر قرار می‌دهیم. با مشتق گرفتن و پس از دو مرحله ساده سازی (این مراحل را انجام دهید)، بدست می‌آوریم

$$\left. \frac{dc(t)}{dt} \right|_{t=t_p} = \sin(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t_p) \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} \exp(-\xi \omega_n t_p)$$

و بنابراین

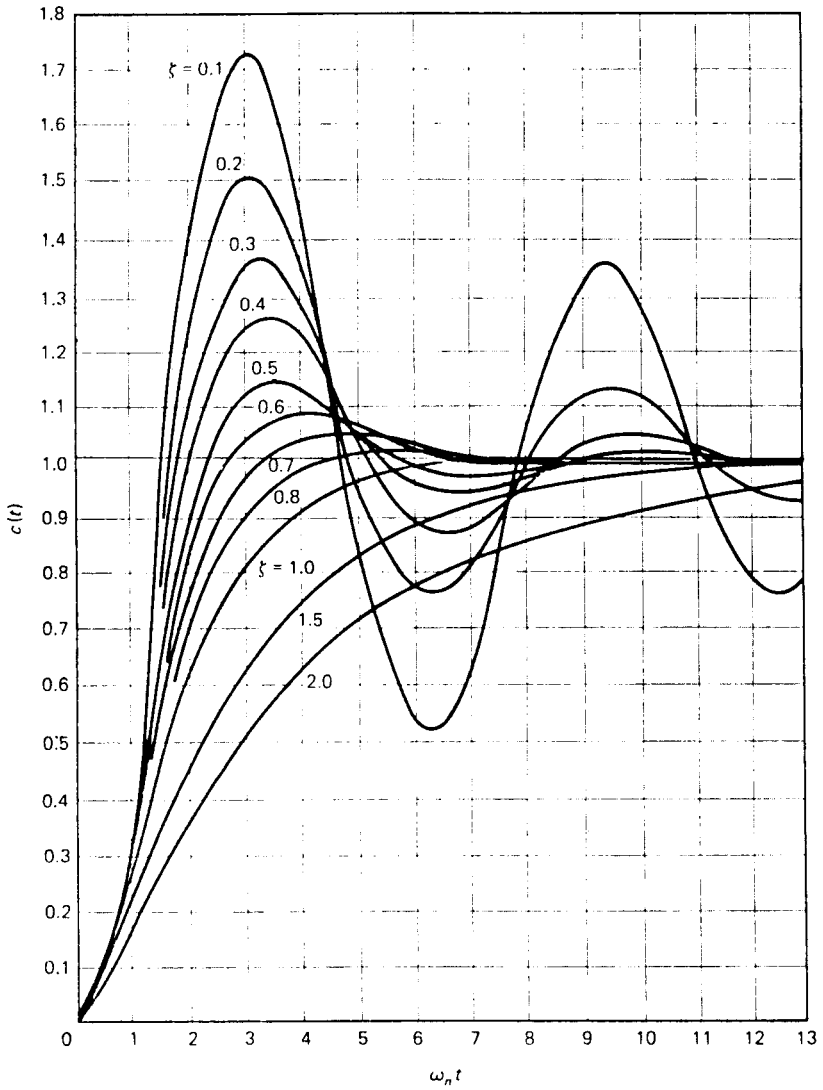
$$\sin(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t_p) = 0$$

و یا

$$\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t_p = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$$

زمان ستیغ برابر با زمان اولین فراجهش است و لذا

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} \quad (3-4-26)$$



شکل ۳-۱۱ پاسخهای پله واحد سیستم مرتبه دوم با مقادیر مختلف نسبت میرایی.

اگر مقدار فراجش حداکثر را با  $M_p$  نشان دهیم، بنابر تعریف  $M_p$  داریم

$$M_p = c(t_p) - 1$$

$$= -\exp(-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\pi + \cos^{-1}\xi)$$

$$= \exp(-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}) \quad (27-4-3)$$

بنابراین از معادله (27-4-3) درصد فراجش حداکثر برابر با  $10 \cdot \exp\left(-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}\right)$  است.

تعیین دقیق روابط تحلیلی برای محاسبه زمان تاخیر، حتی برای سیستم‌های ساده مرتبه دوم ساده نیست. توجه کنید که برای محاسبه زمان تاخیر، باید در معادله (23-4-3) به جای  $c(t)$  مقدار  $0.5$  را جایگذاری کرد و معادله را برای  $t$  حل نمود. روشهای تقریبی ساده‌تری برای محاسبه زمان تاخیر وجود دارد که در اینجا از ذکر آنها صرفنظر می‌کنیم و در صورت تمایل به مطالعه بیشتر در این زمینه به بخش مراجع آخر همین فصل مراجعه کنید.

بنابر تعریف، زمان صعود  $t_r$  می‌تواند برای سیستم‌های میرای ضعیف به عنوان زمانی تلقی گردد که خروجی در پاسخ به ورودی پله واحد از  $0$  به  $1$  می‌رسد. لذا از معادله (23-4-3) داریم

$$c(t_r) = 1 = 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t_r}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t_r + \cos^{-1}\xi) \quad (28-4-3)$$

از معادله (28-4-3) داریم

$$\frac{e^{-\xi\omega_n t_r}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t_r + \cos^{-1}\xi) = 0 \quad (29-4-3)$$

با توجه به اینکه  $\exp(-\xi\omega_n t_r)$  همواره غیر صفر است و با جایگزینی  $\beta = \omega_n \sqrt{1-\xi^2}$  و  $\theta = \cos^{-1}\xi$  از معادله (29-4-3)، بدست می‌آوریم

$$\beta t_r + \theta = n\pi \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (30-4-3)$$

برای زمان صعود داریم  $n=1$  و لذا معادله (30-4-3)، می‌دهد

$$t_r = \frac{\pi - \theta}{\beta} \quad (31-4-3)$$

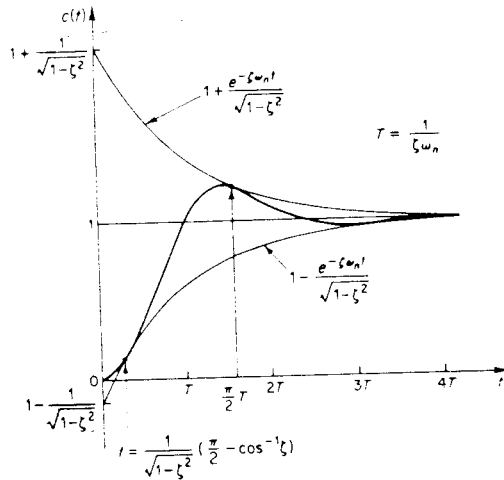


معادله (۳-۴-۳۱) زمان لازم را برای رسیدن پاسخ از ۰ به ۱ در پاسخ به ورودی پله واحد تعیین می‌کند. برای تعیین زمان لازم برای رسیدن پاسخ از ۱۰ تا ۹۰ درصد مقدار نهایی خود از روابط دیگری باید استفاده کرد که برای مطالعه بیشتر می‌توانید به مراجع آخر این فصل مراجعه کنید.

برای سیستم‌های میرای ضعیف مرتبه دوم، پاسخ گذاری سیستم به ورودی پله واحد از معادله (۳-۴-۲۳) عبارتست از

$$c(t) = 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t + \cos^{-1} \xi) \quad (t \geq 0)$$

منحنیهای  $\pm \left( e^{-\xi\omega_n t} / \sqrt{1-\xi^2} \right)$  منحنیهای پوش پاسخ گذرا برای ورودی پله واحد هستند. همانطور که از شکل ۳-۱۲ مشاهده می‌شود، منحنی پاسخ  $c(t)$  همواره در داخل یک جفت از منحنیهای پوش باقی می‌ماند. ثابت زمانی این منحنیهای پوش  $1/\xi\omega_n$  است. نرخ صفر شدن پاسخ حالت گذرا، به مقدار ثابت زمانی  $1/\xi\omega_n$  بستگی دارد. برای یک  $\omega_n$  داده شده، زمان استقرار به مقدار  $\xi$  بستگی دارد. از شکل ۳-۱۱ مشاهده می‌گردد که برای مقدار ثابت  $\omega_n$  و برای گستره  $\xi$  بین ۰ تا ۱، زمان استقرار  $t_s$  با کاهش  $\xi$  افزایش می‌یابد. برای یک سیستم میرای شدید بدلیل شروع کند پاسخ، زمان استقرار طولانی می‌شود.



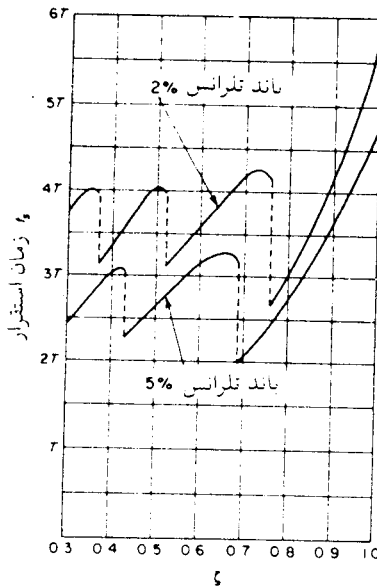
شکل ۳-۱۲ منحنیهای پوش برای منحنی پاسخ پله واحد سیستم مرتبه دوم

زمان استقرار متناظر با یک باند تolerانس  $\pm 2\%$  یا  $\pm 5\%$  را می توان برحسب ثابت زمانی  $T = \frac{1}{\xi \omega_n}$  از منحنیهای شکل ۳-۱۱، برای مقادیر مختلف  $\xi$  اندازه گرفت. نتایج این اندازه گیری در شکل ۳-۱۳ نشان داده شده اند. برای مقادیر  $0/9 < \xi < 0/0$ ، اگر از معیار  $2\%$  استفاده گردد،  $t_s$  تقریباً چهار برابر ثابت زمانی سیستم است. اگر از معیار  $6\%$  استفاده گردد،  $t_s$  تقریباً سه برابر ثابت زمانی سیستم است. توجه کنید که، تقریباً حداقل زمان استقرار را برای معیار  $2\%$  در حدود  $\xi = 0/76$ ، و برای معیار  $5\%$  در حدود  $\xi = 0/68$  خواهیم داشت. برای مقایسه بین پاسخهای سیستمها، معمولاً زمان استقرار  $t_s$  را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$t_s = 4T = \frac{4}{\xi \omega_n} \quad (\text{معیار } 2\%) \quad (3-4-32)$$

یا

$$t_s = 3T = \frac{3}{\xi \omega_n} \quad (\text{معیار } 5\%) \quad (3-4-33)$$



شکل ۳-۱۳ زمان استقرار برحسب منحنیهای  $\xi$

مثال ۳-۴-۱

توابع تبدیل مرنورهای الکتریکی را در فصل دوم بدست آوردیم. تابع تبدیل از ولتاژ میدان به موقعیت شفت یک موتور DC با کنترل میدان به صورت زیر داده شده است

$$G(s) = \frac{0.5}{s(0.25s + 1)}$$

خروجی دستگاه اندازه گیری موقعیت شفت با سیگنالی به همان صورت مقایسه می شود و سیگنال خطای  $e$ ، نشان داده شده در شکل ۳-۱۴ را تشکیل می دهد. با بکارگیری یک آمپلی فایر قدرت پاسخ سریع و یک کنترل کننده با بهره ثابت، حلقه سیستم را می توان تا یک آمپلی فایر با بهره  $k$  بست. تابع تبدیل حلقه بسته سیستم عبارتست از

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{2k}{s^2 + 4s + 2k}$$

برای ورودی پله واحد، خروجی سیستم (موقعیت شفت) عبارتست از

$$C(s) = \frac{2k}{s(s^2 + 4s + 2k)}$$

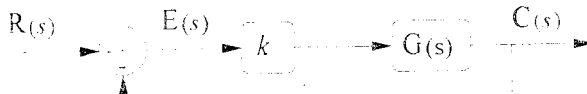
خروجی سیستم را برای مقادیر  $k=1$ ،  $k=2$  و  $k=8$  با بسط کسره های جزئی و عکس تبدیل لاپلاس به صورت زیر بدست می آوریم

$$c(t) = 1 - 1/20e^{-0.586t} + 0.20e^{-3.414t} \quad k=1$$

$$c(t) = 1 - 2te^{-2t} - e^{-2t} \quad k=2$$

$$c(t) = 1 + 1/154e^{-2t} \cos\left(3/464t + \frac{57}{6}\right) \quad k=8$$

نمودارهای پاسخ پله واحد این سیستم برای مقادیر بهره ۱، ۲ و ۸ در شکل ۳-۱۵ نشان داده

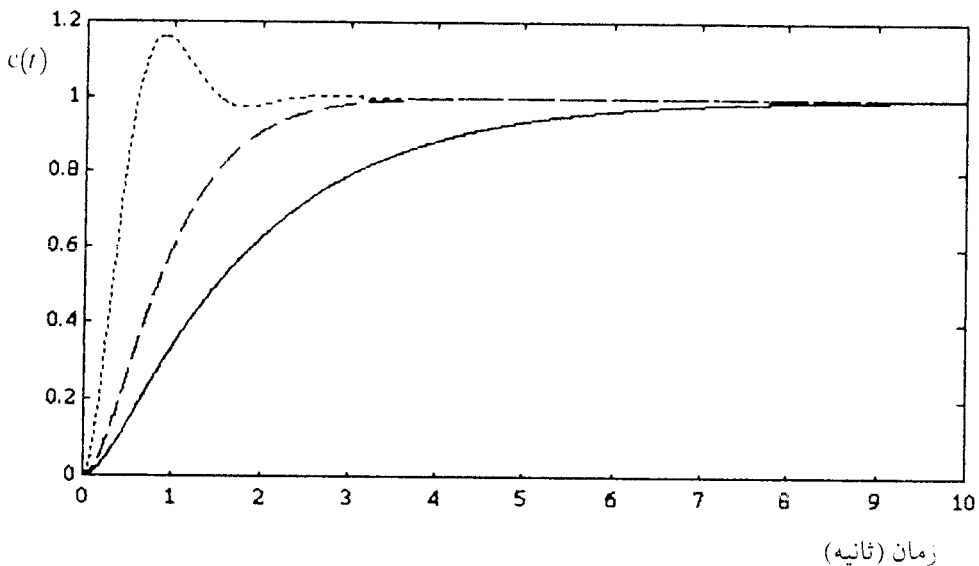


شکل ۳-۱۴ موتور DC مثال ۳-۴-۱

شده‌اند. همانطور که از شکل ۳-۱۵ مشاهده می‌شود برای مقادیر بزرگتر بهره  $k$  پاسخ سریعتر شده است. البته با افزایش بیشتر  $k$  پاسخ سیستم دچار نوسانات شدید می‌شود و مقدار فرارفت و زمان استقرار ممکن است که از حد قابل قبول خارج شوند. مقدار حالت نهایی پاسخ برای هر سه مقدار  $k$ ، همانطور که از شکل ۳-۱۵ مشاهده می‌شود، یکسان است. در واقع از قضیه مقدار نهایی داریم

$$C_{\text{ss}} = \lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sC(s) = 1$$

مشخصه‌های پاسخ گذرا مانند فراجهش حداکثر، زمان صعود و زمان استقرار را می‌توان مستقیماً از منحنی پاسخ محاسبه نمود و یا اینکه به روش تحلیلی از معادلات بدست آمده استفاده کرد و آنها را محاسبه نمود. قطبهای سیستم حلقه - بسته برای  $k < 2$  عبارتند از  $\sqrt{4-2k} \pm 2j$ ، قطبها بر روی محور حقیقی منفی قرار دارند و متناظر با حالت  $\xi > 1$  یا پاسخ میرای شدید است. برای  $k = 2$ ، دو قطب در  $-2$  قرار می‌گیرند و متناظر با حالت  $\xi = 1$  یا پاسخ میرای بحرانی است. برای  $k > 2$ ، ریشه‌ها مختلط مزدوج هستند و متناظر با حالت  $\xi < 1$  یا پاسخ میرای ضعیف است. برای نمونه در بهره  $k = 8$  قطبهای سیستم در  $z = -2 \pm 3/464j$  قرار



شکل ۳-۱۵ پاسخ پله واحد سیستم مثال ۳-۴-۱ برای مقادیر مختلف بهره  $k$   
 $k=1$ : — ,  $k=2$ : --- ,  $k=8$ : ...

می‌گیرند و در این حالت مخرج تابع تبدیل حلقه - بسته عبارتست از  $s^2 + 4s + 16$ . با مقایسه این چند جمله‌ای با چند جمله‌ای استاندارد  $s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2$ ، بدین‌جهی است که  $\omega_n = 4$  و  $\xi = 0.5$ . بنابراین  $\theta = 60^\circ$  و  $\beta = 3/46$ . بدین ترتیب مشخصه‌های پاسخ حالت - گذرا عبارتند از:

زمان ستیغ  $t_p$ :

$$t_p = \frac{\pi}{\beta} = 0.91 \quad (\text{ثانیه})$$

فراجش حداکثر  $M_p$ :

$$M_p = \exp(-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}) = 0.163$$

و لذا درصد فراجش حداکثر  $16.3\%$  است.

زمان صعود  $t_r$ :

$$t_r = \frac{\pi - \theta}{\beta} = 0.6054 \quad (\text{ثانیه})$$

(توجه کنید  $\theta$  برحسب رادیان برابر با  $1/0.47$  می‌باشد)

زمان استقرار  $t_s$ : برای معیار  $2\%$ ، زمان استقرار برابر است با

$$t_s = \frac{4}{\xi\omega_n} = 2 \quad (\text{ثانیه})$$

و برای معیار  $5\%$  برابر است با

$$t_s = \frac{3}{\xi\omega_n} = 1/5 \quad (\text{ثانیه})$$

## ۵-۳ اثرات اضافه کردن صفر و قطب به توابع تبدیل

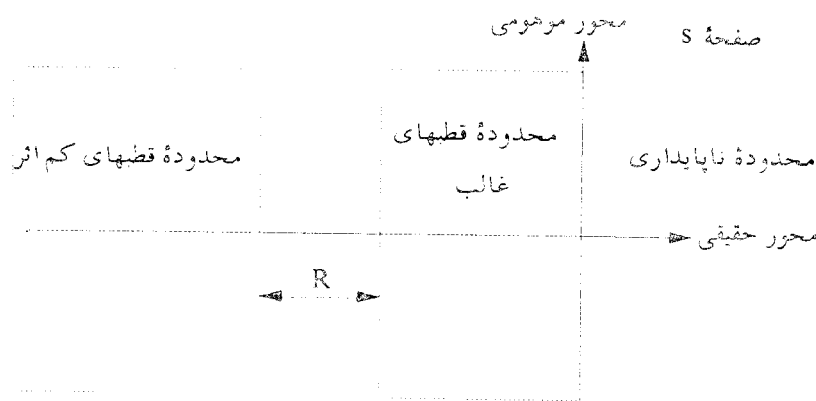
### ۱-۵-۳ قطبهای غالب توابع تبدیل

از مطالب ارایه شده در بخش ۳-۴ این نتیجه مهم حاصل می‌شود که، موقعیت قطبهای تابع تبدیل در صفحه  $s$  اثر مستقیم بر روی پاسخ گذاری آن دارد. در شکل ۳-۱۰ نشان داده شده است که موقعیت قطبها در یک سیستم مرتبه دوم، پاسخهای کاملاً متفاوت حالت گذرا را بدست می‌دهند. در تحلیل و طراحی سیستم‌های کنترل، پیدا کردن آن دسته از قطبهای سیستم که بیشترین اثر را بر پاسخ دارند اهمیت فوق‌العاده‌ای دارد. به این قطبها، قطبهای غالب

سیستم می‌گویند. در بحث سیستم‌های مرتبه دوم اشاره شد که بسیاری از سیستم‌های عملی را می‌توان به صورت یک تابع تبدیل مرتبه دوم مدل کرد. در واقع، در این مدل‌سازی از این واقعیت استفاده می‌گردد که قطبهای غالب این گونه سیستم‌ها، همان دو قطب در نظر گرفته شده در تابع تبدیل مرتبه دوم مدل آنها هستند.

از آنجاییکه اکثریت سیستم‌های کنترل در عمل از مرتبه‌ای بالا برخوردار هستند، لذا پیدا نمودن و تدوین دستورالعملی که این سیستم‌ها را توسط مدل‌های مرتبه پایین‌تر (مانند مدل مرتبه دوم) تقریب بزنند، بسیار سودمند است. در کلیه کار بردهای عملی، می‌توان صفحه  $s$  را به دو قسمت تشکیل شده از قطبهای غالب و قطبهای کم اثر تقسیم کرد. این تقسیم بندی در شکل ۳-۱۶ نشان داده شده است. توجه کنید که اندازه و مقادیر معینی برای مختصات قسمت‌های مختلف شکل ۳-۱۶ ارایه نشده است. زیرا در سیستم‌های مختلف این مختصات تفاوت می‌کند و در واقع هر سیستمی مختصات مربوط به خود را در شکل ۳-۱۶ خواهد داشت.

قاعده کلی آن است، قطبهایی که در صفحه  $s$  در سمت چپ محور موهومی قرار دارند و به آن نزدیکتر هستند، پاسخ گذاری کنونی خواهند داشت (با سرعت کمی صفر خواهند شد)، حال آنکه قطبهایی که در سمت چپ محور موهومی قرار دارند و نسبت به قطبهای غالب



شکل ۳-۱۶ محدوده‌های قطبهای غالب و کم اثر در صفحه  $s$ .

بسیار دورتر از محور موهومی هستند، پاسخ گذرای سریع دارند و با سرعت بیشتری صفر خواهند شد. قطبهای دسته اول در محدوده قطبهای غالب قرار گرفته و قطبهای دسته دوم در محدوده قطبهای کم اثر قرار می‌گیرند. مطلب مهم، تشخیص فاصله  $R$  بین این دو محدوده است. از نقطه نظر عملی و کاربردی سیستم‌های کنترل، اگر اندازه قسمت حقیقی قطبی حداقل ۵ تا ۱۰ برابر قسمت حقیقی قطب غالب یا قطبهای مختلف مزدوج غالب باشد، آن قطب را (از نظر تاثیر بر پاسخ گذرا) از جمله قطبهای کم اثر به حساب می‌آورند.

اگر سیستمی مرتبه‌ای بالاتر از مرتبه دو داشته باشد، نمی‌توان نسبت میرایی  $\xi$  و فرکانس طبیعی میرا نشده  $\omega_n$  را به طور صریح برای آن تعریف نمود. لیکن اگر بتوان دینامیک سیستم را با یک جفت قطب غالب مزدوج تقریب زد، آنگاه از  $\xi$  و  $\omega_n$  برای مشخص کردن قطبهای سیستم استفاده می‌شود و نسبت میرایی را در این حالت، نسبت میرایی نسبی<sup>۱</sup> می‌نامند.

### مثال ۳-۵-۱

تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید

$$G(s) = \frac{1}{(s+8)(s^2 + 2s + 2)}$$

در این تابع تبدیل، قطب در  $s_3 = -8$ ، برابر قسمت حقیقی قطبهای مختلط مزدوج در  $s_{1,2} = -1 \pm j$  است. لذا می‌توان دینامیک سیستم را با اصلاح بهره حالت ماندگار با قسمت مرتبه دوم آن مدل کرد و در اینصورت نسبت میرایی نسبی سیستم  $0.707$  است.

### ۳-۵-۲ اثر قطبهای غالب اضافی

در بخش ۳-۴، پاسخ سیستم مرتبه دوم مفصلاً بررسی شد. در این بخش، اثر اضافه کردن یک قطب غالب در  $s = p_3$  را به تابع تبدیل سیستم مرتبه دوم بررسی می‌کنیم. در این حالت داریم

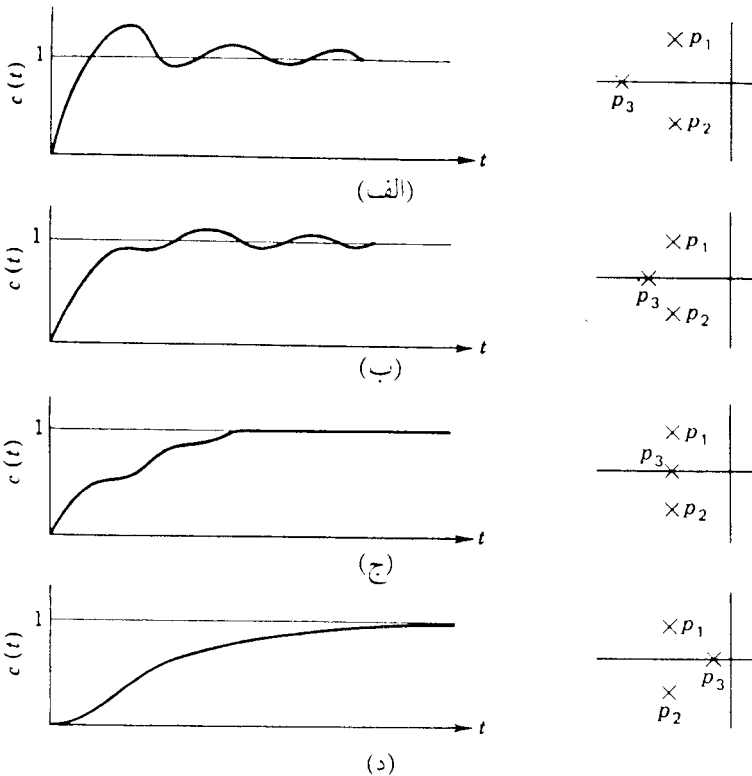
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{k}{(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)(s - p_3)} \quad (3-5-1)$$

1- Relative damping ratio

که در آن  $k = -\omega_n^2 p_3$  بهره ثابت است. اگر به معادله (۳-۵-۱) ورودی پله واحد اعمال کنیم  $(R(s) = 1/s)$  آنگاه با بسط کسره‌های جزئی و عکس تبدیل لاپلاس، بدست خواهیم آورد

$$c(t) = 1 + 2A_1 e^{-\xi \omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t + \theta) + A_3 e^{p_3 t} \quad (۳-۵-۲)$$

که در آن  $A_1$  و  $A_3$  ثابتهای بدست آمده از بسط کسره‌های جزئی هستند. (عملیات تبدیل معادله (۳-۵-۱) به کسره‌های جزئی و گرفتن عکس تبدیل لاپلاس را انجام دهید و ثابتهای  $A_1$  و  $A_3$  را در معادله (۳-۵-۲) در حالت کلی بدست آورید.) عبارت گذرای ناشی از قطب اضافه شده  $p_3$  به تابع تبدیل سیستم به صورت  $A_3 e^{p_3 t}$  است، که در آن  $A_3$  همواره منفی است. بنابراین حداکثر فراجهدش  $M_p$  کاهش یافته و زمان استقرار سیستم ممکن است که کاهش و یا افزایش یابد. این اثر معمولی یک قطب غالب اضافی است. شکل ۳-۱۷ چهار حالت موقعیت قطب غالب اضافی را نشان می‌دهد. با حرکت قطب  $p_3$  به سمت راست، اندازه  $A_3$



شکل ۳-۱۷ پاسخهای سیستم مرتبه سوم بر حسب موقعیت قطب سوم اضافه شده.



بزرگتر شده و فراجاهش کوچکتر می‌شود. با نزدیکتر شدن به قطبهای مختلط (از طرف چپ)، اولین فراجاهش در پاسخ، کمتر از مقدار نهایی آن خواهد شد. بزرگترین فراجاهش در این حالت (شکل ۳-۱۷ (ب))، می‌تواند در دومین فراجاهش (و یا حتی سومین و غیره) باشد. اگر قطب سوم دقیقاً در قسمت حقیقی قطبهای مختلط مزدوج قرار گیرد (شکل ۳-۱۷ (ج))، پاسخ سیستم بدون فراجاهش خواهد بود، که متناظر با حالت میرایی بحرانی است. اگر قطب اضافه شده در قسمت راست قطبهای مختلط مزدوج قرار گیرد، پاسخ میرای شدید می‌شود (شکل ۳-۱۷ (د)).

### ۳-۵-۳ اثر صفرهای اضافی

شکل ۳-۱۸ پاسخهای پله واحد سیستم حلقه - بسته با تابع تبدیل

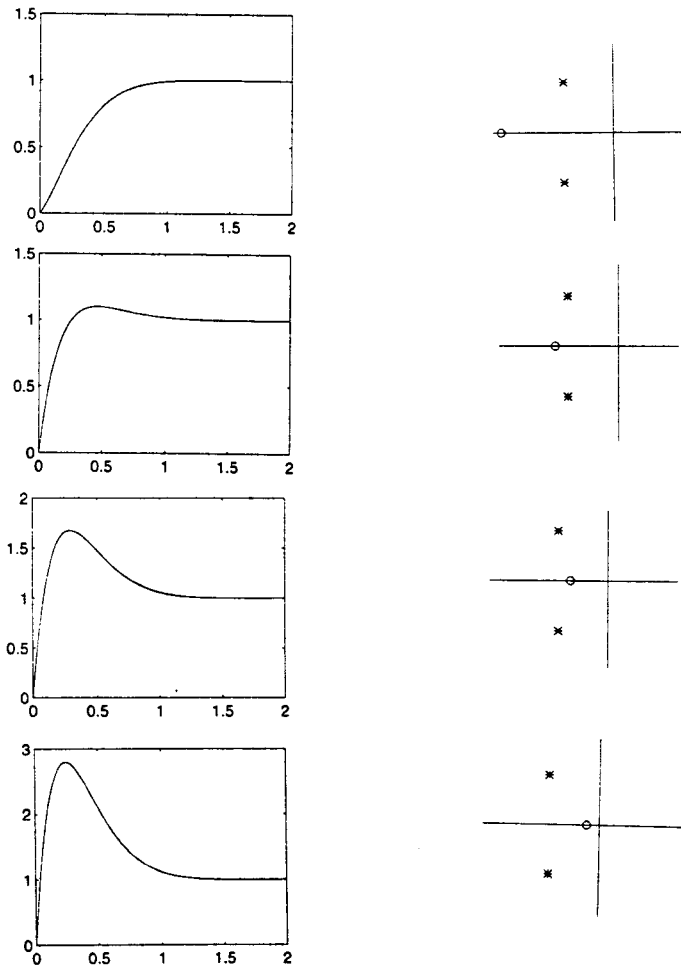
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2 (s - z_1)}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (3-5-3)$$

را برای موقعیتهای مختلف صفر اضافه شده نشان می‌دهد. همانطور که از حالت‌های مختلف شکل ۳-۱۸ مشاهده می‌شود، اثر اضافه کردن صفر در  $z_1$ ، حداکثر فراجاهش سیستم را افزایش داده و زمان صعود را کاهش می‌دهد. هم چنین مشاهده می‌گردد که اگر  $z_1$  به سمت صفر میل کند، همزمان دامنه فراجاهش حداکثر افزایش می‌یابد و تا زمانی که  $\xi$  مثبت باشد، سیستم در محدوده پایداری باقی خواهد ماند.

### ۳-۶ تحلیل خطای حالت ماندگار سیستم‌های کنترل

خطای حالت ماندگار<sup>۱</sup>، معیاری از دقت سیستم کنترل است، هنگامیکه یک نوع خاص ورودی به آن اعمال می‌گردد. دنبال کردن ورودی مرجع توسط خروجی سیستم، از اهداف مهم سیستم است. در سیستم‌های عملی و صنعتی، به دلایل مختلفی از قبیل اصطکاک و ... خطای حالت ماندگار تقریباً هیچگاه دقیقاً صفر نمی‌شود. در مسئله طراحی، یکی از اهداف سیستم کنترل، حداقل کردن و یا ننگه‌داشتن خطا در یک حد قابل قبول است. اندازه این حد خطا و دقت سیستم کنترل، به مقدار زیادی به ماهیت و هدف سیستم کنترل بستگی دارد. برای

1- Steady-state error



شکل ۳-۱۸ پاسخهای سیستم مرتبه دوم بر حسب موقعیت صفر اضافه شده.

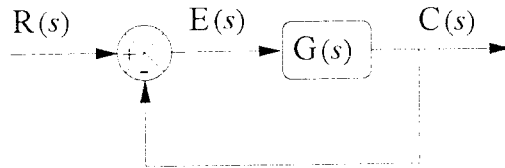
نمونه در کنترل سطح مایع یک مخزن بزرگ، خطامی تواند در حد چند سانتیمتر باشد ولی در یک سیستم کنترل روبات جوشکار و یا یک تلسکوپ بزرگ فضایی، خطا باید در حد چند میکرو رادیان باشد. ماهیت خطا نیز همانند مقدار آن به ماهیت و هدف سیستم کنترل بستگی خواهد داشت. برای مثال، در یک سیستم کنترل سرعت، مقدار خطای حالت ماندگار تفاضل سرعت واقعی و سرعت مطلوب بوده که بر حسب سرعت است و حال آنکه در یک سیستم کنترل موقعیت، خطای حالت ماندگار بر حسب موقعیت خواهد بود.

۱-۶-۳ نوع سیستم

در بررسی نوع سیستم، ساختار فیدبک واحد نشان داده شده در شکل ۱۹-۳، مورد استفاده قرار می‌گیرد و نوع سیستم با توجه به تابع تبدیل حلقه - باز آن تعریف می‌گردد. اگر دیاگرام بلوکی اصلی سیستم به صورتی غیر از صورت نشان داده شده در شکل ۱۹-۳ باشد، با اعمال روشهای جبری دیاگرام بلوکی (بخش ۲-۳-۲) دیاگرام بلوکی سیستم، به صورت فیدبک واحد تبدیل می‌شود. در حالت کلی،  $G(s)$  را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$G(s) = \frac{k(s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0)}{s^q(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0)} \quad (1-6-3)$$

که در آن  $m$  و  $n$  اعداد صحیح مثبت و  $a_0, b_0$  غیر صفر هستند. در بسیاری از موارد می‌توان صورت و مخرج را در معادله (۱-۶-۳) به ترتیب به  $m$  و  $n$  عامل تجزیه کرد و آنها را به صورت حاصلضرب عوامل نوشت. ریشه‌های صورت و مخرج در معادله (۱-۶-۳) را به ترتیب صفرها و قطبهای سیستم می‌نامیم.  $k$  بهره ثابت و عدد صحیح  $q = 0, 1, 2, \dots$  نوع



شکل ۱۹-۳ سیستم فیدبک واحد

سیستم<sup>۱</sup> را نشان می‌دهد. بنابراین  $q=0$  یک سیستم نوع صفر،  $q=1$  یک سیستم نوع یک و  $q=2$  یک سیستم نوع ۲ را نشان می‌دهد. مرتبه سیستم برابر با  $q+n$  است.

مثال ۱-۶-۳

سیستم‌های نشان داده شده در دیاگرام‌های بلوکی شکل ۲۰-۳ (الف) و (ب) را در نظر بگیرید. سیستم شکل ۲۰-۳ (الف) یک سیستم نوع دو مرتبه سوم است. برای تعیین نوع

سیستم شکل ۳-۲۰ (ب) نخست لازم است که آترابه صورت فیدبک واحد تبدیل کنیم. توجه کنید که

$$H(s) = \frac{3}{s+3}, \quad G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

بنابراین

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

که در آن  $D(s)$  و  $N(s)$  دو چند جمله‌ای در  $s$  می‌باشند. در این مثال با جایگزینی برای  $G(s)$  و  $H(s)$  داریم

$$D(s) = s^2 + 4s + 3, \quad N(s) = s + 3$$

مطلوب است که دیاگرام بلوکی شکل ۳-۲۰ (ب) را به صورت فیدبک واحد تبدیل کنیم. با تعریف یک تابع تبدیل معادل  $G_{eq}(s)$ ، داریم

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_{eq}(s)}{1+G_{eq}(s)} \left( = \frac{N(s)}{D(s)} \right)$$

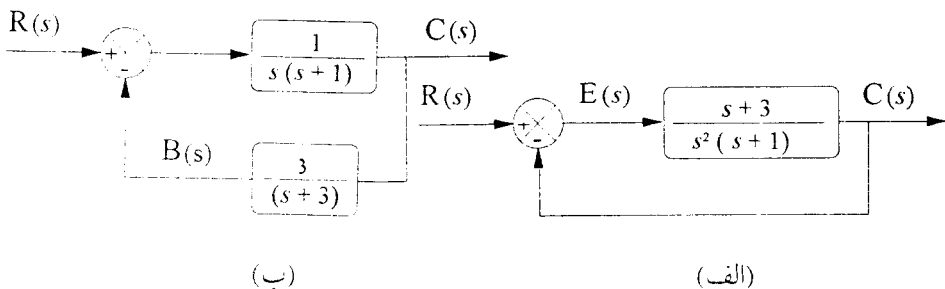
از اینرو

$$G_{eq}(s) = \frac{N(s)}{D(s) - N(s)}$$

با جایگزینی برای  $D(s)$  و  $N(s)$  در این مثال بدست می‌آوریم

$$G_{eq}(s) = \frac{s+3}{s(s^2+4s+3)}$$

و لذا سیستم نوع یک و مرتبه سوم است.



شکل ۳-۲۰ سیستم‌های مثال ۳-۶-۱

نکته مهم: در سیستم‌های فیدبک غیر واحد، مانند سیستم نشان داده شده در شکل ۳-۲۰ (ب)، خطای در نظر گرفته شده برای سیستم به صورت  $E(s) = R(s) - C(s)$  تعریف می‌شود و حال آنکه در بعضی از کتب کنترل مانند مرجع [۳]، خطای سیستم را به صورت  $E(s) = R(s) - B(s)$  تعریف می‌کنند. تحلیل‌های ارایه شده در این دو حالت، تنها در صورتی معادل هستند که  $H(s) = 1$  باشد.

سیستم حلقه - بسته شکل ۳-۱۹ را در نظر بگیرید. داریم

$$C(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} R(s) \quad (۲-۶-۳)$$

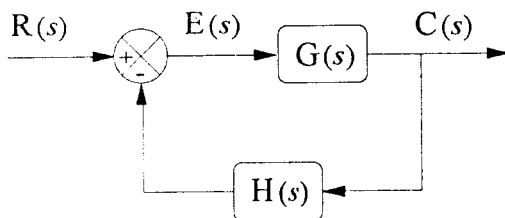
برای یک سیستم فیدبک غیر واحد نشان داده شده در شکل ۳-۲۱، داریم

$$C(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} R(s) \quad (۳-۶-۳)$$

اگر بخواهیم دیاگرام بلوکی سیستم نشان داده شده در شکل ۳-۲۱ را به صورت دیاگرام بلوکی نشان داده شده در شکل ۳-۱۹ تبدیل کنیم، تابع تبدیل حلقه - باز معادل از معادله‌های (۲-۶-۳) و (۳-۶-۳)، به صورت زیر داده می‌شود

$$\text{تابع تبدیل حلقه - باز معادل} = \frac{G(s)}{1+G(s)[H(s)-1]} \quad (۴-۶-۳)$$

اگر  $H(s) = 1$  باشد، معادله (۴-۶-۳) همان معادله (۳-۶-۳) است، به‌طور مشابه می‌توان به صورت داده شده در مثال ۳-۶-۱ نیز عمل کرد.



شکل ۳-۲۱ سیستم با فیدبک غیر واحد

### ۳-۶-۲ خطای حالت ماندگار

سیستم حلقه - بسته با فیدبک واحد نشان داده شده در شکل ۳-۱۹ را در نظر بگیرید، که

در آن خطا عبارتست از

$$E(s) = \frac{1}{1+G(s)} R(s) \quad (5-6-3)$$

همانطور که از معادله (۵-۶-۳) مشاهده می شود، خطا به ورودی اعمال شده به سیستم بستگی خواهد داشت.

خطای کلی سیستم از دو قسمت تشکیل می شود: قسمت اول، خطای حالت ماندگار سیستم است که به صورت زیر نوشته می شود

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) \quad (6-6-3)$$

قسمت دوم خطا، خطای گذرا است که مستقیماً مربوط به پاسخ گذاری سیستم است. بنابراین

$$\text{خطای گذرا} = e(t) - \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) \quad (7-6-3)$$

خطای حالت ماندگار سیستم با ورودی پله: اگر به سیستم نشان داده شده در شکل ۱۹-۳ یک ورودی پله اعمال گردد، خطای حالت ماندگار سیستم از معادله های (۵-۶-۳) و (۶-۶-۳) بدین صورت بدست می آید

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1+G(s)} \frac{R}{s} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{R}{1+G(s)} \end{aligned} \quad (8-6-3)$$

با تعریف ثابت خطای - پله<sup>۱</sup> به صورت

$$K_s = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) \quad (9-6-3)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \frac{R}{1+K_s} \quad (10-6-3)$$

برای یک سیستم نوع صفر  $K_s$  یک عدد ثابت است و برای سیستم های نوع یک و بالاتر

$$K_s = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \infty \quad (11-6-3)$$

بنابراین با جایگزینی این مقادیر در معادله (۳-۶-۱۰)، نتیجه می‌گیریم که خطای حالت ماندگار سیستم به ورودی پله مقدار ثابت و خطای حالت ماندگار سیستم نوع یک و بالاتر به ورودی پله برابر صفر است،

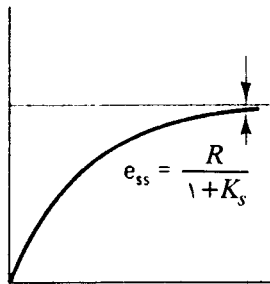
$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0 \quad (۳-۶-۱۲)$$

شکل ۳-۲۲ خطای حالت ماندگار یک سیستم نوع صفر را به ورودی پله نشان می‌دهد.

### مثال ۳-۶-۲

سیستم زیر را در نظر بگیرید

$$G(s) = \frac{5}{s+3}$$



شکل ۳-۲۲ خطای حالت ماندگار ناشی از اعمال ورودی پله به سیستم نوع صفر

ثابت خطای - پله عبارتست از

$$K_s = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \frac{5}{3}$$

و لذا خطای حالت ماندگار عبارتست از

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} sE(s) = \frac{1}{1+5/3} = 0.375$$

توجه کنید که برای سیستم‌های نوع صفر، با بزرگ شدن ثابت خطای پله  $K_s$ ، خطای حالت ماندگار کاهش خواهد یافت. به عنوان نمونه در مثال ۳-۶-۲، با جایگزینی بهره ۱۵ در  $G(s)$  به جای ۵ بسادگی می‌توان نشان داده که خطای حالت ماندگار ۰/۱۶۷ خواهد شد.

لیکن در حالت کلی ممکن است که افزایش  $K_s$  باعث ناپایداری سیستم نیز گردد.

خطای حالت ماندگار سیستم به ورودی شیب: اگر به سیستم نشان داده شده در شکل

۱۹-۳ یک ورودی شیب اعمال گردد، خطای حالت ماندگار سیستم از معادله‌های (۳-۶-۵) و (۳-۶-۶) بدین صورت بدست می‌آید

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1+G(s)} \frac{R}{s^2} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{R}{s+G(s)} \end{aligned} \quad (۳-۶-۱۳)$$

با تعریف ثابت خطای شیب<sup>۱</sup> به صورت

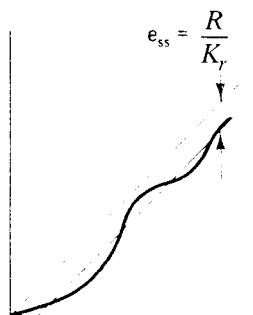
$$K_r = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) \quad (۳-۶-۱۴)$$

داریم

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \frac{R}{K_r} \quad (۳-۶-۱۵)$$

برای سیستم نوع صفر، معادله (۳-۶-۱۴) صفر خواهد بود و لذا خطای حالت ماندگار داده شده با معادله (۳-۶-۱۵)، بی‌نهایت است. برای سیستم نوع یک، ثابت خطای شیب  $K_r$  یک عدد ثابت خواهد بود و بنابراین از معادله (۳-۶-۱۵) داریم که خطای حالت ماندگار نیز ثابت خواهد بود. برای سیستم‌های نوع بالاتر از یک، ثابت خطای شیب  $K_r$  برابر بی‌نهایت است و لذا خطای حالت ماندگار صفر خواهد شد.

شکل ۳-۲۳ خطای حالت ماندگار سیستم نوع یک به ورودی شیب را نشان می‌دهد. خطای حالت ماندگار سیستم به ورودی سهموی: اگر به سیستم نشان داده شده در شکل ۱۹-۳ ورودی سهموی اعمال گردد، خطای حالت ماندگار سیستم از معادله‌های (۳-۶-۵) و



شکل ۳-۲۳ خطای حالت ماندگار ناشی از اعمال ورودی شیب به سیستم نوع یک

1- Ramp-error constant



(۳-۶-۶)، بدین صورت بدست می آید

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1+G(s)} \frac{R}{s} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{R}{s^2 + s^2 G(s)} \end{aligned} \quad (۳-۶-۱۶)$$

با تعریف ثابت خطای - سهموی<sup>۱</sup> به صورت

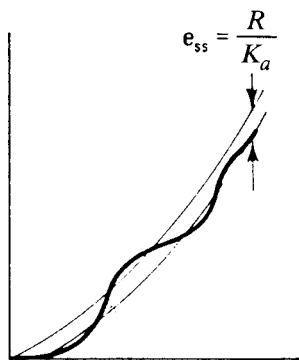
$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s) \quad (۳-۶-۱۷)$$

داریم

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \frac{R}{K_a} \quad (۳-۶-۱۸)$$

برای سیستم‌های نوع صفر و نوع یک، ثابت خطای سهموی صفر می‌شود و لذا خطای حالت ماندگار بی‌نهایت می‌گردد. برای سیستم‌های نوع دو، ثابت غیر صفر می‌شود و خطای حالت ماندگار  $R/K_a$  می‌گردد. برای سیستم‌های نوع سه و بالاتر، ثابت خطای - سهموی بی‌نهایت است و لذا خطای حالت ماندگار صفر می‌گردد. شکل ۳-۲۴، خطای حالت ماندگار یک سیستم نوع دو را به ورودی سهموی نشان می‌دهد.

تحلیل ارائه شده در بالا را می‌توان برای سایر ورودیها نیز به طور مشابهی ادامه داد. در جدول ۳-۱ نتایج بدست آمده خلاصه شده‌اند.



شکل ۳-۲۴ خطای حالت ماندگار ناشی از اعمال ورودی سهموی به سیستم نوع دو.

جدول ۱-۳ خطای حالت ماندگار بر حسب نوع سیستم و ورودی اعمال شده به آن

نوع سیستم	ورودی تابع پله	ورودی تابع شیب	ورودی تابع سهموی
۰	$\frac{R}{1+K_s}$	$\infty$	$\infty$
۱	۰	$\frac{R}{K_r}$	$\infty$
۲	۰	۰	$\frac{R}{K_u}$
۳	۰	۰	۰

### ۷-۳ اثرات فیدبک بر عملکرد سیستم‌های کنترل

در بخش‌های قبیل با تحلیل عملکرد حالت - گذرا و حالت ماندگار در سیستم‌های کنترل آشنا شدیم. در این بخش به بررسی اثرات فیدبک بر عملکرد سیستم‌های کنترل خواهیم پرداخت.

#### ۱-۷-۳ اثرات فیدبک بر بهره و ثابت زمانی سیستم

سیستم مرتبه اول داده شده با تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید

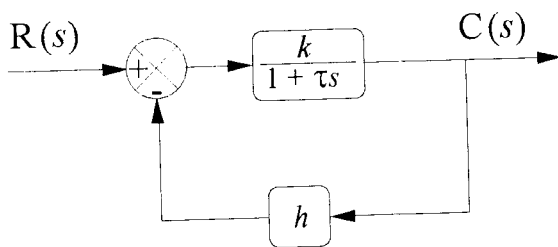
$$G(s) = \frac{k}{1+\tau s} \quad (1-7-3)$$

همانطور که در بخش ۱-۳-۳ اشاره شد، ثابت  $\tau$  ( $1/a_0$ ) در بخش ۱-۳-۳ ثابت زمانی سیستم است و سرعت پاسخ سیستم را تعیین می‌کند. در واقع هر چه ثابت زمانی کوچکتر باشد، پاسخ سیستم سریعتر خواهد بود و لذا، در بسیاری از مواقع در عمل ثابت زمانی‌های کوچکتر مطلوبتر می‌باشند. ثابت  $k$  نیز بهره سیستم حلقه - باز است. با بکارگیری فیدبک، سیستم حلقه - بسته نشان داده شده در شکل ۲۵-۳ بدست خواهد آمد. تابع تبدیل سیستم حلقه - بسته عبارتست از

$$\begin{aligned} \frac{C(s)}{R(s)} = T(s) &= \frac{k/(1+\tau s)}{1+[hk/(1+\tau s)]} \\ &= \frac{k/(1+hk)}{1+[\tau/(1+hk)]s} \end{aligned} \quad (2-7-3)$$

سیستم حلقه - بسته نیز یک سیستم مرتبه اول است که می‌تواند به صورت زیر بازنویسی گردد

$$T(s) = \frac{k_c}{1+\tau_c s} \quad (3-7-3)$$



شکل ۲۵-۳ سیستم مرتبه اول با فیدبک.

که در آن بهره سیستم و ثابت زمانی آن به ترتیب عبارتند از

$$k_c = \frac{k}{1+hk} \quad (۴-۷-۳)$$

و

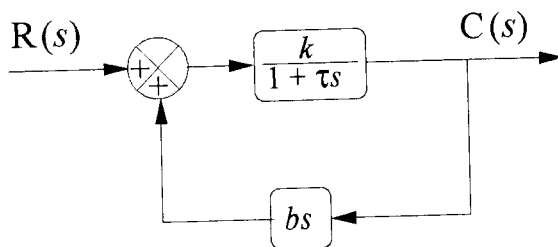
$$\tau_c = \frac{\tau}{1+hk} \quad (۵-۷-۳)$$

همانطور که از معادله‌های (۴-۷-۳) و (۵-۷-۳) مشخص است، اثر فیدبک کوچکتر کردن بهره و ثابت زمانی سیستم است. اگر بخواهیم ثابت زمانی را کم کنیم، در حالیکه بهره سیستم تغییری نکند، می‌توان از سیستم فیدبک نشان داده شده در شکل ۲۶-۳ استفاده کرد. از شکل

۲۶-۳، تابع تبدیل حلقه - بسته سیستم بدست می‌آید. داریم

$$\begin{aligned} T(s) &= \frac{k}{(\tau - bk)s + 1} \\ &= \frac{k}{\tau_c s + 1} \end{aligned} \quad (۶-۷-۳)$$

که در آن  $\tau_c$  ثابت زمانی سیستم حلقه - بسته است. دقت کنید که با انتخاب  $b$  می‌توان ثابت زمانی را به هر مقدار مطلوب تبدیل کرد.



شکل ۲۶-۳ سیستم فیدبک مثبت با مشتق‌گیر

### ۲-۷-۳ اثر فیدبک بر اغتشاشات خارجی

تقریباً در اکثر کاربردهای عملی و صنعتی سیستم‌های کنترل، ورودیهای خارجی و غیر قابل پیش‌بینی وارد سیستم می‌شوند که اثرات منفی نیز بر روی عملکرد سیستم بر جای خواهند گذاشت. در بعضی از این موارد، این اثرات ممکن است چندان مهم نباشند و طراح نیازی به بررسی جداگانه آنها نداشته باشد و حال آنکه در موارد دیگری ممکن است که طراحی موفق عملی سیستم کنترل، بدون در نظر گرفتن این اثرات امکان پذیر نباشد. این ورودیهای خارجی و غیر قابل پیش‌بینی را اغتشاشات خارجی<sup>۱</sup> می‌نامند و به دو صورت در سیستم رخ می‌دهند:

(الف) یک ثابت غیر صفر ثابت که آنها را اغتشاشات بار<sup>۲</sup> یا افست<sup>۳</sup> می‌نامند و (ب) یک سیگنال نویز تصادفی<sup>۴</sup>.

شکل ۲۷-۳ مدل اغتشاشات خارجی را نشان می‌دهد. خروجی سیستم حلقه - باز عبارتست از

$$C_{10}(s) = C_{10}(s) + C_{20}(s) \quad (۷-۷-۳)$$

که در آن  $C_{10}(s)$ ، آن قسمت از خروجی است که به ورودی  $R(s)$  مربوط می‌باشد و برابر است با

$$C_{10}(s) = G_1(s)G_v(s)R(s) \quad (۸-۷-۳)$$

و  $C_{20}(s)$  آن قسمت از خروجی است که به ورودی اغتشاش  $N(s)$  مربوط می‌باشد و برابر است با

$$C_{20}(s) = G_v(s)N(s) \quad (۹-۷-۳)$$

حال به بررسی اثر فیدبک بر سیستم نشان داده شده در شکل ۲۷-۳ می‌پردازیم. با اعمال فیدبک بر روی این سیستم، سیستم حلقه - بسته نشان داده شده در شکل ۲۸-۳ را خواهیم داشت. خروجی سیستم حلقه - بسته عبارتست از

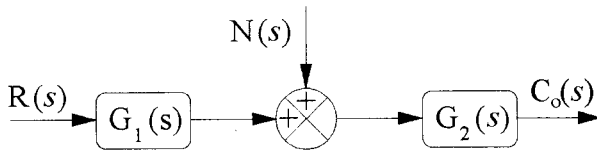
$$C_c(s) = C_{1c}(s) + C_{2c}(s) \quad (۱۰-۷-۳)$$

1- External disturbances

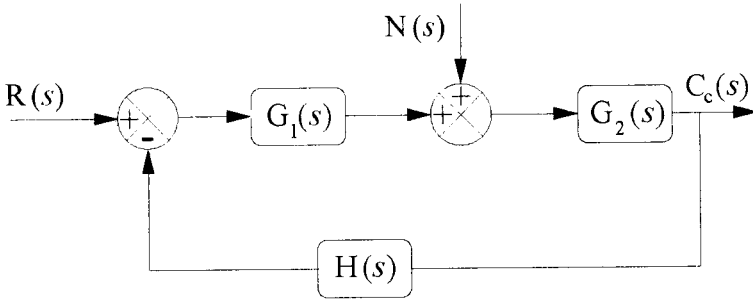
2- Load disturbances

3- Offset

4- Random noise



شکل ۳-۲۷ سیستم تحت تاثیر اغتشاشات خارجی.



شکل ۳-۲۸ سیستم تحت تاثیر اغتشاشات خارجی با فیدبک.

که در آن  $C_{1c}(s)$  و  $C_{rc}(s)$ ، به ترتیب قسمتهای خروجی متناظر با ورودیهای  $R(s)$  و  $N(s)$  می‌باشند و عبارتند از (توجه کنید که  $C_{1c}(s)$  و  $C_{rc}(s)$  به ترتیب با صفر قرار دادن  $N(s)$  و  $R(s)$  در دیاگرام بلوکی تعیین می‌گردند)

$$C_{1c}(s) = \frac{G_1(s)G_r(s)}{1 + G_1(s)G_r(s)H(s)} R(s) \quad (۱۱-۷-۳)$$

و

$$C_{rc}(s) = \frac{G_r(s)}{1 + G_1(s)G_r(s)H(s)} N(s) \quad (۱۲-۷-۳)$$

حال اگر دو خروجی را که توسط اغتشاش در سیستم حلقه - باز داده شده با معادله (۳-۷-۹) و در سیستم حلقه - بسته داده شده با معادله (۳-۷-۱۲) ایجاد شده‌اند، با هم مقایسه کنیم داریم

$$\frac{C_{rc}(s)}{C_{rc}(s)} = \frac{1}{1 + G_1(s)G_r(s)H(s)} \quad (۱۳-۷-۳)$$

و لذا عنصر اغتشاش در خروجی با عامل  $[1 + G_1(s)G_r(s)H(s)]$  کم شده است، که اثر فیدبک را به خوبی نشان می‌دهد.

در سیستم‌های مخابراتی به ورودی  $R(s)$  سیگنال گفته شده و یکی از مشخصه‌های مهم سیستم، نسبت سیگنال به نویز<sup>۱</sup> (SNR) می‌باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\text{SNR} = \frac{\text{خروجی بر اثر سیگنال}}{\text{خروجی بر اثر نویز}} \quad (۱۴-۷-۳)$$

برای سیستم حلقه - باز داریم

$$\text{SNR}_o = \frac{C_{1o}(s)}{C_{2o}(s)} = G_1(s) \frac{R(s)}{N(s)} \quad (۱۵-۷-۳)$$

و برای سیستم حلقه - بسته داریم

$$\text{SNR}_c = \frac{C_{1c}(s)}{C_{2c}(s)} = G_1(s) \frac{R(s)}{N(s)} \quad (۱۶-۷-۳)$$

بنابراین از معادله‌های (۱۵-۷-۳) و (۱۶-۷-۳) مشاهده می‌شود که فیدبک به تنهایی این نسبت را تغییر نمی‌دهد. برای تغییر نسبت سیگنال به نویز نه تنها باید فیدبک اعمال کرد بلکه باید ورودی و تابع تبدیل  $G_1(s)$  را نیز تنظیم کنیم. اگر همراه با فیدبک ورودی  $R(s)$  را به

$\tilde{R}(s)$  و تابع تبدیل  $G_1(s)$  را به  $\tilde{G}_1(s)$  چنان تغییر دهیم که

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{1c}(s) &= \frac{\tilde{G}_1(s)G_2(s)}{1+\tilde{G}_1(s)G_2(s)H(s)} \tilde{R}(s) \\ &= G_1(s)G_2(s)R(s) = C_{1o}(s) \end{aligned} \quad (۱۷-۷-۳)$$

خواهیم داشت

$$C_{2c}(s) = \frac{G_2(s)}{1+\tilde{G}_1(s)G_2(s)H(s)} N(s) \quad (۱۸-۷-۳)$$

و نسبت سیگنال به نویز در این حالت برابر است با

$$\text{SNR}_{\tilde{c}} = \frac{\tilde{C}_{1c}(s)}{C_{2c}(s)}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{G_1(s)G_2(s)R(s)}{\left[ G_2(s)N(s)/(1+\tilde{G}_1(s)G_2(s)H(s)) \right]} \\ &= G_1(s) \frac{R(s)}{N(s)} [1+\tilde{G}_1(s)G_2(s)H(s)] \end{aligned} \quad (۱۹-۷-۳)$$

از معادله‌های (۳-۷-۱۵) و (۳-۷-۱۹) داریم

$$\frac{SNR_{\tilde{c}}}{SNR_0} = 1 + \tilde{G}_1(s)G_r(s)H(s) \quad (۳-۷-۲۰)$$

بنابراین اگر فیدبک با تغییر مناسب  $R(s)$  و  $G_1(s)$  همراه باشد، SNR سیستم افزایش خواهد یافت.

### ۳-۷-۳ اثر فیدبک بر حساسیت سیستم

در طراحی کنترل کننده برای یک سیستم، معمولاً فرض می‌شود که مدل سیستم و مدل کنترل کننده طراحی شده دقیق بوده و نمایشهای کاملی از تحقق فیزیکی و واقعی آنها هستند. این فرض، خطاهای موجود در مدلسازی و مراحل مختلف ساخت، و هم چنین خطاهای اندازه‌گیری را نادیده می‌گیرد. علاوه بر آن، در کلیه سیستم‌های کنترل اثرات مختلفی مانند تغییرات محیط، فرسودگی، عدم دسترسی به برخی پارامترهای سیستم و غیره موجب آن می‌گردند که همواره در صدی نامعینی<sup>۱</sup> در رابطه با مدل‌های در دست و طراحی شده وجود داشته باشد.

بررسی این مطالب که عملکرد سیستم به چه اندازه‌ای نسبت به بعضی از تغییرات یا خطاهای موجود در پارامترهای آن، حساس می‌باشد در طراحی سیستم‌های عملی کنترل فوق‌العاده مهم است. به این بررسی، بررسی حساسیت<sup>۲</sup> سیستم گفته می‌شود.

در سیستم‌های حلقه - باز داریم

$$C(s) = G(s)R(s) \quad (۳-۷-۲۱)$$

و لذا تغییرات احتمالی  $G(s)$  و یا خطاهای مدلسازی تابع تبدیل مستقیماً بر خروجی آن تاثیر می‌گذراند و حال آنکه در سیستم‌های فیدبک داریم

$$C(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} R(s) \quad (۳-۷-۲۲)$$

این تغییرات و خطاها مستقیماً بر خروجی تاثیر نمی‌گذارند. برای سیستم حلقه - بسته داده شده با معادله (۳-۷-۲۲) اگر داشته باشیم  $1 \gg G(s)H(s)$ ، آنگاه

$$C(s) \approx \frac{1}{H(s)} R(s) \quad (۳-۷-۲۳)$$

و لذا خروجی تنها از  $H(s)$  تاثیر می پذیرد و می توان آنرا به گونه ای مناسب به طور دلخواه انتخاب نمود. البته باید توجه داشت که انتخاب  $H(s)$  به گونه ای که  $G(s)H(s) \gg 1$  باشد، همواره عملی نیست و در بسیاری از موارد به پاسخ نوسانی و یا حتی ناپایدار (بخش ۳-۸) می انجامد. در هر صورت معادله (۳-۷-۲۲) نشان می دهد که افزایش  $G(s)H(s)$  اثر  $G(s)$  و در نتیجه تغییرات آنرا بر خروجی کم می کند. بنابراین با فیدبک می توان اثر تغییرات پارامترهای سیستم حلقه - باز بر خروجی را کم کرد.

برای بررسی اثر تغییرات پارامترهای سیستم، فرض کنید که تغییر پارامترها را با  $\Delta G(s)$  نشان دهیم. در این صورت تابع تبدیل واقعی سیستم عبارتست از  $G(s) + \Delta G(s)$ . در سیستم حلقه - باز تغییر خروجی به صورت زیر خواهد بود

$$\Delta C(s) = \Delta G(s)R(s) \quad (۳-۷-۲۴)$$

در سیستم های حلقه - بسته این تغییرات به صورت زیر در خروجی نشان داده خواهد شد

$$C(s) + \Delta C(s) = \frac{G(s) + \Delta G(s)}{1 + G(s) + \Delta G(s)H(s)} R(s) \quad (۳-۷-۲۵)$$

و لذا تغییر در خروجی عبارتست از

$$\Delta C(s) = \frac{\Delta G(s)}{[1 + G(s)H(s) + \Delta G(s)H(s)] [1 + G(s)H(s)]} R(s) \quad (۳-۷-۲۶)$$

در اکثر مواقع داریم  $G(s)H(s) \gg \Delta G(s)H(s)$ ، و لذا از معادله (۳-۷-۲۶) داریم

$$\Delta C(s) \approx \frac{\Delta G(s)}{[1 + G(s)H(s)]^2} R(s) \quad (۳-۷-۲۷)$$

معادله (۳-۷-۲۷) نشان می دهد که تغییر خروجی سیستم با عامل  $[1 + G(s)H(s)]^2$  کاهش یافته است و این عامل در بسیاری از موارد بسیار بزرگتر از یک است. در واقع همانطور که بعداً نیز خواهیم دید، عامل  $1 + G(s)H(s)$  نقش مهمی را در مشخصه سیستم های کنترل فیدبک ایفا می کند.

بنابر تعریف، حساسیت سیستم برابر است با نسبت درصد تغییر در تابع تبدیل سیستم حلقه - بسته به درصد تغییر در تابع تبدیل حلقه - باز. با نشان دادن تابع تبدیل حلقه - بسته به



صورت  $T(s)$ ، درصد تغییر در تابع تبدیل حلقه - بسته عبارتست از  $\Delta T(s)/T(s)$  و هم چنین در صد تغییر در تابع تبدیل حلقه - باز عبارتست از  $\Delta G(s)/G(s)$ . بنابراین از تعریف حساسیت سیستم داریم

$$S_G^T = \frac{\Delta T(s)/T(s)}{\Delta G(s)/G(s)} \quad (28-7-3)$$

که در آن،  $S_G^T$  تابع حساسیت است. حد معادله (۲۸-۷-۳) عبارتست از

$$S_G^T = \frac{\partial T(s)/T(s)}{\partial G(s)/G(s)} = \frac{\partial \ln T(s)}{\partial \ln G(s)} \quad (29-7-3)$$

با جایگزینی  $T(s) = C(s)/R(s)$  از معادله (۲۲-۷-۳) در معادله (۲۹-۷-۳)، بدست می‌آوریم

$$\begin{aligned} S_G^T &= \frac{\partial T}{\partial G} \cdot \frac{G}{T} = \frac{1}{[1+G(s)H(s)]^2} \frac{G(s)}{G(s)/[1+G(s)H(s)]} \\ &= \frac{1}{1+G(s)H(s)} \end{aligned} \quad (30-7-3)$$

از معادله (۳۰-۷-۳) مشاهده می‌گردد که با افزایش  $G(s)H(s)$  می‌توان حساسیت سیستم‌های کنترل را نسبت به تغییرات مدل سیستم حلقه - باز کم کرد.

به طور مشابهی، می‌توان نشان داد که حساسیت سیستم حلقه - بسته به تغییرات در عنصر

فیدبک  $H(s)$  عبارتست از

$$S_H^T = \frac{\partial T}{\partial H} \cdot \frac{H}{T} = \left( \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} \right)^2 \frac{-H(s)}{G(s)/[1+G(s)H(s)]} \quad (31-7-3)$$

معادله (۳۱-۷-۳) نشان می‌دهد که برای  $G(s)H(s) \rightarrow \infty$  داریم  $S_H^T \rightarrow 1$ ، و لذا در انتخاب  $H(s)$  باید دقت کرد که ثابت بوده و یا تغییرات آن با محیط و سایر عوامل دیگر حداقل باشد.

سرانجام، حساسیت پاسخ سیستم حلقه - بسته نسبت به تغییرات در مدل حلقه - باز  $G(s)$

را بررسی می‌کنیم. داریم

$$\begin{aligned} S_G^C &= \frac{\partial C(s)}{\partial G(s)} \frac{G(s)}{C(s)} = \frac{R(s)}{[1+G(s)H(s)]^2} \frac{[1+G(s)H(s)]}{R(s)} \\ &= \frac{1}{1+G(s)H(s)} \end{aligned} \quad (32-7-3)$$

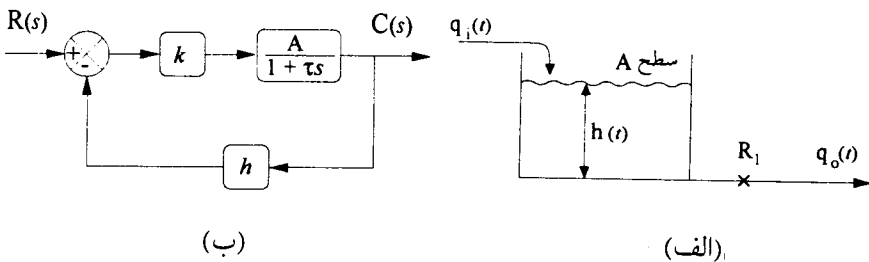
که همانند معادله (۳-۷-۳) است و با افزایش  $G(s)H(s)$  این حساسیت کاهش می یابد.

### مثال ۳-۷-۱

تابع تبدیل یک مخزن حاوی مایع با ورودی مایع  $q_i(t)$ ، خروجی مایع  $q_o(t)$ ، ارتفاع سطح مایع  $h(t)$  و سطح مخزن  $A_1$  که در شکل ۳-۲۹ (الف) نشان داده شده است، عبارت است از

$$\frac{H(s)}{Q_i(s)} = \frac{R_1}{A_1 R_1 s + 1}$$

که در آن  $R_1$  مقاومت شیر خروجی مخزن است. دیاگرام بلوکی سیستم کنترل ارتفاع مایع این سیستم در شکل ۳-۲۹ (ب) نشان داده شده است. تابع تبدیل حلقه بسته سیستم عبارتست از



شکل ۳-۲۹ (الف) یک مخزن مایع، (ب) سیستم کنترل ارتفاع مایع

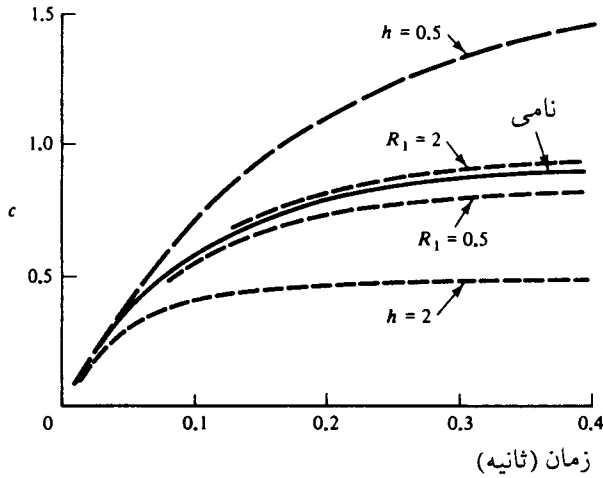
$$T(s) = \frac{kA}{\tau s + 1 + kA R_1}$$

که در آن  $K_v = A = K_v R_1$  بهره شیر کنترلی است و هم چنین  $\tau = A_1 R_1$  است. بهره  $h$  در فیدبک شکل ۳-۲۹ (ب) نیز بهره حس کننده ارتفاع مایع در مخزن است. در این سیستم کنترل، بهره های  $R_1$  و  $h$  به ترتیب می توانند به دلایل عوامل سد کننده، تنظیم غیر دقیق و خرابی حس کننده تغییر کنند. برای نشان دادن این تغییرات، پاسخ پله واحد سیستم را هنگامیکه پارامترهای  $R_1$  و  $h$  از مقادیر نامی خود دو برابر بیشتر و نصف می شوند را مقایسه و حساسیت سیستم را به این تغییرات بررسی می کنیم. با فرض مقادیر عددی  $K_v = 1$ ،  $K = 9$ ،  $A_1 = 1$  و مقادیر نامی  $R_1 = 1$  و  $h_1 = 1$  پاسخ سیستم را بر حسب پارامترهای  $R_1$  و  $h$  برای پله واحد بدست می آوریم. داریم

$$c(t) = \frac{9}{9h + 1/R_1} \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( 9h + \frac{1}{R_1} \right) t \right] \right\}$$

شکل ۳-۳۰ پاسخ سیستم  $c(t)$  را برای مقادیر نامی داده شده  $R_1$ ،  $h$  و همچنین مقادیر  $R_1=2$ ،  $h=2$ ،  $R_1=0.5$  و  $h=0.5$  نشان می‌دهد. با کاهش بهره  $k$  تغییرات نشان داده شده در شکل ۳-۳۰ بیشتر خواهند شد. همانطور که از شکل ۳-۳۰ مشاهده می‌گردد، تغییرات پاسخ نسبت به پاسخ نامی هنگامی که  $R_1$  از ۱ به ۲ تغییر پیدا می‌کند کمتر از هنگامی است که  $R_1$  از ۱ به ۰/۵ تغییر پیدا می‌کند. اگر  $h=0$  و کنترل سیستم حلقه - باز باشد، تغییرات به صورت تناسبی در مقادیر حالت ماندگار پاسخ ظاهر خواهند شد.

اکنون حساسیت سیستم حلقه - بسته را نسبت به تغییر پارامترهای  $A$ ،  $h$  و  $\tau$  بررسی می‌کنیم. این حساسیتها را به ترتیب با  $S_A^T$ ،  $S_h^T$  و  $S_\tau^T$  نشان می‌دهیم. داریم .



شکل ۳-۳۰ تغییرات پارامترها در مثال ۳-۷-۱

$$S_A^T = \frac{\partial T/T}{\partial A/A} = \frac{\partial T}{\partial A} \cdot \frac{A}{T} = \frac{A}{T} \cdot \frac{k(\tau s + 1)}{(\tau s + 1 + kAh)^2} = \frac{\tau s + 1}{\tau s + 1 + kAh}$$

$$S_h^T = \frac{\partial T/T}{\partial h/h} = \frac{\partial T}{\partial h} \cdot \frac{h}{T} = \frac{h}{T} \cdot \frac{-(kA)^2}{(\tau s + 1 + kAh)^2} = \frac{-kAh}{\tau s + 1 + kAh}$$

$$S_\tau^T = \frac{\partial T/T}{\partial \tau/\tau} = \frac{\partial T}{\partial \tau} \cdot \frac{\tau}{T} = \frac{\tau}{T} \cdot \frac{-kAs}{(\tau s + 1 + kAh)^2} = \frac{-\tau s}{\tau s + 1 + kAh}$$

همانطور که از معادله‌های بالا مشاهده می‌شود، حساسیتهای  $S_A^T$  و  $S_T^T$  با افزایش  $h$  کاهش یافته و حال  $S_h^T$  آنکه به سمت ۱ میل می‌کند.

### ۸-۳ تحلیل پایداری

یکی از مهمترین مشخصه‌های سیستم پایداری<sup>۱</sup> آن است. به سیستمی پایدار گویند که اگر ورودی یا اغتشاشات با دامنه محدود به آن اعمال گردد، پاسخ بدست آمده دامنه‌ای محدود داشته باشد.

تابع تبدیل سیستم را در حالت کلی زیر در نظر بگیرید

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (۱-۸-۳)$$

رابطه بین قطبهای سیستم (ریشه‌های معادله مشخصه داده شده در مخرج تابع تبدیل (۱-۸-۳)) و حالت گذرای سیستم مرتبه دوم را در بخش ۳-۴ بررسی کردیم. این نتایج را می‌توان در حالت کلی به صورت زیر بیان کرد:

۱- اگر قطبهای تابع تبدیل در حوزه  $s$  در سمت چپ محور موهومی قرار گیرند، پاسخ گذرای سیستم میراثونده است و با گذشت زمان به صفر میل کرده و سیستم پایدار است.

۲- چنانچه یک یا چند زوج قطب (غیر تکراری) تابع تبدیل بر روی محور موهومی قرار گیرند و سایر قطبها در سمت چپ محور موهومی باشند، پاسخ سیستم به صورت نوسانات سینوسی میرا نشده خواهد بود.

۳- حتی اگر تنها یک قطب تابع تبدیل در سمت راست محور موهومی قرار گیرد، دامنه پاسخ سیستم نسبت به زمان افزایش خواهد یافت و سیستم ناپایدار است.

برای بررسی پایداری سیستم می‌توان چند جمله‌ای مخرج تابع تبدیل (معادله مشخصه) را به صورت حاصلضرب فاکتورهای ریشه‌های آن به صورت زیر نوشت:

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = k(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n) \quad (۲-۸-۳)$$

که در آن  $p_1, \dots, p_n$  قطبهای سیستم هستند. با بررسی این قطبها می توان ماهیت پایداری سیستم را تعیین نمود. در عمل محاسبه ریشه های چند جمله ای  $(3-8-2)$  برای چند جمله ای های درجه بالا بسادگی امکان پذیر نیست. بنابراین، در این بخش به بررسی روشهایی خواهیم پرداخت که ماهیت پایداری سیستم را بدون نیاز به حل معادله مشخصه و تعیین دقیق محل قطبهای آن، تعیین کنند. از تئوری چند جمله ای ها می دانیم که شرط لازم برای اینکه تمامی ریشه های یک چند جمله ای دارای قسمت حقیقی منفی باشند، آن است که اولاً تمامی ضرایب چند جمله ای هم علامت بوده و ثانیاً هیچکدام صفر نباشند. لازم بتذکر است که دو شرط فوق الذکر اگر چه لازم هستند لیکن کافی نمی باشند و ممکن است چند جمله ای با دارا بودن این شرایط، دارای ریشه هایی با قسمت حقیقی غیرمنفی باشد.

در این بخش روشهای روث و هرویتز را برای تعیین پایداری آرایه می کنیم. روشهای مکان ریشه و پاسخ فرکانسی برای تعیین پایداری در فصلهای بعد بررسی خواهند شد.

### ۳-۸-۱ روش روث

در این روش از آرایه روث<sup>۱</sup> برای تعیین پایداری استفاده می شود. آرایه روث با استفاده از ضرایب معادله مشخصه  $a_i$  ( $i=0, 1, \dots, n$ ) داده شده در معادله  $(3-8-1)$  تشکیل می شود. نحوه تشکیل این آرایه در زیر نشان داده شده است:

$$\begin{array}{l|llll}
 s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & \dots \\
 s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} & \dots \\
 s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \dots \\
 s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & \dots & \dots \\
 \vdots & \vdots & & & & \\
 s^1 & g_1 & & & & \\
 s^0 & k_1 & & & & 
 \end{array}$$

همانطور که مشخص است، اعداد ردیفهای اول و دوم (متناظر با  $s^n$  و  $s^{n-1}$ ) از ضرایب معادله

مشخصه،  $a_i$  ها، به ترتیب نشان داده شده انتخاب می‌شوند. اعداد ردیف سوم از معادله‌های زیر بدست می‌آیند:

$$b_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}$$

$$b_2 = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$$

$$b_3 = \frac{a_{n-1}a_{n-6} - a_n a_{n-7}}{a_{n-1}}$$

⋮

و اعداد ردیف چهارم نیز به صورت زیر تعیین می‌گردند:

$$c_1 = \frac{b_1 a_{n-3} - b_2 a_{n-1}}{b_1}$$

$$c_2 = \frac{b_1 a_{n-5} - b_3 a_{n-1}}{b_1}$$

$$c_3 = \frac{b_1 a_{n-7} - b_4 a_{n-1}}{b_1}$$

⋮

و سپس تمامی ردیفها را به همین ترتیب پر می‌کنیم. بعد از تکمیل شدن آرایه روث، می‌توان نشان داد که تعداد قطبهای سمت راست معادله مشخصه برابر با تعداد تغییر علامتها در ستون اول آرایه روث است، بنابراین تنها سیستمی پایدار است که تمامی اعداد ستون اول جدول هم علامت باشند. توجه کنید که در روش روث تنها تعداد قطبهای ناپایدار سیستم (در صورت وجود) تعیین می‌شوند و این روش قادر به تعیین موقعیت این قطبها نیست.

### مثال ۳-۸-۱

چند جمله‌ای زیر را در نظر بگیرید

$$s^4 + 6s^3 + 11s^2 + 6s + 15 = 0$$

آرایه روث برای این چند جمله‌ای عبارتست از:

$$\begin{array}{c|cc} s^4 & 1 & 11 & 15 \\ s^3 & 6 & 6 & \\ s^2 & 10 & 15 & \\ s^1 & -3 & & \\ s^0 & 15 & & \end{array}$$

در ستون اول آرایه بالا یک تغییر علامت از ۱۵ به ۳- و تغییر علامت دیگری از ۳- به ۱۵ داریم. بنابراین این چند جمله‌ای دو ریشه در سمت راست محور موهومی دارد. لذا سیستمی که معادله مشخصه آن، چند جمله‌ای داده شده باشد بدلیل داشتن دو قطب ناپایدار، ناپایدار است.

#### مثال ۳-۸-۲

معادله مشخصه سیستمی عبارتست از

$$s^3 + 3s^2 + 3s + 1 + k = 0$$

که در آن  $k$  بهره سیستم است. مطلوب است که پایداری سیستم را برای تغییرات بهره  $k$  بررسی کنیم. توجه کنید که محل ریشه‌های این چند جمله‌ای به مقدار بهره ثابت  $k$  بستگی خواهد داشت. آرایه روث را برای این چند جمله‌ای تشکیل می‌دهیم. داریم

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 3 \\ s^2 & 3 & 1+k \\ s^1 & \frac{1-k}{3} & \\ s^0 & 1+k & \end{array}$$

با توجه به آرایه تشکیل شده روث، برای اینکه تغییر علامتی در ستون اول آرایه رخ ندهد باید نامعادله‌های زیر را داشته باشیم

$$1+k > 0, \quad 1-k > 0$$

بنابراین برای پایداری سیستم باید داشته باشیم

$$-1 < k < 1$$

ساده کردن آرایه روث. اعداد سطرهای مختلف آرایه روث را می توان در اعداد مثبت ضرب و یا آنها را بر اعداد مثبت تقسیم کرد و این عمل در جواب نهایی پایداری تأثیری نمی گذارد. با این عمل می توان از بزرگی اعداد و در نتیجه از حجم زیاد عملیات جبری به مقدار متناهی کم کرد.

موارد خاص در تشکیل آرایه های روث. اگر در تشکیل آرایه روث در اولین ستون یک عدد صفر ظاهر شود، تکمیل آرایه روث امکان پذیر نخواهد بود زیرا در ادامه تشکیل آرایه تقسیم بر صفر لازم خواهد بود. در صورتیکه یکی از اعداد ستون اول آرایه روث صفر باشد و سایر اعداد آن سطر همگی صفر نباشند، می توان از یکی از دو روش زیر برای تکمیل آرایه روث استفاده کرد:

۱- در معادله اصلی بجای  $s$ ، از  $\frac{1}{x}$  استفاده کنید و سپس معادله را برای  $x$  بررسی و آرایه را برای چند جمله ای بر حسب  $x$  تشکیل دهید.

۲- معادله اصلی را در فاکتور معلوم  $(s+1)$  ضرب کنید و سپس آرایه روث را برای معادله بدست آمده تشکیل دهید. این عمل ریشه شناخته شده  $s=-1$  را به معادله اصلی اضافه می کند.

### مثال ۳-۸-۳

چند جمله ای زیر را در نظر بگیرید

$$s^4 + s^3 + 3s^2 + 3s + 6 = 0$$

آرایه روث را تشکیل می دهیم. داریم

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 3 & 6 \\ s^3 & 1 & 3 & \\ s^2 & 0 & 6 & \end{array}$$

همانطور که مشاهده می شود، اولین عنصر از سومین سطر صفر بوده و عنصر بعد از آن غیر صفر است. دقت کنید که ادامه تشکیل چهارمین سطر آرایه امکان پذیر نیست. با جایگزینی  $s = \frac{1}{x}$  در معادله داده شده بدست می آوریم

$$6x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x + 1 = 0$$



آرایه روث برای این معادله عبارتست از

$$\begin{array}{r|rrr} x^4 & 6 & 3 & 1 \\ x^3 & 3 & 1 & \\ x^2 & -1 & 1 & \\ x^1 & -4 & & \\ x^0 & 1 & & \end{array}$$

بدیهی است که در این حالت در تشکیل آرایه روث با مشکلی مواجه نشده و در واقع از آرایه بالا مشاهده می شود که معادله داده شده دو ریشه ناپایدار دارد.

مثال ۳-۸-۴

چند جمله ای زیر را در نظر بگیرید

$$s^4 + 3s^3 + 2s^2 + 6s + 2 = 0$$

اولین سه ردیف آرایه روث عبارتند از

$$\begin{array}{r|rrr} s^4 & 1 & 2 & 2 \\ s^3 & 3 & 6 & \\ s^2 & 0 & 2 & \end{array}$$

بنابراین در سومین ردیف اولین عنصر ۰ است. اگر چند جمله ای داده شده را در عامل  $(s+1)$

ضرب کنیم داریم

$$(s^4 + 3s^3 + 2s^2 + 6s + 2)(s+1) = s^5 + 4s^4 + 5s^3 + 8s^2 + 8s + 2$$

آرایه روث را برای چند جمله ای جدید تشکیل می دهیم:

$$\begin{array}{r|rrr} s^5 & 1 & 5 & 8 \\ s^4 & 4 & 8 & 2 \\ s^3 & 3 & 7/5 & \\ s^2 & -2 & 2 & \\ s^1 & 10/5 & & \\ s^0 & 2 & & \end{array}$$

از آرایه تشکیل شده داریم که به علت تغییر علامت در اولین ستون، معادله داده شده ناپایدار است و علاوه بر آن تعداد قطبهای ناپایدار آن دو می باشد. توجه کنید که عامل ضرب شده

تنهایک ریشه در ۱-، در سمت چپ محور موهومی در صفحه  $s$  دارد و لذا دو ریشه ناپایدار، ریشه‌های معادله اصلی هستند.

دومین مورد خاص در تشکیل آرایه روث هنگامی رخ می‌دهد که کلیه عناصر یک سطر از آرایه روث صفر شوند. صفر شدن کلیه عناصر سطر، توسط جفت ریشه‌های مختلط مزدوج که قسمت حقیقی آنها لزوماً غیر صفر نیست و (یا) توسط جفت ریشه‌های حقیقی با علامتهای متضاد بوجود می‌آید. در صورت ایجاد یک سطر صفر در آرایه روث برای تکمیل آن می‌توان به طریق زیر عمل کرد: با استفاده از سطر قبلی (سطر ماقبل سطر صفر)، یک معادله کمکی<sup>۱</sup> تشکیل دهید. از معادله کمکی (سطر ماقبل سطر صفر) مشتق بگیرید. اعداد بدست آمده از مشتق معادله کمکی را بجای سطر صفر جایگزین کنید.

### مثال ۳-۸-۵

چند جمله‌ای زیر را در نظر بگیرید

$$s^4 + s^3 + 11s^2 + 9s + 18 = 0$$

آرایه روث برای این چند جمله‌ای عبارتست از

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 11 & 18 \\ s^3 & 1 & 9 & \\ s^2 & 2 & 18 & \\ s^1 & & & 0 \end{array}$$

در این آرایه سطر متناظر با  $s$  یک سطر صفر است. سطر قبلی را برای سادگی محاسبات در  $\frac{1}{2}$  ضرب می‌کنیم و معادله سطر قبل چنین خواهد شد:

$$s^2 + 9 = 0$$

وجود یک ردیف صفر در آرایه روث نشان می‌دهد که معادله مشخصه ریشه‌هایی دارد که منفی‌های یکدیگرند.

ریشه‌های معادله کمکی عبارتند از

$$s = \pm 3j$$

این ریشه‌ها، ریشه‌های معادله اصلی نیز هستند. با توجه به موهومی محض بودن این ریشه‌ها

داریم که پاسخ سیستم، مولفه نوسانی سینوسی خواهد داشت.  
برای تکمیل نمودن آرایه روث، از معادله کمکی مشتق می‌گیریم. داریم

$$2s + 0 = 0$$

ضرایب این معادله در ردیف متناظر با  $s$  به جای ردیف صفر جایگزینی می‌شوند و لذا

$$\begin{array}{c|c} s^1 & 2 \\ s^0 & 9 \end{array}$$

بنابراین با توجه به اینکه تغییر علامتی در اولین ستون آرایه روث رخ نمی‌دهد، معادله مشخصه ریشه‌ای با قسمت حقیقی مثبت ندارد.

### مثال ۳-۸-۶

چند جمله‌ای زیر را در نظر بگیرید

$$s^5 + 2s^4 + 3s^3 + 9s^2 + 2s + 10 = 0$$

اولین پنج ردیف آرایه روث عبارتند از

$$\begin{array}{c|ccc} s^5 & 1 & 3 & 2 \\ s^4 & 2 & 9 & 10 \\ s^3 & -1/5 & -3 & \\ s^2 & 5 & 10 & \\ s^1 & 0 & & \end{array}$$

ردیف پنجم یک ردیف صفر است، لذا از معادله ردیف چهارم به عنوان معادله کمکی استفاده می‌کنیم. داریم

$$5s^2 + 10 = 0 \quad \text{یا} \quad s^2 + 2 = 0$$

با مشتق گرفتن از معادله کمکی بدست می‌آوریم

$$2s + 0 = 0$$

بنابراین آرایه روث را تکمیل می‌کنیم

$$\begin{array}{c|c} s^1 & 2 \\ s^0 & 10 \end{array}$$

دو تغییر علامت در اولین ستون آرایه وجود دارد و لذا چند جمله‌ای دو ریشه ناپایدار دارد.

## مثال ۳-۸-۷

چند جمله‌ای زیر را در نظر بگیرید

$$s^5 + 2s^4 + 15s^3 + 30s^2 - 20s - 40 = 0$$

از تغییر علامت در ضرایب چند جمله‌ای می‌توان نتیجه گرفت که چند جمله‌ای داده شده ناپایدار است. با استفاده از روش روٹ، تعداد ریشه‌های ناپایدار تعیین می‌شوند. آرایه روٹ عبارتست از

$$\begin{array}{c|cc} s^5 & 1 & 15 & -20 \\ s^4 & 2 & 30 & -40 \\ s^3 & 0 & 0 & \end{array}$$

برای تکمیل آرایه از معادله کمکی ردیف دوم استفاده می‌کنیم. داریم

$$2s^4 + 30s^2 - 40 = 0 \quad \text{یا} \quad s^4 + 15s^2 - 20 = 0$$

با مشتق‌گیری از معادله کمکی بدست می‌آوریم

$$4s^3 + 30s - 0 = 0 \quad \text{یا} \quad 2s^3 + 15s - 0 = 0$$

بنابراین در ادامه آرایه روٹ داریم

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 2 & 15 \\ s^2 & 15/2 & -20 \\ s^1 & 30.5/2 & \\ s^0 & -20 & \end{array}$$

بنابراین چند جمله‌ای داده شده تنها یک ریشه ناپایدار دارد.

## ۳-۸-۲ روش هرولتز

روش متداول دیگر بررسی پایداری سیستم، روش هرولتز است. در این روش  $a_n$  (اولین ضریب معادله مشخصه) مثبت فرض می‌شود. دترمینان کلی سیستم را به صورت زیر تشکیل می‌دهیم:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & \begin{bmatrix} a_1 & \text{اگر } n \text{ فرد است} \\ a_1 & \text{اگر } n \text{ زوج است} \end{bmatrix} & \dots & \dots \\ a_n & a_{n-2} & \dots & \begin{bmatrix} a_1 & \text{اگر } n \text{ فرد است} \\ a_1 & \text{اگر } n \text{ زوج است} \end{bmatrix} & \dots & \dots \\ \dots & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & \dots & \vdots \\ \dots & a_n & a_{n-2} & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & a_n \end{vmatrix}$$

دترمینان‌های دیگر  $\Delta_i$  ( $i=1,2,\dots,n-1$ ) را به عنوان دترمینان‌های کهاد اصلی<sup>۱</sup> به صورت زیر بدست می‌آوریم

$$\Delta_1 = a_{n-1}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-3} \\ \dots & a_{n-1} & a_{n-2} \end{vmatrix}$$

تمامی ریشه‌های معادله مشخصه در سمت چپ محور موهومی قرار می‌گیرند و سیستم پایدار است اگر و فقط اگر  $\Delta_i > 0$  ( $i=1,2,\dots,n$ ).

مثال ۳-۸-۸

برای معادله مشخصه

$$s^3 + 4s^2 + 7s + 12 = 0$$

دترمینان‌های سیستم را تشکیل می‌دهیم:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & 12 & 0 \\ 1 & 7 & 0 \\ 0 & 4 & 12 \end{vmatrix} = 192 \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 12 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 16 \quad \Delta_1 = 4$$

بنابراین سیستم با این معادله مشخصه پایدار است.

## مثال ۳-۸-۹

معادله مشخصه سیستمی عبارتست از

$$s^2 + ks + k - 1 = 0$$

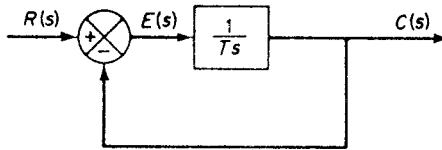
برای بررسی پایداری سیستم به روش هروتیز داریم

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} k & 0 \\ 1 & k-1 \end{vmatrix} = k(k-1) \quad \Delta_1 = k$$

بنابراین، برای پایداری باید داشته باشیم  $k > 0$  و  $k > 1$  یعنی  $k > 1$  شرط پایداری سیستم است.

## مسائل

۳-۱- دیاگرام بلوکی نشان داده شده در شکل ۳-۳۱ را در نظر بگیرید. پاسخ سیستم را برای ورودی ضربه واحد بدست آورید و رسم کنید.



شکل ۳-۳۱ سیستم حلقه - بسته مسئله ۳-۱

۳-۲- تابع تبدیل یک سیستم مرتبه دوم عبارتست از

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

(الف) پاسخ ضربه واحد این سیستم را برای مقادیر مختلف  $0 < \xi < 1$ ،  $\xi = 1$  و  $\xi > 1$  به

صورت تحلیلی بدست آورید. همچنین نشان دهید که پاسخهای بدست آمده

با مشتقگیری از پاسخهای متناظر برای پاسخ پله واحد نیز می توانستند تعیین گردند.

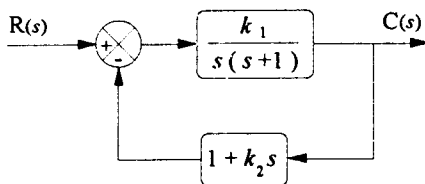
(ب) پاسخهای بدست آمده را در (الف) برای زمان نرمالیزه شده  $\omega_n t$  برحسب  $C(t)/\omega_n$

برای مقادیر  $\xi$  به ترتیب  $0/1$ ،  $0/3$ ،  $0/5$ ،  $0/7$  و  $1/0$  رسم کنید.

۳-۳- سیستم فیدبک نشان داده شده در شکل ۳-۳۲ را در نظر بگیرید. مقادیر بهره  $k_1$  و  $k_2$

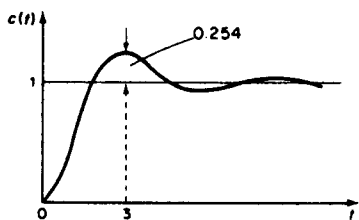
را به گونه ای تعیین کنید که فراجش حداکثر به پله واحد  $0/2$  و زمان ستیغ ۱ ثانیه

باشد. با این مقادیر بهره، زمان صعود و زمان استقرار را بدست آورید.

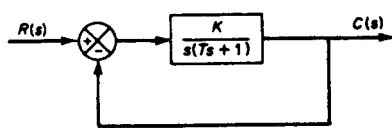


شکل ۳-۳۲ سیستم حلقه - بسته مسئله ۳-۳

۳-۴ - خروجی سیستم نشان داده شده در شکل ۳-۳۳ الف)، در اعمال ورودی پله واحد به صورت نشان داده شده در شکل ۳-۳۳ ب) می باشد. مقادیر  $k$  و  $T$  را از منحنی پاسخ تعیین کنید.



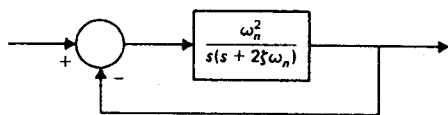
(ب)



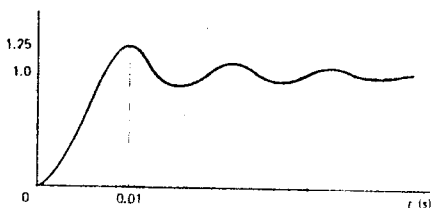
(الف)

شکل ۳-۳۳ الف) سیستم حلقه - بسته ب) پاسخ پله واحد

۳-۵ - دیاگرام بلوکی یک سیستم کنترل حلقه - بسته و پاسخ پله واحد آن در شکل‌های ۳-۳۴ الف) و ب) نشان داده شده‌اند. پارامترهای سیستم را تعیین کنید.



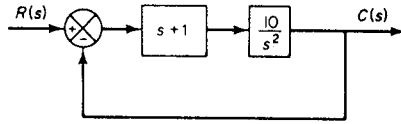
(الف)



(ب)

شکل ۳-۳۴ الف) سیستم حلقه - بسته ب) پاسخ پله واحد

۶-۳- پاسخهای حالت گذرا و حالت ماندگار سیستم حلقه - بسته نشان داده شده در شکل ۳-۳۵ را برای ورودی پله واحد بدست آورید.



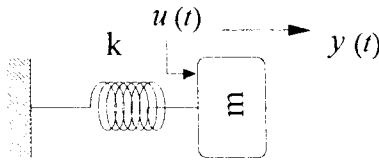
شکل ۳-۳۵ سیستم حلقه - بسته

۷-۳- تابع تبدیل حلقه - باز سیستمی عبارتست از

$$G(s) = \frac{1638(s^2 + 2/6s + 1/65)}{s(s^2 + 40s + 300)(s^2 + 4/65s + 0/45)}$$

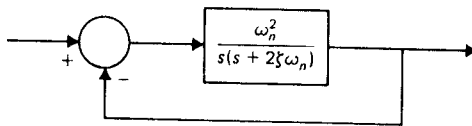
قطبهای غالب و نسبت میرایی سیستم حلقه - بسته را با فیدبک واحد تعیین کنید.

۸-۳- سیستم مکانیکی نشان داده شده در شکل ۳-۳۶ را در نظر بگیرید. اگر به این سیستم یک ضربه واحد اعمال گردد، نوسانات حاصله را تعیین کنید.



شکل ۳-۳۶ سیستم مکانیکی مسئله ۸-۳

۹-۳- سیستم نشان داده شده در شکل ۳-۳۷ را در نظر بگیرید

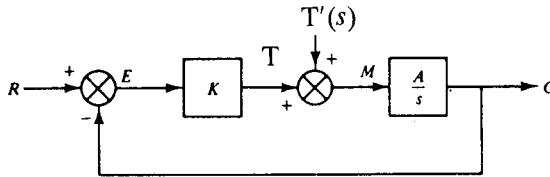


شکل ۳-۳۷ یک سیستم حلقه - بسته

برای مقادیر پارامترهای  $\xi = 0.4$  و  $\omega_n = 5$  (رادیان بر ثانیه) ، زمان صعود، زمان ستیغ، فزاینش حداکثر و زمان استقرار سیستم را در پاسخ به ورودی پله واحد تعیین کنید.



۳-۱۰- سیستم کنترل سرعت نشان داده شده در شکل ۳-۳۸ را در نظر بگیرید. سیستم تحت گشتاور اغتشاشی  $T'(s)$  عمل می‌کند.  $T(s)$  گشتاور محرکه سیستم می‌باشد. اگر  $T'(s) = 0$  باشد، خروجی سیستم ورودی مرجع را دنبال می‌کند. پاسخ حالت ماندگار سیستم را برای ورودی مرجع صفر و گشتاور اغتشاشی پله واحد بدست آورید.



شکل ۳-۳۸ سیستم کنترل سرعت.

۳-۱۱- تابع تبدیل سیستمی عبارتست از

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{3(s+2)}{(s+4)(s+1)^2}$$

پاسخ سیستم به ورودی پله واحد را بدست آورید.

۳-۱۲- تابع تبدیل یک سیستم حلقه - باز عبارتست از

$$G(s) = \frac{1}{s(s+2)}$$

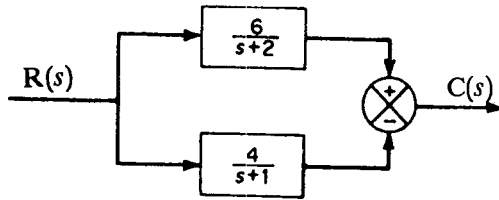
اگر به تابع تبدیل بالا، قطبهایی در  $0/2$ ،  $0/5$ ،  $-1$  و  $-10$  اضافه کنیم، پاسخ سیستم حلقه - بسته با فیدبک واحد را به ورودی پله واحد بدست آورده، رسم کنید. نتایج بدست آمده را با نتایج بخش ۳-۵-۲ مقایسه کنید.

۳-۱۳- تابع تبدیل یک سیستم حلقه - باز عبارتست از

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$

اگر به تابع تبدیل بالا، صفرهایی در  $0/1$ ،  $0/5$ ،  $-2$  و  $-10$  اضافه کنیم، پاسخ سیستم حلقه - بسته با فیدبک واحد را به ورودی پله واحد بدست آورده، رسم کنید. نتایج بدست آمده را با نتایج بخش ۳-۵-۳ مقایسه کنید.

۱۴-۳- سیستم نشان داده شده در شکل ۳۹-۳ را در نظر بگیرید. نشان دهید که تابع تبدیل سیستم  $C(s)/R(s)$  یک صفر ناپایدار دارد (به سیستمی که صفر ناپایدار داشته باشد سیستم غیر می نیمم فاز<sup>۱</sup> گفته می شود). پاسخ سیستم را برای ورودی پله واحد بدست آورده، رسم کنید.

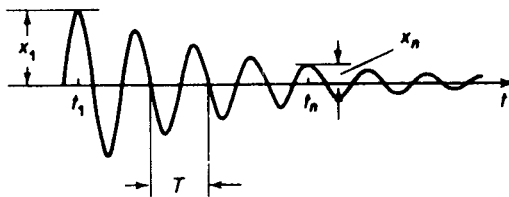


شکل ۳۹-۳ سیستم مسئله ۱۴-۳

۱۵-۳- تابع تبدیل یک سیستم نوسانی مرتبه دوم عبارتست از

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

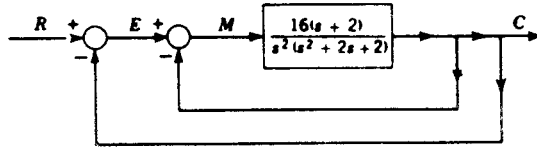
با بکارگیری نمودار پاسخ سیستم نشان داده شده در شکل ۴۰-۳، نسبت میرایی آنرا تعیین کنید.



شکل ۴۰-۳ نوسان میرا

۱۶-۳- سیستم نشان داده شده در شکل ۴۱-۳ را در نظر بگیرید. (الف) توابع تبدیل  $C(s)/E(s)$  و  $C(s)/R(s)$  را تعیین و نوع سیستم را مشخص کنید. (ب) ضرایب خطای

پله، شیب و سهوی را پیدا کنید. (ج) مقدار حالت ماندگار خروجی را برای ورودی  $r(t) = 10$  پیدا کنید.



شکل ۳-۴۱ سیستم مسند ۳-۱۶

۳-۱۷- برای یک سیستم با فیدبک واحد، دو تابع تبدیل حلقه - باز زیر را در نظر بگیرید:

$$G(s) = \frac{10(s+8)}{s^2(s+5)(s^2+2s+2)} \quad \text{و} \quad G(s) = \frac{12(s+4)}{s(s+1)(s+3)(s^2+2s+10)}$$

(الف) ثابتهای خطای پله، شیب و سهوی را تعیین کنید.

(ب) خطای حالت ماندگار پاسخ سیستم را برای ورودیهای زیر بدست آورید:

$$r_1(t) = 5t^2, \quad r_2(t) = 16 + 2t$$

۳-۱۸- تابع تبدیل حلقه - باز یک سیستم کنترل حلقه - بسته با فیدبک واحد عبارتست از

$$G(s) = \frac{k}{s(T_1s + T_2)}$$

خطای حالت ماندگار پاسخ به ورودی شیب واحد را تعیین و تاثیر تغییرات

پارامترهای  $k, T_1$  و  $T_2$  را بر خطای - حالت ماندگار پاسخ بررسی کنید.

۳-۱۹- (الف) ثابتهای خطا را برای سیستم مرتبه دوم زیر پیدا کنید

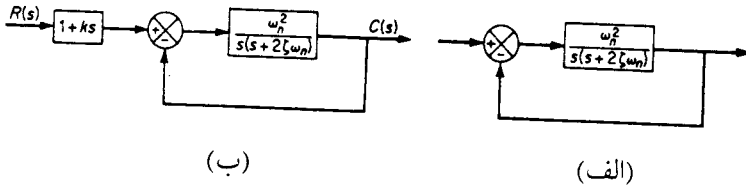
$$G(s) = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

(ب) با اضافه کردن یک قطب در  $p_1$  تغییرات ثابتهای خطا را بررسی کنید.

۳-۲۰- سیستم نشان داده شده در شکل ۳-۴۲ (الف) را در نظر بگیرید. (الف) نشان دهید که

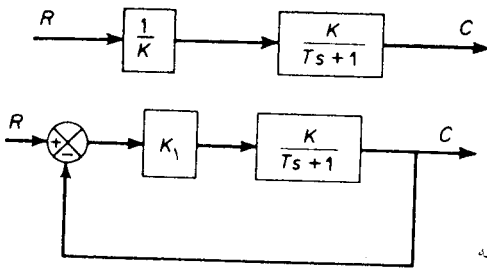
خطای حالت ماندگار به ورودی شیب واحد  $\frac{2\xi}{\omega_n}$  است. (ب) با انتخاب مناسب  $k$  و

ضرب کردن ورودی در عامل  $(1+ks)$  به صورت نشان داده شده در شکل ۳-۴۲ (ب)، نشان دهید که می توان خطای حالت ماندگار را صفر کرد.



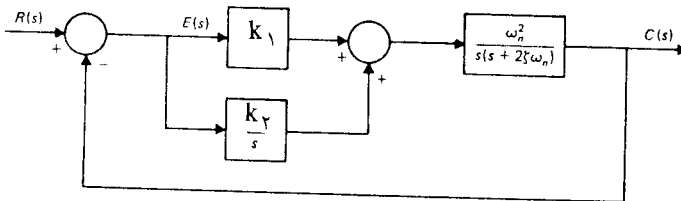
شکل ۳-۴۲ (الف) سیستم کنترل حلقه - بسته (ب) سیستم کنترل حلقه - بسته با عامل افزوده شده

۳-۲۱- سیستم کنترل حلقه - باز و حلقه - بسته نشان داده شده در شکل‌های ۳-۴۳ (الف) و (ب) را در نظر بگیرید. خطای حالت ماندگار را با فرض  $k_1$  خیلی بزرگتر از یک، برای ورودی پله واحد مقایسه کنید.



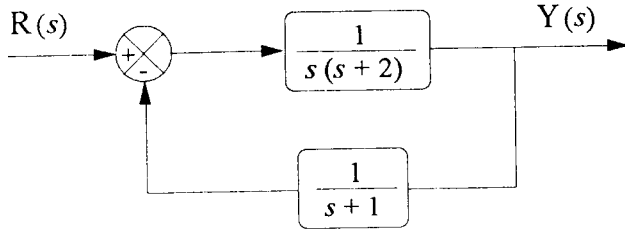
شکل ۳-۴۳ (الف) سیستم حلقه - باز (ب) سیستم حلقه - بسته

۳-۲۲- سیستم کنترل نشان داده شده در شکل ۳-۴۴ را در نظر بگیرید. (الف) برای  $k_v = 0$ ، خطای حالت ماندگار را به ورودی پله با دامنه  $R$  بدست آورید. (ب) برای  $k_v \neq 0$ ، خطای حالت ماندگار را به ورودی پله با دامنه  $R$  بدست آورید. (ج) خطای حالت ماندگار را برای ورودی شیب،  $R(t) = Rt$  بدست آورید.



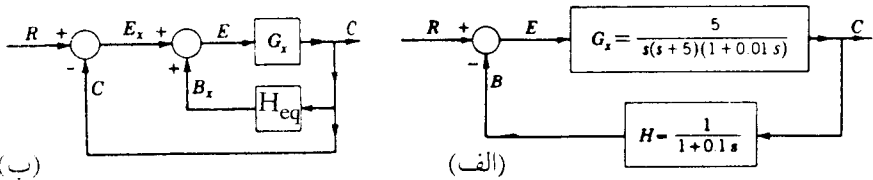
شکل ۳-۴۴ سیستم کنترل حلقه - بسته مسئله ۳-۲۲.

۲۳-۳. خطای حالت ماندگار  $C(s)-R(s)$  سیستم نشان داده شده در شکل ۳-۴۵ را برای ورودی شیب بدست آورید.



شکل ۳-۴۵ سیستم کنترل فیدبک غیر واحد.

۲۴-۳. سیستم کنترل فیدبک غیر واحد نشان داده شده در شکل ۳-۴۶ (الف) را در نظر بگیرید. برای تحلیل خطا مطلوب است که سیستم را به شکل فیدبک نشان داده شده در شکل ۳-۴۶ (ب) تبدیل کنیم. (الف) تابع تبدیل  $H_{eq}(s)$  را به گونه‌ای پیدا کنید که دو دیاگرام بلوکی معادل باشند. (ب) نوع سیستم نشان داده شده در شکل ۳-۴۶ (ب) را تعیین کنید. (ج) ضرایب خطای سیستم را بدست آورید. (د) خطاهای حالت ماندگار سیستم،  $e_{ss}(t)$  و  $e_{cqs}(t)$  را برای ورودی پله واحد بدست آورید.



شکل ۳-۴۶ (الف) سیستم کنترل فیدبک غیر واحد (ب) سیستم کنترل معادل.

۲۵-۳. مسئله ۳-۲۴ را با جایگزینی تابع تبدیل  $H(s) = \frac{s+3}{s+1}$  در مسیر فیدبک نشان داده شده در شکل ۳-۴۶ (الف) تکرار کنید.

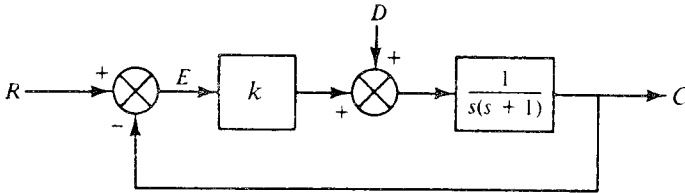
۲۶-۳. تابع تبدیل حلقه - باز یک سیستم کنترل حلقه - بسته با فیدبک واحد عبارتست از

$$G(s) = \frac{k}{s(s+1)(0.5s+1)}$$

که در آن  $r(t) = 3t$  (الف) برای  $k=3$  خطای حالت ماندگار را بدست آورید. (ب)

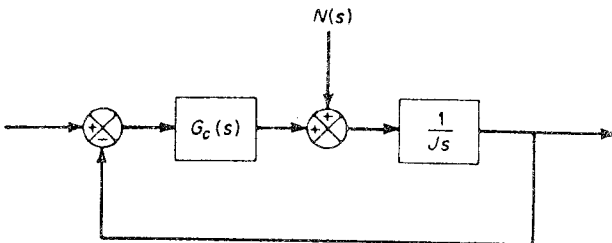
مطلوب است که خطای حالت ماندگار سیستم برای ورودی شیب کمتر یا مساوی  $1/5$  باشد. مقدار می نیمم  $k$  را برای برآورده ساختن این شرط تعیین کنید.

۲۷-۳- سیستم نشان داده شده در شکل ۳-۴۷ را در نظر بگیرید. اثر  $k$  بر اغتشاش وارده به سیستم چیست؟



شکل ۳-۴۷ سیستم کنترل مسئله ۳-۲۷

۲۸- سیستم کنترل نشان داده شده در شکل ۳-۴۸ را در نظر بگیرید. تابع تبدیل  $G(s)$  را به گونه‌ای انتخاب کنید که اغتشاش  $N(s)$  مدل شده توسط پله واحد، حداقل اثر را بر روی عملکرد سیستم داشته باشد.



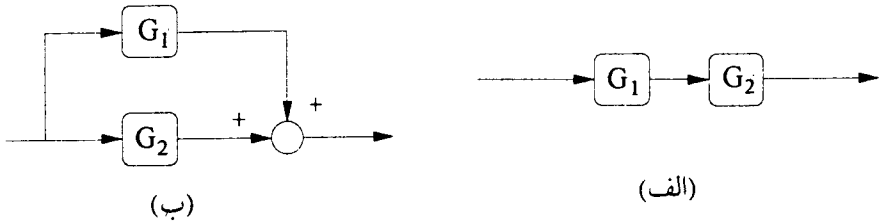
شکل ۳-۴۸ سیستم کنترل مسئله ۳-۲۸

۲۹- حساسیت تابع تبدیل حلقه - باز  $G(s)$  را نسبت به تغییرات در پارامتر  $\tau$  برای

$$G(s) = e^{-\tau s} \hat{G}(s)$$

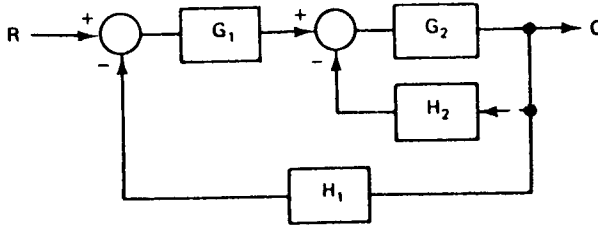
پیدا کنید.

۳۰-۳- حساسیت سیستم‌های نشان داده شده در شکل ۳-۴۹ (الف) و (ب) را برای تغییرات پارامتر  $p$  در حالت‌های (۱)  $G_1(s)$  و (۲)  $G_2(s)$ ، پیدا کنید.



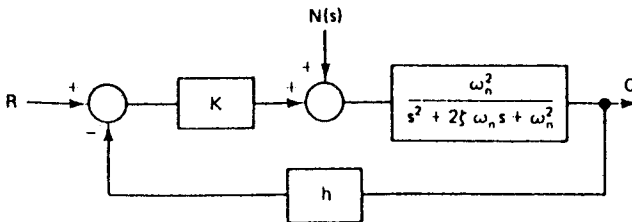
شکل ۳-۴۹ (الف) سیستم سری (ب) سیستم موازی

۳-۳۱- دیاگرام بلوکی نشان داده شده در شکل ۳-۵۰ را در نظر بگیرید. حساسیت سیستم حلقه - بسته را برای تغییرات  $p$  در تابع تبدیل  $G_1(s)$  بدست آورید.



شکل ۳-۵۰ دیاگرام بلوکی مسئله ۳-۳۱.

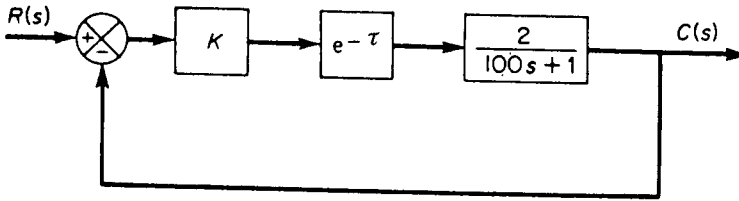
۳-۳۲- سیستم کنترل نشان داده شده در شکل ۳-۵۱ را در نظر بگیرید. (الف) حساسیت سیستم حلقه - بسته را به تغییرات در پارامترهای  $k$ ،  $\omega_n$  و  $\xi$  پیدا کنید. (ب) اثرات اغتشاش را برای سیستم حلقه - باز ( $h=0$ ) و حلقه - بسته تعیین و مقایسه کنید.



شکل ۳-۵۱ سیستم کنترل مسئله ۳-۳۲

۳-۳۳- سیستم نشان داده شده در شکل ۳-۵۲ را در نظر بگیرید. حساسیت سیستم حلقه -

بسته را نسبت به تغییرات در زمان تاخیر  $\tau$  بدست آورید.



شکل ۳-۵۲ سیستم فیدبک مسئله ۳-۳۳

۳-۳۴. با بکارگیری معیار روث، تعداد ریشه‌های ناپایدار چند جمله‌ای‌های زیر را تعیین کنید:

(الف)  $s^4 + 2s^3 + 3s^2 + s + 5 = 0$

(ب)  $s^5 + 2s^4 + 3s^3 + 9s^2 + 2s + 2 = 0$

(ج)  $s^3 - 4s^2 - 7s + 10 = 0$

(د)  $s^5 + 2s^4 + 3s^3 + 9s^2 + 2s + 10 = 0$

(ه)  $s^3 + 3s^2 + s + 3 = 0$

(و)  $s^4 + s^3 + s^2 + s + 2 = 0$

۳-۳۵. با بکارگیری معیار روث، گستره پایداری را برای تغییرات  $k$  در چند جمله‌ای‌های زیر

تعیین کنید:

(الف)  $s^3 + 3ks^2 + (k+3)s + 5 = 0$

(ب)  $s^3 + 1/4s^2 + s + k = 0$

۳-۳۶. تابع تبدیل حلقه - باز سیستمی با فیدبک واحد عبارتست از

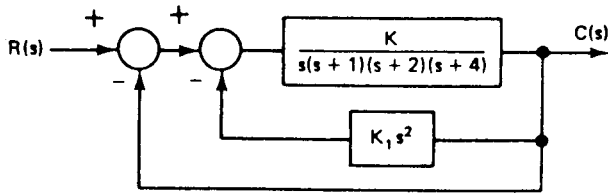
$$G(s) = \frac{k \left(1 - \frac{T}{4}s\right)^2}{s \left(1 + \frac{T}{4}s\right)^2}$$

پایداری سیستم حلقه - بسته را به ازاء تغییرات بهره  $k$  و ثابت  $T$  بررسی کنید.

۳-۳۷. سیستم کنترل نشان داده شده در شکل ۳-۵۳ را در نظر بگیرید. محدوده پایداری را

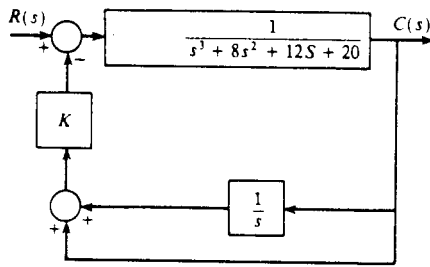
برای سیستم حلقه - بسته بر حسب  $k$  و  $k_1$  بدست آورید.





شکل ۳-۵۳ سیستم حلقه - بسته مسئله ۳-۳۷

۳-۳۸- سیستم کنترل نشان داده شده در شکل ۳-۵۴ را در نظر بگیرید. محدوده پایداری را برای سیستم حلقه - بسته به ازاء بهره  $k$  بدست آورید.



شکل ۳-۵۴ سیستم حلقه - بسته مسئله ۳-۳۸

۳-۳۹- تابع تبدیل حلقه - باز یک سیستم با فیدبک واحد عبارتست از

$$G(s) = \frac{k(2s+1)}{s(4s+1)(s+1)^2}$$

ورودی اعمال شده به سیستم  $r(t) = 1+t$  می باشد. (الف) مطلوب است که برای  $r(t)$  داده شده خطای حالت ماندگار کمتر یا مساوی  $0.1$  باشد. حداقل بهره  $k$  که این مقدار را بر آورده می سازد، پیدا کنید.

(ب) با بکارگیری معیار روث پایداری سیستم را برای بهره بدست آمده در (الف) بررسی کنید.

۳-۴۰- پایداری معادله های زیر را با استفاده از روش هرویتز بررسی کنید.

(الف)  $s^4 + 4s^3 + 4s^2 + 8s + 16 = 0$

(ب)  $s^3 + 8s^2 + 14s + 24 = 0$

(ج)  $s^3 + 5s^2 + 8s + 5 + k = 0$

## مراجع فصل سوم

- [3-1] Frank, P. M., *Introduction to system sensitivity Theory*, Academic press, 1981.
- [3-2] Trimmer, J. D. *Response of physical systems*, Wiley, NewYork, 1969.
- [3-3] Singh, V., *Comments on the Routh-Hurwitz criterion*, IEEE Trans. Autom. Control, Vol. AC-26, pp.612, 1981.
- [3-4] Porter B., *Stability criteria for linear dynamical systems*, Academic press, NewYork, 1968.
- [3-5] Krishnamurthi V., *Implications of Routh stability criteria*, IEEE Trans. Autom. Control, Vol. AC-25, pp. 559-595, 1980.
- [3-6] Khatwani, K. J., *On Routh-Hurwitz criterion*, IEEE Trans. Autom. Control, Vol. AC-26, pp 583-584, 1981.
- [3-7] Pillai, S. K., *On the  $\epsilon$ -Method of the Routh-Hurwitz criterion*, IEEE Trans. Autom. Control, Vol AC-26, pp.584, 1981.
- [3-8] Bongionro J. J., Jr, *A recursive algorithm for computing the partial fraction expansion of rational functions having multiple poles*, IEEE Trans. Autom. Control, Vol. AC-29, pp 650-652, 1984.
- [3-9] Davison E. J., *A method for simplifying linear dynamical systems*, IEEE Trans. Autom. Control, Vol. AC-11, pp-93-101, 1966.
- [3-10] Hisa T. C., *On the simplification of linear systems*, IEEE Trans. Autom. Control, Vol. AC. 17, pp 372-374, 1972.
- [3-11] Vidyasagar M., *On undershoot and non-minimum phase zeros*, IEEE Trans. Autom. Control Vol AC-31, pp 440, 1986.
- [3-12] Gantmacher F. R., *The theory of matrices*. Chelsea Publishing Company, 1960.

## کتاب شناسی

پاسخ سیستم‌های کنترل به ورودیهای استاندارد را می‌توان مستقیماً از حل معادلات دیفرانسیل حاکم بر سیستم بدون استفاده از تبدیل لاپلاس بدست آورد. برای این نحوه برخورد با بررسی پاسخهای حالت گذرا و حالت ماندگار به مرجع [1] مراجعه نمایید. پاسخ گذرای سیستم‌های مرتبه سوم و بالاتر را می‌توان در مرجع [2] پیدا کرد. در مراجع [1]، [2]، [3] و [4] مثالهای عملی از سیستم‌های مرتبه دوم آورده شده‌اند. در محاسبه پاسخ حالت گذرا با استفاده از تابع تبدیل در حوزه  $s$  باید تابع تبدیل را به صورت کسرهای متوالی تبدیل کرد. روشهای محاسبه مانده‌ها در کسرهای متوالی در این کتاب مورد بررسی قرار نگرفته‌اند، برای اطلاعات بیشتر به مراجع [1] تا [4] و [6] مراجعه شود. یک مقاله تخصصی در زمینه بسط کسرهای جزئی، مرجع [3-8] از مراجع همین فصل است.

همانطور که در این فصل اشاره شده است، بسیاری از سیستم‌های صنعتی را می‌توان به صورت توابع تبدیل مرتبه دوم و یا مرتبه اول نمایش داد. یک راه ساده سازی مدل یک سیستم مرتبه بالاتر، تعیین قطبهای غالب و غیر غالب و حذف قطبهای غیر غالب آن می‌باشد. در مراجع [3] و [4]، بطور مختصر ساده سازی سیستم‌ها مورد بحث قرار گرفته است. برای بررسی بیشتر می‌توان به مراجع [3-9] و [3-10] همین فصل مراجع کرد. در ارتباط با مشخصه‌های پاسخ گذرای سیستم‌های مرتبه دوم مانند زمان صعود به مرجع [25] نیز مراجعه نمایید.

اگر سیستمی دارای صفر ناپایدار باشد آنرا، غیر می‌نیم فاز نامیده و رفتار حالت گذرای آن با یک سیستم می‌نیم فاز (سیستمی که تمامی صفرهای آن پایدار می‌باشند) متفاوت است. این پدیده در مرجع [3-11] مفصلاً مورد بررسی قرار گرفته است. بررسی پاسخ سیستم‌های فیزیکی به‌طور مفصل در [3-2] آمده است.

بکارگیری فیدبک برای کاهش اثر اغتشاشات خارجی و حساسیت بخوبی در [2]، [4]، [5]، [12] و [25] بحث شده است. برای بررسی بیشتر حساسیت در سیستم‌های کنترل به مرجع [3-1] همین فصل مراجعه شود.

خطاها در تحلیل سیستم کنترل نقش مهمی دارند و به همین دلیل در تمامی کتابهای کنترل کلاسیک، مفصلاً مورد بحث قرار گرفته‌اند. نکته قابل توجه این است که خطای حالت ماندگار

در سیستم‌های کنترل با فیدبک غیر واحد خطای بین خروجی سیستم و ورودی مرجع است و در برخی از منابع کنترل کلاسیک خطای بین خروجی بلوک در مسیر فیدبک و ورودی مرجع به عنوان خطای تلقی گردیده است. در این کتاب و اکثریت کتابهای کنترل کلاسیک حالت اول در نظر گرفته شده است، لیکن در مراجعی مانند [5] حالت دوم در نظر گرفته شده است. برای مطالعه بیشتر در مورد خطای سیستم‌های کنترل با فیدبک غیر واحد به مرجع [1] مراجعه شود هم‌چنین در [25] این نکته در تعریف خطا مورد بحث قرار گرفته است و تأثیر آن بر روی تعریف نوع سیستم و خطای حالت ماندگار آورده شده است. نوع سیستم در این مرجع به خوبی تعریف و برای ردیابی و ورودیهای اغتشاشی تعریف شده است.

بررسی پایداری به روشهای مختلفی امکان‌پذیر است. علاوه بر روش روث و هروتیز می‌توان از روش کسرهای متوالی<sup>۱</sup> نیز نامبرد. این روش در مرجع [6] آمده است. برای برخورد با حالت خاص اولین عنصر در یک سطر از آرایه روث می‌توان از روش  $\epsilon$  استفاده کرد، که در مراجع [3] و [4] آمده است. توجه کنید که روش  $\epsilon$  در مواجهه با معادلاتی که ریشه‌های موهومی محض دارند ممکن است که پاسخ درستی ندهد. روش روث برای پایداری در مراجع [3-3]، [3-5]، [3-6]، [3-7] مفصلاً بحث شده است. برای بررسی کلی‌تر پایداری به مرجع [3-4] همین فصل مراجعه شود. اثبات ریاضی روشهای روث و هروتیز در مرجع [3-12] آمده است.