۵

تحلیل پاسخ فرکانسی

اهداف فصل:

۱ـ آشنایی با ایده تحلیل پاسخ فرکانسی سیستم‌های خطی

۲ـ رسم مشخصه‌های پاسخ فرکانسی تابع تبدیل به صورت نمودارهای دامنه و فاز برحسب فرکانس: دیاگرام بود

۳ـ دیاگرام بود توابع تبدیل سیستم‌های خطی

۴ـ آشنایی با سیستم‌های غیر می‌نیمم فاز و سیستم‌های تأخیردار

۵ـ کاربرد دیاگرام‌های بود در شناسایی توابع تبدیل سیستم‌های نامعلوم

۶ـ نمودارهای نایکوئیست: نمودار دامنه برحسب زاویه فاز

۷ـ نمودارهای نایکوئیست سیستم‌های نوع صفر، یک و دو

۸ـ تحلیل پایداری سیستم‌های خطی با نمودارهای نایکوئیست: معیار پایداری نایکوئیست

۹ـ نمودارهای معکوس نایکوئیست و معیار پایداری

۱۰ـ حاشیه بهره و حاشیه فاز در نمودارهای نایکوئیست

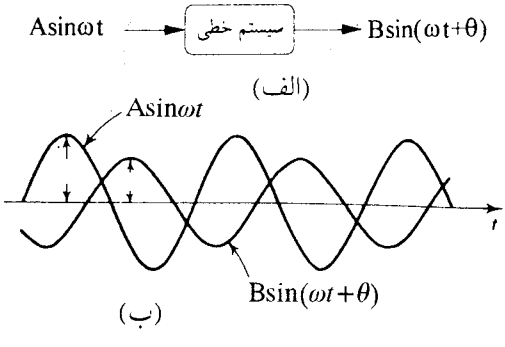
۱۱ـ چارت نیکولز و پاسخ فرکانسی سیستم حلقه ـ بسته

۱۲ـ مشخصه‌های عملکرد سیستم براساس پاسخ فرکانسی

۱ـ۵ مقدمه

در بررسی سیستم‌های کنترل خطی به روش کلاسیک، دو شیوه اساسی برای تحلیل و بهبود عملکرد سیستم وجود دارد که بدون حل معادلات دیفرانسیل حاکم بر سیستم عمل می‌کنند. یکی از این روشها مکان ریشه است که در فصل چهارم مفصلاً ارایه گردید. تحلیل و طراحی سیستم کنترل در روش مکان ریشه، با بررسی رفتار ریشه‌های حلقه ـ بسته در صفحه s در پاسخ به تغییر پارامتری در سیستم انجام می‌پذیرد. این پارامتر همانطور که در فصل قبل مشاهده شد، عموماً بهره سیستم حلقه ـ باز است، لیکن هر پارامتر دیگری از سیستم نیز می‌تواند باشد. تحلیل پاسخ فرکانسی[1] روش دیگری است که در این فصل به بررسی آن خواهیم پرداخت. در تحلیل پاسخ فرکانسی برخلاف مکان ریشه، بهره سیستم و سایر پارامترهای آن ثابت فرض شده، تغییرات دامنه[2] و فاز[3] تابع تبدیل $G(s)$ در پاسخ به تغییرات قطبهای تابع تبدیل در نظر گرفته می‌شود.

توجه کنید که هر قطب در صفحه s از یک قسمت حقیقی و یک قسمت موهومی تشکیل می‌شود، به عبارت دیگر $s=\sigma+j\omega$ و یک حالت بسیار مهم هنگامی است که $\sigma=0$ و یا $s=j\omega$. همانطور که از شکل ۵-۱ (الف) و (ب) مشاهده می‌شود و از تئوری سیستم‌های خطی می‌دانیم، پاسخ یک سیستم خطی پایدار به ورودی سینوسی $u(t)=A\sin\omega t$ که در آن A اندازه ورودی است، خود نیز سینوسی است. به عبارت دیگر، $y(t)=B\sin(\omega t+\theta)$ که در



شکل ۵-۱ (الف) سیستم خطی (ب) سیگنال‌های ورودی و خروجی

1- Frequency response
2- Magnitude
3- Phase

آن B اندازه خروجی است و θ نیز اختلاف فاز بین سیگنال‌های ورودی و خروجی می‌باشد. برای نشان دادن این مطلب، سیستم خطی در نظر گرفته شده را با تابع تبدیل $G(s)$ نشان دهید.

پاسخ حالت ـ ماندگار یک سیستم خطی پایدار تغییر ناپذیر با زمان به ورودی سینوسی، به شرایط اوّلیه بستگی ندارد و از اینرو می‌توان شرایط اولیه سیستم را صفر فرض کرد (به فصل دوم مراجعه شود). تبدیل لاپلاس سیگنال ورودی $u(t)=A\sin\omega t$ برابر است با

$$U(s)=\mathcal{L}\left(u(t)\right)=\frac{\omega A}{s^2+\omega^2} \qquad (۵-۱-۱)$$

و لذا تبدیل لاپلاس خروجی عبارتست از

$$Y(s)=G(s)\frac{\omega A}{s^2+\omega^2} \qquad (۵-۱-۲)$$

دو حالت را می‌توان برای $Y(s)$ در نظر گرفت. در حالت اول قطبهای $Y(s)$ متمایز و در حالت دوم قطبهای $Y(s)$ قطبهای مکرر را نیز شامل می‌شوند. این دو حالت را به طور جداگانه بررسی می‌کنیم.

حالت اول: اگر قطبهای $Y(s)$ متمایز باشند، معادله (۵-۱-۲) را می‌توان بدین صورت نوشت

$$Y(s)=\frac{b(s)}{(s+p_1)(s+p_2)\ldots(s+p_n)}\frac{\omega A}{s^2+\omega^2} \qquad (۵-۱-۳)$$

که در آن $b(s)$ چند جمله‌ای صفر تابع تبدیل و p_i $(i=1,\ldots,n)$ قطبهای $G(s)$ هستند.

بسط کسرهای جزیی معادله (۵-۱-۳) خواهد داد

$$Y(s)=\frac{a}{s+j\omega}+\frac{\bar{a}}{s-j\omega}+\frac{b_1}{s+p_1}+\frac{b_2}{s+p_2}+\ldots+\frac{b_n}{s+p_n} \qquad (۵-۱-۴)$$

که در آن a و b_i $(i=1,\ldots,n)$ ثابتهای مناسب و $\bar{a}$ مختلط مزدوج a است. دقت کنید که دو عبارت اول سمت راست معادله (۵-۱-۴) از ورودی و عبارات باقی مانده از تابع تبدیل سیستم بدست آورده شده‌اند. با گرفتن عکس تبدیل لاپلاس از معادله (۵-۱-۴)، برای $t\geq 0$ بدست می‌آوریم

$$y(t)=ae^{-j\omega t}+\bar{a}e^{j\omega t}+b_1e^{-p_1t}+b_2e^{-p_2t}+\ldots+b_ne^{-p_nt} \qquad (۵-۱-۵)$$

برای یک سیستم پایدار قطبهای $-p_i$ $(i=۱,...,n)$ قسمت‌های حقیقی منفی خواهند داشت. بنابراین با میل کردن t به سمت بی‌نهایت، عبارات $e^{-p_i t}$ $(i=۱,...,n)$ به سمت صفر میل خواهند کرد. لذا، کلیه عبارات در معادله (۵-۱-۵) بجز دو عبارات اول در حالت ـ ماندگار صفر خواهند شد.

حالت دوم: اگر $G(s)$ علاوه بر قطبهای متمایز قطبهای مکرر نیز داشته باشد. این قطبها را با p_j نشان داده و با تعدد[1] m_j فرض می‌کنیم. دراین صورت با عکس تبدیل لاپلاس از

$$Y(s)=\frac{b(s)}{(s+p_۱)...(s+p_j)^{m_j}...(s+p_n)}\frac{\omega A}{s^۲+\omega^۲} \qquad (۶-۱-۵)$$

$y(t)$ شامل عباراتی مانند $t^{h_j}e^{-p_j t}$ خواهد بود، که در آن $h_j=۰,۱,...,m_j-۱$. برای یک سیستم پایدار عبارات $t^{h_j}e^{-p_j t}$ به ازاء t به سمت بی‌نهایت، به سمت صفر میل خواهند کرد.

از بررسی دو حالت ۱ و ۲ در می‌یابیم که در هر دو حالت، پاسخ حالت ـ ماندگار به صورت زیر خواهد بود:

$$y_{ss}(t)=ae^{-j\omega t}+\bar{a}e^{j\omega t} \qquad (۷-۱-۵)$$

که در آن ثابت a را از معادله (۵-۱-۴) بدین صورت تعیین می‌کنیم

$$a=G(s)\frac{\omega A}{s^۲+\omega^۲}(s+j\omega)\Big|_{s=-j\omega}=-\frac{AG(-j\omega)}{۲j} \qquad (۸-۱-۵)$$

و هم‌چنین

$$\bar{a}=G(s)\frac{\omega A}{s^۲+\omega^۲}(s-j\omega)\Big|_{s=j\omega}=\frac{AG(j\omega)}{۲j} \qquad (۹-۱-۵)$$

از آنجاییکه $G(j\omega)$ یک کمیّت مختلط است، می‌توان آنرا به صورت قطبی زیر نوشت

$$G(j\omega)=|G(j\omega)|e^{j\theta} \qquad (۱۰-۱-۵)$$

که در آن $|G(j\omega)|$ نشان دهنده دامنه $G(j\omega)$ و θ نشان دهنده زاویه $G(j\omega)$ است.

1- Multiplicity

به عبارت دیگر

$$\theta = \angle G(j\omega) = \tan^{-1}\left[\frac{\text{قسمت موهومی } G(j\omega)}{\text{قسمت حقیقی } G(j\omega)}\right] \qquad (۵-۱-۱۱)$$

توجه کنید که θ می‌تواند منفی، مثبت و یا صفر باشد. هم چنین

$$G(j\omega) = |G(j\omega)|\, e^{-j\theta} = |G(j\omega)|\, e^{-j\theta} \qquad (۵-۱-۱۲)$$

از معادله‌های (۵-۱-۷)، (۵-۱-۸)، (۵-۱-۹)، (۵-۱-۱۰) و (۵-۱-۱۲) بدست می‌آوریم

$$\begin{aligned} y_{ss}(t) &= A\,|G(j\omega)|\,\frac{e^{j(\omega t+\theta)} - e^{-j(\omega t+\theta)}}{2j} \\ &= A\,|G(j\omega)|\,\sin(\omega t+\theta) \\ &= B\sin(\omega t+\theta) \end{aligned} \qquad (۵-۱-۱۳)$$

که در آن $B = A|G(j\omega)|$.

بنابراین یک سیستم خطی تغییر ناپذیر با زمان پایدار تحت ورودی سینوسی، در حالت ماندگار نیز یک خروجی سینوسی با همان فرکانس دارد و تنها در حالت کلی دامنه و فاز سیگنال خروجی با دامنه و فاز سیگنال ورودی تفاوت خواهند داشت. در واقع دامنه خروجی برابر با حاصلضرب دامنهٔ سیگنال ورودی A و اندازهٔ تابع تبدیل $|G(j\omega)|$ است و اختلاف زاویه فاز سیگنال ورودی و خروجی برابر با $\theta = \angle G(j\omega)$ می‌باشد. (به شکل ۵-۱ مراجعه کنید.)

به خروجی سیستم در این حالت پاسخ فرکانسی و به تابع $G(j\omega)$ تابع تبدیل سینوسی[1] گفته می‌شود. توجه کنید که برای ورودیهای سینوسی داریم

$$|G(j\omega)| = \frac{B}{A} = \text{نسبت دامنه خروجی سینوسی به ورودی سینوسی}$$

$$\angle G(j\omega) = \text{انتقال فاز خروجی سینوسی نسبت به ورودی سینوسی}$$

مثال ۵-۱

تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید

$$G(s) = \frac{3}{s+2}$$

1- Sinusoidal transfer function

تابع تبدیل سینوسی و پاسخ فرکانسی این سیستم با جایگزینی s با $j\omega$ بدست خواهد آمد. لذا

$$G(j\omega) = \frac{۳}{j\omega + ۲}$$

بنابراین

$$|G(j\omega)| = \frac{۳}{(\omega^۲ + ۴)^{۱/۲}} \quad , \quad \angle G(j\omega) = -tan^{-۱}\left[\frac{\omega}{۲}\right]$$

داده‌های پاسخ فرکانسی این سیستم در جدول ۵-۱ نشان داده شده‌اند.

جدول ۵-۱ داده‌های پاسخ فرکانسی سیستم مثال ۵-۱

فرکانس ω	دامنه $\|G(j\omega)\|$	زاویه $\angle G(j\omega)$
۰	۱/۵	۰
۲	۱/۰۶۱	-۴۵°
۱۰	۰/۲۹۴	-۷۸/۷°
∞	۰	-۹۰°

تحلیل حوزه فرکانسی سیستم‌های خطی را می‌توان توسط روشهای زیر اعمال کرد:

۱ـ دیاگرام‌های بود

۲ـ نمودارهای نایکوئیست (یا قطبی)

۳ـ چارت نیکولز

در بخشهای بعد به توضیح تفصیلی این روشها خواهیم پرداخت.

۵-۲ دیاگرام‌های بود

هنگامی که دامنه ورودی یک سیستم خطی تغییر ناپذیر با زمان پایدار به صورت سینوسی با زمان تغییر می‌کند، خروجی آن نیز در حالت ـ ماندگار به صورت سینوسی است. دامنه آن ضریبی از دامنه سیگنال ورودی است و ممکن است که اختلاف فازی وجود داشته باشد. اگر دامنه سیگنال ورودی ثابت نگه داشته شده باشد، دامنه و بهره خروجی و هم چنین اختلاف فاز آن را می‌توان برای گستره‌ای از مقادیر فرکانسی پیدا کرد. از مقادیر بدست آمده دامنه و اختلاف فاز بر حسب فرکانس می‌توان دو نمودار رسم کرد. بدین ترتیب می‌توان

مشخصه‌های تابع تبدیل سیستم را بر حسب پاسخ فرکانسی آن به صورت دو نمودار، یکی دامنه برحسب فرکانس و دیگری فاز برحسب فرکانس تعیین نمود.

همانطور که خواهیم دید، روش بهتر و بسیار سریعتر رسم نمودارهای دامنه و یا فاز بر حسب فرکانس، استفاده از مقادیر لگاریتمی دامنه و رسم این نمودارها بر حسب لگاریتم فرکانس است. بکارگیری لگاریتم، ضرب و تقسیم عوامل را به جمع و تقسیم تبدیل می‌کند. به عبارت دیگر

$$\log ab=\log a+\log b$$

$$\log \frac{a}{b}=\log a-\log b$$

هم چنین داریم

$$\log a^x=x \log a$$

ایده بکارگیری این روش تحلیل پاسخ فرکانسی، نخستین بار توسط مهندسی بنام بود[1] در طراحی آمپلی فایرهای فیدبک مطرح گردید. بود با بکارگیری مقدار لگاریتمی دامنه بر روی یک مقیاس خطی و رسم آن بر حسب مقیاس غیر خطی لگاریتمی فرکانس، طراحیهای خود را انجام داد. این نمودارهای پاسخ فرکانسی را، هنگامی که با نمودارهای متناظر اختلاف فاز بر روی یک محور خطی بر حسب لگاریتم فرکانس ترکیب شوند *نمودارهای بود*[2] می‌نامند.

نمودارهای بود و یا به عبارت دیگر نمودارهای دامنه و فاز بر حسب لگاریتم فرکانس، بر روی کاغذهای نیمه لگاریتمی[3] کشیده می‌شوند. در واقع محور عمودی دامنه یا فاز، به صورت خطی مقیاس بندی شده است و حال آنکه محور افقی به صورت غیر خطی با مقیاس لگاریتم فرکانس رسم شده است. بدین ترتیب می‌توان از گسترهٔ فرکانسی بسیار وسیعتری نسبت به مقیاس خطی برای نمایش پاسخ فرکانسی استفاده کرد. از اینرو فرکانس‌های پایین‌تر نیز دقیقتر و واضح‌تر نمایش داده می‌شوند.

تابع تبدیل یک سیستم خطی یک تابع مختلط است و می‌توان آنرا در مختصات قطبی بر حسب دامنه و فاز به صورت زیر نشان داد

$$G(j\omega)=|G(j\omega)|\angle G(j\omega) \qquad (۱-۲-۵)$$

1- W. Bode

2- Bode plots

3- Semilog papers

که در آن سیگنال ورودی، سینوسی با فرکانس ω رادیان بر ثانیه است. اگر از معادله (۵-۲-۱) لگاریتم در مبنای ۱۰ گرفته شود داریم:

$$\begin{aligned} log\,G(j\omega) &= log\mid G(j\omega)\mid e^{j\angle G(j\omega)} \\ &= log\mid G(j\omega)\mid + log\, e^{j\angle G(j\omega)} \\ &= log\mid G(j\omega)\mid + log_{10} e\, log_e e^{j\angle G(j\omega)} \\ &= log\mid G(j\omega)\mid + j\,0/434\angle G(j\omega) \end{aligned} \qquad (۵-۲-۲)$$

(در استنتاج معادله (۵-۲-۲) از معادله ما قبل خود از رابطه $log_{10}x = log_{10}e.log_e x$ استفاده شده است.) بنابراین از معادله (۵-۲-۲) داریم که قسمت حقیقی لگاریتم تابع تبدیل، لگاریتم دامنه، $log|G(j\omega)|$، و قسمت موهومی آن متناسب با زاویه $\angle G(j\omega)$ است. در رسم نمودارهای بود از فاکتور ۰/۴۳۴ صرفنظر و تنها زاویه $\angle G(j\omega)$ در نظر گرفته می‌شود.

در تحلیل پاسخ فرکانسی، واحدی را که عموماً برای لگاریتم دامنه بکار می‌گیریم، دسی دبل[1] است. توجه کنید که تابع تبدیل، نسبت خروجی به ورودی سیستم است و متغیرهای خروجی و ورودی لزوماً از یک واحد نمی‌باشند. برای مثال خروجی ممکن است بر حسب رادیان بر ثانیه و ورودی برحسب ولت باشد. لگاریتم دامنهٔ یک تابع تبدیل $G(j\omega)$ که بر حسب دسی‌دبل بیان شده، عبارتست از

$$20log\mid G(j\omega)\mid dB$$

این کمیّت لگاریتم دامنه[2] نامیده شده و با Lm نشان داده می‌شود. بنابراین

$$LmG(j\omega) = 20log\mid G(j\omega)\mid dB \qquad (۳-۲-۵)$$

از آنجاییکه تابع تبدیل تابعی از فرکانس است، لگاریتم دامنه نیز تابعی از فرکانس است.

دو واحدی که برای بیان باندهای فرکانسی یا نسبتهای فرکانسی استفاده می‌شوند، اکتاو[3] و دهه[4] هستند. اکتاو یک باند فرکانسی از f_1 تا f_2 است، که در آن $f_2 = 2f_1$. بنابراین باند فرکانسی از ۱ تا ۲ هرتز یک اکتاو در طول است و همچنین باند فرکانسی از ۱۱/۲ تا ۳۴/۴ نیز یک اکتاو در طول است. تعداد اکتاوها در یک گستره فرکانسی از f_1 تا f_2 برابر است با

1- Decibel
2- Log magnitude
3- Octave
4- Decade

$$\frac{log(f_2/f_1)}{log 2} = 3/22 log \frac{f_2}{f_1} \qquad (۴-۲-۵)$$

اگر نسبت f_2 به f_1 برابر با ۱۰ باشد، یعنی $f_2/f_1 = 10$، آنگاه افزایشی برابر با ۱ دهه از f_1 به f_2 خواهیم داشت. باند فرکانسی از ۱ تا ۱۰ یا ۱/۵ تا ۱۵ یک دهه طول دارد. تعداد دهه‌ها از f_1 به f_2 بدین صورت داده می‌شوند

$$log \frac{f_2}{f_1}$$

جدول ۵-۲ مقادیر دسی‌بل بعضی از اعداد را نشان می‌دهد. توجه کنید که برای یک عدد داده شده، مقدار دسی‌بل معکوس آن در یک منفی ضرب می‌شود. هم چنین اگر یک عدد دو برابر شود مقدار دسی‌بل آن ۶/۰۲dB افزایش پیدا می‌کند و اگر یک عدد در فاکتور ۱۰ ضرب شود مقدار دسی‌بل آن با ۲۰dB افزایش پیدا می‌کند.

جدول ۵-۲ مقدار دسی‌بل چند عدد

عدد	دسی‌بل
۰/۰۱	-۴۰
۰/۱	-۲۰
۰/۵	-۶/۰۲
۱/۰	۰
۲/۰	۶/۰۲
۱۰/۰	۲۰
۱۰۰/۰	۴۰
۲۰۰/۰	۴۶/۰۲

تابع تبدیل پاسخ فرکانسی یک سیستم را در حالت کلی می‌توان به صورت زیر نوشت

$$G(j\omega) = \frac{k(j\omega + z_1)(j\omega + z_2)^2 \cdots}{(j\omega)^m (j\omega + p_1)[1 + (2\xi/\omega_n)j\omega + (1/\omega_n^2)(j\omega)^2] \cdots} \qquad (۵-۲-۵)$$

که در آن k بهره ثابت، z_i صفرها (r تعداد صفر z_2) و p_i قطبهای تابع تبدیل سیستم هستند. با گرفتن لگاریتم از طرفین معادله (۵-۲-۵)، داریم

$$\log G(j\omega)=\log k+\log(j\omega+z_1)+r\log(j\omega+z_2)+\ldots-m\log(j\omega)$$
$$\log(j\omega+p_1)-\log\left[1+(2\xi/\omega_n)j\omega+(1/\omega_n^2)(j\omega)^2\right]-\ldots \qquad (۶-۲-۵)$$

هر کدام از عبارات معادله (۵-۲-۶) را می‌توان به صورت یک عبارت مختلط نوشت که در آن یک قسمت حقیقی و یک قسمت موهومی وجود دارد. برای مثال

$$\log(j\omega+z_1)=\log(\omega^2+z_1^2)^{1/2}+j\angle(j\omega+z_1)$$
$$=\log(\omega^2+z_1^2)^{1/2}+j\tan^{-1}\frac{\omega}{z_1} \qquad (۷-۲-۵)$$

همانند معادله (۵-۲-۷)، لگاریتم تابع تبدیل از معادله (۵-۲-۶) را می‌توان به صورت یک عبارت مختلط نوشت. در واقع دو دسته مختلف معادلات برای لگاریتم دامنه و فاز خواهیم داشت:

$$\mathrm{Lm}G(j\omega)=\mathrm{Lm}k+\mathrm{Lm}(j\omega+z_1)+r\mathrm{Lm}(j\omega+z_2)+\ldots$$
$$-\mathrm{Lm}(j\omega+p_1)-\mathrm{Lm}\left[1+(2\xi/\omega_n)j\omega+(1/\omega_n^2)(j\omega)^2\right]-\ldots \qquad (۸-۲-۵)$$

$$\angle G(j\omega)=\angle k+\angle(j\omega+z_1)+r\angle(j\omega+z_2)+\ldots-m\angle(j\omega)$$
$$\angle(j\omega+p_1)\ \angle\left[1+(2\xi/\omega_n)j\omega+(1/\omega_n^2)(j\omega)^2\right]+\ldots$$
$$=\angle k+\tan^{-1}\frac{\omega}{z_1}+r\tan^{-1}\frac{\omega}{z_2}+\ldots-m90^\circ-\tan^{-1}\frac{\omega}{p_1}$$
$$\tan^{-1}\frac{2\xi\omega/\omega_n}{1-\omega^2/\omega_n^2}\ \ldots \qquad (۹-۲-۵)$$

چون k یک عدد حقیقی است و لذا می‌تواند مثبت و یا منفی باشد. اگر k مثبت باشد زاویه آن 0° و در غیر اینصورت 180° خواهد بود. برای رسم دیاگرام بود باید معادله‌های (۲-۵-۸) و (۲-۵-۹) را برای گسترهٔ فرکانسی مطلوب بدست آورد.

۵-۲-۱ ترسیم نمودارهای بود

با توجه به معادله (۵-۲-۵)، به طور کلی چهار عامل در مخرج و صورت یک تابع تبدیل حضور دارد که برای رسم کامل نمودار بود باید نمودار دامنه و فاز برحسب لگاریتم فرکانس هر کدام از این عوامل را رسم کرد و سپس با جمع و یا تفریق این عوامل، نمودار بود کامل تابع تبدیل سیستم را ترسیم نمود. این چهار عامل عبارتند از:

$$k$$
$$(j\omega)^{\pm m}$$
$$(1+j\omega T)^{\pm r}$$
$$\left[1+\frac{2\xi}{\omega_n}j\omega+\frac{1}{\omega_n^2}(j\omega)^2\right]^{\pm p}$$

توجه کنید که عبارات شامل صفر و قطب به صورت $(j\omega+z_i)$ و $(j\omega+p_i)$ در معادله (۵-۲-۵) را می‌توان به صورت $z_i(1+j\omega/z_i)$ و $p_i(1+j\omega/p_i)$ و یا در حالت کلی $(1+j\omega T)$ نوشت. در واقع این تغییر در نوشتن عبارات صفرها و قطبها، رسم نمودار بود را ساده‌تر خواهد کرد ولی باید توجه داشت که بهره k نیز تغییر می‌کند و لذا تغییر بهره قبل از رسم نمودار بود الزامی است.

نمودار بود برای بهره ثابت

بهره ثابت k در تابع تبدیل $G(j\omega)$ بهره یا حاصلضرب بهره‌های یک یا چند بلوک توابع تبدیل سیستم است. در واقع بهره k یک عدد مختلط با قسمت موهومی صفر است.

مثال ۵-۲

تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید

$$G(s)=k$$

نمودار بود تابع تبدیل را برای (الف) $k=0$، (ب) $k=-10$ و (ج) $k=0/1$ رسم کنید.

نخست $s=j\omega$ را در تابع تبدیل داده شده جایگزین می‌کنیم و سپس معادله‌های دامنه و زاویه فاز را بدست می‌آوریم. داریم

$$G(j\omega)=k$$

و لذا

$$\mathrm{LmG(j}\omega)=۲۰log_{۱۰}k$$

هم چنین

$$\angle \mathrm{G(j}\omega)=tan^{-۱}\frac{۰}{k}$$

(الف) برای $k=۱۰$ داریم

$$\mathrm{LmG(j}\omega)=۲۰\mathrm{dB}\quad,\quad \angle \mathrm{G\,(j}\omega)=tan^{-۱}\frac{۰}{۱۰}=۰$$

بنابراین نمودار دامنه یک خط افقی ۲۰dB و نمودار زاویه فاز یک خط افقی $^{\circ}۰$ است. دیاگرام بود این سیستم در شکل ۵-۲ نشان داده شده است. توجه کنید که محور لگاریتمی افقی برای فرکانس ω برحسب رادیان بر ثانیه، و محور عمودی برای دامنه برحسب دسی‌بل، در شکل ۵-۲ (الف) و برای زاویه فاز برحسب درجه، در شکل ۵-۲ (ب) استفاده شده است. بنابراین نمودار بود در یک کاغذ نیمه لگاریتمی رسم شده است. مقیاس خطی عمودی برای به ترتیب دامنه و زاویه فاز در شکلهای ۵-۲ (الف) و (ب) و مقیاسی غیرخطی افقی برای فرکانس علامتگذاری شده‌اند.

(ب) برای $k=-۱۰$ داریم

$$\mathrm{LmG(j}\omega)=۲۰\mathrm{dB}\quad,\quad \angle \mathrm{G(j}\omega)=tan^{-۱}\frac{۰}{-۱۰^{\circ}}=-۱۸۰^{\circ}$$

دیاگرام بود این سیستم نیز در شکل ۵-۲ نشان داده شده است.

(ج) برای $k=۰/۱$ داریم

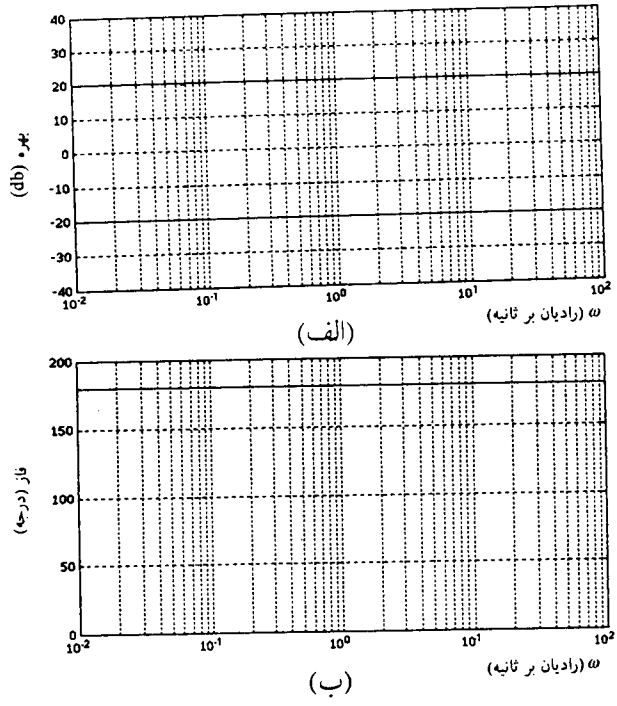
$$\mathrm{LmG(j}\omega)=۲۰log۰/۱=۲۰log_{۱۰}\frac{۱}{۱۰}=-۲۰\mathrm{dB}\quad,\quad \angle \mathrm{G(j}\omega)=tan^{-۱}\frac{۰}{۰/۱}=۰$$

دیاگرام بود این سیستم نیز در شکل ۵-۲ نشان داده شده است.

نمودارهای بود قطب ـ صفر در مبداء صفحه s: $(s)^{\pm n}$

تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید

$$\mathrm{G}(s)=(s)^{\pm ۱}$$



شکل ۵-۲ دیاگرام بود سیستم مثال ۵-۲ (الف) نمودار دامنه (ب) نمودار فاز

مثالهای ۵-۳ و ۵-۴ مراحل رسم نمودارهای بود را به ترتیب برای تابع تبدیل با یک صفر و قطب در مبداء صفحه s نشان می‌دهند.

مثال ۵-۳

تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید

$$G(s)=s$$

نمودار بود این تابع تبدیل را رسم کنید.

نخست $s=j\omega$ را در تابع تبدیل جایگزین کنید

$$G(j\omega)=j\omega$$

و لذا

$$\begin{aligned} LmG(j\omega) &= ۲۰log_{۱۰} \mid G(j\omega) \mid \\ &= ۲۰log_{۱۰} \mid j\omega \mid \\ &= ۲۰log_{۱۰}\omega \end{aligned}$$

هم چنین

$$\angle G(j\omega)=tan^{-1}\frac{\omega}{0}=90$$

با استفاده از رابطه‌های بدست آمده برای لگاریتم دامنه و زاویه فاز، می‌توان جدول ۵-۳ را برای مقادیر مختلفی از فرکانس‌های ω تشکیل داد. از جدول ۵-۳ به خوبی مشاهده می‌گردد که با افزایش ω از ۱ به ۲ یا ۲ به ۴ یا ۴ به ۸، 6dB افزایش در لگاریتم دامنه داریم. بنابراین دامنه با نرخ 6db براکتاو افزایش دارد. به طور مشابهی، اگر ω یک دهه افزایش داشته باشد، لگاریتم دامنه مقدار ۲۰dB افزایش نشان می‌دهد. به عبارت دیگر، دامنه با نرخ ۲۰db بر دهه افزایش دارد. شکل ۵-۳ دیاگرام بود این تابع تبدیل را نشان می‌دهد که با استفاده از جدول ۵-۳ رسم شده است.

مثال ۵-۴

تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید

$$G(s)=\frac{1}{s}$$

نمودار بود این تابع تبدیل را رسم کنید.

جدول ۵-۳ داده‌های مثال ۵-۳

فرکانس (رادیان بر ثانیه)	دامنه (dB)	زاویه فاز (درجه)
۰/۰۱	-۴۰	۹۰
۰/۰۱	-۳۳/۹۸	۹۰
۰/۰۵	-۲۶/۰۲	۹۰
۰/۱	-۲۰	۹۰
۰/۲	-۱۳/۹۸	۹۰
۰/۵	-۶/۰۲	۹۰
۱/۰	۰/۰	۹۰
۲/۰	۶/۰۲	۹۰
۴/۰	۱۲/۰۴	۹۰
۱۰/۰	۲۰/۰	۹۰
۲۰/۰	۲۶/۰۲	۹۰
۴۰/۰	۳۲/۰۴	۹۰
۱۰۰/۰	۴۰	۹۰

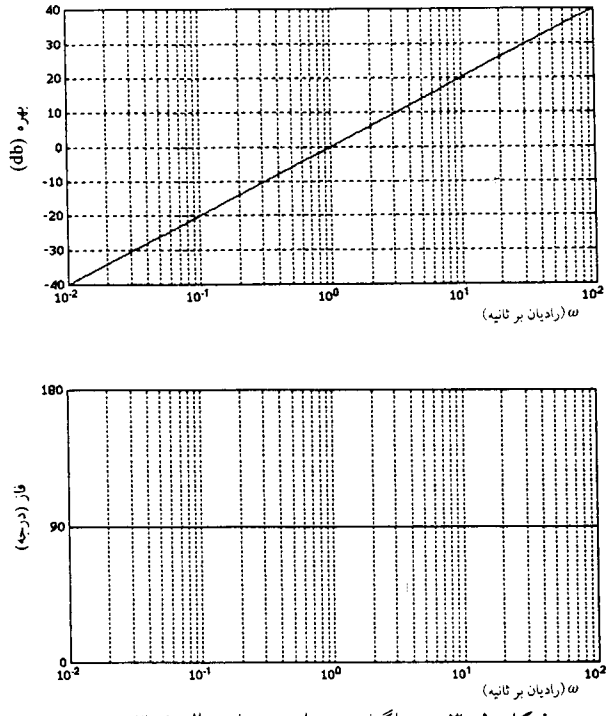
نخست $s=j\omega$ را در تابع تبدیل جایگزین کنید

$$G(j\omega)=\frac{۱}{j\omega}$$

و لذا

$$LmG(j\omega)=۲۰log_{۱۰}\mid G(j\omega)\mid$$

$$=۲۰log_{۱۰}\left|\frac{۱}{j\omega}\right|=-۲۰log\omega$$



شکل ۵-۳ دیاگرام بود تابع تبدیل مثال ۵-۳

هم چنین

$$\angle G(j\omega)=-tan^{-۱}\frac{۱/\omega}{۰}$$

$$=-۹۰$$

جدول ۵-۴ با بکارگیری معادله‌های بدست آمده لگاریتم دامنه و فاز تابع تبدیل برای فرکانس‌های مختلف ω تشکیل شده است. شکل ۵-۴ دیاگرام بود این تابع تبدیل را نشان

می‌دهد که با استفاده از داده‌های جدول ۵-۴ رسم شده است.

شکلهای ۵-۳ و ۵-۴ به وضوح نشان می‌دهند که دامنه تابع تبدیل با صفر در مبداء صفحه s و قطب در مبداء صفحه s به ترتیب با نرخ ۲۰ dB بر دهه *افزایش* و با نرخ ۲۰ dB بر دهه *کاهش* خواهد داشت. این افزایش و کاهش، مشخصه‌های صفر و قطب در مبداء می‌باشند.

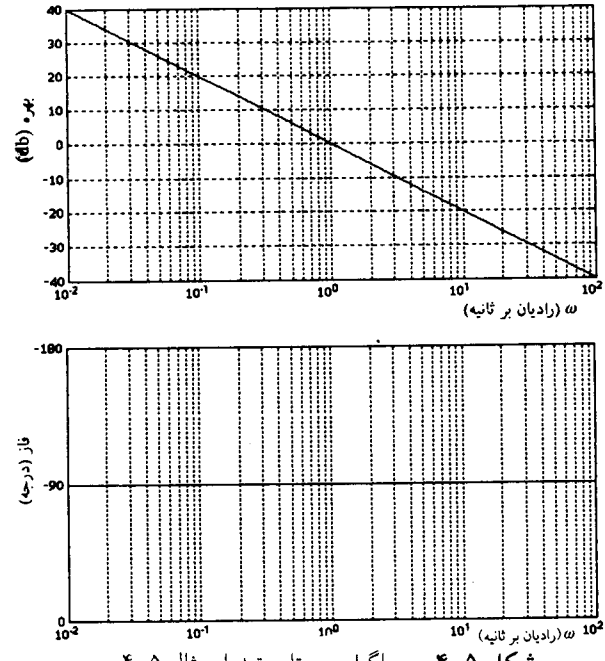
مفاهیم بالا را می‌توان به سادگی به حالتهای قطب و یا صفرهای مکرر در مبداء صفحه s تعمیم داد. برای مثال اگر N صفر در مبداء داشته باشیم، شیب نمودار لگاریتم دامنه dB۲۰N بر دهه خواهد بود. به طور مشابهی، برای N قطب در مبداء صفحه s شیب نمودار دامنه dB -۲۰N بر دهه خواهد بود. شکل ۵-۵ نمودارهای دامنه و فاز را برای توابع تبدیل $(s)^{\pm 2}$ نشان می‌دهد.

نمودارهای بود صفر یا قطب حقیقی: $(1+sT)^{\pm 1}$

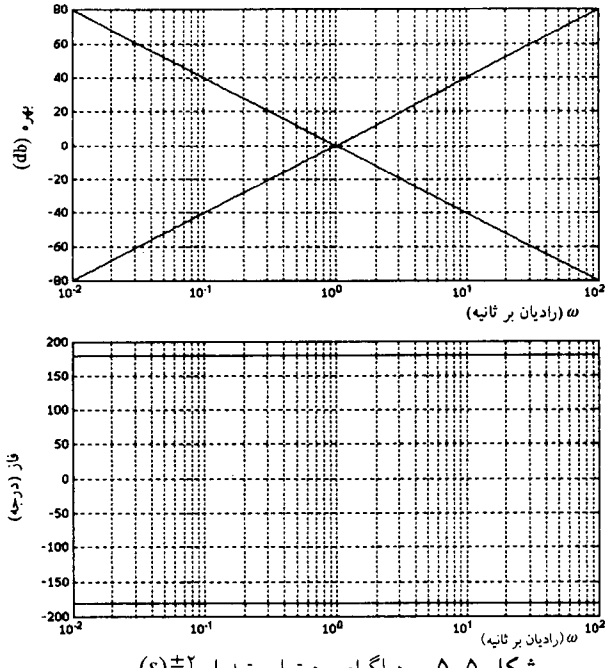
صفر یا قطب حقیقی به ترتیب به صورت $(1+sT)$ یا $(1+sT)^{-1}$ نوشته می‌شود. در مثالهای ۵-۵ و ۵-۶ نمودار بود یک صفر و قطب محدود را رسم خواهیم کرد.

جدول ۵-۴ داده‌های مثال ۵-۴

فرکانس (رادیان بر ثانیه)	دامنه (dB)	زاویه فاز (درجه)
۰/۰۱	۴۰	-۹۰
۰/۰۲	۳۳/۹۸	-۹۰
۰/۰۵	۲۶/۰۲	-۹۰
۰/۰۱	۲۰	-۹۰
۰/۲	۱۳/۹۸	-۹۰
۰/۵	۶/۰۲	-۹۰
۱/۰	۰/۰	-۹۰
۲	-۶/۰۲	-۹۰
۵	-۱۳/۹۸	-۹۰
۱۰	-۲۰	-۹۰
۲۰	-۲۶/۰۲	-۹۰
۵۰	-۳۳/۹۸	-۹۰
۱۰۰	-۴۰	-۹۰



شکل ۵-۴ دیاگرام بود تابع تبدیل مثال ۵-۴



شکل ۵-۵ دیاگرام بود توابع تبدیل $s^{\pm 2}$

مثال ۵-۵

تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید

$$G(s)H(s)=۱+sT$$

که در آن T ثابت زمانی سیستم است. نمودار بود این سیستم را برای T=۲ ثانیه رسم کنید.

برای رسم نمودار لگاریتم دامنه و فاز، معادله‌های زیر را تشکیل می‌دهیم

$$LmG(j\omega)H(j\omega)=۲۰log\mid ۱+j\omega۲\mid$$
$$=۲۰\log\sqrt{(۲\omega)^{۲}+۱}$$

و هم چنین

$$\angle G(j\omega)H(j\omega)=tan^{-۱}\frac{\omega T}{۱}=tan^{-۱}۲\omega$$

جدول ۵-۵ با جایگزینی مقادیر مختلف ω از معادله‌های بالا تشکیل شده است. توجه کنید که در فرکانس‌های پایین برای $\omega T<<۱$ داریم

$$LmG(j\omega)H(j\omega)\approx ۰dB \quad , \quad \angle G(j\omega)H(j\omega)\approx ۰^{\circ}$$

جدول ۵-۵ داده‌های مثال ۵-۵

فرکانس (رادیان بر ثانیه)	دامنه (dB)	زاویه فاز (درجه)
۰/۰۰۱	۰	۰/۱۱
۰/۰۰۵	۰	۰/۵۴
۰/۰۱	۰	۱/۱۴
۰/۰۷	۰	۷/۷۹
۰/۱	۰/۱۷	۱۱/۳
۰/۲	۰/۶۴	۲۱/۸
۰/۵	۳/۰۱	۴۵
۱	۶/۹۹	۶۳/۴
۲	۱۲/۳	۷۵/۹۶
۵	۲۰/۰۴	۸۴/۳
۱۰	۲۶/۰۳	۸۷/۱۴
۵۰	۳۲/۰۴	۸۸/۵۷
۱۰۰	۴۶	۸۹/۴

برای مثال در $\omega=۰/۰۲۵$ رادیان بر ثانیه داریم $\omega T=۰/۰۲۵(۲)=۰/۰۵<<۱$ و لذا

$$LmG(j\omega)H(j\omega)=۲۰log\sqrt{(۰/۰۵)^{۲}+۱}\approx ۰dB$$

و

$$\angle G(j\omega)H(j\omega)=tan^{-۱}۰/۰۵=۲/۸۶^{\circ}$$

یک مقدار مهم فرکانس ω هنگامی رخ می‌دهد که $\omega T=۱$ و یا $\omega=\frac{۱}{T}$ باشد، دامنه در این فرکانس عبارتست از

$$LmG(j\omega)H(j\omega)=۲۰log\sqrt{(۱)^{۲}+۱}=۳/۰۱dB$$

و

$$\angle G(j\omega)H(j\omega)=tan^{-۱}۱=۴۵^{\circ}$$

به فرکانس $\omega=۱/T$، فرکانس شکست[1] یا فرکانس گوشه[2] می‌گویند. فرکانس $\omega=۱/T$ را از آن جهت فرکانس شکست گویند که در این فرکانس شکستی در شیب منحنی دامنه، همانطور که در شکل ۵-۶ نشان داده شده است، رخ می‌دهد. هم چنین فرکانس $\omega=۱/T$ را به علت اینکه نمودار مجانبی دامنه در فرکانس $\omega=۱/T$ در گوشه دو خط راست است (شکل ۵-۶)، فرکانس گوشه نیز نامیده‌اند.

در فرکانس‌های بالا برای $\omega T>>۱$، لگاریتم اندازه با مقدار ω داده خواهد شد. (به جدول ۵-۵ مراجعه کنید.) همانطور که در شکل ۵-۶ نشان داده شده است بعد از فرکانس شکست $\omega=\frac{۱}{T}$، دامنه با افزایش ω با نرخ ۲۰ dB بر دهه افزایش خواهد داشت.

به طور خلاصه می‌توان گفت که برای $\omega\to ۰$، لگاریتم دامنه ۰ dB و برای $\omega\to\infty$ لگاریتم دامنه دارای شیبی برابر با ۲۰ dB بر دهه خواهد بود. به دو خط ۰dB و ۲۰ dB بر دهه مجانبهای نمودار بود گفته می‌شود و نقطه تلاقی آنها همان فرکانس شکست است.

مثال ۵-۶

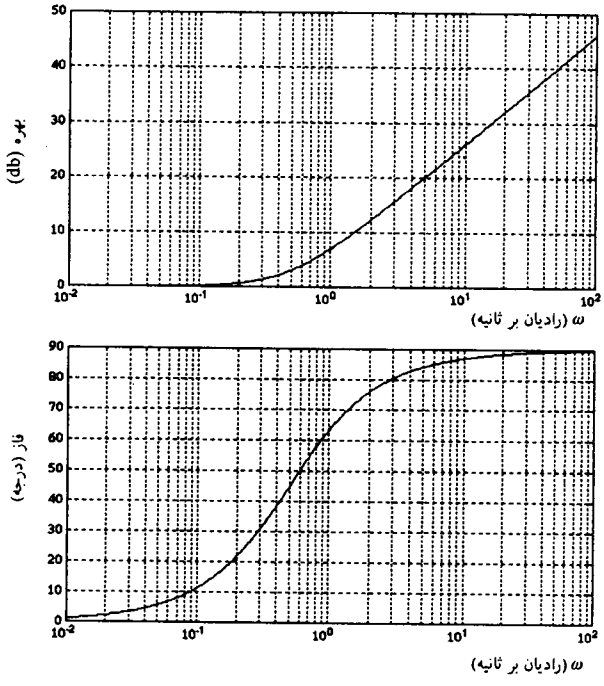
تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید

$$G(s)H(s)=\frac{1}{sT+1}$$

که در آن ثابت زمانی T برابر با ۵ ثانیه است. دیاگرام بود این تابع تبدیل را رسم کنید.

1- Break frequency

2- Corner frequency



شکل ۵-۶ دیاگرام بود تابع تبدیل مثال ۵-۵

در اینجا یک قطب محدود در $s=-1/T$ داریم. نخست تابع تبدیل فرکانسی را می‌نویسیم

$$G(j\omega)H(j\omega)=\frac{1}{j\omega T+1}$$

و سپس معادله‌های متناظر با لگاریتم دامنه و زاویه را بدست می‌آوریم. بنابراین

$$\mathrm{Lm}\left(\frac{۱}{j\omega \mathrm{T}+۱}\right)=۲۰log\left|\frac{۱}{j\omega \mathrm{T}+۱}\right|$$
$$=-۲۰log\sqrt{(\omega \mathrm{T})^{۲}+۱}$$
$$=-۲۰log\sqrt{۲۵\omega^{۲}+۱}$$

و

$$\angle\left(\frac{۱}{j\omega \mathrm{T}+۱}\right)=-tan^{-۱}\frac{۵\omega}{۱}$$

فرکانس شکست در $\omega=۱/۵$ رادیان بر ثانیه است و لگاریتم دامنه در این فرکانس برابر با ۳/۰۱dB- است. جدول ۵-۶ با بکارگیری معادله‌های بالا و جایگزینی برای مقادیر مختلف

جدول ۵-۶ داده‌های مثال ۵-۶

فرکانس (رادیان بر ثانیه)	دامنه (dB)	زاویه فاز (درجه)
۰/۰۱	-۰/۰۱	-۲/۸۶
۰/۰۲	-۰/۰۴	-۵/۷۱
۰/۰۵	-۰/۲۶	-۱۴/۰۴
۰/۱	-۰/۹۷	-۲۶/۵۸
۰/۲	-۳/۰۱	-۴۵
۰/۵	-۸/۶	-۶۸/۲
۱	-۱۴/۱۵	-۷۸/۶۹
۲	-۲۰/۰۴	-۸۴/۲۹
۴	-۲۶/۰۳	-۸۷/۱۳
۱۰	-۳۳/۹۸	-۸۸/۸۵
۲۰	-۴۰	-۸۹/۴۳
۴۰	-۴۶/۰۲	-۸۹/۷۱
۱۰۰	-۵۳/۹۸	-۸۹/۸۸

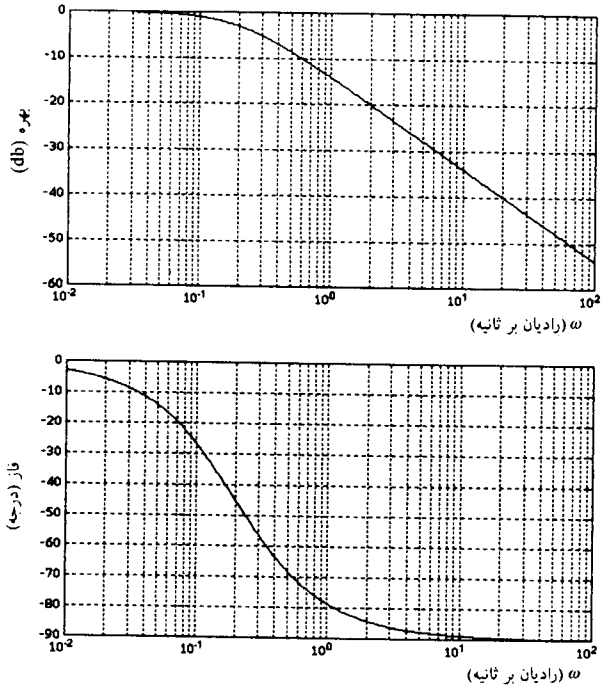
فرکانس بدست آمده است. توجه کنید که محدوده مهم پاسخ فرکانسی (در نمودارهای دامنه و زاویه فاز) معمولاً ۲± دهه از فرکانس شکست است. بنابراین می‌توان برای رسم دیاگرام بود از مقادیر ω در گستره‌ای برابر با دو دهه بالا و پایین فرکانس شکست استفاده کرد. هم چنین برای رسم دقیق نمودارهای دامنه و زاویه فاز باید چندین مقدار ω را در یک دهه انتخاب کرد. داده‌های جدول ۵-۶ در شکل ۵-۷ رسم شده‌اند.

در اینجا تذکر دوباره این نکته مهم است که در فرکانس شکست، همانطور که در مثالهای ۵-۵ و ۵-۶ مشاهده شد، اندازه لگاریتم دامنه برای کلیه نمودارهای دامنه برابر با ۳/۰dB است. رسم مجانبها قبل از رسم دقیق دیاگرام بود می‌تواند برای توابع تبدیل پیچیده‌تر فوق‌العاده سودمند باشد، به این نکته در مثالهای بعد اشاره خواهیم کرد.

نمودار بود برای یک عبارت درجه دوم: $[s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2]^{\pm 1}$

یک عامل مهم دیگر که در بسیاری از توابع تبدیل سیستم‌های صنعتی و عملی ظاهر می‌شود، عبارت درجه دوم است. عبارت درجه دوم معمولاً در مخرج تابع تبدیل ظاهر می‌شود و خواص آن در فصل دوم مفصلاً بررسی شدند. تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید:

$$G(s)H(s)=\frac{1}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2} \qquad (۱۰-۲-۵)$$



شکل ۵-۷ دیاگرام بود تابع تبدیل مثال ۵-۶

قطبهای این تابع تبدیل به مقدار نسبت میرایی ζ بستگی دارند (فصل دوم). در واقع داریم

۱. اگر $\zeta > 1$ ریشه‌های عبارت درجه دوم حقیقی و ساده‌اند و پاسخ متناظر به پله واحد میرای شدید است.

۲. اگر $\zeta = 1$ ریشه‌های عبارت درجه دوم مکرر هستند و پاسخ متناظر به پله واحد میرای بحرانی است.

۳. اگر $\zeta < 1$ ریشه‌های عبارت درجه دوم مختلط مزدوج هستند و پاسخ متناظر به پله واحد میرای ضعیف است.

۴. اگر $\zeta = 0$ ریشه‌های عبارت درجه دوم موهومی محض هستند و پاسخ متناظر به پله واحد نوسانی است.

در مثالهای ۵-۷ تا ۵-۱۰ رسم نمودارهای بود را برای حالات بالا نشان می‌دهیم.

مثال ۵-۷

تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید

$$G(s)H(s)=\frac{۱}{s^{۲}+۳s+۲}$$

در این حالت با مقایسه با فرم استاندارد $s^{۲}+۲\xi\omega_n s+\omega_n^{۲}$، بدست می‌آوریم

$$\omega_n=\sqrt{۲} \qquad \text{و} \qquad \xi=۱/۰۶$$

بنابراین قطبهای سیستم حقیقی و ساده می‌باشند. در واقع قطبهای سیستم در ۱- و ۲- قرار دارند. بنابراین

$$G(s)H(s)=\frac{۱}{(s+۲)(s+۱)}$$
$$=\frac{۰/۵}{(۰/۵s+۱)(s+۱)}$$

برای رسم دیاگرام بود داریم

$$G(j\omega)H(j\omega)=\frac{۰/۵}{(۰/۵j\omega+۱)(j\omega+۱)}$$

لذا

$$LmG(j\omega)H(j\omega)=۲۰log۰/۵-۲۰log\sqrt{(۰/۵\omega)^{۲}+۱}-۲۰log\sqrt{\omega^{۲}+۱}$$

و

$$\angle G(j\omega)H(j\omega)=-\tan^{-۱}\frac{۰/۵\omega}{۱}-\tan^{-۱}\frac{\omega}{۱}$$

توجه کنید که مقادیر فرکانس شکست برای دو عبارت بالا عبارتند از $\omega=۲$ و $\omega=۱$ رادیان بر ثانیه. از اینرو، یک گستره فرکانسی مناسب از ۰/۰۱ تا ۱۰۰ رادیان بر ثانیه می‌باشد، در این گستره فرکانسی دو دهه بالا و پایین فرکانس‌های شکست دربر گرفته خواهد شد. جدول ۵-۷ داده‌های بدست آمده از دو معادله بالا را در مقادیر مشخص شده فرکانسی نشان می‌دهد. نمودارهای دامنه و فاز و به عبارت دیگر دیاگرام بود این تابع تبدیل با بکارگیری مقادیر تعیین شده در جدول ۵-۷ در شکل ۵-۸ رسم شده است.

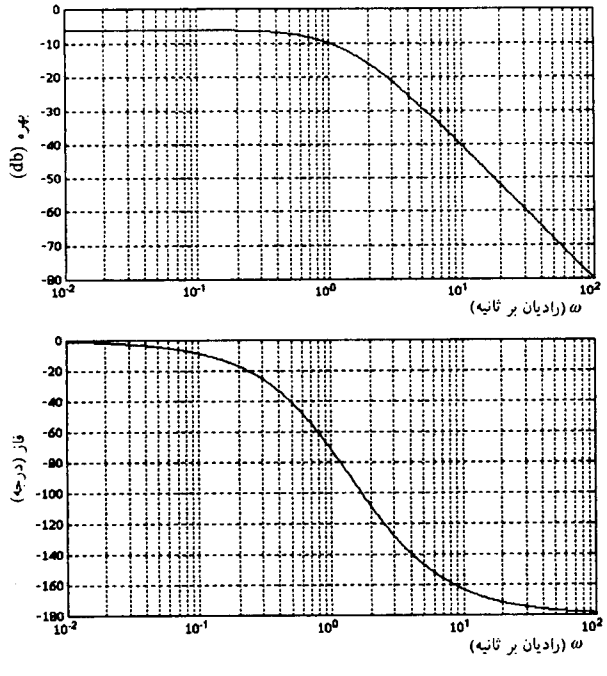
مثال ۵-۸

تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید

$$G(s)H(s)=\frac{۱}{(s+۰/۱)^{۲}}$$

جدول ۵-۷ داده‌های مثال ۵-۷

فرکانس (رادیان بر ثانیه)	دامنه (dB)	زاویه فاز (درجه)
۰/۰۱	-۶/۰۲	-۰/۸۶
۰/۰۲	-۶/۰۲	-۱/۷۲
۰/۰۵	-۶/۰۳	-۴/۲۹
۰/۱	-۶/۰۷	-۸/۵۷
۰/۲	-۶/۲۳	-۱۷/۰۲
۰/۵	-۷/۲۵	-۴۰/۶
۱	-۱۰	-۷۱/۵۸
۲	-۱۶/۰۲	-۱۰۸/۴۳
۴	-۲۵/۳۱	-۱۳۹/۳۹
۱۰	-۴۰/۲۱	-۱۶۹/۹۸
۲۰	-۵۲/۰۹	-۱۷۱/۴۳
۴۰	-۶۴/۰۹	-۱۷۵/۷
۱۰۰	-۸۰	-۱۷۸/۲۸



شکل ۵-۸ نمودار بود تابع تبدیل مثال ۵-۷

این تابع تبدیل یک قطب مکرر در ۰/۱- دارد و لذا ۱=ξ است. نخست تابع تبدیل را برای رسم دیاگرام بود، به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم

$$G(j\omega)H(j\omega)=\frac{۱۰۰}{(۱۰j\omega+۱)^{۲}}$$

بنابراین

$$LmG(j\omega)H(j\omega)=۲۰log۱۰۰-۴۰log\sqrt{(۱۰\omega)^{۲}+۱}$$

و

$$\angle G(j\omega)H(j\omega)=-۲\tan^{-۱}\frac{۱۰\omega}{۱}$$

داده‌های بدست آمده برای مقادیر مختلف فرکانس ω در جدول ۵-۸ آورده شده و دیاگرام بود این تابع تبدیل در شکل ۵-۹ نشان داده شده است.

مثال ۵-۹

تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید

$$G(s)H(s)=\frac{۱}{s^{۲}+۲s+۲}$$

در این حالت ۰/۷۰۷=ξ و ریشه‌های عبارت درجه دوم مختلط مزدوج می‌باشند. داریم

$$G(s)H(s)=\frac{۱}{(s+j۱+۱)(s-j۱+۱)}$$

بنابراین

$$LmG(j\omega)H(j\omega)=-۲۰log\sqrt{(\omega+۱)^{۲}+۱}-۲۰log\sqrt{(\omega-۱)^{۲}+۱}$$

و

$$\angle G(j\omega)H(j\omega)=-tan^{-۱}\frac{\omega+۱}{۱}-tan^{-۱}\frac{\omega-۱}{۱}$$

داده‌های بدست آمده برای مقادیر مختلف فرکانس ω در جدول ۵-۹ آورده شده و دیاگرام بود این تابع تبدیل در شکل ۵-۱۰ نشان داده شده است.

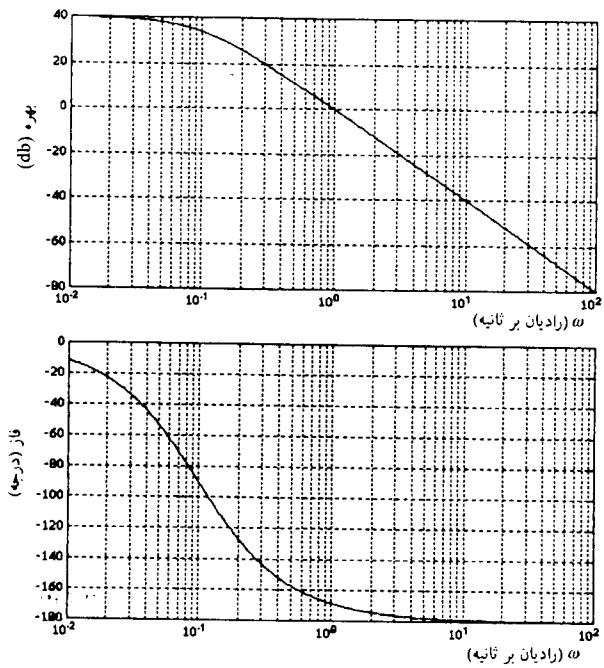
مثال ۵-۱۰

تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید

$$G(s)H(s)=\frac{۱}{s^{۲}+۴}$$

جدول ۵-۸ داده‌های مثال ۵-۸

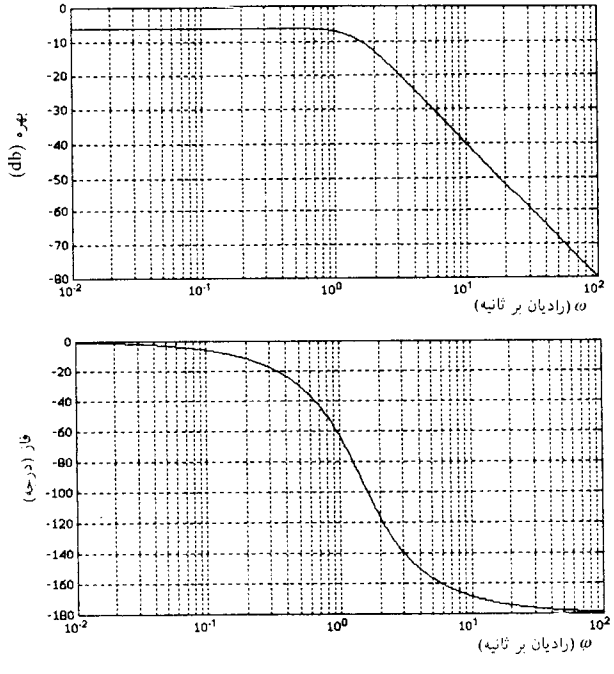
فرکانس (رادیان بر ثانیه)	دامنه (dB)	زاویه فاز (درجه)
۰/۰۱	۳۹/۹۱	-۱۱/۴۲
۰/۰۲	۳۹/۶۶	-۲۲/۶۲
۰/۰۵	۳۸/۰۶	-۵۳/۱۳
۰/۱	۳۳/۹۸	-۹۰
۰/۲	۲۶/۰۲	-۱۲۶/۸۷
۰/۵	۱۱/۷	-۱۵۷/۳۸
۱	-۰/۰۹	-۱۶۸/۵۸
۲	-۱۲/۰۶	-۱۷۴/۲۷
۴	-۲۴/۰۹	-۱۷۷/۱۴
۱۰	-۴۰	-۱۷۸/۸۵
۲۰	-۵۲/۰۴	-۱۷۹/۴۳
۴۰	-۶۴/۰۸	-۱۷۹/۷۱
۱۰۰	-۸۰	-۱۷۹/۸۸



شکل ۵-۹ دیاگرام بود تابع تبدیل مثال ۵-۸

جدول ۵-۹ داده‌های مثال ۵-۹

فرکانس (رادیان بر ثانیه)	دامنه (dB)	زاویه فاز (درجه)
۰/۰۱	-۶/۰۲	-۰/۵۷
۰/۰۲	-۶/۰۲	-۱/۱۵
۰/۰۵	-۶/۰۲	-۲/۸۷
۰/۱	-۶/۰۲	-۵/۷۴
۰/۲	-۶/۰۲	-۱۱/۵۳
۰/۵	-۶/۰۸	-۲۹/۷۴
۱	-۶/۹۸	-۶۳/۴۳
۲	-۱۳/۰۱	-۱۱۶/۵۶
۴	-۲۴/۱۵	-۱۵۰/۲۵
۱۰	-۴۰	-۱۶۸/۴۶
۲۰	-۵۲/۰۴	-۱۷۴/۲۶
۴۰	-۶۴/۰۸	-۱۷۷/۱۳
۱۰۰	-۸۰	-۱۷۸/۸۵



شکل ۵-۱۰ دیاگرام بود تابع تبدیل مثال ۵-۹

نخست همانند قبل تابع تبدیل را به صورتی دوباره نویسی می‌کنیم که عبارت ثابت در مخرج واحد باشد، این کار محاسبه دامنه و زاویه فاز را ساده‌تر می‌کند. داریم

$$G(s)H(s)=\frac{۰/۲۵}{(۰/۵s+j\,۱)(۰/۵s-j\,۱)}$$

بنابراین

$$LmG(j\omega)H(j\omega)=۲۰log\,۰/۲۵-۲۰log(۰/۵\omega+۱)-۲۰log(۰/۵\omega-۱)$$

و

$$\angle G(j\omega)H(j\omega)=-۱۸۰^\circ$$

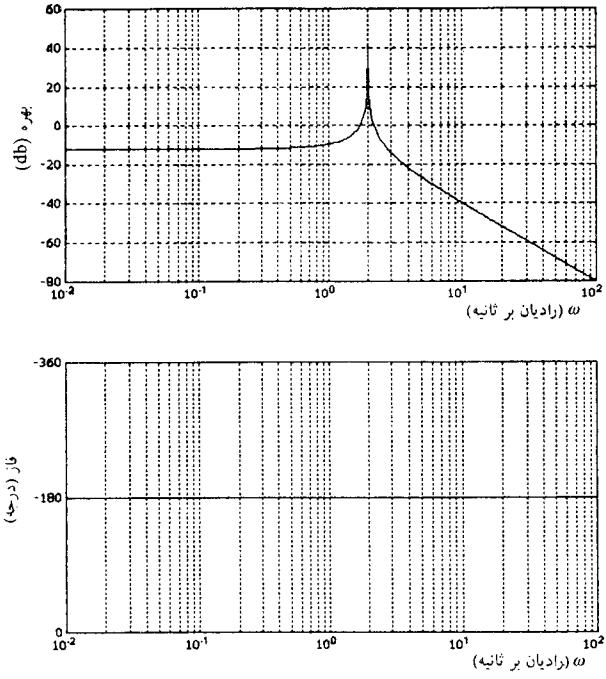
جدول ۵-۱۰ داده‌های مثال ۵-۱۰

فرکانس (رادیان بر ثانیه)	دامنه (dB)	زاویه فاز (درجه)
۰/۱	-۱۲/۰۱	-۱۸۰
۰/۲	-۱۱/۹۵	-۱۸۰
۰/۵	-۱۱/۴۸	-۱۸۰
۱/۰	-۹/۵۴	-۱۸۰
۱/۴	-۶/۱۸	-۱۸۰
۱/۶	-۳/۱۷	-۱۸۰
۱/۸	۲/۳۸	-۱۸۰
۱/۹	۸/۱۸	-۱۸۰
۲/۰	∞	-۱۸۰
۲/۱	۷/۷۴	-۱۸۰
۲/۲	۱/۵۲	-۱۸۰
۲/۳	-۲/۲۱	-۱۸۰
۲/۵	-۷/۰۴	-۱۸۰
۲/۶	-۸/۸۱	-۱۸۰
۳/۰	-۱۳/۹۸	-۱۸۰
۳/۴	-۱۷/۶۶	-۱۸۰
۳/۸	-۲۰/۳۷	-۱۸۰
۴	-۲۱/۵۸	-۱۸۰
۴/۴	-۲۳/۷۲	-۱۸۰
۵	-۲۶/۴۴	-۱۸۰
۷	-۳۳/۰۵	-۱۸۰
۱۰	-۳۹/۶۴	-۱۸۰
۲۰	-۵۱/۹۵	-۱۸۰
۵۰	-۶۷/۴۴	-۱۸۰

در این حالت فرکانس شکست در $\omega = ۲$ رادیان بر ثانیه قرار دارد و دامنه تابع تبدیل در این فرکانس بی‌نهایت است. جدول ۵-۱۰ مقادیر لگاریتم دامنه و زاویه فاز تابع تبدیل را در یک گستره فرکانسی برای ω نشان می‌دهد. دیاگرام بود شکل ۵-۱۱ بر اساس داده‌های جدول ۵-۱۰ رسم شده است.

بعد از مثالهای ارایه شده برای رسم دیاگرام بود سیستم‌های درجه دوم، اکنون حالت کلی زیر را در نظر می‌گیریم

$$G(s)H(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2} \qquad (۵-۲-۱۱)$$



شکل ۵-۱۱ دیاگرام بود تابع تبدیل مثال ۵-۱۰

نخست تابع تبدیل داده شده با معادله (۵-۲-۱۱) را به صورت مناسب زیر بازنویسی می‌کنیم

$$G(j\omega)H(j\omega)=\frac{1}{\left[(j\omega/\omega_n)^2+2\xi(j\omega/\omega_n)+1\right]} \qquad (۵-۲-۱۲)$$

همانطور که ملاحظه شد برای $\xi>1$، عبارت درجه دوم دو ریشه حقیقی دارد. برای $1>\xi>0$ ریشه‌های عبارت درجه دوم مختلط مزدوج می‌باشند. توجه کنید که تقریبهای مجانبی، برای منحنیهای پاسخ فرکانسی برای ξکوچک دقیق نخواهد بود، زیرا دامنه و فاز عبارت درجه دوم به مقادیر فرکانس شکست و نسبت میرایی بستگی خواهند داشت.

مجانبهای نمودار بود را در حالت کلی به صورت زیر بدست می‌آوریم. از آنجاییکه

$$\mathrm{LmG(j\omega)H(j\omega)} = -20\log\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2+\left(2\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \qquad (۱۳-۲-۵)$$

برای فرکانس‌های پایین، یعنی $\omega<<\omega_n$، از معادله (۵-۲-۱۳) داریم

$$-20\log 1 = 0\ \mathrm{dB} \qquad (۱۴-۲-۵)$$

بنابراین معادله (۵-۲-۱۴) نشان می‌دهد که مجانب فرکانس پایین یک خط افقی 0dB است.

برای فرکانس‌های بالا $\omega>>\omega_n$، معادله (۵-۲-۱۳) می‌دهد

$$-20\log\frac{\omega^2}{\omega_n^2} = -40\log\frac{\omega}{\omega_n} \qquad (۱۵-۲-۵)$$

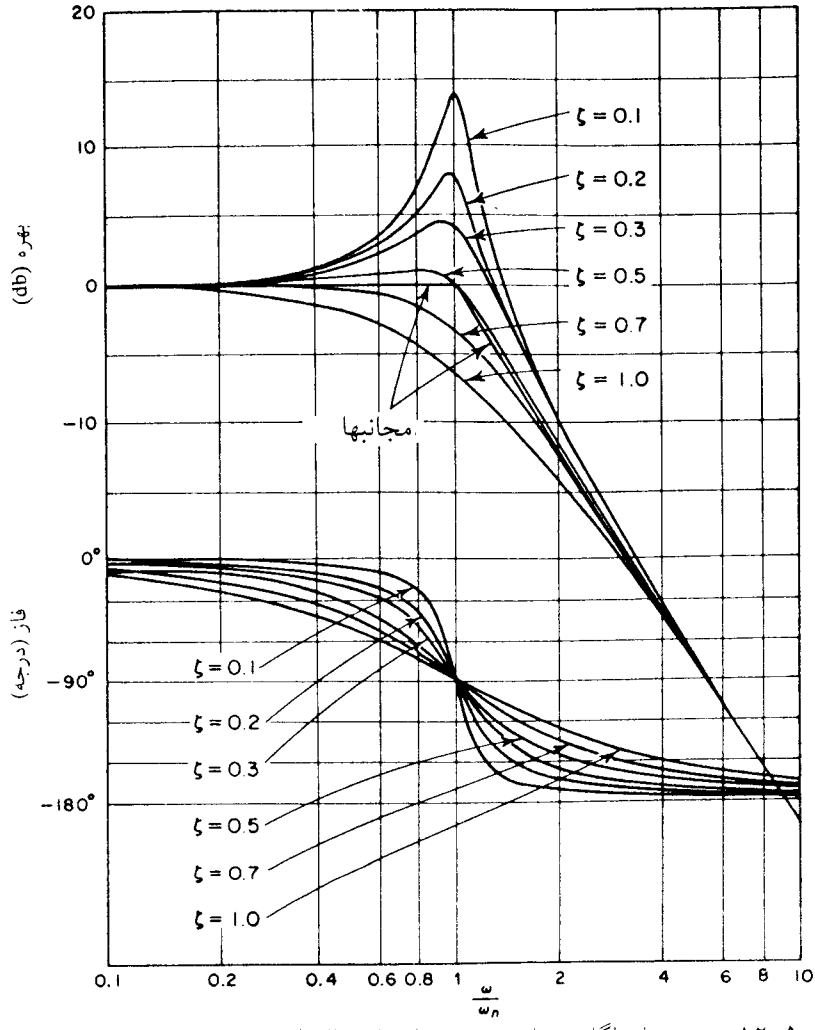
از معادله (۵-۲-۱۵) داریم که برای $\omega=\omega_n$، لگاریتم دامنه صفر dB خواهد شد و لذا این فرکانس، فرکانس شکست است و فرکانسی است که دو مجانب همدیگر را قطع خواهند کرد. اگر ω را به میزان یک دهه افزایش دهیم داریم $\omega=10\omega_n$ و لذا از معادله (۵-۲-۱۵) داریم

$$40\log\frac{10\omega_n}{\omega_n} = 40\mathrm{dB}$$

و لذا مجانب فرکانس بالا، شیبی برابر با -40 dB بردهه دارد.

دو مجانب بدست آمده فرکانس بالا و پایین مستقل از ξ هستند. همانطور که از معادله (۵-۲-۱۲) ممکن است استنتاج شود، در نزدیکی فرکانس شکست $\omega=\omega_n$ یک ستیغ تشدید[1] رخ می‌دهد. اندازه این ستیغ توسط نسبت میرایی تعیین می‌گردد. شکل ۵-۱۲ دیاگرام‌های دقیق بود و مجانبهای فرکانس بالا و پایین را برای نمودارهای دامنه و فاز یک تابع تبدیل داده شده با معادله (۵-۲-۱۱) را نشان می‌دهد. همانطور که از شکل ۵-۱۲ مشاهده

1- Resonant peak



شکل ۵-۱۲ منحنیهای لگاریتم دامنه و منحنیهای زاویه فاز تابع تبدیل درجه دوم داده شده با معادله (۵-۲-۱۲)

می‌گردد. اگر چه مجانبهای توابع تبدیل داده شده برای مقادیر مختلف نسبت میرایی یکسان هستند، لیکن رفتار دیاگرام بود برای مقادیر مختلف نسبت میرایی کاملاً متفاوت است.

زاویه فاز متناظر با تابع تبدیل داده شده با معادله (۵-۲-۱۱) عبارتست از

$$\angle G(j\omega)H(j\omega) = -\tan^{-1}\left[\frac{2\zeta\omega/\omega_n}{1-(\omega/\omega_n)^2}\right] \qquad (۵-۲-۱۶)$$

زاویه فاز نیز تابعی از ω و ξ است. در $\omega = 0$ زاویه فاز صفر درجه است. در فرکانس شکست $\omega = \omega_n$ از معادله (۵-۲-۱۶) داریم

$$\angle G(j\omega)H(j\omega) = -tan^{-1}\left(\frac{2\xi}{0}\right) = -tan^{-1}\infty = -90^\circ$$

و برای فرکانس‌های بالا $\omega \to \infty$، از معادله (۵-۲-۱۶) داریم که زاویه فاز ۱۸۰- خواهد شد.

توجه کنید که دیاگرام بود عبارت درجه دوم زیر

$$1 + 2\xi\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right) + \left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2$$

به سادگی با معکوس کردن علامت عبارتهای متناظر معادله (۵-۲-۱۲) بدست خواهد آمد.

۵-۲-۲ مراحل ترسیم دیاگرام‌های بود

در بخش ۵-۲-۱ ترسیم دیاگرام‌های بود چهار فاکتور اساسی، $\pm k$، $(s)^{\pm 1}$، $(1+sT)^{\pm 1}$، $[s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2]^{\pm 1}$ که در توابع تبدیل سیستم‌ها ظاهر می‌شوند، بررسی شد. در عمل بسیاری از سیستم‌ها از یک یا چند فاکتور اشاره شده تشکیل می‌شوند. ترسیم دیاگرام‌های بود بدلیل ماهیت جمع و تفریق شوندگی دیاگرام‌های بود بر روی مختصات لگاریتمی برای این سیستم‌ها بسیار ساده است. ترسیم دیاگرام‌های بود شامل مراحل زیر است:

۱ـ تابع تبدیل را به صورت حاصلضرب عوامل بخش ۵-۲-۱ بیان کنید.

۲ـ عوامل را به صورت مناسب پاسخ فرکانسی که در آن عبارات ثابت یک باشند، در آورید.

۳ـ در تابع تبدیل $s = j\omega$ را جایگزین کنید.

۴ـ فرکانس‌های شکست را در عوامل تعیین کنید.

۵ـ معادله‌های لگاریتم دامنه و زاویه فاز را برای توابع تبدیل داده شده بدست آورید.

۶ـ با بکارگیری معادله‌های لگاریتم دامنه وفاز بدست آمده از مرحله ۵، برای یک گسترهٔ فرکانسی مناسب، دامنه و زاویه فاز تابع تبدیل را محاسبه کنید. مقادیر انتخاب شده فرکانس به فرکانس‌های شکست تابع تبدیل بستگی خواهند داشت. گسترهٔ فرکانسی انتخاب شده معمولاً به ترتیب دو دهه بالا و دو دهه پایین بزرگترین و کوچکترین فرکانس‌های شکست را در بر می‌گیرد.

۷- با استفاده از جدول بدست آمده از مرحله ۶ دیاگرام بود را رسم کنید.

همچنین می‌توان با استفاده ازمجانبهای فرکانس بالا و پایین نمودارهای دامنه و فاز، یک شمای کلی و تقریبی از دیاگرام بود، قبل از رسم دقیق آن، ترسیم نمود.

شایان ذکر است که امروزه با بکارگیری نرم افزارهای مناسب، ترسیم دیاگرام‌های بود توابع تبدیل بسیار پیچیده نیز به سرعت و با دقت بالا امکان پذیر است.

مثال ۵-۱۱

تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید

$$G(s)=\frac{5(s+3)}{s(s+0/5)(s^2+s+2)}$$

این تابع تبدیل به صورت حاصلضرب عوامل بخش ۵-۲-۱ است، لیکن عوامل آن به صورت مناسب پاسخ فرکانسی نمی‌باشند. با بازنویسی تابع تبدیل به صورت مناسب داریم

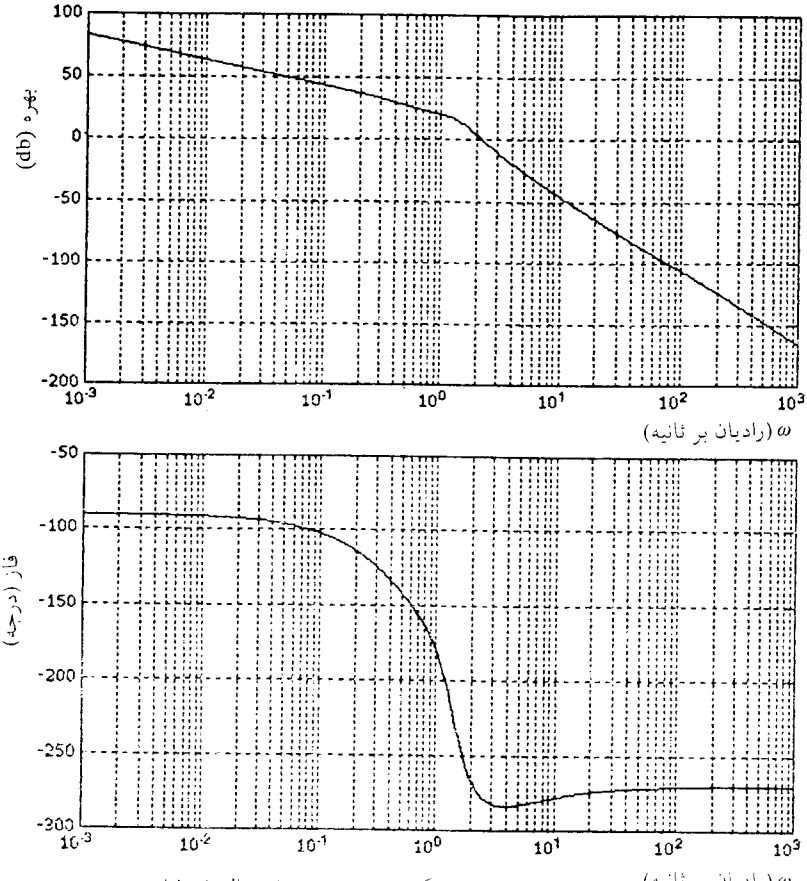
$$G(j\omega)=\frac{15((j\omega)/3+1)}{(j\omega)(j2\omega+1)[(j\omega)^2/2+(j\omega)/2+1]}$$

جدول ۵-۱۱ مشخصه‌های مربوط به هر عامل را لیست کرده است. برای رسم دقیق دیاگرام بود، نخست مجانبهای نمودارهای لگاریتم دامنه و نمودار فاز هرکدام از عوامل تابع تبدیل را رسم می‌کنیم. برای بدست آوردن مجانبهای نمودارهای لگاریتم دامنه و نمودار فاز کل تابع تبدیل این مجانبها و نمودارها را با هم به طور جبری جمع می‌کنیم. برای رسم نمودار دقیق لگاریتم دامنه، می‌توان جدولی همانند جدولهای مثالهای قبل تنظیم نمود و مقدار دقیق لگاریتم دامنه تابع تبدیل را با جمع جبری مقادیر لگاریتم دامنه عوامل در فرکانس‌های مختلف بدست آورد. هم‌چنین برای رسم نسبتاً دقیق لگاریتم دامنه تابع تبدیل، می‌توان مقادیر فرکانس‌های مختلف را در یک اکتا و پایین و بالای فرکانس شکست هر فاکتور تعیین نمود. رسم دقیق لگاریتم دامنه تابع تبدیل در شکل ۵-۱۳ آورده شده است.

توجه کنید که در فرکانس‌های پایین ۰/۵، اولین فرکانس شکست، تنها عوامل مؤثر $Lm15$ و $Lm(j\omega)^{-1}$ می‌باشند و تمامی عوامل دیگر مقدار صفر دارند. در فرکانس ۰/۵ داریم $Lm15=23/5dB$ و $Lm(j\omega)^{-1}=6/02$ و لذا در این فرکانس نمودار دامنه تابع تبدیل مقدار

جدول ۵-۱۱ مشخصه‌های نمودارهای لگاریتم دامنه و زاویه فاز برای عوامل مختلف تابع تبدیل مثال ۵-۱۱.

عوامل	فرکانس شکست	لگاریتم دامنه	مشخصه‌های زاویه
۱۵	ندارد	دامنه ثابت ۲۳/۵dB+	ثابت °۰
$(j\omega)^{-1}$	ندارد	شیب ثابت ۲۰- dB بر دهه	ثابت °۹۰-
$(j2\omega+1)^{-1}$	$\omega_1=0/5$	شیب صفر زیر فرکانس شکست و شیب ۲۰- dB بر دهه بالای فرکانس شکست	از °۰ تا °۹۰- تغییر پیدا می‌کند
$((j\omega)/3+1)$	$\omega_2=3$	شیب صفر زیر فرکانس شکست و شیب ۲۰+ dB بر دهه بالای فرکانس شکست	از °۰ تا °۹۰+ تغییر پیدا می‌کند
$[(j\omega)^2/2+(j\omega)/2+1]^{-1}$	$\omega_3=\sqrt{2}$ $\xi=0/3536$	شیب صفر زیر فرکانس شکست و شیب ۴۰- dB بر دهه بالای فرکانس شکست	از °۰ تا °۱۸۰- تغییر پیدا می‌کند



شکل ۵-۱۳ دیاگرام بود تابع تبدیل مثال ۵-۱۱

۲۹/۵۲dB دارد. زیر فرکانس ۰/۵ نمودار دامنه تابع تبدیل دارای شیبی برابر ۲۰- dB بر دهه می‌باشد که از عامل $(j\omega)^{-1}$ ناشی شده است. برای فرکانس‌های بالاتر از ۰/۵ عامل $(j2\omega+1)^{-1}$ یک شیب ۲۰- dB بر دهه پیدا می‌کند که باید با شیب قبلی جمع گردد. بعد از این فرکانس (۰/۵) شیب نمودار تا فرکانس شکست بعدی در ۲√، ۴۰- dB بر دهه خواهد بود. در فرکانس‌های بالای ۲√ رادیان بر ثانیه عامل درجه دوم مؤثر می‌شود و شیبی برابر با ۴۰- dB بر دهه خواهد داشت. لذا شیب نمودار کلی دامنه از ۲√ تا ۳ رادیان بر ثانیه برابر با ۸۰- dB بر دهه می‌باشد. مقدار دامنه در ۲√ رادیان بر ثانیه برابر با ۱۷/۵dB است. در فرکانس بالای ۳ رادیان بر ثانیه، آخرین فرکانس شکست، عامل $(j\omega)/3+1)$ مؤثر می‌شود و شیب ۲۰+ dB بر دهه را با شیب قبلی جمع می‌کند. بنابراین شیب نمودار دامنه در فرکانس‌های بالای ۳ رادیان بر ثانیه برابر با ۶۰- dB بر دهه می‌شود و مقدار دامنه در فرکانس ۸۰ رادیان بر ثانیه برابر با ۱۰۰dB- است.

در رسم نمودار زاویه فاز از نکات زیر می‌توان استفاده کرد. عبارت $(j\omega)^{-1}$، زاویه ۹۰°- خواهد داشت. (در واقع زاویه عبارت $(j\omega)^{-m}$ برابر با $(-m)90^\circ$ خواهد بود) برای عبارات $(1+j\omega T)^{\pm 1}$، در این حالت T برابر با ۲ و ۱/۳ است، زوایای دقیق فاز را یک اکتاو بالا و یک اکتاو پایین، یک دهه بالا و یک دهه پایین فرکانس‌های شکست بدست آورید و یک منحنی بین هر کدام از آنها رسم کنید. برای عبارت درجه دوم نیز، پس از تعیین ζ و مراجعه به شکل ۵-۱۲ چند فرکانس را برای محاسبه دقیق زاویه فاز تعیین کنید و در این فرکانس‌ها زاویه فاز را به دست آورید. نمودار فاز کلی سیستم با جمع جبری کردن نمودارهای فاز عوامل به دست می‌آید. روابط زیر می‌توانند در رسم نمودار فاز بکار گرفته شوند:

$$\angle \lim_{\omega \to 0} G(j\omega) = (-m)90^\circ \qquad (۵-۲-۱۷)$$

که در آن m نوع سیستم است و

$$\angle \lim_{\omega \to \infty} G(j\omega) = -(n-m)90^\circ \qquad (۵-۲-۱۸)$$

که در آن n درجه مخرج تابع تبدیل و m درجه صورت تابع تبدیل است.

۵-۲-۳ سیستم‌های غیر می‌نیمم فاز

توابع تبدیلی که صفرها و قطبهای آنها پایدار است (کلیه صفرها و قطبهای محدود آنها در سمت چپ محور موهومی قرار دارند)، توابع تبدیل می‌نیمم فاز[1] هستند. سیستم‌هایی که توابع تبدیل می‌نیمم فاز دارند، سیستم‌های می‌نیمم *فاز* نامیده می‌شوند. اگر تابع تبدیلی یک یا چند صفر یا قطب ناپایدار داشته باشد، آن تابع تبدیل غیر می‌نیمم فاز است و سیستم‌هایی راکه توابع تبدیل غیرمی‌نیمم فاز دارند سیستم‌های غیر می‌نیمم *فاز*[2] می‌نامند. سیستم‌های غیر می‌نیمم فاز با صفر ناپایدار را معکوس *ناپایدار*[3] نیز نامیده‌اند.

به سادگی می‌توان نشان داد که مشخصه‌های دامنه دو تابع تبدیل می‌نیمم فاز و غیر می‌نیمم فاز (حداقل یک صفر یا قطب قرینه یکدیگر نسبت به محور موهومی) یکسان هستند. لیکن مشخصه فاز آنها با هم متفاوت است. در واقع زاویه فاز سیستم می‌نیمم فاز کمتر از زاویه فاز سیستم غیر می‌نیمم فاز است. هم‌چنین توجه کنید که تابع تبدیل یک سیستم می‌نیمم فاز به طور منحصر بفردی توسط مشخصه دامنه یا به عبارت دیگر نمودار دامنه آن، تعیین می‌گردد. حال آنکه برای تعیین تابع تبدیل یک سیستم غیر می‌نیمم فاز، نمودار زاویه فاز آن نیز باید در دسترس باشد.

برای نمونه توابع تبدیل دو سیستم به صورت زیر را در نظر بگیرید

$$G_1(j\omega)=\frac{1+j\omega T}{1+j\omega T_1} \qquad G_2(j\omega)=\frac{1-j\omega T}{1+j\omega T_1} \qquad (0<T<T_1)$$

تشکیلات قطب ـ صفر این سیستم‌ها در شکل ۵-۱۴ نشان داده شده‌اند. از آنجاییکه

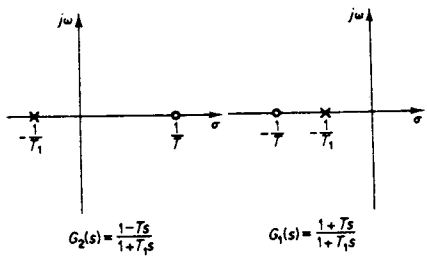
$$G_1(j\omega)=G_2(j\omega).\frac{1+j\omega T}{1-j\omega T}$$

و دامنه عامل $(1+j\omega T)/(1-j\omega T)$ همواره واحد است، لذا مشخصه‌های دامنه این دو تابع تبدیل یکسان هستند. لیکن همانطور که در شکل ۵-۱۵ نمودارهای زاویه فاز این دو تابع تبدیل نشان داده شده است، این نمودارها با هم مطابقتی ندارند. دلیل این عدم تطابق آن است که زاویه فاز عامل $(1+j\omega T)/(1-j\omega T)$ برابر با $2\tan^{-1}\omega T$ است، که به ازاء تغییرات ω از

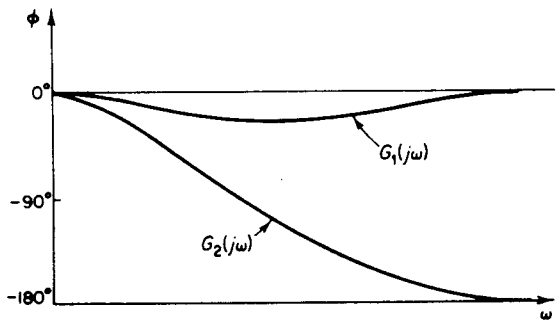
1- Minimum phase

2- Nonminimum phase

3- Inverse unstable



شکل ۵-۱۴ تشکیلات قطب و صفر



شکل ۵-۱۵ مشخصه‌های زاویه فاز

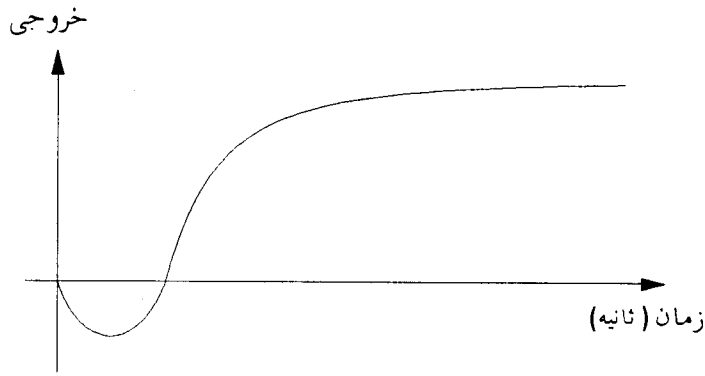
صفر تا بی‌نهایت، از ۰° تا ۱۸۰° تغییر می‌کند.

بنابراین اگر نمودار دامنه یک سیستم می‌نیمم فاز، بر روی گستره فرکانسی از صفر تا بی‌نهایت داده شده باشد، نمودار فاز آن را می‌توان به طور منحصر بفردی تعیین کرد و بالعکس. توجه کنید که این مطلب برای سیستم‌های غیر می‌نیمم فاز درست نیست.

برای یک سیستم می‌نیمم فاز، زاویه فاز در $\omega=\infty$ برابر با (n-m)۹۰°- است، که در آن m و n به ترتیب درجه‌های چند جمله‌ای صورت و مخرج تابع تبدیل هستند. برای یک سیستم غیر می‌نیمم فاز این مطلب درست نیست. لیکن در هر دو سیستم، شیب منحنی لگاریتم دامنه در $\omega=\infty$ برابر با (n-m)۲۰- dB بر دهه است. بنابراین می‌توان برای یک سیستم، با بررسی شیب مجانب فرکانسی بالای منحنی لگاریتم دامنه و زاویه فاز آن در $\omega=\infty$ به می‌نیمم یا غیر می‌نیمم فاز بودن آن پی برد. اگر شیب منحنی لگاریتم دامنه به ازاء ω به سمت بی‌نهایت برابر با (n-m)۲۰- dB بر دهه باشد و زاویه فاز در $\omega=\infty$ برابر با (n-m)۹۰°- باشد، آنگاه سیستم

می‌نیمم فاز است.

یکی دیگر از مشخصه‌های مهم سیستم‌های پایدار غیر می‌نیمم فاز، کندتر بودن پاسخ آنها نسبت به سیستم می‌نیمم فاز متناظر است. پاسخ پله این سیستم‌ها همانگونه که در شکل ۵-۱۶ نشان داده شده است، (برای یک صفر ناپایدار) نخست در جهت خلاف حرکت می‌کند و به همین دلیل اینگونه سیستم‌ها دارای عکس‌العمل اولیه‌ای در جهت خلاف حرکت پاسخ هستند. بنابراین در طراحی سیستم‌های کنترل، اگر سرعت پاسخ سیستم از پارامترهای مهم آن باشد، باید از بکارگیری عناصر غیر می‌نیمم فاز خودداری نمود.



شکل ۵-۱۶ پاسخ پله واحد یک سیستم غیرمی‌نیمم فاز پایدار (با یک صفر ناپایدار)

۵-۲-۴ سیستم‌های تأخیردار

همانطور که در فصلهای قبل نیز اشاره شد، بسیاری از سیستم‌های کنترل دارای تأخیر زمانی هستند و زمان تأخیر بنابر تعریف زمانی است که لازم است بگذرد تا خروجی سیستم به ورودی آن پاسخ دهد. تابع تبدیل یک عنصر تأخیر خالص عبارتست از

$$G(s)=e^{-sT} \qquad (۱۹-۲-۵)$$

که در آن T زمان تأخیر است. با جایگزینی $s=j\omega$ در معادله (۵-۲-۱۹) داریم

$$\begin{aligned} G(j\omega)&=e^{-j\omega T} \\ &=cos\omega T-jsin\omega T \end{aligned} \qquad (۲۰-۲-۵)$$

برای ترسیم نمودار بود باید معادله‌های متناظر با لگاریتم دامنه و زاویه فاز را برای عنصر

تأخیر بدست آوریم. از اینرو

$$|G(j\omega)| = \sqrt{\cos^2\omega T + \sin^2\omega T} = 1$$

یا

$$20\log|G(j\omega)| = 20\log 1 = 0 \qquad (۵-۲-۲۱)$$

و

$$\angle G(j\omega) = \tan^{-1}\left(\frac{-\sin\omega T}{\cos\omega T}\right) \qquad (۵-۲-۲۲)$$

$$= -\omega T \quad \text{(رادیان)}$$

$$= -57.3\omega T \quad \text{(درجه)}$$

بنابراین از معادله (۵-۲-۲۲) داریم که زاویه فاز به طور خطی با فرکانس ω تغییر می‌کند. هم‌چنین معادله (۵-۲-۲۱) نشان می‌دهد که تأخیر تغییری در لگاریتم دامنه سیستم ایجاد نمی‌کند.

مثال ۵-۱۲

سیستم کنترل نشان داده شده در شکل ۵-۱۷ را در نظر بگیرید. برای $T=2$ (ثانیه)، نمودار بود تابع تبدیل سیستم را رسم کنید.

تابع تبدیل حلقه ـ باز سیستم عبارتست از

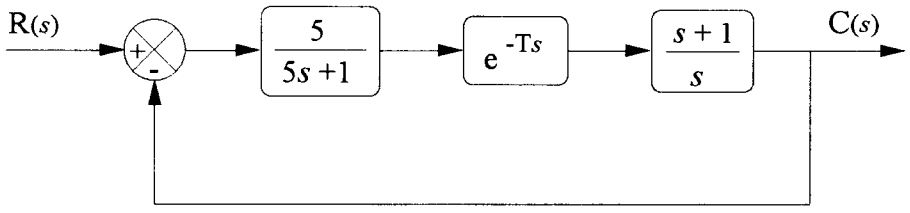
$$G(s)H(s) = \frac{5(s+1)e^{-2s}}{s(5s+1)}$$

با جایگزینی $s=j\omega$ داریم

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{5(j\omega+1)e^{-2j\omega}}{j\omega(5j\omega+1)}$$

بنابراین معادله‌های دامنه و زاویه فاز عبارتند از

$$20\log|G(j\omega)H(j\omega)| = 20\log\left|\frac{5(j\omega+1)e^{-2j\omega}}{j\omega(5j\omega+1)}\right|$$



شکل ۵-۱۷ سیستم کنترل مثال ۵-۱۲

و یا

$$\mathrm{LmG(j\omega)H(j\omega)} = ۲۰log۵ + ۲۰log\sqrt{\omega^۲ + ۱} - ۲۰log\omega - ۲۰log\sqrt{(۵\omega)^۲ + ۱}$$

و

$$\angle \mathrm{G(j\omega)H(j\omega)} = tan^{-۱}\frac{\omega}{۱} - ۲\omega - tan^{-۱}\frac{\omega}{۰} - tan^{-۱}\frac{۵\omega}{۱}$$

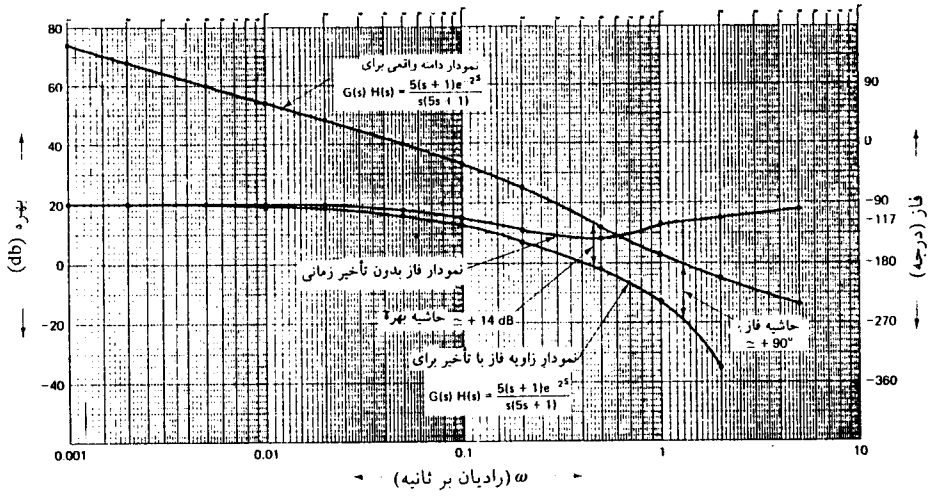
$$= -۹۰^\circ - ۲\omega - tan^{-۱}\frac{۵\omega}{۱} + tan^{-۱}\frac{\omega}{۱}$$

با جایگزینی مقادیر ω از ۰/۰۰۱ تا ۵ رادیان بر ثانیه جدول ۵-۱۲ را از معادله‌های بالا تشکیل می‌دهیم

جدول ۵-۱۲ داده‌های مثال ۵-۱۲

فرکانس ω (رادیان بر ثانیه)	دامنه (dB)	زاویه فاز (درجه) بدون تأخیر زمانی	زاویه فاز (درجه) با تأخیر زمانی
۰/۰۰۱	۷۳/۹۸	-۹۰/۲۳	-۹۰/۳۵
۰/۰۰۲	۶۷/۹۶	-۹۰/۴۶	-۹۰/۶۹
۰/۰۰۵	۶۰	-۹۱/۱۴	-۹۱/۷۲
۰/۰۱	۵۳/۹۷	-۹۲/۲۹	-۹۳/۴۴
۰/۰۲	۴۷/۹۷	-۹۴/۵۶	-۹۶/۸۶
۰/۰۵	۳۹/۷۵	-۱۰۱/۲	-۱۰۶/۹
۰/۱	۳۳/۱	-۱۱۰/۸۶	-۱۲۲/۳۲
۰/۲	۲۵/۱۲	-۱۲۳/۶۹	-۱۴۶/۶۱
۰/۵	۱۲/۳۷	-۱۳۱/۶۳	-۱۸۸/۹۳
۱/۰	۲/۸۴	-۱۲۳/۶۹	-۲۳۸/۲۹
۲/۰	-۵/۰۹	-۱۱۰/۸۶	-۳۴۰/۰۶
۵/۰	-۱۳/۸۲	-۹۹/۰۲	-۶۷۲/۰۲

داده‌های جدول ۵-۱۲ برای رسم نمودار بود بکار گرفته می‌شوند. نمودارهای لگاریتم دامنه و زاویه فاز این سیستم در شکل ۵-۱۸ نشان داده شده‌اند. در شکل ۵-۱۸ نمودار زاویه فاز بدون تأخیر نیز رسم شده است، این دو نمودار را با هم مقایسه کنید.



شکل ۵-۱۸ نمودار بود سیستم تأخیردار داده شده در مثال ۵-۱۲

۵-۲-۵ شناسایی تابع تبدیل سیستم توسط دیاگرام بود

یکی از کاربردهای دیاگرام‌های بود، شناسایی توابع تبدیل سیستم‌های *ناشناخته*[1] است. اگر به سیستم خطی (یا سیستم غیرخطی در محدودهٔ نقطه کار که همانند یک سیستم خطی رفتار می‌کند) ورودی سینوسی وارد شود، خروجی سیستم نیز در حالت ماندگار، سینوسی با همان فرکانس ولی دامنه و فاز متفاوت خواهد بود. همانطورکه در مقدمه این فصل اشاره شد و در شکل ۵-۱ نشان داده شده است، نسبت دامنه خروجی به دامنه ورودی در هر فرکانس در نظر گرفته شده، برابر است با دامنه تابع تبدیل سیستم ناشناخته $|G(j\omega)|$ در آن فرکانس و تفاوت بین زاویه فاز ورودی و زاویه فاز خروجی نیز زاویه فاز تابع تبدیل $\angle G(j\omega)=\theta$، در آن فرکانس می‌باشد. حال اگر این مقادیر را برای یک گسترهٔ فرکانسی به اندازه کافی بزرگ انجام دهیم، می‌توان در هر فرکانس دامنه و فاز تابع تبدیل را تعیین نمود و دیاگرام بود (نمودارهای

1- Unknown systems

لگاریتم دامنه و زاویه فاز) را رسم کرد. نحوه رسم دیاگرام بود بدین صورت است که پس از علامتگذاری نقاط بدست آمده در صفحه‌های نیمه لگاریتمی، خطهای مستقیم با شیبهایی که مضربی از ۲۰± dB بر دهه می‌باشند را رسم می‌کنیم. برای داده‌های زاویه فاز نیز بهترین منحنی را بین داده‌ها رسم می‌کنیم. با رسم این منحنیها نمودار تقریبی بود تابع تبدیل ناشناخته بدست می‌آید و سپس با بکارگیری خواص دیاگرام بود می‌توان تابع تبدیل سیستم را تعیین نمود.

پس از رسم دیاگرام بود با استفاده از قوانین ساده‌ای می‌توان تابع تبدیل را با شروع از فرکانس‌های پایین به بالا بازسازی نمود. قواعد زیر می‌توانند در این راستا سودمند واقع گردند:

۱ـ نوع سیستم را می‌توان از شیب نمودار لگاریتم دامنه در فرکانس‌های پایین تعیین نمود. در حقیقت شیبهای نمودار لگاریتم دامنه در فرکانس‌های پایین، متناظر با نوع سیستم عبارتند از

سیستم نوع صفر: ۰ dB بر دهه

سیستم نوع یک: ۲۰- dB بر دهه

سیستم نوع دو: ۴۰- dB بر دهه

۲ـ با تغییر شیب در یک فرکانس مشخص (یا حوالی آن) می‌توان به وجود عامل جدیدی پی برد و فرکانس شکست متناظر با آن را تعیین نمود. اگر این تغییر ۲۰±dB بر دهه باشد، عبارت درجه اولی به صورت $(1+Ts)^{\pm 1}$ در تابع تبدیل وجود دارد و اگر تغییر ۴۰± dB بر دهه باشد، نماینگر وجود یک عبارت درجه دوم در صورت یا مخرج است. برای تشخیص اینکه عبارت درجه دوم به صورت $(1+Ts)^2$ یا به صورت $[1+2\xi s/\omega_n+s^2/\omega_n^2]$ می‌باشد، باید از تعداد بیشتری از نقاط استفاده کرد. دیاگرام‌های بود میرای ضعیف ($\xi<1$) در نزدیکی ω_n و همچنین میرای شدید ($\xi>1$) و میرای بحرانی ($\xi=1$) در شکل ۵-۱۲ نشان داده شده است. با مطابقت با این شکل می‌توان پارامترهای یک سیستم درجه دوم را شناسایی کرد.

۳- در تعیین صفرها و قطبهای ناپایدار در صورت وجود باید دقت خاصی را مبذول داشت. توجه کنید که توابع $1+j\omega T$ و $1-j\omega T$ دارای نمودار لگاریتم دامنه یکسانی هستند. لیکن نمودار زاویه فاز آنها به ترتیب از ۰° تا ۹۰° و ۰° تا ۹۰°- تغییر می‌کند. بنابراین اگر بدانیم که سیستم پایدار و می‌نیمم فاز است از نمودار لگاریتم دامنه به تنهایی می‌توان برای شناسایی تابع تبدیل استفاده کرد و حال آنکه برای شناسایی تابع تبدیل ناپایدار و یا غیر می‌نیمم فاز، رسم نمودار فاز نیز الزامی است. توجه کنید که برای سیستم‌های می‌نیمم فاز به ازاء میل کردن ω به سمت بی‌نهایت، زاویه فاز برابر با (تفاضل درجه مخرج و صورت تابع تبدیل)×۹۰°- می‌باشد و حال آنکه برای سیستم‌های غیر می‌نیمم فاز این رابطه برقرار نیست. برای سیستم‌های می‌نیمم فاز و غیر می‌نیمم فاز شیب نمودار لگاریتم دامنه از فرکانس‌های بالا برابر با (تفاضل درجه مخرج و صورت تابع تبدیل)×۲۰- dB بر دهه است.

۴- تعیین بهره ثابت K_n. تابع تبدیل کلی سیستم از مراحل بالا به صورت زیر بدست می‌آید

$$G(j\omega)=\frac{K_n(1+T_z j\omega)\ldots\left[1+2(\xi_z/\omega_{nz})j\omega+(j\omega)^2/\omega_{nz}^2\right]\ldots}{(j\omega)^n(1+T_p j\omega)\ldots\left[1+2(\xi_p/\omega_{np})j\omega+(j\omega)^2/\omega_{np}^2\right]\ldots} \qquad (۲۳-۲-۵)$$

برای فرکانس‌های پایین از معادله (۵-۲-۲۳) داریم

$$G(j\omega)\approx\frac{K_n}{(j\omega)^n} \qquad (\omega\to 0) \qquad (۲۴-۲-۵)$$

همانطور که از معادله (۵-۲-۲۴) مشاهده می‌گردد، بهره K_n را می‌توان از قسمت فرکانس پایین نمودار لگاریتم دامنه تعیین کرد. از آنجاییکه اکثریت سیستم‌های عملی و کاربردی نوع صفر، یک و یا دو هستند، به عبارت دیگر $n=0,1,2$، در اینجا روشهای تعیین بهره را برای این سیستم‌ها ارایه می‌کنیم.

$n=0$: از معادله (۵-۲-۲۴)، بدست می‌آوریم

$$G(j\omega)=K_0 \qquad (\omega\to 0) \qquad (۲۵-۲-۵)$$

بنابراین برای مقادیر کوچک فرکانس ω، مجانب فرکانس پایین لگاریتم دامنه یک مقدار ثابت K_0 دارد.

$n=1$: از معادله (۵-۲-۲۴)، بدست می‌آوریم

$$G(j\omega)=\frac{K_1}{j\omega} \quad (\omega\to 0) \qquad (۵-۲-۲۶)$$

لذا از معادله (۵-۲-۲۶)، داریم

$$\log |G(j\omega)| = \log K_1 - \log\omega \qquad (۵-۲-۲۷)$$

توجه کنید که برای $\omega=1$ از معادلهٔ (۵-۲-۲۷)، داریم $\log|G(j)|=\log K_1$ و لذا با رسم یک خط مستقیم عمودی از $\omega=1$ و تقاطع آن با مجانب فرکانس پایین مقدار $\log K_1$ تعیین می‌گردد.

$n=2$: از معادله (۵-۲-۲۴)، بدست می‌آوریم

$$G(j\omega)=\frac{K_2}{(j\omega)^2}=-\frac{K_2}{\omega^2} \qquad (۵-۲-۲۸)$$

و لذا با لگاریتم گرفتن از طرفین معادله (۵-۲-۲۸)، داریم

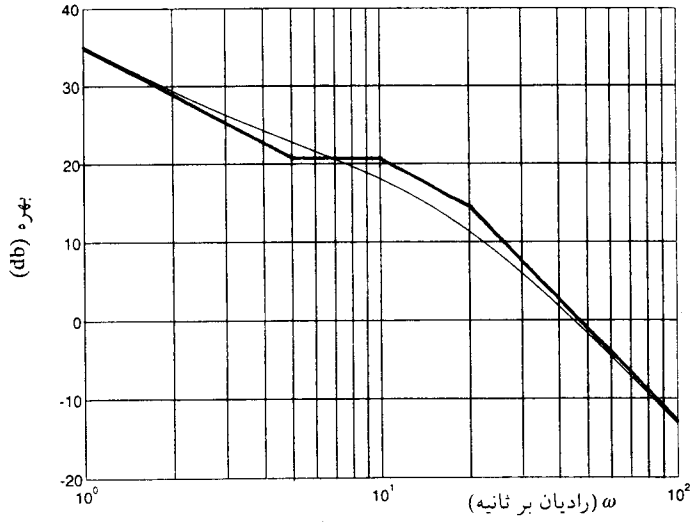
$$\log |G(j\omega)| = \log K_2 - \log\omega^2$$

همانند حالت $n=1$، در $\omega=1$ داریم $\log|G(j\omega)|=\log K_2$ و لذا با رسم یک خط مستقیم عمودی از $\omega=1$ و تقاطع آن با مجانب فرکانس پایین مقدار $\log K_2$ تعیین می‌گردد.

مثال ۵-۱۳

نمودار لگاریتم دامنه یک سیستم می‌نیمم فاز و پایدار در شکل ۵-۱۹ رسم شده است. تابع تبدیل آنرا بدست آورید.

از رفتار قسمت فرکانسی پایین نمودار لگاریتم دامنه، مشاهده می‌شود که سیستم نوع یک است. با توجه به تغییرات شیب در فرکانس‌های ۵، ۱۰ و ۲۰، این فرکانس‌ها فرکانس‌های گوشه تابع تبدیل هستند. هم‌چنین با توجه به شیب dB-۲۰ بر دهه بین فرکانس‌های ۰/۱ تا ۵ رادیان بر ثانیه، dB۰ بر دهه بین فرکانس‌های ۵ تا ۱۰ رادیان بر ثانیه، dB-۲۰ بر دهه بین



شکل ۵-۱۹ نمودار لگاریتم دامنه رسم شده از داده‌های ورودی خروجی یک سیستم نامعلوم می‌نیمم فاز

فرکانس‌های ۱۰ تا ۲۰ رادیان بر ثانیه و سرانجام dB-۴۰ بر دهه برای فرکانس‌های بالاتر از ۲۰ رادیان بر ثانیه ، در می‌یابیم که تابع تبدیل به ترتیب شامل عبارات زیر است:

$$(1+0/05s)^{-1},(1+0/1s)^{-1},(1+0/2s),s^{-1}$$

بنابراین

$$G(s)=\frac{K_1(1+0/2s)}{s(1+0/1s)(1+0/05s)}$$

برای تعیین بهره ثابت K_1 از معادله (۵-۲-۲۷)، و استفاده از نمودار شکل ۵-۱۹، داریم

$$log\,|G(j1)| = 1/75 = log K_1$$

و لذا $K_1=56/2$ بهره ثابت تابع تبدیل است.

۵-۳ نمودارهای نایکوئیست

نمودار نایکوئیست[1] یک تابع تبدیل $G(j\omega)$، نمودار دامنه $|G(j\omega)|$ بر حسب زاویه فاز $\angle G(j\omega)$ به ازاء تغییرات ω از ۰ تا ∞ است. نمودار نایکوئیست $G(j\omega)$ را *نمودار قطبی*[2] و *نمودار قطبی مستقیم*[3] نیز می‌نامند. نمودار نایکوئیست، مکان هندسی بردارهای $|G(j\omega)|$ و $\angle G(j\omega)$ به ازاء تغییرات ω از ۰ تا ∞ است. توجه کنید که در نمودارهای نایکوئیست، زاویه فاز از محور حقیقی مثبت اندازه‌گیری می‌شود. اگر افزایش زاویه در جهت خلاف عقربه ساعت (جهت عقربه ساعت) باشد، زاویه مثبت (منفی) است.

مثال ۵-۱۴

تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید

$$G(s)=\frac{۲۰(s+۵)}{s(s+۳)(s+۱)}$$

برای بررسی پاسخ فرکانسی سیستم، $s=j\omega$ را در تابع تبدیل جایگزین می‌کنیم. از اینرو

$$G(j\omega)=\frac{۲۰(j\omega+۵)}{j\omega(j\omega+۳)(j\omega+۱)}$$

بنابراین

$$|G(j\omega)|=\frac{۲۰(\omega^۲+۲۵)^{۱/۲}}{\omega(\omega^۲+۹)^{۱/۲}(\omega^۲+۱)^{۱/۲}}$$

و

$$\angle G(j\omega)=\tan^{-۱}\left[\frac{\omega}{۵}\right]-۹۰^\circ-\tan^{-۱}\left[\frac{\omega}{۳}\right]-\tan^{-۱}\left[\frac{\omega}{۱}\right]$$

تابع تبدیل $G(j\omega)$ را می‌توان به طور مشابهی، برحسب قسمتهای حقیقی وموهومی آن نوشت. داریم

$$G(j\omega)=\frac{-۲۰j(j\omega+۵)(۳-j\omega)(۱-j\omega)}{\omega(\omega^۲+۹)(\omega^۲+۱)}$$

$$=\frac{-۲۰\left[\omega(\omega^۲+۱۷)+j(-\omega^۲+۱۵)\right]}{\omega(\omega^۲+۹)(\omega^۲+۱)}$$

1-Nyquist plot

2- Polar plot

3- Direct polar plot

و لذا

$$\left[G(j\omega)\right] \text{ قسمت حقیقی} = \frac{-۲۰(\omega^۲+۱۷)}{(\omega^۲+۹)(\omega^۲+۱)}$$

و

$$\left[G(j\omega)\right] \text{ قسمت موهومی} = \frac{۲۰(\omega^۲-۱۵)}{\omega(\omega^۲+۹)(\omega^۲+۱)}$$

اکنون می‌توان نمودار نایکوئیست تابع تبدیل را با استفاده از چهار نقطه مهم زیر رسم کرد:

۱ـ در $\omega = ۰$ داریم

$$|G(j\omega)| = \infty \quad ; \quad \angle G(j\omega) = -۹۰^\circ$$

$[G(j\omega)]$ قسمت موهومی $= -\infty$; $[G(j\omega)]$ قسمت حقیقی $= \frac{-۳۴۰}{۹}$

بنابراین نمودار نایکوئیست با اندازه بی‌نهایت از زاویه فاز ۹۰- آغاز می‌شود. مجانب نمودار نایکوئیست بر روی محور حقیقی منفی در $\frac{-۳۴۰}{۹}$ قرار دارد.

۲ـ در $\omega = \infty$ داریم

$$|G(j\omega)| = ۰ \quad ; \quad \angle G(j\omega) = -۱۸۰^\circ$$

$[G(j\omega)]$ قسمت موهومی $= ۰$; $[G(j\omega)]$ قسمت حقیقی $= ۰$

بنابراین نمودار نایکوئیست به مبداء مختصات قطبی با زاویه ۱۸۰°- وارد می‌شود.

۳ـ برای تعیین نقطه احتمالی قطع محور حقیقی، زاویه فاز را برابر ۰° یا ۱۸۰°± و قسمت موهومی را برابر صفر قرار می‌دهیم. داریم

$$\frac{۲۰(\omega^۲-۱۵)}{\omega(\omega^۲+۹)(\omega^۲+۱)} = ۰$$

و لذا برای فرکانس $\omega = \sqrt{۱۵}$، بدست می‌آوریم

$$\left[G(j\omega)\right] \text{ قسمت حقیقی} = \frac{-۲۰(۱۵+۱۷)}{(۱۵+۹)(۱۵+۱)} = -\frac{۵}{۳}$$

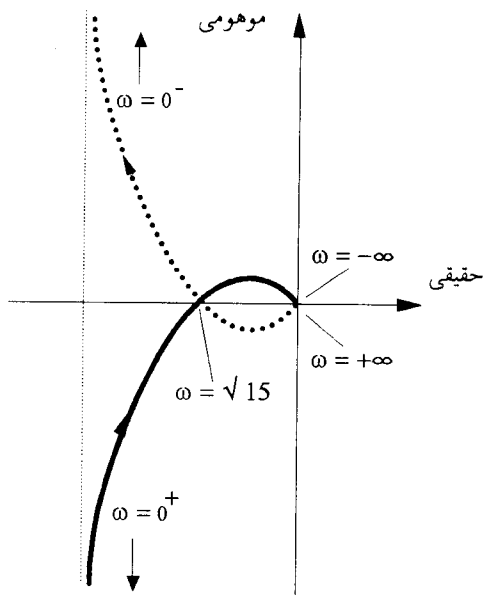
۴ـ برای تعیین نقطه احتمالی قطع محور موهومی زاویه فاز را برابر ۹۰°± و قسمت حقیقی را برابر صفر قرار می‌دهیم، داریم

$$\frac{-۲۰(\omega^۲+۱۷)}{(\omega^۲+۹)(\omega^۲+۱)} = ۰$$

که به ازاء هیچ فرکانس حقیقی برآورده نمی‌گردد، لذا نقطه قطع با محور موهومی وجود ندارد.

با استفاده از نکات بدست آمده، نمودار نایکوئیست این تابع تبدیل در شکل ۵-۲۰ رسم شده است. هر نقطه بر روی نمودار نایکوئیست $G(j\omega)$ نشان دهنده دامنه و فاز تابع تبدیل در یک فرکانس است. تصاویر $G(j\omega)$ بر روی محورهای حقیقی و موهومی به ترتیب مؤلفه‌های حقیقی و موهومی $G(j\omega)$ می‌باشند. در واقع برای رسم نمودار نایکوئیست، دامنه $|G(j\omega)|$ و زاویه فاز $\angle G(j\omega)$ باید مستقیماً در هر فرکانس بدست آورده شوند.

یک مزیت نمودار نایکوئیست آن است که مشخصه‌های پاسخ فرکانسی سیستم را بر روی گسترهٔ کامل فرکانسی، در یک نمودار نشان می‌دهد.



شکل ۵-۲۰ نمودار نایکوئیست تابع تبدیل مثال ۵-۱۴

۵-۳-۱ نمودارهای نایکوئیست سیستم‌های نوع صفر، یک و دو

نمودار نایکوئیست سیستم‌های نوع صفر. تابع تبدیل نوع صفر زیر را در نظر بگیرید

$$G(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega T} = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}} \angle -\tan^{-1}\omega T \qquad (۵-۳-۱)$$

مقادیر $G(j\omega)$ در $\omega=0$ و $\omega=1/T$ به ترتیب عبارتند از $G(j0)=1\angle 0^\circ$ و $G(j\frac{1}{T})=\frac{1}{\sqrt{2}}\angle -45^\circ$ برای مقادیر $\omega\to 0$، دامنه $G(j\omega)$ به سمت صفر میل کرده و زاویه آن به سمت -90° میل می‌کند. نمودار نایکوئیست این تابع تبدیل یک نیم دایره است، که در شکل ۵-۲۱ (الف) نشان داده شده است.

اگر به تابع تبدیل ساده معادله (۵-۳-۱) یک قطب دیگر اضافه کنیم و بهره K_0 را نیز برای آن در نظر بگیریم. داریم

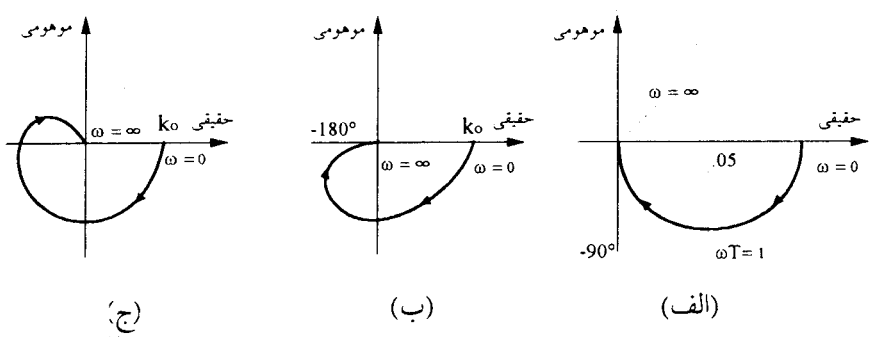
$$G(j\omega)=\frac{K_0}{(1+j\omega T_1)(1+j\omega T_2)} \qquad (۵-۳-۲)$$

از معادله (۵-۳-۲)، بدست می‌آوریم

$$G(j\omega)\to K_0\angle 0^\circ \qquad \omega\to 0$$

$$G(j\omega)\to 0\angle -180^\circ \qquad \omega\to$$

توجه کنید که برای هر عبارت در مخرج تابع تبدیل داده شده با معادله (۵-۳-۲)، زاویه فاز از ۰ تا -90° به ازاء تغییرات ω از ۰ تا ∞ تغییر می‌کند. لذا نمودار نایکوئیست این تابع تبدیل از $K_0\angle 0^\circ$ شروع و با کاهش درجه از ۰ به -90° و سپس با -180° به مبداء صفحه قطبی وارد می‌شود. رسم دقیق نمودار نایکوئیست به مقادیر T_1 و T_2 بستگی دارد. رسم تقریبی نمودار نایکوئیست تابع تبدیل داده شده با معادله (۵-۳-۲) در شکل ۵-۲۱ (ب) نشان داده شده است.



شکل ۵-۲۱ (الف) نمودار نایکوئیست $1/(1+j\omega T)$ (ب) نمودار نایکوئیست تابع تبدیل معادله (۵-۳-۲) (ج) نمودار نایکوئیست تابع تبدیل معادله (۵-۳-۳)

اگر به تابع تبدیل داده شده با معادله (۵-۳-۲) یک قطب دیگر اضافه کنیم، داریم

$$G(j\omega)=\frac{K_0}{(1+j\omega T_1)(1+j\omega T_2)(1+j\omega T_3)} \qquad (۵-۳-۳)$$

دقت کنید که افزودن قطب سوم، موجب آن می‌شود که $G(j\omega)$ در فرکانس‌های بالا $\omega\to\infty$ به اندازه 90° در جهت عقربه ساعت بچرخد. به عبارت دیگر

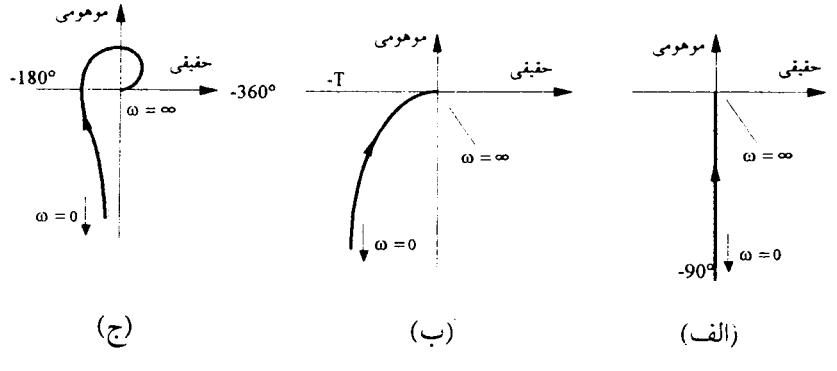
$$G(j\omega)\to 0\angle -270^\circ \qquad \omega\to\infty$$

در این حالت با محور حقیقی و موهومی نقاط قطع خواهیم داشت. رسم دقیق این تابع تبدیل نیز به مقادیر T_1 ، T_2 و T_3 بستگی دارد ولی نمودار تقریبی نایکوئیست آن در شکل ۵-۲۱ (ج) نشان داده شده است.

نمودار نایکوئیست سیستم‌های نوع یک. تابع تبدیل نوع یک زیر را در نظر بگیرید

$$G(j\omega)=\frac{1}{j\omega}=-j\frac{1}{\omega}=\frac{1}{\omega}\angle -90^\circ \qquad (۵-۳-۴)$$

نمودار نایکوئیست این تابع تبدیل، محور موهومی منفی است و در شکل ۵-۲۲ (الف) نشان داده شده است.



(ج) (ب) (الف)

شکل ۵-۲۲ (الف) نمودار نایکوئیست $G(j\omega)=\frac{1}{j\omega}$ (ب) نمودار نایکوئیست $G(j\omega)=\frac{1}{j\omega(1+j\omega T)}$ (ج) نمودار نایکوئیست تابع تبدیل داده شده با معادله (۵-۳-۶)

اگر به تابع تبدیل داده شده با معادله (۵-۳-۴)، یک قطب اضافه کنیم، داریم

$$G(j\omega)=\frac{۱}{j\omega(۱+j\omega T)} \qquad (۵-۳-۵)$$

قسمت فرکانس پایین نمودار نایکوئیست، $\omega\to ۰$، عبارتست از

$$G(j\omega)\to \infty \angle -۹۰^\circ \qquad \omega\to ۰$$

و قسمت فرکانس بالای آن عبارتست از

$$G(j\omega)\to ۰\angle -۱۸۰^\circ \qquad \omega\to\infty$$

نمودار تقریبی نایکوئیست این تابع تبدیل، در شکل ۵-۲۲ (ب) رسم شده است. خط عمودی موازی با محور موهومی، در نقطه $-T$، مجانب نمودار نایکوئیست است.

اگر به تابع تبدیل داده شده با معادله (۵-۳-۵)، دو قطب دیگر اضافه کنیم داریم

$$G(j\omega)=\frac{K_۱}{j\omega(۱+j\omega T_۱)(۱+j\omega T_۲)(۱+j\omega T_۳)} \qquad (۶-۳-۵)$$

بنابراین در این حالت بدست می‌آوریم

$$G(j\omega)\to \infty \angle -۹۰^\circ \qquad \omega\to ۰$$

$$G(j\omega)\to ۰\angle -۳۶۰^\circ \qquad \omega\to$$

توجه کنید که هر کدام از عبارت مخرج تابع تبدیل -۹۰° به مجموع زوایا در فرکانس‌های بالا اضافه خواهند کرد. دقت کنید که دامنه $G(j\omega)$ به ازاء $\omega\to ۰$ به سمت بی‌نهایت میل می‌کند. در واقع خطی موازی با محور موهومی منفی، به صورت مجانبی خواهد بود که $G(j\omega)$ به سمت آن میل می‌کند. برای تعیین این مجانب باید مقدار قسمت حقیقی تابع تبدیل را در حد $\omega\to ۰$ پیدا کنیم. بنابراین

$$\text{مجانب } G(j\omega) = \lim_{\omega\to ۰} [\text{قسمت حقیقی } G(j\omega)] \qquad (۷-۳-۵)$$

و برای تابع تبدیل داده شده با معادله (۵-۳-۶)، بسادگی از معادله (۵-۳-۷) نشان داده می‌شود که مجانب تابع تبدیل در $-K_۱(T_۱+T_۲+T_۳)$ قرار دارد. نمودار تقریبی نایکوئیست تابع تبدیل داده شده با معادله (۵-۳-۶) در شکل ۵-۲۲ (ج) نشان داده شده است.

نمودار نایکوئیست سیستم‌های نوع دو. تابع تبدیل نوع دو زیر را در نظر بگیرید

$$G(j\omega)=\frac{1}{(j\omega)^2}=\frac{1}{\omega^2}\angle -180^\circ \qquad (۵-۳-۸)$$

نمودار نایکوئیست این تابع تبدیل، محور حقیقی منفی است و در شکل ۵-۲۳ (الف)، نشان داده شده است.

اگر به تابع تبدیل داده شده با معادله (۵-۳-۸) دو قطب اضافه کنیم، داریم

$$G(j\omega)=\frac{K_2}{(j\omega)^2(1+j\omega T_1)(1+j\omega T_2)} \qquad (۵-۳-۹)$$

برای تابع تبدیل داده شده با معادله (۵-۳-۹)، داریم

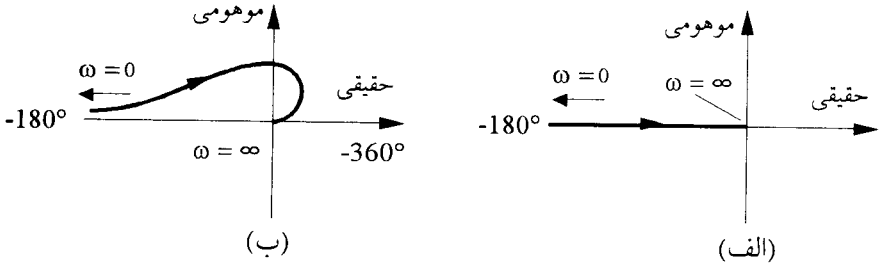
$$G(j\omega)\to\infty\angle\ 180^\circ \qquad \omega\to 0$$

$$G(j\omega)\to 0\angle -360^\circ \qquad \omega\to$$

دقت کنید که عبارت $(j\omega)^2$ در مخرج، -180° به زاویه فاز $G(j\omega)$ در کلیه فرکانس‌ها اضافه می‌کند. هر کدام از عبارات دیگر در مخرج -90° به مجموع زوایا در فرکانس‌های بالا اضافه می‌کنند. شکل ۵-۲۳ (ب) نمودار تقریبی نایکوئیست این تابع تبدیل را نشان می‌دهد.

به تابع تبدیل داده شده با معادله (۵-۳-۹)، یک قطب و صفر اضافه می‌کنیم. لذا

$$G(j\omega)=\frac{K_2(1+j\omega T_0)}{(j\omega)^2(1+j\omega T_1)(1+j\omega T_2)(1+j\omega T_3)} \qquad (۵-۳-۱۰)$$

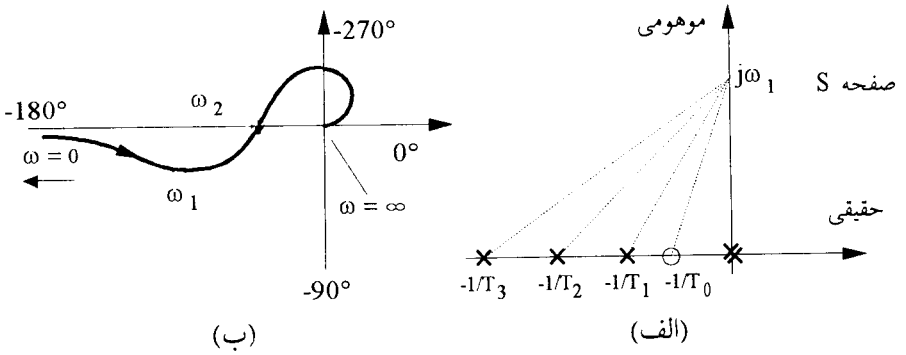


شکل ۵-۲۳ (الف) نمودار نایکوئیست تابع تبدیل $1/(j\omega)^2$ (ب) نمودار نایکوئیست تابع تبدیل داده شده با معادله (۵-۳-۹)

که در آن $T_0 > T_3$ (توجه کنید که رسم دقیق نمودار نایکوئیست تنها با اطلاع از مقادیر T_0 ، T_1 ، T_2 ، T_3 و K_2 امکان‌پذیر است). نمودار نایکوئیست تابع تبدیل را با استفاده از دیاگرام قطب ـ صفر نوعی نشان داده شده در شکل ۵-۲۴ (الف) رسم می‌کنیم.

در فرکانس $\omega = 0$ زاویه هر کدام از عوامل تابع تبدیل، بجز قطب مضاعف در مبداء صفر می‌باشد. بنابراین زاویه فاز تابع تبدیل در $\omega = 0$ ، $-180°$ است. با افزایش ω از صفر، زاویه $j\omega + 1/T$ از سایر عوامل سریعتر افزایش پیدا می‌کند و در حقیقت در فرکانس‌های پایین زاویه ناشی از صفر بزرگتر از مجموع زوایای قطبهای تابع تبدیل در سمت چپ صفر است (به شکل ۵-۲۴ (الف) مراجعه کنید). همانطور که در شکل ۵-۲۴ (ب) نشان داده شده است، در فرکانسی مانند ω_2 مجموع زوایای $G(j\omega)$ برابر با $-180°$ خواهد شد و در این فرکانس نمودار نایکوئیست محور حقیقی را قطع می‌کند. با افزایش ω و در فرکانس‌های بالا $\omega \to \infty$ ، زاویه $j\omega + 1/T_0$ تنها اندکی تغییر خواهد کرد و حال آنکه سایر قطبهای سمت چپ آن به سرعت افزایش زاویه خواهند داشت و در حد $\omega \to \infty$ ، زاویه فاز $G(j\omega)$ به سمت $-360°$ میل می‌کند (دقت کنید که از دو قطب در مبداء $-180°$، از سه قطب دیگر $-270°$ و از صفر $+90°$ خواهیم داشت). نمودار تقریبی نایکوئیست تابع تبدیل داده شده با معادله (۵-۳-۱۰) در شکل ۵-۲۴ (ب) نشان داده شده است.

توجه کنید که نحوه و ترتیب قرار گرفتن قطبها و صفرها بر روی محور حقیقی، شکل



شکل ۵-۲۴ (الف) دیاگرام قطب ـ صفر تابع تبدیل داده شده با معادله (۵-۳-۱۰) (ب) نمودار نایکوئیست تابع تبدیل داده شده با معادله (۵-۳-۱۰).

نهایی نمودار نایکوئیست را در محدوده فرکانسی ۰ تا ∞ تعیین می‌کند. بدون ذکر اثبات، در اینجا اشاره می‌کنیم که نمودار نایکوئیست یک سیستم نوع دو برای $\omega \to 0$ زیر محور حقیقی است اگر رابطه زیر برقرار باشد

(۵-۳-۱۱) ۰ < (مجموع T های مخرج) - (مجموع T های صورت)

برای تابع تبدیل داده شده با معادله (۵-۳-۱۰)، شرط لازم آن است که $T_0 > T_1 + T_2 + T_3$ باشد. اگر عبارت داده شده در (۵-۳-۱۱) منفی باشد، نمودار نایکوئیست از بالای محور حقیقی شروع می‌شود. برای تابع تبدیل داده شده با معادله (۵-۳-۹)، داریم $(T_1 + T_2) - 0 < 0$ و لذا از بالای محور حقیقی شروع شده است.

۵-۳-۲ نمودار نایکوئیست سیستم‌های تأخیردار

تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید

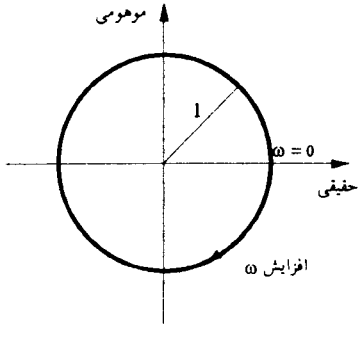
$$G(j\omega) = e^{-j\omega T} \qquad (۵-۳-۱۲)$$

عنصر تأخیر معادله (۵-۳-۱۲)، را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$G(j\omega) = 1\angle(\cos\omega T - j\sin\omega T) \qquad (۵-۳-۱۳)$$

از آنجاییکه دامنه $G(j\omega)$ هموار یک است و زاویه فاز به طور خطی با ω تغییر پیدا می‌کند، نمودار نایکوئیست عنصر تأخیر همانطور که در شکل ۵-۲۵ نشان داده شده است، یک دایره واحد است.

دقت کنید که در فرکانس‌های پایین، $\omega \to 0$، عنصر تأخیر $e^{-j\omega T}$ و سیستم نوع یک



شکل ۵-۲۵ نمودار نایکوئیست عنصر تأخیر

$1/(1+j\omega T)$ همانند هم رفتار می‌کنند. نمودارهای نایکوئیست عنصر تأخیر و تابع تبدیل مرتبه اول نوع یک در شکل ۵-۲۶ نشان داده شده‌اند. دقت کنید که برای $\omega << 1/T$ داریم

$$e^{-j\omega T} \approx 1 - j\omega T \quad , \quad \frac{1}{1+j\omega T} \approx 1 - j\omega T$$

مثال ۵-۱۵

تابع تبدیل سیستم تأخیردار زیر را در نظر بگیرید

$$G(j\omega) = \frac{e^{-j\omega T}}{1+j\omega T_1}$$

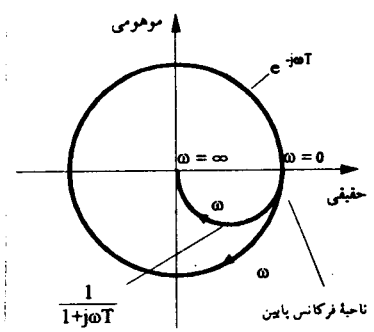
داریم

$$|G(j\omega)| = |e^{-j\omega T}| \left|\frac{1}{1+j\omega T_1}\right| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2 T_1^2}}$$

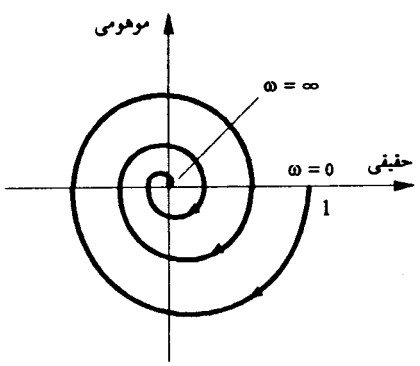
و

$$\angle G(j\omega) = \angle e^{-j\omega T} + \angle 1/(1+j\omega T_1)$$
$$= -\omega T - \tan^{-1} \omega T$$

از آنجاییکه دامنه به طور یکنواخت به سمت صفر و زاویه فاز نیز به طور یکنواخت و تا بی‌نهایت کاهش پیدا می‌کند، نمودار نایکوئیست تابع تبدیل داده شده به صورت حلزونی[1] است. نمودار نایکوئیست این تابع تبدیل در شکل ۵-۲۷، نشان داده شده است.



شکل ۵-۲۶ نمودارهای نایکوئیست عنصر تأخیر و تابع تبدیل مرتبه اول



شکل ۵-۲۷ نمودارهای نایکوئیست $e^{-j\omega T}/(1+j\omega T)$

1- Spiral

۵-۳-۳ خلاصه‌ای از قواعد کلی رسم نمودارهای نایکوئیست

برای رسم نمودارهای نایکوئیست یک تابع تبدیل، از قواعد زیر می‌توان برای رسم قسمتهای اصلی آن استفاده کرد.

قاعده ۱ـ تابع تبدیل کلی به صورت زیر است

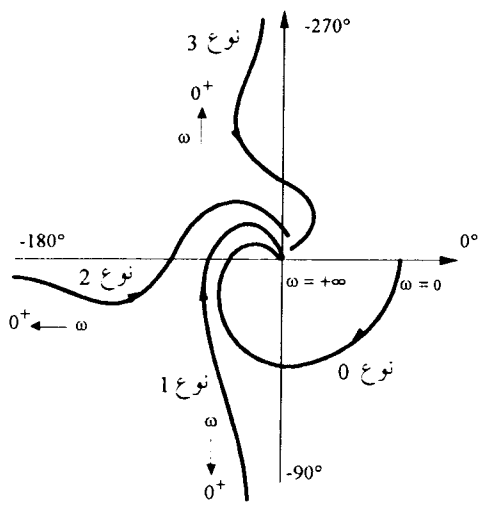
$$G(j\omega)=\frac{K_m(1+j\omega T_{z1})(1+j\omega T_{z2})...(1+\omega T_{z\omega})}{(j\omega)^m(1+j\omega T_1)(1+j\omega T_2)...(1+j\omega T_u)} \qquad (۱۴-۳-۵)$$

تابع تبدیل داده شده از نوع m است و نوع تابع تبدیل، قسمت فرکانس پایین $G(j\omega)$ را تعیین می‌کند. مشخصه‌های فرکانس پایین نمودارهای نایکوئیست برای سیستمهای نوع یک، دو و سه، در شکل ۵-۲۸ نشان داده شده‌اند.

قاعده ۲ـ قسمت فرکانس بالای نمودار نایکوئیست، $\omega\to\infty$، را می‌توان بدین صورت تعیین کرد

$$G(j\omega)\to 0\angle w\cdot m\cdot u)90^\circ \qquad (۱۵-۳-۵)$$

توجه کنید که درجهٔ مخرج تابع تبدیل داده شده با معادله (۵-۳-۱۴) همواره بزرگتر از درجهٔ صورت آن است، و لذا نقطه فرکانس بالا ($\omega=\infty$) در جهت عقربهٔ ساعت به سمت صفر میل خواهد کرد. نمودار ممکن است که از هر طرف محور وارد مبداء گردد. **(شکل (۵ـ۲۹)).**



شکل ۵-۲۸ نمودارهای نایکوئیست توابع تبدیل نوع صفر، یک، دو و سه.

قاعده ۳ـ مجانب قسمت فرکانس پایین نمودار نایکوئیست یک سیستم درجه اول، با گرفتن حد $\omega \to 0$ از قسمت حقیقی تابع تبدیل بدست می‌آید.

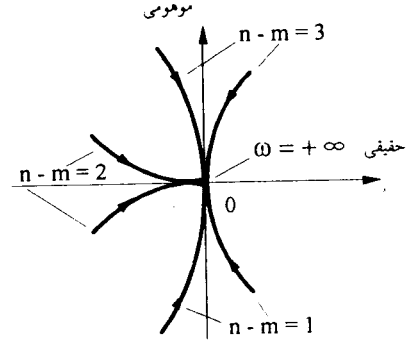
قاعده ۴ـ فرکانس‌هایی که در آنها نمودار نایکوئیست با محور حقیقی منفی و محور موهومی تلاقی دارند، به ترتیب از روابط زیر تعیین می‌گردند

$$[G(j\omega)] \text{ قسمت موهومی} = 0 \qquad (۵-۳-۱۶)$$

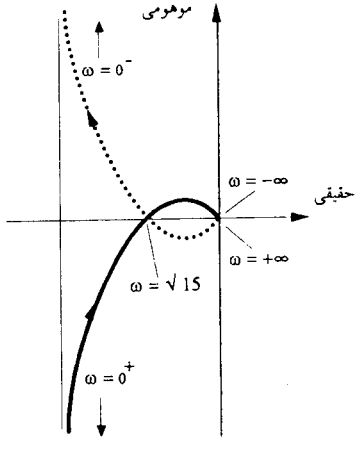
$$[G(j\omega)] \text{ قسمت حقیقی} = 0 \qquad (۵-۳-۱۷)$$

قاعده ۵ـ اگر کلیه $T_{z1}, T_{z2}, \ldots, T_{z\omega}$ صفر باشند و یا به عبارت دیگر تابع تبدیل صفر محدود نداشته باشد، زاویه $G(j\omega)$ به طور پیوسته به ازاء ω از ۰ تا ∞، کاهش پیدا می‌کند. اگر تابع تبدیل صفر محدود داشته باشد، شمای نمودار نایکوئیست به محل صفرها و قطبها بستگی خواهد داشت و زاویه ممکن است به طور پیوسته در یک جهت تغییر پیدا نکرده و لذا نوعی «تورفتگی» ایجاد کند.

قاعده ۶ـ نمودار نایکوئیست تابع تبدیل $G(j\omega)$ یک سیستم خطی تغییرناپذیر با زمان برای $0 < \omega < \infty$-، حول محور حقیقی با محور نایکوئیست تابع تبدیل $G(j\omega)$ برای $\infty > \omega > 0$، متقارن است. بسادگی می‌توان از معادله (۵-۳-۱۴) نشان داد که $G(-j\omega) = G^*(j\omega)$، که در آن * علامت مزدوج مختلط است. بنابراین اگر برای یک فرکانس مشخص مانند ω_1، $G(j\omega_1) = \alpha - j\beta$ آنگاه $G(-j\omega_1) = \alpha + j\beta$. لذا نمودار پاسخ



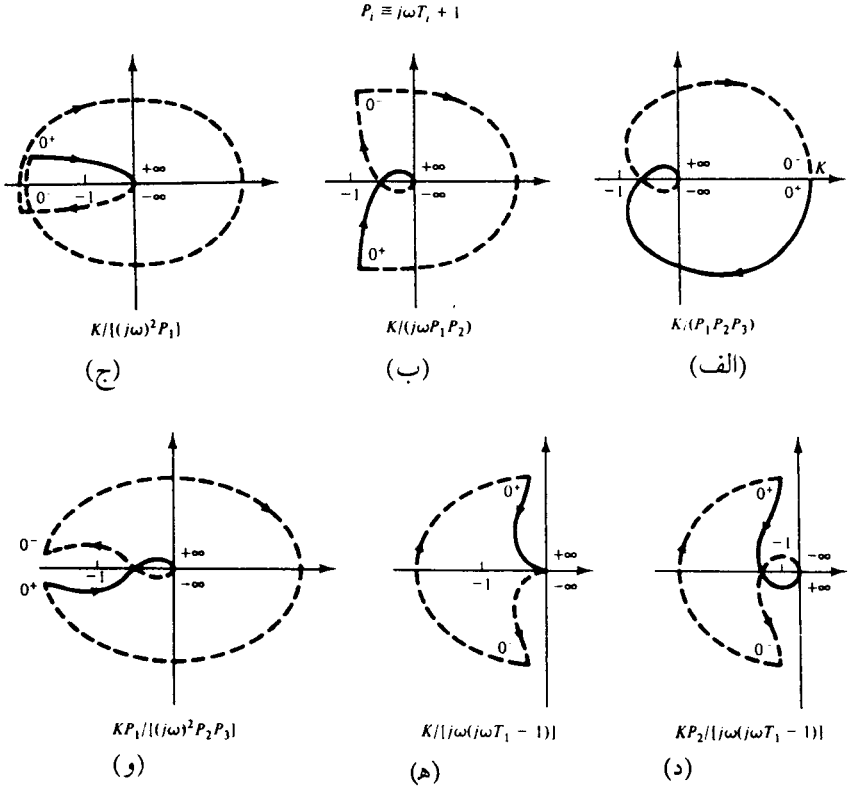
شکل ۵-۲۹ نمودار نایکوئیست در گستره فرکانسی بالا برای $G(j\omega)$ با m صفر محدود و n قطب.



شکل ۵-۳۰ نمودار نایکوئیست با فرکانس‌های مثبت و منفی.

فرکانسی منفی حول محور حقیقی با نمودار پاسخ فرکانسی مثبت متقارن خواهد بود. شکل ۵-۳۰ نمودار نایکوئیست تابع تبدیل مثال ۵-۱۴ را که در شکل ۵-۲۰ رسم شده بود، برای فرکانس‌های منفی تکمیل کرده است.

قاعده ۷ـ نمودار *کامل نایکوئیست (قطبی)* با وصل کردن قسمتهای وصل نشده منحنی نایکوئیست در بی‌نهایت بدست می‌آید. دو قسمت نمودار نایکوئیست در بی‌نهایت را توسط یک مسیر به هم وصل می‌کنیم، مسیر ارتباط دهنده در بینهایت همواره باید در جهت عقربه ساعت حرکت کند و هم‌چنین باید به گونه‌ای باشد که مسیر در جهت افزایش فرکانس باشد. نمودارهای کامل نایکوئیست چندین سیستم در شکلهای نشان داده شده در شکل ۵-۳۱ آورده شده‌اند. (برای تمرین می‌توانید کلیه این شکلها را با بکارگیری قواعد داده شده رسم کنید).



شکل ۵-۳۱ نمودارهای کامل نایکوئیست چند سیستم نمونه

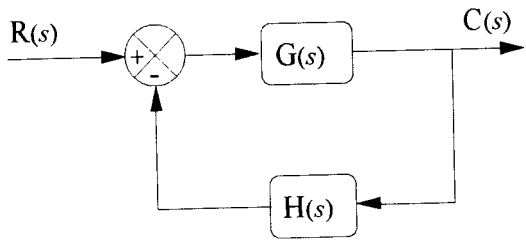
۵-۴ معیار پایداری نایکوئیست

سیستم نشان داده شده در شکل ۵-۳۲ را در نظر بگیرید. تابع تبدیل سیستم حلقه ـ بسته بدین صورت داده می‌شود

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} \qquad (۵-۴-۱)$$

و معادلهٔ مشخصه آن عبارتست از

$$1+G(s)H(s)=0 \qquad (۵-۴-۲)$$



شکل ۵-۳۲ یک سیستم حلقه ـ بسته

با جایگزینی $G(s)=\frac{N_1(s)}{D_1(s)}$ و $H(s)=\frac{N_2(s)}{D_2(s)}$ در معادله (۵-۴-۲)، که در آن $N_i(s)$ و $D_i(s)$

$$1+\frac{N_1(s)N_2(s)}{D_1(s)D_2(s)}=\frac{D_1(s)D_2(s)+N_1(s)N_2(s)}{D_1(s)D_2(s)}$$

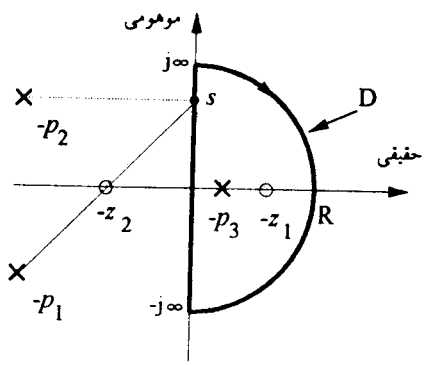
$$=\frac{K(s+z_1)(s+z_2)\ldots}{(s+p_1)(s+p_2)\ldots} \qquad (۵-۴-۳)$$

دقت کنید که قطبهای سیستم حلقه ـ بسته (ریشه‌های معادله ـ مشخصه)، صفرهای چند جمله‌ای $1+G(s)H(s)=0$، $z_1,z_2,\ldots$ هستند. اگر $z_1,z_2,\ldots$ معلوم باشند، با بررسی موقعیت آنها در صفحه s پایداری سیستم حلقه ـ بسته بسادگی تعیین می‌شود. در حالت کلی موقعیت قطبهای $1+G(s)H(s)=0$ که همان قطبهای حلقه ـ باز $G(s)$ و $H(s)$ $(p_1,p_2,\ldots)$ هستند معلوم بوده ولی موقعیت صفرهای $1+G(s)H(s)$، که قطبهای سیستم حلقه ـ بسته $(z_1,z_2,\ldots)$ هستند، معلوم نمی‌باشد.

فرض کنید که تشکیلات قطب ـ صفر سیستم حلقه ـ بسته به صورت نشان داده شده در شکل ۵-۳۳ باشد، که در آن موقعیت z_iها در حالت کلی معلوم نیست. شرط لازم و کافی پایداری سیستم حلقه ـ بسته آن است که هیچکدام از صفرهای معادله (۵-۴-۳) در ناحیه داخل مسیر *نایکوئیست*[1] قرار نگیرند، به عبارت دیگر هیچکدام از قطبهای حلقه ـ بسته در محدودهٔ ناپایداری (سمت راست محور موهومی) نباشند. مسیر نایکوئیست D همانطور که در شکل ۵-۳۳ نشان داده شده است، مسیری است که کلیه نیمه راست صفحه sرا در بر می‌گیرد و شامل محور موهومی از $-j\infty$ تا $+j\infty$ و یک نیمدایره با شعاع $R\to\infty$ در سمت راست صفحه است.

اساس تحلیل پایداری به روش نایکوئیست بر بررسی نمودار نایکوئیست $1+G(s)H(s)$ در صفحه مختلط به ازاء تغییرات s هنگامی که یک بار در جهت عقربه ساعت دور مسیر D می‌چرخد، بنا نهاده شده است.

رسم نمودار نایکوئیست $G(j\omega)H(j\omega)$ به ازاء تغییرات ω از ۰ تا ∞ را در بخش ۵-۳ مفصلاً بررسی کردیم. در واقع نمودار نایکوئیست $1+G(j\omega)H(j\omega)$ همان نمودار نایکوئیست $G(j\omega)H(j\omega)$ است، در حالیکه مبداء صفحه s به نقطه ۱- بر روی محور حقیقی منفی انتقال داده شده باشد. هم‌چنین نمودار نایکوئیست $1+G(j\omega)H(j\omega)$، به ازاء تغییرات ω از 0^- تا $-\infty$ دقیقاً تصویر نمودار $1+G(j\omega)H(j\omega)$، به ازاء تغییرات ω از 0^+ تا ∞ حول



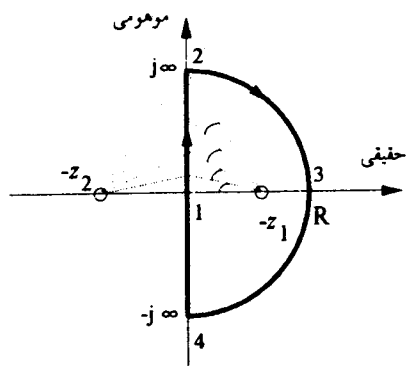
شکل ۵-۳۳ مسیر نایکوئیست

1- Nyquist contour

محور حقیقی است (خاصیت تقارن نمودارهای نایکوئیست، قاعده ۶ بخش ۵-۳).

برای آن قسمت از مسیر نایکوئیست که در طول نیم‌دایره با شعاع $R\to\infty$ قرار دارد، مقدار $1+G(j\omega)H(j\omega)$ ثابت و معمولاً برابر یک است، زیرا از نظر تحقق‌پذیری فیزیکی، در اکثر سیستم‌ها تعداد قطبها بیشتر از تعداد صفرها است. از اینرو مقدار $G(s)H(s)$ به ازاء $|s|\to\infty$، به سمت صفر میل خواهد کرد.

با مراجعه به شکل ۵-۳۳، اگر s در جهت عقربه ساعت مسیر نایکوئیست D را یک بار دور بزند، بردارهای $s+z_i$ و $s+p_i$ برای z_i ها و p_i هایی که در داخل محدودهٔ محصور شده توسط D هستند، 360° در جهت عقربهٔ ساعت خواهند چرخید. برای توضیح بیشتر این مطلب، توجه کنید که اگر نقطهٔ شروع حرکت، نقطه s بر روی مسیر D، همانطور که در شکل ۵-۳۴ نشان داده شده است، مبداء صفحه s در نظر گرفته شود (این نقطه با ۱ نشان داده شده است) و s در جهت حرکت عقربه ساعت به حرکت درمی‌آید، پس از رسیدن به نقطه ۲ در $+j\infty$ بر روی نیمدایره با شعاع $R\to\infty$ به سمت نقطه ۳ حرکت خواهد کرد. در حرکت از نقطه ۱ تا ۳ مجموع زوایایی که بردار $s+z_1$ چرخیده است برابر با $+180^\circ$ خواهد بود. اگر s در جهت عقربه ساعت به سمت نقطه ۴ در $-j\infty$ حرکت کند و از $-j\infty$ به $-j0^+$ در نقطه ۱ برسد، مجموع زوایای چرخیده شده از ۳ تا ۱ توسط بردار $s+z_1$، $+180^\circ$ خواهد بود. بنابراین بردار $s+z_1$ از نقطه شروع ۱ در $+0$ تا نقطه پایانی ۱ در -0 مجموعاً 360° در جهت عقربه ساعت چرخیده است. حال اگر نقطه z_2 را در نظر بگیریم، بردار $s+z_2$ با حرکت از ۱ و رسیدن به ۲ و با



شکل ۵-۳۴ زوایای چرخش

حرکت از ۲ و رسیدن به ۳ به ترتیب α° و $-\alpha^\circ$ چرخش دارد. از اینرو مجموع چرخشهای بردار $s+z_2$ برابر صفر درجه خواهد بود. به طور مشابهی، مجموع چرخشها از ۳ به ۴ و ۴ به ۱ نیز صفر درجه است و لذا مجموع چرخشها از نقطه شروع ۱ در 0^+ تا نقطه پایانی ۱ در 0^-، مجموعاً صفر درجه است. بنابراین قطبهایی که در خارج از ناحیه محصور شده توسط مسیر نایکوئیست D قرار گیرند (به عبارت دیگر قطبهایی که در سمت چپ محور موهومی قرار دارند) مجموع چرخشی برابر 0° خواهند داشت.

از معادله (۵-۴-۳) (با توجه به اینکه z_iها در صورت قرار دارند) اگر بردار $s+z_i$، 360° در جهت عقربه ساعت بچرخد، 360° چرخش در جهت عقربه ساعت برای بردار $1+G(s)H(s)$ در صفحه مختلط که در آن رسم شده است، ایجاد می‌کند. اگر بردار $s+p_i$ (با توجه به اینکه p_iها در مخرج قرار دارند) 360° در جهت عقربه ساعت بچرخد، 360° چرخش در جهت خلاف عقربه ساعت برای بردار $1+G(s)H(s)$ در صفحه مختلط که در آن رسم شده است، ایجاد می‌کند. قطبها و صفرهای خارج از ناحیه داخل مسیر D نیز در چرخش کلی بردار $1+G(s)H(s)$ اثری ندارند. نتایج بدست آمده را به صورت زیر جمع‌بندی می‌کنیم:

۱ـ مجموع کلیه چرخشهای در جهت عقربه ساعت نمودار $1+G(s)H(s)$، ناشی از صفرهای آن (قطبهای حلقه ـ بسته) برابر با مجموع صفرها در سمت راست صفحه s (Z_R) می‌باشد.

۲ـ مجموع کلیه چرخشهای در جهت خلاف عقربه ساعت نمودار $1+G(s)H(s)$، ناشی از قطبهای آن (قطبهای حلقه ـ باز) برابر با مجموع قطبها در سمت راست صفحه s (P_R) می‌باشد.

۳ـ مجموع کلیه چرخشهای $1+G(s)H(s)$ حول مبداء صفحه s (N) برابر با مجموع کلیه قطبها P_R منهای مجموع کلیه صفرها Z_R در نیمه راست صفحه s است.

به عبارت دیگر

$$N=\frac{\text{اختلاف فاز } [1+G(s)H(s)]}{2\pi}=P_R-Z_R \qquad (۵-۴-۴)$$

که در آن چرخش در خلاف عقربه ساعت و در جهت عقربه ساعت به ترتیب مثبت و منفی در نظر گرفته شده است.

معادله (۵-۴-۴) اساس معیار پایداری نایکوئیست است. توجه کنید که برای پایداری سیستم حلقه ـ بسته Z_R باید برابر صفر باشد و لذا

$$N=P_R \qquad (۵-۴-۵)$$

یعنی آنکه شرط لازم و کافی برای پایداری سیستم حلقه ـ بسته آن است که نمودار نایکوئیست $1+G(j\omega)H(j\omega)$ P_R بار (به تعداد قطبهای ناپایدار حلقه ـ باز) در جهت خلاف عقربه ساعت حول مبداء صفحه s دور بزند. برای آنکه بتوان این نتیجه مهم را به صورت قابل استفاده‌تری بیان کرد، همانطور که قبلاً نیز اشاره شد نمودار نایکوئیست $1+G(j\omega)H(j\omega)$ همان نمودار نایکوئیست $G(j\omega)H(j\omega)$ است، که به مقدار ۱- بر روی محور حقیقی منفی انتقال داده شده است. بنابراین تعداد دورانهای نمودار نایکوئیست $1+G(j\omega)H(j\omega)$ حول مبداء برابر با تعداد دورانهای نمودار نایکوئیست $G(j\omega)H(j\omega)$ حول نقطه ۱- بر روی محور حقیقی منفی می‌باشد.

معیار پایداری نایکوئیست: یک سیستم حلقه ـ بسته *پایدار است اگر و فقط اگر، تعداد دورانهای نمودار نایکوئیست* $G(j\omega)H(j\omega)$ *در جهت خلاف عقربه ساعت حول نقطه ۱- برابر با تعداد قطبهای ناپایدار* $G(j\omega)H(j\omega)$ باشد.

بسیاری از سیستم‌های عملی حلقه ـ باز پایدار هستند، یعنی آنکه $P_R=0$ معیار پایداری نایکوئیست برای این دسته از سیستم‌ها به صورت زیر بیان می‌گردد:

یک سیستم حلقه ـ بسته با سیستم حلقه ـ باز پایدار، پایدار خواهد بود اگر و فقط اگر نمودار نایکوئیست سیستم حلقه ـ باز دورانی حول نقطه ۱- نداشته باشد.

در حالت کلی، برای آنکه بتوان دورانهای نمودار نایکوئیست $G(j\omega)H(j\omega)$ را حول نقطه ۱- تعیین کرد، رسم کامل نمودار نایکوئیست الزامی است. اگر $G(j\omega)H(j\omega)$ پایدار باشد، می‌توان نشان داد که رسم کامل نمودار نایکوئیست الزامی نبوده و نمودار نایکوئیست برای ω از $+0$ تا $+\infty$ کافی خواهد بود.

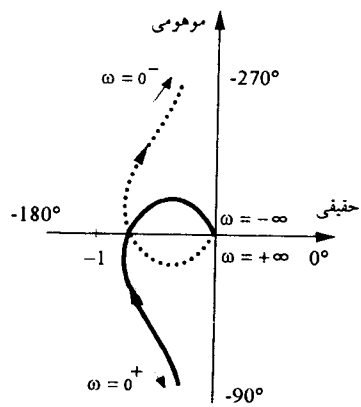
معیار ساده شده نایکوئیست: *اگر* $G(j\omega)H(j\omega)$ پایدار باشد. سیستم حلقه ـ بسته *پایدار است اگر و فقط اگر هنگامی که در جهت افزایش* ω *بر روی نمودار نایکوئیست*

$G(j\omega)H(j\omega)$ حرکت کنیم، نقطه ۱- در سمت چپ نمودار قرار گیرد.

سیستم‌های نوع یک و بالاتر. در استنتاج ارایه شده برای معیار پایداری نایکوئیست، فرض شده است که هیچکدام از قطبهای حلقه ـ باز سیستم بر روی محور موهومی (مسیر نایکوئیست) قرار نگرفته باشند (سیستم نوع صفر). در صورتیکه $G(s)H(s)$ قطبهایی در مبداء داشته باشد، مسیر نایکوئیست شکل ۵-۳۳ باید به صورت مناسبی تغییر داده شود. برای مثال تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید

$$G(s)H(s)=\frac{K_1}{s(1+T_1s)(1+T_2s)} \qquad (۶-۴-۵)$$

نمودار نایکوئیست این تابع تبدیل برای تغییرات ω از $\infty-$ تا 0^-j و 0^+j تا $\infty+$ در شکل ۵-۳۵ رسم شده است. در این حالت تابع تبدیل حلقه ـ باز یک قطب در مبداء دارد و لذا مسیر نایکوئیست شکل ۵-۳۳ به صورت نشان داده شده در شکل ۵-۳۶ (الف)، تغییر داده شده است تا s بر روی مسیر نایکوئیست از نقطه $s=0$ که یک نقطه تاویژه $G(s)H(s)$ است عبور نکند. همانطور که از شکل ۵-۳۶ (الف) مشاهده می‌شود برای بررسی پایداری، s از $-j\infty$ به سمت نقطه $-j\varepsilon$ ($\varepsilon\to 0$) انتقال پیدا می‌کند. از نقطه $s=j\varepsilon$ نیز همانند قبل به سمت $+j\infty$ میل خواهد کرد. دقت کنید که برای $\varepsilon\to 0$ نیمدایره حول مبداء موجب می‌شود که مسیر نایکوئیست از مبداء عبور نکند و همزمان ناحیه محصور شده توسط مسیر نایکوئیست کلیه



شکل ۵-۳۵ نمودار نایکوئیست تابع تبدیل داده شده با معادله (۵-۴-۶)

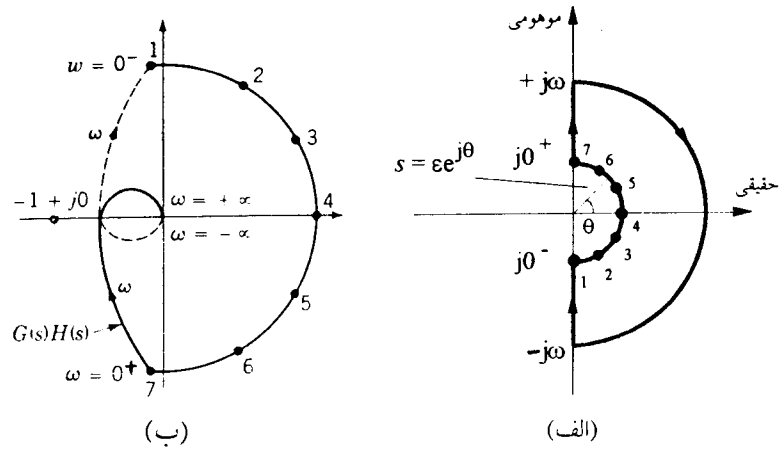
قطبها و صفرهای ناپایدار را دربرگیرد. برای آنکه بتوان نمودار نایکوئیست را برای این مسیر تکمیل کرد باید اثر حرکت نقطه s بر روی این نیمدایره حول مبداء را در نظر گرفت.

برای نیمدایره حول مبداء داریم $s=\varepsilon e^{j\theta}$، که در آن $\varepsilon \to 0$ و $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$. لذا با جایگزینی برای s و $\varepsilon \to 0$ در معادله (۵-۴-۶)، داریم

$$G(s)H(s)=\frac{K_1}{s}=\frac{K_1}{\varepsilon e^{j\theta}}=\frac{K_1}{\varepsilon}e^{-j\theta}=\frac{K_1}{\varepsilon}e^{j\phi}$$

که در آن $K_1/\varepsilon \to \infty$ برای $\varepsilon \to 0$ و ϕ از $\frac{\pi}{2}$ به $\frac{\pi}{2}$ - برای حرکت s در جهت خلاف عقربه ساعت از نقطه $(\varepsilon,-\pi/2)$ به $(\varepsilon,\pi/2)$ تغییر پیدا می‌کند. بنابراین همانطور که در شکل ۵-۳۶ (ب) مشاهده می‌شود، نقاط پایانی $\omega \to 0^-$ و $\omega \to 0^+$ توسط یک نیمدایره به شعاع بی‌نهایت از $\pi/2$ تا $-\pi/2$ در جهت عقربه ساعت به هم وصل می‌شوند. نقاط مشخص شده ۱ الی ۷ مراحل مختلف انتقال از $\omega=0^-$ به $\omega=0^+$ را مشخص می‌کنند.

نمودار $G(j\omega)H(j\omega)$ در شکل ۵-۳۶ (ب) نقطه ۱- را دور نمی‌زند و لذا تعداد دورانها حول این نقطه $N=0$ خواهد بود. برای $T_1,T_2>0$، تابع تبدیل داده شده با معادله (۵-۴-۶) پایدار است و لذا $P_R=0$، از معادله (۵-۴-۵) داریم که $Z_R=0$ و لذا سیستم حلقه ـ بسته پایدار است.



شکل ۵-۳۶ (الف) مسیر اصلاح شده نایکوئیست (ب) نمودار کامل نایکوئیست (۵-۴-۶)

در حالت کلی، توابع تبدیلی که عبارت s^m را در مخرج دارند، برای $\varepsilon \to 0$ به صورت زیر می‌باشند

$$G(s)H(s)=\frac{K_m}{s^m}=\frac{K_m}{(\varepsilon^m)e^{jm\theta}}=\frac{K_m}{\varepsilon^m}e^{-jm\theta} \qquad (۵-۴-۷)$$

که در آن $m=1,2,3,...$. از معادله (۵-۴-۷)، بسادگی مشاهده می‌شود که به ازاء تغییرات s از 0^- تا 0^+ نمودار $G(s)H(s)$ m نیمدایره‌هایی در جهت عقربه ساعت با شعاع بی‌نهایت را حول مبداء دنبال می‌کند. اگر $m=2$ باشد، آنگاه به ازاء تغییرات θ از $-\pi/2$ به $\pi/2$ در صفحه s با شعاع ε، $G(s)H(s)$ به اندازه $2(180^\circ)=360^\circ$ خواهد چرخید.

عبور از نقطهٔ $-1+j0$. نقطه مهم در تحلیل پایداری با معیار نایکوئیست، نقطهٔ -1 بر روی محور حقیقی منفی است. اگر نمودار $G(j\omega)H(j\omega)$ از نقطهٔ -1 عبور کند، تعداد چرخشهای N نامعین است. این حالت متناظر با شرایطی است که در آن $1+G(s)H(s)$ صفرهایی بر روی محور موهومی داشته باشد و در صورتی که این صفرها ساده باشند، پاسخ در حالت ـ ماندگار مؤلفه‌های سینوسی غیرمیرا دارد. لیکن در حالت کلی اگر نمودار $G(j\omega)H(j\omega)$ از نقطه -1 عبور کند، پایداری نایکوئیست را نمی‌توان اعمال نمود.

مثال ۵-۱۶

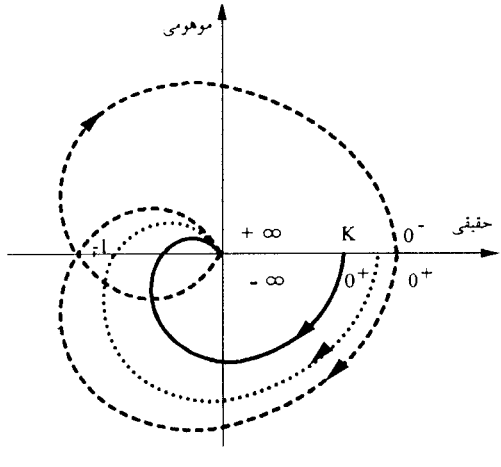
پایداری سیستم‌های (الف) تا (و) را با استفاده از معیار پایداری نایکوئیست، از نمودارهای کامل نایکوئیست نشان داده شده در شکل ۵-۳۱ بررسی کنید.

(الف): برای T_1، T_2 و T_3 مثبت، سیستم حلقه ـ باز پایدار است و لذا $P_R=0$ اگر مقادیر عددی به گونه‌ای باشند که نمودار نایکوئیست به صورت نشان داده شده در شکل ۵-۳۱ (الف) باشد، نمودار نایکوئیست نقطه -1 را در برنمی‌گیرد و لذا دورانی حول آن نخواهد داشت، $N=0$. با توجه به معادله (۵-۴-۴) تعداد قطبهای حلقه ـ بسته ناپایدار Z_R صفر و لذا سیستم حلقه ـ بسته پایدار است. اگر بهره سیستم حلقه ـ باز را افزایش دهیم، زاویه فاز $G(j\omega)$ تغییر نخواهد کرد لیکن دامنه آن متناسب با K افزایش خواهد یافت. از اینرو افزایش در بهره K موجب آن می‌گردد که هر نقطه بر روی نمودار نایکوئیست، به طور شعاعی به طرف خارج حرکت خواهد کرد. اثر

افزایش بهره K بر روی نمودار نایکوئیست در شکل ۵-۳۷ نشان داده شده است. توجه کنید که بعد از یک بهره مشخص، نقطهٔ ۱- در داخل نمودار نایکوئیست قرار می‌گیرد و اگر به طور کامل آنرا رسم کنیم، تعداد دورانهای حول نقطهٔ ۱- توسط نمودار نایکوئیست برای ω از $\infty-$ تا 0^- و از 0^+ تا $\infty+$، در جهت عقربهٔ ساعت دوبار می‌باشد و سیستم با دو قطب حلقه ـ بسته در سمت راست محور موهومی ناپایدار است.

(ب): همانطور که از شکل ۵-۳۱ (ب) مشاهده می‌شود، با توجه به نوع یک بودن سیستم، برای تکمیل نمودار نایکوئیست نقاط پایانی 0^- و 0^+ توسط یک دوران ۱۸۰° در جهت عقربه ساعت با شعاع $R\to\infty$ به هم وصل می‌شوند. برای T_1 و T_2 مثبت، سیستم حلقه ـ باز پایدار می‌باشد و از آنجاییکه نقطه ۱- توسط نمودار نایکوئیست دربرگرفته نشده است، لذا سیستم حلقه ـ بسته پایدار است. در این حالت نیز با افزایش بهره K، نمودار نایکوئیست نقطه ۱- را در برگرفته، تعداد دورانها حول نقطه ۱- برابر با دو می‌باشند و سیستم حلقه ـ بسته ناپایدار خواهد شد.

(ج): در این حالت سیستم نوع دو است و در تکمیل نمودار نایکوئیست باید ۳۶۰° چرخش در جهت عقربه ساعت با شعاع $R\to\infty$ برای اتصال 0^- و 0^+ داشته باشیم. با توجه به دوبار چرخش نمودار نایکوئیست حول نقطه ۱- سیستم به ازاء کلیه بهره K ناپایدار است.



شکل ۵-۳۷ افزایش بهره K بر روی نمودار نایکوئیست شکل ۵-۳۱ (الف)

(د): با توجه به ($T_1>0$) تابع تبدیل یک قطب ناپایدار دارد. تعداد دورانهای حول نقطه ۱- توسط نمودار نایکوئیست یک دور در جهت خلاف عقربه ساعت است. با توجه به معیار پایداری نایکوئیست، از آنجاییکه تعداد دورانهای نمودار نایکوئیست حول نقطه ۱- در جهت خلاف عقربه ساعت و برابر با تعداد قطبهای ناپایدار حلقه ـ باز است، لذا سیستم حلقه ـ بسته پایدار است. دقت کنید که اگر بهره K راکاهش دهیم نقطه تقاطع نمودار نایکوئیست با محور حقیقی منفی به سمت نقطه ۱- حرکت می‌کند. اگر کاهش بهره به میزانی باشد که نقطه تقاطع نمودار نایکوئیست با محور حقیقی سمت راست نقطه ۱- باشد، سیستم حلقه ـ بسته ناپایدار خواهد شد و دوران حول نقطه ۱- یک بار در جهت عقربه ساعت خواهد بود ۱-=N.
از اینرو Z_R-۱=۱- و لذا ۲=Z_R.

(ه): تابع تبدیل شکل ۵-۳۱ (ه) نیز ناپایدار است. برای $\omega\to 0^+$ تابع تبدیل به سمت $-K/(j\omega)$ میل خواهد کرد. با توجه به علامت منفی و فاکتور $j\omega$ در مخرج، لذا نقطه شروع نمودار نایکوئیست برای $\omega\to 0^+$ از $+j\infty$ خواهد بود. برای $\omega\to+\infty$ تابع تبدیل به سمت یک ثابت تقسیم بر $(j\omega)^2$ میل می‌کند و لذا از سمت چپ به مبداء صفحه موهومی وارد خواهد شد. از آنجاییکه سیستم نوع یک است، برای اتصال 0^- به 0^+ چرخشی معادل ۱۸۰° در جهت عقربه ساعت با شعاع $R\to\infty$ خواهیم داشت. همانطورکه از شکل ۵-۳۱ (ه) مشاهده می‌شود، تعداد دورانها حول نقطهٔ ۱- یک بار در جهت عقربهٔ ساعت می‌باشد و از اینرو سیستم حلقه ـ بسته به ازاء کلیه بهره K ناپایدار خواهد بود. دقت کنید که در این حالت کاهش و یا افزایش بهره هیچ تأثیری در پایداری سیستم و تعداد دورانها حول نقطه ۱- ندارد.

(و): برای آنکه تعداد دورانهای حول نقطه ۱- سیستم پایدار نوع دو شکل ۵-۳۱ (و) را بشماریم، نخی را در نظر بگیرید که یک سر آن بر روی نقطه ۱- ثابت شده باشد و سر دیگر آن را بر روی نمودار نایکوئیست از $-j\infty$ تا 0^- و از 0^- تا 0^+ و از 0^+ تا $+j\infty$ حرکت دهیم. برخلاف آنچه که ممکن است در اولین برخورد به نظر آید، در این حالت تعداد دروانها حول نقطه ۱- صفر خواهد بود. دقت کنید که کلیه دورانها با یک دوران در جهت عکس و به همان اندازه صفر خواهند شد. بنابراین سیستم حلقه ـ بسته پایدار

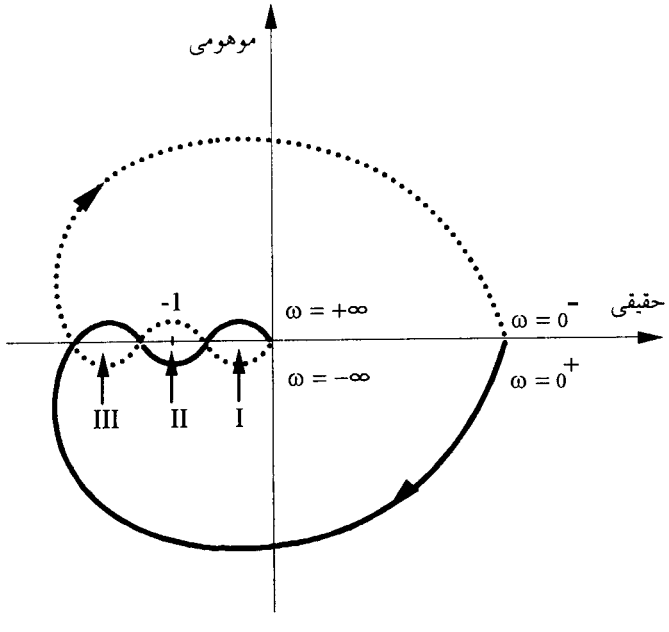
خواهد بود. سیستم شکل ۵-۳۱ (و) در واقع همان سیستم همواره ناپایدار شکل ۵-۳۱ (ج) است که به آن یک صفر و قطب مناسب اضافه شده است. این مثال اثر پایدارکننده اضافه کردن صفر و قطب به تابع تبدیل ناپایدار را بخوبی نشان می‌دهد.

مثال ۵-۱۷

تابع تبدیل سیستمی عبارتست از

$$G(s)=\frac{K_{\circ}(1+T_{1}s)^{2}}{(1+T_{2}s)(1+T_{3}s)(1+T_{4}s)(1+T_{5}s)^{2}}$$

که در آن T_4 ، T_3 ، T_2 ، $T_5<T_1<T_2$. نمودار کامل نایکوئیست این تابع تبدیل در شکل ۵-۳۸ برای یک بهره خاص نشان داده شده است. همانند قسمت (و) مثال ۵-۱۶ اگر یک سر نخ را نیز در این مثال بر روی نقطه ۱- ثابت کنید و انتهای دیگر آنرا به روی نمودار از $\omega=-\infty$ تا $\omega=+\infty$ به حرکت درآورید، تعداد دورانهای حول نقطه ۱- صفر خواهد بود. در این مثال اگر



شکل ۵-۳۸ نمودار کامل نایکوئیست تابع تبدیل مثال ۵-۱۷

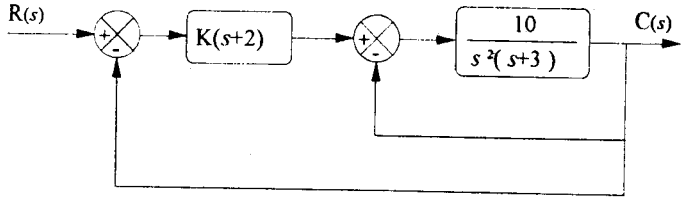
بهره را به اندازه کافی افزایش و یا کاهش دهیم در هر دو صورت، سیستم حلقه ـ بسته ناپایدار خواهد شد. در واقع اگر بهره را به اندازه کافی افزایش دهیم نقطه ۱- در محدوده I قرار خواهد گرفت و تعداد دورانها حول نقطه ۱- برابر با دو دور جهت عقربه ساعت خواهد بود. بنابراین $Z_R = ۲$ و سیستم ناپایدار است. از طرف دیگر، اگر بهره را به اندازه کافی کاهش دهیم نقطه ۱- در محدوده III قرار خواهد گرفت و تعداد دورانها حول نقطه ۱- برابر با دو چرخش در جهت عقربه ساعت می‌باشد و سیستم ناپایدار است. اگر بهره را باز هم کاهش دهیم، نقطه ۱- در سمت چپ نمودار نایکوئیست قرار می‌گیرد و تعداد دورانها حول نقطه ۱- صفر می‌شوند و سیستم باز هم پایدار است. این چنین سیستمی را *پایدار شرطی*[1] گویند. سیستم پایدار شرطی، سیستمی است که برای یک گستره از بهره‌ها پایدار است و افزایش یا کاهش به مقدار مناسب، موجب ناپایدار شدن آن می‌گردد. در کار با سیستم‌های عملی با پایداری شرطی باید دقت کافی را در رابطه با پایداری آنها مبذول داشت.

مثال ۵-۱۸

با بکارگیری معیار نایکوئیست، گستره بهره K را برای پایداری سیستم نشان داده شده در شکل ۵-۳۹ تعیین کنید.

نخست دیاگرام بلوکی شکل ۵-۳۹ را به صورت یک سیستم فیدبک واحد تبدیل می‌کنیم. تابع تبدیل معادل حلقه ـ باز در یک سیستم حلقه ـ بسته با فیدبک واحد عبارتست از

$$G(s) = \frac{۱۰K(s+۲)}{s^۳ + ۳s^۲ + ۱۰}$$



شکل ۵-۳۹ دیاگرام بلوکی سیستم مثال ۵-۱۸

1- Conditionally stable

برای رسم نمودار کامل نایکوئیست $G(s)$، داریم

$$G(j\omega)=\frac{10K(2+j\omega)}{(j\omega)^3+3(j\omega)^2+10}$$

سیستم، نوع صفر، مرتبهٔ سوم و یک صفر محدود پایدار دارد. محل قطبهای این سیستم معلوم نمی‌باشند، از اینرو از معیار روث برای تعیین پایداری سیستم حلقه ـ باز استفاده می‌کنیم. آرایه روث عبارتست از:

s^3	۱	۰
s^2	۳	۱۰
s^1	-۱۰	۰
s^0	۱	

توجه کنید که در اولین ستون دو تغییر علامت وجود دارد و لذا سیستم حلقه ـ باز با دو قطب سمت راست ناپایدار است، $P_R=2$. داریم

$$G(j\omega)=\frac{10K(j\omega+2)}{10-3\omega^2-j\omega^3}$$
$$=\frac{10K[2(10-3\omega^2)-\omega^4+j\omega(10-3\omega^2)+j2\omega^3]}{(10-3\omega^2)^2+\omega^6}$$

از $Im[G(j\omega)]=0$ بدست می‌آوریم $\omega=0$ و $\omega=\sqrt{10}$، که فرکانس‌های نقاط قطع محور حقیقی با نمودار نایکوئیست $G(j\omega)$ هستند. برای تعیین نقاط قطع محور موهومی، قرار می‌دهیم $Re[G(j\omega)]=0$ و لذا

$$\omega^4+6\omega^2-20=0$$

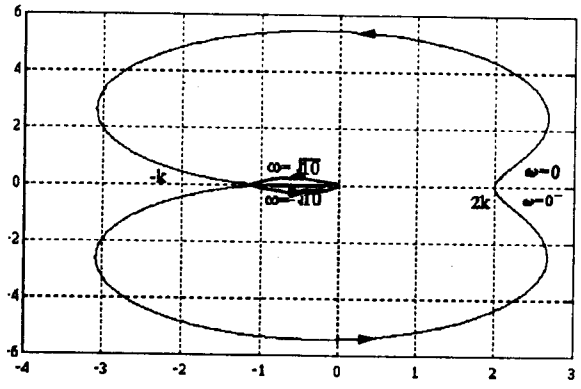
که می‌دهد $\omega\approx 1/544$. بنابراین نقاط قطع با محور حقیقی عبارتند از

$$G(j0)=2K \quad , \quad G(j\sqrt{10})=-K$$

و نقاط قطع با محور موهومی عبارتند از

$$G(j\,1/544)=j5/482K$$

با داده‌های بدست آمده، نمودار نایکوئیست این تابع تبدیل در شکل ۵-۴۰ رسم شده است. از آنجاییکه سیستم حلقه ـ باز دو قطب ناپایدار دارد، از معیار پایداری نایکوئیست داریم که



شکل ۵-۴۰ نمودار کامل نایکوئیست تابع تبدیل مثال ۵-۱۸

سیستم حلقه ـ بسته پایدار است اگر تعداد دورانهای در جهت خلاف عقربه ساعت حول نقطه ۱- توسط نمودار کامل نایکوئیست برابر دو باشد. بنابراین برای پایداری، باید نقطه ۱- در داخل نمودار نایکوئیست قرار گیرد. از اینرو شرط پایداری سیستم حلقه ـ بسته عبارتست از

$$K>1$$

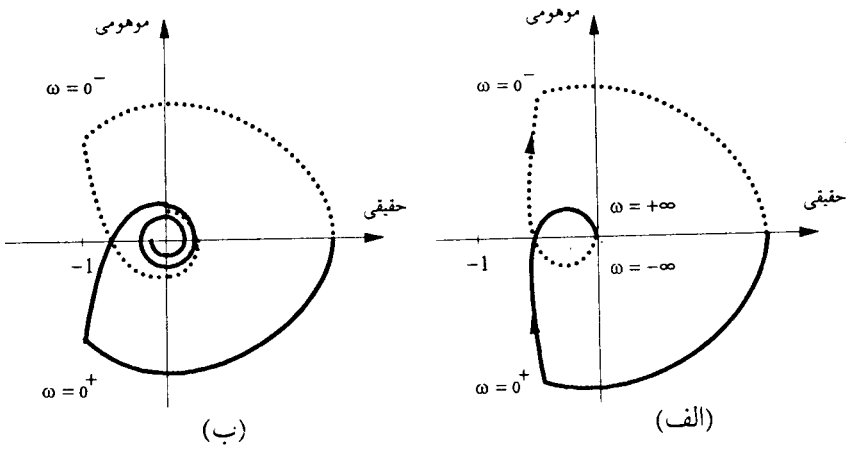
مثال ۵-۱۹

پایداری سیستم داده شده با تابع تبدیل

$$G(s)=\frac{K_1 e^{-\tau s}}{s(1+T_1 s)(1+T_2 s)}$$

را که در آن τ زمان تأخیر است، برای $\tau=0$ و $\tau\neq 0$ با بکارگیری معیار پایداری نایکوئیست بررسی کنید.

نمودارهای نایکوئیست تابع تبدیل بالا برای $\tau=0$ و $\tau\neq 0$ به ترتیب در شکلهای ۵-۴۱ (الف) و (ب) رسم شده‌اند. همانطور که از شکلهای ۵ـ۴۱ (الف) و (ب) مشاهده می‌شود، نمودار نایکوئیست $G(j\omega)$ به طرف ۱- در جهت عقربه ساعت انتقال داده شده است. بنابراین اگر زمان تأخیر بزرگتر گردد، می‌تواند با عبور دادن نمودار نایکوئیست از نقطه بحرانی ۱-، سیستم حلقه ـ بسته را ناپایدار کند. بنابراین زمان تأخیر باعث کاهش پایداری سیستم حلقه ـ بسته می‌شود.



شکل ۵-۴۱ (الف) نمودار نایکوئیست بدون تأخیر (ب) نمودار نایکوئیست با تأخیر

۵-۵ نمودارهای نایکوئیست معکوس

در بسیاری از موارد رسم نمودارهای نایکوئیست (مستقیم) برای سیستم‌هایی که عناصری در مسیر فیدبک دارند، مشکل می‌شود. در این موارد رسم *نمودارهای معکوس نایکوئیست*[1] ساده‌تر خواهد بود. نمودار نایکوئیست معکوس تابع تبدیل $G(j\omega)$ با رسم نمودار

$$G^{-1}(j\omega)=\frac{1}{G(j\omega)}=\frac{R(j\omega)}{C(j\omega)} \qquad (۱-۵-۵)$$

برحسب فرکانس ω بدست می‌آید. برای نشان دادن رسم نمودارهای نایکوئیست معکوس، نمودارهای نایکوئیست معکوس سه سیستم نمونه نوع صفر، نوع یک و نوع دو را رسم می‌کنیم.

سیستم نوع صفر. سیستم نوع صفر داده شده با معادله (۵-۳-۲) را در نظر بگیرید. تابع تبدیل معکوس آن عبارتست از

$$G^{-1}(j\omega)=\frac{(1+j\omega T_1)(1+j\omega T_2)}{K_0} \qquad (۲-۵-۵)$$

از معادله (۵-۵-۲) داریم

$$G^{-1}(j\omega)\to\frac{1}{K_0}\angle 0^\circ \qquad \omega\to 0^+$$

$$G^{-1}(j\omega)\to\infty\angle 180^\circ \qquad \omega\to\infty$$

1- Inverse Nyquist plots

توجه کنید که زوایای هر کدام از عبارات صورت $G^{-1}(j\omega)$ به ازاء تغییرات ω از 0^+ تا ∞، از 0° تا 90° تغییر پیدا می‌کنند. از آنجاییکه هیچ عبارت وابسته به فرکانسی در مخرج عبارت معادله (۵-۵-۲) نمی‌باشد، زاویه فاز $G^{-1}(j\omega)$ به طور پیوسته‌ای برای تغییرات ω از 0^+ تا ∞، از 0° تا 180° تغییر پیدا می‌کند. نمودار نایکوئیست معکوس سیستم نوع صفر داده شده با معادله (۵-۵-۲)، در شکل ۵-۴۲ نشان داده شده است. دقت کنید که اگر در صورت $G^{-1}(j\omega)$ تنهایک عبارت $1+j\omega T_1$ وجود داشت، زاویه $G^{-1}(j\omega)$ از 0° تا 90° دوران پیدا می‌کرد. با اضافه‌کردن عبارت $1+j\omega T$ در صورت $G^{-1}(j\omega)$، این عبارت باعث می‌شود که 90° دوران در جهت خلاف عقربه ساعت در زاویه $G^{-1}(j\omega)$، برای قسمت فرکانس بالای نمودار ایجاد شود.

سیستم نوع یک. تابع تبدیل سیستم نوع یک داده شده با معادله (۵-۳-۶) را در نظر بگیرید. معکوس تابع تبدیل عبارتست از

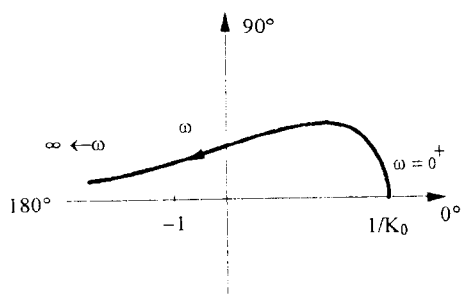
$$G^{-1}(j\omega)=\frac{j\omega(1+j\omega T_1)(1+j\omega T_2)(1+j\omega T_3)}{K_1} \qquad (۵-۵-۳)$$

در این حالت داریم

$$G^{-1}(j\omega)\to 0\angle 90^\circ \qquad \omega\to 0^+$$

$$G^{-1}(j\omega)\to \infty\angle 360^\circ \qquad \omega\to +\infty$$

در اینجا هر عبارت صورت باعث دوران 90° در جهت خلاف عقربه ساعت به ازاء تغییرات ω از 0 تا $+\infty$، در زاویه $G^{-1}(j\omega)$ خواهد شد. نمودار نایکوئیست تابع تبدیل معکوس (۵-۵-۳) در شکل ۵-۴۳ نشان داده شده است. نقاط قطع با محور حقیقی و موهومی،



شکل ۵-۴۲ نمودار معکوس نایکوئیست تابع تبدیل داده شده با معادله (۵-۵-۲)

همانند قبل از روابط $\mathrm{Im}[G^{-1}(j\omega)]=0$ و $\mathrm{Re}[G^{-1}(j\omega)]=0$ تعیین می‌گردند.

سیستم نوع دو. معکوس تابع تبدیل یک سیستم نوع دو داده شده با معادله (۵-۳-۱۰) عبارتست از

$$G^{-1}(j\omega)=\frac{(j\omega)^2(1+j\omega T_1)(1+j\omega T_2)(1+j\omega T_3)}{K_2(1+j\omega T_0)} \qquad (۴-۵-۵)$$

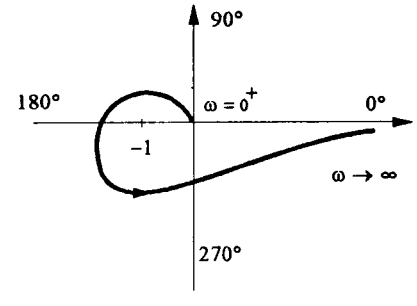
برای این تابع تبدیل معکوس داریم

$$G^{-1}(j\omega)\to 0\angle 90^\circ \qquad \omega\to 0^+$$

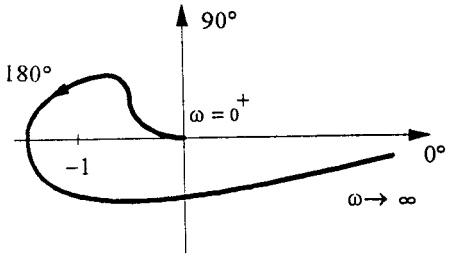
$$G^{-1}(j\omega)\to \infty\angle 360^\circ \qquad \omega\to +\infty$$

توجه کنید که برای فرکانس‌های بالا در تابع تبدیل معکوس داده شده با معادله (۵-۵-۴)، زاویه فاز $+90^\circ$ ایجاد شده توسط یکی از عبارات در صورت، با زاویه فاز -90° ایجاد شده توسط عبارت مخرج، همدیگر را حذف خواهند کرد. نمودار نایکوئیست معکوس تابع تبدیل داده شده با معادله (۵-۵-۴)، در شکل ۵-۴۴ رسم شده است. دقت کنید که با توجه به مقادیر عددی ضرایب ثابت T_i ها و K_2، یک ناپیوستگی در روند افزایش زاویه $G^{-1}(j\omega)$ بوجود خواهد آمد که در شکل ۵-۴۴ نشان داده شده است.

در اینجا قواعدی برای رسم نقاط کلیدی نمودارهای نایکوئیست معکوس ارایه می‌گردند، که رسم این نمودارها را ساده‌تر و سریعتر می‌سازد:



شکل ۵-۴۳ نمودار معکوس نایکوئیست تابع تبدیل داده شده با معادله (۵-۵-۳)



شکل ۵-۴۴ نمودار معکوس نایکوئیست تابع تبدیل داده شده با معادله (۵-۵-۴)

قاعده ۱: با تعیین نوع سیستم تابع تبدیل حلقه ـ باز، قسمت فرکانس پایین ($\omega \to 0^+$) نمودار نایکوئیست معکوس تعیین می‌گردد.

قاعده ۲: تابع تبدیل کلی معکوس یک سیستم عبارتست از

$$G^{-1}(s) = \frac{s^m p(s)}{K_m q(s)} \qquad (۵-۵-۵)$$

که در آن، درجه‌های $p(s)$ و $q(s)$ به ترتیب u و w می‌باشند. قسمت فرکانس بالای نمودار نایکوئیست معکوس بدین صورت تعیین می‌گردد:

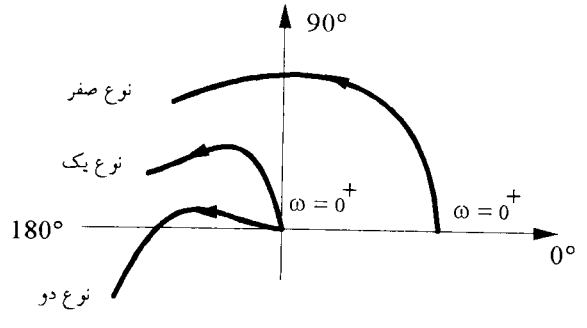
$$G^{-1}(j\omega) \to \infty \angle (m+u-w)90^\circ \qquad \omega \to \infty$$

قاعده ۳: فرکانس‌هایی که در آنها نمودار نایکوئیست معکوس محور حقیقی و محور موهومی را قطع می‌کنند، به ترتیب از روابط زیر بدست می‌آیند:

۰ = قسمت موهومی $[G^{-1}(j\omega)]$ و ۰ = قسمت حقیقی $[G^{-1}(j\omega)]$

قاعده ۴: شکل دقیق نمودار نایکوئیست معکوس در نزدیکی محور حقیقی منفی بسیار مهم است و رسم $G^{-1}(j\omega)$ در این ناحیه باید با استفاده از قاعده ۳ یا با بکارگیری نرم‌افزارهای کامپیوتری بدقت انجام پذیرد.

خلاصه‌ای از نمودارهای نایکوئیست معکوس انواع مختلف سیستم‌ها در شکل ۵-۴۵ نشان داده شده‌اند. همانند نمودارهای نایکوئیست مستقیم، مشخصه فرکانس پایین نمودارها نوع سیستم را مشخص می‌کنند.



ـ **شکل ۵-۴۵** خلاصه‌ای از نمودارهای نایکوئیست معکوس برای انواع مختلف سیستم‌ها

۵-۶ اعمال معیار پایداری نایکوئیست به نمودارهای نایکوئیست معکوس

معیار نایکوئیست اعمال شده به نمودارهای معکوس، همانند معیاری است که به نمودارهای مستقیم اعمال می‌گردد. فقط یک تفاوت جزیی وجود دارد، که در اینجا به توضیح آن خواهیم پرداخت. معادلهٔ مشخصه سیستم حلقه ـ بسته عبارتست از $1+G(s)H(s)=0$ و برای پایداری سیستم حلقه ـ بسته، کلیه ریشه‌های این معادله باید در محدوده پایداری (نیمه چپ صفحه s) قرار گیرند. اگر طرفین این معادله را بر $G(s)H(s)$ تقسیم کنیم، داریم

$$\frac{1}{G(s)H(s)}+1=0 \qquad (۵-۶-۱)$$

با جایگزینی $G(s)=\frac{N_1(s)}{D_1(s)}$ و $H(s)=\frac{N_2(s)}{D_2(s)}$، (همانند بخش ۵-۴)، در معادله (۵-۶-۱) داریم

$$\frac{1}{\frac{N_1(s)}{D_1(s)}\frac{N_2(s)}{D_2(s)}}+1=\frac{N_1(s)N_2(s)+D_1(s)D_2(s)}{N_1(s)N_2(s)}=0 \qquad (۵-۶-۲)$$

بنابراین ریشه‌های معادلهٔ مشخصه، ریشه‌های معادله زیر می‌باشند

$$N_1(s)N_2(s)+D_1(s)D_2(s)=0 \qquad (۵-۶-۳)$$

از مقایسه معادله‌های (۵-۴-۳) و (۵-۶-۳) در می‌یابیم که صفرهای دو معادله یکسان می‌باشند. لیکن از مقایسه معادله‌های (۵-۴-۳) و (۵-۶-۲) در می‌یابیم که قطبهای دو معادله $1+G(s)H(s)=0$ و $1+\frac{1}{G(s)H(s)}=0$ به ترتیب قطبهای $G(s)H(s)$ و صفرهای $G(s)H(s)$ می‌باشند.

اگر دقیقاً همان مراحل بررسی پایداری را همانند بخش ۵-۴ به سیستم‌های معکوس اعمال کنیم، هنگامیکه $1+\frac{1}{G(s)H(s)}$ مقادیر s بر روی مسیر نایکوئیست را اختیار کند، معادله حاصله عبارتست از

$$Z_R=P'_R-N' \qquad (۵-۶-۴)$$

که در آن

N' = تعداد دورانهای $1+\frac{1}{G(s)H(s)}$ حول مبداء

P_R' = تعداد صفرهای ناپایدار $G(s)H(s)$

Z_R = تعداد ریشه‌های ناپایدار معادلهٔ مشخصه حلقه ـ بسته

در عمل بجای رسم نمودار $\frac{۱}{G(s)H(s)}+۱$، نمودار $\frac{۱}{G(sH(s)}$ را رسم می‌کنیم و مبداء را به نقطه ۱- بر روی محور حقیقی منفی انتقال می‌دهیم، N در این حالت تعداد دورانهای $\frac{۱}{G(s)H(s)}$ حول نقطه ۱- خواهد بود.

با جایگزینی s توسط $j\omega$ در $[G(s)H(s)]^{-۱}$ و تغییر ω از $-\infty$ تا $+\infty$، محدوده محور موهومی را بر روی مسیر نایکوئیست D در شکل ۵-۳۳ خواهیم داشت. مقدار $[G(j\omega)H(j\omega)]^{-۱}$ برای $\omega=۰$، ثابت است. بنابراین با حرکت نقطه s بر روی مسیر بسته نایکوئیست از مبداء یا حوالی آن، قسمت متناظر در $\frac{۱}{G(s)H(s)}+۱$ از محور حقیقی عبور خواهد کرد. [دقت کنید که تابع $\frac{۱}{G(s)H(s)}+۱$ یا $G(s)H(s)+۱$، یک نگاشت از صفحه s به صفحه‌ای دیگر است که در آن مسیر نایکوئیست به نمودار نایکوئیست متناظر نگاشت می‌شود.]

همانند حالت نمودار نایکوئیست مستقیم، برای تکمیل نمودار $[G(s)H(s)]^{-۱}$ اثر حرکت نقطه s را بر روی نیمدایره با شعاع بی‌نهایت بر روی مسیر نایکوئیست، بررسی می‌کنیم. این مسیر تمامی قطبها و صفرهای احتمالی ناپایدار را دربرخواهد گرفت. برای نیمدایره مسیر نایکوئیست داریم

$$s=re^{j\theta} \qquad (۵-۶-۵)$$

که در آن $r\to\infty$ و $\frac{\pi}{۲}\geq\theta\geq-\frac{\pi}{۲}$. تابع تبدیل کلی حلقه ـ باز عبارتست از

$$G(s)H(s)=\frac{K_m(s-z_۱)...(s-z_w)}{s^m(s-p_۱)(s-p_۲)...(s-p_u)} \qquad (۶-۶-۵)$$

برای نیم‌دایره مسیر نایکوئیست، تابع $[G(s)H(s)]^{-۱}$ بدین صورت داده می‌شود

$$\left[G(s)H(s)\right]^{-۱}\to\frac{s^m s^u}{K_m s^w}=\frac{r^{(m+u-w)}}{K_m}e^{j(m+u-w)\theta} \qquad (۷-۶-۵)$$

به ازاء $r\longrightarrow\infty$ و $\frac{\pi}{۲}\geq\theta\geq-\frac{\pi}{۲}$ در $s=re^{j\theta}$. بنابراین از معادله (۵-۶-۷) مشاهده می‌شود که با حرکت s بر روی مسیر نایکوئیست از $j\infty$ در $\pi/۲$ تا $-j\infty$ در $-\pi/۲$ (در جهت عقربه ساعت) نمودار $[G(s)H(s)]^{-۱}$، $m+u-w$ بار در جهت عقربه ساعت نیمدایره‌هایی را با شعاع بی‌نهایت حول مبداء دنبال خواهد کرد.

مثال ۵-۲۰

نمودار نایکوئیست معکوس متناظر را رسم کرده و پایداری سیستم حلقه ـ بسته را با استفاده از معیار پایداری نایکوئیست معکوس بررسی کنید.

$$\left[G(s)H(s)\right]^{-1} = \frac{(1+T_1 s)(1+T_2 s)}{K_0}$$

در این حالت داریم

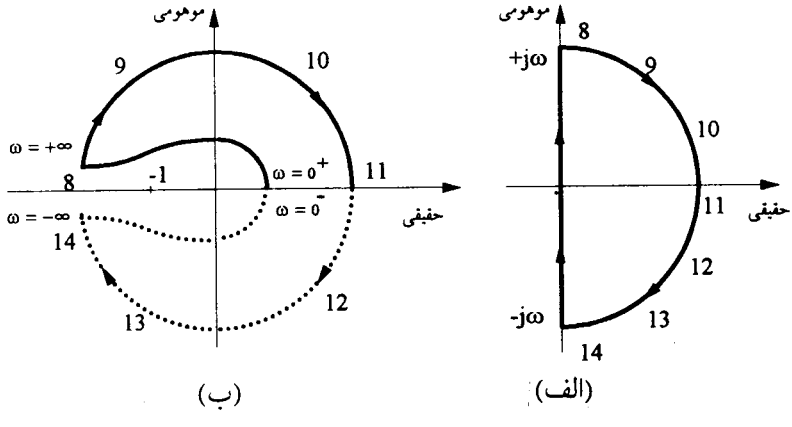
$$\left[G(s)H(s)\right]^{-1} \to \frac{1}{K_0}\angle 0^\circ \qquad \omega \to 0^+$$

$$\left[G(s)H(s)\right]^{-1} \to \infty \angle 180^\circ \qquad \omega \to +\infty$$

بر روی نیمدایره مسیر نایکوئیست، نشان داده شده در شکل ۵-۴۶ (الف)، داریم

$$\left[G(s)H(s)\right]^{-1} \to \frac{T_1 T_2}{K_0} r^2 e^{j2\theta} \qquad |s| \to \infty$$

نقاط ۸ تا ۱۴ برای مرحله به مرحله نشان دادن نحوه نگاشت مسیر نایکوئیست در صفحه s توسط $[G(s)H(s)]^{-1}$ در هر دو شکل ۵-۴۶ (الف) و (ب) مشخص شده‌اند. نقطه ۸ از $\omega = \infty$ شروع شده است، که متناظر با $\theta = 90^\circ$ و اندازه بی‌نهایت است. در نقاط ۹، ۱۰ و ۱۱، زاویه از 90° به 0° درجه (در جهت عقربه ساعت) می‌رسد و نقطه متناظر ۱۱، $\theta = 0^\circ$ با اندازه بی‌نهایت است. از نقطه ۱۱ تا ۱۴ زاویه از 0° تا -90° تغییر پیدا می‌کند که نقاط متناظر در شکل ۵-۴۶ (ب) نشان داده شده‌اند. برای اعمال معیار پایداری نایکوئیست معکوس باید



شکل ۵-۴۶ (الف) مسیر نایکوئیست (ب) نمودار نایکوئیست معکوس مثال ۵-۲۰

تعداد دورانهای نمودار $[G(s)H(s)]^{-1}$ حول نقطه ۱- را بشماریم. همانطور که از نمودار نایکوئیست معکوس مشخص است $N'=0$ می‌باشد. با توجه به اینکه صفرهای تابع تبدیل حلقه ـ باز پایدار می‌باشند، لذا $P'_R=0$ خواهد بود. از اینرو $Z_R=0-0=0$ و سیستم به ازاء کلیه بهره‌ها پایدار است.

مثال ۵-۲۱

معکوس تابع تبدیل سیستمی عبارتست از

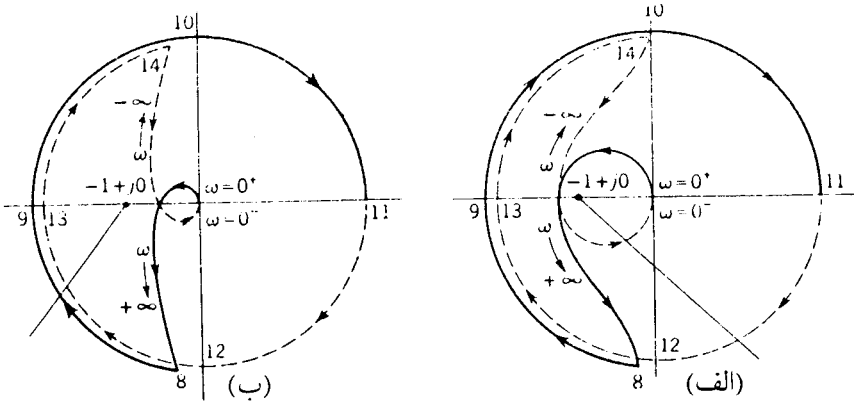
$$\left[G(s)H(s)\right]^{-1}=\frac{s(1+T_1s)(1+T_2s)}{K_1}$$

در گستره فرکانس‌های پایین و بالا به ترتیب داریم

$$\left[G(s)H(s)\right]^{-1}\to 0\angle 90^\circ \qquad \omega\to 0^+$$

$$\left[G(s)H(s)\right]^{-1}\to \infty\angle 270^\circ \qquad \omega\to +\infty$$

همانند حالت قبل نقاط متناظر با نقاط ۸ تا ۱۴ نشان داده شده بر روی مسیر نایکوئیست شکل ۵-۴۶ (الف) در شکل ۵-۴۷ (الف)، نمودار نایکوئیست معکوس این تابع تبدیل نیز نشان داده شده‌اند. با جایگزینی $s=re^{j\theta}$ در تابع تبدیل معکوس بالا و برای $|s|\to\infty$، تناظر این نقاط را بسادگی می‌توان نشان داد (این کار را برای تمرین انجام دهید.) برای شمردن تعداد دورانهای حول نقطه ۱- توسط نمودار نایکوئیست معکوس، همانند قبل انتهای تکه نخی را بر روی نقطه ۱- ثابت فرض کرده و سر آن را با شروع از نقطه ۱۴ (نقطه متناظر با $-j\infty$) به طرف 0^- حرکت دهید. از نقطه 0^- به نقطه 0^+ و از آنجا به طرف پایان نمودار از طریق نقطه ۸ و ۹ تا ۱۴ حرکت کنید و در ضمن حرکت تکه نخ تعداد دورانهای حول نقطه ۱- را بشمارید. توجه کنید که از نقطه شروع ۱۴ تا پایان آن در نقطه ۱۴، یک بار در جهت عقربه ساعت و یک بار در خلاف آن دور نقطه ۱- خواهیم چرخید. لذا مجموع دورانها برابر صفر خواهد بود، $N'=0$. با توجه به پایدار بودن قطبهای $[G(s)H(s)]^{-1}$، $P_R'=0$ و داریم $Z_R=0$. از اینرو سیستم با نمودار نایکوئیست نشان داده شده در شکل ۵-۴۷ (الف) پایدار است. با افزایش بهره K_1، نمودار نایکوئیست معکوس تابع تبدیل، به صورت نشان داده شده در شکل ۵-۴۷ (ب)

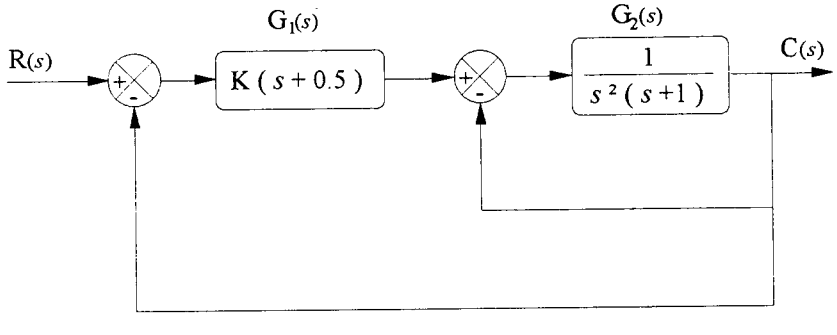


شکل ۵-۴۷ نمودارهای نایکوئیست معکوس مثال ۵-۲۱

خواهد شد. اگر همانند قبل تعداد دورانهای نمودار معکوس نایکوئیست را حول نقطه ۱- بشماریم، در این حالت دوبار حول نقطه ۱- در جهت عقربه ساعت چرخش خواهیم داشت و لذا $N'=-۲$. بنابراین، با توجه به پایدار بودن صفرهای تابع تبدیل معکوس $Z_R=۲$، سیستم حلقه ـ بسته با افزایش بهره K_1 دو قطب ناپایدار پیدا می‌کند.

مثال ۵-۲۲

سیستم حلقه ـ بسته نشان داده شده در شکل ۵-۴۸ را در نظر بگیرید. با اعمال معیار پایداری نایکوئیست به نمودار نایکوئیست معکوس تابع تبدیل مناسب حلقه ـ باز، پایداری سیستم حلقه ـ بسته را بررسی کنید.



شکل ۵-۴۸ سیستم حلقه ـ بسته مثال ۵-۲۲

با حذف حلقه فیدبک داخلی و ضرب دو تابع تبدیل سری $G_1(s)$ و $G_2(s)$، تابع تبدیل حلقه ـ باز سیستم کنترل حلقه ـ بسته با فیدبک واحد بدست خواهد آمد. داریم

$$G_2(s)=\frac{1}{s^3+s^2+1}$$

و لذا

$$G(s)=G_1(s)G_2(s)=\frac{K(s+0/5)}{s^3+s^2+1}$$

از اینرو

$$\frac{1}{G(s)}=\frac{s^3+s^2+1}{K(s+0/5)}$$

با توجه به اینکه قطب $[G(s)]^{-1}$ یا صفر تابع تبدیل حلقه ـ باز پایدار است، لذا $P'_R=0$ و تعداد دورانهای نمودار نایکوئیست حول نقطهٔ ۱-، برابر با تعداد قطبهای ناپایدار حلقه ـ بسته خواهد بود. داریم

$$\frac{1}{G(j\omega)}=\frac{1}{K}\left[\frac{(j\omega)^3+(j\omega)^2+1}{j\omega+0/5}\right]\left[\frac{-j\omega+0/5}{-j\omega+0/5}\right]$$

$$=\frac{0/5-0/5\omega^2-\omega^4+j\omega(-1+0/5\omega^2)}{K(0/25+\omega^2)}$$

با صفر قرار دادن قسمت موهومی $[G(j\omega)]^{-1}$ بدست می‌آوریم که نمودار نایکوئیست، محور حقیقی را در فرکانس $\omega=\sqrt{2}$ رادیان بر ثانیه قطع می‌کند و نقطه قطع بر روی محور حقیقی منفی در $\frac{-2}{K}$ است. هم‌چنین از مساوی صفر قرار دادن قسمت حقیقی می‌توان فرکانس و نقطه قطع با محور موهومی را تعیین کرد. برای این تابع تبدیل داریم

$$1/G(j\omega)\to\frac{1}{K\ 0/5}=2/K \qquad \omega\to 0^+$$

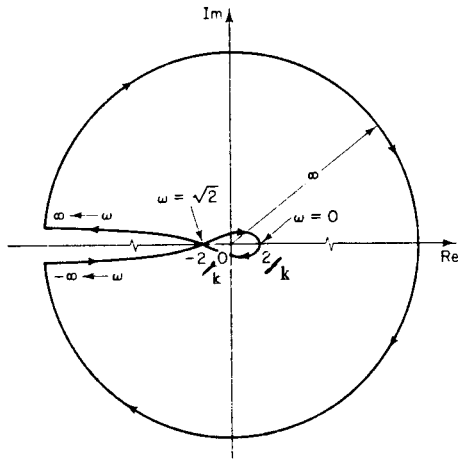
$$1/G(j\omega)\to\infty\angle 180^\circ \qquad \omega\to 0^+$$

نمودار نایکوئیست معکوس $1/G(j\omega)$ در شکل ۵-۴۹ رسم شده است. همانطور که مشاهده می‌شود اگر نقطه ۱- بین نقاط $-2/K$ و $-\infty$ قرار گیرد، نقطه ۱- دور زده نخواهد شد و در آن صورت $N=0$، بنابراین برای پایداری باید شرط زیر برآورده گردد

$$-1<\frac{-2}{K}$$

و لذا

$$K>2$$



شکل ۵-۴۹ نمودار نایکوئیست معکوس مثال ۵-۲۲

۵-۷ مفاهیم حاشیه‌های بهره و فاز

پایداری و میزان آن را در یک سیستم، می‌توان از نمودارهای بود و نایکوئیست آن به سادگی تعیین کرد. تبیین پایداری سیستم در حوزه فرکانس، با معرفی مفاهیم حاشیه بهره[1] و حاشیه *فاز*[2]، صورت می‌پذیرد. همانطورکه در بخش ۵-۶ مشاهده گردید، دور زدن یا نزدن نقطه ۱- توسط نمودار نایکوئیست، تعیین کننده پایداری یا ناپایداری یک سیستم است. این حاشیه‌ها میزان نزدیکی نمودار نایکوئیست به نقطه ۱- و در نتیجه میزان پایداری سیستم را اندازه‌گیری می‌کنند. در اینجا این مفاهیم را برای نمودارهای نایکوئیست ارایه می‌کنیم.

حاشیه بهره: حاشیه بهره مقدار ثابتی است مانند a که بهره باید افزایش یابد تا سیستم ناپایدار گردد. اگر فرکانسی را که در آن زاویه فاز تابع تبدیل سیستم -۱۸۰° است با $\omega_۱$ نشان دهیم، آنگاه حاشیه بهره سیستم از رابطه زیر تعیین می‌گردد

$$\left| G(j\omega_۱) \right| a = ۱ \qquad (۱-۷-۵)$$

و بر روی نمودار نایکوئیست دامنه $G(j\omega)$ در $\omega_۱$ عبارتست از

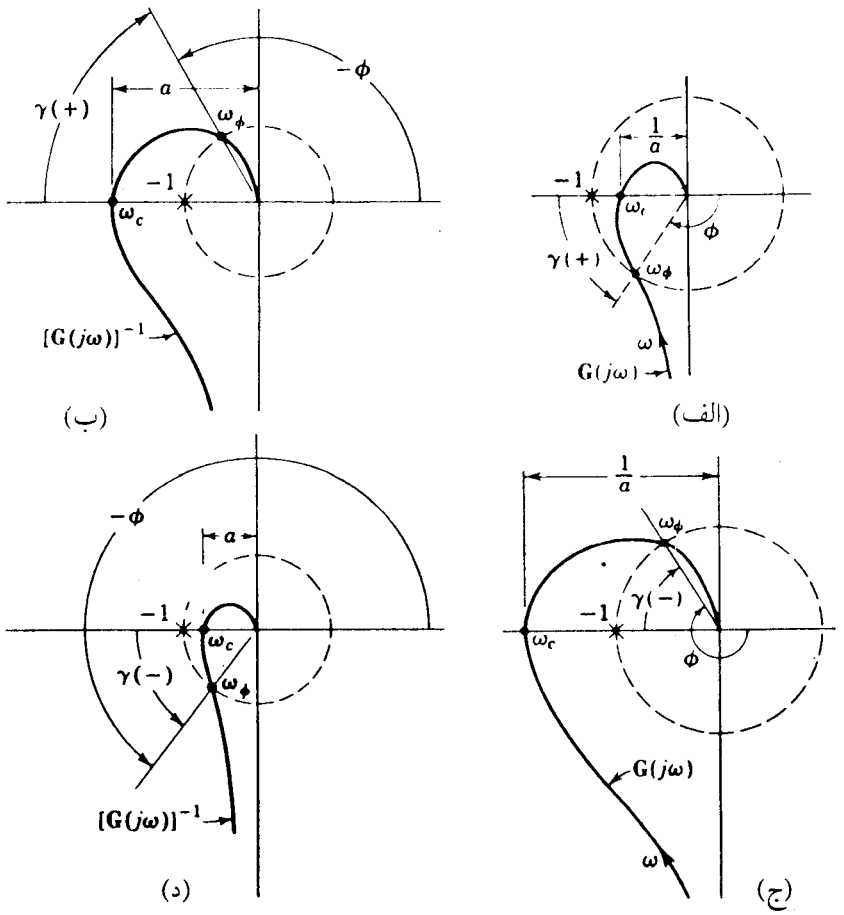
$$\left| G(j\omega_۱) \right| = \frac{۱}{a} \qquad (۲-۷-۵)$$

فرکانس $\omega_۱$ را *فرکانس تقاطع فاز*[3] می‌نامند.

1- Gain margin
2- Phase margin
3- Phase crossover frequency

حاشیه فاز: اگر فرکانسی راکه در آن دامنه $G(j\omega)$ واحد است، با ω_ϕ نشان دهیم (یعنی آنکه $|G(j\omega_\phi)| = 1$)، آنگاه حاشیه فاز مقدار انتقال فازی است که در فرکانس ω_ϕ باعث ناپایداری سیستم می‌شود. هم‌چنین می‌توان گفت که حاشیه فاز برابر است با 180° بعلاوه زاویه فاز $G(j\omega_\phi)$، که در آن زاویه فاز $G(j\omega_\phi)$ منفی است. فرکانس ω_ϕ را فرکانس تقاطع بهره[1] می‌نامند.

مفاهیم حاشیه بهره و فاز، به طور ترسیمی در شکلهای ۵-۵۰ (الف) تا (د) نشان داده شده‌اند.



شکل ۵-۵۰ نمودارهای نایکوئیست نشان دهندهٔ حاشیه بهره و حاشیه فاز: (الف) و (ب) پایدار (ج) و (د) ناپایدار

1- Gain crossover frequency

مثال ۵-۲۳

تابع تبدیل حلقه باز سیستمی عبارتست از

$$G(j\omega)=\frac{K}{(j\omega+۱)(j\omega+۲)(j\omega+۳)}$$

حاشیه‌های بهره و فاز را برای $K=۲۰$ و $K=۸۰$ محاسبه کرده و پایداری آن را تعیین کنید.

داریم

$$|G(j\omega)|=\frac{K}{(\omega^۲+۱)^{۱/۲}(\omega^۲+۴)^{۱/۲}(\omega^۲+۹)^{۱/۲}}$$

و

$$\angle G(j\omega)=-\tan^{-۱}\left[\frac{\omega}{۱}\right]-\tan^{-۱}\left[\frac{\omega}{۲}\right]-\tan^{-۱}\left[\frac{\omega}{۳}\right]$$

برای تعیین حاشیه بهره نخست باید فرکانسی را پیدا کنیم که در آن $\angle G(j\omega)=\pm ۱۸۰^\circ$، به عبارت دیگر فرکانسی که در آن نمودار نایکوئیست $G(j\omega)$ محور حقیقی منفی را قطع می‌کند. برای تعیین این فرکانس از رابطه زیر استفاده می‌کنیم

$$\left[G(j\omega)\right] \text{ قسمت موهومی } =\frac{K\omega(\omega^۲-۱۱)}{(\omega^۲+۱)(\omega^۲+۴)(\omega^۲+۹)}=۰$$

و لذا $\omega_۱=\sqrt{۱۱}$. با قراردادن $\omega_۱=\sqrt{۱۱}$ در $|G(j\omega)|$ داریم $|G(j\omega)|=K/۶۰$ و برای $K=۲۰$، $|G(j\omega_۱)|=۱/۳$. بنابراین بهره را می‌توان توسط فاکتور ۳ افزایش داد، به عبارت دیگر بهره را می‌توان توسط $۱/|G(j\omega_۱)|$ افزایش داده تا به نقطه ۱- رسید. حاشیه بهره بدین ترتیب عبارتست از

$$۲۰log_{۱۰}(۳)=۲۰log_{۱۰}(۱/|G(j\omega_۱)|)=۹/۵۴ dB$$

هم چنین برای تعیین حاشیه فاز نخست $\omega_۲$ را تعیین می‌کنیم، که در آن $|G(j\omega_۲)|=۱$. برای $K=۲۰$ داریم

$$\frac{۲۰}{(\omega^۲+۱)^{۱/۲}(\omega^۲+۴)^{۱/۲}(\omega^۲+۹)^{۱/۲}}=۱$$

بنابراین $\omega_c = ۱/۸۳۸$، در این فرکانس $\angle G(j\omega_c) = -۱۳۵/۵۴^\circ$ و حاشیه فاز عبارتست از $۴۴/۴۶^\circ$ با توجه به مقادیر حاشیه بهره و حاشیه فاز سیستم پایدار است.

به طور مشابهی حاشیه‌های بهره و فاز را برای $K=۸۰$ تعیین می‌کنیم. برای $\angle G(j\omega) = \pm ۱۸۰^\circ$ می‌توان نشان داد که $|G(j\omega)| = ۴/۳$ و لذا برای رسیدن به نقطه ۱- باید بهره را به اندازه ۳/۴ افزایش داد. حاشیه بهره در این حالت برابر است با $۲۰log_{۱۰}(۳/۴) = -۲/۵dB$. توجه کنید که برای سیستم ناپایدار حاشیه بهره منفی است. این بدان معنی است که برای پایدار کردن سیستم باید بهره را کاهش داد. حاشیه فاز را نخست با حل $|G(j\omega)| = ۱$ بدست می‌آوریم. می‌توان نشان داد که برای

$$\frac{۸۰}{(\omega^۲+۱)^{۱/۲}(\omega^۲+۴)^{۱/۲}(\omega^۲+۹)^{۱/۲}} = ۱$$

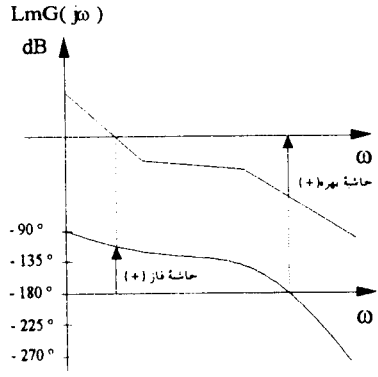
ω_c برابر با ۳/۷۶۶ است. در این فرکانس $\angle G(j\omega_c) = -۱۸۸/۶۲^\circ$ و لذا حاشیه فاز $-۸/۶۲^\circ$ می‌باشد. بدیهی است که با توجه به مقادیر منفی حاشیه بهره و حاشیه فاز، سیستم با این بهره ناپایدار است.

حاشیه‌های بهره و فاز را می‌توان به صورت مشابهی توسط نمودارهای بود تعریف نمود. شکل ۵-۵۱، این حاشیه‌ها را بر روی نمودار بود نشان می‌دهد. همانطور که از این شکلها مشاهده می‌شود، سیستم در صورتی پایدار است که حاشیه بهره آن برحسب دسی‌بل مثبت، و حاشیه فاز آن نیز یک زاویه مثبت باشد. هم‌چنین سیستمی را ناپایدار گویند که حاشیه بهره آن برحسب دسی‌بل منفی، و حاشیه فاز آن نیز یک زاویه منفی باشد. سیستمی نیز پایدار بحرانی است که حاشیه‌های فاز و بهره آن هر دو صفر باشند.

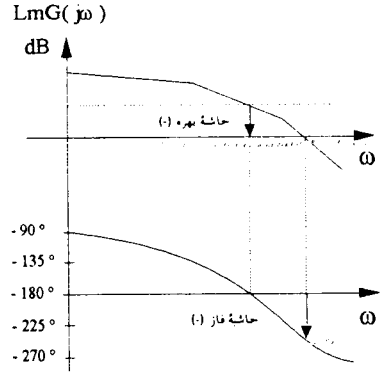
۵-۸ چارت نیکولز

تحلیل پاسخ فرکانسی یک سیستم، بکارگیری و بررسی اطلاعات بهره و فاز آن بر روی گسترهٔ وسیع از فرکانس‌ها است. نمودارهای بود و نایکوئیست، دو روش اصلی تحلیل پاسخ فرکانسی، با یک نوع از داده‌ها سر و کار دارند، لیکن آنها را به دو نوع کاملاً متفاوت نمایش می‌دهند. روش دیگر تحلیل پاسخ فرکانسی، *چارت نیکولز*[1] است که از همان داده‌ها استفاده

1- Nichols chart



(الف)



(ب)

شکل ۵-۵۱ (الف) دیاگرام بود یک سیستم پایدار (ب) دیاگرام بود یک سیستم ناپایدار

می‌کند ولی آنها را به گونه دیگری نمایش می‌دهد.

بسیاری از روشهای بکارگرفته شده در چارت نیکولز مشابه روشهای بود و نایکوئیست هستند. هم‌چنین بکارگیری و استفاده از نمودارهای بود و نایکوئیست ساده‌تر از چارت نیکولز است و لذا در این کتاب چارت نیکولز را به اندازه دو روش دیگر توضیح نمی‌دهیم و صرفاً به بررسی اجمالی آن خواهیم پرداخت. یک مزیت مشترک این سه روش آن است که با رسم پاسخ فرکانسی حلقه ـ باز، نتایج مهمی از رفتار سیستم حلقه ـ بسته (مانند پایداری نسبی آن)، استنتاج می‌شود. در هر سه روش برای سیستم حلقه ـ بسته فیدبک واحد با تابع تبدیل حلقه ـ

باز $G(j\omega)$ نمودارهای متناظر $G(j\omega)$ را رسم می‌کنیم. اگر سیستم حلقه ـ بسته غیر واحد با تابع تبدیل $H(j\omega)$ در مسیر فیدبک باشد، می‌توان نخست با استفاده از جبر بلوک دیاگرامی آن را به یک سیستم حلقه ـ بسته با فیدبک واحد معادل تبدیل کرد، نمودارهای متناظر تابع تبدیل حلقه ـ باز معادل را رسم کرد و یا اینکه نمودارهای متناظر $G(j\omega)H(j\omega)$ را رسم نمود.

نخست، تابع تبدیل حلقه ـ باز یک سیستم $G(j\omega)$ را در نظر بگیرید. بهره این سیستم برحسب dB را برحسب مقادیر زوایای فاز متناظر برحسب درجه، بر روی گسترهٔ از فرکانس‌ها، $\omega=\omega_1$ تا $\omega=\omega_n$ رسم کنید. این روند در مثال زیر نشان داده شده است.

مثال ۵-۲۴

تابع تبدیل حلقه ـ باز سیستمی عبارتست از

$$G(j\omega)=\frac{۲۰}{j\omega(j\omega+۱)}$$

بهره و زاویه فاز این سیستم به صورت زیر داده می‌شود:

$$\text{LmG}(j\omega)=۲۰\log_{۱۰}\frac{۲۰}{\omega(\omega^۲+۱)^{۱/۲}}$$

$$=۲۰\log_{۱۰}(۲۰)-۲۰\log_{۱۰}(\omega)-۱۰\log_{۱۰}(\omega^۲+۱)$$

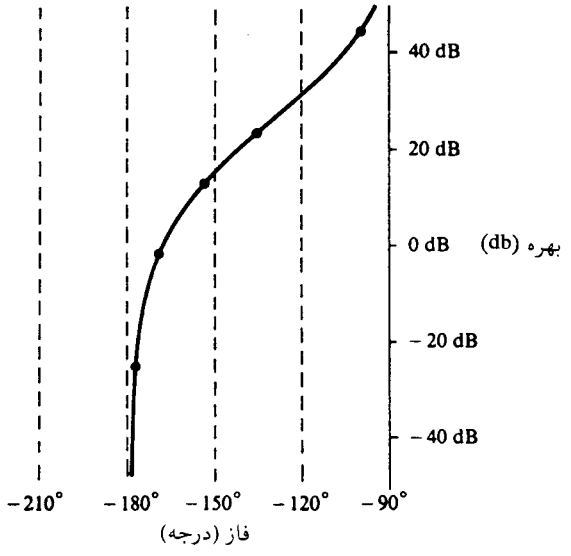
و

$$\angle G(j\omega)=-۹۰^\circ-\tan^{-۱}(\omega)$$

دو مقدار بهره و زاویه فاز تابع تبدیل را برای یک گستره فرکانسی تعیین می‌کنیم. جدول ۵-۱۳ مقادیر بهره و زاویه فاز تابع تبدیل را برای ω از ۰/۱ تا ۲۰ رادیان بر ثانیه نشان می‌دهد. این مقادیر در شکل ۵-۵۲ به صورت نمودار بهره برحسب زاویه فاز رسم شده‌اند.

جدول ۵-۱۳ جدول مقادیر بهره و زاویه فاز مثال ۵-۲۴

فرکانس ω	$\text{LmG}(j\omega)$,dB	$\angle G(j\omega)$ (درجه)
۰/۱	۴۵/۹۸	-۹۵/۷۱
۱	۲۳/۰۱	-۱۳۵°
۲	۱۳/۰۱	-۱۵۳/۴۳°
۵	-۲/۱۱	-۱۶۸/۶۹°
۲۰	-۲۶/۰۳	-۱۷۷/۱۳°



شکل ۵-۵۲ نمودار بهره برحسب فاز مثال ۵-۲۴

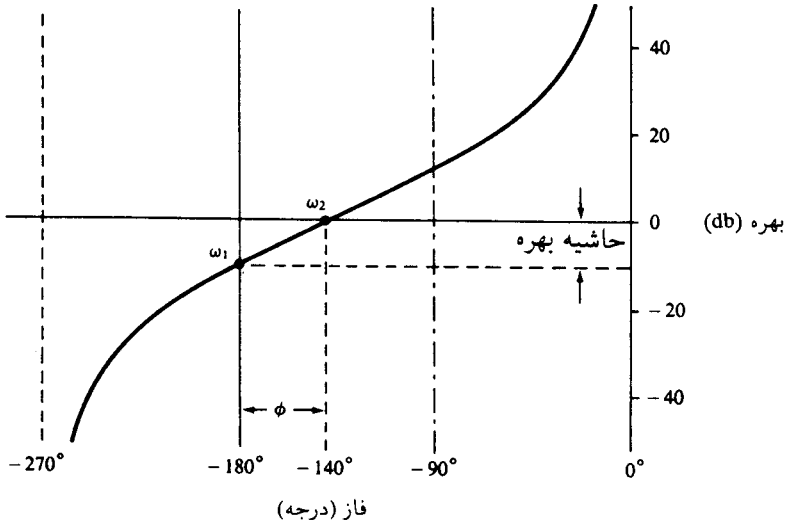
در بخش ۵-۷ مفاهیم حاشیه بهره و فاز را برای نمودارهای بود و نایکوئیست جهت تعیین پایداری و پایداری نسبی سیستم‌های حلقه ـ بسته بررسی کردیم. در اینجا بدون ورود به جزئیات بیشتر با یک مثال، نحوه تعیین حاشیه‌های بهره و فاز و کاربرد آنها در تعیین پایداری را برای نمودارهای بهره برحسب فاز ارایه می‌کنیم.

مثال ۵-۲۵

نمودار بهره برحسب فاز سیستمی در شکل ۵-۵۳ نشان داده شده است. برای تعیین حاشیه بهره نخست باید فرکانسی راکه در آن زاویه فاز تابع تبدیل ۱۸۰° - است، بدست آورد و سپس حاشیه بهره را از رابطه زیر تعیین کرد:

$$\text{حاشیه بهره} = ۲۰\log_{۱۰} \left| \frac{۱}{G(j\omega_۱)} \right| \text{dB}$$

$$= -۲۰\log_{۱۰} \left| G(j\omega_۱) \right| \text{dB}$$



شکل ۵-۵۳ نمودار بهره برحسب فاز مثال ۵-۲۵

که در آن برای ω_1 داریم $\angle G(j\omega_1) = -180^\circ$ و $|G(j\omega_1)|$ را می‌توان مستقیماً و یا از نمودار بهره برحسب فاز تعیین کرد. همانطور که در شکل ۵-۵۳ نشان داده شده است، حاشیه بهره ۱۰dB- می‌باشد.

حاشیه فاز را برای فرکانسی مانند ω_2 که در آن بهره ۰dB است، پیدا می‌کنیم. بنابر تعریف داریم

$$\text{حاشیه فاز} = 180^\circ + \angle G(j\omega_2)$$

که در آن $\angle G(j\omega_2)$ را می‌توان مستقیماً و یا از نمودار بهره برحسب فاز تعیین کرد. همانطور که در شکل ۵-۵۳ نشان داده شده است، حاشیه فاز سیستم $40^\circ +$ می‌باشد زیرا زاویه فاز تابع تبدیل در ω_2 برابر با $140^\circ -$ است.

۵-۸-۱ پاسخ فرکانسی حلقه ـ بسته

اساس کلیه روشهای پاسخ فرکانسی ارایه شده، استفاده از پاسخ فرکانسی سیستم حلقه ـ باز $G(j\omega)$ برای تحلیل سیستم حلقه ـ بسته است. تابع تبدیل سیستم حلقه ـ بسته با فیدبک

واحد عبارتست از

$$\frac{C(j\omega)}{R(j\omega)}=\frac{G(j\omega)}{1+G(j\omega)} \qquad (۱-۸-۵)$$

بدیهی است که در هر فرکانس $\omega=\omega'$، برای $G(j\omega')$ یک و تنها یک مقدار دامنه و زاویه فاز متناظر حلقه ـ بسته داده شده با $|C(j\omega')/R(j\omega')|$ و $\angle[C(j\omega')/R(j\omega')]$ وجود دارد. لیکن اگر یک مقدار معین دامنه $|C(j\omega)/R(j\omega)|$ بدون محدودیتی بر روی زاویه فاز آن $\angle[C(j\omega)/R(j\omega)]$ در نظر گرفته شود. مقادیر فراوانی از $G(j\omega)$ را می‌توان برحسب دامنه و فاز پیدا کرد که این مشخصه را بدست دهند. برای نشان دادن این مطلب، تابع تبدیل که یک کمیّت مختلط است را به صورت زیر نشان دهید

$$G(j\omega)=x+iy \qquad (۲-۸-۵)$$

پاسخ فرکانسی سیستم حلقه ـ بسته عبارتست از

$$\frac{C(j\omega)}{R(j\omega)}=\frac{x+iy}{1+x+iy} \qquad (۳-۸-۵)$$

دامنه تابع تبدیل حلقه ـ بسته داده شده با معادله (۵-۸-۳) عبارتست از

$$M=\left|\frac{C(j\omega)}{R(j\omega)}\right|=\left(\frac{x^2+y^2}{1+2x+x^2+y^2}\right)^{1/2} \qquad (۴-۸-۵)$$

با به توان دو رساندن طرفین معادله (۵-۸-۴) و پس از چند عمل مقدماتی جبری، خواهیم داشت

$$x^2(M^2-1)+2xM^2+y^2(M^2-1)=-M^2 \qquad (۵-۸-۵)$$

با تقسیم طرفین معادله (۵-۸-۵) بر M^2-1 و کامل کردن معادله باافضافه کردن عبارت $M^4/(M^2-1)^2$ به طرفین آن، بدست می‌آوریم

$$x^2+\frac{2xM^2}{(M^2-1)}+\frac{M^4}{(M^2-1)^2}+y^2=\frac{M^4}{(M^2-1)^2}-\frac{M^2}{(M^2-1)} \qquad (۶-۸-۵)$$

و لذا از معادله (۵-۸-۶)، داریم

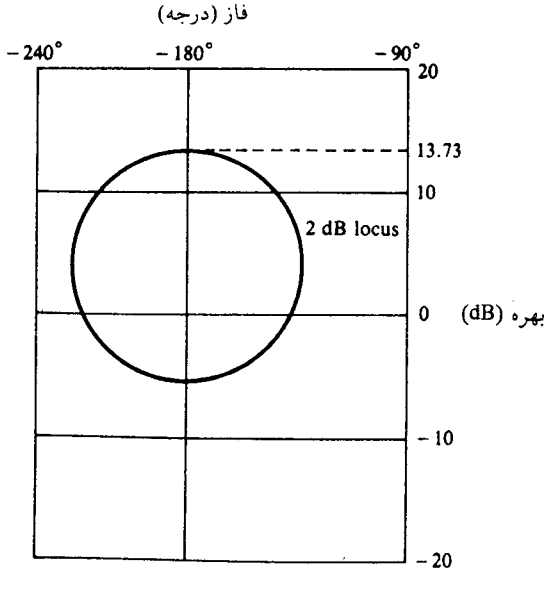
$$\left(x+\frac{M^2}{M^2-1}\right)^2+y^2=\frac{M^2}{(M^2-1)^2} \qquad (۷-۸-۵)$$

معادله (۵-۸-۷)، معادله دایره‌ای است با مرکز $(\circ, \frac{M^{۲}}{M^{۲}-۱})$ و شعاع $|\frac{M}{M^{۲}-۱}|$. بنابراین کلیه توابع تبدیل حلقه ـ باز که مقادیر قسمتهای حقیقی و موهومی آنها (x و y در معادله (۵-۸-۲)) به گونه‌ای باشند که بر روی دایره داده شده با معادله (۵-۸-۷) قرار گیرند، دارای تابع تبدیل حلقه ـ بسته‌ای با دامنه یکسان M خواهند بود.

مثال ۵-۲۶

اگر دامنه تابع تبدیل حلقه ـ بسته را ۲dB در نظر بگیریم، $M = ۲\circ log_{۱\circ} |C(j\omega)/R(j\omega)| = ۲dB$، نمودار نشان داده شده در شکل ۵-۵۴، ترکیبهای بهره و فاز توابع تبدیل حلقه ـ بازی را نشان می‌دهد که سیستم حلقه ـ بسته‌ای با بهره ۲dB را می‌دهند. این ترکیبها یک مکان هندسی ۲dB ایجاد می‌کنند. توجه کنید که محورهای عمودی بهره و افقی فاز تنها به سیستم حلقه ـ باز اعمال می‌شوند و هیچ مقادیر بهره و فاز حلقه ـ بسته‌ای را نشان نمی‌دهند. یک نقطه مانند $۲dB\angle ۱۲\circ^\circ$ را روی مکان هندسی در نظر بگیرید. بنابراین

$$\frac{G(j\omega)}{۱+G(j\omega)} = ۱/۲۵۹$$



شکل ۵-۵۴ نمودار بهره برحسب فاز نشان دهندهٔ مکان هندسی بهرهٔ حلقه ـ بسته ۲dB (M ثابت).

و لذا

$$|G(j\omega)| = ۴/۸۶۱ = ۱۳/۷۳۴dB$$

و

$$\angle G(j\omega) = -۱۸۰^\circ$$

بنابراین، اگر نقطه $۱۳/۷۳۴dB\angle -۱۸۰^\circ$ متناظر با بهره و فاز سیستم حلقه ـ باز $G(j\omega')$ برای یک فرکانس ω' باشد، آنگاه بهره و فاز سیستم حلقه ـ بسته با فیدبک واحد، $۲dB\angle ۰^\circ$ در فرکانس ω' خواهند بود.

تحلیل مشابهی را می‌توان با انتخاب یک زاویه فاز $\angle[C(j\omega)/R(j\omega)]$ بدون محدودیتی بر روی بهره $|C(j\omega)/R(j\omega)|$ انجام داد. زاویه فاز داده شده را می‌توان با ترکیبهای بسیاری از بهره‌ها و زاویه‌های فاز حلقه ـ باز تابع تبدیل $G(j\omega)$ بدست آورد. هر کدام از این ترکیبها، همان زاویه فاز را با بهره‌های مختلف بدست خواهند داد. برای نشان دادن این مطلب می‌توان تابع تبدیل حلقه ـ بسته را به صورت قطبی زیر نمایش داد

$$\frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} = Me^{j\alpha} \qquad (۵-۸-۸)$$

که در آن $M=|C(j\omega)/R(j\omega)|$ و $\alpha=\arg[C(j\omega)/R(j\omega)]$. از معادله (۵-۸-۳)، داریم

$$\alpha = \arg\frac{x+jy}{۱+x+jy}$$

$$= \arg\frac{x^۲+x+y^۲+jy}{(۱+x)^۲+y^۲} \qquad (۵-۸-۹)$$

با تعریف $N=\tan\alpha$ از معادله (۵-۸-۹)، بدست می‌آوریم

$$N=\tan\alpha=\frac{y}{x^۲+x+y^۲} \qquad (۵-۸-۱۰)$$

بنابراین

$$x^۲+x+y^۲-\frac{y}{N}=۰ \qquad (۵-۸-۱۱)$$

با یکسری از عملیات جبری بر روی معادله (۵-۸-۱۱)، می‌توان نشان داد که

$$\left(x+\frac{۱}{۲}\right)^۲+\left(y-\frac{۱}{۲N}\right)^۲=\frac{N^۲+۱}{۴N^۲} \qquad (۵-۸-۱۲)$$

معادله (۵-۸-۱۲) معادله دایره‌هایی با مرکز $(-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}N)$ و شعاع $r=\left|\frac{۱}{۲N}\sqrt{N^۲+۱}\right|$ می‌باشد.

بنابراین کلیه توابع تبدیل حلقه ـ باز که قسمتهای حقیقی و موهومی آنها (x و y در معادله (۵-۸-۱۲))، به گونه‌ای باشند که بر روی دایره داده شده با معادله (۵-۸-۱۲) قرار گیرند، دارای تابع تبدیل حلقه ـ بسته‌ای با زاویه فاز یکسان α ولی دامنه‌های متفاوت خواهد بود.

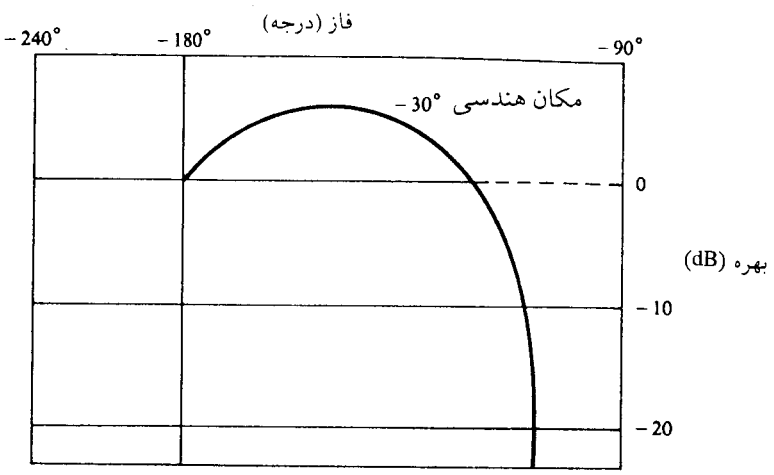
مثال ۵-۲۷

اگر تابع تبدیل حلقه ـ بسته با زاویه فاز ۳۰°- را در نظر بگیریم، داریم

$$\angle\left[C(j\omega)/R(j\omega)\right] = \alpha = -۳۰^\circ$$

نمودار شکل ۵-۵۵ ترکیبهای بهره و فاز حلقه ـ بازی را نشان می‌دهد که سیستم حلقه ـ بسته‌ای با فاز ۳۰°- را می‌دهند. دقت کنید که این ترکیبها یک مکان هندسی راتشکیل داده‌اند. همانند شکل ۵-۵۴، محورهای عمودی بهره و افقی فاز تنها به سیستم حلقه ـ باز اعمال می‌گردند و هیچ مقدار حلقه ـ بسته‌ای رانشان نمی‌دهند. یک نقطه مانند ۶۰°-۰dB∠ را بر روی مکان هندسی در نظر بگیرید. آنگاه

$$\frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} = \frac{۱\angle -۶۰^\circ}{۱+۱\angle -۶۰^\circ} = \frac{۱}{\sqrt{۳}}\angle -۳۰^\circ = -۴/۷۷۱\,dB\angle -۳۰^\circ$$



شکل ۵-۵۵ نمودار بهره برحسب فاز، نشان دهنده زاویه فاز حلقه ـ بسته ۳۰°-

بنابراین اگر نقطه ۰dB∠-۶۰° متناظر با بهره و فاز یک سیستم حلقه ـ باز $G(j\omega)$ برای فرکانسی مانند ω' است، آنگاه سیستم حلقه ـ بسته با فیدبک واحد، بهره و فازی برابر با ۴/۷۷۱dB∠-۳۰°- در فرکانس ω' خواهد داشت.

در تحلیل پاسخ فرکانس سیستم حلقه ـ بسته با استفاده از تابع تبدیل حلقه ـ باز آن $G(j\omega)$، به دو مکان هندسی در مثالهای ۵-۲۶ و ۵-۲۷ اشاره شد. مشاهده شد که اگر دامنه سیستم حلقه ـ بسته را یک مقدار ثابت فرض کنیم، توابع تبدیل حلقه ـ باز بسیاری را می‌توان پیدا کرد که همان مقدار دامنه (با زوایای فاز متفاوت) را در فیدبک حلقه واحد بدست دهند. در مثال ۵-۲۶ این کار برای ۲dB دامنه سیستم حلقه ـ بسته انجام گرفت و یک مکان هندسی دامنه ثابت بدست آمد (شکل ۵-۵۴). به طور مشابهی می‌توان، همانند مثال ۵-۲۷، زاویه فاز حلقه ـ بسته را تعیین کرد و توابع تبدیل حلقه ـ باز بسیاری را پیدا نمود که همان مقدار زاویه فاز (با دامنه‌های متفاوت) را بدست دهند (شکل ۵-۵۵). اکنون فرض کنید که مثال ۵-۲۶ را برای مقادیر مختلف دامنه (برحسب dB) تکرار کنیم، و هم چنین مثال ۵-۲۷ را برای زاویه فاز بین ۰ تا ۲۴۰ (برحسب درجه) تکرار کنیم. اگر مکان هندسیهای بدست آمده از دامنه‌های ثابت و زوایای فاز ثابت را در یک شکل رسم کنیم، شکل بدست آمده را چارت *نیکولز* می‌نامند. چارت نیکولز در شکل ۵-۵۶ نشان داده شده است. در چارت نیکولز محورهای بهره عمودی و افقی فاز متناظر با مقادیر سیستم حلقه ـ باز هستند، در حالیکه مسیرهای منحنی‌الخط[1] متناظر با سیستم حلقه ـ بسته هستند. به نکات زیر در رابطه با چارت نیکولز دقت کنید:

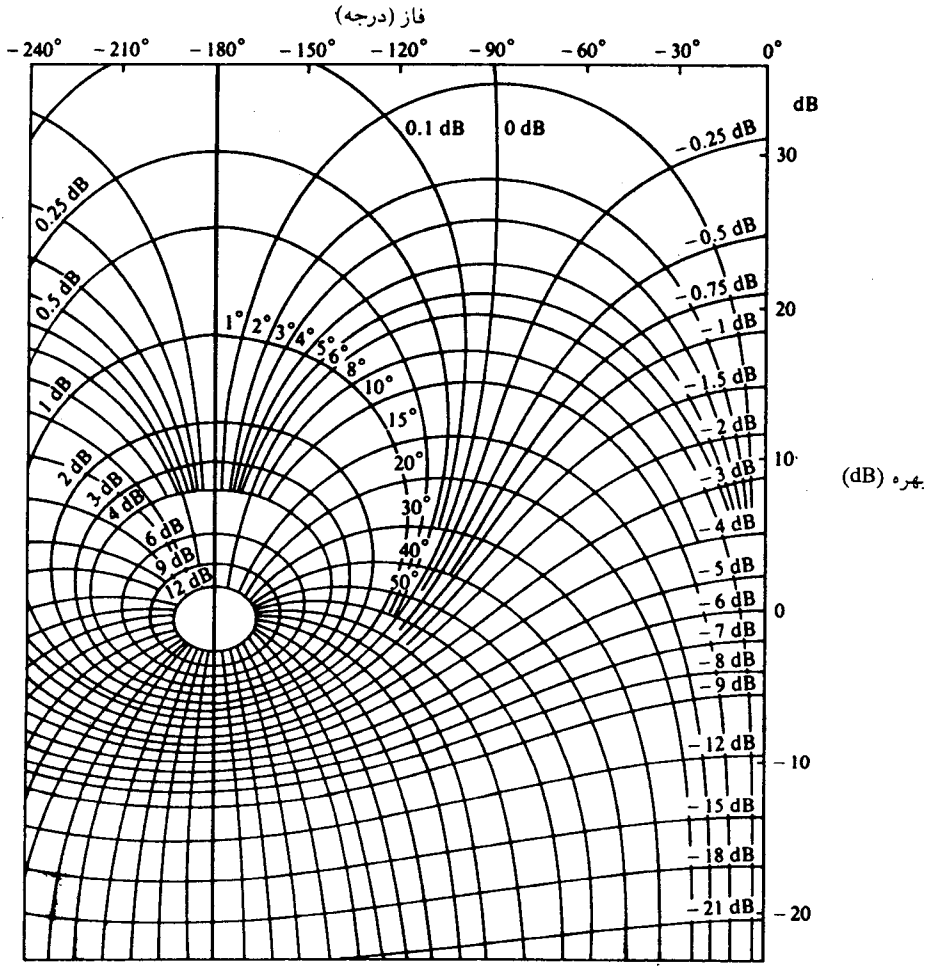
نکته ۱: نقطه بحرانی ۰j+۱- در صفحه مختلط به نقطه ۰dB و ۱۸۰°- بر روی چارت نیکولز نگاشت می‌شود.

نکته ۲: چارت نیکولز حول محور ۱۸۰°- متقارن است.

نکته ۳: کلیه مسیرهای فاز حلقه ـ بسته نشان داده شده مقادیر زوایای فاز منفی می‌باشند، به عبارت دیگر یک مسیر منحنی‌الخط ۴۰°، نشان دهنده یک زاویه فاز حلقه ـ بسته ۴۰°- است.

نکته ۴: اگر منحنی پاسخ فرکانسی حلقه ـ باز سیستم را (با بکارگیری داده‌های دامنه و زاویه فاز به ترتیب برحسب dB و درجه) بر روی نمودار نیکولز رسم کنیم، نقاط قطع

1- Curvilinear



شکل ۵-۵۶ چارت نیکولز

منحنی پاسخ فرکانسی حلقه ـ باز $G(j\omega)$ و مسیرهای منحنی‌الخط مقادیر دامنه M و زاویه فاز α پاسخ فرکانسی حلقه ـ بسته را در هر نقطه فرکانس بدست می‌دهند.

نکته ۵: با رسم منحنی پاسخ فرکانسی $G(j\omega)$ در جهت افزایش فرکانس ω، سیستم حلقه ـ بسته پایدار است اگر نقطه بحرانی ۰dB و ۱۸۰°- در سمت راست منحنی باشد. در صورتیکه منحنی بیش از یک بار محور ۱۸۰°- را قطع کند، سیستم پایدار شرطی است.

مثال ۵-۲۸

تابع تبدیل حلقه ـ باز زیر را در نظر بگیرید

$$G(j\omega)=\frac{۲۰}{(j\omega+۱)(j\omega+۲)(j\omega+۳)}$$

بهره (برحسب dB) و زاویه فاز (برحسب درجه) تابع تبدیل بالا برای یک گسترهٔ فرکانسی در جدول **۵ـ۱۶** آورده شده است. این مقادیر بر روی چارت نیکولز در شکل ۵-۵۷ به صورت منحنی پاسخ فرکانسی حلقه ـ باز سیستم نشان داده شده‌اند. بهره و فاز حلقه ـ بسته را می‌توان مستقیماً برای هر فرکانس و مقدار دلخواه بهره و فاز حلقه ـ باز از چارت نیکولز تعیین کرد. دقت کنید که نمودار حلقه ـ باز با مکان هندسی زاویه فاز حلقه ـ بسته °۱۸۰- هنگامیکه مکان هندسی بهره حلقه ـ بسته 6dB- است، برخورد می‌کند.

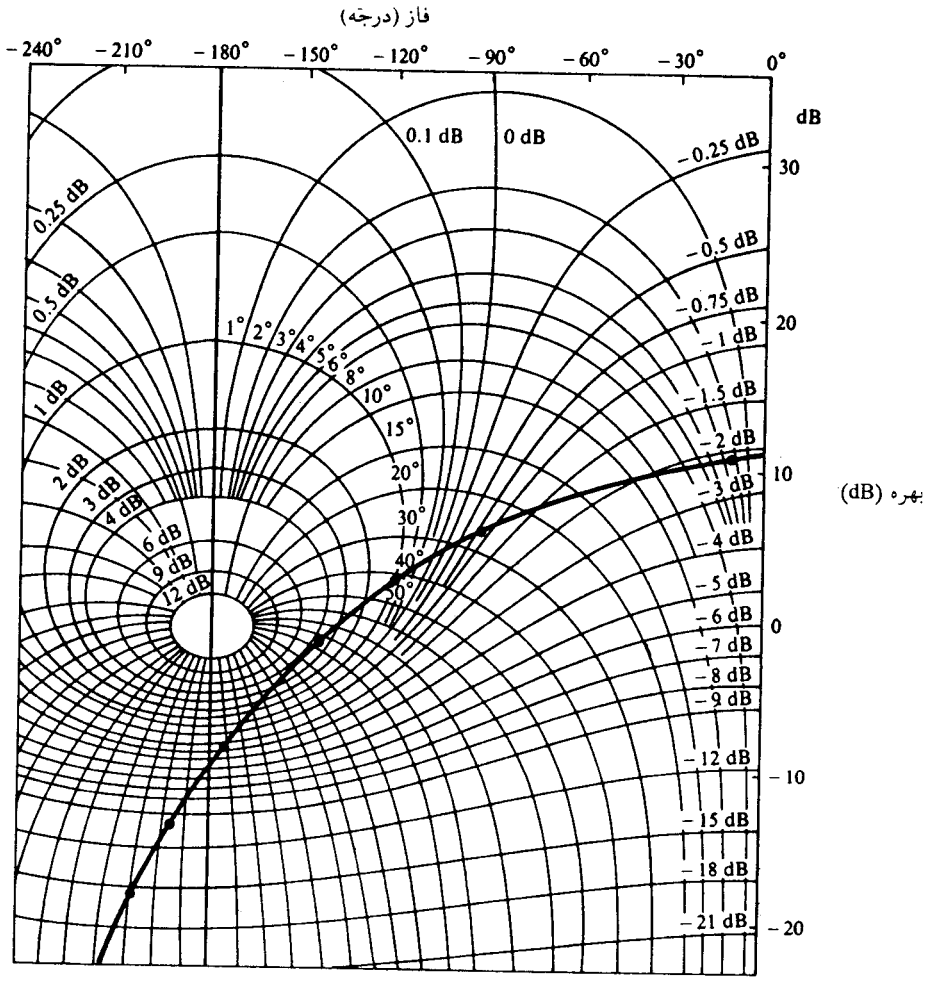
جدول ۵-۱۶ مقادیر فاز و بهره برای سیستم مثال ۵-۲۸

فرکانس ω	$LmG(j\omega)dB$	$\angle G(j\omega)$ (درجه)
۰/۱	۱۰/۴	-۱۰/۴۸°
۱	۶/۰۲	-۹۰°
۱/۵	۲/۴۳	-۱۱۴/۷۴°
۲	-۱/۱۴	-۱۴۲/۱۳°
۳	-۷/۶۷	-۱۷۲/۸۷°
۴	-۱۳/۲۷	-۱۹۲/۵۳°
۵	-۱۸/۰۷	-۲۰۵/۹۲°

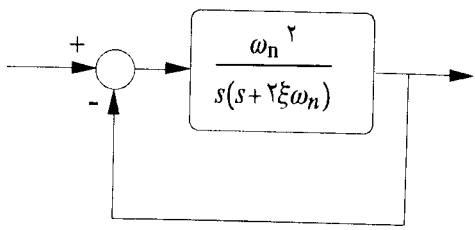
۵-۹ مشخصه‌های عملکرد سیستم براساس پاسخ فرکانسی

سیستم درجه دوم نشان داده شده در شکل ۵-۵۸ را در نظر بگیرید. تابع تبدیل حلقه ـ بسته عبارتست از

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{\omega_n^{۲}}{s^{۲}+۲\xi\omega_n s+\omega_n^{۲}} \qquad (۵-۹-۱)$$



شکل ۵-۵۷ چارت نیکولز مثال ۵-۲۸



شکل ۵-۵۸ سیستم درجه دوم

که در آن ξ و ω_n به ترتیب نسبت میرایی و فرکانس طبیعی غیرمیرا می‌باشند. تابع تبدیل حلقه بسته پاسخ فرکانسی بدین صورت داده می‌شود

$$\frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} = \frac{1}{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)+j2\xi\frac{\omega}{\omega_n}} = Me^{j\alpha} \qquad (۵-۹-۲)$$

که در آن

$$M=\frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2+\left(2\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} \quad , \quad \alpha=-tan^{-1}\left(\frac{2\xi\frac{\omega}{\omega_n}}{1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}}\right)$$

همانطور که از شکل ۵-۱۲ بخش ۵-۲ مشاهده می‌شود، برای مقادیری از نسبت میرایی $|G(j\omega)|=M$ یک مقدار ستیغ در یک فرکانس خاص دارد. فرکانسی که در آن مقدار ستیغ رخ می‌دهد را فرکانس تشدید[1] می‌نامند. از آنجاییکه صورت M یک ثابت است، لذا مقدار ستیغ $|G(j\omega)|$ هنگامی رخ میدهد که عبارت زیر می‌نیمم باشد

$$g(\omega)=\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2+\left(2\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 \qquad (۵-۹-۳)$$

با بازنویسی معادله (۵-۹-۳) به صورت زیر

$$g(\omega)=\left[\frac{\omega^2-\omega_n^2(1-2\xi^2)}{\omega_n^2}\right]^2+4\xi^2(1-\xi^2) \qquad (۵-۹-۴)$$

داریم که می‌نیمم مقدار $g(\omega)$ در $\omega=\omega_n\sqrt{1-2\xi^2}$ رخ خواهد داد. بنابراین فرکانس تشدید ω_r عبارتست از

$$\omega_r=\omega_n\sqrt{1-2\xi^2} \qquad (۵-۹-۵)$$

بدیهی است که معادله (۵-۹-۵) برای مقادیر $0 \le \xi \le 0/707$ که در آنها ستیغی رخ می‌دهد

1- Resonant frequency

مفهوم دارد. به ازاء مقادیر $\xi \to 0$، فرکانس ω_r به سمت ω_n میل می‌کند. برای $0 < \xi \leq 0/707$، فرکانس ستیغ ω_r کمتر از فرکانس طبیعی میرا $\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\xi^2}$ است (فصل دوم). از معادله (۵-۹-۵) مشاهده می‌شود که برای $\xi > 0/707$ ستیغ تشدید وجود نخواهد داشت.

اندازه ستیغ تشدید M_r را می‌توان با جایگزینی معادله (۵-۹-۵) در M بدست آورد. داریم

$$M_r = \max |G(j\omega)| = |G(j\omega_r)| = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \qquad (۶-۹-۵)$$

برای $\xi > 0/707$،

$$M_r = 1 \qquad (۷-۹-۵)$$

به ازاء مقادیر $\xi \to 0$، M_r نیز به سمت بی‌نهایت میل خواهد کرد. به عبارت دیگر اگر سیستم کم‌میرا در فرکانس طبیعی خودش تحریک شود، دامنه $G(j\omega)$ بی‌نهایت خواهد شد.

زاویه فاز $G(j\omega)$ در فرکانس تشدید را می‌توان با جایگزینی معادله (۵-۹-۵) در α بدست آورد. داریم

$$\alpha = \angle G(j\omega_r) = -\tan^{-1}\frac{\sqrt{1-2\xi^2}}{\xi} = -90^\circ + \sin^{-1}\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \qquad (۸-۹-۵)$$

به M_r، دامنه ستیغ تشدید[1] نیز گفته می‌شود. دامنه ستیغ تشدید به مقدار نسبت میرایی ξ بستگی دارد و اندازه آن نشان دهنده پایداری نسبی سیستم می‌باشد. یک M_r بزرگ نشان دهنده حضور یک جفت قطبهای حلقه ـ بسته غالب با نسبت میرایی کوچک است و در این صورت پاسخ حالت گذرای سیستم حلقه ـ بسته مطلوب نخواهد بود. در صورتیکه M_r مقدار کوچکتری داشته باشد، سیستم بخوبی میرا شده است.

ارتباط بین پاسخ گذرای پله و پاسخ فرکانسی سیستم‌های درجه دوم. حداکثر فرا رفت پاسخ پله واحد سیستم درجه دوم نشان داده شده در شکل ۵-۵۸ را می‌توان دقیقاً به دامنه ستیغ تشدید در پاسخ فرکانسی مرتبط کرد. از اینرو همان اطلاعاتی را که از دینامیک سیستم

1- Resonant peak magnitude

در پاسخ گذرای پله واحد می‌توان کسب نمود از پاسخ فرکانسی نیز می‌توان بدست آورد و بالعکس.

برای ورودی پله واحد، خروجی سیستم نشان داده شده در شکل ۵-۵۸ عبارتست از

$$c(t) = 1 - e^{-\xi\omega_n t}\left(\cos \omega_d t + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin \omega_d t\right) \qquad (t \geq 0) \qquad (۵-۹-۹)$$

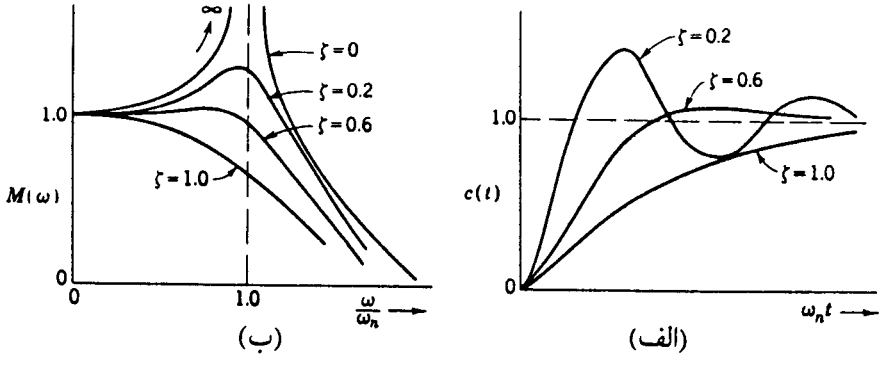
معادله (۵-۹-۹) در بخش ۳-۴-۳ استنتاج گردید و شکل ۵-۵۹ (الف) پاسخ پله واحد سیستم درجه دوم را به ازاء مقادیر مختلف نسبت میرایی نشان می‌دهد. حداکثر فرا رفت M_p برای پاسخ پله واحد با معادله (۳-۴-۲۷) داده شده است و عبارتست از

$$M_p = e^{-(\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2})} \qquad (۵-۹-۱۰)$$

حداکثر فرا رفت برای مقادیر نسبت میرایی کوچکتر از ۰/۴ در عمل غیرقابل قبول خواهند بود. شکل ۵-۵۹ (ب) نیز دامنه تابع تبدیل فرکانسی $M = |G(j\omega)|$، داده شده با معادله (۵-۹-۲) را برای مقادیر مختلف نسبت میرایی نشان می‌دهد. بنابراین برای یک سیستم درجه دوم نتایج زیر را می‌توان در مرتبط کردن پاسخهای فرکانسی و زمانی بدست آورد:

۱ـ معادله (۵-۹-۵)، نشان می‌دهد که ω_r تابعی از ω_n و ξ است. برای یک ξ داده شده مقدار ω_r بزرگتر، مقدار ω_n بزرگتری می‌دهد و پاسخ حالت گذرا سریعتر خواهد بود.

۲ـ معادله‌های (۵-۹-۶) و (۵-۹-۱۰)، نشان می‌دهند که M_r و M_p توابع ξ هستند. با



شکل ۵-۵۹ (الف) نمودارهای زمانی برای پله واحد (ب) نمودارهای متناظر M بر حسب ω/ω_n

کوچکتر شدن ξ، مقادیر M_r و M_p بزرگتر خواهند شد. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که با بزرگ شدن مقدار M_m، مقدار M_p بزرگتر خواهد شد. برای مقادیر $\xi < ۰/۴$، تناظر بین M_r و M_p تنها کیفی است. به عبارت دیگر برای $\xi = ۰$ در حوزه زمان داریم $M_p = ۱$ ولی در حوزه فرکانس $M_r = \infty$ را می‌دهد. برای $\xi > ۰/۴$، تناظر نزدیکی بین M_r و M_p وجود دارد. برای مثال در $\xi = ۰/۴$ خواهیم داشت $M_r = ۱/۰۴$ و $M_p = ۱/۰۹$.

تابع تبدیل حلقه ـ باز سیستم نشان داده شده در شکل ۵-۵۸ عبارتست از

$$G(s) = \frac{\omega_n^{۲}}{s(s + ۲\xi\omega_n)} \qquad (۵-۹-۱۱)$$

با جایگزینی $s = j\omega$ در معادله (۵-۹-۱۱) و حل معادله $|G(j\omega)| = ۱$ برای ω بسادگی می‌توان نشان داد که دامنه $G(j\omega)$ در فرکانس زیر برابر یک خواهد بود

$$\omega = \omega_n \left[\left(۱ + ۴\xi^{۴}\right)^{۱/۲} - ۲\xi^{۲} \right]^{۱/۲} \qquad (۵-۹-۱۲)$$

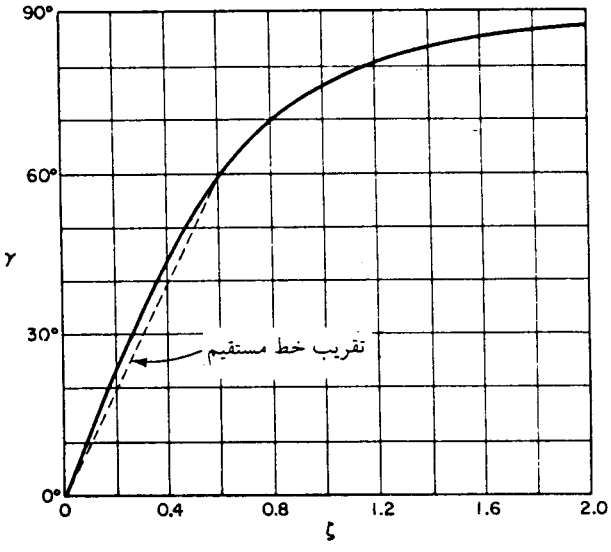
زاویه فاز تابع تبدیل در فرکانس داده شده با معادله (۵-۹-۱۲)، عبارتست از

$$\angle G(j\omega) = -\angle j\omega - \angle(j\omega + ۲\xi\omega_n) = -۹۰^\circ - \tan^{-۱} \frac{\left[\left(۱ + ۴\xi^{۴}\right)^{۱/۲} - ۲\xi^{۲} \right]^{۱/۲}}{۲\xi} \qquad (۵-۹-۱۳)$$

بنابراین حاشیه فاز سیستم γ عبارتست از

$$\begin{aligned} \gamma &= ۱۸۰^\circ + \angle G(j\omega) \\ &= ۹۰^\circ - tan^{-۱} \frac{\left[\left(۱ + ۴\xi^{۴}\right)^{۱/۲} - ۲\xi^{۲} \right]^{۱/۲}}{۲\xi} \\ &= tan^{-۱} \frac{۲\xi}{\left[\left(۱ + ۴\xi^{۴}\right)^{۱/۲} - ۲\xi^{۲} \right]^{۱/۲}} \end{aligned} \qquad (۵-۹-۱۴)$$

معادله (۵-۹-۱۴) ارتباط بین نسبت میرایی ξ و حاشیه فاز γ را می‌دهد. توجه کنید که حاشیه فاز تنها تابعی از نسبت میرایی است. شکل ۵-۶۰ نمودار حاشیه فاز برحسب نسبت میرایی



شکل ۵-۶۰ منحنی حاشیه فاز برحسب نسبت میرایی برای سیستم نشان داده شده در شکل ۵-۴۸

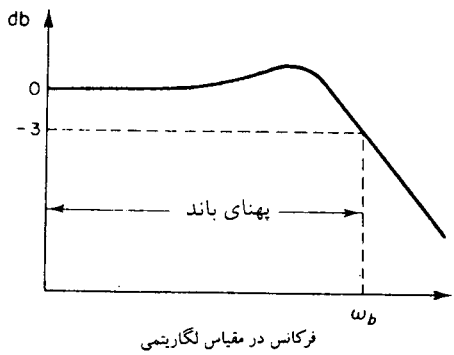
نشان داده شده است. دقت کنید که برای $0 \leq \zeta \leq 0/6$ رابطه بین حاشیه بهره و نسبت میرایی تقریباً خطی است، در واقع داریم

$$\zeta = \gamma/100$$

بنابراین یک حاشیه فاز $60°$ متناظر با نسبت میرایی $0/6$ است. برای سیستم‌های درجه بالاتر که یک جفت قطب غالب وجود دارد، این ارتباط را می‌توان به عنوان یک قاعده سرانگشتی در تخمین پایداری نسبی پاسخ گذرا از پاسخ فرکانسی استفاده کرد.

فرکانس قطع و پهنای باند. علاوه‌بر حاشیه‌های بهره و فاز، ستیغ تشدید M_r و فرکانس‌ستیغ تشدید ω_r، کمیتهای حوزه فرکانسی دیگری نیز وجود دارند که در سنجش عملکرد سیستم بکار گرفته می‌شوند. این مشخصه‌ها فرکانس *قطع*[1]، *پهنای باند*[2] و *نرخ قطع*[3] است. با مراجعه به شکل ۵-۶۱ فرکانس ω_b که در آن دامنه تابع تبدیل فرکانسی حلقه ـ بسته

1- Cutoff frequency
2- Bandwidth
3- Cutoff rate



شکل ۵-۶۱ نمودار لگاریتمی نشان دهنده فرکانس قطع ω_b و پهنای باند

کمتر از ۳dB زیر مقدار فرکانس ـ صفر آن است را *فرکانس قطع* می‌نامند. بنابراین

$$\left|\frac{C(j\omega)}{R(j\omega)}\right| < \left|\frac{C(j0)}{R(j0)}\right| - ۳dB \quad \text{برای } \omega > \omega_b$$

برای سیستم‌هایی که در آنها $|C(j0)/R(j0)| = 0dB$ ، داریم

$$\left|\frac{C(j\omega)}{R(j\omega)}\right| < -۳dB \quad \text{برای } \omega > \omega_b$$

سیستم حلقه ـ بسته با این مشخصهٔ مؤلفه‌های سیگنالی که فرکانس‌هایی بزرگتر از فرکانس قطع دارند را فیلتر می‌کند و مؤلفه‌هایی که فرکانس‌های پایین‌تر از فرکانس قطع دارند را انتقال می‌دهد.

گستره فرکانسی $0 \leq \omega \leq \omega_b$ که در آن اندازه تابع تبدیل حلقه ـ بسته از ۳dB-کمتر نمی‌شود را *پهنای باند* سیستم می‌نامند. در بسیاری از سیستم‌های کنترل، سیگنال ورودی ممکن است که مقدار قابل توجهی سیگنال نویز همراه با سیگنال اصلی ورودی داشته باشد و یا حتی ممکن است که منبع تولید نویز در داخل سیستم حلقه ـ بسته وجود داشته باشد. سیگنال‌های نویز عموماً در باند فرکانس‌هایی بالای باند فرکانسی غالب سیگنال اصلی هستند. بنابراین برای تضعیف نویز و تولید کردن مجدد سیگنال اصلی ورودی، سیستم‌های کنترل را به گونه‌ای طراحی می‌کنند که یک پهنای باند معین به همین منظور داشته باشند.

از طرف دیگر، می‌دانیم که برای یک ω_n داده شده، زمان صعود با افزایش نسبت میرایی ζ افزایش پیدا می‌کند، و هم‌چنین پهنای باند با افزایش ζ کاهش پیدا می‌کند. بنابراین زمان خیز و

پهنای باند نسبت عکس به هم دارند، به عبارت دیگر افزایش (کاهش) پهنای باند باعث کاهش (افزایش) نسبت میرایی می‌شود. ازاینرو افزایش (کاهش) پهنای باند باعث افزایش (کاهش) سرعت پاسخ می‌شود.

آخرین نکته اینکه می‌توان نشان داد که پهنای باند یک سیستم نشان دهنده کیفیت دنبال روندگی سیگنال‌های ورودی مرجع توسط آن است. برای آنکه سیستم ورودیهای دلخواه را به طور دقیق دنبال کند، باید دارای پهنای باندی بزرگ باشد. توجه کنید که طراحی سیستم با پهنای باند بزرگ دارای دو مسئله عمده است، اول اینکه پهنای باند بزرگ از نظر نویز در سیستم موجب بروز اشکالاتی خواهد گردید و دوم آنکه عناصری که در ساخت سیستم با پهنای باند بزرگ بکار گرفته می‌شوند دارای عملکرد بالا هستند و لذا گران می‌باشند.

نرخ قطع. نرخ قطع، شیب منفی لگاریتم دامنه در نزدیکی فرکانس قطع است. نرخ قطع توانایی یک سیستم را در تشخیص سیگنال از نویز نشان می‌دهد.

یک سیستم حلقه ـ بسته با مشخصه تیز قطع در منحنی تابع تبدیل پاسخ فرکانسی، ممکن است که دارای یک اندازه ستیغ تشدید بزرگ باشد که بر حاشیه پایداری نسبتاً کم دلالت خواهد کرد.

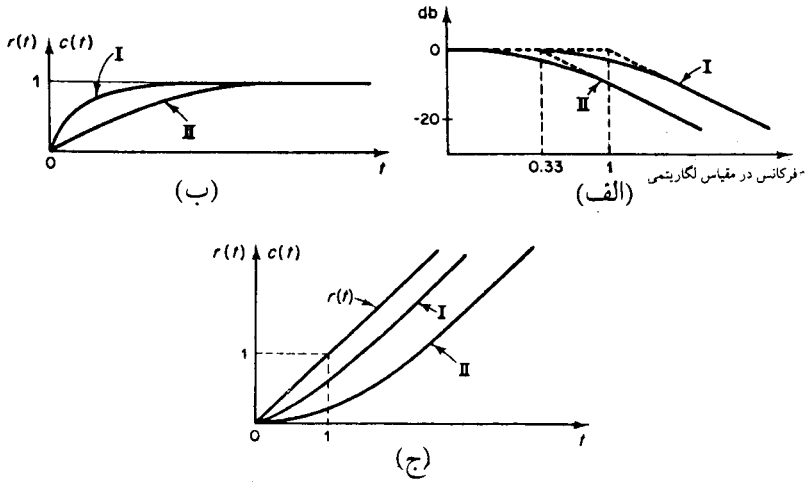
مثال ۵-۲۹

دو سیستم زیر را در نظر بگیرید:

سیستم (الف): $$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{s+1}$$

سیستم (ب): $$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{3s+1}$$

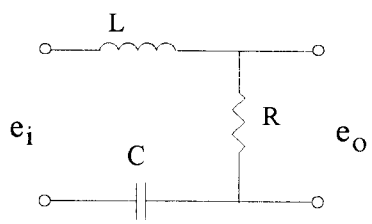
شکل ۵-۶۲ (الف) منحنیهای پاسخ فرکانسی حلقه ـ بسته دو سیستم را نشان می‌دهد. همانطور که مشخص است پهنای باند سیستم (الف) $0 \le \omega \le 1$ رادیان بر ثانیه و پهنای باند سیستم دوم $0 \le \omega \le 0/33$ رادیان بر ثانیه است. شکلهای ۵-۶۲ (ب) تا (ج) نشان می‌دهند که سیستم (الف) با پهنای باند بزرگتر، هر دو ورودی پله واحد و شیب واحد را به ترتیب در شکلهای (ب) و (ج) بهتر دنبال می‌کند.



شکل ۵-۶۲ مقایسه مشخصه‌های دینامیکی دو سیستم در نظر گرفته شده در مثال ۵-۲۹، (الف) منحنیهای پاسخ فرکانسی (ب) پاسخ پله واحد (ج) پاسخ شیب

مسایل

۵-۱ مدار نشان داده شده در شکل ۵-۶۳ را در نظر بگیرید. ولتاژ ورودی به مدار و ولتاژ خروجی آنرا به ترتیب با e_i و e_o نشان دهید. اگر ولتاژ ورودی $e_i(t)=E_i\sin\omega t$ باشد، مقدار حالت ـ ماندگار جریان مدار $i(t)$ که از مقاومت عبور می‌کند را تعیین کنید.



شکل ۵-۶۳ مدار الکتریکی مسئله ۵-۱

۵-۲ نمودار بود توابع تبدیل زیر را رسم کنید:

(الف)
$$G(s)=\frac{۲۰(s+۲)}{s(s^{۲}+۶s+۲۵)}$$

$$G(s)=\frac{۴۰(۱-۰/۵s)}{s(۱+s)(۱+۰/۱s)} \qquad (ب)$$

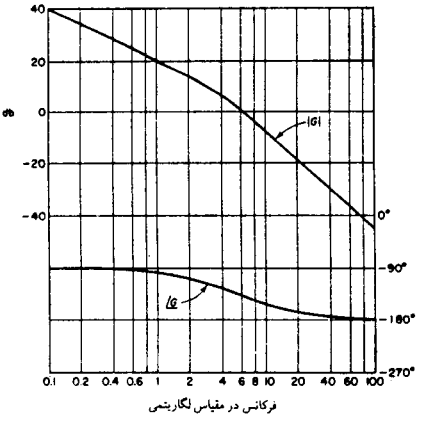
$$G(s)=\frac{۲۰}{(۱+۰/۲s)(۱+۰/۴s)(۱+s)} \qquad (ج)$$

$$G(s)=\frac{۲}{s^{۲}(۱+۰/۱s)(۱+۰/۴s)} \qquad (د)$$

$$G(s)=\frac{۲(۱+۰/۵s)}{s(۱+۰/۱s)(۱+۰/۴s)} \qquad (ه)$$

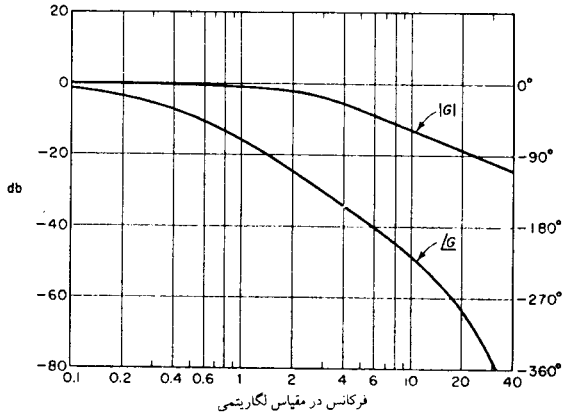
$$G(s)=\frac{۲(۱+۰/۴s)}{s^{۲}(۱+۰/۱s)(۱+۰/۰۵s)} \qquad (و)$$

۳-۵ شکل ۵-۶۴ دیاگرام بود یک تابع تبدیل $G(s)$ را نشان می‌دهد. این تابع تبدیل را تعیین کنید.



شکل ۵-۶۴ دیاگرام بود مسئله ۵-۳

۴-۵ دیاگرام بود یک تابع تبدیل $G(s)$ در شکل ۵-۶۵ رسم شده است. این تابع تبدیل را تعیین کنید.



شکل ۵-۶۵ دیاگرام بود مسئله ۵-۴

۵-۵ تابع تبدیل حلقه ـ باز یک سیستم کنترل با فیدبک واحد عبارتست از

$$G(s)=\frac{as+1}{s^2}$$

به ازاء چه مقداری از a حاشیه فاز سیستم ۴۵° است.

۵-۶ توابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید. مقادیر بهره K را چنان پیدا کنید که (الف) حاشیه فاز سیستم ۴۵° باشد (ب) حاشیه فاز سیستم ۶۰° باشد. از نمودارهای بود بالاترین مقدار مجاز بهره برای پایداری را تعیین کنید.

$$G(s)=\frac{K(s+0/2s)}{(1+0/1s)(2+3s+s^2)} \quad \text{(الف)}$$

$$G(s)=\frac{K(1+0/2s)}{(1+s)(1+0/36s+0/04s^2)} \quad \text{(ب)}$$

$$G(s)=\frac{K(s+1)}{s(s+2)(s^2+4s+5)} \quad \text{(ج)}$$

۵-۷ تابع تبدیل حقله ـ باز سیستمی با فیدبک واحد عبارتست از

$$G(s)=\frac{2K}{(s+2)(s+0/4)(s+0/2)^2}$$

با رسم نمودار بود برای K=۱، حاشیه‌های بهره و فاز تابع تبدیل را تعیین کنید. هم‌چنین گستره‌ای از مقادیر K که برای آنها سیستم حلقه ـ بسته ناپایدار است را بدست آورید.

۸-۵ تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید

$$G(s)=\frac{۳(s+۱)}{s(s+\alpha)}$$

با رسم نمودار بود این تابع تبدیل، مقدار ثابت α که فرکانس عبور بهره حلقه ـ بسته را (رادیان بر ثانیه) $\omega=۱۰۰$ می‌کند، پیدا کنید. حاشیه‌های بهره و فاز سیستم تابع تبدیل را تعیین کنید.

۹-۵ نمودارهای نایکوئیست توابع تبدیل داده شده در زیر را رسم کنید.

(الف) $G(s)=\frac{K(۱+s)^{۲}}{s^{۳}}$ (ب) $G(s)=\frac{K}{s^{۲}(-۱+۵s)(۱+s)}$

(ج) $G(s)=\frac{K}{s^{۲}(۱-۰/۵s)}$ (د) $G(s)=\frac{K}{s^{۲}(s+۱۵)(s^{۲}+۶s+۱۰)}$

گستره مقادیر K را برای پایداری سیستم حلقه ـ بسته توابع تبدیل بالا با استفاده از نمودارهای رسم شده تعیین کنید.

۱۰-۵ نمودارهای نایکوئیست تابع تبدیل زیر را

$$G(s)=\frac{K(T_a s+۱)(T_b s+۱)}{s^{۲}(Ts+۱)}$$

برای حالتهای داده شده رسم کنید:

$$T_b>T>۰ \quad , \quad T_a>T>۰$$

$$T>T_b>۰ \quad , \quad T>T_a>۰$$

۱۱-۵ تابع تبدیل حلقه ـ باز یک سیستم حلقه ـ بسته عبارتست از

$$G(s)=\frac{Ke^{-۲s}}{s}$$

حداکثر مقدار K را برای پایداری سیستم تعیین کنید.

۱۲-۵ تابع تبدیل حلقه ـ باز یک سیستم حلقه ـ بسته عبارتست از

$$G(s)=\frac{Ke^{-Ts}}{s(s+1)}$$

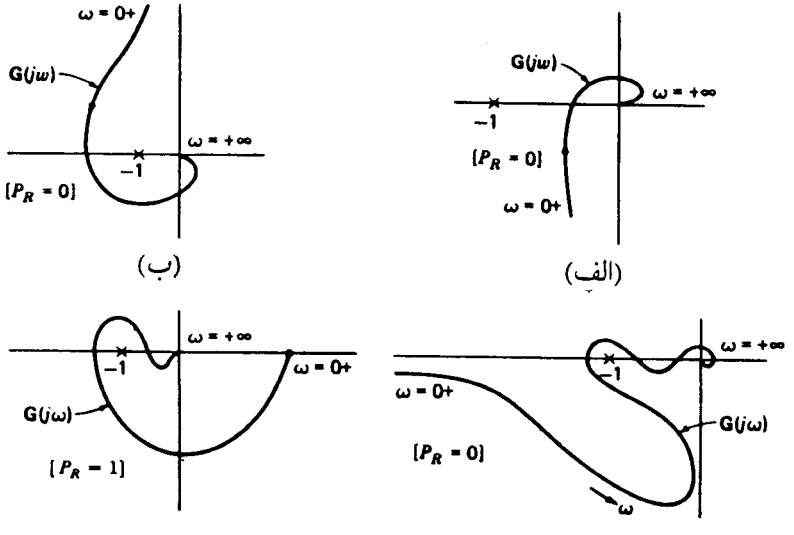
حداکثر مقدار K را برای پایداری سیستم برحسب تابعی از زمان تأخیر T پیدا کنید.

۱۳-۵ نمودار نایکوئیست تابع تبدیل زیر را رسم کنید

$$G(s)=\frac{(Ts)^2-6(Ts)+12}{(Ts)^2+6(Ts)+12}$$

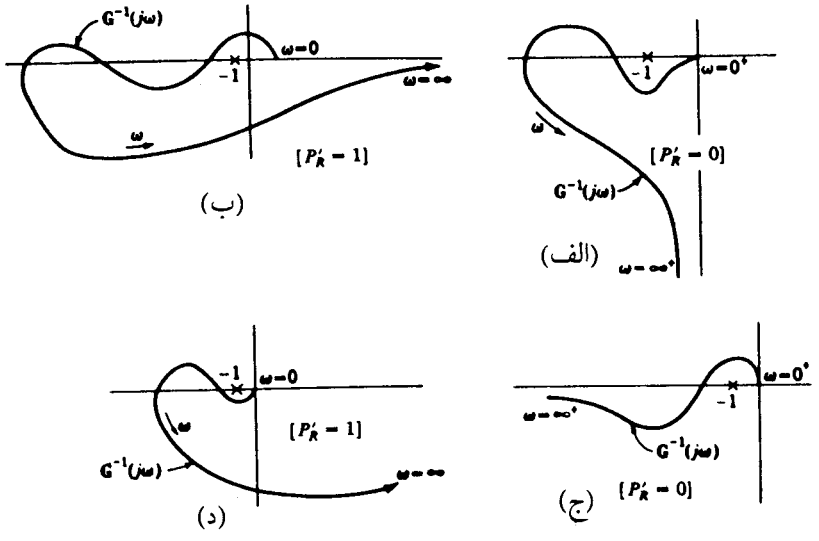
نشان دهید که برای گستره فرکانسی $0<\omega T<2\sqrt{3}$ ، این معادله تقریب مناسبی برای تابع تبدیل تأخیر e^{-Ts} است.

۱۴-۵ با کامل کردن نمودارهای نایکوئیست داده شده در شکل ۵-۶۶ پایداری هر سیستم را بررسی کنید.



شکل ۵-۶۶ نمودارهای نایکوئیست مسئله ۵-۱۴

۱۵-۵ نمودارهای نایکوئیست معکوس توابع تبدیل پایداری $G(s)$ در شکل ۵-۶۷ رسم شده‌اند. پایداری حلقه ـ بسته سیستم‌های کنترل متناظر با این توابع تبدیل را تعیین کنید.



شکل ۵-۶۷ نمودارهای نایکوئیست معکوس مسئله ۵-۱۵

۵-۱۶ تابع تبدیل حلقه ـ باز یک سیستم کنترل حلقه ـ بسته عبارتست از

$$G(s)=\frac{K}{s(s^2+s+0/5)}$$

مقدار بهره K را چنان تعیین کنید که اندازه ستیغ تشدید در پاسخ فرکانسی برابر ۲dB باشد.

۵-۱۷ سیستم درجه دوم زیر را در نظر بگیرید

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$$

نشان دهید که پهنای باند سیستم به صورت زیر بدست می‌آید

$$\omega_b=\omega_n\left(1-2\xi^2+\sqrt{4\xi^4-4\xi^2+2}\right)$$

توجه کنید که ω_b/ω_n تنها تابعی از ξ است. نمودار ω_b/ω_n را برحسب ξ رسم کنید.

مراجع فصل پنجم

[5-1] Nyquist H., *Regeneration theory*, Bell System. Tech. J., Vol. 11, pp. 126-147, Jan. 1932.

[5-2] Bode H. W., *Relations between attenuation and phase in feedback amplifier design*, Bell System Tech. J., pp. 421-454, 1940.

[5-3] Brockett R. W. and J.L.Willems, *Frequency domain stability criteria-Part* I, IEEE Trans. Automatic Control, Vol. AC-10, pp 255-261, July 1965.

[5-4] Brockett R. W. and J.L.Willems, *Frequency domain stability criteria-Part* II, IEEE Trans. Automatic control, Vol. Ac-10, pp 407-413, oct. 1965.

[5-5] Natesan T. R., *A supplement to the note on the generalized Nyquist criterion,* IEEE Trans. Automatic control, Vol. AC-12, pp. 215-216, April 1985.

[5-6] Yeung K. S., *A reformulation of Nyquist's criterion,* IEEE Trans. Educ., Vol. E-28, pp 58-60, Feb. 1985.

[5-7] Hind H. C., *Closed-loop transient response from the open-loop frequency response,* Trans. Measurement and control, pp 302-8, 1979.

[5-8] MacFarlane A. G. J. , ***Frequency response method in control systems***, IEEE press, 1979.

[5-9] Westcott J. H., *The Frequency response method: Its relationship to transient behaviour in control system design*, Trans. of soc. of Instr. Tech., Vol 4, No. 3, pp 113-124, 1952

[5-10] Sanathanan C. K. and H. Tsukui, *Synthesis of transfer function from frequency response data,* International J. systems scinece, Vol, 5, no. 1, pp 4-54, January 1974.

[5-11] Maccoll L. A., *Fundamental theory of servomechanisms,* Van Nostrand, Princeton, N.J., 1945

[5-12] Brown G. S. and D.P.Campbell, ***Principles of servomechanisms,*** Wiley, NewYork, 1948

[5-13] Stockdale L. A., ***Servomechanism,*** Pitama, 1962.

کتاب شناسی

در ابتدای این فصل از روشی تحلیلی برای بدست آوردن پاسخ فرکانسی یک سیستم خطی استفاده کردیم، پاسخ فرکانسی سیستم‌های خطی از نمودارهای قطب ـ صفر در [2] آمده است. رسم دیاگرام‌های بود همراه با مثالهای بسیار متنوع تقریباً در تمامی کتابهای مربوط به کنترل کلاسیک آورده شده است. مراجع [2]، [3] و [25] به عنوان نمونه رسم نمودارهای بود با رسم مجانبهای مناسب را به خوبی توضیح داده‌اند. محاسبه ثابتهای مختلف خطا و ارتباط نوع سیستم با منحنی لگاریتم دامنه مفصلاً در [1] و [2] توضیح داده شده است، اندازه‌گیریهای پاسخ فرکانسی نیز در [4] مختصراً توضیح داده شده‌اند. دو مرجع کلاسیک در تحلیل پاسخ فرکانسی با نمودارهای لگاریتم دامنه و فاز [1-5] و [2-5] هستند. یکی از کاربردهای نمودارهای بود در شناسایی تابع تبدیل سیستم‌های نامعلوم خطی است. روش شناسایی پاسخ فرکانسی در [1] و [2] به خوبی توضیح داده شده است، برای این منظور به مرجع [5-10] نیز مراجعه نمایید.

دومین دسته از نمودارهای مهم پاسخ فرکانسی، نمودارهای نایکوئیست هستند. رسم نمودارهای نایکوئیست در مراجع [1] و [2] به طور کامل آمده است.

کاربرد نمودارهای پاسخ فرکانسی برای تحلیل پایداری سیستم به طور اختصاصی در [3-5]، [4-5]، [5-5] و [6-5] آمده است. بسیاری از کتب درسی نیز به تحلیل پایداری سیستم با استفاده از نمودارهای بود و معیار پایداری نایکوئیست پرداخته‌اند. کاربرد نمودار بود برای تحلیل پایداری یک سیستم به خوبی در [3] بیان گردیده است. مرجع [15] بیان نسبتاً متفاوتی برای تعریف حاشیه‌های بهره و فاز دارد. برای بررسی معیار پایداری نایکوئیست و اثبات آن (که در این کتاب آورده نشده است) اطلاعات مقدماتی از نگاشت‌های همدیس الزامی است. مراجع [1]، [2] و [5] فضای نگاشت، نگاشتهای همدیس و اثبات ریاضی معیار پایداری نایکوئیست را به طور نسبتاً ساده‌ای بیان کرده‌اند. سیستم‌های چند حلقه‌ای نیز در [1] و [3] بررسی شده‌اند. کاربرد معیار پایداری نایکوئیست برای سیستم‌های غیر علّی[1] و تأخیردار نیز در [3] بحث

1- Noncausal

شده است. چندین مثال بسیار جالب نیز در همان مرجع آورده شده است. مرجع [4] نیز در دو فصل جداگانه، پایداری سیستم‌های خطی و روشهای مختلف بررسی آن را مفصلاً بحث نموده است. رسم نمودارهای نایکوئیست معکوس و تحلیل پایداری توسط آنها نیز در مراجع [1] تا [11] آورده شده است.

ارتباط بین رفتار حالت ـ گذرای سیستم حلقه ـ بسته و پاسخ فرکانسی حلقه ـ باز آن در مقاله [7-5] و کتاب [8-5] و مقاله [9-5] مفصلاً بحث شده است. در مراجع [1] ، [3] ، [4] ، [5] و [25] نیز این ارتباطات را به طور ساده‌ای بیان گردیده‌اند. اثرات اضافه کردن قطب و صفر به تابع تبدیل بر پارامترهای پاسخ فرکانسی نیز در [3] آورده شده است.