۶

روشهای جبران‌سازی سیستم‌های کنترل

اهداف فصل:

۱ـ آشنایی با ایده جبران سازی و انواع جبران سازها

۲ـ معرفی جبران سازهای پس فاز، پیش فاز و پس ـ پیش فاز

۳ـ طراحی جبران سازها با استفاده از مکان ریشه

۴ـ طراحی جبران سازها با استفاده از روش پاسخ فرکانسی

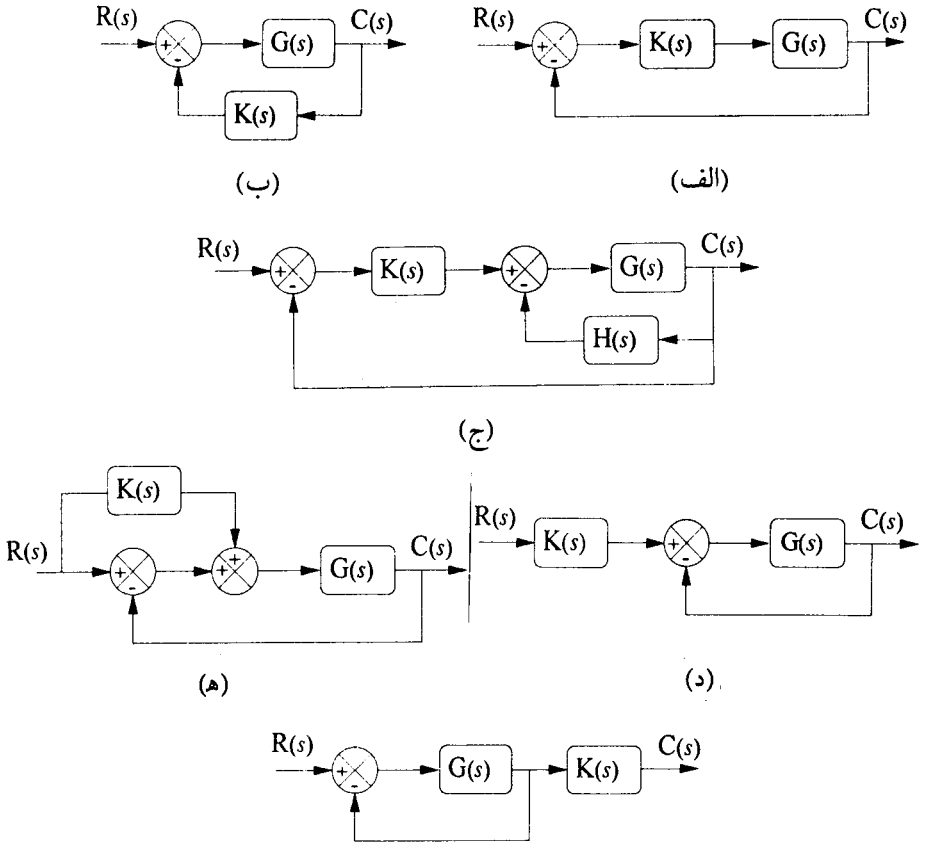
۵ـ طراحی جبران سازها با استفاده از چارت نیکولز

۶ـ۱ مقدمه

در فصلهای قبل با نمایش و تحلیل عملکرد سیستم‌های کنترل آشنا شدیم. مهندس کنترل پس از نمایش سیستم کنترل به صورت معادلات دیفرانسیل غیرخطی، تابع تبدیل، فضای حالت و ... به تحلیل سیستم خواهد پرداخت. توسط مدل بدست آمده از سیستم، و یا در صورت امکان با تحت آزمایش قرار دادن سیستم حلقه ـ باز اصلی، مشخصه‌های حوزه زمانی پاسخ سیستم به ورودیهای مختلف مانند ورودی پله (سرعت پاسخ، فراجهش حداکثر، زمان ستیغ، زمان استقرار ...)، خطاهای حالت ـ ماندگار، پایداری و پایداری نسبی، رسم مکان ریشه و در حوزهٔ فرکانس با رسم نمودارهای بود، نایکوئیست و چارت نیکولز مشخصه‌هایی مانند حاشیهٔ بهره، حاشیهٔ فاز، پایداری نسبی، پهنای باند، فرکانس قطع و ... را مورد بررسی قرار می‌دهد. حال اگر یک یا چند پارامتر از مشخصه‌های سیستم، مانند پایداری، سرعت پاسخ، حاشیه‌های بهره و فاز و غیره مطلوب نباشند، طراح سیستم باید به گونه‌ای به مشخصه‌های مطلوب عملکرد سیستم دست یابد. با توجه به اینکه در اکثر سیستم‌ها، سخت‌افزار و ساختار درونی سیستم حلقه ـ باز مورد نظر غیرقابل تغییر و تعویض است، لذا در عمل نمی‌توان با تغییر پارامترهای خود سیستم به عملکرد مطلوب دسترسی پیدا کرد. از اینرو، مهندس طراح سیستم با بکارگیری روشهای طراحی[1] و جبران‌سازی[2]، کنترل کننده مناسبی را جهت دست‌یابی به مشخصه‌های مورد نظر طراحی می‌کند. به سیستم‌های کمکی که وارد حلقه کنترل می‌گردند و رفتار مورد نظر حلقه ـ بسته را بدست می‌دهند، جبران ساز[3] می‌گویند. در برخی از سیستم‌ها عمل جبران‌سازی با بستن یک حلقه فیدبک واحد به دور سیستم و تنظیم بهرهٔ حلقه ـ باز آن، به خوبی انجام می‌پذیرد. حال آنکه در بسیاری از سیستم‌های صنعتی که چند مشخصه مانند پایدارسازی، سرعت بخشیدن به پاسخ و ... مورد نظر است، و یا اینکه سیستم از دینامیک پیچیده‌ای برخوردار است، با تنظیم یک بهره از سیستم حلقه ـ بسته با فیدبک واحد، مشخصه‌های تعیین شده برای سیستم حلقه ـ بسته بدست نخواهد آمد. در این چنین مواردی استفاده از جبران سازهای دینامیکی الزامی خواهد بود.

1- Design
2- Compensation
3- Compensator

روشهای مختلفی برای واردکردن جبران سازها در سیستم فیدبک وجود دارند. این روشها در شکل زیر آورده شده‌اند. اولین و متداولترین روش، استفاده از جبران ساز در مسیر پیشرو همراه با سیستم حلقه ـ باز است. به این روش، جبران سازی سری[1] یا *متوالی*[2] می‌گویند.



(الف) سیستم کنترل فیدبک با جبران ساز سری (ب) سیستم کنترل فیدبک با جبران ساز موازی (ج) سیستم کنترل فیدبک با جبران ساز سری ـ موازی (د) سیستم کنترل فیدبک با جبران ساز در مسیر ورودی (هـ) سیستم کنترل فیدبک با جبران ساز در مسیر ورودی (و) سیستم کنترل فیدبک با جبران ساز در مسیر خروجی

1- Series

2- Cascade

این روش جبران‌سازی در شکل ۶-۱ (الف) نشان داده شده است. روش دوم واردکردن جبران سازها، استفاده از جبران ساز در مسیر فیدبک است. به این روش، جبران سازی فیدبک یا *موازی*[1] گفته می‌شود و در شکل ۶-۱ (ب) نشان داده شده است. همچنین می‌توان دو روش بالا را تلفیق نموده و از جبران ساز سری ـ فیدبک نشان داده شده در شکل ۶-۱ (ج) استفاده کرد. در بعضی از شرایط بهتر است که از جبران ساز در مسیر ورودی به سیستم فیدبک استفاده نمود که به دو صورت نشان داده شده در شکل‌های ۶-۱ (د) و (ه) اعمال می‌شود. سرانجام می‌توان از جبران سازها در مسیر خروجی سیستم نیز استفاده کرد که به آن جبران کردن خروجی یا *بار*[2] گویند و در شکل ۶-۱ (و) نشان داده شده است.

علاوه‌بر روشهای ذکر شده می‌توان به روشهای جدید بنا نهاده شده بر مفاهیم *فضای حالت* نیز اشاره کرد. این روشهای تحلیل و طراحی سیستم‌ها را، بصورت مختصر در فصل ۷ بررسی خواهیم کرد. در این فصل، با توجه به سر راست بودن و کاربردی‌تر بودن روشهای طراحی جبران سازهای سری (شکل ۶-۱ (الف))، تنها به ارایه و توضیح این روشها خواهیم پرداخت. بدیهی است که در شرایط خاصی ممکن است یکی از روشهای ذکر شده در بالا بر روش سری ترجیح داده شود، لیکن جبران سازی سری با توجه به کاربرد وسیعتر آن، بیشتر از همه روشهای دیگر مورد استفاده قرار گرفته است. در هر صورت عوامل زیر در انتخاب، بین روشهای مختلف جبران سازی باید در نظر گرفته شوند:

۱ـ روشهای طراحی جبران‌کنندهٔ سری سر راست‌تر از روشهای طراحی سایر جبران سازها است. اگر چه ممکن است اعمال عملی برخی از جبران‌کننده‌ها ساده‌تر باشد.

۲ـ با توجه به ماهیت فیزیکی یک سیستم کنترل (الکتریکی، مکانیکی، هیدرولیکی و یا غیره)، ممکن است که برخی از روشهای جبران‌سازی ذکر شده قابل اجرا نباشند.

۳ـ اعمال جبران ساز از نقطه نظر اقتصادی مقرون به صرفه باشد. مواردی از قبیل اندازه، وزن، هزینه عناصر و تقویت‌کننده‌ها، همگی در ارزیابی اقتصادی جبران

1- Parallel

2- Load

ساز مهم هستند. دقت کنید که در برخی از کاربردها، مانند صنایع هواپیمایی، حجم و وزن جعبه کنترل فوق‌العاده مهم است و طراح باید یک محدوده حجم و وزن مشخصی را برای جبران ساز در نظر بگیرید.

۴ـ شرایط محیطی که جبران ساز در آن به کار گرفته خواهد شد، بر دقت و پایداری کمیّت کنترل شده بشدت تأثیر می‌گذارد و انتخاب متغیر مناسب برای ورودی و خروجی بلوک جبران‌ساز می‌تواند یکی از عوامل تعیین کننده باشد. به عنوان مثال ممکن است که یک کمیت در سیستم، تحت تأثیر شدید شرایط جوی باشد و با تغییر دما تغییر کند و یا اینکه به کارگیری متغیر دیگری از نظر سخت‌افزار سیستم، مناسب‌تر باشد.

۵ـ مسئله نویز در سیستم کنترل نیز می‌تواند در انتخاب نوع جبران ساز تأثیر گذارد. به عنوان مثال در جبران سازهای سری که از یک بهره تقویت زیاد استفاده می‌کنند، مسئله نویز حادتر از جبران سازهای فیدبک است که در آنها تقویت کننده‌ای با بهره بزرگ بکار گرفته نمی‌شود.

۶ـ نوع مشخصه عملکرد مطلوب در نظر گرفته شده برای سیستم حلقه ـ بسته نیز می‌تواند یکی از عوامل رجحان یک نوع جبران ساز بر دیگری باشد. اگر پاسخ سریعی از سیستم مطلوب باشد، جبران سازی فیدبک می‌تواند بهتر جوابگو باشد و یا اگر بخواهیم یک قسمت از دینامیک سیستم را از سایر قسمتها مجزی کنیم، در این حالت می‌توان از یک حلقه فیدبک داخلی در قسمت مورد نظر استفاده کرد.

۷ـ در کنار تمامی موارد بالا، باید تجربه و علاقه طراح به یک سیستم خاص جبران سازی و عناصر در دسترس برای بکارگیری در سیستم جبران ساز را نیز افزود.

مشخصه‌های عملکرد. مشخصه‌های عملکرد بسیاری، بسته به نیاز صنعت و کاربرد خاص سیستم کنترل، برای تعیین رفتار مطلوب سیستم کنترل وجود دارند. در جدول ۶-۱ خلاصه‌ای از مشخصه‌های عملکرد آورده شده است.

مراحل طراحی. اولین مرحله طراحی، بدست آوردن یک مدل ریاضی مناسب خطی از سیستم مورد نظر است. پس از مدلسازی و شبیه‌سازی سیستم، با روشهای ارایه شده، تحلیل مدل سیستم صورت می‌پذیرد و نقاط ضعف و قوت سیستم به طور کامل تعیین می‌گردند. با

جدول ۶-۱ خلاصه‌ای از مشخصه‌های مهم عملکرد که در طراحی جبران سازها مورد استفاده قرار می‌گیرند.

(الف) سیستم حلقه ـ باز

مشخصه	حوزه	توضیح
۱ـ ساختار قطب و صفر	حوزه‌های زمان و فرکانس	نشان دهندهٔ پایداری و رفتار حلقه ـ باز
۲ـ حاشیهٔ بهره و حاشیهٔ فاز	حوزه فرکانس	نشان دهندهٔ پایداری حلقه ـ بسته و حاشیهٔ پایداری

(ب) سیستم حلقه ـ بسته

مشخصه	حوزه	توضیح
۱ـ ساختار قطب و صفر	حوزه‌های زمان و فرکانس	نشان دهندهٔ پایداری و رفتار حلقه ـ بسته
۲ـ مشخصه‌های پاسخ زمانی: اولین فرا رفت، زمان استقرار، زمان ستیغ و مقدار فراجهش حداکثر	حوزه زمان	تابعی از فرکانس طبیعی غیرمیرا و نسبت میرایی برای سیستم مرتبه دوم و یا قطبهای مؤثر سیستم‌های مرتبه بالاتر
۳ـ خطای حالت ـ ماندگار	حوزه زمان	تابعی از نوع سیستم و ماهیت ورودی
۴ـ فرکانس تشدید، بالاترین مقدار تشدید، پهنای باند، فرکانس قطع و نرخ آن	حوزه فرکانس	تابعی از فرکانس طبیعی غیرمیرا و نسبت میرایی برای سیستم مرتبه دوم و یا قطبهای قطبهای غالب سیستمهای مرتبه بالاتر. میزانی برای حذف نویز و دنبال روندگی در سیستم. میزانی برای تعیین حاشیهٔ پایداری و سرعت پاسخ سیستم.

تعیین مشخصه‌های عملکرد و رفتار مطلوب و ایده‌ال سیستم حلقه ـ بسته، طراح با روش سعی و خطا به طراحی جبران سازی می‌پردازد که رفتار مطلوب حلقه ـ بسته را فراهم آورد. در این مرحله، باید با انجام آزمایشات مکرر و طراحیهای مختلف، پارامترهای گوناگون جبران ساز را به گونه‌ای تغییر داد تا رفتار مناسب حلقه ـ بسته حاصل شود. با آزمون پایداری و اطمینان از پایداری سیستم حلقه ـ بسته و بدست آوردن سایر مشخصه‌های پاسخ سیستم، طراح با اعمال جبران ساز به سیستم اصلی و بستن حلقه آن، سیستم را مورد آزمایش قرار می‌دهد. با توجه به در نظر گرفتن مسایل عملی از قبیل عناصر غیرخطی در سیستم، محرکها، سنسورها، برخی دینامیک‌های مدل نشده و نامعینی در مدلسازی و شبیه‌سازی سیستم حلقه ـ باز و جبران ساز، بدیهی است که رفتار سیستم حلقه ـ بسته واقعی با رفتار مدل آن مقداری

تفاوت داشته باشد. لذا ممکن است که اولین نتیجه طراحی چندان مطلوب نباشد و مشخصه‌های عملکرد را برآورده نسازد. در اینجا طراح سیستم کنترل با سعی و خطا به بهینه‌سازی مدل طراحی شده پرداخته تا اینکه به سیستم مطلوب حلقه ـ بسته دست پیدا کند. در این مرحله، طراح باید هر آزمایشی را بر روی سیستم به طور دقیق تحلیل و بررسی کند و نتایج هر مرحله را در بهینه‌سازی مراحل بعد به کار گیرد. طراح باید اطمینان پیدا کند که سیستم نهایی، مشخصه‌های عملکرد را برآورده می‌سازد، علاوه‌بر آن از نظر اقتصادی مقرون به صرفه است و از نظر کار قابل اعتماد می‌باشد.

تذکر این نکته حایز اهمیت است که در طراحی سیستم‌های کنترل با روشهای مکان ریشه، و یا پاسخ فرکانسی (که در این فصل مورد بررسی قرار می‌گیرند)، جبران ساز و نتیجه نهایی منحصر بفرد نیست. منحصر بفرد نبودن نتیجه طراحی بدین دلیل است که بهترین پاسخ یا پاسخ بهینه به مسئله طراحی تعریف نشده است و برای دست‌یابی به طراحی بهینه باید از روشهای پیشرفته‌تری استفاده کرد که از محدوده این کتاب خارج است.

مشخصه‌های کلی که یک سیستم طراحی شده باید داشته باشند، عبارتند از: خطاهای کوچک در پاسخ به سیگنال ورودی (برای این منظور میرایی سیستم باید مناسب باشد)، حساسیت کم به تغییرات کوچک در پارامترهای سیستم، از بین بردن اثر اغتشاشات نامطلوب وارده به سیستم و همچنین کم کردن اثر نویز ورودی (مانند نویز سنسورها).

۶-۲ انواع جبران سازها

متداولترین جبران سازها که در صنعت نیز کاربرد فراوانی دارند عبارتند از: جبران سازهای پیش *فاز*[1]، پس *فاز*[2] و پس ـ پیش *فاز*[3]. جبران ساز پیش فاز بطور عمده برای بهبود بخشیدن به رفتار گذرای پاسخ بکار گرفته می‌شود و تأثیر اندکی بر روی خطای حالت ـ ماندگار پاسخ دارد. این جبران ساز ممکن است موجب تشدید اثرات نویزهای فرکانس بالا گردد. جبران ساز پس فاز برای بهبود بخشیدن خطای حالت ـ ماندگار به‌کار گرفته می‌شود. لیکن باعث افزایش زمان پاسخ گذاری سیستم می‌گردد. جبران ساز پس فاز اثرات نویزهای فرکانس بالا را کاهش

1- Phase lead
2- Phase lag
3- Phase lag-lead

می‌دهد. جبران ساز پس ـ پیش فاز اثرات هر دو جبران سازی پس و پیش فاز را با هم ترکیب می‌کند. بکارگیری جبران ساز پس فاز یا پیش فاز درجه دینامیکی سیستم را، در صورتیکه حذف صفر و قطب صورت نگیرد، یک درجه بالا می‌برد و در صورت عدم حذف صفر و قطب، جبران ساز پس ـ پیش فاز دو درجه به درجه دینامیکی سیستم اضافه می‌کند. این دو درجه افزایش در درجه دینامیکی، موجب پیچیده‌تر شدن سیستم می‌گردد و کنترل رفتار گذرای آن را مشکلتر می‌سازد.

جبران سازهای دیگری نیز وجود دارند که بعضاً در صنعت به کار گرفته می‌شوند، برای بررسی این جبران سازها به بخش کتابشناسی همین فصل مراجعه شود.

۶-۲-۱ جبران ساز پیش فاز

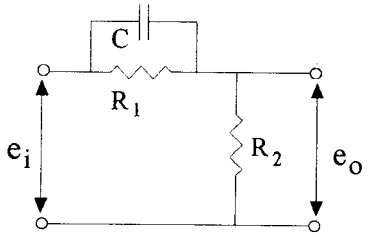
جبران ساز پیش فاز استاندارد دارای تابع تبدیل زیر است

$$G_c(s)=\alpha\frac{1+Ts}{1+\alpha Ts} \qquad (۶-۲-۱)$$

که در آن $0<\alpha<1$ و T یک عدد حقیقی مثبت است. در بسیاری از مواقع، همراه با تابع تبدیل جبران ساز داده شده با معادله (۶-۲-۱)، یک بهره قابل تنظیم K_c نیز برای بهبود بخشیدن به عملکرد جبران ساز بکار گرفته می‌شود. در این صورت تابع تبدیل جبران ساز عبارتست از

$$G_c(s)=K_c\alpha\frac{1+Ts}{1+\alpha Ts} \qquad (۶-۲-۲)$$

شکل ۶-۱ تحقق فیزیکی جبران ساز پیش فاز داده شده با معادله (۶-۲-۱) را به صورت یک مدار الکتریکی نشان می‌دهد (برای دیگر تحققهای فیزیکی جبران ساز، به مسایل ۶-۱ و ۶-۲ مراجعه کنید) از شکل ۶-۱ داریم که تابع تبدیل بین خروجی $E_o(s)$ و ورودی $E_i(s)$ عبارتست از



شکل ۶-۱ مدار پیش فاز الکتریکی

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)}=\frac{R_۲}{R_۱+R_۲}\cdot\frac{R_۱Cs+۱}{\frac{R_۱R_۲}{R_۱+R_۲}Cs+۱} \qquad (۶-۲-۳)$$

با تعریف

$$R_۱C=T \quad , \quad \frac{R_۲}{R_۱+R_۲}=\alpha<۱$$

از معادله (۶-۲-۳)، بدست می‌آوریم

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)}=\alpha.\frac{۱+Ts}{۱+\alpha Ts}$$

که همانند معادله (۶-۲-۱) می‌باشد.

مشخصه‌های جبران سازهای پیش فاز. تابع تبدیل جبران ساز پیش فاز را می‌توان از معادله (۶-۲-۱) به صورت زیر نوشت

$$G_c(s)=\frac{s+\frac{۱}{T}}{s+\frac{۱}{\alpha T}} \qquad (۶-۲-۴)$$

بنابراین جبران ساز پیش فاز یک قطب در $s=-۱/(\alpha T)$ و یک صفر در $s=-۱/T$ دارد. از آنجاییکه $۰<\alpha<۱$ می‌باشد، صفر جبران ساز همواره در سمت راست قطب آن برروی محور حقیقی منفی در صفحه مختلط قرار دارد. برای مقدار کوچک α، قطب جبران ساز در قسمت چپ صفحه مختلط بسیار دور از محور موهومی قرار می‌گیرد. حداقل مقدار α با تحقق فیزیکی جبران ساز پیش فاز محدود می‌شود.

تابع تبدیل پاسخ فرکانسی جبران ساز پیش فاز عبارتست از

$$G_c(j\omega)=K_c\alpha\frac{j\omega T+۱}{j\omega\alpha T+۱} \qquad (۰<\alpha<۱) \qquad (۶-۲-۵)$$

نمودار بود جبران ساز پیش فاز برای $\alpha=۰/۱$ و $K_c=۱$ در شکل ۶-۲ نشان داده شده است. فرکانس‌های شکست برای جبران ساز پیش فاز عبارتند از $\omega=۱/T$ و $\omega=۱۰/T$ یا $\omega=۱/(\alpha T)$. از شکل ۶-۲ مشاهده می‌شود که جبران ساز پیش فاز یک فیلتر بالاگذر[1] است. به عبارت دیگر

1- Highpass filter

فرکانس‌های بالا را عبور داده ولی فرکانس‌های پایین را تضعیف می‌کند. دقت کنید که این مشخصه برای پدیده نویز که عموماً دارای فرکانس‌های بالا می‌باشد، مناسب نیست. با توجه به قسمت فاز نمودار بود شکل ۶-۲، مشاهده می‌شود که حداکثر پیش فاز، زاویه ϕ_m در ω_r رخ می‌دهد که میانگین هندسی دو فرکانس شکست است، به عبارت دیگر

$$\log \omega_m = \frac{1}{2}\left(\log \frac{1}{T} + \log \frac{1}{\alpha T}\right)$$

و از اینرو

$$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{\alpha}T} \qquad (۶-۲-۶)$$

نمودار نایکوئیست جبران ساز پیش فاز داده شده با معادله (۶-۲-۵) در شکل ۶-۳ نشان داده شده است. همانطور که در شکل ۶-۳ نشان داده شده است. حداکثر پیش فاز، زاویه ϕ_m زاویه بین مماسی است که از مبداءبه نمودار نایکوئیست (یک نیمدایره) رسم می‌شود. همچنین داریم که زاویه فاز در $\omega=\omega_m$، عبارتست از

$$\sin \phi_m = \frac{\frac{1-\alpha}{2}}{\frac{1+\alpha}{2}} = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \qquad (۶-۲-۷)$$

از معادله (۶-۲-۷)، می‌توان حداکثر زاویه پیش فاز برای یک α داده شده را محاسبه کرد.

چارت نیکولز جبران ساز پیش فاز داده شده با معادله (۶-۲-۱)، برای $\alpha=0/1$ و $K_c=1$ نیز در شکل ۶-۴ رسم شده است.

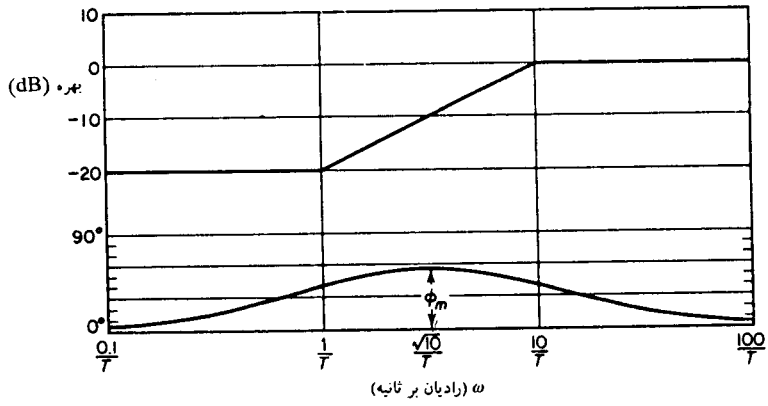
۶-۲-۲ جبران ساز پس فاز

جبران ساز پس فاز استاندارد، دارای تابع تبدیل زیر می‌باشد

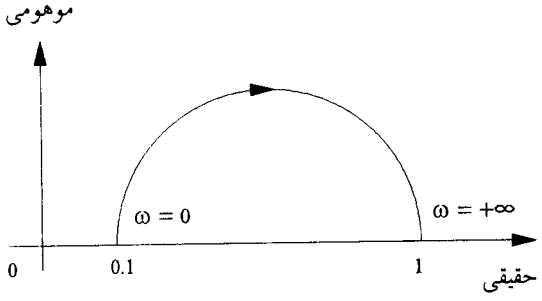
$$G_c(s) = \frac{1+Ts}{1+\beta Ts} \qquad (۶-۲-۸)$$

که در آن $\beta>1$ و T یک عدد حقیقی مثبت است. همانند جبران ساز پیش فاز در اینجا نیز در بسیاری از مواقع همراه با جبران ساز داده شده با معادله (۶-۲-۸)، یک بهره قابل تنظیم K_c برای بهبود عملکرد جبران ساز بکارگرفته می‌شود. در این صورت تابع تبدیل جبران ساز پس فاز عبارتست از

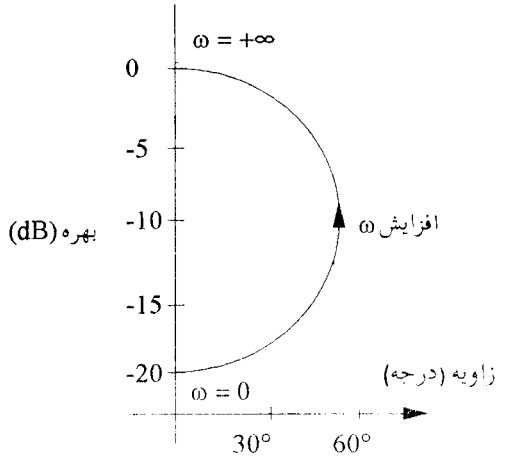
$$G_c(s) = K_c \frac{1+Ts}{1+\beta Ts}$$



شکل ۶-۲ نمودار بود جبران ساز پیش فاز معادله (۶-۲-۲) که در آن $K_c=1$ و $\alpha=0/1$



شکل ۶-۳ نمودار نایکوئیست جبران ساز پیش فاز معادله (۶-۲-۲) که در آن $K_c=1$ و $\alpha=0/1$

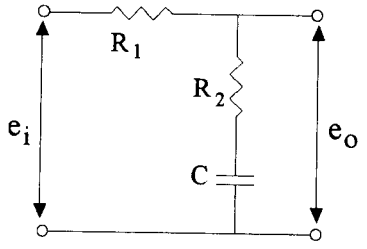


شکل ۶-۴ چارت نیکولز جبران ساز پیش فاز معادله (۶-۲-۲) که در آن $K_c=1$ و $\alpha=0/1$

$$= \frac{K_c}{\beta} \frac{s + 1/T}{s + 1/\beta T} \qquad (۶-۲-۹)$$

شکل ۶-۵ تحقق فیزیکی جبران ساز پس فاز داده شده با معادله (۶-۲-۸) را به صورت یک مدار الکتریکی نشان می‌دهد. (برای دیگر تحققهای فیزیکی جبران ساز به مسایل ۶-۱ و ۶-۲ مراجعه کنید) با نوشتن تابع تبدیل مدار شکل ۶-۵ و مقایسه با معادله (۶-۲-۸)، بدست می‌آوریم

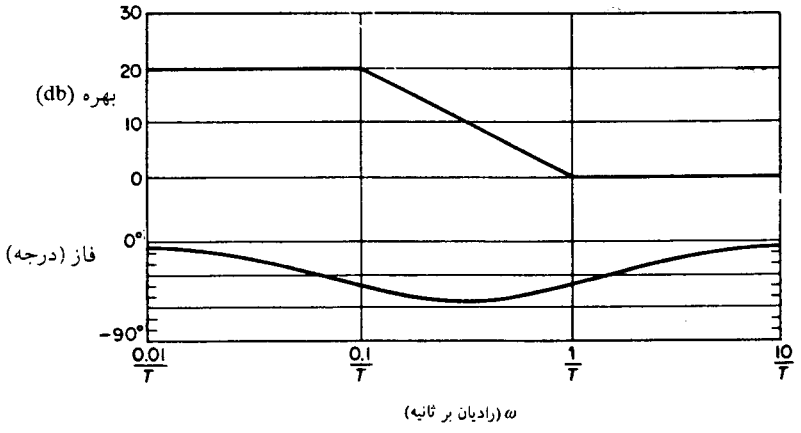
$$T = R_2 C \quad , \quad \beta = \frac{R_1 + R_2}{R_2} \quad (\beta > 1/0)$$



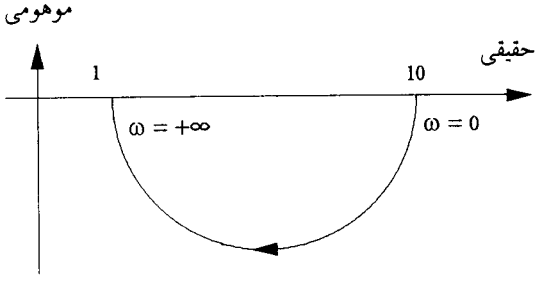
شکل ۶-۵ مدار پس فاز الکتریکی

مشخصه‌های جبران سازهای پس فاز. با توجه به معادله (۶-۲-۹) جبران ساز پس فاز یک قطب در $s = -1/(\beta T)$ و یک صفر در $s = -1/T$ دارد. از آنجاییکه $\beta > 1/0$، لذا قطب جبران ساز همواره در سمت راست صفر آن بر روی محور حقیقی منفی در صفحه مختلط قرار دارد. برای مقادیر بزرگ β قطب جبران ساز به مبداء صفحه مختلط نزدیکتر خواهد شد. نمودار بود جبران ساز پس فاز برای $K_c = 1$ و $\beta = 10$ در شکل ۶-۶ نشان داده شده است. فرکانس‌های شکست برای جبران ساز پس فاز در $\omega = 1/T$ و $\omega = 1/(\beta T)$ قرار دارند. همانطور که از شکل ۶-۶ مشاهده می‌شود. جبران ساز پس فاز به صورت یک *فیلتر پایین‌گذر*[1] عمل می‌کند. دقت کنید که دامنه جبران ساز پس فاز در فرکانس‌های پایین برابر ۱۰ یا ۲۰dB، و در فرکانس‌های بالا یک یا ۰dB است. نمودار نایکوئیست و چارت نیکولز جبران ساز پس فاز نیز به ترتیب در شکلهای ۶-۷ و ۶-۸ رسم شده‌اند.

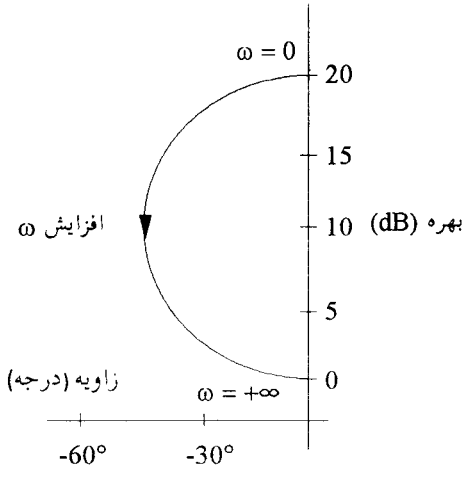
1- Low pass filter



شکل ۶-۶ نمودار بود جبران ساز پس فاز معادله (۶-۲-۸)، که در آن $K_c=1$ و $\beta=10$



شکل ۶-۷ نمودار نایکوئیست جبران ساز پس فاز معادله (۶-۲-۸) که در آن $K_c=1$ و $\beta=10$



شکل ۶-۸ چارت نیکولز جبران ساز پس فاز معادله (۶-۲-۸) که در آن $K_c=1$ و $\beta=10$

۶-۲-۳ جبران ساز پس ـ پیش فاز

برای آنکه از مزیت هر دو جبران ساز پس فاز در بالا بردن دقت حالت ـ ماندگار و پیش فاز در سرعت بخشیدن به پاسخ سیستم و کاهش فراجهش حداکثر استفاده کنیم، این دو جبران ساز با هم ترکیب شده و جبران ساز پس ـ پیش فاز را بوجود می‌آورند. تابع تبدیل جبران ساز پس ـ پیش فاز عبارتست از

$$G_c(s)=K_c\beta\alpha\frac{(1+T_1s)(1+T_2s)}{(1+\alpha T_1s)(1+\beta T_2s)} \qquad (۶-۲-۱۰)$$

که در آن $\beta>1$، $\alpha<1$، T_1 و T_2 ثابتهای مثبت و K_c نیز یک بهره قابل تنظیم است. در بسیاری از مواقع β برابر با $1/\alpha$ انتخاب می‌شود. شکل ۶-۹ تحقق فیزیکی این جبران ساز را به صورت یک مدار الکتریکی نشان می‌دهد. (برای دیگر تحققهای فیزیکی جبران ساز به مسایل ۶-۳ و ۶-۴ مراجعه کنید). از شکل ۶-۹، تابع تبدیل مدار نشان داده شده عبارتست از

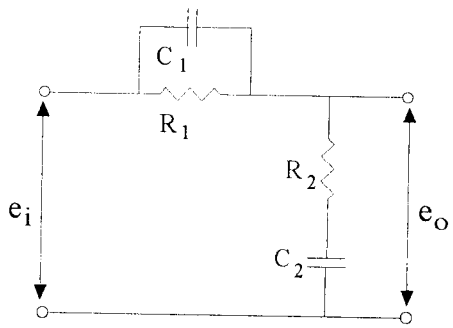
$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)}=\frac{(R_1C_1s+1)(R_2C_2s+1)}{(R_1C_1s+1)(R_2C_2s+1)+R_1C_2s} \qquad (۶-۲-۱۱)$$

با تعریف

$$T_1=R_1C_1\ ,\ T_2=R_2C_2\ ,\ R_1C_1+R_2C_2+R_1C_2=\frac{T_1}{\beta}+\beta T_2 \qquad (\beta>1)$$

داریم

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)}=\frac{(T_1s+1)(T_2s+1)}{(\frac{T_1}{\beta}s+1)(\beta T_2s+1)} \qquad (۶-۲-۱۲)$$



شکل ۶-۹ مدار پس ـ پیش فاز الکتریکی

معادله (۶-۲-۱۲)، همان معادله (۶-۲-۱۰) است با $\beta=1/\alpha$ و $K_c=1$.

مشخصه‌های جبران سازهای پس - پیش فاز. تابع تبدیل جبران ساز پس - پیش فاز را می‌توان از معادله (۶-۲-۱۰) به صورت زیر نوشت

$$G_c(s)=K_c\left(\frac{s+1/T_1}{s+1/\alpha T_1}\right)\left(\frac{s+1/T_2}{s+\frac{1}{\beta T_2}}\right) \qquad (۶-۲-۱۳)$$

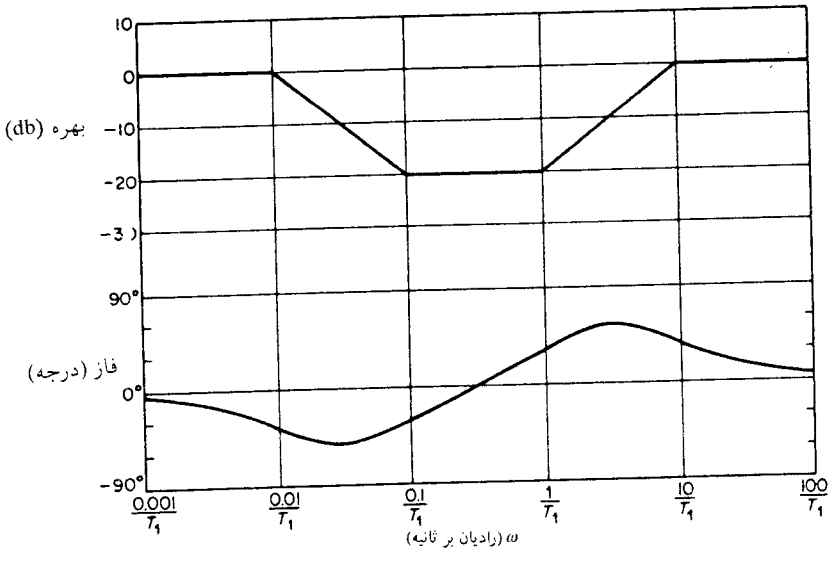
که در آن $\alpha<1$ و $\beta>1$. عبارت

$$\frac{s+1/T_1}{s+1/\alpha T_1}=\alpha\left(\frac{T_1 s+1}{\alpha T_1 s+1}\right) \qquad (\alpha<1)$$

اثر یک جبران ساز پیش فاز و عبارت

$$\frac{s+1/T_2}{s+1/\beta T_2}=\beta\left(\frac{T_2 s+1}{\beta T_2 s+1}\right) \qquad (\beta>1)$$

اثر یک جبران ساز پس فاز را دارد. نمودار بود جبران ساز پس - پیش فاز، برای $K_c=1$، $1/\alpha=\beta=10$ و $T_2=10T_1$ در شکل ۶-۱۰ نشان داده شده است. توجه کنید که منحنی دامنه



شکل ۶-۱۰ نمودار بود جبران ساز پس - پیش فاز معادله (۶-۲-۱۰) برای $K_c=1$ و $\beta=10=\frac{1}{\alpha}$ و $T_2=10T_1$

جبران ساز در فرکانس‌های پایین و بالا مقدار dB ۰ را اختیار می‌کند. اگر فرکانسی را که در آن زاویه فاز °۰ است با ω_1 نشان دهیم، همانطورکه در شکل ۶-۱۰ نشان داده شده است، داریم

$$\log \omega_1 = \frac{1}{2}\left[\log \frac{0.1}{T_1} + \log \frac{1}{T_1}\right]$$

$$= \log \sqrt{\frac{0.1}{T_1^2}}$$

و لذا

$$\omega_1 = \frac{\sqrt{0.1}}{T_1}$$

نمودار بود شکل ۶-۱۰، بین فرکانس‌های $\omega_1 > \omega > 0$ و $\infty > \omega > \omega_1$، به ترتیب همانند نمودار بود جبران ساز پس فاز و پیش فاز عمل می‌کند.

شکلهای ۶-۱۱ و ۶-۱۲ به ترتیب نمودارهای نایکوئیست و چارت نیکولز تابع تبدیل جبران ساز پس ـ پیش فاز را نشان می‌دهند. همانطورکه در شکل ۶-۱۱ نیز نشان داده شده است، زاویه فاز جبران ساز پس ـ پیش فاز در ω_1 صفر می‌شود. نمودار نایکوئیست نیز بین فرکانس‌های $\omega_1 > \omega > 0$ و $\infty > \omega > \omega_1$ به ترتیب همانند نمودارهای نایکوئیست جبران ساز پس فاز و پیش فاز عمل می‌کند.

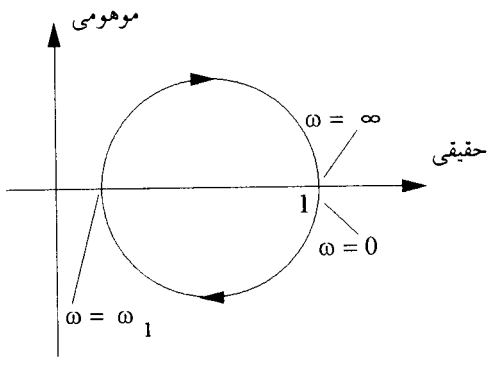
۶-۲-۴ کنترل کننده‌های PD، PI و PID

کنترل کننده PD. اگر در جبران ساز پیش فاز α را برابر صفر قرار دهیم (حالت ایده‌آل $\alpha \to 0$)، *کنترل کننده تناسبی مشتقی*[1] یا PD را خواهیم داشت. تابع تبدیل کنترل کننده PD عبارتست از

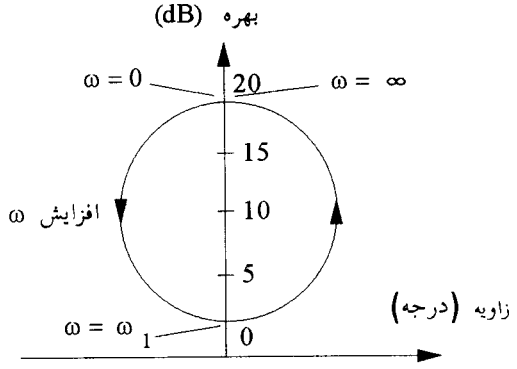
$$G_c(s) = K_p + K_D s \qquad (۶-۲-۱۴)$$

که در آن K_p و K_D را به ترتیب، بهره‌های تناسبی و مشتقی می‌نامند. نمودار بود این کنترل کننده در شکل ۶-۱۳ نشان داده شده است. فرکانس شکست نمودار در $\omega = K_p/K_D$ قرار دارد. مقدار بهره K_p تا حدی تعیین کننده رفتار حالت ماندگار است و از آن برای بهبود رفتار

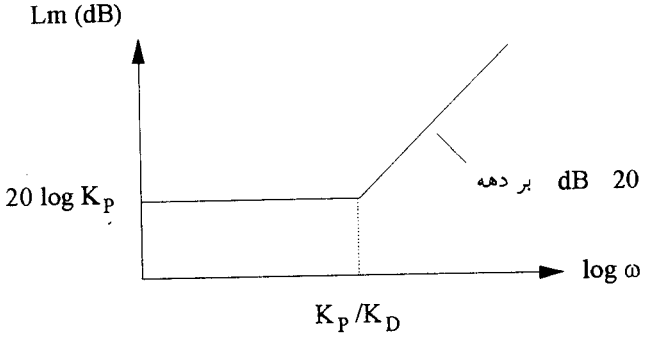
1- Proportional-Derivative



شکل ۶-۱۱ نمودار نایکوئیست جبران ساز پس ـ پیش فاز معادله (۶-۲-۱۰) برای $K_c=1$ و $\beta=\frac{1}{\alpha}=10$



شکل ۶-۱۲ چارت نیکولز جبران ساز پس ـ پیش فاز معادله (۶-۲-۱۰) برای $K_c=1$ و $\beta=\frac{1}{\alpha}=10$



شکل ۶-۱۳ نمودار بود کنترل کننده PD

حالت ـ ماندگار استفاده می‌کنند. کنترل کننده PD حاشیه فاز را افزایش می‌دهد و لذا می‌تواند پایداری سیستم را بهبود ببخشد. لیکن دامنه آن بعد از فرکانس K_p/K_D روند افزایشی داشته که باعث تشدید نویزهای فرکانس بالا می‌گردد (کنترل کننده PD به صورت یک فیلتر بالاگذر عمل می‌کند). با توجه به اینکه جبران ساز پیش فاز نیز به اندازه کافی پیش فاز فراهم می‌کند و حاشیه فاز را افزایش می‌دهد ولی برای محدوده فرکانس بالا دارای دامنه بسیار کوچکتری نسبت به کنترل کننده PD است، لذا جبران ساز پیش فاز بر کنترل کننده PD ترجیح داده می‌شود. کنترل کننده PD همانند جبران ساز پیش فاز رفتار گذرای پاسخ را بهبود می‌بخشد.

با توجه به اینکه PD یک مشتق‌گیر خالص است، لذا تحقق آن با عناصر RLC غیرفعال امکان‌پذیر نمی‌باشد.

زاویه فاز کنترل کننده PD برابر است با $\phi=\tan^{-1}\frac{\omega K_D}{K_p}$، که از ۰ تا ۹۰° + تغییر پیدا می‌کند و همواره مثبت است.

کنترل کننده PI. با قرار دادن $\beta\to\infty$ در جبران ساز پس فاز، این جبران ساز به سمت جبران ساز ایده‌آل *تناسبی ـ انتگرال*[1] یا PI میل خواهد کرد. تابع تبدیل کنترل کننده PI عبارتست از

$$G_c(s) = K_p + K_I/s \qquad (۱۵-۲-۶)$$

که در آن K_p و K_I به ترتیب بهره‌های تناسبی و انتگرال کنترل کننده می‌باشند. کنترل کننده PI یک صفر در $s=-K_I/K_p$ و یک قطب در $s=0$ دارد. نمودار لگاریتم دامنه کنترل کننده PI، در شکل ۶-۱۴ رسم شده است. بهره کنترل کننده PI در فرکانس صفر بی‌نهایت است، و این مشخصه‌های حالت ـ ماندگار را بهبود می‌بخشد. از طرف دیگر، کنترل کننده PI نوع سیستم جبران شده را یکی افزایش می‌دهد و لذا سیستم را به طرف ناپایداری سوق می‌دهد و حاشیه پایداری را کم می‌کند. بنابراین در انتخاب ضرایب K_p و K_I باید دقت کرد که پاسخ گذرای سیستم مناسب باشد. کنترل کننده PI نیز همانطور که در شکل ۶-۱۴ آمده است، یک فیلتر پایین گذر است و لذا فرکانس‌های بالا را تضعیف می‌کند و موجب کند شدن پاسخ گذرا می‌گردد. بهره کنترل کننده PI برای فرکانس‌های پایین بسیار بزرگ و برای فرکانس‌های بالا

1- Proportional-Integral

مقدار ثابت $20\log K_p$ می‌باشد. زاویه فاز یک کنترل کننده PI عبارتست از

$$\angle G_c(j\omega) = \tan^{-1}\frac{\omega K_p}{K_I} - 90^\circ \qquad (۱۶-۲-۶)$$

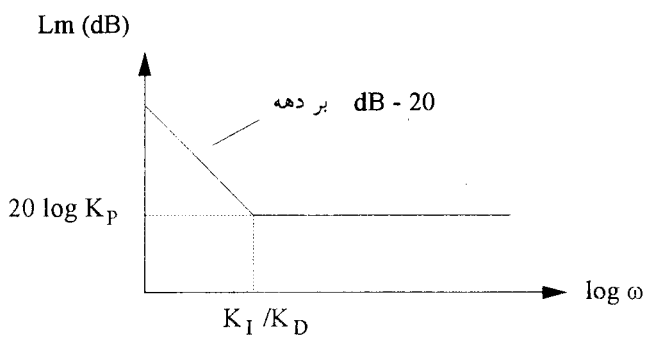
این زاویه فاز از -90° برای فرکانس $\omega = 0$ شروع می‌شود و تا 0° برای فرکانسهای بالا $\omega \to \infty$ تغیر پیدامی‌کند و لذا همواره منفی است.

کنترل کننده PID. کنترل کننده PID برای سود جستن از مزایای یک کنترل کننده PI و PD طراحی شده است. می‌توان گفت که هیچ کنترل کننده‌ای در صنعت به اندازه کنترل کننده PID مورد استفاده قرار نگرفته است. تابع تبدیل کنترل کننده PID عبارتست از

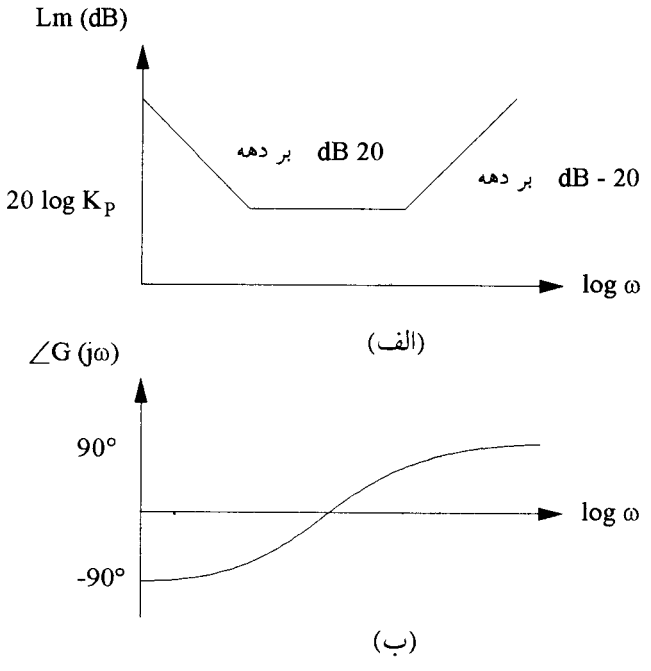
$$G_c(s) = K_p + K_I/s + K_D s \qquad (۱۷-۲-۶)$$

که در آن K_p بهره تناسبی، K_I بهره انتگرال و K_D بهره مشتقی است. تحقق فیزیکی این کنترل کننده توسط یک مدار الکتریکی امکان‌پذیر است. شکل ۶-۱۵ نمودار بود کنترل کننده PID را نشان می‌دهد. همانطورکه مشخص است کنترل کننده PID یک کنترل کننده پس ـ پیش فاز است و همانند یک جبران ساز پس ـ پیش فاز باید درتنظیم پارامترهای کنترل کننده دقت کرد و افزایش بیش از اندازه آنها ممکن است به ناپایداری سیستم حلقه ـ بسته منجر گردد.

تنظیم پارامترهای کنترل کننده‌های PID. مهم‌ترین مسئله در استفاده بهینه از کنترل کننده‌های PID ، تنظیم مناسب پارامترهای آنها K_p ، K_I و K_D است. روشهای مختلفی برای



شکل ۶-۱۴ نمودار لگاریتم دامنه کنترل کننده PI ـ



شکل ۶-۱۵ نمودار بود یک کنترل کننده PID . (الف) منحنی دامنه (ب) منحنی فاز

تنظیم این پارامترها پیشنهاد شده است. قواعد زیگلر و نیکولز[1] از جمله این روشها هستند. در این کتاب به ارایه و بررسی این روشها نمی‌پردازیم. لیکن خواننده می‌تواند با مراجعه به بخش کتابشناسی همین فصل، با مراجعه به منابع داده شده، از روشهای کلاسیک زیگلر و نیکولز تا کاربرد سیستم‌های هوشمند[2] را ملاحظه و بررسی نماید.

۶-۳ طراحی جبران سازها با استفاده از مکان ریشه

در فصل چهارم، با نحوه ترسیم مکان ریشه آشنا شدیم. نمودارهای مکان ریشه رابطه بین بهره سیستم و پاسخ زمانی آن را نشان می‌دهند (محل قطب‌های حلقه ـ بسته). در واقع هنگامیکه مشخصه‌های عملکرد مطلوب سیستمی برحسب کمیتهای حوزه زمانی، مانند مقدار فراجهش حداکثر، زمان ستیغ، زمان استقرار، نسبت میرایی و فرکانس طبیعی غیر میرای

1- Ziegler-Nichols
2- Intelligent

قطبهای غالب حلقه ـ بسته، ثابت زمانی و خطاهای حالت ـ ماندگار بیان شده باشد، مکان ریشه روش بسیار مؤثر و قوی برای جبران کردن سیستم حلقه ـ باز و رسیدن به مشخصه‌های عملکرد تعیین شده در سیستم حلقه ـ بسته است.

اگر سیستمی به ازاء کلیه مقادیر بهرهٔ K ناپایدار باشد و یا اینکه به ازاء کلیه مقادیر بهرهٔ K، پاسخ آن مشخصه‌های نامطلوبی داشته باشد، بدیهی است که با تغییر K به تنهایی نمی‌توان به مشخصه‌های مطلوب عملکرد دست پیدا کرد. در این صورت باید با تغییر شکل دادن نمودار مکان ریشهٔ سیستم توسط جبران سازهای مناسب، به مشخصه‌های عملکرد مطلوب تعیین شده رسید.

به طور کلی، یکی از موارد زیر می‌تواند دلیل مناسبی برای تغییر مکان ریشهٔ سیستم توسط طراح باشد:

۱ـ سیستم داده شده به ازاء کلیه بهره‌ها ناپایدار است، برای پایدار سازی باید مکان ریشه به گونه‌ای تغییر شکل داده شود تا قسمتی از هر کدام از شاخه‌ها در سمت چپ صفحهٔ s قرار گیرند و سیستم پایدار گردد.

۲ـ سیستم داده شده پایدار است، لیکن پاسخ گذرای آن مطلوب نیست. در این حالت می‌توان مکان ریشه را به گونه‌ای تغییر داد که دورتر از محور موهومی، به سمت چپ در صفحه s انتقال داده شود.

۳ـ سیستم داده شده پایدار است، پاسخ گذرای آن نیز مناسب می‌باشد، لیکن خطای حالت ـ ماندگار بسیار بزرگی دارد. در این حالت باید با افزایش بهره، خطای حالت ـ ماندگار را کاهش داد. توجه کنید که افزایش بهره باید بدون کاهش پایداری سیستم به مقدار قابل ملاحظه‌ای صورت گیرد.

۴ـ سیستم داده شده پایدار است، لیکن پاسخ گذرا و خطای حالت ـ ماندگار آن مناسب نمی‌باشند. در این حالت باید ضمن انتقال مکان ریشه به سمت چپ در صفحه s، بهره سیستم را نیز افزایش داد.

قبل از آنکه به تشریح طراحی با جبران سازهای دینامیکی بپردازیم، با یک مثال نشان خواهیم داد که در برخی از موارد، رسیدن به عملکرد تعیین شده سیستم حلقه ـ بسته توسط تغییر بهره حلقه ـ باز K به تنهایی امکان‌پذیر است. بدیهی است که اگر بتوان به اهداف طراحی با یک آمپلی فایر ساده و تغییر بهره دست پیدا کرد، طراحی جبران سازهای دینامیکی که موجب پیچیده‌تر شدن سیستم می‌گردند، لزومی نخواهد داشت.

مثال ۶-۱

تابع تبدیل حلقه ـ باز سیستمی عبارتست از

$$G(s)=\frac{K}{s(s+5)}$$

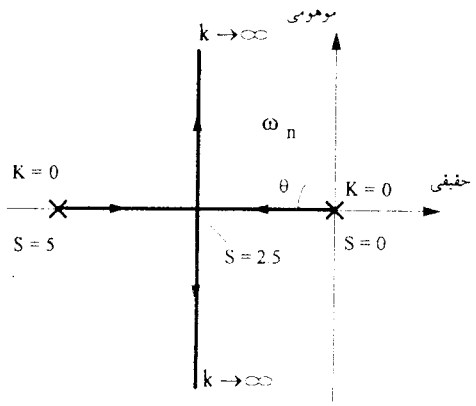
مطلوب است که سیستم حلقه ـ بسته در پاسخ به ورودی شیب واحد بیش از ۳۳٪ خطای حالت ـ ماندگار نداشته و در پاسخ به ورودی پله فراجهش حداکثر خروجی سیستم بیش از ۱۰٪ نباشد. مکان ریشه تابع تبدیل در شکل ۶-۱۶ رسم شده است. از مقایسه تابع تبدیل سیستم حلقه ـ بسته با تابع تبدیل استاندارد مرتبه دوم داریم $2\xi\omega_n=5$ و $\omega_n^2=K$.

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{K}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$$

برای آنکه سیستم درجه دوم حلقه ـ بسته، در پاسخ به ورودی پله واحد حداکثر ۱۰٪ فراجهش داشته باشد، از شکل ۳-۱۱ داریم که $\xi\geq 0/6$ توجه کنید که دو ریشهٔ حلقه ـ بسته با توجه به شکل ۶-۱۶، عبارتند از، $s=-2/5\pm j\beta$، که در آن $\beta^2=-2/5^2+\omega_n^2$ و همچنین $\omega_n\cos\theta=2/5$. از آنجاییکه $\xi=2/5/\omega_n$، داریم که $\xi=\cos\theta$ و یا $\theta=\cos^{-1}\xi$. لذا برای $\xi=0/6$ بدست می‌آوریم

$$\theta=53/13^\circ \quad , \quad \omega_n=4/167 \quad , \quad \beta=3/33 \quad , \quad K=17/36$$

برای هر $\xi>0/6$، $\omega_n<4/167$ و $K<17/36$. بنابراین برای K در محدوده $0<K<17/36$، حداکثر فراجهش تا ۱۰٪ پله واحد خواهد بود.



شکل ۶-۱۶ نمودار مکان ریشه تابع تبدیل مثال ۶-۱

برای برآورده کردن دومین مشخصه عملکرد، حداکثر خطای حالت ـ ماندگار به ورودی شیب واحد ۳۳٪، نخست داریم که خطای حالت ـ ماندگار به ورودی شیب واحد عبارتست از $K_r/1$(بخش ۳-۶)، که در آن $K_r=\lim_{s\to 0} sG(s)=K/5$، و به عبارت دیگر برای خطای ۳۳٪، $K>15$, $K_r=K/5>3$.
از اینرو، می‌توان یک بهره حلقه ـ باز K را چنان انتخاب کرد تا هر دو شرط طراحی را برآورده سازد. به عبارت دیگر با انتخاب بهره $15<K<17/36$ می‌توان شرایط فراجهش حداکثر در پاسخ به ورودی پله واحد و دقت خطای حالت ـ ماندگار به ورودی شیب واحد را برآورده ساخت.

توجه کنید که اگر بخواهیم دقت پاسخ سیستم به ورودی شیب واحد را بالا ببریم و برای مثال حداکثر ۵٪ خطای حالت ـ ماندگار مجاز باشد، خواهیم داشت

$$K_r=K/5>20 \quad , \quad K>20$$

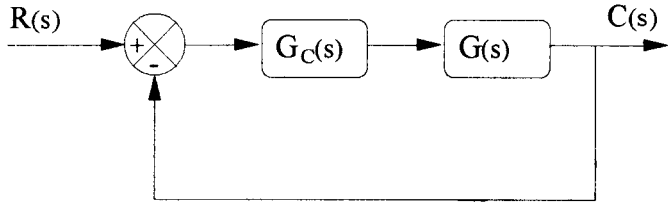
بدیهی است که در این حالت برآورده ساختن همزمان $0<K<17/36$ و $K>20$ امکان پذیر نیست. در این چنین حالتی با تغییر بهره حلقه ـ باز K به تنهایی، نمی‌توان به مشخصه‌های طراحی دست پیدا کرد و بکارگیری جبران سازهای دینامیکی الزامی است.

۶-۳-۱ طراحی جبران سازهای پیش فاز با استفاده از مکان ریشه

اگر سیستم حلقه ـ باز به ازاء کلیه مقادیر بهره ناپایدار باشد و یا اینکه پایدار باشد لیکن مشخصه‌های پاسخ گذرای آن نامطلوب باشند، در هر دو حالت جبران ساز پیش فاز برای جبران سری سیستم حلقه ـ بسته و بدست آوردن پایداری و یا مشخصه‌های مطلوب پاسخ گذرا مناسب است.

مراحل طراحی یک جبران ساز پیش فاز برای سیستم نشان داده شده در شکل ۶-۱۷، توسط مکان ریشه را می‌توان به صورت خلاصه زیر بیان کرد:

۱ـ با استفاده از روابط داده شده در بخش ۴-۴، از مشخصات عملکرد داده شده موقعیت قطبهای غالب حلقه ـ بسته را تعیین کنید.



شکل ۶-۱۷ سیستم کنترل

۲ـ نمودار مکان ریشه سیستم حلقه ـ باز را رسم کنید. با استفاده از نمودار مکان ریشه، تعیین کنید که آیا با تنظیم بهره حلقه ـ باز به تنهایی می‌توان به موقعیت قطبهای حلقه ـ بسته رسید یا خیر. در صورتیکه تنظیم بهره به تنهایی کافی نیست، نقص زاویه[1] ϕ را محاسبه کنید. برای تعیین نقص زاویه، نخست مجموع زوایای یکی از قطبهای غالب حلقه ـ بسته مطلوب (قطبهایی که باید معادله مشخصه سیستم حلقه ـ بسته مطلوب را تشکیل دهند)، با قطبها و صفرهای حلقه ـ باز سیستم اصلی را بدست آورید. از شرط زاویه داریم، برای آنکه قطب غالب حلقه ـ بسته مطلوب بروی مکان ریشه سیستم قرار گیرد، باید مجموع زوایا با قطبها و صفرهای حلقه ـ باز سیستم اصلی $(۲k+۱)^\circ \pm ۱۸۰^\circ$ باشد. نقص زاویه ϕ زاویه لازمی است که باید با مجموع بدست آمده جمع گردد تا حاصل جمع برابر با $(۲k+۱)^\circ \pm ۱۸۰^\circ$ شود. این زاویه توسط جبران ساز پیش فاز فراهم آورده می‌شود.

۳ـ تابع تبدیل جبران ساز پیش فاز عبارتست از

$$G_c(s) = K_c\alpha \frac{Ts+۱}{\alpha Ts+۱} = K_c \frac{s+۱/T}{s+۱/\alpha T} \quad (۰<\alpha<۱) \qquad (۱-۳-۶)$$

که در آن α و T از نقص زاویه تعیین می‌گردند. توجه کنید که مقادیر مناسب α و T جهت فراهم کردن نقص زاویه منحصر بفرد نمی‌باشند. بهره K_c از شرط دامنه تعیین می‌گردد. به عبارت دیگر، از شرط دامنه داریم

$$\left| K_c \frac{s+۱/T}{s+۱/\alpha T} G(s) \right|_{s = \text{قطب مطلوب}} = ۱ \qquad (۲-۳-۶)$$

لذا با جایگزینی قطب غالب حلقه ـ بسته، مقدار مناسب بهره K_c بدست خواهد آمد.

۴ـ دقت کنید که اگر مقدار خاصی برای ثابت خطای استاتیکی تعیین شده باشد، معمولاً استفاده از روشهای پاسخ فرکانسی ساده‌تر خواهد بود. در صورتیکه ثابتهای خطای استاتیکی مشخص نشده باشند، موقعیت قطب و صفر جبران ساز به گونه‌ای تعیین می‌شوند که زاویه لازم ϕ را بدست دهند. اگر مشخصه دیگری برای عملکرد در نظر

1- Angle deficiency

گرفته نشده باشد، مطلوب است که مقدار α حتی‌الامکان بزرگ باشد. یک مقدار بزرگتر α عموماً مقدار بزرگتری از K_c را می‌دهد.

پس از طراحی جبران ساز باید با شبیه‌سازی کامپیوتری یا انجام محاسبات مناسب، از برآورده شدن کلیه مشخصه‌های عملکرد اطمینان حاصل شود. در صورتیکه سیستم جبران شده مشخصه‌های عملکرد را برآورده نسازد، مراحل طراحی باید با تنظیم قطب و صفر جبران ساز دوباره تکرار شوند تا نتیجه مناسب بدست آورده شود. اگر یک ثابت خطای استاتیک بزرگ مورد نظر باشد، می‌توان از یک جبران ساز سری پس فاز یا تغییر جبران ساز به یک جبران ساز پس ـ پیش فاز استفاده کرد.

مثال ۶-۲

سیستم نشان داده شده در شکل ۶-۱۷ را در نظر بگیرید. تابع تبدیل سیستم حلقه ـ باز عبارتست از

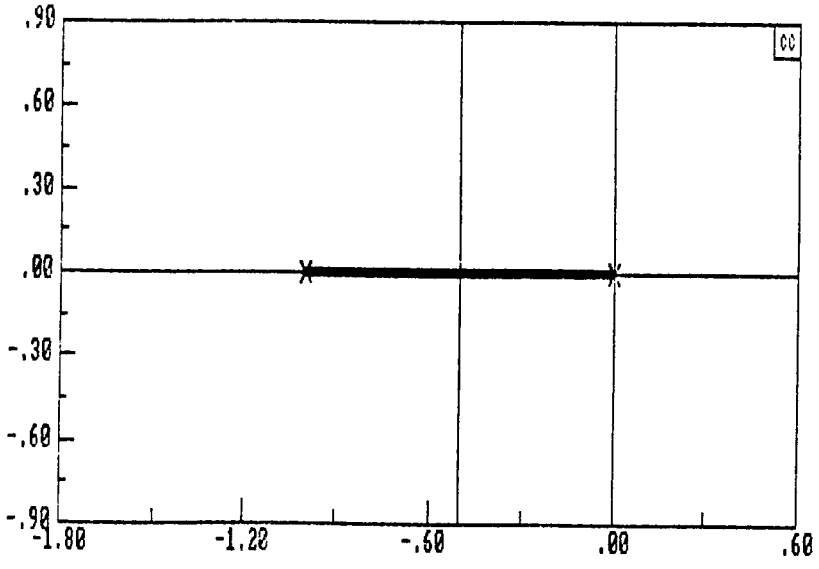
$$G(s)=\frac{۰/۲}{s(s+۱)}$$

تابع تبدیل سیستم حلقه ـ بسته (بدون جبران ساز) عبارتست از

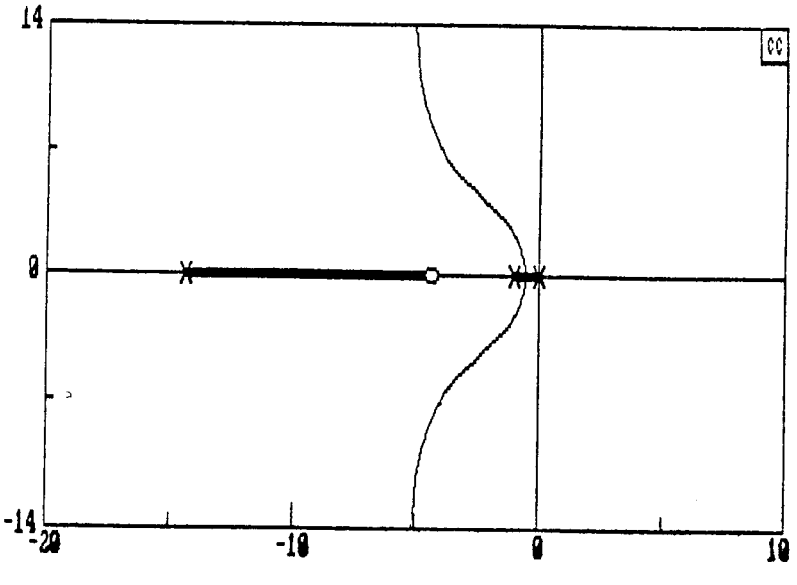
$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{۰/۲}{s^۲+s+۰/۲}$$

قطبهای حلقه ـ بسته سیستم در ۰/۷۲۳۶- و ۰/۲۷۶۴- قرار دارند. مکان ریشه سیستم جبران نشده نیز در شکل ۶-۱۸ رسم شده است. با توجه به موقعیت قطبهای حلقه ـ بسته و نمودار مکان ریشه، بدیهی است که پاسخ سیستم بسیار کند است. پاسخ زمانی سیستم برای ورودی پله واحد در شکل ۶-۲۰ رسم شده است. همانطور که از شکل ۶-۲۰ مشاهده می‌شود، پاسخ سیستم پس از گذشت ۱۰ ثانیه به پله واحد نرسیده است. از شکل ۶-۱۸ داریم که با افزایش بهره به تنهایی نمی‌توان تغییر اساسی در رفتار سیستم حلقه ـ بسته ایجاد کرد. برای سرعت بخشیدن به پاسخ (بهبود رفتار پاسخ حالت گذرای سیستم حلقه ـ بسته)، مشخصه‌های عملکرد زیر را برای رفتار حلقه ـ بسته پاسخ تعیین می‌کنیم

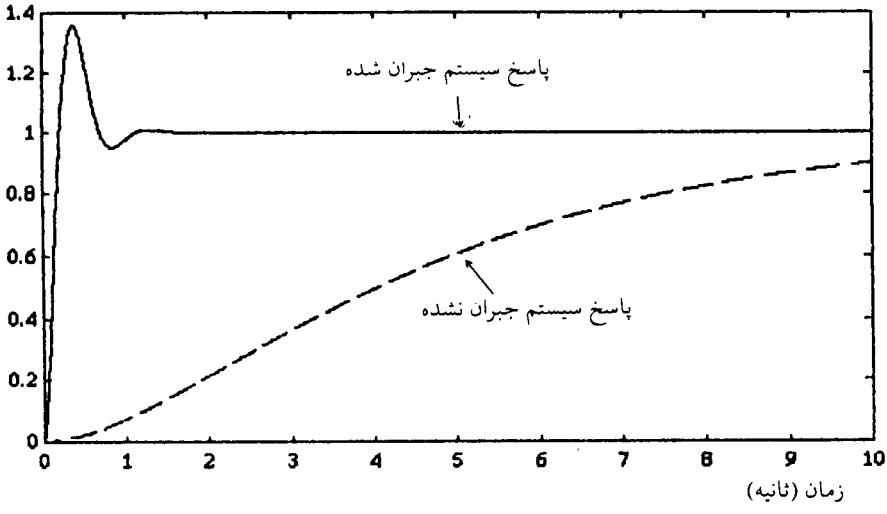
$$\xi>۰/۵ \quad , \quad t_s\leq ۱ \text{ (ثانیه)}$$



شکل ۶-۱۸ مکان ریشهٔ سیستم جبران نشده مثال ۶-۲.



شکل ۶-۱۹ مکان ریشهٔ سیستم جبران شده



شکل ۶-۲۰ پاسخ سیستم‌های جبران شده و جبران نشده مثال ۶-۲ به ورودی پله .

قطبهای سیستم حلقه ـ بسته، برای برآورده ساختن این مشخصه‌های عملکرد عبارتند از ۴-±j۶/۹۳ . برای تغییر مسیر نمودار مکان ریشه به گونه‌ای که از این قطبها عبور کند، جبران ساز پیش فازی طراحی خواهیم نمود. (دقت کنید که در این مثال با افزایش بهره به تنهایی، نمودار ریشه از این قطبها عبور نخواهد کرد.) برای تعیین جبران ساز پیش فاز، زاویه لازم ϕ جهت افزودن به مجموع زوایای قطبها و صفرهای حلقه ـ باز با یکی از قطبهای غالب حلقه ـ بسته مطلوب را پیدا می‌کنیم. مجموع این زوایا و زاویه ϕ باید $(۲k+۱)۱۸۰^\circ \pm$ باشد. در سیستم فعلی، زاویه $G(s)$ در قطب حلقه ـ بسته مطلوب عبارتست از

$$\left.\frac{۰/۲}{s(s+۱)}\right|_{s=-۴\pm j۶/۹۳} = ۱۲۶/۶^\circ$$

از اینرو، جبران ساز پیش فاز باید زاویه $۵۳/۴^\circ$ را در این نقطه فراهم آورد.موقعیت قطب و صفری که این زاویه را فراهم آورند، منحصر بفرد نیست. یک جبران ساز مناسب (که با سعی و خطا بدست آمده است) عبارتست از

$$G_c(s)=\frac{K_c(s+۴/۴)}{s+۱۴/۵۴}$$

تابع تبدیل حلقه ـ باز سیستم جبران شده عبارتست از

$$G_c(s)G(s)=\frac{K_c(s+۴/۴)}{(s+۱۴/۵۴)}.\frac{۰/۲}{s(s+۱)}$$

با استفاده از شرط دامنه ($|G_c(s)G(s)|$ در قطب مورد نظر باید یک باشد)، بهره K_c برابر با ۵۵۰ بدست خواهد آمد. مکان ریشهٔ سیستم جبران شده در شکل ۶-۱۹ رسم شده است. پاسخ زمانی سیستم حلقه ـ بسته نیز به ورودی پله در شکل ۶-۲۰ رسم شده است. همانطور که در شکل ۶-۲۰ مشاهده می‌شود، سیستم حلقه ـ بسته مشخصه‌های عملکرد مورد نظر را برآورده می‌سازد.

۶-۳-۲ طراحی جبران سازهای پس فاز با استفاده از مکان ریشه

در مواقعیکه مشخصه‌های پاسخ گذرای سیستم مناسب است ولی پاسخ حالت دایم آن مطلوب نیست، از جبران ساز پس فاز استفاده می‌کنیم. در این حالت، جبران سازی با افزایش بهره حلقه ـ باز بدون تغییر قابل توجه‌ای در مشخصهٔ پاسخ گذرا انجام می‌گیرد. لذا مکان ریشه در نزدیکی قطبهای غالب حلقه ـ بسته نباید زیاد تغییری پیدا کند. لیکن بهرهٔ حلقه ـ باز باید حتی‌الامکان تا مقداری که مورد نیاز است افزایش یابد. این جبران سازی با اعمال یک جبران ساز پس فاز سری با تابع تبدیل حلقه ـ باز بدست می‌آید.

برای آنکه تغییر شکل قابل توجهی در نمودار مکان ریشه رخ ندهد، سهم زاویه جبران ساز پس فاز باید مقدار کوچکی مانند 5° باشد. از اینرو قطب و صفر جبران ساز پس فاز را نزدیک هم و نزدیک مبداء صفحه s قرا می‌دهیم. در این صورت قطبهای حلقه ـ بسته سیستم جبران شده، تنها به مقدار کمی از موقعیتهای اصلی خود حرکت خواهند کرد و مشخصه‌های پاسخ گذرا تغییر محسوسی نخواهند کرد.

تابع تبدیل جبران ساز پس فاز عبارتست از

$$G_c(s)=K_c\beta\frac{Ts+۱}{\beta Ts+۱}=K_c\frac{s+۱/T}{s+۱/(\beta T)} \qquad (۶-۳-۳)$$

اگر قطب و صفر جبران ساز داده شده با معادله (۶-۳-۳) را بسیار نزدیک هم قرار دهیم، آنگاه در $s=s_۱$ که در آن $s_۱$ یکی از قطبهای غالب حلقه ـ بسته است، اندازه‌های $(۱/T)+s_۱$ و

$s_1 + 1/(\beta T)$ تقریباً یکسان هستند. لذا از معادله (۶-۳-۳)، داریم

$$\left| G_c(s_1) \right| = \left| K_c \frac{s_1 + 1/T}{s_1 + 1/(\beta T)} \right| \approx K_c$$

بنابراین اگر بهره K_c را برابر یک انتخاب کنیم، مشخصه‌های پاسخ گذار تغییر نخواهند کرد و بهرهٔ کلی سیستم حلقه ـ باز با عامل β، که در آن $\beta > 1$، افزایش خواهد یافت. اگر قطب و صفر جبران ساز نزدیک مبداء قرار داده شوند، آنگاه مقدار β را می‌توان بزرگ کرد و مقدار T نیز باید بزرگ انتخاب شود، ولی مقدار دقیق آن چندان مهم نیست. در هر حال مقادیر T و β باید به گونه‌ای انتخاب شوند که تحقق فیزیکی جبران ساز امکان پذیر باشد یک گسترهٔ مناسب برای مقدار β می‌تواند $1 < \beta < 15$ باشد و مقادیر β و T برحسب مورد و سیستم تحت کنترل، با سعی و خطا بدست آورده می‌شوند.

دقت کنید که افزایش بهره باعث کاهش خطای حالت ـ ماندگار و به عبارت دیگر افزایش ثابتهای خطای استاتیکی می‌شود. برای سیستم جبران نشده $G(s)$ و جبران ساز سری $G_c(s)$ داده شده با معادله (۶-۳-۳)، از بخش ۳-۶ داریم که ثابت خطای حالت ـ ماندگار سرعت، برای تابع تبدیل حلقه ـ باز $G(s)$ و $G_c(s)G(s)$ به ترتیب عبارتست از

$$K_v = \lim_{s \to 0} sG(s) \qquad (۶-۳-۴)$$

و

$$\hat{K}_v = \lim_{s \to 0} sG_c(s)G(s) \qquad (۶-۳-۵)$$

با جایگزینی معادله (۶-۳-۴) در معادله (۶-۳-۵)، داریم

$$\begin{aligned} \hat{K}_v &= \lim_{s \to 0} G_c(s) K_v \\ &= K_c \beta K_v \end{aligned} \qquad (۶-۳-۶)$$

با توجه به اینکه مقدار K_c تقریباً برابر با یک انتخاب می‌شود، خطای حالت ـ ماندگار به ورودی شیب واحد برابر است با

$$1/\hat{K}_v = 1/(\beta K_v)$$

لذا با افزایش β، خطای حالت ـ ماندگار کاهش خواهد یافت.

با فرض اینکه سیستم جبران نشده با تنظیم بهره مشخصه‌های پاسخ گذاری مناسبی

خواهد داشت، مراحل طراحی یک جبران ساز پس فاز برای سیستم نشان داده شده در شکل ۶-۱۷، توسط مکان ریشه را می‌توان به صورت خلاصه زیر بیان کرد:

۱ـ نمودار مکان ریشهٔ سیستم جبران نشده با تابع تبدیل حلقه ـ باز $G(s)$ را رسم کنید. براساس مشخصه‌های پاسخ گذرا، قطبهای غالب حلقه ـ بسته را برروی مکان ریشه جایابی کنید.

۲ـ تابع تبدیل جبران ساز پس فاز را به صورت داده شده با معادله (۶-۳-۳)، در نظر بگیرید.

۳ـ با مشخص نمودن ثابت خطای استاتیکی مورد نظر سیستم حلقه ـ بسته، مقدار افزایش لازم در ثابت خطای استاتیکی را برآورده ساختن مشخصه‌ها تعیین کنید. این میزان افزایش توسط عامل β در معادله (۶-۳-۶)، فراهم می‌شود.

۴ـ با انتخاب β، موقعیت قطب و صفر جبران ساز پس فاز که افزایش لازم در ثابت خطای استاتیکی معین شده را بدون تغییر قابل توجهی در مکان ریشهٔ اصلی بدست می‌دهد، تعیین کنید. توجه کنید که سهم زاویهٔ جبران ساز پس فاز نباید زیاد باشد و یک قاعدهٔ‌سرانگشتی آن است که این زاویه از حداکثر 7° تجاوز نکند.

۵ـ نمودار مکان ریشهٔ سیستم جبران شده را رسم کنید. اگر سهم زاویه ناشی از جبران ساز پس فاز زیاد نباشد، نمودار مکان ریشهٔ سیستم جبران شده و جبران نشده تقریباً یکسان خواهند بود. در غیر اینصورت، اندک تفاوتی در دو نمودار پیدا می‌شود و قطبهای غالب حلقه ـ بسته مطلوب جدید را براساس مشخصه‌های پاسخ فرکانسی، مشخص کرده و برروی نمودار مکان ریشهٔ سیستم جبران شده جایابی کنید.

۶ـ با توجه به اینکه قطبهای غالب حلقه ـ بسته باید بروی مکان ریشه قرار گیرند، از شرط دامنهٔ بهرهٔ جبران ساز K_c را بدست آورید.

مثال ۶-۳

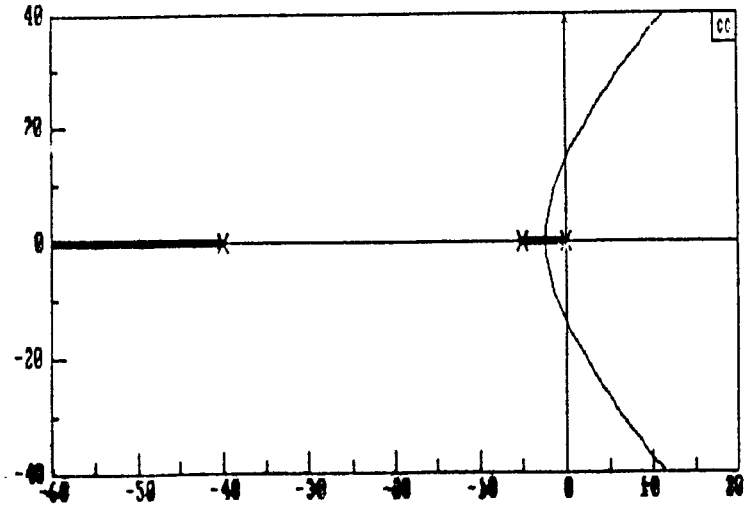
تابع تبدیل حلقه ـ باز سیستم نشان داده شده در شکل ۶-۱۷ عبارتست از

$$G(s)=\frac{۴۵۰}{s(s+۵)(s+۴۰)}$$

تابع تبدیل سیستم حلقه ـ بسته جبران نشده (با فیدبک واحد در شکل ۶-۱۷) به صورت زیر است

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{۴۵۰}{s^۳+۴۵s^۲+۲۰۰s+۴۵۰}$$

قطبهای غالب حلقه ـ بسته، عبارتند از ۲/۳۸۲۶ ± j۲/۳۴۲۰- و یک قطب حلقه ـ بسته نیز در ۴۰/۳۱۶۱- قرار دارد. فرکانس طبیعی غیرمیرا ω_n و نسبت میرایی قطبهای حلقه ـ بسته ξ، به ترتیب عبارتند از $\omega_n = ۳/۳۵$ (رادیان بر ثانیه) و $\xi = ۰/۷$. ثابت خطای سرعت استاتیکی سیستم (که نشان دهندهٔ رفتار حالت ـ ماندگار سیستم در پاسخ به ورودی شیب است) $K_v = ۲/۲۵$ (ثانیه)$^{-۱}$ است. با توجه به موقعیت قطبهای غالب حلقه ـ بسته، پاسخ سیستم جبران نشده زمان استقراری کمتر از ۲ ثانیه و نسبت میرایی قطبها نیز مقدار مناسبی دارد. لیکن مقدار ثابت خطای سرعت استاتیکی بسیار کم می‌باشد و مقدار مطلوب آن حداقل حدوداً ۱۰ برابر مقدار جبران نشده آن می‌باشد. به عبارت دیگر، پاسخ گذرای سیستم جبران نشده مطلوب است ولی برای بهبود پاسخ حالت ـ ماندگار آن به یک جبران ساز نیاز است. با توجه به رفتار مناسب حالت گذرای پاسخ، جبران ساز نباید موقعیت قطبهای غالب حلقه ـ بسته را تغییر زیادی دهد. نمودار مکان ریشهٔ سیستم جبران نشده در شکل ۶-۲۱، نشان داده شده است.



شکل ۶-۲۱ نمودار مکان سیستم جبران نشده مثال ۶-۳ ـ

برای برآورده ساختن این مشخصه‌ها، یک جبران ساز پس فاز به طور سری (همانطور که در شکل ۶-۱۷ نشان داده شده است) برای سیستم طراحی می‌کنیم. برای افزایش ثابت خطای سرعت استاتیکی به میزان ۱۰ برابر، β را برابر ۱۰ انتخاب می‌کنیم و صفر و قطب جبران ساز پس فاز را به ترتیب در $s=-۰/۱$ و $s=-۰/۰۱$ قرار می‌دهیم. از اینرو تابع تبدیل جبران ساز به صورت زیر داده می‌شود

$$G_c(s)=K_c\frac{s+۰/۱}{s+۰/۰۱}$$

سهم زاویه‌ای این جبران ساز در نزدیکی یک قطب غالب حلقه ـ بسته، حدوداً هشت درجه است و لذا تغییر جزیی در نمودار مکان ریشهٔ حلقه ـ بسته در نزدیکی قطبهای غالب حلقه ـ بسته پدید خواهد آمد.

تابع تبدیل حلقه ـ باز سیستم جبران شده عبارتست از

$$G_c(s)G(s)=K_c\frac{s+۰/۱}{s+۰/۰۱}\frac{۴۵۰}{s(s+۵)(s+۴۰)}$$
$$=\frac{۴۵۰K_c(s+۰/۱)}{s(s+۰/۰۱)(s+۵)(s+۴۰)}$$

نمودار مکان سیستم جبران شده در شکل ۶-۲۲ نشان داده شده است. با فرض $\xi=۰/۷$ برای قطبهای غالب حلقه ـ بسته، این قطبها در $-۲/۳\pm j۲/۶$ قرار خواهند گرفت. برای تعیین بهرهٔ جبران ساز، از شرط دامنه داریم

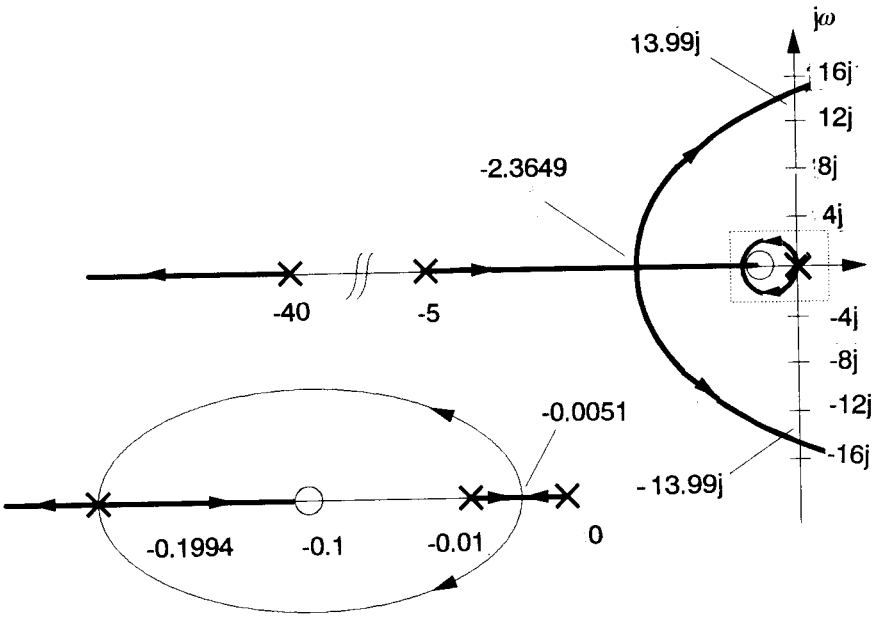
$$K_c=\frac{۱}{۴۵۰}\left|\frac{s(s+۰/۰۱)(s+۵)(s+۴۰)}{s+۰/۱}\right|_{s=-۲/۳\pm j۲/۶}$$
$$=۱/۱$$

بنابراین، تابع تبدیل جبران ساز پس فاز عبارتست از

$$G_c(s)=۱/۱\frac{s+۰/۱}{s+۰/۰۱}$$

و تابع تبدیل حلقه ـ باز سیستم جبران شده عبارتست از

$$G_c(s)G(s)=\frac{۵۰۳(s+۰/۱)}{s(s+۰/۰۱)(s+۵)(s+۴۰)}$$



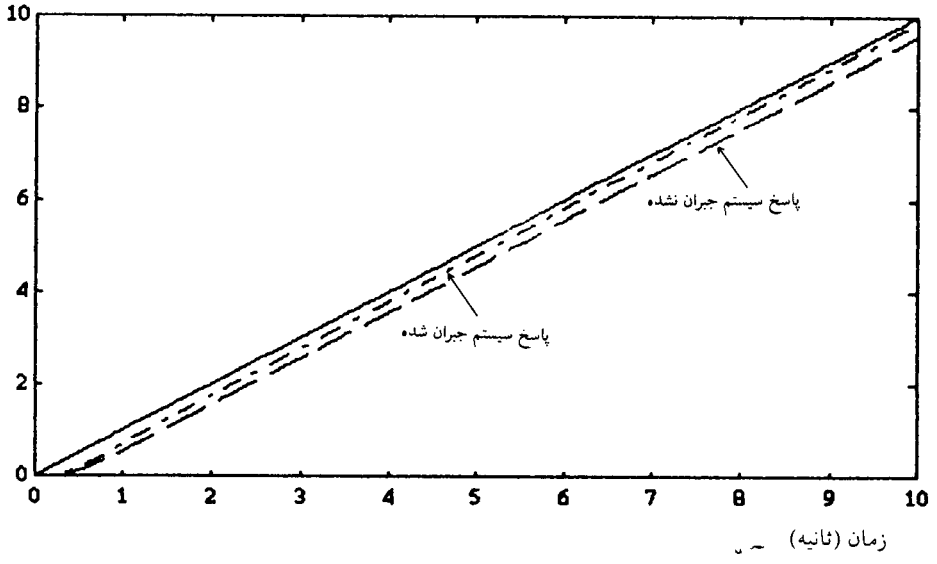
شکل ۶-۲۲ نمودار مکان ریشهٔ سیستم جبران شده در مثال ۶-۳ .

ثابت خطای سرعت استاتیکی K_v برابر است با

$$K_v = \lim_{s \to 0} sG_c(s)G(s) = ۲۵/۱۵$$

در سیستم جبران شده، ثابت خطای سرعت استاتیکی از $^{-1}$(ثانیه)۲/۲۵ به $^{-1}$(ثانیه)۲۵/۱۵ افزایش یافته است و لذا خطای حالت ـ ماندگار در پاسخ به ورودی شیب، به مقدار قابل ملاحظه‌ای کاهش خواهد یافت. اگر بخواهیم ثابت خطای سرعت استاتیکی دقیقاً ۲۲/۵ باشد (ده برابر مقدار جبران نشده)، می‌توان محل قطب و صفر جبران ساز را تغییر داد و یا اینکه بهره جبران ساز را به $K_c = ۱$ کاهش دهیم، لیکن در این صورت نسبت میرایی قطبهای حلقه ـ بسته نیز اندکی کاهش خواهد یافت.

پاسخ زمانی شیب واحد سیستم جبران شده و جبران نشده در شکل ۶-۲۳ نشان داده شده است. همانطور که از پاسخ مشاهده می‌گردد، خطای حالت ماندگار سیستم جبران شده به میزان قابل توجهی کاهش نشان می‌دهد.



شکل ۶-۲۳ پاسخ زمانی سیستم حلقه ـ بسته جبران شده و جبران نشده به ورودی شیب واحد

۶-۳-۳ طراحی جبران سازهای پس ـ پیش فاز با استفاده از مکان ریشه

تابع تبدیل جبران ساز پس ـ پیش فاز عبارتست از

$$G(s)=K_c\beta\alpha\frac{(T_1 s+1)(T_2 s+1)}{(T_1\alpha s+1)(\beta T_2 s+1)}=K_c\left(\frac{s+1/T_1}{s+\frac{1}{\alpha T_1}}\right)\left(\frac{s+1/T_2}{s+\frac{1}{\beta T_2}}\right) \qquad (۶-۳-۷)$$

که در آن $0<\alpha<1$ و $\beta>1$. در مواردی که هر دو پاسخ گذرای سیستم و حالت ـ ماندگار آن نیاز به جبران سازی داشته باشند، هیچکدام از دو جبران ساز پس فاز و پیش فاز به تنهایی جوابگوی مسئله طراحی نخواهند بود. در این صورت باید از جبران ساز پس ـ پیش فاز داده شده با معادله (۶-۳-۷) استفاده کرد. این جبران ساز مشخصه‌های هر دو جبران ساز نامبرده را دارا است. همانطور که از معادله (۶-۳-۷) مشاهده می‌شود، دو پارامتر مهم طراحی در این جبران ساز α و β هستند (متناظر با پارامترهای α و β در جبران سازهای پیش و پس فاز). در اینجا مراحل طراحی جبران سازهای پس ـ پیش فاز را با استفاده از مکان ریشهٔ در دو حالت $\alpha^{-1}=\beta$ و $\alpha^{-1}\neq\beta$، ارایه می‌کنیم.

حالت اول: $\alpha^{-1} \neq \beta$

۱ـ موقعیت قطبهای غالب حلقه ـ بسته را براساس مشخصه‌های عملکرد داده شده، تعیین کنید.

۲ـ با رسم نمودار مکان ریشهٔ سیستم حلقه ـ باز داده شده با $G(s)$ و یا با انجام محاسبات لازم، نقص زاویه ϕ را برای آنکه قطبهای حلقه ـ بسته در مکانهای مطلوب باشند، تعیین کنید.

۳ـ قسمت پیش فاز جبران ساز داده شده با معادله (۶-۳-۷)، باید این نقص زاویه را جبران کند. لذا T_1 و α را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که

$$\angle[(s_1 + 1/T_1)/(s_1 + 1/\alpha T_1)] = \phi$$

که در آن s_1 یکی از قطبهای غالب حلقه ـ بسته است. توجه کنید که انتخاب T_1 و α منحصر بفرد نیست. سپس بهره K_c را از شرط دامنه تعیین کنید:

$$\left| K_c \frac{s_1 + 1/T_1}{s_1 + 1/\alpha T_1} G(s_1) \right| = 1$$

۴ـ مقدار β از ثابت خطای سرعت K_v تعیین می‌گردد. با مشخص نمودن ثابت خطای سرعت K_v، داریم

$$\begin{aligned} K_v &= \lim_{s \to 0} sG_c(s)G(s) \\ &= \lim_{s \to 0} sK_c \left(\frac{s + 1/T_1}{s + 1/(\alpha T_1)} \right) \left(\frac{s + 1/T_2}{s + 1/(\beta T_2)} \right) G(s) \\ &= \lim_{s \to 0} sK_c \beta \alpha G(s) \end{aligned}$$

مقادیر α و K_c از مرحله ۳ بدست آمدند. از اینرو، برای مقدار K_v داده شده مقدار β را می‌توان از معادله بالا تعیین کرد. با استفاده از β بدست آمده، مقدار T_2 را می‌توان از روابط زیر محاسبه نمود:

$$\left| \frac{s_1 + 1/T_2}{s_1 + 1/(\beta T_2)} \right| = 1$$

و

$$-5^\circ < \angle[(s_1 + 1/T_2)/(s_1 + 1/(\beta T_2))] < 0^\circ$$

در واقع مقدار T_2 باید به گونه‌ای باشد که شرط دامنه برآورده شود و سهم زاویه ناشی از قسمت پس فاز جبران ساز پس ـ پیش فاز نیز بزرگ نباشد.

مثال ۶-۴

تابع تبدیل حلقه ـ باز یک سیستم کنترل با فیدبک منفی عبارتست از

$$G(s)=\frac{۳}{s(s+۰/۶)}$$

قطبهای سیستم حلقه ـ بسته در $۰/۳\pm j۱/۷۰۶$- قرار دارند. نسبت میرایی، فرکانس طبیعی غیرمیرا و ثابت خطای سرعت استاتیکی سیستم جبران نشده به ترتیب عبارتند از ۰/۱۷۳ ، ۱/۷۳۲ (رادیان بر ثانیه) و ۵^{-1}(ثانیه). بنابراین مشخصه‌های حالت ـ گذرا و حالت ـ ماندگار پاسخ هیچکدام مناسب نمی‌باشند.

مشخصه‌های مطلوب عملکرد سیستم را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$K_v>۹۰\ (\text{ثانیه})^{-1} \quad , \quad \xi>۰/۵ \quad , \quad t_s<۱/۶(\text{ثانیه})$$

با توجه به مشخصه‌های تعیین شده، قطبهای مطلوب غالب سیستم حلقه ـ بسته در $۲/۵\pm j۴/۳۳$- قرار خواهند گرفت.

از قسمت پیش فاز جبران ساز پس ـ پیش فاز داده شده با معادله (۶-۳-۷)، برای بهبود رفتار حالت گذرای سیستم و از قسمت پس فاز آن برای کاهش خطای حالت ماندگار (افزایش K_v) استفاده می‌کنیم. نخست قسمت پیش فاز جبران ساز را طراحی می‌کنیم. از آنجاییکه

$$\left.\frac{۳}{s(s+۰/۶)}\right|_{s=-۲/۵+j۴/۳۳}=۱۲۶/۳۱$$

قسمت پیش فاز جبران ساز باید زاویه‌ای برابر با $۵۳/۶۹^\circ$ را در قطبهای غالب فراهم آورد (در این صورت نمودار مکان ریشهٔ سیستم جبران شده از قطبهای غالب مطلوب عبور خواهد کرد). برای فراهم آوردن سهم زاویه‌ای برابر با $۵۳/۶۹^\circ$، تابع تبدیل زیر را برای قسمت پیش فاز جبران ساز در نظر می‌گیریم

$$K_c\frac{s+۲/۷۳}{s+۹/۱۳}$$

(دقت کنید که این تابع تبدیل منحصر بفرد نیست و می‌تواند از روشهای سیستماتیک و یا سعی و خطا بدست آورده شود، تنها فراهم آوردن سهم زاویه‌ای مطلوب کافی است). بهره K_c از شرط دامنه بدست آورده می‌شود. داریم

$$\left| K_c \frac{s+۲/۷۳}{s+۹/۱۳} \cdot \frac{۳}{s(s+۰/۶)} \right|_{s=-۲/۵+j۴/۳۳} = ۱$$

از اینرو

$$K_c = ۱۴/۴$$

قسمت پس فاز جبران ساز را برای برآورده ساختن مشخصه حالت ـ ماندگار پاسخ طراحی می‌کنیم. در واقع مقدار β را چنان تعیین می‌کنیم که شرط داده شده برروی K_v برآورده گردد. داریم

$$K_v = \lim_{s\to ۰} G_c(s)G(s) = \lim_{s\to ۰} sK_c\alpha\beta G(s)$$
$$= ۹۰$$

و لذا

$$\beta = ۴/۲$$

سرانجام، مقدار $T_۲$ را به گونه‌ای به اندازه کافی بزرگ انتخاب می‌کنیم که

$$\left| \frac{s+۱/T_۲}{s+\frac{۱}{۴/۲}T_۲} \right|_{s=-۲/۵+j۴/۳۳} \approx ۱$$

و

$$-۵^\circ < \angle \left| \frac{s+۱/T_۲}{s+\frac{۱}{۴/۲}T_۲} \right|_{s=-۲/۵+j۴/۳۳} < ۰^\circ$$

با انتخاب $T_۲=۱۰$، دو شرط بالا برآورده خواهند شد (دامنه برابر یک جهت برآورده کردن شرط دامنهٔ، و سهم زاویهٔ ناچیز در قطبهای غالب برای تغییر ندادن رفتار حالت ـ گذرا) و لذا تابع تبدیل قسمت پس فاز جبران ساز عبارتست از

$$\frac{s+۰/۱}{s+۰/۰۲}$$

بنابراین تابع تبدیل جبران ساز پس ـ پیش فاز به صورت زیر بدست می‌آید

$$G_c(s)=۱۴/۴\left(\frac{s+۲/۷۳}{s+۹/۱۳}\right)\left(\frac{s+۰/۱}{s+۰/۰۲}\right)$$

مکان ریشهٔ سیستم جبران شده در شکل ۶-۲۴ نشان داده شده است. پاسخ زمانی سیستم‌های جبران شده و جبران نشده به ورودی پله واحد و شیب واحد نیز در شکلهای ۶-۲۵ (الف) و (ب) رسم شده‌اند.

حالت دوم: $\alpha^{-۱}=\beta$

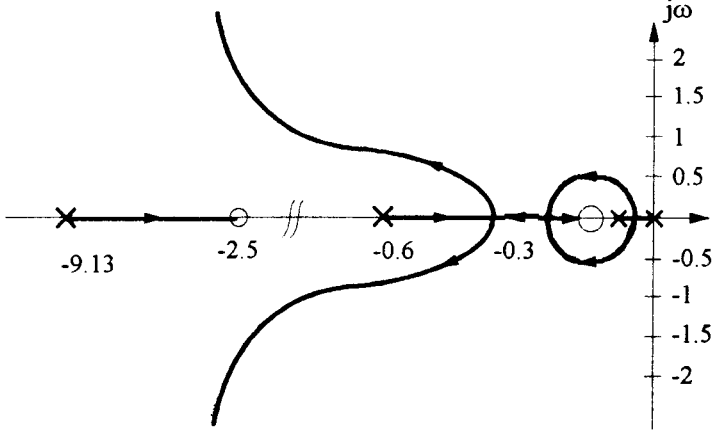
۱ـ موقعیت قطبهای غالب حلقه ـ بسته را براساس مشخصه‌های عملکرد داده شده تعیین کنید.

۲ـ جبران ساز پس ـ پیش فاز داده شده با معادله (۶-۳-۷) بدین صورت اصلاح می‌شود:

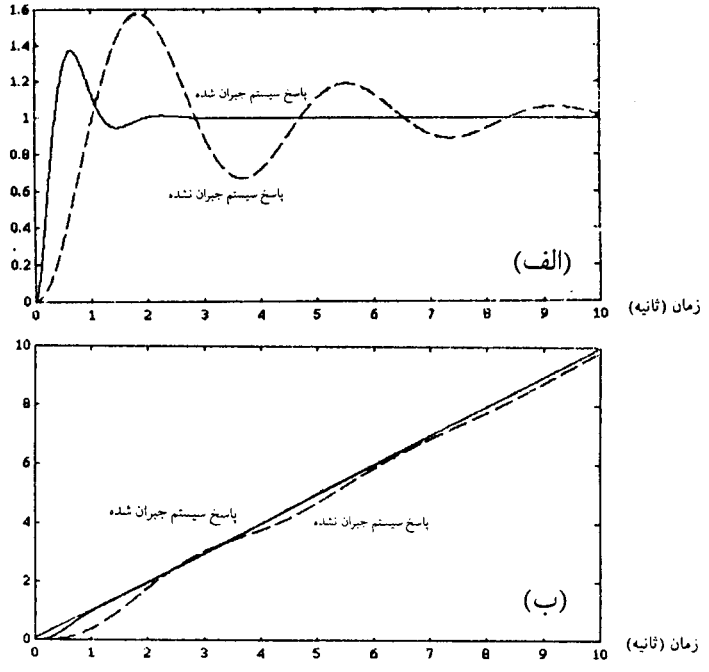
$$G_c(s)=K_c\frac{(T_۱s+۱)(T_۲s+۱)}{(\frac{T_۱}{\beta}s+۱)(\beta T_۲s+۱)}=K_c\frac{(s+\frac{۱}{T_۱})(s+۱/T_۲)}{(s+\beta/T_۱)(s+۱/\beta T_۲)} \qquad (۶-۳-۸)$$

که در آن $\beta>۱$. تابع تبدیل حلقه باز سیستم جبران شده عبارتست از $G_c(s)G(s)$. اگر ثابت خطای سرعت استاتیکی K_v مشخص باشد، مقدار K_c از معادله زیر تعیین می‌گردد:

$$K_v=\lim_{s\to ۰} sG_c(s)G(s)$$
$$=\lim_{s\to ۰} sK_cG(s)$$



شکل ۶-۲۴ نمودار مکان ریشهٔ سیستم جبران شده ـ



شکل ۶-۲۵ پاسخ زمانی سیستم‌های جبران نشده و جبران شده (الف) ورودی پله واحد (ب) ورودی شیب واحد.

۳ـ برای آنکه قطبهای غالب حلقه ـ بسته در مکانهای مطلوب باشند، سهم زاویه ϕ که باید توسط قسمت پیش فاز جبران ساز فراهم گردد را تعیین کنید.

۴ـ مقادیر T_1 و β را به گونه‌ای انتخاب کنید که شرایط دامنه و زاویه زیر را برآورده سازند:

$$\left| K_c \left(\frac{s_1 + 1/T_1}{s_1 + \beta/T_1} \right) G(s_1) \right| = 1$$

و

$$\angle [(s_1 + 1/T_1)/(s_1 + 1/(\beta T_1))] = \phi$$

۵ـ با مقدار β بدست آمده، T_2 را به گونه‌ای انتخاب کنید که شرایط زیر را برآورده سازند:

$$\left| \frac{s_1 + 1/T_2}{s_1 + 1/(\beta T_2)} \right| \approx 1$$

و

$$-5^\circ < \angle[(s_1+1/T_2)/(s_1+1/(\beta T_2)] < 0^\circ$$

مقدار بزرگترین ثابت زمانی جبران ساز پس ـ پیش فاز βT_2 را به اندازه‌ای می‌توان افزایش داد که تحقق فیزیکی آن ممکن باشد.

مثال ۶-۵

سیستم کنترل مثال ۶-۴ را در نظر بگیرید. برای جبران رفتار حالت ـ گذرا و حالت ـ ماندگار سیستم حلقه ـ بسته از جبران ساز داده شده با معادله (۶-۳-۸) استفاده می‌کنیم. با فرض مشخصات عملکرد داده شده در مثال ۶-۴، قطبهای غالب حلقه ـ بسته در $-2/5 \pm j4/33$ قرار خواهند گرفت. تابع تبدیل حلقه ـ باز سیستم جبران شده $\dot{G}_c(s)G(s)$ می‌باشد و K_c را از شرط داده شده بروی K_v از رابطه زیر تعیین می‌کنیم

$$\begin{aligned} K_v &= \lim_{s\to 0} sG_c(s)G(s) \\ &= \lim_{s\to 0} s.\frac{K_c\left(s+\frac{1}{T_1}\right)\left(s+\frac{1}{T_2}\right)}{\left(s+\frac{\beta}{T_1}\right)\left(s+\frac{1}{\beta T_2}\right)}\frac{3}{s(s+0/6)} \\ &= K_c\frac{3}{0/6} \end{aligned}$$

از آنجاییکه K_v باید حداقل ۹۰ باشد، لذا

$$K_c = 18$$

ثابت زمانی T_1 و مقدار β، برای طراحی قسمت پیش فاز جبران ساز، باید به گونه‌ای انتخاب گردند که شرط دامنه را در موقعیت قطبهای غالب برآورده سازند و هم چنین زاویه‌ای برابر با $53/69^\circ$ را در قطبهای غالب، فراهم آورند. بنابراین

$$\left|\frac{s+\frac{1}{T_1}}{s+\frac{\beta}{T_1}}\right| \left|\frac{3\times 18}{s(s+0/6)}\right|_{s=-2/5+j4/33} = \left|\frac{s+\frac{1}{T_1}}{s+\frac{\beta}{T_1}}\right| \frac{54}{23/7} = 1$$

و

$$\angle \left. \frac{s+\frac{1}{T_1}}{s+\frac{\beta}{T_1}} \right|_{s=-۲/۵+j۴/۳۱} = ۵۳/۶۹^\circ$$

همانطور که در شکل ۶-۲۶ نشان داده شده است، اگر p در موقعیت مطلوب قطب حلقه ـ بسته باشد، باید A و B را برروی محور حقیقی به گونه‌ای تعیین کرد که

$$\angle APB = ۵۳/۶۹^\circ \quad , \quad \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{۲۳/۷}{۵۴} = \frac{۴/۷۴}{۱۰/۸}$$

لذا

$$\overline{AO} = ۳/۲۷ \quad , \quad \overline{BO} = ۱۱/۲۸۹۴$$

یا

$$T_1 = \frac{۱}{۳/۲۷} = ۰/۳۰ \quad , \quad \beta = \frac{۱۱/۲۸۹۴}{۳/۲۷} = ۳/۴۵$$

بنابراین قسمت پیش فاز جبران ساز عبارتست از

$$\frac{s+۳/۲۷}{s+۱۱/۲۸۹۴}$$

- برای قسمت پس فاز جبران ساز انتخاب می‌کنیم

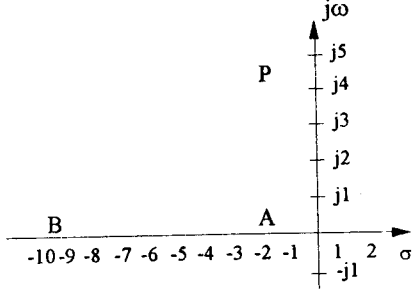
$$T_2 = ۱۰$$

بنابراین

$$\frac{۱}{\beta T_2} = \frac{۱}{۳۰/۴۵}$$

- و تابع تبدیل قسمت پس فاز جبران ساز عبارتست از

$$\frac{s+۰/۱}{s+۰/۰۳}$$

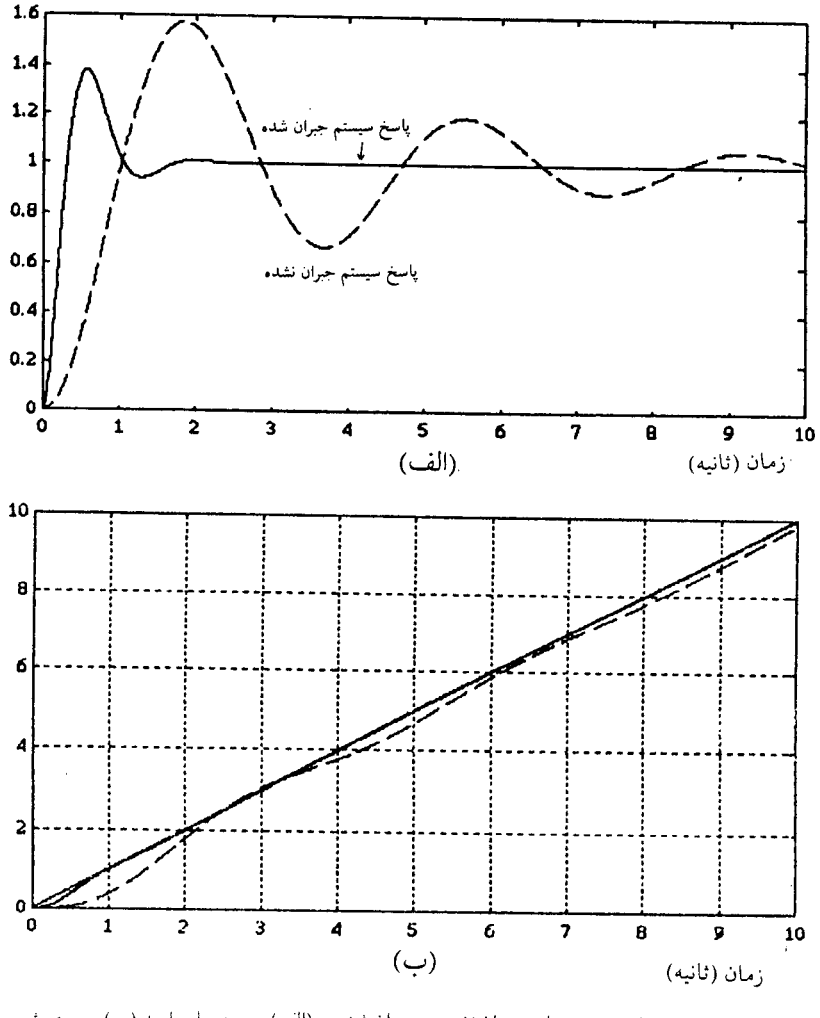


شکل ۶-۲۶ تعیین موقعیت قطب ـ صفر مطلوب

بنابراین تابع تبدیل جبران ساز پس ـ پیش فاز عبارتست از

$$G_c(s)=\left(\frac{s+۰/۱}{s+۰/۰۳}\right)\left(\frac{s+۳/۲۷}{s+۱۱/۲۸۹۷}\right)$$

پاسخهای زمانی سیستم حلقه ـ بسته جبران نشده و جبران شده به ورودیهای پله واحد و شیب واحد به ترتیب در شکلهای ۶-۲۷ (الف) و (ب) رسم شده‌اند. همانطورکه از این شکلها مشاهده می‌شود، رفتار حالت ـ گذرا و حالت ـ ماندگار پاسخ بهبود قابل ملاحظه‌ای یافته و مشخصه‌های عملکرد مطلوب برآورده شده‌اند.



شکل ۶-۲۷ پاسخ زمانی سیستم‌های جبران نشده و جبران شده به (الف) ورودی پله واحد (ب) ورودی شیب واحد

۴-۶ طراحی جبران سازها با استفاده از روش پاسخ فرکانسی

در فصل پنجم با ایده‌های کلی روش پاسخ فرکانسی و رسم نمودارهای بود، نایکوئیست و چارت نیکولز، که ابزار اصلی تحلیل و طراحی سیستم‌های کنترل با روش پاسخ فرکانسی هستند، آشنا شدیم. در بخش ۵-۹، مشخصه‌های عملکرد سیستم براساس پاسخ فرکانس ارایه گردیدند. در این بخش با تغییر دادن مشخصه‌های پاسخ فرکانسی سیستم حلقه ـ باز توسط جبران سازهای سری پیش فاز، پس فاز و پس ـ پیش فاز و یا در صورت امکان با تغییر دادن بهره به تنهایی، به مشخصه‌های پاسخ فرکانسی مطلوب داده شده برای سیستم حلقه ـ بسته خواهیم رسید. عملکرد یک سیستم حلقه بسته توسط M_r، ω_r و ضریب خطای سیستم K_m تعیین می‌گردند (بخش ۵-۹). مقدار M_r (ستیغ تشدید) عمدتاً نشان دهنده ξ (نسبت میرایی) است و لذا مقدار حداکثر فراجهش در پاسخ گذرا را تعیین می‌کند. برای یک M_r معین، فرکانس تشدید ω_r تعیین کننده فرکانس طبیعی غیرمیرا می‌باشد که خود نیز زمان پاسخ سیستم را می‌دهد. برای اطلاع از خطای حالت ـ ماندگار ورودیهای استاندارد نیز از ضریب خطای سیستم K_m استفاده می‌شود.

به طور کلی، یکی از موارد زیر می‌تواند دلیل مناسبی برای تغییر نمودار پاسخ فرکانسی سیستم توسط طراح باشد:

۱ـ سیستم داده شده به ازاء کلیه بهره‌ها ناپایدار است، نمودار پاسخ فرکانسی را باید به گونه‌ای در نزدیکی (-۱۸۰° , $0dB$) یا ۱- بروی محور حقیقی منفی تغییر داد که سیستم پایدار شود، M_r و ω_r نیز مقادیر مطلوبی داشته باشند.

۲ـ سیستم داده شده پایدار می‌باشد ولی زمان استقرار حالت گذرای آن نامطلوب است. به عبارت دیگر M_r مقدار مناسبی دارد ولی ω_r خیلی کوتاه است. در چنین حالتی ممکن است که بهره مناسب باشد و یا با اندک تغییری مقدار مناسبی پیدا کند، لیکن قسمت فرکانس بالای نمودار باید به گونه‌ای تغییر کند که مقدار ω_r افزایش یابد.

۳ـ سیستم داده شده پایدار با مقادیر M_r و ω_r مناسب، و لذا پاسخ گذرای سیستم مطلوب می‌باشد، لیکن خطای حالت ـ ماندگار پاسخ بسیار بزرگ است. در این حالت باید مقدار بهرهٔ سیستم را بدون تغییر قابل توجهی در مقادیر M_r و ω_r، افزایش داد. به عبارت دیگر قسمت فرکانس بالای نمودار پاسخ فرکانسی مناسب است ولی قسمت فرکانس پایین آن

مناسب نیست.

۴ـ سیستم داده شده پایدار و مقدار M_r مطلوب است ولی پاسخ حالت گذرا و پاسخ حالت ـ ماندگار نامطلوب هستند. بنابراین باید مقادیر ω_r و K_r افزایش داده شوند. قسمت نمودار پاسخ فرکانسی در نزدیکی نقطه (۰dB, -۱۸۰°) یا ۱- بروی محور حقیقی منفی، باید به گونه‌ای تغییر داده شود که ω_r مطلوب بدست آورده شود و قسمت فرکانس پایین باید به گونه‌ای تغییر داده شود که به مقدار مناسب بتوان بهره را افزایش داد.

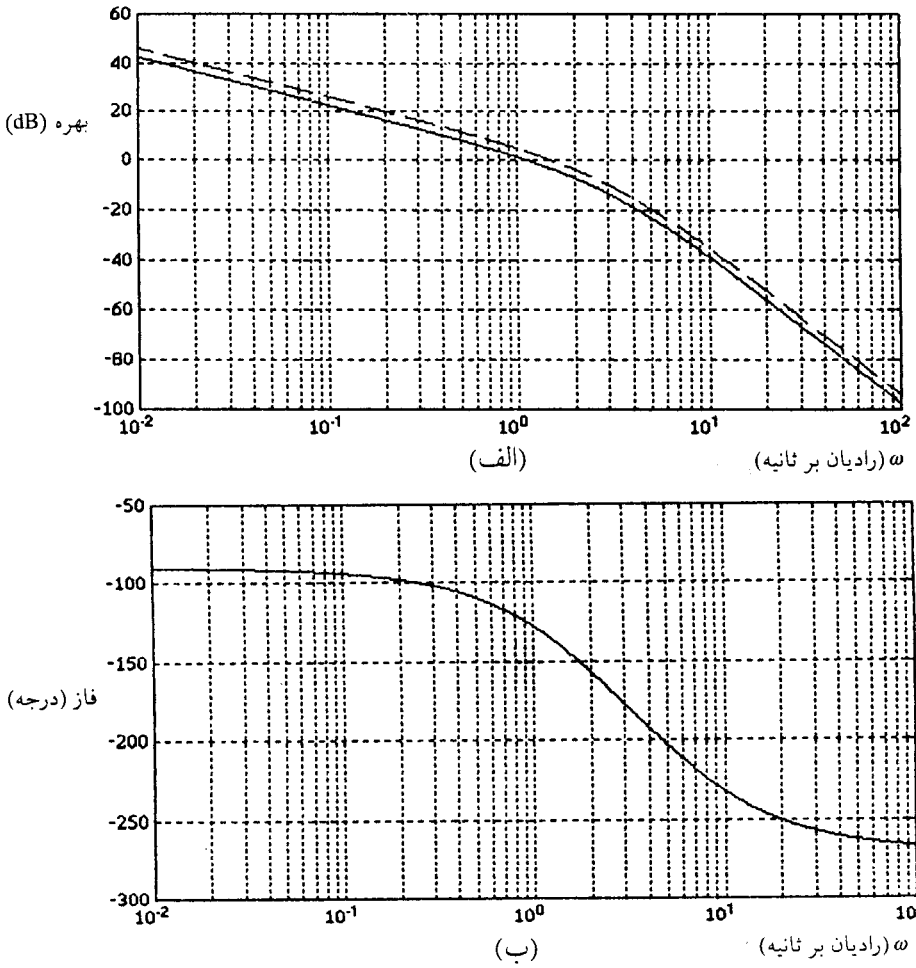
بنابراین هدف از طراحی، تغییر دادن نمودارهای پاسخ فرکانسی توسط تغییر بهره (در صورت امکان) یا یک جبران ساز دینامیکی به گونه‌ای است که مشخصه‌های عملکرد برآورده شوند. قبل از آنکه به تشریح طراحی با جبران سازهای پس فاز، پیش فاز و پس ـ پیش فاز بپردازیم، با یک مثال نشان خواهیم داد که در برخی از موارد، رسیدن به عملکرد تعیین شده سیستم حلقه ـ بسته توسط تغییر بهره حلقه ـ باز K به تنهایی امکان‌پذیر است. افزایش بهره باعث حرکت دادن نمودار بهره برحسب فرکانس به طرف بالا، متناظر با مقدار افزایش بهره، در تمامی فرکانس‌ها است و حال آنکه کاهش بهره باعث حرکت دادن نمودار بهره برحسب فرکانس به طرف پایین، متناظر با مقدار کاهش بهره، در تمامی فرکانس‌ها است. تغییر بهره K، تغییری در نمودار زاویه فاز برحسب فرکانس ندارد.

مثال ۶-۶

تابع تبدیل حلقه ـ باز سیستمی عبارتست از

$$G(j\omega)=\frac{۲۰}{j\omega(j\omega+۲)(j\omega+۵)}$$

حاشیه فاز سیستم جبران نشده برابر با ۳۶° است. مطلوب است که حاشیه فاز سیستم ۴۶° باشد. بنابراین باید در فرکانسی که برای آن انتقال زاویه ۱۳۴°-=۴۶°+۱۸۰°- است، بهره $|G(j\omega)|=۰dB$ باشد. نمودار بود تابع تبدیل جبران نشده (با خط چین) در شکل ۶-۲۸ نشان داده شده است. با مراجعه به شکل ۶-۲۸، در می‌یابیم که انتقال فاز برابر با ۱۳۴°- در فرکانس $\omega=۱/۱$ (رادیان بر ثانیه) است و بهره در این فرکانس برابر با ۳/۵dB+ است. بنابراین اگر بهره را به میزان ۳/۵dB، بر روی کلیه فرکانس‌ها کاهش دهیم، در فرکانس $\omega=۱/۱$ (رادیان



شکل ۶-۲۸ (الف) نمودار بهره برحسب فرکانس برای سیستم مثال ۶-۶ (ب) نمودار زاویهٔ فاز برحسب فرکانس برای سیستم مثال ۶-۶

بر ثانیه) اندازه نمودار برابر با ۰dB خواهد شد. در این صورت حاشیه فاز مطلوب ۴۶° بدست خواهد آمد. داریم $۲۰\log x = ۳/۵$ و لذا $x = ۱/۴۹۶$ برابر با بهره متناظر با ۳/۵dB است. بهره حلقه ـ باز سیستم ۲۰ است و با تقسیم این بهره بر ۱/۴۹۶ بهره حلقه ـ باز جدید ۱۳/۳۷ بدست می‌آید. بنابراین در سیستم جبران نشده $۲۰\log ۲۰ = ۲۶/۰۲dB$ و در سیستم

جبران‌شده توسط کاهش بهره حلقه ـ باز $۲۰\log ۱۳/۳۷ = ۲۲/۵۲dB$، که مقدار $۳/۵dB$ کمتر از مقدار قبلی است.

به طور خلاصه می‌توان گفت که سیستم حلقه ـ بسته با تابع تبدیل حلقه ـ باز داده شده، دارای حاشیه بهره $۳۶°$ می‌باشد. با کاهش بهره سیستم حلقه ـ باز از $K=۲۰$ به $K=۱۳/۳۷$، حاشیه فاز سیستم حلقه ـ بسته $۴۸°$ خواهد شد.

۶-۴-۱ طراحی جبران سازهای پیش فاز با استفاده از روش پاسخ فرکانسی

سیستم نشان داده شده در شکل ۶-۱۷ را در نظر بگیرید. اگر مشخصه‌های عملکرد برحسب حاشیه فاز، حاشیه بهره، ثابتهای خطای سرعت استاتیکی و یا سایر مشخصه‌های پاسخ فرکانسی داده شده باشند، باید از روش پاسخ فرکانسی برای طراحی جبران ساز $G_c(s)$ استفاده کرد. فرض کنید که عمل خواسته شده از جبران ساز، تغییر شکل نمودار پاسخ فرکانسی برای فراهم آوردن زاویه پیش فاز کافی جهت خنثی کردن پس فاز اضافی در سیستم جبران نشده باشد. در این حالت (موارد ۱ و ۲ بخش ۶-۴) جبران ساز پیش فاز برای جبران سیستم مناسب است.

مراحل طراحی یک جبران ساز پیش فاز با استفاده از روش پاسخ فرکانسی در زیر آمده ست:

۱ـ تابع تبدیل جبران ساز پیش فاز عبارتست از

$$G_c(s)=K_c\alpha\frac{Ts+۱}{\alpha Ts+۱}=K_c\frac{s+۱/T}{s+۱/(\alpha T)} \quad (۰<\alpha<۱) \qquad (۱-۴-۶)$$

با تعریف $K=\alpha K_c$، تابع تبدیل حلقه ـ باز سیستم جبران شده در شکل ۶-۱۷ با معادله (۶-۴-۱) عبارتست از

$$G_c(s)G(s)=K\frac{Ts+۱}{\alpha Ts+۱}G(s) \qquad (۲-۴-۶)$$

در اولین مرحله طراحی باید بهرهٔ K را چنان تنظیم نمود که شرط داده شده بروی ثابت خطای استاتیکی برآورده گردد.

۲ـ با بهرهٔ بدست آمده K از مرحله قبل، نمودار بود $KG(s)$ را رسم کنید. تابع تبدیل $KG(s)$

مربوط به سیستم جبران نشده می‌باشد ولی بهرهٔ آن تنظیم شده است. از نمودار بود رسم شده، حاشیهٔ فاز را تعیین کنید.

۳ـ زاویه پیش فاز لازم ϕ، که باید به سیستم اضافه گردد را محاسبه کنید.

۴ـ از معادله (۶-۲-۷)

$$\sin \phi = \frac{۱-\alpha}{۱+\alpha}$$

فاکتور α در جبران ساز پس فاز را تعیین کنید. دقت کنید که α براساس زاویه پیش فاز لازم، که باید توسط جبران ساز فراهم آورده شود، تعیین گردیده است. مرحله بعد تعیین فرکانس‌های شکست ۱/T و ۱/(αT) جبران ساز پیش فاز است. فرکانسی را تعیین کنید که در آن دامنه سیستم جبران نشده KG(jω) برابر با ۲۰log(۱/$\sqrt{\alpha}$)- باشد و این فرکانس را به عنوان فرکانس تقاطع بهره جدید انتخاب کنید. این فرکانس با معادله (۶-۲-۶) داده شده است و بزرگترین انتقال فاز در این فرکانس رخ می‌دهد (به شکل ۶-۲ مراجعه کنید.)

۵ـ فرکانس‌های شکست جبران ساز پیش فاز عبارتند از:

صفر جبران ساز پیش فاز $\omega = ۱/T$

قطب جبران ساز پیش فاز $\omega = ۱/(\alpha T)$

۶ـ بهره جبران ساز K_c را از $K_c = K/\alpha$ تعیین کنید.

۷ـ حاشیه فاز سیستم را تعیین کنید. اگر با مقدار مطلوب مطابقت نداشته باشد، موقعیت قطب ـ صفر جبران ساز را تا حصول نتیجه مناسب تغییر دهید.

مثال ۶-۷

تابع تبدیل حلقه ـ باز یک سیستم کنترل با فیدبک واحد عبارتست از

$$G(s) = \frac{۰/۲}{s(s+۱)}$$

مشخصه‌های عملکرد مطلوب سیستم به صورت ثابت خطای سرعت استاتیکی K_v برابر ۱۵ s^{-1}(ثانیه) و حاشیه فاز ۴۵° داده شده‌اند. برای برآورده ساختن مشخصه‌های داده شده، از یک جبران ساز پیش فاز استفاده می‌کنیم.

نخستین قدم در طراحی یک جبران ساز پیش فاز، تنظیم بهره K_c در جبران ساز داده شده با

معادله (۶-۴-۱) است. بنابراین داریم

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG_c(s)G(s) = \lim_{s\to 0} sK_c \frac{s+\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{\alpha T}} \frac{0/2}{s(s+1)}$$

$$= 0/2K_c\alpha = 15$$

با تعریف $K=K_c\alpha$، بدست می‌آوریم

$$K=75$$

با انتخاب بهره $K=75$، سیستم جبران شده، شرط داده شده برروی پاسخ حالت ـ ماندگار را برآورده می‌سازد.

نمودار بود تابع تبدیل زیر

$$G_1(j\omega)=\frac{15}{j\omega(j\omega+1)}$$

در شکل ۶-۲۹ رسم شده است. حاشیه‌های بهره و فاز $G_1(j\omega)$ از شکل ۶-۲۹ بدست آورده می‌شوند و به ترتیب برابرند با تقریباً 56/49dB و $14/7^\circ$. حاشیه بهره $14/7^\circ$ نشان دهنده یک پاسخ کاملاً نوسانی و لذا نامطلوب است. (پاسخ سیستم جبران نشده به ورودی پله واحد در شکل ۶-۳۰ نشان داده شده است.) بنابراین، اگرچه با افزایش بهره مشخصه مطلوب رفتار حالت ـ ماندگار برآورده شده است، لیکن رفتار گذرای پاسخ بسیار نامطلوب می‌باشد. مشخصهٔ داده شده برای حاشیه فاز حداقل 45° است. برای بدست آوردن این حاشیه فاز (بدون کاهش بهره K) باید با استفاده از یک جبران ساز پیش فاز، پیش فازی برابر با حدوداً $30/3$ برای جبران زاویه فاز فراهم آورد.

با توجه به اینکه افزودن یک جبران ساز پیش فاز نمودار منحنی دیاگرام بود را تغییر می‌دهد، فرکانس تقاطع بهره به سمت راست انتقال داده خواهد شد. با در نظر گرفتن این انتقال در فرکانس تقاطع بهره فرض خواهیم کرد که بیشترین پیش فاز لازم حدوداً $35/3^\circ$ می‌باشد. به عبارت دیگر حدوداً 5° برای جبران این انتقال فرکانس تقاطع بهره به زاویه پیش فاز لازم اضافه می‌گردد.

از آنجاییکه

$$\sin 35/3=\frac{1-\alpha}{1+\alpha}$$

لذا $\alpha = ۰/۲۶۷$ است. برای تعیین فرکانس‌های شکست، فرکانسی را تعیین می‌کنیم که در آن دامنه سیستم جبران نشده برابر با $-۵.۷۳dB = -۲۰\log(۱/\sqrt{۰/۲۶۷})$ - است. این فرکانس که همان فرکانس تقاطع بهره جدید است برابر $\omega = ۵/۷۳$ می‌باشد. از آنجاییکه

$$۵/۷۳ = \frac{۱}{\sqrt{\alpha}T}$$

لذا

$$\omega_۱ = \frac{۱}{T} = ۲/۹۶۱$$

$$\omega_۲ = \frac{۱}{\alpha T} = ۱۱/۰۸۹$$

بهره جبران ساز نیز عبارتست از

$$K_c = \frac{K}{\alpha} = \frac{۷۵}{۰/۲۶۷} = ۲۸۰/۸۹۹$$

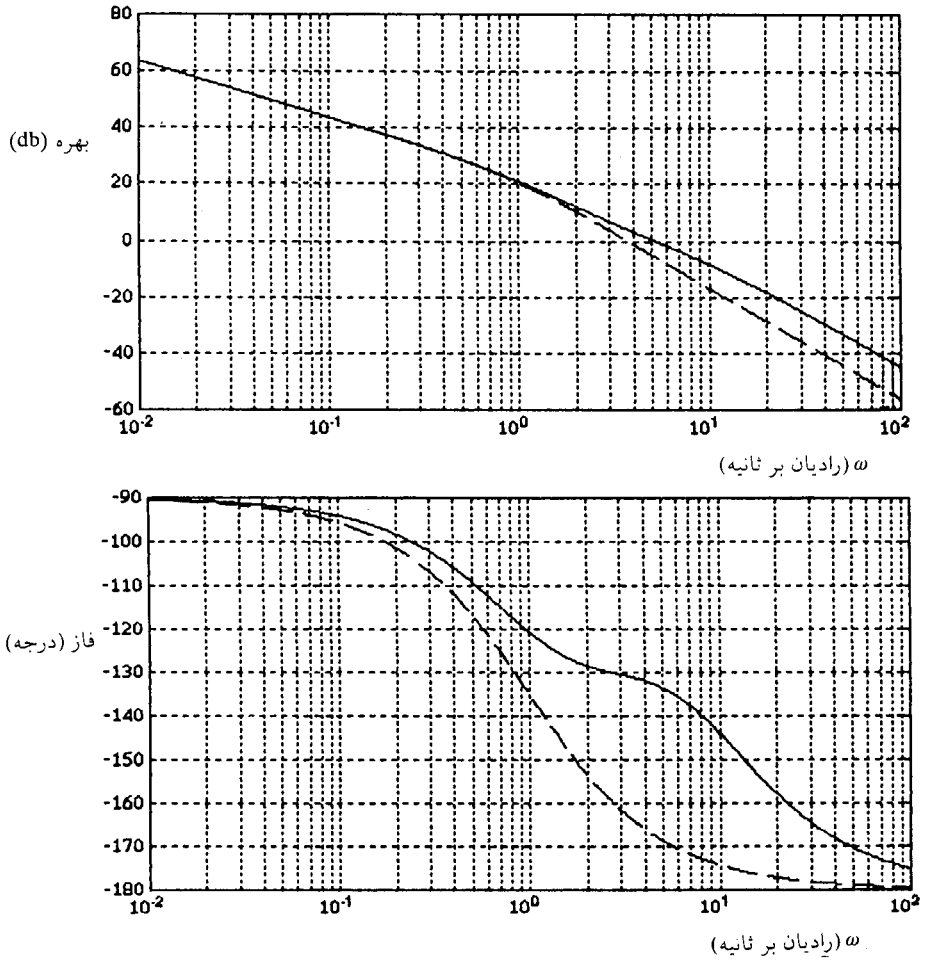
بنابراین تابع تبدیل جبران ساز پیش فاز عبارتست از

$$G_c(s) = ۲۸۰/۸۹۹ \frac{s + ۲/۹۶}{s + ۱۱/۰۸۹}$$

نمودارهای دامنه و زاویه فاز سیستم‌های جبران نشده و جبران شده در شکل ۶-۲۹ رسم شده‌اند. تابع تبدیل حلقه ـ باز سیستم جبران شده عبارتست از

$$G_c(s)G(s) = ۲۸۰/۸۹۹ \frac{s + ۲/۹۶}{s + ۱۱/۰۸۹} \frac{۰/۲}{s(s+۱)}$$

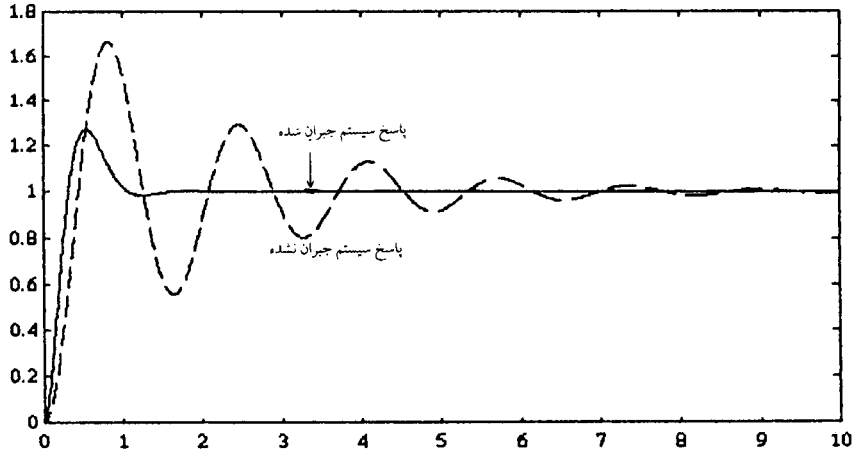
منحنی‌های پیوسته در شکل ۶-۲۹، نمودارهای دامنه و فاز این تابع تبدیل را نشان می‌دهند. حاشیه‌های بهره و فاز سیستم جبران شده به ترتیب عبارتند از ∞dB و ۴۷° که مشخصه طراحی را برآورده می‌سازند. پاسخهای پله واحد سیستم جبران نشده و جبران شده نیز در شکل ۶-۳۰، رسم شده‌اند. همانطور که مشاهده می‌گردد، پاسخ سیستم جبران نشده نوسانی ولی پاسخ سیستم جبران شده با مقدار حداکثر فراجهش و زمان استقرار مناسب، بدون نوسانات اضافی است.



شکل ۶-۲۹ دیاگرام بود سیستم‌های جبران نشده و جبران شده، نمودار نشان داده شده با خط چین نمودار سیستم جبران نشده و نمودار نشان داده شده با خط پیوسته نمودار سیستم جبران شده‌است.

۶-۴-۲ طراحی جبران سازهای پس فاز با استفاده از روش پاسخ فرکانسی

اثر جبران ساز پس فاز بروی سیستم جبران نشده، معرفی یک عنصر فاز منفی در ناحیه میانهٔ گسترهٔ فرکانسی و اهمیت دادن به پاسخ فرکانس پایین‌تر در مقایسه با پاسخ فرکانسی بالاتر است. لذا همانند یک فیلتر پایین‌گذر عمل می‌کند.



شکل ۶-۳۰ پاسخ زمانی سیستم جبران نشده و جبران شده به ورودی پله واحد

مراحل طراحی یک جبران ساز پس فاز با استفاده از روش پاسخ فرکانسی، در زیر آمده است:

۱ـ تابع تبدیل جبران ساز پس فاز عبارتست از

$$G_c(s)=K_c\beta\frac{Ts+1}{\beta Ts+1} \quad (\beta>1) \qquad (۶-۴-۳)$$

با تعریف $K_c\beta=K$، تابع تبدیل حلقه ـ باز سیستم جبران شده در شکل ۶-۱۷ با معادله (۶-۴-۳) عبارتست از

$$G_c(s)G(s)=K\frac{Ts+1}{\beta Ts+1}G(s) \qquad (۶-۴-۴)$$

K را به گونه‌ای تعیین خواهیم کرد که مقدار مطلوب ثابت خطای استاتیکی بدست آورده شود.

۲ـ با بهرهٔ بدست آمده از مرحله ۱ طراحی، نمودار بود سیستم جبران نشده $KG(s)$ را رسم کنید. از نمودار بود رسم شده، حاشیهٔ بهره و حاشیهٔ فاز را تعیین کنید. اگر مشخصه‌های مطلوب حاشیهٔ بهره و فاز برآورده نشده باشند، به عبارت دیگر مقدار حاشیهٔ بهره و حاشیهٔ فاز، مقدار مطلوب نباشد، نخست مقدار مطلوب حاشیه فاز را تعیین کنید. حاشیهٔ

فاز لازم عبارتست از حاشیهٔ فاز معین شده بعلاوه °۵ تا °۱۲ فاز اضافی. این °۵ تا °۱۲ فاز اضافی جهت جبران کردن پس فاز ایجاد شده توسط جبران ساز پس فاز به مقدار تعیین شده حاشیهٔ فاز اضافه می‌گردد. اکنون فرکانسی را تعیین کنید که در آن زاویهٔ فاز تابع تبدیل حلقه ـ باز برابر با °۱۸۰ بعلاوه حاشیهٔ فاز لازم است. این فرکانس به عنوان فرکانس تقاطع بهرهٔ جدید انتخاب می‌شود.

۳ـ برای جلوگیری از اثرات منفی پس فاز ناشی از جبران ساز پس فاز، قطب و صفر جبران ساز پس فاز را باید به مقدار متناسبی پایین‌تر از فرکانس تقاطع بهره جدید قرار دهیم. بنابراین فرکانس شکست $\omega=1/T$، متناظر با صفر جبران ساز پس فاز را یک اکتاو تا یک دهه پایین‌تر از فرکانس تقاطع بهره جدید قرار دهید. (این مقدار بستگی به ثابت زمانیهای جبران ساز خواهد داشت، دقت کنید که این ثابت زمانیها نباید خیلی بزرگ شوند)

۴ـ تضعیف لازم جهت پایین آوردن منحنی دامنه به ۰dB در فرکانس تقاطع بهره جدید را تعیین کنید. توجه کنید که مقدار این تضعیف برابر با $-20\log\beta$ است و لذا با این مقدار تعیین شده تضعیف، می‌توان β را محاسبه کرد. سرانجام، فرکانس شکست دوم جبران ساز، متناظر با قطب آن را از $\omega=1/(\beta T)$ تعیین کنید.

۵ـ با استفاده از مقادیر بدست آمده K و β بهره جبران ساز را بدست می‌آوریم:

$$K_c=K/\beta \qquad (۶-۴-۵)$$

مثال ۶-۸

تابع تبدیل حلقه ـ باز یک سیستم جبران نشده با فیدبک واحد عبارتست از

$$G(s)=\frac{۴۵۰}{s(s+۵)(s+۴۰)}$$

مطلوب است که سیستم را به گونه‌ای جبران کنیم که ثابت خطای سرعت استاتیکی برابر $۲۲/۵$ (ثانیه)$^{-1}$، حاشیه فاز حداقل °۴۵ و حاشیه بهره حداقل ۱۵dB باشد.

برای جبران سیستم از یک جبران ساز پس فاز استفاده می‌کنیم. تابع تبدیل جبران ساز پس فاز با معادله (۶-۴-۳) داده شده است، لذا تابع تبدیل حلقه ـ باز سیستم جبران شده

عبارتست از

$$G_c(s)G(s)=K_c\frac{s+\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{\beta T}}\frac{۴۵۰}{s(s+۵)(s+۴۰)}$$

با تعریف $K=K_c\beta$ ، K را باید به گونه‌ای انتخاب کنیم که شرط داده شده بروی ثابت خطای سرعت استاتیکی برآورده شود. بنابراین

$$K_v=\lim_{s\to ۰} sG_c(s)G(s)=\lim_{s\to ۰} s\frac{K۴۵۰}{s(s+۵)(s+۴۰)}$$
$$=K۲/۲۵=۲۲/۵$$

یا

$$K=۱۰$$

با بهره $K=۱۰$ ، سیستم جبران شده، شرط داده شده بروی عملکرد حالت ـ ماندگار را برآورده خواهد کرد. دیاگرام بود تابع تبدیل

$$G_۱(j\omega)=\frac{۴۵۰۰}{s(s+۵)(s+۴۰)}$$

(که در آن بهره سیستم، جبران شده است) در شکل ۶-۳۱ با خط چین رسم شده است. از نمودارهای دامنه و فاز، حاشیه‌های بهره و فاز تقریباً به ترتیب عبارتند از ۳dB و °۱۳/۵. مقدار مطلوب حاشیهٔ فاز (با توجه به °۱۲ در نظر گرفته شده) °۵۷ می‌باشد. از آنجاییکه فرکانس متناظر با حاشیهٔ فاز °۵۷ برابر ۲/۷۸۳ رادیان بر ثانیه است، فرکانس قطع بالای جبران ساز را در دو اکتاو پایین‌تر از این فرکانس، یعنی ۰/۶۹۶ رادیان بر ثانیه، در نظر می‌گیریم. مقدار بهره تابع تبدیل جبران نشده در $\omega=۰/۶۹۶$ برابر با ۱۶/۹۶۲dB است. از اینرو

$$۲۰\log\beta=۱۶/۹۶۲$$

و بنابراین

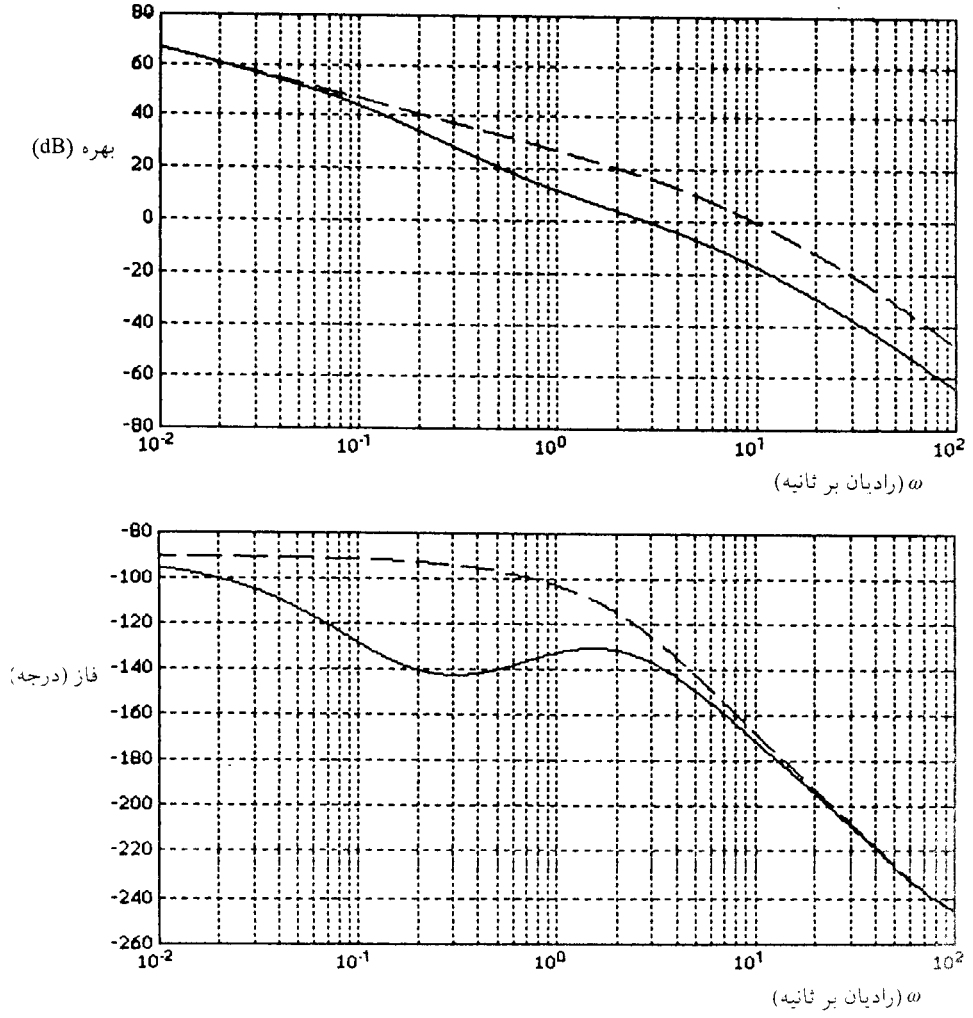
$$\beta=۷$$

فرکانس شکست بعدی جبران سازکه متناظر با قطب آن است، از رابطه زیر بدست می‌آید

$$\omega=۰/۶۹۶/۷=۰/۰۹۹ \qquad \text{(رادیان بر ثانیه)}$$

بنابراین تابع تبدیل جبران ساز عبارتست از

$$G_c(s)=K_c\frac{۱۴s+۱}{۱۰۰s+۱}=K_c(۰/۱۴)\frac{s+۰/۶۹۶}{s+۰/۰۹۹}$$



شکل ۶-۳۱ نمودارهای دامنه و فاز تابع تبدیل سیستم جبران نشده و جبران شده

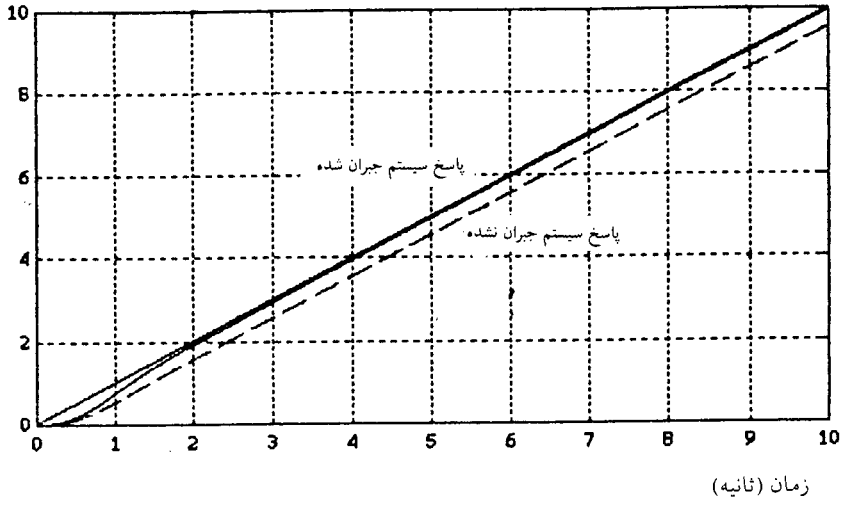
توجه کنید که مقدار فاز جبران ساز برابر با ۱۰° است). برای تعیین بهره K_c داریم

$$K_c = \frac{K}{\beta} = \frac{۱۰}{۷} = ۱/۴۳$$

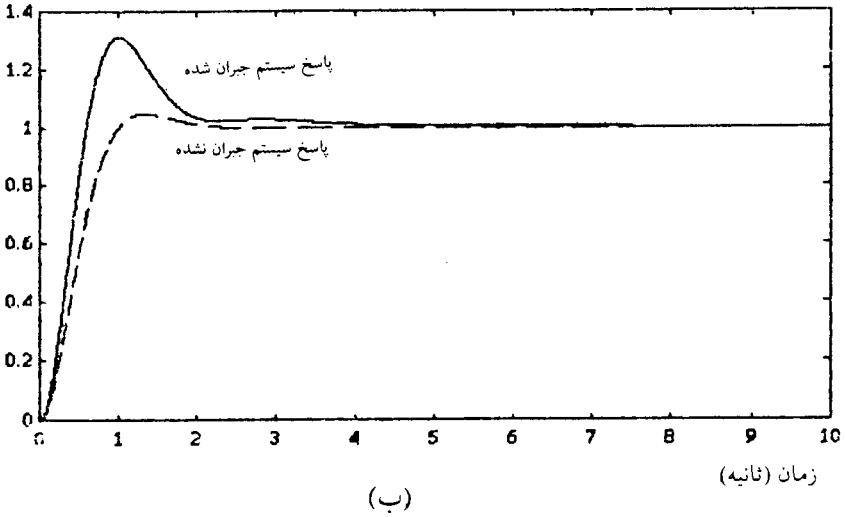
تابع تبدیل حلقه ـ باز سیستم جبران شده به صورت زیر است

$$G_c(s)G(s) = \frac{۹۰۰/۹(s+۰/۶۹۶)}{s(s+۰/۰۹۹)(s+۵)(s+۴۰)}$$

دیاگرام بود (نمودارهای دامنه و زاویه فاز) این تابع تبدیل در شکل ۶-۳۱ رسم شده‌اند. از نمودارهای شکل ۶-۳۱ داریم که حاشیه‌های بهره و فاز سیستم جبران شده به ترتیب عبارتند از ۲۰dB و ۴۵°، که شرایط داده شده را برآورده می‌سازند. پاسخ سیستم‌های جبران نشده و جبران شده نیز به ورودی پله واحد و شیب واحد در شکل ۶-۳۲ رسم شده‌اند.



(الف)



(ب)

شکل ۶-۳۲ خروجیهای سیستم جبران‌نشده و جبران شده به ورودیهای (الف) شیب واحد (ب) پله واحد

نکاتی در رابطه با جبران سازهای پس فاز

۱ـ با توجه به ماهیت پایین گذر بودن جبران سازهای پس فاز (شکل ۶-۶)، جبران سازهای پس فاز استفاده از بهره بالاتری را در فرکانس‌های پایین امکان‌پذیر می‌سازند، که موجب بهبود عملکرد حالت ـ ماندگار می‌شود. همچنین در گسترهٔ حساس فرکانسی بالاتر، بهره را کاهش داده و حاشیهٔ فاز را بهبود می‌بخشد.

۲ـ فرض کنید که صفر و قطب جبران ساز پس فاز به ترتیب در $s=-z$ و $s=-p$ قرار داشته باشند. مادامیکه صفر و قطب جبران ساز در نزدیکی مبداء هستند و نسبت z/p برابر با فاکتور ضرب کننده لازم برای ثابت خطای سرعت استاتیکی است، موقعیت دقیق صفر و قطب چندان مهم نیست. با توجه به اینکه جبران ساز پس فاز یک قطب، در حوالی صفر و قطب خود، به سیستم حلقه ـ بسته اضافه می‌کند (جبران ساز یک درجه، درجه استاتیکی سیستم حلقه ـ بسته را افزایش می‌دهد)، و از آنجاییکه قطبهای نزدیک به مبداء بسیار کند هستند و هر چه به مبداء نزدیکتر می‌شوند، کندتر می‌گردند لذا باید دقت کرد که صفر و قطب جبران ساز، بدون جهت خیلی نزدیک مبداء قرار داده نشوند. اگرچه صفر جبران ساز اثر قطب حلقه ـ بسته ایجاد شده را که در نزدیکی آن است بسیار کم می‌کند ولی پاسخ بسیار کند گذرای ناشی از این قطب، موجب خرابی زمان استقرار سیستم خواهد شد.

۳ـ تضعیف ناشی از جبران ساز پس فاز، فرکانس تقاطع بهره را به یک نقطهٔ فرکانسی پایین‌تر انتقال می‌دهد، که در آن حاشیهٔ فاز قابل قبول باشد. بنابراین جبران ساز پس فاز، باعث کاهش پهنای باند سیستم می‌گردد. لذا پاسخ گذرای سیستم کندتر خواهد گردید. دقت کنید که منحنی زاویه فاز $G_c(j\omega)G(j\omega)$ در نزدیکی و بالای فرکانس تقاطع بهره جدید، تقریباً تغییری نمی‌کند.

۴ـ استفاده از جبران ساز پس فاز، موجب می‌گردد که در سیستم جبران شده حاشیه پایداری کاهش یابد. برای اجتناب از این پدیده نامطلوب، ثابت زمانی T را باید به اندازه کافی بزرگتر از بزرگترین ثابت زمانی سیتسم انتخاب کرد.

۶-۴-۳ طراحی جبران سازهای پس ـ پیش فاز با استفاده از روش پاسخ فرکانسی

جبران سازهای پس ـ پیش فاز برای بهره گرفتن از مزایای هر دو جبران سازهای پس فاز و

پیش فاز طراحی می‌شوند و لذا مراحل طراحی آن براساس ترکیبی از روشهای طراحی برای جبران سازهای نامبرده می‌باشد.

تابع تبدیل جبران ساز پس ـ پیش فاز عبارتست از

$$G_c(s)=K_c\frac{(T_1 s+1)(T_2 s+1)}{(\frac{T_1}{\beta}s+1)(\beta T_2 s+1)} \qquad (۶-۴-۶)$$

که در آن $\beta>1$. قسمت پیش فاز جبران ساز (قسمت شامل T_1) با اضافه کردن زاویه پیش فاز و افزایش حاشیه فاز در فرکانس تقاطع بهره، منحنی پاسخ ـ فرکانسی را تغییر می‌دهد. در حالیکه قسمت پس فاز جبران ساز (قسمت شامل T_2)، در نزدیک و بالای فرکانس تقاطع بهره تضعیفی ایجاد می‌کند و توسط آن امکان افزایش بهره در گستره فرکانس پایین پیدا می‌شود، که به نوبه خود به بهبود عملکرد حالت ـ ماندگار منجر می‌گردد.

مراحل طراحی یک جبران ساز پس ـ پیش فاز با استفاده از روش پاسخ فرکانسی در زیر آمده است:

۱ـ تابع تبدیل حلقه ـ باز سیستم جبران شده در شکل ۶-۱۷ با معادله (۶-۴-۶) عبارتست از

$$G_c(s)G(s)=K_c\frac{(T_1 s+1)(T_2 s+1)}{(\frac{T_2 s}{\beta}+1)(\beta T_2 s+1)}G(s) \qquad (۷-۴-۶)$$

K_c را چنان تنظیم کنید که شرط داده شده بروی ثابت خطای استاتیکی برآورده گردد.

۲ـ نمودار بود تابع تبدیل $KG(s)$ را رسم کنید. حاشیهٔ بهره و حاشیهٔ فاز سیستم جبران نشده را محاسبه کنید. سپس فرکانس تقاطع بهره جدید را چنان انتخاب کنید که با زاویه پیش فاز لازم، حاشیهٔ فاز مطلوب بدست آورده شود. همانند مرحله ۴ طراحی جبران ساز پیش فاز بخش ۶-۴-۱، با جایگزینی $\alpha=1/\beta$ ، مقدار β را محاسبه کنید.

۳ـ پس از تعیین فرکانس تقاطع بهره جدید، فرکانس شکست قسمت پس فاز جبران ساز معادله(۶-۴-۶) را همانند مرحله ۳ طراحی جبران ساز پس فاز بخش ۶-۴-۲ محاسبه می‌کنیم. با تعیین T_2 و β بدست آمده در مرحله قبل، طراحی قسمت پس فاز تکمیل می‌شود.

۴ـ برای تعیین قسمت پیش فاز جبران ساز از منحنی دامنه نمودار بود تابع تبدیل $G(j\omega)$، مقدار دامنه تابع تبدیل را در فرکانس تقاطع بهره جدید پیدا می‌کنیم. جبران ساز پس ـ

پیش فاز باید نمودار دامنه تابع تبدیل جبران نشده را به گونه‌ای جبران کند که اندازه دامنه در این فرکانس ۰dB شود. از این شرط، فرکانس شکست لازم برای جبران سازی را تعیین می‌کنیم.

۵ـ با رسم نمودار بود تابع تبدیل حلقه ـ باز جبران شده $G_c(j\omega)G(j\omega)$، دسترسی به مشخصه‌های عملکرد مطلوب را بررسی می‌کنیم. در صورت عدم دسترسی به این مشخصه‌ها، طراحی را دوباره انجام می‌دهیم.

مثال ۶-۹

تابع تبدیل حلقه ـ باز سیستمی با فیدبک واحد عبارتست از

$$G(s)=\frac{۱}{s(s+۰/۶)(s+۲)}$$

مطلوب است که ثابت خطای سرعت استاتیکی $۱۵^{-۱}$(ثانیه)، حاشیه فاز ۵۰° و حاشیه بهره سیستم جبران شده حداقل ۱۵dB باشد.

برای جبران سیستم داده شده (که دارای پاسخ گذرا و ماندگار نامناسبی می‌باشد) از یک جبران ساز پس ـ پیش فاز داده شده با تابع تبدیل (۶-۴-۶) استفاده می‌کنیم. از شرط داده شده بروی ثابت خطای سرعت استاتیکی، بدست می‌آوریم

$$K_c=\lim_{s\to ۰} sG_c(s)G(s)=\lim_{s\to ۰} sG_c(s)\frac{۱}{s(s+۰/۶)(s+۲)}$$

$$=\frac{K_c}{۱/۲}=۱۵$$

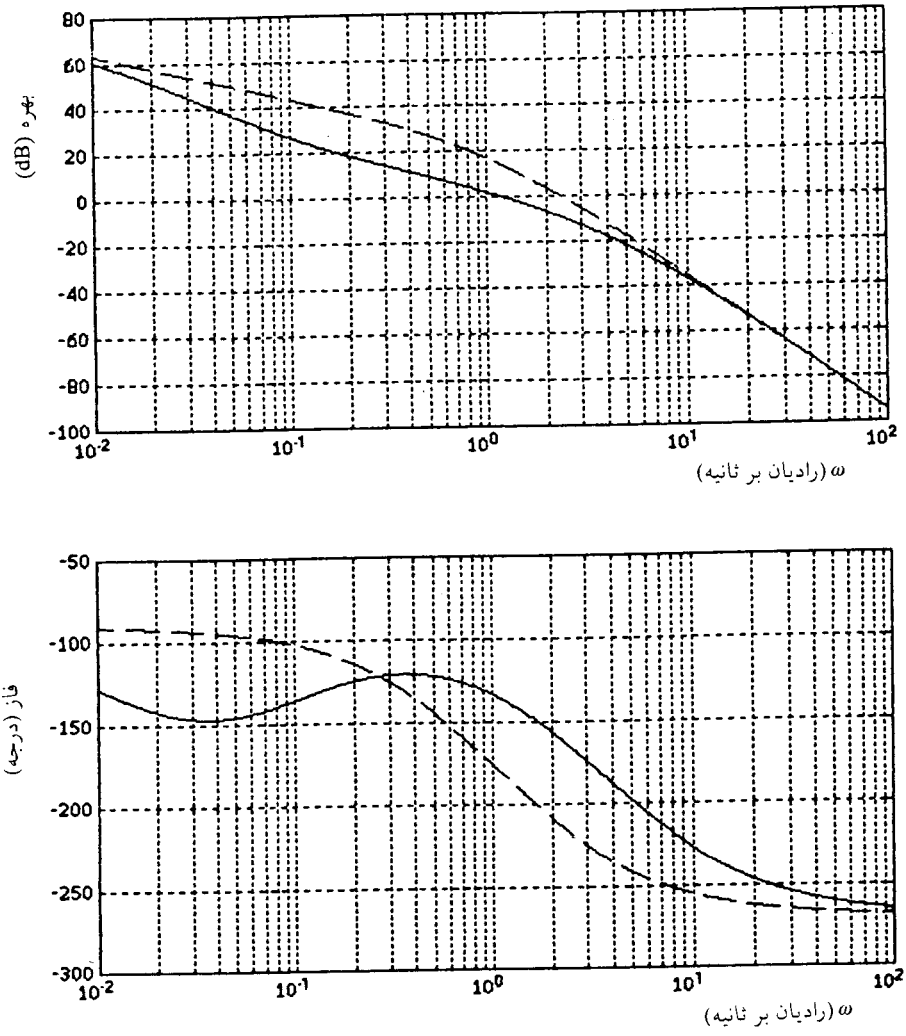
ویا

$$K_c=۱۸$$

دیاگرام بود سیستم جبران شده زیر

$$G_۱(j\omega)=\frac{۱۸}{j\omega(j\omega+۰/۶)(j\omega+۲)}$$

در شکل ۶-۳۳ رسم شده است. زاویه فاز این تابع تبدیل حدوداً ۲۳۰°- است، که نشان می‌دهد زاویه پیش فاز لازم در این حالت ۵۰° می‌باشد. با در نظر گرفتن خطای معمول در



شکل ۶-۳۳ نمودارهای دامنه و فاز تابع تبدیل سیستم جبران نشده و جبران شده

جبران ساز آن را ۵۵° فرض می‌کنیم.

نخستین قدم در طراحی یک جبران ساز پس ـ پیش فاز، انتخاب یک فرکانس تقاطع بهره جدید است. از نمودار زاویه فاز تابع تبدیل $G_1(j\omega)$، دلریم که زاویه فاز $G_1(j\omega)$ در $\omega = ۱/۱$ (رادیان بر ثانیه)، برابر با ۱۸۰°- است. می‌توان فرکانس تقاطع بهره جدید را ۱/۱ (رادیان بر ثانیه) انتخاب کرد. لذا زاویه پیش فاز لازم در $\omega = ۱/۱$ (رادیان بر ثانیه) حدوداً ۵۵° می‌باشد.

دقت کنید که این زاویه را می‌توان با یک جبران ساز پس ـ پیش فاز فراهم آورد.

بالاترین زاویه پیش فاز ϕ که از قسمت پیش فاز جبران ساز فراهم آورده می‌شود، رابطه زیر را برآورده می‌سازد

$$\alpha=\frac{1}{\beta}=\frac{1-\sin\phi}{1+\sin\phi}$$

از اینرو

$$\beta=10$$

با تعیین فرکانس تقاطع بهره جدید، فرکانس شکست قسمت پس فاز از جبران ساز پس ـ پیش فاز را تعیین می‌کنیم. با انتخاب $\omega=1/T_2$ (صفر قسمت پس فاز جبران ساز) یک دهه پایین فرکانس تقاطع بهره جدید، تابع تبدیل قسمت پس فاز جبران ساز به صورت زیر بدست می‌آید

$$\frac{s+0/11}{s+0/011}$$

برای طراحی قسمت پیش فاز تابع تبدیل جبران ساز، نخست مقدار دامنه تابع تبدیل را در فرکانس تقاطع بهره جدید پیدا می‌کنیم. از شکل ۶-۳۳ داریم که $G_1(j1/1)$ برابر با 15dB است. بنابراین جبران ساز پس ـ پیش فاز باید نمودار دامنه تابع تبدیل جبران نشده را به اندازه 15dB در (رادیان بر ثانیه) $\omega=1/1$ جبران کند. برای آورده ساختن این شرط می‌توان خط مستقیمی با شیب 20dB رسم کرد،که از نقطه (1/1 رادیان بر ثانیه و 15dB-) عبور کند. نقاط قطع این خط با خطهای 0dB و 20dB- فرکانس‌های شکست قسمت پیش فاز جبران ساز را بدست خواهند داد. بنابراین، تابع تبدیل قسمت پیش فاز جبران ساز پس ـ پیش فاز به صورت زیر بدست خواهد آمد

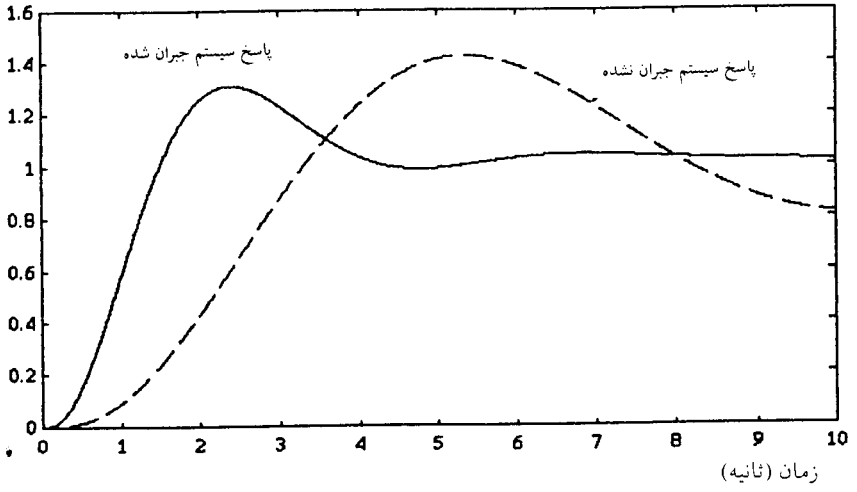
$$\frac{s+0/65}{s+6/5}$$

با ترکیب قسمتهای پس فاز و پیش فاز جبران ساز، تابع تبدیل جبران ساز عبارتست از

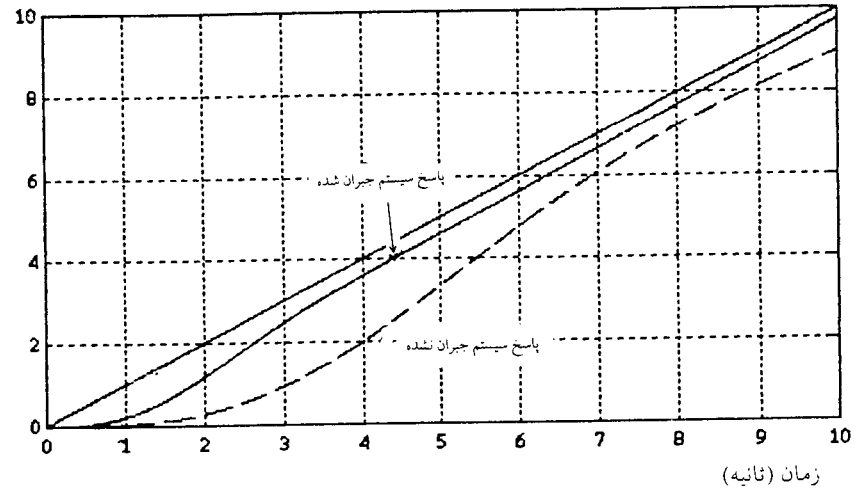
$$G_c(s)=\left(\frac{s+0/11}{s+0/011}\right)\left(\frac{s+0/65}{s+6/5}\right)$$

دیاگرام بود سیستم جبران شده $G_c(j\omega)G(j\omega)$، در شکل ۶-۳۳ رسم شده است. حاشیه‌های بهره و فاز سیستم جبران شده به ترتیب حدوداً عبارتند از 15(dB) و 45°، بنابراین کلیه

ملزومات طراحی برآورده شده است و پاسخهای پله واحد و شیب واحد سیستم‌های جبران نشده و جبران شده در شکلهای ۶-۳۴ (الف) (ب) نشان داده شده‌اند.



(الف)



(ب)

شکل ۶-۳۴ خروجیهای سیستم جبران نشده و جبران شده به ورودیهای (الف) پله واحد (ب) شیب واحد

۶-۴-۴ جبران سازی با استفاده از چارت نیکولز

اصول طراحی جبران سازها با استفاده از چارت نیکولز، همان اصول طراحی جبران سازها با استفاده نمودارهای بود و نایکوئیست است. در اینجا نیز باید جبران سازی طراحی گردد تا چارت نیکولز را به گونه‌ای تغییر شکل دهد که مشخصه‌های عملکرد مطلوب پاسخ فرکانسی بدست آیند. با توجه به اینکه طراحی جبران سازهای پس فاز، پیش فاز و پس ـ پیش فاز را بطور مفصل در بخشهای ۶-۴-۱ تا ۶-۴-۳ براساس مکان ریشه و نمودارهای بود بررسی کردیم، لذا در این بخش بدون ارایه مجدد جزئیات مراحل طراحی و جبران سازها تنها با بررسی دو مثال، کاربرد چارت نیکولز را در طراحی سیستم‌های کنترل نشان خواهیم داد. در مثال اول جبران سازی سیستم حلقه ـ باز با تغییر بهره به تنهایی امکان پذیر است و در مثال دوم از جبران ساز پیش فاز برای طراحی جبران ساز مناسب، سود خواهیم جست.

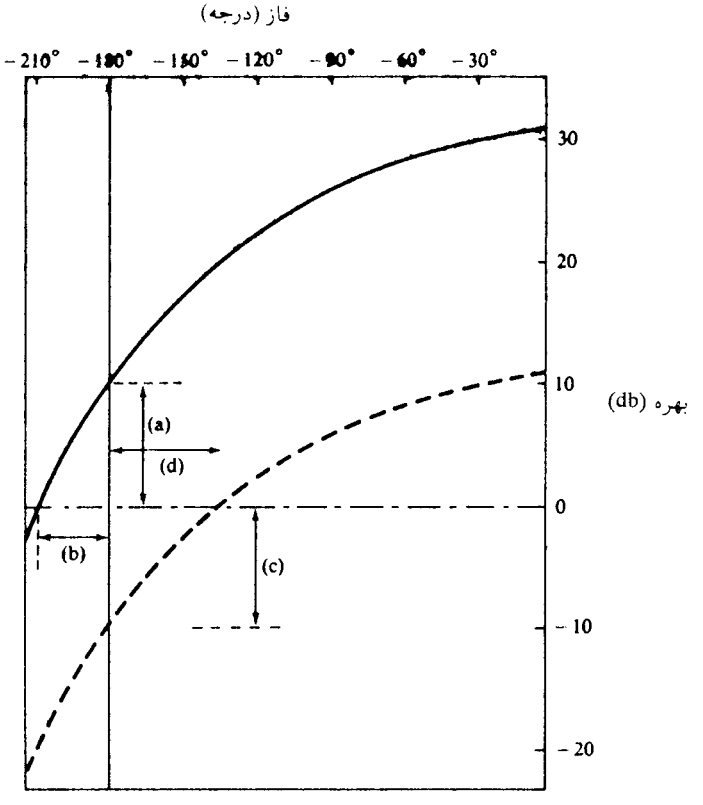
مثال ۶-۱۰

تابع تبدیل حلقه ـ باز سیستمی عبارتست از

$$G(j\omega)=\frac{۲۰۰K}{(j\omega+۱)(j\omega+۲)(j\omega+۳)}$$

نمودار بهره برحسب فاز این تابع تبدیل برای $K=۱$ در شکل ۶-۳۵ رسم شده است. مطلوب آن است که سیستم حلقه ـ بسته دارای حاشیه فاز حداقل ۴۰° و حاشیه بهره بین ۸ تا ۱۲ dB باشد. همانطور که از شکل ۶-۳۵ مشاهده می‌گردد، حاشیه فاز سیستم جبران نشده تقریباً ۳۰/۶- و حاشیه بهره آن ۱۰/۵dB- است. با توجه به منفی بودن حاشیه‌های بهره و فاز، سیستم حلقه ـ بسته با فیدبک واحد ناپایدار است. در فرکانسی که زاویه فاز ۱۸۰°- می‌باشد، بهره تابع تبدیل جبران نشده ۱۰/۵dB است. اگر این بهره را به مقدار ۲۰dB- کاهش دهیم، بهره کلی سیستم ۹/۵dB- در زاویه فاز ۱۸۰°- خواهد بود و لذا حاشیه فاز سیستم ۹/۵dB شده که در گستره تعیین شده قرار دارد.

افزایش بهره K باعث بالابردن نمودار بهره برحسب فرکانس برروی کلیه فرکانس‌ها شده و حال آنکه کاهش بهره K باعث پایین آوردن نمودار بهره برحسب فرکانس به همان مقدار در کلیه فرکانس‌ها می‌شود. بنابراین برای آنکه نمودار شکل ۶-۳۵ را به مقدار ۲۰dB کاهش دهیم



شکل ۶-۳۵ نمودار بهره برحسب فاز برای مثال ۶-۱۰

سیستم جبران نشده، $K=1$ (الف) حاشیه بهره (ب) حاشیه فاز

سیستم جبران شده، $K=0/1$ (ج) حاشیه بهره (د) حاشیه فاز

بهره K را برابر با ۰/۱ قرار می‌دهیم. با محاسبه حاشیه فاز پس از این جبران سازی توسط بهره در می‌یابیم که زاویه فاز سیستم در dB۰ برابر با $-135/5°$ است و لذا حاشیه فاز تقریباً $44/5°$ می‌باشد که از مقدار حداقل تعیین شده بالاتر است.

چارت نیکولز یک جبران ساز پیش فاز در شکل ۶-۴ نشان داده شده است. زاویه فاز این جبران ساز در گستره میانه فرکانسی مثبت است. برای مقادیر کوچکتر α، مقدار ستیغ فاز مثبت‌تر شده و مقدار بهره حالت ـ ماندگار برحسب dB بزرگتر می‌شود ($\omega \to 0$).

چارت نیکولز یک جبران ساز پس فاز در شکل ۶-۸ نشان داده شده است. زاویه فاز این

جبران ساز در گستره میانه فرکانسی منفی است. برای مقادیر بزرگتر β مقدار ستیغ فاز منفی‌تر شده و مقدار بهره حالت ـ ماندگار برحسب dB بزرگتر می‌شود ($\omega \to ۰$).

مثال ۶-۱۱

تابع تبدیل حلقه ـ باز زیر را در نظر بگیرید

$$G(j\omega)=\frac{۲۰}{j\omega(j\omega+۲)(j\omega+۱۰)}$$

چارت نیکولز این تابع تبدیل در شکل ۶-۳۶، نشان داده شده است. از چارت نیکولز داریم که حاشیه فاز تابع تبدیل جبران نشده $۶۰/۴^\circ$ و حاشیه بهره آن ۲۱/۶dB است. مطلوب است که حاشیه بهره سیستم جبران شده بین ۸ تا ۱۲ dB باشد و حاشیه فاز آن نیز بین ۲۵° تا ۳۰° باشد. همچنین شرایط حالت ـ ماندگار نیز تغییر محسوسی نکنند.

دقت کنید که در سیستم جبران نشده، رفتار حالت ـ ماندگار پاسخ رضایتبخش است، لیکن پاسخ گذرای آن بسیار کند است. شرایط عملکردجدید موجبات سریعتر شدن پاسخ گذرا و حفظ حالت ـ ماندگار را فراهم می‌آوردند.

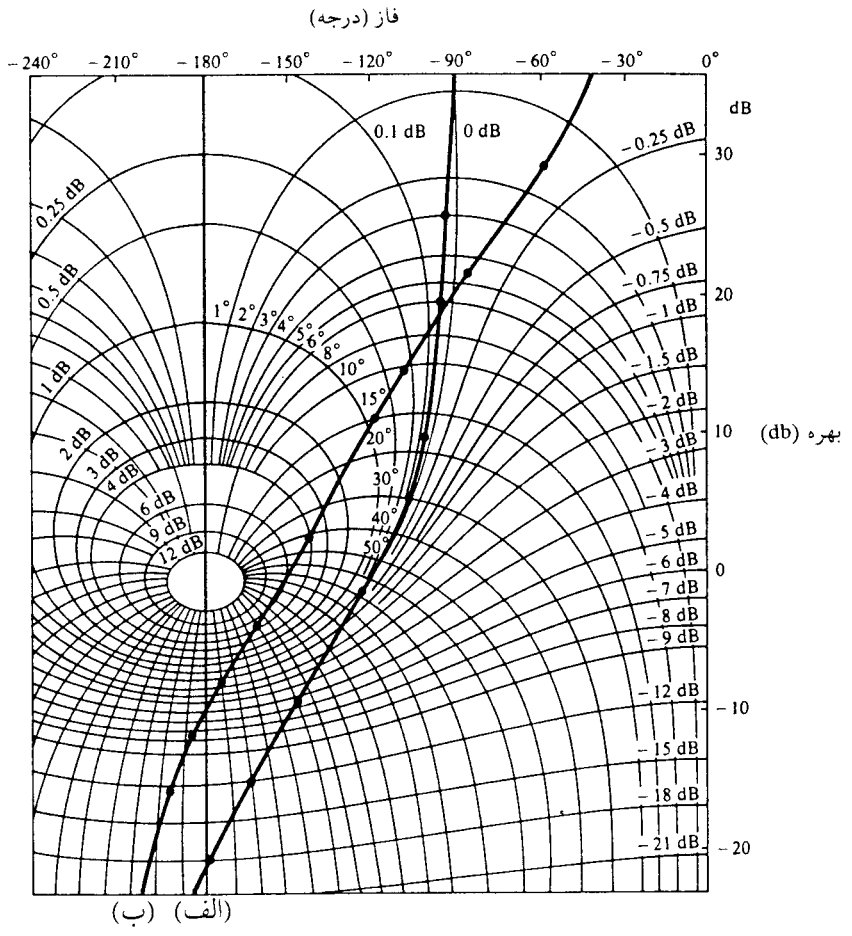
فرکانسی که در آن زاویه فاز تابع تبدیل جبران نشده، برابر با ۱۸۰°- است، ۴/۴۷۲ رادیان بر ثانیه است و در این فرکانس باید یک افزایش ۱۲dB بهره داشته باشیم، ضمن آنکه فاز تابع تبدیل تغییر چندانی در این فرکانس نکند.

برای افزایش بهره به مقدار ۱۲/۰۴، می‌توان K_c را برابر با ۴ قرار داد. برای آنکه در فرکانس‌های پایین این افزایش بهره باعث تغییر رفتار حالت ـ ماندگار نشود، باید آن را توسط رفتار جبران ساز در این ناحیه فرکانسی جبران کنیم. در واقع از تابع تبدیل جبران ساز پیش فاز داریم

$$\lim_{s \to ۰} G_c(s)=\alpha=\frac{۱}{۴}$$

و لذا $\alpha=۰/۲۵$. دقت کنید که در فرکانس‌های پایین، بهره کلی سیستم همانند قبل یک شده و در فرکانس‌های بالا بهره سیستم ۱۲/۰۴dB افزایش خواهد داشت.

اگر تغییری در زاویه فاز تابع تبدیل جبران نشده، در فرکانسی که برای آن بهره کلی ۱۲/۰۴dB- بوده رخ ندهد، این فرکانس فرکانسی خواهد شد که در آن بهره کلی برای $K_cG(s)$ (تابع تبدیل جبران نشده با تنظیم بهره) ۰dB خواهد بود. با بکارگیری این فرکانس و معادله



شکل ۶-۳۶ چارت نیکولز مثال ۶-۱۱ (الف) سیستم جبران نشده (ب) سیستم جبران شده

زاویه فاز، حاشیه فاز سیستم را تعیین خواهیم کرد. با حل معادله زیر

$$|G(j\omega)| = \frac{۲۰}{\omega(\omega^۲+۴)^{۱/۲}(\omega^۲+۱۰۰)} = ۰/۲۵ \; [= -۱۲/۰۴\text{dB}]$$

داریم $\omega = ۲/۵۴۵$ رادیان بر ثانیه، در این فرکانس زاویه فاز تابع تبدیل را پیدا می‌کنیم

$$\angle G(j\omega) = -۹۰^\circ - \tan^{-۱}\left[\frac{\omega}{۲}\right] - \tan^{-۱}\left[\frac{\omega}{۱۰}\right] = -۱۵۴^\circ$$

و لذا حاشیه فاز تابع تبدیل ۲۵/۴° است که در گستره تعیین شده ۲۵° تا ۳۵° می‌باشد. با این حاشیه بهره و حاشیه فاز اهداف طراحی برآورده شده‌اند و تنها مسئله تعیین فرکانس شکست یا صفر تابع تبدیل جبران ساز است که با انتخاب T باید به گونه‌ای تعیین گردد که تقریباً هیچ تغییر فازی در $\omega=۲/۴۵۴$ رادیان بر ثانیه رخ ندهد. با سعی و خطا می‌توان دریافت که انتخاب $\frac{۱}{\alpha T}=\frac{۴}{T}<۰/۲۴۵$، تضمین خواهد کرد که هیچ تغییر فازی از ناحیه جبران ساز در $\omega=۲/۴۵۴$ رادیان بر ثانه رخ نمی‌دهد و از اینرو می‌توان به عنوان نمونه $۱/(\alpha T)=۰/۱$ و $۱/T=۰/۰۲۵$ را انتخاب کرد. بنابراین تابع تبدیل جبران ساز پیش فاز مناسب برای برآورده ساختن شرایط عملکرد داده شده عبارتست از

$$G_c(j\omega)=۴\frac{j\omega+۰/۰۲۵}{j\omega+۰/۱}$$

نمودار چارت نیکولز تابع تبدیل حلقه ـ باز جبران شده در شکل ۶-۳۶ نشان داده شده است. فرکانسی که در آن بهره ۰dB است، تقریباً $\omega=۲/۴۵۳$ رادیان بر ثانیه است و حال آنکه این فرکانس $\omega=۰/۹۰۷$ رادیان بر ثانیه در سیستم جبران نشده بوده است. بنابراین با بکارگیری جبران ساز پیش فاز پهنای باند سیستم افزایش پیدا می‌کند و پاسخ گذرای سیستم به مقدار قابل ملاحظه‌ای بهبود یافته است. بعلاوه حاشیه‌های بهره و فاز نیز به ترتیب ۹/۹dB و ۲۷/۲° هستند که در حد قابل قبولی می‌باشند.

مسایل

۶-۱ـ مدار الکترونیکی زیر با استفاده از تقویت کننده‌های عملیاتی را در نظر بگیرید:

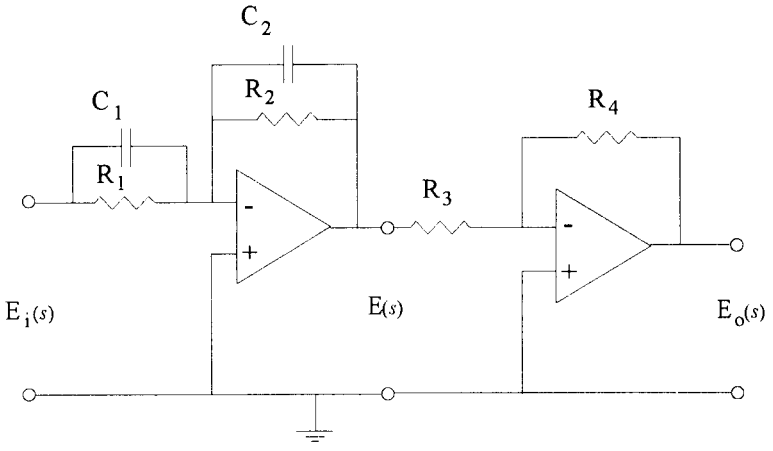
(الف) تابع تبدیل مدار را بنویسید.

(ب) نشان دهید که با انتخاب مناسب پارامترهای $R_۱$، $R_۲$ و $C_۱$، $C_۲$ این مدار می‌تواند تحقق فیزیکی یک جبران ساز پیش فاز یا پس فاز باشد.

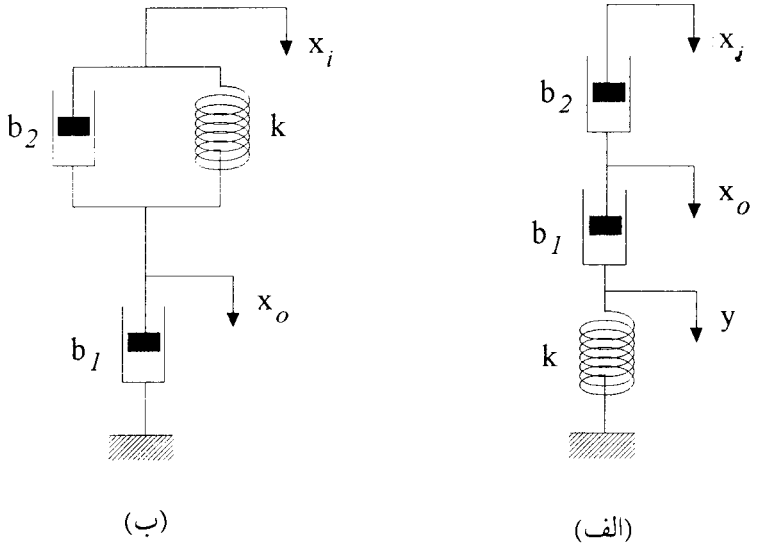
۶-۲ـ سیستم‌های مکانیکی زیر را در نظر بگیرید:

(الف) نشان دهید که سیستم مکانیکی شکل ۶-۳۸ (الف)، تحقق مکانیکی یک جبران ساز پیش فاز است.

(ب) نشان دهید که سیستم مکانیکی شکل ۶-۳۸ (ب)، تحقق مکانیکی یک جبران ساز پس فاز است.

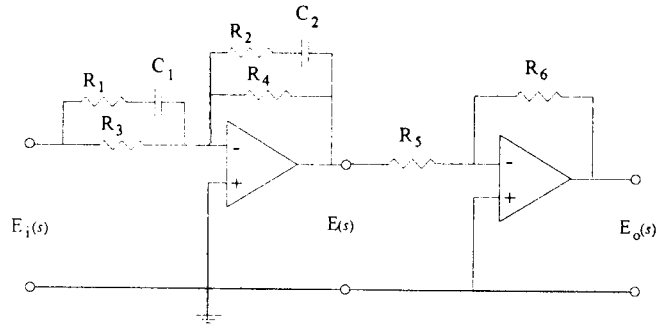


شکل ۶-۳۷



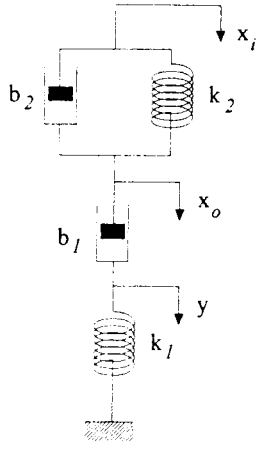
شکل ۶-۳۸

۶-۳- مدار الکترونیکی زیر با استفاده از تقویت کننده‌های عملیاتی را در نظر بگیرید: نشان دهید که این مدار تحقق فیزیکی یک جبران ساز پس ـ پیش فاز است.



شکل ۶-۳۹

۶-۴- مدار مکانیکی زیر را در نظر بگیرید:



شکل ۶-۴۰

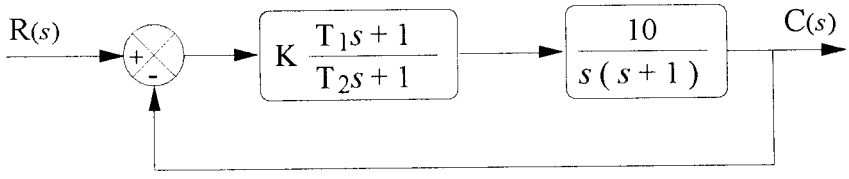
نشان دهید که این مدار تحقق مکانیکی یک جبران ساز پس ـ پیش فاز است.

۶-۵- تابع تبدیل حلقه ـ باز یک سیستم حلقه ـ بسته عبارتست از

$$G(s)=\frac{K}{s(s+1)(s+2)(s+3)}$$

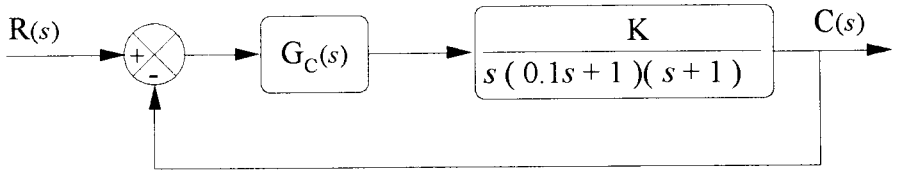
بهره K را چنان تعیین کنید که نسبت میرایی قطبهای حلقه ـ بسته سیستم ۰/۵ باشند.

۶-۶- مقادیر K ، T_1 و T_2 سیستم نشان داده شده در شکل ۶-۴۱ را چنان پیدا کنید که، نسبت میرایی و فرکانس طبیعی غیر میرای قطبهای غالب حلقه ـ بسته سیستم به ترتیب، $\xi = ۰/۵$ و $\omega_n = ۳$ (رادیان بر ثانیه) باشند.



شکل ۶-۴۱ سیستم کنترل مسئله ۶-۶

۶-۷- سیستم حلقه ـ بسته نشان داده شده در شکل ۶-۴۲ را در نظر بگیرید. یک جبران ساز پیش فاز $G_c(s)$ چنان طراحی کنید که، حاشیه بهره سیستم حداقل ۸dB، حاشیه فاز سیستم ۴۵° و ثابت خطای سرعت K_v برابر $۰/۴$ (ثانیه)$^{-1}$ باشند.



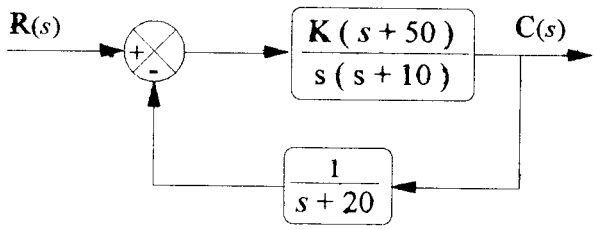
شکل ۶-۴۲ سیستم کنترل مسئله ۶-۷

۶-۸- تابع تبدیل حلقه ـ باز سیستمی عبارتست از

$$G(s) = \frac{۲۵}{s(۱ + \frac{۱}{۴}s)(۱ + \frac{۱}{۱۶}s)}$$

مطلوب است که حاشیه‌های بهره و فاز سیستم به ترتیب حداقل ۱/۵dB و ۱۵° باشند. پایداری سیستم حلقه ـ باز را بررسی کرده و با طراحی یک جبران ساز مناسب پیش فاز سیستم حلقه ـ بسته را جبران کنید.

۶-۹- برای سیستم نشان داده شده در شکل ۶-۴۳ بهره K را چنان تعیین کنید که حاشیه فاز سیستم حلقه ـ بسته حداقل ۳۰° و حاشیه بهره آن حداقل ۱۰dB باشد.



شکل ۶-۴۳ سیستم کنترل مسئله ۶-۹

۶-۱۰- تابع تبدیل حلقه ـ باز سیستمی عبارتست از

$$G(s)=\frac{۴۰}{s(s+۰/۵s)(۱+۰/۲۵s)}$$

سیستم حلقه ـ بسته با فیدبک واحد با یک جبران ساز سری

$$G_c(s)=\frac{۰/۱(۱+۰/۱s)}{۱+۰/۰۱s}$$

جبران شده است. با رسم مکان ریشهٔ سیستم جبران نشده و سیستم جبران شده، اثر جبران سازی را بررسی کنید.

۶-۱۱- تابع تبدیل حلقه ـ باز سیستمی عبارتست از

$$G(s)=\frac{K_v}{s(۱+۰/۲۵s)(۱+۰/۰۶۲۵s)}$$

با رسم نمودار بود سیستم جبران نشده، پایداری آنرا بررسی کنید. یک جبران ساز پس ـ پیش فاز چنان طراحی کنید که حاشیه بهره سیستم جبران شده حداقل ۵۰° باشد.

۶-۱۲- تابع تبدیل حلقه ـ باز سیستمی عبارتست از

$$G(s)=\frac{۴}{s(s+۰/۵)}$$

با رسم نمودار بود سیستم جبران نشده، یک جبران ساز پس ـ پیش فاز چنان طراحی کنید که نسبت میرایی قطبهای حلقه ـ بسته ۰/۵ ، فرکانس طبیعی غیر میرای آنها ۵ (رادیان بر ثانیه) و ثابت خطای سرعت استاتیکی سیستم جبران شده $۸۰\ (\text{ثانیه})^{-۱}$ باشد.

۶-۱۳- تابع تبدیل جبران نشده سیستمی عبارتست از

$$G(s)=\frac{K}{s(۰/۵s+۱)}$$

با رسم نمودار بود سیستم، یک جبران ساز پس فاز، چنان طراحی کنید که ثابت خطای سرعت استاتیکی آن حداقل $^{-۱}$(ثانیه) ۲۰ بوده و حاشیه فاز آن نیز ۴۵° باشد.

۶-۱۴- تابع تبدیل حلقه ـ باز سیستمی عبارتست از

$$G(s)=\frac{K}{s^{۲}}$$

با بکارگیری نمودار مکان ریشهٔ سیستم، جبران ساز پیش فازی چنان طراحی کنید که سیستم جبران شده مشخصه‌های زیر را برآورده سازد:

زمان استقرار حداکثر ۴ ثانیه ، فراجهش حداکثر برای پاسخ پله واحد کمتر از ۳۰٪

۶-۱۵- سیستم کنترل نشان داده شده در شکل ۶-۴۴ را در نظر بگیرید. بهره‌های K و K_h را چنان تعیین کنید که مشخصه‌های طراحی زیر برآورده گردند:

۱ـ نسبت میرایی قطبهای حلقه ـ بسته برابر با ۰/۵

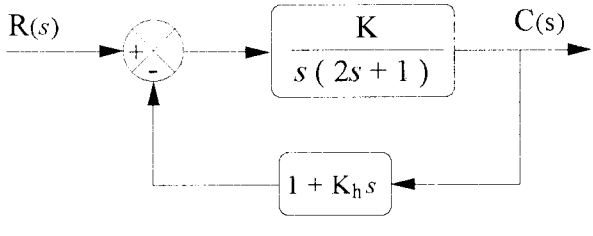
۲ـ زمان استقرار کوچکتر یا مساوی ۲ ثانیه

۳ـ ثابت خطای سرعت استاتیکی بزرگتر یا مساوی $^{-۱}$(ثانیه) ۵۰

۴ـ $۰<K_h<۱$

۶-۱۶- تابع تبدیل حلقه ـ باز سیستمی عبارتست از

$$G(s)=\frac{۴۰}{s(s+۲)(s+۸)}$$



شکل ۶-۴۴ سیستم کنترل مسئله ۶-۱۵

یک جبران ساز پیش فاز برای سیستم چنان طراحی کنید که حاشیه فاز آن °۴۵ و حاشیه بهره آن ۱۰dB باشند. این جبران ساز را با استفاده از (الف) دیاگرام بود، (ب) چارت نیکولز طراحی کنید.

۶-۱۷- تابع تبدیل حلقه ـ باز سیستمی عبارتست از

$$G(s)=\frac{K}{s(s+5)(s+10)}$$

یک جبران ساز پس فاز برای سیستم چنان طراحی کنید که حاشیه فاز آن °۴۵ و حاشیه بهره آن ۱۰dB باشند. این جبران ساز را با استفاده از (الف) مکان ریشه (ب) چارت نیکولز طراحی کنید.

- مراجع فصل ششم

[6-1] Truxal J. G., ***Control systems synthesis***, McGraw-Hill Book Company, New York, 1955.

[6-2] Evans W. R., *Control systems synthesis by the root locus method,* Trans. AIEE, Vol. 69, pp 66, 1950.

[6-3] Horowitz I. M., ***Synthesis of feedback systems,*** Academic Press, 1963.

[6-4] MacFarlane A. G. J., ***Frequency response methods in control systems,*** IEEE Press, 1979.

[6-5] Bode H. W., *Network analysis and feedback design,* New York, Van Nostrand Reinhold, 1945.

[6-6] Ziegler J. G. and Nichols N. B., *Optimum settings for automatic controllers,* ASME Trans, 64, pp 759-768, 1942.

[6-7] Astrom K. J. and B. Wittenmark, ***Adaptive Control,*** Addison-Wesley, 1995.

[6-8] Leigh J. R., ***Applied control theory,*** IEE Series in Control Engineering, No. 18, 1987.

[6-9] Marshall J. E., *Control of Time delay systems,* IEE Series in Control Engineering, No. 10., 1978.

[6-10] Porter B., *Genetic design of control systems,* J. SICE, Vol. 34, No. 5, May 1995.

کتاب شناسی

در این فصل تنها جبران سازهای سری مورد بررسی قرار گرفته‌اند، برای آشنایی با سایر روشهای جبران سازی (مانند جبران سازی پیشرو و فیدبک) می‌توان به مراجع [11] و [3] مراجعه کرد. مراجع [1-6]، [3-6] ، [4-6] و [5-6] جزء اولین کتابهایی هستند که در زمینهٔ طراحی سیستم‌های کنترل کلاسیک نوشته شده‌اند، لذا برای بررسی اولین روشهای طراحی سیستم‌های کنترل می‌توان به این مراجع مراجعه نمود.

روشهای بسیاری برای تعیین قطب و صفر جبران سازهای پس فاز، پیش فاز و پس - پیش فاز وجود دارد. یکی از سر راست‌ترین این روشها در مرجع [2] آورده شده است. روشهای مؤثر دیگری نیز برای تعیین قطبها و صفرهای جبران سازها وجود دارند، برای مثال می‌توان به روشهای ارایه شده در مراجع [1] ، [3] ، [4] و [25] اشاره کرد، که عمدتاً با روشهای ارایه شده در [2] متفاوت می‌باشند و در طراحی سیستم‌های خطی کنترل به طور مؤثری می‌توانند مورد استفاده قرار گیرند. مبحث مهم جبران سازی با حذف صفر ـ قطب در فصل نهم [3] مورد بررسی قرار گرفته است. کنترل کننده‌های PID نیز که به صورت حالت خاصی از جبران سازها در این فصل ارایه گردیدند، خود از مهم‌ترین نوع کنترل کننده‌های صنعتی می‌باشند. برای مطالعه این کنترل کننده‌ها و طراحی آنها با مکان ریشه و نمودارهای پاسخ فرکانس به مراجع [2] و [3] مراجعه شود. روشهای تنظیم پارامترهای این کنترل کننده‌ها در فصل هشتم [6-7] ، چهارم [6-8] و همچنین مقاله [6-6] مفصلاً مورد بررسی قرار گرفته‌اند. مرجع [6-8] روشهای مختلف طراحی کنترل کننده‌های کاربردی را به طور نسبتاً ساده‌ای ارایه کرده است. برای یک روش تنظیم هوشمند پارامترهای کنترل کننده PID به مرجع [6-10] مراجعه کنید.

طراحی جبران سازها با چارت نیکولز نیز به طور مفصل در مراجع [1] و [3]، آمده است. مرجع [17] ، روشهای طراحی را به طور خلاصه فشرده با ارایه فلوچارت مناسب برای سیستم‌های زمان ـ پیوسته و زمان ـ گسسته آورده است و برای یک مراجعه سریع، و سطحی مناسب است. در مرجع [18] تحقق فیزیکی بسیاری از کنترل کننده‌ها و جبران سازها، به صورت مدارات الکترونیکی داده شده است و لذا برای یک مطالعه کاربردی و سخت‌افزاری کنترل کننده‌ها و جبران سازها مناسب می‌باشد.

یکی از مراجعی که کاربرد نمودارهای نایکوئیست و معکوس آنها را در طراحی بطور

مختصر در نظر گرفته است [5] می‌باشد. برای بررسیهای ساده در طراحی به کمک نمودارهای نایکوئیست از این مرجع استفاده شود.

بسیاری از سیستم‌های صنعتی دارای تأخیر می‌باشند. از اینرو طراحی سیستم‌های کنترل برای سیستم‌های تأخیردار می‌تواند بسیار مهم باشد. مرجع [6-9] این مطلب را به طور مشخص مورد بحث قرار داده است.