



## تحلیل و طراحی سیستم‌های کنترل در فضای حالت

### اهداف فصل:

- ۱- آشنایی با مفاهیم فضای حالت
- ۲- حل معادلات حالت و خروجی
- ۳- کاربرد تبدیل لاپلاس در فضای حالت
- ۴- آشنایی با معادلهٔ مشخصه سیستم و نقش آن در تحلیل سیستم
- ۵- معرفی ایده‌های کنترل‌پذیری و رؤیت‌پذیری
- ۶- حذف صفر-قطب در تابع تبدیل و تحلیل آن در فضای حالت
- ۷- طراحی سیستم‌های کنترل در فضای حالت: جایابی قطب
- ۸- آشنایی با رؤیتگرها و تخمین متغیرهای حالت سیستم

## ۱-۷ مقدمه

در بخش ۲-۵ با توصیف فضای حالت سیستم‌های کنترل آشنا شدیم. معادلات حالت و خروجی یک سیستم با چند ورودی و چند خروجی در حالت کلی، عبارتند از

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

که همان معادله (۲-۵-۱۳) می‌باشد. در این معادلات  $\mathbf{x}(t)$  بردار  $n$ -بُعدی حالت،  $\mathbf{u}(t)$  بردار  $m$ -بُعدی ورودی،  $\mathbf{y}(t)$  بردار  $\ell$ -بُعدی خروجی،  $\mathbf{A}$  ماتریس  $n \times n$  حالت،  $\mathbf{B}$  ماتریس  $n \times m$  ورودی،  $\mathbf{C}$  ماتریس  $\ell \times n$  خروجی و  $\mathbf{D}$  ماتریس  $\ell \times m$  انتقال سیستم هستند. این نحوه نمایش، برای توصیف سیستم‌های پیچیده صنعتی با چند ورودی و چند خروجی بسیار مناسب است و همانطور که در این فصل خواهیم دید، بسیاری از محاسبات خسته کننده در تحلیل و طراحی این سیستم‌ها را می‌توان به سادگی در فضای حالت توسط یک کامپیوتر انجام داد.

تئوری کنترل کلاسیک یا سنتی<sup>۱</sup>، که قسمت اعظم این کتاب در فصلهای ۲ تا ۶ به آن اختصاص دارد، براساس رابطه ورودی - خروجی یا تابع تبدیل در حوزه  $s$  بنا نهاده شده است و بسیاری از این تئوری‌ها برای سیستم‌های چند ورودی و چند خروجی و یا سیستم‌های مرتبه بالا صورت بسیار پیچیده‌ای به خود می‌گیرند. حال آنکه در بخش ۲-۵-۱ مشاهده شد که تابع تبدیل هر سیستمی از هر مرتبه‌ای را می‌توان به یک دسته از  $n$  معادلات دیفرانسیل مرتبه اول تبدیل کرد و به صورت معادلات فضای حالت مرتبه اول بالا نمایش داد. این نمایش بردار - ماتریسی، توصیف ریاضی سیستم‌های مرتبه بالا را بسیار ساده می‌کند و افزایش تعداد متغیرهای حالت (مرتبه سیستم یا تعداد قطبهای تابع تبدیل برای یک نمایش می‌نیمال)، تعداد ورودیها یا تعداد خروجیها هیچکدام پیچیدگی معادلات را افزایش نمی‌دهد. در واقع تحلیل سیستم‌های بسیار پیچیده چند ورودی و چند خروجی را می‌توان با روشهایی انجام داد که تنها اندکی از روشهای تحلیل سیستم مرتبه یک اسکالر پیچیده‌تر می‌باشند. (آیا

این چنین ادعایی در رابطه با تحلیلهای ارایه شده در فصلهای قبل براساس روابط ورودی و خروجی امکان پذیر است؟)

در این فصل علاوه بر تحلیل، به طراحی در فضای حالت نیز خواهیم پرداخت. در فصل ششم، طراحی کلاسیک یا سنتی سیستم‌های کنترل براساس روشهای ترسیمی مکان ریشه، نمودارهای بود، نایکوئیست و چارت نیکولز را بررسی کردیم. مشخصه‌های این طراحیها عبارتند از:

- تنها پارامترهای مهم، ورودی، خروجی و سیگنال خطا هستند.
- طراحیها براساس تابع تبدیل حوزه s انجام می‌گیرد.
- تنها به سیستم‌های خطی، تغییرناپذیر با زمان، یک ورودی و یک خروجی قابل اعمالند.
- روشهای کلاسیک طراحی را نمی‌توان در طراحی بهینه و یا تطبیقی سیستم‌های کنترل که عمدتاً تغییرپذیر با زمان و یا غیر خطی هستند بکار بست.
- روشهای طراحی براساس سعی و خطا هستند و سیستم‌های کنترل طراحی شده توسط افراد مختلف یا یک فرد در دفعات متعدد با هم متفاوت هستند. لذا این سیستم‌ها یک سیستم بهینه را در حالت کلی بدست نخواهند داد.
- در طراحیهای کلاسیک سیستم‌های کنترل، شرایط اولیه سیستم نادیده گرفته می‌شود.
- از طرف دیگر، طراحی سیستم‌های کنترل در فضای حالت دست‌یابی به موقعیت مطلوب قطبها (یا معادله مشخصه) را امکان‌پذیر می‌سازد و بسادگی می‌توان سیستم‌هایی را طراحی کرد که نسبت به یک شاخص عملکرد تعیین شده بهینه باشند. در این طراحیها، عامل سعی و خطا به حداقل می‌رسد و طراحی سیستم‌های چند متغیره نیز به همین ترتیب انجام می‌پذیرد.
- با توجه به اینکه روشهای فضای حالت حوزه زمانی هستند، انجام محاسبات لازم را می‌توان بسادگی توسط یک کامپیوتر دیجیتال انجام داد. در این فصل جهت آشنایی با این طراحیها، تنها به ساده‌ترین نوع طراحی که جایای قطب با فیدبک حالت و طراحی رویتگر است می‌پردازیم و اشاره بسیار مختصری نیز به کنترل بهینه خواهیم نمود. در تحلیل و طراحیهای این فصل تنها سیستم‌های خطی و تغییرناپذیر با زمان در نظر گرفته خواهند شد.

## ۲-۷ حل معادلات حالت و خروجی

معادله حالت و خروجی زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (1-2-7)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \quad (2-2-7)$$

اگر معادله حالت (۱-۲-۷) را به ازاء یک ورودی معین و شرایط اولیه داده شده حل کنیم، پاسخ متغیرهای حالت سیستم را به ورودی اعمال شده به سیستم بدست می آوریم. با جایگزینی بردار حالت محاسبه شده  $\mathbf{x}(t)$  از معادله (۱-۲-۷) در معادله خروجی (۲-۲-۷) پاسخ سیستم را به ازاء همان ورودی و شرایط اولیه بدست آورده ایم. دقت کنید که اگر برای مثال، معادلات حالت و خروجی (۱-۲-۷) و (۲-۲-۷) معادلات توصیف کننده مدار الکتریکی در نظر گرفته شده در مثال ۳-۵-۲ باشند، برای ولتاژ اعمال شده به مدار، رفتار متغیرهای حالت که در این مثال جریان حلقه اول و ولتاژ خازن هستند را می توان با حل معادله (۱-۲-۷) تعیین کرد. رفتار خروجی مدار که همان ولتاژ خازن است نیز در حالت کلی از معادله (۲-۲-۷) بدست آورده می شود.

معادله حالت (۱-۲-۷) از دو قسمت همگن<sup>۱</sup>،  $\mathbf{A}\mathbf{x}(t)$ ، و تابع وادارنده<sup>۲</sup>،  $\mathbf{B}\mathbf{u}(t)$ ، تشکیل می شود. قبل از آنکه به حل کامل معادله حالت بپردازیم، معادله اسکالر دیفرانسیلی زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{x}(t) = ax(t) \quad (3-2-7)$$

که در آن  $a$  یک اسکالر است و شرایط اولیه معادله دیفرانسیل  $x(t_0)$  است. پاسخ معادله (۳-۲-۷) عبارتست از

$$x(t) = e^{a(t-t_0)} x(t_0) \quad (4-2-7)$$

جایگزینی معادله (۴-۲-۷) در معادله (۳-۲-۷) بسادگی نشان خواهد داد که معادله (۴-۲-۷) پاسخ معادله (۳-۲-۷) است. اکنون اگر معادله همگن حالت را به صورت زیر در نظر بگیریم

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \quad (5-2-7)$$

از مقایسه معادله‌های (۳-۲-۷) و (۵-۲-۷)، پاسخ قسمت همگن معادله حالت ( $u(t) \equiv 0$ ) عبارتست از

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x(t_0) \quad (6-2-7)$$

که در آن بردار اولیه حالت است. مسئله اصلی در محاسبه  $x(t)$  بدست آوردن تابع نمائی ماتریس  $A$ ،  $\exp[At]$ ، است. همانطور که تابع نمائی  $e^{at}$  در معادله (۴-۲-۷) را می‌توان برای  $t_0 = 0$  به صورت سری بی‌نهایت زیر محاسبه کرد

$$e^{at} = 1 + \frac{at}{1!} + \frac{(at)^2}{2!} + \frac{(at)^3}{3!} + \dots + \frac{(at)^k}{k!} + \dots \quad (7-2-7)$$

تابع نمایی ماتریس  $A$  در معادله (۶-۲-۷) نیز برای  $t_0 = 0$  مانند سری بی‌نهایت (۷-۲-۷) محاسبه می‌گردد. داریم

$$e^{At} = \exp[At] = I + \frac{At}{1!} + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \dots + \frac{(At)^k}{k!} + \dots \quad (8-2-7)$$

بنابراین  $\exp[At]$  نیز یک ماتریس مربع با اندازه  $A$  است. به ماتریس  $\exp[At]$  ماتریس انتقال حالت<sup>۱</sup> یا ماتریس اساسی<sup>۲</sup> گفته می‌شود. با توجه به اهمیت ماتریس انتقال حالت، روشهای زیادی نیز برای محاسبه این ماتریس وجود دارد که برای دستیابی به آنها، در صورت نیاز به مرجع اول همین فصل مراجعه شود.

روش تبدیل لاپلاس در حل معادله همگن حالت ( $U(s) \equiv 0$ ). با گرفتن تبدیل لاپلاس از معادله (۵-۲-۷) برای  $t_0 = 0$ ، بدست می‌آوریم

$$sX(s) - x(0) = AX(s) \quad (9-2-7)$$

و یا

$$[sI - A]X(s) = x(0) \quad (10-2-7)$$

با ضرب کردن طرفین معادله (۱۰-۲-۷) در  $[sI - A]^{-1}$ ، داریم

$$X(s) = [sI - A]^{-1} x(0) \quad (11-2-7)$$

با گرفتن عکس تبدیل لاپلاس از معادله (۱۱-۲-۷)، برای کلیه  $t \geq 0$  بدست می‌آوریم

$$\mathbf{x}(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \right\} \mathbf{x}(0) \quad (12-2-7)$$

مقایسه معادله‌های (۱۲-۲-۷) و (۶-۲-۷)، نتیجه می‌دهد

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \right\} \quad (13-2-7)$$

معادله (۱۳-۲-۷)، روش تبدیل لاپلاس برای محاسبه ماتریس انتقال حالت است.

اگر ماتریس انتقال حالت را با  $\Phi(t)$  نمایش دهیم، معادله‌های (۱۲-۲-۷) و (۱۳-۲-۷)،

عبارتند از

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{x}(0) \quad (14-2-7)$$

معادله (۱۴-۲-۷) را پاسخ ورودی - صفر<sup>۱</sup> معادله حالت (با  $t_0 = 0$ ) می‌نامند.

### مثال ۱-۷

پاسخ سیستم زیر

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

را برای بردار اولیه حالت  $\mathbf{x}(0) = [1 \ -1]^T$  بدست آورید.

نخست ماتریس انتقال حالت را تعیین می‌کنیم. برای تعیین این ماتریس داریم

$$s\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 3 & s+4 \end{bmatrix}$$

معکوس ماتریس  $[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]$  عبارتست از

$$[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} = \frac{1}{(s+3)(s+1)} \begin{bmatrix} s+4 & 1 \\ -3 & s \end{bmatrix}$$

ماتریس انتقال حالت را با گرفتن عکس تبدیل لاپلاس از معادله بالا و به کارگیری یک جدول

تبدیل لاپلاس، بدست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3e^{-t} - e^{-3t} & e^{-t} - e^{-3t} \\ 3e^{-3t} - 3e^{-t} & 3e^{-3t} - e^{-t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

معادله (۷-۲-۱۴)، پاسخ سیستم را به شرایط اولیه داده شده می دهد. لذا

$$\begin{aligned} x(t) &= \Phi(t)x(0) \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ 2e^{-2t} - 2e^{-t} & 2e^{-2t} - e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2e^{-t} \\ -2e^{-t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

حل کامل معادلات حالت و خروجی. معادله اسکالر دیفرانسیلی زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bu(t) \quad (۷-۲-۱۵)$$

معادله (۷-۲-۱۵) را به صورت زیر بازنویسی کنید

$$\dot{x}(t) - ax(t) = bu(t) \quad (۷-۲-۱۶)$$

با ضرب طرفین معادله (۷-۲-۱۶) در  $e^{-at}$ ، بدست می آوریم

$$e^{-at} [\dot{x}(t) - ax(t)] = \frac{d}{dt} [e^{-at}x(t)] = e^{-at}bu(t)$$

انتگرال گیری از این معادله بین ۰ و  $t$  می دهد

$$x(t) = e^{at}x(0) + e^{at} \int_0^t e^{-a\tau}bu(\tau)d\tau \quad (۷-۲-۱۷)$$

اولین عبارت در معادله (۷-۲-۱۷) ناشی از شرایط اولیه  $x(0)$  است، و دومین عبارت در پاسخ به ورودی  $u(t)$  بدست آمده است.

معادله حالت زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (۷-۲-۱۸)$$

که در آن  $\mathbf{x}(t)$  بردار  $n$ -بُعدی،  $\mathbf{u}(t)$  بردار  $m$ -بُعدی،  $\mathbf{A}$  ماتریس ثابت  $n \times n$  و  $\mathbf{B}$  ماتریس ثابت  $n \times m$  است. با مقایسه معادله اسکالر (۷-۲-۱۵)، و معادله بردار ماتریسی (۷-۲-۱۸)، و با استفاده از روندی مانند مراحل بالا، پس از بازنویسی معادله (۷-۲-۱۸)، و پیش ضرب کردن طرفین معادله بازنویسی شده در  $e^{-\mathbf{A}t}$ ، داریم

$$e^{-\mathbf{A}t} [\dot{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{A}\mathbf{x}(t)] = \frac{d}{dt} [e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{x}(t)] = e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (۷-۲-۱۹)$$

انتگرال گیری از طرفین معادله (۷-۲-۱۹)، بین  $0$  و  $t$ ، بدست می دهد

$$e^{-At} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{-A\tau} \mathbf{B}u(\tau) d\tau \quad \text{و یا}$$

$$\mathbf{x}(t) = e^{At} \mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} \mathbf{B}u(\tau) d\tau \quad (20-2-7)$$

معادله (۷-۲-۲۰)، پاسخ کامل معادله حالت سیستم به ورودی  $\mathbf{u}(t)$  با شرایط اولیه  $\mathbf{x}(0)$  است. اگر  $\mathbf{x}(0) = 0$  باشد، آنگاه با جایگزینی بردار اولیه حالت صفر در معادله (۷-۲-۲۰)، پاسخ حالت - صفر<sup>۱</sup> سیستم بدست خواهد آمد.

با جایگزینی  $\mathbf{x}(t)$  در معادله خروجی  $\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$ ، پاسخ سیستم (خروجی) به ورودی معین با شرایط اولیه داده شده به صورت زیر بدست می آید

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}e^{At} \mathbf{x}(0) + \int_0^t \mathbf{C}e^{A(t-\tau)} \mathbf{B}u(\tau) d\tau \quad (21-2-7)$$

روش تبدیل لاپلاس در حل معادله کامل حالت و خروجی. با گرفتن تبدیل لاپلاس از معادله (۷-۲-۱۸)، داریم

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s) \quad (22-2-7)$$

بازنویسی معادله (۷-۲-۲۲)، می دهد

$$\mathbf{X}(s) = [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{x}(0) + [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{B}\mathbf{U}(s) \quad (23-2-7)$$

عکس تبدیل لاپلاس معادله (۷-۲-۲۳)، عبارتست از

$$\mathbf{x}(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \right\} \mathbf{x}(0) + \mathcal{L}^{-1} \left\{ [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{B}\mathbf{U}(s) \right\} \quad (24-2-7)$$

با استفاده از انتگرال کانولوشنی و نمایش  $\Phi(t)$ ، معادله (۷-۲-۲۴) می دهد

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t) \mathbf{x}(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (25-2-7)$$

در معادله های (۷-۲-۲۰)، (۷-۲-۲۱) و (۷-۲-۲۵) فرض کرده ایم که زمان اولیه  $t_0 = 0$  باشد.



برای  $t \neq 0$  نیز می‌توان به طور مشابهی از مراحل بالا برای تعیین پاسخ سیستم استفاده کرد. در این صورت

$$\mathbf{x}(t) = e^{A(t-t_0)} \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} \mathbf{B}u(\tau) d\tau \quad (26-2-7)$$

و

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}e^{A(t-t_0)} \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{C}e^{A(t-\tau)} \mathbf{B}u(\tau) d\tau \quad (27-2-7)$$

مثال ۲-۷

سیستم زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

خروجی سیستم را برای ورودی پله واحد و شرایط اولیه  $\mathbf{x}(0) = [1 \ -1]^T$  بدست آورید.

ماتریس انتقال حالت سیستم را از مثال ۱-۷ بدست آوریم. داریم

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{(s+3)(s+1)} \begin{bmatrix} s+4 & 1 \\ -3 & s \end{bmatrix}, \quad \Phi(t) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3e^{-t} - e^{-3t} & e^{-t} - e^{-3t} \\ 3e^{-3t} - 3e^{-t} & 3e^{-3t} - e^{-t} \end{bmatrix}$$

از معادله (۲۰-۲-۷)، بدست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \begin{bmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix} + \int_0^t \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3e^{-(t-\tau)} - e^{-3(t-\tau)} & e^{-(t-\tau)} - e^{-3(t-\tau)} \\ 3e^{-3(t-\tau)} - 3e^{-(t-\tau)} & 3e^{-3(t-\tau)} - e^{-(t-\tau)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (1) d\tau \\ &= \begin{bmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \int_0^t \begin{bmatrix} e^{\tau-t} - e^{3\tau-3t} \\ 3e^{3\tau-3t} - e^{\tau-t} \end{bmatrix} d\tau \\ &= \begin{bmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix} + \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 - 3e^{-t} + e^{-3t} \\ 3e^{-t} - 3e^{-3t} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{3} + \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{-3t} \\ -\frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

و لذا از معادله خروجی داریم

$$y(t) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{-3t}$$

هم چنین از روش تبدیل لاپلاس، داریم

$$C(sI-A)^{-1}BU(s) = \frac{1}{(s+3)(s+1)} \begin{bmatrix} 1 \\ s \end{bmatrix} \frac{1}{s}$$

و

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{1}{(s+3)(s+1)} \begin{bmatrix} s+4 & 1 \\ -3 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{1}{(s+3)(s+1)} \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{(s+3)(s+1)} \left\{ \begin{bmatrix} s+3 \\ -(s+3) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \end{aligned}$$

و برای خروجی سیستم بدست می آوریم

$$Y(s) = \frac{s^2 + 3s + 1}{s(s+3)(s+1)}$$

که عکس تبدیل لاپلاس می دهد

$$y(t) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{-3t}$$

### ۳-۷ معادله مشخصه

در بخش ۲-۵-۳، رابطه بین تابع تبدیل و معادله فضای حالت را بیان کردیم. در آن بخش

نشان داده شد که نمایش فضای حالت سیستمی داده شده به صورت زیر

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (1-3-7)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (2-3-7)$$

با نمایش تابع تبدیل آن

$$Y(s) = G(s)U(s) \quad (3-3-7)$$

بعد از گرفتن تبدیل لاپلاس از معادله های (۱-۳-۷) و (۲-۳-۷)، و با یکسری عملیات

جبری، بدین صورت با هم مرتبط می باشند:

$$G(s) = C(sI-A)^{-1}B + D \quad (4-3-7)$$

با استفاده از تعریف معکوس ماتریس

$$(sI-A)^{-1} = \frac{adj(sI-A)}{|sI-A|} \quad (5-3-7)$$

و جایگزینی از معادله (۵-۳-۷) در معادله (۴-۳-۷)، بدست می آوریم

$$G(s) = \frac{C\{adj(sI-A)\}B + |sI-A|D}{|sI-A|} \quad (6-3-7)$$

مخرج معادله (۶-۳-۷) عبارتست از

$$|sI-A| = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0 \quad (7-3-7)$$

این معادله را معادله مشخصه<sup>۱</sup> ماتریس  $A$  می نامند. صفرهای این چند جمله ای (ریشه های معادله مشخصه)، مقادیر ویژه<sup>۲</sup> ماتریس  $A$  بوده و همانطور که از معادله (۶-۳-۷) مشخص است، این مقادیر ویژه همان قطبهای تابع تبدیل  $G(s)$  هستند.

پایداری سیستم. با توجه به اینکه پایداری سیستم ها، از موقعیت قطبهای تابع تبدیل آنها تعیین می گردد و مقادیر ویژه ماتریس حالت سیستم  $A$  همان قطبهای تابع تبدیل  $G(s)$  هستند، لذا برای بررسی پایداری سیستم در فضای حالت می توان مقادیر ویژه  $A$  را تعیین کرد. مقادیر ویژه  $A$  حقیقی یا مختلط مزدوج می باشند. دقت کنید که ضرایب معادله مشخصه (۷-۳-۷)، حقیقی هستند ( $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ ) و از اینرو ریشه های آن حقیقی و یا به صورت مختلط مزدوج می باشند. نتایج پایداری را می توان به صورت زیر خلاصه کرد:

اگر مقادیر ویژه حقیقی  $A$  همگی منفی باشند، سیستم پایدار است.

اگر مقادیر ویژه مختلط مزدوج  $A$  همگی قسمت‌های حقیقی منفی داشته باشند، سیستم پایدار است.

اگر مقادیر ویژه  $A$  موهومی محض باشند، سیستم پایدار بحرانی است (پاسخ نوسانات سینوسی غیرمیرا دارد). اگر مقادیر ویژه موهومی محض  $A$  تکراری باشند (چند قطب موهومی محض در یک نقطه بروی محور موهومی داشته باشد)، سیستم ناپایدار است.

اگر حتی یکی از مقادیر ویژه در سمت راست محور موهومی قرار گرفته باشد، سیستم ناپایدار است.

## مثال ۳-۷

ماتریس حالت سیستمی عبارتست از

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}$$

معادله مشخصه سیستم عبارتست از

$$\begin{aligned} |\lambda I - A| &= \left| \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \right| \\ &= \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 6 & 11 & \lambda + 6 \end{vmatrix} \\ &= \lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6 \\ &= (\lambda + 1)(\lambda + 2)(\lambda + 3) = 0 \end{aligned}$$

مقادیر ویژه ماتریس A، قطبهای سیستم، عبارتند از

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -2, \quad \lambda_3 = -3$$

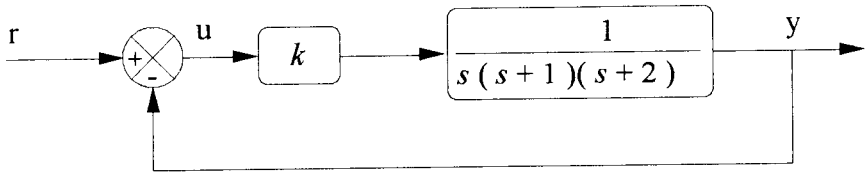
و لذا سیستم پایدار است.

## مثال ۴-۷

سیستم نشان داده شده در شکل ۱-۷ را در نظر بگیرد. مطلوب است که پایداری سیستم را با تعیین مقادیر ویژه ماتریس حالت سیستم، برای تغییرات بهره  $k$  تعیین کنیم. برای نوشتن معادلات حالت و خروجی سیستم، می توان نخست معادلات فضای حالت تابع تبدیل حلقه - باز را نوشت و سپس با اعمال فیدبک در معادلات حلقه - باز فضای حالت، معادلات حلقه - بسته فضای حالت سیستم از  $r$  تا  $y$  را بدست آورد. هم چنین می توان با انتخاب متغیرهای حالت مناسب، مستقیماً معادلات فضای حالت حلقه - بسته را نوشت.

تابع تبدیل حلقه - باز سیستم کنترل شکل ۱-۷ عبارتست از

$$G(s) = \frac{k}{s(s+1)(s+2)}$$



شکل ۱-۷ یک سیستم کنترل

معادلات فضای حالت حلقه - باز عبارتند از (بخش ۲-۵-۱، معادلات ۲-۵-۱۲ و ۲-۵-۱۳ را ببینید).

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [k \ 0 \ 0] \mathbf{x}(t)$$

برای اعمال فیدبک، داریم  $u = r - Cx$  و لذا

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} (r(t) - [k \ 0 \ 0] \mathbf{x}(t)) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -k & -2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(t) \\ y(t) &= [k \ 0 \ 0] \mathbf{x}(t) \end{aligned}$$

بدیهی است که ماتریس‌های ورودی B و خروجی C در پایداری سیستم نقشی ایفاء نمی‌کنند. قطبهای سیستم مقادیر ویژه ماتریس حالت سیستم حلقه - بسته A هستند. از اینرو، معادله مشخصه سیستم را تشکیل می‌دهیم

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ k & 2 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda + k$$

ریشه‌های این معادله باید همگی در سمت چپ محور موهومی قرار داشته باشند. برای بررسی موقعیت ریشه‌های معادله مشخصه، از آزمون پایداری جوری استفاده می‌کنیم:

$$\begin{array}{c|cc} \lambda^3 & 1 & 2 \\ \lambda^2 & 3 & k \\ \lambda^1 & 6-k & 3 \\ \lambda^0 & k & \end{array}$$

و لذا برای پایداری داریم  $0 < k < 6$ .

روش دیگر نوشتن معادلات فضای حالت آن است که تابع تبدیل حلقه - باز را به صورت نشان داده شده در شکل ۷-۲ در آوریم. با انتخاب متغیرهای حالت نشان داده شده در شکل ۷-۲، معادلات حالت و خروجی سیستم حلقه - بسته عبارتند از

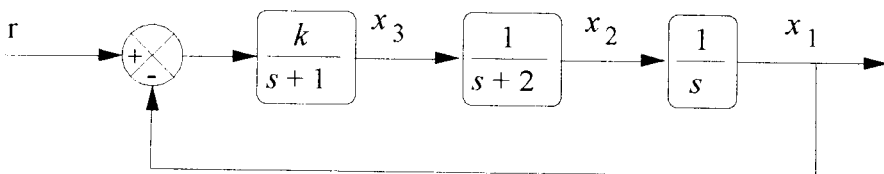
$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -k & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{bmatrix} r(t)$$

$$y(t) = [1 \ 0 \ 0] \mathbf{x}(t)$$

این نمایش فضای حالت دیگری از همان سیستم است. معادله مشخصه این نمایش فضای حالت عبارتست از

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda + 2 & -1 \\ k & 0 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda + k$$

که همانند معادله مشخصه نمایش قبلی فضای حالت است. این نتیجه در حالت کلی نیز صادق است و به صورت زیر بیان می‌گردد:



شکل ۷-۲ سیستم کنترل شکل ۷-۱

«معادله مشخصه یک سیستم برای نمایشهای مختلف فضای حالت آن یکسان است.»  
 مطلب فوق کاملاً بدیهی است، زیرا کلیه نمایشهای مختلف فضای حالت یک سیستم، یک تابع تبدیل منحصر بفرد را خواهند داد و چند جمله‌ای مخرج تابع تبدیل که همان معادله مشخصه سیستم است، نیز منحصر بفرد می‌باشد. تنها نکته‌ای که باید به آن اشاره شود این است که معادلات فضای حالت در نظر گرفته شده تاکنون می‌نیمال بوده‌اند (به بخش ۲-۵ برای تعریف مدل فضای حالت می‌نیمال مراجعه کنید). در صورتیکه نمایش فضای حالتی از یک سیستم می‌نیمال نباشد، درجه چند جمله‌ای مشخصه آن بزرگتر از درجه چند جمله‌ای معادله مشخصه نمایش فضای حالت می‌نیمال خواهد بود.

#### ۴-۷ کنترل پذیری و رؤیت پذیری

مفاهیم و ایده‌های موجود در کنترل مدرن و تحلیل و طراحی فضای حالت بر دو دسته‌اند: دسته اول مفاهیمی مانند پایداری و مشخصه‌های پاسخ حالت گذرا و ... که در کنترل کلاسیک نیز مطرح بوده‌اند و در اینجا تنها نحوه برخورد با آنها فرق کرده است، دسته دوم مفاهیمی هستند که مختص تحلیل و طراحی در فضای حالت می‌باشند. کنترل پذیری و رؤیت پذیری از مفاهیم دسته دوم می‌باشند. این ایده‌ها اول بار توسط کالمن<sup>۱</sup> مطرح گردیده‌اند.

#### ۱-۴-۷ مفاهیم کنترل پذیری و رؤیت پذیری

معادلات حالت و خروجی یک سیستم در حالت کلی عبارتند از:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (1-4-7)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (2-4-7)$$

دیاگرام بلوکی این نمایش خطی تغییرناپذیر با زمان، در شکل ۲-۲۸ فصل دوم نشان داده شده است. در این توصیف سیستم، ورودی  $u(t)$  و خروجی  $y(t)$  توسط یک رابط، حالت سیستم  $x(t)$ ، با هم مرتبط شده‌اند.

نمایش شکل ۲-۲۸، معادلات (۱-۴-۷) و (۲-۴-۷)، یک نمایش حلقه - باز از سیستم است. برای بستن حلقه سیستم می‌توان از پس خوراندن اطلاعات لازم در رابطه با پاسخ

سیستم توسط بردار حالت  $x(t)$  استفاده کرد. ورودی کنترل را به صورت زیر تعریف کنید:

$$u(t) = -Kx(t) \quad (۳-۴-۷)$$

که در آن  $K$  یک ماتریس  $m \times n$  فیدبک با عناصر ثابت است. دقت کنید که بردار حالت  $n$ -بُعدی، بردار ورودی  $m$ -بُعدی و بردار خروجی  $l$ -بُعدی در نظر گرفته شده‌اند. از اینرو ماتریس فیدبک حالت  $K$ ،  $m \times n$  می‌باشد و برای سیستم‌های یک ورودی،  $K$  یک بردار  $1 \times n$  خواهد بود.

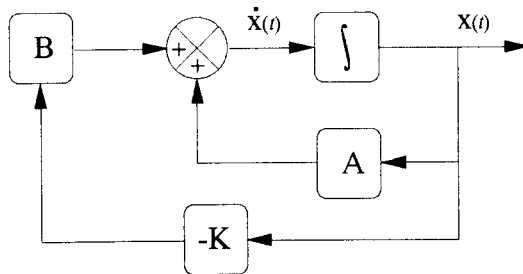
با جایگزینی معادله (۳-۴-۷) در (۱-۴-۷)، معادله حلقه - بسته حالت عبارتست از

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t) \quad (۴-۴-۷)$$

دیاگرام بلوکی سیستم حلقه - بسته، در شکل ۳-۷ نشان داده شده است. معادله (۴-۴-۷)، یک معادله همگن حالت است و لذا همانند معادله (۶-۲-۷)، پاسخ آن بدین صورت داده می‌شود

$$x(t) = \exp[(A - BK)(t - t_0)] x(t_0) \quad (۵-۴-۷)$$

معادله (۵-۴-۷) نشان می‌دهد که برای ماتریس‌های داده شده  $A$  و  $B$  و بردار حالت اولیه  $x(t_0)$  می‌توان در حالت کلی با تغییر ماتریس فیدبک حالت  $K$  بر رفتار  $x(t)$  تأثیر گذاشت. اما تا چه اندازه تغییر دادن  $K$  بر روی متغیرهای حالت سیستم  $x_i(t)$  ( $i=1, \dots, n$ ) تأثیر خواهد گذاشت و یا اینکه آیا می‌توان  $K$  را به گونه‌ای انتخاب کرد که بردار حالت  $x(t_1)$  در زمانی مانند  $t_1$  مقدار دلخواه را داشته باشد و یا اینکه بردار حالت  $x(t)$  به ازاء  $t \rightarrow \infty$  به یک مقدار حالت - ماندگار برسد؟ تمامی این پرسشها را می‌توان در این سؤال خلاصه کرد که آیا سیستم داده شده کنترل پذیر حالت است؟



شکل ۳-۷ سیستم حلقه - بسته با فیدبک حالت



قبل از آنکه به ارایه تعریف کنترل پذیری سیستم بپردازیم، سیستم اسکالر زیر را در نظر بگیرد

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bu(t) \quad (6-4-7)$$

معادله (6-4-7)، همان معادله (1-4-7)، برای حالت اسکالر است. با تعریف

$$u(t) = -kx(t) \quad (5-4-7)$$

و جایگزینی (5-4-7) در (6-4-7)، داریم

$$\dot{x}(t) = (a - bk)x(t) \quad (6-4-7)$$

و یا

$$x(t) = \exp[(a - bk)(t - t_0)] x(t_0) \quad (7-4-7)$$

معادله‌های (6-4-7) و (7-4-7)، به وضوح نشان می‌دهند که تغییر پارامتر  $k$  بر روی رفتار متغیر حالت  $x(t)$  تأثیر خواهد گذاشت، اگر و فقط اگر اسکالر  $b$  مخالف صفر باشد. اگر  $b$  صفر باشد آنگاه  $x(t)$  به صورت معینی که به پارامترهای ثابت  $a$  و  $x(t_0)$  بستگی خواهد داشت، رفتار می‌کند و پارامتر  $k$  هیچ تأثیری در رفتار سیستم نخواهد کرد. برای  $b$  مخالف صفر، با انتخاب  $k$  به صورت  $(a - bk) < 0$  پاسخ سیستم پایدار و برای  $(a - bk) > 0$  ناپایدار خواهد بود. تعریف کنترل پذیری، سیستم توصیف شده با (1-4-7) را کنترل پذیر حالت<sup>۱</sup> گویند، اگر یک کنترل  $u(t)$  وجود داشته باشد که حالت  $x(t_0)$  را به هر حالت مطلوب  $x(t_1)$  در زمان محدود  $t_1 - t_0$  ( $t_1 > t_0$ ) انتقال دهد. اگر نتوان کنترل  $u(t)$  را پیدا کرد که بردار حالت اولیه را به هر بردار حالت نهایی مطلوب انتقال دهد، سیستم را کنترل ناپذیر حالت<sup>۲</sup> گویند.

بدیهی است که سیستم اسکالر داده شده با (6-4-7) برای  $b \neq 0$ ، کنترل پذیر و برای  $b = 0$ ، کنترل ناپذیر است. در سیستم‌های غیر اسکالر (سیستم‌های داده شده با معادله‌های بردار - ماتریسی (1-4-7)) تعیین کنترل پذیری و یا کنترل ناپذیری به سادگی سیستم‌های اسکالر صورت نمی‌پذیرد و برای این کار آزمونهای ویژه‌ای وجود دارد که در بخش بعد به توضیح آنها خواهیم پرداخت.

رویت پذیری. سیستم اسکالر داده شده با معادله (۷-۴-۶) را در نظر بگیرید. اگر معادله

خروجی این سیستم به صورت زیر باشد

$$y(t) = cx(t) \quad (۷-۴-۸)$$

که در آن  $c$  یک اسکالر است، آنگاه به شرط آنکه  $c \neq 0$  باشد، با مشاهده خروجی  $y(t)$  داده شده با معادله (۷-۴-۸)، می توان رفتار متغیر حالت  $x(t)$  را تعیین کرد. به این چنین سیستمی که بتوان با اندازه گیری خروجی و مشاهده آن، در رابطه با کلیه متغیرهای حالت اطلاعاتی کسب نمود، رویت پذیر گویند. برای روشنتر شدن مطلب به سیستم زیر توجه کنید

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

در این حالت ورودی سیستم صفر است. معادله حالت و خروجی سیستم را بدین صورت بازنویسی می کنیم

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -x_1(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -2x_2(t) \\ y(t) &= c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) \end{aligned}$$

بدیهی است که اگر  $c_1 = 0$  باشد، با مشاهده خروجی هیچ اطلاعاتی در رابطه با متغیر حالت  $x_1(t)$  بدست نمی آید. هم چنین اگر  $c_2 = 0$  باشد، با مشاهده خروجی هیچ اطلاعاتی در رابطه با متغیر حالت  $x_2(t)$  نیز بدست نمی آید. در هر دو حالت سیستم را رویت ناپذیر گویند. در واقع، این سیستم تنها در صورتی رویت پذیر است که اسکالرها  $c_1$  و  $c_2$  هر دو مخالف صفر باشند. به عبارت دیگر، هر دو متغیر حالت در خروجی ظاهر می شوند.

در نمایش سیستم ها ممکن است برخی از متغیرهای حالت متناظر با متغیرهای فیزیکی قابل اندازه گیری در سیستم نباشند و یا اینکه بدلایلی نتوان متغیرهای حالت فیزیکی سیستم را اندازه گیری کرد، در این موارد باید بتوان بردار حالت سیستم را از داده های ورودی - خروجی

تعیین نمود، برای تعیین بردار حالت از داده‌های ورودی - خروجی، سیستم باید رؤیت‌پذیر باشد.

تعریف رؤیت‌پذیری. سیستم داده شده با معادلات (۷-۴-۱) و (۷-۴-۲) را رؤیت‌پذیر<sup>۱</sup> گویند، اگر بتوان بردار حالت سیستم  $x(t)$  را بروی یک گستره محدود زمانی مانند  $t_1$  تا  $t_2$  از مشاهده خروجی، بر روی همان گستره تعیین کرد.

دقت کنید که در تعریف و ایده کنترل‌پذیری ماتریس (بردار) خروجی  $C$  نقشی ایفاء نمی‌کند و هم چنین در تعریف و ایده رؤیت‌پذیری ماتریس (بردار) ورودی  $B$  نقشی ایفاء نمی‌کند. بنابراین کنترل‌پذیری به ورودی  $u(t)$ ، بردار حالت  $x(t)$  و ماتریس‌های  $A$  و  $B$  بستگی دارد و حال آنکه رؤیت‌پذیری به خروجی  $y(t)$ ، بردار حالت  $x(t)$  و ماتریس‌های  $A$  و  $C$  بستگی دارد. این وابستگیها در آزمونهای کنترل‌پذیری و رؤیت‌پذیری بیشتری آشکار خواهد شد.

#### ۷-۴-۲ آزمونهای کنترل‌پذیری و رؤیت‌پذیری

آزمونهای زیادی در رابطه با تعیین کنترل‌پذیری و رؤیت‌پذیری سیستم وجود دارند. در اینجا، ساده‌ترین آنها را بدون اثبات ارایه خواهیم کرد. [برای آزمونهای دیگر و اثبات این آزمونها به مراجع همین فصل مراجعه شود.]

آزمون کنترل‌پذیری. سیستم داده شده با معادله حالت (۷-۴-۱) را کنترل‌پذیر کامل حالت (یا کنترل‌پذیر) گویند اگر ماتریس کنترل‌پذیری  $\Phi_c$  تعریف شده به صورت زیر

$$\Phi_c = [B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B] \quad (۷-۴-۹)$$

دارای رتبه کامل باشد و یا به عبارت دیگر  $n$  بردار مستقل خطی داشته باشد [برای تعاریف رتبه ماتریس و استقلال یا وابستگی خطی بردارها به مراجع همین فصل مراجعه شود]. در صورتیکه سیستم دارای یک ورودی باشد، ماتریس  $\Phi_c$  یک ماتریس  $n \times n$  است و شرط کنترل‌پذیری سیستم، ناویژه بودن ماتریس کنترل‌پذیری  $\Phi_c$  ( $|\Phi_c| \neq 0$ ) است.

## مثال ۵-۷

سیستم زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

ماتریس کنترل پذیری این سیستم عبارتست از

$$\begin{aligned} \Phi_c &= [B \quad AB] \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \vdots & 1 \\ 1 & \vdots & -3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

از آنجائیکه  $\text{رتبه}(\Phi_c) = 2$  می باشد، سیستم کنترل پذیر کامل حالت است.

## مثال ۶-۷

سیستم زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

ماتریس کنترل پذیری این سیستم عبارتست از

$$\begin{aligned} \Phi_c &= [B \quad AB] \\ &= \begin{bmatrix} 1 & \vdots & 1 \\ 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

رتبه ماتریس کنترل پذیری برابر ۱ است و هم چنین  $|\Phi_c| = 0$  است، لذا سیستم کنترل ناپذیر است.

## مثال ۷-۷

ماتریس حالت سیستمی با دو ورودی عبارتست از

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

که در آن  $\alpha \neq 0$  است، ماتریس کنترل پذیری سیستم برای ماتریس ورودی  $B = [b_{ij}]$ ، عبارتست از

$$\Phi_c = \begin{bmatrix} B & : & AB & : & A^2 B \\ b_{11} & b_{12} & \alpha b_{11} & \alpha b_{12} & \alpha^2 b_{11} & \alpha^2 b_{12} \\ b_{21} & b_{22} & \alpha b_{21} & \alpha b_{22} & \alpha^2 b_{21} & \alpha^2 b_{22} \\ b_{31} & b_{32} & \alpha b_{31} & \alpha b_{32} & \alpha^2 b_{31} & \alpha^2 b_{32} \end{bmatrix}$$

رتبه این ماتریس همواره برابر با ۲ است و لذا سیستم کنترل ناپذیر می باشد. آزمون رؤیت پذیری. سیستم توصیف شده با معادله های (۱-۴-۷) و (۲-۴-۷)، رؤیت پذیر است اگر ماتریس رؤیت پذیری  $\Phi_0$ ، تعریف شده به صورت زیر

$$\Phi_0 = \begin{bmatrix} C \\ \dots \\ CA \\ \dots \\ \vdots \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (۱۰-۴-۷)$$

دارای رتبه کامل باشد. برای سیستم های با یک خروجی، آزمون رؤیت پذیری آن است که ماتریس رؤیت پذیری  $n \times n$  ناویژه باشد ( $|\Phi_0| \neq 0$ ).

#### مثال ۷-۸

سیستم زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

ماتریس رؤیت پذیری این سیستم عبارتست از

$$\begin{aligned}\Phi_o &= \begin{bmatrix} C \\ \dots \\ CA \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

رتبه این ماتریس برابر با یک است، از اینرو سیستم رؤیت‌ناپذیر می‌باشد.

#### مثال ۷-۹

سیستم زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= [0 \quad 1]\end{aligned}$$

ماتریس رؤیت‌پذیری این سیستم عبارتست از

$$\begin{aligned}\Phi_o &= \begin{bmatrix} C \\ \dots \\ CA \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

رتبه این ماتریس برابر با ۲ است و ماتریس ناویژه است، لذا سیستم کاملاً رؤیت‌پذیر می‌باشد.

#### مثال ۷-۱۰

سیستم زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= [4 \quad 5 \quad 1] \mathbf{x}(t)\end{aligned}$$

ماتریس رؤیت پذیری سیستم عبارتست از

$$\Phi_o = \begin{bmatrix} C \\ \dots \\ CA \\ \dots \\ CA^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 5 & 1 \\ -6 & -7 & -1 \\ 6 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

رتبه این ماتریس برابر ۲ است، و لذا سیستم رؤیت ناپذیر می باشد. نتایج بدست آمده از آزمونهای کنترل پذیری و رؤیت پذیری کاملاً مستقل از هم هستند. بدین معنی که سیستمی ممکن است کنترل پذیر و رؤیت پذیر بوده و یا اینکه کنترل ناپذیر یا رؤیت ناپذیر باشد، به مثال زیر توجه کنید.

#### مثال ۷-۱۱

نمایش فضای حالت زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} u(t) \quad (11-4-7)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad (12-4-7)$$

به این نمایش، نمایش قطری فضای حالت سیستم می‌گویند. اگر مقادیر ویژه ماتریس حالت سیستم (قطبهای سیستم) حقیقی و متفاوت باشند، می‌توان با تبدیل مناسب معادلات فضای حالت (۱-۴-۷) و (۲-۴-۷) را به صورت قطری داده شده با معادلات (۱۱-۴-۷) و (۱۲-۴-۷)، تبدیل کرد. معادلات (۱۱-۴-۷) و (۱۲-۴-۷)، معادلتند با

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= \lambda_i x_i(t) + b_i u(t) \quad (i = 1, \dots, n) \\ y(t) &= \sum_{i=1}^n c_i x_i(t) \end{aligned} \quad (13-4-7)$$

از معادله (۱۳-۴-۷) مشاهده می‌شود که سیستم در صورتی کنترل پذیر است که کلیه  $b_i$  ها مخالف صفر باشند و در صورتی رؤیت پذیر است که کلیه  $c_i$  ها مخالف صفر باشند. ماتریس کنترل پذیری سیستم عبارتست از

$$\Phi_c = \begin{bmatrix} b_1 & \lambda_1 b_1 & \lambda_1^2 b_1 & \dots & \lambda_1^{n-1} b_1 \\ b_2 & \lambda_2 b_2 & \lambda_2^2 b_2 & \dots & \lambda_2^{n-1} b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_n & \lambda_n b_n & \lambda_n^2 b_n & \dots & \lambda_n^{n-1} b_n \end{bmatrix}$$

در صورتیکه هر کدام از  $b_i$  ها صفر شوند ماتریس  $\Phi_c$  ویژه خواهد شد و اگر همگی  $b_i$  ها مخالف صفر باشند، ماتریس  $\Phi_c$  ناویژه می‌شود. هم چنین ماتریس رؤیت پذیری سیستم عبارتست از

$$\Phi_o = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ \lambda_1 c_1 & \lambda_2 c_2 & \dots & \lambda_n c_n \\ \lambda_1^2 c_1 & \lambda_2^2 c_2 & \dots & \lambda_n^2 c_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} c_1 & \lambda_2^{n-1} c_2 & \dots & \lambda_n^{n-1} c_n \end{bmatrix}$$

در صورتیکه هر کدام از  $c_i$  ها صفر شوند ماتریس  $\Phi_o$  ویژه خواهد شد و اگر همگی  $c_i$  ها



مخالف صفر باشند  $\Phi_0$  ناویژه می‌شود. موارد زیر را در نظر بگیرید:

- الف - کلیه  $b_i$  ها مخالف صفر، کلیه  $c_i$  ها مخالف صفر : سیستم کنترل پذیر و رؤیت پذیر
- ب - حداقل یک  $b_i$  مساوی صفر،  $c_i$  ها مخالف صفر : سیستم کنترل ناپذیر ولی رؤیت پذیر
- ج - کلیه  $b_i$  ها مخالف صفر، حداقل یک  $c_i$  مساوی صفر : سیستم کنترل پذیر ولی رؤیت ناپذیر
- د - حداقل یک  $b_i$  مساوی صفر، حداقل یک  $c_i$  مساوی صفر : سیستم کنترل ناپذیر و رؤیت ناپذیر

### ۳-۴-۷ کنترل پذیری و رؤیت پذیری در توابع تبدیل

یک سیستم فیزیکی را در نظر بگیرید. تاکنون دو نمایش را برای توصیف این سیستم بکار گرفته‌ایم. این دو، نمایش تابع تبدیل و نمایش فضای حالت می‌باشند. در بخش ۲-۵ با بکارگیری روش تابع تبدیل به نمایش فضای حالت سیستم دست پیدا کردیم. در بخش قبل مشخصه‌های کنترل پذیری و رؤیت پذیری را براساس نمایش فضای حالت ارائه کردیم، لیکن مشخصه‌های یک سیستم فیزیکی معین، به نمایش خاص بکار گرفته شده بستگی ندارند و در اینجا به بررسی کنترل پذیری و رؤیت پذیری سیستم از دیدگاه تابع تبدیل می‌پردازیم. به دو نکته مهم جهت یادآوری توجه کنید:

۱- نمایش فضای حالت  $\{A, B, C, D\}$  و تابع تبدیل  $G(s)$  سیستم، با رابطه زیر به هم مرتبط هستند

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (۷-۴-۱۴)$$

و  $\{A, B, C, D\}$  را یک تحقق<sup>۱</sup> از  $G(s)$  نامند. تحققهای یک تابع تبدیل منحصر بفرد نیستند.

۲- تحقق می‌نیمال<sup>۲</sup>: یک توصیف فضای حالت  $\{A, B, C, D\}$  را یک تحقق می‌نیمال گویند، اگر تعداد متغیرهای حالت بکار گرفته شده برای توصیف سیستم حداقل باشد.

ایده تحقق می‌نیمال رابطه بسیار نزدیکی با کنترل‌پذیری و رؤیت‌پذیری سیستم دارد. در واقع می‌توان نشان داد که اگر  $\{A, B, C, D\}$  نمایش فضای حالت سیستمی باشد، هنگامیکه تابع تبدیل  $G(s)$  را از رابطه  $(7-4-14)$  بدست می‌آوریم، اگر در تشکیل تابع تبدیل صفر و قطب مشترکی پیدا شوند و برای تعیین  $G(s)$  با درجه حداقل، مجبور به حذف صفر و قطب شویم، آن تحقق کنترل‌ناپذیر یا رؤیت‌ناپذیر (یا هر دو) خواهد بود.

### مثال ۷-۱۲

تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید

$$G(s) = \frac{1}{s+3}$$

یک تحقق مرتبه ۱ این تابع تبدیل عبارتست از

$$A = -3, \quad B = 1, \quad C = 1$$

این تحقق کنترل‌پذیر و رؤیت‌پذیر است.

یک تحقق غیرمی‌نیمال مرتبه ۲ تابع تبدیل عبارتست از

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0]$$

با توجه به نتایج مثال ۷-۱۱، این تحقق کنترل‌ناپذیر و رؤیت‌ناپذیر است.

یک تحقق دیگر مرتبه ۲ تابع تبدیل عبارتست از

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \quad 1]$$

این تحقق کنترل‌ناپذیر ولی رؤیت‌پذیر است.

آخرین تحقق مرتبه ۲ تابع تبدیل عبارتست از

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [2 \quad 1]$$

این تحقق کنترل‌پذیر ولی رؤیت‌ناپذیر است.

تابع تبدیل متناظر با تحقق اول عبارتست از

$$G(s) = \frac{1}{s+3}$$

و تابع تبدیل متناظر با سه تحقق مرتبه دوم دیگر، عبارتست از

$$G(s) = \frac{(s+2)}{(s+2)(s+3)} = \frac{1}{s+3}$$

دقت کنید که تحقق اول می‌نیمال و سایر تحققها غیرمی‌نیمال هستند و در تحققهای غیرمی‌نیمال حذف قطب - صفر<sup>۱</sup> رخ می‌دهد. این تحققها کنترل‌ناپذیر، رؤیت‌ناپذیر (یا هر دو) می‌باشند. در واقع هر تحقق مرتبه بالاتر از یک در این مثال، تحقق غیرمی‌نیمال خواهد بود و دو مسئله را به همراه خواهد داشت:

۱- حذف قطب - صفر در تابع تبدیل

۲- عدم کنترل‌پذیری یا رؤیت‌پذیری (یا هر دو)

از طرف دیگر هر تحقق مرتبه اول یا می‌نیمال کنترل‌پذیر و رؤیت‌پذیر است و در تشکیل تابع تبدیل و حذف صفر - قطب رخ نخواهد داد.

نتایج بدست آمده از مثال بالا را به صورت زیر خلاصه می‌کنیم:

۱- تابع تبدیل  $G(s)$  نشان دهنده یک سیستم کنترل‌پذیر و رؤیت‌پذیر است، اگر حذف صفر - قطب در آن رخ ندهد.

۲- یک تحقق می‌نیمال از یک سیستم، یک تحقق کنترل‌پذیر و رؤیت‌پذیر است.

۳- تابع تبدیل  $G(s)$ ، نشان دهنده یک سیستم کنترل‌ناپذیر یا رؤیت‌ناپذیر یا هر دو است، اگر حذف صفر - قطب در آن رخ دهد.

## ۷-۵ طراحی سیستم‌های کنترل در فضای حالت

در بخشهای ۳-۴ و ۳-۵، تأثیر موقعیت قطبهای غالب را بر روی پاسخ حالت گذرا بررسی کردیم. اگر قطبهای غالب در سمت راست محور موهومی باشند پاسخ سیستم ناپایدار است، اگر به صورت غیرمکرر بر روی محور موهومی باشند پاسخ سیستم نوسانی غیر میرا است، اگر نزدیک به محور موهومی در سمت چپ محور موهومی باشند پاسخ سیستم نوسانی میرا ولی بسیار کند با نوسانات زیاد می‌باشد و در صورتیکه در سمت چپ محور موهومی و دورتر از آن قرار گیرند، پاسخ سریعتر خواهد شد.

روش طراحی که در این بخش مرور خواهیم کرد، جایابی قطب<sup>۱</sup> با فیدبک حالت<sup>۲</sup> است. هدف از این طراحی آن است که پاسخ مطلوب سیستم حلقه - بسته را با تعیین قطبهای حلقه - بسته در مکانهای مناسب و جایابی آنها توسط فیدبک حالت، بدست آوریم. مکان مناسب قطبها یا از سعی و خطا بدست می آید (به عبارت دیگر با بکارگیری شبیه سازیهای مناسب موقعیتهای مختلف قطبها را امتحان کرده و یک موقعیت که بهترین پاسخ را بدست بدهد، تعیین می کنیم) و یا اینکه از اطلاعاتی که از رفتار گذرای سیستم داده شده است (مانند فراجهش حداکثر، زمان استقرار و ...) موقعیت مناسب قطبها را تعیین می کنیم. در هر صورت با انتخاب مکان مناسب قطبها، از فیدبک حالت برای انتقال قطبهای حلقه - باز و جایابی آنها در مکانهای مطلوب استفاده خواهیم کرد.

### ۱-۵-۷ جایابی قطب با فیدبک حالت

ایده اصلی طراحی جایابی قطب آن است که موقعیت مطلوب قطبهای حلقه - بسته داده شده اند، کنترل فیدبک حالت را باید چنان تعیین کنیم تا قطبهای حلقه - بسته را در این مکانها جای دهد. توصیف فضای حالت یک سیستم در حالت کلی عبارتست از

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (1-5-7)$$

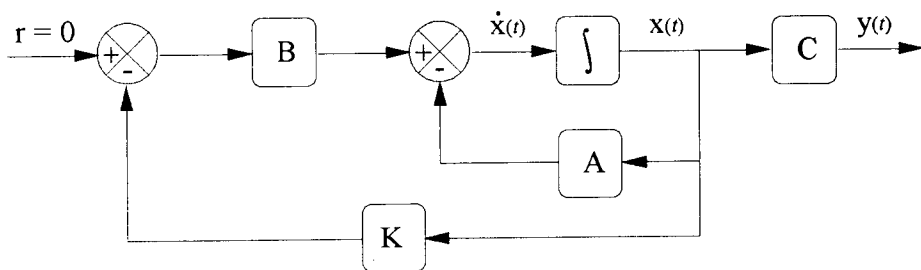
که در آن  $\mathbf{x}(t)$  بردار  $n$ -بُعدی حالت و  $\mathbf{u}(t)$  بردار  $m$ -بُعدی ورودی است. بردار ورودی کنترل  $\mathbf{u}(t)$  به صورت زیر تعریف می شود

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) \quad (2-5-7)$$

که در آن  $\mathbf{K}$  یک ماتریس  $m \times n$  از پارامترهای فیدبک حالت است. در واقع طراحی جایابی قطب با فیدبک حالت، به تعیین پارامترهای این ماتریس منجر می شود. با جایگزینی معادله (۲-۵-۷) در معادله (۱-۵-۷)، بدست می آوریم

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = [\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}] \mathbf{x}(t) \quad (3-5-7)$$

شکل ۴-۷ سیستم حلقه - بسته با فیدبک حالت را نشان می دهد. (برای ورودیهای مرجع غیر صفر و ایجاد حالت ردیابی با فیدبک حالت به مراجع همین فصل و بخش کتابشناسی مراجعه



شکل ۴-۷ سیستم حلقه - بسته با فیدبک حالت

کنید). معادله مشخصه سیستم حلقه - بسته عبارتست از

$$|\lambda I - A + BK| = 0 \quad (۴-۵-۷)$$

معادله (۴-۵-۷) نشان می‌دهد که با انتخاب مناسب ماتریس  $K$  می‌توان تمامی قطبهای حلقه - بسته را در مکانهای مطلوب جایابی کرد. در صورتیکه سیستم تنها یک ورودی داشته باشد،  $K$  یک بردار  $1 \times n$  خواهد بود. شرط لازم و کافی برای وجود  $K$  جهت جایابی کلیه قطبها، آن است که سیستم تحت کنترل، کنترل پذیر کامل حالت باشد. لذا قبل از شروع به طراحی باید کنترل پذیری سیستم را مورد بررسی قرار دهیم. مراحل طراحی فیدبک حالت را می‌توان به صورت زیر خلاصه کرد:

۱- با تشکیل ماتریس کنترل پذیری سیستم  $\Phi_c$  داده شده با معادله (۴-۵-۷)، کنترل پذیری سیستم را بررسی کنید. در صورت کنترل پذیر بودن، جایابی تمامی قطبهای حلقه - باز در مکانهای مطلوب امکان پذیر است.

۲- با تعیین قطبهای مطلوب حلقه - بسته در  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ، معادله مشخصه مطلوب سیستم حلقه - بسته را بنویسید:

$$(s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \dots (s - \lambda_n) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0$$

۳- معادله مشخصه سیستم حلقه - بسته (با پارامترهای تعیین نشده بهره فیدبک  $K$ ) را با محاسبه دترمینان زیر بنویسید:

$$|sI - A + BK| = 0$$

۴- دو معادله مشخصه تعیین شده در مراحل ۲ و ۳ را مساوی قرار دهید، با حل معادلات

بدست آمده از مساوی قرار دادن ضرایب توانهای متناظر  $\epsilon$  پارامترهای ماتریس  $K$  را محاسبه کنید.

مثال ۷-۱۳

سیستم زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

قطبهای حلقه - باز سیستم عبارتند از

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -2 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda - 2$$

بدیهی است که سیستم حلقه - باز ناپایدار است و حداقل یک قطب در سمت راست محور موهومی دارد (توجه کنید که تغییر علامتی در ضرایب معادله مشخصه رخ داده است). ماتریس کنترل پذیری سیستم عبارتست از

$$\Phi_c = \begin{bmatrix} B & : & AB \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & : & -3 \end{bmatrix}$$

و لذا سیستم کنترل پذیر کامل حالت است. فرض کنید که محل قطبهای مطلوب حلقه - بسته در ۱- و ۴- باشند (پایدارسازی<sup>۱</sup> سیستم حلقه - باز ناپایدار) در این صورت معادله مشخصه مطلوب عبارتست از

$$(s+4)(s+1) = s^2 + 5s + 4$$

معادله مشخصه سیستم حلقه - بسته با بردار فیدبک حالت  $K = [k_1 \ k_2]$ ، بدین صورت می باشد

$$|sI - A + BK| = s^2 + s(3+k_2) + k_1 - 2$$

با مساوی قرار دادن ضرایب توانهای مشابه در  $\epsilon$  داریم:

$$s^0: k_1 - 2 = 4$$

$$s^1: k_2 + 3 = 5$$

و لذا  $K = [6 \quad 2]$  بردار بهره فیدبک حالت خواهد بود.

#### مثال ۷-۱۴

سیستم زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

ماتریس کنترل پذیری این سیستم عبارتست از

$$\begin{aligned} \Phi_c &= [B \quad AB] \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

و لذا سیستم کنترل ناپذیر است. اگر بخواهیم به این سیستم فیدبک حالت اعمال کنیم، داریم

$$|sI - A + BK| = s^2 + (k_1 + k_2 + 3)s + k_1 + k_2 + 2$$

که در آن  $K = [k_1 \quad k_2]$ . فرض کنید که معادله مشخصه مطلوب  $s^2 + 5s + 6$  باشد، در این

صورت با مساوی قرار دادن ضرایب توانهای مشابه در  $s$ ، بدست می آوریم

$$k_1 + k_2 + 3 = 5$$

$$k_1 + k_2 + 2 = 6$$

بدیهی است که دستگاه معادلات بالا جوابی نخواهد داشت. از اینرو، برای سیستم کنترل ناپذیر نمی توان یک بردار بهره فیدبک حالت  $K$  پیدا کرد که موقعیت مطلوب قطبها را بدست دهد.

#### مثال ۷-۱۵

معادلات حالت و خروجی سیستمی عبارتند از

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -4/0.3 & -1/52 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= [1 \quad 0 \quad 0] \mathbf{x}(t) \end{aligned}$$

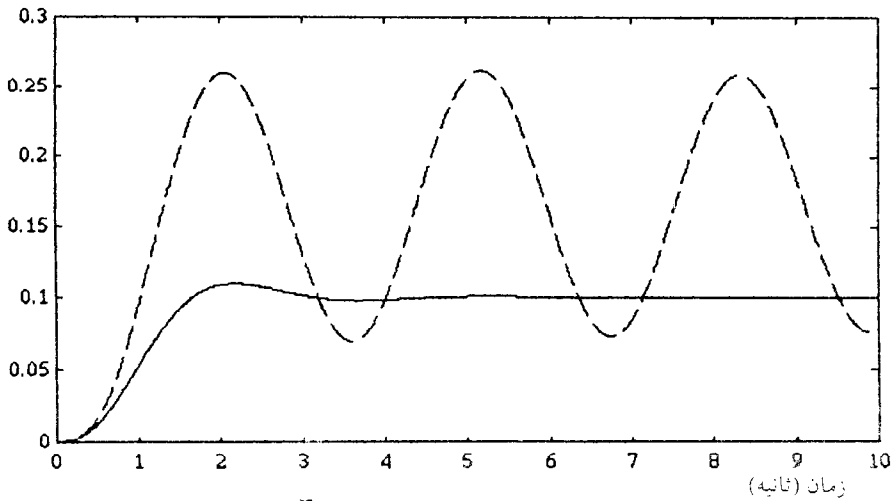
قطبهای سیستم حلقه - باز عبارتند از  $\{z \pm 2j, -0.1/5, -0.1/5\}$ ، همانطور که از شکل ۵-۷ مشاهده می‌شود، پاسخ پله واحد این سیستم (با توجه به نزدیک بودن قطبهای مختلط مزدوج به محور موهومی) نوسانی می‌باشد. برای اصلاح پاسخ زمانی سیستم، قطبهای سیستم را در  $\{z \pm 2j, -1\}$  قرار می‌دهیم. با تشکیل ماتریس کنترل‌پذیری برای این سیستم داریم که رتبه ماتریس کنترل‌پذیری سیستم، کامل است و لذا سیستم کنترل‌پذیر می‌باشد. معادله مشخصه حلقه - بسته مطلوب عبارتست از

$$s^3 + 4s^2 + 9s + 10 = 0$$

از مساوی قرار دادن ضرایب توانهای مشابه در  $s$ ، بردار بهره فیدبک حالت به صورت زیر بدست خواهد آمد

$$K = [4/0 \quad 4/97 \quad 2/48]$$

پاسخ پله واحد سیستم حلقه - بسته در شکل ۵-۷ نشان داده شده است. بدیهی است که مشخصه‌های پاسخ پله واحد سیستم حلقه - بسته، بسیار بهتر از پاسخ سیستم حلقه - باز است.



شکل ۵-۷ پاسخ سیستم‌های حلقه - باز و حلقه - بسته مثال ۵-۷، پاسخ سیستم حلقه - باز با خط چین و پاسخ سیستم حلقه - بسته با خط پیوسته نشان داده شده است.



## ۲-۵-۷ طراحی رؤیتگر

در طراحی جایابی قطب با فیدبک حالت، همانطور که در شکل ۷-۴ نشان داده شده است، بردار حالت دانسته فرض شده است و هم‌چنین فرض شده است که می‌توان این بردار را مستقیماً اندازه‌گیری کرد و ورودی کنترل را با ضریب معلومی از این بردار اندازه‌گیری شده، تشکیل داد. حال آنکه بردار حالت ممکن است صرفاً یک کمیت ریاضی باشد و از نظر فیزیکی مفهومی نداشته باشد، در اینصورت قابل اندازه‌گیری توسط متغیرهای فیزیکی سیستم نیست و نمی‌توان آن را فیدبک کرد. از طرف دیگر، اگر چه ممکن است که بردار حالت از متغیرهای فیزیکی سیستم تشکیل شده باشد، لیکن اندازه‌گیری و فیدبک کلیه این متغیرها یا بعضی از آنها عملاً امکان‌پذیر نباشد. به عنوان نمونه متغیر ممکن است در موقعیتی باشد که اندازه‌گیری آن با وسایل موجود ممکن نباشد و یا به کارگیری وسایل پیشرفته اندازه‌گیری مقرون به صرفه نباشد (برای مثال در درجه حرارت‌های بسیار بالا یا پایین، عملکردهای فوق‌العاده سریع و دقیق، ...) و یا اینکه ممکن است به دلیل وجود نویز شدید، اندازه‌گیری آلوده به نویز و غیر دقیق باشد. در این چنین مواردی باید از روشهایی برای محاسبه یا تخمین مقدار هر متغیر حالت استفاده کرد. با تخمین<sup>۱</sup> یا بازسازی<sup>۲</sup> متغیرهای حالت، از بردار حالت تخمین زده شده<sup>۳</sup> برای تشکیل بردار کنترل استفاده خواهد شد.

سیستم دینامیکی که بردار حالت را تخمین می‌زند، رؤیتگر<sup>۴</sup> نامیده می‌شود. در این بخش با بکارگیری متغیرهای قابل اندازه‌گیری ورودی و خروجی سیستم در یک الگوریتم تخمین یا فرایند بازسازی بردار حالت، بردار حالت تخمین زده شده را محاسبه می‌کنیم و نشان خواهیم داد که پس از گذشتن یک حالت گذرای سریع، مقادیر بردار حالت تخمین زده شده و بردار حالت واقعی یکی خواهند شد. با بکارگیری رؤیتگر در سیستم، دینامیک آن جزئی از دینامیک سیستم حلقه - بسته خواهد شد و لذا اثر مستقیمی بر عملکرد سیستم حلقه - بسته می‌گذارد. از اینرو انتخاب مناسب دینامیک رؤیتگر، در طراحی جایابی قطب با فیدبک حالت بسیار مهم است.

1- Estimation

2- Reconstruction

3- Estimated

4- Observer

رویتگر حالت. سیستم توصیف شده با معادلات حالت و خروجی زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (5-5-7)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \quad (6-5-7)$$

که در آن ماتریس‌های  $\mathbf{A}$ ،  $\mathbf{B}$  و  $\mathbf{C}$  معلوم فرض شده‌اند، هم‌چنین ورودی و خروجی سیستم،  $\mathbf{u}(t)$  و  $\mathbf{y}(t)$  نیز قابل اندازه‌گیری هستند. بردار حالت  $\mathbf{x}(t)$  را بدلالی نمی‌توان مستقیماً اندازه‌گیری گرفت. یک روش ساده بازسازی بردار حالت شبیه‌سازی معادله‌های حالت و خروجی داده شده با معادله‌های (5-5-7) و (6-5-7)، توسط یک کامپیوتر است که همان ورودی اعمال شده به سیستم را به آن نیز اعمال می‌کنیم. متغیرهای حالت  $x_i(t)$  ( $i=1, \dots, n$ ) بدست آمده از نتایج شبیه‌سازی و متغیرهای حالت واقعی تنها در صورتی (با اعمال ورودی یکسان) یکسان خواهند بود که شرایط اولیه سیستم شبیه‌سازی شده و واقعی یکی باشند. اما در عمل سیستم واقعی تحت انواع اغتشاشات و نویزهایی قرار خواهد گرفت که شبیه‌سازی آنها عملاً غیرممکن است و لذا بین خروجی سیستم واقعی و خروجی سیستم شبیه‌سازی شده تفاوتی ایجاد خواهد شد. برای در نظر گرفتن و جبران کردن این خطای ایجاد شده آن را به عنوان ورودی دیگری به سیستم شبیه‌سازی شده اعمال می‌کنیم. معادلات حالت و خروجی سیستم دینامیکی رویتگر عبارتند از

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{L}(\mathbf{y}(t) - \hat{\mathbf{y}}(t)) \quad (7-5-7)$$

$$\hat{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t) \quad (8-5-7)$$

که در آن  $\hat{\mathbf{x}}(t)$  و  $\hat{\mathbf{y}}(t)$  به ترتیب بردار حالت و خروجی تخمین زده شده هستند،  $\mathbf{L}$  نیز ماتریس رویتگر<sup>۱</sup> ( $n \times l$ ) است. مسئله طراحی رویتگر، تعیین مناسب ماتریس  $\mathbf{L}$  است. برای بررسی نقش ماتریس  $\mathbf{L}$  و نحوه تعیین آن، خطای رویت<sup>۲</sup> را به صورت زیر تعریف کنیم

$$\mathbf{e}(t) \equiv \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t) \quad (9-5-7)$$

با کم کردن معادله (5-5-7)، از معادله (7-5-7)، بکارگیری معادله‌های (6-5-7) و (8-5-7) و تعریف خطای رویت، بدست می‌آوریم

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})\mathbf{e}(t) \quad (10-5-7)$$

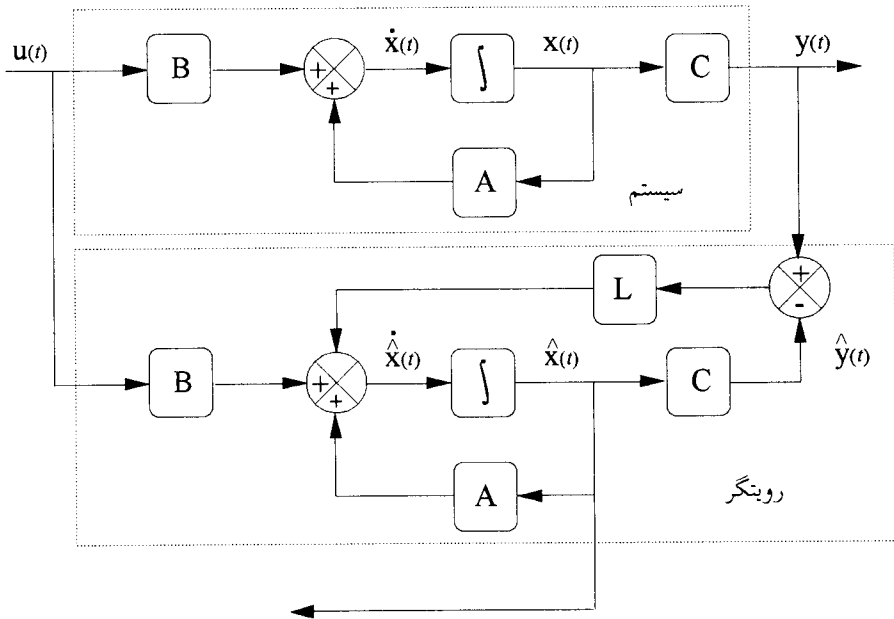
با انتخاب مناسب ماتریس  $L$  (توجه کنید در صورتیکه سیستم تنها یک خروجی داشته باشد،  $L$  یک بردار  $n \times 1$  است)، می توان مقادیر ویژه  $A-LC$  را در سمت چپ محور موهومی قرار داد. بنابراین مقدار حالت - ماندگار  $e(t)$  برای هر شرط اولیه ای صفر است

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0 \quad (11-5-7)$$

از معادله (۷-۵-۱۰)، داریم که معادله خطا ورودی نداشته و تنها با شرایط اولیه تحریک می شود، بنابراین خطای رُیتگر با ورودی سیستم تعیین نمی شود. مقدار حالت - ماندگار خطا برابر صفر است. توجه کنید که صرفنظر از ورودی اعمال شده به سیستم، خطای رُیت همواره پس از گذراندن یک حالت گذرا صفر خواهد شد. در عمل باید ماتریس  $L$  را به گونه ای انتخاب کنیم که مقادیر ویژه  $A-LC$  در سمت چپ مقادیر ویژه حلقه - بسته قرار گیرند. به عبارت دیگر، ماتریس  $L$  باید به گونه ای انتخاب گردد تا خطای تخمین با سرعت قابل قبولی صفر گردد و بر عملکرد سیستم حلقه - بسته اثر قابل ملاحظه ای نگذارد. می توان نشان داد که (برای جزئیات به مراجع همین فصل و بخش کتاب شناسی آن مراجعه کنید) شرط لازم و کافی برای جایابی قطبهای رُیتگر (تعیین مقادیر ویژه ماتریس  $A-LC$ )، توسط ماتریس  $L$ ، رُیت پذیری سیستم است. به عبارت دیگر، بتوان با مشاهده خروجی حالتها را تخمین زد. شمای کلی یک سیستم با رُیتگر در شکل ۷-۶ نشان داده شده است. در رُیتگر طراحی شده تمامی متغیرهای حالت، همانطور که در شکل ۷-۶ نشان داده شده است، تخمین زده می شوند. به رُیتگری که تمامی متغیرهای حالت را تخمین می زند، رُیتگر مرتبه کامل<sup>۱</sup> می گویند.

### ۳-۵-۷ سیستم حلقه - بسته فیدبک حالت با رُیتگر

در فرایند جایابی قطب با فیدبک حالت در بخش ۷-۵-۱، فرض شده بود که بردار حالت واقعی  $x(t)$  برای اندازه گیری و فیدبک در دسترس است. در بخش ۷-۵-۲، با فرض در دسترس نبودن بردار حالت روشی را برای تخمین و بازسازی بردار حالت توسط رُیتگر ارایه کردیم. در این بخش با فرض در دسترس نبودن بردار حالت واقعی، یک رُیتگر را در سیستم



شکل ۶-۷ سیستم بارویتگر -

کنترل فیدبک حالت به کار می‌گیریم و از بردار حالت تخمین زده شده  $\hat{x}(t)$  به جای بردار حالت واقعی  $x(t)$  در سیستم کنترل استفاده می‌کنیم. فرایند طراحی در این صورت به دو مرحله تقسیم می‌شود:

مرحله اول: تعیین یک ماتریس بهره فیدبک حالت  $K$ ، برای جایابی مطلوب قطبهای سیستم.

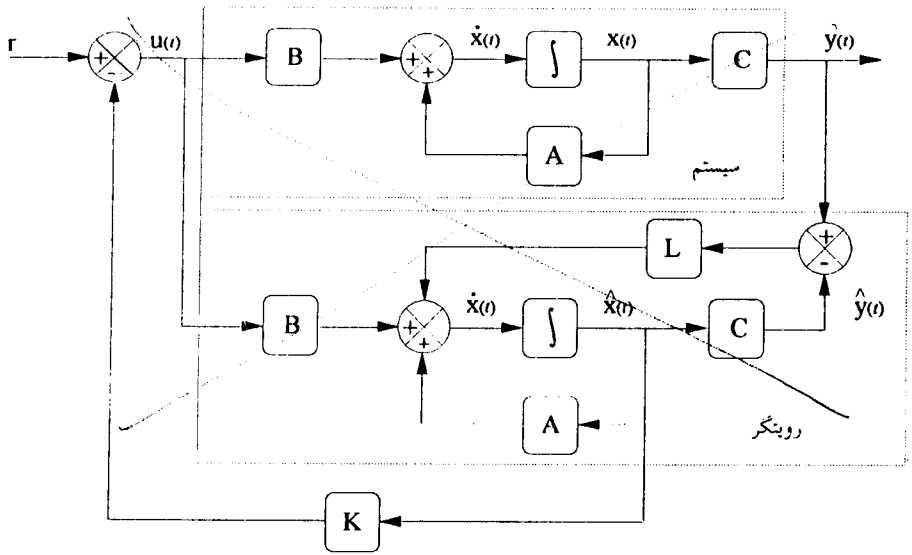
مرحله دوم: تعیین یک ماتریس بهره رویتگر  $L$ ، برای جایابی مطلوب قطبهای رویتگر. برای مطالعه اثرات بکارگیری  $\hat{x}(t)$  به جای  $x(t)$ ، همانطور که در شکل ۷-۷ نشان داده شده است، سیستم کاملاً کنترل‌پذیر و رویت‌پذیر داده شده با معادلات حالت و خروجی زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (۱۲-۵-۷)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (۱۳-۵-۷)$$

برای کنترل فیدبک حالت، با حالت رویت شده  $\hat{x}(t)$  داریم

$$u(t) = -K\hat{x}(t) \quad (۱۴-۵-۷)$$



شکل ۷-۷ سیستم کنترل فیدبک حالت با رویتگر

با این کنترل از جایگزینی معادله (۷-۵-۱۴)، در معادله (۷-۵-۱۲)، بدست می آوریم

$$\dot{x}(t) = Ax(t) - BK\hat{x}(t) \quad (۷-۵-۱۵)$$

با اضافه کردن  $BKx(t) - BKx(t)$  به طرف راست معادله (۷-۵-۱۵)، و بازنویسی آن بدست می آوریم

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t) + BK(x(t) - \hat{x}(t)) \quad (۷-۵-۱۶)$$

از معادله (۷-۵-۹)، داریم

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t) + BK e(t) \quad (۷-۵-۱۷)$$

با ترکیب معادله های (۷-۵-۱۷) و (۷-۵-۱۰) داریم

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{e}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} \quad (۷-۵-۱۸)$$

معادله (۷-۵-۱۸)، دینامیک سیستم حلقه - بسته با کنترل فیدبک حالت و رویتگر را

توصیف می‌کند. معادله مشخصه سیستم حلقه - بسته عبارتست از

$$\begin{vmatrix} sI-A+BK & -BK \\ \cdot & sI-A+LC \end{vmatrix} = 0$$

و یا

$$|sI-A+BK| |sI-A+LC| = 0 \quad (7-5-19)$$

معادله (7-5-19)، نشان می‌دهد که قطبهای حلقه - بسته سیستم کنترل فیدبک حالت با رؤیتگر از مجموع قطبهای ناشی از طراحی جایابی قطب و قطبهای ناشی از طراحی رؤیتگر تشکیل می‌شود. این بدان معنی است که طراحی رؤیتگر و جایابی قطب با فیدبک حالت، به طور جداگانه‌ای انجام می‌شوند. بنابراین دو مرحله فرایند طراحی به طور کامل مستقل از یکدیگر انجام می‌پذیرند.

قطبهای مطلوب حلقه - بسته، به گونه‌ای تعیین می‌گردند تا مشخصه‌های عملکرد سیستم حلقه - بسته برآورده شوند. قطبهای رؤیتگر نیز به گونه‌ای تعیین می‌گردند تا پاسخ رؤیتگر بسیار سریعتر از پاسخ سیستم باشد. یک قاعده سرانگشتی برای تعیین محل قطبهای رؤیتگر آن است که آنها را به گونه‌ای انتخاب کنیم که پاسخ رؤیتگر حداقل ۲ تا ۵ برابر سریعتر از پاسخ سیستم باشد. بالاترین سرعت رؤیتگر با پارامترهایی مانند نویز و مسئله حساسیت در سیستم‌های کنترل عملی محدود می‌شود.

مثال 7-۱۶

سیستم کاملاً رؤیت‌پذیر زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

برای تخمین بردار حالت سیستم، بردار بهره رؤیتگر  $L$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$L = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix}$$

که در آن  $\ell_1$  و  $\ell_2$  پارامترهایی هستند که در طراحی رُویتگر تعیین می‌گردند. معادله مشخصه سیستم دینامیکی رُویتگر عبارتست از

$$\begin{aligned} |sI - A + LC| &= \begin{vmatrix} s + 3 + \ell_1 & -1 \\ \ell_2 & s + 2 \end{vmatrix} \\ &= s^2 + (\ell_1 + 5)s + (\ell_2 + 6 + 2\ell_1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

پارامترهای  $\ell_1$  و  $\ell_2$  را از مساوی قرار دادن معادله مشخصه سیستم دینامیکی رُویتگر، با معادله مشخصه مطلوب رُویتگر بدست می‌آوریم. اگر بخواهیم قطبهای رُویتگر در  $-1$  و  $-6$  قرار گیرند، معادله مشخصه مطلوب عبارتست از

$$(s+6)(s+1) = s^2 + 7s + 6$$

با مساوی قرار دادن ضرایب توانهای مشابه در  $s$  داریم  $L = [2 \quad -4]^T$ . معادله دینامیکی رُویتگر از معادله  $(7-5-7)$  و  $(8-5-7)$ ، عبارتست از

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \hat{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} (y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) &= [1 \quad 0] \hat{x}(t) \end{aligned}$$

و یا با جایگزینی  $y(t) = Cx(t)$ ، داریم

$$\dot{\hat{x}}(t) = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \hat{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} y(t)$$

با توجه به مثال بالا، مراحل طراحی یک رُویتگر نیز همانند مراحل طراحی جایابی قطب با فیدبک حالت است. این مراحل عبارتند از:

۱- با تشکیل ماتریس رُویت پذیری  $\Phi_0$  داده شده با معادله  $(7-4-10)$ ، رُویت پذیری سیستم را بررسی کنید. در صورت رُویت پذیر بودن، طراحی رُویتگر (جایابی قطبهای رُویتگر) امکان پذیر است.

۲- قطبهای مطلوب رُویتگر را تعیین کنید. این قطبها باید به گونه‌ای انتخاب شوند که سرعت پاسخ رُویتگر حداقل ۲ تا ۵ برابر سریعتر از پاسخ سیستم باشد. معادله مشخصه مطلوب رُویتگر را با این قطبها بدست آورید.

۳- معادله مشخصه رؤیتگر را با محاسبه دترمینان زیر بنویسید:

$$|sI - A + LC| = 0$$

که در آن  $L$  یک ماتریس  $n \times \ell$  است ( $n$  تعداد متغیرهای حالت و  $\ell$  تعداد خروجیها است).

۴- دو معادله مشخصه تعیین شده در مراحل ۲ و ۳ را مساوی قرار دهید. با حل معادلات بدست آمده از مساوی قرار دادن ضرایب متناظر  $k_i$  پارامترهای  $i, j$  ( $i=1, \dots, n, j=1, \dots, \ell$ ) در ماتریس  $L$  را بدست آورید.

مثال ۷-۱۷

معادله‌های حالت و خروجی سیستمی عبارتند از

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

قطبهای این سیستم در  $+1$  و  $+2$  قرار دارند و لذا سیستم حلقه - باز ناپایدار است. اگر بخواهیم از فیدبک متغیرهای حالت برای پایدارسازی سیستم استفاده کنیم، نخست باید کنترل‌پذیری سیستم را تعیین نمود. با فرض در دسترس نبودن متغیرهای حالت برای فیدبک، باید از یک رؤیتگر جهت تخمین متغیرهای حالت و فیدبک آنها استفاده کرد و لذا تعیین رؤیت‌پذیری سیستم نیز الزامی است. ماتریس‌های کنترل‌پذیری و رؤیت‌پذیری سیستم عبارتند از

$$\Phi_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Phi_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

بنابراین سیستم کنترل‌پذیر و رؤیت‌پذیر است. قطبهای سیستم حلقه - بسته مطلوب را در  $\{-3, -4\}$  و قطبهای رؤیتگر را در  $\{-13, -13\}$  در نظر می‌گیریم. برای تعیین ماتریس بهره فیدبک دو معادله مشخصه مطلوب و حلقه - بسته را مساوی قرار می‌دهیم، از اینرو

$$\left| \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (k_1 \ k_2) \right| = \left| \begin{matrix} s & -1 \\ 2+k_1 & s-3+k_2 \end{matrix} \right|$$

$$= s^2 + s(-3+k_2) + 2+k_1$$

$$= s^2 + 7s + 12$$



و لذا  $k = [10 \ 10]$  است.

برای تعیین ماتریس بهره رؤیتگر نیز به طریق مشابهی، دو معادله مشخصه مطلوب رؤیتگر و معادله مشخصه رؤیتگر را مساوی قرار می‌دهیم، از اینرو

$$\left| \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} s+l_1 & -1 \\ 2+l_2 & s-3 \end{vmatrix}$$

$$= s^2 + s(l_1 - 3) + 2 + l_2$$

$$= s^2 + 26s + 169$$

و لذا  $L = [23 \ 169]^T$  است.

شکل‌های ۷-۸ (الف) و (ب)، به ترتیب رفتار متغیرهای حالت  $x_1(t)$  و  $x_2(t)$  را نشان می‌دهند. همانطور که از این شکلها مشاهده می‌گردد، متغیرهای حالت تخمین زده شده  $\hat{x}_1(t)$  و  $\hat{x}_2(t)$  در کمتر از ۱ ثانیه به مقادیر واقعی متغیرهای حالت همگرا می‌شوند. شرایط اولیه تخمین  $\hat{x}(0) = [1 \ 0]^T$  است. در شکل ۷-۸ (ج)، خروجی سیستم حلقه - بسته واقعی و خروجی سیستم حلقه - بسته با فیدبک تخمین متغیرهای حالت نشان داده شده است. همانطور که مشخص است، سیستم حلقه - باز ناپایدار در هر دو حالت پایدار گردیده است و بعد از گذشت یک زمان حالت گذرا با همگرا شدن متغیر حالت تخمین زده شده به حالت واقعی خروجیها نیز به هم همگرا شده‌اند.

## مسائل

۷-۱- معادلات حالت و خروجی سیستم‌های زیر را در نظر بگیرید:

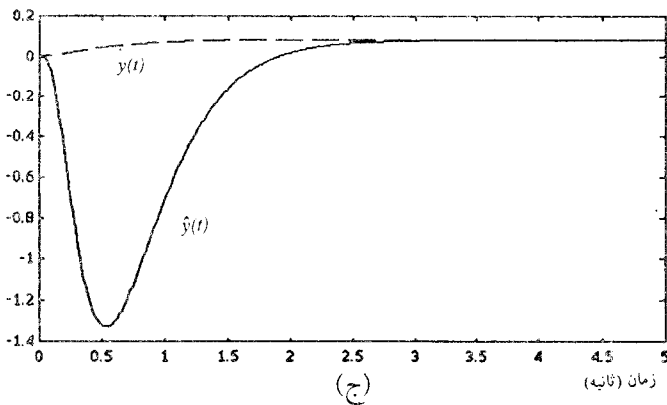
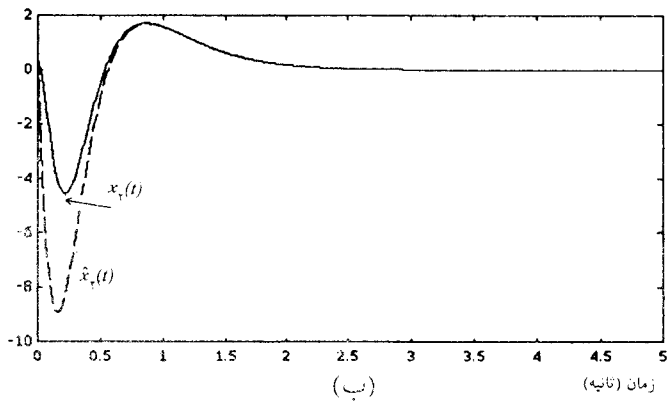
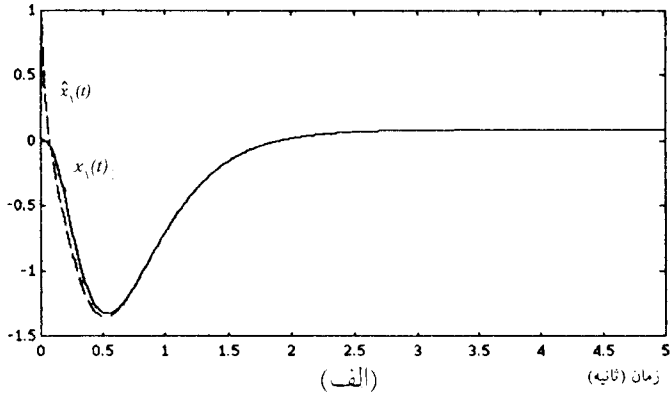
$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u(t) \quad (\text{الف})$$

$$y(t) = [1 \ 0] \mathbf{x}(t)$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (\text{ب})$$

$$y(t) = [1 \ 1] \mathbf{x}(t)$$

برای شرایط اولیه صفر و ورودی پله واحد، پاسخ متغیرهای حالت و خروجی سیستم را با بکارگیری معادلات (۷-۲-۲۰) و (۷-۲-۲۱)، بدست آورید.



شکل ۷-۸ الف) رفتار اولین متغیر حالت واقعی و تخمین زده شده. ب) رفتار دومین متغیر حالت

واقعی و تخمین زده شده. ج) خروجیهای سیستم با رزولتور و بدون رزولتور.

۲-۷- پاسخ معادلات حالت و خروجی سیستم‌های زیر را بدست آورید:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (\text{الف})$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

شرایط اولیه سیستم  $x_1(0)$  و  $x_2(0)$  می‌باشند و  $u(t)$  نیز ورودی پله واحد است.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 15 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \quad (\text{ب})$$

شرایط اولیه سیستم  $x_1(0) = x_2(0) = 1$  است.

۳-۷- سیستم توصیف شده با معادله حالت زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t)$$

پاسخ بردار حالت را به ورودیهای اعمال شده در زمان  $t=0$ ، بدست آورید:

(الف) ورودی شیب واحد.

(ب) ورودی ضربه واحد.

۴-۷- پاسخ معادلات حالت زیر را با استفاده از روش تبدیل لاپلاس بدست آورید

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \quad (\text{الف})$$

با شرایط اولیه  $\mathbf{x}(0) = [1 \ 1]^T$  و ورودی پله واحد.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (\text{ب})$$

با شرایط اولیه صفر و ورودی  $u(t) = e^{-t}$  برای  $t \geq 0$ .

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \quad (\text{ج})$$

با شرایط اولیه  $x_1(0)$  و  $x_2(0)$ .

۵-۷- سیستم زیر را در نظر بگیرید

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + (\alpha + \beta) \frac{dx}{dt} + \alpha \beta x = u$$

که در آن  $\alpha$  و  $\beta$  ثابت و  $u$  ورودی ضربه واحد است. شرایط اولیه سیستم عبارتند از

$$x(0^-) = \frac{dx(0^-)}{dt} = 0$$

پاسخ سیستم را با استفاده از روش

(الف) تبدیل لاپلاس

(ب) فضای - حالت

بدست آورید.

۶-۷- ماتریس‌های حالت سیستم‌هایی در زیر داده شده‌اند. با نوشتن معادله مشخصه

این سیستم‌ها و محاسبه مقادیر ویژه آنها، پایداری این سیستم‌ها را بررسی کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -12 & 1 & -6 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

۷-۷- دیاگرام بلوکی یک سیستم کنترل موقعیت در شکل ۷-۹ نشان داده شده است. با

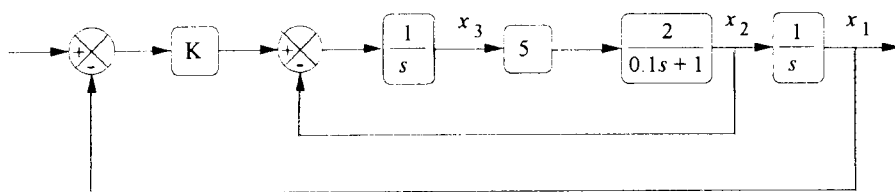
نوشتن معادلات حالت آن، پایداری سیستم را به ازاء تغییرات بهره  $K$  تعیین کنید.

۸-۷- کنترل پذیری سیستم‌های زیر را تعیین کنید:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 1/5 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (\text{الف})$$

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (\text{ب})$$

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (\text{ج})$$



شکل ۷-۹ سیستم کنترل موقعیت مسئله ۷-۷

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (\text{د})$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (\text{ه})$$

۷-۹- تابع تبدیل سیستمی عبارتست از

$$G(s) = \frac{K(s+a)(s+b)}{(s+a)(s+b)(s+c)(s+d)}$$

کنترل پذیری این سیستم را بررسی کنید.

۷-۱۰- رؤیت پذیری سیستم‌های زیر را تعیین کنید:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (\text{الف})$$

$$y(t) = [1 \quad 0] \mathbf{x}(t)$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (\text{ب})$$

$$y(t) = [4 \quad 5 \quad 1] \mathbf{x}(t)$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (\text{ج})$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \quad (د)$$

$$y(t) = [1 \ 1 \ 1] \mathbf{x}(t)$$

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \quad \text{(ه) سیستم داده شده در (د) با معادله خروجی}$$

۱۱-۷. معادلات حالت و خروجی زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & -2 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [-1 \ 1 \ 0] \mathbf{x}(t)$$

کنترل پذیری و رؤیت پذیری سیستم را به ازاء مقادیر مختلف  $\alpha$  بررسی کنید.

۱۲-۷. سیستم داده شده با معادلات زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

(الف) نشان دهید که سیستم ناپایدار است.

(ب) نشان دهید که با فیدبک حالت مناسب می توان سیستم را پایدار کرد.

(ج) بهره فیدبک حالت مناسبی که قطبهای حلقه - بسته را در  $\{-4\}$  قرار دهید، تعیین

کنید.

۱۳-۷. سیستم زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

پس از آزمون کنترل پذیری، در صورت امکان با فیدبک حالت قطبهای سیستم حلقه - بسته را در  $\{-۱, -۲, -۳, -۴\}$  قرار دهید.

۱۴-۷. سیستم زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [\alpha \quad 0] \mathbf{x}(t)$$

(الف) به ازاء چه مقادیری از  $\alpha$  سیستم رؤیت‌ناپذیر است.

(ب) برای  $\alpha = 0$ ، رؤیتگری طراحی کنید که خطای تخمین آن با قطبهای ۱- و ۲- به سمت صفر میل کند.

۱۵-۷. سیستم زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} \beta \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [1 \quad \alpha] \mathbf{x}(t)$$

(الف) به ازاء چه مقادیری از  $\alpha$  و  $\beta$  سیستم کنترل‌پذیر و رؤیت‌پذیر است.

(ب) برای  $\alpha = \beta = 0$ ، قطبهای سیستم حلقه - بسته را با فیدبک حالت در  $\{-۱, -۲\}$  و قطبهای رؤیتگر را در  $\{-۵, -۶\}$  قرار دهید.

۱۶-۷. پاسخ سیستم‌های داده شده در مسائل ۷-۱۲، ۷-۱۳، ۷-۱۴، ۷-۱۵ را برای شرایط اولیه دلخواه و ورودی پله واحد توسط یک برنامه کامپیوتری مناسب رسم کنید.

## مراجع فصل هفتم

[۷-۱] علی خاکی صدیق، اصول کنترل مدرن، انتشارات دانشگاه تهران، ۱۳۷۴

[7-2] Blackman P.F, *Introduction to state-variable analysis*, Macmillan, 1977

[7-3] Ogata K., *State space analysis of control systems*, Prentice-Hall, 1977

[7-4] Borrie John A., *Modern control systems*, Prentice-Hall, 1986

[7-5] Friedland B., *Control system design*, McGraw-Hill, 1987

[7-6] Brogan William L., *Modern control theory*, Prentice-Hall, 1991

[7-7] Rosenbrock H. H., *State-space and multivariable theory*, Nelson, 1970

[7-8] Kailath, T., *Linear systems*, Prentice-Hall, 1980

[7-9] Chen C.T., *Introduction to linear system theory*, Holt, Rinehart and Winston, 1970



## کتاب شناسی

در زمینه تحلیل و طراحی سیستم‌های کنترل در فضای حالت، مراجع فراوانی وجود دارند. برای آشنایی بیشتر با مفاهیم اولیه فضای حالت، روشهای پایه در تحلیل و طراحی فضای حالت و درک عمیق‌تر مفاهیم ارائه شده در این فصل به مرجع [۱-۷] مراجعه شود. تقریباً کلیه کتابهای مقدماتی در رابطه با تحلیل و طراحی سیستم‌های کنترل، فصل یا فصلهایی در ارتباط با تحلیل و طراحی فضای حالت دارند. مراجع [2]، [3] و [4]، این مفاهیم را به صورت مقدماتی بیان کرده‌اند. مرجع [7]، با بکارگیری مسائل حل شده فراوان پاره‌ای از مفاهیم فضای حالت را به طور ساده، توضیح داده است. مراجع [2-7] تا [5-7]، به طور تخصصی به بیان تحلیل و طراحی فضای حالت پرداخته‌اند. این مراجع، بیشتر به صورت مفهومی و مهندسی به مسئله فضای - حالت پرداخته‌اند. در [3-7]، نرم‌افزارهای مناسبی نیز برای تحلیل و طراحی سیستم‌های کنترل به روش فضای - حالت آورده شده است. جبر خطی یک وسیله بسیار مناسب و لازم برای بررسی تئوریک مفاهیم فضای - حالت است. مراجع [۱-۷] و [6-7] فصلهایی در ارتباط با مقدمات جبر خطی و آشنایی با آن آورده‌اند. برای بررسی دقیق ریاضی و ارائه اثباتهای قضایای فضای حالت و برخورد عمیق تئوریک با آن، به مراجع [5-7] تا [9-7] می‌توان مراجعه کرد. مرجع [۲۶] فضای حالت را در حوزه دیجیتال مورد بررسی قرار داده است. در این مرجع، فضای حالت زمان - پیوسته نیز به مقدار قابل توجهی توضیح داده شده است.