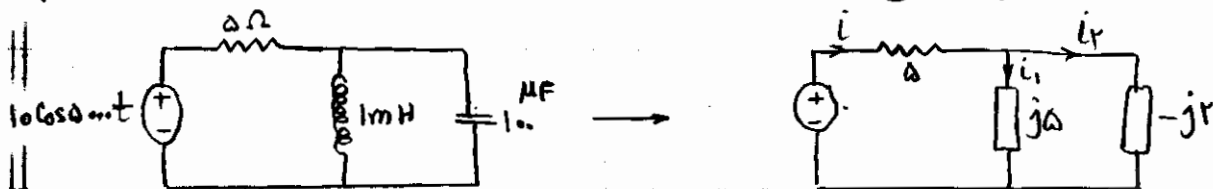


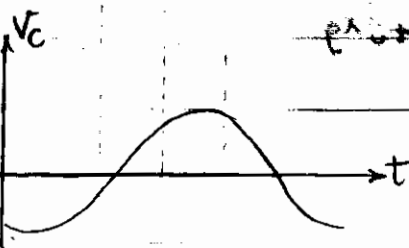
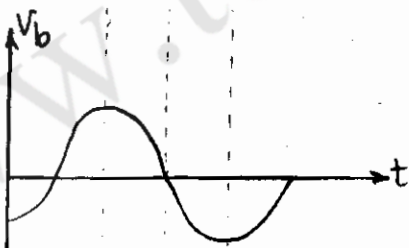
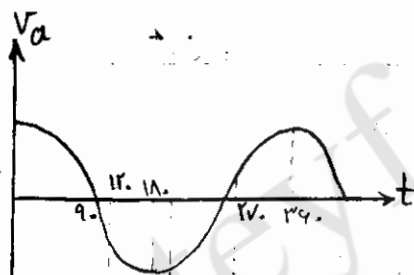
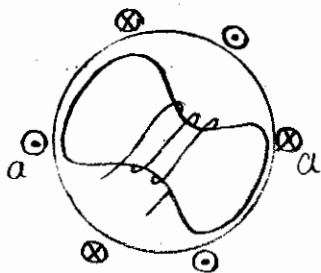
مدارهای الکتریکی II

مدارهای سه فاز

قبل مسائلی را بررسی کردیم که با منابع سینوسی تک فاز تحریک می شدند و فقط دنبال جواب خصوصی بودیم.

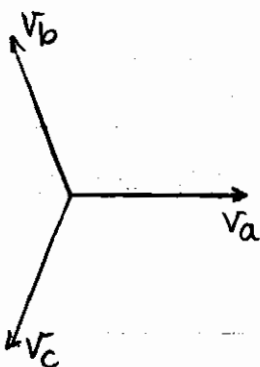


$$I = \frac{10 \angle 0^\circ}{\Delta + \frac{10}{j\tau}}$$

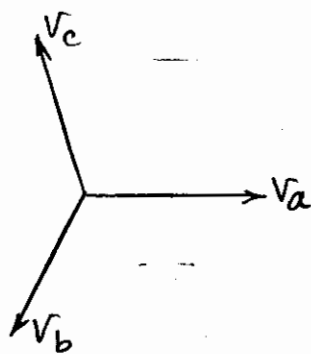


$$\begin{aligned} V_a &= V_m \cos \omega t && \text{اگر} \\ V_b &= V_m \cos(\omega t + 120^\circ) \\ V_c &= V_m \cos(\omega t - 120^\circ) \end{aligned}$$

آن سه فاز:



ترتیب یا توالی acb، منفی، معکوس



ترتیب یا توالی abc، مثبت، مستقیم

چند نکته

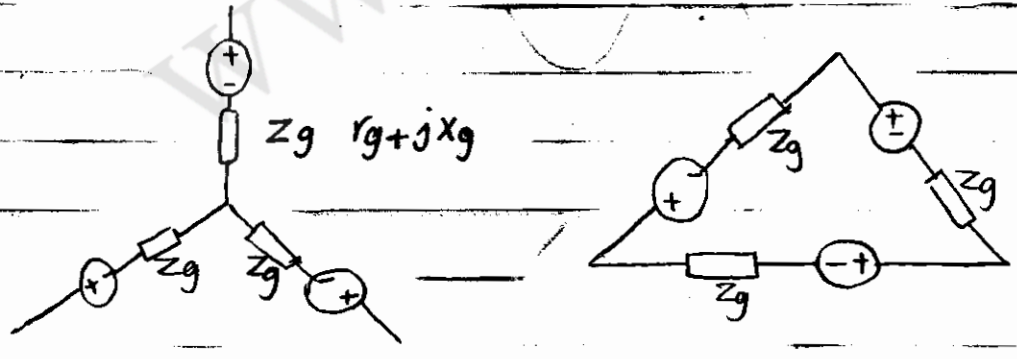
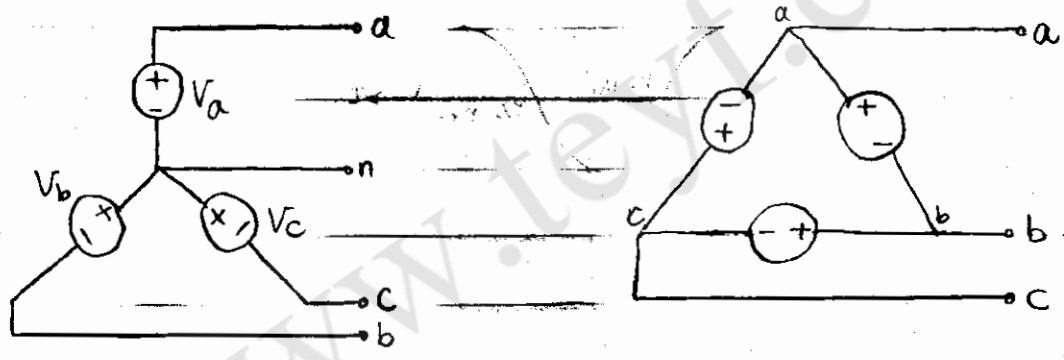
$$\left. \begin{aligned} V_a + V_b + V_c &= 0 \quad \text{در حوزه برداری} \\ V_a + V_b + V_c &= 0 \quad \text{در حوزه زمان} \end{aligned} \right\} \text{همواره}$$

اعدادهای سه فاز وقتی یکی از ولتاژها و ترتیب معلوم باشد دو ولتاژ دیگر معلوم است.

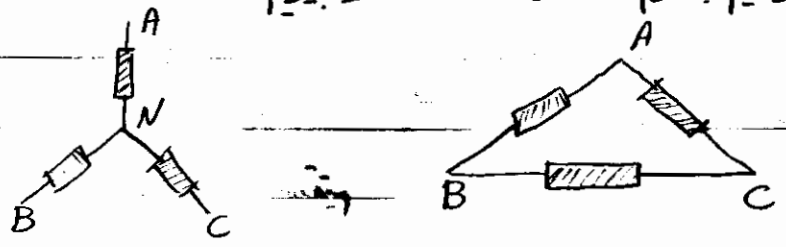
مثال در یک ژنراتور سه فاز، $V_a = 220 \cos(\omega t + 30^\circ)$ و ترتیب مثبت است مطلوب است V_c, V_b

$$\rightarrow V_b = 220 \cos(\omega t - 90^\circ) \quad V_c = 220 \cos(\omega t + 150^\circ)$$

این ۶ سرپیچ دو فرم ستاره یا مثلث بستنی شوند:

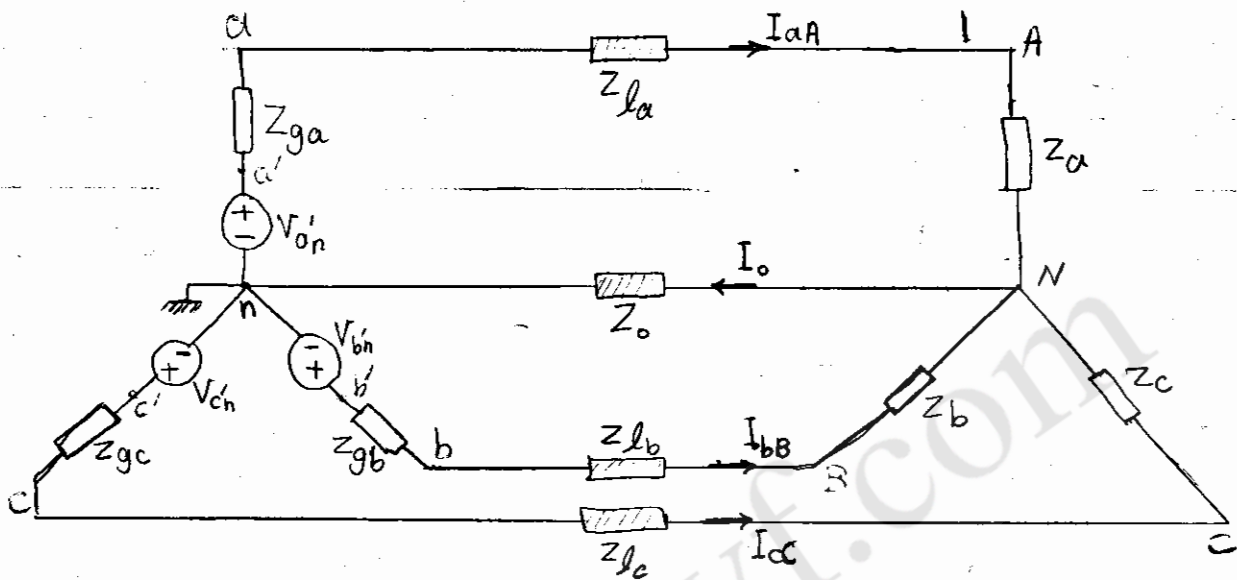


بار (مصرف کننده) را نیز می توانیم به فرم ستاره یا مثلث در نظر بگیریم:



نتیجه: انواع مدار سه فاز داریم: ۱- ستاره-ستاره ۲- ستاره-مثلث ۳- مثلث-ستاره ۴- مثلث-مثلث

۱- تحلیل مدارهای ستاره-ستاره



نکته مهم = تحلیل مدارهای سه فاز کاملاً از همان روشهای گفته شده در مدار ا ستیام می شود با این

تفاوت که در این مدار سه منبع داریم.

$$Z_{\varphi a} \triangleq Z_{ga} + Z_{la} + Z_a$$

$$Z_{\varphi b} \triangleq Z_{gb} + Z_{lb} + Z_b$$

$$Z_{\varphi c} \triangleq Z_{gc} + Z_{lc} + Z_c$$

$$\rightarrow \frac{V_N}{Z_0} = \frac{V'_{an} - V_N}{Z_{\varphi a}} + \frac{V'_{bn} - V_N}{Z_{\varphi b}} + \frac{V'_{cn} - V_N}{Z_{\varphi c}}$$

$$\rightarrow V_N = \frac{V'_{an} \cdot Y_{\varphi a} + V'_{bn} \cdot Y_{\varphi b} + V'_{cn} \cdot Y_{\varphi c}}{Y_{\varphi a} + Y_{\varphi b} + Y_{\varphi c} + Y_0}$$

$$\rightarrow I_{aA} = \frac{V'_{an} - V_N}{Z_{\varphi a}}, \quad I_{bB} = \frac{V'_{bn} - V_N}{Z_{\varphi b}}, \quad I_{cC} = \frac{V'_{cn} - V_N}{Z_{\varphi c}}$$

مدار سه فاز متعادل و وقتی می‌گوییم مدار سه فاز متعادل است که:

$$\begin{cases} Z_{ga} = Z_{gb} = Z_{gc} \\ Z_{la} = Z_{lb} = Z_{lc} \\ Z_{ca} = Z_{cb} = Z_{cc} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} Z_{\phi a} = Z_{\phi b} = Z_{\phi c} \\ Y_{\phi a} = Y_{\phi b} = Y_{\phi c} \end{cases}$$

با فرض متعادل بودن مدار سه فاز:

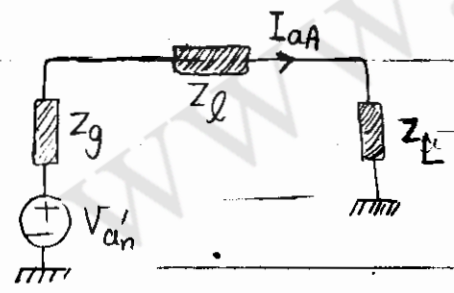
$$V_N = \frac{Y_{\phi} [V_{a'n} + V_{b'n} + V_{c'n}]}{Y_{\phi} + Y_0} = 0$$

در این حالت:

$$\begin{cases} I_{aA} = Y_{\phi} \cdot V_{a'n} \\ I_{bB} = Y_{\phi} \cdot V_{b'n} \\ I_{cC} = Y_{\phi} \cdot V_{c'n} \end{cases}$$

چون $V_{c'n}, V_{b'n}, V_{a'n}$ از نظر قدر مطلق برابر هستند و فقط اختلاف فاز 120° دارند پس I_{aA}, I_{bB}, I_{cC} نیز از نظر قدر مطلق برابر خواهند بود و فقط 120° اختلاف فاز خواهند داشت.

در نتیجه کافی است I_{aA} را محاسبه کنیم.



مدار معادل تک فاز:

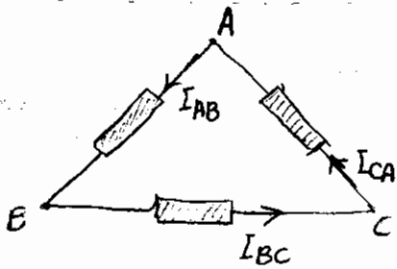
قبل از پرداختن به مثال عددی با چند اصطلاح آشنا می‌شویم:

۱- $V_{a'n}, V_{b'n}, V_{c'n}$ را اصطلاحاً ولتاژهای خط به خنثی (فاز) در سر مولد نامند.

۲- V_{AN}, V_{BN}, V_{CN} را اصطلاحاً ولتاژهای خط به خط (فاز) در سر بار نامند.

۳- V_{ab}, V_{bc}, V_{ca} را اصطلاحاً ولتاژهای خط به خط (خط) در سر مولد نامند.

۴- V_{CA}, V_{BC}, V_{AB} را اصطلاحاً ولتاژهای خط به خط (خط) در سر بار نامند.



۵- I_{CA}, I_{BB}, I_{AA} را اصطلاحاً جریانهای خط نامند.

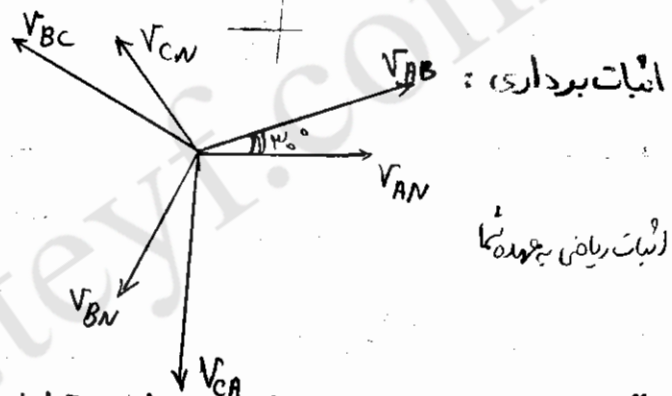
۶- I_{CA}, I_{BC}, I_{AB} را "جریانهای فاز در بار نامند."

۷- I_{ca}, I_{bc}, I_{ab} را "جریانهای فاز در مولد نامند."

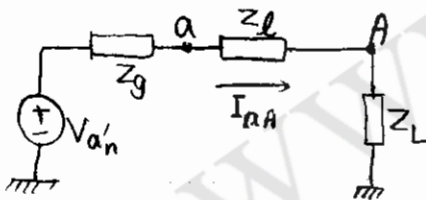
$$\begin{cases} V_{ab} = \sqrt{3} \angle 30^\circ \cdot V_{an} \\ V_{AB} = \sqrt{3} \angle 30^\circ \cdot V_{AN} \end{cases}$$

در مدارهای سه فاز متعادل:

$$V_{AB} = V_{AN} - V_{BN}$$



الگوریتم مدارهای سه فاز متعادل =



۱- مدار تک فاز معادل را رسم می کنیم.

$$I_{aA} = I_f \angle \theta$$

۲- از روی آن I_{aA} را محاسبه می کنیم.

$$I_{bB} = I_f \angle \theta - 120^\circ$$

$$I_{cC} = I_f \angle \theta + 120^\circ$$

۳- I_{cC}, I_{bB} را محاسبه می کنیم.

$$V_{AN} = Z_L \cdot I_{aA}$$

۴- $V_{AN}, V_{a'n}$ را محاسبه می کنیم.

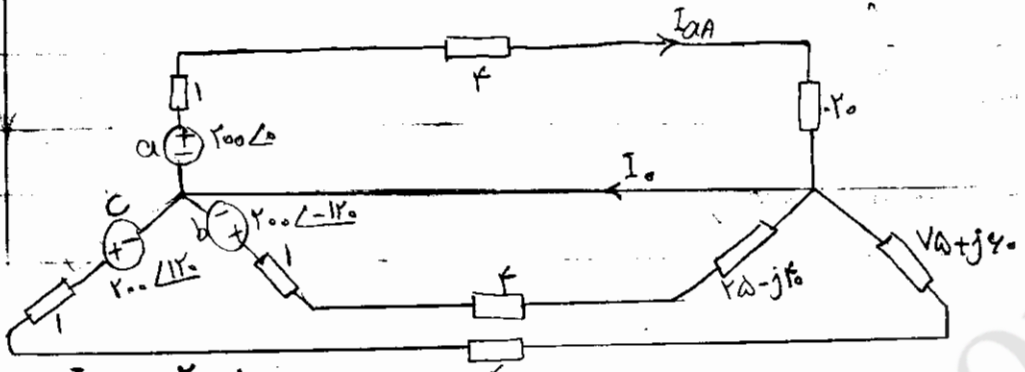
$$V_{an} = (Z_L + Z_g) \cdot I_{aA} = V_{a'n} - Z_g \cdot I_{aA}$$

۵- $V_{ca}, V_{cn}, V_{bn}, V_{bn}$ را محاسبه می کنیم.

$V_{ob} = \sqrt{3} \angle 130^\circ \times V_{an}$ ، $V_{AB} = \sqrt{3} \angle 110^\circ \times V_{AN}$ ، V_{AB} ، V_{ab} را محاسبه می‌کنیم.

V_{ca} ، V_{bc} ، V_{CA} ، V_{BC} را نیز محاسبه می‌کنیم.

مثال از حالت بار نامتعادل ۴



$$I_{AA} = \frac{100 \angle 0^\circ}{10} = 10 \angle 0^\circ$$

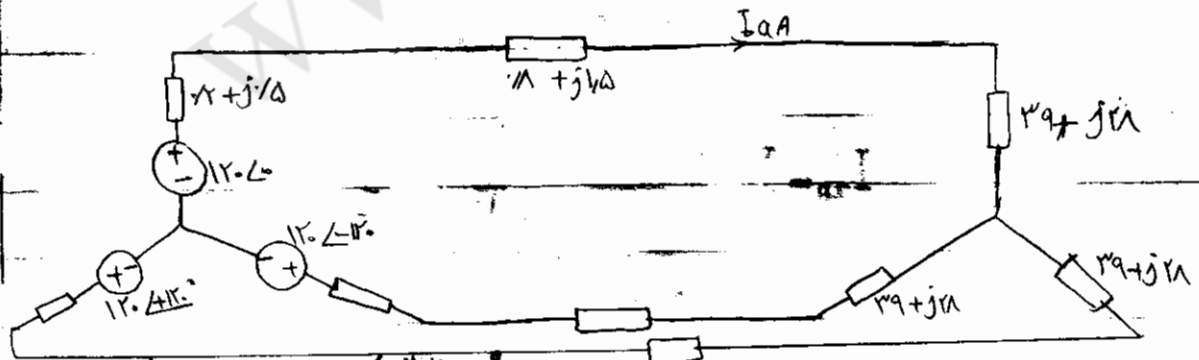
$$I_{BB} = \frac{100 \angle -120^\circ}{10 - j10} = 7.07 \angle -135^\circ \rightarrow I_o = I_{BB} + I_{CC} + I_{AA} = 9.94 \angle -9.46^\circ$$

$$I_{CC} = \frac{100 \angle 120^\circ}{10 + j10} = 7.07 \angle 135^\circ$$

$$V_{AN} = 100 \times 10 \angle 0^\circ = 1000 \angle 0^\circ$$

$$V_{BN} = (10 - j10)(7.07 \angle -135^\circ) = 70.7 \angle -135^\circ$$

مثال از حالت بار متعادل ۵



$$I_{AA} = \frac{120 \angle 0^\circ}{10 + j10} = 8.49 \angle -45^\circ$$

$$I_{BB} = 8.49 \angle -165^\circ$$

$$I_{CC} = 8.49 \angle 75^\circ$$

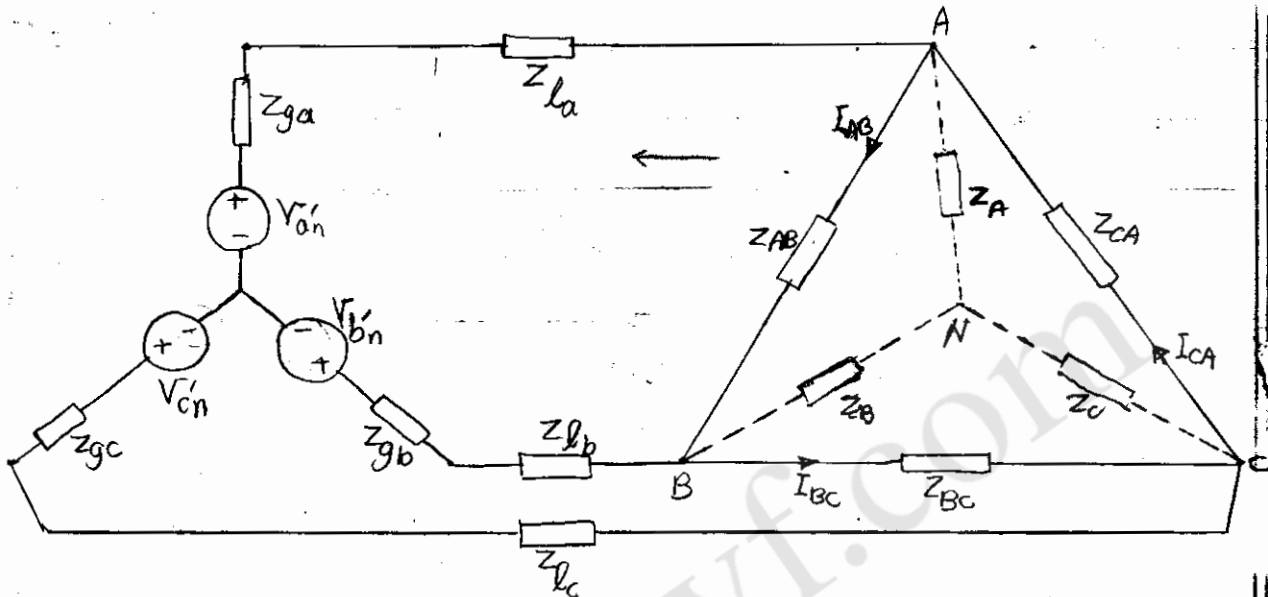
$$V_{AN} = (10 + j10) \times 8.49 \angle -45^\circ = 113.14 \angle -1.11^\circ$$

$$V_{BN} = 113.14 \angle -121.11^\circ, V_{CN} = 113.14 \angle 118.89^\circ$$

$$\rightarrow V_{AB} = \sqrt{3} \angle 30^\circ (115,22 \angle -1,19^\circ) = 199,58 \angle 28,81^\circ$$

$$\rightarrow V_{BC} = 199,58 \angle -91,19^\circ \quad , \quad V_{CA} = 199,58 \angle 148,81^\circ$$

تحلیل مدار سه فاز ستاره- مثلث :



$$Z_A = \frac{Z_{AC} \cdot Z_{AB}}{Z_{AC} + Z_{AB} + Z_{BC}} \quad , \quad Z_B = \frac{Z_{BC} \cdot Z_{BA}}{Z_{AC} + Z_{AB} + Z_{BC}} \quad , \quad Z_C = \frac{Z_{AC} \cdot Z_{BC}}{Z_{AC} + Z_{AB} + Z_{BC}}$$

با این تبدیل در واقع مدار به یک مدار ستاره ستاره تبدیل می شود و از همان طریق حل می شود.

نکته : در این حالت علاوه بر محاسبه ولتاژهای خط در بار و ولتاژهای فاز در بار و ولتاژهای خط مولد ، ولتاژهای فاز در مولد و جریانهای خط باید جریانهای فاز در بار I_{AB} ، I_{BC} ، I_{CA} را نیز

محاسبه کنیم.

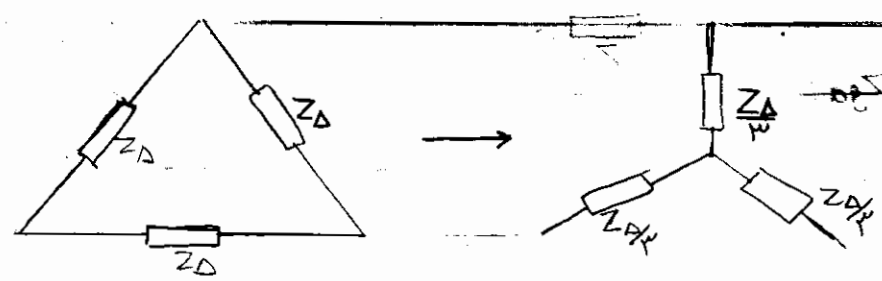
نحوه محاسبه جریانهای فاز در بار در اتصال ستاره مثلث :

$$I_{AB} = \frac{V_{AB}}{Z_{AB}} \quad , \quad I_{BC} = \frac{V_{BC}}{Z_{BC}} \quad , \quad I_{CA} = \frac{V_{CA}}{Z_{CA}} \quad \text{الف- بار نامتعادل} :$$

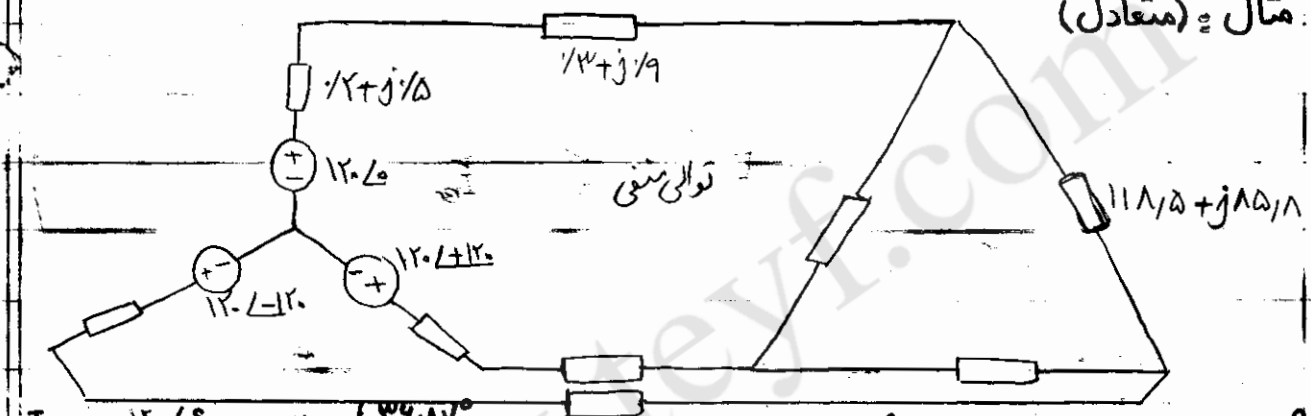
ب- بار متعادل: $I_{AB} = \frac{1}{\sqrt{3}} \angle 30^\circ I_{AA}$

به عنوان تمرین ثابت کنید اگر $I_{AB} = I_p \angle \theta$ آن گاه: $I_{BC} = I_p \angle \theta - 120^\circ$, $I_{CA} = I_p \angle \theta + 120^\circ$

نکته: در بار متعادل



مثال: (متعادل)



$I_{AA} = \frac{120 \angle 0^\circ}{10 + j5} = 21.4 \angle -39.46^\circ$, $I_{BB} = 21.4 \angle 131.3^\circ$, $I_{CC} = 21.4 \angle -154.17^\circ$

$V_{AN} = (39.5 + j28.4)(21.4 \angle -39.46^\circ) = 117 \angle -19.9^\circ$ \rightarrow $V_{BN} = 117 \angle 119.04^\circ$
 $V_{CN} = 117 \angle -120.97^\circ$

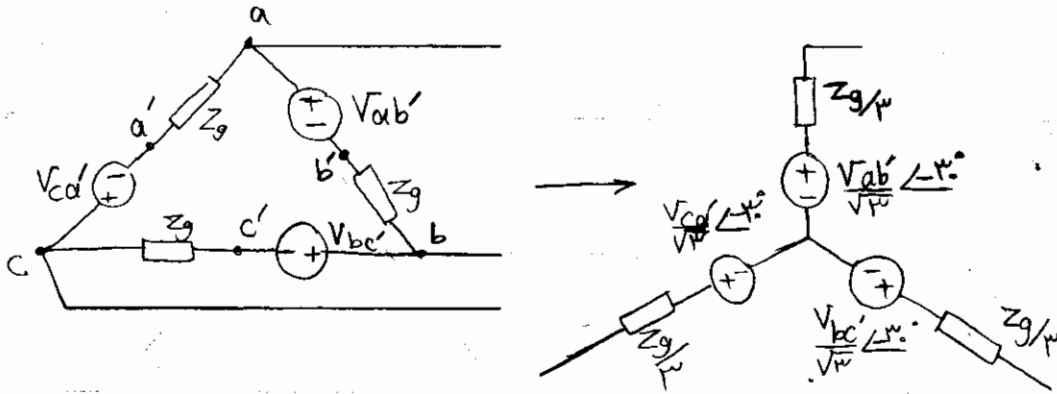
$V_{an} = 118.9 \angle -13.3^\circ$
 $V_{bn} = 118.9 \angle 119.78^\circ$
 $V_{cn} = 118.9 \angle -120.32^\circ$

$V_{AB} = \sqrt{3} \angle -30^\circ V_{AN} = 202.72 \angle -49.9^\circ$, $V_{BC} = 202.72 \angle 89.08^\circ$
 $V_{CA} = 202.72 \angle -150.92^\circ$

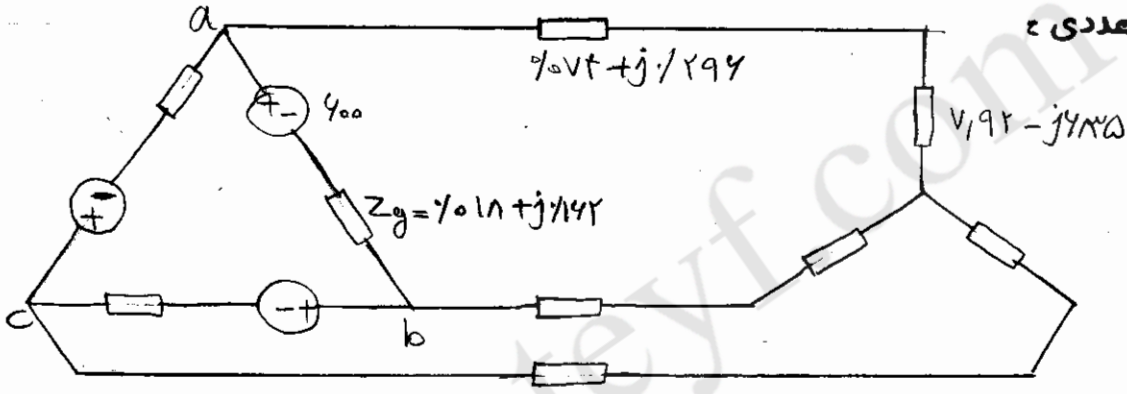
برای محاسبه I_{AB} از یکی از روش زیر استفاده می کنیم:

$I_{AB} = \begin{cases} \frac{V_{AB}}{Z_{AB}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \angle -30^\circ \cdot I_{AA} \end{cases}$

تحلیل مدارهای سه فاز مثلث ستاره و مثلث مثلث =



مثال عددی :

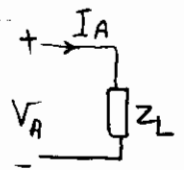


$$I_{QA} = \frac{349.14 \angle 33^\circ}{1 - j4} = 34.4 \angle 44.17^\circ$$

جریانهای I_{ba} , I_{ac} , I_{cb} را اصطلاحاً جریانهای فاز در مولد نامند.

$$I_{ba} = \frac{1}{\sqrt{3}} \angle -30^\circ I_{QA}$$

توان در مدارهای سه فاز :



V_A, I_A در حوزه فاز برقرار و مقدار موثر

۱- در مدار تک فاز

$$\rightarrow S = P + jQ = V_A I_A^*$$

$$P = |V_A| |I_A| \cos(\theta_V - \theta_i)$$

$$Q = |V_A| |I_A| \sin(\theta_V - \theta_i)$$

۲- در مدارهای سه فاز متعادل

الف- با معلوم بودن ولتاژ و جریان فاز a ، و ترتیب، می توان ولتاژ و جریان فازهای b و c را محاسبه کرد.

بعد اندازه ولتاژ خط $\sqrt{3}$ برابر اندازه ولتاژ فاز است و زاویه آن $\pm 30^\circ$ متفاوت است.

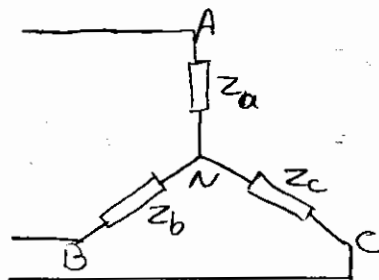
ج- در حالت بار مثلث اندازه جریان خط $\sqrt{3}$ برابر جریان فاز است و زاویه آن $\pm 30^\circ$ متفاوت است.

بحث توان در مدار سه فاز به دو قسمت تقسیم می شود: ۱- محاسبه توان ۲- اندازه گیری توان

محاسبه توان دو حالت متعادل و نامتعادل دارد که هر کدام شماره یا مثلثی می توانند باشند.

محاسبه توان در مدار سه فاز ستاره نامتعادل =

$$S = V_{an} \cdot I_{aA}^* + V_{bn} \cdot I_{bB}^* + V_{cn} \cdot I_{cC}^*$$



$$P = |V_{AN}| |I_{aA}| \cos(\theta_{V_A} - \theta_{i_A})$$

$$+ |V_{BN}| |I_{bB}| \cos(\theta_{V_B} - \theta_{i_B})$$

$$+ |V_{CN}| |I_{cC}| \cos(\theta_{V_C} - \theta_{i_C})$$

$$Q = |V_{AN}| |I_{aA}| \sin(\theta_{V_A} - \theta_{i_A}) + |V_{BN}| |I_{bB}| \sin(\theta_{V_B} - \theta_{i_B}) + |V_{CN}| |I_{cC}| \sin(\theta_{V_C} - \theta_{i_C})$$

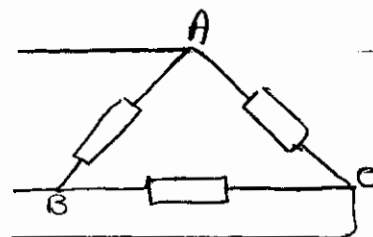
محاسبه توان در مدار سه فاز مثلث نامتعادل =

$$S = V_{AB} \cdot I_{AB}^* + V_{BC} \cdot I_{BC}^* + V_{CA} \cdot I_{CA}^*$$

$$P = |V_{AB}| |I_{AB}| \cos(\theta_{V_{AB}} - \theta_{i_{AB}})$$

$$+ |V_{BC}| |I_{BC}| \cos(\theta_{V_{BC}} - \theta_{i_{BC}})$$

$$+ |V_{CA}| |I_{CA}| \cos(\theta_{V_{CA}} - \theta_{i_{CA}})$$



$$Q = |V_{AB}| |I_{AB}| \sin(\theta_{V_{AB}} - \theta_{i_{AB}}) + |V_{BC}| |I_{BC}| \sin(\theta_{V_{BC}} - \theta_{i_{BC}}) + |V_{CA}| |I_{CA}| \sin(\theta_{V_{CA}} - \theta_{i_{CA}})$$

محاسبه توان در بار ستاره متعادل:

$$\begin{aligned} \rightarrow |V_{AN}| &= |V_{BN}| = |V_{CN}| = V_{\phi} \\ |I_{AA}| &= |I_{BB}| = |I_{CC}| = I_{\phi} \\ \theta_{V_A} - \theta_{i_A} &= \theta_{V_B} - \theta_{i_B} = \theta_{V_C} - \theta_{i_C} = \theta_{\phi} \end{aligned}$$

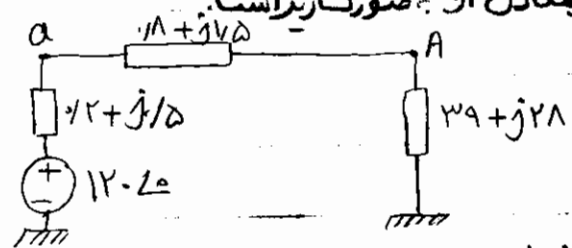
$$\rightarrow \begin{cases} P_T = 3 V_{\phi} \cdot i_{\phi} \cos \theta_{\phi} \\ Q_T = 3 V_{\phi} \cdot i_{\phi} \sin \theta_{\phi} \\ S_T = 3 V_{\phi} \cdot I_{\phi}^* \end{cases}$$

$$i_{\phi} = i_L, \quad V_L = \sqrt{3} V_{\phi} \quad = \text{در بار ستاره}$$

$$\begin{cases} P_T = \sqrt{3} \cdot V_L \cdot i_L \cos \theta_{\phi} \\ Q_T = \sqrt{3} \cdot V_L \cdot i_L \sin \theta_{\phi} \\ S_T = \sqrt{3} V_L \cdot i_L \angle \theta_{\phi} \end{cases}$$

تمرین بیانات کنید در حالت مثلث متعادل نیز همین روابط برقرار است.

مثال: مدار سه فازی داریم که مدار تک فاز متعادل آن به صورت زیر است.



مطلوبست محاسبه توان مصرفی بار

خط، مولد و همچنین تحقیق اصل بقای انرژی

$$I_{AA} = 11.5 \angle -36.19^\circ$$

$$V_{AN} = 115.22 \angle -1.19^\circ, \quad V_{AB} = 199.58 \angle$$

$$P_L = 3 \times (115,21)(2,4) \cos[35,48^\circ]$$

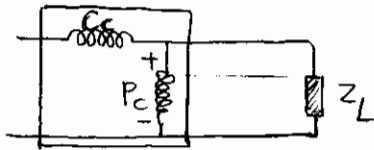
$$= \sqrt{3} (199,58)(2,4) \cos[35,48^\circ] = 224,42$$

$$P_{خط} = 3 \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) (2,4)^2 = 13,824 \quad \cdot \quad P_{ژنراتور} = 3 \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) (2,4)^2 = 13,824$$

$$\rightarrow P_{مغزین} = 991,2 \quad \cdot \quad Q_{مغزین} = 518,4$$

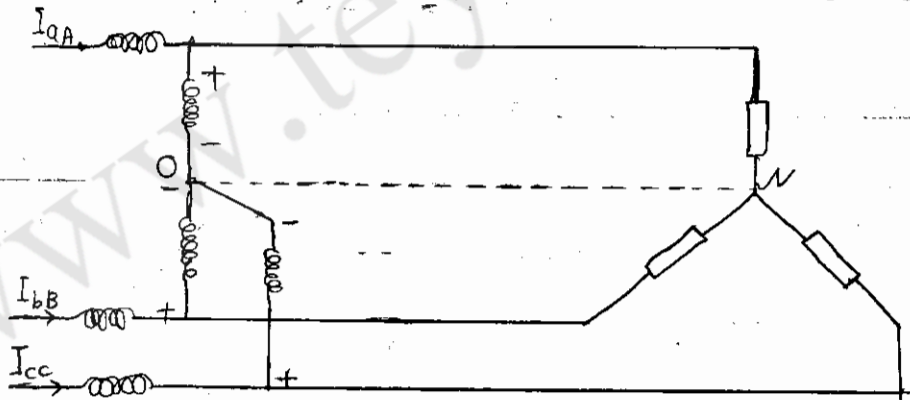
$$S = -120 \angle 0^\circ \times 2,4 \angle 36,17^\circ = -991,2 - j518,4$$

اندازه گیری توان در مدار سه فاز با وات متر:



در مدار تک فاز

همین ترکیب در مدار سه فاز (ستاره)



$$S = V_{AN} \cdot I_{aA}^* + V_{BN} \cdot I_{bB}^* + V_{CN} \cdot I_{cC}^*$$

چند نکته: V_0 :

۱- نقطه O به هر نقطه ای وصل شود تفاوتی در قرائت وات مترها نخواهد داشت (در مدار سه سیم)

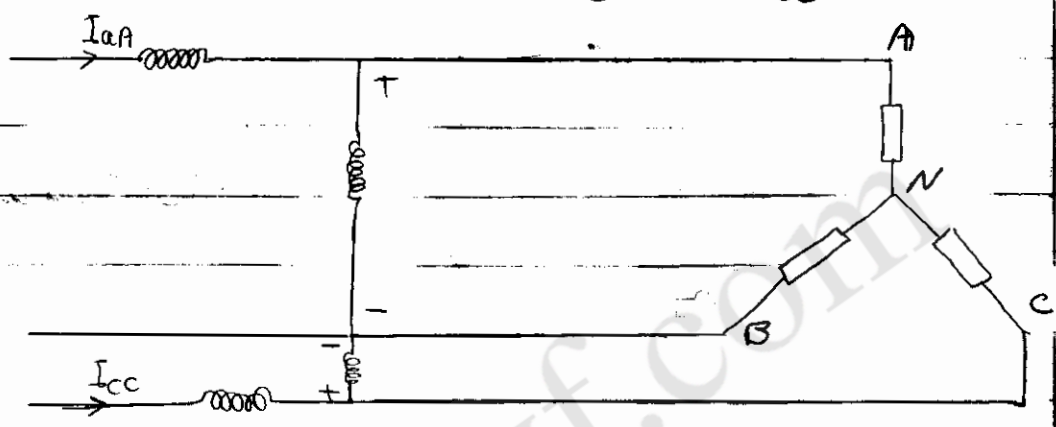
$$S' = (V_{AN} - V_0) I_{aA}^* + (V_{BN} - V_0) I_{bB}^* + (V_{CN} - V_0) I_{cC}^*$$

$$S' = S - V_0 [I_{aA}^* + I_{bB}^* + I_{cC}^*]$$

$$I_{aA} + I_{bB} + I_{cC} = 0 \quad \text{چون}$$

$$\rightarrow S' = S$$

۲- در مدار سه فاز (سه سیمه) می توان با دو واتمتر توان کل را قرائت کرد.



$$V_0 = V_{BN} \rightarrow S' = S = (V_{AN} - V_{BN}) \cdot I_{aA}^* + (V_{CN} - V_{BN}) \cdot I_{cC}^*$$

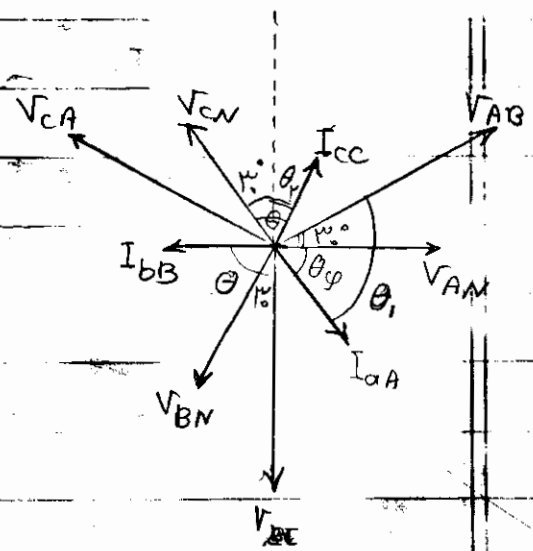
$$\rightarrow S = V_{AB} \cdot I_{aA}^* + V_{CB} \cdot I_{cC}^*$$

قرائت توان در مدار سه فاز معادل با دو واتمتر:

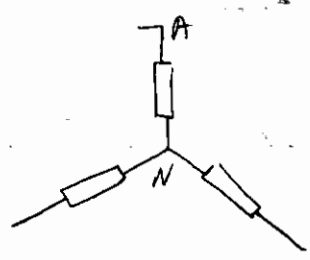
$$W_1 = V_L \cdot I_L \cos(\theta\phi + 30^\circ)$$

$$W_2 = V_L \cdot I_L \cos(\theta\phi - 30^\circ)$$

با دقت در شکل پی به نحوه اثبات می برید.



$V_{AN} = 12 \angle 0^\circ$



مثال: قرانت و انترهای W_1, W_2 را در حالت های زیر محاسبه کنید:

$Z_L = 8 - j4$ - ۲
 $Z_L = 10 \angle -74^\circ$ - ۴

$Z_L = 8 + j4$ - ۱
 $Z_L = 5 + j5\sqrt{3}$ - ۳

$\theta_\varphi = 37.87^\circ$
 $V_\varphi = 120^\circ$
 $V_L = 120\sqrt{3}$

حل ۱ =

$\rightarrow I = \frac{120 \angle 0^\circ}{10 \angle 37.87^\circ} = 12 \angle -37.87^\circ$
 $i_\varphi = i_L$

① $W_1 = 120\sqrt{3} \times 12 \cos[37.87^\circ + 30^\circ] = 974$
 $W_2 = 120\sqrt{3} \times 12 \cos[37.87^\circ - 30^\circ] = 2474$

به همین ترتیب:

② $W_1 =$
 $W_2 =$

③ $W_1 =$
 $W_2 =$

④ $W_1 =$
 $W_2 =$

نکته: در قرانت و انترها در مدار سه فاز متعادل

۱- اگر زاویه بار از 4° کوچکتر باشد ($\cos \theta_p > 1/5$) باشد هر دو انتر و وات مثبت قرانت می کنند

۲- اگر زاویه بار برابر 9° باشد یکی از دو وات منفی قرانت می کند.

۳- اگر زاویه بار از 7° بزرگتر باشد یکی از دو وات منفی قرانت می کند.