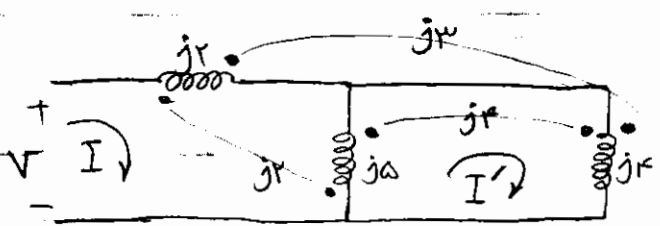
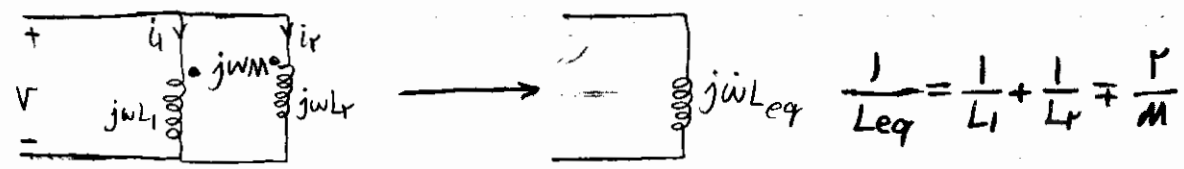
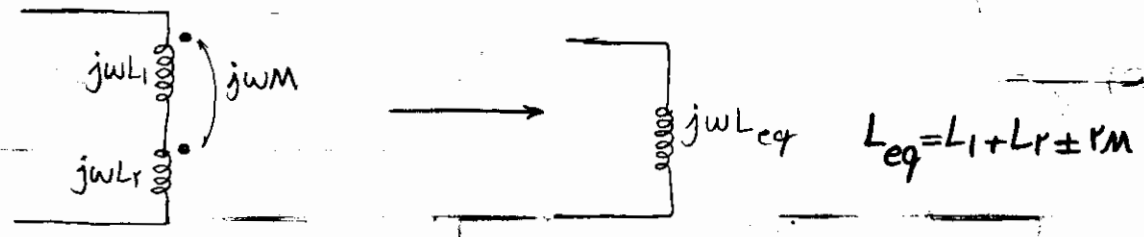


امپدانس معادل برای سلفهای سری و موازی تزویج شده :



حالت سری - موازی :

$$V = jx_2 I + jx_5(I - I') + jx_3 I' - jx_2(I - I') - jx_2 I + jx_4 I'$$

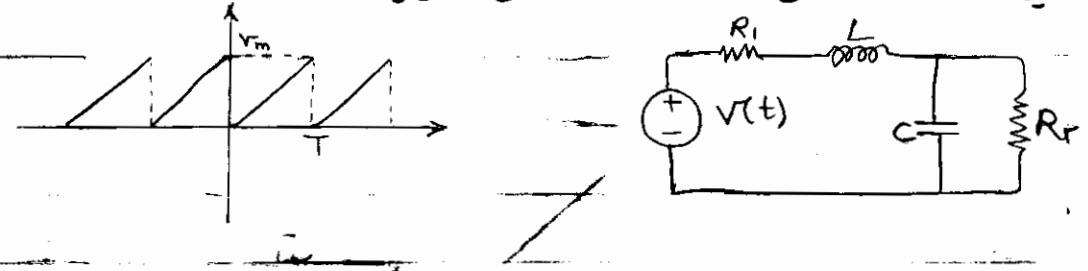
$$0 = jx_5(I' - I) + jx_4 I' + jx_2 I - jx_4 I' - jx_3 I - jx_5(I' - I)$$

در دو معادله بالا I' را حذف کرده و Zeq را از رابطه زیر بدست می آوریم :

$$Z_{eq} = \frac{V}{I}$$

سری فوری و کاربرد آن در تحلیل مدارهای الکتریکی :

مدارهایی هستند که با منابع متناوب غیر سینوسی تحریک می شوند



سری فوریه : اگر تابع $f(t)$ { در مدار منظور $v(t)$ یا $i(t)$ } دارای شرایط زیر باشد

۱- متناوب باشد با دوره تناوب T : $f(t) = f(t+T)$

۲- تک مقدار باشد ۳- دارای تعداد محدود حتماً کثرت حداقل در یک دوره تناوب باشد

۴- دارای تعداد محدود ناپیوستگی در یک دوره تناوب باشد

۵- $\int_T |f(t)| dt < \infty$

در آن صورت می توان آن را به صورت یک سری مثلثاتی (سری فوریه) نمایش داد.

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$, $f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t$

$a_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) dt$, $a_n = \frac{2}{T} \int_T f(t) \cos n\omega_0 t dt$, $b_n = \frac{2}{T} \int_T f(t) \sin n\omega_0 t dt$

حالت های خاص :

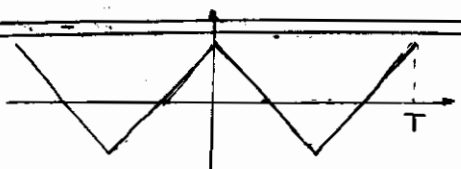
۱- اگر $f(t)$ زوج باشد : $a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt$, $a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos n\omega_0 t dt$, $b_n = 0$

۲- اگر تابع فرد باشد : $a_0 = a_n = 0$, $b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin n\omega_0 t dt$

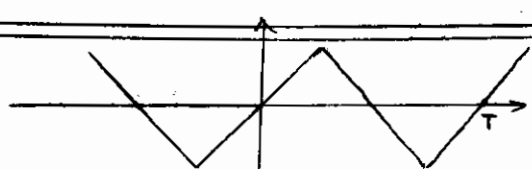
۳- اگر تابع دارای تقارن نیم موجی باشد یعنی : $f(t) = -f(t - \frac{T}{2})$

در آن صورت a_n و b_n به ازای n های زوج صفر هستند

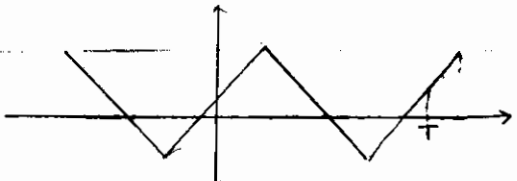
مثال:



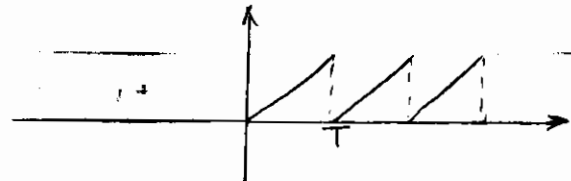
زوج و دارای تقارن نیم موجی



فرد و دارای تقارن نیم موجی

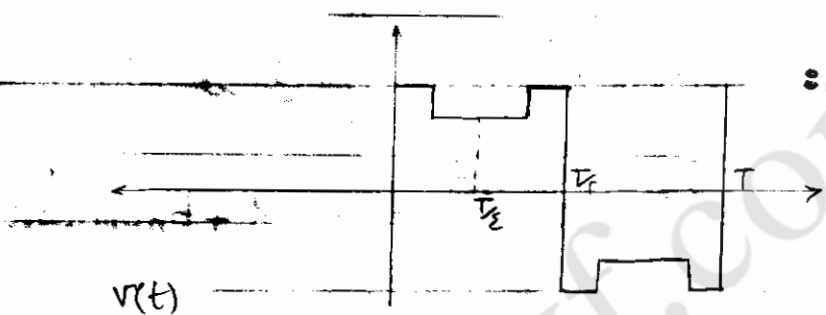


زوج و نه فرد و دارای تقارن نیم موجی

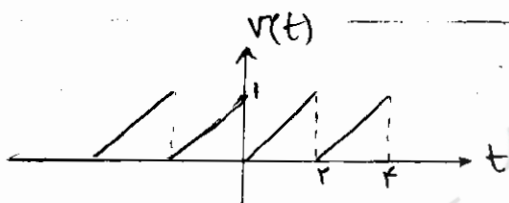


دراری تقارن نیم موجی نیست.

تقارن ربع موجی:



مثال: موج دندان اره ای



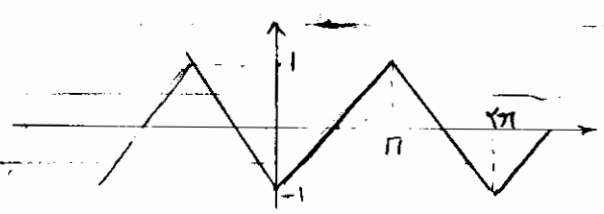
$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \pi$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{T} t dt = \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{T} t^2 \Big|_0^T = \frac{1}{T}$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T \frac{1}{T} t \cos n\pi t dt = \frac{1}{T} \left[\frac{t}{n\pi} \sin n\pi t + \frac{1}{n^2 \pi^2} \cos n\pi t \right]_0^T = 0$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T \frac{1}{T} t \sin n\pi t dt = \frac{1}{T} \left[-\frac{t}{n\pi} \cos n\pi t + \frac{1}{n^2 \pi^2} \sin n\pi t \right]_0^T = -\frac{\cos n\pi}{n\pi}$$

$$\rightarrow v(t) = \frac{1}{T} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin n\pi t$$



$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 1$$

مثال:

$$a_0 = 0, \quad b_n = 0$$

$$a_n = \frac{2}{T\pi} \int_0^{\pi} \frac{T}{\pi} (t - \frac{\pi}{2}) \cos nt dt = \frac{2}{n^2 \pi^2} [1 + \cos n\pi]$$

$$\rightarrow i(t) = \frac{r}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 + \cos n\pi)}{n^2} \cos nt = -\frac{r}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos nt$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} \quad \text{فرم مضطرب سری فوریه:}$$

$$C_n = \frac{1}{T} \int_T f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt, \quad \begin{cases} C_n = \frac{a_n}{r} + j \frac{b_n}{r} = |C_n| e^{-j\theta_n} \\ |C_n| = \frac{1}{r} \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \theta_n = \arctg \frac{b_n}{a_n} \end{cases}$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |C_n| e^{j(n\omega_0 t - \theta_n)} \quad \text{فرم دیگر سری مضطرب فوریه:}$$

$$|a| e^{j(\omega_0 t - \theta_0)} + |c| e^{-j(\omega_0 t - \theta_0)} = 2|c| \cos(\omega_0 t - \theta_0) \quad \text{ی دانیم که}$$

$$\xrightarrow{\text{فرم کلیدی}} f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t - \theta_n), \quad \begin{cases} A_n = r |C_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \\ \theta_n = \arctg \frac{b_n}{a_n} \end{cases}$$

$$f(t) = \frac{1}{r} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin n\pi t \quad \text{مثال موج دندان اره ای:}$$

$$a_n = 0, \quad b_n = -\frac{1}{n\pi} \rightarrow A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \frac{1}{n\pi}, \quad |C_n| = \frac{1}{r n \pi}$$

$$\theta_n = \text{Arctg} \left(\frac{-1/n\pi}{0} \right) = -\frac{\pi}{2}$$

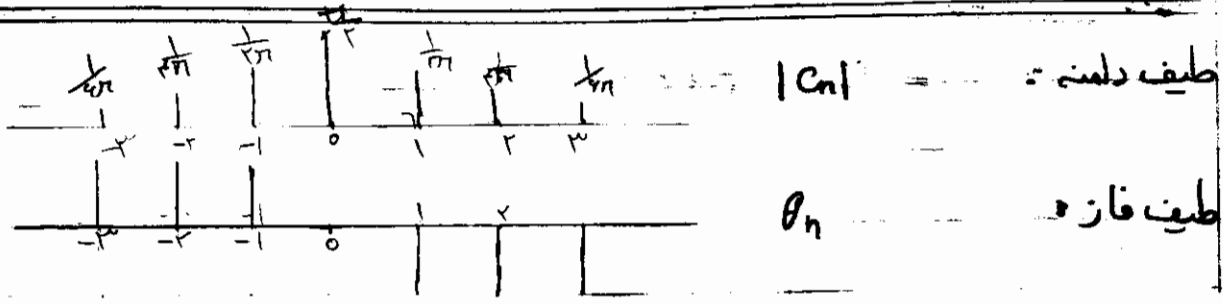
$$f(t) = \frac{1}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \cos(n\pi t + 90^\circ)$$

$$\therefore f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{r n \pi} e^{j(n\pi t + 90^\circ)}, \quad n \neq 0$$

$$\therefore f(t) = \frac{1}{r} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{j}{r n} e^{jn\pi t}, \quad n \neq 0$$

چند بحث جانبی در مورد سری فوریه:

- ۱- طبقه‌بندی رفاژ
- ۲- قضیه سری معرود فوریه
- ۳- خواص سری فوریه



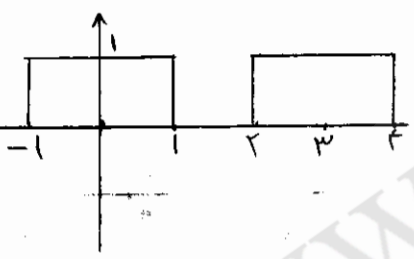
کاربردهای طیف دامنه:

۱- مقایسه پاسخ فرکانسی مدار با طیف دامنه ورودی ایده‌آلی از خروجی مدار می‌دهد

۲- در استفاده از سری محدود فوریه کمک زیادی می‌کند

سری محدود فوریه:
$$f_N(t) = a_0 + \sum_{n=1}^N A_n \cos(n\omega_0 t - \theta_n)$$

مثال: فرم مضامین سری فوریه تابع مقابل را محاسبه کنید.



فرم‌های حقیقی و کسینوسی آن را بنویسید و طیف دامنه

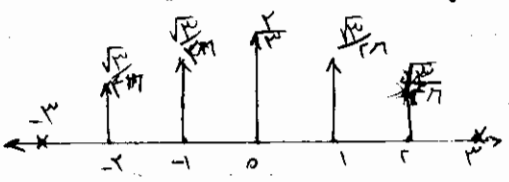
و فاز آن را رسم کنید.

$$C_n = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 e^{-jn\frac{\omega_0}{\pi}t} dt = \begin{cases} \frac{2}{\pi} & n=0 \\ \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{-jn\frac{\omega_0}{\pi}} e^{-jn\frac{\omega_0}{\pi}t} \Big|_{-1}^1 & n \neq 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow C_n (n \neq 0) = \frac{1}{jn\pi} \left[e^{-jn\frac{\omega_0}{\pi}} - e^{+jn\frac{\omega_0}{\pi}} \right] = \frac{\sin \frac{\omega_0}{\pi}}{n\pi}$$

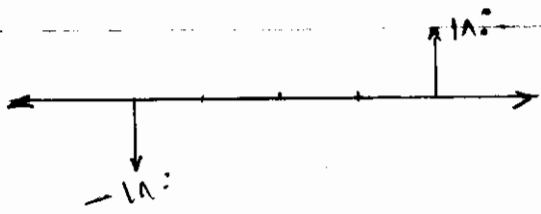
$$f(t) = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \frac{\sin \frac{n\pi}{\pi}}{n\pi} \cos \frac{\omega_0 n t}{\pi}$$

فرم حقیقی که همان فرم کسینوسی است



$$|C_n| = \frac{|\sin \frac{\omega_0 n}{\pi}|}{|n\pi|}$$

طیف دامنه و فاز:



θ_n

سوال: آیا ضرایب سری فوریه برای سری محدود فوریه بهترین هستند یا خیر؟

$$f_N(t) = a_0 + \sum_{n=1}^N (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)$$

تابع خطا = $J = \int e^2(t) dt$, $e(t) = f(t) - f_N(t)$

ضرایب بهترین هستند که به ازای آن ضرایب J حداقل شود.

$$J = \int_T [f(t) - [a_0 + \sum_{n=1}^N a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t]]^2 dt =$$

$$\frac{\partial J}{\partial a_0} = 0 \rightarrow a_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) dt$$

$$\frac{\partial J}{\partial a_n} = 0 \rightarrow a_n = \frac{2}{T} \int_T f(t) \cos n\omega_0 t dt$$

$$\frac{\partial J}{\partial b_n} = 0 \rightarrow b_n = \frac{2}{T} \int_T f(t) \sin n\omega_0 t dt$$

خواص سری فوریه =

۱- خاصیت خطی بودن = $f_1(t) \leftrightarrow C_n$, $f_2(t) \leftrightarrow C'_n$, $a f_1(t) + b f_2(t) \leftrightarrow a C_n + b C'_n$

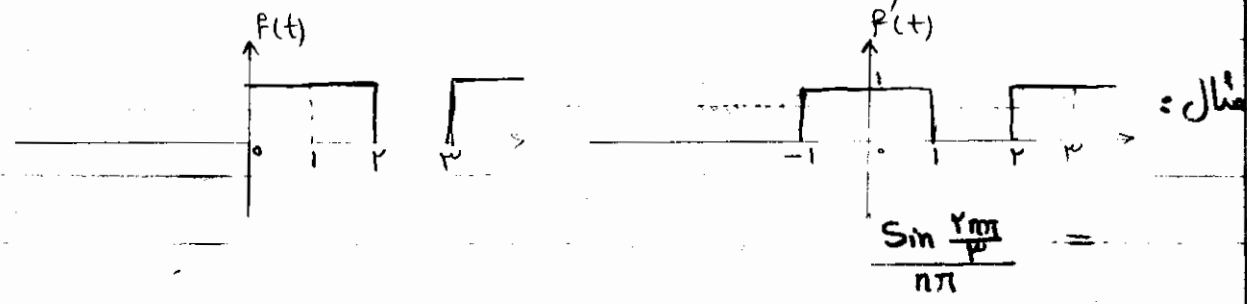
۲- خاصیت تقارن = $C_n^* = C_{-n}$

به عبارت دیگر اگر به جای n ، -n بگذاریم و یا به جای n ، -n بگذاریم جواب یکی است.

تسریب ثبات تکیند طیف دهنده همیشه زوج و طیف فاز همیشه فرد است.

۳- خاصیت انتقال =

$$F(t) \longleftrightarrow C_n \longrightarrow F(t-t_0) \longleftarrow e^{-jn\omega_0 t_0} \cdot C_n$$



$$F(t) = F'(t-1) \longrightarrow e^{-jn \frac{r\pi}{p}} \cdot \frac{\text{Sin } \frac{r\pi n}{p}}{n\pi}$$

$$F(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t \quad \text{قضیه پارسوال}$$

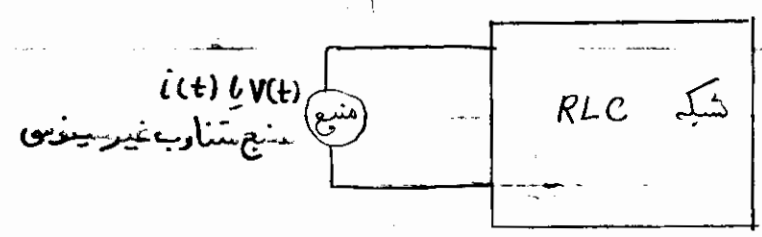
$$\frac{1}{T} \int_T F'(t) dt = a_0' + \frac{1}{p} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n' + b_n')$$

یادآوری:

$$F(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t - \theta_n)$$

$$F(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |C_n| e^{j(n\omega_0 t - \theta_n)}$$

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \theta_n = \text{Arctg } \frac{b_n}{a_n}, \quad |C_n| = \frac{1}{p} A_n$$

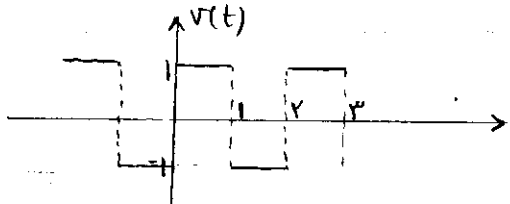
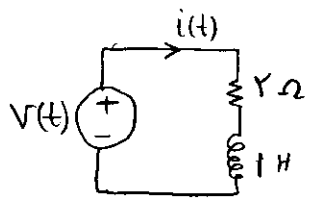


فعلاً فرض ما بر این است که دنبال مناسب جواب خصوصی هستیم. به عبارت دیگر مدار از ...

در همین حالت بوده است.

نکته: اگر کلیدزنی در مدار داشته باشیم تفاوت در این است که یک جواب همگن نیز اضافه می شود که

بمشقتل این قسمت در بخش تبدیل لاپلاس خواهیم کرد.



مثال: $i(t) = ?$

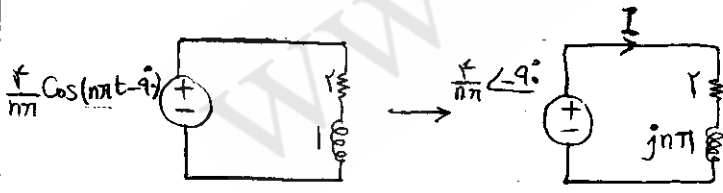
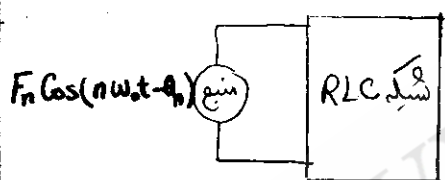
الگوریتم کار

۱- سری فوریته منبع را حساب می کنیم: $f(t) = F_{dc} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$

$$f(t) = F_{dc} + \sum_{n=1}^{\infty} F_n \cos(n\omega t - \theta_n)$$

$$\rightarrow v(t) = \frac{f}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} \sin n\pi t = \frac{f}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} \cos(n\pi t - 90^\circ)$$

۲- منبع را با $v_n(t)$ به خرم زیر جایگزینی کنیم:



۳- مدار را به حوزه فاز بویاری ببریم:

$$Y = B_n \angle -\theta_n$$

۴- متغیر دلخواه را محاسبه می کنیم:

$$\begin{aligned} \rightarrow I &= \frac{\frac{f}{n\pi} \angle -90^\circ}{2 + jn\pi} = \frac{-jf}{n\pi(1 + jn\pi)} = \frac{-jf(2 - jn\pi)}{n\pi(2 + n^2\pi^2)} = \frac{-f(n\pi + j2)}{n\pi(2 + n^2\pi^2)} \\ &= \frac{-f\sqrt{n^2\pi^2 + 2}}{n\pi(2 + n^2\pi^2)} \angle \tan^{-1} \frac{2}{n\pi} \end{aligned}$$

$$\rightarrow i(t) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{-f\sqrt{n^2\pi^2 + 2}}{n\pi(2 + n^2\pi^2)} \cos(n\pi t + \tan^{-1} \frac{2}{n\pi})$$

اشکال استفاده از سری فوریه در تحلیل مدارهای الکتریکی این است که پاسخ را به فرم بسته

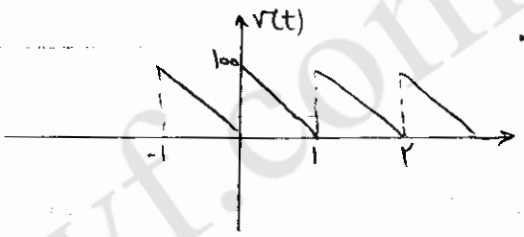
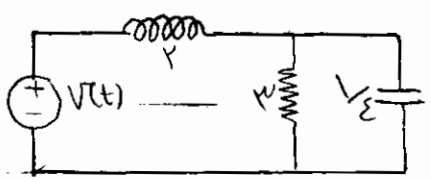
(در حالت کلی) نمی توان بدست آورد. به همین دلیل گاهی توجیح و دهیم از سری محدود فوریه

استفاده کنیم.

۵- جواب مدار به فرم زیر است:

$$y(t) = y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(n\omega_0 t - \theta'_n)$$

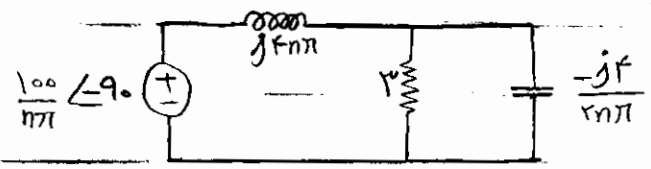
یا مدار را برای F_{dc} است.



$$\rightarrow v(t) = 50 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{100}{n\pi} \sin(n\pi x t) = 50 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{100}{n\pi} \cos(n\pi t - 90^\circ)$$

$$i(t) = I_{dc} + \sum_{n=1}^{\infty} I_n \cos(n\pi t - \theta'_n)$$

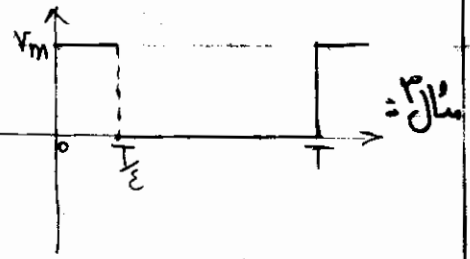
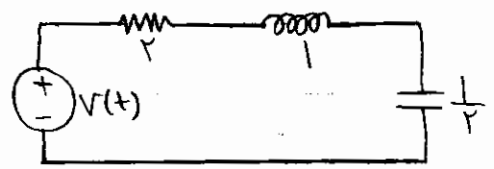
$$I_{dc} = \frac{50}{r}$$



$$I = I_n \angle -\theta'_n = \frac{-j \frac{100}{n\pi}}{jfn\pi + r \angle -j\frac{r}{fn\pi}} = \frac{r n \pi - jr}{j 12 n^2 \pi^2 + 12 n \pi - jr}$$

$$= \frac{\sqrt{9 n^2 \pi^2 + r}}{\sqrt{(12 n^2 \pi^2 - 4)^2 + (12 n \pi)^2}} \angle -\theta'_n$$

$$\theta'_n = \tan^{-1} \frac{12 n^2 \pi^2 - 4}{12 n \pi} - \tan^{-1} \frac{r}{r n \pi}$$



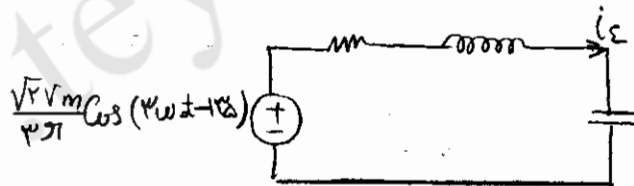
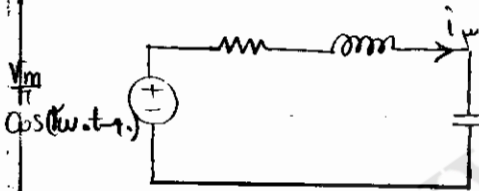
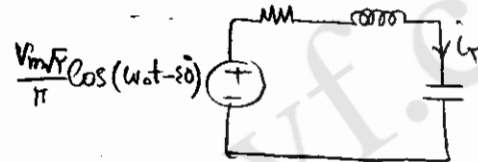
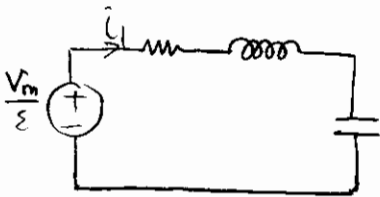
الف - ۴ جمله اول سری فوریه $v(t)$ را محاسبه کنید.

ب - جریان حلقه را به ازاء این ۴ جمله محاسبه کنید.

الف - $a_0 = \frac{V_m}{F}$, $a_n = \frac{V_m}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{r}$, $b_n = \frac{V_m}{n\pi} (1 - \cos \frac{n\pi}{r})$

, $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, $\theta_n = \text{Arctg} \frac{b_n}{a_n}$

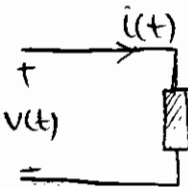
→ $v(t) = \frac{V_m}{F} + \frac{V_m \sqrt{r}}{\pi} \cos(\omega_0 t - 45^\circ) + \frac{V_m}{\pi} \cos(2\omega_0 t - 9^\circ)$
 $+ \frac{\sqrt{r} V_m}{2\pi} \cos(3\omega_0 t - 135^\circ)$



چهار مدار را حل می کنیم:

$i(t) = i_1 + i_2 + i_3 + i_4$

مقدار متوسط توان:



$v(t) = V_m \cos(\omega t - \theta_v)$

$i(t) = I_m \cos(\omega t - \theta_i)$

جادآوری:

$P(t) = v(t) \cdot i(t) = V_m I_m \cos(\omega t - \theta_v) \cos(\omega t - \theta_i)$

$P_{av} = \frac{1}{T} \int P(t) dt = \frac{V_m I_m}{r} \cos(\theta_v - \theta_i)$

حال اگر $v(t)$ و $i(t)$ متناوب غیر سینوسی باشند:

$$V(t) = V_{dc} + \sum_{n=1}^{\infty} V_n \cos(n\omega_0 t - \theta_{Vn})$$

$$i(t) = I_{dc} + \sum_{n=1}^{\infty} I_n \cos(n\omega_0 t - \theta_{In})$$

$$P(t) = V(t) \cdot i(t)$$

$$P_{av} = V_{dc} \cdot I_{dc} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{V_n I_n}{r} \cos(\theta_{Vn} - \theta_{In})$$

یاد آوری: مقدار موثر سیگنالها (جریانها و ولتاژها)

$$F_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_T P^r(t) dt}$$

$$F_{rms} = \frac{F_m}{\sqrt{r}}$$

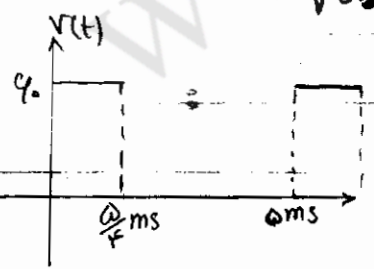
اگر $P(t)$ سینوسی باشد:

$$\frac{1}{T} \int_T P^r(t) dt = a_0^r + \frac{1}{T} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^r + b_n^r)$$

یاد آوری پارمول:

$$= a_0^r + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n^r}{r} = a_0^r + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{A_n}{\sqrt{r}}\right)^r$$

$$F_{rms} = \sqrt{a_0^r + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{A_n}{\sqrt{r}}\right)^r}$$



مثال: ولتاژی به فرم زیر به مقاومتی $R = 5 \Omega$ متصل است.

الف- جمله اول سری فوری $V(t)$ را محاسبه کنید.

ب- با استفاده از سری محدود فوری (همان جمله اول) توان مصرف شده در مقاومت R را محاسبه کنید.

ج- مقدار موثر سیگنال را از رابطه $V_{rms}^r = \frac{1}{T} \int_T V^r(t) dt$ محاسبه کرده و توان کل را به طور دقیق

$$P = \frac{V_{rms}^r}{R}$$

محاسبه کنید.

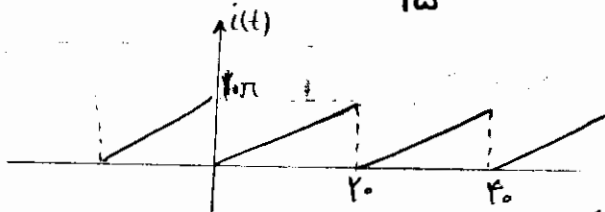
$\omega_0 = 400\pi \text{ rad/s}$, $V_{dc} = 15$ → چند صدتول در جمله اول است.

$A_1 = 27$, $A_2 = 19.1$, $A_3 = 9$, $A_4 = 0$, $A_5 = 5.2$
 $\theta_1 = 45^\circ$, $\theta_2 = 9^\circ$, $\theta_3 = 135^\circ$, $\theta_4 = 0$, $\theta_5 = 45^\circ$

وات $P = \frac{(15)^2}{15} + \frac{(\frac{27}{\sqrt{2}})^2}{15} + \frac{(\frac{19.1}{\sqrt{2}})^2}{15} + \frac{(\frac{9}{\sqrt{2}})^2}{15} + \frac{(\frac{5.2}{\sqrt{2}})^2}{15} = 54$

$V_{rms}^2 = \frac{1}{\Delta x 10^{-3}} \int_0^{\Delta x 10^{-3}} (40)^2 dt = 900$ وات

→ $P = \frac{900}{15} = 60$ وات و $\frac{54}{60} = \frac{14}{15} \%$



مثال: الف - سری فوریته $i(t)$ را محاسبه کنید.

ب - مقدار موثر را با استفاده از ۳ جمله اول محاسبه کنید. ج - مقدار موثر را با استفاده از ۵ و ۷ جمله

اول محاسبه کنید. → مقدار موثر واقعی را محاسبه کنید.

$i(t) = 5\pi - 10 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin 100n\pi t$

$I_{dc} = 5$, $A_n = \frac{10}{n}$ → $I_{rms} = \sqrt{I_{dc}^2 + \sum_{n=1}^N \left(\frac{A_n}{\sqrt{2}}\right)^2}$

$N=3$ → $I_{rms} = 17.74$

$N=5$ → $I_{rms} = 17.89$

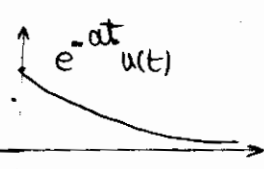
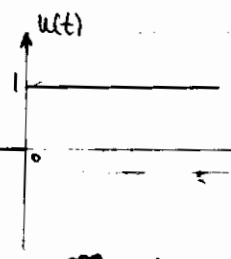
$N=7$ → $I_{rms} = 17.95$

$I_{rms} = \sqrt{\frac{10^2}{2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{10}{20} t\right)^2 dt} = 18.14$

تبدیل فوری و کاربرد آن در مدارهای الکتریکی =

اگر تابع $F(t)$ دارای شرط زیریکله باشد $\int_{-\infty}^{+\infty} |F(t)| dt < \infty$ آن گاه :

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) e^{-j\omega t} dt$$

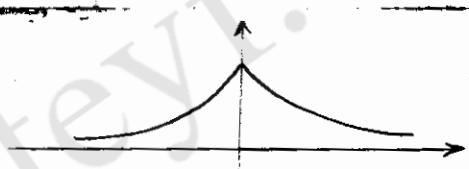


مثال =

$$F(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-at} \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(a+j\omega)t} dt = \frac{1}{-(a+j\omega)} e^{-(a+j\omega)t} \Big|_0^{\infty}$$

$$= \frac{1}{a+j\omega}$$

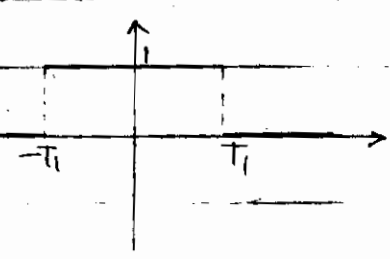
$$F(t) = e^{-a|t|} \quad , \quad a > 0$$



مثال =

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|t|} \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^0 e^{at} \cdot e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-at} \cdot e^{-j\omega t} dt$$

$$= \frac{1}{a-j\omega} + \frac{1}{a+j\omega} = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$$



مثال =

$$F(\omega) = \int_{-T_1}^{T_1} (1) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{-j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_{-T_1}^{T_1} = \frac{1}{-j\omega} [e^{-j\omega T_1} - e^{+j\omega T_1}]$$

$$= \frac{2 \sin \omega T_1}{\omega}$$

نکته: یک دسته توابع هستند که در مسائل مهندسی از جمله تحلیل مدارهای الکتریکی به کار می روند

تبدیل فوریه ندارند مانند:

$$f(t) = u(t) \quad f(t) = \sin \omega_0 t$$

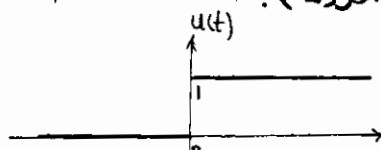
$$= 1 \quad = e^{j\omega_0 t}$$

$$= \cos t \quad = \operatorname{sgn}(t)$$

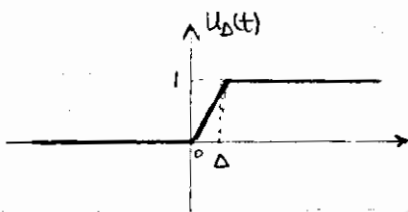
مثال:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega_0 t} \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j(\omega_0 - \omega)t} dt = \frac{1}{j(\omega_0 - \omega)} e^{j(\omega_0 - \omega)t} \Big|_{-\infty}^{+\infty}$$

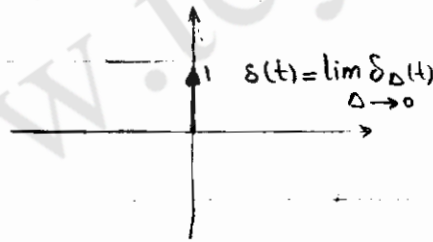
برای این دسته از توابع می توان تبدیل فوریه را محدود تعریف کرد (نه لزوماً):



یادآوری تعریف تابع ضربیه:



$$\delta_\Delta(t) \triangleq \frac{d u_\Delta(t)}{dt}$$



خصوص تابع ضربیه:

۱- $\delta(t) = 0 \quad , \quad t \neq 0$ ۲- $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$

۳- $x(t) \cdot \delta(t) = x(0) \cdot \delta(t)$ ۴- $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \delta(t - t_0) dt = x(t_0)$
 $x(t) \cdot \delta(t - t_0) = x(t_0) \delta(t - t_0)$

محاسبه تبدیل فوریه بعضی از توابع در حد:

۱- $f(t) = e^{j\omega t}$

ثابت می کنیم: $F(\omega) = 2\pi \delta(\omega - \omega_0)$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi \delta(\omega - \omega_0) e^{j\omega t} d\omega$$

رابطه معکوس تبدیل فوری

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} \delta(\omega - \omega_0) d\omega = e^{j\omega_0 t}$$

۱- $\cos \omega_0 t \longleftrightarrow \pi \delta(\omega - \omega_0) + \pi \delta(\omega + \omega_0)$

$\frac{1}{2} e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2} e^{-j\omega_0 t}$

۲- $\sin \omega_0 t \longleftrightarrow \pi j \delta(\omega - \omega_0) - \pi j \delta(\omega + \omega_0)$

$\frac{1}{2j} e^{j\omega_0 t} - \frac{1}{2j} e^{-j\omega_0 t}$

۳- $\frac{1}{e^{j\omega_0 t}} \Big|_{\omega_0=0} \longleftrightarrow 2\pi \delta(\omega)$

جدول تبدیل فوریته :

$f(t)$	$F(\omega)$
$e^{-at} u(t) \quad a > 0$	$\frac{1}{a + j\omega}$
$e^{-a t } \quad a > 0$	$\frac{2a}{a^2 + \omega^2}$
$\begin{cases} 1 & t < T_1 \\ 0 & t > T_1 \end{cases}$	$\frac{2 \sin \omega T_1}{\omega}$
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi \delta(\omega - \omega_0)$
1	$2\pi \delta(\omega)$
$\cos \omega_0 t$	$\pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$
$\sin \omega_0 t$	$\pi j [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$
$\delta(t)$	1
$\text{sgn}(t)$	$\frac{2}{j\omega}$
$u(t)$	$\frac{1}{j\omega} + \pi \delta(\omega)$

نتیجه خواص تبدیل فوریه =

$$F_1(t) \longleftrightarrow F_1(\omega)$$

$$F_2(t) \longleftrightarrow F_2(\omega)$$

$$aF_1(t) + bF_2(t) \longleftrightarrow aF_1(\omega) + bF_2(\omega)$$

۱- خاصیت خطی بودن =

$$F(-\omega) = F^*(\omega)$$

۲- خاصیت تقارن =

$$e^{-at} u(t)$$

$$\frac{1}{a+j\omega} = F(\omega)$$

$$\frac{1}{a-j\omega} = F(-\omega)$$

$$\frac{1}{\alpha+j\omega} = F^*(-\omega)$$

نتایج =

۱- $|F(\omega)|$, $\text{Re}\{F(\omega)\}$ توابع زوج هستند:

$$|F(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2+\omega^2}}, \text{Re}\{F(\omega)\} = \frac{a}{a^2+\omega^2} \quad \text{۲- در مثال قبل}$$

۳- $\angle F(\omega)$, $\text{Im}\{F(\omega)\}$ توابع فرد هستند.

تبدیل فوریه یک تابع زوج و حقیقی یک تابع زوج و حقیقی است.

$$F(t) \longleftrightarrow F(\omega) \quad \text{۳- خاصیت انتقال در حوزه زمان =}$$

$$f(t-t_0) \longleftrightarrow e^{-j\omega t_0} F(\omega)$$

$$\delta(t) \longleftrightarrow 1$$

$$\delta(t-t_0) \longleftrightarrow e^{-j\omega t_0}$$

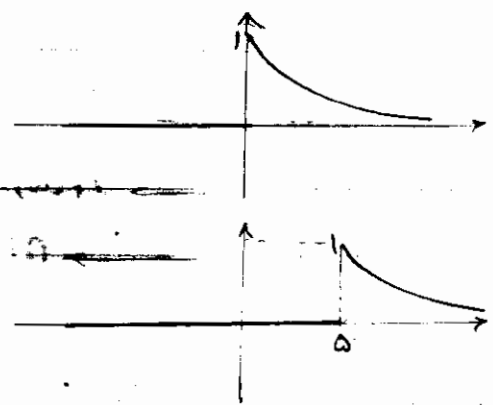
مثال =

$$F^{-1} \left[\frac{e^{-j\omega a}}{1+j\omega} \right] = ?$$

مثال

$$F^{-1} \left[\frac{1}{1+j\omega} \right] = e^{-t} u(t)$$

$$F^{-1} \left[\frac{e^{-j\omega a}}{1+j\omega} \right] = e^{-(t-a)} u(t-a)$$



$$f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$$

۴- خاصیت ضرب زمانی :

$$f(at) \longleftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

$$e^{-rt} \longleftrightarrow \frac{r}{1+r^2} \quad e^{-|rt|} = ?$$

مثال :

$$e^{-r|t|} \longleftrightarrow \frac{1}{r} \cdot \frac{r}{1+(\frac{\omega}{r})^2} = \frac{r}{r^2 + \omega^2}$$

$$f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$$

۵- مشتق در حوزه زمان :

$$\frac{df(t)}{dt} \longleftrightarrow j\omega F(\omega)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

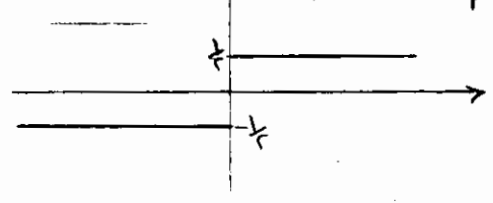
$$f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$$

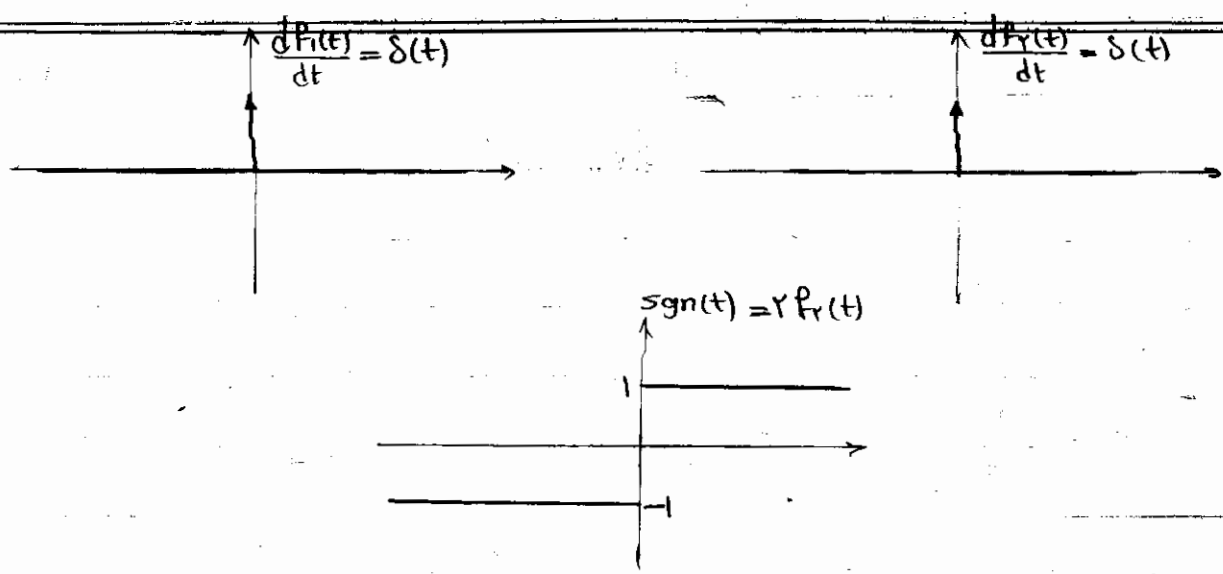
۶- انتگرال در حوزه زمان :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) d\epsilon \longleftrightarrow \frac{1}{j\omega} F(\omega) \quad \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 0 \text{ شرط براینکه: } \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 0 \text{ (میانگین صفر) } \right)$$

$$f_1(t) = f(t) + \frac{1}{T} \longleftrightarrow \frac{1}{j\omega} + \pi \delta(\omega)$$

$$f_2(t) = f(t) - \frac{1}{T} \longleftrightarrow \frac{1}{j\omega}$$



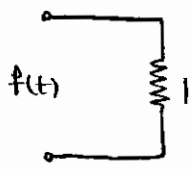


$$h(t) = g(t) * f(t)$$

۷- خاصیت کانولوشن:

$$\rightarrow H(\omega) = G(\omega) \cdot F(\omega)$$

۱- قضیه پارسل:



$$W_{R} = \int_{-\infty}^{+\infty} P^r(t) dt$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P^r(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

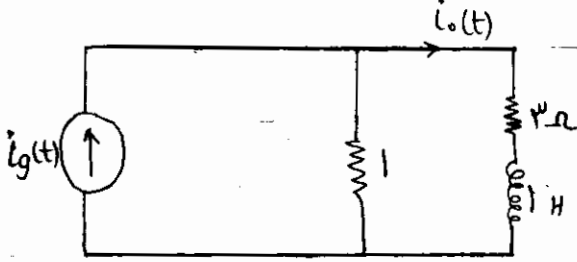
$$W_{R} = \int_{-\infty}^{+\infty} P^r(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

کاربرد تبدیل فوریه و در تحلیل مدارهای الکتریکی و استفاده از قضیه پارسل:

مسائل مدار ← منبع از $-\infty$ تعریف شده است.

منبع از صفر بعد تعریف شده است و شرایط اولیه داده شده است.

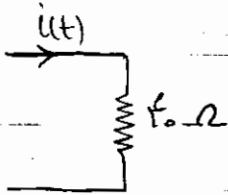
بلچند مثال با کاربرد تبدیل فوریه در تحلیل مدارها آشنای شویم:



مثال ۱: $i_g(t) = 20 \text{ Sgn}(t)$

$$I_o(\omega) = \frac{1}{1+j\omega} \cdot I_g(\omega) = \frac{1}{1+j\omega} \cdot \frac{20}{j\omega} = \frac{10}{j\omega} - \frac{10}{1+j\omega}$$

$$\rightarrow I_o(t) = 10 \text{ Sgn}(t) - 10 e^{-t} u(t)$$



مثال ۲: انرژی تلف شده کل را در این مقاومت
 $i(t) = 20 e^{-t} u(t)$

الف - در حوزه زمان محاسبه کنید.

ب - با استفاده از قضیه پاراسوال محاسبه کنید. ج - چقدر انرژی تلف شده مربوط به باند

فرکانسی $2\sqrt{F} \leq \omega \leq 2\sqrt{F}$ می باشد.

الف - $W_{F,2} = \int_0^{+\infty} [20 e^{-t}]^2 dt = 4000$ جول

ب - $20 e^{-t} u(t) \leftrightarrow \frac{20}{1+j\omega} = F(\omega)$

$$W_{F,2} = 40 \times \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega = \frac{40}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{400}{1+\omega^2} d\omega = \frac{4000}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+(\frac{\omega}{1})^2} d\omega$$

$$= 40 \times \frac{4000}{\pi} \left[\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{1}\right) \right]_0^{+\infty} = 4000$$

انرژی مربوط به باند

ج - $0 \leq \omega \leq 2\sqrt{F} = 40 \int_0^{2\sqrt{F}} |F(\omega)|^2 d\omega = \frac{16000}{\pi}$ جول