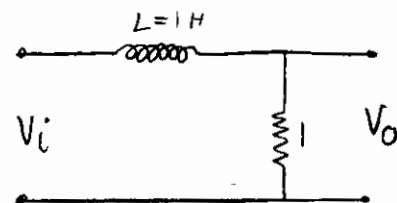
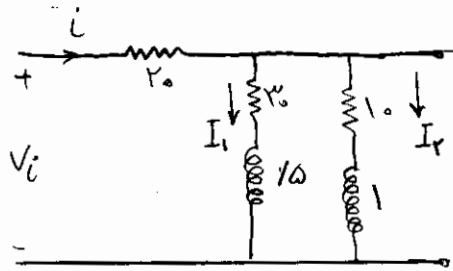


تابع تبدیل :

تعریف : نسبت دو متغیر در یک سیستم (مدار) در حوزه لاپلاس (با فرض اینکه شرایط اولیه صفر است)



مثال ۱:
$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{1+s}$$



مثال ۲:
$$\frac{I}{V_i} = \frac{1}{2.0 + \frac{(3.0 + 1/5s)(1/5 + s)}{s^2 + 13.0s + 22.00}}$$

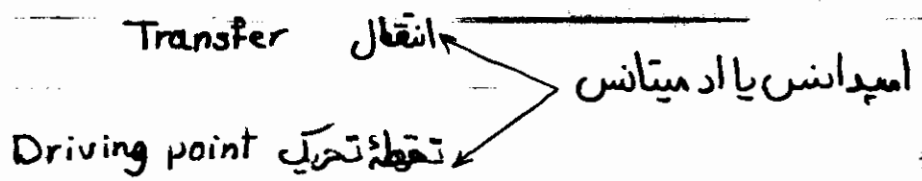
$$\frac{I_1}{I} = \frac{1.0 + s}{2.0 + 1/5s}$$

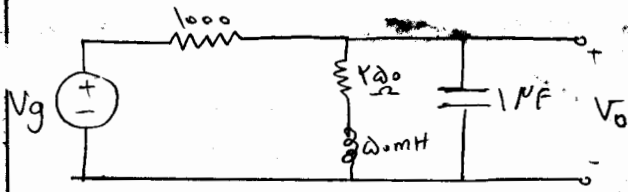
$$\frac{I_1}{V_i} = \frac{I_1}{I} \times \frac{I}{V_i} = \frac{(1.0 + s)(3.0s + 8.00)}{(2.0 + 1/5s)(s^2 + 13.0s + 22.00)}$$

چند تعریف :

۱- امپدانس : تابع تبدیل ولتاژ به جریان.

۲- ادمیتانس : تابع تبدیل جریان به ولتاژ.





$\frac{V_o}{V_g} = ?$

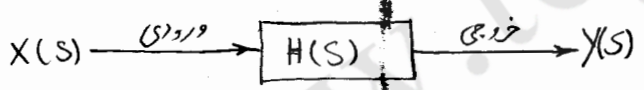
مثال =

$$\frac{V_o}{V_g} = \frac{Z_{eq}}{1000 + Z_{eq}}, \quad Z_{eq} = \frac{\frac{10^4}{s} (250 + j0.5s)}{\frac{10^4}{s} + 250 + j0.5s}$$

$$\rightarrow \frac{V_o}{V_g} = \frac{1000(s + 5000)}{s^2 + 2000s + 25 \times 10^4}$$

چندتعریف =

- ۱- صفر: مقداری از s است که تابع تبدیل را صفری کند.
- ۲- قطب: مقداری از s است که تابع تبدیل را بی نهایت کند.



به عبارت دیگر =

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

صورت تابع تبدیل
خرج تابع تبدیل

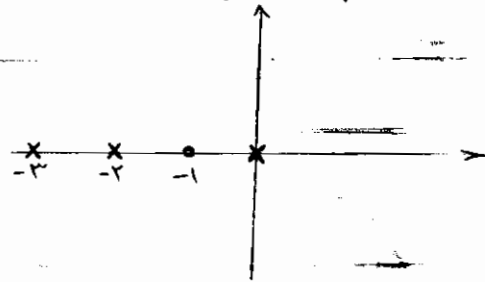
صفرهای تابع تبدیل همان ریشه های معادله $N(s) = 0$ است و قطبهای تابع تبدیل ریشه های معادله $D(s) = 0$ است.

نکته: عموماً صفرها با (0) و قطبها با (x) در صفت که نمایش می دهند.

مثال: صفر و قطبهای تابع تبدیل زیر را محاسبه نموده و آن را در صفت که نمایش دهید.

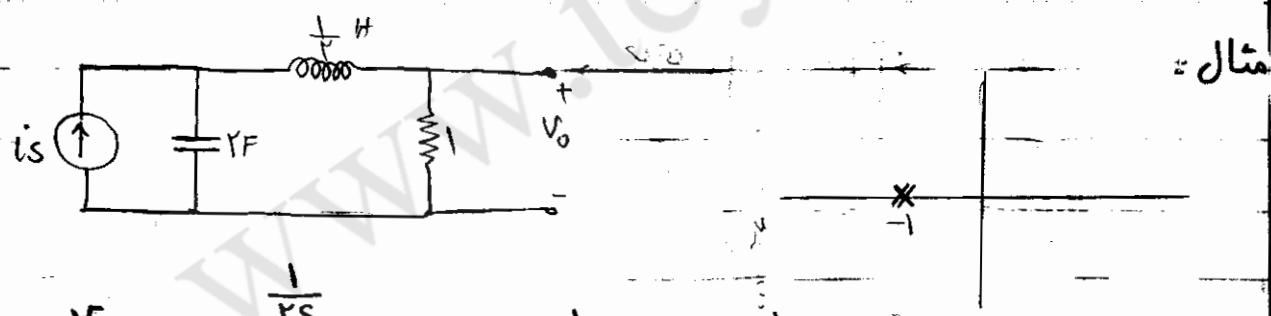
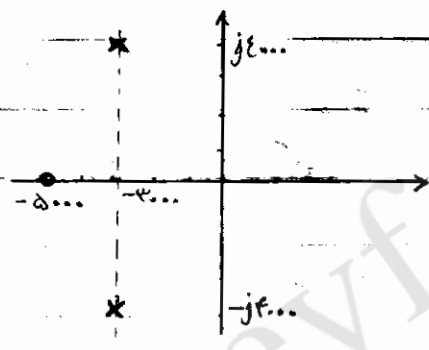
$$H(s) = \frac{s+1}{s(s+2)(s+3)}$$

صفر: -۱ قطب: ۰, -۲, -۳



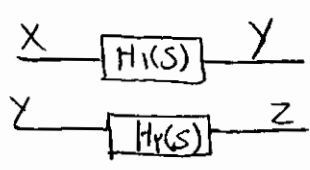
مثال:
$$H(s) = \frac{1000(s+5000)}{s^2 + 4000s + 25 \times 10^8}$$

صفر: -۵۰۰۰ قطب: $-2000 \pm j4000$



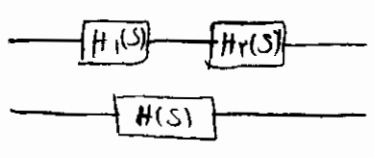
$$\frac{V_0}{I_s} = \frac{\frac{1}{sF}}{\frac{1}{sF} + sL + 1} = \frac{1}{s^2 + 2s + 1} = \frac{1}{(s+1)^2}$$

اشاره ای به ساده سازی بلوک دیاگرام ها:

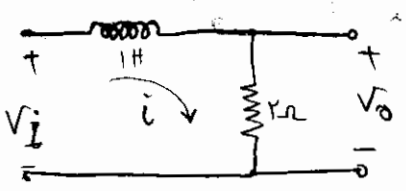


$\frac{Z}{X} = ?$

قانون لول:



$H(s) = H_1(s) \cdot H_2(s)$

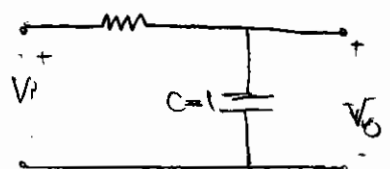
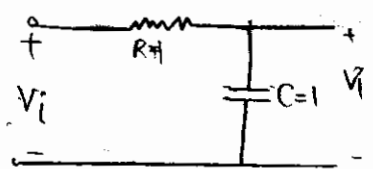


$$\frac{I}{V_I} = \frac{1}{s+2}$$

$$\frac{V_O}{I} = 2 \rightarrow \frac{V_O}{V_I} = \frac{2}{s+2}$$

نکته مهم: اگر تابع تبدیل را قبل از اتصال الکتریکی در قسمت محاسبه کرده باشیم باید مواظب

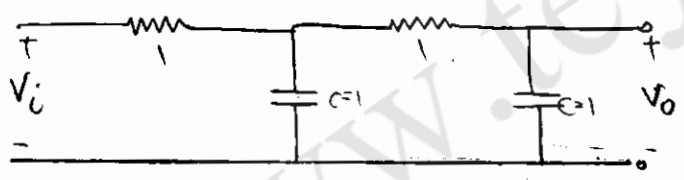
اثر بار گذری باشیم.



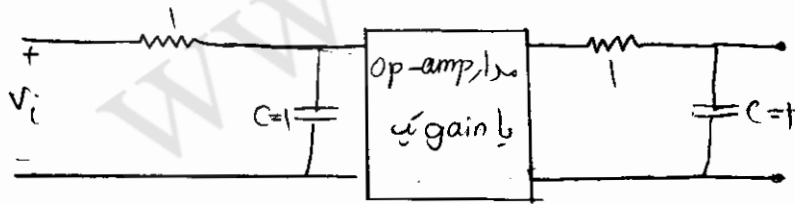
مثال =

$$\frac{V}{V_I} = \frac{1}{1+s}$$

$$\frac{V_O}{V_I} = \frac{1}{s+1}$$

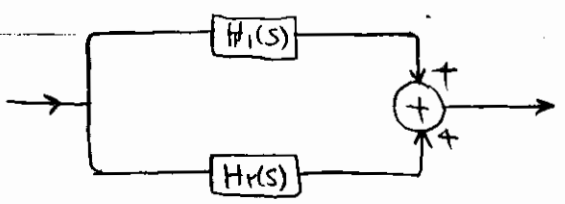


$$\frac{V_O}{V_I} = \frac{1}{s^2 + 3s + 1}$$

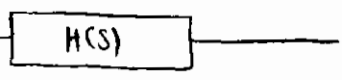


راه حل =

$$\frac{V_O}{V_I} = \frac{1}{s+1} \cdot \frac{1}{s+1} = \frac{1}{(s+1)^2}$$

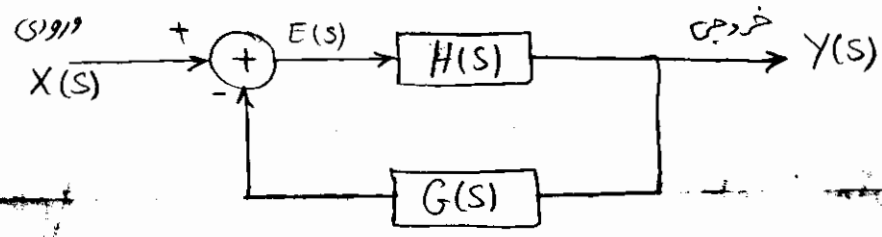


قانون دوم:



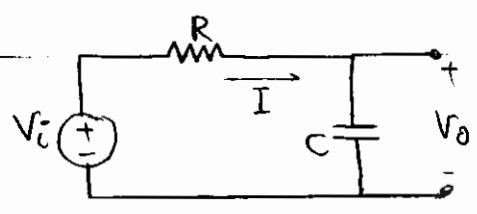
$$H(s) = H_1(s) + H_2(s)$$

قانون سوم (قانون فیدبک):



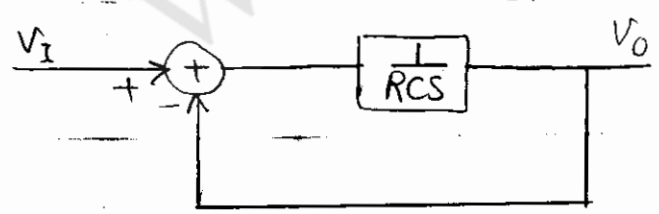
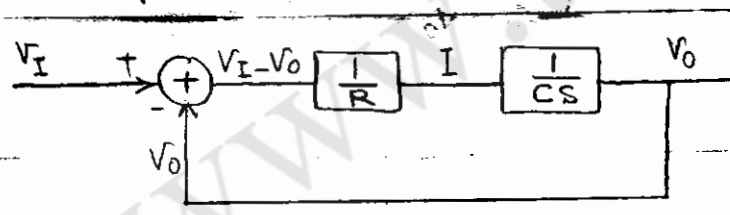
$$\frac{H(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

$$\begin{cases} Y(s) = H(s) \cdot E(s) \\ E(s) = X(s) - G(s)Y(s) \end{cases} \rightarrow \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{H(s)}{1 + G(s)H(s)}$$



مثال:

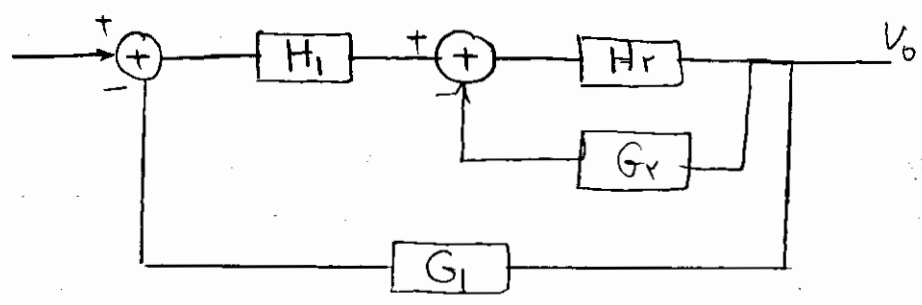
$$I = \frac{V_i - V_o}{R}, \quad V_o = \frac{1}{Cs} I$$



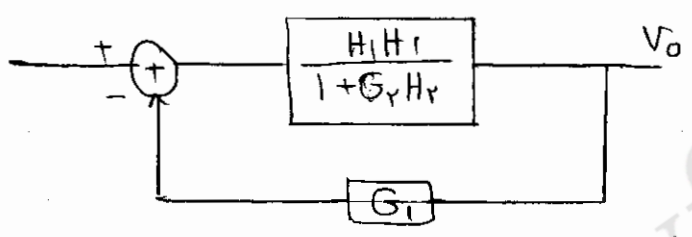
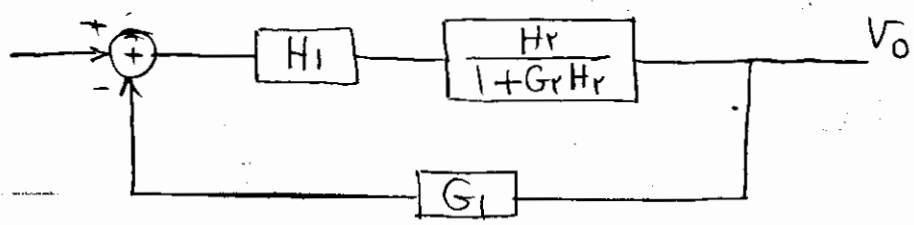
$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{\frac{1}{RCS}}{1 + \frac{1}{RCS}} = \frac{1}{1 + RCS}$$

نکته: در درس کنترل خطی بحث ساده سازی بلوک دیالگرام به طور مفصل بحث می شود و در این درس ما

با مسائلی سروکار داریم که با همین سه قانون ساده می شوند.

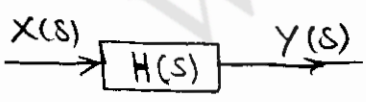


مثال =

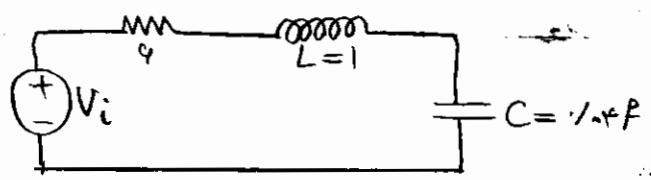


$$H(s) = \frac{H_1 H_r}{1 + G_v H_r} \rightarrow H(s) = \frac{H_1 H_r}{1 + G_v H_r + G_1 H_1 H_r}$$

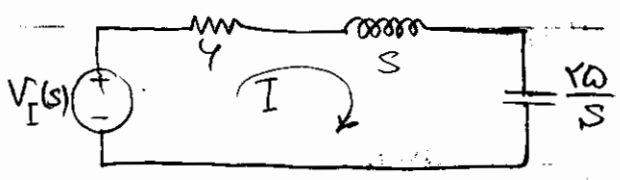
ارتباط بین قطبهای $H(s)$ با پاسخ سیستم (مدار) =



$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \quad \cdot \quad Y(s) = H(s) \cdot X(s)$$



یادآوری یک مثال =



$$\frac{I}{V_i(s)} = \frac{1}{4 + s + \frac{10}{s}} = \frac{s}{s^2 + 4s + 10} = \frac{s}{(s+1)(s+9)}$$

اگر $V_i(t) = 12 \sin \omega t$ آنگاه $i(t) = ?$

$$V_I(s) = \frac{40}{s^2 + 25}$$

$$I(s) = \frac{s}{s^2 + 4s + 25} \times \frac{40}{s^2 + 25}$$

$$\rightarrow I(s) = \frac{-10}{(s+2)^2 + 2^2} + \frac{10}{s^2 + 25}$$

$$\rightarrow i(t) = \underbrace{-2.1e^{-2t} \sin 2t}_{\text{کذا}} + \underbrace{2 \sin 5t}_{\text{تا}}$$

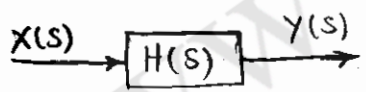
$$I = \frac{s}{(s+2)^2 + 2^2} \times \frac{1}{s+3}$$

اگر $V_i = e^{-3t} \cdot u(t)$ آنگاه

$$I = \frac{s}{(s+2)^2 + 2^2} \times \frac{1}{s}$$

اگر $V_i = t \cdot u(t)$ آنگاه

نکته: در رابطه $Y(s) = H(s) \cdot X(s)$ قطبهای $H(s)$ پاسخ گذرا و قطبهای $X(s)$ پاسخ ماندنی سیستم را تعیین می کند.



پاسخ ضربه و کانولوشن:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

$$Y(s) = H(s) \cdot X(s)$$

پاسخ ضربه سیستم: خروجی سیستم وقتی ورودی تابع ضربه است.

$$x(t) = \delta(t) \rightarrow$$

$$X(s) = 1$$

$$\rightarrow Y(s) = H(s)$$

$$\rightarrow \text{پاسخ ضربه سیستم} = \mathcal{L}^{-1}[H(s)]$$

عکس تبدیل لابلاس تابع تبدیل = پاسخ ضربه سیستم.

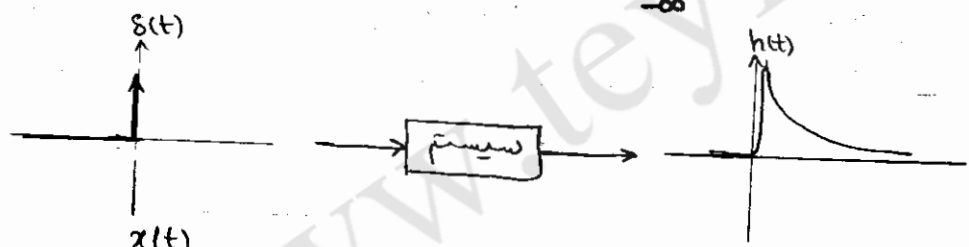
در بحث کانولوشن:

پاسخ ضربه سیستمی را داریم $[h(t)]$ وی خواصیم خروجی $y(t)$ را با ازاای یک ورودی خاص $x(t)$

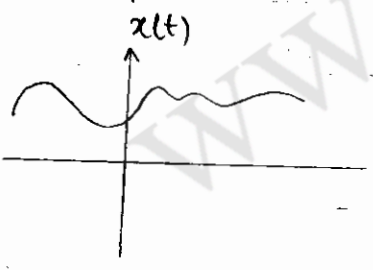
محاسبه کنیم.
 $\delta(t)$ $h(t)$
 $x(t)$ $y(t) = ?$

$y(t) = x(t) * h(t)$ ثابت می شود:

$$\rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) x(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

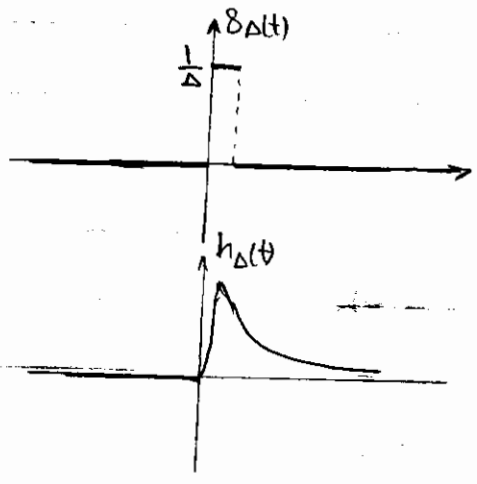


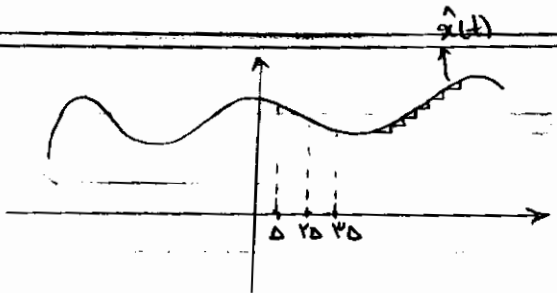
سوری برائیات:



$y(t) = ?$

$$\delta(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \delta_{\Delta}(t)$$



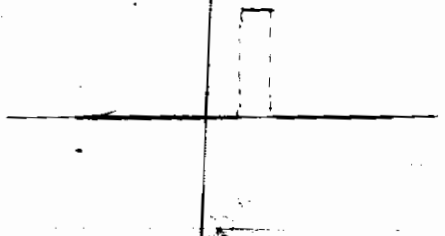
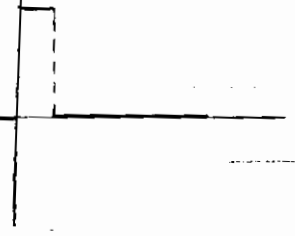


$\hat{x}(t)$ را بصورت جمعی از توابع زیر

می توان نوشت:

$$x_1(t) = x(0) \Delta \delta_\Delta(t)$$

$$x_2(t) = x(\Delta) \Delta \delta_\Delta(t - \Delta)$$



$$x_p = x(p\Delta) \cdot \Delta \cdot \delta_\Delta(t - p\Delta)$$

$$\hat{x}(t) = \dots + x_1(t) + x_2(t) + x_p(t) + \dots$$

$$= \dots + x(0) \Delta \delta_\Delta(t) + x(\Delta) \Delta \delta_\Delta(t - \Delta) + x(2\Delta) \Delta \delta_\Delta(t - 2\Delta) + \dots$$

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta) \cdot \Delta \cdot \delta_\Delta(t - k\Delta)$$

$$\hat{y}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta) \cdot \Delta \cdot h_\Delta(t - k\Delta)$$

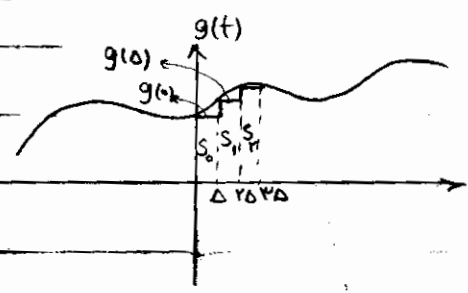
$$x(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \hat{x}(t), \quad y(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \hat{y}(t)$$

$$\rightarrow \hat{y}(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta) \cdot h_\Delta(t - k\Delta) \cdot \Delta$$

$$S = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau) d\tau$$

$$= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S_k$$

$$= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(k\Delta) \cdot \Delta$$



یادآوری =

$$\rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

این رابطه از روشهای دیگری نیز قابل اثبات است (استفاده از تبدیل لاپلاس).

$$\mathcal{L} [h(t) * x(t)] = H(s) \cdot X(s)$$

$$\mathcal{L}^{-1} [H(s) \cdot X(s)] = h(t) * x(t)$$

خواص کانولوشن:

$$h(t) * x(t) = x(t) * h(t) \quad -1$$

$$x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t) = x(t) * [h_1(t) + h_2(t)] \quad -2$$

$$x(t) * [h_1(t) * h_2(t)] = [x(t) * h_1(t)] * h_2(t) \quad -3$$

استفاده از کانولوشن در تحلیل مدارهای الکتریکی =

۱- تابع تبدیل سیستم را محاسبه می کنیم.

۲- عکس تبدیل لاپلاس می گیریم تا پاسخ ضربه بدست آید.

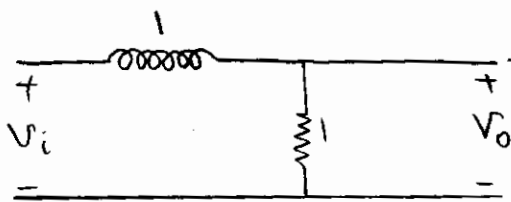
۳- ورودی را با پاسخ ضربه کانولوشن می کنیم.

در استفاده از تبدیل لاپلاس در تحلیل مدارهای الکتریکی =

۱- تابع تبدیل سیستم را محاسبه می کنیم: $H(s)$

۲- تبدیل لاپلاس ورودی را محاسبه می کنیم: $x(s)$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} [Y(s)] \quad \text{و} \quad Y(s) = H(s) \cdot X(s)$$



مثال ۱

$$V_i = u(t)$$

$$V_o = ?$$

روش لابلاس:

$$H(s) = \frac{1}{1+s}, \quad X(s) = \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = H(s) \cdot X(s) = \frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} \rightarrow y(t) = [1 - e^{-t}] u(t)$$

$$H(s) = \frac{1}{s+1} \rightarrow h(t) = e^{-t} u(t)$$

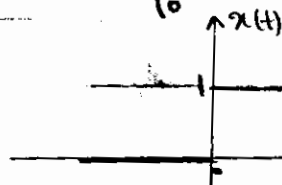
روش کنولوشن:

$$x(t) = u(t)$$

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau} \cdot u(\tau) \cdot u(t-\tau) d\tau = \int_0^{+\infty} e^{-\tau} u(t-\tau) d\tau$$

$$= \int_0^t e^{-\tau} d\tau = \begin{cases} 1 - e^{-t} & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}, \quad u(t-\tau) = \begin{cases} 1 & \tau < t \\ 0 & \tau > t \end{cases}$$



$$h(t) = e^{-t} u(t)$$

مثال ۲:

$$y(t) = h(t) * x(t)$$

$$h(t) = e^{-t} u(t)$$

حل از روش محاسباتی:

$$x(\tau) = u(t) - u(t-1)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau} u(\tau) [u(t-\tau) - u(t-\tau-1)] d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau} u(\tau) \cdot u(t-\tau) d\tau - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau} u(\tau) u(t-\tau-1) d\tau$$

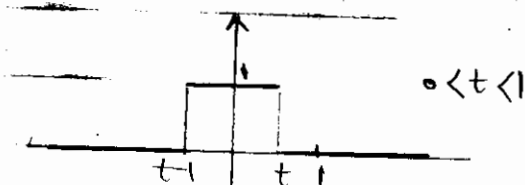
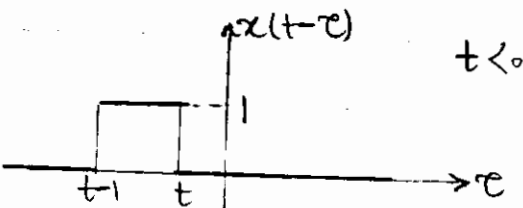
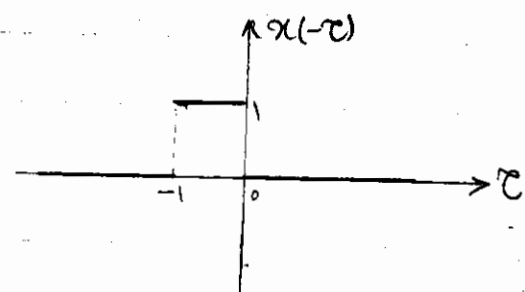
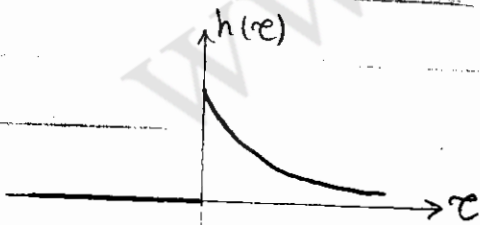
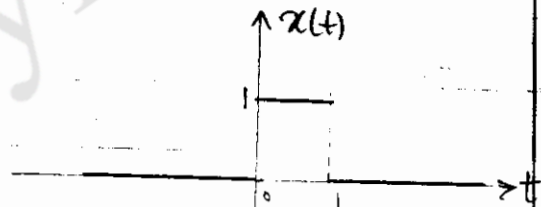
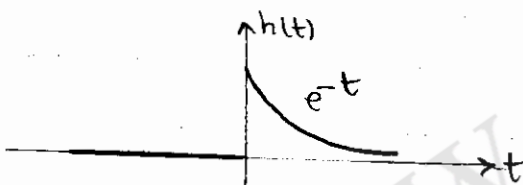
$$\rightarrow y(t) = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau} u(\tau) d\tau}_{y_1(t)} - \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau} u(\tau-1) d\tau}_{y_2(t)}$$

$$y_1(t) =$$

$$\rightarrow y(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 - e^{-t} & 0 < t < 1 \\ e^{-(t-1)} - e^{-t} & 1 < t \end{cases}$$

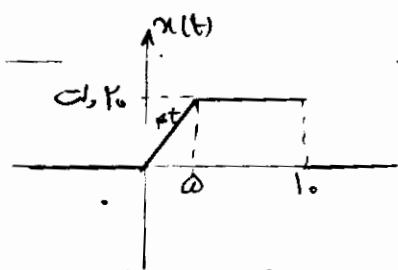
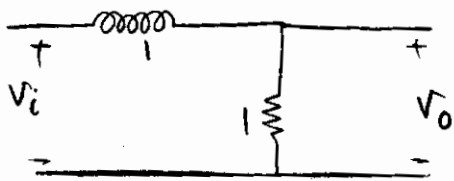
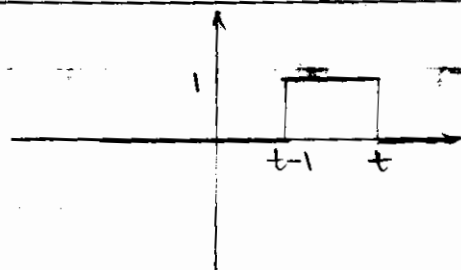
$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) x(t-\tau) d\tau$$

حل مثال از روش ترسیمی:



$$y(t) = \int_{t-1}^t e^{-\tau} d\tau = 1 - e^{-t}$$

$$y(t) = \int_{t-1}^t e^{-\tau} d\tau = e^{-(t-1)} - e^{-t}$$



مثال =

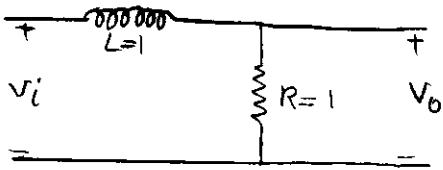
$$h(t) = e^{-t} \cdot u(t)$$

$$x(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ rt & 0 < t < \delta \\ y_0 & \delta < t < 1 \\ 0 & 1 < t \end{cases}$$

$$x(t) = rt u(t) - r(t-\delta) u(t-\delta) - y_0 u(t-1)$$

www.teyji.com

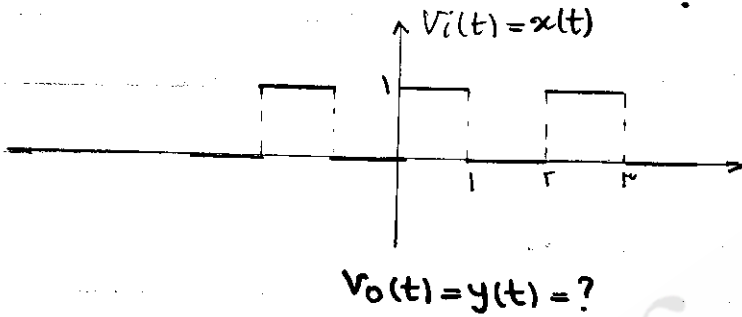
پاسخ مدارهای الکتریکی به سیگنال‌های متناوب :



مثال :

$$H(s) = \frac{1}{s+1}$$

$$h(t) = e^{-t} u(t)$$



فرض کنید که :

روش اول : سری فوریه .

$$x(t) = V_i(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\omega_0 t}$$

$$y(t) = V_o(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C'_n e^{jn\omega_0 t}$$

قضیه : اگر تابع تبدیل سیستم $H(s)$ باشد (و ناحیه همگرایی شامل محور $j\omega$ باشد)

$$C'_n = C_n \cdot H(jn\omega_0)$$

$$T = 1 \text{ s} \rightarrow \omega_0 = 2\pi$$

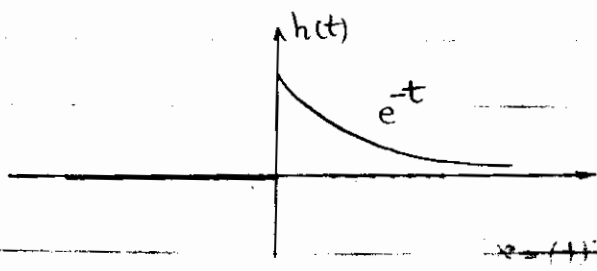
در مثال :

$$C_n = \frac{1}{T} \int_0^1 (1) e^{-jn\pi t} dt = \frac{1}{-jn\pi} e^{-jn\pi t} \Big|_0^1 = \frac{j}{n\pi} (\cos n\pi - 1)$$

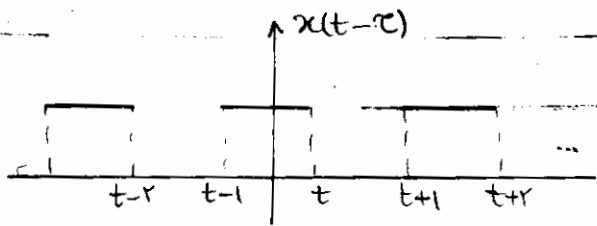
$$H(jn\omega_0) = \frac{1}{1+jn\pi}$$

$$\rightarrow y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{j}{2n\pi} (\cos n\pi - 1) \cdot \frac{1}{1+jn\pi} e^{jn\pi t}$$

اشکال این روش این است که پاسخ به صورت یک \sum است.



روش دوم = استفاده از کانولوشن



نقشه ۲ اگر ورودی سیستم (LTI) متناوب باشد خروجی نیز متناوب است با همان دوره تناوب.

$$x(t) = x(t+\tau) \longrightarrow y(t) = y(t+\tau)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) x(t-\tau) d\tau \quad \text{اثبات:}$$

$$y(t+\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) x(t+\tau-\tau) d\tau = y(t)$$

پس کافی است خروجی را در یک دوره تناوب پیدا کنیم.

$$0 < t < \tau$$

در مثال قبل:

$$0 < t < \tau \longrightarrow y(t) = \int_0^t e^{-\tau} d\tau + \int_{t+1}^{t+\tau} e^{-\tau} d\tau + \int_{t+2}^{t+2\tau} e^{-\tau} d\tau + \dots \quad \text{الف:}$$

$$\begin{aligned} 1 < t < 2\tau \longrightarrow y(t) &= \int_{t-1}^t e^{-\tau} d\tau + \int_{t+1}^{t+\tau} e^{-\tau} d\tau + \int_{t+2}^{t+2\tau} e^{-\tau} d\tau + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{t-1+k\tau}^{t+1+k\tau} e^{-\tau} d\tau \quad \text{ب:} \end{aligned}$$

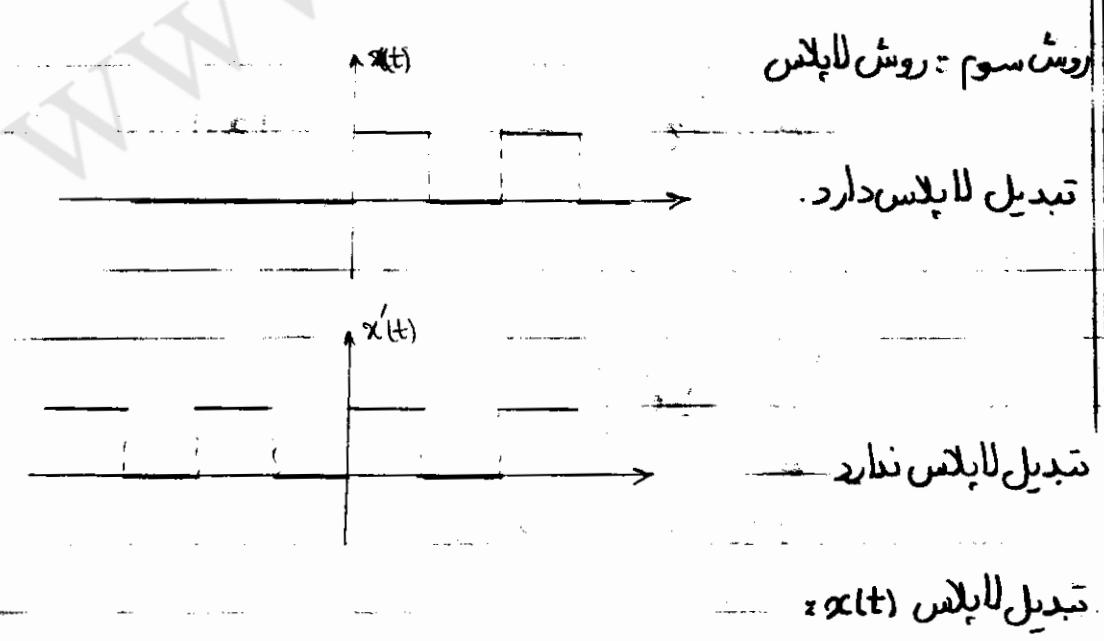
$$\begin{aligned} \rightarrow y(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} -e^{-\tau} \Big|_{t-1+r_k}^{t+r_k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left[e^{-(t-1+r_k)} - e^{-(t+r_k)} \right] \\ &= e^{-t} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-rk} (e-1) = (e-1)e^{-t} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-rk} = (e-1)e^{-t} \cdot \frac{1}{1-e^{-r}} \\ &= \frac{e-1}{1-e^{-r}} e^{-t} \end{aligned}$$

در فاصله $0 < t < 1$:

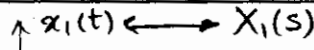
$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t e^{-\tau} d\tau + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{t-1+r_k}^{t+r_k} e^{-\tau} d\tau \\ &= \int_0^t e^{-\tau} d\tau + \sum_{k=0}^{\infty} \int_{t-1+r_k}^{t+r_k} e^{-\tau} d\tau - \int_{t-1}^t e^{-\tau} d\tau = \int_0^{t-1} e^{-\tau} d\tau + \frac{e-1}{1-e^{-r}} e^{-t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow y(t) &= 1 - e^{-(t-1)} + \frac{e-1}{1-e^{-r}} e^{-t} = 1 - e \cdot e^{-t} + \frac{e-1}{1-e^{-r}} e^{-t} \\ &= 1 - \left[e - \frac{e-1}{1-e^{-r}} \right] e^{-t} \end{aligned}$$

باتوجه اینکه پاسخ‌های ضربی معمولاً فرم زیر است:

$$h(t) = A_1 e^{-\alpha_1 t} + A_2 e^{-\alpha_2 t} + \dots$$


ابتدا لاپلاس $x_1(t)$ را می‌گیریم. با $x(t)$ در یک تناوب برابر است و در خارج از آن فاصله صفر است.



$$X_1(s) = \int_0^T x(t) e^{-st} dt =$$

$$X(s) = X_1(s) + e^{-Ts} X_1(s) + e^{-2Ts} X_1(s) + \dots$$

$$= X_1(s) [1 + e^{-Ts} + e^{-2Ts} + e^{-3Ts} + \dots] = X_1(s) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (e^{-Ts})^k$$

$$\rightarrow X(s) = \frac{X_1(s)}{1 - e^{-Ts}}$$

اگر همین کار را روی $x'(t)$ بیاوریم کنیم:

$$X(s) = X_1(s) \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-Ts} = X_1(s) \cdot \left[\sum_{k=0}^{\infty} (e^{-Ts})^k + \sum_{k=0}^{+\infty} (e^{-Ts})^k - 1 \right]$$

$$= X_1(s) \cdot \left[\sum_{k=0}^{\infty} (e^{-Ts})^k + \sum_{k=0}^{\infty} (e^{-Ts})^k - 1 \right] = \infty$$

راه حل: از $x(t)$ به جای $x'(t)$ استفاده کنیم و در نهایت از پاسخ گذرا صرف نظر کنیم.

در مثال قبل: $H(s) = \frac{1}{1+s}$, $X(s) = \frac{X_1(s)}{1 - e^{-Ts}}$

$$X_1(s) = \int_0^1 e^{-st} dt = \frac{1}{s} e^{-s} \Big|_0^1 = \frac{1 - e^{-s}}{s}$$

$$Y(s) = H(s) \cdot X(s) = \frac{(1 - e^{-s})}{s(s+1)(1 - e^{-Ts})} = \frac{A}{s+1} + \frac{Y_1(s)}{1 - e^{-Ts}}$$

$$A = (s+1)Y(s) \Big|_{s=-1} = \frac{e-1}{1-e^{-T}}$$

$$\rightarrow \frac{(1-e^{-s})/s}{(s+1)(1-e^{-s})} = \frac{A[1-e^{-s}] + (s+1)y_1(s)}{(s+1)(1-e^{-s})}$$

$$\rightarrow A(1-e^{-s}) + (s+1)y_1(s) = \frac{1-e^{-s}}{s}$$

$$\rightarrow y_1(s) = \frac{\frac{1-e^{-s}}{s} - A[1-e^{-s}]}{s+1} = \frac{1-e^{-s} - As + Ase^{-s}}{s(s+1)}$$

$$= \frac{1-As}{s(s+1)} - e^{-s} \cdot \frac{1}{s(s+1)} + Ae^{-s} \cdot \frac{s}{s(s+1)}$$

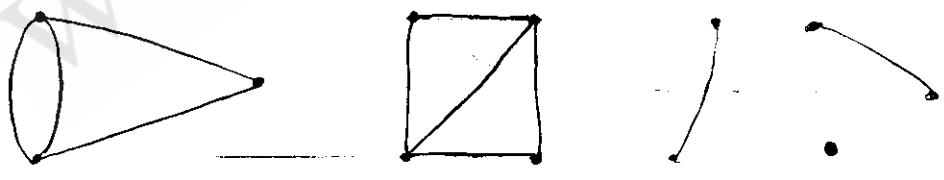
$$\rightarrow \frac{1}{s(s+1)} \longleftrightarrow (1-e^{-t})u(t)$$

$$e^{-s} \cdot \frac{1}{s(s+1)} \longleftrightarrow [1-e^{-(t-1)}]u(t-1)$$

تئوری گراف:

چند تعریف:

۱- گراف: مجموعه‌ای از شاخه‌ها و گره‌ها است به شرط اینکه هر شاخه، توسط دو گره ختم شود.



۲- زیرگراف: اگر گراف و تعریف شده باشد G_1 را یک زیرگراف نامند چنانچه:

مرکز g_1 و گره‌ای از g و هر شاخه g_1 و شاخه‌ای از g باشد.

