$$\longrightarrow \frac{(1-e^{-s})/s}{(s+1)(1-e^{-2s})} = \frac{A[1-e^{-2s}]+(s+1)Y_1(s)}{(s+1)(1-e^{-2s})}$$

$$\longrightarrow A(1-e^{-2s})+(s+1)Y_1(s) = \frac{1-e^{-s}}{s}$$

$$\longrightarrow Y_1(s) = \frac{\frac{1-e^{-s}}{s}-A[1-e^{-2s}]}{s+1} = \frac{1-e^{-s}-As+Ase^{-2s}}{s(s+1)}$$

$$= \frac{1-As}{s(s+1)} - e^{-s}\cdot\frac{1}{s(s+1)} + Ae^{-2s}\cdot\frac{s}{s(s+1)}$$

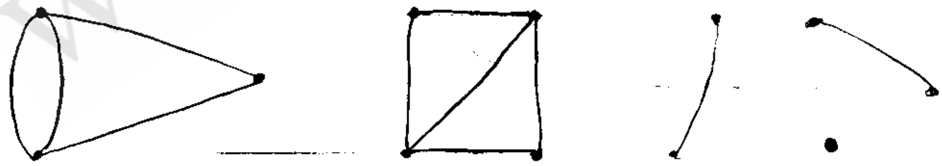
$$\frac{1}{s(s+1)} \longleftrightarrow (1-e^{-t})u(t)$$

$$e^{-s}\cdot\frac{1}{s(s+1)} \longleftrightarrow [1-e^{-(t-1)}]u(t-1)$$

تئوری گراف:

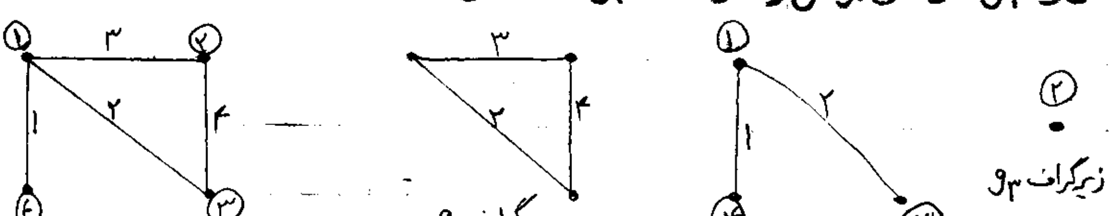
چند تعریف:

۱- گراف: مجموعه‌ای از شاخه‌ها و گره‌ها است به شرط اینکه هر شاخه در دو سر به گره ختم شود.



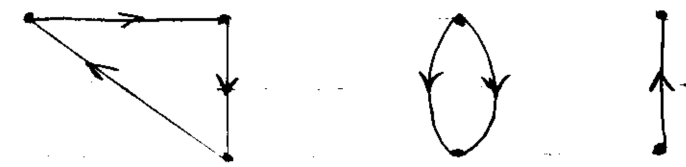
۲- زیرگراف: اگر گراف g تعریف شده باشد g_1 را یک زیرگراف g نامند چنانچه:

هر گره g_1 گره‌ای از g و هر شاخه g_1 شاخه‌ای از g باشد.



گراف g — زیرگراف g_1 — زیرگراف g_2 — زیرگراف g_3

۳- گراف جهت دار: گرافی است که هر شاخه آن یک جهت مشخص دارد.



۴- گراف متصل: گرافی است که بین هر دو گره آن حداقل یک مسیر (شاخه) وجود داشته باشد.

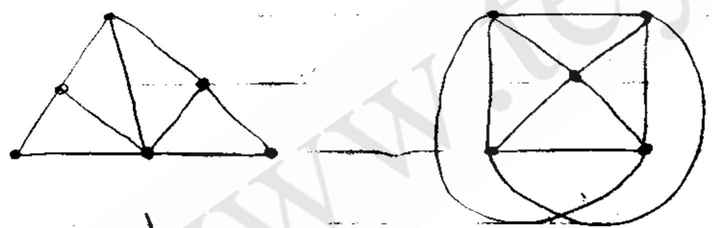
منفصل

۵- گراف سوده: فقط شامل یک گره است.

ناسوده

۶- گراف مسطح: گرافی است که شاخه‌ها فقط در گره‌ها با هم تلاقی دارند.

نامسطح

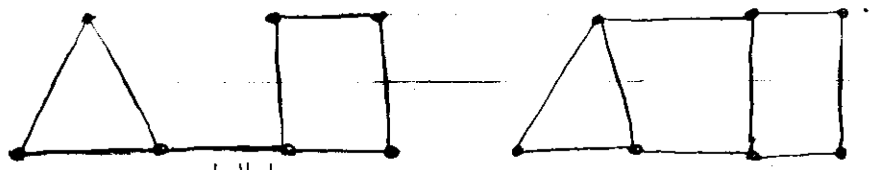


مسطح

نامسطح

۷- گراف لولادار: گرافی است که بتوان با حذف یک شاخه آن، آن را تبدیل به دو گراف متصل نمود.

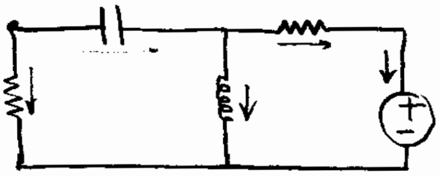
بدون لولا

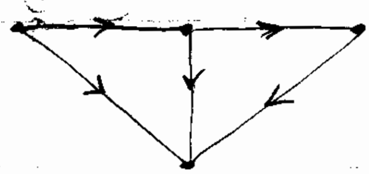


لولادار

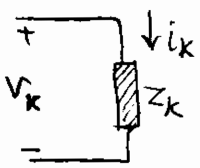
بدون لولا

نمایش مدارهای الکتریکی با گراف جهت دار

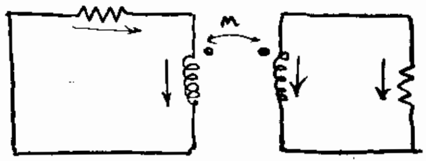


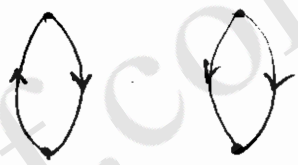


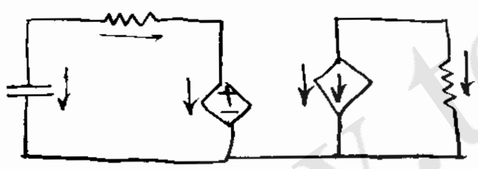
نکته: در تعریف جهت ولتاژ و جریان استاندارد زیر را رعایت می کنیم :

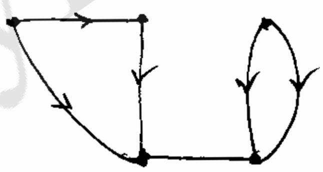


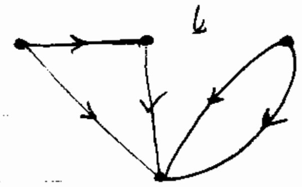
مثال:







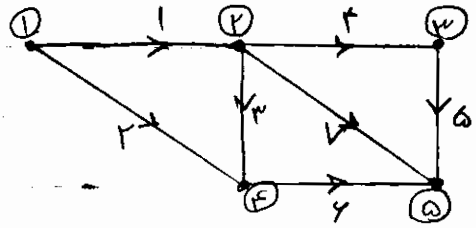




۸- ماتریس تلاقی *incidence matrix* :

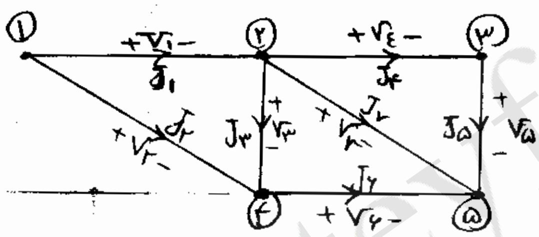
اگر گرافی با n_t گره و b شاخه داشته باشیم ماتریس تلاقی A_a یک ماتریس $n_t \times b$ است به طوری که

$$a_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{اگر شاخه } k \text{ ام از گره } i \text{ ام خارج شود.} \\ -1 & \text{〃 〃 〃 وارد شود.} \\ 0 & \text{اگر شاخه } k \text{ ام و گره } i \text{ ام هیچ تلاقی نداشته باشند.} \end{cases}$$



$$
\begin{array}{c|ccccccc}
 & ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۶ & ۷ \\
\hline
 & & & & & & & \\
\end{array}
$$

$$
A_a = \begin{array}{c} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \\ ۴ \\ ۵ \end{array}
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1
\end{bmatrix}
$$



اگر:

$$
\underline{J} = \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \\ J_4 \\ J_5 \\ \vdots \\ J_b \end{bmatrix}
\qquad
\underline{V} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ \vdots \\ V_b \end{bmatrix}
\qquad
\underline{e} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ \vdots \\ e_{nt} \end{bmatrix}
$$

می‌توان ثابت کرد که:

$$A_a \cdot J = 0$$

$$A_a^T \cdot \underline{e} = \underline{V}$$

۹ـ ماتریس تلاقی مختصرشده (A_r ، A) :

همان ماتریس تلاقی است وقتی که یکی از سطرها حذف شده باشد .

$$\begin{cases} A \cdot J = 0 \\ A^T \cdot \underline{e} = \underline{V} \end{cases}$$

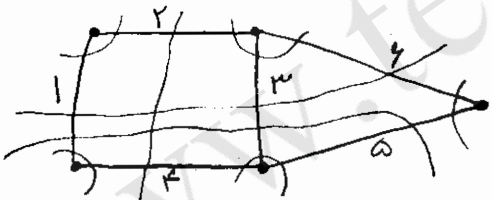
۱۰ـ کات ست cut set (مجموعهٔ قطع) :

مجموعه‌ای از چند شاخه را یک مجموعهٔ قطع (کات ست) نامند چنانچه :

۱ـ حذف تمام شاخه های آن مجموعهٔ گراف متصل G را به دو زیرگراف متصل تبدیل نماید.

۲ـ حذف تمام شاخه ها به جز یکی، گراف را متصل نگه دارد.

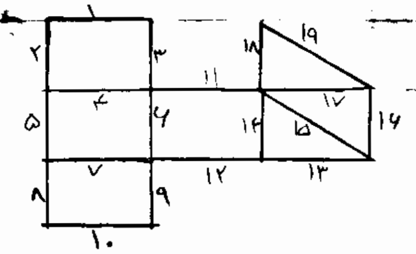
مثال :



سوال : کدامیک از مجموعه های زیر یک کات ست است ؟

هست $A = \{۲, ۴\}$ هست $B = \{۱, ۳, ۶\}$ نیست $C = \{۱, ۳\}$

مثال :



$A = \{\overbrace{۵, ۶, ۱۴, ۱۵, ۱۶, ۱۹}^{\text{هست}}\}$

نیست

دارای شرط اول و نقض شرط دوم

قانون KCL برای کات ست : در "هر" مدار و در "هر" زمان و برای "هر" کات ست جمع

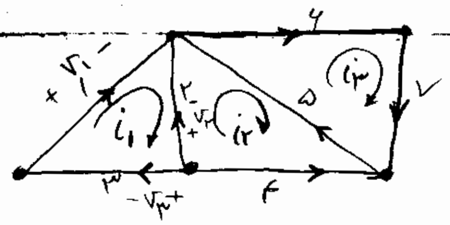
جبری جریانها صفر است.

۱۱- حلقه (loop) : زیرگراف l را یک حلقه نامند چنانچه :

۱- به هر گره ای تنها دو شاخه متصل باشد.

۲- گراف متصل باشد.

مثال :



۱۲- مش mesh : حلقه‌ای است که درون آن شاخه‌ای نباشد.

۱۳- حلقه‌ی بیرونی : حلقه ای است که بیرون آن شاخه ای نباشد.

در تحلیل مدار برای هر مش یک جریان حلقه تعریف می شود.

۱۴- ماتریس مش : اگر گرافی دارای b شاخه و l مش باشد در آن صورت ماتریس مش یک ماتریس $l \times b$ است به طوری که :

$$m_{ik}=\begin{cases} 1 & \text{شاخه } k \text{ ام در حلقه‌ی } i \text{ ام باشد و جهت منطبق باشد} \\ -1 & \text{" " " " نباشد} \\ 0 & \text{" " نباشد.} \end{cases}$$

مثال : ماتریس مثال قبل ماتریس مش را بنویسید.

$$M=\begin{array}{c} \\ l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

اگر ماتریس $\underline{I}$ به صورت مقابل تعریف شود :
$$\underline{I}=\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_l \end{bmatrix}$$

دو رابطه زیر را خواهیم داشت :
$$M.V=0$$
$$M^T.I=J$$

در مثال قبل :
$$MV=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ \vdots \\ V_7 \end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix} V_1-V_2+V_3 \\ V_2-V_4-V_5 \\ V_5+V_6+V_7 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}=0$$

$$M^T.I=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} i_1 \\ -i_1+i_2 \\ i_1 \\ -i_2 \\ -i_2+i_3 \\ i_3 \\ i_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \\ J_4 \\ J_5 \\ J_6 \\ J_7 \end{bmatrix}=$$

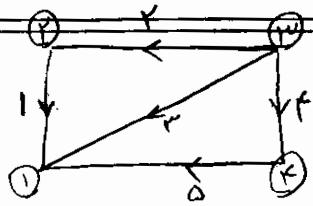
قضیه تلگان : در یک گراف جهت دار
$$\sum_{K=1}^{\underset{\text{تعداد شاخه‌ها}}{b}} V_K \cdot J_K=0$$

یادآوری : تعریف توان لحظه‌ای
$$P(t)=V(t).\,i(t)$$

نکته : تنها شرطی که قضیه تلگان دارد این است که تمام V_K ها و J_K ها در قوانین KCL , KVL

صدق کند.

مثال:



$$\begin{cases} v_1 = 2 \\ j_1 = 1 \end{cases} , \quad \begin{cases} v_2 = -1 \\ j_2 = 1 \end{cases} , \quad \begin{cases} v_3 = 1 \\ j = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_4 = 4 \\ j_4 = 2 \end{cases} , \quad \begin{cases} v_5 = -3 \\ j_5 = 2 \end{cases}$$

نکته۲: اگر دو دسته ولتاژ v_k و $\hat{v}_k$ و دو دسته جریان j_k و $\hat{j}_k$ طوری تعریف شوند که

قوانین KVL و KCL را ارضاء نمایند در آن صورت:

$$\sum v_k \cdot j_k = 0 \qquad \sum \hat{v}_k \, j_k = 0$$

$$\sum \hat{v}_k \cdot \hat{j}_k = 0 \qquad \sum v_k \hat{j}_k = 0$$

چند نتیجه از قضیه تلگان:

۱- جمع جبری توان لحظه‌ای در یک مدار « در هر لحظه » صفر است.

می دانیم که:

- مقاومت توان تلف می کند Ri^2
- سلف / خازن: توان ذخیره می کنند یا پس می دهند $\frac{1}{2}Li^2$ ، $\frac{1}{2}Cv^2$
- منابع هم می توانند توان تحویل دهند و یا توان ذخیره کنند.

۲- توان مختلط: اگر منبع تحریک کننده مدار سینوسی باشد:

$$P = \text{توان حقیقی} = \frac{1}{2}|V_m|\cdot|I_m| \cos\theta$$

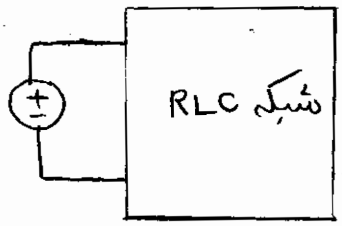
$$Q = \text{توان واکنشی} = \frac{1}{2}|V_m|\cdot|I_m| \sin\theta$$

$$S = V\cdot J^* \quad , \quad \sum S_k = \sum_{k=1}^{b} V_k J_k^* = 0$$

به عبارت دیگر جمع توان های حقیقی مصرفی برابر جمع توانهای حقیقی تولیدی است.

و " " واکنشی " " " واکنشی " " .

۳- امپدانس نقطهٔ تحریک.



الف- اگر شبکه‌ای فقط شامل مقاومت (مثبت) باشد حتماً امپدانس نقطهٔ تحریک یک عدد حقیقی مثبت است. (امپدانس معادل از دید منبع یک مقاومت است)

ب- اگر شبکه‌ای شامل مقاومت و خازن باشد حتماً امپدانس نقطهٔ تحریک یک عدد مختلط شامل قسمت حقیقی مثبت و قسمت موهومی منفی است. (امپدانس معادل از دید منبع یک مقاومت و یک خازن است). زاویهٔ امپدانس در این حالت بین ۰ و ۹۰- است.

ج- اگر شبکه‌ای شامل مقاومت و سلف است حتماً امپدانس نقطهٔ تحریک یک عدد مختلط شامل قسمت حقیقی و موهومی مثبت است. (امپدانس معادل از دید منبع شامل یک مقاومت و

یک سلف است). زاویهٔ امپدانس در این حالت بین ۰ و ۹۰+ است.

د- اگر شبکه ای شامل مقاومت، سلف و خازن باشد امپدانس نقطهٔ تحریک یک عدد مختلط

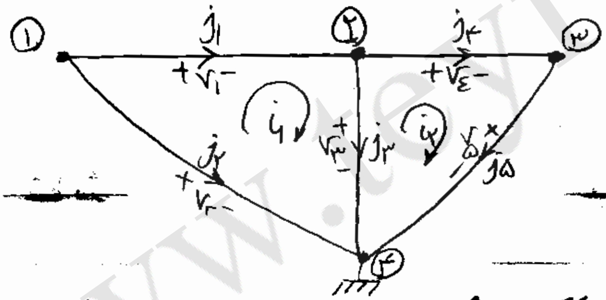
با قسمت حقیقی مثبت است. زاویهٔ امپدانس در این حالت بین °۹۰- و °۹۰+ است.

هـ- اگر شبکه ای شامل سلف و خازن باشد امپدانس نقطهٔ تحریک یک عدد موهومی است.

زاویهٔ امپدانس یا ۹۰+ یا ۹۰- است.

تجزیه و تحلیل گره و مش :

یادآوری :



گراف در حالت کلی b شاخه، n_t گره و l مش دارد. در مثال بالا ۵ شاخه، ۴ گره و ۲ مش داریم.

$$\underline{J} = \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ \vdots \\ j_b \end{bmatrix} \qquad \underline{e} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} \qquad \underline{V} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_b \end{bmatrix} \qquad \underline{I} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_l \end{bmatrix}$$

$$n \triangleq n_t - 1$$

$$A = \begin{array}{c} \\ ① \\ \vdots \\ ⓝ \end{array} \begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad \cdots \quad b \\ \left[\begin{array}{ccc} & & \\ & a_{ik} & \\ & & \end{array} \right] \end{array}$$

$a_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{اگر شاخه k ام از گره i ام خارج شود} \\ -1 & \text{» » » به » وارد شود} \\ 0 & \text{» » » با » تلاقی نداشته باشد} \end{cases}$

$$M = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ l \end{array} \!\!\begin{array}{c} 1 \;\; 2 \;\; \cdots \;\; b \\ \left[\begin{array}{ccc} & & \\ & m_{ik} & \\ & & \end{array} \right] \end{array} \qquad m_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{اگر شاخه k ام در مش i ام باشد و هم جهت} \\ -1 & \text{" " " و غیر هم جهت} \\ 0 & \text{" " " نباشد.} \end{cases}$$

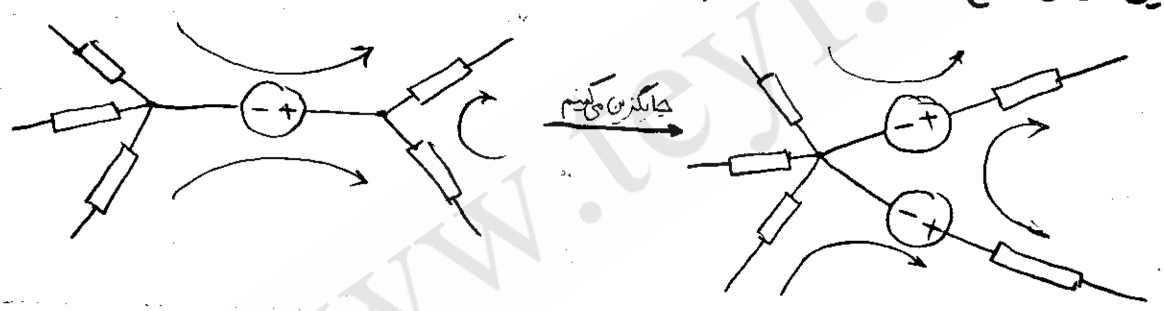
روابط اصلی:

$$\begin{cases} AJ = 0 \\ A^T \underline{e} = V \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} MV = 0 \\ M^T I = J \end{cases}$$

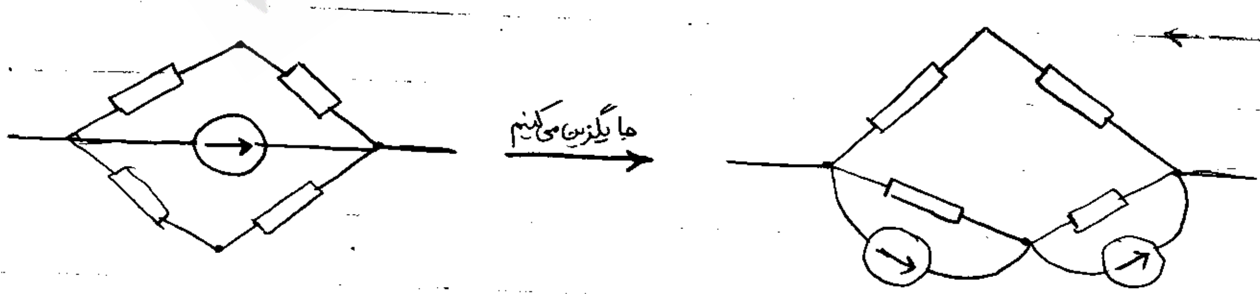
نکته ۱: در روش تجزیه و تحلیل گره با استفاده از گراف باید شاخه‌ها حتماً شامل امپدانس باشند.

راه حل:

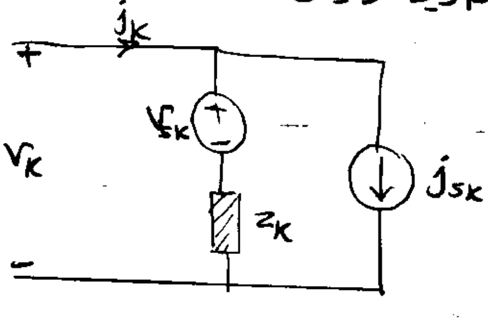
الف: بین دو گره منبع ولتاژ داشته باشیم.



ب: بین دو گره منبع جریان داشته باشیم.



نکته ۲: یک شاخه در حالت کلی به فرم زیر تعریف می‌شود.

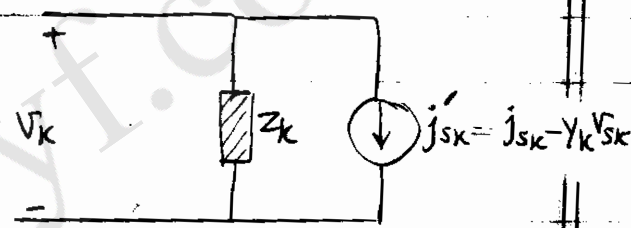


روابط حاکم در شاخه: $V_k = V_{sk} + Z_k\left[j_k - j_{sk}\right]$

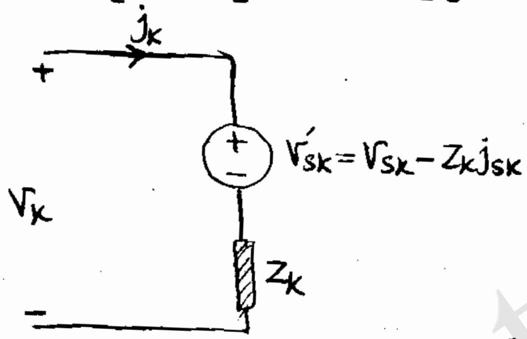
$$\begin{cases} V_k = V_{sk} + Z_k j_k - Z_k j_{sk} & ② \\ j_k = Y_k V_k - Y_k V_{sk} + j_{sk} & ① \end{cases} \quad , \quad Y_k \triangleq \frac{1}{Z_k}$$

رابطهٔ ① مبنای کار در روش تحلیل گره است و رابطهٔ ② مبنای کار در روش تحلیل مش است.

نکتهٔ ۳: شاخهٔ درنظر گرفته شده برای حالت کلی می‌تواند با یکی از فرمهای زیر جایگزین شود.



این مدار معادل برای تحلیل گره مناسب است.



این مدار معادل برای تحلیل مش مناسب است.

روش تجزیه و تحلیل گره: $j_k = Y_k V_k - Y_k V_{sk} + j_{sk}$

$$\begin{aligned} j_1 &= Y_1 V_1 - Y_1 V_{s1} + j_{s1} \\ j_2 &= Y_2 V_2 - Y_2 V_{s2} + j_{s2} \\ &\vdots \\ j_b &= Y_b V_b - Y_b V_{sb} + j_{sb} \end{aligned}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ \vdots \\ j_b \end{bmatrix}}_{J} = \underbrace{\begin{bmatrix} Y_1 & & \\ & Y_2 & \\ & & \ddots & \\ & & & Y_b \end{bmatrix}}_{Y_b} \underbrace{\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_b \end{bmatrix}}_{\underline{V}} - \underbrace{\begin{bmatrix} Y_1 & & \\ & Y_2 & \\ & & \ddots & \\ & & & Y_b \end{bmatrix}}_{Y_b} \underbrace{\begin{bmatrix} V_{s1} \\ V_{s2} \\ \vdots \\ V_{sb} \end{bmatrix}}_{V_s} + \underbrace{\begin{bmatrix} j_{s1} \\ j_{s2} \\ \vdots \\ j_{sb} \end{bmatrix}}_{J_s}$$

$$J = Y_b . V - Y_b . V_s + J_s \quad , \quad \begin{cases} A \cdot J = 0 \\ A^T \cdot \underline{e} = \underline{V} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\times A} AJ = AY_b \cdot A^T e - AY_b \cdot V_s + AJ_s = 0$$

$$\longrightarrow \underbrace{AY_b A^T}_{Y_{n\times n}} \underset{\text{مجهول}}{\underline{e}} = \underbrace{AY_b V_s - AJ_s}_{I_s}$$

$$\longrightarrow Y \cdot \underline{e} = I_s \longrightarrow \underline{e} = Y^{-1} \cdot I_s$$

نکته: اگر منابع ولتاژ را به منبع جریان تبدیل کرده باشیم: $I_s = -AJ'_s$

الگوریتم روش تحلیل گره:

۱- منابع ولتاژ را به منابع جریان تبدیل می‌کنیم.

۲- جهت جریان در شاخه‌ها و گره مبنا را تعیین می‌کنیم.

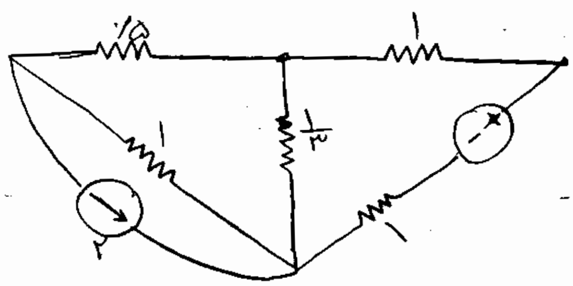
۳- ماتریس A را می‌نویسیم. ۴- ماتریس Y_b و بردار J'_s را می‌نویسیم.

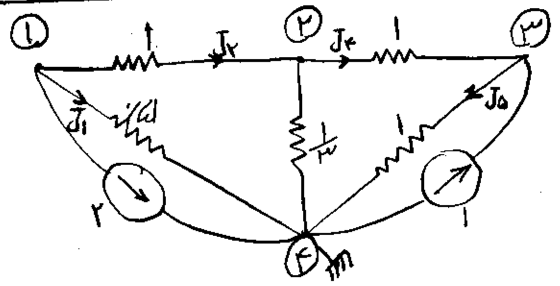
۵- ماتریس Y و I_s را محاسبه می‌کنیم: $Y = AY_bA^T \qquad I_s = -AJ'_s$

۶- بردار e را محاسبه می‌کنیم: $\underline{e} = Y^{-1} \cdot I_s$

۷- $\underline{V} = A^T \cdot \underline{e} \quad , \quad J = Y_b \cdot V_k + J'_s$

مثال:





$$A = \begin{array}{c} \\ ① \\ ② \\ ③ \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$④ \; \cancel{\begin{matrix} -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{matrix}}$$

$$Y_b = \begin{bmatrix} 2 & & & & \\ & 2 & & & \\ & & 3 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} , \quad J_s' = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$Y = A \cdot Y_b \cdot A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 2 & & & \\ & & 3 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$I_s = -A J_s' = -\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{e} = Y^{-1} \cdot I_s \longrightarrow \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{17}{25} \\ -\frac{1}{25} \\ \frac{12}{25} \end{bmatrix}$$

$$V = A^T \cdot \underline{e} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{17}{25} \\ -\frac{1}{25} \\ \frac{12}{25} \end{bmatrix} = \frac{1}{25} \begin{bmatrix} -17 \\ -16 \\ -1 \\ -13 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$J = Y_b \cdot V + J_s' = \frac{1}{25}\begin{bmatrix} 14 \\ -14 \\ -3 \\ -13 \\ -13 \end{bmatrix}$$

راه میان بر (نظری) برای محاسبهٔ Y و I_s :

$$Y \cdot \underline{e} = \underline{I}s \longrightarrow \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ y_{n1} & & & y_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{s_1} \\ I_{s_2} \\ \vdots \\ I_{s_n} \end{bmatrix}$$

y_{ii} : جمع کل ادمیتانسهای متصل به گرهٔ i ام

y_{ij} : منهای جمع کل ادمیتانسهای متصل بین گرهٔ i ام و j ام

I_{s_i} : جمع جبری منابع جریانی است که به گرهٔ i ام واردی شوند.

در مثال قبل :

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ +1 \end{bmatrix}$$

چند نکته :

۱ـ اگر مدار شامل تزویج مغناطیسی و منبع وابسته نباشد ماتریس Y یک ماتریس متقارن است.

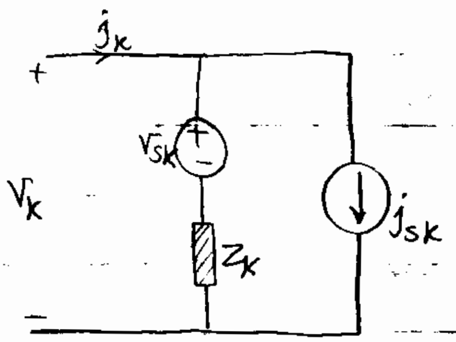
۲ـ اگر تزویج مغناطیسی داشته باشیم بهتر است این تزویج را با منابع وابسته جایگزین کنیم.

۳ـ اگر منبع وابسته داشته باشیم در مراحل ابتدایی (تا رسیدن به معادلهٔ $Y \cdot e = I_s$) با منبع

وابسته مثل منبع مستقل عمل می‌کنیم. در مراحل آخر بجای منبع وابسته مقدار اصلی آن را جایگزین می‌کنیم.

روش تحلیل مش:

یادآوری روش تحلیل گره از جلسه قبل:



$$\begin{cases} j_k = Y_k V_k - Y_k V_{sk} + j_{sk} \\ V_k = V_{sk} + Z_k j_k - Z_k j_{sk} \end{cases}$$

$$A\left[J = Y_b \cdot V - Y_b V_s + J_s\right] \quad , \quad \begin{cases} AJ = 0 \\ A^T e = V \end{cases}$$

$$\underline{A \cdot Y_b \cdot A^T} \cdot \underline{e} = \underline{Y_b V_s - J_s}$$

$$Y \cdot \underline{e} = I_s \longrightarrow \underline{e} = Y^{-1} \cdot I_s$$

در روش مش: $V_k = V_{sk} + Z_k j_k - Z_k j_{sk}$

$$\begin{cases} V_1 = V_{s1} + Z_1 j_1 - Z_1 j_{s1} \\ V_2 = V_{s2} + Z_2 j_2 - Z_2 j_{s2} \\ \vdots \\ V_b = V_{sb} + Z_b j_b - Z_b j_{sb} \end{cases}$$

$$\longrightarrow \overset{V}{\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_b \end{bmatrix}} = \overset{V_s}{\begin{bmatrix} V_{s1} \\ V_{s2} \\ \vdots \\ V_{sb} \end{bmatrix}} + \overset{Z_b}{\begin{bmatrix} Z_1 & & \\ & Z_2 & \\ & & \ddots \\ & & & Z_b \end{bmatrix}} \overset{J}{\begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ \vdots \\ j_b \end{bmatrix}} - \overset{Z_b}{\begin{bmatrix} Z_1 & & \\ & Z_2 & \\ & & \ddots \\ & & & Z_b \end{bmatrix}} \overset{J_s}{\begin{bmatrix} j_{s1} \\ j_{s2} \\ \vdots \\ j_{sb} \end{bmatrix}}$$

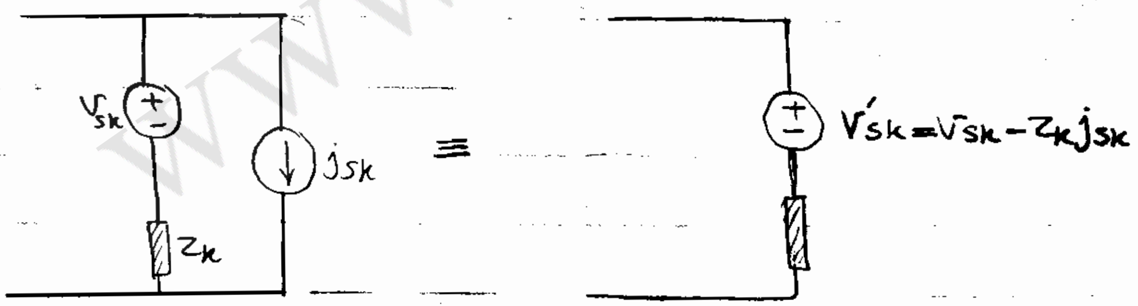
$$\longrightarrow V = V_s + Z_b J - Z_b J_s \quad , \quad \begin{cases} MV = 0 \\ M^T \cdot I = J \end{cases} \quad , \quad I = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_l \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow MV = MV_s + MZ_b \cdot M^T \cdot \underline{I} - MZ_b \cdot J_s \quad , \quad MV = 0$$

$$\longrightarrow MZ_b M^T \cdot \underline{I} = MZ_b J_s - MV_s$$

$$Z \triangleq MZ_b M^T \quad , \quad e_s \triangleq MZ_b \cdot J_s - MV_s$$

اگر تمام منابع جریان را به منبع ولتاژ تبدیل کنیم: $e_s \triangleq -MV_s'$



الگوریتم روش تحلیل مش:

۱ـ تمام منابع جریان را به منبع ولتاژ تبدیل می‌کنیم.

۲ـ جهت شاخه‌ها و جهت جریان مش‌ها را تعیین می‌کنیم.

(استاندارد: تمام جهت جریان مش‌ها در جهت حرکت عقربه‌های ساعت می‌باشد.

۳ـ ماتریس مش (M) را تعیین می‌کنیم.

۴ـ ماتریس Z_b و V_s' را می‌نویسیم.

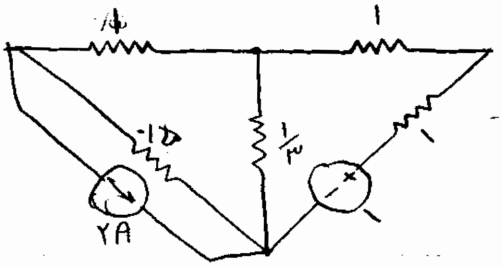
۵ـ ماتریس Z و بردار e_s را محاسبه می‌کنیم.

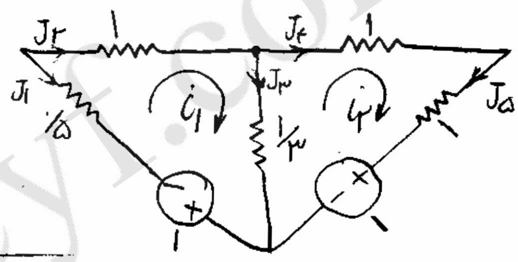
$$Z = M Z_b M^T$$
$$e_s = -M V_s'$$

۶ـ $\underline{I} = Z^{-1} \cdot e_s$

۷ـ $\begin{cases} J = M^T \cdot \underline{I} \\ V = Z_b \cdot J + V_s' \end{cases}$

حل مثال جلسه قبل از روش تحلیل مش:





$$M = \begin{array}{c} \\ \text{مش ۱} \\ \text{مش ۲} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

و

$$Z_b = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$V_s' = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad Z = M Z_b M^T$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \frac{1}{3} & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1.83 & -0.33 \\ -0.33 & 2.33 \end{bmatrix}$$

$$e_s = -M V_s' = -\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$I = Z^{-1} \cdot e_s = \begin{bmatrix} ۱٫۸۳ & -۰٫۳۳ \\ -۰٫۳۳ & ۲٫۳۳ \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -۱ \\ -۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۱۴}{۲۵} \\ \frac{-۱۲}{۲۵} \end{bmatrix}$$

J و V از روابط بند $\underline{V}$ محاسبه می‌شود که جواب همان جواب هایی است که از روش گره بدست آمد

$$J = \frac{۱}{۲۵} \begin{bmatrix} ۱۴ \\ -۱۴ \\ \vdots \end{bmatrix} \quad , \quad V = \frac{۱}{۲۵} \begin{bmatrix} \vdots \\ \\ \end{bmatrix}$$

راه میان بر (روش نظری) برای محاسبهٔ Z و e_s :

$$Z \cdot I = e_s \longrightarrow \begin{bmatrix} z_{۱۱} & z_{۱۲} & \cdots & z_{1\ell} \\ z_{۲۱} & z_{۲۲} & & \\ \vdots & \vdots & & \\ z_{\ell 1} & & & z_{\ell\ell} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_۲ \\ \vdots \\ i_\ell \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{s1} \\ e_{s۲} \\ \vdots \\ e_{s\ell} \end{bmatrix}$$

در روش میان بر :

z_{ii} = جمع کل امپدانسهای مش i ام است.

z_{ij} = منهای (امپدانس مشترک بین مش i ام و j ام است)

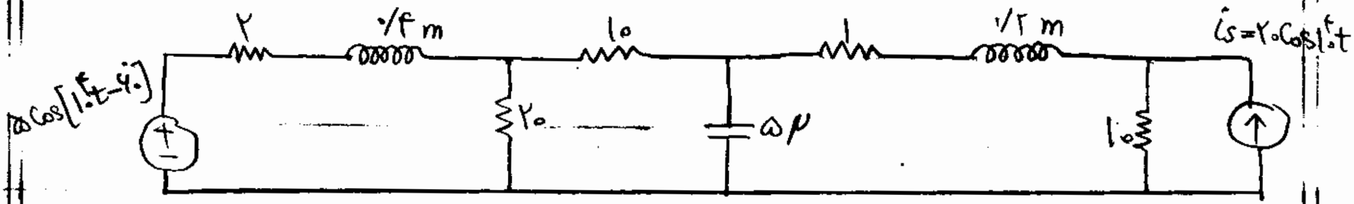
(تذکر : این علامت منها به خاطر رعایت استاندارد است یعنی جهت جریانهای مش ها همه همجهت انتخاب شده است)

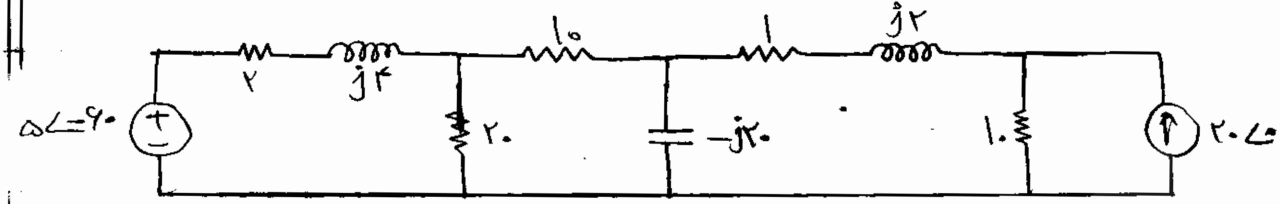
e_{si} = جمع جبری تمام ولتاژهای حلقهٔ i ام است.

(+) برای حالتی است که ولتاژ معادل جریانی درجهت جریان انتخاب شده برای حلقه ایجاد کند.

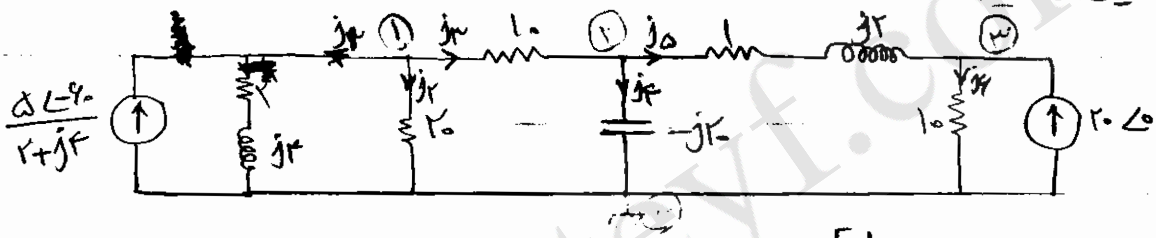
(−) " " " درجهت خلاف " " .

مثال از ~~روش~~ تحلیل مدار به روش گره و مش در حوزهٔ فازبردار :





روش تحلیل گره :

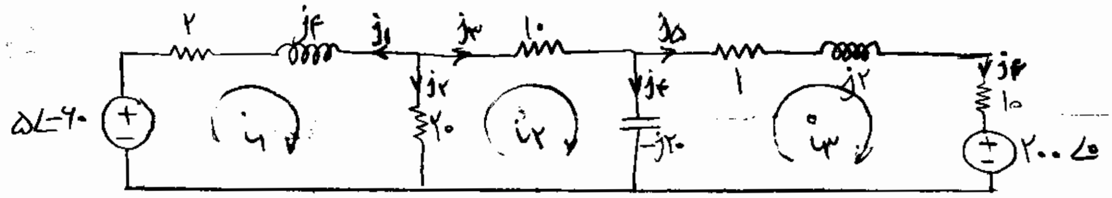


$$A=\begin{bmatrix}1&1&1&0&0&0\\0&0&-1&1&1&0\\0&0&0&0&-1&1\end{bmatrix},\quad Y_b=\begin{bmatrix}\frac{1}{2+j4}&&&&\\&\frac{1}{20}&&&\\&&\frac{1}{10}&&\\&&&\frac{1}{-j20}&\\&&&&\frac{1}{10}\end{bmatrix}$$

$$J_s'=\begin{bmatrix}-\frac{5\angle -60}{2+j2}\\0\\0\\0\\0\\-20\angle 0\end{bmatrix},\qquad Y=A\,Y_b\,A^T,\qquad I_s=-A\cdot J_s'$$

$$Y=\begin{bmatrix}\frac{1}{2+j4}+\frac{1}{20}+\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & 0\\ -\frac{1}{10} & \frac{1}{10}+\frac{1}{-j20}+\frac{1}{1+j2} & \frac{-1}{1+j2}\\ 0 & \frac{-1}{j2+1} & \frac{1}{1+j2}+\frac{1}{10}\end{bmatrix},\quad I_s=\begin{bmatrix}\frac{5\angle -60}{2+j4}\\0\\20\angle 0\end{bmatrix}$$

$$\underline{e}=Y^{-1}\cdot I_s=$$



$$M = \begin{array}{c} \\ \text{مش ۱} \\ \text{مش ۲} \\ \text{مش ۳} \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۶ \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} , \quad Z_b = \begin{bmatrix} 2+j4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & & & & \\ 0 & & 10 & & & \\ 0 & & & -j20 & & \\ 0 & & & & 1+j2 & \\ 0 & & & & & 10 \end{bmatrix}$$

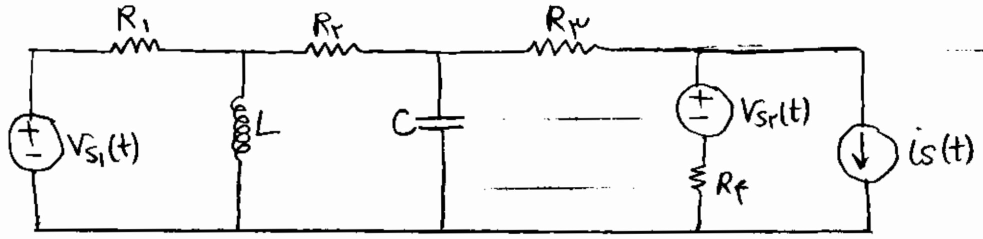
$$V'_s = \begin{bmatrix} 5\angle -60 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 200\angle 0 \end{bmatrix} , \quad Z = M \cdot Z_b \cdot M^T$$

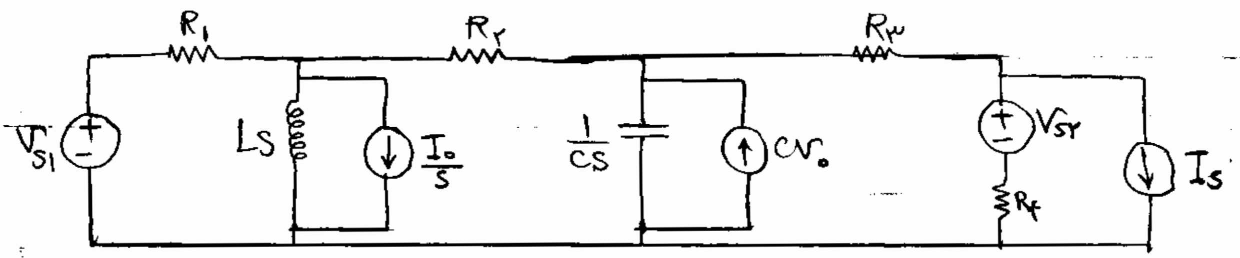
$$= \begin{bmatrix} 22+j4 & -20 & 0 \\ -20 & 30-j20 & +j20 \\ 0 & j20 & 11-j18 \end{bmatrix}$$

$$e_s = -M V'_s = \begin{bmatrix} 5\angle -60 \\ 0 \\ -200\angle 0 \end{bmatrix} , \quad I = Z^{-1} \cdot e_s =$$

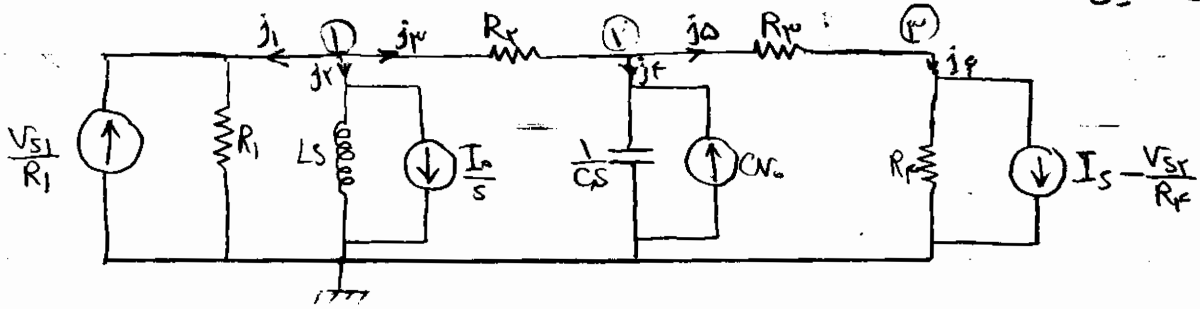
$$\begin{cases} J = M^T \cdot I \\ V = Z_b \cdot J + V'_s \end{cases}$$

مثال از حوزهٔ لاپلاس:





روش تحلیل گره :



$$A=\begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline ① \\ ② \\ ③ \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} , \quad Y_b=\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & & & & & \\ & \frac{1}{LS} & & & & \\ & & \frac{1}{R_2} & & & \\ & & & CS & & \\ & & & & \frac{1}{R_3} & \\ & & & & & \frac{1}{R_4} \end{bmatrix}$$

$$J_s'=\begin{bmatrix} -\frac{V_{s1}}{R_1} \\ \frac{I_0}{s} \\ 0 \\ -CV_0 \\ 0 \\ I_s-\frac{V_{s2}}{R_4} \end{bmatrix}$$

$$Y=\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1}+\frac{1}{LS}+\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} & 0 \\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2}+CS+\frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_3} \\ 0 & -\frac{1}{R_3} & \frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4} \end{bmatrix}$$

$$I_s=\begin{bmatrix} \frac{V_{s1}}{R_1}-\frac{I_0}{s} \\ CV_0 \\ \frac{V_{s2}}{R_4}-I_s \end{bmatrix}$$

چند بحث باقیمانده از روشهای تحلیل گره و مش :

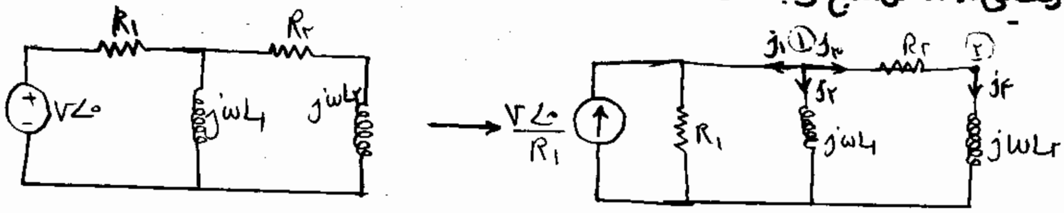
۱- مثال از مدارهایی که شامل منبع وابسته هستند.

۲- مثال از مدارهایی که شامل تزویج مغناطیسی هستند.

۳- نوشتن معادلات انتگرال و دیفرانسیل با استفاده از تئوری گراف

۴- دوگانی مدارها

۱_ مثال از مدارهایی که شامل منبع وابسته هستند.



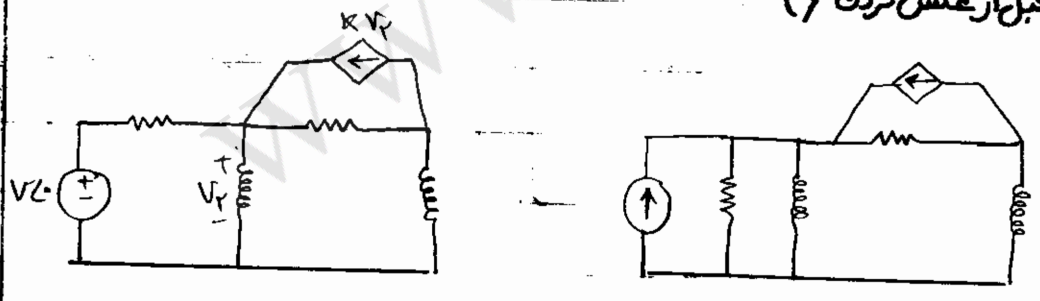
$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1\end{bmatrix},\quad Y_b=\begin{bmatrix}\frac{1}{R_1} & & & \\ & \frac{1}{j\omega L_1} & & \\ & & \frac{1}{R_2} & \\ & & & \frac{1}{j\omega L_2}\end{bmatrix},\quad J_s'=\begin{bmatrix}\frac{-V\angle 0}{R_1}\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$Y=A.Y_b.A^T=\begin{bmatrix}\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{j\omega L_1} & \frac{-1}{R_2}\\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2}+\frac{1}{j\omega L_2}\end{bmatrix},\quad I_s=\begin{bmatrix}\frac{V\angle 0}{R_1}\\ 0\end{bmatrix}$$

$$Y.\underline{e}=I_s,\quad \underline{e}=Y^{-1}.I_s$$

نکته: اگر در مدار منبع وابسته داشته باشیم می توانیم با منبع وابسته مثل منبع مستقل برخورد کنیم به جز

مرحله آخر (منظور قبل از عکس کردن Y)



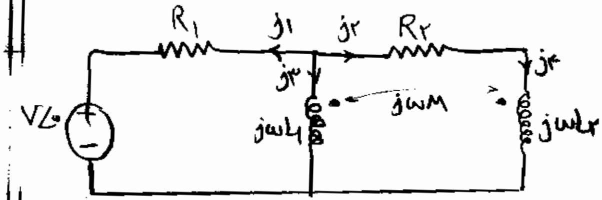
تغییرات نسبت به حالت بدون منبع وابسته:

$$J_s'=\begin{bmatrix}\frac{-V\angle 0}{R_1}\\ 0\\ -KV_2\\ 0\end{bmatrix},\quad I_s=\begin{bmatrix}\frac{V\angle 0}{R_1}+KV_2\\ -KV_2\end{bmatrix},\quad Y.\underline{e}=I_s$$

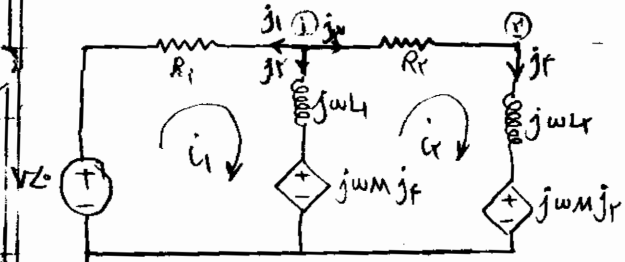
$$\rightarrow\begin{bmatrix}\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{j\omega L_1} & -\frac{1}{R_2}\\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2}+\frac{1}{j\omega L_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e_1\\ e_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{V\angle 0}{R_1}+K.V_2\\ -KV_2\end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{j\omega L_1}-K & \frac{-1}{R_2} \\ -\frac{1}{R_2}+K & \frac{1}{R_2}+\frac{1}{j\omega L_2} \end{bmatrix}}_{Y'} \underbrace{\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}}_{e} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{V\angle 0}{R_1} \\ 0 \end{bmatrix}}_{I_s'} \longrightarrow \underline{e} = Y'^{-1} \cdot I_s'$$

۲ـ مثال از حالتی که در مدار تزویج مغناطیسی داریم :



دو روش برای برخورد با این مسئله داریم :



الف ـ تزویج را با منبع وابسته جایگزین کنیم :

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} , \quad Z_b = \begin{bmatrix} R_1 & & & \\ & j\omega L_1 & & \\ & & R_2 & \\ & & & j\omega L_2 \end{bmatrix} , \quad V_s' = \begin{bmatrix} V\angle 0 \\ j\omega M j_4 \\ 0 \\ j\omega M j_3 \end{bmatrix}$$

$$Z = M \cdot Z_b \cdot M^T = \begin{bmatrix} R_1+j\omega L_1 & -j\omega L_1 \\ -j\omega L_1 & R_2+j\omega(L_1+L_2) \end{bmatrix} , \quad e_s = \begin{bmatrix} V\angle 0 - j\omega M j_4 \\ j\omega M(j_4-j_3) \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} R_1+j\omega L_1 & -j\omega L_1 \\ -j\omega L_1 & R_2+j\omega(L_1+L_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V\angle 0 - j\omega M j_4 \\ j\omega M(\underline{j_4-j_3}) \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} j_4 = I_2 \\ j_3 = I_1 - I_2 \end{matrix}\right\} \longrightarrow j_4 - j_3 = 2I_2 - I_1$$

$$\longrightarrow \overbrace{\begin{bmatrix} R_1+j\omega L_1 & -j\omega L_1+j\omega M \\ -j\omega L_1+j\omega M & R_2+j\omega(L_1+L_2)-2j\omega M \end{bmatrix}}^{Z'} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

روش دوم: در نوشتن ماتریس Z_b اگر بین شاخه i ام و شاخه j ام تزویج مغناطیسی داشته باشیم در آن صورت Z_b (Y_b) قطری نخواهد بود و عنصر Z_{ik} (Y_{ik}) مخالف صفر و برابر $\pm j\omega M$ (و یا $\pm \frac{1}{j\omega M}$) خواهد بود.

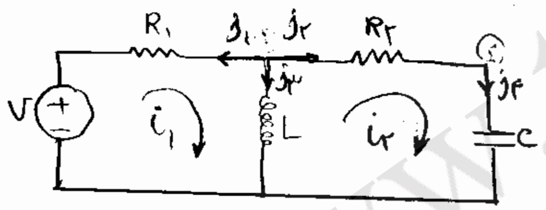
در مثال قبل:

$$Z_b = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & j\omega L_1 & 0 & j\omega M \\ 0 & 0 & R_2 & 0 \\ 0 & j\omega M & 0 & j\omega L_2 \end{bmatrix}$$

تمرین: ثابت کنید $M.Z_b.M^T = Z'$

۳ـ نوشتن معادلات انتگرال و دیفرانسیل با استفاده از تئوری گراف.

یادآوری از درس مدار I:



$$\rightarrow \begin{cases} V = R_1 i_1 + L\frac{d}{dt}(i_1 - i_2) \\ 0 = L\frac{d}{dt}(i_2 - i_1) + R_2 i_2 + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_2(\tau)d\tau \end{cases}$$

$$, \quad D \triangleq \frac{d}{dt}$$

$$, \quad D^{-1} = \frac{1}{D} \triangleq \int_{-\infty}^{t} . d\tau$$

$$\rightarrow \begin{cases} V = R_1 i_1 + LD(i_1 - i_2) \\ 0 = LD(i_2 - i_1) + R_2 i_2 + \frac{1}{CD} i_2 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} R_1 + LD & -LD \\ -LD & R_2 + LD + \frac{1}{CD} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V \\ 0 \end{bmatrix}$$

نوشتن معادلات انتگرال دیفرانسیل با استفاده از تئوری گراف کاملاً شبیه حل مدار در حوزه فازور است با این تفاوت که به جای $j\omega$، D داریم:

$$L \longleftrightarrow LD$$

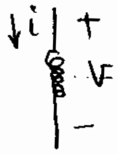
$$C \longleftrightarrow \frac{1}{CD}$$

مثلاً در مثال قبل:

$$M=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 1\end{bmatrix},\quad Z_b=\begin{bmatrix}R_1 & & & \\ & LD & & \\ & & R_2 & \\ & & & \frac{1}{CD}\end{bmatrix},\quad V_s'=\begin{bmatrix}V\\0\\0\\0\end{bmatrix},$$

$$Z=\begin{bmatrix}R_1+LD & -LD\\ -LD & R_2+LD+\frac{1}{CD}\end{bmatrix},\quad e_s=\begin{bmatrix}V\\0\end{bmatrix}.$$

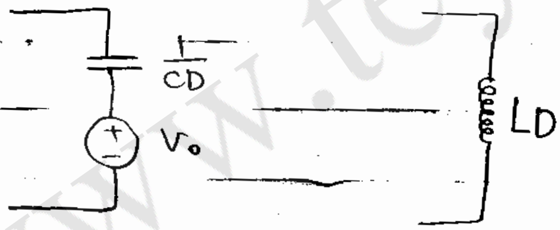
نکته: گاهی لازم است که $\frac{1}{D} \triangleq \int_0^t \cdot\, d\tau$



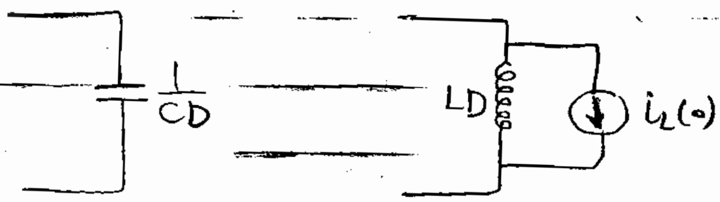
$$V=L\frac{di}{dt} \longrightarrow V=LD.i$$

$$i=\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v(\tau)d\tau=\frac{1}{L}\int_0^t v(\tau)d\tau+i_L(0) \longrightarrow i=\frac{1}{LD}V+i_L(0)$$

اگر قرار است معادلات انتگرال دیفرانسیل به روش مش نوشته شود:

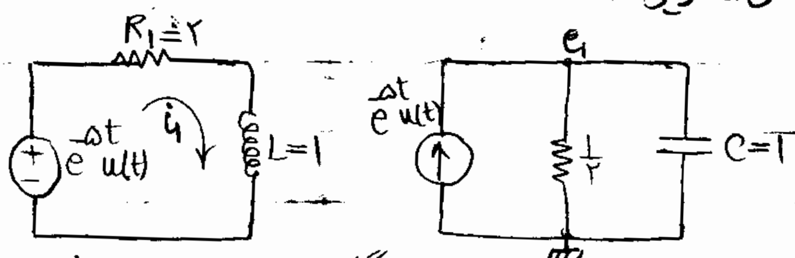


ولی اگر قرار است معادلات انتگرال دیفرانسیل به روش گره حل شود:



۴ـ دوگانی (Duality) در مدارهای الکتریکی:

یادآوری (مثال):



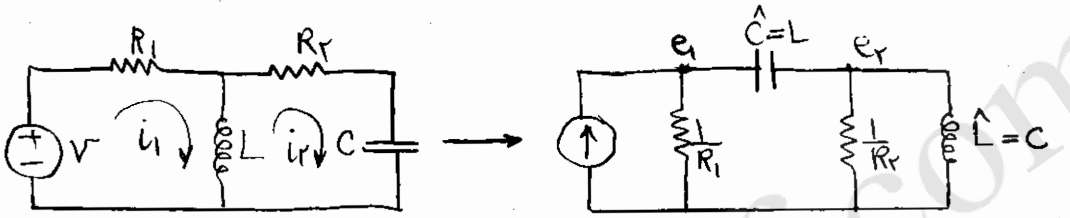
$$e^{-5t}u(t)=2i_1+\frac{di_1}{dt} \xleftrightarrow{\text{دوگان}} e^{-5t}u(t)=2e_1+\frac{de_1}{dt}$$

R	$\hat{R}=\frac{1}{R}$
L	$\hat{C}=L$
C	$\hat{L}=C$
منبع جریان	منبع ولتاژ
عناصر سری	عناصر موازی
KCL	KVL

درمدارهای دوگان:

مدارهایی را دوگان هم نامند چنانچه تغییرات مقابل یک دسته معادلات دیفرانسیل مشابه بوجود آورد.

مثال ۲:



گرافهای دوگان: دو گراف را دوگان نامند چنانچه

$V_K \longleftrightarrow \hat{j}_K$

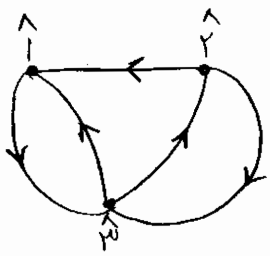
$j_K \longleftrightarrow \hat{V}_K$, $q \longleftrightarrow \hat{\varphi}$, $\varphi \longleftrightarrow \hat{q}$

روش بدست آوردن دوگان برای یک گراف:

۱- بین هر مش یک گره در نظر می گیریم (برای حلقه بیرونی نیز یک گره در بیرون گراف در نظر می گیریم)

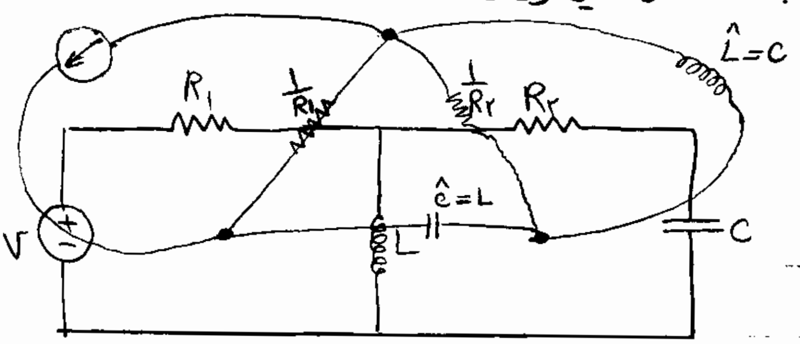
۲- به ازاء هر شاخه بین مش ها یک شاخه قطع کننده رسم می کنیم.

۳- جهت شاخه ها را طوری قرار می دهیم که چنانچه جهت شاخه گراف اصلی را در جهت حرکت عقربه های ساعت حرکت دهیم دو شاخه هم جهت شوند.



۴- (اختیاری) گراف را مرتب می کنیم.

محاسبهٔ مدارهای دوگان با استفاده از همین روش :



روشهای تجزیه و تحلیل حلقه و کات ست در مقایسه با روشهای تجزیه و تحلیل گره و مش :

چند تعریف :

① درخت Tree : یک زیرگراف از گراف متصل g را درخت نامند چنانچه

ــ زیرگراف متصل باشد.

ــ شامل تمام گره‌های گراف اصلی باشد.

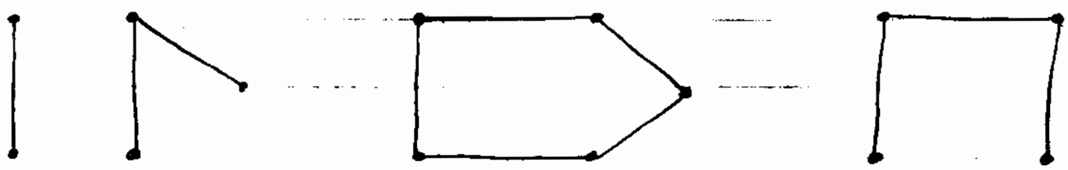
ــ شامل هیچ حلقه ای نباشد.

مثال :

چند نکته :

۱ــ درخت برای یک گراف منحصر به فرد نیست.

چند مثال از زیرگرافهایی که درخت نیستند.



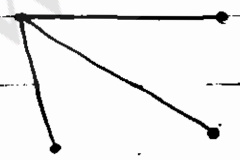
۲- اگر گرافی دارای n_t گره باشد و هر دو گره آن با یک شاخه متصل باشد در آن صورت به تعداد $n_t^{\,n_t-2}$ درخت می‌توان تعریف کرد.

مثال: ~~چند نمونه درخت~~ $n_t=3$

۲- گره انتهایی: گره‌ای است که فقط یک شاخه به آن متصل است.

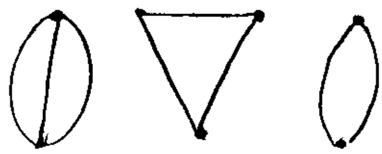
نکته۳: یک درخت حداقل دو گره انتهایی دارد.

نکته۴: در یک درخت خطی فقط دو گره انتهایی وجود دارد.

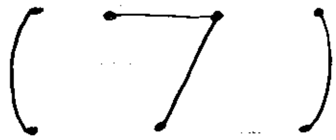


نکته۵: درخت ستاره‌ای به جز یک گره مابقی گره‌های انتهایی هستند.

۳- جنگل: اگر گراف و خود منفصل باشد و دارای ~~هشت~~ تعداد قطعه مجزا باشد در آن صورت مفهوم درخت به جنگل تبدیل می‌شود.



گراف اصلی g



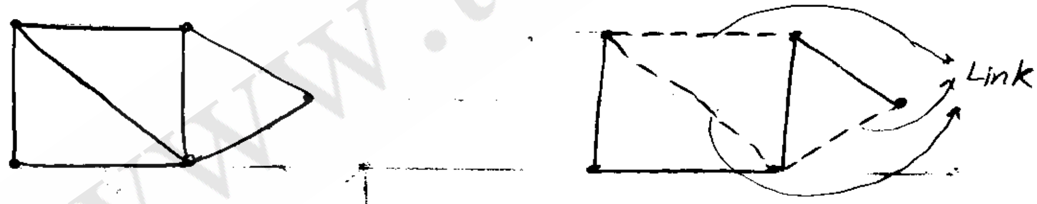
جنگل

نکته۶: اگر گرافی دارای S قطعه، n_t گره و b شاخه باشد در آن صورت جنگل دارای $n=n_t-S$ شاخه خواهد بود در مثال بالا:

$S=3$
$n_t=7$ $\longrightarrow n=n_t-S=4$
$b=8$

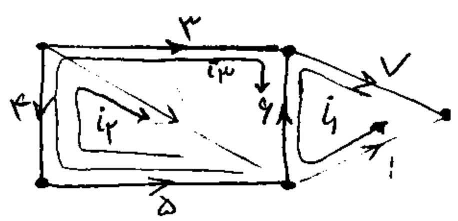
نکته۷: در یک درخت از یک گراف متصل بین هر دو گره یک مسیر منحصر به فرد وجود دارد.

۴ـ شاخه های گراف اصلی که در درخت نیستند را لینک (رابط) نامند.



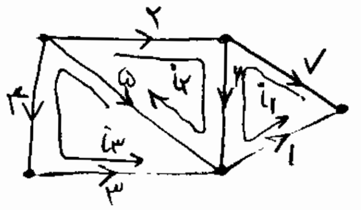
۵ـ حلقه اساسی: هر لینک با مسیر منحصر به فرد دو سر آن روی درخت یک حلقه‌ی اساسی تشکیل می دهند.

۶ـ کات ست اساسی: هر شاخه درخت با تعدادی لینک یک کات ست اساسی را تشکیل می دهند



نکته۸ : ممکن است با تعریف معین از درخت که حلقه‌های اساسی همان مش‌ها باشند.

مثال :

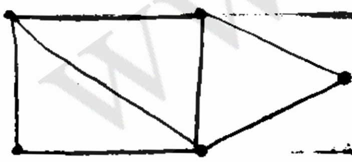


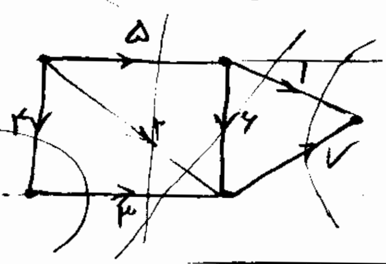
نکته۹ : در یک گراف متصل به تعداد $l=b-n+1$ لینک وجود دارد.

نکته۱۰ : در شماره‌گذاری شاخه بهتر است لینک‌ها را از شمارهٔ ۱ تا l و شاخه‌های درخت را از $l+1$ تا b شماره‌گذاری کنیم.

نکته ۱۱ : در تعریف جهت جریان حلقه‌های اساسی بهتر است از همان جهت لینک مربوطه استفاده کنیم.

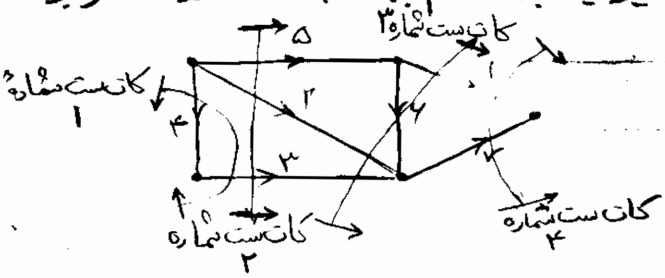
مثال از کات ست اساسی :



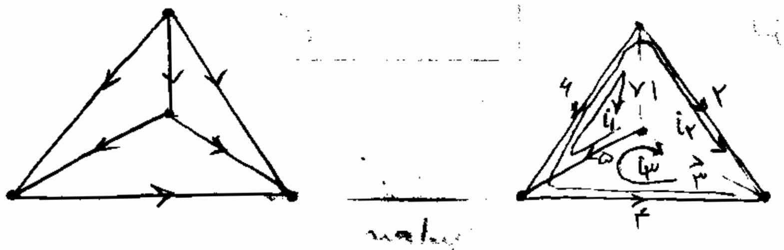


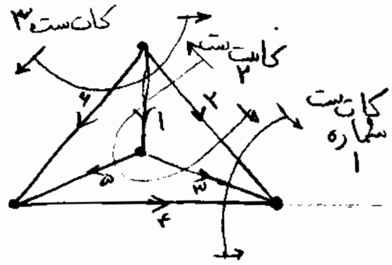
نکته۱۲ : هر کات ست را شماره‌گذاری می‌کنیم. کات ست اصلی مربوط به شاخهٔ درخت $l+1$ کات ست اول و... شماره‌گذاری می‌شود.

نکته۱۳ : برای هر کات ست نیز یک جهت هم‌جهت با شاخهٔ درخت مربوطه تعریف می‌کنیم.



مثال دیگر :





روش تحلیل حلقه (درمقایسه با روش تحلیل مش) :

روش تحلیل مش	روش تحلیل حلقه
مش را تعریف و برای هرکدام یک جریان تعریف می‌کنیم (جهت‌ها در جهت عقربه‌های ساعت)	حلقه‌های اساسی را تعریف و برهرکدام یک جریان تعریف می‌کنیم. (جهت جریان همجهت با لینک مربوطه)
ماتریس مش M را تعریف می‌کنیم. $m_{ik}=\begin{cases}1 & \text{اگر شاخه k ام در مش i ام باشد و همجهت}\\ -1 & \text{'' '' '' '' و غیرهمجهت}\\ 0 & \text{'' '' '' نباشد.}\end{cases}$	ماتریس حلقهٔ اساسی B را تعریف می‌کنیم $b_{ik}=\begin{cases}1 & \text{اگر شاخه k ام در حلقهٔ اساسی i ام باشد و همجهت باشد.}\\ -1 & \text{اگر شاخه k ام در حلقهٔ اساسی i ام باشد و همجهت نباشد}\\ 0 & \text{اگر شاخه k ام در حلقهٔ اساسی i ام نباشد.}\end{cases}$

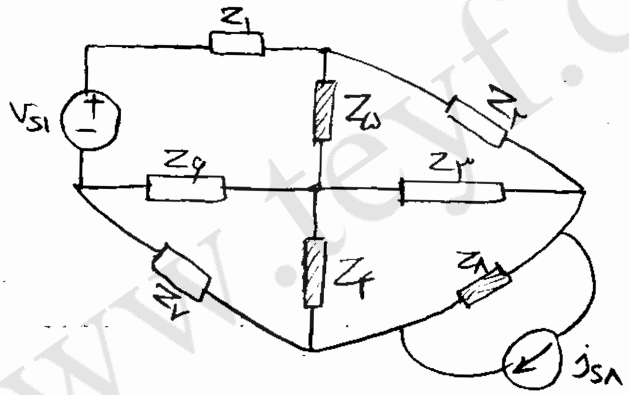
بردارای لازم را تعریف می‌کنیم :

$$V=\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\\vdots\\v_b\end{bmatrix},\ J=\begin{bmatrix}j_1\\j_2\\\vdots\\j_b\end{bmatrix},\ V_s'=\begin{bmatrix}v_{s1}'\\v_{s2}'\\\vdots\\v_{sb}'\end{bmatrix},\ \underline{I}=\begin{bmatrix}i_1\\i_2\\\vdots\\i_l\end{bmatrix},\ \underline{e}=\begin{bmatrix}e_1\\e_2\\\vdots\\e_n\end{bmatrix},\ Z_b\triangleq..$$

$MV=0 \quad , \quad M^T.I=J$	$BV=0 \quad , \quad B^T.I=J$
$V=Z_b.J+V_s' \quad , \quad ZI=e_s$	$V=Z_b.J+V_s' \quad , \quad ZI=e_s$
$\longrightarrow I=Z^{-1}.e_s \quad ,$	$\longrightarrow I=Z^{-1}.e_s$
$Z=M.Z_b.M^T \quad , \quad e_s=-MV_s'$	$Z=B.Z_b.B^T \qquad e_s=-BV_s'$
$J=M^T.I \quad , \quad V=Z_b.J+V_s'$	$J=B^T.I \quad , \quad V=Z_b.J+V_s'$

روش تحلیل حلقه	روش تحلیل مش
Z_{ii} : عناصر قطری ماتریس Z جمع امپدانس‌های حلقهٔ اساسی i ام است.	Z_{ii} : عناصر قطری ماتریس Z جمع امپدانس‌های مش i ام است.
Z_{ij} : (عناصر غیرقطری ماتریس Z) جمع امپدانس‌های مشترک حلقه اساسی i ام و حلقه اساسی j ام است. (−) : وقتی که جریانهای شاخهٔ مشترک مخالف هم باشند.	Z_{ij} : (عناصر غیرقطری ماتریس Z) جمع امپدانس‌های مشترک مش i ام و مش j ام است. (−) : وقتی که جریانهای شاخهٔ مشترک مخالف هم باشند.
e_{si} : (سطر i ام بردار e_s) جمع منابع ولتاژ حلقهٔ اساسی i ام است. (+) : اگر منبع معادل جریانی هم‌جهت با جریان حلقه اساسی به مدار بفرستد.	e_{si} : (سطر i ام بردار e_s) جمع منابع ولتاژ مش i ام است. (+) : اگر منبع معادل جریانی هم جهت با جریان مش به مدار بفرستد.

مثال :



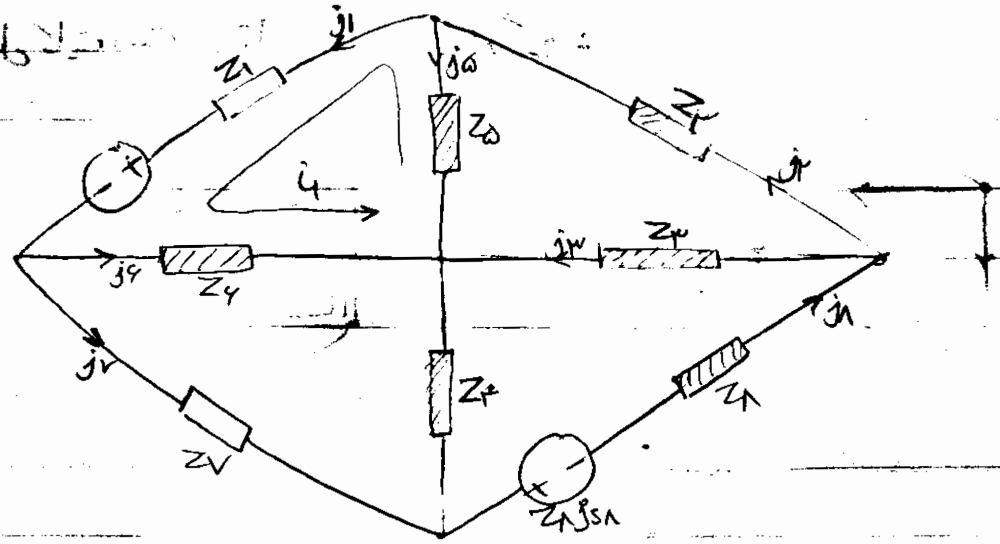
نکته : Z_i در مثال بالا ممکن است هر کدام از حالتهای زیر باشد

۱- شبکه اهمی $Z_i = R_i$

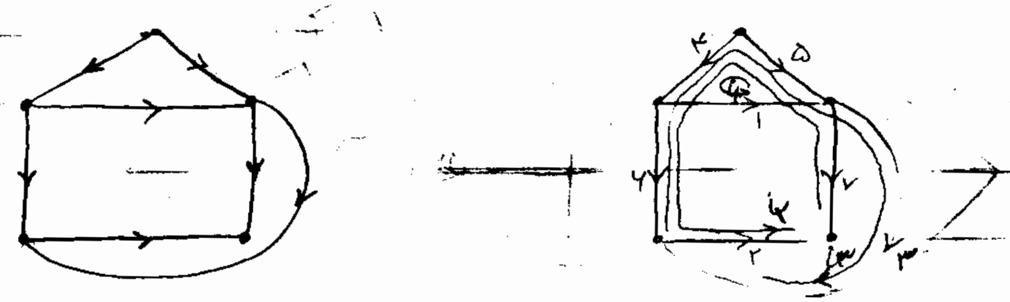
۲- شبکه در حوزهٔ فازبردار: $Z_i = R_i + j\omega L_i + \frac{1}{j\omega C_i}$

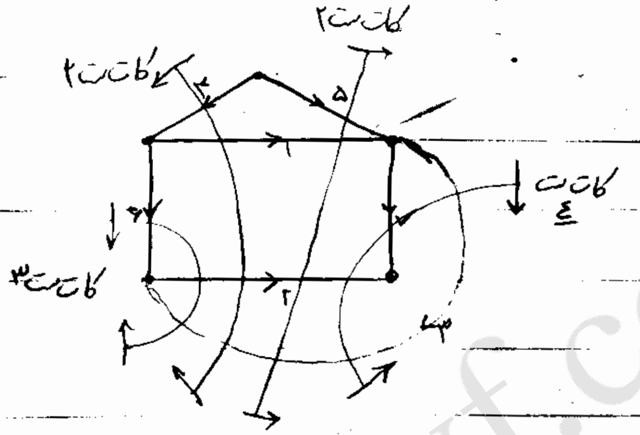
۳- شبکه در حالت نوشتن معادلات انتگرال دیفرانسیل: $Z_i = R_i + L_i D + \frac{1}{C_i D}$

(شرایط اولیه به صورت منبع جریان در نظر گرفته شده است).



روش تحلیل کات ست در مقابل روش تحلیل گره :





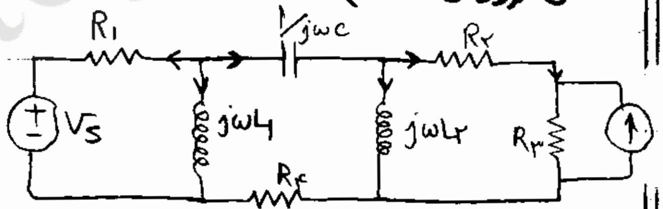
روش تحلیل گره	روش تحلیل کات ست
منابع ولتاژ را به منابع جریان تبدیل می‌کنیم	منابع ولتاژ را به منابع جریان تبدیل می‌کنیم.
شاخه‌ها را شماره گذاری می‌کنیم و یک گره را به عنوان گره مبنا انتخاب می‌کنیم.	کات ست‌ها را تعیین و آنها را به ترتیب شماره شاخهٔ درخت شماره گذاری می‌کنیم و برای هر کات ست یک جهت انتخاب می‌کنیم (هم جهت با شاخهٔ درخت مربوط)
ماتریس تلاقی (مختصر شده) A را تعیین می‌کنیم $a_{ik}=\begin{cases}1 & \text{اگر شاخهٔ } k \text{ ام از گرهٔ } i \text{ ام خارج شود}\\ -1 & \text{اگر شاخهٔ } k \text{ ام به گرهٔ } i \text{ ام وارد شود}\\ 0 & \text{اگر شاخهٔ } k \text{ ام با گرهٔ } i \text{ ام تلاقی نداشته باشد}\end{cases}$	ماتریس کات ست اساسی Q را تعیین می‌کنیم. $q_{ik}=\begin{cases}1 & \text{اگر شاخهٔ } k \text{ ام در کات ست } i \text{ ام باشد و هم جهت باشد.}\\ -1 & \text{اگر شاخهٔ } k \text{ ام در کات ست } i \text{ ام باشد و غیر هم جهت باشد.}\\ 0 & \text{اگر شاخهٔ } k \text{ ام در کات ست } i \text{ ام نباشد.}\end{cases}$

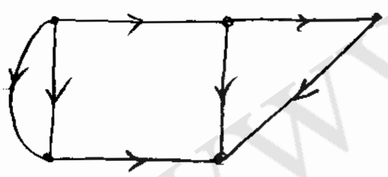
بردارها و ماتریس‌های لازم را تعریف می‌کنیم

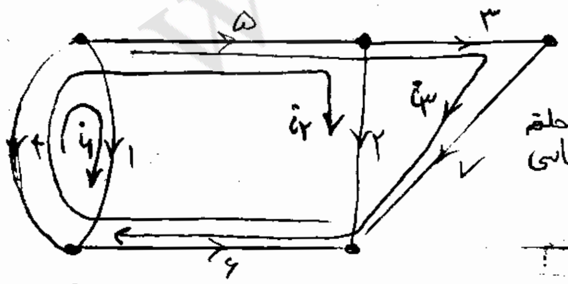
$$\underline{V}=\begin{bmatrix}V_1\\V_2\\ \vdots\\V_b\end{bmatrix},\ J=\begin{bmatrix}j_1\\j_2\\ \vdots\\j_b\end{bmatrix},\ J'_s=\begin{bmatrix}j'_{s1}\\j'_{s2}\\ \vdots\\j'_{sb}\end{bmatrix},\ \frac{1}{b}=\begin{bmatrix}Y_1 & & & \\ & Y_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & Y_b\end{bmatrix},\ \underline{I}=\begin{bmatrix}i_1\\i_2\\ \vdots\\i_l\end{bmatrix},\ \underline{e}=\begin{bmatrix}e_1\\e_2\\ \vdots\\e_n\end{bmatrix}$$

اثبات چند رابطه: $A J = 0$ $A^T \underline{e} = \underline{V}$ $J = Y_b \cdot \underline{V} + J'_s \quad , \quad Y \cdot \underline{e} = I_s$ $Y = A \cdot Y_b \cdot A^T \quad , \quad I_s = -A J'_s$	اثبات چند رابطه: $Q J = 0$ $Q^T \underline{e} = \underline{V}$ $J = Y_b \cdot \underline{V} + V'_s \quad , \quad Y \cdot \underline{e} = I_s$ $Y = Q Y_b Q^T \quad , \quad I_s = -Q J'_s$
$V = A^T \cdot \underline{e} \quad , \quad \underline{J} = Y_b \cdot V + J'_s$	$V = Q^T e \quad , \quad J = Y_b V + J'_s$
Y_{ii} = جمع ادمیتانس های گره i ام است.	Y_{ii} : جمع ادمیتانس های کات ست i ام است.
Y_{ij} : جمع ادمیتانس های مشترک بین گره i ام و گره j ام است (با علامت منفی)	Y_{ij} : جمع ادمیتانس های مشترک بین کات ست i ام و j ام است. + : اگر جهت تعریف شده کات ست ها در شاخه مشترک یکی باشد.
I_{si} : جمع منابع جریانی که به گره i ام وارد می شوند	I_{si} = جمع منابع جریان موجود در شاخه های کات ست i ام است. − : وقتی منبع معادل جهتش مخالف جهت کات ست باشد.

مثال (روش حلقه):







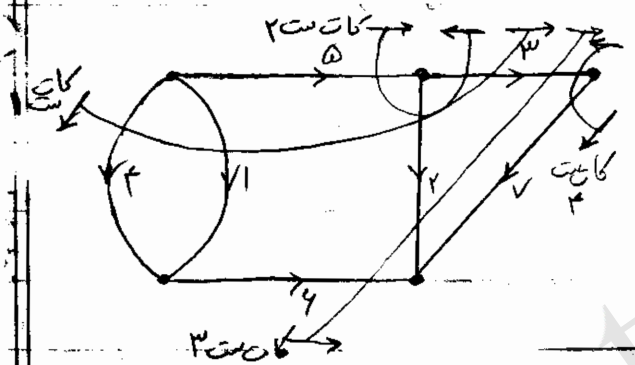
ماتریس حلقه اساسی

$$B = \begin{array}{c} \\ ۱ \\ ۲ \\ ۳ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۶ & ۷ \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$Z_b = \begin{bmatrix} j\omega L_1 & & & & & & \\ & j\omega L_2 & & & & & \\ & & R_2 & & & & \\ & & & R_1 & & & \\ & & & & \frac{1}{j\omega C} & & \\ & & & & & R_4 & \\ & & & & & & R_3 \end{bmatrix} \quad , \quad V'_s = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ V_s \\ 0 \\ 0 \\ R_3 i_s \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{array}{l} I = Z^{-1} \cdot e_s \\ Z = B \cdot Z_b \cdot B^T \\ e_s = -B \cdot V'_s \end{array}$$

$$Z=\begin{bmatrix} R_1+j\omega L_1 & R_1 & R_1 \\ R_1 & R_1+\frac{1}{j\omega C}+j\omega L_2+R_4 & R_4+\frac{1}{j\omega C}+R_1 \\ R_1 & R_1+R_4+\frac{1}{j\omega C} & R_1+\frac{1}{j\omega C}+R_2+R_3+R_4 \end{bmatrix},\quad e_s=\begin{bmatrix} V_s \\ V_s \\ V_s-R_3 i_s \end{bmatrix}$$

حل مثال قبل از روش کات ست :



$$Q=\left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$\longleftarrow I_4 \longrightarrow$

نکته: اگر شمارهٔ لینک ها از ۱ تا l و شاخه های درخت از $l+1$ تا b شماره گذاری شود و شمارهٔ کات ست ها به ترتیب شمارهٔ درخت ها باشد و جهت کات ست هم جهت با شاخهٔ درخت تعریف شود در آن صورت ماتریس کات ست اساسی (Q) به فرم زیر خواهد بود:

$$Q=\left[\,E \;\vdots\; I_n\,\right]$$

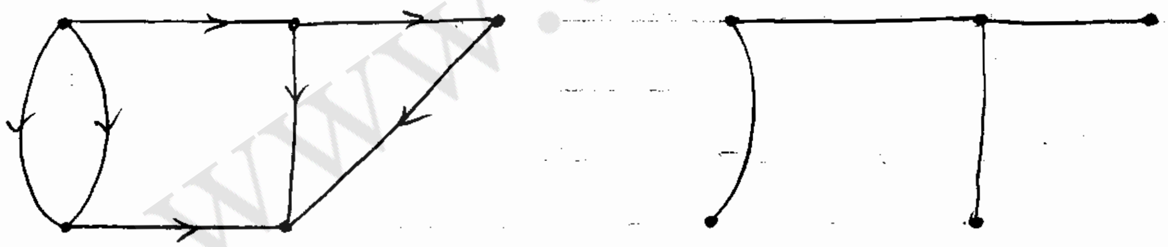
ماتریس واحد $n\times n$

$$Y_b=\begin{bmatrix} \frac{1}{j\omega L_1} &&&&&& \\ & \frac{1}{j\omega L_2} &&&&& \\ && \frac{1}{R_2} &&&& \\ &&& \frac{1}{R_1} &&& \\ &&&& j\omega C && \\ &&&&& 1/R_4 & \\ &&&&&& 1/R_3 \end{bmatrix},\quad J_s'=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{V_s}{R_1} \\ 0 \\ 0 \\ -i_s \end{bmatrix},\quad \begin{aligned} \underline{e}&=Y^{-1}\cdot I_s \\ Y&=QY_bQ^T \\ I_s&=-Q\cdot J_s' \end{aligned}$$

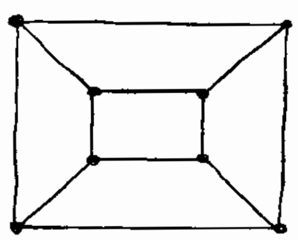
$$\rightarrow Y=\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1}+\frac{1}{j\omega L_1}+\frac{1}{j\omega L_2}+\frac{1}{R_2} & -\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{j\omega L_2}\right) & \frac{1}{R_2}+\frac{1}{j\omega L_2} & -\frac{1}{R_2} \\ -\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{j\omega L_2}\right) & j\omega C+\frac{1}{j\omega L_2}+\frac{1}{R_2} & -\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{j\omega L_2}\right) & \frac{1}{R_2} \\ \frac{1}{R_2}+\frac{1}{j\omega L_2} & -\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{j\omega L_2}\right) & \frac{1}{R_2}+\frac{1}{j\omega L_2}+\frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_2} \\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_4} \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow I_s=\begin{bmatrix} \frac{V_s}{R_1} \\ 0 \\ 0 \\ i_s \end{bmatrix}$$

نکته ۱ : در اکثر مدارها روشهای تحلیل مش و گره حالت خاصی از روش های تحلیل حلقه و کات ست می باشند.



مثال نقض:



نکته ۲ : بین ماتریسهای B و Q روابط زیر برقرار است:

$$\begin{cases} B^T \cdot Q = 0 \\ Q^T \cdot B = 0 \end{cases} \qquad Q=\left[E \;\vdots\; I_n\right] \qquad B=\left[I_\ell \;\vdots\; F\right] \quad , \quad \begin{cases} E=-F^T \\ F=-E^T \end{cases}$$