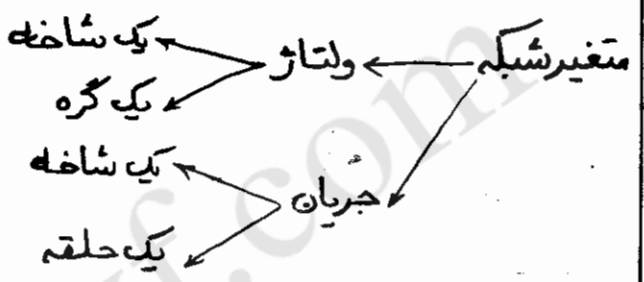


Natural Frequencies : فرکانسهای طبیعی

فرکانس طبیعی برای مدارهای خطی تغییرناپذیر با زمان LTI تعریف می شود.

فرکانس طبیعی برای مدارهایی تعریف می شود که شامل منابع مستقل نباشد.

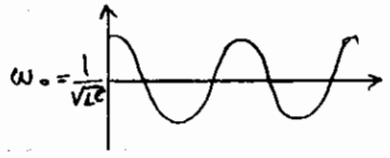
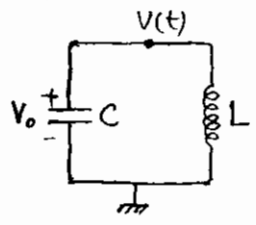
فرکانس طبیعی برای ۱- یک متغیر شبکه (مدار) ۲- خود شبکه (مدار) قابل تعریف است.



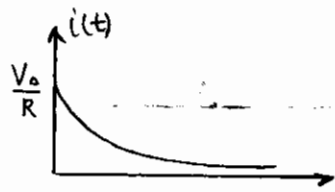
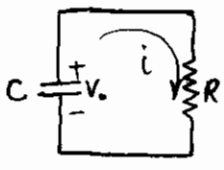
در یک مدار LTI که با شرایط اولیه کاری کند، اگر $x(t)$ یک متغیر شبکه باشد در آن صورت:

$$x(t) = k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t} + \dots + k_n e^{s_n t}$$

که s_1, s_2, \dots, s_n را فرکانسهای طبیعی متغیر $x(t)$ نامند.



مثال ۱:



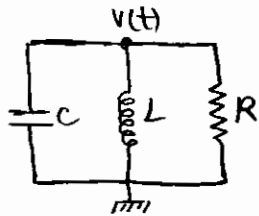
$$i(t) = \underbrace{\left(\frac{V_0}{R}\right)}_{k_1} e^{\underbrace{\left(-\frac{1}{RC}\right)}_{s_1} t}$$

مثال ۲:

$$s_1 = -\frac{1}{RC}$$

فرکانس طبیعی

مثال ۳



$$V(t) = k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t}$$

$$s_{1,2} = \frac{-1}{RC} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

الف: $R = \frac{1}{4}, C = 1, L = \frac{1}{15} \rightarrow \begin{cases} s_1 = -3 + j \\ s_2 = -3 - j \end{cases}$

ب: $R = \frac{1}{4}, C = 1, L = \frac{1}{5} \rightarrow \begin{cases} s_1 = -5 \\ s_2 = -1 \end{cases}$

ج: $R = \frac{1}{4}, C = 1, L = \frac{1}{9} \rightarrow \begin{cases} s_1 = -3 \\ s_2 = -3 \end{cases}$

$$V(t) = k_1 e^{-3t} + k_2 t e^{-3t}$$

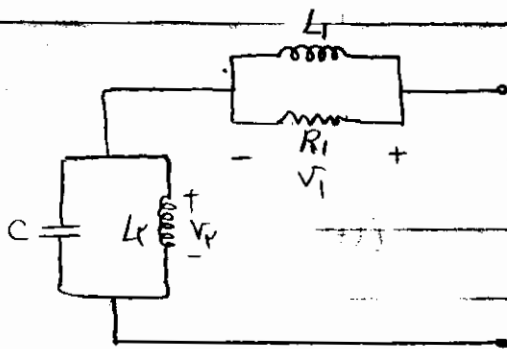
در این صورت می‌گوییم متغیر شبکه دارای فرکانس طبیعی ۳- از مرتبه ۲ می‌باشد.

تعریف فرکانس طبیعی یک شبکه (مدار) =

s_k را فرکانس طبیعی یک شبکه نامند چنانچه s_k فرکانس طبیعی یکی از متغیرهای شبکه باشد.

نکته ۱: در اکثر مدارها فرکانس طبیعی کلیه متغیرها و خود شبکه یکسان است.

نکته ۲: در بعضی موارد فرکانسهای طبیعی مدار با متغیرهای شبکه یکسان نیست.



مثال ۴

فرکانس طبیعی V_1 : $s_1 = \frac{-R_1}{L_1}$

فرکانس طبیعی V_2 : $\frac{j}{\sqrt{LC}} + \frac{j}{\sqrt{LC}}$

فرکانس طبیعی شبکه: $\frac{-R_1}{L_1}, \frac{j}{\sqrt{LC}} \rightarrow \frac{j}{\sqrt{LC}}$

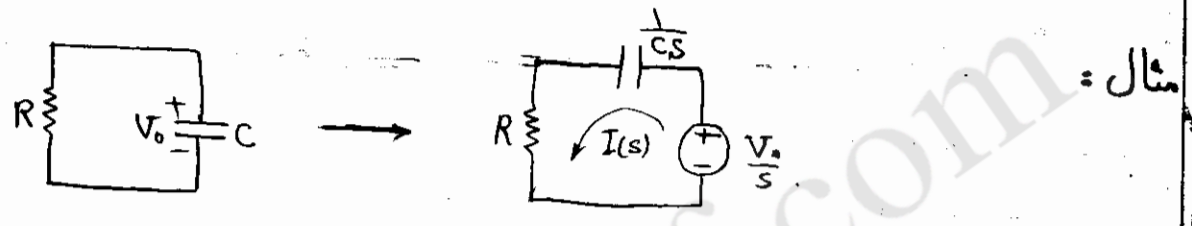
نحوه محاسبه فرکانسهای طبیعی یک متغیر شبکه (غیر از محاسبه مستقیم):

۱- استفاده از تبدیل لاپلاس $x(t)$ به $X(s)$

$$X(s) = \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_n s^n}{a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n}$$

اگر $X(s)$ به صورت زیر باشد:

ریشههای مخرج (قطبها) همان فرکانسهای طبیعی $x(t)$ هستند.



$$I(s) = \frac{\frac{V_0}{s}}{R + \frac{1}{Cs}} \Rightarrow \frac{CV_0}{1 + RCS} \rightarrow 1 + RCS = 0 \rightarrow s = \frac{-1}{RC}$$

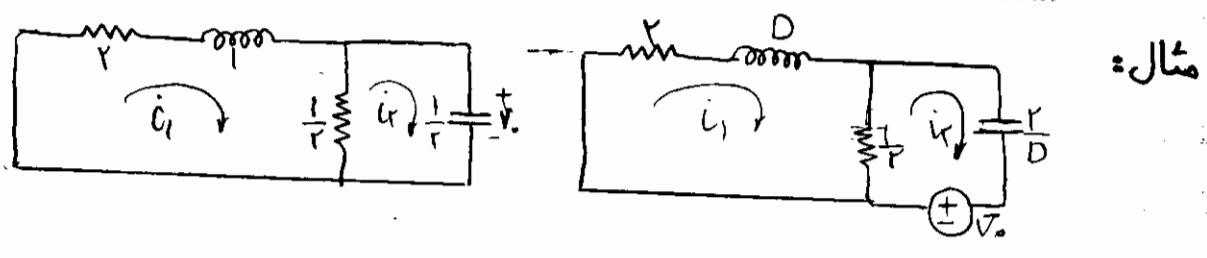
۲- استفاده از معادلات انتگرال و دیفرانسیلی:

اگر معادلات انتگرال و دیفرانسیلی یک مدار را بنویسیم به شکل زیر درمی آید:

$$\begin{bmatrix} P_{11}(D) & P_{12}(D) & \dots & P_{1n}(D) \\ P_{21}(D) & P_{22}(D) & \dots & P_{2n}(D) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n1}(D) & P_{n2}(D) & \dots & P_{nn}(D) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$$

$P(D) \quad \quad \quad X \quad \quad \quad F$

$$P(D) \cdot X = F$$



مثال:

$$\begin{bmatrix} \frac{D}{r} + D & -\frac{1}{r} \\ -\frac{1}{r} & \frac{1}{r} + \frac{r}{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -V_0 \end{bmatrix}$$

نکته: اگر معادله دیفرانسیل $x(t)$ را به شکل زیر داشته باشیم:

$$(D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_1D + a_0)x(t) = f'(t)$$

$$D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_1D + a_0 = 0$$
 در آن صورت ریشه‌های معادله

همان فرکانسهای طبیعی هستند.

نکته: در معادله بالا، باید معادله دیفرانسیل دارای حداقل درجه ممکن باشد. (معادله

دیفرانسیل مینیمال)

الگوریتم کار:

۱- معادلات لنتگرو دیفرانسیلی را طوری جای‌جای کنیم که x_n (متغیر آخری)، متغیر می باشد که

قرار است فرکانسهای طبیعی آن را محاسبه کنیم.

۲- ماتریس $P(D)$ را به صورت یک ماتریس بالامثلثی درمی آوریم:

$$\begin{bmatrix} \hat{P}_{11}(D) & \hat{P}_{12}(D) & \dots & \hat{P}_{1n}(D) \\ 0 & \hat{P}_{22}(D) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & \hat{P}_{nn}(D) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{F}_1 \\ \hat{F}_2 \\ \vdots \\ \hat{F}_n \end{bmatrix}$$

۳- در آن صورت ریشه‌های معادله $\hat{P}_{nn}(D) = 0$ همان فرکانسهای طبیعی $x_n(t)$ هستند.

یادآوری یک مثال ساده عددی: حل یک دستگاه دو معادله دو مجهولی

$$\begin{aligned} E_1 &: 2x_1 + x_2 = 11 \\ E_2 &: 3x_1 + 5x_2 = 34 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 34 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} E_1 &: E_1 = 2x_1 + x_2 = 11 \\ E_2 &: E_2 - \frac{3}{2}E_1 : 3,5x_2 = 17,5 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 17,5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow 3,5x_2 &= 17,5 & \rightarrow x_2 &= 5 \\ \rightarrow 2x_1 + 5 &= 11 & \rightarrow x_1 &= 3 \end{aligned}$$

$$E_1 = \left(\frac{D}{f} + D\right) i_1 - \frac{1}{f} i_2 = 0 \quad = \text{دومدار مثال قبل}$$

$$E_2 = -\frac{1}{f} i_1 + \left(\frac{D+f}{fD}\right) i_2 = -V_0$$

$$\rightarrow E_1' = E_1 + (D+fD)E_2 = \left[\frac{(D+f)(D+fD)}{fD} - \frac{1}{f}\right] i_2 = -(D+fD)V_0$$

$$E_2' = E_2 = -\frac{1}{f} i_1 + \left(\frac{D+f}{fD}\right) i_2 = -V_0$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 0 & \frac{(D+f)(D+fD)-D}{fL} \\ -\frac{1}{f} & \frac{D+f}{fL} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(D+fD)V_0 \\ -V_0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} -\frac{1}{f} & \frac{D+f}{fD} \\ 0 & \frac{(D+f)(D+fD)-D}{fD} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -V_0 \\ -(D+fD)V_0 \end{bmatrix}$$

$\hat{P}_{nn}(D)$

$$\rightarrow (D+4)(D+2D) - D = 0 \rightarrow 2D^2 + 14D + 20 - D = 0$$

$$\rightarrow D^2 + 7D + 10 = 0 \rightarrow \begin{aligned} S_1 &= -3 + j \\ S_2 &= -3 - j \end{aligned}$$

الگوریتم کتاب جبهه دار برای بالامثلنی کردن ماتریس $P(D)$:

۱- در ستون اول شماره تریب عنصر را انتخاب می کنیم (از نظر درجه).

نکته ۱: $P_{ii}(D)$ یا از درجه صفر یا از یک و یا از دو است.

نکته ۲: اگر دو یا چند عنصر هم درجه (در پاشین تریب درجه) داشته باشند یکی را به دلخواه انتخاب

می کنیم. $P_{ki}(D)$:

$$2- \text{ برای } k \neq i \text{ این معادله را می نویسیم: } \frac{P_{ki}(D)}{P_{ki}(D)} = \underline{q_{ki}(D)} + \frac{r_{ki}(D)}{P_{ki}(D)}$$

۳- دستگاه معادلات را به شکل زیر جایگزین کنیم :

$$E'_1 = E_1 - q_{11}(D) \cdot E_k$$

$$E'_2 = E_2 - q_{21}(D) \cdot E_k$$

$$\vdots$$

$$E'_k = E_k$$

$$\vdots$$

$$E'_n = E_n - q_{n1}(D) \cdot E_k$$

۴- مراحل ۱ و ۲ و ۳ را آن قدر تکرار می کنیم تا فقط یکی از عناصر ستون اول صفر نباشد.

۵- ردیف غیر صفر را به اول می بریم.

نتیجه بعد از بند 3

$$\begin{bmatrix} P'_{rr}(D) & P'_{rr}(D) & \dots & P'_{rn}(D) \\ 0 & P'_{rr}(D) & & P'_{rn}(D) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & P'_{rn}(D) & & P'_{nn}(D) \end{bmatrix}$$

۲- سطر و ستون اول را حذف کنیم.

$$\begin{bmatrix} P'_{rr}(D) & \dots & P'_{rn}(D) \\ P'_{rr}(D) & & \vdots \\ \vdots & & P'_{nn}(D) \\ P'_{rn}(D) & & P'_{nn}(D) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_r \\ \alpha_r \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f'_r \\ f'_r \\ \vdots \\ f'_n \end{bmatrix}$$

۳- مراحل اتا و را آن قدر ادامه می دهیم تا $P'_{nn}(D)$ را بدست آوریم.

مثال ص ۳۰۳ کتاب جبهه دار:

$$\begin{aligned} (D^2 + 2D + 1) \dot{I}_1 - (D + 1) \dot{I}_2 &= 0 \\ -(D^2 + D) \dot{I}_1 + (2D + 1) \dot{I}_2 &= e_s \end{aligned} \rightarrow \begin{matrix} E_1 = E_2 \\ E_2 \end{matrix} \begin{bmatrix} D^2 + 2D + 1 & -(D + 1) \\ -(D^2 + D) & (2D + 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ e_s \end{bmatrix}$$

در مرحله اول $k=1$ انتخابی شود:

$$\frac{-(D^2 + D)}{D^2 + 2D + 1} = \underbrace{(-1)}_{q_{rr}(D)} + \frac{D + 1}{D^2 + 2D + 1}$$

$$\begin{matrix} E'_1 = E_1 \\ E'_2 = E_2 + E_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} D + 2D + 1 & -(D + 1) \\ D + 1 & 2D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ e_s \end{bmatrix}$$

در مرحله دوم $k=2$ انتخابی شود:

$$\frac{D^2 + 2D + 1}{D + 1} = \frac{D + 1}{D + 1} + \frac{0}{D + 1}$$

$$\begin{aligned} \dot{E}_1 &= \dot{E}_1 - (D+1)\dot{E}_1 \\ \dot{E}_r &= \dot{E}_r \end{aligned} \begin{bmatrix} 0 & -(D+1)(rD+1) \\ D+1 & rD \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(D+1)e_s \\ e_s \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} D+1 & rD \\ 0 & \frac{-(D+1)(rD+1)}{P_{nn}(D)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_s \\ -(D+1)e_s \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} ? \rightarrow S_1 &= -1 \\ S_r &= \frac{-1}{r} \end{aligned} \quad \text{فرکانسهای طبیعی: } i_r$$

نحوه محاسبه فرکانسهای طبیعی یک شبکه:

نکته: برای محاسبه فرکانسهای طبیعی، شبکه نیازی به محاسبه تمامی فرکانسهای طبیعی متغیرها

شبکه نیست.

راه محاسبه:

$$\det [P(D)] = 0 \quad \text{۱- ریشه های معادله}$$

۲- مقادیر ویژه ماتریس A