، $R_{ii}$ : جمع مقاومتهای حلقهٔ iام     $R_{ij}$ : ± مقاومتهای مشترک حلقهٔ iام و jام

قضیه ۲: اگر $P_t = I^T R I$ را نسبت به $I$ حداقل کنیم مقدار $I$ که $P_t$ را حداقل می‌کند همان جواب مسئله است.

قضیه ۳: اگر مداری شامل مقاومت داشته باشیم که فقط با منبع ولتاژ $V_s$ تغذیه شوند حال اگر ولتاژی را به دلخواه بین دو گره انتخاب کنیم در آن صورت: $|V| \leqslant |V_s|$

قضیه ۴: اگر مداری شامل مقاومت داشته باشیم که فقط با منبع جریان $i_s$ تغذیه می‌شود حال اگر جریان شاخهٔ kام را $j_k$ بنامیم $|j_k| \leqslant |i_s|$

آنالیز حساسیت در مدارهای الکتریکی:

در مدارهای الکتریکی مثل بسیاری از سیستم‌های دیگر تغییراتی در پارامترها وجود دارد:

عامل تغییرات: ۱- خطای ساخت در تولید ۲- شرایط محیطی ۳- کارکرد

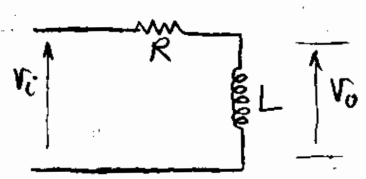
آنالیز حساسیت: تابع تبدیل یک سیستم چه مقدار نسبت به تغییرات یک پارامتر خاص (K) حساس است؟

$$S_K^G = ?$$

مثال:

$$G(s) = \frac{LS}{R+LS}$$

$$S_R^G = ?$$



راه کلی : یک تعریف $S_R^G = \frac{\Delta G}{\Delta R}$

$R' = R + \Delta R \leftarrow$ معلوم

$G' = G + \Delta G \leftarrow$ مجهول

$$G' = \frac{LS}{R' + LS}$$

$$\Delta G = G' - G = \frac{LS}{(R+\Delta R)+LS} - \frac{LS}{R+LS} = \frac{-LS.\Delta R}{(R+LS)(R+\Delta R+LS)}$$

$$\longrightarrow \frac{\Delta G}{\Delta R} \simeq \frac{-LS}{(R+LS)^2}$$

مثلاً اگر $L = 1^H$ , $R = 1^{\Omega}$ , $s = j5$ آنگاه:

$$\frac{\Delta G}{\Delta R} = \frac{-j5}{(1+j5)^2} = \frac{5}{26} \angle -90^\circ - tg^{-1}5$$

تعریف دوم : $S_R^G \triangleq \frac{dG}{dR}$

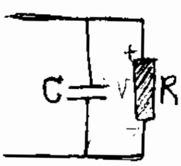
در مثال قبلی $S_R^G = \frac{-LS}{(R+LS)^2}$

فرمول اصلی : $S_K^G = \frac{\frac{\Delta G}{G}}{\frac{\Delta K}{K}}$ و یا $S_K^G = \frac{dG}{dK} \cdot \frac{K}{G}$

برای وقتی که مقدار نامی یک پارامتر صفر است حساسیت بصورت زیر تعریف می‌شود

$$S_K^G = \frac{dG}{dK} \cdot \frac{1}{G}$$

مثال :



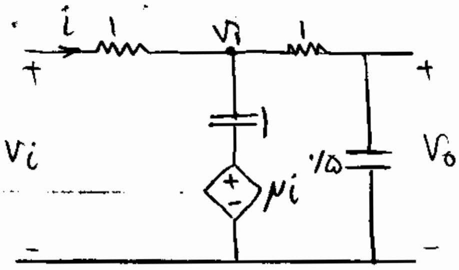

$$Z_{eq} = \frac{\frac{R}{jwC}}{R + \frac{1}{jwC}} = \frac{R}{1 + jwRC} = f(R)$$ اگر R کوچک باشد

اگر مثلاً $C = 10^{-12}$ و $w = 10^{13}$ آنگاه:

$$Z_{eq} = \frac{R}{1 + j10R}$$

اگر قطبهای تابع تبدیل یک سیستم را $P_i$ بنامیم در این صورت حساسیت قطب $P_i$ نسبت به تغییرات یک پارامتر:

$$S_K^{P_i}=\frac{\partial P_i}{\partial K}\cdot\frac{K}{P_i}$$




مثال: ۱- تابع تبدیل $\frac{V_O(s)}{V_I(s)}$ را محاسبه کنید.

۲- حساسیت این تابع تبدیل نسبت به $\mu$ چقدر است. ($s=j2$ و $\mu_0=2$)

۳- به ازاء $\mu=1$ قطبهای و صفرهای تابع تبدیل را محاسبه و آن را رسم کنید.

۴- حساسیت قطبها نسبت به $\mu$ چقدر است؟

$$\begin{cases}\dfrac{V_1-V_i}{1}+\dfrac{V_1-\mu i}{1/s}+\dfrac{V_1-V_o}{1}=0\\[2mm] \dfrac{V_o-V_1}{1}+\dfrac{V_o}{2/s}=0\end{cases},\quad i=V_i-V_1$$

در روابط بالا $V_1$ را حذف و $\frac{V_o}{V_I}$ را محاسبه می‌کنیم.

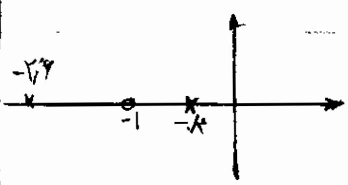
$$G(s)=\frac{V_o}{V_I}=\frac{2(1+\mu s)}{(\mu+1)s^2+2(\mu+2)s+2},\qquad S_\mu^G=\frac{\partial G}{\partial \mu}\cdot\frac{\mu}{G}$$

$$S_\mu^G=\frac{2s\left[(\mu+1)s^2+2(\mu+2)s+2\right]-(s^2+2s)2(\mu s+1)}{\left[(\mu+1)s^2+2(\mu+2)s+2\right]^2}\cdot\frac{\mu}{\dfrac{2(1+\mu s)}{(\mu+1)s^2+2(\mu+2)s+2}}$$

به ازاء $s=j2\ ,\ \mu_0=2$ $\longrightarrow S_\mu^G=0/37\angle 15/72$

$$\mu=1\longrightarrow G(s)=\frac{2(1+s)}{2s^2+6s+2}=\frac{s+1}{s^2+3s+1}$$

یک صفر در $-1$ داریم و قطب در $-1/5\pm\sqrt{2/25-1}$ $\begin{cases}-2/6\\-0/4\end{cases}$



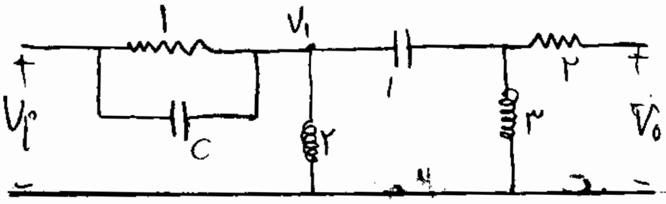

$$G(s)=\frac{2(1+\mu s)}{(\mu+1)s^2+2(\mu+2)s+2}$$

$$P_{1,2} = \frac{-(\mu+2) \pm \sqrt{\mu^2+2\mu+2}}{1+\mu} \quad \begin{cases} P_1 = \dfrac{-(\mu+2)+\sqrt{\mu^2+2\mu+2}}{1+\mu} \\ P_2 = \dfrac{-(\mu+2)-\sqrt{\mu^2+2\mu+2}}{1+\mu} \end{cases}$$

$$S^{P_i}_{\mu} = \frac{\partial P_i}{\partial \mu} \cdot \frac{\mu}{P_i}$$

مثال ۲: الف- $G(s) = \dfrac{V_o}{V_I} = ?$

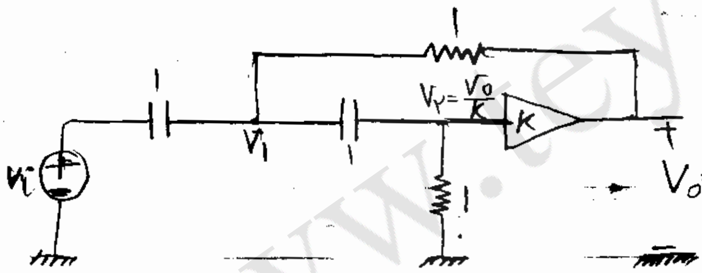
ب- حساسیت $G(s)$ نسبت به خازن پارازیتی $c$ چقدر است؟



$$G = \frac{V_o}{V_I} = \frac{2(1+3s^2)(1+cs)}{2(6cs^2+6s+1)}$$

$$S^G_c = \frac{\partial G}{\partial c} \cdot \frac{1}{G} = \frac{2s(1+3s^2)D - 6s \times 2(1+3s^2)(1+cs)}{D^2} \times \frac{D}{2(1+3s^2)(1+cs)} = \dots$$

مثال ۳:



حساسیت قطبها نسبت به $k = ?$ $\quad V_o = kV_p$

$$\begin{cases} \dfrac{V_1-V_i}{1/s} + \dfrac{V_1-V_o/k}{1/s} + \dfrac{V_1-V_o}{1} = 0 \\ \dfrac{V_o/k - V_1}{1/s} + \dfrac{V_o/k}{1} = 0 \end{cases}$$

در دو رابطهٔ مقابل $V_1$ را حذف می‌کنیم.

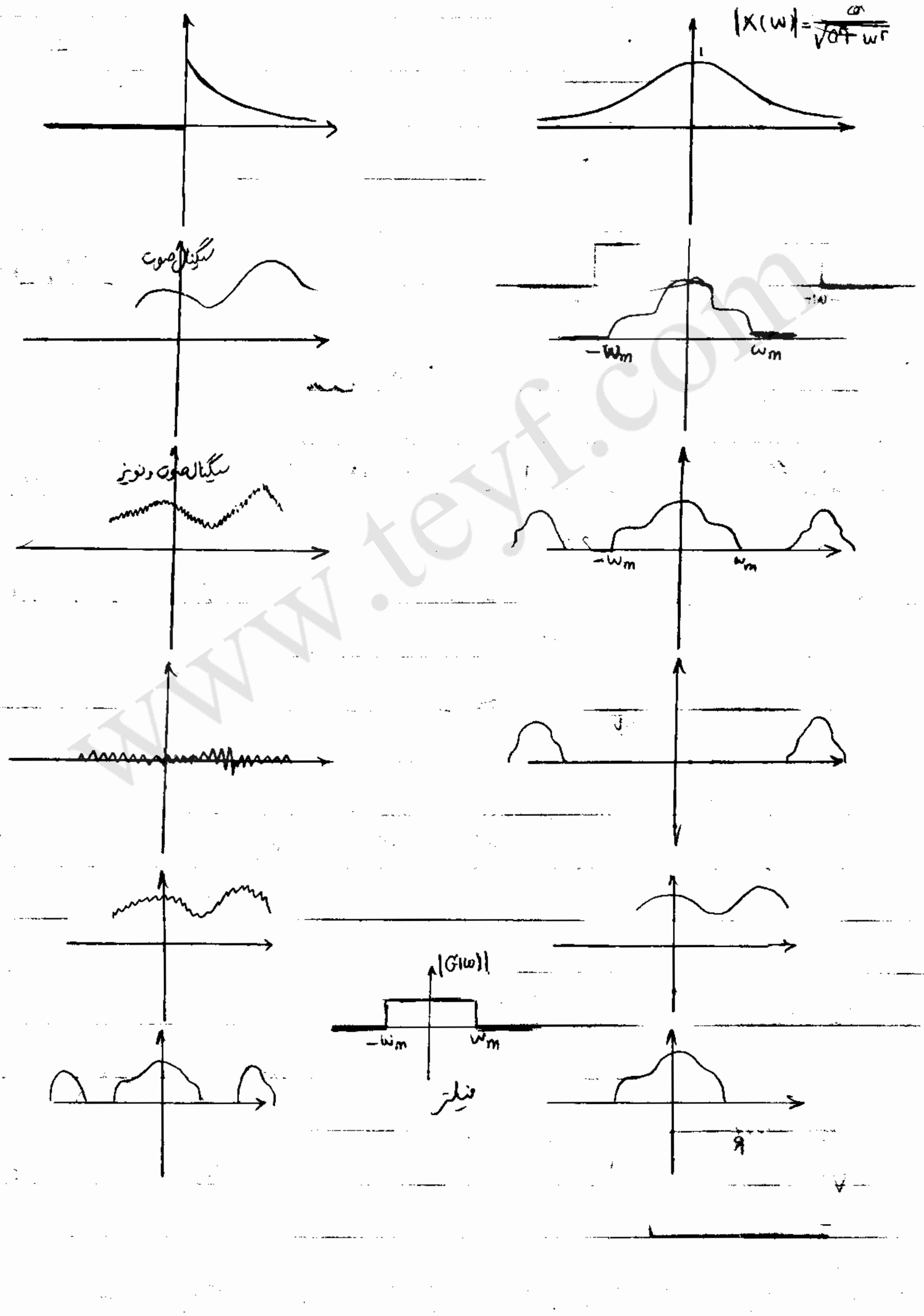
$$\rightarrow \frac{V_o}{V_I} = \frac{}{s^2+(3-k)s+1} \quad , \quad P_{1,2} = \frac{-(3-k) \pm \sqrt{(3-k)^2-4}}{2} \quad , \quad \begin{matrix} s = j2 \\ k_o = 2 \end{matrix}$$

$$S^{P_1}_k = 1.1547 \angle -90^\circ \quad , \quad S^{P_2}_k = 1.1547 \angle 90^\circ$$

فیلتر: یعنی جدا کردن بعضی فرکانسهای خاص از یک سیگنال.

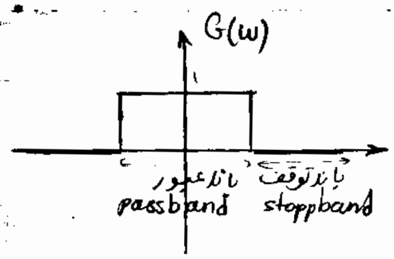
$x(t) \longleftrightarrow X(w)$

$e^{-at}u(t) \longrightarrow X(w) = \frac{a}{a+jw}$

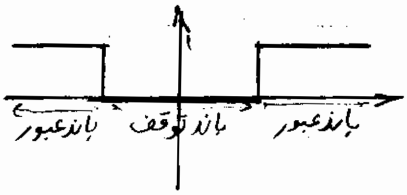


فیلترها چند نوع هستند:

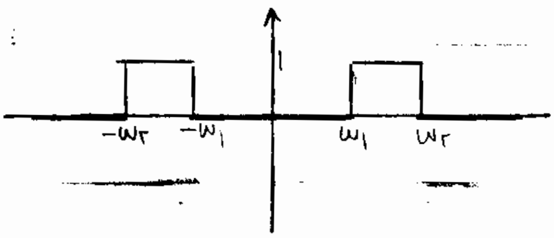
۱- فیلتر پائین گذر:




۲- فیلتر بالاگذر:



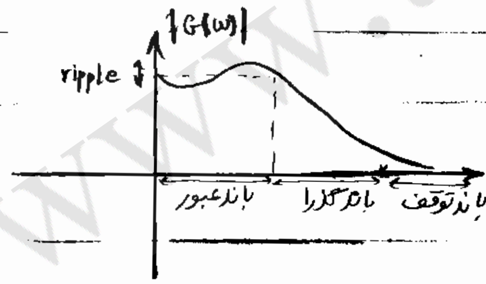

۳- فیلتر میان گذر:




کار فیلتر به همان سادگی مثال قبل نیست چون است

۱- فرکانسهای سیگنال و نویز هم پوشانی دارند ۲- ساخت سیستمی با مشخصات گفته شده غیرممکن

مثال از فیلتر غیرایده آل:

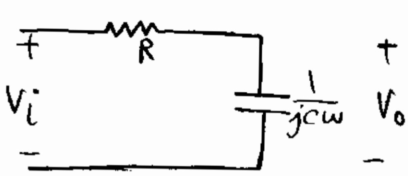



هدف از طراحی فیلتر ساخت یک مدار الکتریکی به فرمی که $|G(w)|$ تا حد ممکن به فیلتر ایده آل نزدیک باشد.

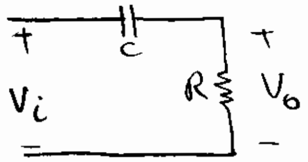
(به عبارت دیگر باند گذرا و ripple کم باشد).

مثال از فیلتر غیرایده آل (یک مدار RC):

مثال: $G_1(s)$

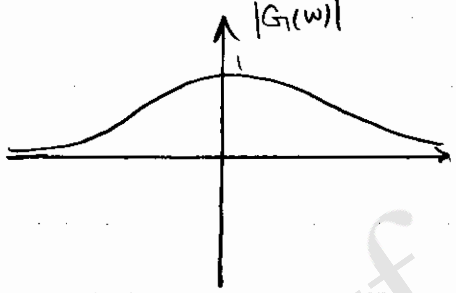


مثال ۲: $G_2(s)$



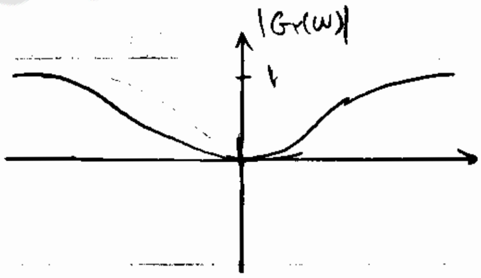

$$G_2(s)=\frac{R}{R+\frac{1}{Cs}}=\frac{RCs}{1+RCs} \quad , \quad G_1(s)=\frac{\frac{1}{Cs}}{R+\frac{1}{Cs}}=\frac{1}{1+RCs}$$

$$|G_1(\omega)|=\left|\frac{1}{1+jRC\omega}\right|=\frac{1}{\sqrt{1+(RC\omega)^2}}$$




یک مدار RC به شکل مثال ۲ یک فیلتر بالاگذر غیرایده آل است:

$$|G_2(\omega)|=\frac{RC\omega}{\sqrt{1+(RC\omega)^2}}$$



$$|G(j\omega)|^2 = G(s)\cdot G(-s)\big|_{s=j\omega}$$

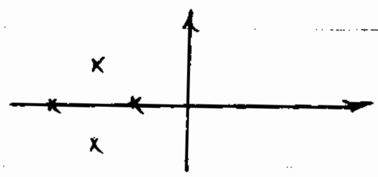
مثال :

$$G(s)=\frac{1}{s+1}$$

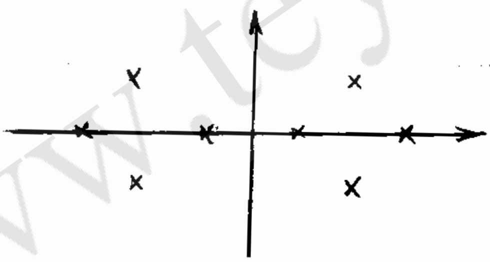
$$\longrightarrow G(j\omega)=\frac{1}{j\omega+1} \quad , \quad |G(j\omega)|^2=\frac{1}{\omega^2+1}$$

$$G(s)\cdot G(-s)\big|_{s=j\omega}=\frac{1}{1+s}\cdot\frac{1}{1-s}\Big|_{s=j\omega}=\frac{1}{1-s^2}\Big|_{s=j\omega}=\frac{1}{1+\omega^2}$$

نکته ۱: اگر قطبهای $G(s)$ به فرم زیر باشد

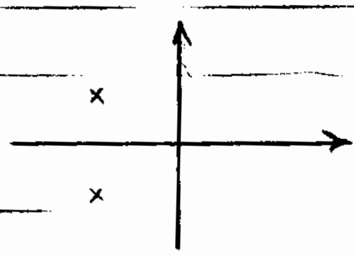


در آن صورت قطبهای $H(s)=G(s)\cdot G(-s)$ به صورت زیر است:

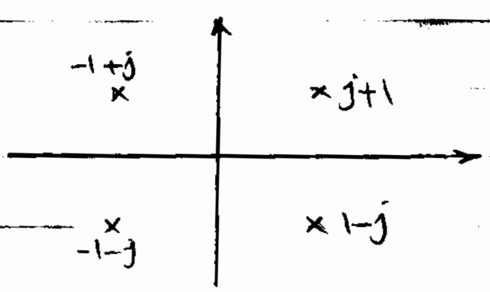


مثال:

$$G(s)=\frac{1}{s^2+2s+2}$$

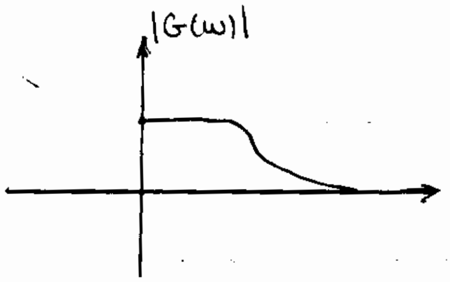


قطبهای $G(s)$




قطبهای $H(s)=G(s)\cdot G(-s)$

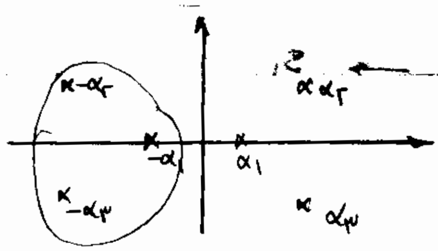
الگوریتم کلی طراحی یک فیلتر با معلوم بودن $|G(\omega)|$ :




$$G(S)=K\frac{1}{a_nS^n+\cdots+a_1S+1}$$

۱- $G(s)\cdot G(-s)=|G(j\omega)|^2_{\omega=\frac{s}{j}}$

۲- قطبهای $G(s).G(-s)$ را معلوم می کنیم




۳- $G(s)=K\frac{1}{(s+\alpha_1)(s+\alpha_2)(s+\alpha_3)+\cdots}$

دو پیشنهاد

۱- Butterworth $\qquad |G_n(j\omega)|^2=\frac{1}{1+\omega^{2n}}$

۲- chebychev $\qquad |G_n(j\omega)|^2=\frac{1}{1+\varepsilon^2C_n^2(\omega)} \quad 0<\varepsilon<1$

نکته: $n=1,2,3,\dots$ ، n را هرچقدر بیشتر انتخاب کنیم درجه فیلتر بالا می رود و درنتیجه ساخت و کار با آن مشکل تر است. ولی درعوض فیلتر به سمت فیلتر ایده آل نزدیکتر می شود.

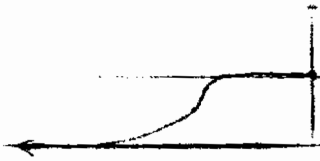
طراحی فیلتر Butterworth :

۱- روی پیچیدگی مدار فیلتر (n) تصمیم می گیریم. (مثال: $n=2$)

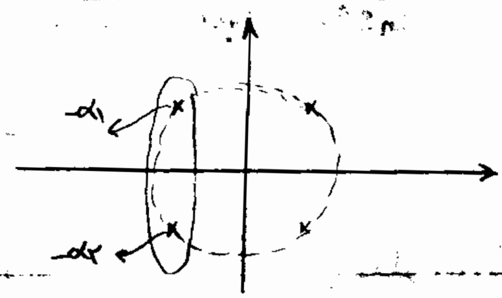
۲- قرار می دهیم: $|G(\omega)|^2=\frac{1}{1+\omega^{2n}}$ $\quad \left(|G(\omega)|^2=\frac{1}{1+\omega^4}\right)$

۳- به جای $\omega$، $\frac{s}{j}$ می‌گذاریم و $H(s)=G(s).G(-s)$ را بدست می‌آوریم:

$$H(s)=G(s).G(-s)=\frac{1}{1+\left(\frac{s}{j}\right)^4}=\frac{1}{1+s^4}$$



۴- قطبهای $H(s)$ را محاسبه می‌کنیم:




$$1+s^4=0 \longrightarrow s^4=-1$$

$$\longrightarrow s_1, s_2, s_3, s_4$$

$$G(s)=\frac{1}{(s+\alpha_1)(s+\alpha_2)}=$$

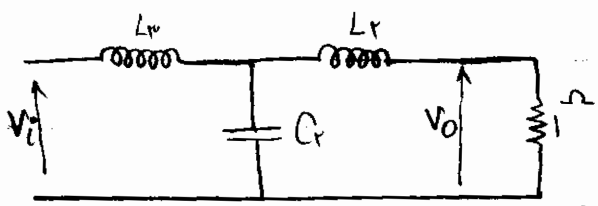
جدول فیلتر Butterworth:

| $n$ | $G(s)$ |
|---|---|
| 1 | $\frac{1}{s+1}$ |
| 2 | $\frac{1}{s^2+1.4s+1}$ |
| 3 | $\frac{1}{s^3+2s^2+2s+1}$ |
| 4 | $\frac{1}{s^4+2.6s^3+3.4s^2+2.6s+1}$ |
| 5 | $\frac{1}{s^5+3.24s^4+5.24s^3+5.24s^2+3.24s+1}$ |

سنتز فیلتر:

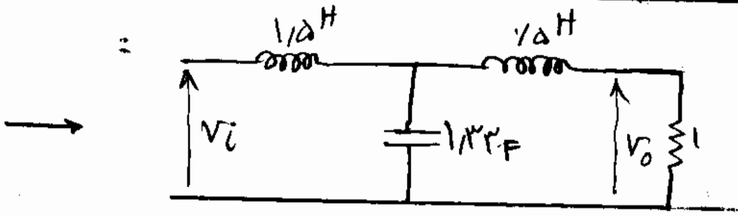
مثال: $n=3$

$$G_3(s)=\frac{1}{s^3+2s^2+2s+1}$$




$$G_3(s)=\frac{1}{s^3 L_2L_3C_2+s^2L_3C_2+s(L_2+L_3)+1}$$

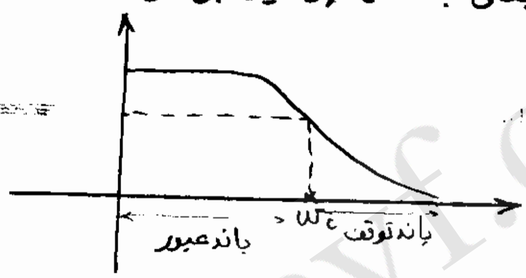
$$\longrightarrow \begin{cases} L_2L_3C_2=1 \\ L_3C_2=2 \\ L_2+L_3=2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} L_2=0.5 \\ L_3=1.5 \\ C_2=1.33 \end{cases}$$




دو نکته :

۱- مقدار مقاومت ۱ اهمی ($R_L$) ممکن است مقداری مخالف ۱ باشد.

۲- فرکانس قطع ($\omega_c$) در مدارهای بالا ۱ (رادیان بر ثانیه) است.



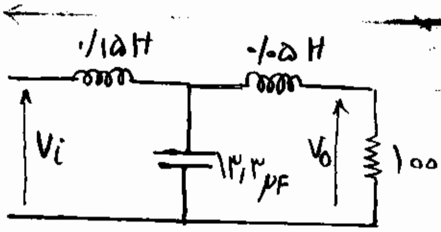

در یک طراحی فیلتر اگر $R_L$ و $\omega_c$ معلوم باشند، در آن صورت عناصر مدار بدست آمده باید به شکل زیر تغییر نمائید :

$$\text{مقاومت } 1\,\Omega \longrightarrow R_L$$

$$L_i \longrightarrow L_i \times \frac{R_L}{\omega_c}$$

$$C_i \longrightarrow C_i \times \frac{1}{R_L \cdot \omega_c}$$

به عنوان مثال اگر $R_L = 100\,\Omega$ و $\omega_c = 1000$ آن گاه :




تمرین از فیلتر Butterworth: می خواهیم یک فیلتر پائین گذر با فرکانس $\omega_c = 10^4$ بسازیم و قرار است این فیلتر به بار $R_L = 500\,\Omega$ متصل گردد. درجه فیلتر را ۴ بگیرید. مدار لازم (فیلتر) را رسم کنید.

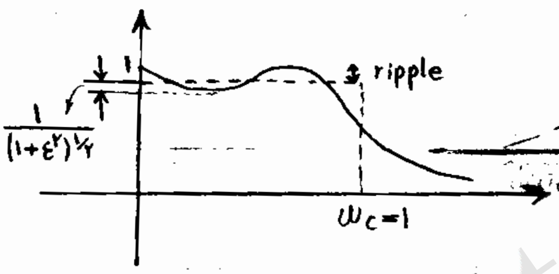
فیلتر chebychev:

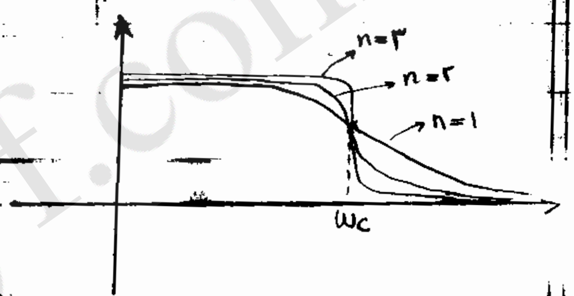
$$|G_1(\omega)|^2=\frac{1}{1+\varepsilon^2 C_n(j\omega)^2}$$

جدول $C_n(j\omega)$:

| n | $C_n(j\omega)$ |
|---|---|
| ۱ | $\omega$ |
| ۲ | $۲\omega^۲-۱$ |
| ۳ | $۴\omega^۳-۳\omega$ |
| ۴ | $۸\omega^۴-۸\omega^۲+۱$ |
| ۵ | $۱۶\omega^۵-۲۰\omega^۳+۵\omega$ |

فیلتر Butterworth:      فیلتر chebychev:



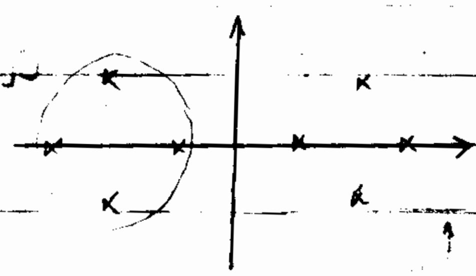

محاسبه $G(s)$ از روی $|G_n(j\omega)|^2$:

قطبهای $H(s)=G(s)\cdot G(-s)$ از رابطه زیر قابل محاسبه است:

قطب $H(s)$ $S=\sin a \sinh b + j\cos a \cosh b$

$$b=\frac{1}{n}\sinh^{-1}\frac{1}{\varepsilon}$$

$$a=\pm\frac{\pi}{2n},\pm\frac{3\pi}{2n},\pm\frac{5\pi}{2n},\dots$$



مثال: می خواهیم یک فیلتر chebychev با مشخصات زیر بسازیم:

۱- $n=۲$   ۲- $R_L=۶۰۰\,\Omega$   ۳- $f_c=۸۸۰۰\ rad/s$   ۴- $\varepsilon=۰/۵$

۱- سه فاز ۲- سری و تبدیل فوریه
۳- اندوکتانس متقابل

جبر دار ۹-۱۰-۱۱-۱۲ ۱۲
۱۶ام پایانی - ۱۷ - میلر

$$\longrightarrow |G_۲(j\omega)| = \frac{۱}{۱+·/۲۵(۲\omega^۲-۱)}$$

$$\longrightarrow b = \frac{۱}{۲}\sinh^{-1}\frac{۱}{·/۵} = ·/۷۱۴ \quad , \quad a = \pm\frac{\pi}{۴}, \pm\frac{۳\pi}{۴}$$

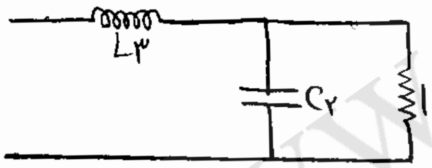
$$\longrightarrow S_۱ = \sin\frac{\pi}{۴}\sinh ·/۷۱۴ + j\cos\frac{\pi}{۴}\cosh(·/۷۱۴) = ·/۵۴۸ + j\,·/۸۹۵$$

$$S_۲ = ·/۵۴۸ - j\,·/۸۹۵ \quad , \quad S_۳ = -·/۵۴۸ + j\,·/۸۹۵$$

$$S_۴ = -·/۵۴۸ - j\,·/۸۹۵$$

$$\longrightarrow G(S) = \frac{۱}{(S+·/۵۴۸+j·/۸۹۵)(S+·/۵۴۸-j·/۸۹۵)} = \frac{۱}{S^۲+۱/۰۹۶S+۱/۱}$$

$$= \frac{۱/۱/۱}{·/۹۰۸S^۲+·/۹۹۶S+۱}$$




$$, \quad G(S) = \frac{۱}{L_۳C_۲S^۲+L_۳S+۱}$$

$$\begin{cases} L_۳C_۲ = ·/۹۰۸ \\ L_۳ = ·/۹۹۶ \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} L_۳ = ·/۹۹۶ \\ C_۲ = ·/۹۱۲ \end{cases}$$

$$\frac{·/۹۹۶\times۴۰۰}{۸۸۰۰} = ·/۰۴۷۹\ H$$

$$\longrightarrow$$