- سیگنال $x(t)=\sin^2(t)$ را در نظر بگیرید.

الف) دوره تناوب سیگنال را تعیین کنید   ب) ضرایب سری فوریه سیگنال را بدست آورید.

$T_1=\frac{2\pi}{1}=2\pi \qquad (T=\pi)$

$$x(t)=\left(\frac{e^{jt}-e^{-jt}}{j2}\right)^2=\frac{e^{j2t}+e^{-j2t}-2}{-4}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\left(e^{j2t}+e^{-j2t}\right)$$

$k\cdot\frac{2\pi}{\pi}t$

$a_0=\frac{1}{2}\ ,\ a_1=-\frac{1}{4}\ ,\ a_{-1}=\frac{-1}{4}$

سیگنال حقیقی و زوج - ضرایب سری فوریه مطلقاً حقیقی و زوج

(12 marks)

---

3. Determine whether or not the following signal is periodic. If the signal is periodic, determine its fundamental period (hint: use trig identities and draw the graph)

(a) $x(t) = \cos^2(t)$ $T = \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{1}\right) = \pi$

(b) $x(t) = \cos(2\pi t) \cdot u(t)$ Non-Periodic

(4 marks)

۵- سیستم LTI با ورودی $x(t)=\cos 2\pi t+\sin 6\pi t$ را در نظر بگیرید. مطلوبست خروجی سیستم به ازاء هر یک از توابع تبدیل زیر:

a) $h_1(t)=\dfrac{\sin 4\pi t}{\pi t}$ b) $h_2(t)=\dfrac{(\sin 4\pi t)(\sin 8\pi t)}{\pi^2 t^2}$, $h_3(t)=\dfrac{(\sin 4\pi t)(\cos 8\pi t)}{\pi t}$

$$x(t)=\frac{1}{2}e^{j2\pi t}+\frac{1}{2}e^{-j2\pi t}+\frac{1}{2j}e^{j6\pi t}-\frac{1}{2j}e^{-j6\pi t}$$

$\delta(t)\to 1$

$1\to 2\pi\delta(\omega)$

$e^{j\omega_0 t}\to 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$

$$=\left[\frac{1}{2}\delta(\omega-2\pi)+\frac{1}{2}\delta(\omega+2\pi)+\frac{1}{2j}\delta(\omega-6\pi)-\frac{1}{2j}\delta(\omega+6\pi)\right]2\pi$$

$$=\pi\delta(\omega\pm 2\pi)+\frac{\pi}{j}\left(\delta(\omega-6\pi)-\delta(\omega+6\pi)\right)$$

$\mathrm{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right)\to\tau\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega}{\pi}\cdot\frac{\tau}{2}\right)$

$f(t)\to F(\omega)$

$F(t)\to 2\pi f(-\omega)$

$$h_1(t)=\frac{\sin 4\pi t}{\pi t}=4\,\frac{\sin 4\pi t}{4\pi t}=4\,\mathrm{sinc}(4t)$$

$\tau\,\mathrm{sinc}\left(\frac{t}{\pi}\cdot\frac{\tau}{2}\right)\to 2\pi\,\mathrm{rect}\left(\frac{-\omega}{\tau}\right)$

$\frac{\tau}{2\pi}=4\Rightarrow\tau=8\pi$

$$\frac{8\pi}{4}\,\mathrm{sinc}(4t)\to 2\pi\,\mathrm{rect}\left(\frac{-\omega}{8\pi}\right)$$

$$4\,\mathrm{sinc}(4t)\to\mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{8\pi}\right)$$

$$Y_1(\omega)=\mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{8\pi}\right)\cdot\left\{\pi\delta(\omega\pm 2\pi)+\frac{\pi}{j}\left(\delta(\omega-6\pi)-\delta(\omega+6\pi)\right)\right\}$$

$$=\pi\delta(\omega\pm 2\pi)\longrightarrow y_1(t)=\cos 2\pi t\ \checkmark$$

-4π 4π

$\frac{\tau}{2\pi}=8\quad\tau=16\pi$

$16\pi\,\sin\ =2\pi\,\mathrm{rect}($

$$h_2(t)=\frac{\sin 4\pi t}{\pi t}\cdot\frac{\sin 8\pi t}{\pi t}=\frac{\pi}{8\pi}4\,\mathrm{sinc}(4t)\cdot 8\,\mathrm{sinc}(8t)=\pi\,32\,\mathrm{sinc}(4t)\cdot\mathrm{sinc}(8t)$$

$$H_2(\omega)=\frac{\pi}{\frac{1}{2}}\,\mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{8\pi}\right)*\mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{16\pi}\right)$$

$h_1(t)\cdot h_2(t)\longrightarrow\frac{1}{2\pi}H_1(\omega)*H_2(\omega)$

$$6\,\mathrm{sinc}(12t)\longrightarrow\frac{1}{2}\mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{24\pi}\right)$$

$$2\,\mathrm{sinc}(4t)\longrightarrow\frac{1}{2}\mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{8\pi}\right)$$

2π $\frac{1}{2}$ -12π 12π $\frac{1}{2}$ -4π 4π

2π 6π

$$Y(\omega)=\frac{\pi}{2}\delta(\omega\pm 2\pi)+\frac{\pi}{2j}\left(\delta(\omega-6\pi)-\delta(\omega+6\pi)\right)$$

$$\frac{\pi}{2}\delta(\omega\pm 2\pi)\qquad=\frac{1}{2}\sin 6\pi t\ \checkmark$$

- سه سیستم زمان پیوسته S_1 ، S_2 و S_3 را در نظر بگیرید که پاسخ‌های آنها به ورودی نمایی مختلط e^{j5t} به صورت زیر مشخص شده است. برای هر سیستم تعیین کنید که آیا اطلاعات داده شده برای نتیجه‌گیری که سیستم قطعاً LTI نیست کفایت می‌کند.

$$S_1: \quad e^{j5t} \longrightarrow t\,e^{j5t}$$

$$S_2: \quad e^{j5t} \longrightarrow e^{j5(t-1)}$$

$$S_3: \quad e^{j5t} \longrightarrow \cos(5t)$$

$$e^{j\omega_0 t} \xrightarrow{\boxed{LTI}} e^{j\omega_0 t} \cdot \underbrace{H(j\omega_0)}$$

ضریب در حالت کلی مختلط اما مستقل از زمان

$\Leftarrow$ S_1 ، LTI نیست

S_2 ، در شرایط بالا صدق می‌کند، لذا درباره LTI بودن آن نمی‌توان حرفی زد.

S_3 : $\cos(5t) = \dfrac{e^{j5t} + e^{-j5t}}{2}$ ، LTI نیست (زیرا ترم جدید بوجود آورده)

تحلیلی
۵

سیستم زمان پیوسته و خطی با ورودی $x(t)$ و خروجی $y(t)$ را در دو حالت زیر در نظر بگیرید.

$$x(t) = e^{j2t} \longrightarrow \boxed{\text{sys.}} \longrightarrow y(t) = e^{j3t}$$

$$x(t) = e^{-j2t} \longrightarrow \boxed{\text{sys.}} \longrightarrow y(t) = e^{-j3t}$$

الف) پاسخ سیستم به ورودی $x(t) = \cos(2t)$ را بدست آورید.

ب) پاسخ سیستم به ورودی $x(t) = \cos(2t-1)$ را بدست آورید.

$$(a)\ x(t) = \cos(2t) = \frac{1}{2}e^{j2t} + \frac{1}{2}e^{-j2t} = \frac{1}{2}e^{j3t} + \frac{1}{2}e^{-j3t}$$
$$= \cos(3t)$$

$$(b)\ x(t) = \cos(2t-1) = \frac{1}{2}e^{j(2t-1)} + \frac{1}{2}e^{-j(2t-1)}$$
$$= \frac{1}{2}e^{-j} \cdot e^{j2t} + \frac{1}{2}e^{j} \cdot e^{-j2t}$$
$$= \frac{1}{2}e^{-j} \cdot e^{j3t} + \frac{1}{2}e^{j} \cdot e^{-j3t} = \cos(3t-1)$$

- سیستم LTI زیر را در نظر بگیرید. $x(t)$ ولتاژ ورودی ، $y(t)$ ولتاژ خروجی دو سر خازن است.

الف) معادله دیفرانسیلی برحسب ورودی $x(t)$ و خروجی $y(t)$ را بدست آورید.

ب) اگر ورودی سیستم $x(t)=e^{j\omega t}$ باشد، پاسخ فرکانسی سیستم را تعیین کنید.

ج) اگر ورودی $x(t)=\sin(t)$ باشد، خروجی $y(t)$ را تعیین کنید.

$$i_C + V_L + V_C = x(t)$$

$$i_C = \frac{dV_C}{dt}, \quad V_L = \frac{di_L}{dt} = \frac{di_C}{dt} = \frac{d^2V_C}{dt^2}, \quad V_C = y(t)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

$$x(t)=e^{j\omega t} \Rightarrow y(t) = e^{j\omega t} \cdot H(j\omega)$$

$$\Rightarrow (j\omega)^2 e^{j\omega t} H(j\omega) + (j\omega) e^{j\omega t} H(j\omega) + e^{j\omega t} H(j\omega) = e^{j\omega t}$$

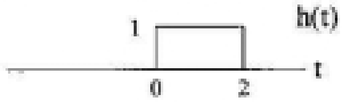
$$\Rightarrow H(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^2 + (j\omega) + 1}$$

$$x(t) = \sin(t) = \frac{1}{2j} e^{j1t} - \frac{1}{2j} e^{-j1t}$$

$$y(t) = \frac{1}{2j} \cdot \frac{1}{j1} \cdot e^{j1t} - \frac{1}{2j} \cdot \frac{1}{-j1} e^{-j1t}$$

$$= -\frac{1}{2} e^{j1t} - \frac{1}{2} e^{-j1t} = -\mathrm{Cos}(t)$$

5. (10 marks) Suppose a LTI system has impulse response



(a) What is the response of the system to the complex signal

$$x_1(t) = e^{j\omega t}$$

for some fixed ω?

(b) Hence, by writing $\cos(x)$ in terms of complex exponentials, find the response of the system to

$$x_2(t) = \cos(\omega t).$$

Note that in this case the result should be *real valued*, so some simplification may be necessary.

$$H(j\omega) = \int_0^2 e^{-j\omega t}\,dt = \frac{-1}{j\omega} e^{-j\omega t}\Big|_0^2 = \frac{1}{j\omega}\left(1 - e^{-j2\omega}\right)$$

$$x_1(t) = e^{j\omega t} \Rightarrow y_1(t) = e^{j\omega t} \cdot \frac{1}{j\omega}\left(1 - e^{-j2\omega}\right)$$

$$x_2(t) = \frac{e^{j\omega t}}{2} + \frac{e^{-j\omega t}}{2} \Rightarrow y_2(t) = \frac{1}{2} e^{j\omega t} \cdot \frac{1}{j\omega}\left(1 - e^{-j2\omega}\right) + \frac{1}{2} e^{-j\omega t} \cdot \frac{1}{-j\omega}\left(1 - e^{j2\omega}\right)$$

$$y_2(t) = \frac{1}{j2\omega} \cdot e^{-j\omega} e^{j\omega t}\left(e^{j\omega} - e^{-j\omega}\right) - \frac{1}{j2\omega} e^{j\omega} e^{-j\omega t}\left(e^{-j\omega} - e^{j\omega}\right)$$

$$= e^{j\omega(t-1)} \cdot \frac{\sin(\omega)}{\omega} + e^{-j\omega(t-1)} \cdot \frac{\sin(\omega)}{\omega}$$

$$= \frac{\sin(\omega)}{\omega} \cdot 2\cos(\omega(t-1)) = 2\,\frac{\sin(\omega)}{\omega} \cdot \cos(\omega(t-1))$$

7. A system with an impulse response

$$h(t) = 3e^{-10t}u(t)$$

is driven by a sinusoidal signal $x(t) = 3\cos(5t)$. Find an expression for the output signal.

(10 marks)

$$H(j\omega) = \int_0^\infty 3e^{-10t} \cdot e^{-j\omega t}\,dt = \frac{-3}{10+j\omega} e^{-(10+j\omega)t} \Big|_0^\infty = \frac{3}{10+j\omega}$$

$$x(t) = \frac{3}{2} e^{j5t} + \frac{3}{2} e^{-j5t}$$

$$y(t) = \frac{3}{2} e^{j5t} \frac{3}{10+j5} + \frac{3}{2} e^{-j5t} \frac{3}{10-j5}$$

$$= \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{10+j5} e^{j5t} + \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{10-j5} \cdot e^{-j5t}$$

$$= \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{11.18 \angle 26.5^\circ} \cdot e^{j5t} + \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{11.18 \angle -26.5^\circ} \cdot e^{-j5t}$$

$$= 0.804 \cos(5t - 26.5^\circ)$$

3.) A signal x(t) has the Fourier series representation

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^x e^{jk\omega_0 t}$$

for some coefficients c_k^x, where $-\infty < t < \infty$ and $\omega_0 = 2\pi/T$. Find the Fourier coefficients c_k^v for the signal

$$v(t) = x(t)\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right).$$

(10 marks)

$$x(t) \longleftrightarrow a_k$$

$$x(t)\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \longleftrightarrow b_k = ?$$

$$v(t) = \frac{1}{2}x(t)\cdot e^{j\frac{2\pi}{T}t} + \frac{1}{2}x(t)\,e^{-j\frac{2\pi}{T}t}$$

$$= \frac{1}{2}\sum a_k e^{jk(\frac{2\pi}{T})t}\cdot e^{j\frac{2\pi}{T}t} + \frac{1}{2}\sum a_k e^{jk(\frac{2\pi}{T})t}\cdot e^{-j\frac{2\pi}{T}t}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j\frac{2\pi}{T}(k+1)t} + \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j\frac{2\pi}{T}(k-1)t}$$

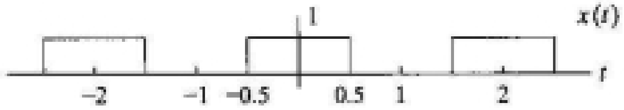
$$k+1=k \qquad k-1=k$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{k-1} e^{jk(\frac{2\pi}{T})t} + \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{k+1} e^{jk(\frac{2\pi}{T})t}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}(a_{k+1} + a_{k-1})\, e^{jk(\frac{2\pi}{T})t}$$

$$b_k = \frac{1}{2}(a_{k+1} + a_{k-1})$$

3. (10 marks) The signal



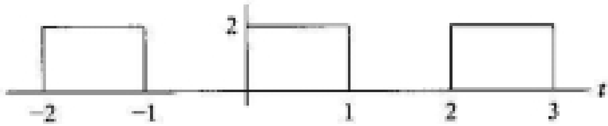
has a Fourier series representation

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\pi t}, \qquad T=2 \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

where

$$c_k = \begin{cases} 1/2 & k=0 \\ \frac{1}{k\pi}\sin(k\pi/2) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Use this information to find a Fourier series expansion for the signal $y(t)$ below:



$y(t) = 2x(t-\frac{1}{2})$, $T=2$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk(\pi)t}$$

$$x(t-\tfrac{1}{2}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\pi(t-\frac{1}{2})} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-jk\frac{\pi}{2}} \cdot e^{jk\pi t}$$

$$y(t) = 2x(t-\tfrac{1}{2}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{2c_k e^{-jk\frac{\pi}{2}}}_{b_k} \cdot e^{jk\pi t}$$

$b_0 = 2c_0 = 1$

$$b_k = 2c_k e^{-jk\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{k\pi}\sin(\frac{k\pi}{2}) \cdot e^{-jk\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{2}{k\pi}\cdot\frac{1}{j2}\left(1 - e^{-jk\pi}\right) = \frac{1}{jk\pi}\left(1-(-1)^k\right)$$

$$b_k = \begin{cases} 1, & k=0 \\ 0 & k:\text{even}, \ k\neq 0 \\ \frac{2}{jk\pi}, & k:\text{odd} \end{cases}$$