* نمایش فضای حالت :

- تاکنون تنها در مورد رابطه میان ورودی و خروجی بحث کردیم و کاری به متغیرهای درون سیستم نداشتیم.

- فرم تابع تبدیل تنها برای سیستم های LTI کاربرد داشت. ما نیاز به فرم کلی داریم.

.. برای رهایی از این دو قید، فضای حالت مطرح می شود:

* مزیتهای نمایش فضای حالت:

۱) اطلاعات بیشتری از داخل سیستم به ما می دهد. (متغیرهای داخلی)

۲) برای نمایش تمام سیستمهای می تواند به کار رود (خطی یا غیرخطی ، TI یا TV)

۳) برای شبیه سازی مناسب تر است (چون به فرم زمانی است)

۴) پایه تئوری کنترل مدرن است که بر مبنای بهینه سازی یک تابع هزینه شکل گرفته است.

* تعریف حالت یک سیستم: ($x(t)$)

مینیمم اطلاعاتی که اگر در زمان t_0 موجود باشد، (به همراه $u(t)$, $t \geq t_0$)، همه خروجی سیستم را به ازای $t \geq t_0$ می توانیم داشته باشیم.

متغیرهای حالت یک سیستم یکتا نیست (unique).

شکل کلی نمایش متغیرهای حالت:

بطور کلی، معادله حالت، نمایش n معادله دیفرانسیل مرتبه یک است. که n تعداد متغیرهای حالت است.

کلی ترین فرم معادلات حالت:

$$\begin{cases}\dot{x}=f(x,u,t)\\ y=h(x,u,t)\end{cases}$$

پروسه تبدیل فرم کلی به فرم مناسب برای سیستم های LTI:

$$\begin{cases}\dot{x}=f(x,u,t)\\ y=h(x,u,t)\end{cases} \xrightarrow{\text{حذف وابستگی به زمان}} \begin{cases}\dot{x}=f(x,u)\\ y=h(x,u)\end{cases} \longrightarrow$$ (در اینجا برای سیستم های TI)

$$\hookrightarrow \text{خطی سازی}: \underbrace{\begin{cases}\dot{x}=Ax+Bu\\ y=Cx+Du\end{cases}}$$

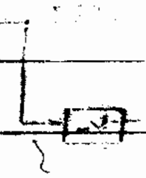
نمایش متغیرهای حالت برای سیستمهای خطی تغییرناپذیر با زمان

* جلسه ششم: ۸۱/۱۲/۱۸ یکشنبه

. مدل سازی فضای حالت:

با مثال به ادامه بحث می پردازیم:

سیستم جرم، فنر و دمپر



$$m\frac{d^2y}{dt^2}+f\frac{dy}{dt}+ky=f(t)$$

• بزرگترین مرتبه معادله دیفرانسیل با این اندازه باشد (یعنی مشتق مرتبه یک طرف و در طرف دیگر خروجی و مشتقاتش باشد) سپس خروجی که داریم نمایشی برای متغیر حالت است.

برای سیستم درجه دو، با دو متغیر حالت می‌توان سیستم را مدل کرد:

در مثال اخیر:

$$\begin{cases} x_1(t) = y(t) \\ x_2(t) = \dot{y}(t) \end{cases}$$

معادله حالت: $\dot{x} = Ax + B$

معادله خروجی: $y = cx + D$

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \qquad y(t) = y(t)$$

ورودی $u(t) = f(t)$

$$\begin{cases} x_1(t) = y(t) \rightarrow \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ x_2(t) = \dot{y}(t) \rightarrow \dot{x}_2(t) = ? \end{cases}$$

$$m\ddot{y} + ky + b\dot{y} = f(t) \rightarrow \ddot{y} = \frac{1}{m}(f - b\dot{y} - ky) \rightarrow$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{1}{m}(u - bx_2(t) - kx_1(t))$$

حال به فرم ماتریسی:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}}_{B} U$$

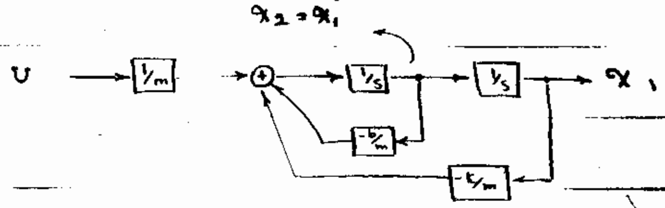
$$y = \underbrace{[1 \quad 0]}_{C} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{[0]}_{D} U$$

* توضیح در مورد ماتریسهای چهارگانه استفاده شده در معادلات حالت:

به فرض: $x \in R^n$ ، $y \in R^p$ ، $U \in R^m$

(a) ماتریس A: ماتریس حالت سیستم است. ماتریس حالت بیانگر interconnection حالتهای سیستم است و ماتریس $n \times n$ است.

$x_2 = \dot{x}_1$



برای مثال اخیر:

ماتریس B:

(b) ماتریس ضریبی است که نشان می‌دهد ورودیها چگونه روی حالتها اثر می‌گذارند و $n \times m$ است.

سیگنال کنترل شده U است ← اگر $B = 0$ ← هیچ کنترلی نداریم.

ماتریسهای A و B کنترل پذیری سیستم را نشان می دهند.

c) ماتریس C: ماتریس خروجی است که اثر متغیرهای حالت بر خروجی را نشان می دهد. دارای مرتبهٔ pxn است.

این ماتریس «رویت پذیری» «مشاهده پذیری» (Observability) سیستم را بیان می کند.

به این معنی که در بعضی موارد می توان با دیدن خروجی، متغیر حالت سیستم را تخمین زد. (برای مثال در مواردیکه متغیر حال اندازه گیری باشد و یا وسیله اندازه گیری پرهزینه ای را طلب کند، از این حالت استفاده می شود).

این پیش بینی با این شرط مفید است که متغیرهای حالت در خروجی تأثیر داشته باشند و ماتریس C این اثر را بیان می کند.

d) ماتریس D: ماتریس کوپلینگ مستقیم ورودی به خروجی است. دارای مرتبهٔ pxm است.

جمع بندی:

$$\left\{\begin{array}{l} x\in\mathbb{R}^n \\ Y\in\mathbb{R}^p \\ U\in\mathbb{R}^m \end{array}\right. \Rightarrow \text{ابعاد ماتریسهای معادلات حالت:} \left\{\begin{array}{l} A\in\mathbb{R}^{n\times n} \\ B\in\mathbb{R}^{n\times m} \\ C\in\mathbb{R}^{p\times n} \\ D\in\mathbb{R}^{p\times m} \end{array}\right.$$

* تذکر: در تابع تبدیل به فرم $\frac{s^m+\dots}{s^n+\dots}$، اگر $n<m$ ← حقیقی نیست و معادله حالت ندارد.

$n>m$ ← ماتریس D صفر است.

$n=m$ ← ماتریس D صفر نیست.

کوییز: معادله حالت مربوطه $G(s)=s$ را بیابید.

در صورت بیشتر از مخرج است ← معادله حالت ندارد.

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{s}{1}$$

* مثال: معادلات حالت را بیابید:

$$\begin{cases} \ddot{y}_1+k_1\dot{y}_1+k_2y_1=u_1+k_3u_2 \\ \dot{y}_2+k_4y_2+k_5\dot{y}_1=k_6u_1 \end{cases}$$

حل: ورودیها: u_1,u_2 ← $m=2$ خروجیها: y_1,y_2 ← $p=2$

با تعریف متغیر حالت داریم:

$x_1(t) = y_1(t) \quad x_2(t) = \dot{y}_1(t) \quad x_3(t) = y_2(t) \quad (n=3)$

$\dot{x}_1 = x_2 \quad , \quad \dot{x}_2 = \ddot{y}_1(t) = u_1 + k_3u_2 - k_1\dot{y}_1 - k_2y_1 = u_1 + k_3u_2 - k_1x_2 - k_2x_1$

$\dot{x}_3 = \dot{y}_2 = -k_4y_2 - k_5\dot{y}_1 + k_0u_1 = k_0u_1 - k_4x_3 - k_5x_2$

$$\left.\begin{matrix} A \in \mathbb{R}^{n\times n} \\ n=3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \underset{3\times3}{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -k_2 & -k_1 & 0 \\ 0 & -k_5 & -k_4 \end{bmatrix} \quad \underset{3\times2}{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & k_3 \\ k_0 & 0 \end{bmatrix} \quad \underset{2\times3}{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\underset{2\times2}{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \leftarrow$ هیچگونه کوپلینگ مستقیمی بین ورودی خروجی وجود ندارد.

* حل معادلات حالت و ماتریس انتقال حالت: (State Transition Matrix)

حل معادلات حالت در واقع حل دسته معادلات دیفرانسیل است.

$\dot{x} = Ax + Bu$

$\to sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s) \to (sI - A)X(s) = x(0) + BU(s) \to X(s) = (sI-A)^{-1}[x(0) + BU(s)]$

تعریف ماتریس انتقال حالت: $\Phi(s) = (sI - A)^{-1} \qquad \phi(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\Phi(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{(sI-A)^{-1}\}$

$\Rightarrow X(s) = \Phi(s)x(0) + \Phi(s)\cdot BU(s) \longrightarrow$ عکس لاپلاس می‌گیریم $\Rightarrow$

$$x(t) = \underbrace{\phi(t)x(0)}_{\text{پاسخ ورودی صفر}} + \underbrace{\int_0^t \phi(t-\lambda)B\cdot u(\lambda)\,d\lambda}_{\text{پاسخ حالت صفر (شرایط اولیه صفر)}}$$

تذکر: آن چیزی که رفتار سیستم را مشخص می‌کند، $\phi(t)$ و بدیهی است $\phi(t)$ تنها به ماتریس A بستگی دارد.

* مثال: $x \in \mathbb{R}^2, u \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$

$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$

$C = [1 \quad 0]$

• ماتریس انتقال حالت را بیابید:

$$sI-A=\begin{bmatrix} s+3 & -1 \\ +2 & s \end{bmatrix} \to |sI-A| = s(s+3)+2 \to (sI-A)^{-1} = \frac{1}{s^2+3s+2}\begin{bmatrix} s & +1 \\ -2 & s+3 \end{bmatrix}$$

$$s^2+3s+2=(s+1)(s+2)$$

$$\Rightarrow (sI-A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{-2}{(s+1)(s+2)} & \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix} = \Phi(s) \to \Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\Phi(s)\} \Rightarrow$$

فرم کلی: $\Phi(t) = \left[k_1 e^{-2t} + k_2 e^{-t} \right]_{2\times 2}$

• نکته: $\Phi(s) = (sI-A)^{-1} = \frac{adj(sI-A)}{|sI-A|} \Rightarrow$ رفتار زمانی سیستم توسط ریشه‌های $\det(sI-A)=0$ مشخص می‌شود.

به عبارت دیگر، رفتار سیستم توسط $\lambda_i(A)$ (مقادیر ویژه ماتریس A) مشخص می‌شود.

.. روش دیگر برای یافتن $\Phi(t)$: «روش سری نهایت»

$$\dot{x} = Ax + B \qquad \Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}\{(sI-A)^{-1}\}$$

$$x(t) = (k_0 + k_1 t + \frac{k_2}{2!} t^2 + \cdots)x_0 = A(k_0 + k_1 t + \frac{k_2}{2!} t^2 + \cdots)x_0 \qquad \begin{matrix} k_1 = Ak_0 \\ k_2 = Ak_1 \\ \vdots \end{matrix}$$

النهایه داریم:

$$k_0 = I \quad k_1 = A \quad k_2 = \frac{A^2}{2!}$$

$$\to (I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \cdots) \triangleq e^{At}$$

* ارتباط بردارهای ویژه ماتریس انتقال حالت با مدهای ویژه ماتریس A:

در مثال اخیر $\underbrace{e^{-2t},\ e^{-t}}_{\text{مدهای ماتریس انتقال}}$ $\left\{ \begin{matrix} -2 \\ -1 \end{matrix} \right.$ مقادیر ویژه ماتریس حالت

V_i بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه λ_i باشد:

$$\begin{cases} AV_i = \lambda_i V_i \\ \phi(t) V_i = e^{At} V_i = e^{\lambda_i t} \cdot V_i \end{cases} \qquad e^{At} = (I + At + \frac{A^2}{2!} t^2 + \dots)$$

$$AV_i = \lambda_i V_i$$

$$A^2 V_i = A(AV_i) = A\lambda_i V_i = \lambda_i^2 V_i$$

$$\vdots$$

$$A^n V_i = \lambda_i^n V_i$$

$$\rightarrow e^{At} V_i = (I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \dots) V_i = \underbrace{(1 + \lambda_i t + \frac{\lambda_i^2 t^2}{2!} + \dots)}_{e^{\lambda_i t}} V_i = e^{\lambda_i t} V_i$$

b. بردار ویژه ماتریس A و ماتریس انتقال حالت $\phi(t)$ با هم برابرند. و بردار ویژه متناظر آن نیز $e^{\lambda_i t}$ می‌باشد.

$$e^{At} V_i = e^{\lambda_i t} \cdot V_i$$

* پاسخ ورودی صفر را در نظر بگیرید:

$$x_{zi}(t) = e^{At} x_0 \rightarrow e^{\lambda_i t} x_0$$

x_0 بردار ویژه متناظر با λ_i می‌باشد.

یعنی در تمام خروجی که، فقط مد (مقدار ویژه) λ_i ظاهر می‌شود.

برای آنکه بخواهیم سیستم استیشنری بماند، شرایط اولیه را برابر بردار ویژه یکی از مقادیر ویژهٔ ماتریس قرار می‌دهیم. (؟!)

* جلسهٔ هفتم: سه‌شنبه: ۸۱/۱۲/۲۰

• دستیابی به تابع تبدیل از معادلات حالت:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \xrightarrow{\text{Laplace}} \begin{cases} sX(s) = AX(s) + BU(s) \\ Y(s) = C \cdot X(s) + DU(s) \end{cases} \rightarrow (sI - A)X(s) = B \cdot U(s)$$

$$X(s) = (sI - A)^{-1} \cdot B \cdot U(s)$$

$$\rightarrow Y(s) = C(sI - A)^{-1} BU(s) + DU(s) \rightarrow \frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = C(sI - A)^{-1} \cdot B + D$$

یادآوری: تابع تبدیل نسبت لاپلاس خروجی به ورودی تحت شرایط اولیه صفر است

اکنون می‌خواهیم برخی خواص تابع تبدیل را از معادله حالت نتیجه دهیم:

$$G(s) = C \cdot \frac{\mathrm{adj}(sI-A)}{|sI-A|} \cdot B + D$$

* قطبهای تابع تبدیل:

- ریشه‌های مخرج $G(s)$، ریشه‌های $\underbrace{\det(sI-A)=0}_{\text{معادله مشخصه سیستم}}$ است.

یا به عبارت دیگر قطبهای تابع تبدیل، همان مقادیر ویژه ماتریس A هستند.

تمام قطبهای تابع تبدیل جزو مقادیر ویژه ماتریس A هستند، اما عکس این مطلب لزوماً درست نیست.

* صفرهای تابع تبدیل:

صفرهای تابع تبدیل، ریشه‌های معادله $C \cdot \mathrm{adj}(sI-A) \cdot B = 0$ است.

* نتیجه: صفرهای تابع تبدیل به نحوه انتخاب ورودی و خروجی وابسته است. اما قطبها مستقل از ورودی-خروجی است.

- تذکر: ممکن است در یک مسیر ورودی-خروجی، بعضی قطبها با صفرها حذف شوند که در این صورت تمامی مقادیر ویژه جزو قطبهای یک تابع تبدیل خاص نخواهند بود. این را اصطلاحاً حذف صفر و قطب گویند.

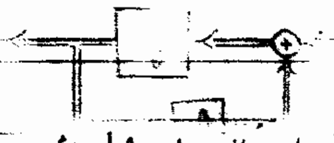
(pole-zero canellation)

* پایداری:

* پایداری BIBO:

$$y(s) = \frac{s^m+\dots}{s^n+\dots}\cdot U(s) \to y(s) = \left(\frac{k_1}{s+\alpha_1}+\frac{k_2}{s+\alpha_2}+\dots+\frac{k_n}{s+\alpha_n}\right)\cdot U(s)$$

$$\to y(t) = k_1 e^{-\alpha_1 t} + \dots + k_n e^{-\alpha_n t} + \underbrace{\dots}_{\text{وابسته به ورودی}}$$



برای پایداری، ترمهای نمایی باید میرا باشند:

← αها باید منفی نباشند ← αها باید اکیداً مثبت باشند یعنی ریشه‌های مخرج تابع تبدیل (قطبها) باید اکیداً منفی باشند.

* پایداری داخلی :

- در این نوع پایداری، همهٔ سیگنالهای داخل سیستم bounded هستند.

به عبارت دیگر توابع تبدیل از همه ورودیها به همهٔ خروجیها باید BIBO باشد.

توضیح : $y = cx + DU$ ← u باید ورودی محدود، اگر x هم محدود باشد ← خروجی هم محدود می‌شود.

از طرفی $x(t) = \phi(t)x_0 + \int \phi(\tau)Bu(t-\tau)d\tau$

← برای محدود بودن $x(t)$ باید $\phi(t)$ هم محدود باشد و داریم: $\phi(t) = \mathcal{L}^{-1}\{(SI-A)^{-1}\}$

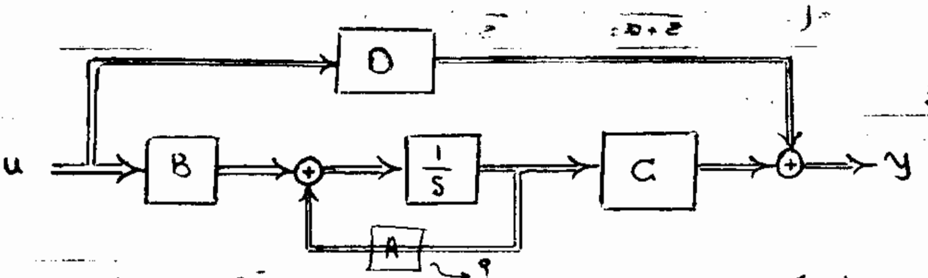
← ریشه‌های $\det(SI-A)=0$ باید اکیداً منفی باشند تا قطبهای همه توابع تبدیل از هر خروجی به هر ورودی، BIBO باشد. به عبارت دیگر ماتریس انتقال حالت ($\phi(t)$) محدود باشد.

- اگر حذف صفر و قطب سمت راست صفر S (RHP) نداشته باشیم، این دو پایداری معادلند

اما اگر این امر حادث شود، بعضی از مقادیر ویژه ماتریس A که در RHP است ممکن است با انتخاب بعضی ورودی - خروجیها حذف شوند و در تابع تبدیل ظاهر نشوند ولی بعضی از ورودی خروجی‌ها ی دیگر ظاهر شوند بنابراین سیستم پایدار داخلی نخواهد بود.

* تحقق یک تابع تبدیل : (یافتن معادلات حالت از روی تابع تبدیل)

منظور از تحقق این است که چگونه تابع تبدیل مورد نظر خود را بسازیم (بحث اصلی درس فیلتر و سنتز می‌باشد).



اگر معادلات حالت موجود باشند، دیاگرام فوق به راحتی قابل ساخت است. (قابل تحقق است)

← می‌خواهیم معادلات حالت را از روی تابع تبدیل مورد نظر خود بسازیم:

• شرط آنکه بتوان از روی تابع تبدیل، معادلات حالت را (تحقق حالت داشته باشیم)، آنست که:

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad : m \leq n$$

تذکر: البته در حالت $m=n$ باید به روش زیر عمل کرد:

مثال:

$$G(s) = \frac{s^3 + 3s^2 + 4s - 1}{s^3 + 5s^2 + 4s + 1} = 1 + \underbrace{\frac{-2s^2 - 2s}{s^3 + 5s^2 + 4s + 1}}_{m<n}$$

در واقع این عدد ثابت به کمک D ماتریس صفر بیش را تغییر می‌دهد.

• نتیجه: در حالت $m=n$، تابع تبدیل را تفکیک می‌کنیم به یک عدد ثابت و یک کسر با درجه صورت کمتر که عدد ثابت ایجاد شده با ایجاد تغییر در کانال مستقیم ورودی خروجی (D) تأثیر بر سیستم می‌گذارد.

پس از توضیحات فوق، از این پس تنها تحقق‌های توابع تبدیل با درجه صورت کمتر از مخرج را بررسی می‌کنیم؛ یعنی به فرم زیر:

$$G(s) = \frac{b_{n-1} s^{n-1} + b_{n-2} s^{n-2} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b(s)}{a(s)} \quad \begin{matrix} \leftarrow \text{چند جمله‌ای صورت} \\ \leftarrow \text{چند جمله‌ای مخرج} \end{matrix} \Rightarrow a(s)\,Y(s) = b(s)\,X(s)$$

اکنون معادله دیفرانسیل این تابع تبدیل را می‌نویسیم:

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b_{n-1} u^{(n-1)}(t) + \dots + b_1 u'(t) + b_0$$

حالت (a) $\leftarrow b(s) = 1$

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = u$$

• انتخاب متغیرهای حالت مناسب:

$$\begin{cases} x_1 = y(t) \\ x_2 = y'(t) \\ \vdots \\ x_n = y^{(n-1)}(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_n = -a_{n-1}x_n \cdots - a_1 x_2 - a_0 x_1 + u \end{cases}$$

$$y^{(n)}(t) = u - a_{n-1}y^{(n-1)}(t) - \cdots - a_1 y'(t) - a_0 y(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \qquad c = [1 \; 0 \; \cdots \; 0]$$

b) فرم کانونیکال کنترل پذیر: $n = m$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{a(s)} \cdot b(s)$$

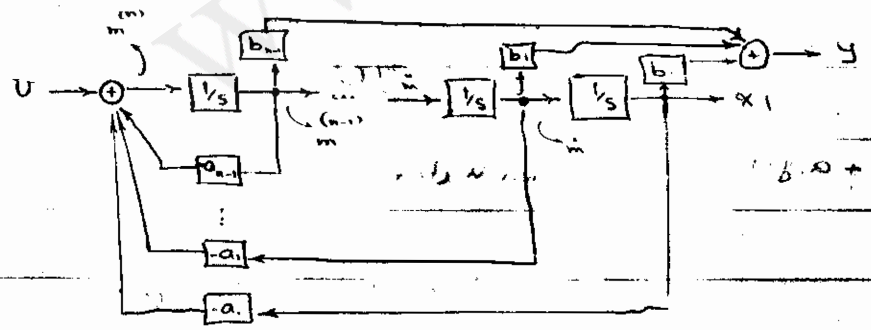
$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \underbrace{\frac{Y(s)}{M(s)}}_{b(s)} \cdot \underbrace{\frac{M(s)}{U(s)}}_{\frac{1}{a(s)}}$$

در این روش ابتدا $\frac{M(s)}{U(s)}$ را محقق می‌کنیم:

برای تحقق $\frac{M(s)}{U(s)}$ از حالت (a) عمل می‌کنیم

$$m^{(n)}(t) + a_{n-1}m^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 m'(t) + a_0 m(t) = u(t)$$

$$\begin{cases} x_1 = m(t) \\ x_2 = \dot{m}(t) \\ \vdots \\ x_n = m^{(n-1)}(t) \end{cases} \rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & & & \vdots \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$



تحقق $\frac{Y(s)}{M(s)}$:

$$\frac{Y(s)}{M(s)} = b(s) \Rightarrow y(t) = b_{n-1}m^{(n-1)}(t) + \cdots + b_1 m'(t) + b_0 m(t)$$

$$= b_{n-1}x_n + \cdots + b_1 x_2 + b_0 x_1 \rightarrow$$

$$y(t) = [b_0 \; b_1 \; \cdots \; b_{n-1}]\, x$$

برای تحقق برای این حالت کانونیکال داریم که فرم ماتریسها تحقق است

$$A = \left[\begin{array}{c|c} 0_{n-1} & I_{(n-1)} \\ \hline -a_0 & -a_1 \quad -a_2 \quad \cdots \quad -a_{n-1} \end{array}\right] \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C = [b_0 \quad b_1 \quad \cdots \quad b_{n-1}]$$

۹ . ۱ (ب) تحقق کانونیکال رویت پذیر :

یادآوری : تحقق یعنی مشخص کردن ارتباط y و u بدون آنکه مشتق گیری از u نیاز باشد .

برای بیان مطلب از تابع تبدیل با مخرج درجه ۳ تعداد مثال کمک می‌گیریم :

$$G(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

$$\Rightarrow \quad y^{(3)}(t) + a_2 \ddot{y}(t) + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_2 \ddot{u}(t) + b_1 \dot{u}(t) + b_0 u(t)$$

$$b_0 u - a_0 y = y^{(3)}(t) + a_2 \ddot{y}(t) + a_1 \dot{y}(t) - b_2 \ddot{u}(t) - b_1 \dot{u}(t)$$

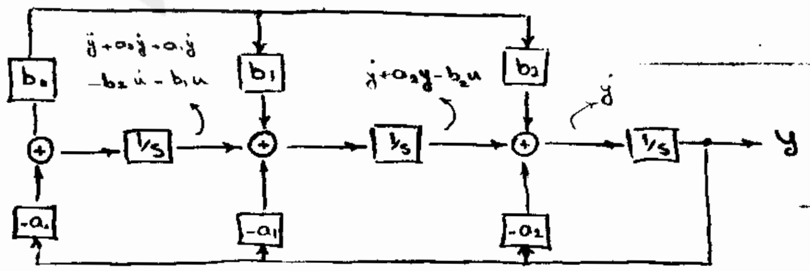
با انتگرال گیری : $\ddot{y}(t) + a_2 \dot{y}(t) + a_1 y(t) - b_2 \dot{u}(t) - b_1 u(t)$

با اضافه کردن $b_0 u - a_0 y \leftarrow$

$$\ddot{y}(t) + a_2 \dot{y}(t) - b_2 \dot{u}(t)$$

با انتگرال گیری : $\dot{y}(t) + a_2 y(t) - b_2 u(t)$

با اضافه کردن $-a_2 y + b_2 u$ و ...



بهترین انتخاب برای متغیرهای حالت از روی بلوک دیاگرامها ، خروجی انتگرال گیر است .

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - a_2 x_1 + b_2 u \\ \dot{x}_2 = x_3 - a_1 x_1 + b_1 u \\ \dot{x}_3 = -a_0 \; - x_1 + b_0 u \\ y = x_1 \end{cases}$$

$$\rightarrow \quad A=\begin{bmatrix}-a_2 & 1 & 0\\ -a_1 & 0 & 1\\ -a_0 & 0 & 0\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}b_2\\ b_1\\ b_0\end{bmatrix} \qquad C=[1\ 0\ 0]$$

* در حالت کلی، فرم ماتریسهای تحقق کانونیکال رویت پذیر بصورت زیر است: $[n\times n]$

$$A=\left[\begin{array}{c|c}-a_{n-1} & \\ -a_{n-2} & I_{n-1}\\ \vdots & \\ \hline -a_0 & 0_{n-1}\end{array}\right] \qquad B=\begin{bmatrix}b_{n-1}\\ \vdots\\ b_0\end{bmatrix} \qquad C=[1\ 0\ \cdots\ 0]$$

[illegible]

رویت پذیری یعنی، تمام حالتها از خروجی مشاهده شوند.

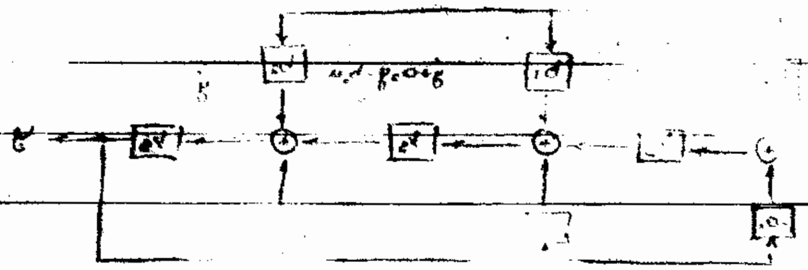
[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]



[illegible]

[illegible]

هادی افشاری

* جلسه هشتم : یکشنبه : ۸۲/۱/۱۷

* کوییز: تحقق کنترل پذیر را بیابید و در مورد پایداری بحث کنید ; با $G(s)=\frac{s^2-s-2}{s^2+s-6}$

$G(s) = 1 + \frac{-2s+4}{s^2+s-6}$ $\quad A=\begin{bmatrix}0 & I \\ \multicolumn{2}{c}{\text{ضرایب مخرج منفی}}\end{bmatrix}$ $\quad B=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ $\quad C=[\text{ضرایب صورت}]$, $D=1$

$G(s)=\frac{(s+1)(s-2)}{(s-2)(s+3)}$ ⟵ پایدار داخلی نیست ولی پایدار BIBO می باشد.

به عبارت دیگر : $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 6 & -1\end{bmatrix} \rightarrow \lambda_1=2,\ \lambda_2=-3$ $\quad 2>0 \rightarrow$ پایدار داخلی نیست

* تبدیل تشابهی : Similarity Transform

$$\begin{cases}\dot{x}=Ax+Bu\\ y=Cx+Du\end{cases} \qquad x=Pv$$

متغیر حالت جدید

معادلات حالت v را می خواهیم بدست آوریم.

$$x=Pv \rightarrow \dot{x}=P\dot{v} \qquad \hookrightarrow v=P^{-1}x$$

$$\rightarrow \begin{cases}P\dot{v}=APv+Bu\\ y=CPv+Du\end{cases} \rightarrow \begin{cases}\dot{v}=P^{-1}AP\,v+P^{-1}Bu\\ y=CPv+Du\end{cases}$$

که ماتریسهای حالت متغیر جدید v عبارتند از:

$$A_v=P^{-1}AP$$
$$B_v=P^{-1}B$$
$$C_v=CP$$
$$D_v=D$$

تذکر: پایداری سیستم ارتباطی به نوع انتخاب متغیر حالت ندارد ← چون پایداری باید درست نگردد ← باید میان A و A_v ارتباطی باشد: $\det(sI-A)=\det(sI-P^{-1}AP)$ یعنی: مقادیر ویژه ماتریس A و A_v برابر است.

• اثبات ریاضی :

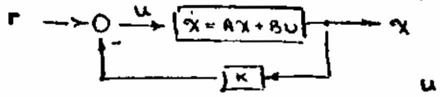
$$\det(sI-P^{-1}AP)=\det(P^{-1}sIP-P^{-1}AP)=\det(P^{-1}(sI-A)P)=$$
$$\det(P^{-1})\cdot\det(sI-A)\cdot\det(P)=\det(sI-A)$$

← با تغییر متغیر حالت، پایداری سیستم تغییری نمی‌کند (مقادیر ویژهٔ A و A_v یکی است)، اما بقیه خصوصیات سیستم ممکن است تغییر کنند.

• کنترل پذیری و رؤیت پذیری :

ماتریسهای A و B در کنترل پذیری سیستم نقش دارند و ماتریسهای A و C در رؤیت پذیری سیستم نقش دارند.

ابتدا می‌پردازیم به اهمیت کنترل پذیری و رؤیت پذیری :



$$u = -Kx + r$$

$$\left.\dot{x} = Ax + Bu\right\} \rightarrow \dot{x} = Ax + B(-Kx + r)$$

$$\rightarrow \dot{x} = \underbrace{(A-BK)}x + Br$$

A_c : ماتریس حالت سیستم حلقه بسته $\qquad A_c = A - BK$

مشخصات سیستم (A, B) در اختیار ما نیست. تنها پارامتر کنترل، K است. منظور از کنترل پذیری آنست که ماتریس K ای بیابیم که مقادیر ویژه را در جای دلخواه سیستم قرار دهیم.

_یعنی : • یافتن K برای تخصیص مقادیر ویژه ماتریس $A_c = A - BK$.

کنترل پذیری یعنی ماتریس K ای وجود دارد که مقادیر ویژه ماتریس $A - BK$ ، را به دلخواه در صفحه S قرار دهیم (pole - placement assignment)

$$qA^{-1}q = vH$$

Matlab Code: place (A, B, P)

* سیستمی کنترل پذیر است که ماتریس کنترل پذیری آن، Full Rank باشد.

rank (مرتبه) : تعداد سطرهایی از ماتریس که مستقل خطی اند.

Full rank بودن یعنی معکوس پذیر بودن، یعنی دترمینان صفر نشدن (برای ماتریسهای مربعی)

- تعریف ماتریس کنترل پذیری سیستم : $\qquad C_v = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B]$

(n: ستونهای A و A ...)

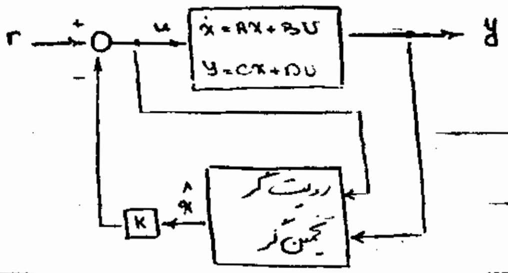
• همیشه حالتهای سیستم در دسترس نیست (و یا اقتصادی نیست)، یعنی همیشه، کنترل کردن به روش $u = -Kx + r$ ،

مقصود ما می باشد. در این نقطه مفهومی به نام « رویت پذیری » ارائه می کنیم

ما باید با اندازه گیری ورودی و خروجی ، x را تخمین زد:

$u = -K\hat{x} + r$

که تخمین x



برای آنکه بتوانیم x را تخمین بزنیم ، باید ماتریسهای C و A ، شکل خاصی داشته باشند:

برای آنکه بتوانیم x را تخمین بزنیم (یعنی سیستم رویت پذیر باشد) باید ماتریس رویت پذیری ، Full Rank باشد.

(A)

- تعریف ماتریس رویت پذیری سیستم:

$$C_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

* Matlab Code:

```
>> Rank
> CTRB(A,B) -> Cv
  OBSV(C,A) -> Co
```