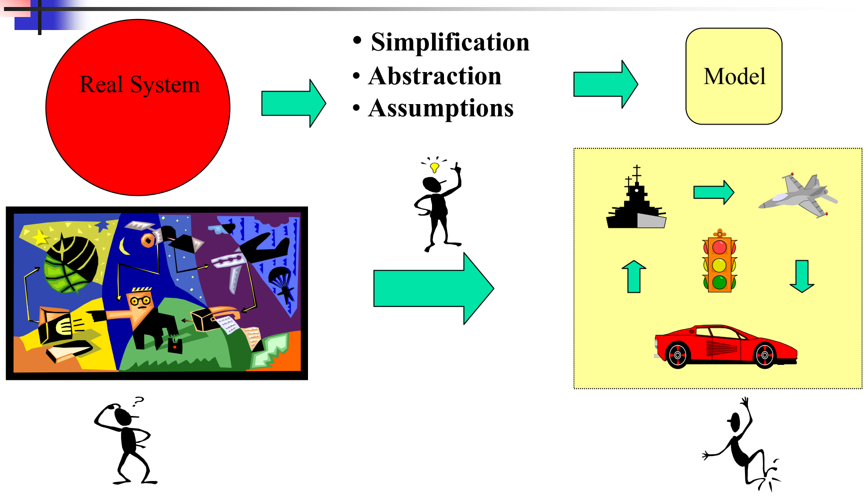
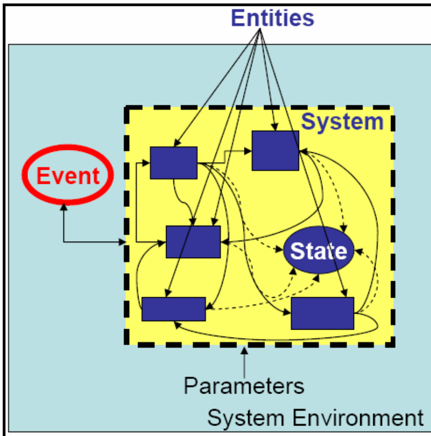
شبیه سازی سامانه های گسسته پیشامد
مدلهای آماری

سیستم در مقابل مدل



سیستم و اجزاء آن (ادامه)



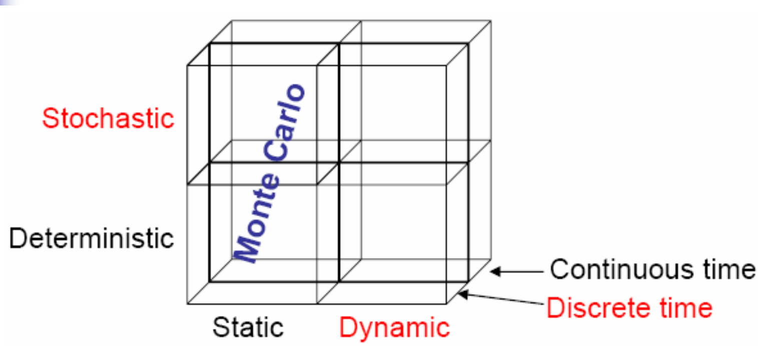
اجزاء سیستم:

- **نهاد**(Entity): عنصر مورد توجه در سیستم است
- **خصیصه** (Attribute): ویژگی هر نهاد است
- **فعالیت**(Activity): نمایشگر یک تغییر دوره ای زمانی با طول مشخص است.
- **پیشامد**(Event): رویدادی لحظه ای که قادر است تا حالت سیستم را تغییر دهد.

مثال: در یک بانک

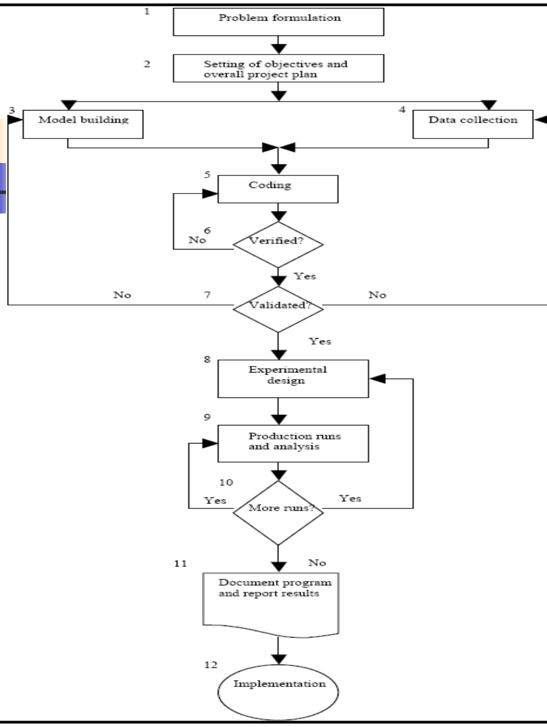
نهاد را مشتری، خصیصه را موجود حساب بانکی مشتری، فعالیت را عملیات بانکی و پیشامد را ورود و خروج مشتری دانست.

انواع مدل(ادامه)



روش مونت کارلو برای شبیه سازی فرآیندها/سیستم های یقینی و یا تصادفی ایستان (تغییر ناپذیر با زمان) بکار گرفته می شود.

گامهای اساسی در شبیه سازی



مدلهای آماری در شبیه سازی

- در مدلسازی پدیده های واقعی، کمتر وضعیتی وجود دارد که عمل نهادهای درون سیستم تحت بررسی را بتوان کاملا از قبل پیش بینی نمود.
- برای مثال در جریات تعمیر یک خودرو تعمیر کار نمی داند که تعمیر خودرو چه مدت زمان به طول می انجامد!
- این زمان وابسته نوع عیب، تبحر تعمیر کار، در دسترس بودن قطعات و ... دارد.
- بنابراین یک مدل یقینی توانایی ارائه یک تخمین مناسب از حالت سیستم مورد بحث را ندارد برای رفع این مشکل **مدل های تصادفی/ آماری** معرفی شده اند
- عمل تعیین مدل های آماری با استفاده از نمونه گیری از پدیده صورت می گیرد. از تکرار این فرآیند در دفعات متعدد، می توان توزیع آماری نمونه ها را بدست آورد. برای این عمل از روش رگرسیون استفاده می شود.

مروری بر مفاهیم آمار و احتمال

- X را به عنوان یک متغییر تصادفی در نظر بگیرید.
- تابع $g(x)$ یک تابع از متغییر حقیقی x می باشد.
- در این حالت Y یک متغییر تصادفی است اگر:

$$Y=g(x)$$

در تابع فوق دامنه متغییر تصادفی Y باید شامل برد متغییر تصادفی X باشد.

نمونه هایی از متغییر های تصادفی:

۱- عمر مفید لامپ

۲- انتشار امواج الکترو مغناطیسی

۳- نرخ بیت خطا در شبکه های رایانه ای

و ....

مروری بر مفاهیم آمار و احتمال (ادامه)

- متغییر تصادفی گسسته X دارای مقادیر احتمالی متناهی و یا نامتناهی قابل شمارش باشد.
- یک متغییر تصادفی می تواند هر بار مقادیر تصادفی مختلفی را داشته باشد. احتمال وقوع یک متغییر تصادفی $p(x_i)$ را می توان به عنوان میزان تکرار آن پیشامد به نسبت کل پیشامدهای ممکن تعریف نمود.
- **مثال** : X = تعداد کارهای رجوع شده به یک خشک شویی در مدت زمان یک هفته!

مقادیر محتمل برای متغییر تصادفی یا به عبارتی فضای نمونه ها برابر است با:

$R_X = \{1,2,3, \ldots\}$

احتمال آنکه متغییر تصادفی X دارای مقدار x_i (کلیه حالت های ممکن یا اعضای فضای نمونه ها) باشد برابر است با (i برابر است با تعداد نمونه های فضای حالت):

$$p(x_i) = P(X = x_i)$$

اصول موضوعی احتمال:

۱- احتمال وقوع یک متغییر تصادفی همیشه عددی نا منفی است.

$$p(x_i) \geq 0, \text{ for all } i$$

۲- احتمال وقوع تمامی حالت های ممکنه یا به عبارتی کل فضای نمونه ها برابر با یک است.

$$\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1$$

تابع توزیع تجمعی احتمال

- پیشامد $\{X<=x\}$ شامل آن دسته از اعضای فضای نمونه است که از x کـوچکتر باشند. احتمال وقوع این پیشامد ها را با $P\{X<=x\}$ نمایش می دهیم که تحت عنوان تابع توزیع احتمال نامیده می شود.

- تابع توزیع احتمال برای کلیه مقادیر x از $-\infty$ تا $+\infty$: $F_x(x)= P\{X<=x\}$

$F(+\infty)=1 \qquad F(-\infty)=0$

- **خواص تابع توزیع احتمال:**

$$\lim_{x\to -\infty} F(x) = 0$$

$$\lim_{x\to \infty} F(x) = 1$$

$$P\{X > x\} = 1 - F_x(x)$$

$$p\{x_1 < X \le x_2\} = F(x_2) - F(x_1)$$

$$F_X(x) = \sum_{i=1}^{N} P\{X = x_i\} U(x - x_i)$$

$$a < b \Rightarrow F(a) \le F(b)$$

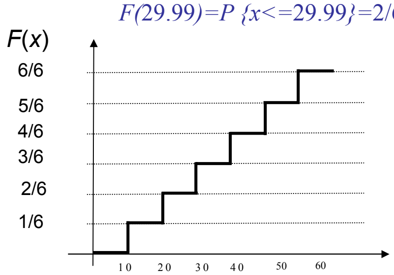
CDF example

- مثال: فرض کنید فروشگاهی محصول های مختلفی را عرضه می نماید. پایه قیمت هر کدام از این محصولات دارای شش شاخص است. **اگر فرض کنیم که قیمت هر کدام از محصولات به عنوان متغیر تصادفی تعریف شود** و این متغییر تصادفی از رابطه $X(Product_i)=10i \quad i=1,\dots,6$ محاسبه شود. تابع توزیع احتمال یا Cumulative Distribution Function (CDF) را بدست آورید

احتمال خرید محصولی با قیمت کمتر از ۱۰۰ تومان؟ $F(100)=P\{x<=100\}=1$

احتمال خرید محصولی با قیمت کمتر از ۳۵ تومان؟ $F(35)=P\{x<=35\}=3/6$

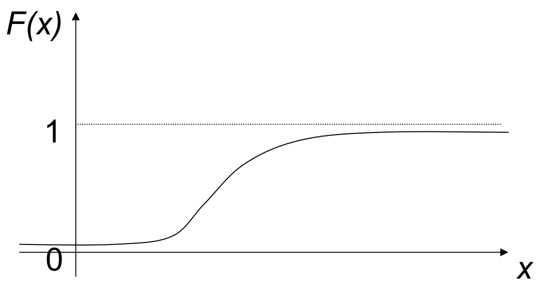
احتمال خرید محصولی با قیمت کمتر از ۲۹,۹۹تومان؟ $F(29.99)=P\{x<=29.99\}=2/6$



احتمال انتخاب اجناس اول تا ششم با یکدیگر برابر و مستقل از قیمت کالا می باشد

مثالی برای CDF پیوسته

- Based on the three properties, a generic CDF for a continuous r.v. should look like in the figure



تابع چگالی احتمال

- تابع چگالی احتمال $f_x(x)$ بعنوان تابع فرکانس شناخته می شود. این تابع تابعی است که نشان می دهد میزان احتمال وقوع حالت های مختلف (پیشامد های) یک متغییر تصادفی با چه احتمالی به وقوع می پیوند.

$$f_x(x) = \frac{\partial F(x)}{\partial x}$$

- بنابراین برای توابع گسسته تابع چگالی احتمال به صورت:

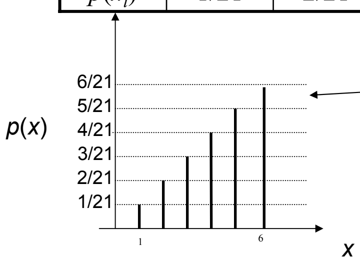
$$f(x) = \sum_i p_i \delta(x - x_i) \qquad p_i = p\{X = x_i\}$$

- مثال: فرض کنید فروشگاهی شش محصول مختلف را عرضه می نماید. قیمت هر کدام از این محصولات بین ۱ تا ۶ است. اگر فرض کنیم که **احتمال تقاضا برای هر کدام از محصولات از رابطه** $X(Product_i) = 10\,i$ محاسبه شود. تابع توزیع احتمال یا Probability Distribution Function (PDF) را بدست آورید

متغییرهای تصادفی گسسته

اگر همه کالا ها تقاضا گردند (کل فضای نمونه) احتمال آن برابر با ۲۱/۲۱ خواهد بود. با توجه به صورت مسئله احتمال وقوع هر محصول رابطه خطی با شماره (قیمت) آن دارد. در این مثال خاص هرچه کالا با شماره شناسایی بیشتر (گرانتر) باشد تقاضای بیشتری برای خرید آن وجود دارد.

x_i	1	2	3	4	5	6
$p(x_i)$	1/21	2/21	3/21	4/21	5/21	6/21



تابع چگالی احتمال

نحوه محاسبه CDF از روی PDF

- متغییر تصادفی گسسته

$$F(x) = p\{X \le x\} = \sum_{i, x_i \le x} p(x_i)$$

- متغییر تصادفی پیوسته

$$F(x) = p\{X \le x\} = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

$$P(a \le X \le b) = \int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

متغییر های تصادفی پیوسته

- اگر یک متغییر تصادفی در بازه های (زمانی) نامتنهاهی دارای مقدار باشد این متغیر تصادفی یک متغییر تصادفی پیوسته است.
- تابع چگالی احتمال نحوه رفتار تصادفی این متغییر را نشان می دهد.

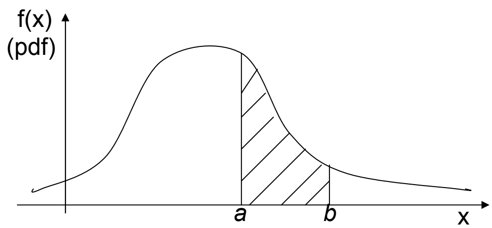
ویژگی های تابع چگالی احتمال

Properties:

(a) $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in R_X$

(b) $\int_{R_X} f(x) = 1 \quad \forall x \in R_X$

(c) $f(x) = 0, \; if \; x \notin R_X$



مثالی از متغییرهای تصادفی پیوسته

- مدت زمان طی فاصله مشهد – قوچان
- آیا این یک فرآیند یقینی است؟
- آیا این متغییر تصادفی دارای تابع چگالی احتمال مشخصی است؟
- نحوه بدست آوردن pdf چگونه است؟ (مدل سازی عملی)
- اندازه گیری های معمول برای تعیین تابع توزیع این پرسش (اندازه گیری مدت زمان رانندگی در مسیر مشهد - قوچان) چیست؟
  - **(a) On *average* will be about 2 hours → statistical mean**
  - **(b) 90% of the time, it will take between 1h 45 min and 2 h 10 min.**
  - **(c) What is the spread (variance) from the mean driving time?**

$$P(105 \text{ min} \leq X \leq 130 \text{ min}) = \int_{105}^{130} f(x)dx = 0.9$$

متوسط (Mean) و واریانس (Variance)

- Mean = expected value (expectation) $E(X) = \mu = 1^{st}$ *moment of X*
  - Discrete case:

$$E(X) = \sum_{i \in R_X} x_i p(x_i)$$

  - Continuous case:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

  - $E(X^n) = n^{th}$ *moment of X*

$$E(X^n) = \sum_{i \in R_X} x_i^n p(x_i)$$ discrete

$$E(g(X)) = \eta_{g(X)} = \int_{-\infty}^{\infty} g(X) f(x) dx$$

$$E(X^n) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x) dx$$ continuous

متوسط (Mean) و واریانس (Variance) (ادامه)

- Variance – measure of the spread (variation) of possible values of X around the mean

$$\sigma^2 = \mathrm{var}(X) = V(X) = E[(X - E(X))^2] = E(X^2) - [E(X)]^2$$

- Standard deviation $\sigma = \sqrt{\mathrm{var}(X)}$

- Mode – peak of the pdf

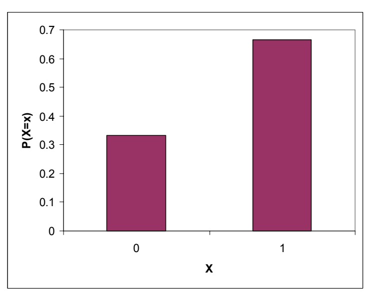
توزیع های تصادفی گسسته

Bernoulli trials

- آزمایشی تصادفی را متشکل از n بار آزمایش در نظر بگیرید. اگر پیشامد های ممکن در این آزمایش به صورت پیشامد های موفقیت (۱) و شکست (۰) باشد داریم:
- E.g. coin flipping, receiving a bit, etc.
  - The n Bernoulli trials are called a Bernoulli process, if
    - The trials are independent

$$p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = p(x_1)p(x_2)\ldots p(x_n)$$

    - Probability of success remains constant from trial to trial
  - For one trial, the Bernoulli distribution is



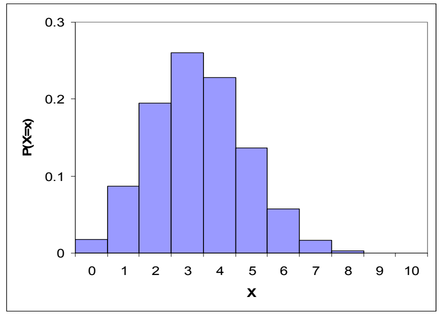
$$p(x) = \begin{cases} p & x = 1 \\ 1 - p = q & x = 0 \\ 0 & other \end{cases}$$

$$E(X) = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p$$

$$\text{var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \left[0^2 \cdot q + 1^2 \cdot p\right] - p^2 = p(1-p)$$

Binomial distribution

- تعداد x موفقیت در n آزمایش برنولی دارای توزیع بای نومینال است



$$p(x)=\begin{cases}\binom{n}{x}p^{x}q^{n-x} & x=1,2,..,n\\ 0 & ow\end{cases}$$

$$E(X)=np$$
$$\operatorname{var}(X)=npq$$

مثال : احتمال آنکه از ۱۰ بار پرتاب سکه ۳ بار رو بیاید چقدر است؟
فضای نمونه ها 2^{10} می باشد. احتمال رو و یا پشت بودن برابر با ۰,۵ می باشد. احتمال ۳ بار رو بودن برابر است با:

$$p_{10}(\text{رو})=\begin{cases}\binom{10}{3}0.5^{3}0.5^{7} & x=1,2,..,10\\ 0 & ow\end{cases}$$

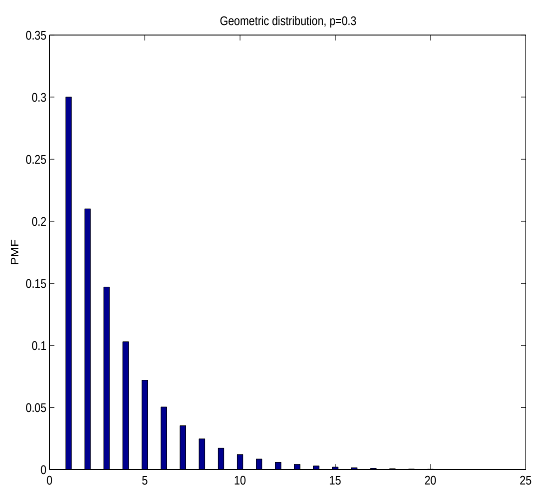
Geometric distribution

- **توزیع هندسی: تعداد آزمایش های برنولی قبل از اولین موفقیت**

$$p(x)=\begin{cases}q^{x-1}p & x=1,2,...\\ 0 & ow\end{cases}$$

$$E(X)=\frac{1}{p}$$

$$\operatorname{var}(X)=\frac{q}{p^{2}}$$



مثال

- امید ریاضی و واریانس یک متغییر تصادفی با توزیع geometric را بیابید؟

$$E\{x\} = \sum_{k=1}^{n} k(q^{k-1}p) = p + 2pq + 3pq^2 + \ldots + npq^{n-1} = p[1 + 2q + 3q^2 + \ldots + nq^{n-1}] =$$

با توجه به تعاریف سری های دو جمله ای داریم

$$\frac{1}{(1\text{-x})^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots.$$

$$= p[\frac{1}{(1-q)^2}] = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}$$

$$E\{x^2\} = \sum_{k=1}^{n} k^2(q^{k-1}p) = p + 4pq + 9pq^2 + \ldots + n^2pq^{n-1} = p[1 + 4q + 9q^2 + \ldots + n^2q^{n-1}] =$$

$$\frac{1}{(1\text{-x})^3} = 1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + \ldots.$$

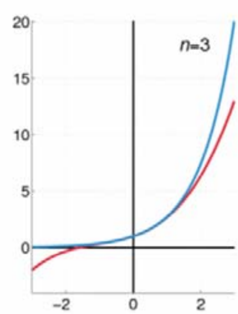
$$= p[\frac{q+1}{(1-q)^3}] = \frac{q+1}{p^2} \qquad \Rightarrow \qquad \sigma^2 = E\{x^2\} - E\{x\}^2 = \frac{q+1}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2}$$

تقریب سری تیلور

این تقریب برای نمایش انواع توابع بصورت جمع تعداد نامتناهی از مقادیر مشتق تابع در یک نقطه مورد استفاده قرار می گیرد. همچنین برای محاسبه توابعی که ساختار پیچیده ای دارند

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots,$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$



- Exponential function:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \quad \text{for all } x$$

مثال هایی از بسط تیلور توابع مختلف

- Natural logarithm: $$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \quad \text{for } |x|<1$$
- Finite geometric series: $$\frac{1-x^{m+1}}{1-x} = \sum_{n=0}^{m} x^n \quad \text{for } x \neq 1 \text{ and } m \in \mathbb{N}_0$$
- Infinite geometric series: $$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \text{for } |x|<1$$
- Variants of the infinite geometric series:

$$\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n \quad \text{for } |x|<1 \qquad \frac{x^m}{1-x} = \sum_{n=m}^{\infty} x^n \quad \text{for } |x|<1 \text{ and } m \in \mathbb{N}_0$$

مثال هایی از بسط تیلور توابع مختلف

- Square root: $$\sqrt{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n)!}{(1-2n)n!^2 4^n} x^n \quad \text{for } |x|<1$$
- Binomial series (includes the square root for $\alpha = 1/2$ and the infinite geometric series for $\alpha = -1$):

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \quad \text{for all } |x|<1 \text{ and all complex } \alpha$$

- Trigonometric functions:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \text{ for all } x$$
$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots \text{ for all } x$$
$$\tan x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}(-4)^n(1-4^n)}{(2n)!} x^{2n-1} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \cdots \text{ for } |x| < \frac{\pi}{2}$$

Poisson distribution

- **تعداد وقوع یک پدیده نادر از میان تعداد بسیار زیادی آزمایش (این توزیع از توزیع بای نومیال به وجود آمده است)**
  - Very often used – good model for arrival processes

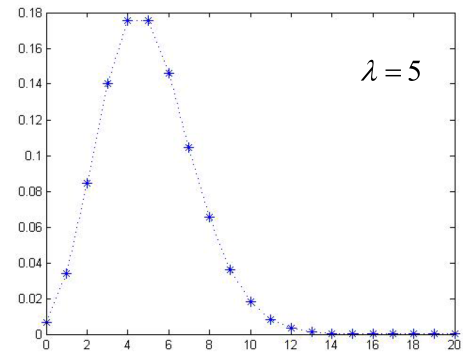
$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} & x=0,1,2,\dots\\ 0 & ow\end{cases}$$

$$f(x)=\sum_{\mathrm{i}} p_i\delta(x-x_i)$$

$$p_i=p\{X=x_i\}$$

$$f(x)=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\delta(x-k)$$

$$E(X)=\mathrm{var}(X)=\lambda$$



Poisson distribution

- احتمال وقوع پیشامد A، k مرتبه در n آزمایش برابر است با:

$$\binom{n}{k}p^k q^{n-k} \qquad \mathrm{k}=1,2,..,n$$

- اگر احتمال P خیلی کوچکتر از ۱ باشد ($p<<1$) و تعداد آزمایش ها n نیز زیاد باشد، بطوریکه داشته باشیم $np\cong npq$ φφ 1 می توان از قضیه دموآر – لاپلاس تقریبی بدست آورد که به شرح زیر می باشد:

$$\binom{n}{k}p^k q^{n-k}\ ;\ e^{-np}\frac{(np)^k}{k!} \qquad \mathrm{k}=1,2,..,n$$

- مثال: یک فروشگاه ۱۰۰۰ مشتری دارد که رفتار هر عضو مستقل از دیگری است. احتمال مراجعه هر کدام از مشتریان به مغازه در یک ماه برابر با ۰,۰۰۱ می باشد. می خواهیم احتمال آنکه کلیه مشتریان در آخر ماه به مغازه مراجعه بنمایند را محاسبه کنیم:

در این مسئله: $n=1000,\ p=0.001$ و $k=0$ (همه مشتریان مراجعه نماید) می باشد.

احتمال آنکه هیچ مشتری مراجعه ننماید برابر است با : $P\{k=0\}=q^n=.999^{1000}=0.36769$

حال از آنجاییکه $np=1$ داریم:

$$p\{k=0\}\ ;\ e^{-np}=e^{-1}=0.386$$

Poisson distribution

- مثال: یک رشته بیت به طول ۳۰۰۰ بیت دریافت شده است. نرخ بیت خطا 10^{-3} می باشد. یعنی احتمال آنکه یک بیت خراب باشد ۰,۰۰۱ است. احتمـال خـراب بـودن بیشتر از ۵ بیت را محاسبه نمایید.
- در این مسئله: $n=3000,\ p=0.001$ و $k<=5$ می باشد. بنابراین شرط $np \cong npq$ ϕϕ 1 برقرار است.
- می دانیم که احتما خراب بودن بیشتر از ۵ بیت یعنی محاسبه احتمال وقوع پیشامد $p\{k>5\}$ که احتمال وقوع این پیشامد برابراست با :

$$p\{k>5\}=1-p\{k\le 5\}$$

$$p\{k>5\}=1-p\{k\le 5\}=1-\sum_{k=1}^{5} e^{-np}\frac{(np)^k}{k!}=1\text{-}\sum_{k=1}^{5} e^{-3}\frac{(3)^k}{k!}=1-0.916=0.084$$

Poisson distribution

- تمرین متوسط و واریانس توزیع پواسون را بدست آورید:

$$p\{x=t_a\}=e^{-\lambda t_a}\frac{(\lambda t_a)^x}{x!} \qquad \mathrm{E}\{\mathrm{x}\}=\lambda$$

بسط تیلور

$$e^{\lambda}=\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\lambda^x}{x!}\Rightarrow\left(\frac{d}{dx}\ \text{مشتق از طرفین}\right)\Rightarrow\ e^{\lambda}=\sum_{x=0}^{\infty}x\frac{\lambda^{x-1}}{x!}=\frac{1}{\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}x\frac{\lambda^x}{x!}$$

$$e^{\lambda}=\sum_{x=0}^{\infty}x(x-1)\frac{\lambda^{x-2}}{x!}=\frac{1}{\lambda^2}\sum_{x=0}^{\infty}x^2\frac{\lambda^x}{x!}-\frac{1}{\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}x\frac{\lambda^x}{x!}$$

hence

$$E\{x\}=e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}x\frac{\lambda^x}{x!}=\lambda \qquad \text{and} \qquad \mathrm{E}\{\mathrm{x}^2\}=\lambda^2+\lambda$$

Poisson distribution

- یکی از مهم ترین کاربرد های توزیع پواسون احتمال انتخاب n نقطه به طور تصادفی میان یک بازه زمانی یا مکانی مشخص است.
- فرآیند شمارش $\{N(t), t \geq 0\}$ (N(t)مبین تعداد پیشامد هایی است که در بازه زمانی $[0, t)$ به وقوع پیوسته است) دارای توزیع پواسون است اگر:
- احتمال وقوع تعداد ورود های تصادفی در بازه t+s مستقل از نقطه شروع t آن باشد و فقط به طول بازه زمانی وابسته باشد.
- نموهای $\{N(t), t \geq 0\}$ مستقل باشد. تعداد ورودها (کم و زیاد بون ورودها) برای بازه های زمانی بدون هم پوشانی متغییر های تصادفی مستقل باشند یعنی تعداد ورودها در یک بازه بر بازه دیگر تاثیری ندارد.

- در این توزیع از میان بی نهایت حالت ممکن امکان نقطه ای درفاصله زمانی یا مکانی t برابر است با:

$$P(N(t)=n)=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}, \quad t>0, \quad n=0,1,2,\ldots$$

- تجربه نقاط تصادفی پواسون یک تجربه اساسی در نظریه احتمال می باشد. بعنوان روشن کردن این مطلب می توان به انتشار الکترون، مکالمات تلفنی، ماشین های عبوری از یک پل و نویز ساچمه ای در سیستم های مخابراتی اشاره نمود.

خواص مفید توزیع پواسون

- **دسته بندی (تفکیک) تصادفی**

- در ورود تصادفی با توزیع پواسون و نرخ λ اگر برای مثال با پرتاب سکه پیشامد ها را بدو دسته ورود نوع A و ورود نوع B تقسیم نماییم فرآیند های تصادفی حاصل دارای توزیع پواسون با متوسط (نرخ) خواهند بود:

$$\lambda_A=\lambda p, \text{ and } \lambda_B=\lambda(1-p)$$

- **ترکیب تصادفی دو یا چند فرآیند تصادفی پواسون**

- اگر تعداد n رشته تصادفی هر کدام با توزیع پواسون و نرخ با یکدیگر ترکیب شود، حاصل یک متغییر تصادفی با توزیع پواسون خواهد بود که نرخ آن برابر با جمع جبری تک تک نرخ های ورودی های دیگر خواهد بود:

$$\lambda_p=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$$

فرایند تصادفی با توزیع پواسون همگن

- The **number** of events happening up to time t is **Poisson** distributed with rate λt
  - The **number of events** happening in disjoint time intervals are independent
  - The **time between events** are then **independent** and **identically distributed exponential random variables** with mean $1/\lambda$
  - Combining two Poisson processes with rates λ and μ gives a Poisson process with rate $\lambda + \mu$
  - Choosing events from a Poisson process with probability p gives a Poisson process with rate $p\lambda$
  - A homogeneous Poisson process is *stationary*

$$P(N(t)=n)=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!},\ t>0,\ n=0,1,2,\ldots$$

فرآیند تصادفی تکرار (Renewal Process)

- اگر زمان میان وقوع پیشامد ها مستقل و یکسان توزیع شده باشند (independent and identically distributed (iid)) آنگاه تعداد پیشامد ها در واحد زمان فرآیند تکرار نامیده می شود.
  - فرآیند پواسون همگن یک فرآیند تکرار است که فاصله زمانی میان هر تکرار یک متغییر تصادفی با توزیع نمایی است.
  - توزیع زمان میان ورود ها به غیر از نمایی gamma و Weibull نیز می تواند باشد.
  - فرآیند تصادفی تکرار یک فرآیند ایستان است

فرآیند ورود تصادفی غیر ایستان

- ورود های تصادفی که تعداد انها وابسته به زمان وقوع آنها می باشد اعم از:
  - Lunchtime at fast-food restaurants
  - Rush-hour traffic in cities
  - Telephone call centers
  - Seasonal demands for a manufactured product
- برای بدست آوردن یک مدل شبیه سازی دقیق باشد اثر تغییر زمان را برفرآیند ورود تعیین نمود اگر این اتفاق صورت نگیرد ممکن است:
  - Ignoring peaks, valleys can mask important behavior
  - Can miss rush hours, etc.
- مدل مناسب:
  - *فرآیند تصادفی پواسون غیر-همگن (Non-homogeneous Poisson process)*

فرآیند ورود تصادفی غیر ایستان

- **برای تعیین این مدل دو مفهوم باید مشخص گردد:**

۱- نحوه تعیین و محاسبه نرخ ورود λ

۲- نحوه تولید صحیح فرآیند در حین شبیه سازی

- **روش کار:**
- بازه زمانی شبیه سازی را به بازه های کوچکتری از زمان که اطمینان دارید نرخ تغییرات ثابت است (وابستگی به زمان وجود ندارد) تقسیم نمایید.
- میزان نرخ ورود را در هر بازه تعیین نمایید
- در تعیین واحد های سنجش زمان دقت نمایید که یک واحد برای همه اندازه گیری ها لحاظ گردد.

۱. واحد های زمانی را به دقیقه
۲. بازه زمانی فرضی را در حدود نصف ساعت (۳۰ دقیقه)
۳. برای مثال در ۴۵ ورود در یک بازه ۳۰ دقیقه ای نرخ ورود λ برابر با ۱٫۵ ورود دردقیقه خواهد بود

توزیع های تصادفی پیوسته

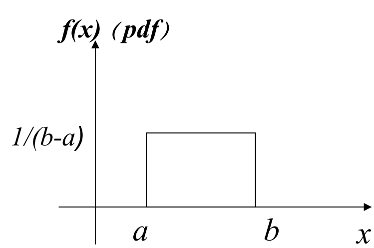
Uniform distribution

- این توزیع زمانی بکار گرفته می شود که علم ما نسبت به فرآیند تصادفی مـورد نظـر بسیار ناچیز است. همچنین این توزیع بدترین حالت ممکن است زیرا نمونه های ایـن فرآیند تصادفی همگی با یک احتمال مساوی به وقوع می پیوندند و برتری نسبت بـه هم ندارند، پس رخداد هر حالتی ممکن است!

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a\le x\le b\\ 0 & ow\end{cases}$$

$$E(X)=\frac{a+b}{2}$$

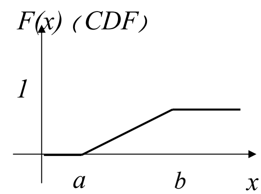
$$\operatorname{var}(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$$



Uniform distribution

- مثال CDF توزیع یکنواخت را بدست آورید.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a\le x\le b\\ 0 & ow\end{cases}$$



$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

$$if \quad x<a \quad then \quad F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=0$$

$$if \quad a\le x<b \quad then \quad F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=\int_{-\infty}^{a}0dx+\int_{a}^{x}\frac{1}{b-a}dx=\frac{x-a}{b-a}$$

$$if \quad b\le x \quad then \quad F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=\int_{-\infty}^{a}0dx+\int_{a}^{b}\frac{1}{b-a}dx+\int_{b}^{x}0dx=1$$

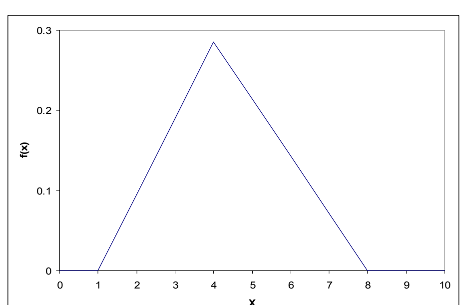
Triangular Distribution

- این توزیع در مواقعی که اطلاعات موجود بسیار ناچیز است بکار گرفته می شود.
- در این توزیع فقط مقادیر مینیمم، ماکزیمم و مقداری که بالاترین احتمال وقوع را دارد مورد نیاز می باشد.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2(x-a)}{(m-a)(b-a)}, & a\le x<m\\ \dfrac{2(b-x)}{(b-m)(b-a)}, & m\le x<b\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$

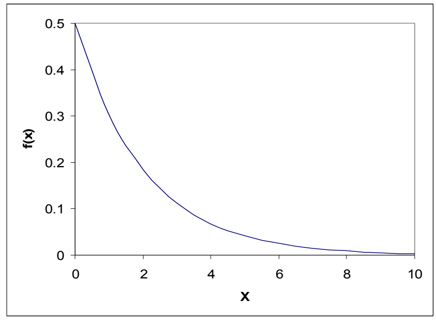
$$E[X]=(a+b)/2$$

$$Var(X)=(b-a)^2/12$$



Exponential Distribution

- Model **times between events**
  - Used to model inter-arrival times and service times for queues
  - Times between arrivals
  - Times between failures
  - Times to repair
  - Service Times
  - Has long tail – useful for modeling component lifetime, e.g. life of a light bulb



$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x\geq 0\\ 0 & ow\end{cases}\qquad E(X)=\frac{1}{\lambda}\qquad \operatorname{var}(X)=\frac{1}{\lambda^2}$$

λ is a rate: e.g. arrival rate, service rate, failure rate, etc…

جزئیات بیشتر در مورد توزیع نمایی

pdf: $$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x\geq 0\\ 0 & ow\end{cases}\qquad E(X)=\frac{1}{\lambda}\qquad \operatorname{var}(X)=\frac{1}{\lambda^2}$$

λ is a rate: e.g. arrival rate, service rate, failure rate, etc…

- **ویژگی های مهم این توزیع:**
  - خاصیت بی حافظه بودن (Memory-less):

$$if\ \ t\geq s\quad \text{then}\ \ P(X>s+t\mid X>s)=P(X>t)$$

برای احتمال شرطی میان دو پیشامد A وB داریم:

$$P(A,B)=P(A\mid B)P(B)=P(B\mid A)P(A)$$

خاصیت بی حافظه بودن توزیع نمایی بدین نحو اثبات می گردد که:

$$\boxed{P(X>s+t\mid X>s)=\frac{P(X>s+t,X>s)}{P(X>s)}=\frac{P(X>s+t)}{P(X>s)}=\frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}}=e^{-\lambda t}}$$

مثالی از توزیع نمایی

- فرض کنید هدف بررسی زمان رسیدن اتوبوس به ایستگاه می باشد. اگر زمان بین ورود اتوبوس ها به ایستگاه یک متغییر تصادفی با توزیع نمایی و با متوسط $\mu = 10$ باشد. فرض کنید که شما به مدت ۱۰ دقیقه به انتظار اتوبوس ایستاده اید. سوال:

- ۱- احتمال آنکه لازم باشد حداقل برای ۱۵ دقیقه آینده به انتظار بایستید چقدر است؟

$$P(X > 10+15 \mid X > 10) = P(X > 15) = \int_{15}^{\infty} 0.1 e^{-0.1x} dx = -e^{-0.1x} \Big|_{15}^{\infty}$$
$$= e^{-1.5} = 0.22$$

- احتمال آنکه لازم باشد برای ۵کمتر از دقیقه منتظر بمانید چقدر است؟

$$P(X < 10+5 \mid X > 10) = P(X < 5) = \int_{0}^{5} 0.1 e^{-0.1x} dx = 0.3935$$

رابطه توزیع نمایی با توزیع پواسون

- اگر بازه های زمانی میان تولید پیشامد (برای مثال ورود، ارائه سرویس و ...) یک متغییر تصادفی با توزیع نمایی و متوسط $\mu = 1/\lambda$ باشد، فرآیند تصادفی تولید پیشامد ها یک متغییر تصادفی با توزیع پواسون و متوسط λ می باشد.
- مثال:
  - اگر زمان بین ورود اتوبوس ها به ایستگاه یک متغییر تصادفی با توزیع نمایی باشد پیشامد ورود اتوبوس به ایستگاه یک متغییر تصادفی با توزیع پواسون است.
    - سوال: اگر متوسط زمان بین هر ورود به ایستگاه ۱۰ دقیقه باشد
      - احتمال انتظار برای بیشتر از ۱۵ دقیقه را محاسبه نمایید؟
      - احتمال آنکه حداکثر ۲ اتوبوس در نیم ساعت اول به ایستگاه مراجعه نمایند چقدر است؟

(1) $P(t > 15) \approx 0.22$

(2) $P(N \le 2) = \sum_{i=0}^{2} \frac{e^{-0.1 \cdot 30} \cdot 3^i}{i!} \approx 0.049 + 0.15 + 0.22 = 0.4195$

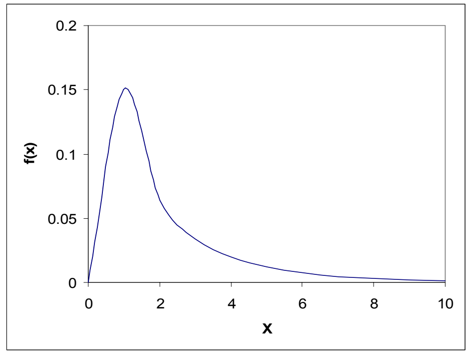
Erlang Distribution

- از مجموع k متغییر تصادفی مستقل با توزیع نمایی توزیع ارلانگ به وجود می آید

$$f(x)=\frac{(k\lambda)^k}{(k-1)!}x^{k-1}e^{-k\lambda x}$$

- مزیت: قابلیت انعطاف بیشتری به نسبت نمایی دارد

$$E[X]=\frac{1}{\lambda} \qquad Var(X)=\frac{1}{k\lambda^2}$$

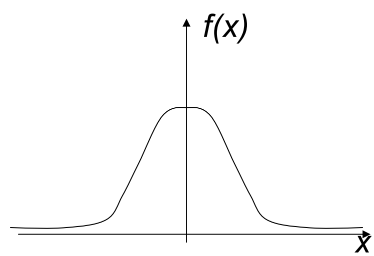


Normal distribution (Gaussian distribution)

- Widely used: model of thermal noise in circuits, communications
- Mean μ, variance σ^2

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{x-\mu}{\sigma}\right]^2\right)}$$

- Mode and mean are equal



$$F(x)=P(X\le x)=\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

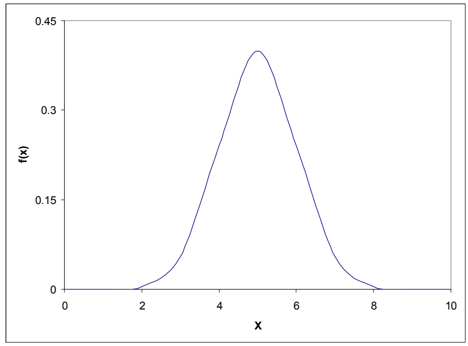
$$\Phi(z)=\int_{-\infty}^{z}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$ - tabulated

Normal distribution (Gaussian distribution)

- توزیع مجموع تعداد زیادی متغیر تصادفی iid (متغیر های تصادفی مستقل و یکسان) درای توزیع گوسی خواهد بود!

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$$

- Central Limit Theorem



$$E[X] = \mu \qquad Var(X) = \sigma^2$$

تمرین شماره ۲

۱- در نرم افزار Matlab یک رشته تصادفی با توزیع های زیر به طول ۱۰۰۰ نمونه با یک بار با متوسط صفر و واریانس ۱ و یکبار با متوسط ۲ و واریانس ۱۰ تولید کنید.

- **توزیع ها:** گوسی – یکنواخت – پواسون – نمایی – ارلانگ

۲- PDF و CDF توزیع های فوق را رسم نمایید.

- CDF توزیع های نمایی – مثلثی – ارلانگ را بدست آورید (رابطه ریاضی)