روابط برگشتی:

دنباله: دنباله مجموعه‌ای از اعداد است که با یک روند منطقی دنبال یکدیگر تکرار می‌شود.

سری فیبوناچی: (جمع ۲ رقم می‌شود عدد بعدی)

$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21$

جمله عمومی: یک فرمول یا رابطه صریح یا شده برای یک دنباله یا سری نوشته می‌شود و به کمک آن می‌توان هر جمله از دنباله را به دست آورد.

تمرین: ۴ جمله اول دنباله زیر را به دست آورید.

جمله عمومی

$$\begin{cases} \boxed{a_n = 2a_{n-1} + n} & n \geq 2 \\ a_1 = 1 \end{cases}$$

$$a_1, a_2, a_3, a_4 \xrightarrow{\text{جواب}} 2a_1 + 2 = 4 \qquad 1, 4, 11, 26$$

$$2a_2 + 3$$

تمرین: نشان دهید که دنباله تعریف شده در قسمت الف در جمله عمومی (رابطه برگشتی) ارائه شده در قسمت ب صدق می‌کند.

الف) $0, 1, 3, 7, \dots, 2^n - 1 \qquad n \geq 0$

ب) $a_n = 2a_{n-1} + 1 \qquad n \geq 1$

$$\longrightarrow \overset{*}{a_n = 2^n - 1} \longrightarrow a_{n-1} = 2^{n-1} - 1$$

الف) $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$

ب) $* \rightarrow 2^n - 1 = 2(2^{n-1} - 1) + 1 \rightarrow 2^n - 1 = 2^n - 2 + 1 \rightarrow \boxed{2^n - 1 = 2^n - 1}$

پس رابطه الف همان رابطه ب است

رابطه بازگشتی مرتبه 2 همگن:

هدف از حل رابطه برگشتی به دست آوردن فرمول صریح و جمله عمومی رابطه برگشتی است.

$$\begin{cases} a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} \\ a_0 = \\ a_1 = \end{cases}$$

شرایط اولیه

قانون کلی

$$\begin{bmatrix} a_n = r^2 \\ a_{n-1} = r \\ a_{n-2} = 1 \end{bmatrix}$$

$$\overset{r^2}{a_n} - c_1 \overset{r}{a_{n-1}} - c_2 \overset{1}{a_{n-2}} = 0 \longrightarrow r^2 - c_1 r - c_2 = 0$$

با حل معادله مشخصه و محاسبه Δ یکی از ۳ وضعیت زیر قرار می‌گیریم:

الف: $\Delta > 0$ (یعنی معادله دو ریشه حقیقی r_1 ، r_2 دارد)

مقادیر A و B به کمک شرایط مرزی تعیین می‌شود

فرمول: $a_n = A(r_1)^n + B(r_2)^n$

مثال:

$$\begin{cases} a_n = -a_{n-1} + 4a_{n-2} & n \geq 2 \\ a_0 = 1 \\ a_1 = 2 \end{cases}$$

$$a_n + a_{n-1} - 4a_{n-2} = 0 \rightarrow r^2 + r - 4 = 0 \rightarrow (r+3)(r-2) = 0 \rightarrow \begin{cases} r = -3 \\ r = 2 \end{cases}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \rightarrow r = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

طبق فرمول بالا $\quad a_n = A(-3)^n + B(+2)^n$

شرایط مرزی
$$\begin{cases} a_0 = 1 \rightarrow a_0 = A(-3)^0 + B(2)^0 \Rightarrow 1 = A + B \\ a_1 = 2 \rightarrow a_1 = A(-3)^1 + B(2)^1 \Rightarrow 2 = -3A + 2B \end{cases}$$

$$\times -2 \begin{cases} 1 = A + B \\ 2 = -3A + 2B \end{cases} \quad \begin{cases} -2 = -2A - 2B \\ 2 = -3A + 2B \end{cases} \Rightarrow -5A = 0 \rightarrow \underline{A = 0}, \quad \underline{B = 1}$$

طبق فرمول → جواب: $a_n = A(-3)^n + B(2)^n \rightarrow a_n = 2^n$ جمله عمومی این رابطه

اکنون می‌توانیم جمله هر کدام را با توجه به جمله عمومی پیدا کنیم.

ب: $\Delta = 0$ (یعنی رابطه یک ریشه مضاعف دارد)

فرمول $\quad a_n = (A + nB)r^n$

مثال:

$$\begin{cases} a_n = -4a_{n-1} - 4a_{n-2} & n \geq 2 \\ a_0 = 1 \\ a_1 = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_n + 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = 0 \rightarrow r^2 + 4r + 4 = 0 \rightarrow (r+2)^2 = 0 \rightarrow \underline{r = -2}$$

فرمول: $a_n = (A + nB)r^n = (A + nB)(-2)^n$

ادامه در صفحه بعد

ساختمان گسسته:

شرایط مرزی
$$\begin{cases} a_0 = 1 \rightarrow a_0 = (A + 0\times B)(-2)^0 \rightarrow \underline{1 = A} \\ a_1 = 3 \rightarrow a_1 = (A+B)(-2)^1 \rightarrow 3 = -2(A+B) \rightarrow 3 = -2(1+B) \rightarrow B = -2,5 \end{cases}$$

$$a_n = (1 - 2,5n)(-2)^n$$

ج: $\Delta < 0$ (یعنی معادله ۲ ریشه موهومی r_1 , r_2 دارد)

$$r_1, r_2 = x \pm iy \xrightarrow{\text{قطبی}} r = \sqrt{x^2+y^2}$$

دکارتی

$$\theta \begin{cases} tg^{-1}\, y/x & x \geq 0 \\ \pi + tg^{-1}\, y/x & x < 0 \end{cases}$$

قطبی $\boxed{r_1, r_2 = r(\cos\theta, i\sin\theta)}$

رابطه اویلر $\longrightarrow \boxed{r_1^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)}$

جواب عمومی $\Rightarrow \boxed{a_n = (A)(r_1)^n + B(r_2)^n} \rightarrow$ که A و B با کمک شرایط اولیه بدست می‌آید.

مثال: نکته همیشه بزرگترین اندیس را r^2 و بعدی کوچکتر را r و اندیس کوچکتر را 1 در نظر می‌گیریم.

$$\begin{cases} a_{n+2} + 4a_n = 0 \\ a_0 = a_1 = 1 \end{cases}$$

$$a_{n+2} + 0a_{n+1} + 4a_n \Rightarrow r^2 + 4 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0 - 4(1)(4) \rightarrow \Delta = -16 < 0$$

$\sqrt{-1} = i$

$$r_1, r_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{\pm\sqrt{-16}}{2\times 1} = \frac{\pm\sqrt{-1}\sqrt{16}}{2} = \pm 2i \rightarrow \begin{cases} r_1 = 2i \\ r_2 = -2i \end{cases}$$

$$\rightarrow r_1 = 2i \rightarrow r = \sqrt{0^2 + 2^2} = 2$$

$$\theta = tg^{-1}\frac{y}{x} = tg^{-1}\frac{2}{0} = tg^{-1}(+\infty) = \frac{\pi}{2}$$

جواب قطبی $\rightarrow \boxed{r_1 = 2(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})}$

$$r_2 = -2i \rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{0^2 + (-2)^2} = 2 \\ \theta = tg^{-1} \frac{-2}{0} = tg^{-1}(-\infty) = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

نکته:

$$\begin{cases} \cos(-\theta) = \cos\theta \\ \sin(-\theta) = -\sin\theta \end{cases}$$

جمله عمومی $: a_n = A(r_1)^n + B(r_2)^n \Rightarrow$

$$a_n = A\left(2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)\right)^n + B\left(2\left(\cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2}\right)\right)^n$$

$$\xrightarrow{\text{رابطه اویلر}} a_n = A\left(2^n\left(\cos\frac{n\pi}{2} + i\sin\frac{n\pi}{2}\right)\right) + B\left(2^n\left(\cos\frac{n\pi}{2} - i\sin\frac{n\pi}{2}\right)\right)$$

$$\xrightarrow{\text{فاکتور}} a_n = 2^n\left[\underbrace{(A+B)}_{k_1}\cos\frac{n\pi}{2} + \underbrace{(A-B)}_{k_2} i\sin\frac{n\pi}{2}\right]$$

$$\boxed{a_n = 2^n\left[k_1\cos\frac{n\pi}{2} + k_2 i\sin\frac{n\pi}{2}\right]}\ \#$$

$$\underset{n}{a_0} = 1 \rightarrow a_0 = 2^0\left[k_1\underbrace{\cos 0}_{1} + k_2\underbrace{i\sin 0}_{0}\right] \Rightarrow 1 = [k_1] \rightarrow k_1 = 1$$

$$\underset{n}{a_1} = 1 \Rightarrow a_1 = 2^1\left[\underbrace{k_1\cos\frac{\pi}{2}}_{0} + k_2\underbrace{i\sin\frac{\pi}{2}}_{1}\right] \Rightarrow 1 = 2[k_2 i] \Rightarrow \boxed{k_2 = \frac{1}{2i}}$$

$$\# \Rightarrow a_n = 2^n\left[1 \times \cos\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{2i} i\sin\frac{n\pi}{2}\right] \Rightarrow \boxed{a_n = 2^n\left[\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin\frac{n\pi}{2}\right]}$$

جواب مسئله

روابط بازگشتی ناهمگن :

شکل کلی این نوع روابط بصورت زیر است :

$$c_n a_n + c_{n-1} a_{n-1} + \dots + c_{n-k} a_{n-k} = f$$

ابتدا

1. برای حل این نوع روابط بازگشتی ابتدا معادله همگن آن را نوشته و پاسخ معادله همگن را بدست می آوریم .

1. $c_n a_n + c_{n-1} a_{n-1} + c_{n-k} a_{n-k} = 0$

پس جواب معادله همگن را بدست می آوریم

$a_n^{(h)} \rightarrow$ توان ثبت همگن است

2. جواب خصوصی معادله ناهمگن را با کمک جدول زیر بدست می آوریم . a_n^p

f	a_n^p
ثابت c یک عدد ثابت	A عدد ثابت
n	$A_0 + A_1 n$
n^2	$A_0 + A_1 n + A_2 n^2$
n^t $t \in Z^+$ عدد طبیعی	$A_0 + A_1 n + A_2 n^2 + \dots + A_t n^t$
r^n $r \in R$	$A r^n$
$\sin \alpha n$	$A \cos \alpha n + B \sin \alpha n$
$\cos \alpha n$	$A \cos \alpha n + B \sin \alpha n$
$n^t r^n$	$r^n (A_0 + A_1 n + A_2 n^2 + \dots + A_t n^2)$
$r^n \sin \alpha n$	$r^n (A \cos \alpha n + B \sin \alpha n)$
$r^n \cos \alpha n$	$r^n (A \cos \alpha n + B \sin \alpha n)$

3. جواب عمومی بصورت زیر خواهد بود

$$a_n = a_n^h + a_n^p$$

مثال : رابطه بازگشتی زیر را بدست آورید.

بخاطر همین عدد ناهمگن می باشد

$$\begin{cases} a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + \underbrace{n2^n}_{f} & n \geq 2 \\ a_0 = 7 \ , \ a_1 = 1 \end{cases}$$

الف : حل همگن $\Rightarrow a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} \Rightarrow a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 0$

$$\underline{r^2 - 5r + 6 = 0} \Rightarrow (r-2)(r-3) = 0$$

$$\underline{r_1 = 2}$$

$$\underline{r_2 = 3}$$

جمله عمومی : $a_n^h = A r_1^n + B r_2^n \Rightarrow \underline{A 2^n + B 3^n = a_n^h}$

<u>2- جواب خصوصی</u> : حدس جمله : $a_n^P = 2^n (A_0 + A_1 n)$ (حدس جمله $(n^t r^n$

3. $a_n = a_n^h + a_n^P = A 2^n + B 3^n + 2^n (A_0 + A_1 n)$

$a_0 = 7 \Rightarrow a_0 = A 2^0 + B 3^0 + 2^0 (A_0 + A_1 (0)) \Rightarrow \underline{A + B + A_0 = 7}$

$n = 0$

$a_1 = 1 \rightarrow a_1 = \underline{2A + 3B + 2A_0 + 2A_1 = 1}$

$n = 1$

جواب خصوصی همیشه در رابطه بازگشتی صدق می کند. بنابراین جواب خصوصی را در این رابطه قرار می دهیم.

$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$

$$\left.\begin{aligned} a_n^P &= 2^n (A_0 + A_1 n) \\ a_{n-1} &= 2^{n-1} (A_0 + A_1 (n-1)) \\ a_{n-2} &= 2^{n-2} (A_0 + A_1 (n-2)) \end{aligned}\right\} \Rightarrow 2^n (A_0 + A_1 n) = 5 \times 2^{n-1} (A_0 + A_1 (n-1)) + 6 \times 2^{n-2} (A_0 + A_1 (n-2))$$

$$2^n A_0 + 2^n A_1 n = 5 A_0 2^{n-1} + 5 \times 2^{n-1} A_1 n - 5 \times 2^{n-1} A_1 - 6 \times 2^{n-2} A_0 - 6 \times 2^{n-2} n A_1 + 12 \times 2^{n-2} A_1 + n 2^n$$

$$\Rightarrow 2^n A_0 + 2^n A_1 n = 5 A_0 2^n \times 2^{-1} + 5 \times 2^n \times 2^{-1} \times A_1 n - 5 \times 2^n \times 2^{-1} \times A_1 - 6 \times 2^n \times 2^{-2} \times A_0 - 6 n^2 \times 2^{-2} \times n A_1 + 12 \times 2^n \times 2^{-2} \times A_1$$

$$2^n A_0 + 2^n A_1 n = \frac{5}{2} A_0 2^n + \frac{5}{2} 2^n A_1 n - \frac{5}{2} 2^n A_1 - \frac{3}{2} 2^n A_0 - \frac{3}{2} 2^n n A_1 + 3 \times 2^n A_1 + n 2^n$$

$$\underline{2^n A_0} + \cancel{2^n A_1 n} - \underline{\frac{5}{2} A_0 2^n} - \cancel{\frac{5}{2} 2^n A_1 n} + \underline{\frac{5}{2} 2^n A_1} + \underline{\frac{3}{2} 2^n A_0} + \cancel{\frac{3}{2} 2^n n A_1} - \underline{3 \times 2^n A_1} = n 2^n$$

$$2^n (\cancel{A_0} - \cancel{\tfrac{5}{2} A_0} + \cancel{\tfrac{5}{2} A_1} + \cancel{\tfrac{3}{2} A_0} - \cancel{3 A_1}) + n 2^n (A_1 - \tfrac{5}{2} A_1 + \tfrac{3}{2} A_1) = n 2^n$$

$$2^n (-\tfrac{1}{2} A_1) +$$

رابطه مولد :

مثال : میخواهیم ۱۲ پرتقال را بین ۳ نفر به نام های A ، B ، C و D تقسیم کنیم بطوری که : به A حداقل 4 پرتقال برسد به B حداقل 2 پرتقال برسد و به C حداقل 2 پرتقال و حداکثر 5 پرتقال . به چند طریق می توان این تقسیم را انجام داد .

$A \geq 4 : x^4+x^5+x^6+x^7+x^8$

$B \geq 2 : x^2+x^3+x^4+x^5+x^6$

$5 \geq C \geq 2 : x^2+x^3+x^4+x^5$

تابع مولد : $f(x) = A \times B \times C =$

$$(x^4+x^5+x^6+x^7+x^8)(x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)(x^2+x^3+x^4+x^5) =$$

جواب تعداد راههای تقسیم ضریب جمله x^{12} است .

مثال : میخواهیم تعداد حالتهای توپ را از رنگهای قرمز، سیاه، سفید و سبز، 24 توپ انتخاب کنیم که حداقل 6 توپ سیاه و به تعداد زوج توپ سفید داشته باشیم به چند طریق می توان این تقسیم را انجام دهیم.

سیاه : حداقل 6 : $x^6+x^7+x^8+\dots+x^{24}$

سفید : زوج باشد : $x^0+x^2+x^4+x^6+\dots+x^{18}$

سبز : $x^0+x^1+x^2+x^3+\dots+x^{18}$

قرمز : " " "

$$f(x) = (x^0+x^1+x^2+\dots x^{18})^2 (x^0+x^2+x^4+\dots+x^{18})(x^6+x^7+x^8+\dots x^{24}) =$$

جواب مسئله ضریب جمله x^{24} است .

نکته 1 : اگر $(1+x)^n$ را بسط دهیم جمله ما دارای $n+1$ جمله است یعنی:

$$(1+x)^n = C_n^0 x^0 + C_n^1 x^1 + C_n^2 x^2 + C_n^3 x^3 + \dots + C_n^n x^n \Rightarrow \boxed{C_n^r = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}}$$

شرط اینکه $n \geq 0$

مثال : ضریب جمله x^4 را در عبارت زیر بدست آورید.

$$(1+2x)^6 =$$

$$C_6^0\, 2x^0 + C_6^1\, 2x^1 + C_6^2\, 2x^2 + C_6^3\, 2x^3 + C_6^4\, 2x^4 + \dots + C_6^6\, 2x^6 =$$

$$C_6^4\, 2x^4 = \frac{6!}{4! \times 2!} = \frac{\overset{3}{\cancel{6}} \times 5 \times \cancel{4!}}{\cancel{4!} \times \cancel{2!}} = 15 \times 2^4 x^4 = 15 \times 16 \times x^4 = 240x^4$$

مثال: ضریب جمله x^8 را بدست آورید.

$$(3+x^2)^8 = \cancel{C_8^0 (x^2)^0 + C_8^1 (x^2)^1} +$$

$$\left(3\left(1+\frac{x^2}{3}\right)\right)^8 = 3^8\left(1+\frac{x^2}{3}\right)^8 = 3^8\left[C_8^0 \left(\frac{x^2}{3}\right)^0 + C_8^1 \left(\frac{x^2}{3}\right)^1 + \dots + C_8^8 \left(\frac{x^2}{3}\right)^8\right]$$

$$3^8 \times C_8^4 \left(\frac{x^2}{3}\right)^4 = \cancel{3^8} \times \frac{8!}{4! \times 4!} \times \frac{x^8}{\cancel{3^4}} = 3^4 \times \frac{\cancel{8}^{2} \times 7 \times \cancel{6} \times 5}{\cancel{4} \times 3 \times 2} \times x^8 = \underbrace{3^4 \times 70}_{\text{ضریب } x^8} \times x^8$$

مثال: ضریب جمله x^{15} را بدست آورید.

$$(8+3x^3)^{10} = \left(8\left(1+\frac{3}{8}x^3\right)\right)^{10} =$$

$$8^{10}\left(1+\frac{3}{8}x^3\right)^{10} = 8^{10} \times C_{15}^5 \left(\frac{3}{8}x^3\right)^5 =$$

مثال : به چند طریق می‌توان 24 شی را بین 4 نفر بگونه‌ای تقسیم کرد که به هر یک حداقل 3 و حداکثر 8 شی برسد (با استفاده از تابع مولد)

$A: x^3+x^4+x^5+\dots+x^8$

$B: x^3+x^4+x^5+\dots+x^8$

$C:$ 〃 〃 〃

$D:$ 〃 〃 〃

ضریب این چهار تا برابر

$f(x)=(x^3+x^4+x^5+\dots+x^8)^4$

جواب ضریب جمله x^{24} است

$$(x^3+x^4+x^5+\dots+x^8)^4=[x^3(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)]^4=x^{12}(\underline{1+x+\dots+x^5})^4$$

محدود می‌باشد از فرمول (4)

$$=x^{12}\left(\frac{1-x^6}{1-x}\right)^4=x^{12}\frac{(1-x^6)^4}{(1-x)^4}=x^{12}\,(1-x^6)^4\,(1-x)^{-4}$$

$$x^{12}\underbrace{\left[C_4^0(-x^6)^0+C_4^1(-x^6)^1+C_4^1(-x^6)^2+\dots+C_4^4(-x^6)^4\right]\left[C_{-4}^0(-x)^0+C_{-4}^1(-x)^1+C_{-4}^2(-x)^2+\dots\right]}$$

ضریب جمله x^{12} را بدست می‌آوریم

طبق فرمول (2)

$$\left.\begin{cases}\underbrace{C_4^0(-x^6)^0}_{1}\times C_{-4}^{12}(-x)^{12}=1\times1\times(-1)^{12}C_{15}^{12}x^{12}=\frac{15!}{12!\,3!}x^{12}=455x^{12}\\ +\\ \underbrace{C_4^1(-x^6)^0}_{1}\times C_{-4}^{6}(-x)^{6}=4(-x^6)(-1)^6C_9^6x^6=-4\frac{9!}{6!\,3!}x^{12}=-336x^{12}\\ +\\ C_4^2(-x^6)^2\times\underbrace{C_{-4}^0(-x)^0}_{1}=6x^{12}\times1\times1=6x^{12}\end{cases}\right\}+$$

$125x^{12}\times x^{12}=125x^{24}$

جواب 125 می‌باشد

$C_n^0=1$	$C_n^n=1$
$C_n^1=n$	$C_n^{n-1}=n$

اگر $(1+x)^{-n} = C^{0}_{-n}(x)^{0} + C^{1}_{-n}(x)^{1} + C^{2}_{-n}(x)^{2} + \cdots$ نامحدود باشد

$n>0$

$$\boxed{C^{r}_{-n} = (-1)^{r}\, C^{r}_{n+r-1}}$$ 2

مثال: در بسط زیر ضریب جمله x^5 را بدست آورید.

$$(1-2x)^{-7} = C^{0}_{-7}(-x2)^{0} + C^{1}_{-7}(-2x)^{1} + C^{2}_{-7}(-2x)^{2} + \cdots C^{5}_{-7}(-2x)^{5} \Rightarrow$$

$$C^{5}_{-7}(-2x)^{5} = (-1)^{5}\, C^{5}_{11}(-2x)^{5} = (-1)^{5}\, C^{5}_{11}\times(-32)x^{5} = 32\,\frac{11!}{5!\,6!}x^{5} =$$

$$x^{5}\times 32\,\frac{11\times \cancel{10}^{2}\times \cancel{9}^{3}\times \cancel{8}\times 7\times \cancel{6!}}{\cancel{5}\times\cancel{4}\times\cancel{3}\times\cancel{2}\times\cancel{6!}} = 32\times 11\times 6\times 7\times x^{5} = 14784\,x^{5}$$

اگر $$\boxed{1+x+x^{2}+x^{3}+x^{4}+\cdots = \frac{1}{1-x}}$$ 3

اگر $$\boxed{1+x+x^{2}+x^{3}+\cdots+x^{n} = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}}$$ 4

مثال: ضریب x^{15} را در عبارت زیر بدست آورید.

$$(x^{2}+x^{3}+x^{4}+\cdots)^{4} = (x^{2}(1+x+x^{2}+\cdots))^{4} = x^{4}(1+x+x^{2}+\cdots)^{4} = x^{8}\left(\frac{1}{1-x}\right)^{4} =$$

$$x^{8}\times\frac{1}{(1-x)^{4}} = x^{8}(1-x)^{-4} =$$ طبق فرمول $(1+x)^{-n}$ حل می‌کنیم

$$x^{8}\left[C^{0}_{-4}(-x)^{0} + C^{1}_{-4}(-x)^{1} + C^{2}_{-4}(-x)^{2} + \cdots\right]$$ از داخل [ ] x^7 را بدست می‌آوریم که در x^8 ضرب می‌شود و x^{15} بدست می‌آید.

$$C^{7}_{-4}(-x)^{7}$$

$$x^{8}\left[C^{7}_{-4}(-x)^{7}\right] = -(-1)^{7}\, C^{7}_{10}\, x^{7}\times x^{8} = \frac{10!}{7!\times 3!}x^{15} = \frac{10\times\cancel{9}^{3}\times\cancel{8}^{4}\times\cancel{7!}}{\cancel{7!}\times\cancel{3}\times\cancel{2}}x^{15} = 120\,x^{15}$$

مثال: جمله عمومی سری فیبوناچی را بدست آورید:

جمله فیبوناچی ، $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

جمله a_n را از طریق جمع دو جمله قبلی بدست می آوریم

$$a_n - a_{n-1} - a_{n-2} = 0 \rightarrow r^2 - r - 1 = 0 \Rightarrow \Delta > 0$$

فصل یک: گزاره ها

گزاره: جمله ای است خبری که ارزش آن درست یا نادرست است.

ترکیب گزاره ها:

1. ترکیب فصلی: یا $\vee$ — p یا q

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

2. ترکیب عطفی: و $\wedge$ — p و q

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

3. ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$ — اگر p آنگاه q

p	q	$p \Rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

4. ترکیب دوشرطی $p \Leftrightarrow q$ — اگر p آنگاه q و برعکس

p	q	$p \Leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

5. نقیض یک گزاره

p	q	~ 1

p	$\sim p$
T	F
F	T

خواص گزاره ها:

1. خاصیت جابجایی نسبت به $\wedge , \vee$

$$p \vee q \equiv q \vee p$$
$$p \wedge q \equiv q \wedge p$$

2. خاصیت شرکت پذیری

$$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$$
$$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$$

3. خاصیت توزیع پذیری

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

4. قانون دمورگان.

$$\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

$$\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$

5. خودتوانی.

$$p \vee p \equiv p \qquad p \wedge p \equiv p$$

6. خاصیت همانی.

$$p \vee \sim p \equiv T$$

$$p \wedge \sim p \equiv F$$

$$p \vee T \equiv T$$

$$p \wedge F \equiv F$$

$$p \wedge T \equiv p$$

$$p \vee F \equiv p$$

p	T	$p \wedge T$
T	T	T
F	T	F

مثال: جدول درستی گزاره زیر را رسم کنید.

$$A = [(p \vee q) \Rightarrow r] \wedge \sim r$$

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \Rightarrow r$	$\sim r$	A
T	T	T	T	T	F	F
T	T	F	T	F	T	F
T	F	T	T	T	F	F
T	F	F	T	F	T	F
F	T	T	T	T	F	F
F	T	F	T	F	T	F
F	F	T	F	T	F	F
F	F	F	F	T	T	T

گزاره همیشه درست :

گزاره‌ای که در جدول درستی نتیجه آن همیشه T (درست) است .

هم ارزی های مهم :

$$p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$$

$$p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

مثال : بدون استفاده از جدول درستی نشان دهید که گزاره زیر همیشه درست است .

$$[p \wedge q \wedge ((p \wedge q) \Rightarrow r)] \Rightarrow r \equiv \sim [\underbrace{p \wedge q}_{s} \wedge (\sim (\underbrace{p \wedge q}_{s}) \vee r)] \vee r \equiv$$

$$\equiv [\sim s \vee (s \wedge \sim r)] \vee r \equiv [\underbrace{\cancel{(\sim s \vee s)}}_{T} \wedge (\sim s \vee \sim r)] \vee r \equiv [\sim s \vee \sim r] \vee r \equiv$$

$$\sim s \vee \underbrace{\cancel{(\sim r \vee r)}}_{T} \equiv \sim s \vee T \equiv T$$

مثال: بدون استفاده از جدول درستی نشان دهید گزاره زیر درست است.

$$(p\wedge(p\to q)\wedge(q\to r))\to r \equiv$$

$$\sim(p\wedge(\sim p\vee q)\wedge(\sim q\vee r))\vee r \equiv (\underline{\sim p}\vee(\underline{p\wedge\sim q})\vee(\underline{q\wedge\sim r}))\vee \underline{r}$$

$$(\sim p\vee(p\wedge\sim q))\vee(r\vee(q\wedge\sim r)) \equiv (\underbrace{\cancel{(\sim p\vee p)}}_{T}\wedge(\sim p\vee\sim q))\vee((r\vee q)\wedge\underbrace{\cancel{(r\vee\sim r)}}_{T}) \equiv$$

$$(\underbrace{\cancel{T\wedge(\sim p\vee\sim q)}}_{(\sim p\vee\sim q)})\vee(\underbrace{\cancel{(r\vee q)\wedge T}}_{(r\vee q)}) \equiv (\sim p\vee\sim q)\vee(r\vee q) \equiv$$

$$(\sim p\vee r)\vee\underbrace{\cancel{(\sim q\vee q)}}_{T} \equiv T$$

استنتاج:

عبارت $P_1, P_2, \dots, P_n \vdash q$ که استنتاج منطقی می‌گویند هرگاه عبارت $(P_1\wedge P_2\wedge\dots\wedge P_n)\to q$ گزاره همیشه درست باشد

بنابراین

استنتاج‌های مهم:

قیاس استثنایی: $p,\ p\to q \vdash q$

قیاس تعدی: $p\to q,\ q\to r \vdash p\to r$

قیاس عکس: $p\to q,\ \sim q \vdash \sim p$

قیاس عطفی: $p,\ q \vdash p\wedge q$

قیاس فصلی: $p \vdash p\vee q$

مثال: استدلالهای زیر را تحلیل کرده و نشان دهید که معتبر هستند.

1. اگر ماشین تازه‌ای بخرم، زمستان قادر خواهم بود که به مشهد بروم. چون زمستان به مشهد نمی‌روم پس ماشین تازه‌ای نخواهم خرید.

p q $\sim q$ $\sim p$

$$p \to q, \sim q \vdash \sim p$$

طبق قیاس عکس معتبر است.

2. اگر کاری پیدا و سخت کار کنم ترقی خواهم کرد. من ترقی نکردم پس یا کاری پیدا نکردم و یا سخت کار نکردم.

p q r $\sim r$ $\sim p$ $\sim q$

$$\underbrace{(p \wedge q)}_{s} \to r, \sim r \vdash \underbrace{\sim p \vee \sim q}_{\sim s} \equiv s \to r, \sim r \vdash \sim s$$

طبق قیاس عکس معتبر است.

3. اگر علی در فرانسه زندگی نکند آنگاه نخواهد توانست فرانسوی صحبت کند. علی نمی‌تواند ماشین کادیلاک براند. اگر علی در فرانسه زندگی کند آنگاه وی دوچرخه سواری خواهد کرد. یا علی فرانسه صحبت می‌کند یا کادیلاک می‌راند. پس علی دوچرخه سواری می‌کند.

p q r s

$$\overset{q \to p}{\overline{\sim p \to \sim q}}, \sim r, p \to s, r \vee q \vdash s$$

$$\sim p \to \sim q \equiv \sim(\sim p \vee \sim q) \equiv p \vee \sim q \equiv \sim q \vee p \equiv q \to p$$

$$\underbrace{q \to p, p \to s}_{\text{قیاس تعدی}}, \sim r, r \vee q \vdash \qquad r \vee q \equiv \sim r \to q$$

$$q \to s, \underbrace{\sim r, \sim r \to q}_{\text{قیاس استثنایی}} \vdash$$

$$\underbrace{q \to s, q}_{\text{قیاس استثنایی}} \vdash$$

$$s$$

روابط:

رابطه چیست؟ مجموعه A و مجموعه B در نظر بگیرید. حاصلضرب دکارتی A در B زوج های مرتبی خواهد بود که عنصر اول آن عضو مجموعه آن و عنصر دوم آن عضوی از مجموعه B است. در این صورت زیر مجموعه ای از $A\times B$ را یک رابطه از A به B می نامند.

مثال:

$A=\{2,5,7\}$ و $B=\{1,2,3,4\}$ رابطه کوچکتر بودن را از A به B بنویسید.

$$R=\{(2,3),(2,4)\}$$

ماتریس روابط:

رابطه R را از A به B با یک ماتریس M ضرب در N که M تعداد اعضای مجموعه A، N تعداد اعضای مجموعه B می باشد. و درایه های این ماتریس صفر یا یک خواهد بود.

$$m_{ij}=\begin{cases}0 & (a_i,b_j)\notin R\\ 1 & (a_i,b_j)\in R\end{cases}$$

مثال:

$A=\{1,2,3\}$ و $B=\{a,b\}$ و رابطه $R=\{(1,a),(2,b),(3,a)\}$ است آن را بصورت ماتریس نمایش دهید.

$$MR=\begin{array}{c} \\ 1\\ 2\\ 3\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cc} a & b\end{array}\\ \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\end{array}$$

مجموعه نسبی:

اگر R یک رابطه از A به B باشد در آن صورت مجموعه نسبی x نسبت به R که با $R(x)$ نمایش داده می شود بصورت زیر تعریف می شود.

$$R(x)=\{y \mid y\in B,\ (x,y)\in R\}$$

مثال:

$A=\{1,2,3,4\}$ و R رابطه ای از A به A است

$$R=\{(1,1),(1,2),(1,4),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4)\}$$

مطلوب است مجموعه نسبی ۱ نسبت به R

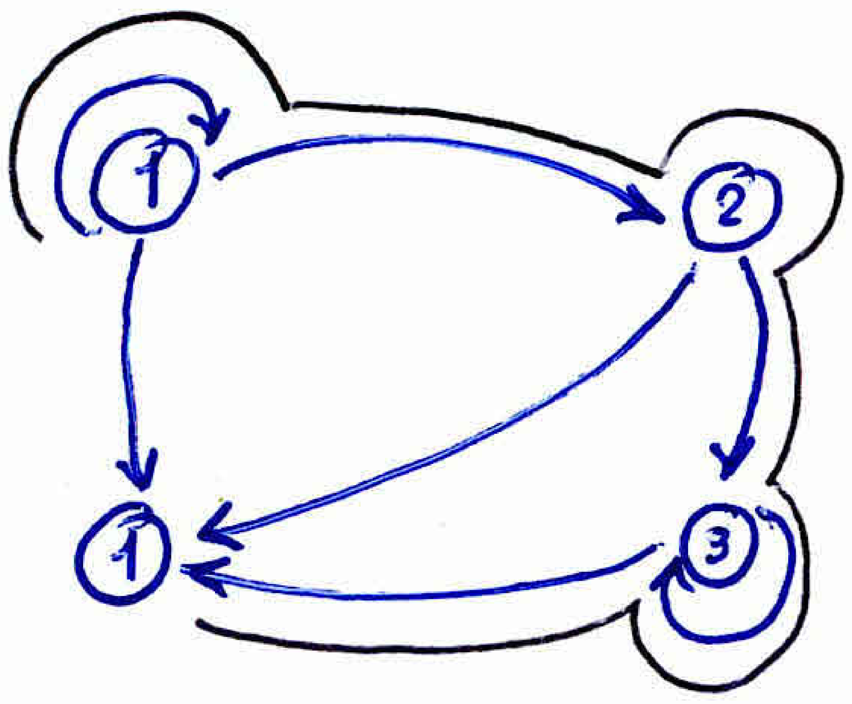
$R_{(1)} = \{1, 2, 4\}$ $R_{(2)} = \{3, 4\}$ $R_{(3)} = \{3, 4\}$

$R_{(4)} = \{\ \}$

نمایش یک رابطه با استفاده از گراف جهت دار:

مثال:

رابطه مسئله قبل



مسیر:

دنباله ای از گره هاست که از رأس A شروع می‌شود و به رأس B ختم می‌شود. طول مسیر برابر است با تعداد یال‌های پیموده شده

مثال: 1, 1, 2, 3, 3, 4

جواب: یک مسیر از 1 به 4

طول مسیر در مثال بالا: 5 تا

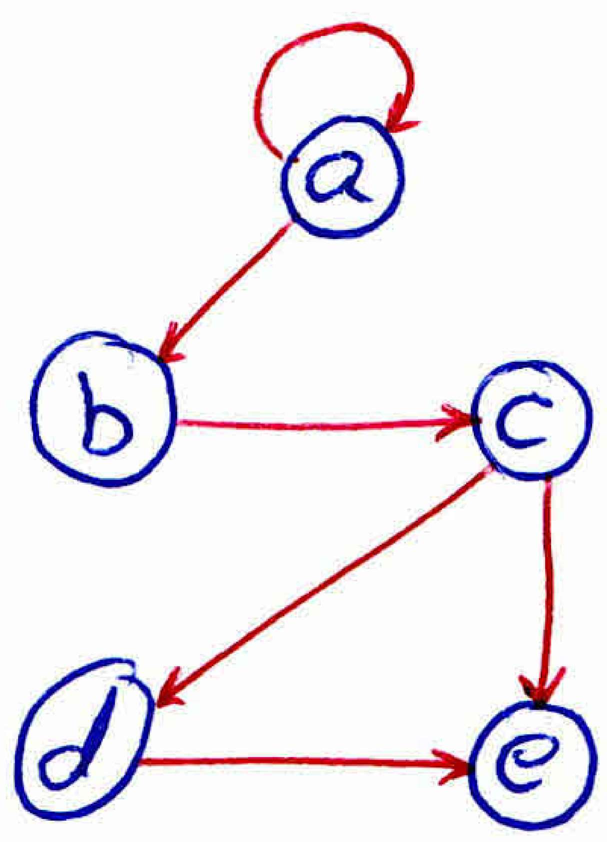
تعریف R^n: هرگاه مسیری از گره x به گره y با طول n وجود داشته باشد $(x, y) \in R^n$ خواهد بود.

تعریف R^∞: هرگاه از گره x به گره y مسیری وجود داشته باشد در این صورت $(x, y) \in R^\infty$ خواهد بود.

مثال : اگر A و R باشند
الف : گراف جهت دار آن را رسم کنید.

$A=\{a,b,c,d,e\}$

$R=\{(a,a),(a,b),(b,c),(c,d),(c,e),(d,e)\}$



ب : R^2 را بنویسید:

$R^2=\{(a,a),(a,b),(a,c),(b,d),(b,e),(c,e)\}$

ج : R^{85}

د : R^{3000}

ه : R^{∞}

$R^{\infty}=\{(a,a),(a,b),(a,c),(a,d),(a,e),(b,c),(b,d),(b,e),(c,e),(c,d),(d,e)\}$

خواص روابط :

۱. خاصیت بازتابی :
رابطه R را بازتابی گویند $\forall x\in A$ باشد رابطه xRx

$\forall x\in A \to xRx \to (x,x)\in R$

مساوی بودن اعداد یک خاصیت بازتابی است.

2. خاصیت ضد بازتابی :
رابطه R را ضد بازتابی گویند

$\forall x\in A \to x \not{R} x$

$(x,x)\notin R$

کوچکتر بودن اعداد یک خاصیت ضد بازتابی است.

3. خاصیت تقارن :
رابطه R در A را متقارن گویند اگر

$xRy \to yRx$

رابطه خواهر بودن متقارن نیست

برادر بودن متقارن نیست ← علی برادر نسرین است ولی نسرین برادر علی نیست پس متقارن نیست.

۴. خاصیت ضد تقارن:

$$xRy,\ yRx \to x=y$$

$$x \leqslant y,\ y \leqslant x \to x=y$$

$$x \geqslant y,\ y \geqslant x \to x=y$$

x مادر y , y مادر x $\to y=x$

$$(T \wedge F) \to F$$

$$F \longrightarrow F \equiv T$$

5- خاصیت تعدی:

$$xRy,\ yRz \to xRz$$

$$x<>y,\ y\cancel{<>}z \to x<>z$$

موازی بودن تعدی دارد.

عمود بودن تعدی ندارد.

رابطه هم ارزی: اگر رابطه R بازتابی، متقارن و متعدی باشد آنرا هم ارزی می نامند.

مثال: اگر A مجموعه اعداد صحیح غیر صفر باشد و برای هر $\overset{a}{A}$ و $\overset{b}{B}$ عضو مجموعه A $(a,b)\in A$ رابطه R بصورت زیر تعریف شده باشد

$$aRb \iff a|b \in Z$$

عاد کند — اعداد صحیح

$$\frac{b}{a}=k\in Z$$

خواص بازتابی، تقارن و تعدی را بررسی کنید.

الف بازتابی:

$$\forall x\in A \to x|x$$

$$\frac{x}{x}=1\in Z$$ پس بازتابی است

$$2|6 \to 6|2$$

$$\frac{6}{2}=3\in Z \qquad \frac{2}{6}=\frac{1}{3}\notin Z$$

ب- تقارن:

$$a|b \to b|a$$

$$\frac{b}{a}=k\in Z \qquad \frac{a}{b}=\frac{1}{k}\notin Z$$ پس متقارن نیست

ج تعدی:

$$a|b,\ b|c \to a|c \Rightarrow \frac{b}{a}=k_1\in Z \qquad \frac{c}{b}=k_2\in Z \qquad \frac{c}{a}=?$$

$$b=ak_1,\ c=bk_2 \Rightarrow c=ak_1k_2 \Rightarrow \frac{c}{a}=\frac{\cancel{a}k_1k_2}{\cancel{a}}=k_1k_2\in Z$$

پس تعدی است

عملیات روی روابط :

اگر R , S دو رابطه از A به B باشند آنگاه:

1- $\bar{R}$ (متمم R)　　$a\bar{R}b \iff aRb$

2- $R\cup S$　　$a(R\cup S)b \iff aRb \vee aSb$

3- $R\cap S$　　$a(R\cap S)b \iff aRb \wedge aSb$

4- R^{-1}　　$aRb \iff bR^{-1}a$

مثال: فرض کنید $A=\{1,2,3\}$ و روابط R , S بصورت زیر تعریف شده باشد. آنگاه $R\cup S$, $R\cap S$, $\bar{R}$, S^{-1} , $R-S$ را بنویسید.

$$M_S = \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & & & \\ 2 & & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \\ 3 & & & \end{array}$$

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$S=\{(1,1),(1,2),(2,2)\}$

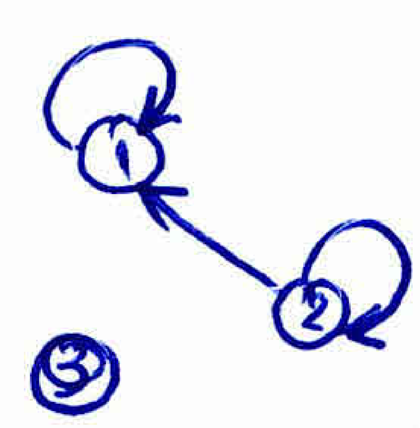
$R=\{(1,1),(1,2),(2,2),(2,3),(3,1),(3,3)\}$

$R\cup S=\{(1,1),(1,2),(2,2),(2,3),(3,1),(3,3)\}$

$R\cap S=\{(1,1),(1,2),(2,2)\}$

$\bar{R}=\{(1,3),(2,1),(3,2)\} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$S^{-1}=\{(1,1),(2,1),(2,2)\} \Longrightarrow$ گراف



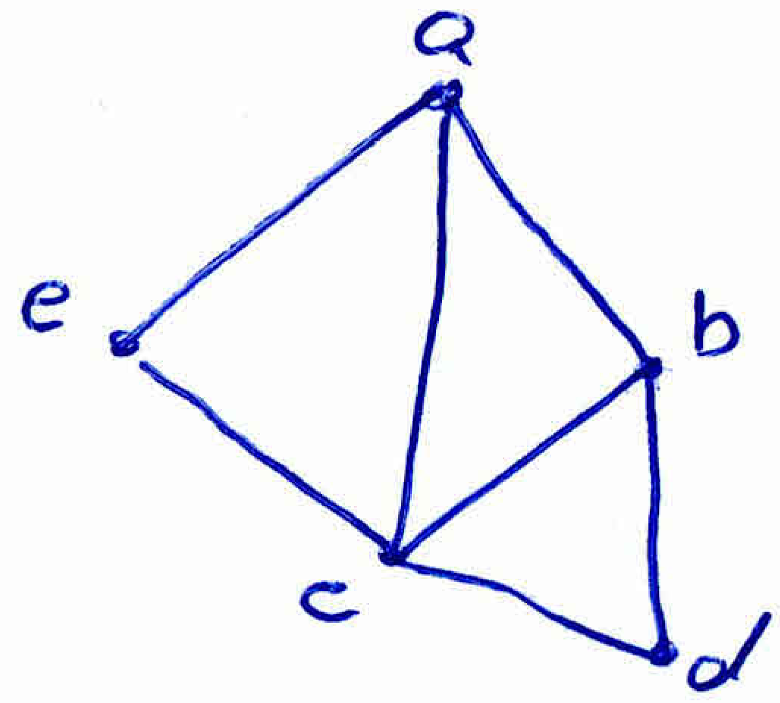
$R-S=\{(2,3),(3,1),(3,3)\}$

گراف :

تعریف : گراف G را که بصورت (V, E) نمایش می‌دهند و V مجموعه رئوس و E مجموعه یالها است.

$V = \{e, a, b, c, d\}$

$E = \{(e, c), (c, d), (c, a), (c, b), (e, a), (a, b), (b, d)\}$



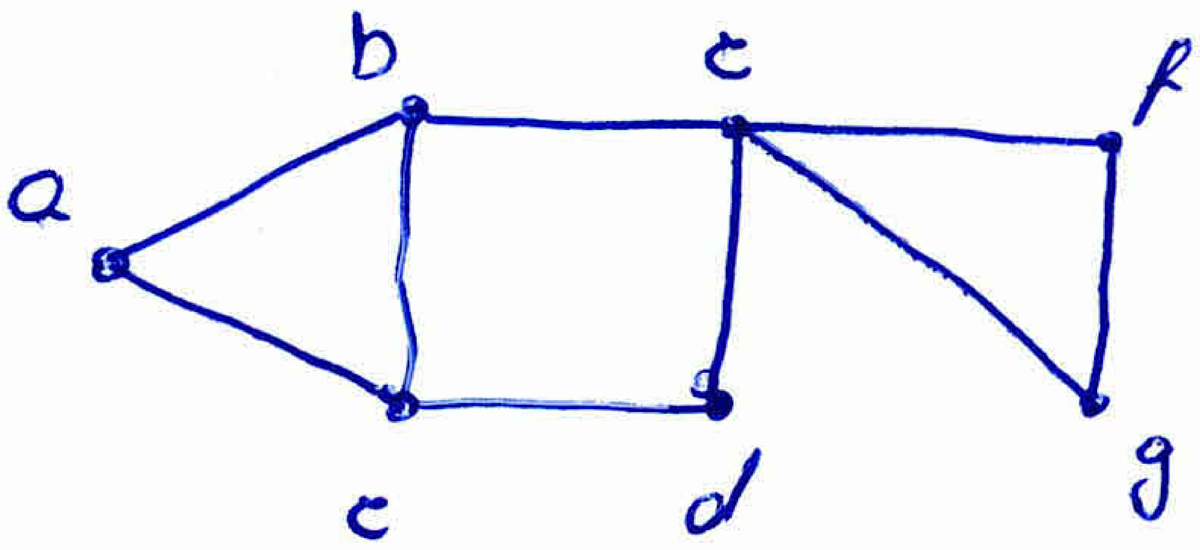
درجه رئوس : تعداد یالهای متصل به هر رأس :

$deg(a) = 3$ $deg(c) = 4$ $deg(d) = 2$

$deg(e) = 2$ $deg(b) = 3$

مسیر : دنباله‌ای از رئوس است که از یک رأس شروع و به رأس دیگر ختم می‌شود به طوریکه از هر یال فقط یک مرتبه عبور کنیم مسیر ساده می‌باشد.

تمرین : تمام مسیرهای ساده از b به f را بنویسید.



b, e, f طول مسیر : 2

b, e, g, f طول مسیر : 3

b, c, d, e, f 4 "

b, c, d, e, g, f 5 "

b, a, c, d, e, f 5 "

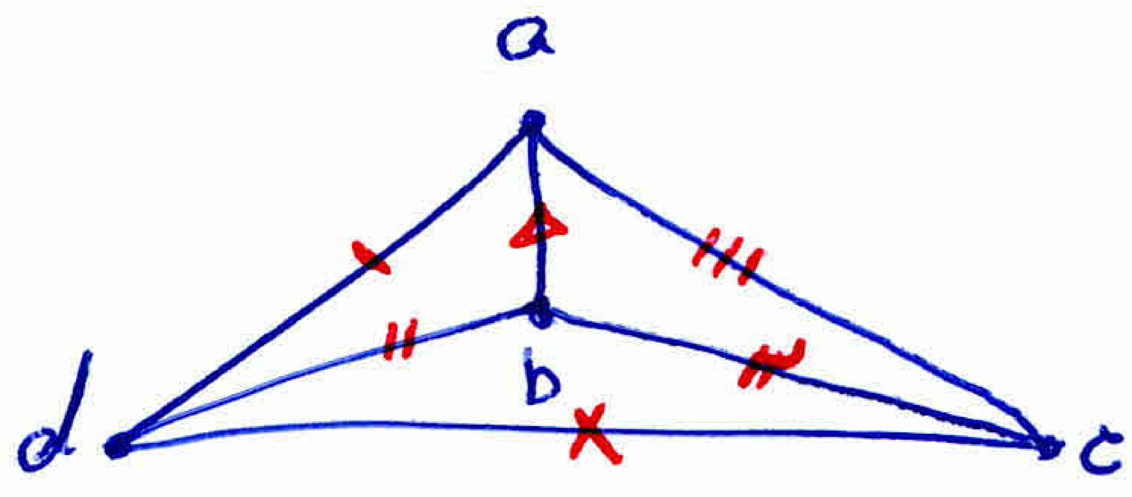
b, a, c, d, e, g, f 6 "

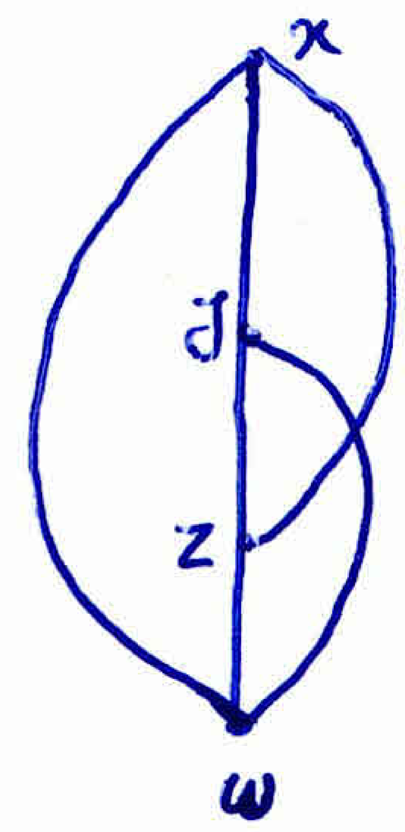
b, a, c, b, e, f 5 "

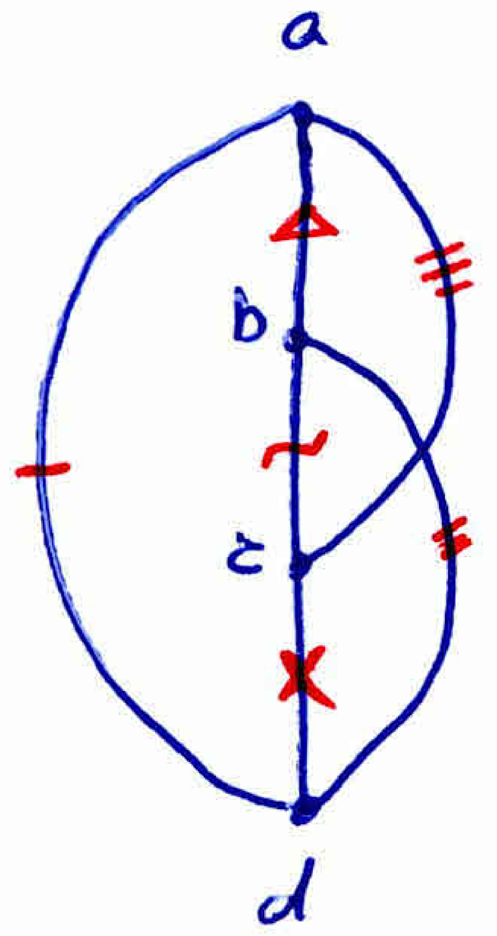
b, a, c, b, e, g, f 6 "

ایزومورفیک : (یک ریختی)

G_1 و G_2 را یکریختی می‌نامند هرگاه، یک تناظر یک به یک بین دو گراف باشد.





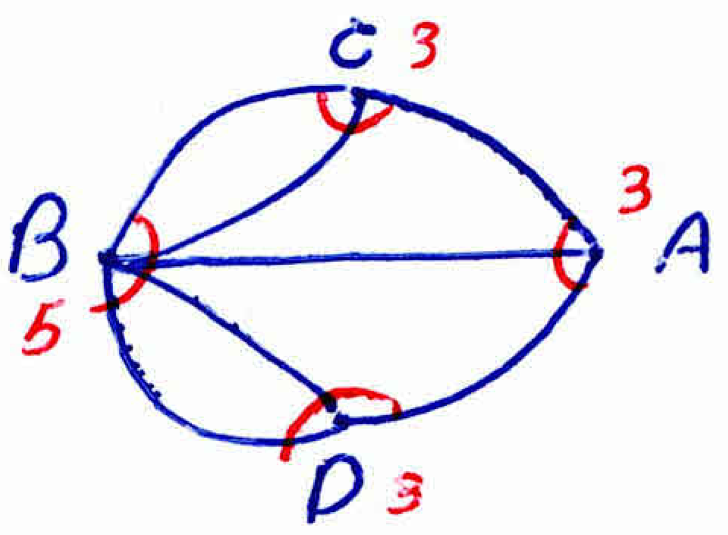


تعداد رئوس و تعداد یالها با هم برابر است

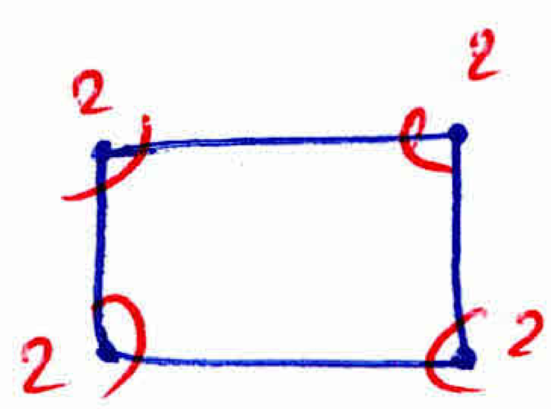
تناظر بین درجات رئوس دو گراف وجود دارد.

گراف اویلری: گرافی است که در آن دور اویلری وجود دارد یعنی می‌توان مسیری نوشت که رأس شروع و پایان آن یکسان و از تمام یالها فقط یک بار عبور کرد.

قضیه یک اویلر: گرافی اویلری است که درجه تمامی رئوس آن زوج باشد



غیر اویلری

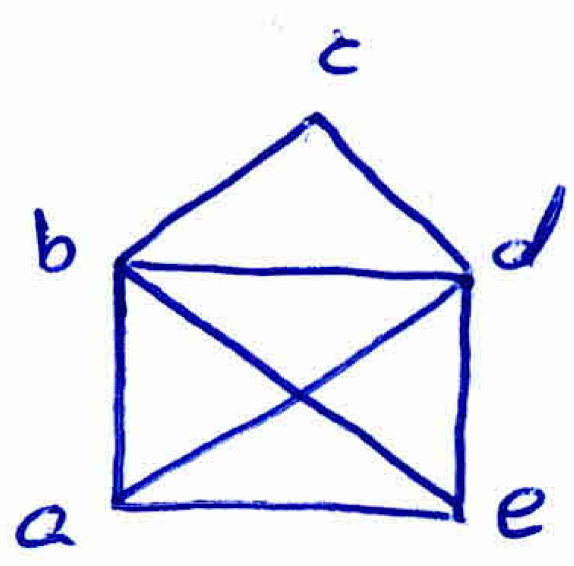


گراف اویلری

گراف نیمه اویلری: گرافی را گویند که بتوان یک مسیر اویلری نوشت مسیری است که از یک رأس شروع و به رأس آخر ختم می‌شود و از تمامی یالها فقط یک بار عبور می‌کنیم.

قضیه شماره دو اویلر: اگر درجه دو رأس از گراف فرد و بقیه زوج باشد گراف نیمه اویلری است.

a, b, d, c, , b, d,



گراف همیلتونی :

گرافی را همیلتونی می‌نامند که بتوان یک دور همیلتونی در آن نوشت یعنی دوری که از یک رأس شروع شده و به همان رأس ختم می‌شود.
و از هر رأس فقط یک مرتبه عبور می‌کنیم.