بسم الله الرحمن الرحيم

شبیه سازی کامپیوتری

منابع:

۱- شبیه سازی سیستمهای گسسته - پیشامد ، جری بنکس و جان کارسن ، ترجمه دکتر هاشم محلوجی ، موسسه انتشارات علمی دانشگاه صنعتی شریف.

۲- آموزش شبیه‌سازی عملیات با Arena، شهروز انتظامی و عبدالوحید خراسانی، انتشارات ناقوس.

عنوان مطالب:

- ✓مقدمه ای بر شبیه سازی
- ✓مثالهایی از شبیه سازی
- ✓شبیه سازی گسسته پیشامد- اصول کلی و ....
- ✓مدلهای آماری در شبیه سازی
- ✓مدلهای صف
- ✓سیستم های موجودی
- ✓تولید اعداد تصادفی

ارزیابی

میان ترم	۵ نمره
حل تمرین و پروژه	۴ نمره
پایان ترم	۱۱ نمره

فصل اول

مقدمه ای بر شبیه سازی

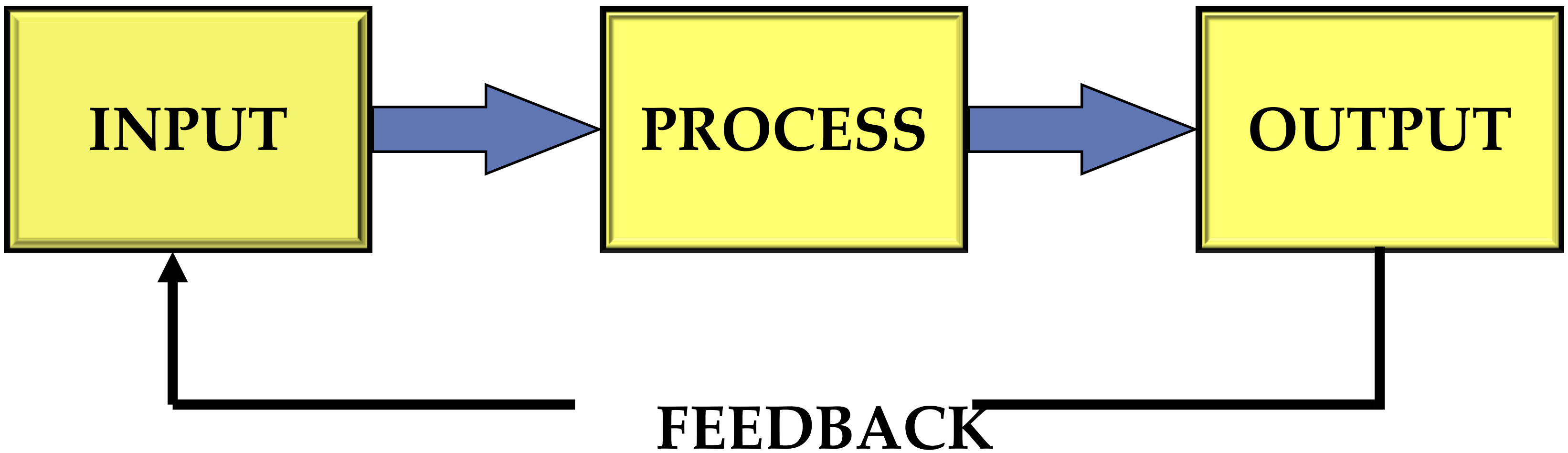
تعریف سیستم

یک سیستم گروهی است از اشیا که در راستای تحقق مقصودی معین در چارچوب روابط یا وابستگی‌های متقابل، به یکدیگر پیوسته هستند.

محیط سیستم:

عواملی خارج از سیستم که تحت کنترل نیستند، ولی می‌توانند بر عملکرد سیستم اثر بگذارند محیط سیستم خوانده می‌شود. یک سیستم معمولا تحت تأثیر تغییراتی است که در خارج سیستم اتفاق می‌افتد. این تغییرات اصطلاحا در محیط یا پیرامون سیستم اتفاق می‌افتند. در مدل سازی یک سیستم، تصمیم‌گیری نسبت به مرز بین سیستم و محیط سیستم از نکات ضروری و مهم است.

ارکان سیستم



اجزا سیستم

- نهاد یا موجودیت (Entity)

عنصری مورد توجه در سیستم است.

- مشخصه یا خصیصه (Attribute)

ویژگی موجودیت است و آنرا توصیف می کند.

- فعالیت (activity)

هر فعالیت نمایشگر دوره ای زمانی با طول مشخص است.

- وضعیت یا حالت سیستم(متغییرهای حالت): (State)

مجموعه متغیرهای لازم برای توصیف سیستم در هر لحظه از زمان با توجه به اهداف سیستم را گویند.

- واقعه یا پیشامد (Event)

رویدادی لحظه‌ای است که می‌تواند وضعیت سیستم را تغییر دهد.

مثال

سیستم	نهاد	خصیصه ها	فعالیت	پیشامد	متغیرهای حالت
بانک	مشتری	مانده حساب جاری	سپرده گذاری	ورود، ترک	تعداد خدمت دهنده های مشغول تعداد مشتریان منتظر
قطارسریع اسیر	مسافر	مبدا، مقصد	سفر	ورود به ایستگاه رسیدن به مقصد	تعداد مسافران منتظر در هر ایستگاه تعداد مسافران در سفر
تولید	ماشین ها	سرعت ظرفیت آهنگ از کار ماندگی	جوشکاری، برش	از کارماندگی	وضعیت ماشین ها (مشغول، بیکار، از کار افتاده)
ارتباطات	پیام ها	طول، مقصد	مخابره	ورود به مقصد	تعداد پیام های در انتظار مخابره
موجودی	انبار	ظرفیت	خارج سازی کالا از انبار	تقاضا	سطوح موجودی تقاضای پس افت

مشخصه های ثابت و متغیر

مشخصه‌ها توصیف کننده موجودیت‌ها هستند. مقدار یک مشخصه می‌تواند در طول زمان تغییر کند (مشخصه متغیر) و یا تغییر نکند (مشخصه ثابت). معمولا بیشتر علاقمند به مدل کردن مشخصه‌های متغیر هستیم.

مثال هایی از مشخصه‌های متغیر:

- تعداد قطعات در خط مونتاژ.
- وضعیت یک ماشین (که منجر به درصد استفاده از ماشین می‌شود).
- زمان تکمیل مونتاژ
- اینکه دکتر مشغول و یا بیکار است.

مثال هایی از مشخصه‌های ثابت:

- مسیر تولید یک محصول
- توالی مواردی که می‌بایست روی یک مریض با نوع خاصی از درمان صورت گیرد.

انواع پیشامد

- درونزا ← فعالیتها و پیشامدهایی که در درون سیستم رخ می دهد.
- برونزا ←فعالیتها و پیشامدهایی که درمحیط پیرامونی سیستم را تحت تاثیر قرار می دهد.

انواع سیستمها

- سیستم گسسته (Discrete System)

- سیستمی که متغیر یا متغیرهای حالت در آن تنها در مقاطع گسسته از زمان تغییر کند،مانند بانک.

- سیستم پیوسته (Continuous System)

- سیستمی که متغیر یا متغیرهای حالت در آن به صورت پیوسته با زمان تغییر کند، مثل سیستم اندازه گیری پشت سد.

مدلسازی سیستم

مدل‌سازی یک اقدام مهم در جهت ایجاد یک نمونه ساده شده از یک سیستم کامل با هدف پیش بینی معیارهای قابل اندازه گیری عملکرد سیستم می باشد.اصولا یک مدل به منظور گرفتن جنبه های رفتاری خاص از یک سیستم و کسب آگاهی و بینش از رفتار سیستم طراحی می شود.

- مدل دقیقا همانند سیستم واقعی نیست. بلکه تنها شامل تعدادی از جنبه‌های اساسی و کلیدی سیستم است که برای هدف مطالعه سیستم تأثیرگذار هستند. از این رو مدل خلاصه‌ای از سیستم مورد بررسی است. فرایند ساختن مدل برای افراد متخصص و تصمیم گیرندگان مختلف، روشی اصولی، صریح و موثر را فراهم می‌سازد تا بتوانند قضاوت و ادراک خود را درباره موضوع متمرکز سازند.

روش صحیح مدلسازی

- شروع با مدلی بسیار ساده
- تکمیل تدریجی مدل

به منظور ایجاد مدلی مفید از یک فرایند دو مرحله‌ای استفاده می‌شود.

- تجزیه: ساده کردن سیستم از طریق حذف جزئیات یا از طریق پذیرش فرضهایی است که روابط حاکم بر عوامل را مهارپذیر می کند.
  عمل ساده کردن عموما منجر به موارد زیر می شود:
  - تبدیل متغیرها به مقادیر ثابت
  - حذف یا ادغام متغیرها در یکدیگر
  - فرض خطی بودن روابط
  - افزودن محدودیت‌های بیشتر
- ترکیب

انواع مدلها

مدل فیزیکی

- یک شئ فیزیکی ساده شده با مقیاس کوچک شده می باشد. (مانند مدل هواپیما)

مدل تحلیلی یا ریاضی

- مجموعه ای از معادلات و ارتباطات میان متغیرهای ریاضیاتی می‌باشد. (مانند مجموعه ای از معادلات که توصیف کننده جریان کاری در خط تولید در کارخانه می‌باشد)

مدل کامپیوتری (شبیه‌سازی)

- شرح برنامه‌ای از سیستم می‌باشد.

شبیه سازی

- شبیه‌سازی، بیان رفتار پویای یک سیستم در حالت پایدار به واسطه حرکت آن از یک وضعیت به وضعیت دیگر بر اساس قواعد عملیاتی تعریف شده است. اصولا در شبیه‌سازی، از کامپیوتر برای ارزیابی عددی یک مدل استفاده شده و در آن داده‌ها به جهت تخمین ویژگی‌های موردنظر مدل جمع‌آوری می‌شوند.
- شبیه‌سازی کامپیوتری در عام‌ترین معنایش، فرایند طراحی مدلی ریاضی- منطقی از سیستم واقعی و آزمایش این مدل با کامپیوتر است. فرایند مدل‌سازی با استفاده از روابط ریاضی- منطقی و همچنین اجرای مدل به وسیله کامپیوتر به شبیه‌سازی کامپیوتر می‌گویند.

مزایای شبیه سازی

- پس از ساختن هر مدل می توان به منظور تحلیل طرحها یا خط مشیهای پیشنهادی، بارها آن را به کار گرفت.
- از روشهای شبیه سازی می توان در کمک تحلیل هر سیستم پیشنهادی استفاده کرد، هرچند که داده های ورودی تقریبی و ناقص باشند.
- معمولا دسترسی به داده های شبیه سازی بسیار کم هزینه تر از فراهم آوردن داده های مربوط به سیستم حقیقی است.
- در برخی موارد شبیه سازی تنها وسیله یافتن راه حل مسئله است.
- به کار بردن روش های شبیه سازی معمولا آسانتر از روشهای تحلیلی است.

معایب شبیه سازی

- مدلهای شبیه سازی مربوط به کامپیوترهای رقمی ممکن است پر هزینه باشند.
- معمولا، به اجراهای فراوانی در مورد هر مدل شبیه سازی نیازمندیم.
- گاهی شبیه سازی را در شرایطی به کار می برند که روشهای تحلیلی کافی به نظر می رسند.

مثالهایی از شبیه سازی

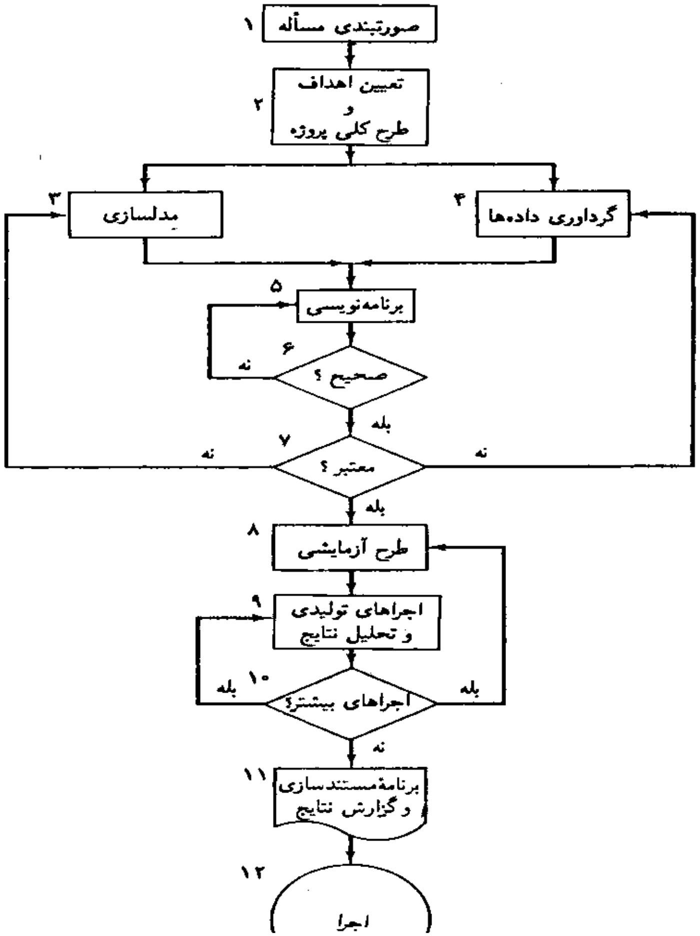
- سیستم پرواز جهت آموزش خلبانان
- سیستم ترافیک شهر تهران
- بررسی تصمیمات سیاسی و اجتماعی بر روی سیستم اقتصاد کشور
- کنترل تولید با هدف برقراری تعادل بین عرضه و تقاضا و حفظ بازار
- کاربردهای نظامی

شبیه‌سازی سیستم‌های گسسته پیشامد

Discrete Event System Simulation

- شبیه‌سازی سیستمی که متغیرهای حالت آن فقط و فقط در نقاط گسسته‌ای از زمان "در لحظه وقوع رویداد" اتفاق بیفتد را شبیه‌سازی سیستم‌های گسسته پیشامد می‌نامند. در حقیقت وضعیت چنین سیستمی در لحظه‌های گسسته ای از زمان به روز رسانی می‌شود.

فلوچارت مراحل شبیه سازی



کامپیوتر در شبیه سازی

کامپیوتر داده‌های موردنظر در ارتباط با موجودیتهای شبیه‌سازی شده را ثبت کرده و یک نمونه ترکیبی از داده‌های عملکردی سیستم را ایجاد می‌کند. سپس مفاهیم آماری برای تحلیل این نمونه داده‌ها در ارتباط با کمیتهای مختلفی چون موارد زیر مورد استفاده قرار می‌گیرد:

- زمانهای انتظار
- توان عملیاتی
- طول صف
- زمانهای پردازش
- میزان استفاده از منابع ....

نرم افزارهای شبیه سازی

پیچیده بودن شبیه‌سازی سیستم‌های واقعی، استفاده از نرم‌افزارهای کامپیوتری را باعث می‌شود. در اصل نرم‌افزار کامپیوتری چارچوبی را برای ساخت مدل فراهم می‌کنند که کار مدل‌ساز را نسبت به موارد زیر راحت می‌کنند:

- چگونگی پردازش ورودی‌ها
- عملیات ثبت داده‌ها
- گزارش‌های خروجی
- تسهیل در تولید داده‌های تصادفی
- جمع کردن داده‌ها در متغیرهای خروجی

نرم افزارهای شبیه سازی

Software	Supplier
Arena	Rockwell Software
AutoMod	Brooks-PRI Automation
Awe Sim	Frontstep, Inc.
Enterprise Dynamics	Incontrol Enterprise Dynamics
Extend	Imagine That, Inc.
Flexsim	Flexsim Software Products, Inc.
GPSS/H	Wolverine Software Corporation
Micro Saint	Micro Analysis and Design
ProModel (MedModel, ServiceModel)	ProModel Corporation
Quest	DELMIA Corporation
ShowFlow	Webb Systems Limited
SIGMA	Custom Simulation
Simprocess	CACI Products Company
Simul8	Visual8 Corporation
SLX	Wolverine Software Corporation
Visual Simulation Environment	Orca Computer, Inc.
Witness	Lanner Group, Inc.

تمرین

- در مورد سیستم های زیر، چند نهاد، خصیصه، فعالیت، پیشامد و متغیر حالت را نام ببرید:
- الف- فروشگاه مواد غذایی
- خط مونتاژ خودرو
- تعمیرگاه وسایل برقی26

فصل دوم

مثالهایی از شبیه‌سازی

گامهای اساسی شبیه سازی

- تعیین ویژگیهای هر یک از ورودیها و مدلسازی آنها در قالب توزیع های گسسته یا پیوسته
- ایجاد جدول شبیه سازی با p ورودی x_{ij} و به ازای هر تکرار یک خروجی yi

$i=1,\ldots,n$

$j=1,\ldots,p$

- تولید مقدار برای هر ورودی در هر تکرار و ارزیابی تابع محاسبه کننده پاسخ با استفاده از نمونه گیری از توزیع های تعیین شده در گام اول

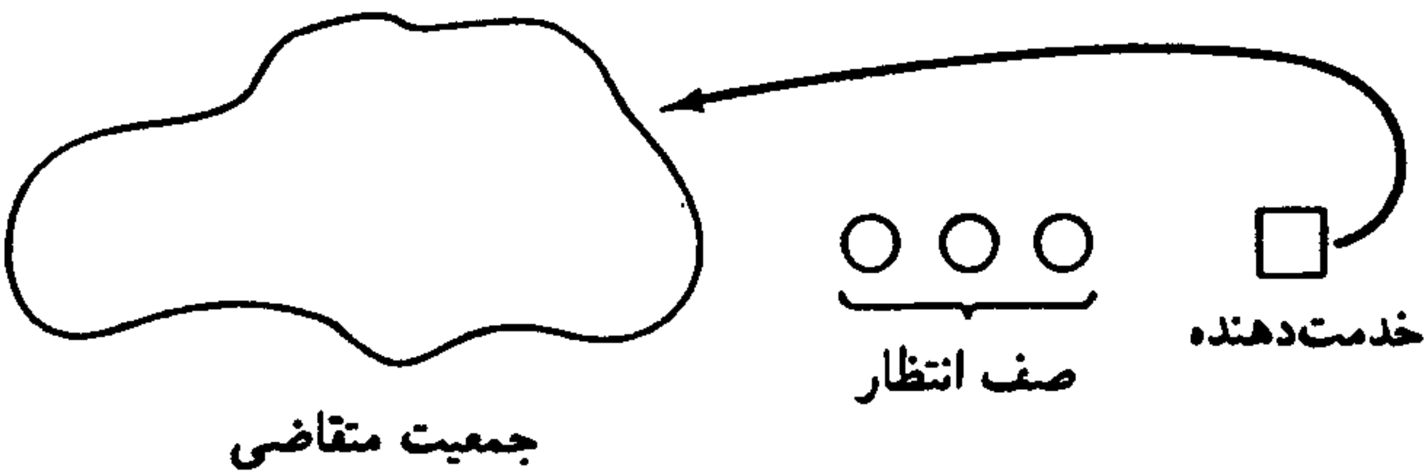
جدول ۲-۱ جدول شبیه‌سازی.

دفعات تکرار	ورودیها x_{i1}	x_{i2}	$\cdots$	x_{ij}	$\cdots$	x_{ip}	پاسخ (y_i)
۱							
۲							
۳							
$\vdots$							
n							

شبیه سازی سیستمهای صف (FIFO)

فرض ها:

- نا محدود بودن جمعیت متقاضی
- هر بار یک ورود و به صورت تصادفی رخ می دهد
- وارد شدگان به صف قطعا خدمت می گیرند
- مدت خدمت دهی تصادفی و در قالب توزیع احتمالی نامتغیر با زمان تعیین می شود
- ظرفیت سیستم نامحدود است
- رشد انفجارآمیز صورت نمی گیرد

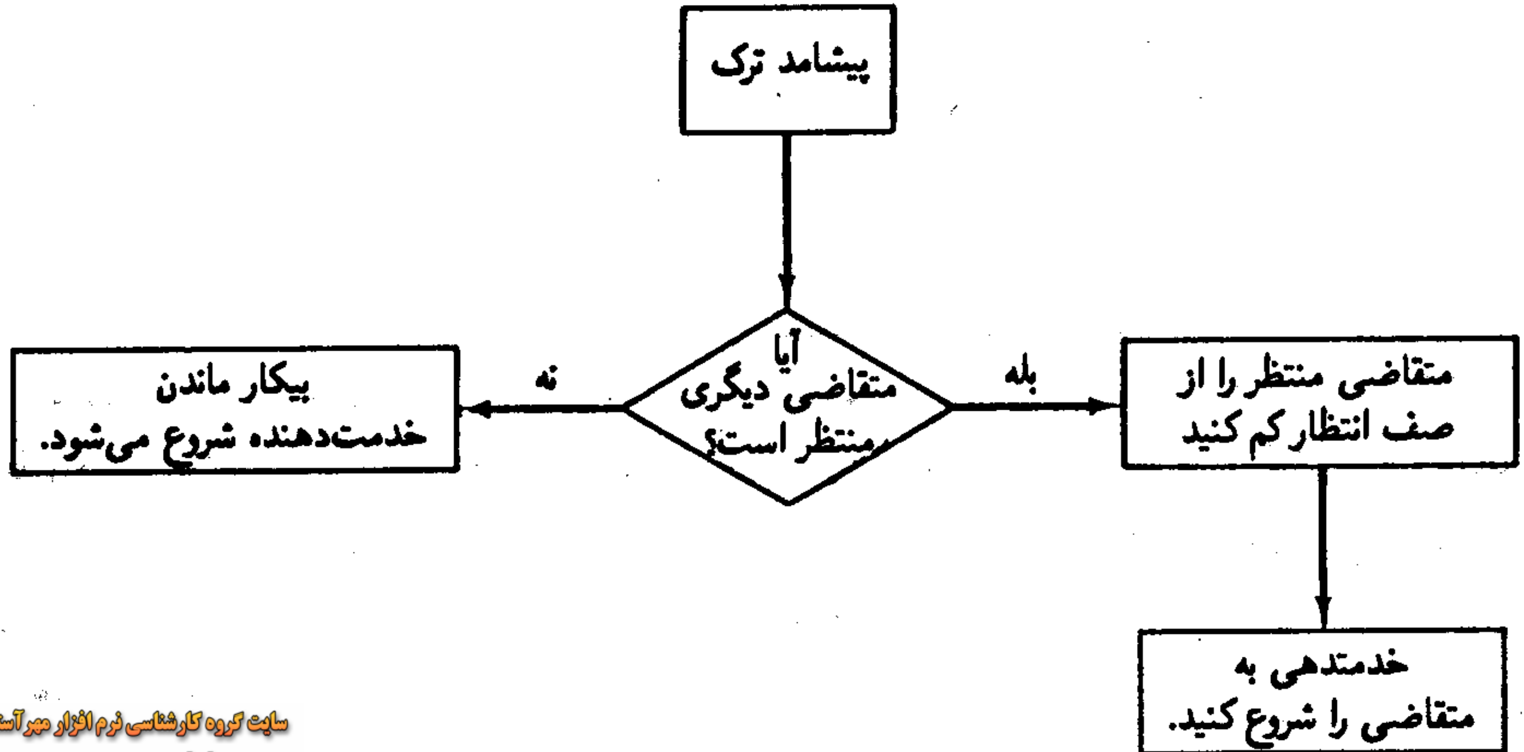


حالت سیستم : تعداد حاضران در سیستم

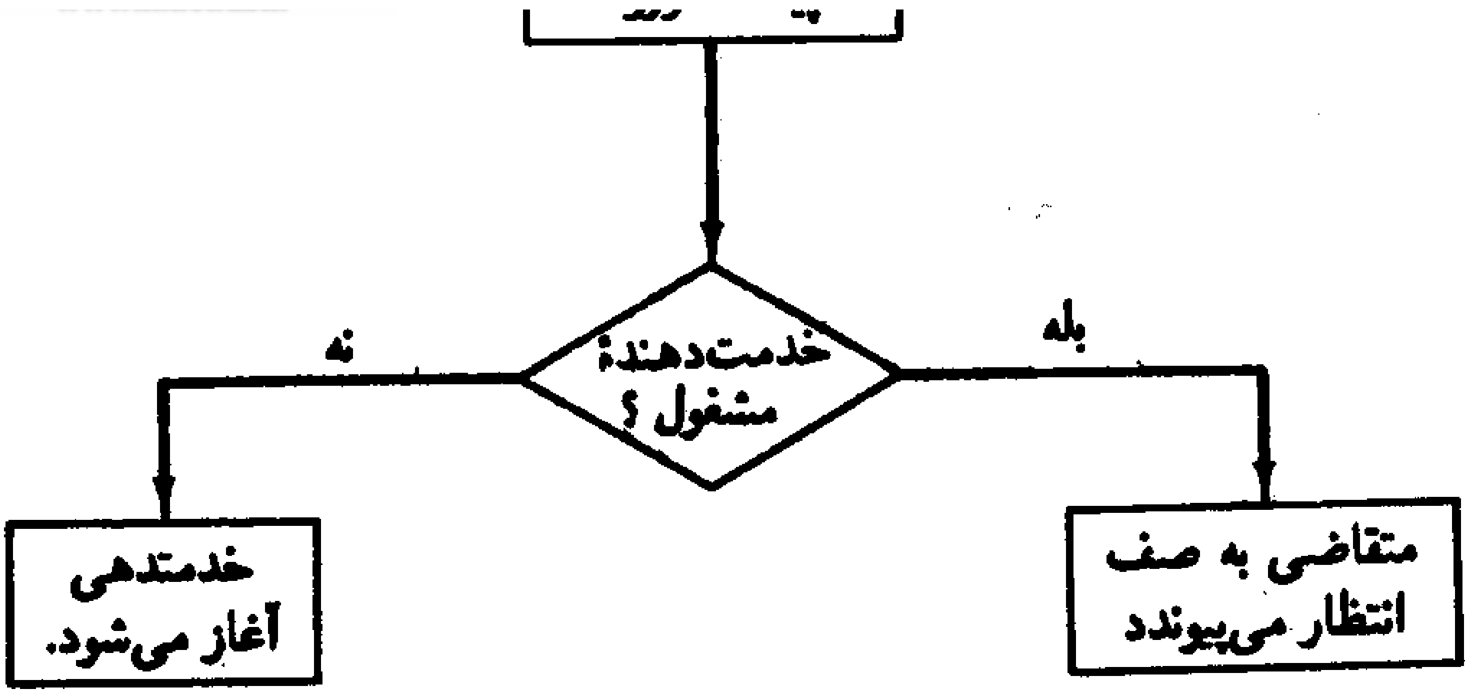
- وضعیت خدمت دهنده: که یا مشغول است و یا بیکار

پیشامد: مجموعه شرایطی که موجب تغییر لحظه ای در حالت سیستم می گردد: ۱- پیشامد ورود ۲- پیشامد ترک(خروج)

فلوچارت مراحل شبیه سازی زمانیکه خدمت دهی تازه تکمیل شده باشد. خدمت دهنده دو وضعیت دارد، مشغول یا بیکار



فلوچارت مراحل شبیه سازی مربوط به ورود متقاضی به سیستم



عملکرد سیستم صف به هنگام ورود یک متقاضی

		وضعیت صف	
		خالی	غیرخالی
وضعیت خدمتدهنده	مشغول	ورود به صف	ورود به صف
	بیکار	شروع خدمتدهی	غیرممکن

وضعیت خدمت دهنده پس از تکمیل فرایند خدمت دهی

		وضعیت صف	
		خالی	غیرخالی
وضعیت خدمتدهنده	مشغول	ناممکن	
	بیکار		ناممکن

- اگر صف خالی نباشد، متقاضی دیگری به خدمت دهنده می رسد و خدمت دهنده مشغول می ماند. اگر صف خالی باشد، پس از کامل کردن خدمتدهی، خدمت دهنده بیکار خواهد شد.(قسمت هاشور خورده).
- با کامل شدن هر خدمتی، اگر صف خالی باشد، امکان ندارد که خدمت دهنده مشغول بماند. همچنین پس از کامل شدن خدمتدهی، اگر صف خالی نباشد، امکان ندارد که خدمت دهنده بیکار بماند.

اعداد تصادفی

- اعداد تصادفی به صورت یکنواخت و تصادفی در فاصله (0و1) توزیع می شود.
- ارقام تصادفی به صورت یکنواخت روی مجموعه {9, ... , 1} توزیع می شود.
- اعداد تصادفی با چینش ارقام تصادفی به تعداد لازم و درج ممیز با توجه به دقت تعیین شده تعریف می گردد.
- اعداد *شبه تصادفی* همان اعداد تصادفی هستند که به روش از قبل تعیین شده، تولید می شود.

شبیه سازی سیستمهای صف، طبق فهرستی از پیشامدها در طول زمان انجام می شود. وقوع پیشامدها با گذشت زمان سنجیده می شود

جدول ۲-۲ مدتهای بین دو ورود و زمانهای ورود.

زمان ورود برحسب ساعت شبیه‌سازی	مدت بین دو ورود	مشتری
۰	-	۱
۲	۲	۲
۶	۴	۳
۷	۱	۴
۹	۲	۵
۱۵	۶	۶

شبیه سازی برای 6 مشتری که مدت زمان بین ورود آنها ارقام تصادفی 1-6 است.

جدول ۲-۳ مدتهای خدمتدهی.

مشتری	مدت خدمتدهی
۱	۲
۲	۱
۳	۳
۴	۲
۵	۱
۶	۴

مدت خدمت دهی از توزیع تصادفی ارقام 4-1 تولید شده است.

در شبیه سازی صف به مشتریان براساس ترتیب ورود خدمت دهی می شود.

جدول ۲-۴ جدول شبیه‌سازی با تأکید بر اینکه زمانها بر اساس ساعت شبیه‌سازی باشد.

زمان پایان خدمتدهی	مدت خدمتدهی	زمان شروع خدمت	زمان ورود	مشتری
۲	۲	۰	۰	۱
۳	۱	۲	۲	۲
۹	۳	۶	۶	۳
۱۱	۲	۹	۷	۴
۱۲	۱	۱۱	۹	۵
۱۹	۴	۱۵	۱۵	۶

شبیه سازی سیستم صف تک ورودی

جدول ۲-۵ ترتیب زمانی پیشامدها.

ساعت شبیه‌سازی	مشتری	نوع پیشامد
۰	۱	ورود
۲	۱	ترک
۲	۲	ورود
۳	۲	ترک
۶	۳	ورود
۷	۴	ورود
۹	۳	ترک
۹	۵	ورود
۱۱	۴	ترک
۱۲	۵	ترک
۱۵	۶	ورود
۱۹	۶	ترک

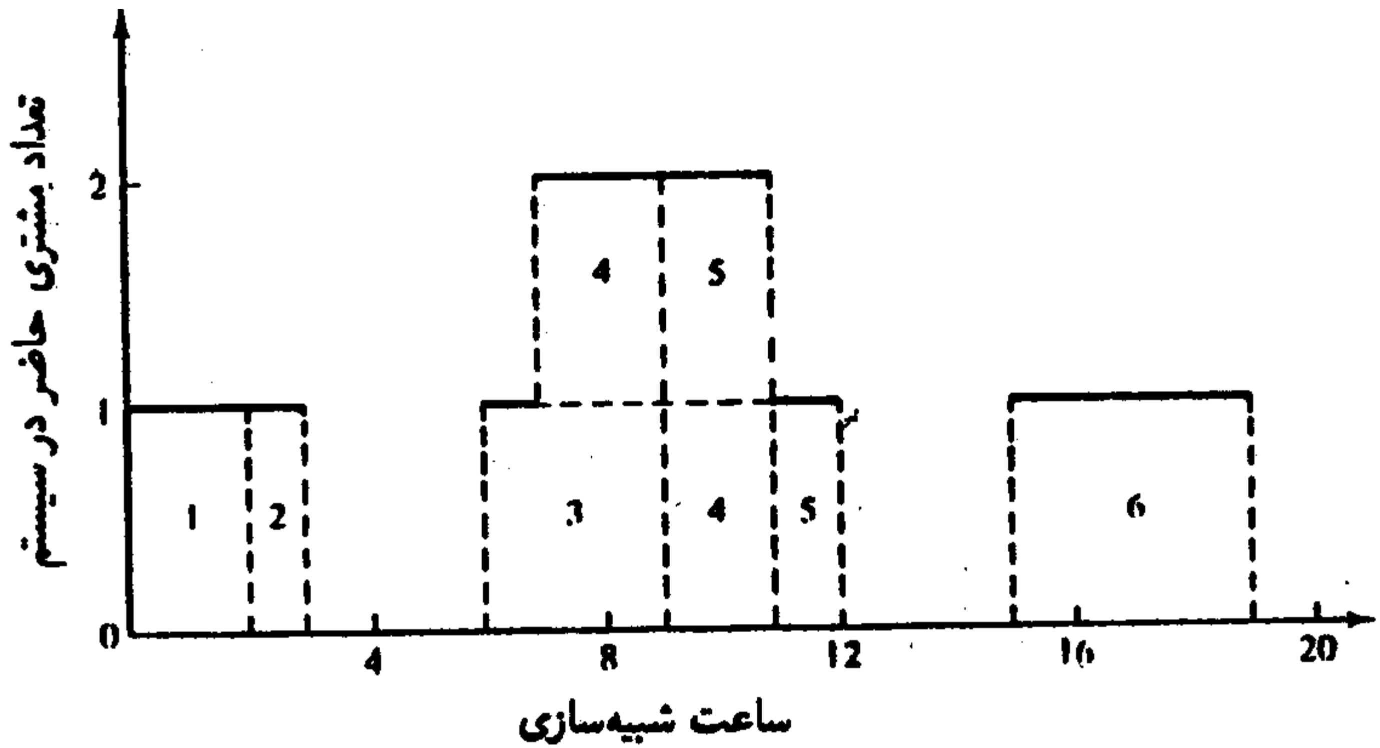
ترتیب جدول براساس
ساعت شبیه سازی است
نه شماره مشتری!

شبیه سازی سیستم صف تک ورودی

جدول ۲-۵ ترتیب زمانی پیشامدها.

ساعت شبیه‌سازی	مشتری	نوع پیشامد
۰	۱	ورود
۲	۱	ترک
۲	۲	ورود
۳	۲	ترک
۶	۳	ورود
۷	۴	ورود
۹	۳	ترک
۹	۵	ورود
۱۱	۴	ترک
۱۲	۵	ترک
۱۵	۶	ورود
۱۹	۶	ترک

حداکثر دو مشتری در هر لحظه در سیستم حاضرند.



مثال سیستم صف تک ورودی: فروشگاه مواد غذایی

فرضیات مسئله:

- فروشگاه یک صندوق دارد.
- مشتریان بطور تصادفی با فواصل زمانی ۸-۱ دقیقه و با احتمال یکسان وارد می شوند.
- مدت خدمت دهی از ۱ تا ۶ دقیقه و طبق احتمالات جدول ۲-۷ تغییر می کند.
- شبیه سازی برای خرید ۲۰ مشتری اجرا می شود. اولین مشتری در زمان صفر وارد می شود.

جدول ۲-۶ توزیع مدتهای بین دو ورود.

مدتهای بین ورود (دقیقه)	احتمال	احتمال تجمعی	تخصیص ارقام تصادفی
۱	۰٫۱۲۵	۰٫۱۲۵	۰۰۱-۱۲۵
۲	۰٫۱۲۵	۰٫۲۵۰	۱۲۶-۲۵۰
۳	۰٫۱۲۵	۰٫۳۷۵	۲۵۱-۳۷۵
۴	۰٫۱۲۵	۰٫۵۰۰	۳۷۶-۵۰۰
۵	۰٫۱۲۵	۰٫۶۲۵	۵۰۱-۶۲۵
۶	۰٫۱۲۵	۰٫۷۵۰	۶۲۶-۷۵۰
۷	۰٫۱۲۵	۰٫۸۷۵	۷۵۱-۸۷۵
۸	۰٫۱۲۵	۱٫۰۰۰	۸۷۶-۰۰۰

مثال سیستم صف تک ورودی: فروشگاه مواد غذایی

جدول ۲-۷ توزیع مدتهای خدمتدهی.

مدت خدمتدهی (دقیقه)	احتمال	احتمال تجمعی	تخصیص ارقام تصادفی
۱	۰٫۱۰	۰٫۱۰	۰۱-۱۰
۲	۰٫۲۰	۰٫۳۰	۱۱-۳۰
۳	۰٫۳۰	۰٫۶۰	۳۱-۶۰
۴	۰٫۲۵	۰٫۸۵	۶۱-۸۵
۵	۰٫۱۰	۰٫۹۵	۸۶-۹۵
۶	۰٫۰۵	۱٫۰۰	۹۶-۰۰

مثال سیستم صف تک ورودی: فروشگاه مواد غذایی

جدول ۲-۸ تعیین مدتهای بین دو ورود.

مشتری	ارقام تصادفی	مدت بین دو ورود (دقیقه)	مشتری	ارقام تصادفی	مدت بین دو ورود (دقیقه)
۱	-	-	۱۱	۱۰۹	۱
۲	۹۱۳	۸	۱۲	۰۹۳	۱
۳	۷۲۷	۶	۱۳	۶۰۷	۵
۴	۰۱۵	۱	۱۴	۷۳۸	۶
۵	۹۴۸	۸	۱۵	۳۵۹	۳
۶	۳۰۹	۳	۱۶	۸۸۸	۸
۷	۹۲۲	۸	۱۷	۱۰۶	۱
۸	۷۵۳	۷	۱۸	۲۱۲	۲
۹	۲۳۵	۲	۱۹	۴۹۳	۴
۱۰	۳۰۲	۳	۲۰	۵۳۵	۵

ارقام تصادفی سه رقمی با استفاده از جدول ارقام تصادفی تولید شده است.

مثال سیستم صف تک ورودی: فروشگاه مواد غذایی

جدول ۲-۹ مدتهای تولید شده برای خدمتدهی.

مشتری	ارقام تصادفی	مدت خدمتدهی (دقیقه)	مشتری	ارقام تصادفی	مدت خدمتدهی (دقیقه)
۱	۸۴	۴	۱۱	۳۲	۳
۲	۱۰	۱	۱۲	۹۴	۵
۳	۷۴	۴	۱۳	۷۹	۴
۴	۵۳	۳	۱۴	۰۵	۱
۵	۱۷	۲	۱۵	۷۹	۵
۶	۷۹	۴	۱۶	۸۴	۴
۷	۹۱	۵	۱۷	۵۲	۳
۸	۶۷	۴	۱۸	۵۵	۳
۹	۸۹	۵	۱۹	۳۰	۲
۱۰	۳۸	۳	۲۰	۵۰	۳

ارقام تصادفی دو رقمی با استفاده از جدول ارقام تصادفی تولید شده است.

مثال سیستم صف تک ورودی: فروشگاه مواد غذایی

جدول ۲-۱۰ جدول شبیه‌سازی برای مسألهٔ صف.

مشتری	مدت سپری شده از آخرین ورود (دقیقه)	زمان ورود	مدت خدمتدهی (دقیقه)	زمان شروع خدمت	مدت ماندن مشتری در صف (دقیقه)	زمان پایان خدمت	مدت ماندن مشتری در سیستم (دقیقه)	مدت بیکاری خدمت‌دهنده (دقیقه)
۱	-	۰	۴	۰	۰	۴	۴	۰
۲	۸	۸	۱	۸	۰	۹	۱	۴
۳	۶	۱۴	۴	۱۴	۰	۱۸	۴	۵
۴	۱	۱۵	۳	۱۸	۳	۲۱	۶	۰
۵	۸	۲۳	۲	۲۳	۰	۲۵	۲	۲
۶	۳	۲۶	۴	۲۶	۰	۳۰	۴	۱
۷	۸	۳۴	۵	۳۴	۰	۳۹	۵	۴
۸	۷	۴۱	۴	۴۱	۰	۴۵	۴	۲
۹	۲	۴۳	۵	۴۵	۲	۵۰	۷	۰
۱۰	۳	۴۶	۳	۵۰	۴	۵۳	۷	۰
۱۱	۱	۴۷	۳	۵۳	۶	۵۶	۹	۰
۱۲	۱	۴۸	۵	۵۶	۸	۶۱	۱۳	۰
۱۳	۵	۵۳	۴	۶۱	۸	۶۵	۱۲	۰
۱۴	۶	۵۹	۱	۶۵	۶	۶۶	۷	۰
۱۵	۳	۶۲	۵	۶۶	۴	۷۱	۹	۰
۱۶	۸	۷۰	۴	۷۱	۱	۷۵	۵	۰
۱۷	۱	۷۱	۳	۷۵	۴	۷۸	۷	۰
۱۸	۲	۷۳	۳	۷۸	۵	۸۱	۸	۰
۱۹	۴	۷۷	۲	۸۱	۴	۸۳	۶	۰
۲۰	۵	۸۲	۳	۸۳	۱	۸۶	۴	۰
	۸۲		۶۸		۵۶		۱۲۴	۱۸

پیشامدها:

ورود مشتری

خدمت دهی (ترک مشتری)

نتایج شبیه سازی سیستم صف تک ورودی فروشگاه مواد غذایی

مجموع تعداد مشتریان /مجموع مدت انتظار مشتریان در صف = متوسط مدت انتظار هر مشتری
$= 56 / 20 = 2.8$

مجموع تعداد مشتریان /مجموع تعداد مشتریان منتظر در صف = احتمال انتظار هر مشتری
$= 13 / 20 = 0.65$

مجموع مدت شبیه سازی /مجموع مدت بیکاری خدمت دهنده = احتمال بیکاری خدمت دهنده
$= 18/86 = 0.21$

مجموع تعداد مشتریان /مجموع مدت خدمت دهی = متوسط مدت خدمت دهی
$= 20/68 = 3.4$

امید ریاضی مدت خدمت دهی $= 1(0.10) + 2(0.20) + 3(0.30) + 4(0.25) + 5(0.10) + 6(0.05)$
$=3.2$

نتایج شبیه سازی سیستم صف تک ورودی فروشگاه مواد غذایی

تعداد ورودها منهای یک : مجموع تمام مدتهای بین دو ورود = متوسط مدت بین دو ورود
= 82/ 19 = 4.3

میانگین توزیع یکنواخت گسسته 1 تا 8 = (1 + 8) / 2
= 4.5

مجموع تعداد مشتریان منتظر/مجموع مدت انتظار مشتریان = متوسط مدت انتظار مشتریان منتظر
=56/13 =4.3

مجموع تعداد مشتریان : مجموع مدت حضور مشتریان = متوسط مدت حضور هر مشتری در سیستم
= 124 / 20 =6.2

متوسط مدت خدمت دهی+ متوسط مدت انتظار مشتریان منتظر= متوسط مدت حضور هرمشتری در سیستم
=2.8 +3.4 =6.2

مثال سیستم صف دو ورودی: اتو رستوران

فرضیات مسئله:

- دو نفر غذا سرو می کنند. (در صورت بیکار بودن هر دو هابیل به اولین مشتری سرویس می دهد.)
- مشتریان بطور تصادفی با احتمالات جدول ۲-۱۱ وارد می شوند.
- مدت خدمت دهی هابیل طبق احتمالات جدول ۲-۱۲ و خباز طبق احتمالات جدول ۲-۱۳ تغییر می کند.
- شبیه سازی برای مدت یک ساعت اجرا می شود. اولین مشتری در زمان صفر وارد می شود.

جدول ۲-۱۱ توزیع مدتهای بین ورود خودروها.

مدتهای بین دو ورود(دقیقه)	احتمال	احتمال تجمعی	تخصیص ارقام تصادفی
۱	۰٫۲۵	۰٫۲۵	۰۱-۲۵
۲	۰٫۴۰	۰٫۶۵	۲۶-۶۵
۳	۰٫۲۰	۰٫۸۵	۶۶-۸۵
۴	۰٫۱۵	۱٫۰۰	۸۶-۰۰

مثال سیستم صف دو ورودی: اتو رستوران

جدول ۲-۱۲ توزیع خدمتدهی هابیل.

مدت خدمتدهی (دقیقه)	احتمال	احتمال تجمعی	تخصیص ارقام تصادفی
۲	۰٫۳۰	۰٫۳۰	۰۱-۳۰
۳	۰٫۲۸	۰٫۵۸	۳۱-۵۸
۴	۰٫۲۵	۰٫۸۳	۵۹-۸۳
۵	۰٫۱۷	۱٫۰۰	۸۴-۰۰

مثال سیستم صف دو ورودی: اتو رستوران

جدول ۲-۱۳ توزیع خدمتدهی خباز.

مدت خدمتدهی (دقیقه)	احتمال	احتمال تجمعی	تخصیص ارقام تصادفی
۳	۰٫۳۵	۰٫۳۵	۰۱-۳۵
۴	۰٫۲۵	۰٫۶۰	۳۶-۶۰
۵	۰٫۲۰	۰٫۸۰	۶۱-۸۰
۶	۰٫۲۰	۱٫۰۰	۸۱-۰۰

مثال سیستم صف دو ورودی: اتو رستوران

ارقام تصادفی ورود و ارقام تصادفی خدمت دهی با استفاده از جدول ارقام تصادفی تولید شده است.

پیشامدها:

ورود مشتری
خدمت دهی توسط هابیل
خدمت دهی توسط خباز

جدول ۲-۱۴ جدول شبیه‌سازی برای مثال رستوران.

مشتری	ارقام تصادفی ورود	مدتهای بین دو ورود	زمانهای ورود برحسب ساعت شبیه‌سازی	ارقام تصادفی خدمتدهی	هابیل: زمانهای شروع خدمت	هابیل: مدتهای خدمتدهی	هابیل: زمانهای پایان خدمت	خباز: زمانهای شروع خدمت	خباز: مدتهای خدمتدهی	خباز: زمانهای پایان خدمت	مدت انتظار در صف
۱	–	–	۰	۹۵	۰	۵	۵				۰
۲	۲۶	۲	۲	۲۱				۲	۳	۵	۰
۳	۹۸	۴	۶	۵۱	۶	۳	۹				۰
۴	۹۰	۴	۱۰	۹۲	۱۰	۵	۱۵				۰
۵	۲۶	۲	۱۲	۸۹				۱۲	۶	۱۸	۰
۶	۴۲	۲	۱۴	۳۸	۱۵	۳	۱۸				۱
۷	۷۴	۳	۱۷	۱۳	۱۸	۲	۲۰				۱
۸	۸۰	۳	۲۰	۶۱	۲۰	۴	۲۴				۰
۹	۶۸	۳	۲۳	۵۰				۲۳	۴	۲۷	۰
۱۰	۲۲	۱	۲۴	۴۹	۲۴	۳	۲۷				۰
۱۱	۴۸	۲	۲۶	۳۹	۲۷	۳	۳۰				۱
۱۲	۳۴	۲	۲۸	۵۳				۲۸	۴	۳۲	۰
۱۳	۴۵	۲	۳۰	۸۸	۳۰	۵	۳۵				۰
۱۴	۲۴	۱	۳۱	۰۱				۳۲	۳	۳۵	۱
۱۵	۳۴	۲	۳۳	۸۱	۳۵	۴	۳۹				۲
۱۶	۶۳	۲	۳۵	۵۳				۳۵	۴	۳۹	۰
۱۷	۳۸	۲	۳۷	۸۱	۳۹	۴	۴۳				۲
۱۸	۸۰	۳	۴۰	۶۴				۴۰	۵	۴۵	۰
۱۹	۴۲	۲	۴۲	۰۱	۴۳	۲	۴۵				۱
۲۰	۵۶	۲	۴۴	۶۷	۴۵	۴	۴۹				۱
۲۱	۸۹	۴	۴۸	۰۱				۴۸	۳	۵۱	۰
۲۲	۱۸	۱	۴۹	۴۷	۴۹	۳	۵۲				۰
۲۳	۵۱	۲	۵۱	۷۵				۵۱	۵	۵۶	۰
۲۴	۷۱	۳	۵۴	۵۷	۵۴	۳	۵۷				۰
۲۵	۱۶	۱	۵۵	۸۷				۵۶	۶	۶۲	۱
۲۶	۹۲	۴	۵۹	۴۷	۵۹	۳	۶۲				۰
						۵۶			۴۳		۱۱

آمار حاصل از شبیه سازی

درصد مشغولیت هابیل $= \frac{56}{62} = 90\%$

درصد مشغولیت خباز $= \frac{43}{62} = 69\%$

درصد افراد انتظار کشیده $= \frac{9}{26} = 35\%$

مدت وسط زمان انتظار افراد در صف $= \frac{11}{9} = 1/22$

مساله پسرک روزنامه فروش

- فردی تعدادی روزنامه برای فروش در یک دوره می‌خرد. نکته قابل توجه در این مساله این است که روزنامه فروش در انتهای دوره روزنامه های باقیمانده را بایستی به قیمت کاغذ باطله بفروشد.

درآمد فروش روزنامه باطله + سود از دست رفته- هزینه خرید - درآمد فروش = سود

۲ ۷ ۱۳ ۲۰

فرضیات

توزیع احتمالی نوع روز

نوع روز	احتمال	احتمال تجمعی	تخصیص ارقام تصادفی
خوب	۰.۳۵	۰.۳۵	۰۱–۳۵
متوسط	۰.۴۵	۰.۸۰	۳۶–۸۰
بد	۰.۲۰	۱	۸۱–۰۰

توزیع روزنامه‌های مورد تقاضا

تقاضا	توزیع احتمال تقاضا		
	خوب	متوسط	بد
۴۰	۰.۰۳	۰.۱۰	۰.۴۲
۵۰	۰.۰۵	۰.۱۸	۰.۲۲
۶۰	۰.۱۵	۰.۴۰	۰.۱۶
۷۰	۰.۲۰	۰.۲۰	۰.۱۲
۸۰	۰.۳۵	۰.۰۸	۰.۰۶
۹۰	۰.۱۵	.۰۴	۰.۰۰
۱۰۰	۰.۰۷	۰.۰۰	۰.۰۰

فرضیات

جدول ۲-۱۷ تخصیص ارقام تصادفی برای روزنامه‌های مورد تقاضا.

تخصیص اعداد تصادفی			توزیع تجمعی			تقاضا
بد	متوسط	خوب	بد	متوسط	خوب	
۰۱-۴۴	۰۱-۱۰	۰۱-۰۳	۰٫۴۴	۰٫۱۰	۰٫۰۳	۴۰
۴۵-۶۶	۱۱-۲۸	۰۴-۰۸	۰٫۶۶	۰٫۲۸	۰٫۰۸	۵۰
۶۷-۸۲	۲۹-۶۸	۰۹-۲۳	۰٫۸۲	۰٫۶۸	۰٫۲۳	۶۰
۸۳-۹۴	۶۹-۸۸	۲۴-۴۳	۰٫۹۴	۰٫۸۸	۰٫۴۳	۷۰
۹۵-۰۰	۸۹-۹۶	۴۴-۷۸	۱٫۰۰	۰٫۹۶	۰٫۷۸	۸۰
	۹۷-۰۰	۷۹-۹۳	۱٫۰۰	۱٫۰۰	۰٫۹۳	۹۰
		۹۴-۰۰	۱٫۰۰	۱٫۰۰	۱٫۰۰	۱۰۰

خلاصه نتایج مسئله پسرک روزنامه فروش

فرض می کنیم که شبیه‌سازی را برای خرید ۷۰ روزنامه طی یک دوره ۲۰ روزه انجام می دهیم

سود = ۲۰*۶۰−۱۳*۷۰−۰+۲*۱۰

روز	ارقام تصادفی برای تعیین نوع روز	نوع روز	ارقام تصادفی برای تقاضا	تقاضا	درامد حاصل از فروش	سود از دست رفته به‌خاطر فزونی تقاضا	درامد ناشی از فروش به قیمت باطله	سود روزانه
۱	۹۴	بد	۸۰	۶۰	۱۲۰۰	–	۲۰	۳۱۰
۲	۷۷	متوسط	۲۰	۵۰	۱۰۰۰	–	۴۰	۱۳۰
۳	۴۹	متوسط	۱۵	۵۰	۱۰۰۰	–	۴۰	۱۳۰
۴	۴۵	متوسط	۸۸	۷۰	۱۴۰۰	–	–	۴۹۰
۵	۴۳	متوسط	۹۸	۹۰	۱۴۰۰	۱۴۰	–	۳۵۰
۶	۳۲	خوب	۶۵	۸۰	۱۴۰۰	۷۰	–	۴۲۰
۷	۴۹	متوسط	۸۶	۷۰	۱۴۰۰	–	–	۴۹۰
۸	۰۰	بد	۷۳	۶۰	۱۲۰۰	–	۲۰	۳۱۰
۹	۱۶	خوب	۲۴	۷۰	۱۴۰۰	–	–	۴۹۰
۱۰	۲۴	خوب	۶۰	۸۰	۱۴۰۰	۷۰	–	۴۲۰
۱۱	۳۱	خوب	۶۰	۸۰	۱۴۰۰	۷۰	–	۴۲۰
۱۲	۱۴	خوب	۲۹	۷۰	۱۴۰۰	–	–	۴۹۰
۱۳	۴۱	متوسط	۱۸	۵۰	۱۰۰۰	–	۴۰	۱۳۰
۱۴	۶۱	متوسط	۹۰	۸۰	۱۴۰۰	۷۰	–	۴۲۰
۱۵	۸۵	بد	۹۳	۷۰	۱۴۰۰	–	–	۴۹۰
۱۶	۰۸	خوب	۷۳	۸۰	۱۴۰۰	۷۰	–	۴۲۰
۱۷	۱۵	خوب	۲۱	۶۰	۱۲۰۰	–	۲۰	۳۱۰
۱۸	۹۷	بد	۴۵	۵۰	۱۰۰۰	–	۴۰	۱۳۰
۱۹	۵۲	متوسط	۷۶	۷۰	۱۴۰۰	–	–	۴۹۰
۲۰	۷۸	متوسط	۹۶	۸۰	۱۴۰۰	۷۰	–	۴۲۰
					۲۵۸۰۰	۵۶۰	۲۲۰	۷۲۶۰

سیاست بهینه

جدول فوق را برای تعداد خریدهای مختلف روزنامه در ابتدای روز اجرا می کنیم. جدولی که متوسط سود بیشتری را توسط شبیه سازی نشان دهد، مشخص کنندهٔ سیاست بهینه تهیه روزنامه در ابتدای روزاست.

مساله موجودی

فرض کنید در یک سیستم کنترل موجودی هر ۵ روز یک بار موجودی بررسی شده و در صورتی که مقدار موجودی کمتر از ۱۱ واحد باشد، سفارش صادر می گردد که موجودی به ۱۱ واحد برسد. سطح موجودی ابتدای دوره ۳ واحد و ورود یک سفارش ۸ واحدی در دو روز بعد دیده شده است. تقاضای روزانه و مهلت تحویل برای کالاهای انبار دارای توزیع احتمالی به شرح زیر است. وضعیت این سیستم را به کمک شبیه سازی بررسی نمایید.

تقاضا	احتمال	احتمال تجمعی	تخصیص ارقام تصادفی
۰	۰.۱	۰.۱	۰۱-۱۰
۱	۰.۲۵	۰.۳۵	۱۱-۳۵
۲	۰.۳۵	۰.۷	۳۶-۷۰
۳	۰.۲۱	۰.۹۱	۷۱-۹۱
۴	۰.۰۹	۱	۹۲-۰۰

مهلت تحویل	احتمال	احتمال تجمعی	تخصیص ارقام تصادفی
۱	۰.۶	۰.۶	۱-۶
۲	۰.۳	۰.۹	۷-۹
۳	۰.۱	۱	۰

خلاصه نتایج شبیه سازی مسئله موجودی

دور	روز	موجودی در ابتدای روز	ارقام تصادفی برای تقاضا	تقاضا	موجودی در انتهای روز	مقدار کمبود	مقدار سفارش	ارقام تصادفی برای مهلت تحویل	روزهای مانده تا ورود سفارش
۱	۱	۳	۲۴	۱	۲	۰	–	–	۱
	۲	۲	۳۵	۱	۱	۰	–	–	۰
	۳	۹	۶۵	۲	۷	۰	–	–	–
	۴	۷	۸۱	۳	۴	۰	–	–	–
	۵	۴	۵۴	۲	۲	۰	۹	۵	۱
۲	۱	۲	۰۳	۰	۲	۰	–	–	۰
	۲	۱۱	۸۷	۳	۸	۰	–	–	–
	۳	۸	۲۷	۱	۷	۰	–	–	–
	۴	۷	۷۳	۳	۴	۰	–	–	–
	۵	۴	۷۰	۲	۲	۰	۹	۰	۳
۳	۱	۲	۴۷	۲	۰	۰	–	–	۲
	۲	۰	۴۵	۲	۰	۲	–	–	۱
	۳	۰	۴۸	۲	۰	۳	–	–	۰
	۴	۹	۱۷	۱	۴	۰	–	–	–
	۵	۴	۰۹	۰	۴	۰	۷	۳	۱
۴	۱	۴	۴۲	۲	۲	۰	–	–	۰
	۲	۹	۸۷	۳	۶	۰	–	–	–
	۳	۶	۲۶	۱	۵	۰	–	–	–
	۴	۵	۳۶	۲	۳	۰	–	–	–
	۵	۳	۴۰	۲	۱	۰	۱۰	۴	۱
۵	۱	۱	۰۷	۰	۱	۰	–	–	۰
	۲	۱۱	۶۳	۲	۹	۰	–	–	–
	۳	۹	۱۹	۱	۸	۰	–	–	–
	۴	۸	۸۸	۳	۵	۰	–	–	–
	۵	۵	۹۴	۴	۱	۰	۱۰	۸	۲
					۸۷				

متوسط موجودی در انتهای روز

$$= \frac{87}{25} = 3.5$$

احتمال رخداد کمبود

$$\rightarrow {}^{2}\!/\underbrace{25}_{\text{روز}}$$

مساله پایایی

یک ماشین فرز بزرگ، سه برینگ مختلف دارد که در جریان کار دچار خرابی می‌شوند، با خرابی برینگ فرز از کار افتاده و تعمیرکار برای نصب برینگ تازه احضار می‌شود، مدت عمر هر برینگ و مدت تأخیر تعمیرکار در ورود به محل برای تعمیر برینگ ها متغیرهای تصادفی به شرح زیر می باشند:

عمر برینگ	احتمال	احتمال تجمعی	تخصیص ارقام تصادفی
۱۰۰۰	۰.۱	۰.۱	۰۱-۱۰
۱۱۰۰	۰.۱۳	۰.۲۳	۱۱-۲۳
۱۲۰۰	۲۵.	۰.۴۸	۲۴-۴۸
۱۳۰۰	۰.۱۳	۰.۶۱	۴۹-۶۱
۱۴۰۰	۰.۰۹	۰.۷	۶۲-۷۰
۱۵۰۰	۰.۱۲	۰.۸۲	۷۱-۸۲
۱۶۰۰	۰.۰۲	۰.۸۴	۸۳-۸۴
۱۷۰۰	۰.۰۶	۰.۹	۸۵-۹۰
۱۸۰۰	۰.۰۵	۰.۹۵	۹۱-۹۵
۱۹۰۰	۰.۰۵	۱	۹۶-۰۰

مدت تاخیر(دقیقه)	احتمال	احتمال تجمعی	تخصیص ارقام تصادفی
۵	۰.۶	۰.۶	۱-۶
۱۰	۰.۳	۰.۹	۷-۹
۱۵	۰.۱	۱	۰

مساله پایایی

مثال: ارزیابی پیشنهاد تعویض هر سه برینگ ماشین فرز به محض خرابی یکی از آنها

هدف مسئله: حداقل ساختن زمان تاخیر و هزینه تعمیر

فرضیات مسئله :

- تابع توزیع تجمعی عمر برینگها یکسان است (جدول ۲-۲۳)
- مدت تاخیر حضور تعمیرکار: متغیر تصادفی (جدول ۲-۲۳)
- هزینه هر دقیقه از کارافتادگی فرز: ۵
- هزینه هر ساعت دستمزد تعمیرکار: ۱۲
- زمان تعویض یک برینگ: ۲۰ دقیقه
- زمان تعویض همزمان دو برینگ: ۳۰ دقیقه
- زمان تعویض همزمان سه برینگ: ۴۰ دقیقه
- هزینه تهیه هر برینگ: ۱۶

شبیه سازی مسئله پایایی

حالت اول:

اقدام به دعوت از تعمیرکار برای تعویض هر برینگ به محض خراب شدن آن

هزینه ازکارافتادگی سیستم + هزینه برینگها + دستمزد تعمیرکار + هزینه تاخیر تعمیرکار = هزینه کل

اجرای شبیه سازی برای 20000 ساعت کار سیستم در حالت اول

شبیه سازی وضعیت فعلی(20000ساعت)

جدول ۲-۲۴ تعویض برینگ با استفاده از روش جاری.

	برینگ ۱					برینگ ۲					برینگ ۳				
	ارقام تصادفی	عمر (ساعت)	عمر تجمعی (ساعت)	ارقام تصادفی	تأخیر (دقیقه)	ارقام تصادفی	عمر (ساعت)	عمر تجمعی (ساعت)	ارقام تصادفی	تأخیر (دقیقه)	ارقام تصادفی	عمر (ساعت)	عمر تجمعی (ساعت)	ارقام تصادفی	تأخیر (دقیقه)
۱	۶۷	۱۴۰۰	۱۴۰۰	۲	۵	۷۱	۱۵۰۰	۱۵۰۰	۰	۱۵	۷۶	۱۵۰۰	۱۵۰۰	۰	۱۵
۲	۰۸	۱۰۰۰	۲۴۰۰	۳	۵	۴۳	۱۲۰۰	۲۷۰۰	۷	۱۰	۶۵	۱۴۰۰	۲۹۰۰	۲	۵
۳	۴۹	۱۳۰۰	۳۷۰۰	۱	۵	۸۶	۱۷۰۰	۴۴۰۰	۳	۵	۶۱	۱۴۰۰	۴۳۰۰	۷	۱۰
۴	۸۴	۱۶۰۰	۵۳۰۰	۷	۱۰	۹۳	۱۸۰۰	۶۲۰۰	۱	۵	۹۶	۱۹۰۰	۶۲۰۰	۱	۵
۵	۴۴	۱۲۰۰	۶۵۰۰	۸	۱۰	۸۱	۱۶۰۰	۷۸۰۰	۲	۵	۶۵	۱۴۰۰	۷۶۰۰	۳	۵
۶	۳۰	۱۲۰۰	۷۷۰۰	۱	۵	۴۴	۱۲۰۰	۹۰۰۰	۸	۱۰	۵۶	۱۳۰۰	۸۹۰۰	۳	۵
۷	۱۰	۱۰۰۰	۸۷۰۰	۲	۵	۱۹	۱۱۰۰	۱۰۱۰۰	۱	۵	۱۱	۱۱۰۰	۱۰۰۰۰	۶	۵
۸	۶۳	۱۴۰۰	۱۰۱۰۰	۸	۱۰	۵۱	۱۳۰۰	۱۱۴۰۰	۱	۵	۸۶	۱۷۰۰	۱۱۷۰۰	۳	۵
۹	۰۲	۱۰۰۰	۱۱۱۰۰	۳	۵	۴۵	۱۳۰۰	۱۲۷۰۰	۷	۱۰	۵۷	۱۳۰۰	۱۳۰۰۰	۱	۵
۱۰	۰۲	۱۰۰۰	۱۲۱۰۰	۸	۱۰	۱۲	۱۱۰۰	۱۳۸۰۰	۸	۵	۴۹	۱۳۰۰	۱۴۳۰۰	۴	۵
۱۱	۷۷	۱۵۰۰	۱۳۶۰۰	۷	۱۰	۴۸	۱۳۰۰	۱۵۱۰۰	۰	۱۵	۳۶	۱۲۰۰	۱۵۵۰۰	۸	۱۰
۱۲	۵۹	۱۳۰۰	۱۴۹۰۰	۵	۵	۰۹	۱۰۰۰	۱۶۱۰۰	۸	۱۰	۴۴	۱۲۰۰	۱۶۷۰۰	۲	۵
۱۳	۲۳	۱۱۰۰	۱۶۰۰۰	۵	۵	۴۴	۱۲۰۰	۱۷۳۰۰	۱	۵	۹۴	۱۸۰۰	۱۸۵۰۰	۱	۵
۱۴	۵۳	۱۳۰۰	۱۷۳۰۰	۹	۱۰	۴۶	۱۲۰۰	۱۸۵۰۰	۲	۵	۸۷	۱۵۰۰	۲۰۰۰۰	۷	۱۰
۱۵	۸۵	۱۷۰۰	۱۹۰۰۰	۶	۵	۴۰	۱۲۰۰	۱۹۷۰۰	۸	۱۰					
۱۶	۷۵	۱۵۰۰	۲۰۵۰۰	۴	۵	۵۲	۱۳۰۰	۲۱۰۰۰	۵	۵					
					۱۱۰					۱۲۵					۹۵

هزینه ها در وضعیت فعلی

شبیه سازی مسئله پایایی

هزینه تعمیرات درحالت اول:

تعداد برینگهای خراب $= 16 + 16 + 14 = 46$

هزینه برینگهای خراب $= 46 * 16 = 736$

هزینه تاخیر تعمیرکار $= (110 + 125 + 95) * 5 = 1650$

دستمزد تعمیرکار $= ((46 * 20) / 60) * 12 = 184$

هزینه مدت ازکارافتادگی سیستم $= 46 * 20 * 5 = 4600$

هزینه کل $= 736 + 1650 + 184 + 4600 = 7170$

شبیه سازی مسئله پایایی

حالت دوم:

اقدام به دعوت از تعمیرکار برای تعویض هر سه برینگ به محض خراب شدن یکی از آنها

هزینه ازکارافتادگی سیستم + هزینه برینگها + دستمزد تعمیرکار + هزینه تاخیر تعمیرکار = هزینه کل

اجرای شبیه سازی برای 20000 ساعت کار سیستم در حالت اول

جدول ۲-۲۵ تعویض برینگ با استفاده از روش پیشنهادی.

	عمر برینگ ۱ (ساعت)	عمر برینگ ۲ (ساعت)	عمر برینگ ۳ (ساعت)	اولین خرابی (ساعت)	عمر تجمعی (ساعت)	ارقام تصادفی	تأخیر (دقیقه)
۱	۱۴۰۰	۱۵۰۰	۱۵۰۰	۱۴۰۰	۱۴۰۰	۳	۵
۲	۱۰۰۰	۱۲۰۰	۱۴۰۰	۱۰۰۰	۲۴۰۰	۷	۱۰
۳	۱۳۰۰	۱۷۰۰	۱۴۰۰	۱۳۰۰	۳۷۰۰	۵	۵
۴	۱۶۰۰	۱۸۰۰	۱۹۰۰	۱۶۰۰	۵۳۰۰	۱	۵
۵	۱۲۰۰	۱۶۰۰	۱۴۰۰	۱۲۰۰	۶۵۰۰	۴	۵
۶	۱۲۰۰	۱۲۰۰	۱۳۰۰	۱۲۰۰	۷۷۰۰	۳	۵
۷	۱۰۰۰	۱۱۰۰	۱۱۰۰	۱۰۰۰	۸۷۰۰	۷	۱۰
۸	۱۴۰۰	۱۳۰۰	۱۷۰۰	۱۳۰۰	۱۰۰۰۰	۸	۱۰
۹	۱۰۰۰	۱۳۰۰	۱۳۰۰	۱۰۰۰	۱۱۰۰۰	۸	۱۰
۱۰	۱۰۰۰	۱۱۰۰	۱۳۰۰	۱۰۰۰	۱۲۰۰۰	۳	۵
۱۱	۱۵۰۰	۱۳۰۰	۱۲۰۰	۱۲۰۰	۱۳۲۰۰	۲	۵
۱۲	۱۳۰۰	۱۰۰۰	۱۲۰۰	۱۰۰۰	۱۴۲۰۰	۴	۵
۱۳	۱۱۰۰	۱۲۰۰	۱۸۰۰	۱۱۰۰	۱۵۳۰۰	۱	۵
۱۴	۱۳۰۰	۱۲۰۰	۱۵۰۰	۱۲۰۰	۱۶۵۰۰	۶	۵
۱۵	۱۷۰۰	۱۲۰۰	۱۴۰۰ (۶۳)	۱۲۰۰	۱۷۷۰۰	۲	۵
۱۶	۱۵۰۰	۱۳۰۰	۱۱۰۰ (۲۱)	۱۱۰۰	۱۸۸۰۰	۷	۱۰
۱۷	۱۷۰۰ (۸۵)	۱۳۰۰ (۵۳)	۱۱۰۰ (۲۳)	۱۱۰۰	۱۹۹۰۰	۰	۱۵
۱۸	۱۰۰۰ (۰۵)	۱۲۰۰ (۲۹)	۱۳۰۰ (۵۱)	۱۰۰۰	۲۰۹۰۰	۵	۵
							۱۲۵

تعویض هر سه برینگ در صورت رخداد یک خرابی

هزینه ها در وضعیت پیشنهادی

هزینه تعمیرات درحالت دوم:

تعداد برینگهای خراب = 18 * 3 = 54

هزینه برینگهای خراب = 54 * 16 = 864

هزینه تاخیر تعمیرکار = 125 * 5 = 625

دستمزد تعمیرکار = ((18 * 40) / 60) * 12 = 144

هزینه مدت ازکارافتادگی سیستم = 18 * 40 * 5 = 3600

هزینه کل = 864 + 625 + 144 + 3600 = 5233

شبیه سازی مسئله پایایی

در حالت دوم:

با صرفه جویی اقتصادی به میزان 1937 نتیجه مطلوبتر حاصل شد.

شبیه سازی بمباران هدف (اعداد تصادفی نرمال)

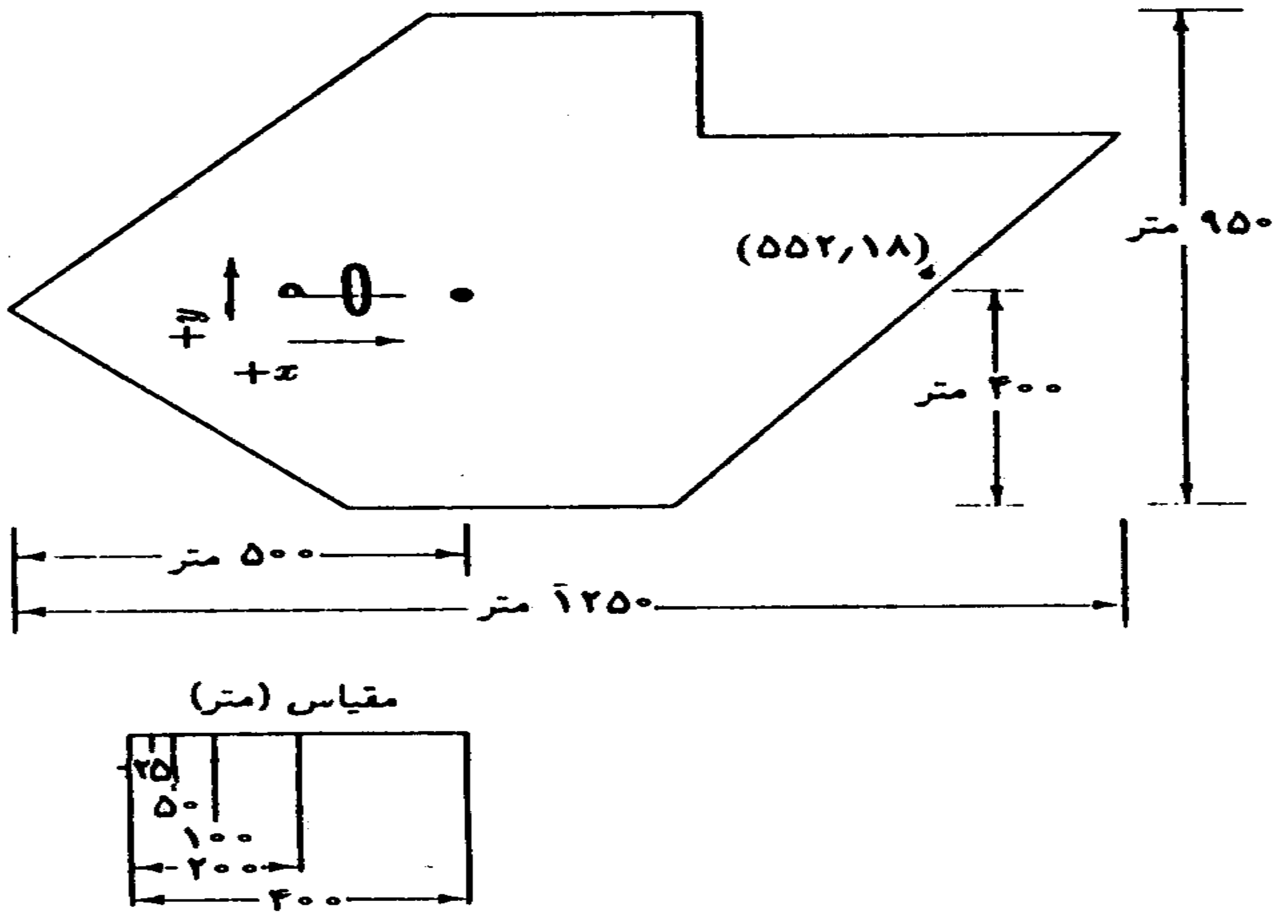
هدف مسئله:

نابودی زاغه مهمات در موقعیت مشخص شده روی نقشه توسط اسکادران بمب افکن و اصابت حداکثر تعداد بمب به هدف

فرضیات مسئله :

- پرواز هواپیماها در جهت افقی
- انحراف معیار پرتاب بمب در جهت افقی: ۶۰۰ متر
- انحراف معیار پرتاب بمب در جهت عمودی: ۳۰۰ متر
- تعداد هواپیماهای اسکادران: ۱۰ عدد
- هدف در مختصات (۰و۰) فرض می شود

شبیه سازی بمباران هدف (اعداد تصادفی نرمال)



شبیه سازی بمباران هدف (اعداد تصادفی نرمال)

اجرای شبیه سازی برای یک بار ماموریت اسکادران با استفاده از اعداد تصادفی نرمال

$$Z = \frac{x-\mu}{\sigma} \quad \Rightarrow \quad X = Z\sigma + \mu$$

$$Y = Z\sigma + \mu$$

هدف در مبدا مختصات:

$$X = Z\sigma$$

$$Y = Z\sigma$$

بنابراین:

$$X = 600Z_i$$

$$Y = 300Z_j$$

تولید مقدار Z ها بر اساس اعداد تصادفی با توزیع یکنواخت یا با استفاده از جدول اعداد تصادفی نرمال

شبیه سازی بمباران هدف (اعداد تصادفی نرمال)

جدول ۲-۲۶ شبیه‌سازی مأموریت بمباران.

بمب‌افکن	RNN_x	مختصهٔ x ($۶۰۰RNN_x$)	RNN_y	مختصهٔ y ($۳۰۰RNN_y$)	نتیجه[الف]
۱	−۰٫۸۴	−۵۰۴	۰٫۶۶	۱۹۸	به خطا رفته
۲	۱٫۰۳	۶۱۸	−۰٫۱۳	−۳۹	به خطا رفته
۳	۰٫۹۲	۵۵۲	۰٫۰۶	۱۸	اصابت کرده
۴	−۱٫۸۲	−۱۰۹۲	−۱٫۴۰	−۴۲۰	به خطا رفته
۵	−۰٫۱۶	−۹۶	۰٫۲۳	۶۹	اصابت کرده
۶	−۱٫۷۸	−۱۰۶۸	۱٫۳۳	۳۹۹	به خطا رفته
۷	۲٫۰۴	۱۲۲۴	۰٫۶۹	۲۰۷	به خطا رفته
۸	۱٫۰۸	۶۴۸	−۱٫۱۰	−۳۳۰	به خطا رفته
۹	−۱٫۵۰	−۹۰۰	−۰٫۷۲	−۲۱۶	به خطا رفته
۱۰	−۰٫۴۲	−۲۵۲	−۰٫۶۰	−۱۸۰	اصابت کرده

الف) ۳ بمب اصابت کرده، ۷ بمب به خطا رفته.

شبیه سازی سیستمهای موجودی (تقاضا در مهلت تحویل)

در سیستمهای واقعی: مهلت تحویل و تقاضا در مدت تحویل بصورت متغیر تصادفی

مثال:

شرکت فروشنده کاغذ روزنامه به صورت توپی

روش حل مسئله:

شبیه سازی دوره های فراوانی مهلت تحویل و ایجاد هیستوگرام نتایج

شبیه سازی سیستمهای موجودی (تقاضا در مهلت تحویل)

جدول توزیع احتمال تقاضای روزانه:

تقاضای روزانه (توپ)	۳	۴	۵	۶
احتمال	۰٫۲۰	۰٫۳۵	۰٫۳۰	۰٫۱۵

جدول توزیع متغیر تصادفی مهلت تحویل:

مدت تحویل (روز)	۱	۲	۳
احتمال	۰٫۳۶	۰٫۴۲	۰٫۲۲

تمرین

تمرین ۲-۱

۲-۲

۲-۵

۲-۹

۲-۱۰

فصل سوم

شبيه سازي سيستمهاي گسسته پيشامد

اصول کلی
و
زبانهای شبیه سازی کامپیوتری

- هدف:

بررسی روشهای مدلسازی سیستمهای پیچیده از طریق شبیه سازی سیستمهای گسسته پیشامد

- راهکار:

استفاده از زبانهای برنامه نویسی

- زبانهای برنامه نویسی:
  - زبانهای برنامه نویسی پردازش گرا (زبانهای خاص شبیه سازی مثل GPSS)
  - زبانهای برنامه نویسی زمان گرا (زبانهای همه منظوره مثل FORTRAN)

- مفاهیم شبیه سازی گسسته پیشامد:
  - سیستم
  - مدل
  - حالت سیستم
  - نهاد
  - ویژگی
  - مجموعه (فهرست ، صف یا زنجیره)
  - پیشامد (شرطی و اساسی)
  - فعالیت (انتظار نامشروط)
  - تاخیر (انتظار مشروط)
  - سیستمهای پویا
  - متغیر زمان (CLOCK)

بررسی مجدد مثال سیستم صف دو ورودی: اتو رستوران

- اجزای مدل شبیه سازی گسسته پیشامد:
  - حالت های سیستم:

$L_Q(t)$: تعداد خودروهای در حال انتظار در لحظه t :

$L_A(t)$: شاخص بیکار یا مشغول بودن هابیل در لحظه t :

$L_B(t)$: شاخص بیکار یا مشغول بودن خباز در لحظه t :

  - نهادها: مشتری ها و خدمت دهنده ها
  - پیشامدها: پیشامد ورود
    پیشامد خدمتدهی توسط هابیل
    پیشامد خدمتدهی توسط خباز
  - فعالیتها: مدت بین دو ورود (جدول ۲-۱۱)
    مدت خدمتدهی هابیل (جدول ۲-۱۲)
    مدت خدمتدهی خباز (جدول ۲-۱۳)
  - تاخیر: انتظار در صف برای گرفتن خدمت

بررسی مجدد مثال سیستم صف دو ورودی: اتو رستوران

سوالات مطرح در شبیه سازی:

- تاثیر هر پیشامد
- چگونگی تعریف پیشامدها
- پیشامدهای آغاز و پایان هر تاخیر
- تعریف سیستم در زمان صفر

تصویر سیستم: تصویر سیستم در هر لحظه (CLOCK=t) شامل اطلاعات سیستم در آن لحظه می باشد از قبیل:

- حالت سیستم در لحظه t
- لیست پیشامدهای آتی
- لیست فعالیتهای جاری و زمان پایان آن
- وضعیت نهادها و اعضای مجموعه ها
- آمار تجمعی و مقدار شمارشگرها

نمونه تصویر سیستم در زمان شبیه سازی t

ساعت	حالت سیستم	نهادها و ویژگیها	مجموعهٔ ۱	مجموعهٔ ۲	...	فهرست پیشامدهای آتی FEL	آمارهای تجمعی و شمارشگرها
t	$(x, y, z, \cdots)$					$(۳, t_1)$ — قرار است پیشامد نوع ۳ در زمان t_1 رخ دهد $(۱, t_2)$ — قرار است پیشامد نوع ۱ در زمان t_2 رخ دهد	
	$\vdots$					$\vdots$ $\vdots$	

لیست پیشامدهای آتی (FEL):

شامل کلیه پیشامدهای از پیش برنامه ریزی شده و زمانهای مربوط به آنها

با ترتیب زمان وقوع پیشامد

تصویر قبلی سیستم در زمان t

CLOCK	حالت سیستم	...	فهرست پیشامدهای آتی	...
t	(۵, ۱, ۶)		(۳, $t_۱$)ـ پیشامد نوع ۳ در زمان $t_۱$ رخ می‌دهد (۱, $t_۲$)ـ پیشامد نوع ۱ در زمان $t_۲$ رخ می‌دهد (۱, $t_۳$)ـ پیشامد نوع ۱ در زمان $t_۳$ رخ می‌دهد ⋮ ⋮ ⋮ (۲, t_n)ـ پیشامد نوع ۲ در زمان t_n رخ می‌دهد	

الگوریتم زمانبندی پیشامدها و جلوبری زمان:

۱- خروج پیشامد قریب الوقوع از FEL

۲- تنظیم CLOCK به زمان پیشامد قریب الوقوع

۳ - اجرای پیشامد قریب الوقوع و بروز رسانی حالت سیستم، ویژگی نهادها و اعضای مجموعه ها

۴ - تولید پیشامدهای آتی در صورت وجود و درج آنها در موقعیت صحیح FEL

۵ – بروز رسانی آمار تجمعی و شمارشگرها

تصویر جدید سیستم در زمان t_1

CLOCK	حالت سیستم	...	فهرست پیشامدهای آتی	...
t_1	(۵, ۱, ۵)		$(1, t_2)$- پیشامد نوع ۱ در زمان t_2 رخ می‌دهد. $(4, t^*)$-پیشامد نوع ۴ در زمان t^* رخ می‌دهد. $(1, t_3)$- پیشامد نوع ۱ در زمان t_3 رخ می‌دهد. ⋮ ⋮ ⋮ $(2, t_n)$-پیشامد نوع ۲ در زمان t_n رخ می‌دهد.	

خارج کردن پیشامدهاي قريب الوقوع از FEL و افزودن پيشامدهاي آتي به آن

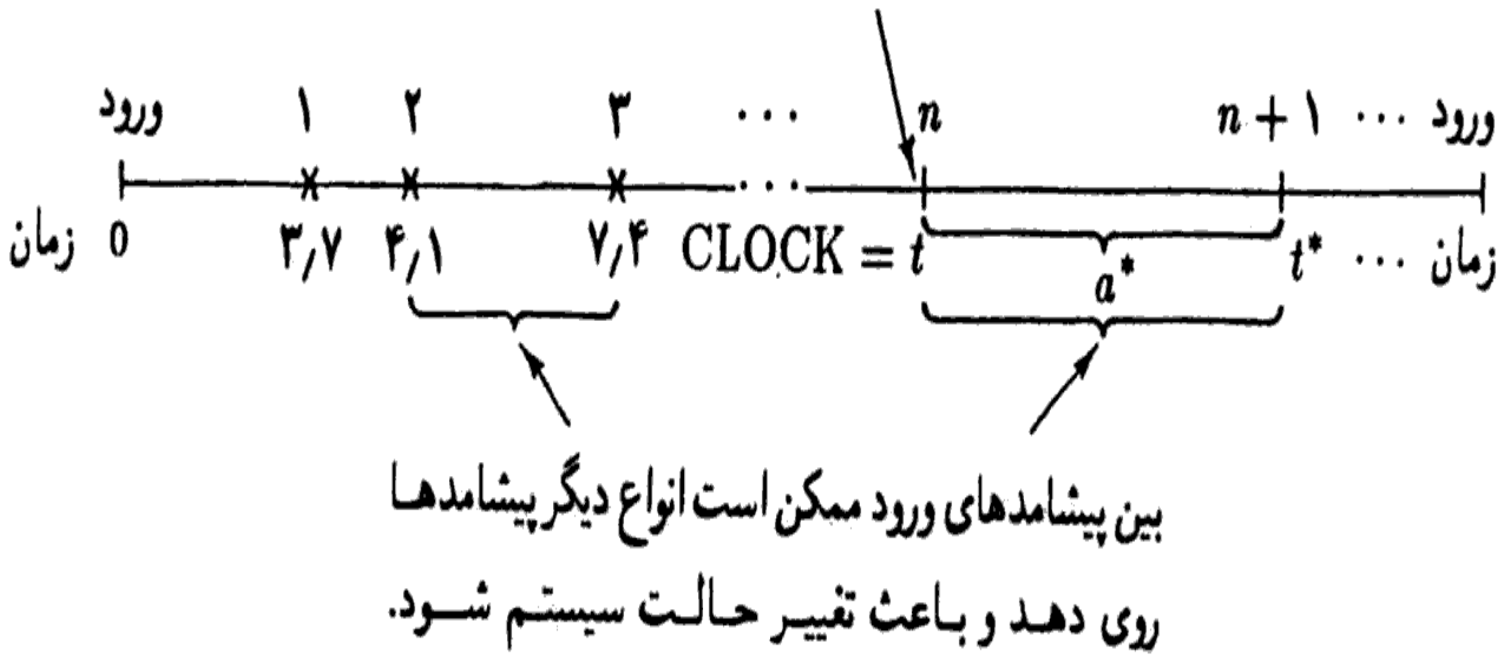
روشهای تعیین موقعیت صحیح یک پیشامد در لیست FEL:

- انجام جستجوی از بالا به پایین
- انجام جستجوی از پایین به بالا
- استفاده از لیست مرتب نشده و جستجوی کامل به ازای هر بار جلوبری زمان
- تعریف سیستم در زمان صفر

حالت سیستم در زمان صفر:
تصویر سیستم در لحظه صفر (CLOCK=0) با مشخص کردن شرایط اولیه و تولید پیشامدهای برونزا

روش خودراه انداز:

تولید رشته ای از ورودیهای خارجی بر اساس زمان جاری



شکل ۳-۳ تولید رشته‌ای از ورودهای خارجی با استفاده از روش خود راه‌انداز.

پیشامد پایان اجرا:

هر شبیه سازی باید دارای یک پیشامد پایان اجرا باشد (E)

روشهای اختتام شبیه سازی پیشامد:

الف – زمانبندی پیشامد پایان اجرا در آینده (TE) در زمان صفر (زمان شبیه سازی: [0,TE])

ب – تعیین مدت اجرا (TE) توسط خود عملیات شبیه سازی (زمان وقوع پیشامد E)

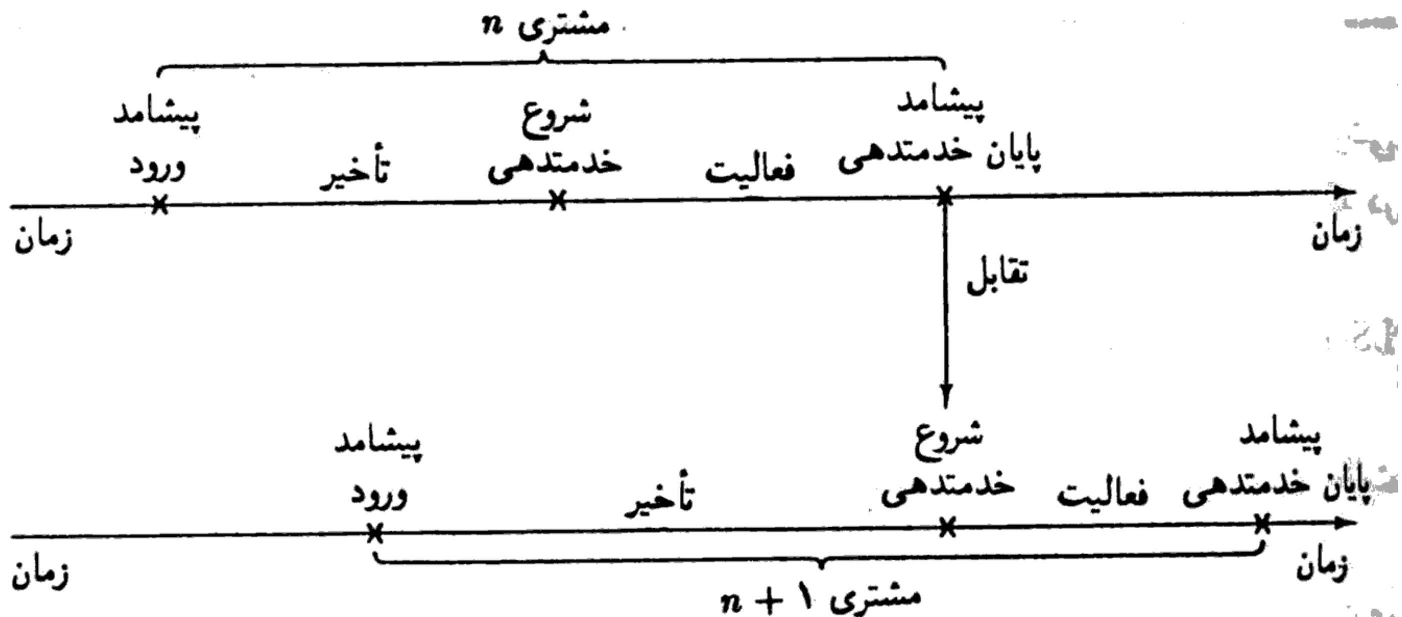
روش الف: استراتژی زمان گرا و روش ب :استراتژی پردازش گرا

استراتژی زمان گرا:

- شبیه سازی دستی
- شبیه سازی با زبانهای برنامه نویسی همه منظوره نظیر FORTRAN و SIMSCRIPT

استراتژي پردازش گرا:

- شبيه سازي با زبانهاي برنامه نويسي نظير GPSS، SLAM وSIMSCRIPT II



شکل۳-۴ دو پردازش متقابل مشتری در صفی با یک خدمت‌دهنده.

شبیه سازی دستی با استفاده از زمانبندی پیشامدها: سیستم صف تک ورودی

اجزای مدل شبیه سازی صف تک ورودی (مثال فروشگاه مواد غذایی):

- حالت سیستم: $(L_Q(t), L_S(t))$
  - $L_Q(t)$: تعداد مشتریان در صف انتظار در لحظه t
  - $L_S(t)$: تعداد مشتریان در حال خدمت گیري در لحظه t
- نهادها:
- پیشامدها: پیشامد ورود (A)
  پیشامد ترک (D)
  پیشامد پایان اجرا (E): ۶۰ دقیقه
- فعالیتها: مدت بین دو ورود (جدول ۲-۶)
  مدت خدمتدهی (جدول ۲-۷)
- تاخیر: مدت انتظار مشتری در صف

شبيه سازي دستي با استفاده از زمانبندي پيشامدها: سيستم صف تك ورودی

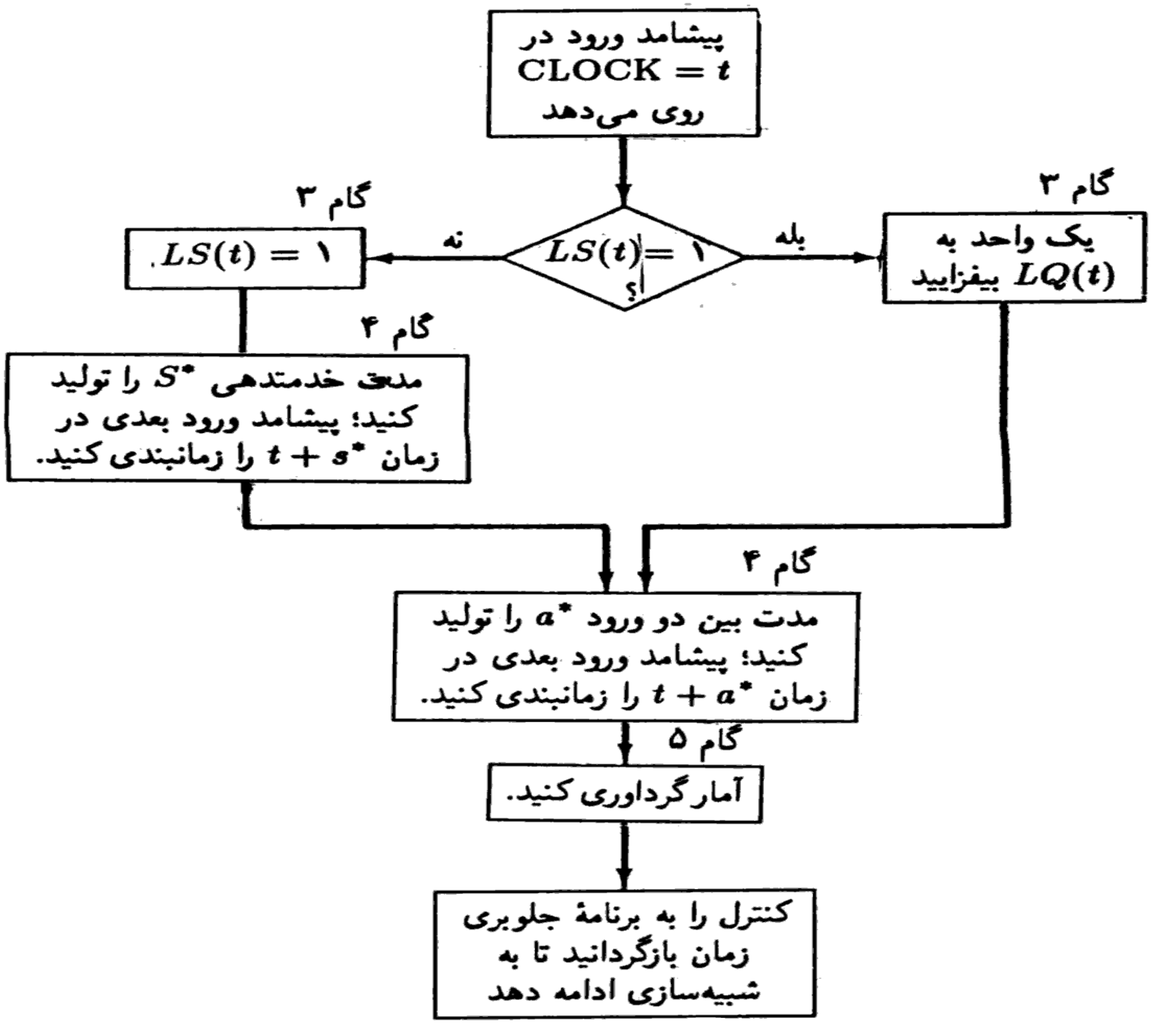
جدول ۲-۶ توزیع مدتهای بین دو ورود.

مدتهای بین ورود (دقیقه)	احتمال	احتمال تجمعی	تخصیص ارقام تصادفی
۱	۰٫۱۲۵	۰٫۱۲۵	۰۰۱-۱۲۵
۲	۰٫۱۲۵	۰٫۲۵۰	۱۲۶-۲۵۰
۳	۰٫۱۲۵	۰٫۳۷۵	۲۵۱-۳۷۵
۴	۰٫۱۲۵	۰٫۵۰۰	۳۷۶-۵۰۰
۵	۰٫۱۲۵	۰٫۶۲۵	۵۰۱-۶۲۵
۶	۰٫۱۲۵	۰٫۷۵۰	۶۲۶-۷۵۰
۷	۰٫۱۲۵	۰٫۸۷۵	۷۵۱-۸۷۵
۸	۰٫۱۲۵	۱٫۰۰۰	۸۷۶-۰۰۰

جدول ۲-۷ توزیع مدتهای خدمتدهی.

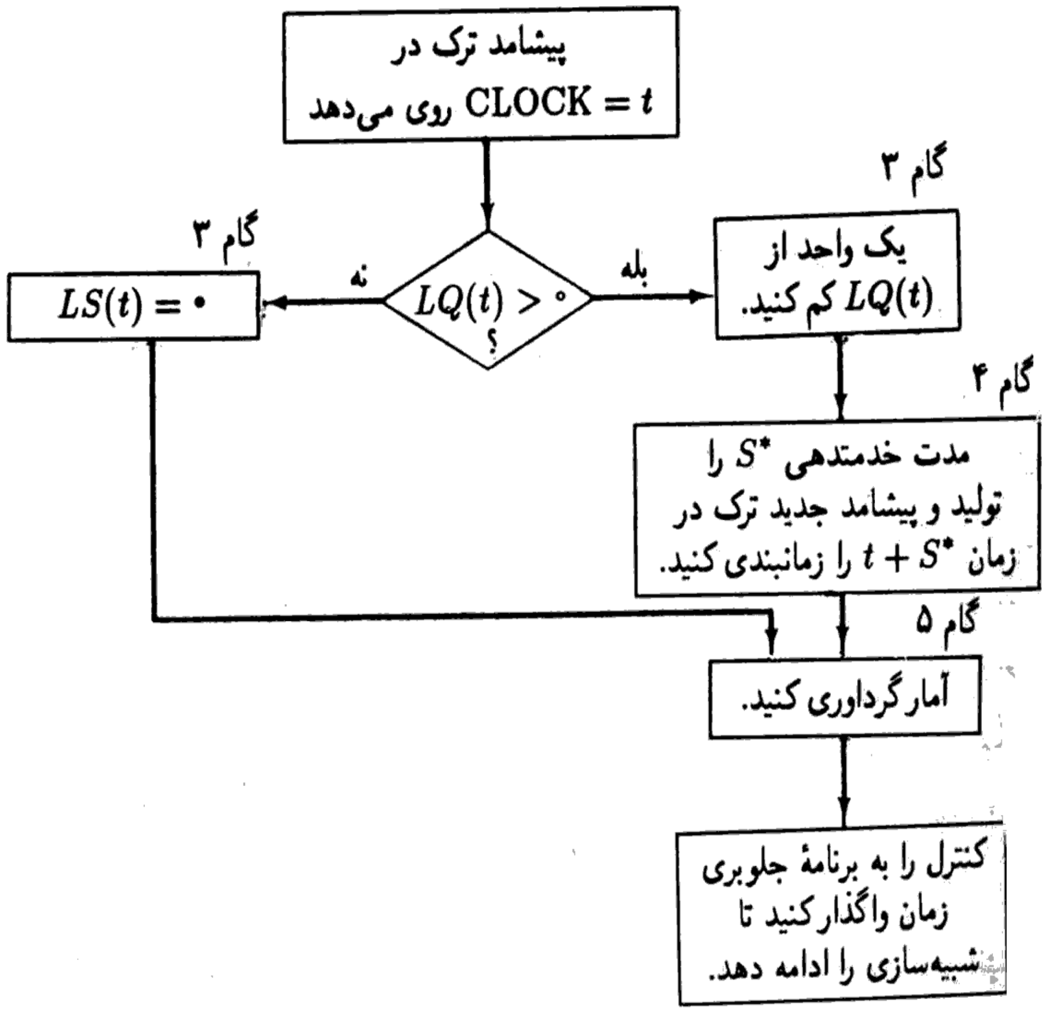
مدت خدمتدهی (دقیقه)	احتمال	احتمال تجمعی	تخصیص ارقام تصادفی
۱	۰٫۱۰	۰٫۱۰	۰۱-۱۰
۲	۰٫۲۰	۰٫۳۰	۱۱-۳۰
۳	۰٫۳۰	۰٫۶۰	۳۱-۶۰
۴	۰٫۲۵	۰٫۸۵	۶۱-۸۵
۵	۰٫۱۰	۰٫۹۵	۸۶-۹۵
۶	۰٫۰۵	۱٫۰۰	۹۶-۰۰

شبيه سازي دستي با استفاده از زمانبندي پيشامدها: سيستم صف تك ورودی



شکل ۳-۵ اجرای پیشامد ورود.

شبیه سازي دستي با استفاده از زمانبندي پیشامدها: سیستم صف تك ورودی



شکل ۳-۶ اجرای پیشامد ترک.

شبیه سازي دستي با استفاده از زمانبندي پيشامدها: سيستم صف تك ورودی

جدول ۳-۱ جدول شبیه‌سازی برای باجهٔ صندوق (مثال ۳-۲).

ساعت	حالت سیستم LQ(t)	حالت سیستم LS(t)	فهرست پیشامدهای آتی	توضیحات	آمار تجمعی B	آمار تجمعی MQ
۰	۰	۱	(D, ۴), (A, ۸), (E, ۶۰)	Aی اول رخ می‌دهد A(a^* = ۸)ی بعدی را زمانبندی کنید D(s^* = ۴)ی اول را زمانبندی کنید	۰	۰
۴	۰	۰	(A, ۸), (E, ۶۰)	Dی اول رخ می‌دهد: (D, ۴)	۴	۰
۸	۰	۱	(D, ۹), (A, ۱۴), (E, ۶۰)	Aی دوم رخ می‌دهد: (A, ۸) A(a^* = ۶)ی بعدی را زمانبندی کنید D(s^* = ۱)ی بعدی را زمانبندی کنید	۴	۰
۹	۰	۰	(A, ۱۴), (E, ۶۰)	Dی دوم رخ می‌دهد: (D, ۹)	۵	۰
۱۴	۰	۱	(A, ۱۵), (D, ۱۸), (E, ۶۰)	Aی سوم رخ می‌دهد: (A, ۱۴) D(s^* = ۴)ی بعدی را زمانبندی کنید	۵	۰
۱۵	۱	۱	(D, ۱۸), (A, ۲۳), (E, ۶۰)	Aی چهارم رخ می‌دهد: (A, ۱۵) (مشتری به انتظار می‌ماند)	۶	۱
۱۸	۰	۱	(D, ۲۱), (A, ۲۳), (E, ۶۰)	Dی سوم رخ می‌دهد: (D, ۱۸) D(s^* = ۳)ی بعدی را زمانبندی کنید	۹	۱
۲۱	۰	۰	(A, ۲۳), (E, ۶۰)	Dی چهارم رخ می‌دهد: (D, ۲۱)	۱۲	۱

شبيه سازي دستي با استفاده از زمانبندي پيشامدها: سيستم صف تك ورودی

هدف:

تعیین میانگین مدت پاسخ و میانگین نسبت مشتریانی که ۴ دقیقه یا بیشتر در سیستم می مانند

بنابراین:

معرفی مدل مشتری به عنوان یک نهاد

اجزای مدل شبیه سازی صف تك ورودي (مثال فروشگاه مواد غذايي):

- نهادها: مشتری Ci که در زمان t وارد شده (Ci,t),
- پیشامدها: پیشامد ورود مشتری Ci در زمان t ,(A,t,Ci)
  پیشامد ترک مشتری Ci در زمان t ,(D,t,Cj)
  پیشامد پایان اجرا (E): ۶۰ دقیقه
- فعالیتها: مدت بین دو ورود (جدول ۲-۶)
  مدت خدمتدهی (جدول ۲-۷)
- تاخیر: مدت انتظار مشتری در صف
- مجموعه: زمان ورود تمام مشتریان حاضر در سیستم به ترتیب ورود آنها

جدول ۳-۲ جدول شبیه‌سازی برای مثال ۳-۲.

ساعت	حالت سیستم LQ(t)	LS(t)	مجموعهٔ «زمان ورود»	فهرست پیشامدهای آتی	آمار تجمعی S	N_D	F
۰	۰	۱	(C۱, ۰)	(D, ۴, C۱), (A, ۸, C۲), (E, ۶۰)	۰	۰	۰
۴	۰	۰		(A, ۸, C۲), (E, ۶۰)	۴	۱	۱
۸	۰	۱	(C۲, ۸)	(D, ۹, C۲), (A, ۱۴, C۳), (E, ۶۰)	۴	۱	۱
۹	۰	۰		(A, ۱۴, C۳), (E, ۶۰)	۵	۲	۱
۱۴	۰	۱	(C۳, ۱۴)	(A, ۱۵, C۴), (D, ۱۸, C۳), (E, ۶۰)	۵	۲	۱
۱۵	۱	۱	(C۳, ۱۴), (C۴, ۱۵)	(D, ۱۸, C۳), (A, ۲۳, C۵), (E, ۶۰)	۵	۲	۱
۱۸	۰	۱	(C۴, ۱۵)	(D, ۲۱, C۴), (A, ۲۳, C۵), (E, ۶۰)	۹	۳	۲
۲۱	۰	۰		(A, ۲۳, C۵), (E, ۶۰)	۱۵	۴	۳

شبيه سازي دستي با استفاده از زمانبندي پيشامدها: سيستم صف تك ورودی

مجموع مدتهاي پاسخ كل مشترياني كه سيستم را ترك كردند: S

مجموع تعداد مشترياني كه كه 4 دقيقه يا بيشتر در سيستم مي مانند: F

مجموع كل مشترياني كه سيستم را ترك كردند: ND

مدت پاسخ مشتري C4:

= مدت پاسخ – CLOCK ويژگي زمان ورود

مدت پاسخ = 21 - 15 = 6

متوسط مدت پاسخ:

متوسط مدت پاسخ = S / ND = 15 :4 = 75/3

نسبت مشترياني كه 4 دقيقه يا بيشتر در سيستم ماندند:

نسبت مشتريان = F / ND = 3 :4 = 75/0

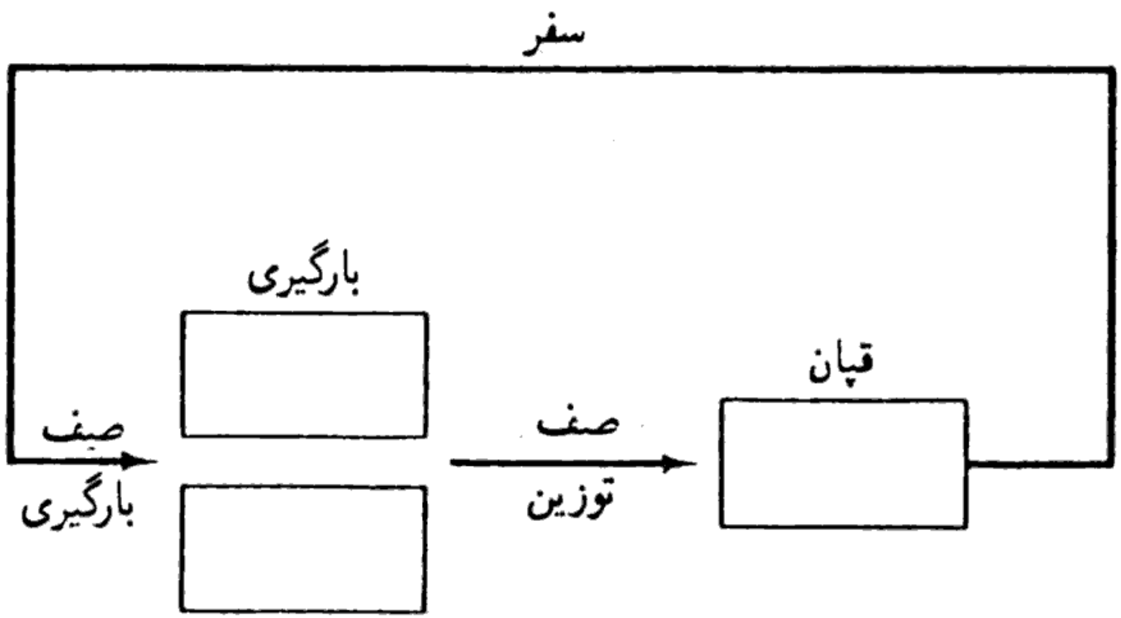
شبيه سازي دستي با استفاده از زمانبندي پيشامدها: مسئله كاميونها

تعریف مسئله:

۶ کامیون حمل زغال از یک معدن توسط یکی از دو دستگاه بارگیری بار گرفته و سپس توزین می گردد تا طی انجام یک سفر، بار را به مقصد رسانده و جهت بارگیری مجدد به صف بازگردد.

هدف:

برآورد درصد مدت اشتغال هر دستگاه بارگیری و دستگاه توزین



شکل ۳-۷ مسألهٔ کامیونها.

شبيه سازي دستي با استفاده از زمانبندي پيشامدها: مسئله كاميونها

اجزای مدل شبیه سازی:

- حالت سیستم:

$$(L_Q(t), L(t), W_Q(t), W(t))$$

$L_Q(t)$ تعداد كاميونها در صف بارگيري در لحظه t :

$L(t)$ تعداد كاميونها در حال بارگيري در لحظه t :

$W_Q(t)$ تعداد كاميونها در صف توزين در لحظه t :

$W(t)$ تعداد كاميونها در حال توزين در لحظه t :

- نهادها: شش کامیون (DT1,…,DT6)
- پیشامدها:
  پیشامد ورود کامیون i در زمان t به صف بارگیری (ALQ,t,DTi)
  پیشامد اتمام بارگیری کامیون i در زمان t (EL,t,DTi)
  پیشامد اتمام توزین کامیون i در زمان t (EW,t,DTi)
- مجموعه ها: صف بارگیری کامیونها به ترتیب ورود
  صف توزین کامیونها به ترتیب ورود
- فعالیتها: مدت بارگیری ، مدت توزین و مدت سفر
- تاخیر: مدت انتظار در صف بارگیری و مدت انتظار در صف توزین

جدول ۳-۳ توزیع مدت بارگیری برای کامیونها.

مدت بارگیری	احتمال	احتمال تجمعی	تخصیص ارقام تصادفی
۵	۰٫۳۰	۰٫۳۰	۳-۱
۱۰	۰٫۵۰	۰٫۸۰	۸-۴
۱۵	۰٫۲۰	۱٫۰۰	۰-۹

جدول ۳-۴ توزیع مدت توزین برای کامیونها.

مدت توزین	احتمال	احتمال تجمعی	تخصیص ارقام تصادفی
۱۲	۰٫۷۰	۰٫۷۰	۷-۱
۱۶	۰٫۳۰	۱٫۰۰	۰-۸

شبیه سازي دستي با استفاده از زمانبندي پیشامدها: مسئله کامیونها

جدول ۳-۵ توزیع مدت سفر برای کامیونها.

مدت سفر	احتمال	احتمال تجمعی	تخصیص ارقام تصادفی
۴۰	۰٫۴۰	۰٫۴۰	۱-۴
۶۰	۰٫۳۰	۰٫۷۰	۵-۷
۸۰	۰٫۲۰	۰٫۹۰	۸-۹
۱۰۰	۰٫۱۰	۱٫۰۰	۰

مدت بارگیری	۱۰	۵	۵	۱۰	۱۵	۱۰	۱۰
مدت توزین	۱۲	۱۲	۱۲	۱۶	۱۲	۱۶	
مدت سفر	۶۰	۱۰۰	۴۰	۴۰	۸۰		

شبيه سازي دستي با استفاده از زمانبندي پيشامدها: مسئله کاميونها

شرایط اولیه مسئله:

در زمان صفر ۵ کامیون در قسمت بارگیری و یک کامیون در قسمت توزین است.

فرضیات مسئله:

- مدت سفر از بارگیری به توزین صفر فرض می گردد.
- مدتهای بارگیری، توزین و سفر طبق توزیع های جداول ۳-۳ ، ۳-۴ و ۳-۵ می باشد.

شبیه سازي دستی با استفاده از زمانبندی پیشامدها: مسئله کامیونها

جدول ۳-۶ جدول شبیه‌سازی برای عملیات کامیونها (مثال ۳-۴).

ساعت	حالت سیستم				مجموعه‌ها		فهرست پیشامدهای آتی	آمار تجمعی	
t	LQ(t)	L(t)	WQ(t)	W(t)	صف بارگیری	صف توزین		B_L	B_S
۰	۳	۲	۰	۱	DT۴		(EL, ۵, DT۳)	۰	۰
					DT۵		(EL, ۱۰, DT۲)		
					DT۶		(EW, ۱۲, DT۱)		
۵	۲	۲	۱	۱	DT۵	DT۳	(EL, ۱۰, DT۲)	۱۰	۵
					DT۶		(EL, ۵ + ۵, DT۴)		
							(EW, ۱۲, DT۱)		
۱۰	۱	۲	۲	۱	DT۶	DT۳	(EL, ۱۰, DT۴)	۲۰	۱۰
						DT۲	(EW, ۱۲, DT۱)		
							(EL, ۱۰ + ۱۰, DT۵)		
۱۰	۰	۲	۳	۱		DT۳	(EW, ۱۲, DT۱)	۲۰	۱۰
						DT۲	(EL, ۲۰, DT۵)		
						DT۴	(EL, ۱۰ + ۱۵, DT۶)		
۱۲	۰	۲	۲	۱		DT۲	(EL, ۲۰, DT۵)	۲۴	۱۲
						DT۴	(EW, ۱۲ + ۱۲, DT۳)		
							(EL, ۲۵, DT۶)		
							(ALQ, ۱۲ + ۶۰, DT۱)		
۲۰	۰	۱	۳	۱		DT۲	(EW, ۲۴, DT۳)	۴۰	۲۰
						DT۴	(EL, ۲۵, DT۶)		
						DT۵	(ALQ, ۷۲, DT۱)		
۲۴	۰	۱	۲	۱		DT۴	(EL, ۲۵, DT۶)	۴۴	۲۴
						DT۵	(EW, ۲۴ + ۱۲, DT۲)		
							(ALQ, ۷۲, DT۱)		
							(ALQ, ۲۴ + ۱۰۰, DT۳)		
۲۵	۰	۰	۳	۱		DT۴	(EW, ۳۶, DT۲)	۴۵	۲۵
						DT۵	(ALQ, ۷۲, DT۱)		
						DT۶	(ALQ, ۱۲۴, DT۳)		
۳۶	۰	۰	۲	۱		DT۵	(EW, ۳۶ + ۱۶, DT۴)	۴۵	۳۶
						DT۶	(ALQ, ۷۲, DT۱)		
							(ALQ, ۳۶ + ۴۰, DT۲)		
							(ALQ, ۱۲۴, DT۳)		
۵۲	۰	۰	۱	۱		DT۶	(EW, ۵۲ + ۱۲, DT۵)	۴۵	۵۲
							(ALQ, ۷۲, DT۱)		
							(ALQ, ۷۶, DT۲)		
							(ALQ, ۵۲ + ۴۰, DT۴)		
							(ALQ, ۱۲۴, DT۳)		

شبیه سازي دستي با استفاده از زمانبندي پیشامدها: مسئله كاميونها

جدول ۳-۶ (ادامه) جدول شبیه‌سازی برای عملیات کامیونها (مثال ۳-۴).

ساعت	حالت سیستم				مجموعه‌ها		فهرست پیشامدهای آتی	آمار تجمعی	
t	LQ(t)	L(t)	WQ(t)	W(t)	صف بارگیری	صف توزین		B_L	B_S
۶۴	۰	۰	۰	۱			(ALQ, ۷۲, DT۱) (ALQ, ۷۶, DT۲) (EW, ۶۴ + ۱۶, DT۶) (ALQ, ۹۲, DT۴) (ALQ, ۱۲۴, DT۳) (ALQ, ۶۴ + ۸۰, DT۵)	۴۵	۶۴
۷۲	۰	۱	۰	۱			(ALQ, ۷۶, DT۲) (EW, ۸۰, DT۶) (EL, ۷۲ + ۱۰, DT۱) (ALQ, ۹۲, DT۴) (ALQ, ۱۲۴, DT۳) (ALQ, ۱۴۴, DT۵)	۴۵	۷۲
۷۶	۰	۲	۰	۱			(EW, ۸۰, DT۶) (EL, ۸۲, DT۱) (EL, ۷۶ + ۱۰, DT۲) (ALQ, ۹۲, DT۴) (ALQ, ۱۲۴, DT۳) (ALQ, ۱۴۴, DT۵)	۴۹	۷۶

شبيه سازي دستي با استفاده از زمانبندي پيشامدها: مسئله کاميونها

مجموع مدت اشتغال هر دو دستگاه بارگيری از زمان صفر تا زمان جاری : BL

مجموع مدت اشتغال دستگاه توزين از زمان صفر تا زمان جاری : BS

متوسط بهره برداري از هر دستگاه بارگيري:

متوسط بهره برداري از هر دستگاه بارگيري = (BL/2)/t

متوسط بهره برداري از هر دستگاه بارگيري = ((2:49):76) = 32/0

متوسط بهره برداري از دستگاه توزين :

متوسط بهره برداري از دستگاه توزين =BS / t = 76 : 76 = 1

زبانهای برنامه نويسي
براي
سيستمهاي گسسته پيشامد شبيه سازی

FORTRANزبانهاي برنامه نويسي براي شبيه سازي كامپيوتري:

مشخصات:

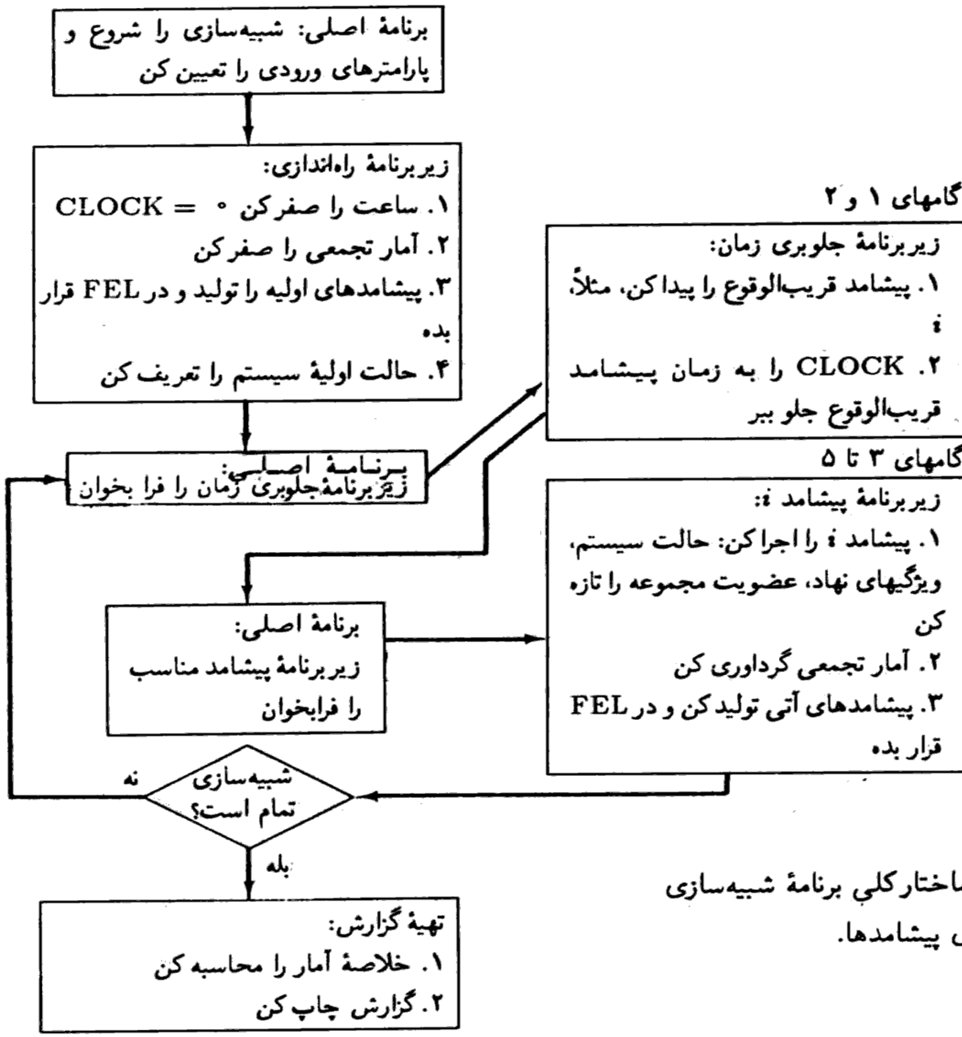
- زبان برنامه نویسی سطح بالا و همه منظوره
- زبان برنامه نویسی علمی
- در دسترس و شناخته شده
- لزوم پیاده سازی کلیه الگوریتم شبیه سازی توسط برنامه نویس
- لزوم تهیه زیربرنامه برای اجزای مدل
- انعطاف پذیری و قدرت تغییر بالا
- پیچیدگی زیاد
- دشواری عیب یابی و اصلاحات
- کدنویسی طولانی
- مناسب برای شبیه سازی با دید زمانبندی پیشامدها

ساختار كلي برنامه شبيه سازي با ديد زمانبندي پيشامدها

پیاده سازی مدل با استفاده از زیربرنامه ها شامل اجزای ذیل:

- CLOCK
- زیربرنامه راه اندازی
- زیربرنامه جلوبری زمان
- زیربرنامه زمانبندی
- زیربرنامه پیشامدها
- زیربرنامه مولد مقادیر تصادفی
- برنامه اصلی
- زیربرنامه گزارش گیری و تحلیل آمار

ساختار كلي برنامه شبيه سازي با ديد زمانبندي پيشامدها



شکل ۳-۸ ساختار کلی برنامهٔ شبیه‌سازی با دید زمانبندی پیشامدها.

ساختار كلي برنامه شبيه سازي با ديد زمانبندي پيشامدها

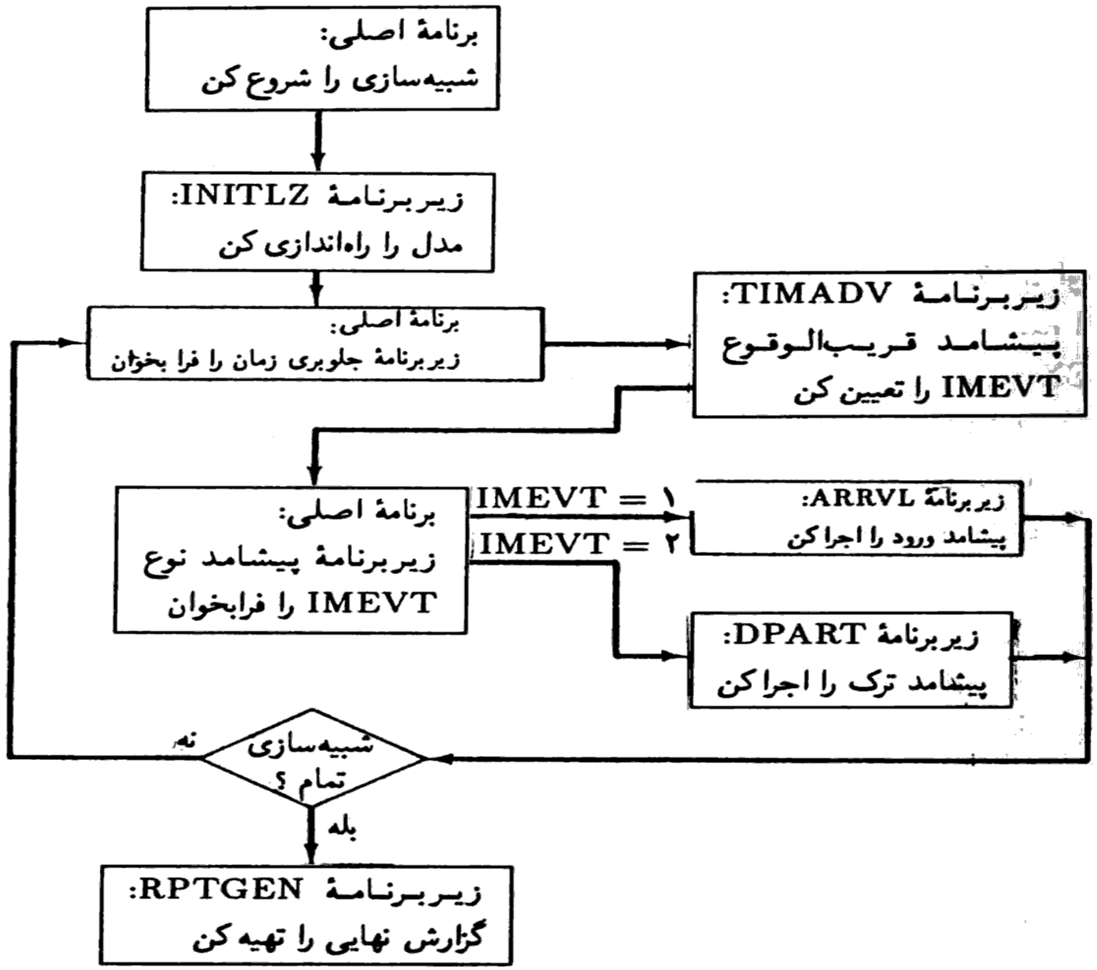
جدول ۳-۷ تعاریف مربوط به متغیرها، توابع، و زیربرنامه‌های موجود در مدل FORTRAN برای صف تک خدمت‌دهنده.

متغیرها	شرح
حالت سیستم	
LQT	تعداد متقاضی حاضر در صف انتظار در زمان کنونی شبیه‌سازی
LST	تعداد در حال خدمتگیری (۰ یا ۱) در زمان کنونی شبیه‌سازی
ویژگیهای نهاد و مجموعه‌ها	
CHKOUT(I)	زمان ورود (I−۱)امین متقاضی به صف خروج بنابراین، CHKOUT(۲) زمان ورود اولین متقاضی به صف است که در حال حاضر به او خدمت داده نمی‌شود.
CHKOUT(۱)	زمان ورود آن متقاضی که در حال حاضر به او خدمت داده می‌شود.
فهرست پیشامدهای آتی	
FEL(I)	زمان وقوع پیشامد بعد از نوع I(I = ۱, ۲)
IMEVT	نوع پیشامد قریب‌الوقوع (۱ یا ۲)
مدتهای فعالیتها	
IAT	مدت زمان بین ورود متقاضی قبلی و بعدی
SVT	مدت خدمتدهی به آخرین متقاضی که خدمتگیری را شروع می‌کند
پارامترهای ورودی	
MIAT	میانگین مدت بین دو ورود (۴/۵ دقیقه)
MSVT	میانگین مدت خدمتدهی (۳/۲ دقیقه)
SIGMA	انحراف معیار مدت خدمتدهی (۰/۶ دقیقه)
NCUST	ضابطهٔ توقف—تعداد متقاضیانی که باید خدمت بگیرند (۱۰۰۰)
متغیرهای شبیه‌سازی	
CLOCK	مقدار کنونی زمان شبیه‌سازی شده
NUMEVS	تعداد انواع پیشامدها (NUMEVS = ۲)
متغیرهای مربوط به گردآوری آمار	
TLE	زمان وقوع آخرین پیشامد (برای تازه کردن B به‌کار می‌رود)
B	مجموع مدت اشتغال خدمت‌دهنده (تاکنون)
MQ	ماکسیمم طول صف انتظار (تاکنون)
S	مجموع مدتهای پاسخ متقاضیانی که سیستم را (تاکنون) ترک کرده‌اند
ND	تعداد موارد ترک (تاکنون)
F	تعداد متقاضیانی که ۴ دقیقه یا بیشتر در باجهٔ صندوق (تاکنون) مانده‌اند
آمار خلاصه شده	
RHO=B/CLOCK	درصد زمان اشتغال خدمت‌دهنده (در اینجا مقدار CLOCK مقدار نهایی زمان شبیه‌سازی شده است)
MQ	ماکسیمم طول صف انتظار
AVGR=S/ND	متوسط مدت پاسخ
PC4=F/ND	درصد متقاضیانی که ۴ دقیقه یا بیشتر در باجهٔ صندوق مانده‌اند.

جدول ۳-۷ (ادامه)

توابع	شرح
EXPON (FMEAN)	تابعی که نمونه‌هایی از توزیع نمایی با میانگین FMEAN تولید می‌کند
NORML (XMU,SIGMA)	تابعی که نمونه‌هایی از توزیع نرمال با میانگین XMU و انحراف معیار SIGMA تولید می‌کند
زیربرنامه‌ها	**شرح**
INITLZ	زیربرنامهٔ راه‌اندازی
TIMADV	زیربرنامهٔ جلوبری زمان
ARRVL	زیربرنامهٔ پیشامد ورود که پیشامد ورود را اجرا می‌کند
DPART	زیربرنامهٔ اجراکنندهٔ پیشامد ترک
RPTGEN	تهیه‌کنندهٔ گزارش

ساختار کلي برنامه شبيه سازي با ديد زمانبندي پيشامدها



شکل ۳-۹ ساختار کلی شبیه‌سازی FORTRAN در مورد صف تک خدمت‌دهنده.

زبانهاي برنامه نويسي براي شبيه سازي كامپيوتري: GASP

مشخصات:

- زبان برنامه نویسی مبتنی بر شبیه سازی به روش زمانبندی پیشامدها
- مجموعه ای از زیربرنامه های آماده نوشته شده به زبان FORTRAN
- وجود زیربرنامه کلی برای اجزای مدل
- انعطاف پذیری و تغییرات محدود
- سادگی استفاده
- سهولت عیب یابی و اصلاحات
- کدنویسی مختصر
- مناسب برای شبیه سازی با دید زمانبندی پیشامدها

زبانهاي برنامه نويسي براي شبيه سازي كامپيوتري: SIMSCRIPT

مشخصات:

- زبان برنامه نویسی سطح بالا
- زبان برنامه نویسی برای شبیه سازی گسسته پیشامد
- وجود زیربرنامه های لازم برای اجزای مدل
- انعطاف پذیری و قدرت تغییر مناسب
- سادگی و مشابهت دستورات به افعال زبان انگلیسی
- سهولت عیب یابی و اصلاحات
- نگهداری مجموعه وسیعی از متغیرها بصورت خودکار
- مناسب برای شبیه سازی با دید زمانبندی پیشامدها
- مناسب برای شبیه سازی با دید پردازش گرا

زبانهاي برنامه نويسي براي شبيه سازي كامپيوتري: GPSS

مشخصات:

- زبان ساختاربندی شده برای شبیه سازی
- زبان برنامه نویسی مناسب برای شبیه سازی سیستمهای صف
- ایجاد دیاگرام بلوکی برای شرح سیستم
- اجرای شبیه سازی براساس فرآیندها (زمانبندی پیشامدها مخفی است)
- آسانی فراگیری
- سادگی پیاده سازی مدلهای پیچیده
- دشواری مدلسازی یستمهای خاص
- کدنویسی بسیار مختصر
- دشواری محاسبات عددی و منطقی پیچیده
- فقدان مولد اعداد تصادفی درونی
- مناسب برای شبیه سازی با روش پردازش گرا

زبانهاي برنامه نويسي براي شبيه سازي كامپيوتري: SLAM

مشخصات:

- زبان برنامه نویسی سطح بالا
- زبان برنامه نویسی مبتنی بر FORTRAN
- مناسب برای شبیه سازی با دید زمانبندی پیشامدها پردازش گرا و حتی ترکیبی
- شباهت به GASP در بخش زمانبندی پیشامدها
- شباهت به GPSS در بخش پردازش گرا

زبانهاي برنامه نويسي براي شبيه سازي كامپيوتري: SIMULINK

آشنايي با بسته نر م افزاري MATLAB

- زبان برنامه نویسی و ابزاری قدرتمند جهت تهیه برنامه های کاربردی(Application Programs)فراگیر
- امکان استفاده از جعبه ابزارها(Tool Boxes) ، بلوکها (Block Sets) و کتابخانه ها (Libraries)
- امکان لینک با سایر زبانهای برنامه نویسی از قبیل C ، فورترن ، جاوا و . . .
- سازگار با محیط سیستم عاملهای مختلف از جمله انواع Windows و Linux

❑ نشر ۱۳ نسخه ۵/۶ بسته نرم افزاری MATLAB

امکانات :

- رابط گرافیک کاربر
- برنامه نویسی رشته بازگشتی
- نرم افزار مدلسازی سیمولینک
- سیستمهای زمان – واقعی
- سرویس دهنده اجرایی MATLAB
- ابزار بانک اطلاعات

زبانهاي برنامه نويسي براي شبيه سازي كامپيوتري: SIMULINK

مزاياي استفاده از GUI :

- استفاده از توابع در برنامه نويسي
- استفاده از منوهاي ارتباطي آسان وسريع
- ايجاد محيط كار مناسب براي كاربر
- امكان برنامه نويسي رشته بازگشتي

زبانهاي برنامه نويسي براي شبيه سازي كامپيوتري: SIMULINK

مزاياي استفاده از برنامه نويسي رشته بازگشتي:

- ايجاد فضاي كار خاص هر رشته بازگشتي با استفاده از روش برنامه نويسي Switchyard
- خاصيت User Data براي دسترسي به ساير ابزارها و داده ها
- امكان ايجاد ساختاري از فيلدهاي مختلف با استفاده از Handlelist
- سازماندهي كدهاي برنامه نويسي در توابع و اسكريپ هاي M-File

زبانهاي برنامه نويسي براي شبيه سازي كامپيوتري: SIMULINK

مزلياي نرم افزار سيمولينك:

- نرم افزاری قدرتمند برای مدل سازی، شبیه سازی، تحلیل و ارتباط با سیستمهای دینامیک
- امکان تعریف مدل با وجود مجموعه متنوعی از بلوکها شامل منابع تولید کننده داده ، قطعات خطی و غیر خطی، ارتباطات بین بلوکها و نمایشگرهای مختلف و قابلیت ساخت بلوکهای اختصاصی
- قابلیت حل کردن معادلات دیفرانسیل و امکان استفاده از دستورات MATLAB

زبانهاي برنامه نويسي براي شبيه سازي كامپيوتري: SIMULINK

سيستمهاي زمان واقعي:

استفاده از نرم افزار Real – Time Windows Target به عنوان یکی از محصولات Mathworks برای ایجاد سیستمهای کنترل زمان – واقعی.

ملزومات و مراحل اجرای برنامه کاربردی زمان – واقعی :

- **ایجاد مدل با استفاده از بلوکهای نرم افزار سیمولینک و تست آنها**
- **ایجاد دیاگرامهای مورد نظر در صورت لزوم با بهره گیری از نرم افزار Stateflow**
- **تست مدلها و بلوکهای داخلی آنها در حالت عادی (Normal Mode)**
- **تولید کد اجرای برنامه کاربردی با استفاده از نرم افزارهای Real – time Workshaop ویک کامپایلر زبان C و در صورت نیاز نرم افزار Stateflow**
- **اجرای برنامه در حالت خارجی سیمولینک (Simulink External Mode) بصورت زمان – واقعی**
- **ذخیره داده های نتایج شبیه سازی زمان- واقعی بمنظور مشاهده و کنترل رفتار سیگنالها**
- **تغییر و تنظیم پارامترها در حین اجرای برنامه کاربردی زمان- واقعی**

زبانهاي برنامه نويسي براي شبيه سازي كامپيوتري: SIMULINK

سرويس دهنده اجرايي MATLAB

ويژگيها:

- عدم دسترسی کاربر به کد برنامه وتامین امنیت سیستم
- عدم الزام به دانستن دستورات و فرامین نرم افزارهایی که برنامه بر اساس آن توسعه یافته
- ایجاد برنامه کاربردی مستقل (Stand alone Application)
- الزام کاربر به استفاده از منوها و فرمهای طراحی شده جهت برنامه کاربردی بجای پنجره فرمان MATLAB
- اخذ داده ها و اطلاعات ، نمایش خطا و حتی متن راهنما از طریق برنامه کاربردی و در پنجره های تعریف شده
- امکا ن استفاده از برنامه به عنوان یک موتور محاسباتی (Computational Engine) برای برنامه های کاربردی به زبانهای دیگر برنامه نویسی مثل C,VB و فورترن
- امکان استفاده بصورت یک سرویس دهنده چند کاربره (Multiple Client)

زبانهاي برنامه نويسي براي شبيه سازي كامپيوتري: SIMULINK

ابزار بانك اطلاعات:

ويژگيها:

- تبادل اطلاعات بین بانک اطلاعات و نرم افزار MATLAB (Import/Export)
- امکان استفاده از قابلیتهای سازنده پرس و جوی ویژوال VQB(Visual Query Builder) جهت تهیه جداول رابطه ای (Relational Table) ، گزارشات متنوع و دایاگرامهای مختلف
- پشتیبانی توسط سیستم های مدیریت بانک اطلاعات رابطه ای رایج از قبیل Microsoft Access و ODBC/GDBC , SQL Server, Oracle و غیره
- پشتیبانی از انواع داده از قبیل CHAR,DATA,DOUBIE,NUMERIC,BOOLEAN,REAL,TIME

فصل چهارم

مدلهای آماری در شبیه سازی

مدلهای آماری در شبیه سازی

- در مدلسازی پدیده های واقعی، کمتر وضعیتی وجود دارد که عمل نهادهای درون سیستم تحت بررسی را بتوان کاملا از قبل پیش بینی نمود.
- برای مثال در جریات تعمیر یک خودرو تعمیر کار نمی داند که تعمیر خودرو چه مدت زمان به طول می انجامد!
- این زمان وابسته نوع عیب، تبحر تعمیر کار، در دسترس بودن قطعات و ... دارد.
- بنابراین یک مدل یقینی توانایی ارائه یک تخمین مناسب از حالت سیستم مورد بحث را ندارد برای رفع این مشکل **مدل های تصادفی/ آماری** معرفی شده اند
- عمل تعیین مدل های آماری با استفاده از نمونه گیری از پدیده صورت می گیرد. از تکرار این فرآیند در دفعات متعدد، می توان توزیع آماری نمونه ها را بدست آورد. برای این عمل از روش رگرسیون استفاده می شود.

مروری بر واژها و مفاهیم

- متغیر تصادفی گسسته: اگر X متغیر تصادفی باشد و اگر مقادیر ممکن X متناهی، یا متناهی شمارا باشد، X را متغیر تصادفی گسسته می گوییم. مقادیر ممکن X را می توان به صورت .... $x_1, x_2, \ldots$ فهرست کرد.

- احتمال متناظر با هر متغیر تصادفی را با $p(x_i)$ نشان می دهیم. $p(x_i)$ را تابع جرم احتمال می گویند.(probability mass function)

- مقدار احتمال باید شرط های زیر را داشته باشد:
  - به ازای همه مقادیر ....,i=1,2، p(xi)>=0.
  - $\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1$

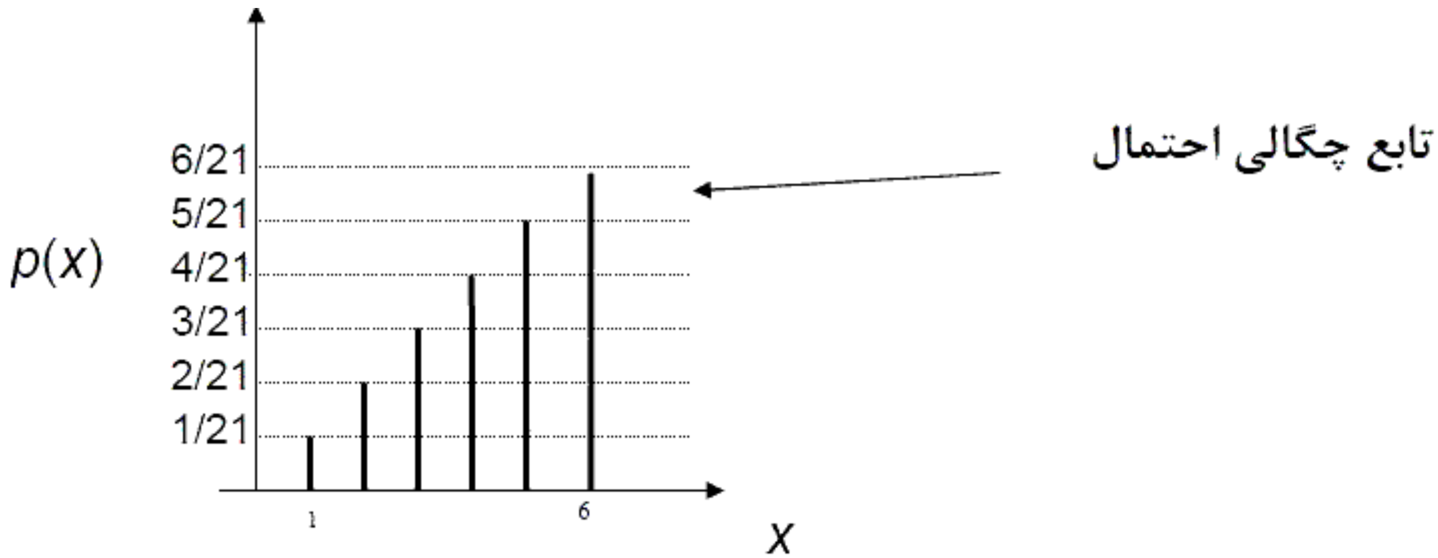
مروری بر واژها و مفاهیم

- مثال، تجربه انداختن تاس:
- توزیع احتمال گسسته در مورد این تجربه تصادفی به شرح زیر می باشد:

x_i	1	2	3	4	5	6
$p(x_i)$	1/21	2/21	3/21	4/21	5/21	6/21

- بررسی شرایط گفته شده؟

مروری بر واژها و مفاهیم



مروری بر واژها و مفاهیم

- متغییر تصادفی پیوسته: اگر فضای دامنه متغیر تصلدفی X فاصله یه مجموعه ای از فواصل باشد X را متغیر تصادفی پیوسته می گویند. احتمال قرار گرفتن X در فاصله [a, b] به صورت زیر ارائه می گردد:
- $p(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$
- تابع f(x) را تابع چگالی احتمال متغییر تصادفی X می گویند. (probability density function)

مروری بر واژها و مفاهیم

در مورد pdf شرایط زیر صدق می کند:

الف) به ازای همه مقادیر x در R_x داریم $f(x)>=0$.

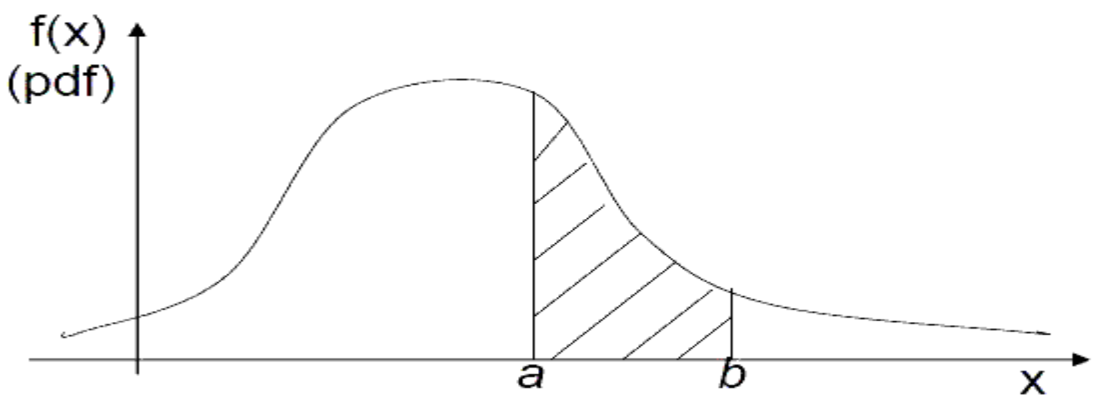
ب) $\int_{R_x} f(x)dx = 1$

ج) اگر x در R_x نباشد، داریم $f(x)=0$.

مروری بر واژها و مفاهیم

- مثال، عمر یک لامپ کاتدی.
- pdf عمر لامپ، برحسب سال، به شرح زیر است:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} & x \geq 0 \\ 0 & else \end{cases}$$



مروری بر واژها و مفاهیم

- احتمال اینکه عمر لامپ کاتدی بین ۲و۳ باشد طبق رابطه زیر تعیین می شود:

$$P(2 \leq X \leq 3) = \frac{1}{2}\int_{2}^{3} -e^{\frac{-3}{2}} + e^{-1} = -0.223 + 0.368 = 0.145$$

مروری بر واژها و مفاهیم

- تابع توزیع تجمعی: تابع توزیع تجمعی (cumulative probability function) که با نماد F(x) نشان داده می شود. این احتمال را اندازه گیری می کند که متغییر تصادفی X مقداری کمتر از یا مساوی با X بگیرد، یعنی،

$$F(x) = P(X \le x)$$

1. اگر Xگسسته باشد:

$$F(x) = p\{X \le x\} = \sum_{i, x_i \le x} p(x_i)$$

2. اگر X پیوسته باشد:

$$F(x) = p\{X \le x\} = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

مروری بر واژها و مفاهیم

- قوانین مربوط به توزیع تجمعی:

$$\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$$

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$$

$$p(a < x \le b) = F(b) - F(a) \quad ; \quad a < b$$

مروری بر واژها و مفاهیم

- امید ریاضی (expected value):

  - Discrete case:

$$E(X)=\sum_{i\in R_X} x_i p(x_i)$$

  - Continuous case:

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

  - $E(X^n)= n^{th}$ *moment of* X

$$E\left(X^n\right)=\sum_{i\in R_X} x_i^n p(x_i)$$ discrete

$$E\left(g(X)\right)=\eta_{g(X)}=\int_{-\infty}^{\infty} g(X)f(x)dx$$

$$E\left(X^n\right)=\int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x)dx$$ continuous

مروری بر واژها و مفاهیم

- محاسبه واریانس و انحراف استاندارد:

- Variance – measure of the spread (variation) of possible values of X around the mean

$$\sigma^2 = \mathrm{var}(X) = V(X) = E[(X - E(X))^2] = E(X^2) - [E(X)]^2$$

- Standard deviation $\sigma = \sqrt{\mathrm{var}(X)}$

مثال

۱ – تاس غیر منصف

X_i	1	2	3	4	5	6
$P(x_i)$	1/21	2/21	3/21	4/21	5/21	6/21
$F(X)$	1/21	3/21	6/21	10/21	15/21	1

$$E(x) = 1\times\frac{1}{21} + 2\times\frac{2}{21} + \ldots\ldots + 6\times\frac{6}{21} = 4.33$$

$$\operatorname{var}(x) = E(x^2) - [E(x)]^2 = E(x^2) - 4.33^2 = 21 - 18.78 = 2.22$$

۲– عمر لامپ

$$f(x) = \begin{cases} \tfrac{1}{2} e^{-x/2} & x \geq 0 \\ o & \end{cases}$$

$$p(2 \leq x \leq 3) = 0.145$$

$$F(x) = \tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t}{2}} dt = \tfrac{1}{2}\int_{0}^{x} e^{-\frac{t}{2}} dt = 1 - e^{\frac{-x}{2}}$$

$$E(x) = \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} x e^{\frac{-x}{2}} = 2$$

$$Var(x) \Rightarrow \left\{ E(x^2) = \tfrac{1}{2}\int_{0}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x}{2}} dx = 8 \right\} \Rightarrow Var(x) = 8 - 2^2 = 4 \rightarrow \sigma = \sqrt{4} = 2$$

مدلهای آماری سودمند

- سیستمهای صف: در هر سیستم صف، مدتهای بین دو ورود و مدتهای خدمتدهی، اغلب احتمالی هستند.
  - توزیع نمایی
  - توزیع گاما
  - توزیع ویبول

- مدلهای موجودی: در سیستم های موجودی سه متغیر تصادفی وجود دارد: تعداد آحاد مورد تقاضا در هر سفارش در هر دوره، مدت بین دو تقاضا و مهلت تحویل.
  - توزیع هندسی
  - توزیع پوآسون
  - توزیع دو جمله ای منفی
  - توزیع طیفی

مدلهای آماری سودمند

- پایایی و نگهداری پذیری: برای نشان دادن زمان شروع تا توقف سیستم استفاده می شود.
  - توزیع نمایی
  - توزیع گاما
  - توزیع ویبول
  - توزیع لوگاریتمی

- داده های محدود: زمانی که داده ها ناقص یا محدود باشند از توزیع های زیر استفاده می شود.
  - توزیع یکنواخت
  - توزیع مثلثی
  - توزیع بتا

توزیعهای گسسته

- آزمایشهای برنولی و توزیع برنولی (Bernoully distribution)

- متغیر تصادفی برنولی (X) دارای دو نتیجه پیروزی و شکست می باشد. بنابراین فضای نمونه را می توان به شکل S={0,1} در نظر گرفت که در آن ۰ نشانگر شکست و ۱ نشان دهنده پیروزی است. توزیع برنولی به صورت Ber(p) نشان داده می شود که در آن p احتمال موفقیت و در نتیجه 1-p احتمال شکست می باشد. نکات زیر در مورد این متغیر تصادفی قابل استخراج است.

$$p(x)=\begin{cases} p & x=1 \\ 1-p & x=0 \end{cases} \Rightarrow p(x)=p^x q^{1-x} \quad ; \quad x=0,1$$

$$E(x)=1\times p+0\times q=p$$

$$Var(x)=E(x^2)-[E(x)]^2=(1^2\times p+0^2\times q)-p^2=p(1-p)=pq$$

چگونگی ساخت عدد تصادفی با خصوصیت توزیع برنولی

توزیعهای گسسته

- توزیع دو جمله ای (Binomial distribution)

فرض کنید n متغیر تصادفی برنولی با هم جمع شوند. حاصل متغیر تصادفی است که می توان آن را با عنوان تعداد پیروزی ها در n آزمایش برنولی تعبیر نمود. تابع توزیع این متغیر تصادفی را می توان به صورت زیر بدست آورد:

$$p(x)=\begin{cases}\binom{n}{x}p^{x}q^{n-x} & x=0,\ldots n\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

با توجه به تعریف متغیر تصادفی دو جمله ای داریم:

$$X=X_1+X_2+\ldots X_n$$

$$\Rightarrow\begin{cases}E(x)=E\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)=np\\ \operatorname{var}(x)=\operatorname{var}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)=n\operatorname{var}(x_i)=npq\end{cases}$$

توزیعهای گسسته

مثال : احتمال آنکه از ۱۰ بار پرتاب سکه ۳ بار رو بیاید چقدر است؟
فضای نمونه ها ۲^۱۰ می باشد. احتمال رو و یا پشت بودن برابر با ۰,۵ می باشد. احتمال ۳ بار رو بودن برابر است با:

$$p_{10}(\text{رو}) = \begin{cases} \binom{10}{3} 0.5^3 0.5^7 & x = 1, 2, \ldots, 10 \\ 0 & ow \end{cases}$$

توزیعهای گسسته

در یک فرایندساخت، چیپ های نیمه رسانایی با ۲٪ درست معیوب تولید می‌شوند. در این سیستم تولیدی هر روز یک نمونه ۵۰تایی گرفته شده و اگر در نمونه بیشتر از ۲ معیوب باشد فرایند متوقف می‌شود. احتمال توقف فرایند را در هر روز بیابید.

حل: ابتدا بایستی متغیر تصادفی در این سوال تعریف شود.

$$p(x)=\binom{50}{x}(0.02)^x(0.98)^{50-x}$$

X تعداد واحدهای ناقص

$$p(x>2)=1-p(X\leq 2)=1-p(x=0)-p(x=1)p(x=2)=1-0.92=0.08$$

$$E(x)=50\times 0.02$$

$$\operatorname{var}(x)=50\times 0.02\times 0.98=0.98$$

توزیعهای گسسته

- توزیع هندسی (Geometric distribution): آزمایش های برنولی مستقل از هم را در نظر بگیرید. متغیر تصادفی هندسی (X) تعداد آزمایش های برنولی تا رسیدن به اولین موفقیت می باشد. این توزیع به شکل Ge(p) نشان داده می شود. (p احتمال موفقیت و1-p احتمال شکست می باشد). از آنجا که تعداد آزمایش ها نامحدود می باشد فضای حالت به شکل S={1,2,...,k,...} است. تابع احتمال متغیر تصادفی X به شکل زیر می باشد و داریم:

$$p(x) = \begin{cases} q^{x-1}p & x = 1,2,\ldots \\ 0 & ow \end{cases}$$

$$E(X) = \frac{1}{p}$$

$$\operatorname{var}(X) = \frac{q}{p^2}$$

توزیعهای گسسته

- امید ریاضی و واریانس یک متغییر تصادفی با توزیع geometric را بیابید؟

$$E\{x\} = \sum_{k=1}^{n} k(q^{k-1}p) = p + 2pq + 3pq^2 + \ldots + npq^{n-1} = p[1 + 2q + 3q^2 + \ldots + nq^{n-1}] =$$

با توجه به تعاریف سری های دو جمله ای داریم

$$\frac{1}{(1\text{-x})^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots.$$

$$= p[\frac{1}{(1-q)^2}] = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}$$

$$E\{x^2\} = \sum_{k=1}^{n} k^2(q^{k-1}p) = p + 4pq + 9pq^2 + \ldots + n^2pq^{n-1} = p[1 + 4q + 9q^2 + \ldots + n^2q^{n-1}] =$$

$$\frac{1}{(1\text{-x})^3} = 1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + \ldots.$$

$$= p[\frac{q+1}{(1-q)^3}] = \frac{q+1}{p^2} \qquad \Rightarrow \qquad \sigma^2 = E\{x^2\} - E\{x\}^2 = \frac{q+1}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2}$$

توزیع‌های گسسته

- مثال: ۴۰ درصد ریز پردازنده های مونتاژ شده در ایستگاه بازرسی مردود شناخته می شود. این احتمال را پیدا کنید که اولین ریز پردازنده پذیرفته شده سومین ریزپردازنده بازرسی شده باشد؟

$q=0.4$

$P=0.6$

$P(3)=0.4^2\ (0.6)=0.096$

توزیعهای گسسته

- توزیع پواسون(poisson distribution):تعداد وقوع یک پدیده نادر از میان تعداد بسیاری آزمایش(این توزیع از توزیع دوجمله ای بوجود آمده است.)

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} & x=0,1,2,\ldots\\ 0 & ow\end{cases}$$

$$E(X)=\operatorname{var}(X)=\lambda$$

$$F(x)=\sum_{i=0}^{x}\frac{e^{-a}a^{i}}{i!}$$

توزیعهای گسسته

- مثال: هر گاه که برای سرویس با تعمیرکار تماس تلفنی می گیرند، دستگاه او را با صدای «بیب» خبر می کند. معلوم شده است که تعداد بیبها در ساعت طبق توزیع پواسون با میانگین ۲ در هر ساعت رخ می دهد. احتمال سه بیب در ساعت بعد؟

$$p(3) = \frac{e^{-2}2^3}{3!} = \frac{(0.135)(8)}{6} = 0.18$$

احتمال دو بیب یا بیشتر در یک دوره یک ساعته؟

P(two or more)=1-p(0)-p(1)=1-F(1)=1-0.406=0.594

توزیعهای گسسته

- احتمال وقوع پیشامد A، k مرتبه در n آزمایش برابر است با:

$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k} \qquad k=1,2,..,n$$

- اگر احتمال P خیلی کوچکتر از ۱ باشد ($p<<1$) و تعداد آزمایش ها n نیز زیاد باشد، بطوریکه داشته باشیم $np \cong npq \succ\succ 1$ می توان از قضیه دموآر – لاپلاس تقریبی بدست آورد که به شرح زیر می باشد:

$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k} \;;\; e^{-np} \frac{(np)^k}{k!} \qquad k=1,2,...,n$$

- مثال: یک فروشگاه ۱۰۰۰ مشتری دارد که رفتار هر عضو مستقل از دیگری است. احتمال مراجعه هر کدام از مشتریان به مغازه در یک ماه برابر با ۰,۰۰۱ می باشد. می خواهیم احتمال آنکه کلیه مشتریان در آخر ماه به مغازه مراجعه بنمایند را محاسبه کنیم:

در این مسئله: $n=1000, p=0.001$ و $k=0$ (همه مشتریان مراجعه نماید) می باشد.

احتمال آنکه هیچ مشتری مراجعه ننماید برابر است با : $P\{k=0\} = q^n = .999^{1000} = 0.36769$

حال از آنجاییکه $np=1$ داریم:

$$p\{k=0\} \;;\; e^{-np} = e^{-1} = 0.386$$

توزیعهای گسسته

- مثال: یک رشته بیت به طول ۳۰۰۰ بیت دریافت شده است. نرخ بیت خطا 10^{-3} می باشد. یعنی احتمال آنکه یک بیت خراب باشد ۰,۰۰۱ است. احتمـال خـراب بـودن بیشتر از ۵ بیت را محاسبه نمایید.
- در این مسئله: $n=3000, p=0.001$ و $k<=5$ می باشد. بنابراین شرط $np \cong npq$ ϕϕ 1 برقرار است.
- می دانیم که احتما خراب بودن بیشتر از ۵ بیت یعنی محاسبه احتمال وقوع پیشامد $p\{k>5\}$ که احتمال وقوع این پیشامد برابراست با :

$$p\{k > 5\} = 1 - p\{k \le 5\}$$

$$p\{k > 5\} = 1 - p\{k \le 5\} = 1 - \sum_{k=1}^{5} e^{-np} \frac{(np)^k}{k!} = 1\text{-}\sum_{k=1}^{5} e^{-3} \frac{(3)^k}{k!} = 1 - 0.916 = 0.084$$

توزیع های پیوسته

- به منظور تشریح پدیده های تصادفی که متغیر مورد نظر در آنها می تواند هر مقدار در یک فاصله را بگیرد، می توان از متغیرهای تصادفی پیوسته استفاده کرد. مثل زمان.
- توزیع یکنواخت(uniform distribution):

- این توزیع زمانی بکار گرفته می شود که علم ما نسبت به فرآیند تصادفی مـورد نظـر بسیار ناچیز است. همچنین این توزیع بدترین حالت ممکن است زیرا نمونه های ایـن فرآیند تصادفی همگی با یک احتمال مساوی به وقوع می پیوندند و برتری نسبت بـه هم ندارند، پس رخداد هر حالتی ممکن است!

توزیع های پیوسته

- توزیع یکنواخت(uniform distribution):

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & a\le x\le b\\ 0 & otherwise\end{cases}\quad\Rightarrow F(x)=\begin{cases}0 & x<a\\ \frac{x-a}{b-a} & a\le x\le b\\ 1 & x>b\end{cases}$$

$$E(x)=\frac{a+b}{2}$$

$$\operatorname{var}(x)=\frac{(b-a)^2}{12}$$

$$p(x_1<X<x_2)=F(x_2)-F(x_1)$$

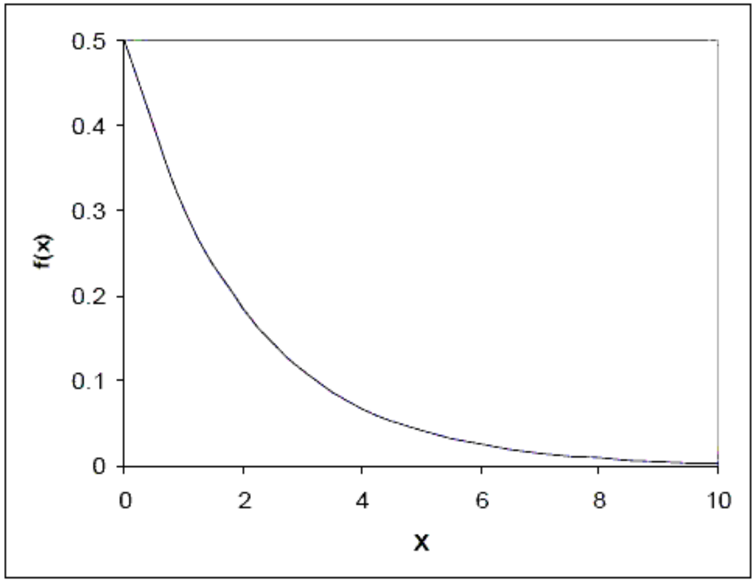
توزیع های پیوسته

- مثال ۱۶-۴

توزیع های پیوسته

- توزیع نمایی (exponential distribution):

- Model **times between events**
  - Used to model inter-arrival times and service times for queues
  - Times between arrivals
  - Times between failures
  - Times to repair
  - Service Times
  - Has long tail – useful for modeling component lifetime, e.g. life of a light bulb



$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x\geq 0\\ 0 & ow\end{cases}$$

$$E(X)=\frac{1}{\lambda}$$

$$\mathrm{var}(X)=\frac{1}{\lambda^2}$$

λ is a rate: e.g. arrival rate, service rate, failure rate, etc…

$$\Rightarrow F(x)=1-e^{-\lambda x}\quad x\geq 0$$

توزیع های پیوسته

- مثال ۴-۱۷

توزیع های پیوسته

- <u>توزیع گاما(Gamma distribution):</u>

$$\Gamma(B)=\int_0^\infty x^{\beta-1}e^{-x}dx=(\beta-1)\Gamma(\beta-1)$$

$$\beta\in\mathrm{N}\Rightarrow\Gamma(\beta)=(\beta-1)!$$

توزیع های پیوسته

- توزیع ارلنگ (erlang distribution): این توزیع را می توان در چارچوب زیر مطرح کرد: زنجیری از k ایستگاه را در نظر بگیرید که به منظور کامل کردن خدمتدهی به هر مشتری باید از تمام آنهاگذر کرد. تا مشتری که کارش در دست پردازش است با موفقیت از تمام ایستگاهها عبور نکرده باشد، مشتری دیگری نمی تواند با ایستگاه اول وارد شود. در هر ایستگاه مدت خدمتدهی دارای توزیع نمایی با پارامترها $k\theta$ است.

امید ریاضی X_j برخوردار از توزیع نمایی، به صورت $\frac{1}{k\theta}$ است.

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{e^{-k\theta x}(k\theta x)^i}{i!}, & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

توزیع های پیوسته

- مثال ۴-۱۹
- مثال ۴-۲۰

توزیع های پیوسته

- <u>توزیع نرمال (normal distribution)</u>: هر متغیر تصادفی x با میانگین $(-\infty < \mu < \infty)$ و واریانس $\sigma^2 > 0$ ، توزیع نرمال دارد. و pdf آن به شکل زیر است.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \; -\infty<x<\infty$$

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt$$

- Pdf هر توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس یک است. و به آن توزیع نرمال استاندارد گویند و cdf آن به صورت زیر می باشد.

$$F(x) = P(X \leq x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

توزیع های پیوسته

- مثال ۴-۲۱
- مثال ۴-۲۲
- مثال ۴-۲۳
- مثال ۴-۲۴

توزیع های پیوسته

- توزیع ویبول(vibol distribution):
- متغیرهای تصادفی وایبول اغلب در مدلسازی فرآیند فرسودگی اجزا در تحلیل قابلیت اطمینان استفاده می شوند. آلفا پارامتر مقیاس و بتا پارامتر شکل و V پارامتر موقعیت است.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\beta}{\alpha}\left(\dfrac{x-v}{\alpha}\right)^{\beta-1} & v \le x \\ 0 & else \end{cases}$$

$$E(x) = v + \alpha\Gamma(\frac{1}{\beta}+1)$$

$$Var(x) = \alpha^2\left[\Gamma(\frac{2}{\beta}+1) - \Gamma^2(\frac{1}{\beta}+1)\right]$$

توزیع های پیوسته

- مثال ۴-۲۶
- مثال ۴-۲۷
- مثال ۴-۲۸

تمرین

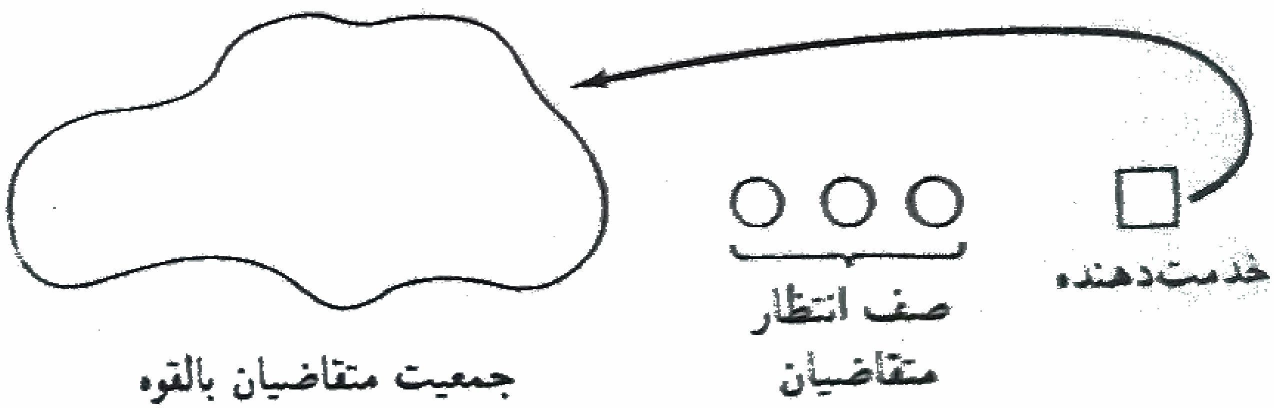
- تمرین ۴-۵
- تمرین ۴-۶
- تمرین ۴-۱۲
- تمرین ۴-۱۳
- تمرین ۴-۱۶

فصل پنجم

مدلهای صف

مدلهای صف

- متقاضیان از زمانی به زمان دیگر وارد می شوند، به صف انتظار می پیوندند، سپس خدمت میگیرند و از صف خارج می شوند.



شکل ۵-۱ مدل سادهٔ صف.

ویژگی های سیستم های صف

- عناصر عمده سیستم صف:
  - متقاضیان
  - خدمت دهنده ها

جدول ۵-۱ مثالهایی از سیستمهای صف.

سیستم	متقاضیان	خدمت‌دهنده(ها)
میز اطلاعات و راهنمایی	مردم	راهنما
تجهیزات تعمیر	ماشینها	تعمیرکار
تعمیرگاه خودرو	کامیونها	مکانیک
اتاق ابزار	مکانیکها	مسئول اتاق ابزار
بیمارستان	بیماران	پرستاران
انبار	پالتها	جرثقیل
فرودگاه	هواپیماها	باند فرودگاه
خط تولید	جعبه‌ها	بسته‌بند
انبار	سفارشها	مسئول جوابگویی
شبکهٔ راه	خودروها	چراغ راهنمایی
فروشگاه	خریدکننده‌ها	قسمت صندوق
لباسشویی	لباسهای چرک	ماشین لباسشویی یا خشککن
کارگاه	سفارشها	ماشینها یا کارگرها
انبار الوار	کامیونها	جرثقیل سقفی
کارخانهٔ چوب‌بری	الوار	اره‌ها
کامپیوتر	برنامه‌ها	دیسک، نوار، CPU
تلفن	شماره‌گیری	مرکز توزیع و هدایت شماره‌گیری
باجهٔ بلیط فروشی	دوستداران فوتبال	بلیط فروش
حمل و نقل شهری	مسافران	اتوبوسها، مترو

ویژگی های سیستم های صف

- جمعیت متقاضی:
  - متناهی:

مثلا مجموعه ای از پنج ماشین که عمل اوری لاستیک ماشین را در یک کارخانه انجام می دهند. و کارگری که لاستیک ها را از ان خارج می کند و مواد بعدی را داخل ان قرار می دهد خدمت دهنده محسوب می شود.

  - نامتناهی:

در سیتسم هایی با جمعیت بزرگ متقاضیان بالقوه، معمولا جمعیت متقاضی نامتناهی در نظر گرفته می شود. مثل رستوران و بانک.

- ظرفیت سیستم: در بسیاری از سیستم های صف حدی برای تعداد متقاضیانی که می توانند در صف یا در سیستم قرار گیرند محدودیت وجود دارد. مثلا کارواش خودرو و سیستم ثبت نام دانشجو.

ویژگی های سیستم های صف

- فرایند ورود:

1. فرایند ورود برای مدلهایی با جمعیت نامتناهی:

   1. ورود در لحظات تصادفی رخ دهد از فرایند ورود پواسون استفاده می شود. مثل ورود مردم به رستورانها و بانکها....
   2. ورودها برنامه ریزی شده باشد. مانند ورود بیماران به مطب. در این حالت مدتهای بین ورود ثابت و یا ثابت به اضافه و منهای یک مقدار تصادفی کوچک باشد.
   3. فرض شود که همواره دست کم یک متقاضی در صف است. مثلا متقاضیان می توانند مواد خام مربوط به یک محصول باشند.

2. فرایند ورود برای جمعیت های متناهی: کاربرد آن برای مسائل تعمیر ماشین می باشد.

رفتار صف و قانون صف

- رفتار صف: کنشهای متقاضی طی مدتی است که تا شروع خدمتگیری در صف انتظار به سر می برد.

- قانون صف: ترتیب منطقی متقاضیان در صف است.
  - FIFI(First In First Out)
  - LIFI(Last In First Out)
  - SIRO(Sequential In Random Out)
  - SPT(Shortest Process Time)
  - PR(Priority)

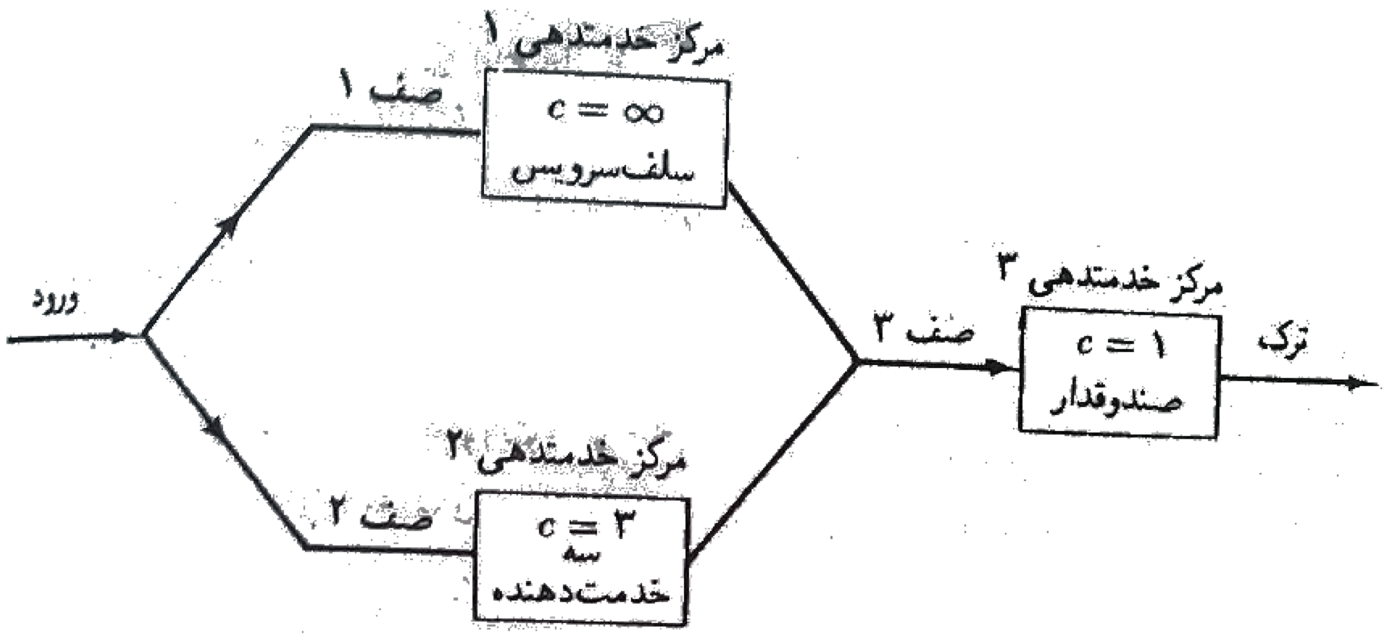
مدتهای خدمتدهی و مکانیزم آن

- مدتهای خدمتدهی را با نمادها ....,S_1,S_2,S_3 نشان می دهند. این مدتها باید ثابت یا تصادفی باشند.

- هر سیستم صف از تعدادی مرکز خدمت دهی و صفهای مرتبط کننده آنها تشکیل می شوند. هر مرکز خدمتدهی مشتمل است بر تعدادی خدمت دهنده،c، که به صورت موازی فعالیت دارند.

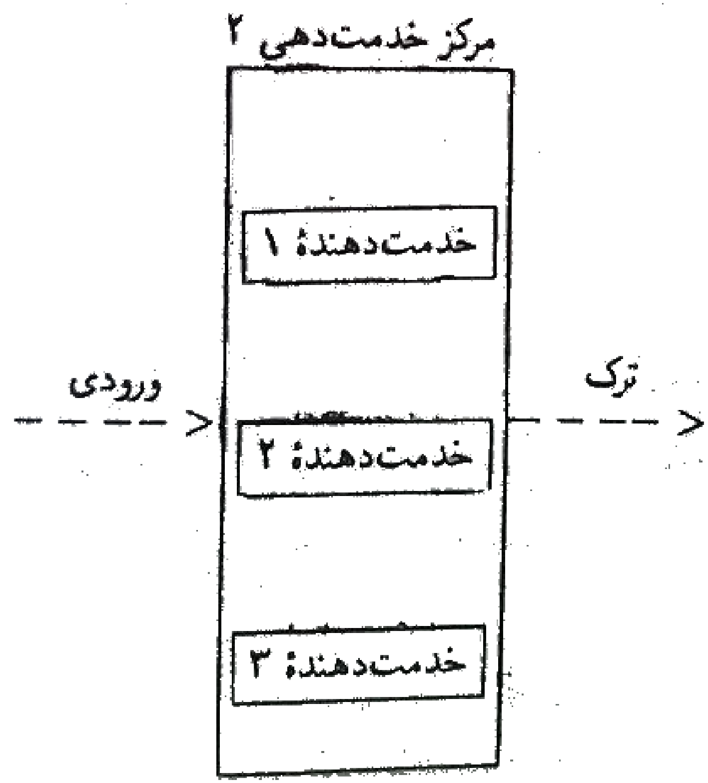
مثال

- یک سیستم انبار برای فروش کالا، با سه مر کز خدمت دهی . متقاضیان می توانند به صورت سلف سرویس یا به کمک سه نفر از کارکنان کالاهای مورد نیاز خود را بیابند.



شکل ۵-۳ انبار فروش کالا با سه مرکز خدمتدهی.

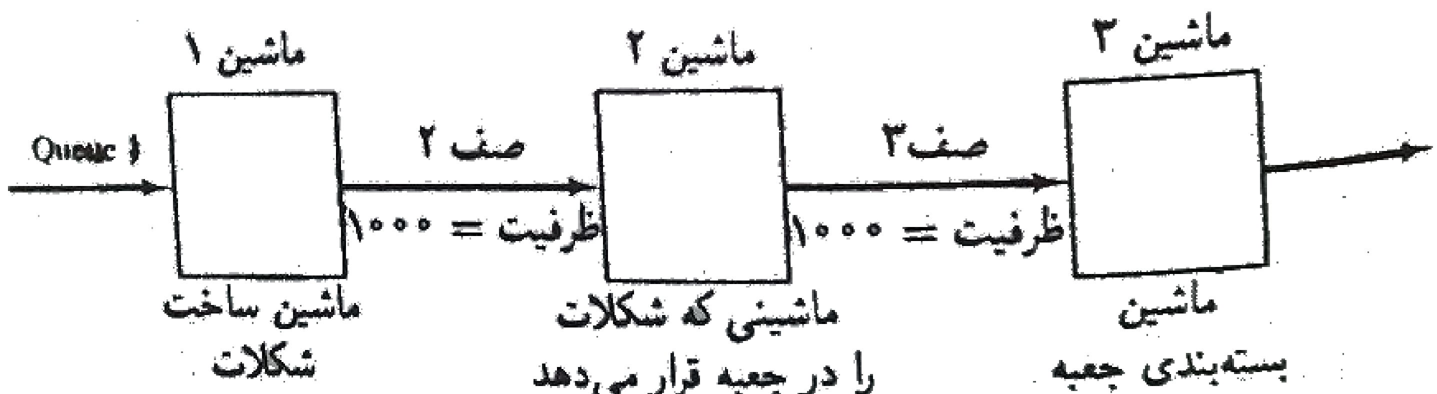
مثال



شکل۵-۴ مرکز خدمت‌دهی ۲ با ۳ خدمت‌دهندهٔ موازی.

مثال

- خط تولید یک واحد، شامل سه دستگاه ماشین، ماشین اول شکلات را تولید و لفاف پیچی می کند، ماشین دوم هر ۵۰ قطعه شکلات را در یک جعبه قرار می دهد، ماشین سوم جعبه را می بندد.



شکل ۵-۵ خط تولید شکلات.

نمادگذاری سیستم های صف

- نمادگذاری استفاده شده برای سیستم های صف به شکل $A/B/c/N/K$ می باشد. این حروف معرف مشخصه های زیر برای سیستم صف می باشند.

A نشان‌دهندهٔ توزیع فواصل بین ورود است.
B معرف توزیع مدت خدمتدهی است.
[علائم مرسوم برای A و B عبارت‌اند از M (نمایی)، D (ثابت یا قطعی)، E_k (ارلنگ مرتبهٔ k)، و G (عمومی یا دلخواه).]
c نشان‌دهندهٔ تعداد خدمت‌دهنده‌های موازی است.
N معرف ظرفیت سیستم است.
K نشان‌دهندهٔ اندازهٔ جمعیت است.

نمادگذاری سیستم های صف

- به عنوان مثال:

$M/M/1/\infty/\infty$

معرف سیستمی با یک خدمت دهنده است که ظرفیت صف آن نامحدود و جمعیت متقاضیان بالقوه آن نیز نامتناهی باشد.

نمادگذاری سیستم های صف

جدول ۵-۲ علائم سیستمهای صف با خدمت‌دهندهٔ موازی.

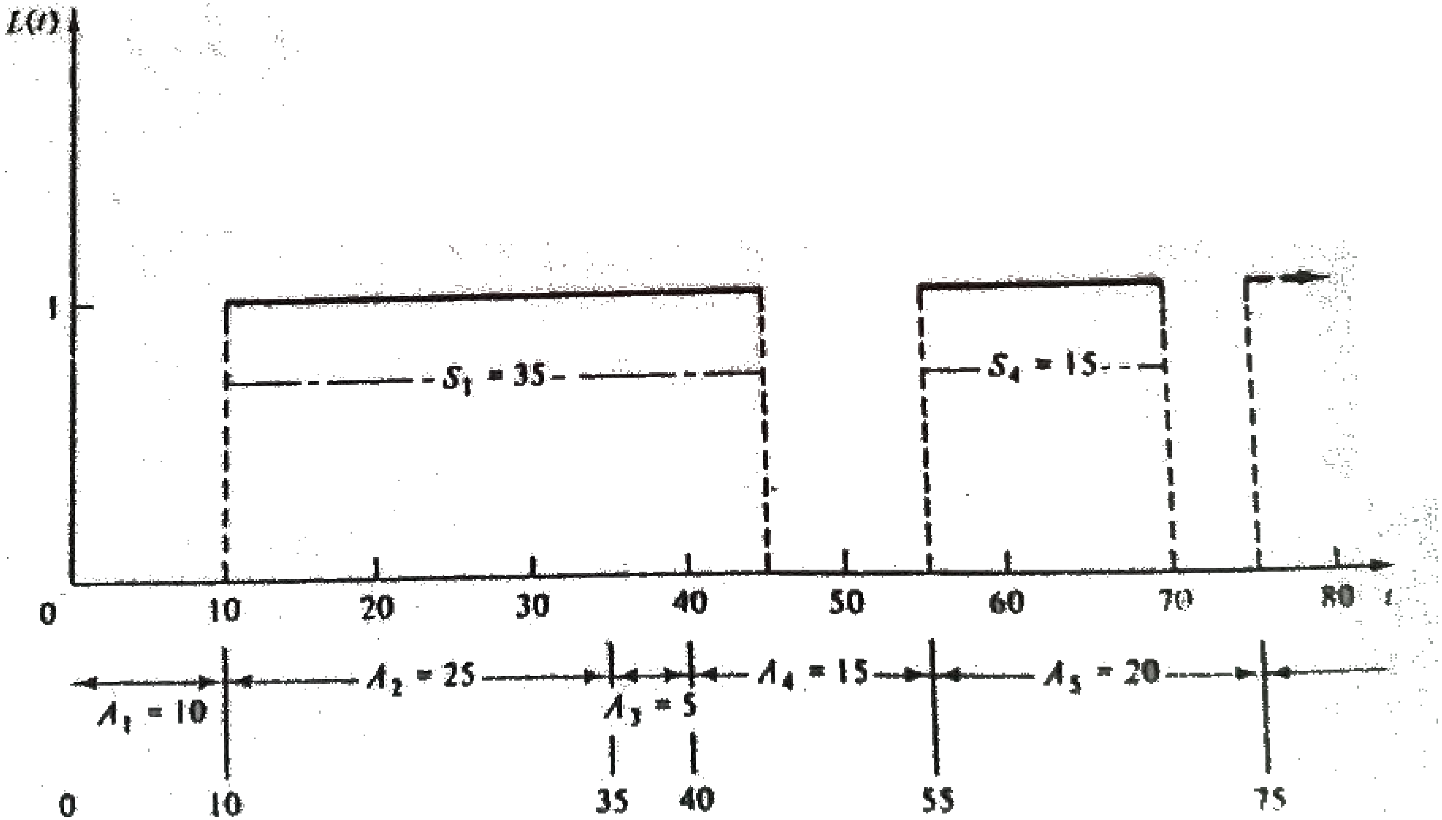
P_n	احتمال حاضر بودن n متقاضی در سیستم در حالت پایا
$P_n(t)$	احتمال حاضر بودن n متقاضی در سیستم در لحظهٔ t
λ	آهنگ ورود
λ_e	آهنگ ورود مؤثر
μ	آهنگ خدمتدهی یک خدمت‌دهنده
μ_e	آهنگ خدمتدهی مؤثر یک خدمت‌دهنده
ρ	ضریب بهره‌برداری از خدمت‌دهنده
A_n	مدت بین ورود متقاضی $n-1$ام و متقاضی nام
S_n	مدت خدمتدهی به nامین متقاضی
W_n	مجموع مدتی که متقاضی nام در سیستم می‌ماند
W_n^Q	مجموع مدتی که متقاضی nام در صف انتظار می‌ماند
$L(t)$	تعداد متقاضیان حاضر در سیستم در لحظهٔ t
$L_Q(t)$	تعداد متقاضیان حاضر در صف انتظار در لحظهٔ t
L	میانگین زمانی تعداد متقاضی حاضر در سیستم در بلندمدت
L_Q	میانگین زمانی تعداد متقاضی حاضر در صف انتظار در بلندمدت
w	میانگین مدت به سر بردن هر متقاضی در سیستم در بلندمدت
w_Q	میانگین مدت به سر بردن هر متقاضی در صف انتظار در بلندمدت

رفتار گذرا و پایای سیستمهای صف

- مثال: یک سکوی بارگیری، فضایی برای یک کامیون دارد، فاقد جا برای ایجاد صف، کامیونها طبق توزیع پوآسون با میانگین $\lambda=2$ در ساعت وارد می شوند. آهنگ خدمت دهی معادل $\mu=0.5$ در ساعت است. و مدل سیستم $M/M/1/1/\infty$ است.

- مدتهای ورود، $A1=10, A2=25, A3=5, A4=15, A5=20$
- و مدت خدمتدهی، $S1=35, S2=20, S3=60, S4=15, S5=134$

شبیه سازی سکوی بارگیری



شکل ۵-۶ وضعیت گذشتهٔ سیستم سکوی بارگیری.

- <u>ضریب بهره برداری</u>، از لحظه صفر تا دقیقه ۷۵ که خدمتدهنده مشغول است.

$$\hat{\rho} = \frac{۳۵ + ۱۵}{۱۰ + ۲۵ + ۵ + ۱۵ + ۲۰} = \frac{۵۰}{۷۵} = ۰٫۶۷$$

- $\frac{T_i}{T}$ معرف درصد مدتی است که i متقاضی، در حال دریافت خدمت هستند.

$$\hat{\rho} = ۰(\frac{T_۰}{T}) + ۱(\frac{T_۱}{T}) = ۰(\frac{۲۵}{۷۵}) + ۱(\frac{۵۰}{۷۵}) = ۰٫۶۷$$

درصد مدت بهره برداری خدمت دهنده در هر سیستم صف $M/M/1/1/\infty$

$$\rho = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} = \frac{۲}{۲ + ۰/۵} = ۰/۸۰$$

نکته:

1. مدت بهره برداری از شرایط شروع مستقل است.
2. ضریب بهره برداری در بلند مدت ثابتی بین صفر و یک است.
3. ضریب بهره برداری به T یعنی طول مدت مشاهده سیستم و I، یعنی شرایط شروع وابسته است.
4. با بزرگ شدن T ، ضریب بهره برداری به مدت بهره برداری میل می کند.

- <u>توزیع احتمال تعداد متقاضی</u> در سیستم در لحظه t یعنی $L(t)$ به شرح زیر است:

$$P(L(t)=0)=P_0(t)=\frac{\mu}{\lambda+\mu}+a_0e^{-(\lambda+\mu)t}$$

$$P(L(t)=1)=P_1(t)=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}+a_1e^{-(\lambda+\mu)t}$$

- که a_0 و a_1 ثابتهای مستقل از t ولی وابسته به شرایط شروع I هستند.

$$a_0=P_0(0)-\frac{\mu}{\lambda+\mu}$$

$$a_1=P_1(0)-\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$

- محاسبه توزیع احتمال تعداد متقاضی درمثال قبل.$\lambda=2,\mu=0.5$. فرض کنید سیستم در لحظه صفر خالی است.
- بنابراین $P_0(0)=1, \qquad P_1(0)=0$

$$P_0(t) = \frac{0.5}{2+0.5} + \left(1 - \frac{0.5}{2+0.5}\right) e^{-2.5t} = 0.2 + 0.8e^{-2.5t}$$

$$P_1(t) = \frac{2}{2+0.5} + \left(0 - \frac{2}{2+0.5}\right) e^{-2.5t} = 0.8 - 0.8e^{-2.5t}$$

$$P_0 = 0.2, \qquad P_1 = 0.8$$

• آهنگ موثر ورود، متوسط تعداد متقاضیان وارد شده به سیستم در ساعت:

$$\lambda_e = \lambda(۱ - P_۱) = ۰/۴ \quad \text{ورود در ساعت}$$

• آهنگ موثر خدمت دهی، تعداد متقاضیان که به صورت تعداد متقاضیان خدمت گرفته در واحد زمان تعبیر می شود.

$$\mu_e = \mu(۱ - P_۰) = (۰/۵)(۰/۸) = ۰/۴ \quad \text{در ساعت}$$

معیارهای عملکرد صف در بلند مدت برای سیستم های $G/G/c/N/K$

- میانگین تعداد متقاضیان حاضر در سیستم در بلند مدت(L)
- میانگین تعداد متقاضیان حاضر در صف انتظار در بلند مدت (L_Q)
- میانگین مدت به سر بردن هر متقاضی در سیستم در بلند مدت (w)
- میانگین مدت به سر بردن هر متقاضی در صف انتظار در بلند مدت (w_Q)
- ضریب بهره برداری خدمت دهنده یا درصد مدت بهره برداری خدمت دهنده ها (ρ)

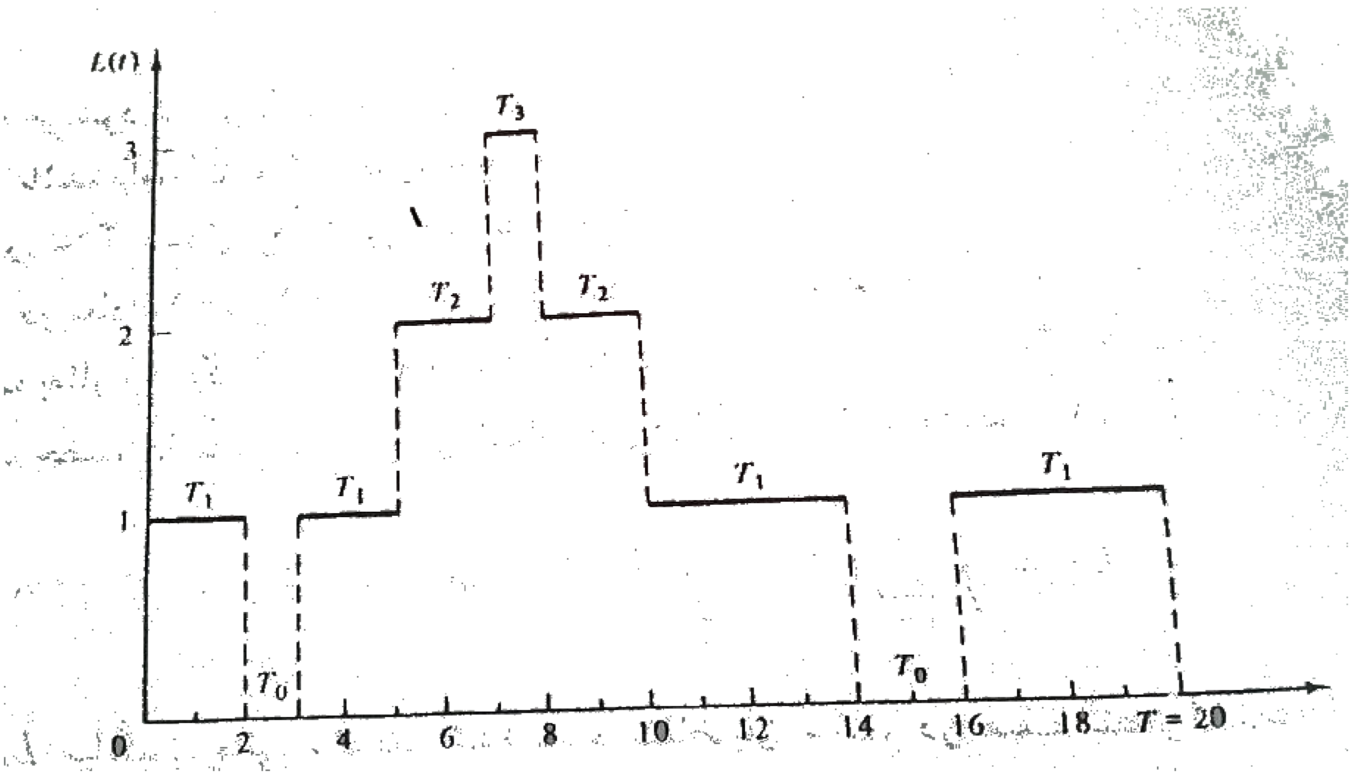
میانگین تعداد متقاضیان حاضر در سیستم در بلند مدت(L)

- T، طی مدت زمان
- L(t)، تعداد متقاضیان حاضر در لحظه t باشد.
- T_i، مجموع مدتی باشد که در دوره زمانی [0,T] دقیقه i متقاضی در سیستم حاضر باشند.

$$\hat{L} = \frac{\sum_{i=0}^{\infty} iT_i}{T} = \sum_{i=0}^{\infty} i\left(\frac{T_i}{T}\right)$$

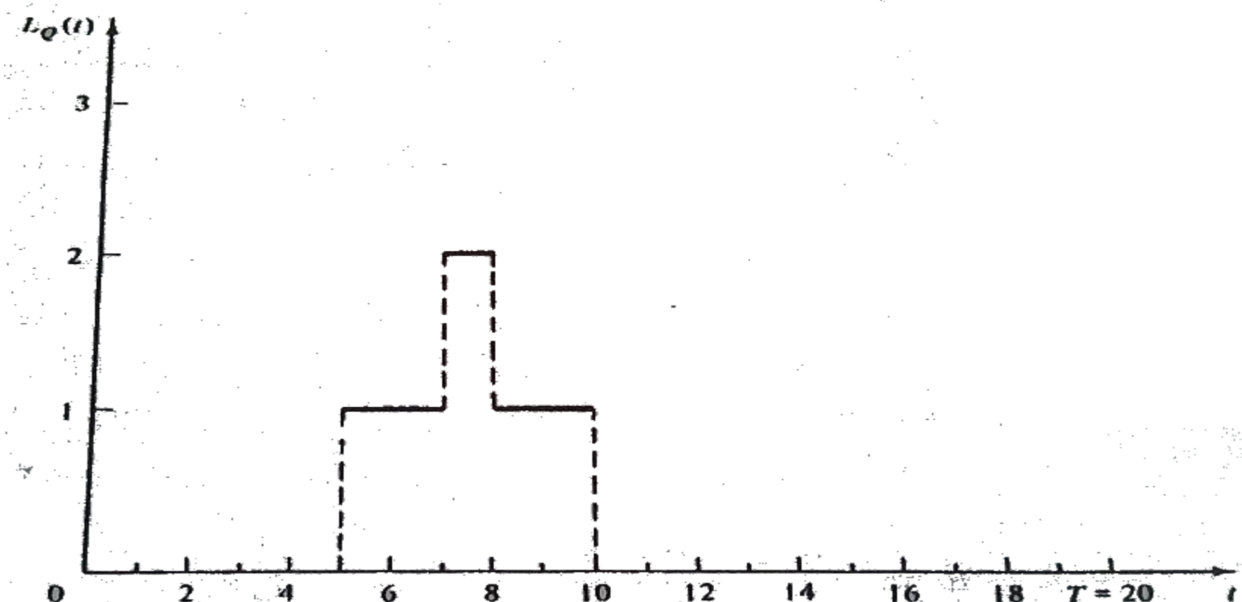
میانگین تعداد متقاضیان حاضر در سیستم در بلند مدت(L)

- مثال: میانگین تعداد متقاضیان در سیستم را بدست آورید؟



میانگین تعداد متقاضیان حاضر در صف انتظار در بلند مدت (L_Q)

- مثال: میانگین تعداد متقاضیان در سیستم قبل را بدست آورید را بدست آورید؟(با توجه به نمودار انتظار در صف)



شکل ۵-۹ تعداد در صف انتظار، $L_Q(t)$، در لحظهٔ t.

میانگین مدت به سر بردن هر متقاضی در سیستم در بلند مدت (w)

- مدتی را که هر متقاضی در محدوده [0,T]، در سیستم به سر می برد...., W1,W2,W3.
- N تعداد موارد ورود.
- در این صورت، میانگین مدت به سر بردن هر متقاضی در سیستم که میانگین مدت سیستم نامیده می شود از طریق میانگین معمولی بدست می آید.

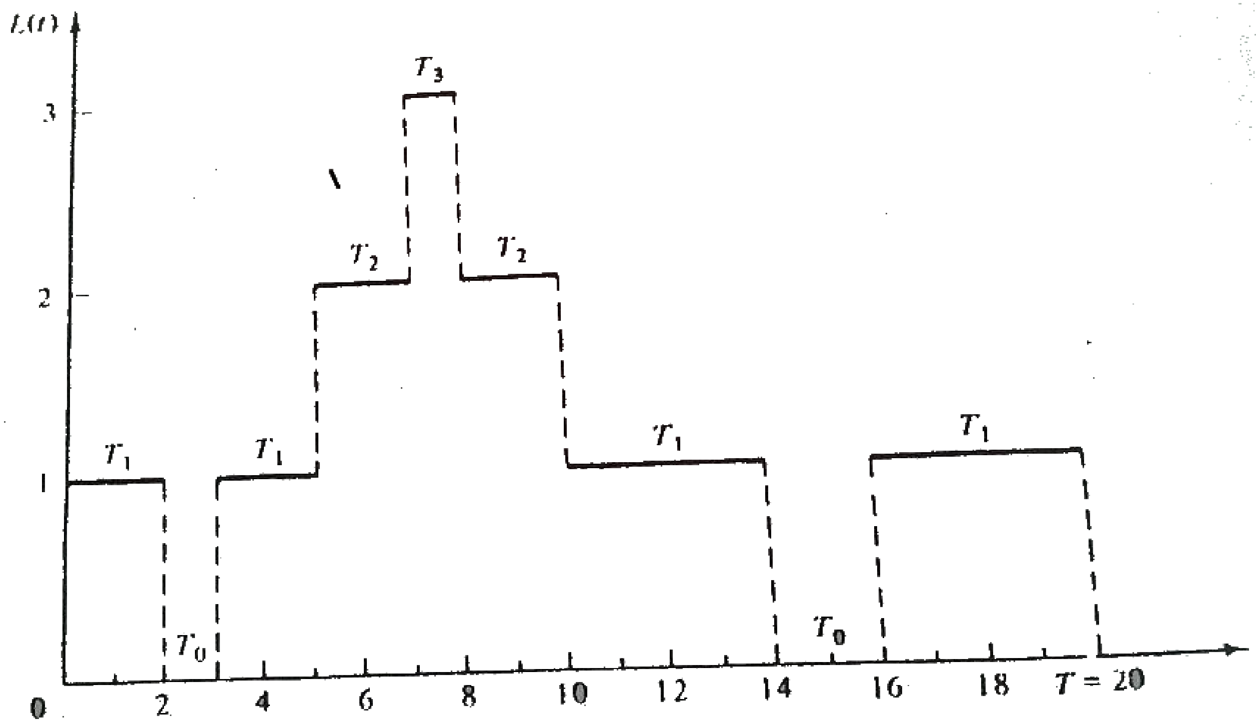
$$\hat{w} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} W_i$$

- با میل N به سمت بینهایت، به احتمال ۱ داریم

$$\hat{w} \longrightarrow w$$

- که w میانگین مدت سیستم در بلند مدت نامیده میشود.

- مثال: برای سیستم فوق که در آن N=5 است. زمان انتظار هر یک را بدست آورده و سپس میانگین زمان انتظار را محاسبه کنید.



میانگین مدت به سر بردن هر متقاضی در صف انتظار در بلند مدت (w_Q)

- اگر سیستم در دست بررسی صرفا یک صف انتظار داشته باشد آنگاه از معادله زیر استفاده می شود.

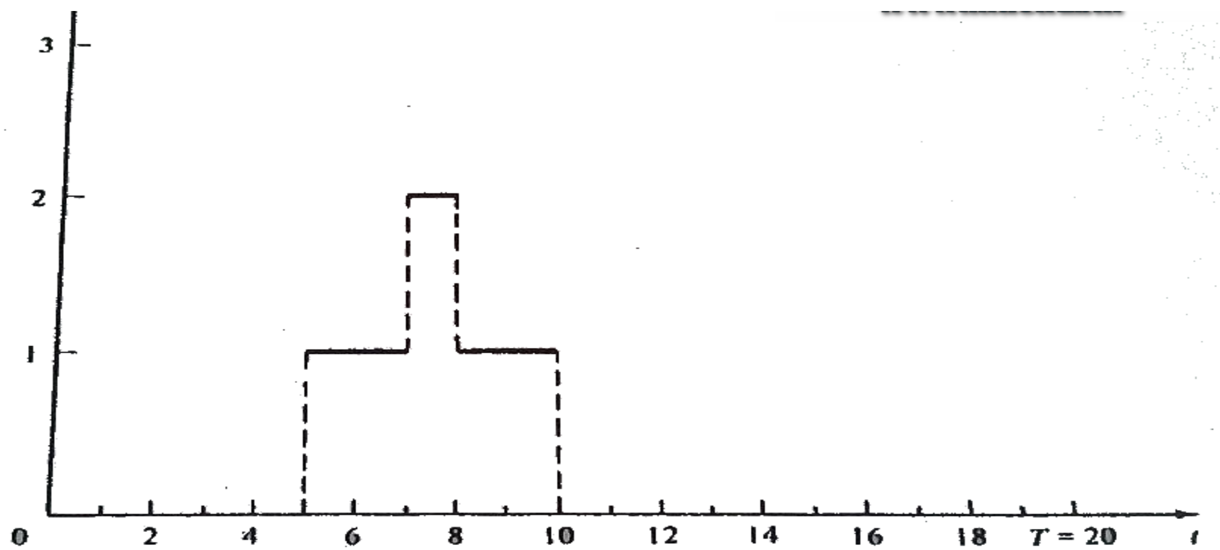
$$\hat{w}_Q = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} W_i^Q \xrightarrow[N\to\infty]{} w_Q$$

W_i^Q مجموع مدت به سر بردن متقاضی i در صف انتظار.

ϖ_Q میانگین مشاهده مدت به سر بردن در صف.

ω_Q میانگین تاخیر در بلند مدت برای هر متقاضی.

• با توجه به مثال قبل میانگین مدت در صف انتظار را بدست آوردید.



شکل ۵-۹ تعداد در صف انتظار، $L_Q(t)$، در لحظهٔ t.

ضریب بهره برداری خدمت دهنده یا درصد مدت بهره برداری خدمت دهنده ها (ρ)

- ضریب بهره برداری را نسبت مدتی که خدمت دهنده مشغول است تعریف می کنند.

$$\hat{\rho} = \frac{۱}{T} + (\text{مجموع مدت بهره‌برداری}) = \frac{۱}{T}\sum_{i=۱}^{\infty} T_i = \frac{T - T_۰}{T} = \frac{۱۷}{۲۰}$$

عامل هزینه در مسائل صف

- در تحلیل صف، هزینه به جنبه های مختلف صف انتظار یا خدمت دهنده ها، تعلق می گیرد.
- فرض کنید که سیستم برای هر متقاضی حاضر در صف هزینه ای مثلا از قرار ۱۰ واحد پول در ساعت به بار می آورد.
- هزینه ماندن در صف انتظار را می توان با استفاده از فرمول زیر بدست آورد.

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{10 W_j^Q}{N} = 10 \hat{w}_Q \qquad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{10 i T_i^Q}{T} = 10 \hat{L}_Q$$ در ساعت

- هزینه کل خدمت دهنده ها در ساعت.(خدمت دهنده های مشغول)

$$5(c\rho)$$

- هزینه وقتی خدمت دهنده ها بیکار باشند.

$$5[c(1-\rho)]$$

رفتار حالت پایا در مدلهای مارکوفی با جمعیت متناهی

- فرایند ورود پوآسون با میانگین λ ورود در واحد زمان است.
- مدتهای بین ورود توزیع نمایی با پارامتر آهنگ λ دارد.
- مدت خدمتدهی .M
- توزیع ارلنگ مرتبه k . E_k
- توزیع کلی G.
- این مدل را، مدل مارکوفی می گویند.
- سیستم صف در حالت تعادل آماری یا در حالت پایاست اگر احتمال بودن سیستم در یک وضعیت مشخص به زمان بستگی نداشته باشد. یعنی

$$P(L(t)=n)=P_n(t)=P_n$$

صف های تک مجرایی با ورود پوآسون و ظرفیت نامحدود $M/G/1$

- مدتهای خدمتدهی با میانگین ، μ^{-1}
- واریانس ، σ^2
- اگر $\rho = \lambda / \mu < 1$ باشد، صف M/M/1 یک توزیع احتمال مربوط به حالت پایای آن به شرح زیر است.

جدول ۵-۳ پارامترهای حالت پایا برای صف $M/G/1$.

ρ	λ/μ
L	$\rho + \dfrac{\lambda^2(\mu^{-2}+\sigma^2)}{2(1-\rho)} = \rho + \dfrac{\rho^2(1+\sigma^2\mu^2)}{2(1-\rho)}$
w	$\mu^{-1} + \dfrac{\lambda(\mu^{-2}+\sigma^2)}{2(1-\rho)}$
w_Q	$\dfrac{\lambda(\mu^{-2}+\sigma^2)}{2(1-\rho)}$
L_Q	$\dfrac{\lambda^2(\mu^{-2}+\sigma^2)}{2(1-\rho)} = \dfrac{\rho^2(1+\sigma^2\mu^2)}{2(1-\rho)}$
P_0	$1-\rho$

- مثال: نامناسب شدن عملکرد طبق فرایند پواسون با آهنگ$\lambda=1.5$ در ساعت
- آهنگ خدمت دهی $\mu=2$ در ساعت
- میانگین مدت تعمیر$0.5=\mu^{-1}$ در ساعت
- و انحراف معیار مدت تعمیر ۱.۹

$$\rho=\lambda/\mu=1.5/2=0.75$$

- میانگین تعداد ماشینهای خراب در بلند مدت

$$L=0.75+\frac{(1.5)^2\left[(0.5)^2+(1.9)^2\right]}{2(1-0.75)}$$

- ورود طبق فرایند پواسون با اهنگ $\lambda=2$ در ساعت
- میانگین و انحراف معیار هابیل ۲۴ دقیقه و ۲۰ دقیقه
- میانگین و انحراف معیار خباز ۲۵ دقیقه و ۲ دقیقه
- اگر ضابطه استخدام یکی از دو نفر، میانگین طول صف باشد کدام یک استخدام می شوند.
- در مورد هابیل: $\lambda=1/30$ دقیقه
- $\mu^{-1}=24$ دقیقه
- $\sigma^2=20^2$

$$\rho = \lambda/\mu = ۲۴/۳۰ = ۴/۵$$

$$L_Q = \frac{(۱/۳۰)^۲[۲۴^۲ + ۴۰۰]}{۲(۱ - ۴/۵)} = ۲{,}۷۱۱$$ متقاضی

- مثال: برای خباز
- $\lambda=1/30$
- $\mu^{-1}=24$
- $\sigma^2=2^2$

$$\rho = 25/30 = 5.6$$

$$L_Q = \frac{(۱/۳۰)^۲[۲۵^۲ + ۴]}{۲(۱ - ۵/۶)} = ۲٫۰۹۷$$ متقاضی

- نتیجه: طول صف خباز کمتر است بنابراین خباز برنده است.

صف M/M/1

- هرگاه انحراف معیارهای مدتهای خدمتدهی تقریبا با میانگینهایشان مساوی باشد، این صف مدل تقریبی مفیدی است.

جدول ۵-۴ پارامترهای حالت پایا برای صف $M/M/1$.

L	$\frac{\lambda}{\mu-\lambda}=\frac{\rho}{1-\rho}$
w	$\frac{1}{\mu-\lambda}=\frac{1}{\mu(1-\rho)}$
w_Q	$\frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}=\frac{\rho}{\mu(1-\rho)}$
L_Q	$\frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}=\frac{\rho^2}{1-\rho}$
P_n	$(1-\frac{\lambda}{\mu})(\frac{\lambda}{\mu})^n=\rho^n(1-\rho)$

- مدتهای بین ورود و مدتهای خدمتدهی در آرایشگاهی با یک خدمت دهنده توزیع نمایی دارد. میانگین مدتهای ورود $\frac{1}{2}$ ساعت، میانگین مدت خدمتدهی ۱/۳ ساعت.
- ضریب بهره برداری خدمت دهنده؟
- احتمالات حضور یک، دو، سه و چهار متقاضی؟
- مشغول بودن آرایشگر؟ بیکار بودن آرایشگر؟
- میانگین زمانی تعداد متقاضی در سیستم؟
- میانگین مدت به سر بردن متقاضی در صف انتظار؟
- میانگین زمانی تعداد افراد در صف؟

شوند

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{۲}{۳}$$

$$P_{۰} = ۱ - \frac{\lambda}{\mu} = \frac{۱}{۳}$$

$$P_{۱} = \left(\frac{۱}{۳}\right)\left(\frac{۲}{۳}\right) = \frac{۲}{۹}$$

$$P_{۲} = \left(\frac{۱}{۳}\right)\left(\frac{۲}{۳}\right)^{۲} = \frac{۴}{۲۷}$$

$$P_{۳} = \left(\frac{۱}{۳}\right)\left(\frac{۲}{۳}\right)^{۳} = \frac{۸}{۸۱}$$

$$P_{\geq ۴} = ۱ - \sum_{n=۰}^{۳} P_n = ۱ - \frac{۱}{۳} - \frac{۲}{۹} - \frac{۴}{۲۷} - \frac{۸}{۸۱} = \frac{۱۶}{۸۱}$$

$$1 - P_0 = \rho = 0.67$$

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{۲}{۳ - ۲} = ۲ \quad \text{متقاضی}$$

$$w = \frac{L}{\lambda} = \frac{۲}{۲} = ۱ \quad \text{ساعت}$$

$$w_Q = w - \mu^{-۱} = ۱ - \frac{۱}{۳} = \frac{۲}{۳} \quad \text{ساعت}$$

$$L_Q = \frac{\lambda^{۲}}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{۴}{۳(۱)} = \frac{۴}{۳} \quad \text{متقاضی}$$

صف $M/E_k/1$

- مدتهای خدمتدهی توزیع آماری ارلنگ مرتبه k داشته باشد.
- میانگین $1/\mu$
- واریانس $1/k\mu^2$
- مدل ارلنگ برای مدتهای خدمتدهی ممکن است در مواردی برای تقریب زدن مدتهای خدمتدهی سودمند باشد که توزیع نامتقارن و میانگین از انحراف معیار بزرگتر باشد.
- به ازای مقادیر ۱۰ یا بزرگتر برای k متغیر تصادفی ارلنگ تقریبا توزیع آماری نرمال پیدا می کند.
- با میل k به سمت بینهایت، متغیر تصادفی ارلنگ به مقدار $1/\mu$ نزدیک می شود.

صف $M/E_k/1$

جدول ۵-۵ پارامترهای حالت پایا برای صف $M/E_k/1$.

L	$\frac{\lambda}{\mu}+\frac{1+k}{2k}\frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}=\rho+\frac{1+k}{2k}\frac{\rho^2}{1-\rho}$
w	$\frac{1}{\mu}+\frac{1+k}{2k}\frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}=\mu^{-1}+\frac{1+k}{2k}\frac{\rho\mu^{-1}}{1-\rho}$
w_Q	$\frac{1+k}{2k}\frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}=\frac{1+k}{2k}\frac{\rho\mu^{-1}}{1-\rho}$
L_Q	$\frac{1+k}{2k}\frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}=\frac{1+k}{2k}\frac{\rho^2}{1-\rho}$

- مثال: ورودها توزیع پواسون با آهنگ ۳۰ در ساعت
- مدت لازم برای هدایت هواپیما در امر نشستن بر زمین معادل مقدار ثابت ۹۰ ثانیه.
- $\lambda=0.5$
- $\mu=2/3$
- مطلوب است تعیین L_Q, w_Q, L, w

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{۱/۲}{۲/۳} = \frac{۳}{۴}$$

$$L_Q = (۳/۴)^۲/[۲(۱-۳/۴)] = ۹/۸ = ۱{,}۱۲۵$$ هواپیما

$$w_Q = L_Q/\lambda = (۹/۸)/(۱/۲) = ۹/۴ = ۲{,}۲۵$$ دقیقه

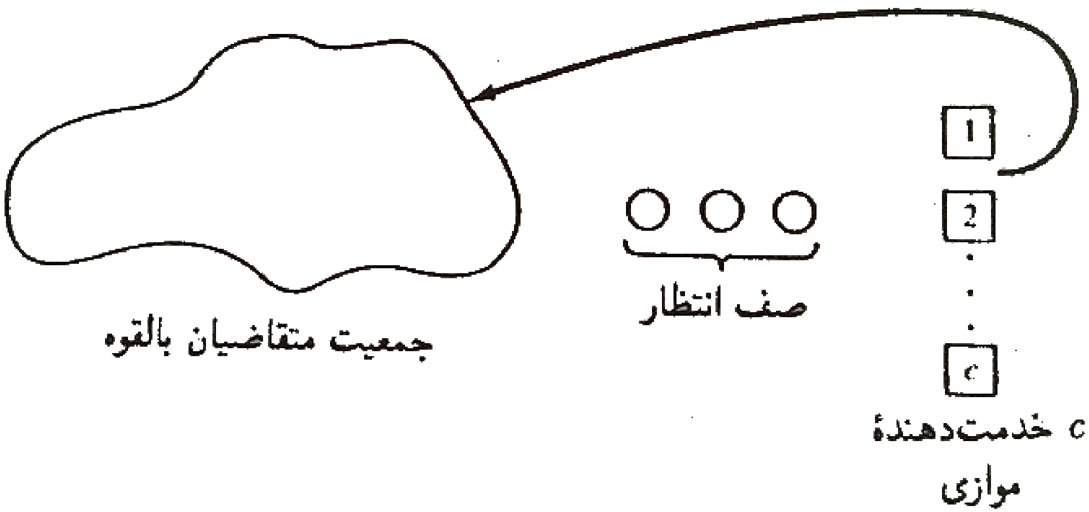
$$w = w_Q + \frac{۱}{\mu} = ۲{,}۲۵ + ۱{,}۵ = ۳{,}۷۵$$ دقیقه

$$L = L_Q + \lambda/\mu = ۱{,}۱۲۵ + ۰{,}۷۵ = ۱{,}۸۷۵$$ هواپیما

- اگر به طور متوسط در هر ساعت معادل ۵۰۰۰۰۰ریال واحد پول هزینه سوخت داشته باشد.
- متوسط هزینه سوخت ناشی از مدت انتظار
- متوسط هزینه سوخت ناشی از انتظار برای هر هواپیما

صف های چند مجرایی $M/M/c/\infty/\infty$

- C مجرا به طور موازی در حال کار است.
- مدت خدمتدهی تمام مجراها هم توزیع و مستقل، با توزیع نمایی منفی و میانگین μ.
- فرایند ورود پواسون با آهنگ λ است.



شکل ۵-۱۵ سیستم صف با چند خدمت‌دهنده.

صف های چند مجرایی $M/M/c/\infty/\infty$

- شرط تعادل آماری $\lambda/\mu<c$

ρ	$\lambda/c\mu$
P_0	$\left\{\left[\sum_{n=0}^{c-1}\frac{(\lambda/\mu)^n}{n!}\right]+\left[\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c\left(\frac{1}{c!}\right)\left(\frac{c\mu}{c\mu-\lambda}\right)\right]\right\}^{-1}$ $=\left\{\left[\sum_{n=0}^{c-1}\frac{(c\rho)^n}{n!}\right]+\left[(c\rho)^c\left(\frac{1}{c!}\right)\frac{1}{1-\rho}\right]\right\}^{-1}$
$P(L(t)\geq c)$	$\frac{(\lambda/\mu)^c P_0}{c!(1-\lambda/c\mu)}=\frac{(c\rho)^c P_0}{c!(1-\rho)}$
L	$c\rho+\frac{(c\rho)^{c+1}P_0}{c(c!)(1-\rho)^2}=c\rho+\frac{\rho P(L(t)\geq c)}{1-\rho}$
w	L/λ
w_Q	$w-1/\mu$
L_Q	$\lambda w_Q=\frac{(c\rho)^{c+1}P_0}{c(c!)(1-\rho)^2}=\frac{\rho P(L(t)\geq c)}{1-\rho}$
$L-L_Q$	$\lambda/\mu=c\rho$

- مثال: مثال کاربردی اتاق های ابزار
- توزیع پواسون با آهنگ ۲ مکانیک در دقیقه
- خدمتدهی طبق توزیع نمایی با میانگین ۴۰ ثانیه
- ابتدا بایدتعداد خدمت دهنده های لازم را با توجه به شرایط پایداری و ضریب خدمتدهی بدست آورد.
- احتمال حاضر بودن N متقاضی در سیستم؟
- احتمال مشغول بودن تمام خدمت دهنده ها؟
- میانگین رمانی طول صف مکانیکها؟
- میانگین زمانی تعداد در سیستم؟
- مدت به سر بردن یک مکانیک در اتاق؟
- میانگین مدت انتظار؟

$$P_\circ = \left\{ \sum_{n=\circ}^{١} \frac{(۴/۳)^n}{n!} + \left(\frac{۴}{۳}\right)^{۲} \left(\frac{١}{۲!}\right) \left[\frac{۲(۳/۲)}{۲(۳/۲) - ۲}\right] \right\}^{-١}$$

$$= \left\{ ١ + \frac{۴}{۳} + \left(\frac{١۶}{۹}\right)\left(\frac{١}{۲}\right)(۳) \right\}^{-١} = \left(\frac{١۵}{۳}\right)^{-١} = \frac{١}{۵} = ۰/۲$$

$$P(L(t) \geq ۲) = \frac{(۴/۳)^{۲}}{۲!(١ - ۲/۳)} \left(\frac{١}{۵}\right) = \left(\frac{۸}{۳}\right)\left(\frac{١}{۵}\right) = \frac{۸}{١۵} = ۰/۵۳۳$$

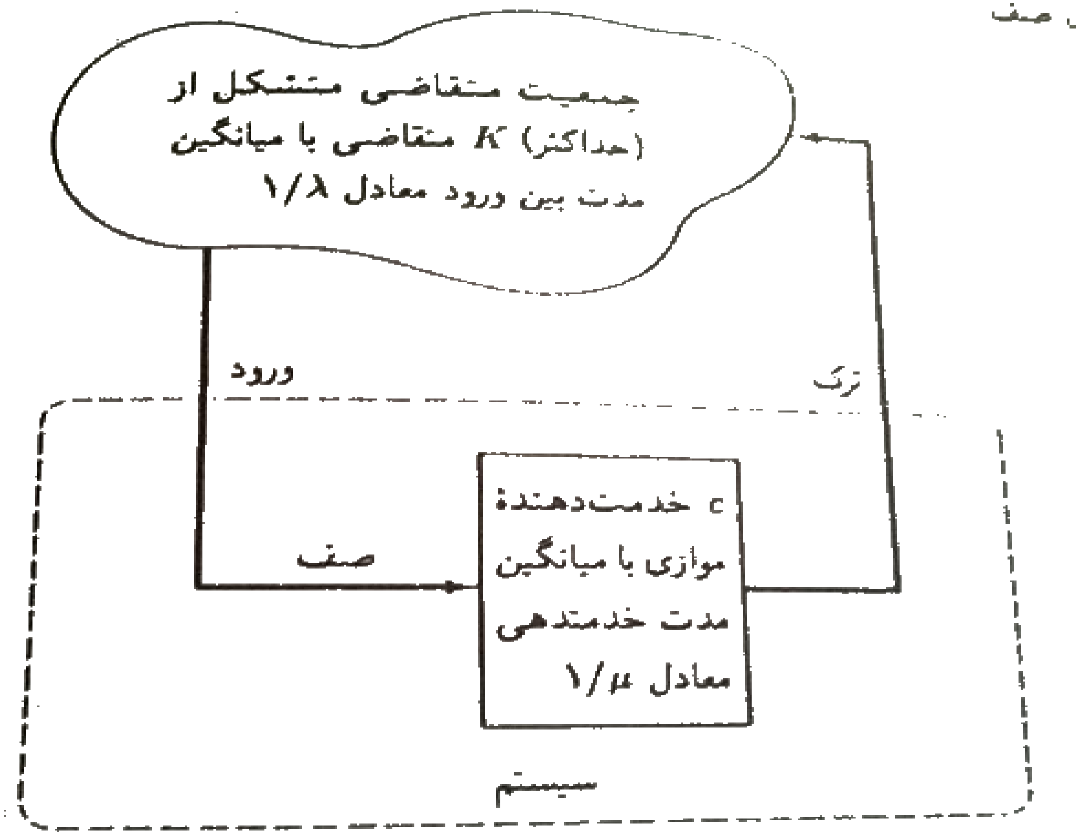
$$L_Q = \frac{(۲/۳)(۸/١۵)}{١ - ۲/۳} = ١/۰۷ \ (\text{مکانیک})$$

$$L = L_Q + \frac{\lambda}{\mu} = \frac{١۶}{١۵} + \frac{۴}{۳} = \frac{١۲}{۵} = ۲/۴ \ (\text{مکانیک})$$

$$w = L/\lambda = ۲/۴/۲ = ١/۲ \ (\text{دقیقه})$$

$$w_Q = w - \frac{١}{\mu} = ١/۲ - \frac{۲}{۳} = ۰/۵۳۳ \ (\text{دقیقه})$$

رفتار پایای مدلهایی با جمعیت متناهی $M/M/c/K/K$



شکل ۵-۱۸ مدل صف با جمعیت متناهی.

رفتار پایای مدلهایی با جمعیت متناهی $M/M/c/K/K$

- در مدل جمعیت متناهی K متقاضی وجود دارد.
- فاصله زمانی بین دو تقاضای خدمت دارای توزیع نمایی با میانگین $1/\lambda$.
- مدت خدمت دهی با توزیع نمایی با میانگین $1/\mu$.
- c خدمت دهنده موازی
- D احتمال اینکه یک وارد شونده ناچار از انتظار کشیدن برای دریافت خدمت باشد.
- F ضریب کارایی، که به صورت درصد متقاضیانی که در بلند مدت یا در حال انجام ماموریت یت در حال گرفتن خدمت هستند تعریف می شود.
- X ضریب خدمتدهی.

$$X = \frac{\lambda/\mu}{\lambda/\mu + ۱} = \frac{۱/\mu}{۱/\mu + ۱/\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$$

$$F = \frac{K - L_Q}{K}$$

جدول ۵-۹ صفحه منتخب از جداول صفهای متناهی برای جمعیتی به اندازه ۱۰ = N

X	c	D	F
۰٫۰۶۴	۲	۰٫۱۱۹	۰٫۹۹۵
	۱	۰٫۵۳۷	۰٫۹۲۰
۰٫۰۶۶	۲	۰٫۱۲۶	۰٫۹۹۵
	۱	۰٫۵۶۲	۰٫۹۳۶
۰٫۰۶۸	۳	۰٫۰۲۰	۰٫۹۹۹
	۲	۰٫۱۳۳	۰٫۹۹۴
	۱	۰٫۵۷۷	۰٫۹۳۱
۰٫۰۷۰	۳	۰٫۰۲۲	۰٫۹۹۹
	۲	۰٫۱۴۰	۰٫۹۹۴
	۱	۰٫۵۹۱	۰٫۹۲۶
۰٫۰۷۵	۳	۰٫۰۲۶	۰٫۹۹۹
	۲	۰٫۱۵۸	۰٫۹۹۲
	۱	۰٫۶۲۷	۰٫۹۱۳
۰٫۰۸۰	۳	۰٫۰۳۱	۰٫۹۹۹
	۲	۰٫۱۷۷	۰٫۹۹۰
	۱	۰٫۶۶۰	۰٫۸۹۹
۰٫۰۸۵	۳	۰٫۰۳۷	۰٫۹۹۹
	۲	۰٫۱۹۶	۰٫۹۸۸
	۱	۰٫۶۹۲	۰٫۸۸۳
۰٫۰۹۰	۳	۰٫۰۴۳	۰٫۹۹۸
	۲	۰٫۲۱۶	۰٫۹۸۶
	۱	۰٫۷۲۲	۰٫۸۶۷
۰٫۰۹۵	۳	۰٫۰۴۹	۰٫۹۹۸
	۲	۰٫۲۳۷	۰٫۹۸۴
	۱	۰٫۷۵۰	۰٫۸۵۰
۰٫۱۰۰	۳	۰٫۰۵۶	۰٫۹۹۸
	۲	۰٫۲۵۸	۰٫۹۸۱

X	c	D	F
۰٫۱۲۵	۴	۰٫۰۱۹	۰٫۹۹۹
	۳	۰٫۱۰۰	۰٫۹۹۴
	۲	۰٫۳۶۹	۰٫۹۶۲
	۱	۰٫۸۷۸	۰٫۷۳۷
۰٫۱۳۰	۴	۰٫۰۲۲	۰٫۹۹۹
	۳	۰٫۱۱۰	۰٫۹۹۴
	۲	۰٫۳۹۲	۰٫۹۵۸
	۱	۰٫۸۹۳	۰٫۷۱۸
۰٫۱۳۵	۴	۰٫۰۲۵	۰٫۹۹۹
	۳	۰٫۱۲۱	۰٫۹۹۳
	۲	۰٫۴۱۵	۰٫۹۵۲
	۱	۰٫۹۰۷	۰٫۶۹۹
۰٫۱۴۰	۴	۰٫۰۲۸	۰٫۹۹۹
	۳	۰٫۱۳۲	۰٫۹۹۱
	۲	۰٫۴۳۷	۰٫۹۴۷
	۱	۰٫۹۱۹	۰٫۶۸۰
۰٫۱۴۵	۴	۰٫۰۳۲	۰٫۹۹۹
	۳	۰٫۱۴۴	۰٫۹۹۰
	۲	۰٫۴۶۰	۰٫۹۴۱
	۱	۰٫۹۲۹	۰٫۶۶۲
۰٫۱۵۰	۴	۰٫۰۳۶	۰٫۹۹۸
	۳	۰٫۱۵۶	۰٫۹۸۹
	۲	۰٫۴۸۳	۰٫۹۳۵
	۱	۰٫۹۳۹	۰٫۶۴۴
۰٫۱۵۵	۴	۰٫۰۴۰	۰٫۹۹۸
	۳	۰٫۱۶۹	۰٫۹۸۷

X	c	D	F
۰٫۱۸۰	۵	۰٫۰۱۳	۰٫۹۹۹
	۴	۰٫۰۶۶	۰٫۹۹۶
	۳	۰٫۲۳۸	۰٫۹۷۸
	۲	۰٫۶۱۴	۰٫۸۹۰
	۱	۰٫۹۷۵	۰٫۵۴۹
۰٫۱۹۰	۵	۰٫۰۱۶	۰٫۹۹۹
	۴	۰٫۰۷۸	۰٫۹۹۵
	۳	۰٫۲۶۹	۰٫۹۷۳
	۲	۰٫۶۵۴	۰٫۸۷۳
	۱	۰٫۹۸۲	۰٫۵۲۲
۰٫۲۰۰	۵	۰٫۰۲۰	۰٫۹۹۹
	۴	۰٫۰۹۲	۰٫۹۹۴
	۳	۰٫۳۰۰	۰٫۹۶۸
	۲	۰٫۶۹۲	۰٫۸۵۴
	۱	۰٫۹۸۷	۰٫۴۹۷
۰٫۲۱۰	۵	۰٫۰۲۵	۰٫۹۹۹
	۴	۰٫۱۰۸	۰٫۹۹۲
	۳	۰٫۳۳۳	۰٫۹۶۱
	۲	۰٫۷۲۸	۰٫۸۳۵
	۱	۰٫۹۹۰	۰٫۴۷۴
۰٫۲۲۰	۵	۰٫۰۳۰	۰٫۹۹۸
	۴	۰٫۱۲۴	۰٫۹۹۰
	۳	۰٫۳۶۶	۰٫۹۵۴
	۲	۰٫۷۶۱	۰٫۸۱۵
	۱	۰٫۹۹۳	۰٫۴۵۳
۰٫۲۳۰	۵	۰٫۰۳۷	۰٫۹۹۸

جدول ۱۱-۵ معیارهای عملکرد برای مدل جمعیت متناهی، بر اساس ضریب کارایی F

L_Q	$K(1-F)$
λ_e	$(K-L_Q)/(1/\mu+1/\lambda)=(K-L_Q)X\mu=KFX\mu$
w_Q	$L_Q/\lambda_e=L_Q(1/\mu+1/\lambda)/(K-L_Q)$
$L-L_Q$	$\lambda_e/\mu=(K-L_Q)X=KFX$
w	w_Q+1/μ
L	$\lambda_e w=L_Q+\lambda_e/\mu=L_Q+(K-L_Q)X$
$K-L$	$\lambda_e/\lambda=KF(1-X)$
ρ	$(L-L_Q)/c=\lambda_e/c\mu=KFX/c$
P_0	$\left[\sum_{n=0}^{c-1}\binom{K}{n}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n+\sum_{n=c}^{K}\binom{K}{n}\frac{n!c^c(\lambda/c\mu)^n}{c!}\right]^{-1}$
P_n	$\begin{cases}\binom{K}{n}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0, & n=0,1,\ldots,c-1\\ \binom{K}{n}\frac{n!c^c(\lambda/c\mu)^n}{c!}P_0, & n=c,c+1,\ldots K\end{cases}$

- دو کارگر اداره ۱۰ ماشین تراش را برعهده دارند. ماشین ها متوسط ۲۰ دقیقه کار می کنند. و یک دوره ۵ دقیقه ای دریافت خدمت نیاز دارند.
- مقدار x؟(ضریب خدمتدهی)
- مقدار D؟(احتمال انتظار کشیدن وارد شونده)
- مقدار F؟(ضریب کارایی)
- مقدار L_Q؟(میانگین ماشینهای در حال انتظار)
- مقدار w_Q؟(میانگین مدت انتظار در صف)
- مقدار $L-L_Q$؟(میانگین ماشینهای در حال دریافت خدمت)
- مقدار $K-L$؟(میانگین تعداد ماشینهای در حال کار)

تمرین

- تمرین ۵-۱
- ۵-۱۰
- ۵-۱۵

فصل ششم

سیستم های موجودی

سیستم های موجودی

- اغلب موارد شبیه سازی تنها روش تحلیل این سیستم هاست.
- اگر مدل ریاضی برای آن وجود داشته باشد نیاز به شبیه سازی نیست.
- دو مدل برای شبیه سازی این سیستم ها وجود دارد.

۱- مدل قطعی : در این مدلها تقاضا و مهلت تحویل هر دو به قید اطمینان معلوم است.

۲- مدل احتمالی

معیارهای کارایی

- هدف هر سیستم موجودی ممکن است ماکسیمم کردن سود، یا مینیمم کردن هزینه باشد.
- انواع اصلی هزینه:

✓ هزینه قلم کالا: هزینه کالا است و وعمولا به صورت تابعی از خط مشی وجودی تغییر نمی کند.(C)

✓ هزینه سفارشدهی: هم در شرایط خرید و هم در شرایط ساخت، معمولا مستقل از مقدار خرید یا سفارش تولید در نظر گرفته می شود.(A). بعد A، واحد پول برای سفارش است.

✓ هزینه نگهداری موجودی:iC، درصدی مانند i از هزینه قلم کالا C، در طول دوره مشخصی از زمان می باشد.

✓ هزینه کمبود: اگر تقاضا هنگامی پیش آید که انبار خالی از قلم کالای مورد نظر باشد، ممکن است زیانی اقتصادی مشهور به هزینه کمبود پدید آید.(C_S)

خط مشیهای موجودی

- یک خط مشی کنترل موجودی را در نظر بگیرید که سطح موجودی در آن در نقاط گسسته زمانی که N دوره از زمان از هم فاصله دارد مورد مشاهده قرار می گیرد.
- N، طول دوره بررسی
- I_j، وضعیت موجودی
- L، نقطه تجدید سفارش
- M، سطح هدف موجودی
- Q_j، مقدار سفارش درj امین نقطه بررسی

$$Q_j = \begin{cases} 0, & I_j > L \\ M - I_j, & I_j \leq L \end{cases}$$

سیستم های قطعی

- مدل سفارش بدون کمبود و با مهلت تحویل صفر

✓ این مدل کمبود را مجاز نمی داند.

✓ هزینه کمبود بسیار زیاد نامتناهی است.

✓ هرگاه انباشته سازی آنی صورت پذیرد، مهلت تحویل(مدت بین صدور و دریافت هر سفارش) صفر است.

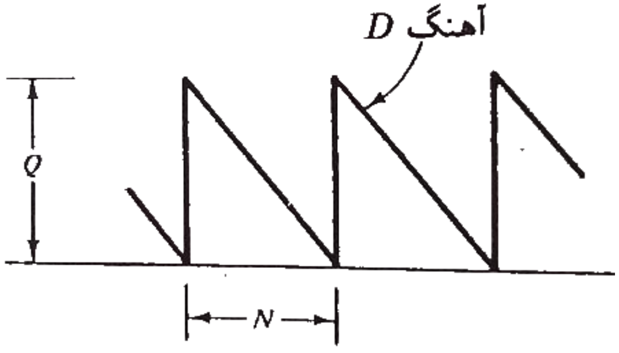
✓ هرگاه هزینه کمبود نا متناهی باشد، هزینه کل از فرمول زیر بدست می آید.

هزینه کل= هزینه تدارک(سفارش دهی) در هر دوره+ هزینه نگهداری

$$C_T = C_P + C_H$$

مدل سفارش بدون کمبود و با مهلت تحویل صفر

- هزینه سفارش دهی در هر دور $$C_P = A / N$$
- تعداد دورهای هر دور موجودی $$N = Q / D$$
- بنابراین هزینه سفارش برابرا است با $$C_P = \frac{AD}{Q}$$



شکل ۶-۱ مقداز اقتصادی سفارش.

مدل سفارش بدون کمبود و با مهلت تحویل صفر

- هزینه نگهداری:متوسط موجودی در دسترس در هزینه نگهداری موجودی.

$$C_H = \frac{QiC}{۲}$$

- معادله هزینه کل:

$$C_T = \frac{AD}{Q} + \frac{QiC}{۲}$$

- مقدار بهینه سفارش: با مشتق گرفتن معدله هزینه کل نسبت به Q و مساوی صفر قرار دادن، مقدار بهینه بدست می آید.

$$Q^* = \sqrt{\frac{۲AD}{iC}}$$

- هزینه متغیر کل هر دوره:

$$C_T^* = \sqrt{2AiCD}$$

- مثال: مدیر انباری یک قلم کالا را با داده های زیر که مربوط به تقاضا و هزینه است خریداری میکند:

$D =$ ۴ واحد در ماه

$C =$ ۵۰۰ واحد پول برای هر واحد

$i =$ ۰/۰۲ (برحسب درصدی از هزینهٔ هر قلم کالا برمبنای ماهانه)

$A =$ ۸۰ واحد پول برای هر سفارش

- مقدار بهینه سفارش؟
- هزینه متغیر کل؟
- هزینه کل؟
- هزینه نگهداری؟

مدل مقدار سفارش با سفارش پس افت ومهلت تحویل قطعی

- در این مدل کمبود مجاز شمرده می شود.
- هزینه کمبود C_S

$$C_S = \frac{\pi' S}{N} = \frac{\pi'(DT - L)^2}{2Q}$$

- هزینه نگهداری C_H

$$C_H = iC\frac{H}{N} = \frac{iC(Q + L - DT)^2}{2Q}$$

- هزینه سفارش دهی در هر دوره C_P

$$C_P = \frac{AD}{Q}$$

- هزینه متغیر کل $C_T=C_S+C_H+C_P$
- هزینه ای متغیر که در زمانی که پس افت وجود دارد در نظر گرفته می شود Π'

مدل مقدار سفارش با سفارش پس افت ومهلت تحویل قطعی

- هزینه متغیر بهینه:

$$Q^{*} = \sqrt{\frac{2AD}{iC} + \frac{2AD}{\pi'}}$$

- سطح بهینه سفارش:

$$L^{*} = DT - \sqrt{\frac{2AiCD}{\pi'(iC + \pi')}}$$

$$C_T^{*} = \sqrt{\frac{2AiC\pi' D}{iC + \pi'}}$$

- هزینه کل بهینه:

- مثال؟ تصور کنید که یک مدیر موجودی کالای را می خرد که پارامترهای زیر را دارد:

$D =$ ۱۰ واحد در روز

$T =$ ۱۶ روز

$C =$ ۲۰۰ واحد پول برای هر واحد

$A =$ ۱۶ واحد پول برای هر سفارش

$\pi' =$ ۰/۱۰ واحد پول برای هر واحد در روز

$i =$ ۰/۰۰۱ برای هر واحد در روز، به‌عنوان درصدی از هزینهٔ قلم کالا

- هزینه متغیر کل بهینه؟
- سطح بهینه سفارش؟
- هزینه کل بهینه؟

مدل مقدار سفارش ساخت

- این مدل موردی که موجودی سفارش می شود را معرفی می کند.
- در این وضعیت یک آهنگ انباشته سازی یا تولید متناهی،R ، وجود دارد که R>D است.
- در مدل مورد بحث کمبود مجاز نیست.
- هزینه های این مدل شامل هزینه راه اندازی و هزینه نگهداری می شود.
- اگر تعدا کمی راه اندازی انجام شود، هزینه نگهداری بیش از اندازه خواهد بود. اما، راه اندازیهای زیاد، در همان حال که هزینه نگهداری را پایین می آورد. هزینه راه اندازی را به عنوان جزئی از هزینه متغیر کل افزایش می دهد.

پارامترهای مدل ساخت

- هزینه راه اندازی:

$$C_P = \frac{AD}{Q}$$

- تعداد دورهای هر دور موجودی N، را می توان با جمع n_1، مدتی که در خلال آن موجودی افزایش می یابد، و n_2 مدتی که در خلال آن موجودی کاهش می یابد، بدست می آید.(M مقدار ماکسیمم موجودی است)

$$N = n_1 + n_2$$

$$n_1 = \frac{M}{R - D}$$

$$n_2 = \frac{M}{D}$$

پارامترهای مدل ساخت

- هزینه بهینه راه اندازی:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2AD}{iC(1 - D/R)}}$$

- نقطه راه اندازی بهینه:

$$L^* = DT$$

- هزینه کل بهینه راه اندازی:

$$C_T^* = \sqrt{2A(1 - D/R)iCD}$$

- مثال: هزینه ساخت کالا C=100، تعداد تقاضا D=400، واحد پول برای راه اندازی A=1000، درصد هزینه نگهداری i=4/15، آهنگ انباشته سازی R=1600.
- مقدار هزینه بهینه راه اندازی؟
- نقطه راه اندازی بهینه؟
- هزینه کل بهینه راه اندازی؟

مدل تخفیف وابسته به مقدار سفارش

- اغلب با افزایش خرید تخفیف قیمت خواهیم داشت.
- تعداد شکست های قیمت مکن است متعدد باشد.
- ارائه برنامه تخفیف قیمت، ایجاب می کند که معادله هزینه شامل هزینه قلم کالا به شکل $C_I=CD$ باشد.
- در این حالت هزینه کل، فقط بر اساس هزینه کالا، هزینه سفارشدهی و هزینه نگهداری می باشد.

$$C_T = CD + \frac{AD}{Q} + \frac{QiC}{۲}$$

مدل تخفیف وابسته به مقدار سفارش

- با شیوه تکرار شونده زیر، مقدار تدارک با کمترین هزینه را تعیین می کند:

1. با استفاده از معادله $C_T = CD + \frac{AD}{Q} + \frac{QiC}{۲}$ هزینه کل را در هر شکست قیمت محاسبه کنید.
2. مقادیر آزمایشی سفارش با مینیمم هزینه را با استفاده از معادله $Q^* = \sqrt{\frac{۲AD}{iC}}$ برای هر فاصله قیمت محاسبه کنید. هر کدام که دست نیافتنی است دور بریزید. با استفاده از معادله $C_T = CD + \frac{AD}{Q} + \frac{QiC}{۲}$ هزینه کل هر کدام را که دست یافتنی است محاسبه کنید.

۳. مینیمم هزینه های کلی را که محاسبه شده است تعیین کنید. مقدار بهینه سفارش نظیر می نیمم هزینه کل است.

۴. L^* را مساوی با DT قرار دهید.

- مثال: مدیری با شرایط زیر روبه رو است. با توجه به مقادیر داده شده میزان تخفیف را مشخص کنید.

$D =$ ۱۰ واحد در هفته

$T =$ ۲ هفته

$A =$ ۲۰ واحد پول در هر تدارک

$i =$ ۰/۵۲ به‌عنوان درصدی از هزینهٔ قلم کالا بر مبنای سالانه (۰/۰۱ بر مبنای هفتگی).

برنامه تخفیف قیمت به شرح زیر است:

مقدار سفارش	قیمت هر واحد
$1 \leq Q < 100$	۱۰ واحد پول
$100 \leq Q < 200$	۹/۵۰
$200 \leq Q$	۹/۲۵

تمرین

- تمرین ۶-۱
- تمرین ۶-۳
- تمرین ۶-۱۰
- تمرین ۶-۱۱

فصل هفتم
تولید اعداد تصادفی

اعداد تصادفی

- در شبیه سازی نیازمند روشهایی برای به کارگیری تغییرات تصادفی از طریق تولید برنامه های رایانه ای هستیم.
- به منظور تولید مقادیر تصادفی نیازمند داشتن روش و برنامه رایانه ای هستیم تا دنباله ای از اعداد تصادفی با توزیع یکنواخت بین صفر و یک تولید کند و هر عدد از سایر اعداد مستقل باشد.
- روشهای تولید اعداد تصادفی
  - ریختن تاس
  - جداول اعداد تصادفی
  - ابزار فیزیکی مولد
  - روشهای محاسباتی مبتنی بر الگوریتمهای خطی تکرار پذیر

خواص ضمنی اعداد تصادفی

- تابع چگالی
- امید ریاضی و واریانس
- اگر فاصله (۱و۰) به n رده یا زیر فاصله مساوی تقسیم شود، انتظار می‌رود که از N مشاهده N/n در هر رده قرار گیرد.
- احتمال مشاهده یک عدد در یک رده فاصله خاص مستقل از سایر مشاهده‌هاست. عنی همبستگی بین اعداد وجود نداشته باشد.

خواص اعداد تصادفی

- روش یا الگوریتم تولید اعداد تصادفی می‌بایست سریع باشد.
- الگوریتم نباید نیاز به مقدار زیادی حافظه کامپیوتر داشته باشد و می‌بایست قابل برنامه‌نویسی کامپیوتری باشد.
- طول دنباله اعداد تولید شده باید به اندازه کافی بلند باشد (به دلیل اینکه در نهایت از یک الگوریتم برای تولید اعداد تصادفی استفاده می‌شود. ایجاد سیکل اجتناب ناپذیر خواهد بود ولی طول سیکل بلند (مثلا چند میلیون و یا چند میلیارد) اهداف شبیه‌سازی را تأمین خواهد کرد).

روش های مختلف تولید اعداد تصادفی

- **روش میان مربعی**

- انتخاب یک عدد اولیه به عنوان هسته (هسته n رقمی)
- به توان ۲ رساندن هسته (اگر مربع 2n-1رقمی باشد(زوج نباشد سمت چپ صفر اضافه می شود.)
- اگر n زوج باشد n/2 رقم از چپ و راست حذف می کنیم و در سمت چپ ارقام ممیز می گذاریم.
- به همین ترتیب ادامه می دهیم و تولید عدد تصادفی می کنیم

مثال تولید اعداد تصادفی با روش میان مربعی

- مثال۱:

$$X_0 = 5497 \Rightarrow$$
$$X_0^{\,2} = 30217009 \Rightarrow X_1 = 2170 \Rightarrow R_1 = 0.2170$$
$$X_1^{\,2} = 04708900 \Rightarrow X_2 = 7989 \Rightarrow R_2 = 0.7989$$
$$X_2^{\,2} = 04708900 \Rightarrow X_3 = 7089 \Rightarrow R_3 = 0.7089$$

- مثال ۲:

$$X_0 = 5197 \Rightarrow$$
$$X_0^{\,2} = 27008809 \Rightarrow X_1 = 0088 \Rightarrow R_1 = 0.0088$$
$$X_1^{\,2} = 00007744 \Rightarrow X_2 = 0077 \Rightarrow R_2 = 0.0077$$
$$X_2^{\,2} = 00005929 \Rightarrow X_3 = 0059 \Rightarrow R_3 = 0.0059$$

- مقدار تکراری یا ۰ برای ارقام میانی منجر به فروپاشی الگوریتم می شود.

$$X_i = 6500 \Rightarrow$$
$$X_i^{\,2} = 42250000 \Rightarrow X_{i+1} = 2500 \Rightarrow R_{i+1} = 0.2500$$
$$X_{i+1}^{\,2} = 06250000 \Rightarrow X_{i+2} = 2500 \Rightarrow R_{i+2} = 0.2500$$

- **روش میان ضربی**

- X_0, X_0' با n رقم را در نظر گرفته در هم ضرب می کنیم
- X_1 مانند روش میان مربعی n رقم میانی را گرفته و با اعشار عدد اول را می سازیم هسته را n رقم میانی قرار داده و به همراه X_0 مراحل را تکرار می کنیم
- مثال:

$$X_0' = 2938, X_0 = 7229 \Rightarrow$$

$$U_1 = X_0' * X_0 = 21238802 \Rightarrow X_1 = 2388 \Rightarrow R_1 = 0.2388$$

$$U_2 = X_0 * X_1 = 17262852 \Rightarrow X_2 = 2628 \Rightarrow R_2 = 0.2628$$

- **روش مضرب ثابت**

در این روش یک هسته و یک عدد ثابت مانند K وجود دارد.
مطابق با روش میانضربی هسته در عدد ثابت K ضرب می شود و عدد میانی حاصلضرب به دست می آید. سپس عدد میانی به یک عدد اعشاری بین صفر تا یک تبدیل می شود.
نکته : عدد K باید با عدد هسته از لحاظ ارقام مساوی باشد.

مثال $X_0 = 7223$ $K = 3987$

$U_1 = K*X_0 \rightarrow 3987*7223 = 28798101$

$X_1 = 7981$ $R_1 = 0.7981$

$U_2 = K*X_1 \rightarrow 3987*7981 = 31820247$

$X_2 = 8202$ $R_2 = 0.8202$

- **روش همنهشتی جمعی**
  - دنباله n تایی مانند $X_1, X_2, \ldots, X_n$ را می گیرد و بقیه دنباله را تولید می کند
  - اساس تولید مقدار رابطه زیر است: $X_i \equiv (X_{i-1} + X_{i-n}) \bmod m, i = n+1, n+2, \ldots$
- سرعت تولید بسیار بالاست
- مثال: n=5 و m=100 و $X_1, X_2, \ldots, X_5$ به ترتیب ۵۷و۳۴و۸۹و۹۲و۱۶

$$X_6 \equiv (X_5 + X_1) \bmod 100 = 73 \bmod 100 = 73$$
$$X_7 \equiv (X_6 + X_2) \bmod 100 = 107 \bmod 100 = 7$$
$$X_8 \equiv (X_7 + X_3) \bmod 100 = 96 \bmod 100 = 96$$
$$X_9 \equiv (X_8 + X_4) \bmod 100 = 188 \bmod 100 = 88$$
$$\ldots$$

- **مولدهای همنهشتی خطی**

$$X_i \overset{m}{\equiv} \left(aX_{i-1} + c\right)$$

$$R_i = \frac{X_i}{m}, i = 1,2,\ldots$$

- X_0: مقدار اولیه هسته
- a: ضریب ثابت مولد
- c: مقدار ثابت مولد
- m: مقدار پیمانه
- نحوه انتخاب مقادیر پارامترها تأثیر فراوانی در خواص آماری از قبیل میانگین، واریانس و طول سیکل دارد. وقتی c مخالف صفر باشد مولد را مولد همنهشتی آمیخته می‌نامند و در صورتی که c برابر صفر باشد مولد همنهشت ضربی نامیده می‌شود.

مثال روش همنهشتی خطی

- مثال: X_0 =27 و a=17 و c=43 و m=100

$$X_0 = 27 \Rightarrow X_1 \equiv [17(27)+43] \bmod 100 = 502 \bmod 100 = 2 \Rightarrow R_1 = X_1 / m = 0.02$$
$$X_2 \equiv [17(2)+43] \bmod 100 = 77 \bmod 100 = 77 \Rightarrow R_2 = X_2 / m = 0.77$$
$$X_3 \equiv [17(77)+43] \bmod 100 = 1352 \bmod 100 = 52 \Rightarrow R_3 = X_3 / m = 0.52$$

- برای تراکم بالاتر باید m بسیار بزرگ باشد.
- اگر $a = \sqrt{m}$ کوچکترین ضریب همبستگی زنجیره ای مرتبه یک حاصل می شود.

مثال روش همنهشتی خطی

For a concrete illustration, let $m = 2^{31} - 1 = 2147483647$, $c = 0$, and $a = 16807$. These parameters were originally proposed in [83]. Take $x_0 = 12345$. Then

$$x_1 = 16,807 \times 12,345 \bmod m = 207,482,415$$

$$u_1 = \frac{207,482,415}{m} = 0.0966165285$$

$$x_2 = 16,807 \times 207,482,415 \bmod m = 1,790,989,824$$

$$u_2 = \frac{1,790,989,824}{m} = 0.8339946274$$

$$x_3 = 16,807 \times 1,790,989,824 \bmod m = 2,035,175,616$$

$$u_3 = \frac{2,035,175,616}{m} = 0.9477024977$$

آزمون های یکنواخت و آزمونهای استقلال

۱- آزمون های فراوانی برای تست یکنواختی توزیع اعداد تولید شده

۱-۱- آزمون مربع کای

۱-۲- آزمون کالموگروف-اسمیرنف

۲- آزمون های استقلال اعداد تولید شده

۲-۱- آزمون روند

۲-۱-۱- روندهای صعودی و نزولی

۲-۱-۲- روندهای کوچکتر و بزرگتر از میانگین

۲-۱-۳- آزمون روند براساس طول روند (طول روندهای بزرگتر و کوچکتر از میانگین، طول روندهای صعودی و نزولی

۲-۲- آزمون همبستگی

۲-۳- آزمون افراز

۲-۴- آزمون شکاف

آزمون یکنواختی توزیع اعداد تولید شده

الگوریتم های تست یکنواختی اعداد تصادفی بر پایه تئوری‌های آماری، یا آزمونهای فرض می‌باشند. به عنوان مثال در تست توزیع یکنواخت ما دو فرض داریم که یکی بیان می کند که اعداد تصادفی توزیع یکنواخت دارند که ما آن را فرض صفر می‌نامیم و دیگری بیان می کند که اعداد تصادفی توزیع یکنواخت ندارند و ما ان را H_1 می‌نامیم که در آمار به عنوان فرض جایگزین شناخته می‌شود. در این تست آماری علاقه‌مند به بررسی نتیجه فرض صفر رد کردن آن و یا عدم رد آن هستیم.

$H_0 : R_i \sim U[0,1]$ اعداد توزیع یکنواخت دارد

$H_1 : R_i \sim U[0,\cancel{1}]$ اعداد دارای توزیع یکنواخت نیستند

احتمال خطای نوع اول=p(رد فرض صفر|صحت فرض صفر)

احتمال خطای نوع دوم=p (پذیرش فرض صفر|فرض صفر غلط)

مثال آزمون مربع کای

اعداد زیر با یک رویه خاص تولید شده اند، آیا این اعداد در سطح معنی دار ۹۵٪ دارای تابع توزیع یکنواخت می باشند؟

0.34	0.90	0.25	0.89	0.87	0.44	0.12	0.21	0.46	0.67
0.83	0.76	0.79	0.64	0.70	0.81	0.94	0.74	0.22	0.74
0.96	0.99	0.77	0.67	0.56	0.41	0.52	0.73	0.99	0.02
0.47	0.30	0.17	0.82	0.56	0.05	0.45	0.31	0.78	0.05
0.79	0.71	0.23	0.19	0.82	0.93	0.65	0.37	0.39	0.42
0.99	0.17	0.99	0.46	0.05	0.66	0.10	0.42	0.18	0.49
0.37	0.51	0.54	0.01	0.81	0.28	0.69	0.34	0.75	0.49
0.72	0.43	0.56	0.97	0.30	0.94	0.96	0.58	0.73	0.05
0.06	0.39	0.84	0.24	0.40	0.64	0.40	0.19	0.79	0.62
0.18	0.26	0.97	0.88	0.64	0.47	0.60	0.11	0.29	0.78

Interval	O_i	E_i	$O_i - E_i$	$(O_i - E_i)^2$	$\frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$
1	8	10	−2	4	0.4
2	8	10	−2	4	0.4
3	10	10	0	0	0.0
4	9	10	−1	1	0.1
5	12	10	2	4	0.4
6	8	10	−2	4	0.4
7	10	10	0	0	0.0
8	14	10	4	16	1.6
9	10	10	0	0	0.0
10	11	10	1	1	0.1
	100	100	0		3.4

$$\chi^2_{0.05,9} = 16.9 \Rightarrow$$

دلیلی بر رد فرض

صفر وجود ندارد

مثال آزمون KS

فرض کنید توسط یک رویه ساخت اعداد تصادفی، اعداد زیر ساخته شده اند:

۰.۸۱ و ۰.۱۴ و ۰.۰۵ و ۰.۹۳ و ۰.۴۴

آیا این اعداد به طور یکنواخت توزیع شده اند؟

$R_{(i)}$	0.05	0.14	0.44	0.81	0.93
i/N	0.20	0.40	0.60	0.80	1.00
$i/N - R_{(i)}$	0.15	0.26	0.16	—	0.07
$R_{(i)} - (i-1)/N$	0.05	—	0.04	0.21	0.13

$D^{+} = 0.26$

$D^{-} = 0.26$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} D = Max\{0.21, 0.26\} = 0.26 \\ D_{0.05,5} = 0.56 \end{array} \right\} \Rightarrow D_{0.05,5} > D \Rightarrow$$ دلیلی بر رد فرض صفر وجود ندارد

مقایسه آزمون مربع کای و KS

- آزمون k-s تک تک مشاهدات را در نظر می‌گیرد، ولی کای دو مشاهدات را رده بندی کرده و بدین ترتیب تعدادی از داده‌ها حذف شده و دقت کم می‌شود.
- در مواردی که تعداد مشاهدات کم است، k-s به دلیل دقیق بودن قابل اعمال است، ولی کای دو بیشتر برای نمونه‌های بزرگ کاربرد دارد.
- در کای دو امکان برآورد پارامترها از طریق مشاهده نیز وجود دارد (با تغییر آزمون) ولی k-s این انعطاف‌پذیری را ندارد.
- کای دو هم در مورد داده‌های پیوسته و هم گسسته قابل به کارگیری است، ولی k-s تنها برای مواردی که تابع توزیع تجمعی جهشی نیست. قابل به کارگیری است.

آزمون همبستگی

اگر داده های تولید شده توسط یک مولد خاص، تصادفی باشند، نبایستی هیچ نظمی به هیچ طریقی میان آن ها وجود داشته باشد. در حقیقت برای بررسی عدم وجود نظم میان داده ها، آزمون فرض زیر انجام می شود.

$$H_0 : \rho_{im} = 0$$
$$H_1 : \rho_{im} \neq 0$$

در این آزمون می توان نشان داد که آماره آزمون برابر است با: $Z = \dfrac{\hat{\rho}_{im}}{\hat{\sigma}_{\hat{\rho}_{im}}}$

در این رابطه پارامترهای به صورت زیر به دست می آید:

$$\hat{\rho}_{im} = \frac{1}{M+1}\left[\sum_{k=0}^{M} R_{i+km} R_{i+(k+1)m}\right] - 0.25 \qquad \hat{\sigma}_{\hat{\rho}_{im}} = \frac{\sqrt{13M+7}}{12(M+1)}$$

مثال

توسط یک مولد خاص، اعداد زیر تولید شده است. آیا بر اساس تست همبستگی، می توان اعداد سوم، هشتم، سیزدهم، ... را در سطح ۹۵٪ تصادفی دانست؟

۰.۹۳	۰.۸۳	۰.۲۸	۰.۶۴	۰.۳۱	۰.۸۹	۰.۲۸	۰.۲۳	۰.۰۱	۰.۱۲
۰.۸۸	۰.۷۵	۰.۲۷	۰.۶۰	۰.۴۱	۰.۹۱	۰.۳۵	۰.۳۳	۰.۱۵	۰.۹۹
۰.۸۷	۰.۶۹	۰.۳۶	۰.۱۹	۰.۵۸	۰.۹۵	۰.۴۳	۰.۰۵	۰.۴۹	۰.۶۸

حل مثال

$$i = 3 \qquad N = 30 \qquad M = 4$$

$$\alpha = 0.05 \Rightarrow Z_{\frac{0.05}{2}} = 1.96$$

$$\hat{\rho}_{im} = \frac{1}{4+1}(0.23*0.28 + 0.28*0.33 + 0.33*0.27$$
$$+ 0.27*0.05 + 0.05*0.36) - 0.25 = -0.1945$$

$$\hat{\sigma}_{\hat{\rho}_{im}} = \frac{\sqrt{13*4+7}}{12(4+1)} = 0.1280$$

$$\Rightarrow Z = \frac{-0.1945}{0.1280} = -1.516 \Rightarrow -1.96 \le -1.516 \le 1.96$$

دلیلی بر رد فرض صفر وجودندارد

تمرین

- تمرین ۷-۱
- تمرین ۷-۲
- تمرین ۷-۳
- تمرین ۷-۴
- تمرین ۷-۵
- تمرین ۷-۶
- تمرین ۷-۷