

فصل اول

معرفی سیگنال های زمان پیوسته و زمان گسسته

تعریف سیگنال : تابعی از یک یا چند متغیر مستقل است نظیر سیگنال صحبت خروجی یک میکروفن .

تعریف سیستم : سیستم را می توان به شکل دستگاهی در نظر گرفت که سیگنال های ورودی را گرفته و براساس ساختار دستگاه یک سیگنال خروجی را می دهد .

طبقه بندی سیگنال :

- 1 - پیوسته : این سیگنال ها به صورت پیوسته در زمان بوده و با $x(t)$ نشان داده می شود .
- 2 - گسسته : سیگنالهای گسسته به صورت گسسته در زمان بوده و با $x[n]$ نشان داده می شود . (این سیگنال در حقیقت از سیگنال های پیوسته گرفته می شود .)

نکته : سیگنال های فیزیکی طبیعی نظیر سیگنال صحبت سیگنال های پیوسته می باشند . برای پردازش بهتر این سیگنال ها آنها را به حالت گسسته در می آورند . برای این منظور از سیگنال پیوسته نمونه برداری می شود و ثابت می شود اگر تعداد نمونه ها در واحد زمان از یک مقدار مشخص بیشتر باشد می توان لز روی سیگنال گسسته مجدداً سیگنال پیوسته را بازسازی نمود .

سیگنال های انرژی و توان :

- 1 - انرژی : سیگنال های محدود در زمان
- 2 - توان : سیگنال های نامحدود در زمان

نکته : معمولاً سیگنال ها از جنس ولتاژ یا جریان هستند و مقدار توان دو ولتاژ یا جریان متناسب است . بر این اساس انرژی کل یک سیگنال به صورت زیر تعریف می شود :

1 در حالت پیوسته :

$$E = \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt$$

$$P = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt$$

2 - در حالت گسسته :

$$E = \sum_{x=-N}^N |x[n]|^2$$

$$P = \frac{1}{2N+1} \sum_{x=-N}^N |x[n]|^2$$

نکته : سیگنال هایی که محدود زمان باشند دارای انرژی محدود هستند و توان متوسط آنها صفر است . به این سیگنال ها سیگنال انرژی گفته می شود .
نکته : سیگنال هایی که نا محدود زمان باشند دارای انرژی بی نهایت هستند و توان متوسط آنها محدود است . به این سیگنال ها سیگنال توان گفته می شود .

تبدیلات سیگنال ها :

1 - شیفت زمانی :

$$y(t) = x(t - t_0)$$

$$y[n] = x[n - n_0]$$

شیفت به راست : اگر $t > 0$ باشد $x(t)$ را به اندازه t_0 به سمت راست شیفت می دهیم تا $y(t)$ بدست آید .
شیفت به چپ : اگر $t < 0$ باشد $x(t)$ را به اندازه t_0 به سمت چپ شیفت می دهیم تا $y(t)$ بدست آید .

2 - معکوس شدن زمان :

$$y(t) = x(-t)$$

$$y[n] = x[-n]$$

$x(-t)$ یا $x[-n]$ انعکاس $x(t)$ با $x[n]$ نسبت به محور قائم هستند .

3 - فشرده شدن زمان :

$$y(t) = x(at) \quad a \in R$$

$$y[n] = x[an] \quad a \in R$$

حالت پیوسته :

الف) اگر $|a| > 1$ باشد $y(t)$ فشرده شده سیگنال $x(t)$ خواهد بود .
ب) اگر $|a| > 1$ باشد $y(t)$ باز شده سیگنال $x(t)$ خواهد بود .
ج) اگر $a < 0$ باشد باید بعد از تغییر مقیاس ، وارون زمانی انجام داد.

تذکر: اگر سیگنال زمان پیوسته و یا زمان گسسته متناوب باشند، در اثر تغییر مقیاس زمانی در اثر فشرده شدن، دوره تناوب سیگنال جدید کم شده و در اثر باز شدن، دوره تناوب سیگنال جدید افزایش می یابد.

تذکر: $y[n] = x[kn]$ نسبت به $x[n]$ فشرده شده، که برخی از مقادیر را از دست می دهد.

تذکر: در زمان پیوسته ماهیت سیگنال عوض نمی شود، اما در زمان گسسته ماهیت سیگنال تغییر می کند و سیگنال جدیدی بدست می آید.

تذکر: $y[n] = x[\frac{1}{k}n]$ نسبت به $x[n]$ باز شده که در نتیجه تعدادی صفر به $y[n]$ اضافه خواهد شد. بدین ترتیب ماهیت سیگنال گسسته در اثر تغییر مقیاس زمانی تغییر می کند.

نکته: $x(at-B)$: همیشه ابتدا شیفت به اندازه B انجام شده سپس به اندازه a فشرده می شود.

سیگنال متناوب (پریودیک):

سیگنال متناوب به سیگنالی گفته می شود که در بازه های زمانی مشخص عیناً تکرار شده باشد.

$$\begin{aligned} X(t) &= x(t+T) && \text{پریودیک با دوره تناوب } T \\ X[n] &= x[n+N] && \text{پریودیک با دوره تناوب } N \end{aligned}$$

سیگنال های زوج و سیگنال های فرد:

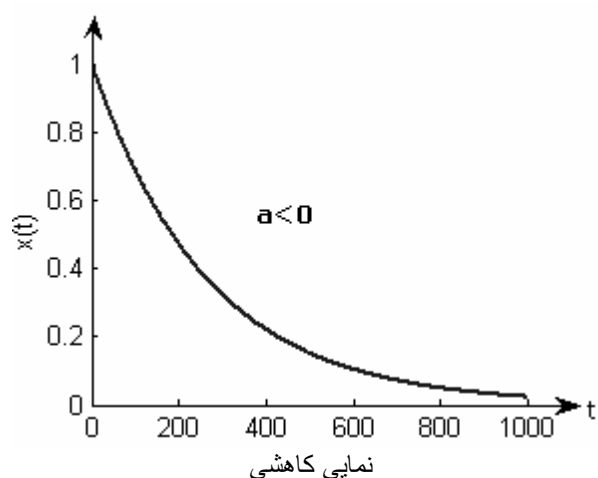
$$\begin{aligned} \text{Even}\{x(t)\} &= \frac{1}{2}[x(t) + x(-t)] && \text{1 - سیگنال زوج} \\ \text{Odd}\{x(t)\} &= \frac{1}{2}[x(t) - x(-t)] && \text{2 - سیگنال فرد} \end{aligned}$$

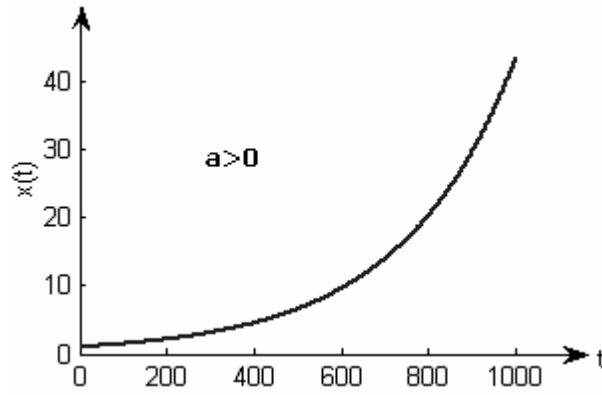
در نتیجه و با توجه به قسمت فرد و زوج سیگنال خواهیم داشت:
 $x(t) = \text{Even}\{x(t)\} + \text{Odd}\{x(t)\}$

معرفی سیگنال های مهم:

1 - سیگنال نمایی حقیقی:

$$x(t) = Ce^{at} \quad \text{پیوسته}$$

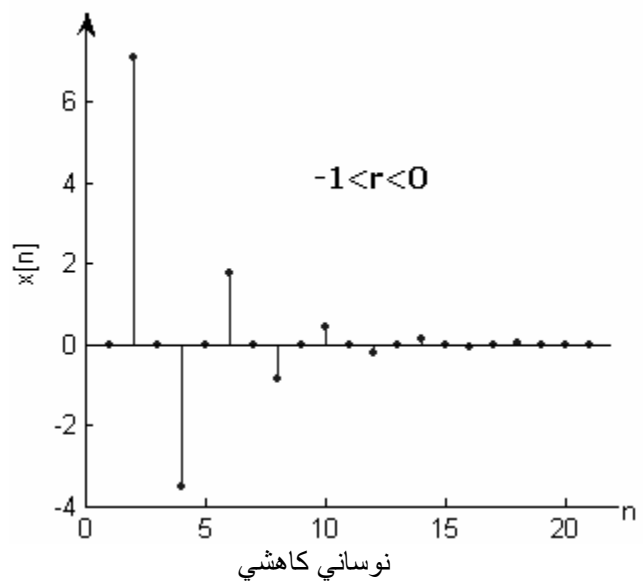
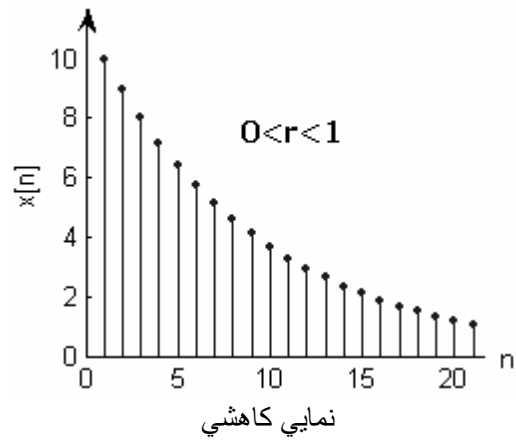
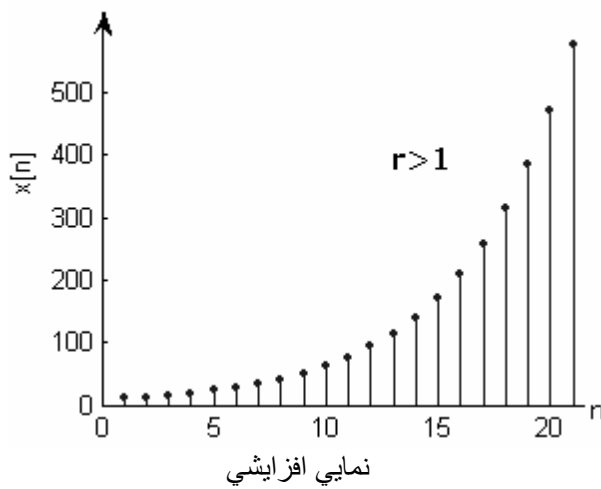


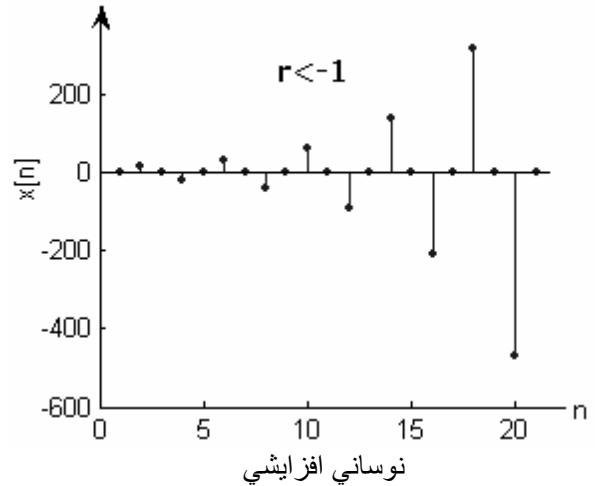


نمایی افزایشی

تذکر: چنانچه دامنه سیگنال خروجی سیستمی با افزایش زمان به طور نامحدود زیاد شود، سیستم تحت بررسی به عنوان سیستم ناپایدار شناخته می شود.

گسسته $x(t) = Cr^n$





2 - سیگنال سینوسی :

پیوسته : $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$

تذکر : سیگنال سینوسی همواره متناوب و با دوره تناوب T است .

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

گسسته : $x[n] = A \cos(\omega_0 n + \varphi)$

$$\omega_0 = 2\pi \frac{k}{N}$$

تذکر : سیگنال زمان گسسته سینوسی به شرطی متناوب است که بتوان $N \in Z^+$ را بدست آورد به نحوی که $x[n] = x[n + N]$ گردد . (این سیگنال برخلاف سیگنال زمان پیوسته سینوسی بعضا متناوب نیست .)

3 - سیگنال نمایی مختلط :

پیوسته : $x(t) = Be^{j\omega t}$ یا $x(t) = Be^{-j\omega t}$

گسسته : $x[n] = e^{j\omega_0 n}$

نکته : سیگنال های نمایی موهومی گسسته (نمایی مختلط) یا سیگنال های سینوسی گسسته زمانی پریودیک است که ω_0 به صورت ضریب گویایی از عدد π می باشد .
برای بدست آوردن دوره تناوب ω_0 آنرا به صورت ضریب گویایی از 2π می نویسیم و مخرج دوره تناوب سیگنال را نشان می دهد .

مثال :

$$\cos \frac{\pi}{7} n \Rightarrow \omega_0 = 2\pi * \frac{1}{14} \Rightarrow N = 14$$

$$\cos \frac{3\pi}{7} n \Rightarrow \omega_0 = 2\pi * \frac{3}{14} \Rightarrow N = 14$$

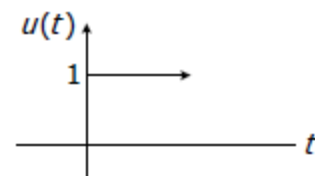
نکته : در عبارت گویایی که ضریب 2π است بیانگر این است که پس از چند پوش سیگنال رشته N تکرار می شود .

سیگنال های پایه :

1 1 - سیگنال پایه واحد :

پیوسته :

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$



گسسته :

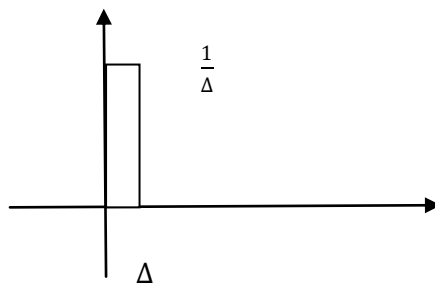
$$u[n] = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n \leq -1 \end{cases}$$



تذکر : توابعی که فرم هندسی دارند را می توان بر حسب تابع پله بیان کرد .

1-2 - تابع پالس : فقط در حوزه پیوسته می باشد .

$$u_{\Delta}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta} & 0 \leq t \leq \Delta \\ 0 & \begin{cases} \Delta < t \\ \Delta < 0 \end{cases} \end{cases}$$



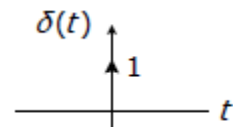
تابع پالس بر اساس سیگنال پله واحد :

$$u_{\Delta}(t) = \frac{1}{\Delta}u(t) - \frac{1}{\Delta}u(t - \Delta)$$

1-3 - تابع ضربه :

پیوسته :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t) dt = 1, \quad \int_{-\infty}^{-1} \delta(t) dt = 0$$

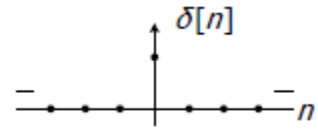


$$\delta(t) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t > 0 \\ t < 0 \end{cases}$$

رابطه بین تابع پله واحد و تابع ضربه واحد در حالت پیوسته :

$$\delta(t) = \frac{d_u(t)}{dt}$$

گسسته :



رابطه بین تابع پله واحد و تابع ضربه واحد در حالت گسسته :

$$\delta[n] = u[n] - u[n - 1]$$

نکته پیوسته :

$$y(t) = \frac{d_x(t)}{dt}$$

نکته گسسته :

$$y[n] = x[n] - x[n - 1]$$

نکته : تابع $y[n] = x[n] - x[n - 1]$ معادل مشتق گبری از تابع $x[n]$ در حوزه پیوسته می باشد .

نکته پیوسته :

$$u(t) = \int_0^{\infty} \delta(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau$$

نکته گسسته :

$$u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n - k] = \sum_{k=-\infty}^n \delta[k]$$

خواص تابع ضربه :

1 - خاصیت فشردگی :

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t) \quad , \quad \delta(t) = \delta(-t)$$

2 - خاصیت غربالی تابع ضربه :

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \delta(t - t_0) dt = x(t_0)$$

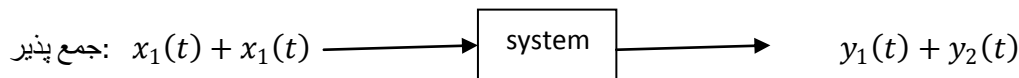
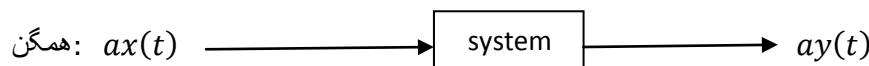
سیستم ها :

سیستم را می توان به صورت دستگامی در نظر گرفت که بر روی سیگنال های ورودی اعمالی را انجام داده و خروجی بر اساس ساختار داخلی سیستم می دهد . در حقیقت سیستم تابعی بر حسب سیگنال ورودی می باشد (ساختاری که روی سیگنال ها اعمالی را انجام می دهد .)

خواص سیستم ها :

- 1 - حافظه دار یا بدون حافظه بودن : سیستمی بدون حافظه است که خروجی آن در هر لحظه به ورودی در همان لحظه بستگی داشته باشد و به لحظات دیگر وابسته نباشد .
- 2 - معکوس پذیری : اگر بتوان از روی خروجی سیستم دوباره ورودی را بازسازی کرد سیستم معکوس پذیر است .
- 3 - علیت : اگر ورودی سیستم صرفاً به زمانهای حال و گذشته بستگی داشته باشد سیستم علی است و اگر به آینده بستگی داشته باشد سیستم غیر علی است .
- 4 - پایداری به مفهوم BIBO : سیستمی پایدار به مفهوم BIBO است که به ازای ورودی محدود خروجی آن محدود است .
- 5 - تغییر ناپذیری با زمان (TI) : برای بررسی تغییر ناپذیری با زمان یکبار $x(t - t_0)$ را وارد سیستم می کنیم خروجی را بدست می آوریم و یکبار $y(t - t_0)$ را تشکیل می دهیم . اگر دو حالت برابر شود سیستم تغییر ناپذیر با زمان است .
- 6 - خطی بودن : سیستم خطی به سیستمی گفته می شود که اصل جمع آثار برای آن صدق کند .

شرط خطی بودن :



نکته : فشرده سازی در سیستم های پیوسته معکوس پذیر ولی در سیستم های گسسته معکوس ناپذیر است .

خلاصه :

سیگنال تابعی است که حاوی اطلاعاتی درباره رفتار فیزیکی یک سیستم است.
هر سیگنال دلخواه را می توان به صورت مجموع دو سیگنال زوج و فرد نوشت.
در بسیاری از مسائل با استفاده از شیفت زمانی می توان سیگنال را به صورت زوج یا فرد درآورد.
کوچکترین دوره تناوب سیگنال دوره تناوب اصلی است و فرکانس متناسب با دوره تناوب اصلی فرکانس اصلی است.
توابعی که فرم هندسی دارند را می توان بر حسب توابع ویژه بیان کرد.
توابع ضربه واحد، پله واحد و دوپلت واحد خواص منحصر به فردی دارند.

اگر سیستمی با ورودی محدود و خروجی نامحدود داشتیم این سیستم ناپایدار است.
سیستم بدون حافظه مطمئناً علی است.

تمرینات آخر فصل :

1 - تعیین کنید کدام یک از سیگنال های زیر متناوبند ؟

الف: $x_2[n] = u[n] + u[-n]$

ب: $x_3[n] = \sum \delta[n - 4k] - \delta[n - 1 - 4k]$

ج: $x[n] = 1 + e^{j\frac{4\pi}{7}n} - e^{-j\frac{2\pi}{7}n}$

2 - تعیین کنید کدام یک از سیگنال های زیر معکوس پذیر است؟

الف: $y[n] = x[n]x[n - 2]$

ب: $y[n] = \begin{cases} x[n + 1] & n = 0 \\ x[n] & n \leq -1 \end{cases}$

3 - آیا این سیستم معکوس پذیر است یا نه؟ اگر هست معکوس آن را به دست آورید.

$y[n] = \begin{cases} x[n - 1] & n \geq 1 \\ 0 & n = 0 \\ x[n] & n \leq -1 \end{cases}$

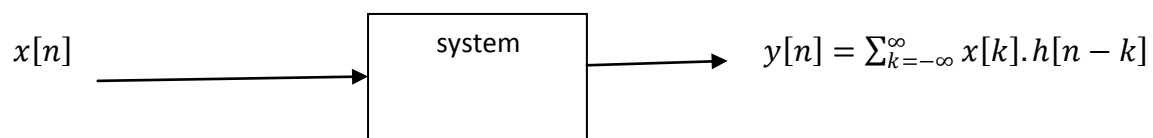
فصل دوم

سیستم های خطی و تغییر ناپذیر با زمان (LTI)

سیستم های LTI دارای خصوصیت مهمی هستند که اگر پاسخ سیستم به ورودی ضربه را داشته باشیم می توان پاسخ را به هر ورودی دیگر بدست آوریم .

بر اساس خاصیت غربالی تابع ضربه می توان هر سیگنالی را به صورت ترکیب خطی از سیگنال های ضربه نوشت . بنابراین اگر پاسخ سیستم به تابع ضربه را داشته باشیم می توان پاسخ سیستم را به هر ورودی دیگر بدست آوریم .

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k].\delta[n - k]$$



کانولوشن گسسته :

$$x[n] * h[n] = h[n] * x[n] \Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k].h[n - k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k].x[n - k]$$

در حالت گسسته به دو روش می توان پاسخ یک سیستم را به یک سیگنال دلخواه بدست آورد :

الف : با استفاده از تعریف کانولوشن

ب : با توجه به پاسخ ضربات سیستم : اگر پاسخ سیستم را داشته باشیم از آنجاییکه سیگنال ورودی را می توان به صورت مجموعی از توابع ضربه شیفیت داده شده نوشت . باید پاسخ سیستم را به هر کدام از مولفه های سیگنال ورودی ($x(t)$) بدست آورد و با هم جمع کرد .

نکته :

$$\sum_{k=n}^m \alpha^k = \frac{\alpha^{m+1} - \alpha^n}{1 - \alpha}$$

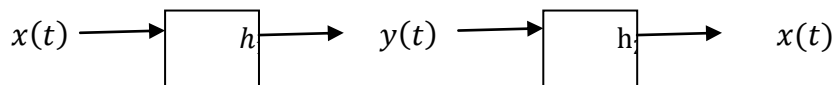
کانولوشن پیوسته :

$$y(t) = x(t) * h(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \cdot x(t - \tau) d\tau$$

خواص سیستم های LTI بر اساس پاسخ ضربه :

- 1 - خاصیت بدون حافظه بودن : اگر و فقط اگر $h(t) = k\delta(t)$ ، $h[n] = k\delta[n]$. اگر $h(t)$ به صورت ثابتی از $\delta(t)$ باشد در این صورت خروجی سیستم در هر لحظه به ورودی سیستم در همان لحظه بستگی خواهد داشت بنابراین سیستم بدون حافظه خواهد بود .
- 2 - خاصیت علیت : یک سیستم علی است اگر و فقط اگر در حالت پیوسته $h(t) = 0$ $t < 0$ و در حالت گسسته $h[n] = 0$ $n < 0$ باشد .
- 3 - خاصیت پایداري : یک سیستم پایدار است اگر پاسخ ضربه آن مطلقاً انتگرال پذیر یا جمع پذیر باشد یعنی برای حالت پیوسته $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| < \infty$ و حالت گسسته $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$.
- اگر $h(t)$ مطلقاً انتگرال پذیر باشد و $x(t)$ محدود باشد (یعنی به سمت بی نهایت نرود) در این صورت کانولوشن این دو نیز مقدار محدودی خواهد بود و سیستم پایدار خواهد بود .
- 4 - خاصیت معکوس پذیری :

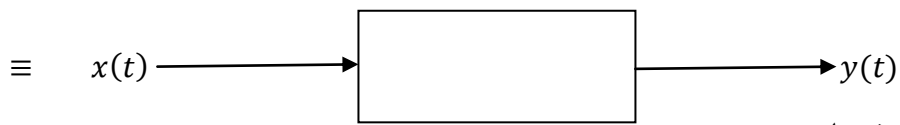
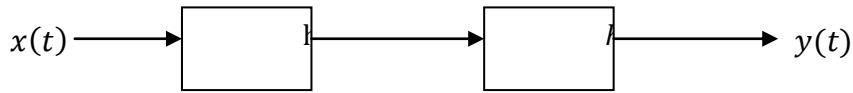


$$y = x(t) * h_1(t) , \quad x(t) = y(t) * h_2(t) \quad \Rightarrow \quad h_1(t) * h_2(t) = 1$$

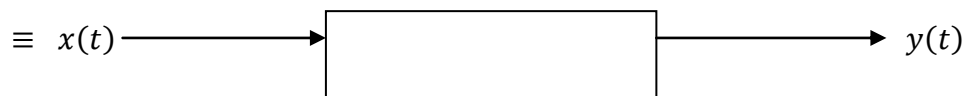
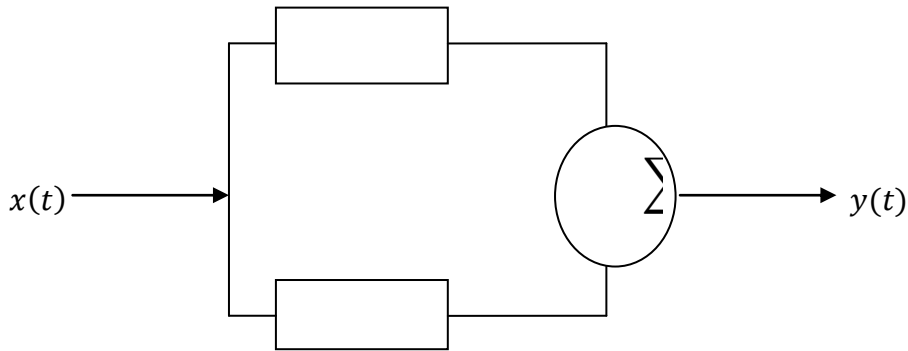
اگر $h_1(t)$ پاسخ ضربه سیستمی باشد و بتوان $h_2(t)$ را به گونه ای پیدا کرد که عبارت $h_1(t) * h_2(t) = 1$ برقرار باشد در آن صورت سیستم معکوس پذیر است و معکوس آن دارای پاسخ ضربه $h_2(t)$ خواهد بود .

خواص در مرحله کانولوشن :

- 1 - خاصیت جابجایی : $x_1(t) * x_2(t) = x_2(t) * x_1(t)$
 - 2 - خاصیت شرکت پذیری : $x_1(t) * (x_2(t) * x_3(t)) = (x_1(t) * x_2(t)) * x_3(t)$
 - 3 - خاصیت توزیع پذیری : $x_1(t) * (x_2(t) + x_3(t)) = x_1(t) * x_2(t) + x_1(t) * x_3(t)$
- الف : سری کردن سیستم ها



ب : موازی کردن سیستم ها



خلاصه :

با توجه به رابطه کانولوشن می توان خواص جابه جایی پذیری، توزیع پذیری و شرکت پذیری را برای سیستم های LTI تعریف کرد .

با معرفی تابع تبدیل می توان خواص جدیدی برای سیستم های LTI بیان کرد .

کانولوشن به دو روش ترسیمی و فرمول قابل محاسبه است.

در معادلات دیفرانسیل، با حل معادله همگن و یافتن جواب خصوصی به ازای ورودی خاص، جواب کلی سیستم از جمع پاسخ عمومی و پاسخ خصوصی بدست می آید.

برای بکارگیری شرایط سکون جهت تعیین پاسخ سیستم LTI به ورودی داده شده، عنوان علی بودن سیستم ضروری است.

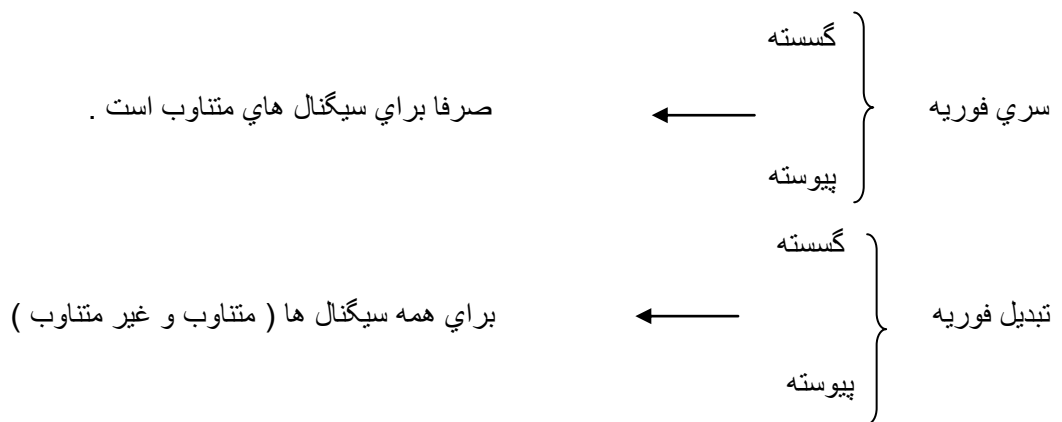
با استفاده از رابطه بین پاسخ ضربه و پاسخ پله در سیستم های LTI و یا محاسبه پاسخ ضربه سیستم به طور مستقیم می توان پاسخ به ورودی ضربه را یافت.

سیستم های LTI را با استفاده از بلوک دیاگرام نیز می توان نشان داد.

فصل سوم

سری فوریه سیستم های زمان پیوسته و زمان گسسته

هنگامی که سیگنال ها و سیستم ها در حوزه زمان مورد بررسی قرار می گیرند برای بدست آوردن پاسخ از عمل کانولوشن استفاده می شود که نسبتاً پیچیده است. برای تحلیل ساده تر می توان سیگنال ها و سیستم ها را در حوزه فرکانس بررسی کرد و بدین ترتیب عمل کانولوشن ره عمل ضرب تبدیل می شود.



ثابت می شود که هر گاه سیگنال متناوب را می توان به صورت مجموعی از سینوسی ها نوشت که یکی از آنها دارای فرکانس سیگنال اصلی است و بقیه هارمونی های آن می باشند و هر یک از سینوسی ها را در حوزه زمان به صورت یک تابع ضربه به صورت یک تابع ضربه در همان فرکانس نمایش می دهیم. علمی که این کار را انجام می دهد سری فوریه است. در مورد سیگنال های غیر متناوب می توان آن را یک سیگنال متناوب در نظر گرفت که دوره اش به سمت بی نهایت میل می کند. در این صورت فرکانس آنها و هارمونی هایش به سمت صفر میل خواهند کرد و یک شکل پیوسته ایجاد خواهد شد که به آن طیف فرکانسی گفته می شود و با استفاده از تبدیل فوریه بدست می آید.

سری فوریه: ثابت می شود که هر سیگنال $x(t)$ متناوب را می توان به صورت ترکیبی خطی از سینوسی های هارمونیک نوشت.

نکته مهم :

سیگنال هایی که به صورت $\cos k\omega_0 t$ و $\sin k\omega_0 t$ و $e^{jk\omega_0 t}$ ترکیب خطی از اینها باشند و در یک دوره تناوب از آنها انتگرال گیری کنیم مقدارش صفر می شود .

سری فوری هر سیگنالی از روابط زیر حاصل می شود :

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot e^{jk\omega_0 t}$$

$$a_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) \cdot e^{-jk\omega_0 t} dt$$

برای بدست آوردن سری فوری اگر تابع داده شده به صورت ترکیبی از سینوسی ها و کسینوسی ها باشد ساده ترین کار این است که آنها را به فرم $e^{jk\omega_0 t}$ بسط دهیم و مقادیر هر یک از a_k ها را بدست آوریم و اگر به فرم شکل موج یا تابعی غیر از سینوسی و کسینوسی باشد از روش اصلی انتگرال گیری مقادیر را بدست می آوریم .

چند فرمول ریاضی پر کاربرد :

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$\sin x = \frac{1}{2j}(e^{jx} - e^{-jx})$$

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{jx} + e^{-jx})$$

$$\sin c x = \frac{\sin \pi x}{\pi x}$$

شرایط دریکله : تابع متناوبی دارای سری فوریه است که در شرایط دریکله صدق کند .

1 - تابع مورد نظر در هر دوره تناوب باید مطلقاً انتگرال پذیر باشد .

$$\int_T |x(t)| dt < \infty$$

2 - سیگنال در هر پریود دارای تعداد محدودی ناپیوستگی باشد .

3 - سیگنال در هر پریود دارای تعداد محدودی مینیمم و ماکزیمم باشد .

نکته : جابجایی عمودی سیگنال فقط مقدار DC یعنی a_0 را تغییر می دهد .

نکته : ضرب کردن دامنه سیگنال در یک مقدار ثابت باعث می شود که ضرایب a_k نیز به همان نسبت افزایش یابد .

خواص سري فوريه :

1 - خطي بودن :

$$\begin{aligned}x(t) &\longrightarrow a_k, \quad y(t) \longrightarrow b_k \\ \Rightarrow Ax(t) + By(t) &\longrightarrow Aa_k + Bb_k\end{aligned}$$

2 - شيفت زماني :

$$\begin{aligned}x(t) &\longrightarrow a_k \\ x(t - t_0) &\longrightarrow a_k e^{-jk\omega_0 t_0}\end{aligned}$$

شيفت در حوزه زمان باعث ايجاد اختلاف فاز در حوزه فرکانس مي شود . به عنوان نمونه تاخير زماني به اندازه t_0 باعث ايجاد اختلاف فاز به اندازه $-k\omega_0 t_0$ مي شود .

3 - معکوس شدن زمان :

$$\begin{aligned}x(t) &\longrightarrow a_k \\ x(-t) &\longrightarrow a_{-k}\end{aligned}$$

در اين حالت ضريب a_k در $x(-t)$ برابر $\frac{1}{T} \int_T x(t) e^{jk\omega_0 t} dt$ خواهد بود .

4 - فشردگي زمان :

$$\begin{aligned}x(t) &\longrightarrow a_k \\ x(bt) &\longrightarrow a_k\end{aligned}$$

$$x(t) = \sum a_k e^{jk\omega_0 t} \Rightarrow x(bt) = \sum a_k e^{jk\omega_0 (bt)} = \sum a_k e^{jk(b\omega_0)t}$$

✓ : فرکانس از ω_0 به $b\omega_0$ تغيير مي يابد .

✓ : دامنه a_k ها تغيير نمي کند و فرکانس 2 برابر مي شود .

✓ : اگر در حوزه زمان سيگنال فشرده شود در حوزه فرکانس فرکانس ها زياد مي شود يا بازشدگي در حوزه فرکانس رخ مي دهد و اگر سيگنال در حوزه زمان باز شود فرکانس هارموني ها کم مي شود يا فشردگي در حوزه فرکانس رخ مي دهد .

5- مزدوج سیگنال : اگر ضرایب z در قسمت موهومی به $-z$ تبدیل شود مزدوج سیگنال بدست می آید .

$$\begin{cases} x(t) = a + jb & \Rightarrow & x(t) \longrightarrow a_k \\ x^*(t) = a - jb & \Rightarrow & x^*(t) \longrightarrow a^*_{-k} \end{cases}$$

\checkmark : شرط حقیقی بودن سیگنال : $x(t) = x^*(t)$

\checkmark : بنابراین در مورد سیگنال های حقیقی اگر اندازه ضرایب سری فوریه در نظر گرفته شود a_k ها با a_{-k} برابر هستند . بنابراین سری فوریه سیگنال های حقیقی نسبت به محور γ متقارن است . در مورد طیف فرکانسی سیگنال های حقیقی که در ادامه گفته می شود نیز این مسئله صادق است .

6- قضیه پارسوال :

$$P_{ave} = \frac{1}{T} \int_T |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^2$$

توان متوسط سیگنال :

قضیه پارسوال نشان می دهد که توان سیگنال در هارمونی های مختلف آن تقسیم می شود و هارمونی هایی که دارای دامنه بزرگتری هستند انرژی بیشتری از سیگنال را در خود جای داده اند . بر این اساس می توان تشخیص داد که بیشترین انرژی سیگنال در چه فرکانسی هایی جمع شده است . مثلاً در مورد صدای انسان در حدود 95 % انرژی در باند 300 تا 3.4kHz قرار دارد .

\checkmark : قسمت های تیز سیگنال ها بیانگر هارمونی های بالایی فرکانس است و قسمت های هموار سیگنال بیانگر هارمونی های پایینی سیگنال است . اگر از یک فیلتر پایین گذر استفاده کنیم هارمونی های بالا را حذف می کند و تیزی های سیگنال را می گیرد .

7- مشتق گیری :

مشتق گیر هارمونی های بالایی سیگنال را تقویت کرده و هارمونی های پایینی را تضعیف می کند و همانند یک فیلتر بالا گذر عمل می کند . در فرکانس های بالا پایداری ایجاد می کند .

$$x(t) \longrightarrow a_k$$

$$\frac{dx(t)}{dt} \longrightarrow jk\omega_0 a_k$$

8- انتگرال گیر :

انتگرال گیر هارمونی های بالایی سیگنال را تضعیف می کند و همانند فیلتر پایین گذر عمل می کند و برای سیگنال های سریع نقش کند کننده دارد .

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \longrightarrow \frac{a_k}{jk\omega_0}$$

9- مقدار DC سیگنال :

$$a_0 = \frac{1}{T} \int x(t) dt$$

10 - کانولوشن پریودیك :

$$\begin{aligned}
 x(t) &\longrightarrow a_k, \quad y(t) \longrightarrow b_k \\
 x(t) \otimes y(t) &\longrightarrow a_k b_k \\
 x(t) &\longrightarrow a_k, \quad y(t) \longrightarrow b_k \quad - 11
 \end{aligned}$$

$$x(t) \cdot y(t) \qquad \sum_{L=-\infty}^{\infty} a_L b_{L-k}$$

√ : ضریب سری فوریه قطار ضربه : $a_k = \frac{1}{T}$

√ : حاصل کانولوشن دو تابع مربعی تابع مثلثی می شود .

√ : $z(t)$ قطار ضربه (پریودیك $\delta(t)$ با دوره تناوب T)

خلاصه :

سری فوریه، تنها برای توابع متناوب بیان می شود، توابعی که دارای دوره تناوب اصلی $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ ، $x(t) = x(t + T)$ می باشند .

در صورتی که بتوان سیگنال را به صورت مجموعه ای از هارمونی ها بسط داد، می توان به این سوال که در يك سیگنال چه فرکانس هایی و با چه قدرتی وجود دارند را پاسخ داد .

پاسخ سیستم LTI به نمایی مختلط $e^{jk\omega_0 t}$ یا به طور کلی $e^{j\omega t}$ به فرم بسیار ساده ای تعریف می شود.

هرچه هارمونی ها بالاتر باشد فرکانس ها بالاتر است و برعکس هر چه هارمونی ها پایینتر باشد فرکانس ها پایین تر است.

اگر سیگنالی در هارمونی های بالا ضرایب سری فوریه بزرگتری داشته باشد سیگنال فرکانس بالا است و برعکس اگر سیگنالی در هارمونی های پایین ضرایب سری فوریه بزرگتری داشته باشد سیگنال فرکانس پایین است.

به شرط برقرار بودن شرایط دیریکله همگرایی سری فوریه قابل بررسی است.

مجموعه ضرایب a_k را ضرایب سری فوریه یا ضرایب طیفی $x(t)$ می نامند. این ضرایب در حالت کلی مختلط هستند و اندازه آنها نشانه دهنده قدرت سیگنال در هارمونی متناظر است. ضریب a_0 مولفه DC یا ثابت سیگنال است.

با دانستن خواص سری فوریه، در برخی مسائل برای پیدا کردن ضرایب سری فوریه لزومی به استفاده از تعریف گفته شده برای سری فوریه نیست.

اگر ورودی ضرایب فوریه a_k باشند، خروجی $b_k e^{jk\omega_0}$ می باشد. می توان تعدادی از ورودیها را از خروجی حذف کرد.

اگر سیستم ورودی سیستم LTI متناوب باشد، خروجی نیز با همان دوره تناوب متناوب خواهد بود.

با توجه به ورودی و خروجی سیستم می توان نوع فیلتر و شکل آن را بدست آورد.

فصل چهارم تبدیل فوریه

سری فوریه برای سیگنال های متناوب است . اگر در نظر بگیریم دوره تناوب يك سیگنال به سمت بی نهایت میل کند فرکانس آن به سمت صفر میل خواهد کرد . برای سیگنال های غیر پریودیک می توان آنها را سیگنال پریودیک با دوره در نظر گرفت بنابراین ضرایب $k\omega_0$ به هم چسبیده و تشکیل طیف فرکانسی خواهد داد . ضرایب سری فوریه به ما می گوید که مقدار سیگنال در هر فرکانس چه اندازه است .

تبدیل فوریه هر سیگنالی از روابط زیر حاصل می شود :

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \cdot e^{j\omega t} dt$$

بر اساس رابطه $x(t)$ فوق مشخص می شود که در هر فرکانسی چگالی فرکانسی از رابطه $\int \frac{1}{2\pi} X(\omega) d\omega$ بدست می آید .

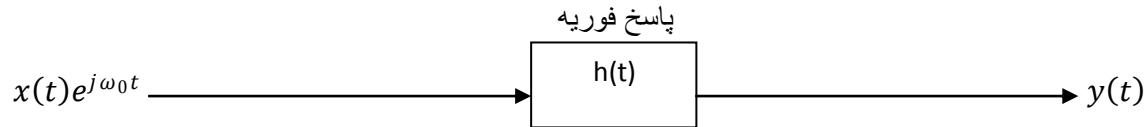
✓ : تمام سیگنال ها چه پریودیک و چه غیر پریودیک تبدیل فوریه دارند .

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt \quad \Rightarrow \quad X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi f t} dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega, \quad \omega = 2\pi f,$$

$$d\omega = 2\pi df \Rightarrow x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(f) \cdot e^{j2\pi ft} df$$

بدست آوردن پاسخ هر سیستمی به سیگنال پایه ای $e^{j\omega_0 t}$:



$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau) \cdot h(\tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega_0(t-\tau)} h(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega_0 t} e^{-j\omega_0 \tau} h(\tau) d\tau = e^{j\omega_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega_0 \tau} h(\tau) d\tau \\ &\Rightarrow y(t) = e^{j\omega_0 t} H(\omega_0) \end{aligned}$$

بر اساس رابطه خروجی هر سیستمی به سیگنال پایه ای $e^{j\omega_0 t}$ برابر است با همان سیگنال ضربدر $H(\omega_0)$ است که $H(\omega_0)$ تبدیل فوریه پاسخ ضربه به ازای فرکانس ω_0 می باشد. از آنجاییکه اکثر سیگنال ها را می توان به صورت ترکیبی از سیگنال پایه ای نوشت بنابراین خروجی کل سیستم به راحتی قابل محاسبه خواهد بود.

شرایط دریکله برای تبدیلات فوریه :

- 1 - مطلقاً انتگرال پذیر باشد : $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$
- 2 - در هر فاصله تعداد محدودی مینیمم و ماکزیمم داشته باشد.
- 3 - تعداد ناپیوستگی آن محدود باشد.

نکته : $\alpha > 0$ و $\frac{2\alpha}{\alpha^2 + j\omega^2}$ \longleftrightarrow $e^{-\alpha|t|}$

نکته : در سیستم های LTI پاسخ سیستم به ورودی $\cos \omega_0 t$ یا $\sin \omega_0 t$ و هر گونه ترکیب خطی آنها به فرم $\cos \omega_0 t \cdot H(\omega_0)$ است.

نکته :

$$x(t) = s(t) \Rightarrow X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^0 dt = 1$$

خواص تبدیل فوریه :

1- خطی بودن :

$$ax_1(t) + bx_2(t) \longleftrightarrow aX_1(\omega) + bX_2(\omega)$$

2- شیفت زمانی :

$$if \quad x(t) \longleftrightarrow X(\omega)$$

$$x(t - t_0) \longleftrightarrow X_1(\omega) = e^{-j\omega t_0} X(\omega)$$

تاخیر زمانی به اندازه t_0 در حوزه زمان باعث ایجاد اختلاف فاز به اندازه $-\omega t_0$ در حوزه فرکانس می شود . (اگر یک سیگنال را در حوزه زمان جابجا کنیم در حوزه فرکانس اختلاف فاز پیدا می کند)

3- مزدوج :

$$if \quad x(t) \longleftrightarrow X(\omega)$$

$$x^*(t) \longleftrightarrow X^*(-\omega)$$

شرط حقیقی بودن سیگنال : قسمت موهومی صفر باشد .

$$x(t) = x^*(t)$$

نکته : براساس خاصیت مزدوج اگر یک سیگنال حقیقی باشد روابط $X(\omega) = X^*(-\omega)$, $|X(-\omega)| = |X(\omega)|$, $\angle X(\omega) = -\angle X(-\omega)$ برقرار خواهد بود بنابراین اندازه تبدیل فوریه یک تابع زوج خواهد بود و فاز آن یک تابع فرد خواهد بود . از آنجاییکه تمام سیگنال های طبیعی حقیقی هستند بنابراین تبدیل فوریه آنها یا طیف فرکانسی آنها زوج خواهد بود .

4- مشتق :

$$x(t) \longleftrightarrow x(f)$$

$$x'(t) \longleftrightarrow j\omega X(\omega)$$

با افزایش مقدار ω به دلیل وجود ضریب $j\omega$ اندازه $X(\omega)$ بدست آمده زیاد می شود یعنی مشتق گیر همانند یک فیلتر بالاگذر عمل می کند . سیگنال هایی که تغییرات ناگهانی دارند نباید وارد مشتق گیر شوند زیرا تغییرات ناگهانی معادل فرکانس های زیاد است و در مشتق گیر به شدت تقویت می شود و خروجی بی نهایت یا اصطلاحاً ناپایدار می شود .

5- انتگرال گیر :

$$\int x(t) dt \longleftrightarrow \frac{X(\omega)}{j\omega} + \pi X(0)\delta(\omega)$$

تابع انتگرال گیر فرکانس های بالا را تضعیف و فرکانس های پایین را تقویت می کند و در حقیقت یک فیلتر پایین گذر است .

6 - دوگانی :

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int X(\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad X(\omega) = \int x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$\text{مهم: } \begin{cases} f(t) & g(\omega) \\ g(\omega) & 2\pi f(-\omega) \end{cases}$$

7 - شیفت فرکانسی :

$$\begin{aligned} X(\omega) &\xleftrightarrow{f^{-1}} x(t) \\ X(\omega - \omega_0) &\xleftrightarrow{f^{-1}} e^{j\omega_0 t} x(t) \end{aligned}$$

8 - مشتق فرکانسی :

$$\begin{aligned} X(\omega) &\xleftrightarrow{f^{-1}} x(t) \\ \frac{dX(\omega)}{d\omega} &\xleftrightarrow{f^{-1}} -jtx(t) \end{aligned}$$

9 - انتگرال فرکانسی :

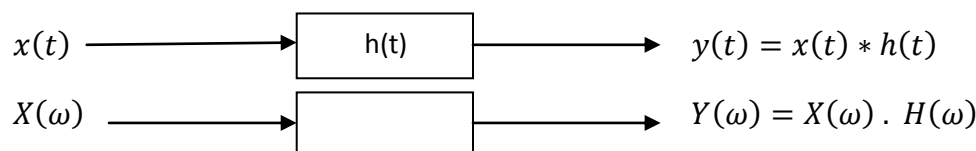
$$\begin{aligned} X(\omega) &\xleftrightarrow{f^{-1}} x(t) \\ \int X(\omega) d\omega &\xleftrightarrow{f^{-1}} \frac{x(t)}{-jt} + \pi X(0)\delta(t) \end{aligned}$$

10 - قضیه پارسوال :

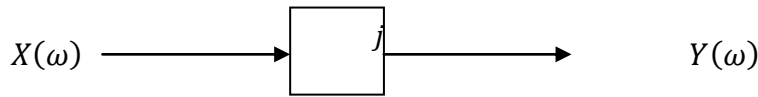
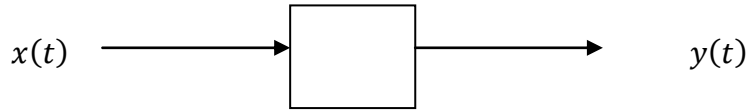
$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$$

بر اساس قضیه پارسوال انرژی سیگنال در فرکانس های مربوط به طیف فرکانسی آن سیگنال پخش می شود و فرکانس هایی که نقش بیشتری در طیف فرکانسی دارند دارای انرژی بیشتری هستند .

کانولوشن :



اگر $h(t)$ پاسخ ضربه کانال باشد به تبدیل فوریه آن یعنی $H(\omega)$ پاسخ فرکانسی سیستم گفته می شود .

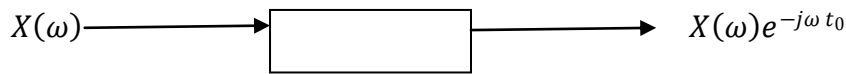
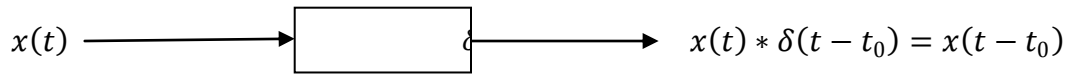


پاسخ فرکانسی يك سیستم مشتق گیر برابر است با $j\omega$.

نکته : $\delta(t - t_0) \xrightarrow{f^{-1}} e^{-j\omega_0 t}$, $\delta(t) \xrightarrow{f^{-1}} 1$



سیستم تاخیری :

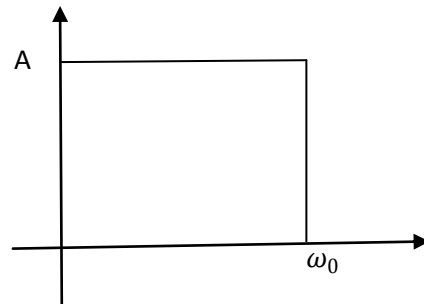


خاصیت مدولاسیون :

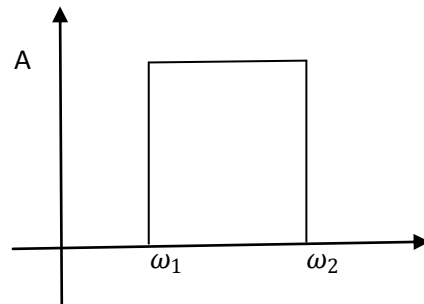
$$x_1(t) \cdot x_2(t) \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi} X_1(\omega) * X_2(\omega)$$

فیلتر ها : سیستم هایی هستند که برخی از بازه های فرکانسی سیگنال را حذف کرده و برخی از بازه ها را عبور می دهد .

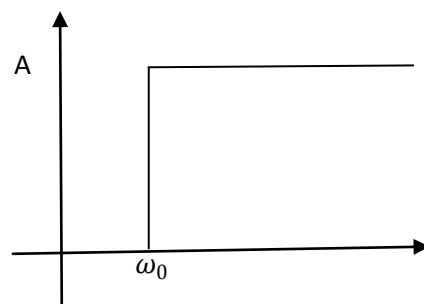
فیلتر پایین گذر (LPF) : این فیلتر فرکانس های کمتر از فرکانس ω_0 را عبور داده و آنها را با بهره A تقویت می کند و فرکانس های بالاتر از ω_0 را حذف می کند .



فیلتر میانگذر (BPF) : فیلتر میانگذر به فرکانس های قرار گرفته در بازه ω_1 و ω_2 اجازه عبور می دهد و بقیه فرکانس ها را حذف می کند و فرکانس های موجود در بازه ω_1 و ω_2 با بهره A تقویت می کند .



فیلتر بالا گذر (HPF) : فیلتر بالاگذر به فرکانس های بالاتر از ω_0 اجازه عبور می دهد و فرکانس های پایینتر را قطع می کند .



✓ : براي داشتن يك فيلتر پايين گذر ايده آل در حوزه فرکانس يك تابع پالسي شكل داشته باشيم بنابراین در حوزه زمان بايد $h(t)$ يك تابع sinc به زمان هاي آینده بستگي دارد غير علي است و غير قابل ساخت مي باشد .

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \quad \text{: ضريب كيفيت}$$

✓ : در حالت واقعي براي فيلتر ها فرکانس قطع اگر بهره فيلتر پايين گذري در فرکانس صفر (کمترین فرکانس) که حداقل فرکانس است برابر A باشد با افزايش فرکانس بهره کاهش مي يابد . جايي که بهره $\frac{1}{\sqrt{2}}$ يا 0.7 مقدار ماكزيمم به عنوان فرکانس قطع شناخته مي شود و اصطلاحا فرکانس هاي بالاتر از آنرا حذف شده در نظر مي گيرد .

✓ : جايي که دامنه سيگنال که معمولا ولتاژ و جريان $\frac{1}{\sqrt{2}}$ شود توان سيگنال نصف مي شود بنابراین به اين فرکانس فرکانس قطع نصف توان يا فرکانس قطع 3dB گفته مي شود .

✓ : اگر سيگنال $x(t)$ حقيقي و زوج باشد تبديل فوريه آن حقيقي و زوج خواهد بود بنابراین فاز آن صفر خواهد بود .

خلاصه :

قبل از بدست آوردن تبديل فوريه بايد با استفاده از شرايط وجود تبديل فوريه (دريکله) را بررسي کرد.

در تبديل فوريه نيز با توجه به اندازه و فاز مي توان نوع فيلتر را تشخيص داد.

با دانستن خواص تبديل فوريه، برخي مسائل به روش ساده تري قابل حل است.

تابع $\cos \omega_0 t$ جزو توابعي است که به کمک خواص، تبديل فوريه اش بدست مي آيد و با توجه به شكل حاصل، تبديل فوريه آن مطلقا حقيقي و زوج است . همچنين با توجه به شكل بدست آمده براي $\sin \omega_0 t$ ، تبديل فوريه آن مطلقا موهومي و فرد است .

اگر $f(t)$ سيگنالي زوج و حقيقي باشد ، $F(j\omega)$ مطلقا حقيقي و زوج و همچنين اگر $f(t)$ سيگنالي فرد و حقيقي باشد، $F(j\omega)$ مطلقا موهومي و فرد است.

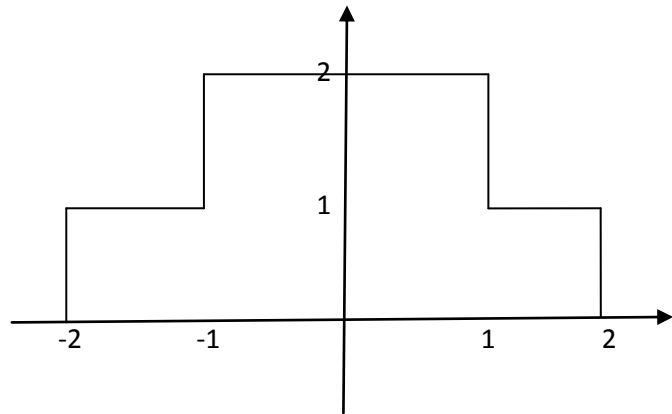
اگر سيگنالي متناوب باشد به اين معني است که داراي سري فوريه است . تبديل فوريه سيگنال متناوب را به طور مستقيم محاسبه نمي کنيم . ابتدا سري فوريه تابع را به دست آورده، سپس از سري فوريه تبديل فوريه را به دست مي آوريم.

مهمترين سيگنال متناوبي که مي شناسيم قطار ضربه است.

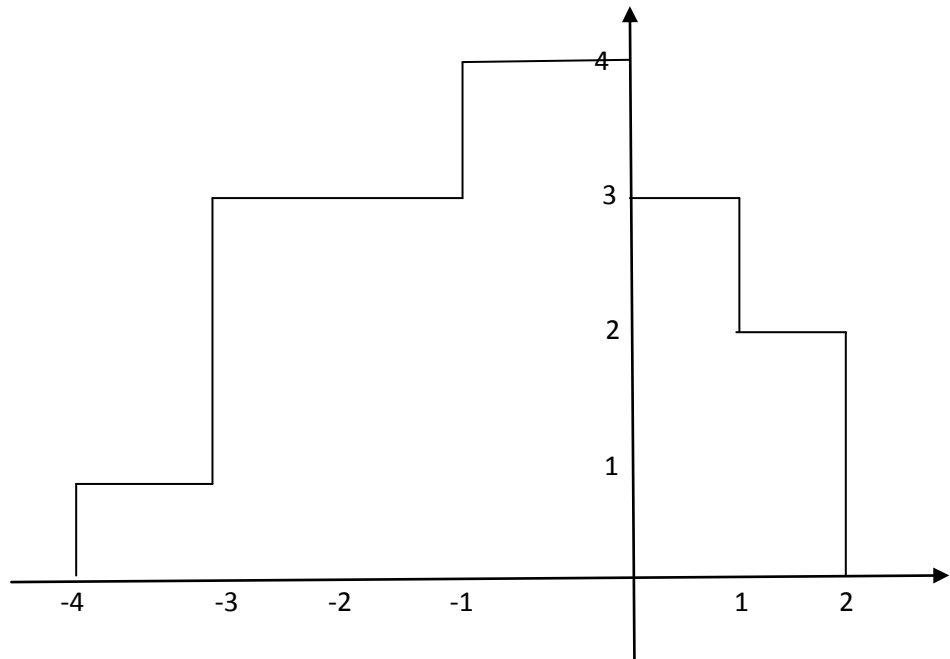
در نمونه برداري سيگنال، تابع $x(t)$ در قطار ضربه ضرب مي شود . با توجه به خواص بيان شده براي تبديل فوريه، تبديل فوريه حاصلضرب دو تابع برابر با كانولوشن آنهاست.

تمرینات آخر فصل :

1 - تبدیل فوری تابع زیر را بیابید ؟



2 - تبدیل فوری تابع زیر را بیابید ؟



3 - تبدیل فوری $\cos at$ و طیف فرکانسی $\cos \omega t$ را رسم کنید ؟

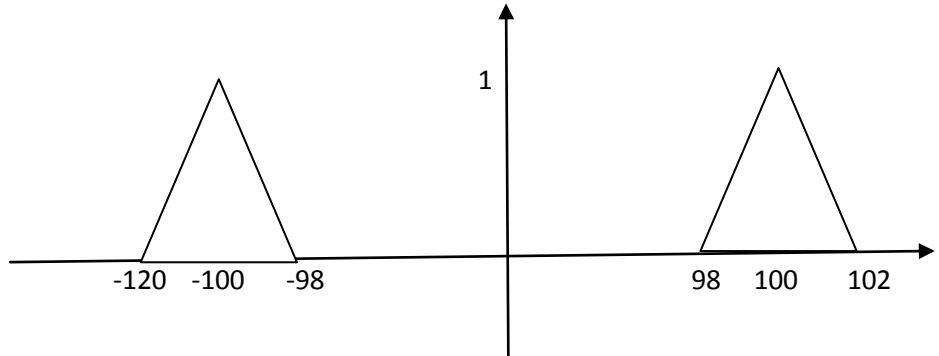
4 - تبدیل فوری $\sin at$ و طیف فرکانسی $\sin \omega t$ را رسم کنید ؟

5 - تبدیل فوریه و طیف توابع زیر را بیابید و به قسمتهای زیر پاسخ دهید؟

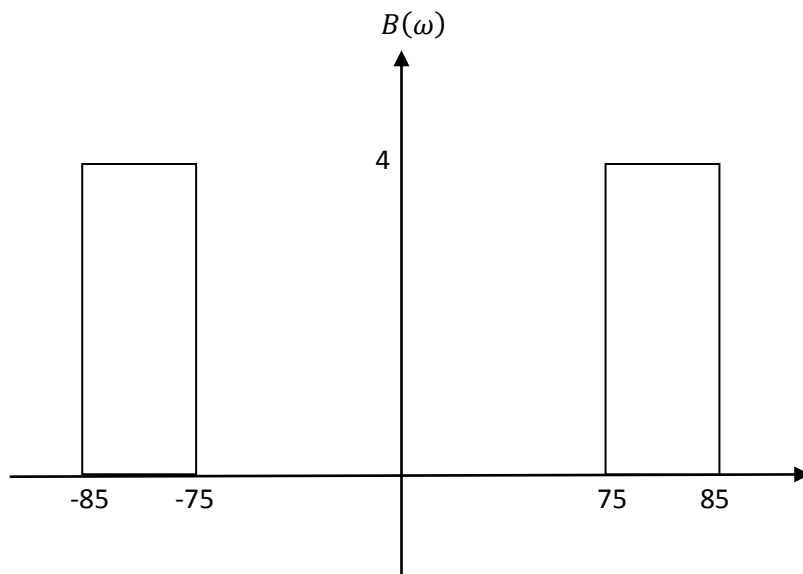
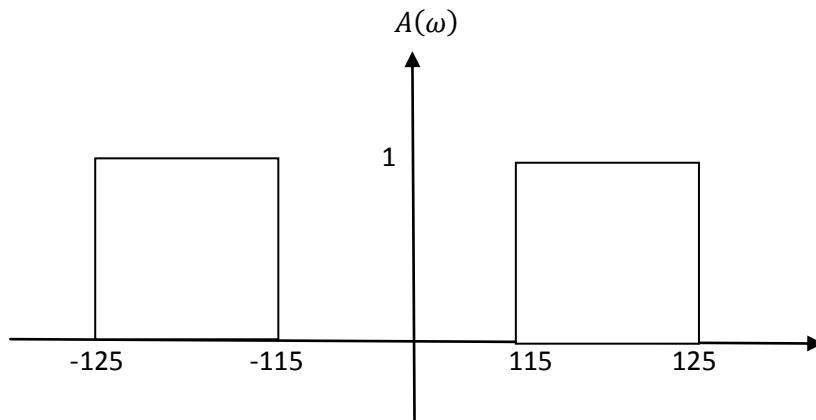
الف : $\cos 100t$

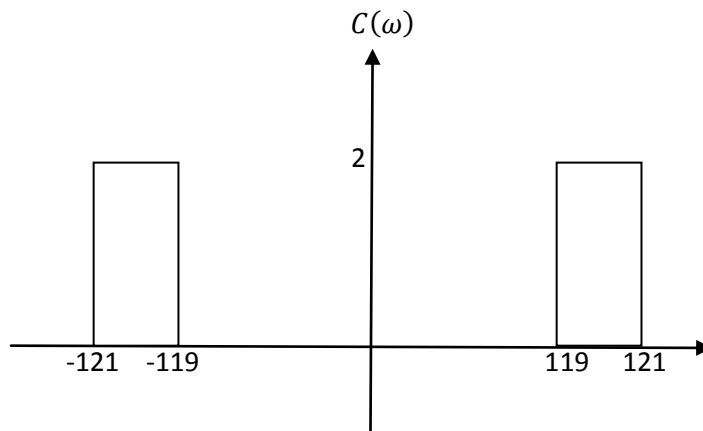
ب : $y(t) = \cos 100t \cdot \cos 20t$

ج : $z(t) = h(t) \cos 20t$ به فرم زیر است . $z(\omega)$ را بیابید؟

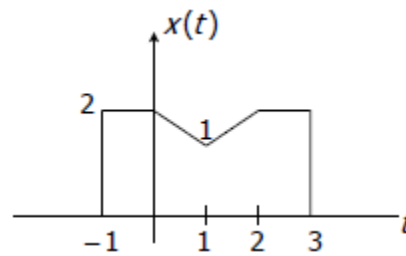


د : اگر سیگنال $z(t)$ از فیلترهای A, B, C عبور کند خروجی آن چگونه است؟





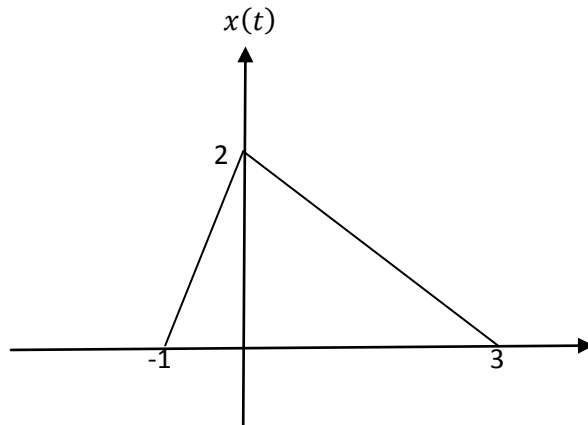
- 6 - اگر $g(t) = f(t) \cos 20t$ و $F(\omega) = \frac{\omega^2}{3+j\omega}$ باشد $G(\omega)$ را بیابید ؟
- 7 - سیگنال $x(t)$ به فرم زیر است بدون بدست آوردن $X(\omega)$ به سوالات زیر پاسخ دهید ؟



- الف : مقدار $X(0)$ را بدست آورید ؟
- ب : $\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) d\omega$ ؟
- ج : فاز $X(\omega)$ را بدست آورید ($\angle X(\omega)$) ؟

تمرینات کلی سیگنال و سیستم

1 - اگر سیگنال $x(t)$ به فرم روبرو باشد سیگنال های زیر را بنویسید؟

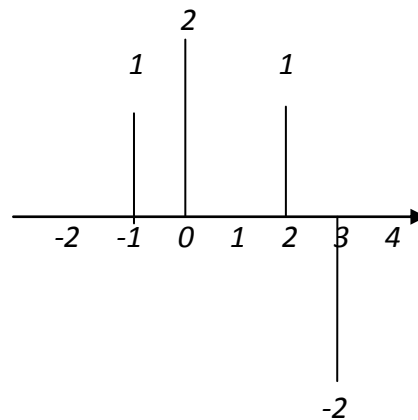


الف : $\frac{1}{2}x\left(\frac{t}{2} + 5\right)$

ب : $\frac{3}{4}x\left(\frac{t+5}{2}\right)$

ج : $x(t-1)u(t)$

2 - اگر سیگنال $x[n]$ به فرم روبرو باشد سیگنال های زیر را بنویسید؟



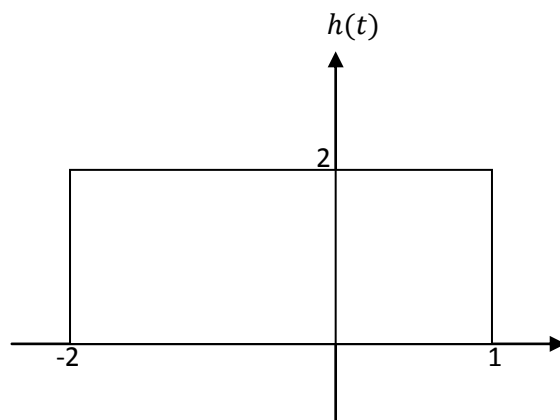
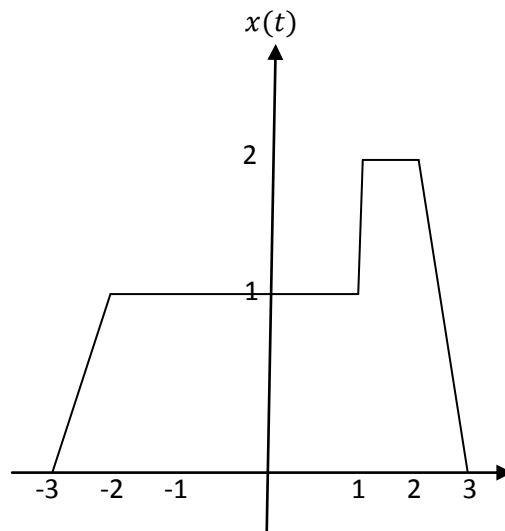
الف : $x[-n]u[n]$

ب : $x[-n+3]$

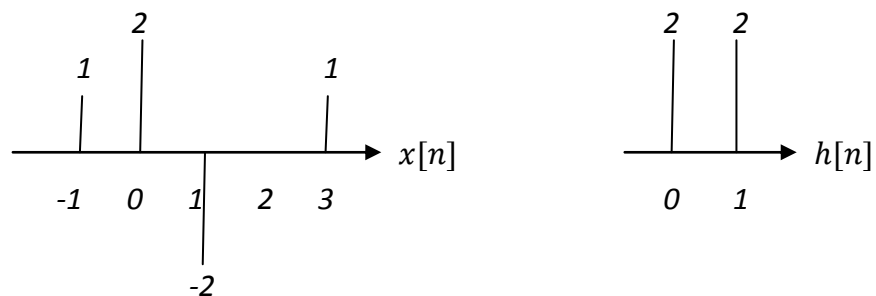
ج : $3x\left[\frac{n+3}{2}\right]$

د : $x\left[\frac{n+5}{3}\right]u[-n]$

3 - اگر سیگنال $x(t)$ و پاسخ ضربه کانالی به فرم روبرو باشد مقدار $y(t)$ را در لحظه $t=2$ بدست آورید؟



4 - اگر سیگنال $x[n]$ و پاسخ ضربه $h[n]$ به فرم زیر باشد خروجی $y[n]$ را بیابید؟



5 - در سیستم زیر a, b, c چه شرایطی باید داشته باشد تا :

الف : علی باشد ؟

ب : معکوس پذیر باشد ؟

ج : خطی باشد ؟

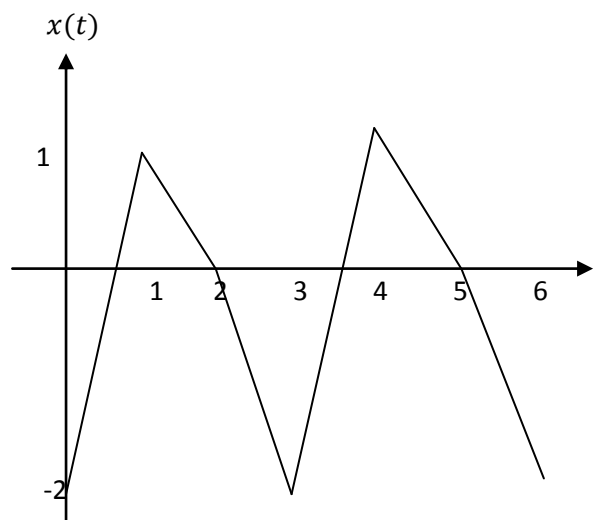
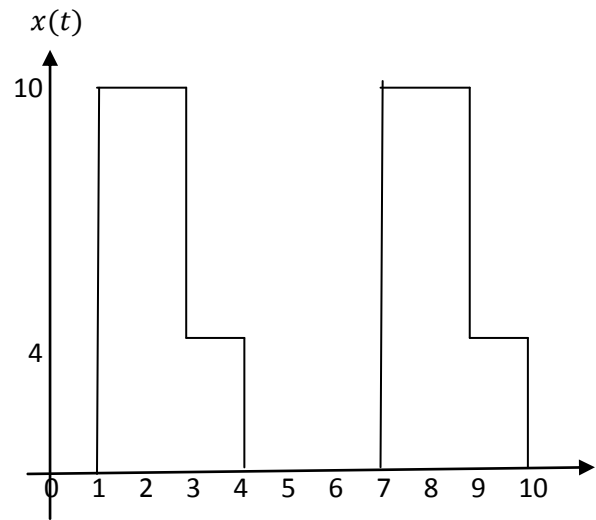
$$y[n] = ax[n] + bx[n - 1] + cx[n + 1]$$

6 - سری فوریه توابع زیر را بدست آورید ؟

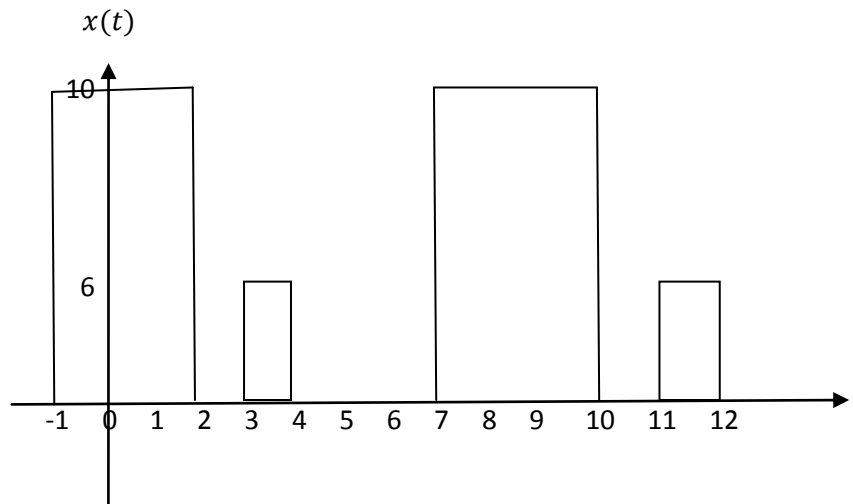
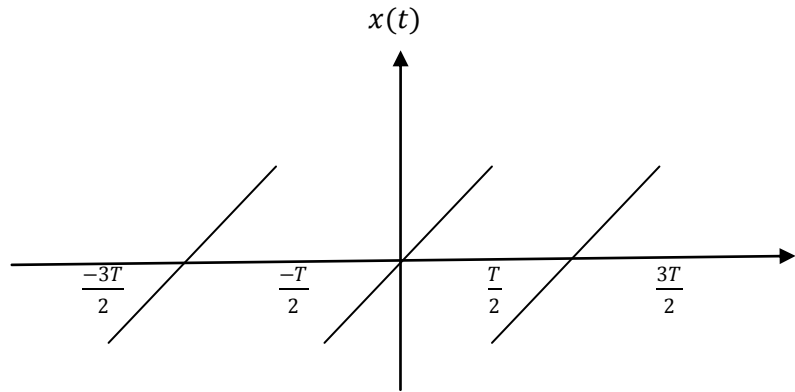
الف : $\cos \omega_0 t + \frac{1}{2} \sin 6\omega_0 t + 3\cos^2 \omega_0 t$

ب : $\cos 2\omega_0 t \cdot \sin 5\omega_0 t$

7 - ضرایب سری فوریه تابع روبرو را بیابید ؟



8 - هارموني سوم سيگنال هاي زير را بياييد ؟

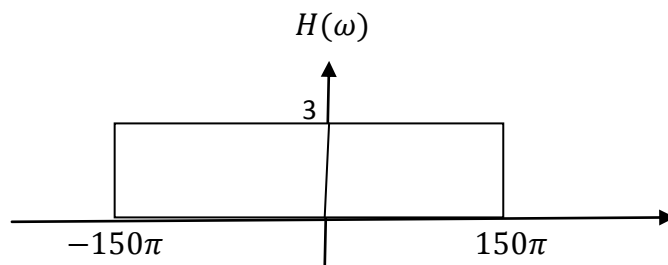


9 - يك سيگنال داراي ضرايب سري فوريه $a_0 = \frac{1}{4}$ و $a_{-2} = \frac{1}{2j}$ و $a_2 = \frac{1}{2j}$ و $a_4 = \frac{1}{\sqrt{3}j}$ و $a_{-4} = \frac{1}{\sqrt{3}j}$ است و بقيه a_k ها صفر است .

الف : مقدار متوسط سيگنال چقدر است ؟

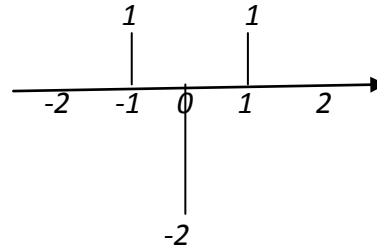
ب : توان متوسط سيگنال چقدر است ؟

10 - سيگنال به فرم $x(t) = \cos 100\pi t + \cos 400\pi t + \cos^2 100\pi t$ از فيلتر زير عبور مي کند خروجي چه خواهد شد ؟

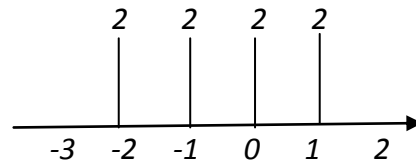


11- الف : سیستم $h_2[n]$ به فرم زیر است . این سیستم را از لحاظ خطی بودن - پایداری - معکوس پذیری و علی بودن چگونه است با ذکر دلیل توضیح دهید ؟

$$h_2[n]$$



ب : اگر ورودی این سیستم به فرم زیر باشد اندازه نمونه های 1 و -1 خروجی یعنی $y[1]$ و $y[-1]$ را بدست آورید ؟

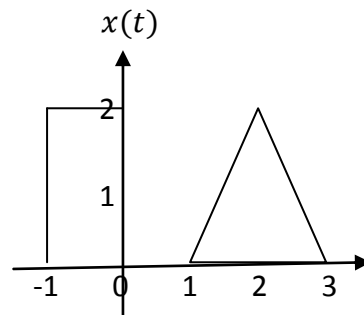


12- اگر $x(t)$ به فرم روبرو باشد شکل موج های زیر را رسم کنید ؟

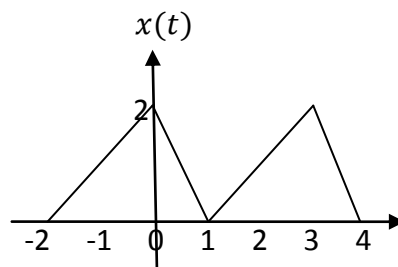
الف : $x\left(\frac{t-3}{2}\right)$

ب : $2x\left(\frac{t}{2} - 3\right)$

ج : قسمت زوج سیگنال $x(t)$ را رسم کنید .



13- ضرایب سری فوریه a_k را برای شکل زیر بدست آورید ؟

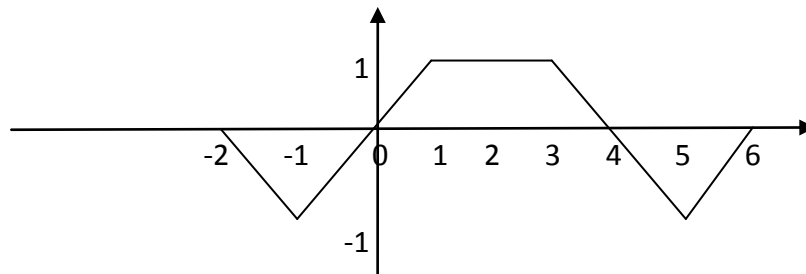


14- بدون بدست آوردن تبدیل فوریه شکل $x(t)$ روبرو مقادیر زیر را بدست آورید :

الف : فاز $X(j\omega)$

ب : $X(0)$

ج : $\int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt$



15- الف : تبدیل فوریه تابع $x(t) = 2e^{-3t}u(t) + e^{-4t}u(t)$ را بیابید ؟

ب : با در نظر گرفتن تبدیل فوریه $y(t) = \frac{dx}{dt}$ را بیابید ؟

ج : بر اساس $x(t)$ تبدیل فوریه $z(t) = x(t)[\sin 2t]$ را بیابید ؟

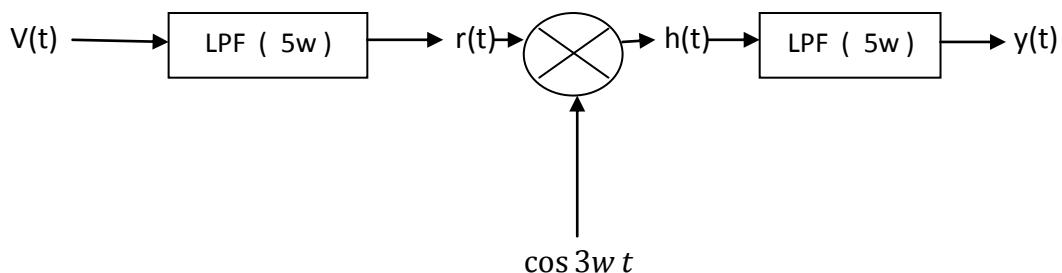
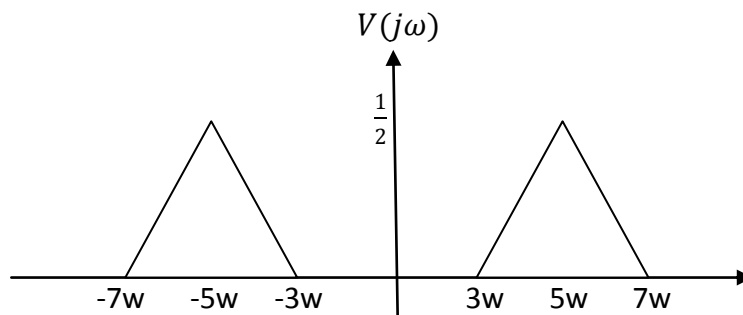
16- طیف فرکانسی $V(j\omega)$ را در نظر بگیرید :

الف : اگر سیگنال $v(t)$ از فیلتر پایین گذر با پهنای باند 5ω عبور کند خروجی آنرا $R(j\omega)$ نامیده و طیف آنرا رسم کنید ؟

ب : در نظر بگیرید سیگنال $r(t)$ که عکس تبدیل فوریه $R(j\omega)$ است وارد یک میکسر شده که خروجی آن به

فرم $h(t) = r(t) \cos 3\omega t$ شده است طیف $H(j\omega)$ را رسم کنید ؟

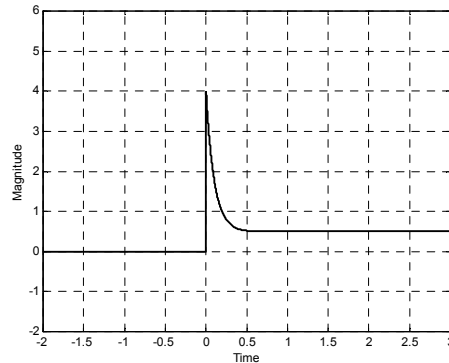
ج : مجدداً سیگنال $h(t)$ وارد یک فیلتر پایین گذر با پهنای باند 2ω شده است خروجی آنرا $y(t)$ در نظر گرفته و $Y(j\omega)$ را رسم کنید ؟





نام و نام خانوادگی: شماره دانشجویی:

(۲۰ نمره) ۱- پاسخ سیستم LTI با تابع تبدیل $H(s)$ به ورودی پله واحد: $x(t) = u(t)$ به صورت شکل زیر است:



در صورتی که بدانیم سیستم تنها یک قطب در $s = -10$ دارد:

الف- علی بودن و پایداری سیستم را بررسی کنید.

ب- با فرض برقرار بودن شرایط قضیه مقدار اولیه و مقدار نهایی، تابع تبدیل سیستم $H(s)$ و معادله دیفرانسیل توصیف کننده سیستم را به دست آورید.

ج- نمودار قطب و صفر سیستم و ناحیه همگرایی آنرا در صفحه s مشخص نمایید.

د- نمودار دامنه و فاز پاسخ فرکانسی سیستم (نمودار بود) را رسم نمایید. با توجه به نمودار پاسخ فرکانسی عملکرد فیلتری سیستم را توضیح دهید.

ه- پاسخ سیستم به ورودی $x(t) = 3 \cos(10t) + 2 + 3 \sin(400t)$ را به دست آورید.

(۱۵ نمره) ۲- رابطه تفاضلی زیر برای یک سیستم علی LTI داده شده است:

$$y[n] + \beta y[n-2] = x[n] + \alpha x[n-1]$$

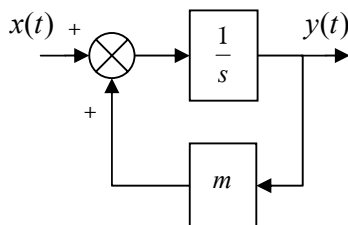
الف- تابع سیستم (تبدیل z) را به دست آورید.

ب- نمودار قطب و صفر سیستم و ناحیه همگرایی را در صفحه z رسم نمایید.

ج- برای چه مقادیری از α, β برای سیستم پاسخ فرکانسی به دست می آید؟

د- با فرض وجود پاسخ فرکانسی، پاسخ سیستم به ورودی $x[n] = 2 + \cos(\omega_0 n)$ را به صورت پارامتری به دست آورید.

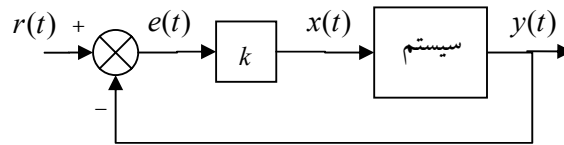
(۱۵ نمره) ۳- شکل زیر نمودار بلوکی یک سیستم LTI علی را نشان می دهد:





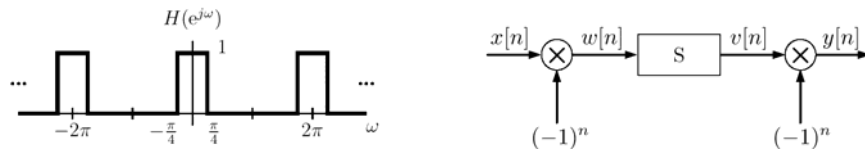
الف- تابع تبدیل و معادله دیفرانسیل سیستم را مشخص نمایید.

ب- نمودار قطب و صفرها و ناحیه همگرایی را در صفحه s رسم کنید. به ازاء چه مقادیری از m سیستم پایدار است؟
ج- فرض کنید سیستم بالا به صورت نشان داده شده در نمودار بلوکی زیر، در یک سیستم با بازخور (فیدبک) اتصال یافته باشد.

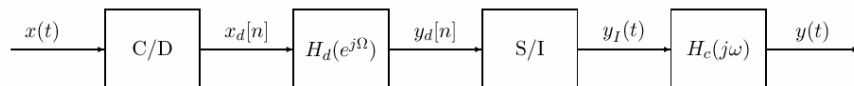


با فرض پایداری سیستم، مقدار خطای ماندگار سیستم $E_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t)$ به ازاء $r(t) = u(t)$ دست آورید. برای کاهش آن چه پیشنهادی دارید؟

۱۰- (نمره ۴-) با توجه به سیستم زمان گسسته نشان داده شده در زیر، با فرض اینکه زیر سیستم S دارای پاسخ فرکانسی $H(e^{j\omega})$ و سیگنال $x[n] = \cos(\pi n)$ باشد، طیف سیگنالهای $x[n]$ ، $w[n]$ ، $v[n]$ و $y[n]$ را به دقت رسم کنید.



۱۰- (نمره ۵-) با توجه به سیستم نشان داده شده در زیر:



که در آن، C/D تبدیل کننده زمان پیوسته به زمان گسسته است به نحوی که: $x_d[n] = x(nT)$ ، $H_d(e^{j\Omega})$ پاسخ فرکانسی سیستم LTI زمان گسسته، S/I تبدیل کننده نمونه ها به قطار ضربه است به نحوی که: $y_I(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} y_d[k] \delta(t - kT)$ و

$$H_c(j\omega) = \begin{cases} a, & |\omega| < W \\ 0, & |\omega| > W \end{cases} \text{ است.}$$

در صورتی که برای همه فرکانسها $H_d(e^{j\Omega}) = 1$ باشد، فرکانس نمونه برداری $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$ و a و W را به گونه ای تعیین کنید

که سیگنال خروجی سیستم $y(t)$ دقیقاً برابر سیگنال ورودی $x(t) = \frac{\sin(2\pi t)}{\pi} + \cos(\frac{\pi}{2}t)$ باشد. برای انتخابهای خود دلایل

لازم را ذکر نمایید.