فصل اول

معرفي سيگنال‌هاي زمان پيوسته و زمان گسسته

۱-۱- تعريف سيگنال

سيگنال تابعي است كه حاوي اطلاعاتي درباره رفتار فيزيكي يك سيستم است.

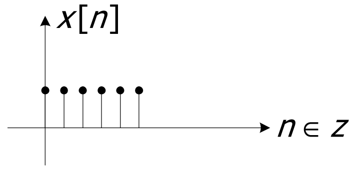
x[n] سيگنال زمان گسسته   x(t) سيگنال زمان پيوسته

t ,n متغيرهاي مستقل و x متغير وابسته يا تابع مي‌باشد.

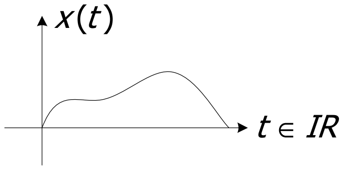
سيستم : مجموعه‌اي از اجزاي گرد آمده در كنار هم.

۲-۱- طبقه‌بندي سيگنال‌ها

۱-۲-۱- سيگنال‌هاي زمان گسسته



۲-۲-۱- سيگنال‌هاي زمان پيوسته



بديهي است كه با نمونه‌برداري از سيگنال زمان پيوسته مي‌توان سيگنال زمان گسسته را بدست آورد.

۳-۱- سيگنال‌هاي زوج و سيگنال‌هاي فرد

$x(t) = x(-t)$ Even , يا زوج $x[n] = x[-n]$

$x(t) = -x(-t)$ Odd ,يا فرد $x[n] = -x[-n]$

تذكر ۱: سيگنال فرد گسسته بالاجبار در مبدا مختصات مقدار صفر دارد.

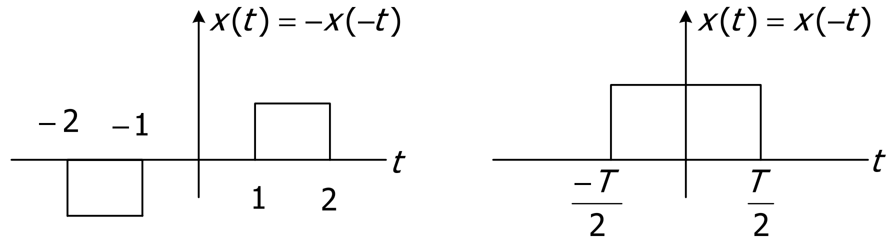
تذكر ۲: هر سيگنال دلخواه را مي‌توان به صورت مجموع دو سيگنال زوج و فرد نوشت:

$$x(t) = Even(x(t)) + Odd(x(t))$$

$$Even(x(t)) = \frac{1}{2}(x(t) + x(-t))$$

$$Odd(x(t)) = \frac{1}{2}(x(t) - x(-t))$$

مثال ۱)



۱-۴- سيگنال متناوب

سيگنال متناوب به سيگنالي گفته مي‌شود كه در بازه‌هاي زماني مشخص عينا تكرار شده باشد.

$$x(t)=x(t+T)=x(t+kT) \qquad \omega_0=2\pi f=\frac{2\pi}{T} \qquad k\in Z$$

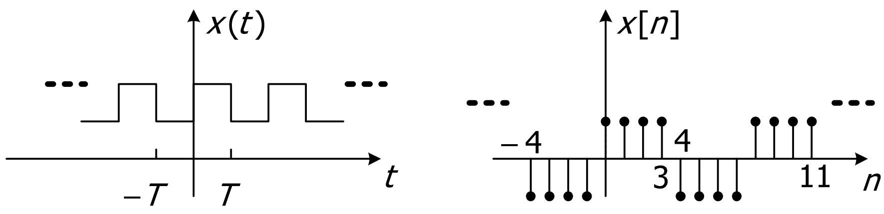
$$x[n]=x[n+N]=x[n+kN] \qquad \Omega_0=2\pi f=\frac{2\pi}{N} \qquad k\in Z$$

تذكر ۱: بديهي است كه اگر N , T دوره تناوب باشند ۲ برابر و ۳ برابر و ... آن هم دوره تناوب است.

تذكر۲: كوچكترين دوره تناوب دوره تناوب اصلي است (T در پيوسته، N در گسسته) و فركانس تعريف شده با كوچكترين دوره تناوب، فركانس اصلي است. (ω_0 در پيوسته، Ω_0 در گسسته)

تذكر۳: دوره تناوب سيگنال زمان پيوسته (T) بايد عدد مثبت باشد، درحاليكه دوره تناوب سيگنال زمان گسسته (N) علاوه بر مثبت بودن بايستي صحيح نيز باشد.

مثال ۲)



دوره تناوب اصلي $2T$ دوره تناوب اصلي $N=8$

۱-۵- سيگنال‌هاي انرژي و توان

$$E=\sum_{-\infty}^{+\infty}x^2[n] \qquad E=\lim_{T\to\infty}\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}}x^2(t)\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2(t)\,dt \qquad \text{انرژي}$$

$$P_{av} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x^2[n] \qquad P_{av} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t)\,dt$$

توان متوسط

يك سيگنال به عنوان سيگنال انرژي شناخته مي‌شود اگر و تنها اگر محدود باشد.

۱-۶- عمليات روي متغير وابسته

(1) $y(t) = Ax(t)$ $\qquad y[n] = Ax[n]$

(2) $y(t) = x_1(t) + x_2(t)$ $\qquad y[n] = x_1[n] + x_2[n]$

(3) $y(t) = x_1(t)\cdot x_2(t)$ $\qquad y[n] = x_1[n]\cdot x_2[n]$

(4) $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ $\qquad y[n] = x[n] - x[n-1]$

(5) $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda)\,d\lambda$ $\qquad y[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} x[m]$

۱-۷- عمليات روي متغير مستقل

۱-۷-۱- شيفت زماني

$$y(t) = x(t-t_0) \qquad y[n] = x[n-n_0]$$

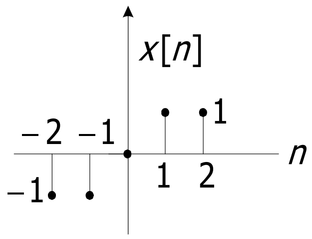
شيفت به راست: اگر $t_0 > 0$ باشد x(t) را به اندازه t_0 به سمت راست شيفت مي‌دهيم تا y(t) بدست آيد.

شيفت به چپ: اگر $t_0 < 0$ باشد x(t) را به اندازه t_0 به سمت چپ شيفت مي‌دهيم تا y(t) بدست آيد.

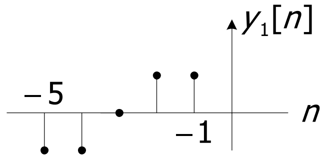
تذكر ۱: چنانچه $t_0 > 0$ باشد، سيگنال $x(t-t_0)$ از x(t) عقب‌تر است (به لحاظ زماني) و چنانچه $t_0 < 0$ باشد، سيگنال $x(t-t_0)$ از x(t) جلوتر است.

تذكر ۲: در مورد سيگنال‌هاي زمان گسسته نيز بسته به اينكه n_0 مثبت و يا منفي باشد سيگنال x[n] را به راست و يا چپ به اندازه n_0 واحد شيفت مي‌دهيم تا y[n] بدست آيد.

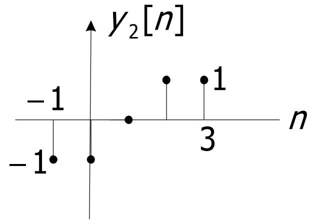
مثال ۳)



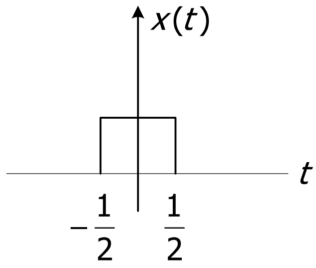
$y_1[n] = x[n+3]$



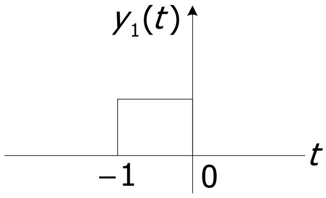
$y_2[n] = x[n-1]$



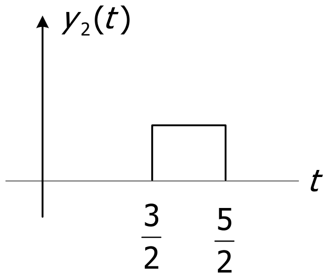
مثال ۴)



$y_1(t) = x(t+\frac{1}{2})$



$y_2(t) = x(t-2)$



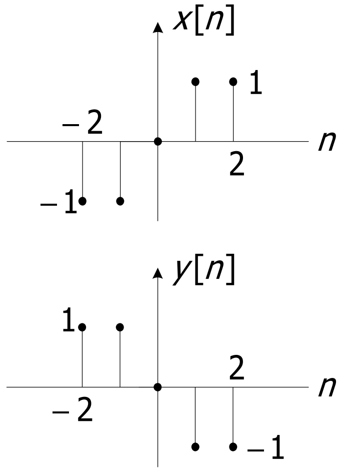
در بسياري از مسائل با استفاده از شيفت زماني مي‌توان سيگنالي را به صورت زوج يا فرد درآورد.

۱-۷-۲- وارون‌سازي زماني

$$y(t) = x(-t) \qquad\qquad y[n] = x[-n] \tag{2}$$

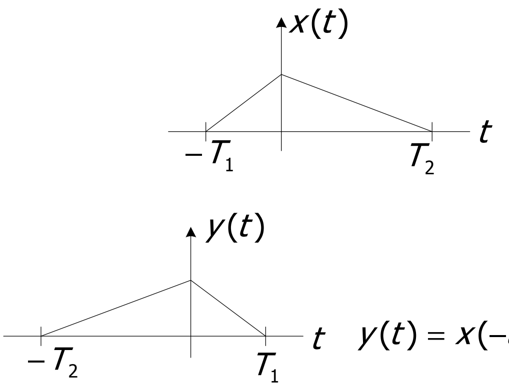
x(-t) يا x[-n] انعكاس x(t) و يا x[n] نسبت به محور قائم هستند.

مثال ۵)



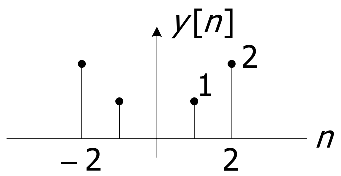
$y[n] = x[-n]$

مثال ۶)

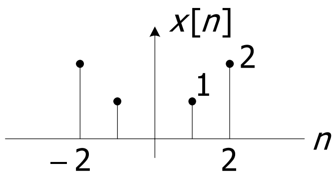


$y(t) = x(-t)$

مثال ۷)



$y[n] = x[-n]$



براي سيگنالي كه نه زوج و نه فرد است وارون زماني آن نه فرد و نه زوج است. اما براي سيگنال زوج وارون زماني زوج است ولي براي سيگنال فرد با توجه به خاصيت x[n]= -x[-n] وارون زماني آن -x[n] است.

۱-۷-۳- تغيير مقياس زماني

$$y(t) = x(at) \quad ; a \in IR \qquad\qquad y[n] = x[kn] \quad \text{يا} \quad y[n] = x[\frac{1}{k}n] \quad ; k \in Z \tag{3}$$

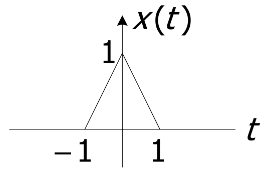
الف) اگر |a|>1 باشد y(t) فشرده شده سيگنال x(t) خواهد بود.

ب) اگر |a|<1 باشد y(t) باز شده سيگنال x(t) خواهد بود.

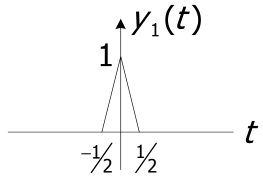
ج) اگر $a < 0$ باشد بايد بعد از تغيير مقياس ، وارون زماني انجام داد.

تذكر: در زمان پيوسته ماهيت سيگنال عوض نمي‌شود، اما در زمان گسسته ماهيت سيگنال تغيير مي‌كند و سيگنال جديدي بدست مي‌آيد.

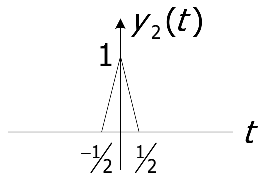
مثال ۸)



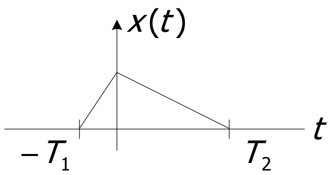
$y_1(t) = x(2t)$



$y_2(t) = x(-2t)$

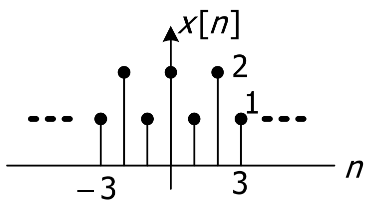


مثال ۹)



$y(t) = x(-\frac{1}{2}t)$

مثال ۱۰) $N = 2$, $y_1[n] = x[2n]$



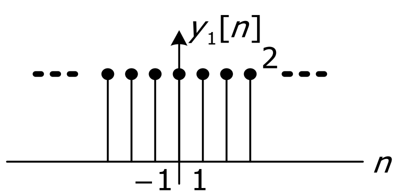
براي حل اينگونه مسائل به روش زير عمل مي‌كنيم:

با جايگذاري n در فرمول y[n] مقادير بدست آمده برحسب x[n] مي‌باشند.

$\vdots$

$y[-1] = x[-2] = 2$

$y[0] = x[0] =$



$y[1] = x[2] = 2$

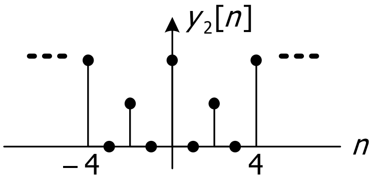
$y[2] = x[4]$

$\vdots$

دوره تناوب سيگنال جديد $x[2n]$ برابر $N = 1$ است.

تذكر: y[n]= x[kn] نسبت به x[n] فشرده شده، كه برخي از مقادير را از دست مي‌دهد.

مثال ۱۱)
$$y_2[n] = x[\tfrac{1}{2}n]$$



$$\vdots$$
$$y[-1] = 0$$
$$y[0] = x[0] = 2$$
$$y[1] = x[\frac{1}{2}] = 0$$
$$y[2] = x[1] = 1$$
$$\vdots$$

دوره تناوب سيگنال جديد برابر $N = 4$ است.

تذكر: $y[n] = x[\frac{1}{k}n]$ نسبت به x[n] باز شده كه در نتيجه تعدادي صفر به y[n] اضافه خواهد شد. بدين ترتيب ماهيت سيگنال گسسته در اثر تغيير مقياس زماني تغيير مي‌كند.

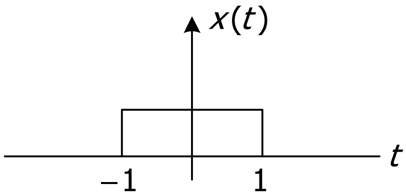
تذكر: اگر سيگنال زمان پيوسته و يا زمان گسسته متناوب باشند، در اثر تغيير مقياس زماني در اثر فشرده شدن، دوره تناوب سيگنال جديد كم شده و در اثر باز شدن، دوره تناوب سيگنال جديد افزايش مي‌يابد.

۱-۷-۴- رسم سيگنال به روش منظم

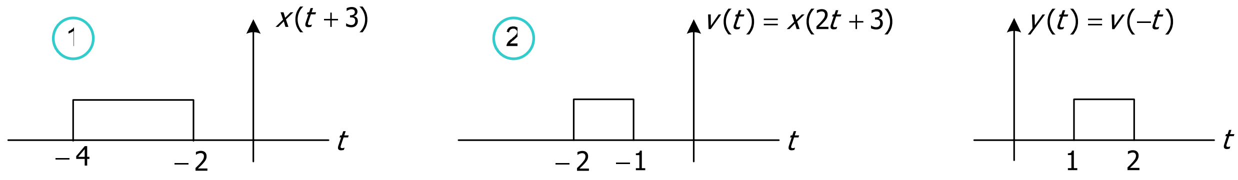
4)
$$y[n] = x[kn - n_0] \quad (x[\frac{1}{k}n - n_0])$$
$$x[n] \to v[n] = x[n - n_0]$$
$$v[n] \to y[n] = v[kn] = x[kn - n_0] \quad (x[\frac{1}{k}n - n_0])$$

4)
$$y(t) = x(at - b)$$
$$x(t) \to v(t) = x(t - b)$$
$$\boldsymbol{v(t) \to y(t) = v(at) = x(at - b)}$$

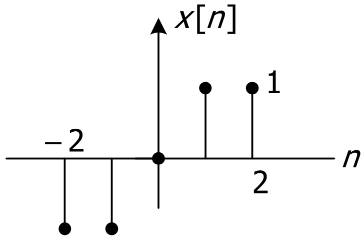
مثال ۱۲)



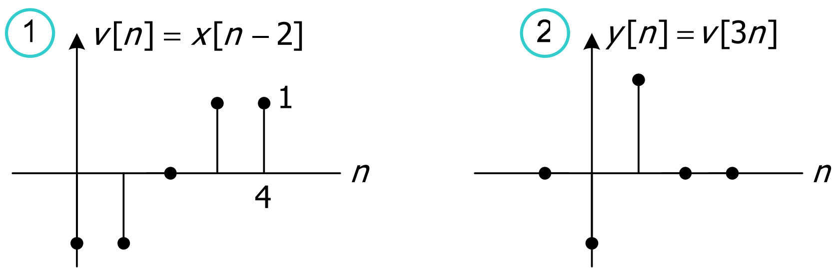
$$y(t) = x(-2t + 3) = ?$$



مثال ۱۳)

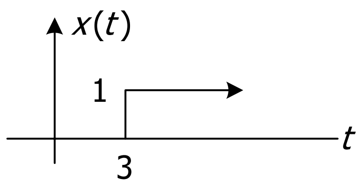


$$y[n] = x[3n-2] = ?$$

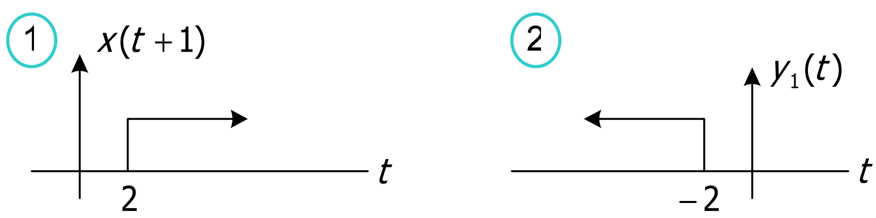


مثال ۱۴)

$$x(t) = \begin{cases} 0 & t < 3 \\ 1 & t \geq 3 \end{cases}$$

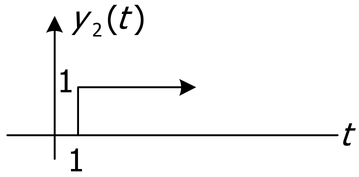


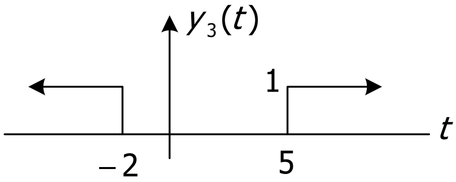
الف) $y_1(t) = x(1-t)$



ب) $y_2(t) = x(3t)$

ج) $y_3(t) = x(1-t) + x(t-2)$

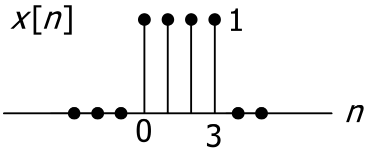


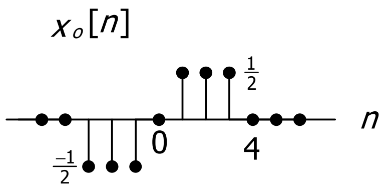


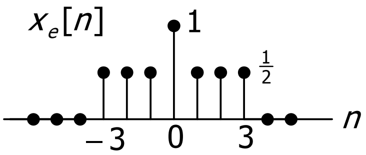
مثال ۱۵) مطلوب است قسمت زوج و فرد سیگنال زیر؟

$$x[n]=\begin{cases}1 & n=0,1,2,3\\ 0 & o.w\end{cases}$$

میدانیم
$$\begin{cases}x_e=\frac{1}{2}(x[n]+x[-n])\\ x_o=\frac{1}{2}(x[n]-x[-n])\end{cases}$$





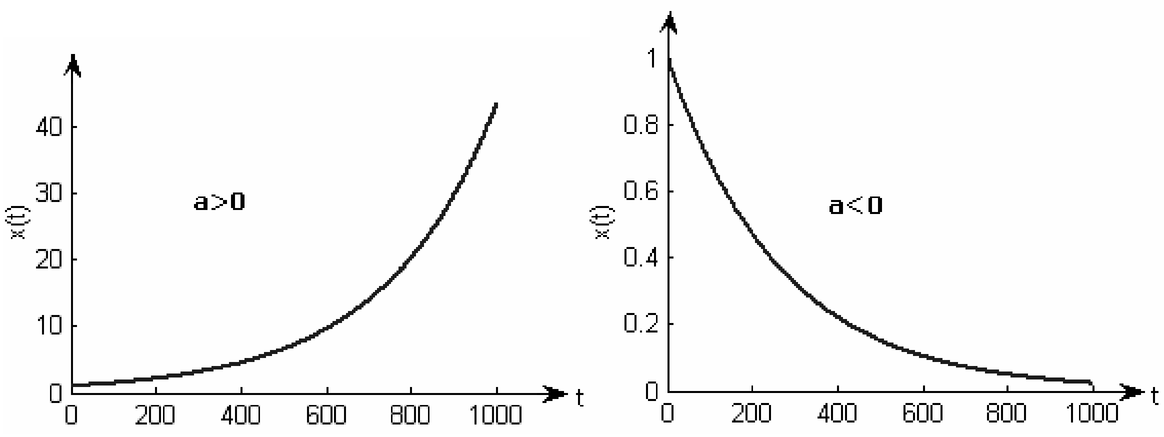


۱-۸- معرفي سيگنال‌هاي مهم

در اين قسمت چند سيگنال اساسي زمان پيوسته و زمان گسسته را معرفي مي‌كنيم. اين سيگنال‌ها نه تنها به دفعات پيش مي‌آيند بلكه توسط آنها مي‌توان سيگنال‌هاي پيچيده‌اي را فرموله و توليد كرد. مهم‌ترين كاربرد آنها در آزمايشگاه مشخص مي‌شود.

۱-۸-۱- سيگنال نمايي

زمان پيوسته $x(t) = Be^{at}$



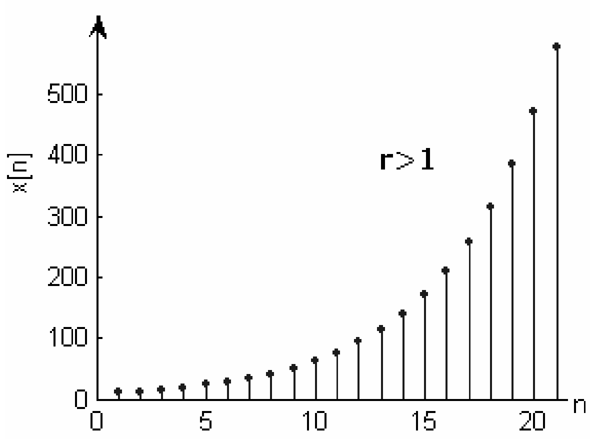
الف) نمايي كاهشي ب) نمايي افزايشي

با فرض اينكه $a, B \in IR$ باشند، با توجه به مثبت و يا منفي بودن a سيگنال نمايي به يكي از دو فرم افزايشي و يا كاهشي خواهد بود.

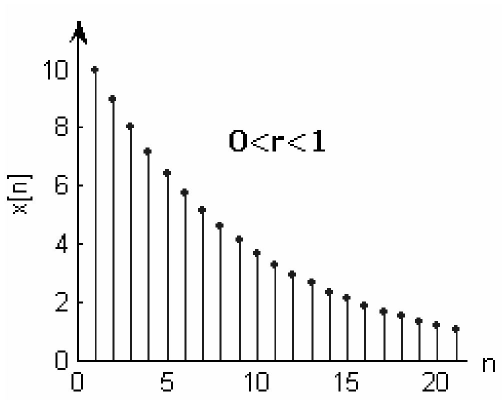
تذكر: چنانچه دامنه سيگنال خروجي سيستمي با افزايش زمان به طور نامحدود زياد شود، سيستم تحت بررسي به عنوان سيستم ناپايدار شناخته مي‌شود.

سگنال زمان گسسته $x[n] = B(r^n)$

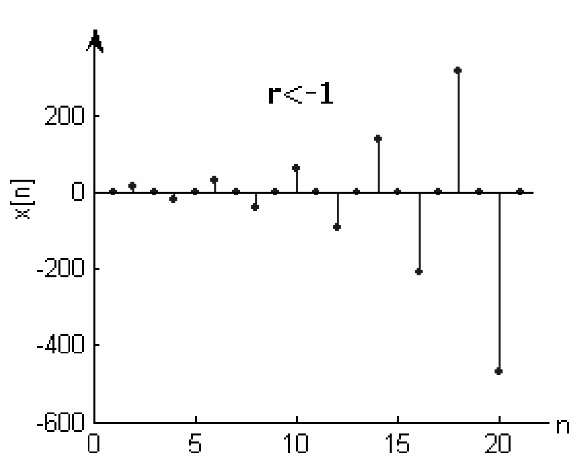
سيگنال زمان گسسته نمايي بسته به مقادير مختلف r چهار حالت مي‌تواند داشته باشد.



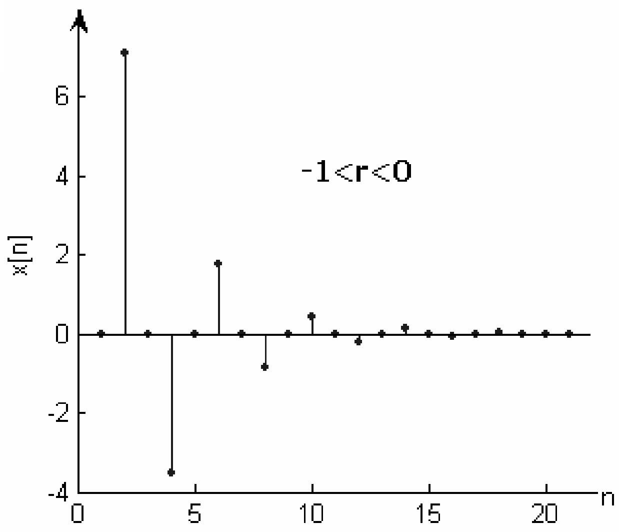
الف) نمايي افزايشي



ب) نمايي كاهشي



ج) نوساني افزايشي



د) نوساني كاهشي

۱-۸-۲- سيگنال سينوسي

زمان پيوسته $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ و $\omega = 2\pi f = \dfrac{2\pi}{T}$

تذكر: سيگنال سينوسي همواره متناوب و با دوره تناوب T است.

مثال ۱)

الف) $x(t) = \cos(\dfrac{1}{6}t)$

$$\rightarrow T = \frac{2\pi}{\frac{1}{6}} = 12\pi$$

ب) $x(t) = \cos(\frac{8\pi}{31}t)$

$$\to T = \frac{2\pi}{\frac{8\pi}{31}} = \frac{31}{4}$$

سيگنال زمان گسسته $x[n] = A\cos(\Omega n + \varphi)$ و $\Omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{N}$

تذكر: سيگنال زمان گسسته سينوسي به شرطي متناوب است كه بتوان $N \in Z^+$ را بدست آورد به نحوي كه $x[n] = x[n+N]$ گردد. (اين سيگنال برخلاف سيگنال زمان پيوسته سينوسي بعضا متناوب نيست.)

$$A\cos(\Omega n + \varphi) = A\cos(\Omega n + \Omega N + \varphi) \to \Omega N = 2k\pi \quad , \quad k \in Z \Rightarrow N = \frac{2k\pi}{\Omega}, N \in Z^+$$

مثال ۲)

الف)

$$x[n] = \cos[\frac{2\pi}{12}n] \Rightarrow N = \frac{2k\pi}{\frac{2\pi}{12}} = 12k = 12$$
, (k=1)

ب)

$$x[n] = \cos[\frac{8\pi}{31}n] \Rightarrow N = \frac{2k\pi}{\frac{8\pi}{31}} = \frac{31}{4}k = 31$$
,(k=4)

ج)

$$x[n] = \cos[\frac{1}{6}n] \Rightarrow N = \frac{2k\pi}{\frac{1}{6}} = 12k\pi$$
متناوب نيست

۱-۸-۳- سيگنال نمايي مختلط

زمان پيوسته $x(t) = B\,e^{-j\omega t}$ يا $x(t) = Be^{j\omega t}$

$$x(t) = B\,e^{j\omega t} = B\cos(\omega t) + jB\sin(\omega t) \quad , \quad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

زمان گسسته $x[n] = B\,e^{-j\Omega n}$ يا $x[n] = Be^{+j\Omega n}$

$$N \in Z^+, K \in Z \quad , \quad N = \frac{2k\pi}{\Omega} \qquad x[n] = B\,e^{j\Omega n} = B\cos(\Omega n) + jB\sin(\Omega n)$$

تذكر ۱: سيگنال زمان گسسته نمايي مختلط $x[n] = Be^{+j\Omega n}$ مي‌تواند در زمان متناوب با دوره تناوب N باشد.

تذكر ۲: سيگنال زمان گسسته نمايي مختلط $x[n] = Be^{+j\Omega n}$ علاوه بر اينكه در زمان نسبت به n مي‌تواند متناوب باشد، در فركانس نيز نسبت به Ω همواره متناوب است.

$$e^{j\Omega n} = e^{j(\Omega+2\pi)n} = e^{j(\Omega+4\pi)n} = e^{j(\Omega+2m\pi)n}\ , \quad m \in z$$

تذكر ۳: اگر سيگنال به صورت حاصلضرب بود در صورت امكان بايد به حاصل جمع دو سيگنال تبديل شود و دوره تناوب هر كدام را جداگانه به دست آورد. سپس دوره تناوب مشترك را به دست مي‌آوريم.

مثال ۳)

الف) $x(t) = e^{j2t} + e^{j3t}$

$$T_1 = \frac{2\pi}{2} = \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, \ldots \ , \quad T_2 = \frac{2\pi}{3} = \frac{6\pi}{3} = \frac{8\pi}{3} = \ldots \quad \Rightarrow T = 2\pi$$

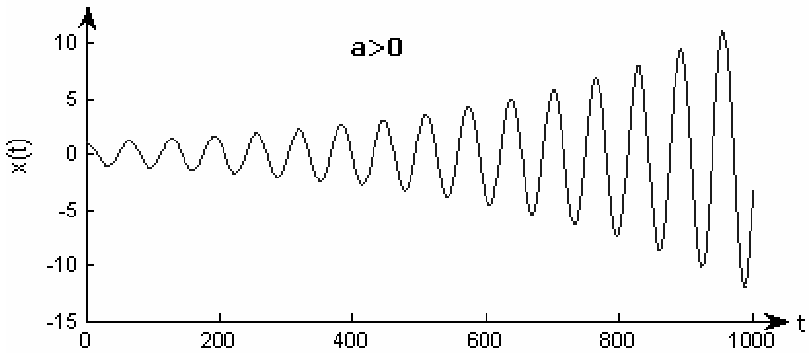
ب) $x[n] = e^{j\frac{2\pi}{3}n} + e^{j\frac{3\pi}{4}n}$

$$N_1 = \frac{2k\pi}{\frac{2\pi}{3}} = 3k = 3 = 6 = 9 = \ldots = 24 \ , \quad N_2 = \frac{2k\pi}{\frac{3\pi}{4}} = \frac{8k}{3} = 8 = 16 = 24 = \ldots \quad N = 24$$

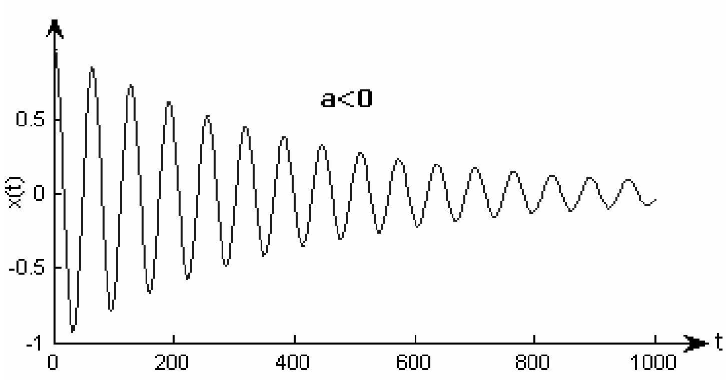
۱-۸-٤- سيگنال سينوسي ميراشونده

زمان پيوسته $x(t) = Be^{at}\cos(\omega t + \varphi)$

تذكر: سيگنال نمايي متناوب نبوده و پس از ضرب آن در هر عبارتي باعث مي‌شود كه سيگنال نهايي متناوب نباشد.

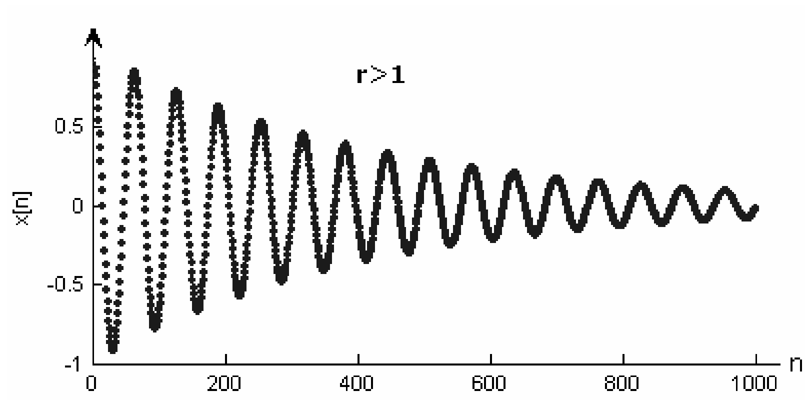


الف) سيگنال سينوسي ميراشونده افزايشي

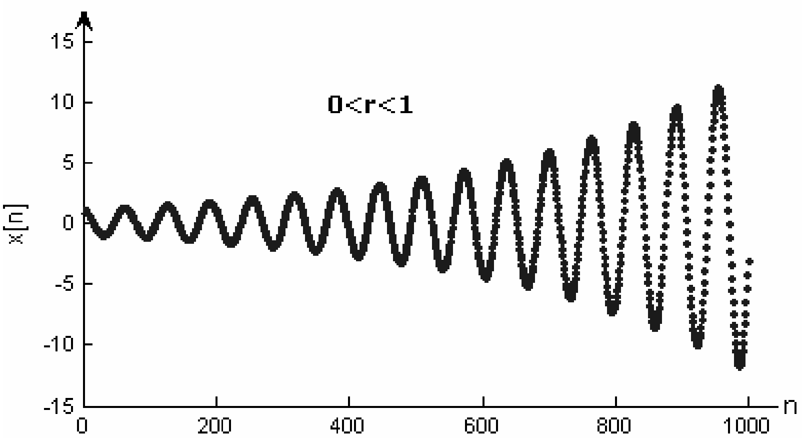


ب) سيگنال سينوسي ميراشونده كاهشي

زمان گسسته $x[n] = B(r^n)\cos[\Omega n + \varphi]$



الف) سيگنال سينوسي ميراشونده كاهشي



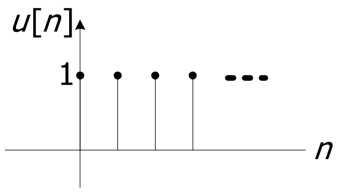
ب) سيگنال سينوسي ميراشونده افزايشي

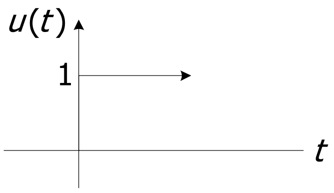
۱-۹-توابع ویژه

۱-۹-۱-تابع پله واحد

$$u[n]=\begin{cases}1 & n\ge 0\\ 0 & n<0\end{cases}$$
زمان گسسته

$$u(t)=\begin{cases}1 & t\ge 0\\ 0 & t<0\end{cases}$$
زمان پیوسته

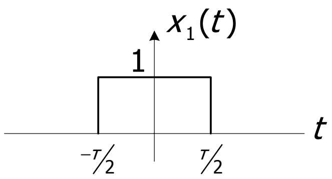




تذکر: توابعي که فرم هندسي دارند را مي‌توان بر حسب تابع پله بيان کرد:

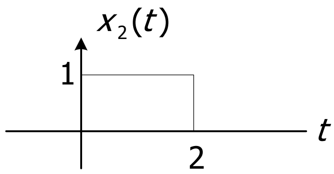
مثال ٤)

الف)



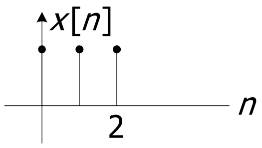
$$x_1(t)=u(t+\tfrac{T}{2})-u(t-\tfrac{T}{2})$$

ب)



$$x_2(t)=u(t)-u(t-2)$$

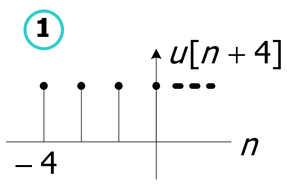
ج)

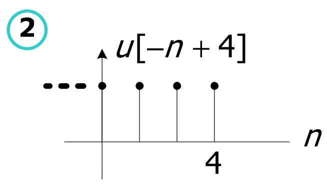


$$x[n]=u[n]-u[n-3]$$

د)

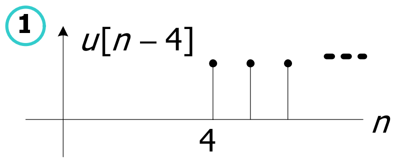
$$u[-n+4]$$

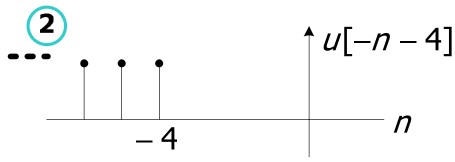




ن)

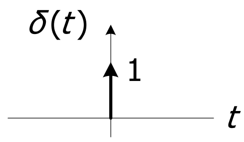
$$u[-n-4]$$





۱-۹-۲-تابع ضربه

زمان پيوسته



$$\delta(t)=\begin{cases}\text{مقدارويژه} & t=0\\ 0 & t\neq 0\end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt=\int_{0^-}^{0^+}\delta(t)dt=1 \quad , \quad \int_{-\infty}^{-1}\delta(t)dt=0$$

رابطه بين تابع پله واحد و تابع ضربه واحد

$$\delta(t)=\frac{du(t)}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\lambda)d\lambda=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t\geq 0\end{cases}$$

$$u(t-t_0)=\int_{-\infty}^{t-t_0}\delta(\lambda)d\lambda=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau-t_0)d\tau$$

$$\lambda+t_0=\tau$$

-خواص:

۱) بيان توابع چند ضابطهاي با يك ضابطه:

$$y(t)=\begin{cases}x(t) & t\geq 0\\ 0 & o.w\end{cases} \quad \Rightarrow y(t)=x(t)u(t)$$

مثال ٥)

$$y(t)=\begin{cases}x(t) & t\geq 2\\ 0 & o.w\end{cases} \quad \Rightarrow y(t)=x(t)u(t-2)$$

۲) خاصيت غربالي تابع ضربه

$$x(t)\cdot\delta(t)=x(0)\delta(t)$$
$$x(t)\delta(t-t_0)=x(t_0)\delta(t-t_0)$$

۳) انتگرال کانولوشن

$$\int_{\lambda=-\infty}^{+\infty} x(\lambda)\delta(t-\lambda)d\lambda = x(t)\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-\lambda)d\lambda = x(t)$$

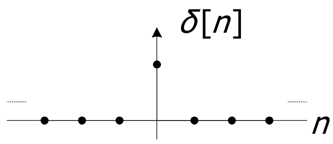
٤) زوج بودن تابع ضربه

$$\delta(t)=\delta(-t)$$

۵*)

$$\delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t)$$

زمان گسسته



$$\delta[n]=\begin{cases}1 & n=0\\ 0 & n\neq 0\end{cases}$$

رابطه بین تابع پله واحد و تابع ضربه واحد

$$u[n]=\delta[n]+\delta[n-1]+\ldots$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\delta[n-k]=\sum_{m=n}^{-\infty}\delta[m]=\sum_{m=-\infty}^{n}\delta[m]$$
$$u[n-n_0]=\sum_{k=-\infty}^{n-n_0}\delta[k]=\sum_{k=0}^{\infty}\delta[n-n_0-k]$$

$$\delta[n]=u[n]-u[n-1] \qquad\qquad \delta[n]=u[-n]-u[-n-1]$$

تابع ضربه چون تابعي زوج است پس هر دو رابطه بالا قابل قبول است.

- خواص:

۱) بیان توابع چند ضابطه‌اي با يك ضابطه

$$y[n]=\begin{cases}x[n] & n\leq -2\\ 0 & o.w\end{cases}=x[n]u[-n-2]$$

۲) خاصیت غربالي تابع ضربه

---

* این رابطه را اثبات کنید.

$$y[n] = x[n] \cdot \delta[n] = x[0]\delta[n]$$

مثال 6:

$$y[n] = x[n+2]\delta[n-4] = x[6]\delta[n-4]$$

۳)انتگرال کانولوشن

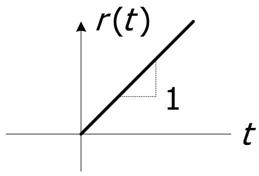
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] = x[n]\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta[n-k] = x[n]$$

4) زوج بودن تابع ضربه

$$\delta[n] = \delta[-n]$$

۱-۹-۳- تابع شیب

زمان پیوسته

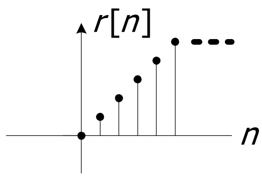


$$r(t) = \begin{cases} t & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

رابطه بین تابع شیب و پله واحد

$$u(t) = \frac{dr(t)}{dt} \qquad r(t) = t\,u(t) = \int_{-\infty}^{t} u(\lambda)\,d\lambda$$

زمان گسسته



$$r[n] = \begin{cases} n & n \ge 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

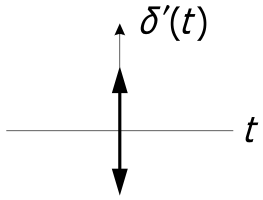
رابطه بین تابع شیب و پله واحد

$$u[n] = ? \qquad r[n] = n\,u[n]$$

۱-۹-٤- تابع دوبلت واحد

زمان پیوسته

$$\delta'(t) = \frac{d\delta(t)}{dt}$$



خواص:

خاصيت ۱)

$$x(t)\delta'(t) = x(0)\,\delta'(t) - x'(0)\delta(t)$$

اثبات:

$$(x(t)\cdot f(t))' = x'(t)f(t) + x(t)f'(t)$$

$$if\ f(t) = \delta(t)$$

$$\downarrow \qquad = x'(t)\delta(t) + x(t)\delta'(t) + x'(0)\delta(t) + x(t)\delta'(t)$$

$$(x(t)\delta(t))'$$

$$=$$

$$(x(0)\,\delta(t))'$$

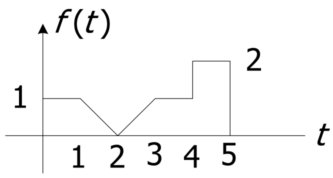
$$=$$

$$x(0)\delta'(t) = x'(0)\delta(t) + x(t)\delta'(t) \Rightarrow x(t)\delta'(t) = x(0)\,\delta'(t) - x'(0)\delta(t)$$

خاصيت ۲)

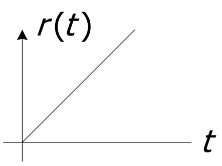
$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda)\delta'(t-\lambda)d\lambda = x'(t)$$

مثال ۷) مطلوب است بيان f(t) بر حسب توابع ويژه ؟

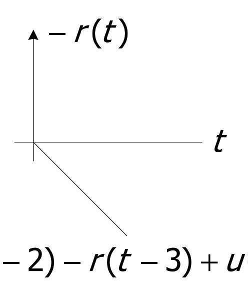


از منتهي اليه سمت چپ شروع به نوشتن مي‌كنيم. هر جا كه شكل تغيير كند يعني تابع عوض شده. اولين كاري كه انجام مي‌دهيم ضريب زاويه كليه خطها را بدست مي‌آوريم :

در فاصله $1 \le t \le 2$ شكل تغيير كرده و داراي شيب به سمت پايين است. در فاصله $2 \le t \le 3$ نيز شكل دوباره تغيير مي‌كند.



$$\begin{matrix}(2,0)\\(3,1)\end{matrix} \Rightarrow m = 1$$



$$\begin{matrix}(1,1)\\(2,0)\end{matrix} \Rightarrow m = -1$$

$$f(t) = u(t) - r(t-1) + 2r(t-2) - r(t-3) + u(t-4) - 2u(t-5)$$

$$f'(t) = \delta(t) - u(t-1) + 2u(t-2) - u(t-3) + \delta(t-4) \_ 2\delta(t-4)$$

مثال ۸) اگر $f(t) = a\, e^{-t}$ هر يك از توابع زير را همراه با مشتق و انتگرالشان رسم كنيد.

الف) $f_1(t) = f(t)\, u(t)$

حل

$$f_1'(t) = f'(t)\, u(t) + f(t)\, u'(t)$$
$$= f'(t)\, u(t) + f(0)\, \delta(t) + -a\, e^{-t}\, u(t) + a\, \delta(t)$$

$$\int_0^{+\infty} f(t)\, dt = \int_0^{+\infty} a\, e^{-t}\, dt = -a\, e^{-t} \Big|_0^{+\infty} = a$$

ب) $f_2(t) = f(t-1)\, u(t-2)$

ج) $f_3(t) = f(t-1)\, u(t-1)$

د) $f_4(t) = f(t-1)\, u(t)$

سيستم و تعريف آن :

پروسه‌اي كه باعث تغيير و تحول در يك سيگنال مي‌شود .

مجموعه‌اي منظم كه به كمك يكديگر هدف مشخصي را برآورده مي‌سازد.

بيان روابط بين خروجي و ورودي در يك سيستم :

زمان پيوسته

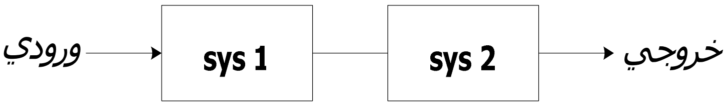
۱) با استفاده از معادلات ديفرانسيل ۲) تابع تبديل

زمان گسسته

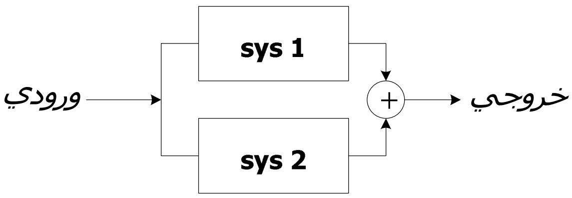
۱) معادلات تفاضلي ۲) تابع تبديل

۱-۱۰- تقسيم‌بندي سيستم‌ها

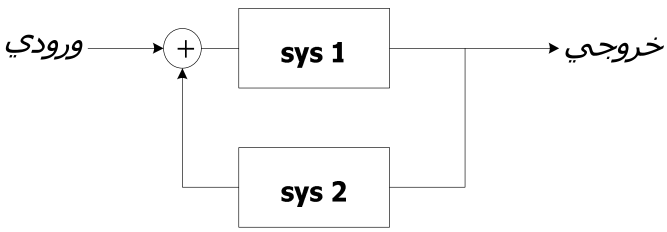
۱-۱۰-۱- اتصال سري:



۱-۱۰-۲- اتصال موازي:



۱-۱۰-۳- اتصال فيدبك:



۱-۱۱- خواص سيستم‌ها

۱-۱۱-۱- حافظه

سيستم بدون حافظه است اگر خروجي در هر لحظه به ورودي در همان لحظه بستگي داشته باشد. به عبارت ديگر سيستم با حافظه است اگر خروجي به مقادير گذشته ورودي وابسته باشد.

مثال ۱)

الف) $y[n] = 2x[n] + x^2[n]$ بدون حافظه

ب) $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$ با حافظه

ج) $y[n] = \frac{1}{3}(x[n] + x[n-1] + x[n-2])$ با حافظه

د) $i(t) = \frac{1}{R} v(t)$ بدون حافظه

ن) $i_L(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{t} v_L(\lambda)\, d\lambda$ باحافظه

و) $v_L(t) = L \frac{di_l(t)}{dt}$ با حافظه

۱-۱۱-۲- پايداري (BIBO1)

سيستمي پايدار است كه به ازاي ورودي محدود خروجي محدود بدهد.

$$\left|x(t)\right| \le M_x < \infty \,,\ \forall t \Rightarrow \left|y(t)\right| \le M_y < \infty \,,\ \forall t$$

تذكر۱: اگر سيستمي با ورودي محدود و خروجي نامحدود داشتيم اين سيستم ناپايدار است.

تذكر ۲: اگر سيستمي با ورودي نامحدود و خروجي نامحدود داشتيم هيچ صحبتي نمي‌توان راجع به اين سيستم كرد.

[1] Bounded Input Bounded Output

مثال ۲) $y(t) = t\,x(t)$

$x(t) = u(t)$ را در نظر می‌گیریم:

$y(t) = t\,u(t) = r(t)$ و $r(t)$ تابعي نامحدود است پس سيستم ناپايدار است.

مثال ۳) $y(t) = e^{x(t)}$

$$\left|y(t)\right| = \left|e^{x(t)}\right| = e^{x(t)} \le M_y < \infty$$

چون $e^{x(t)}$ عدد مي‌شود پس باز هم محدود است. بنابراين با توجه به تعريف رياضي اين سيستم پايدار است.

مثال ٤)

$$y[n] = \frac{1}{3}(x[n] + x[n-1] + x[n-2])$$

اگر $x[n]$ در همه لحظات محدود باشد شيفت يافته‌هاي آن هم محدود است پس سيستم پايدار است

مثال ٥)

$$y[n] = r^n\ x[n]\begin{cases} |r| > 1 \Rightarrow |r^n| \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty : x[n] = u[n] \to y[n] \underset{n\to\infty}{\to} \infty \Rightarrow \text{ناپايدار} \\ |r| < 1 \Rightarrow |r^n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow \text{پايدار} \end{cases}$$

مثال ۶)

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \to x[n] = u[n] \to y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} u[k] = r[n]$$

ناپايدار

۱-۱۱-۳- عليت (causality)

سيستمي علي است كه خروجي در هر لحظه به ورودي در همان لحظه يا لحظات قبل بستگي داشته باشد به عبارتي خروجي سيستم به آينده ورودي بستگي ندارد.

تذكر ۱: سيستم بدون حافظه مطمئنا علي است.

تذكر ۲: براي سيستم علي شرط سكون برقرار است.

شرط سكون:

$$x(t) = 0; \quad t \le t_0 \Rightarrow y(t) = 0; \ \ t \le t_0$$

$$x_1(t) = x_2(t); \quad t \le t_0 \Rightarrow y_1(t) = y_2(t); \quad t \le t_0$$

مثال ۷)

الف) $y(t) = x(t+1)$ غيرعلي

ب) $v_c(t) = \dfrac{1}{c}\int_{-\infty}^{t} i_c(\tau)\, d\tau$ علي

ج)
$$i_c(t) = \frac{dv_c(t)}{dt} \quad ; \quad \frac{dv_c}{dt} = \begin{cases} \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{v_c(t) - v_c(t-\Delta t)}{\Delta t} \\ \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{v_c(t+\Delta t) - v_c(t)}{\Delta t} \end{cases}$$

با توجه به اين كه براي مشتق دو تعريف وجود دارد چنانچه از دومين تعريف براي تعيين جريان خازن استفاده نمائيم سيستم مذكور غيرعلي خواهد بود.

د) $y(t) = x(t)\cos(t+1)$

خروجي فقط به زمان حال ورودي بستگي دارد و ازطرفي چون سيستم بدون حافظه است پس حتما علي است.

ه) $y[n] = \sum\limits_{k=-\infty}^{n} x[k] = x[n] + x[n-1] + \dots$ علی

ن) $y[n] = x[-n] \qquad n = -1 \Rightarrow y[-1] = x[1]$ غير علی

و) $y[n] = \dfrac{1}{3}(x[n] + x[n-1] + x[n-2])$ علی

ی) $y[n] = \dfrac{1}{3}(x[n+1] + x[n] + x[n-1])$ غير علی

۱-۱۱-۴- معكوس‌پذيري

سيستمي معكوس‌پذير است كه به ازاي ورودي‌هاي متمايز همواره خروجي‌هاي متماير داشته باشد.

اگر سيستمي معكوس‌پذير باشد مي‌توان به صورت زير نشان داد:

$$x(t) \longrightarrow \boxed{sys} - \boxed{sys^{-1}} \longrightarrow x(t)$$

مثال۴:

الف) $y(t) = 2x(t)$ معكوس‌پذير

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\times 2} - \boxed{\times \frac{1}{2}} \longrightarrow x(t)$$

ب)

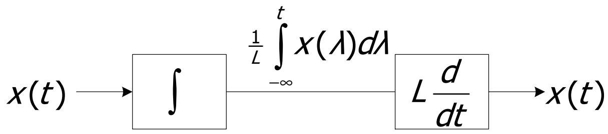
$$y(t) = x^2(t) \qquad \begin{cases} x(t) = 1 \\ x(t) = -1 \end{cases} \Rightarrow y(t) = 1$$

معکوس ناپذير

ج)

$$y(t) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} x(\lambda)\, d\lambda$$

بايد ورودي بدهيم كه خروجي را از حالت پايدار خارج نكند.



ن)

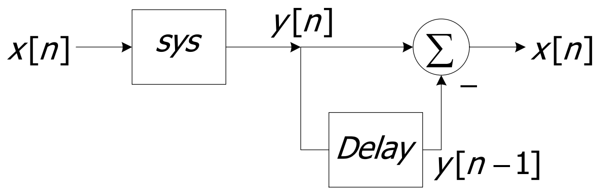
$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

چون به ازاي همه وردي‌هاي ثابت خروجي صفر مي‌شود پس معكوس‌پذير نيست.

و)

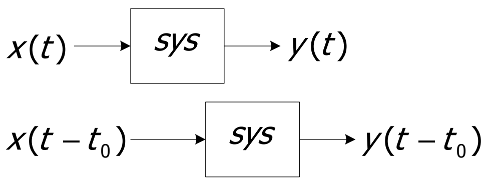
$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$

$$y[n-1] = \sum_{k=-\infty}^{n-1} x[k] \qquad \Rightarrow y[n] - y[n-1] = x[n]$$



۱-۱۱-۵- نامتغير با زمان (TI) Time invariant

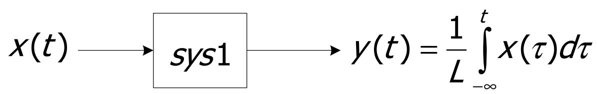
اگر رفتار و مشخصه‌هاي سيستم در طي زمان ثابت باشد. به آن سيستم، نامتغير با زمان گفته مي‌شود.



مثال ٥)

الف)

$$y(t) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau$$



با توجه به تعريف اگر شيفت يافته ورودي را به سيستم اعمال كنيم خروجي هم به همان اندازه شيفت پيدا كند، سيستم مورد نظر نامتغير با زمان خواهد بود.

$$z(t) \longrightarrow \boxed{sys1} \longrightarrow \text{خروجي} = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} z(\tau)d\tau$$

$$z(t) = x(t-t_0) \Rightarrow \quad \text{خروجي} = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} z(\tau)\,d\tau = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} x(t-t_0)\,d\tau \underset{t-t_0=\lambda}{=} \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t-t_0} x(\tau)\,d\tau$$

$$\text{خروجي} = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t-t_0} x(\lambda)\,d\lambda \overset{?}{=} y(t-t_0)$$

نامتغيربازمان

ب)

$$y(t) = \frac{1}{R(t)}x(t)$$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{sys2} \longrightarrow y(t) = \frac{1}{R(t)}x(t)$$

$$z(t) \longrightarrow \boxed{sys2} \longrightarrow \text{خروجي} = \frac{1}{R(t)}z(t)$$

$$z(t) = x(t-t_0) \Rightarrow \text{خروجي} = \frac{1}{R(t)}x(t-t_0) \overset{?}{=} y(t-t_0)$$

$$\overset{?}{=} \frac{1}{R(t-t_0)}x(t-t_0)$$

متغير با زمان

ج)

$$y(t) = t\,x(t)$$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{sys3} \longrightarrow y(t) = t\,x(t)$$

$$z(t) \longrightarrow \boxed{sys3} \longrightarrow \text{خروجي} = t\,z(t)$$

$$z(t) = x(t-t_0) \Rightarrow \text{خروجي} = t\,x(t-t_0) \overset{?}{=} y(t-t_0)$$

$$\overset{?}{=} (t-t_0)x(t-t_0)$$

متغير با زمان

د)

$$y(t) = x(at)$$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{sys4} \longrightarrow y(t) = x(at)$$

$$z(t) \longrightarrow \boxed{sys4} \longrightarrow \text{خروجي} = z(at)$$

$$z(t)=x(t-t_0) \Rightarrow \text{خروجي} = x(at-t_0) \overset{?}{=} y(t-t_0)$$

$$\overset{?}{=} x(a(t-t_0))$$ متغير با زمان

ن) $y[n]=r^n x[n]$

$$x[n] \longrightarrow \boxed{sys5} \longrightarrow y[n]=r^n\, x[n]$$

$$z[n] \longrightarrow \boxed{sys5} \longrightarrow \text{خروجي} = r^n\, z[n]$$

$$z[n]=x[n-n_0] \Rightarrow \text{خروجي} = r^n\, x[n-n_0] \overset{?}{=} y[n-n_0]$$

$$\overset{?}{=} r^{n-n_0}\, x[n-n_0]$$ متغير با زمان

ه) $y[n]=nx[n]$

$$x[n] \longrightarrow \boxed{sys6} \longrightarrow y[n]=n\, x[n]$$

$$z[n] \longrightarrow \boxed{sys6} \longrightarrow \text{خروجي} = n\, z[n]$$

$$z[n]=x[n-n_0] \Rightarrow \text{خروجي} = n x[n-n_0] \overset{?}{=} y[n-n_0]$$

$$\overset{?}{=} (n-n_0)x[n-n_0]$$ متغير با زمان

۱-۱۱-۶- خطي بودن

سيستم خطي به سيستمي گفته مي‌شود كه اصل جمع آثار براي آن صدق كند.

شرط خطي بودن:

$$\begin{cases} x(t) \longrightarrow \boxed{sys} \longrightarrow y(t) \\ x_1(t) \longrightarrow \boxed{sys} \longrightarrow y_1(t) \\ x_2(t) \longrightarrow \boxed{sys} \longrightarrow y_2(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1)\; x_1(t)+x_2(t) \longrightarrow \boxed{sys} \longrightarrow y_1(t)+y_2(t) \quad ;\text{جمع آثار} \\ 2)\; ax(t) \longrightarrow \boxed{sys} \longrightarrow ay(t) \quad ;\text{همگني} \end{cases}$$

تذكر: در برقراري همگني ضريب ثابت a هر عددي مي‌تواند باشد، حتي عدد مختلط.

مثال ٦)

الف) $y(t) = x^2(t)$ غیرخطي

$$(x_1 + x_2) \longrightarrow \boxed{sys} \longrightarrow (x_1 + x_2)^2 \neq x_1^2 + x_2^2$$

ب) $y(t) = x(t)x(t-1)$ غیرخطي

$$ax(t) \longrightarrow \boxed{sys} \longrightarrow (ax(t))(ax(t-1)) = a^2 x(t)x(t-1) \neq ax(t)x(t-1)$$

۳) $y(t) = \sin(x(t))$ غیرخطي است چون توابع $\sin, \cos$ غیرخطي هستند.

ج) $y(t) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

$x(t) = 1 \rightarrow y(t) = 1$

$a\,x(t) = a \rightarrow y(t) = 1$ خاصیت همگني نقض شده پس غیرخطي است.

د) $y[n] = nx[n]$

$$x_1[n] + x_2[n] \rightarrow n(x_1[n] + x_2[n]) = nx_1[n] + nx_2[n] = y_1[n] + y_2[n]$$
$$ax[n] \rightarrow n(ax[n]) = a(nx[n]) = a\,y[n]$$

خطي

ه) $y[n] = \text{Real}\,(x[n])$

$$x[n] = r + js \rightarrow y[n] = r$$
$$a\,x[n] = a(r + js) \Rightarrow if\ a = j2 \Rightarrow -2S \neq ay[n]$$

غیرخطي

ن) $y[n] = 2x[n] + 3$

غیرخطي

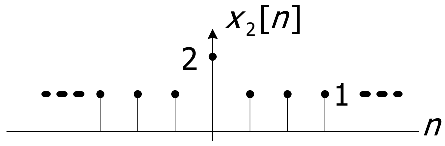
$$x_1[n] + x_2[n] \Rightarrow 2(x_1[n] + x_2[n]) + 3 \neq (2x_1[n] + 3) + (2x_2[n] + 3)$$
$$\neq y_1[n] + y_2[n]$$

نمونه مسائل فصل

۱- تعیین کنید کدام یك از سیگنال هاي زیر متناوبند؟

الف) $x_2[n] = u[n] + u[-n]$

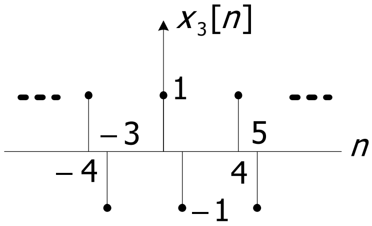
يك راه تشخيص متناوب بودن رسم سيگنال است.



وجود يك ناپيوستگي در نقطه صفر باعث مي‌شود كه نامتناوب شود.

ب) $x_3[n] = \sum \delta[n-4k] - \delta[n-1-4k]$

در هر دوره تناوب $N = 4$، ۲ ضربه را شامل شده است.



ج) $x[n] = 1 + e^{j\frac{4\pi}{7}n} - e^{-j\frac{2\pi}{7}n}$

$$N_1 = \frac{2k\pi}{\frac{4\pi}{7}} = 7k = 7\ (k=1) \quad , \quad N_2 = \frac{2k\pi}{\frac{2\pi}{5}} = 5k = 5\ , (k=1) \quad \Rightarrow N = 35$$

۲- تعیین کنید کدام یك از سیگنال‌هاي زیر معکوس‌پذیر است؟

الف) $y[n] = x[n]\, x[n-2]$

$$x[n] = A\delta[n]\ , y[n] = A^2\delta[n]\,\delta[n-2] = 0\ , x[n] = \delta[n-3]$$
$$\Rightarrow y[n] = \delta[n-3]\,\delta[n-5] = 0$$

حافظه‌دار است ولي معكوس‌پذير نيست.

ب) $$y[n] = \begin{cases} x[n+1] & n \geq 0 \\ x[n] & n \leq -1 \end{cases}$$

$$= x[n+1]\,u[n] + x[n]\,u[-n-1]\ ,$$

$$if\ \ x[n]=u[n]\Rightarrow y[n]=\underbrace{u[n+1]u[n]}_{\substack{n\geq -1,\, n\geq 0\\ =u[n]}}+\underbrace{u[n]u[-n-1]}_{\substack{n\geq 0,\, n\leq -1\\ =0}}=u[n]$$

$$if\ \ x[n]=u[n-1]\Rightarrow y[n]=\underbrace{u[n]u[n]}_{\underbrace{n\geq 0, n\geq 0}_{u[n]}}+\underbrace{u[n-1]u[-n-1]}_{\underbrace{n\geq 1, n\leq -1}_{=0}}=u[n]$$

معکوس‌پذیر نیست.

تمرین) آیا این سیستم معکوس‌پذیر است یا نه؟ اگر هست معکوسش را به دست آورید.

$$y[n]=\begin{cases} x[n-1] & n\geq 1\\ 0 & n=0\\ x[n] & n\leq -1\end{cases}$$

۱-۱۲- خلاصه

سیگنال تابعي است که حاوي اطلاعاتي درباره رفتار فیزیکي يك سیستم است.

هر سیگنال دلخواه را مي‌توان به صورت مجموع دو سیگنال زوج و فرد نوشت.

در بسیاري از مسائل با استفاده از شیفت زماني مي‌توان سیگنال را به صورت زوج یا فرد درآورد.

کوچکترین دوره تناوب سیگنال دوره تناوب اصلي است و فرکانس متناسب با دوره تناوب اصلي فرکانس اصلي است.

توابعي که فرم هندسي دارند را مي‌توان بر حسب توابع ویژه بیان کرد.

توابع ضربه واحد، پله واحد و دوبلت واحد خواص منحصر به‌فردي دارند.

اگر سیستمي با ورودي محدود و خروجي نامحدود داشتیم این سیستم ناپایدار است.

سیستم بدون حافظه مطمئنا علي است.

فصل دوم

سیستم‌هاي LTI زمان پیوسته و زمان گسسته

۲-۱- خواص سیستم‌هاي LTI با توجه به رابطه کانولوشن

زمان گسسته

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n]$$

$$x[n] = \delta[n] \Rightarrow y[n] = h[n]$$

زمان پیوسته

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

$$x(t) = \delta(t) \Rightarrow y(t) = h(t)$$

۲-۱-۱- جابه‌جایي‌پذیري

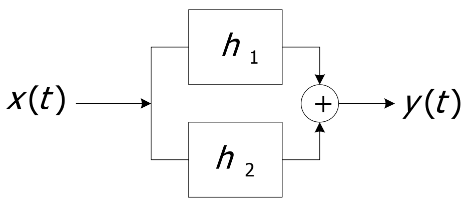
$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, h[n-k]$$
$$= h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\, x[n-k]$$

,

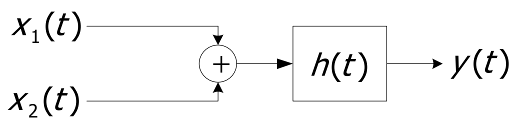
$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda)\, h(t-\lambda)\, d\lambda$$
$$= h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)\, x(t-\lambda)\, d\lambda$$

۲-۱-۲- توزیع‌پذیري

$$y(t) = x(t) * (h_1(t) + h_2(t)) = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t)$$



$$y(t) = (x_1(t) + x_2(t)) * h(t) = x_1(t) * h(t) + x_2(t) * h(t)$$



۲-۱-۳- شرکت‌پذیري

$$y(t) = x(t) * (h_1(t) * h_2(t))$$
$$= x(t) * (h_2(t) * h_1(t))$$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h_1} \longrightarrow \boxed{h_2} \longrightarrow y(t)$$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h_2} \longrightarrow \boxed{h_1} \longrightarrow y(t)$$

۲-۲- رابطه بین پاسخ ضربه h(t) و پاسخ پله

زمان گسسته

$$u[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n]$$

$$\delta[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow h[n]$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} h[k]$$

$$h[n] = y[n] - y[n-1]$$

زمان پیوسته

$$u(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

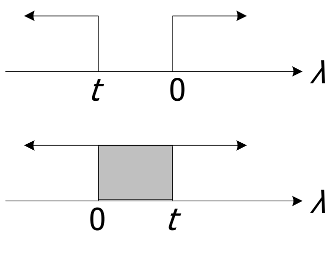
$$\delta(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow h(t)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\lambda)\, d\lambda$$

$$h(t) = \frac{dy(t)}{dt}$$

مثال ۱) پاسخ پله سیستم‌هاي LTI زیر را بدست آورید.

الف) $h(t) = \frac{1}{RC} e^{\frac{-t}{RC}} u(t)$



$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{RC} e^{\frac{-\lambda}{RC}} u(\lambda)\, d\lambda = \begin{cases} 0 & , \quad t < 0 \quad ; \\ \int_{0}^{t} \frac{1}{RC} e^{\frac{-\lambda}{RC}} d\lambda = 1 - e^{\frac{-t}{RC}} & , \quad t \geq 0 \quad ; \end{cases}$$

$$y(t) = (1 - e^{-\frac{t}{RC}}) u(t)$$

ب) $h[n] = (-a)^n u[n]$

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}(-a)^k u[k]=\begin{cases}0 & , \quad n<0\\ \sum_{k=0}^{n}(-a)^k=\dfrac{1-(-a)^{n+1}}{1-(-a)} & , \quad n\ge 0\end{cases}=\frac{1-(-a)^{n+1}}{1+a}u[n]$$

۲-۳- خواص سیستم‌هاي LTI با توجه به تابع تبدیل

۲-۳-۱- حافظه

زمان گسسته

$$x[n]\longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n]$$

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h[k]\,x[n-k]$$

زمان پیوسته

$$x(t)\longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(\lambda)\,x(t-\lambda)\,d\lambda$$

شرط بدون حافظه بودن سیستم:

$$h[n]=0 \quad ; n=\pm1,\pm2,\pm3,\ldots$$

$$h(t)=0 \quad ; t\ne 0$$

اثبات (سیستم زمان گسسته):

$$y[n]=\ldots+h[-1]x[n+1]+h[0]x[n]+h[1]x[n-1]+\ldots$$

این سیستم به شرطي بدون حافظه است که خروجي در هر لحظه به ورودي در همان لحظه وابسته باشد که براي این منظور بایستي:

$$h[n]=0 \quad , \quad n\ne 0 \quad \Rightarrow h[n]=\delta[n] \quad \text{یا} \quad h[n]=k\,\delta[n] \quad ; \quad k=cte$$

۲-۳-۲- معکوس پذیري

زمان پیوسته

$$x(t)\longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow \boxed{h_I(t)} \longrightarrow y(t)=x(t)$$

$$x(t)=(h(t)*h_I(t))*x(t)$$

$$\delta(t) * x(t) = x(t) \Rightarrow \quad h(t) * h_I(t) = \delta(t)$$

زمان گسسته

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow \boxed{h_I[n]} \longrightarrow y[n] = x[n]$$

$$h[n] * h_I[n] = \delta[n]$$

۲-۳-۳- عليت

در سيستم علي خروجي به آينده ورودي بستگي ندارد. با توجه به رابطه $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\,x[n-k]$ شرط زير براي تابع تبديل (پاسخ ضربه) بيانگر سيستم علي خواهد بود.

زمان گسسته

$$h[n] = 0 \quad ; \quad n < 0$$

زمان پيوسته

$$h(t) = 0 \quad ; \quad t < 0$$

تذكر: تابع تبديل $h(t) = u(t)$ ($h[n] = u[n]$) بيانگر سيستم علي است.

۲-۳-۴- پايداري (BIBO*)

زمان پيوسته

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

$$|y(t)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)\, x(t-\lambda)\, d\lambda \right| \le \int_{-\infty}^{\infty} |h(\lambda)||x(t-\lambda)|\, d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} |h(\lambda)|\, d\lambda < \infty$$

شرط پايداري: $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\, dt < \infty$

زمان گسسته

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n]$$

---

* Bounded Input Bounded Output

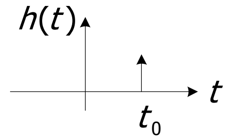
$$|y[n]| = \left|\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]\right| \le \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$$

شرط پايداري: $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$

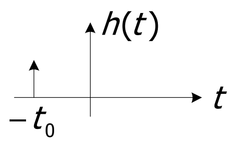
مثال ۲) با استفاده از تابع تبديل خواص سيستم‌هاي LTI را بررسي كنيد.

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t) = x(t-t_0)$$

الف) علي بودن



$$h(t) = y(t)\Big|_{x(t)=\delta(t)} \Rightarrow h(t) = \delta(t-t_0) = \begin{cases} t_0 \ge 0\ ; & \text{سيستم علي} \\ t_0 < 0\ ; & \text{سيستم غير علي} \end{cases}$$



ب) سيستم معكوس

$$h(t) * h_I(t) = \delta(t) \ \ ,\ \delta(t-t_0) * h_I(t) = \delta(t) \quad , \quad h_I(t-t_0) = \delta(t) \xrightarrow{t-t_0=t'} h_I(t') = \delta(t'+t_0)$$

معكوس‌پذير

ج) پايداري

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\delta(t-t_0)|\, dt < \infty \quad \text{پايدار}$$

مثال ۳)

۱الف) $h(t) = e^{at}\, u(t)$

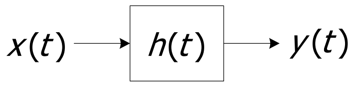
علي و حافظه‌دار , $\int_{-\infty}^{+\infty} |e^{at}\, u(t)|\, dt = \int_{0}^{\infty} e^{at}\, dt = \begin{cases} a < 0 & \text{پايدار} \\ a \ge 0 & \text{ناپايدار} \end{cases}$

۲ب) $h[n] = a^n\, u[n+2]$ $\qquad n \ge -2,$

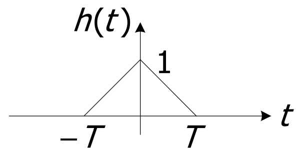
غيرعلي و حافظه‌دار

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a^k\, u[k+2]| = \sum_{k=-2}^{\infty} |a^k| \Rightarrow \begin{cases} |a| < 1 & , \ \text{پايدار} \\ |a| > 1 & , \ \text{ناپايدار} \end{cases}$$

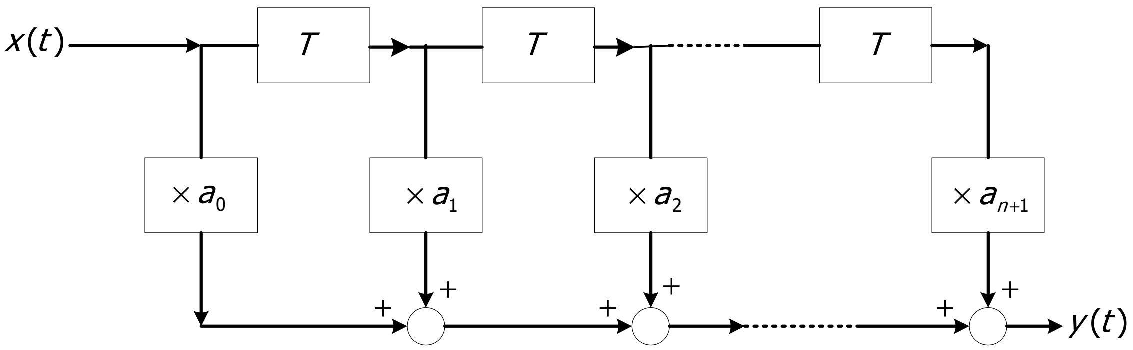
تمرين۱: مطلوب است ترسيم y(t) ؟



$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-2kT)$$

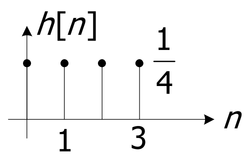


تمرين ۲: مطلوب است پاسخ ضربه سيستم ذيل ?=h(t)



مثال ۳) رابطه بين ورودي دلخواه x[n] و خروجي y[n] را براي پاسخ ضربه سيستم LTI داده شده بدست آوريد.

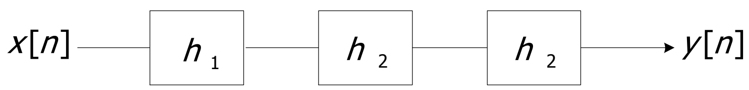
$$h[n]=\begin{cases}\frac{1}{4} & , \quad 0\le n\le 3\\ 0 & , \quad o.w\end{cases}$$

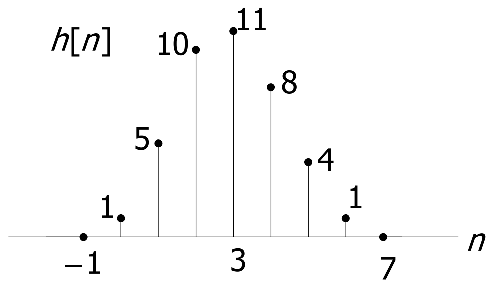


$$h[n]=\frac{1}{4}(u[n]-u[n-4])=\frac{1}{4}(\delta[n]+\delta[n-1]+\delta[n-2]+\delta[n-3])$$

$$y[n]=x[n]*h[n]=\frac{1}{4}(x[n]+x[n-1]+x[n-2]+x[n-3])$$

مثال ۴) اگر $h_2[n]=u[n]-u[n-2]$ الف) مقدار $h_1[n]$ را بدست آوريد، تابع تبديل كل سيستم h[n] داده شده است.





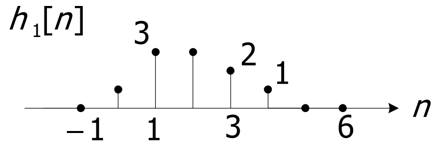
$$h_2[n]=\delta[n]+\delta[n-1] \quad , \quad h[n]=h_1[n]*(h_2[n]*h_2[n])$$

$$h_2[n]*h_2[n]=(\delta[n]+\delta[n-1])*(h_2[n])=h_2[n]+h_2[n-1]$$
$$=\delta[n]+\delta[n-1]+\delta[n-1]+\delta[n-2]=\delta[n]+2\delta[n-1]+\delta[n-2]$$

$$\Rightarrow h[n]=h_1[n]+2h_1[n-1]+h_1[n-2]$$

اولین جايي كه h[n] مقدار دارد $n=0$ است پس در نمودارهاي بالا به ازاي $n=0$ داريم:

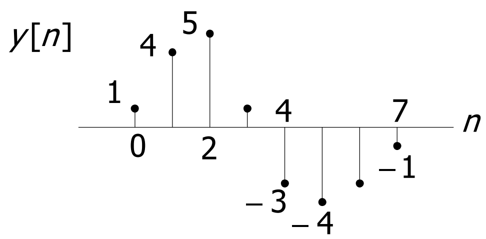
$$a_0+2a_{-1}+a_{-2}=1 \quad \Rightarrow \quad a_0=1$$
$$a_1+2a_0=5 \quad \Rightarrow \quad a_1=3$$
$$a_2+2a_1+a_0=10 \quad \Rightarrow \quad a_2=3$$
$$a_3+2a_2+a_1=11 \quad \Rightarrow \quad a_3=2$$
$$a_4+2a_3+a_2+8 \quad \Rightarrow \quad a_4=1$$
$$a_5+2a_4+a_3=4 \quad \Rightarrow \quad a_5=0$$
$$a_6+2a_5+a_4+1 \quad \Rightarrow \quad a_6=0\ldots$$



ب) اگر x[n] برابر باشد با $x[n]=\delta[n]-\delta[n-1]$ مطلوب است مقدار خروجي y[n] ؟

اين قسمت كاملا مستقل از قسمت قبل است چون x[n] داده شده است.

$$y[n]=h[n]*x[n]=h[n]-h[n-1]$$



۲-۴- کانولوشن (زمان پیوسته)

۲-۴-۱- روش ترسيمي

توصيه مي‌شود اگر f(t) به لحاظ رياضي ساده‌تر است از فرمول ۲ و اگر g(t) ساده‌تر است از فرمول ۱ استفاده مي‌كنيم. دراين مثال از فرمول ۲ استفاده مي كنيم.

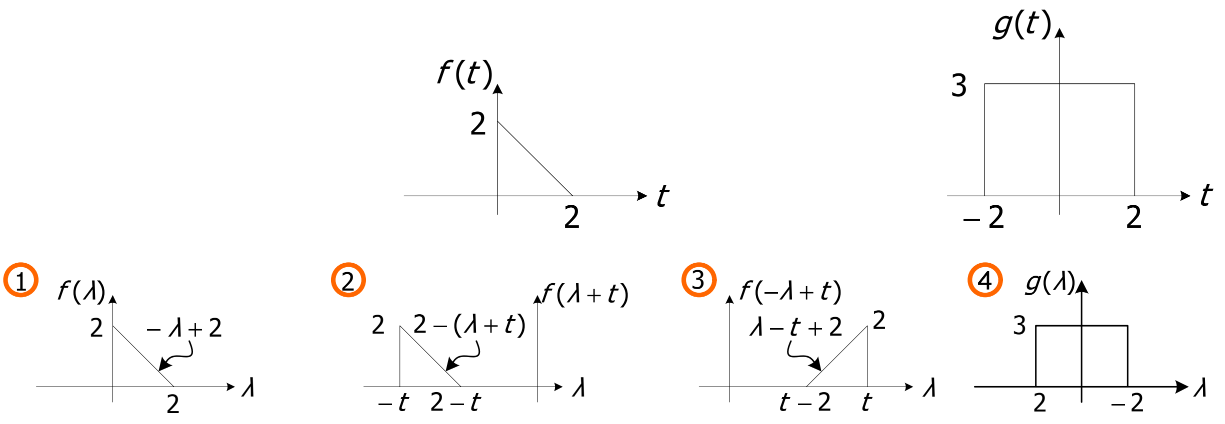
$$y(t) = f(t) * g(t) = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\, g(t-\lambda)\, d\lambda}_{1} = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda)\, f(t-\lambda)\, d\lambda}_{2}$$

$f(\lambda)\ ,\ g(\lambda)$ را مي‌سازيم.

براي ساخت $f(t-\lambda)$ اول بايد $f(t+\lambda)$ را ساخت چون نمي‌دانيم كه t مثبت است يا منفي است پس به صورت قراردادي t واحد به سمت چپ شيفت مي‌دهيم. سپس $f(t-\lambda)$ را مي‌سازيم از اين مرحله به بعد بايد در هر مرحله معادله خط كنار نمودار نوشته شود.

حال $g(\lambda)$ را ثابت نگه داشته و $f(t-\lambda)$ را از $-\infty$ به سمت $+\infty$ شيفت مي‌دهيم. بديهي است در جايي كه دو تابع همپوشاني نداشته باشند حاصلضرب صفر است. سپس به نقطه اي مي‌رسد كه max همپوشاني را دارد و بعد دوباره به جايي مي‌رسد كه هيچ همپوشاني نداشته باشند:

مثال ۵)



$$\begin{cases} t < -2 \quad , & * = 0 \\ -2 \le t < 0 \quad , & * = \int_{-2}^{t} (\lambda - t + 2)(3)\, d\lambda = \frac{3}{4}(4 - t^2) \\ 0 \le t < 2 \quad , & * = \int_{t-2}^{t} (\lambda - t + 2)(3)\, d\lambda = 6 \\ 2 \le t \le 4 \quad , & * = \int_{t-2}^{2} (\lambda - t + 2)(3)\, d\lambda = \frac{3}{2}(t^2 - 8t + 16) \\ t \ge 4 \quad , & * = 0 \end{cases}$$

۲-۴-۲- استفاده از فرمول

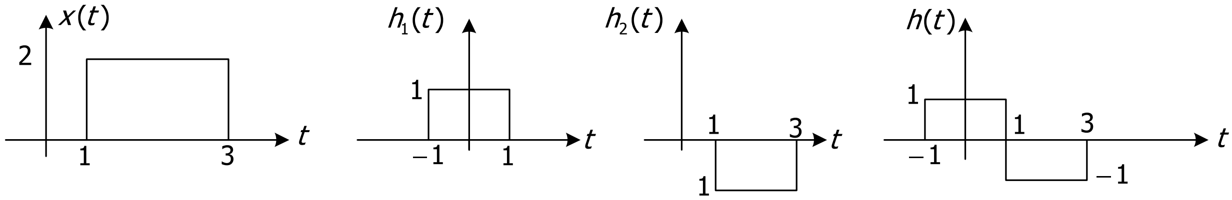
اگر با استفاده از فرمول بخواهیم کانولوشن دو سیگنال را بدست بیاوریم. باید معادله دو سیگنال بر حسب توابع رياضي داده شده باشند یا اینکه بتوان آنها را بر حسب توابع ویژه فرموله نمود.

براي مثال قبل f(t) , g(t) را باید به فرم زیر نوشت و سپس در فرمول کانولوشن جایگذاري کرد:

$$f(t) = 2u(t) - r(t) + r(t-2) \qquad , \qquad g(t) = 3(u(t+2) - u(t-2))$$

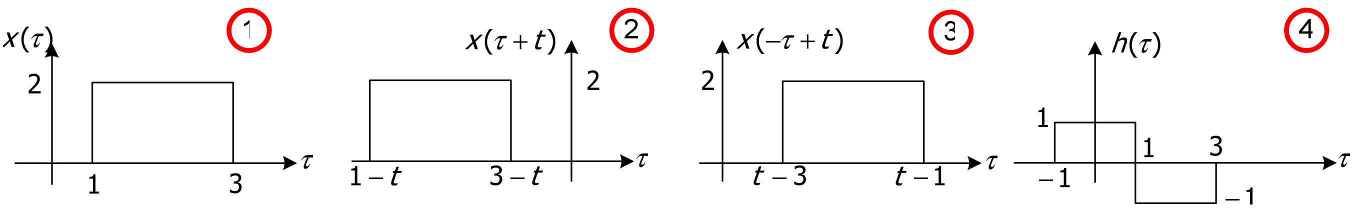
مثال ۱)

$$x(t) = 2u(t-1) - 2u(t-3) \quad , \quad h(t) = u(t+1) - 2u(t-1) + u(t-3)$$

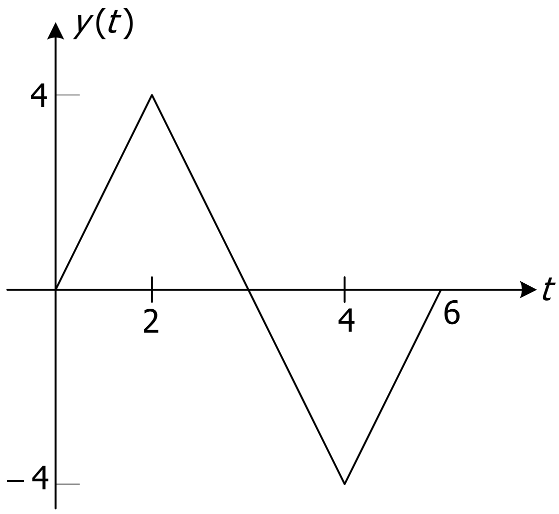


$$h(t) = h_1(t) + h_2(t)$$

$$y(t) = x(t) * h(t)$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t-\tau) d\tau$$

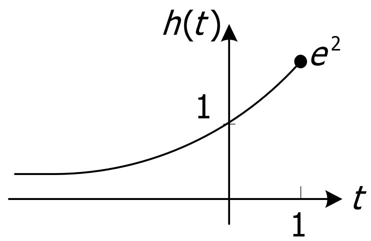


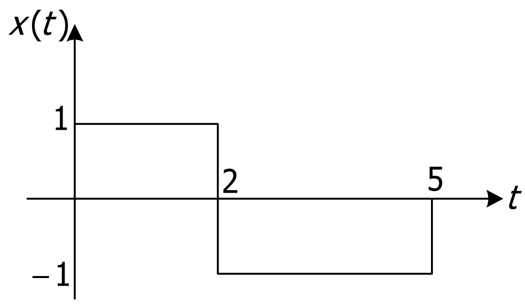
$$\begin{cases} t-1 < 1 & , \quad * = 0 \\ -1 \le t-1 < 1 & , \quad * = \int_{-1}^{t-1} 2d\tau = 2t \\ 1 \le t-1 < 2 & , \quad * = \int_{t-3}^{1} 2d\tau + \int_{1}^{t-1} -2d\tau = 12 - 4t \\ 2 \le t-1 < 3 & , \quad * = \int_{t-3}^{1} 2d\tau + \int_{1}^{t-1} -2d\tau = 12 - 4t \\ 3 \le t-1 < 4 & , \quad * = \int_{t-3}^{3} -2d\tau = -2(6-t) \\ t-1 \ge 5 & , \quad * = 0 \end{cases}$$



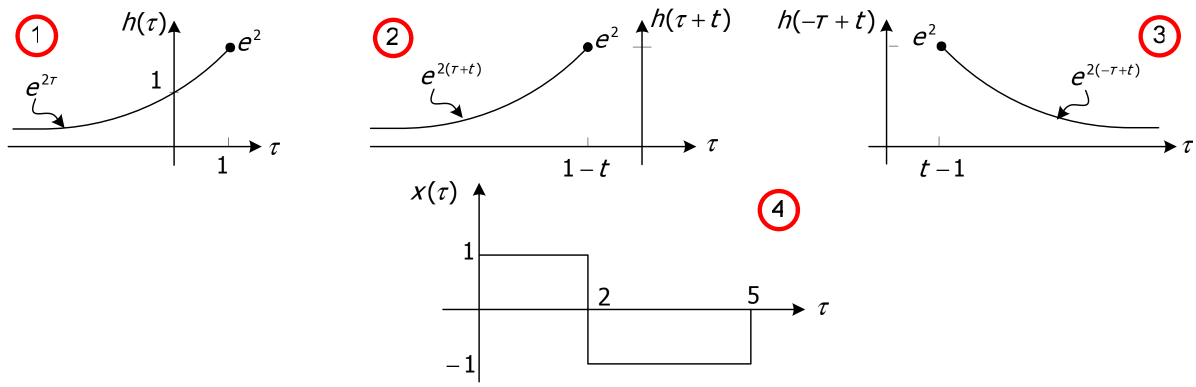
تذكر: وقتي دو تابع پالسي باهم كانولو ميشوند حاصل يك تابع ذوزنقه ميشود و اگر اين دو تابع پالسي هم عرض باشد شكل حاصل يك تابع مثلثي خواهد بود.

مثال ۲) $x(t) = u(t) - 2u(t-2) + u(t-5) \quad , \quad h(t) = e^{2t}u(1-t)$



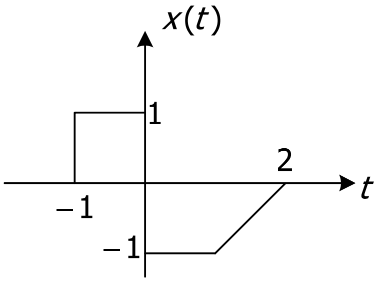


$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$



$$\begin{cases} t-1>5 \quad , & *=0 \\ 2<t-1\le 5 \quad , & *=\int_{t-1}^{5} e^{2(-\tau+t)}\times(-1)d\tau=\frac{1}{2}e^{2(t-5)}-e^{2} \\ 0<t-1\le 2 \quad , & *=\int_{t-1}^{2} e^{2(-\tau+t)}d\tau+\int_{2}^{5} e^{2(-\tau+t)}d\tau=\frac{1}{2}(e^{2}-e^{2(t-2)}+e^{2(t-5)}-e^{2(t-2)}) \\ t-1\le 0 \quad , & *=\int_{0}^{2} e^{2(-\tau+t)}d\tau+\int_{2}^{5} -e^{2(-\tau+t)}d\tau=\frac{1}{2}(e^{2t}-e^{2(t-2)}+e^{2(t-5)}-e^{2(t-2)}) \end{cases}$$

تمرين: سيستم LTI با پاسخ ضربه h(t) داده شده. پاسخ سيستم به ورودي x(t) را بدست آوريد و مقدار خروجي را در لحظات $t=-\frac{1}{4} \quad , \quad t=\frac{3}{4} \quad , \quad t=\frac{3}{2} \quad , \quad t=+\infty$ محاسبه كنيد.



$$h(t)=e^{-t}\delta(t)+u(t) \quad , \quad y(t)=x(t)*h(t) \quad ?$$

۲-۵- كانولوشن زمان گسسته

۲-۵-۱- روش ترسيمي

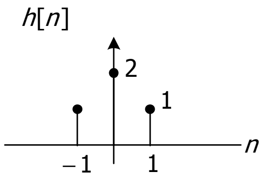
$$y[n]=\underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]}_{1}=\underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k]}_{2}$$

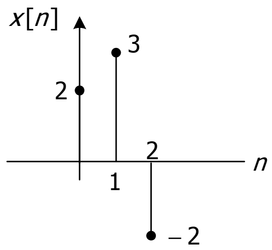
پس از تصميم‌گيري راجع به اينكه از رابطه ۱ يا رابطه ۲ خروجي y[n] را حساب كنيم، مراحل انجام عمليات عينا شبيه زمان پيوسته است.

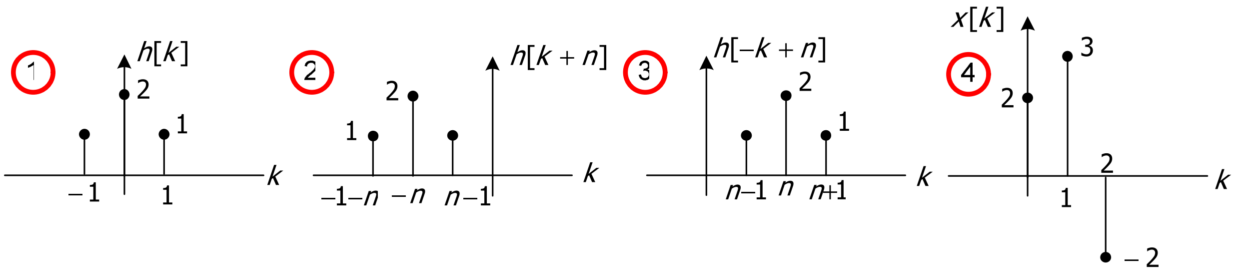
روش ترسيمي را براي تعيين خروجي سيستم زمان گسسته مطرح مي‌كنيم:

مثال ۳)

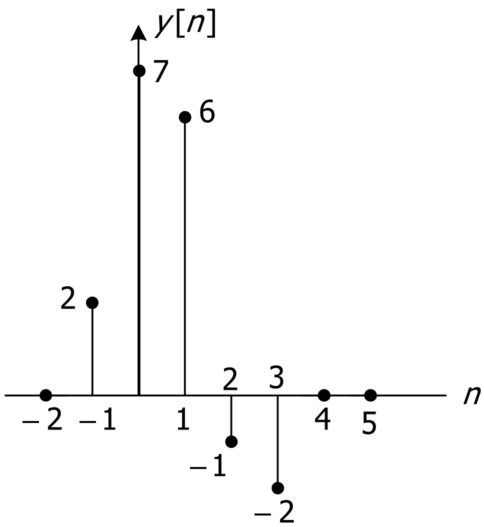
$$h[n]=\begin{cases}1 & n=\pm 1\\ 2 & n=0\\ 0 & o.w\end{cases} \qquad x[n]=\begin{cases}2 & n=0\\ 3 & n=1\\ -2 & n=2\end{cases}$$







$$
\begin{cases}
n+1<0 & , \quad * = 0 \\
n+1=0 & , \quad * = 1\times 2 = 2 \\
n+1=1 & , \quad * = 2\times 2 + 1\times 3 = 7 \\
n+1=2 & , \quad * = 1\times 2 + 2\times 3 - 2\times 1 = 6 \\
n+1=3 & , \quad * = 1\times 3 + 2\times(-2) = -1 \\
n+1=4 & , \quad * = 1\times(-2) = -2 \\
n+1\geq 5 & , \quad * = 0
\end{cases}
$$



۲-۵-۲- استفاده از فرمول

ابتدا باید توابع را بر حسب توابع ویژه و یا توابع ریاضي بیان کرد. اگر ورودي و یا پاسخ ضربه بر حسب تابع ضربه بیان شده باشند، بدلیل خاصیت تابع ضربه محاسبه کانولوشن بسیار راحت خواهد بود.

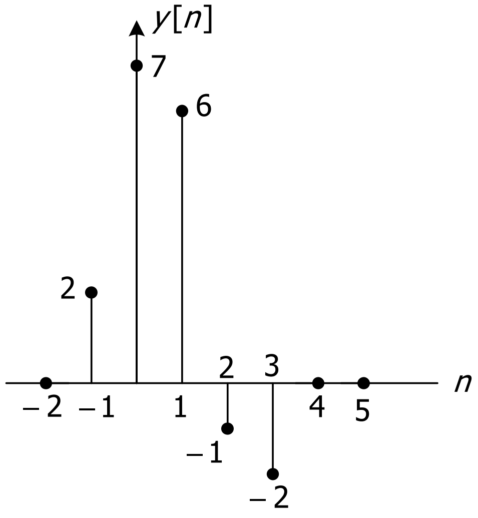
مثال ٤)

$$h[n] = \delta[n+1] + 2\delta[n] + \delta[n-1] \qquad , \qquad x[n] = 2\delta[n] + 3\delta[n-1] - 2\delta[n-2]$$

$$
\begin{aligned}
y[n] &= x[n] * h[n] \\
&= (2\delta[n] + 3\delta[n-1] - 2\delta[n-2]) * h[n] \\
&= 2h[n] + 3h[n-1] - 2h[n-2]
\end{aligned}
$$

یا

$$
\begin{aligned}
y[n] &= x[n] * h[n] \\
&= x[n] * (\delta[n+1] + 2\delta[n] + \delta[n-1]) \\
&= x[n+1] + 2x[n] + x[n-1]
\end{aligned}
$$

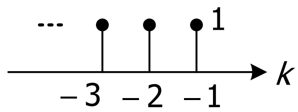


بديهي است پاسخ محاسبه شده در هر دو حالت يكسان خواهد بود:

مثال ٥) $x[n] = (\frac{1}{3})^{-n}\, u[-n-1] \quad , \quad h[n] = u[n-1]$

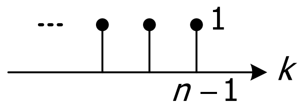
$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n]\, h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\frac{1}{3})^{-k}\, u[-k-1] \cdot u[n-k-1]$$

$$u[-K-1] = \begin{cases} 1 & ; \quad k \le -1 \\ 0 & ; \quad k > 1 \end{cases}$$



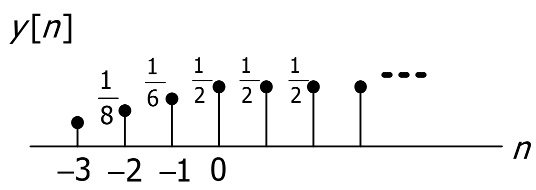
$\Rightarrow$

$$u[n-K-1] = \begin{cases} 0 & ; \quad k \le n-1 \\ 1 & ; \quad k > n-1 \end{cases}$$



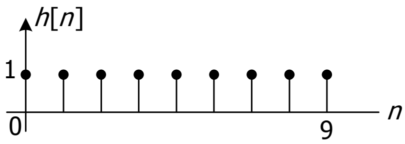
$$n-1 < -1 \Rightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n-1} (\frac{1}{3})^{-k} \overset{k \to -k}{=} \sum_{k=-n+1}^{+\infty} (\frac{1}{3})^{k} = (\frac{1}{3})^{-n+1} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}(\frac{1}{3})^{-n+1} = \frac{3}{2}(3)^{n-1} = \frac{1}{2}(3)^{n}$$

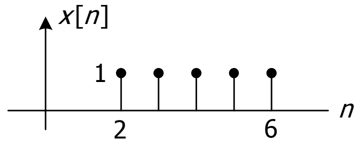
$$n-1 \ge -1 \Rightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{-1} (\frac{1}{3})^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{3})^{k} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

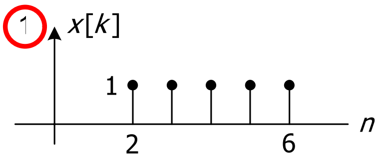


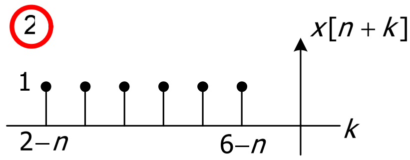
مثال٦) $x[n] = a^n\, u[n] \quad 0 < a < 1 \qquad , \qquad h[n] = u[n] \qquad , \quad y[n] = ?$

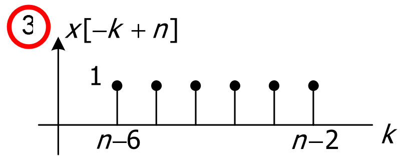
مثال ٧) $h[n] = u[n] - u[n-10] \qquad , \qquad x[n] = u[n-2] - u[n-7]$

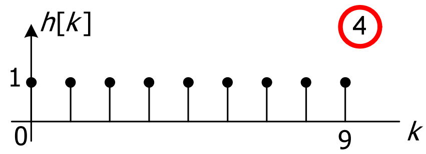




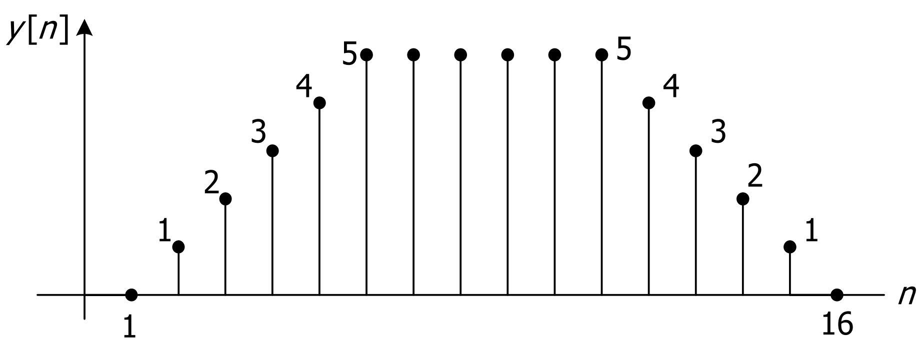








$$\begin{array}{llll}
n-2<0\,, & *=0 & n-2=10, & *=4 \\
n-2=0\,, & *=1 & n-2=11, & *=3 \\
n-2=2\,, & *=2 & n-2=12, & *=2 \\
n-2=3\,, & *=4 & n-2=13, & *=1 \\
\left\{\begin{array}{ll} n-2=4\,, & *=5 \\ \vdots & \\ n-2=9, & *=5 \end{array}\right. & & n-2\geq 14, & *=0
\end{array}$$



۲-۶- سیستم‌هاي LTI توصیف شده با معادلات دیفرانسیل(زمان پیوسته)

به طور کلي معادله ديفرانسيل يك سيستم به فرم روبه‌رو نوشته مي‌شود:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{sys} \longrightarrow y(t)$$

براي حل معادله ديفرانسيل بايد

۱) معادله همگن حل شود.

۲)جواب خصوصي به ازاي ورودي خاص تعيين گردد.

۳) جواب كلي سيستم عبارت است از پاسخ عمومي + پاسخ خصوصي و با توجه با اين كه پاسخ عمومي داراي تعدادي ضرايب ثابت است اين ضرايب از روي شرايط سكون يا شرايط اوليه به دست مي‌آيند.

۱) $\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{d^k t} = 0 \Rightarrow y_h(t) = \ldots$

۲) $y_p(t) = \ldots$

۳) $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$

تذكر: براي بكارگيري شرايط سكون جهت تعيين پاسخ سيستم LTI به ورودي داده شده، عنوان علي بودن سيستم ضروري است. در غيراينصورت بايستي شرايط اوليه داده شده باشد.

مثال ۸)

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t) \quad , \quad x(t) = t \quad , \quad t > 0 \, , \begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

حل:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -1$$
$$\Rightarrow y_h(t) = K_1 e^{-t} + K_2 \, t \, e^{-t}$$

$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = t \quad , \quad t \ge 0 \Rightarrow y_p(t) = At^2 + Bt + c \Rightarrow y_p(t) = (t-2)$$

$$\begin{cases} y(t) = K_1 e^{-t} + K_2 \, t \, e^{-t} + (t-2) \quad , \quad t > 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow y(t) = (2+t)\, e^{-t} + (t-2) \, , \, t > 0$$

مثال ۹) معادله ديفرانسيل سيستم LTI و علي داده شده است. مطلوبست پاسخ سيستم به ازاي ورودي داده شده:

$$y'(t)+2y(t)=x(t) \quad , \quad x(t)=\begin{cases}0; & t\le -1\\ 1; & t>-1\end{cases}$$

حل:

۱) $$y'(t)+2y(t)=0 \Rightarrow \lambda=-2 \quad , \quad y_h(t)=K_1\,e^{-2t}$$

۲) $$y'(t)+2y(t)=1; \quad t>-1\ , \ y_p(t)=\frac{1}{2}$$

۳) اعمال شرط سكون بر اساس علي بودن سيستم

$$\begin{cases}y(t)=K_1\,e^{-2t}+\frac{1}{2}; & t>-1\\ y(-1)=0\end{cases} \Rightarrow y(t)=-\frac{1}{2}e^{-2(t+1)}+\frac{1}{2}; \quad t>-1$$

يا

$$y(t)=(-\frac{1}{2}e^{-2(t+1)}+\frac{1}{2})u(t+1)$$

۲-۷- پاسخ به ورودي ضربه:

۲-۷-۱- استفاده از رابطه بين پاسخ ضربه و پاسخ پله در سيستم‌هاي LTI:

با يك مثال اين رابطه را بررسي مي‌كنيم.

مثال ۱۰) سيستم LTI و علي است. $y''(t)+y'(t)-2y(t)=x(t) \quad , \quad x(t)=\delta(t)$

حل: $z''(t)+z'(t)-2z(t)=u(t)$

$$z''(t)+z'(t)-2z(t)=0 \Rightarrow \lambda^2+\lambda-2=0 \Rightarrow \lambda_1,\lambda_2=\frac{-1\pm 3}{2}=\begin{cases}-2\\ 1\end{cases}$$

$$z_h(t)=K_1\,e^{-2t}+K_2\,e^{t}$$

$$z_p(t)=-\frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} z(t) = K_1\, e^{-2t} + K_2\, e^{t} - \frac{1}{2};\;\; t>0 \\ z(0) = 0 \\ z'(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow z(t) = \frac{1}{6} e^{-2t} + \frac{1}{3} e^{t} - \frac{1}{2}\,; \quad t>0$$

(مشتق پاسخ پله = پاسخ ضربه)

$$z(t) = (\frac{1}{6} e^{-2t} + \frac{1}{3} e^{t} - \frac{1}{2})\, u(t)\,; \quad y(t) = \frac{dz(t)}{dt}$$
$$\Rightarrow y(t) = (-\frac{1}{3} e^{-2t} + \frac{1}{3} e^{t})\, u(t) + (\frac{1}{6} e^{-2t} + \frac{1}{3} e^{t} - \frac{1}{2})\, \delta(t) \Rightarrow y(t) = (-\frac{1}{3} e^{-2t} + \frac{1}{3} e^{t})\, u(t)$$

۲-۷-۲- محاسبه پاسخ ضربه سیستم بطور مستقیم

جهت محاسبه پاسخ ضربه سیستم LTI پاسخ معادله همگن را بدست آورده و آن را بعنوان پاسخ کامل سیستم در نظر مي‌گیریم. پاسخ کامل باید در معادله دیفرانسیل صدق کند که بدین ترتیب ضرایب ثابت محاسبه و پاسخ کامل، که همان پاسخ ضربه سیستم LTI است تعیین خواهد شد.

حال مثال ۱۰ را به این روش مجددا حل مي‌کنیم:

$$y''(t) + y'(t) - 2y(t) = x(t) \quad , \quad x(t) = \delta(t)$$
$$y''(t) + y'(t) - 2y(t) = 0$$
$$y_h(t) = K_1\, e^{-2t} + K_2\, e^{t} \;\Rightarrow\; y(t) = (K_1\, e^{-2t} + K_2\, e^{t}) u(t)$$

$$y'(t) = (-2K_1\, e^{-2t} + K_2\, e^{t})\, u(t) + (K_1\, e^{-2t} + K_2\, e^{t})\delta(t)$$
$$y''(t) = \ldots = (4K_1\, e^{-2t} + K_2\, e^{t})\, u(t) + (-4K_1\, e^{-2t} + 2K_2\, e^{t})\, \delta(t) + (K_1\, e^{-2t} + K_2\, e^{t})\, \delta'(t)$$
$$y''(t) + y'(t) - 2y(t) = \delta(t)$$
$$\Rightarrow (-3K_1\, e^{-2t} + 3K_2\, e^{t})\, \delta(t) + (K_1 + K_2)\, \delta'(t) - (-2K_1\, e^{-2t} + K_2\, e^{t})\, \delta(t) = \delta(t)$$
$$\Rightarrow \begin{cases} K_1 = -\frac{1}{3} \\ K_2 = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow y(t) = (-\frac{1}{3} e^{-2t} + \frac{1}{3} e^{t})\, u(t) = h(t)$$

۲-۸- سیستم‌های LTI توصیف شده با معادلات تفاضلي (زمان گسسته)

هدف از تحليل معادله تفاضلي:

۱) رابطه مستقيمي بين ورودي و خروجي به دست آوريم .

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

$$x[n] = \delta[n] \Rightarrow y[n] = h[n]$$

۲) خروجي را به ازاي ورودي مشخص پيدا كنيم.

۲-۸-۱- روش حل معادله تفاضلي

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \, y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k \, x[n-k]$$

الف) روش مستقيم:

$y[n] = y_h[n] + y_p[n]$ پاسخ كامل: , $y_p[n]$ پاسخ خاص: , $y_h[n]$ پاسخ عمومي:

با فرض آنكه معادله تفاضلي مرتبه دوم است N=2 ، براي بدست آوردن جواب عمومي مراحل زير را انجام مي‌دهيم:

$$a_0 \, y[n] + a_1 y[n-1] + a_2 \, y[n-2] = 0$$

$$y_h[n] = K \, r^n \Rightarrow (a_0 + a_1 r^{-1} + a_2 r^{-2}) \cdot k r^n = 0$$

$r_1 \, , r_2$ حقيقي و متمايز $\quad y_h[n] = k_1 (r_1)^n + k_2 (r_2)^n$

$r_1 = r_2 \quad y_h[n] = k_1 (r_1)^n + k_2 n \, (r_2)^n$

مثال ۱) مطلوب است خروجي اگر $x[n] = n^2$ و $y[0] = 1$ باشد.

$$y[n] + 2y[n-1] = x[n] - x[n-1]$$

پاسخ عمومي:

$$y[n] + 2y[n-1] = 0 \Rightarrow y_h[n] = k \, r^n \Rightarrow k \, r^n + 2k \, r^{n-1} = 0$$

$$k \, r^n (1 + 2 \, r^{-1}) = 0 \Rightarrow r = (-2) \Rightarrow y_h[n] = k(-2)^n$$

پاسخ خصوصي:

$$\mathrm{y[n] + 2y[n-1] = n^2} - (n-1)^2 = 2n - 1$$

$$y_p[n] = An + B \Rightarrow An + B + 2(A(n-1) + B) = 2n - 1 \Rightarrow \begin{cases} 3A = 2 \\ -2A + 3B = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{2}{3} \\ B = \dfrac{1}{9} \end{cases}$$

جواب خصوصي $\Rightarrow y_p[n] = \dfrac{2}{3}n + \dfrac{1}{9}$

پاسخ كامل:

$$\begin{cases} y[n] = k(-2)^n + \dfrac{2}{3}n + \dfrac{1}{9} \Rightarrow k = \dfrac{8}{9}; \quad y[n] = \dfrac{8}{9}(-2)^n + \dfrac{2}{3}n + \dfrac{1}{9} \\ y[0] = 1 \end{cases}$$

ب) روش بازگشتي

با يك مثال اين روش را بررسي مي‌كنيم:

مثال ۲) سيستم LTI و علي توصيف شده با معادله تفاضلي زير را در نظر بگيريد.

$$y[n] = \frac{1}{4}y[n-1] + x[n]$$

مطلوبست:

الف) پاسخ ضربه h[n]

ب) پاسخ ضربه معكوس $h_I[n]$

ج) به ازاي ورودي داده شده $x[n] = \delta[n-1]$ خروجي را بدست آوريد.

الف) $h[n] = y[n]\big|_{x[n]=\delta[n]}$

$$\Rightarrow h[n] = \frac{1}{4}h[n-1] + \delta[n]$$

روش بازگشتي:

$$h[0] = \frac{1}{4}h[-1] + 1 = 1$$

$$h[1] = \frac{1}{4}h[0] = \frac{1}{4}(1)$$

$$h[2] = \frac{1}{4}h[1] = \frac{1}{4}(1)^2$$

$$\vdots$$

$$h[n] = \frac{1}{4}h[n-1] = (\frac{1}{4})^n \Rightarrow h[n] = (\frac{1}{4})^n u[n]$$

ب) براي بدست آوردن $h_I[n]$ بايد فرمول زير برقرار باشد:

$$h[n] * h_I[n] = \delta[n] \Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\, h_I[n-k] = \delta[n]$$

$$\Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\frac{1}{4})^k \; u[k]\, h_I[n-k] = \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{1}{4})^k \; h_I[n-k] = \delta[n]$$

سؤال: اگر سيستمي LTI و علي باشد آيا معكوس سيستم نيز LTI و علي خواهد بود؟

$$h_I[n] + \frac{1}{4} h_I[n-1] + (\frac{1}{4})^2 h_I[n-2] + (\frac{1}{4})^3 h_I[n-3] + \cdots = \delta[n]$$

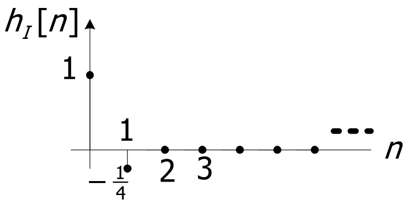
روش بازگشتي:

$$h_I[0] = 1$$

$$h_I[1] + \frac{1}{4} h_I[0] = 0 \Rightarrow h_I[1] = -\frac{1}{4}$$

$$h_I[2] + \frac{1}{4} h_I[1] + (\frac{1}{4})^2 h_I[0] = 0 \Rightarrow h_I[2] = 0$$

$$h_I[3] = 0 \quad , \cdots \Rightarrow h_I[n] = \delta[n] - \frac{1}{4}\delta[n-1]$$



ج) پاسخ ضربه سيستم h[n] در قسمت الف بدست آورده شد، با توجه به خاصيت TI (نامتغيربازمان) بودن سيستم داريم:

$$x[n] = \delta[n] \Rightarrow h[n] = (\frac{1}{4})^n \; u[n]$$

$$x[n] = \delta[n-1] \Rightarrow y[n] = h[n-1] = (\frac{1}{4})^{n-1} \; u[n-1]$$

مثال ۳) سيستم LTI با معادله تفاضلي $y[n] + 2y[n-1] = x[n]$ توصيف شده است. با فرض سكون اوليه (علي) پاسخ ضربه را به دست آوريد.

تذكر: اگر ورودي ضربه واحد بود پيشنهاد مي‌شود از روش بازگشتي معادله را حل كنيد.

روش اول: بكارگيري روابط بازگشتي و تعيين پاسخ به ازاء ورودي خاص با توجه به شرط سكون اوليه

$$x[n] = \delta[n] \Rightarrow y[n] = h[n]$$

$$h[n] + 2h[n-1] = \delta[n] \Rightarrow h[n] = -2h[n-1] + \delta[n]$$

$$h[0] = -2h[-1] + 1 = 1$$

$$h[1] = -2h[0] = -2$$

$$h[2] = -2h[1] = (-2)^2$$

$$h[3] = (-2)^3$$

$$\vdots$$

$$h[k]=(-2)^k \Rightarrow h[n]=(-2)^n u[n]$$

روش دوم: بدست آوردن خروجي بر حسب ورودي بطور كلي با استفاده از روابط بازگشتي.

$$\begin{aligned}
&y[n]+2y[n-1]=x[n]\\
&y[0]+2y[-1]=x[0]\\
&y[1]+2y[0]=x[1]\\
&y[2]+2y[1]=x[2]\\
&\vdots\\
&y[n-2]+2y[n-3]=x[n-2]\\
&y[n-1]+2y[n-2]=x[n-1]\\
&y[n]+2y[n-1]=x[n]
\end{aligned}$$

براي بدست آوردن رابطه صريح خروجي بر حسب ورودي (FIR) به طريق ذيل عمل مي كنيم:

$$\begin{aligned}
&(-2)^n(y[0]+2y[-1]=x[0])\\
&(-2)^{n-1}(y[1]+2y[0]=x[1])\\
&(-2)^{n-2}(y[2]+2y[1]=x[2])\\
&\vdots\\
&(-2)^2(y[n-2]+2y[n-3]=x[n-2])\\
&(-2)^1(y[n-1]+2y[n-2]=x[n-1])\\
&(-2)^0(y[n]+2y[n-1]=x[n])
\end{aligned}$$

$$\sum \Rightarrow y[n]=(-2)^0x[n]+(-2)^1x[n-1]+(-2)^2x[n-2]+\cdots+(-2)^n x[0]$$

$$=\sum_{k=0}^{n}(-2)^k x[n-k]=\sum_{k=0}^{n}(-2)^{n-k}x[k]$$

$$\Rightarrow h[n]=\sum_{k=0}^{n}(-2)^{n-k}\delta[k]=(-2)^n\sum_{k=0}^{n}\delta[k]=(-2)^n u[n]$$

روش سوم: استفاده از رابطه بين پاسخ ضربه و پاسخ پله در سيستم‌هاي LTI

پاسخ پله:

$$z[n]+2z[n-1]=u[n]$$

پاسخ همگن:

$$z[n]+2z[n-1]=0$$

$$z_h[n]=k(r)^n \Rightarrow k\,r^n(1+2\,r^{-1})=0 \Rightarrow r=-2 \Rightarrow z_h[n]=k(-2)^n$$

پاسخ حصوصي:

$$z[n]+2z[n-1]=1\ ,\ n\geq 0 \quad \Rightarrow z_p[n]=A \Rightarrow A+2A=1 \Rightarrow A=\frac{1}{3}$$

پاسخ کامل:

$$z[n]=k(r)^n+\frac{1}{3}\ ,\ n\geq 0 \Rightarrow z[-1]=k(-2)^{-1}+\frac{1}{3}=0 \Rightarrow k=\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow z[n]=(\frac{2}{3})(-2)^n+\frac{1}{3}\ ,\ n\geq 0 \Rightarrow z[n]=[(\frac{2}{3})(-2)^n+\frac{1}{3}]u[n]$$

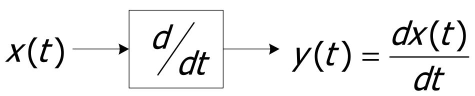
محاسبه پاسخ ضربه با استفاده از پاسخ پله:

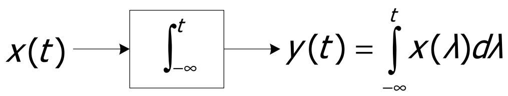
$$\Rightarrow h[n]=z[n]-z[n-1]=(\frac{2}{3})(-2)^n\ u[n]+\frac{1}{3}u[n]-\frac{2}{3}(-2)^{n-1}u[n-1]-\frac{1}{3}u[n-1]$$

$$\Rightarrow (\frac{2}{3})(-2)^n\ u[n]-\frac{2}{3}(-2)^{n-1}u[n]=(\frac{2}{3})(-2)^n[\frac{1}{2}+1]u[n]=(-2)^n\ u[n]$$

۲-۹- نمایش سیستم LTI با استفاده از بلوك دياگرام (مشتق‌گير و انتگرال‌گير)

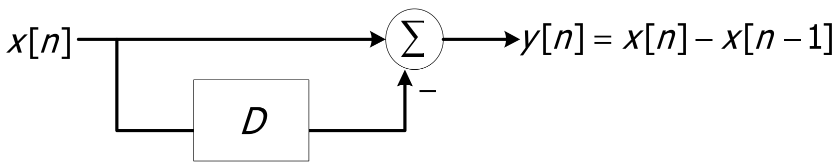
زمان پيوسته



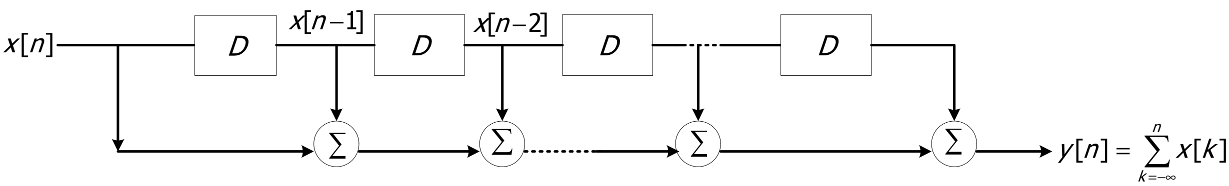


زمان گسسته

هم ارز با مشتق در پيوسته :



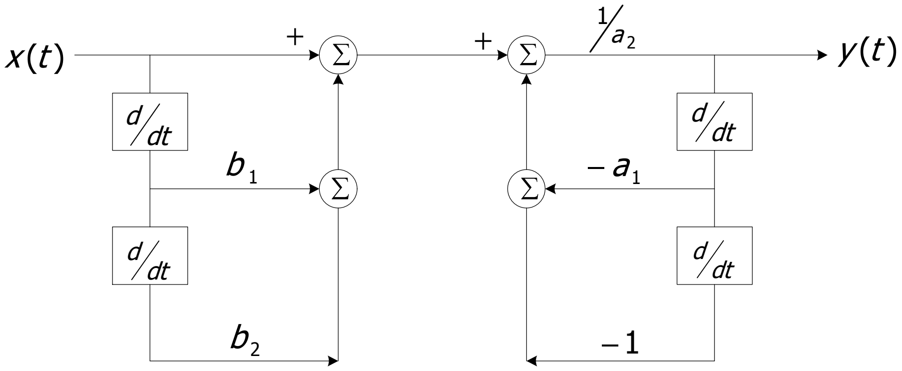
هم ارز با انتگرال در پيوسته :



مثال ٤) $y''(t)+a_1 y'(t)+a_2 y(t)=x(t)+b_1 x'(t)+b_2 x''(t)$

الف) نمايش سيستم با استفاده از بلوك‌هاي مشتق‌گير

$$y(t)=-\frac{a_1}{a_2}y'(t)-\frac{1}{a_2}y''(t)+\frac{1}{a_2}x(t)+\frac{b_1}{a_2}x'(t)+\frac{b_2}{a_2}x''(t)$$

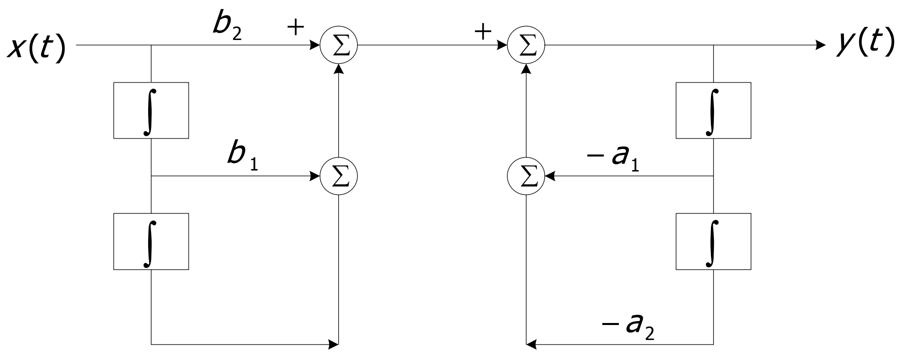


ب) نمايش سيستم با استفاده از بلوك‌هاي انتگرال‌گير

$$y''(t)+a_1 y'(t)+a_2 y(t)=x(t)+b_1 x'(t)+b_2 x''(t)$$

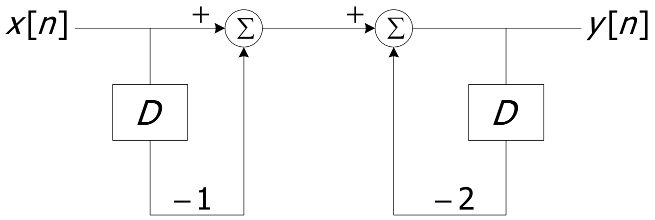
$$\Rightarrow y''(t)=-a_1 y'(t)-a_2 y(t)=x(t)+b_1 x'(t)+b_2 x''(t)$$

$$y(t)=-a_1\int y(t)dt-a_2\int\int y(t)dt+\int\int x(t)dt+b_1\int x(t)dt+b_2 x(t)$$



مثال ٥) $y[n]+2y[n-1]=x[n]-x[n-1]$

$$y[n]=x[n]-x[n-1]-2y[n-1]$$



تمرين: رسم بلوك دياگرام؟

سيستم زمان پيوسته

$$y'''(t) + 3y''(t) + 4y'(t) + 5y(t) = x'(t)$$

سيستم زمان گسسته

$$y[n] + 2y[n-1] = x[n]$$

۲-۱۰- خلاصه

با توجه به رابطه كانولوشن مي‌توان خواص جابه‌جايي‌پذيري، توزيع‌پذيري و شركت‌پذيري را براي سيستم‌هاي LTI تعريف كرد.

با معرفي تابع تبديل مي‌توان خواص جديدي براي سيستم‌هاي LTI بيان كرد.

كانولوشن به دو روش ترسيمي و فرمول قابل محاسبه است.

در معادلات ديفرانسيل، با حل معادله همگن و يافتن جواب خصوصي به ازاي ورودي خاص، جواب كلي سيستم از جمع پاسخ عمومي و پاسخ خصوصي بدست مي‌آيد.

براي بكارگيري شرايط سكون جهت تعيين پاسخ سيستم LTI به ورودي داده شده، عنوان علي بودن سيستم ضروري است.

با استفاده از رابطه بين پاسخ ضربه و پاسخ پله در سيستم‌هاي LTI و يا محاسبه پاسخ ضربه سيستم به طور مستقيم مي‌توان پاسخ به ورودي ضربه را يافت.

سيستم‌هاي LTI را با استفاده از بلوك دياگرام نيز مي‌توان نشان داد.

فصل سوم

سري فوريه سيستم‌هاي زمان پيوسته و زمان گسسته

۳-۱- تعاريف

۳-۱-۱-سيگنال متناوب

سيگنال متناوب است اگر $x(t)=x(t+T)$ و $T>0$ بوده و دوره تناوب اصلي سيگنال $x(t)$ كوچكترين مقدار مثبت غيرصفر T است كه در رابطه بالا صدق مي‌كند. $\omega_0=\dfrac{2\pi}{T_0}$ فركانس اصلي سيگنال خواهد بود.

مثال ۱)

الف) $$x(t)=2\sin(3t) \quad \Rightarrow \omega_0=3\,,\ T=\frac{2\pi}{3}$$

ب) $$x(t)=4\cos(\sqrt{2}t) \quad \Rightarrow \omega_0=\sqrt{2}\,,\quad T=\frac{2\pi}{\sqrt{2}}$$

۳-۱-۲- دوره تناوب حاصل جمع دو سيگنال

به طور كلي قانون خاصي براي اين حالت وجود ندارد. در بعضي موارد اگر هر يك از سيگنال‌ها متناوب باشند حاصل‌جمع آنها نيز متناوب است و در بعضي موارد با وجود متناوب بودن هر يك از سيگنال‌ها، حاصل جمع آنها متناوب نيست.

مثال ۲)

الف) $$x(t)=e^{j2t}+e^{j3t}$$

$$\begin{aligned} T_1&=\frac{2\pi}{2} \quad , & T_2&=\frac{2\pi}{3}\\ &=2\pi \quad , & &=\frac{4\pi}{3}\\ &=3\pi \quad , & &=\frac{6\pi}{3}=2\pi \end{aligned}$$

$$m=\frac{2\pi}{\pi}=2\ ,\ n=\frac{2\pi}{\frac{2\pi}{3}}=3$$

ب) $$x(t)=2\cos t+4\cos(\sqrt{2}t)$$

$$T_1=\frac{2\pi}{1}\quad ,\quad T_2=\frac{2\pi}{\sqrt{2}}$$

عليرغم متناوب بودن تك‌تك سيگنال‌هاي تشكيل‌دهنده x(t)، اين سيگنال نامتناوب است.

تذکر: اگر $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ و دوره تناوب آنها به ترتیب T_1 , T_2 باشد حاصل جمع دو سیگنال زماني متناوب است که رابطه زیر برقرار باشد:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

(n_1 , n_2 باید اعداد صحیح مثبت و $\frac{n_1}{n_2}$ عدد کسري صحیح (گویا) باشد)

۳-۱-۳- دوره تناوب حاصلضرب دو سیگنال

۱- در صورت امکان پس از تبدیل حاصلضرب توابع به حاصل‌جمع دو تابع، دوره تناوب را به دست مي‌آوریم (چنانچه دوره تناوب را در همان حالتي که در هم ضرب شده محاسبه کنیم دوره تناوب به دست آمده ممکن است دوره تناوب اصلي سیگنال نباشد.)

۲- چنانچه سیگنال حاصلضرب قابل تبدیل به حاصل‌جمع نبود، با توجه به رابطه $z(t) = x(t) \cdot y(t)$ و $z(t) = z(t+T)$ دوره تناوب $z(t)$ را در صورت وجود محاسبه مي‌کنیم.

مثال ۳)

الف) $z(t) = e^{j6t} \cos(10t)$

$$T_1 = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3} \quad , \quad T_2 = \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5}$$

$$= \frac{2\pi}{3} \quad , \quad = \frac{2\pi}{5}$$

$$= \frac{3\pi}{3} = \pi \quad , \quad \vdots \qquad \Rightarrow T = \pi$$

$$= \frac{5\pi}{5} = \pi$$

ب)

$$z(t) = e^{j6t} \cdot \frac{1}{2}(e^{j10t} + e^{-j10t}) = \frac{1}{2}e^{j16t} + \frac{1}{2}e^{-j4t}$$

$$T_1 = \frac{2\pi}{16} = \frac{\pi}{8} \quad , \quad T_2 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{2\pi}{8}$$

$$= \frac{3\pi}{8} \qquad \Rightarrow T = \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{4\pi}{8}$$

همانطور که ملاحظه مي‌شود دوره تناوب محاسبه شده از حاصل‌ضرب دو سيگنال (π) دوره تناوب اصلي سيگنال يا کوچکترين دوره تناوب سيگنال $(\frac{\pi}{2})$ نمي‌باشد.

قضيه: اگر $f(t)$ با دوره تناوب T باشد، آنگاه با توجه به $f(t)=f(t+T)$ تابع $G(t)=f(f(t))$ نيز پريوديك با دوره تناوب T خواهد بود. اگر T_1 دوره تناوب اصلي تابع f(t) باشد، در اين صورت دوره تناوب اصلي G(t) لزوما T نيست.

مثال ٤)

الف)

$$f(t)=\cos(t) \Rightarrow \quad T_1=\frac{2\pi}{1}\;, \quad T=4\pi=6\pi=\ldots$$

$$g(t)=f^3(t) \Rightarrow g(t)=\cos^3 t=\frac{3}{4}\cos t+\frac{1}{4}\cos 3t$$

$$T_1=\frac{2\pi}{1}\;\;,\;T_2=\frac{2\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}=\frac{6\pi}{3}$$

ب)

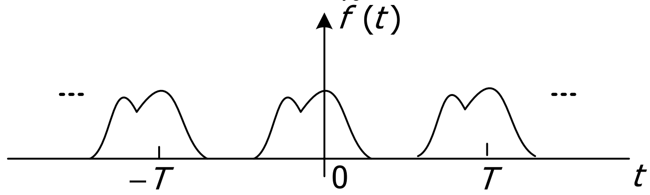
$$g(t)=\cos^4 t$$

$$=\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos 2t+\frac{1}{8}\cos 4t$$

$$T_1=\frac{2\pi}{2}\quad,\quad T_2=\frac{2\pi}{8}=\frac{4\pi}{4}$$

۳-۱-٤- روش نوشتن توابع به صورت پريوديك

اگر سيگنال در طي يك دوره تناوب (T) فرموله شود ((f(t))، با استفاده از رابطه زير سيگنال متناوب در کل زمان‌ها بيان مي‌شود $(\tilde{f}(t))$.



$$\tilde{f}(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t-KT)$$

۳-۲- سري فوريه زمان پيوسته

سري فوريه، تنها براي توابع متناوب بيان مي‌شود، توابعي كه داراي دوره تناوب اصلي $x(t) = x(t+T) \quad , \quad T = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$ مي‌باشند. سري فوريه را به هر يك از دو فرم زير مي‌توان نمايش داد:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, e^{jk(\frac{2\pi}{T})t}$$

سؤال: چرا علاقمند هستيم كه سيگنال متناوب را به صورت مجموعي از نمايي‌هاي مختلط نمايش دهيم؟

۱) در صورت موفقيت، شناخت بهتري نسبت به سيگنال و محتواي فركانسي آن به‌دست مي‌آوريم. (در صورتي كه بتوان سيگنال را به صورت مجموعه اي از هارموني‌ها بسط داد، مي‌توان به اين سوال كه در يك سيگنال چه فركانس‌هايي و با چه قدرتي وجود دارند را پاسخ داد.)

۲) پاسخ سيستم LTI به نمايي مختلط $e^{jk\omega_0 t}$ يا به طور كلي $e^{j\omega t}$ به فرم بسيار ساده‌اي تعريف مي‌شود.

تذكر ۱: هرچه هارموني‌ها بالاتر باشد فركانس‌ها بالاتر است و برعكس هر چه هارموني‌ها پايين‌تر باشد فركانس‌ها پايين‌تر است.

تذكر ۲: اگر سيگنالي در هارموني‌هاي بالا ضرايب سري فوريه بزرگتري داشته باشد سيگنال فركانس بالا است و برعكس اگر سيگنالي در هارموني‌هاي پايين ضرايب سري فوريه بزرگتري داشته باشد سيگنال فركانس پايين است.

$$\Phi_k(t) = e^{jk\omega_0 t} \quad , \quad k = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$$

$$T_k = \frac{2\pi}{k\omega_0} \quad \Rightarrow \quad T_1\big|_{k=\pm1} = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad , \quad T_2\big|_{k=\pm2} = \frac{2\pi}{2\omega_0} \quad , \quad T_3\big|_{k=\pm3} = \frac{2\pi}{3\omega_0} \quad , \ldots$$

مثال ۵) دوره تناوب اصلي سيگنال زير چيست؟

$$x(t) = 1 + \frac{1}{2}\cos(2\pi t) + \cos(4\pi t) + \frac{2}{3}\cos(6\pi t)$$

$$T_1 = \frac{2\pi}{2\pi} = 1 \quad , \quad T_2 = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2} \quad , \quad T_3 = \frac{2\pi}{6\pi} = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow T_0 = 1 \,,\, \omega_0 = \frac{2\pi}{1}$$

با توجه به رابطه اويلر:

$$x(t) = 1 + \frac{1}{4}e^{j(2\pi)t} + \frac{1}{4}e^{-j(2\pi)t} + \frac{1}{2}e^{j2(2\pi)t} + \frac{1}{2}e^{j(-2)(2\pi)t} + \frac{1}{3}e^{j3(2\pi)t} + \frac{1}{3}e^{j(-3)(2\pi)t}$$

$$\Rightarrow a_0 = 1 \,, \quad a_1 = a_{-1} = \frac{1}{4} \,, \quad a_2 = a_{-2} = \frac{1}{2} \,, \quad a_3 = a_{-3} = \frac{1}{3}$$

فرم ديگر سري فوريه (سيگنال‌هاي حقيقي):

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k\,e^{jk\omega_0 t}=\sum_{k=-\infty}^{-1}a_k\,e^{jk\omega_0 t}+a_0+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\,e^{jk\omega_0 t}$$

$$\overset{k\to -k}{\Rightarrow}\ =\sum_{k=1}^{\infty}a_{-k}\,e^{-jk\omega_0 t}+a_0+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\,e^{jk\omega_0 t}=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\,e^{jk\omega_0 t}+a_{-k}\,e^{-jk\omega_0 t}$$

$$\Rightarrow x(t)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\,e^{jk\omega_0 t})+(a_{-k}^{*}\,e^{jk\omega_0 t})^{*}$$

اگر $x(t)=x^{*}(t)$ باشد:

$$x^{*}(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k^{*}\,e^{jk\omega_0 t}\quad,\quad x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k\,e^{jk\omega_0 t}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_{-k}^{*}\,e^{jk\omega_0 t}$$

$$\Rightarrow x(t)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\,e^{jk\omega_0 t})+(a_k\,e^{jk\omega_0 t})^{*}=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}2\,\mathrm{Re}(a_k\,e^{jk\omega_0 t}),\quad a_k=A_k\cdot e^{j\theta k}$$

$$\Rightarrow a_0+\sum_{k=1}^{\infty}2\,\mathrm{Re}(A_k\,e^{j(k\omega_0 t+\theta)})=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}2A_k\cos(k\omega_0 t+\theta_k)$$

۳-۲-۱- تعيين ضرايب سري فوريه

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k\,e^{jk\omega_0 t}$$

طرفين رابطه بالا را در $e^{-jn\omega_0 t}$ ضرب مي‌كنيم و از طرفين رابطه روي يك دوره تناوب انتگرال مي‌گيريم:

$$x(t)\cdot e^{-jn\omega_0 t}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k\,e^{j(k-n)\omega_0 t}\Rightarrow\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\cdot e^{-jn\omega_0 t}dt=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k\underbrace{\frac{1}{T}\int_0^T e^{j(k-n)\omega_0 t}dt}_{I}\ ,$$

$$I=\frac{1}{T}\int_0^T e^{j(k-n)\omega_0 t}dt$$

$$=\frac{1}{T}\int_0^T\cos(k-n)\omega_0 t\,dt+\frac{1}{T}\int_0^T j\sin(k-n)\omega_0 t\,dt=\begin{cases}0 & k\neq n\\ 1 & k=n\end{cases}$$

اگر k=n باشد، مقدار I طبق اثبات برابر واحد شده كه در نتيجه ضرايب سري فوريه از رابطه زير بدست مي آيند

$$a_n=\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,e^{-jn\omega_0 t}dt$$

۳-۲-۲- همگرايي سري فوريه

سؤال: سيگنال متناوب x(t) تحت چه شرايطي داراي نمايش سري فوريه است؟

شرايط ديريكله:

۱) سيگنال مطلقا انتگرال‌پذير باشند:

$$<x(t),x(t)>=\frac{1}{T}\int_T x(t)\cdot x(t)^{*}dt=\frac{1}{T}\int_T|x(t)|^2dt<\infty$$

۲) براي يك سيگنال متناوب كه تعداد محدودي ناپيوستگي در هر دوره تناوب دارد، نمايش سري فوريه در همه جا به جز نقاط منفرد ناپيوستگي برابر سيگنال است و در نقاط ناپيوستگي سري به مقدار متوسط سيگنال در آن نقطه همگرا مي‌شود.

تذكر: در كليه موارد عملي سري فوريه را مي‌توان به كار برد. اما سيگنال‌هايي كه شرايط ديريكله را ارضاء نمي‌كنند طبيعت نامعقولي دارند، در نتيجه عموما در زمينه‌هاي عملي ظاهر نمي‌شوند.

مثال ٦)

الف)
$$x(t) = 1 + \sin(\omega_0 t) + 2\cos(\omega_0 t) + \cos(2\omega_0 t + \frac{\pi}{4})$$

$$= 1 + (\frac{1}{2j} + 1)\, e^{j\omega_0 t} + (-\frac{1}{2j} + 1)\, e^{-j\omega_0 t} + \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{4}} \cdot e^{j2\omega_0 t} + \frac{1}{2} e^{-j\frac{\pi}{4}} \cdot e^{-j2\omega_0 t}$$

$$a_0 = 1 \ ,\ a_1 = a_{-1}^* = 1 + \frac{1}{2j} \quad , \quad a_2 = a_{-2}^* = \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{4}(1 + j)$$

ب)
$$x(t) = \sin(\omega_0 t) \quad \Rightarrow a_1 = a_{-1}^* = \frac{1}{2j}$$

تمرين: سيگنال زير شامل چه هارموني‌هايي است؟

$$x(t) = \frac{3}{2} e^{j10\omega_0 t} + \frac{3}{2} e^{-j10\omega_0 t} + \frac{5}{2} e^{j11\omega_0 t} + \frac{5}{2} e^{-j11\omega_0 t}$$

يادآوري:

اگر $x(t) = x(t+T)$ در اين صورت سيگنال داراي سري فوريه است پس:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, e^{jk(\frac{2\pi}{T})t}$$
"فرمول سنتز"

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t)\, e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t)\, e^{-jk(\frac{2\pi}{T_0})t} dt$$
" فرمول آناليز"

تذكر ۱: مجوعه ضرايب $\{a_k\}$ را ضرايب سري فوريه يا ضرايب طيفي x(t) مي‌نامند. اين ضرايب در حالت كلي مختلط هستند و اندازه آن‌ها نشان‌دهنده قدرت سيگنال در هارموني متناظر است.

تذكر ۲: ضريب a_0 مؤلفه DC يا ثابت سيگنال است كه از رابطه زير محاسبه مي‌شود:

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t)\, dt$$
مقدار متوسط

تمرین۱: چه تفاوتي میان $u(t)$ و $u(2t)$ و $u(\frac{t}{2})$ وجود دارد؟

تمرین۲:چه تفاوتي میان $u(t-T_0)$ و $u(2t-T_0)$ و $u(\frac{t}{2}-T_0)$ وجود دارد؟

۳-۳- خواص سري فوريه زمان پيوسته

۳-۳-۱- خطي بودن

$$
\begin{aligned}
&x(t) \xrightarrow{f_s} a_k \quad ; \quad x(t) = x(t+T_0) \\
&y(t) \xrightarrow{f_s} b_k \quad ; \quad y(t) = y(t+T_0) \\
&z(t) = Ax(t) + By(t) \xrightarrow{f_s} z(t) = Aa_k + Bb_k \quad ; \quad z(t) = z(t+T_0)
\end{aligned}
$$

۳-۳-۲- انتقال زماني

$$
\begin{aligned}
&x(t) \xrightarrow{f_s} a_k \quad ; \quad x(t) = x(t+T_0) \\
&y(t) = x(t-t_0) \xrightarrow{f_s} b_k = a_k\, e^{-jk(\frac{2\pi}{T_0})t_0} \quad ; \quad y(t) = y(t+T_0) \\
&x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, e^{jk(\frac{2\pi}{T_0})t} \Rightarrow x(t-t_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, e^{jk(\frac{2\pi}{T_0})(t-t_0)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk(\frac{2\pi}{T_0})t}\, e^{-jk(\frac{2\pi}{T_0})t_0}
\end{aligned}
$$

۳-۳-۳- وارونسازي زماني

$$
\begin{aligned}
&x(t) \xrightarrow{f_s} a_k \quad ; \quad x(t) = x(t+T_0) \\
&y(t) = x(-t) \xrightarrow{f_s} b_k = a_{-k} \quad ; \quad y(t) = y(t+T_0) \\
&x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, e^{jk(\frac{2\pi}{T_0})t} \Rightarrow x(-t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, e^{-jk(\frac{2\pi}{T_0})t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{-k}\, e^{jk(\frac{2\pi}{T_0})t}
\end{aligned}
$$

الف) $x(t) = x(-t) \Rightarrow a_k = a_{-k}$

ب) $x(t) = -x(-t) \Rightarrow a_k = -a_{-k}$

۳-۳-٤- تغيير مقياس زماني

$$x(t) \xrightarrow{f_s} a_k \;; \quad x(t) = x(t+T_0)$$
$$y(t) = x(at) \xrightarrow{f_s} a_k \;; \quad y(t) = y(t+\frac{T_0}{a})$$
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, e^{jk(\frac{2\pi}{T_0})t} \Rightarrow x(at) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, e^{jk(\frac{2\pi}{T_0})at} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, e^{jk(\frac{2\pi}{\frac{T_0}{a}})t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, e^{jka\omega_0 t}$$

۳-۳-٥- مزدوج گيري

$$x(t) \xrightarrow{f_s} a_k$$
$$x^*(t) \xrightarrow{f_s} a_{-k}^*$$
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, e^{jk(\frac{2\pi}{T_0})t} \Rightarrow x^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^*\, e^{-jk(\frac{2\pi}{T_0})at} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{-k}^*\, e^{+jk(\frac{2\pi}{T_0})at}$$

۱) اگر سيگنال حقيقي باشد چون $x(t) = x^*(t)$ پس $a_k = a_{-k}^*$

۲) اگر سيگنال حقيقي و زوج باشد، $a_k = a_{-k}^*$ و $a_k = a_{-k}$ آنگاه ضرايب سري فوريه مطلقا حقيقي و زوج هستند.

۳) اگر سيگنال حقيقي و فرد باشد، $a_k = a_{-k}^*$ و $a_k = -a_{-k}$ آنگاه ضرايب سري فوريه مطلقا موهومي و فرد هستند.

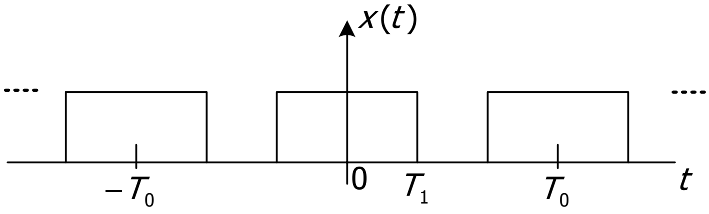
۳-۳-٦- رابطه پارسوال

$$\frac{1}{T_0}\int_{T_0} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2$$

$|a_k|^2$ نشان‌دهنده قدرت سيگنال در هارموني kام است.

$$< x(t), x(t) > = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\cdot x^*(t) dt$$

مثال ۱) ضرايب سري فوريه شكل مقابل را به دست آوريد.



$$x(t)=\begin{cases}1 & |t|<T_1\\ 0 & T_1<|t|<\dfrac{T_0}{2}\end{cases}$$

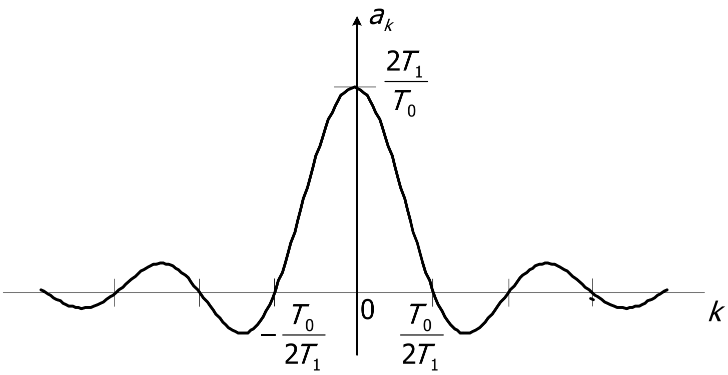
$$a_k=\frac{1}{T_0}\int_{-T_1}^{T_1}1\cdot e^{-jk(\frac{2\pi}{T_0})t}dt=\frac{1}{T_0}\cdot\frac{-1}{jk\frac{2\pi}{T_0}}e^{-jk(\frac{2\pi}{T_0})t}\Bigg|_{-T_1}^{T_1}$$

$$=\frac{-1}{jk2\pi}\cdot(e^{-jk(\frac{2\pi}{T_0})T_1}-e^{jk(\frac{2\pi}{T_0})T_1})=\frac{-1}{jk2\pi}(-2j)\sin(k\frac{2\pi}{T_0}\cdot T_1)$$

$$\Rightarrow a_k=\frac{\sin(k\omega_0T_1)}{k\pi}$$

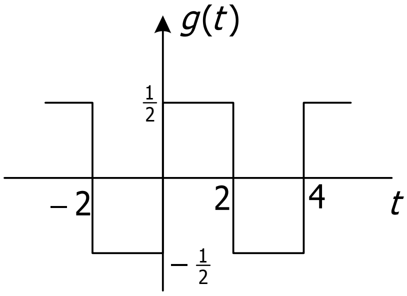
$$\text{sinc}(k)=\frac{\sin(k\pi)}{k\pi}\Rightarrow a_k=\frac{2T_1}{T_0}\text{sinc}(\frac{2\text{T}_1}{\text{T}_0}k)$$

با توجه به تعریف :



$$\begin{cases}a)\ T_0=\text{cte},T_1\to 0\\ b)\ T_1=\text{cte},T_0\to\infty\end{cases}$$

مثال ۲)



$$g(t)=x(t-1)-\frac{1}{2}$$

$$T_0=4\quad,\quad T_1=1$$

$$x(t)\to a_k$$

$$x(t-t_0)\to a_k\,e^{-jk(\frac{2\pi}{T_0})t}=a_k\,e^{-jk(\frac{2\pi}{4})t}$$

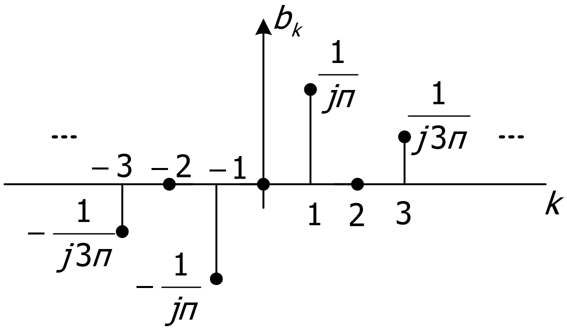
$$* \quad e^{jk2\pi} = 1$$

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(k\frac{\pi}{2})}{k\pi} \cdot e^{-jk\frac{\pi}{2}} \cdot e^{jk(\frac{2\pi}{4})t} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} \frac{\sin(k\frac{\pi}{2})}{k\pi} \cdot e^{-jk\frac{\pi}{2}} \cdot e^{jk(\frac{2\pi}{4})t} - \frac{1}{2}$$

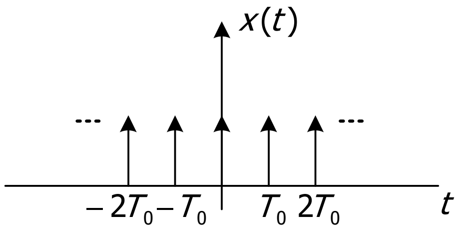
$$\Rightarrow g(t) = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} \frac{\sin(k\frac{\pi}{2})}{k\pi} \cdot e^{-jk\frac{\pi}{2}} \cdot e^{jk(\frac{\pi}{2})t}$$

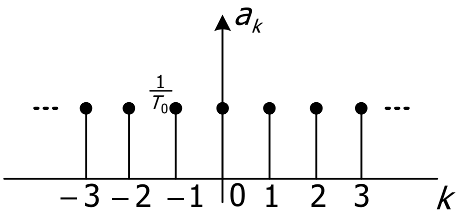
$$b_k = \frac{\sin(k\frac{\pi}{2})}{k\pi} \cdot e^{-jk} = \frac{e^{-jk\frac{\pi}{2}}}{k\pi} \cdot \left(\frac{e^{jk\frac{\pi}{2}} - e^{-jk\frac{\pi}{2}}}{2j}\right) = \frac{1}{2jk\pi} \cdot (1 - e^{-jk\pi}) = \frac{1}{2jk\pi} \cdot (1 - (-1)^k)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b_k = 0 & k : even \\ b_k = \dfrac{1}{jk\pi} & k : odd \end{cases}$$



٣-٤- قطار ضربه





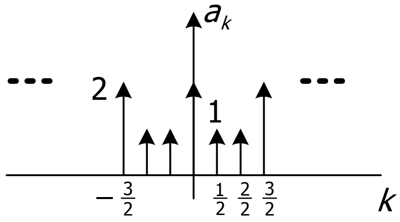
$$x(t) = x(t + T_0)$$

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \delta(t) e^{-jk(\frac{2\pi}{T_0})t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \delta(t) dt = \frac{1}{T_0}$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} e^{jk(\frac{2\pi}{T_0})t}$$

مثال ۳)

$$\tilde{x}(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t-\frac{m}{2}) + \delta(t-\frac{3m}{2})$$



$$T_0 = \frac{3}{2}$$

$$a_k = \frac{1}{\frac{3}{2}} \int_{T_0=\frac{3}{2}} (\delta(t+\frac{1}{2}) + 2\delta(t) + \delta(t-\frac{1}{2}))\, e^{-jk\frac{2\pi}{\frac{3}{2}}t} dt = \frac{2}{3}(2+2\cos(\frac{2\pi}{3}k)) = \frac{4}{3}(1+\cos(\frac{2\pi}{3}k))$$

۳-۵- سري فوريه زمان گسسته

$$\varphi[n] = e^{j\Omega n}$$

$$\varphi_k[n] = e^{jk(\frac{2\pi}{N})n} = \cos(k\frac{2\pi}{N}n) + j\sin(k\frac{2\pi}{N}n)$$

$$\frac{2\pi}{k\frac{2\pi}{N}} = \frac{N}{K}, (k \in Z)$$

تك تك هارمونيها دوره تناوب N دارند:

$$\varphi_k[n] = \varphi_k[n+N] \Rightarrow \varphi_k[n] = e^{jk(\frac{2\pi}{N})n}, \ \varphi_{k+N}[n] = e^{j(k+N)\frac{2\pi}{N}n} = e^{jk(\frac{2\pi}{N})n} \cdot e^{j2\pi n}$$

$$= \varphi_k[n] \ , \quad (n \in Z)$$

$$\Rightarrow \varphi_k[n] = \varphi_{k+rN}[n+N]\,, \quad (r \in Z)$$

$$x[n] = x[n+N]$$

$$\Rightarrow x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k \cdot e^{jk(\frac{2\pi}{N})n} \ , \quad a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N \rangle} x[n] \cdot e^{-jk(\frac{2\pi}{N})n} \Rightarrow a_k = a_{k+rN} \ , \quad \begin{cases} N \in Z^+ \\ r \in Z \\ k \in Z \end{cases}$$

۳-۶- خواص سري فوريه زمان گسسته

۳-۶-۱- تفاضل اول

$$x[n]=x[n+N]\Rightarrow x[n]=\sum_{k=\langle N\rangle}a_k\cdot e^{jk(\frac{2\pi}{N})n}$$

$$x[n-1]=\sum_{k=\langle N\rangle}a_k\cdot e^{-jk(\frac{2\pi}{N})}\cdot e^{jk(\frac{2\pi}{N})n}$$

$$\Rightarrow y[n]=x[n]-x[n-1]=\sum_{k=\langle N\rangle}a_k(1-e^{-jk(\frac{2\pi}{N})})\cdot e^{jk(\frac{2\pi}{N})n}$$

۳-۶-۲- رابطه پارسوال

$$\frac{1}{N}\sum_{k=\langle N\rangle}\left|x[n]\right|^2=\sum_{k=\langle N\rangle}\left|a_k\right|^2$$

مثال ٤) فرض كنيد اطلاعات زير درباره دنباله x[n] داده شده:

الف) $N=6\ ,\ x[n]=x[n+N]$

ب) $\sum_{n=0}^{5}x[n]=2$

ج) $\sum_{n=2}^{7}(-1)^n\ x[n]=1$

در ميان مجموعه سيگنال‌هايي كه در سه شرط بالا صدق مي‌كنند x[n]ائي را پيدا كنيد كه كمترين توان را در هر دوره تناوب دارد.

$$x[n]=\sum_{k=\langle 6\rangle}a_k\cdot e^{jk(\frac{2\pi}{6})n}=\sum_{k=0}^{5}a_k\cdot e^{jk(\frac{\pi}{3})n}\quad;\quad\{a_0,a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}\ \text{ضرايب مجموعه}$$

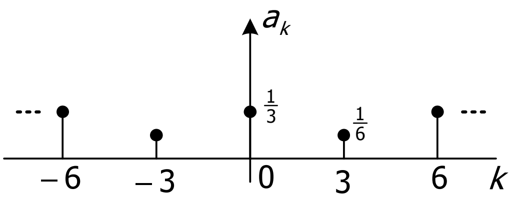
$$a_k=\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{5}x[n]e^{-jk(\frac{\pi}{3})n}\Rightarrow a_0=\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{5}x[n]=\frac{1}{3}$$

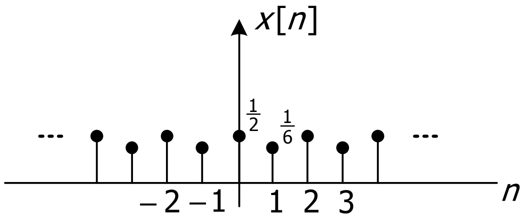
$$a_k=\frac{1}{6}\sum_{n=2}^{7}x[n]e^{-jk\frac{\pi}{3}n}\Rightarrow a_3=\frac{1}{6}\sum_{n=2}^{7}x[n]e^{-j\pi n}=\frac{1}{6}\sum_{n=2}^{7}(-1)^n\ x[n]=\frac{1}{6}\ ,\quad a_3=a_{-3}=\frac{1}{6}$$

با توجه به رابطه پارسوال، براي احراز آخرين شرط (x[n]ائي كه كمترين توان را در هر دوره تناوب دارد) بايستي ساير ضرايب صفر در نظر گرفته شود ($a_1=a_2=a_4=a_5=0$). بدين ترتيب با توجه به ضرايب a_0 و a_3 بدست آمده مي‌توان سيگنال x[n] را با استفاده از فرمول سنتز بدست آورد.

$$x[n]=\sum_{k=0}^{5}a_k e^{jk\frac{\pi}{3}n} = \frac{1}{3}+\frac{1}{6}e^{j\pi n} = \frac{1}{3}+\frac{1}{6}(-1)^n$$

$$\Rightarrow x[n]=\begin{cases}\frac{1}{2} & n=0\\ \frac{1}{6} & n=1\\ \frac{1}{2} & n=2\\ \frac{1}{6} & n=3\\ \frac{1}{2} & n=4\\ \frac{1}{6} & n=5\end{cases}$$





۳-۷- سیستم‌هاي LTI و سري فوريه زمان پيوسته

سيستم LTI با ورودي x(t)، خروجي y(t) و پاسخ ضربه h(t) را در نظر مي‌گيريم:

$$\overset{LTI}{x(t)\longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow} y(t) = x(t) * h(t)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau$$

پاسخ سيستم را به ورودي نمايي $x(t) = e^{st}$ را در حالت كلي بدست مي‌آوريم:

$$x(t) = e^{st}\Big|_{s=r+j\omega} \Rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{s(t-\tau)}h(\tau)d\tau = e^{st}\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau$$

۳-۷-۱- پاسخ سيستم LTI به ورودي نمايي مختلط

الف)

$$s = j\omega \ , \ x(t) = e^{j\omega t} \Rightarrow y(t) = e^{j\omega t}\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

پس به اين ترتيب خروجي سيستم همان ورودي $x(t) = e^{j\omega t}$ در حاصل‌ضرب پاسخ فركانسي سيستم خواهد بود. پاسخ فركانسي هر سيستم LTI با پاسخ ضربه h(t) از رابطه زير محاسبه مي‌شود.

$$H(j\omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t}dt$$

ب)

$$x(t) = x(t+T_0) \Rightarrow x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \cdots + a_{-1}e^{-j\omega_0 t} + a_0 + a_1 e^{j\omega_0 t} + \cdots$$

با توجه به خطي بودن سيستم، پاسخ به مجموعه ورودي‌ها برابر مجموع پاسخ‌ها به تك‌تك ورودي‌هاست.

$$\Rightarrow y(t) = \cdots + a_{-1}e^{-j\omega_0 t}\cdot H(-j\omega_0) + a_0\cdot H(j0) + a_1 e^{j\omega_0 t}\cdot H(j\omega_0) + \cdots$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}\cdot H(jk\omega_0) \ , \ H(jk\omega_0) = H(j\omega)\big|_{\omega=k\omega_0}$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \Rightarrow y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{a_k H(jk\omega_0)}_{b_k} e^{jk\omega_0 t}$$

اگر ورودي به سيستم LTI متناوب و با ضرايب سري فوريه a_k باشند، خروجي سيستم نيز متناوب (با همان دوره تناوب ورودي) $b_k = a_k H(jk\omega_0)$ خواهد بود. با عبور ورودي متناوب از سيستم مي‌توان برخي از هارموني‌ها را تقويت، تضعيف و يا به طور كامل حذف نمود.

مثال ۱) اگر $x(t)=e^{j2t} \quad , \quad y(t)=x(t-3)$ خروجي چه خواهد بود؟

روش اول:

$$x(t)=e^{j2t} \quad , \quad y(t)=x(t-3) \Rightarrow y(t)=e^{j2(t-3)}$$

روش دوم:

$$h(t)=\delta(t-3)\ , H(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-3)e^{-j\omega t}dt=e^{-j3\omega}$$

$$\Rightarrow y(t)=e^{j2t}\cdot H(j\omega)\Big|_{\omega=2}=e^{j2t}\cdot e^{-j6}$$

روش سوم:

$$h(t)=\delta(t-3)\ , x(t)=e^{j2t}$$

$$\Rightarrow y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\lambda-3)e^{+j2(t-\lambda)}dt=e^{j2(t-3)}$$

مثال ۲) اگر $x(t)=\cos(4t)+\cos(7t)\ , y(t)=x(t-3)$ خروجي چه خواهد بود؟

ابتدا سري فوريه ورودي را نوشته و آنگاه سري فوريه خروجي را بدست مي‌آوريم.

$$\begin{aligned}
&x(t)=\frac{1}{2}e^{j4t}+\frac{1}{2}e^{-j4t}+\frac{1}{2}e^{j7t}+\frac{1}{2}e^{-j7t}\\
&h(t)=\delta(t-3)\Rightarrow H(j\omega)=e^{-j3\omega}\\
&y(t)=\frac{1}{2}e^{j4t}H(j4)+\frac{1}{2}e^{-j4t}H(-j4)+\frac{1}{2}e^{j7t}H(j7)+\frac{1}{2}e^{-j7t}H(-j7)\\
&\quad=\frac{1}{2}e^{j4t}\cdot e^{-j12}+\frac{1}{2}e^{-j4t}\cdot e^{j12}+\frac{1}{2}e^{j7t}\cdot e^{-j21}+\frac{1}{2}e^{-j7t}\cdot e^{j21}\\
&\quad=\cos(4t-12)+\cos(7t-21)
\end{aligned}$$

مثال ۳) ورودي $x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k e^{jk(2\pi)t}$ با ضرايب سري فوريه $\begin{cases} a_0=1\\ a_1=a_{-1}=\frac{1}{4}\\ a_2=a_{-2}=\frac{1}{2}\\ a_3=a_{-3}=\frac{1}{3}\end{cases}$ به سيستم LTI با پاسخ ضربه $h(t)=e^{-t}u(t)$ اعمال مي‌شود. مطلوب است ضرايب سري فوريه خروجي؟

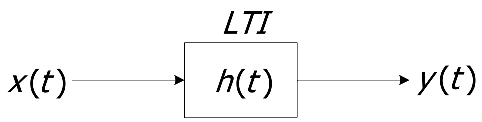
$$H(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t}u(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{0}^{\infty} e^{-(1+j\omega)t}dt=\frac{-1}{j\omega+1}e^{-(1+j\omega)t}\Big|_{0}^{+\infty}=\frac{1}{j\omega+1}$$

$$H(jk\omega_0)=H(jk2\pi)=\frac{1}{1+jk2\pi}$$

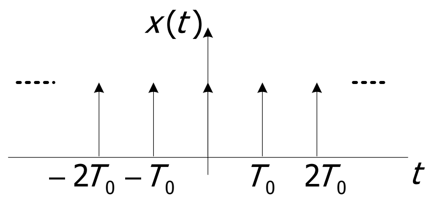
$$b_0=1\times 1=1\ ,\ b_1=\frac{1}{4}\times\frac{1}{1+j2\pi}\ ,\ b_{-1}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{1-j2\pi}\ ,$$

$$b_2=\frac{1}{2}\times\frac{1}{1+j4\pi}\ ,\ b_{-2}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{1+j4\pi}\ ,\quad b_3=\frac{1}{3}\times\frac{1}{1+j6\pi}\ ,\ b_{-3}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{1+j6\pi}$$

۳-۷-۲- پاسخ سیستمLTI به قطار ضربه



$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t+mT_0)$$



$$a_k=\frac{1}{T_0}\int_{T_0}\delta(t)e^{-j\omega t}dt=\frac{1}{T_0}\quad ,\quad x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{T_0}e^{jk\omega_0 t}$$

سري فوريه خروجي:

$$y(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\underbrace{\frac{1}{T_0}H(jk\omega_0)}_{b_k}e^{jk\omega_0 t}\quad ,\quad \omega_0=\frac{2\pi}{T_0}$$

۳-۸- فيلتر كردن (زمان پيوسته)

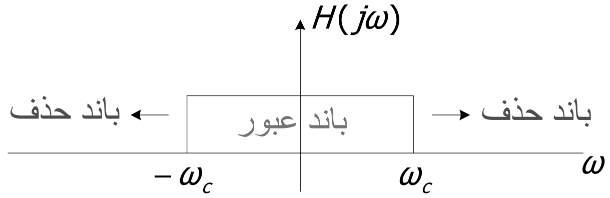
فيلترهاي شكل‌دهنده فركانسي: شكل طيف سيگنال ورودي را تغيير مي‌دهد.

فيلترهاي انتخاب‌گر فركانسي: بعضي از فركانس ها را اساسا بدون اعوجاج عبور داده و ساير فركانس ها را تضعيف يا حذف مي‌كند. (notch filter)

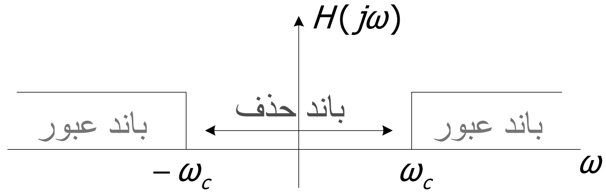
۳-۸-۱- انواع فيلترها

فيلتر پايين گذر (*LPF):

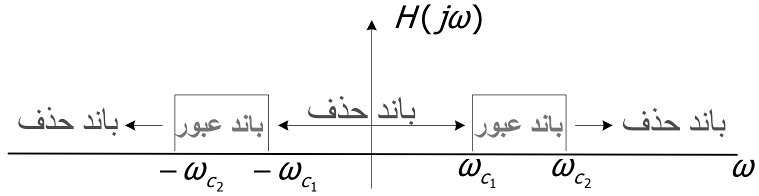
* 1. Low Pass Filter



فیلتر بالا گذر (HPF*):



فیلتر میان گذر (BPF*):



۳-۸-۲- تشخیص نوع فیلتر:

با توجه به داده‌هاي مسئله به دو روش مي‌توان نوع فیلتر را تشخیص داد:

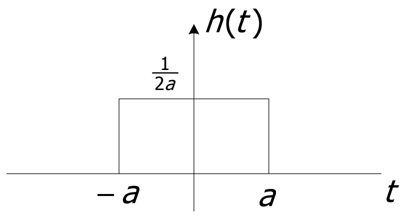
۱) اگر در صورت مسئله پاسخ ضربه سیستم h(t) داده شده باشد، با بدست آوردن $H(j\omega)$ و سپس رسم اندازه پاسخ فرکانسي $|H(j\omega)|$ به ازاي فرکانس‌هاي مختلف، نوع فیلتر را تشخیص مي‌دهیم.

۲- اگر در صورت مسئله معادله دیفرانسیل سیستم LTI داده شده باشد، ابتدا با اعمال تابع $x(t) = e^{j\omega t}$ بعنوان ورودي سیستم، $H(j\omega)$ را با توجه به رابطه $y(t) = e^{j\omega t} H(j\omega)$ بدست مي‌آوریم. سپس اندازه پاسخ فرکانسي سیستم $|H(j\omega)|$ را ترسیم مي‌کنیم تا نوع فیلتر را تشخیص دهیم.

مثال ٤: پاسخ ضربه سیستم $h(t) = \frac{1}{2a} rect(\frac{t}{2a})$ داده شده است. سیستم LTI مذکور بمانند چه نوع فیلتري عمل مي‌کند؟

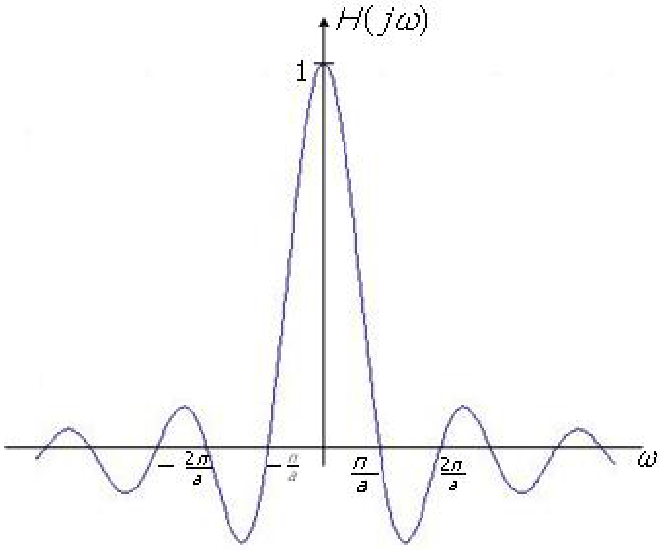
2. High Pass Filter

3. Band Pass Filter

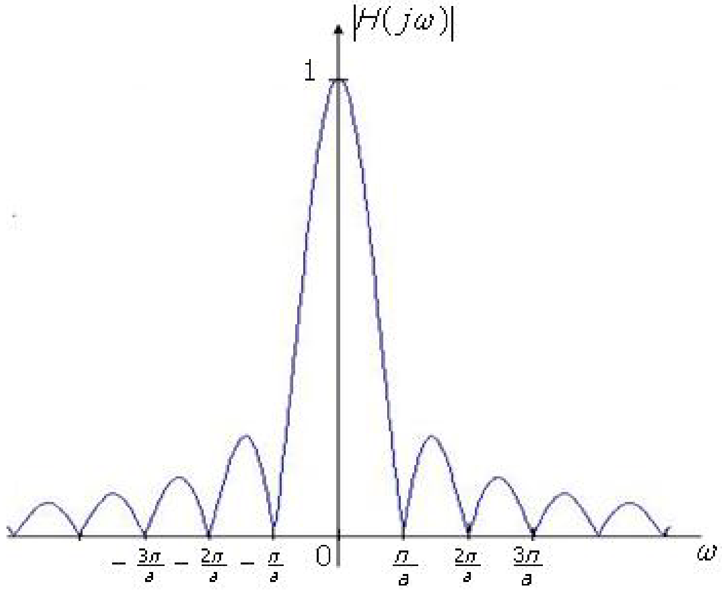


$$H(j\omega)=\int_{-a}^{a}\frac{1}{2a}e^{-j\omega t}dt=\frac{-1}{j2a\omega}(e^{-ja\omega}-e^{ja\omega})=\frac{\sin(a\omega)}{a\omega}=\frac{\sin(\frac{a\omega}{\pi}\pi)}{\frac{a\omega}{\pi}\pi}$$

$$=\operatorname{sinc}(\frac{\omega}{\pi}\cdot a)\ ;\quad \frac{\omega}{\pi}\cdot a=m\ ,\ \ m\in Z$$



براي تشخيص نوع فيلتر بايستي $|H(j\omega)|$ را ترسيم نمائيم.



که با توجه به اندازه پاسخ فرکانسي سيستم نوع فيلتر، فيلتر پايين گذر LPF غيرايده‌آل است چون نزديك صفر بيشترين دامنه را دارد و با افزايش فرکانس اندازه پاسخ فرکانسي بشدت کاهش و به سمت صفر ميل مي‌کند.

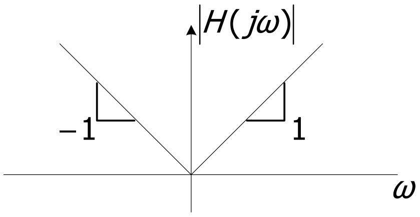
مثال ٥: اگر $y(t) = \dfrac{dx(t)}{dt}$, $x(t) = e^{j\omega t}$ نوع فيلتر را تعيين کنيد.

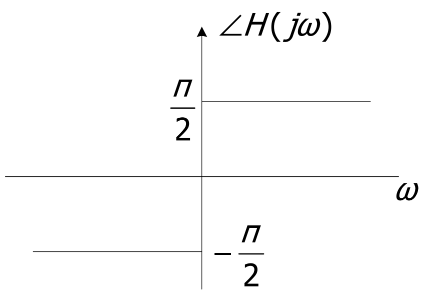
$$x(t) = e^{j\omega t} \Rightarrow y(t) = e^{j\omega t} H(j\omega)$$

X(t) و y(t) را در رابطه داده شده براي سيستم LTI جايگذاري مي‌کنيم تا پاسخ فرکانسي سيستم را بدست آوريم.

$$e^{j\omega t} H(j\omega) = j\omega\, e^{j\omega t} \Rightarrow H(j\omega) = j\omega$$

$$|H(j\omega)| = |\omega| \quad , \quad \angle H(j\omega) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}; & \omega > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2}; & \omega < 0 \end{cases}$$





با توجه به اندازه پاسخ فرکانسي سيستم نوع فيلتر بالاگذر HPF است.

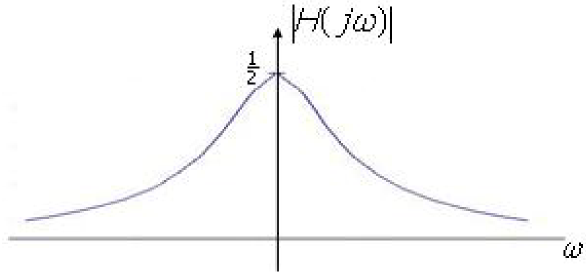
مثال ٦) اگر $y'(t) + 2y(t) = \cos 3t$ مطلوبست:

الف) اين سيستم به عنوان چه فيلتري عمل مي‌كند.

ب) سري فوريه خروجي را با توجه به ورودي داده شده به دست آوريد.

حل الف:

$$y'(t)+2y(t)=x(t);\quad x(t)=e^{j\omega t}\Rightarrow y(t)=e^{j\omega t}H(j\omega)$$
$$j\omega\, e^{j\omega t}H(j\omega)+2e^{j\omega t}H(j\omega)=e^{j\omega t};$$
$$H(j\omega)=\frac{1}{2+j\omega}\quad,\quad |H(j\omega)|=\frac{1}{\sqrt{4+\omega^2}}$$

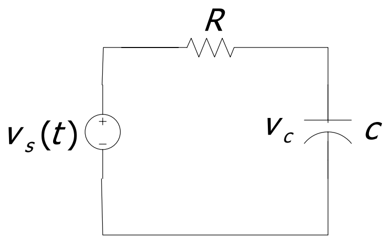


با توجه به شكل نوع فيلتر پايين‌گذر LPF است.

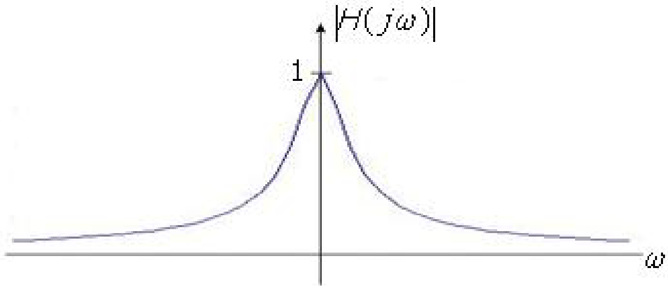
حل ب:

$$x(t)=\cos 3t=\frac{1}{2}e^{j3t}+\frac{1}{2}e^{-j3t}\quad;\omega_0=3$$
$$b_1=\frac{1}{2}H(j3)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2+3j}\ ,\ b_{-1}=\frac{1}{2}H(-j3)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2-3j}$$
$$y(t)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2+3j}e^{j3t}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2-3j}e^{-j3t}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{13}\,e^{j56.3}}e^{j3t}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{13}\,e^{-j56.3}}e^{-j3t}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{13}}\cos(3t-56.3)$$

مثال ۷) $H(j\omega)$ و نوع فيلتر را تعيين كنيد.



$$RC\frac{dv_c(t)}{dt}+v_c(t)=v_s(t)\,;\quad v_s(t)=e^{j\omega t}\Rightarrow v_c(t)=e^{j\omega t}H(j\omega)$$
$$\Rightarrow RC(j\omega)e^{j\omega t}H(j\omega)+e^{j\omega t}H(j\omega)=e^{j\omega t}$$
$$H(j\omega)=\frac{1}{RC(j\omega)+1}\,;\quad |H(j\omega)|=\frac{1}{\sqrt{1+R^2C^2\omega^2}}$$

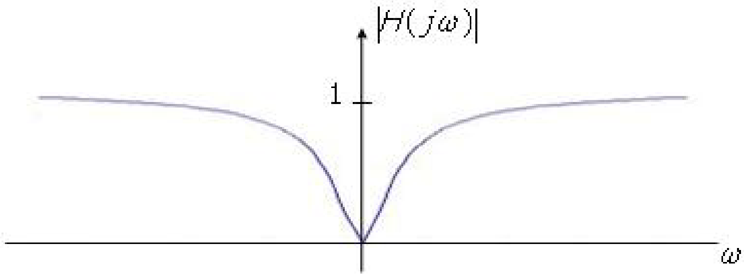


حال اگر خروجي دو سر مقاومت باشد:

$$\frac{dv_R(t)}{dt}+\frac{1}{RC}v_R(t)=\frac{dv_s(t)}{dt}\ ;\quad v_s(t)=e^{j\omega t}\Rightarrow v_R(t)=e^{j\omega t}H(j\omega)$$

$$\Rightarrow j\omega\, e^{j\omega t}+\frac{1}{RC}e^{j\omega t}H(j\omega)=j\omega\, e^{j\omega t}$$

$$H(j\omega)=\frac{j\omega}{\frac{1}{RC}+j\omega}\ ;\quad \left|H(j\omega)\right|=\frac{|\omega|}{\sqrt{(\frac{1}{RC})^2+\omega^2}}$$



تذكر: همانطوريكه ملاحظه مي‌شود بسته به اينكه خروجي در سر خازن و يا مقاومت در نظر گرفته شود نوع فيلترينگ از پايين‌گذر به بالاگذر تغيير مي‌كند.

۳-۹- سیستم‌هاي LTI و سري فوريه زمان گسسته

الف)
$$x[n] = Z^n \Rightarrow y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} Z^{n-m} \cdot h[m] = Z^n \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m] Z^{-m} = Z^n \cdot H(z)$$

$$; H(z) \stackrel{\Delta}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] Z^{-n}$$

ب)
$$Z = e^{j\Omega}; x[n] = e^{j\Omega n} \Rightarrow y[n] = e^{jn\Omega} \cdot H(e^{j\Omega}); H(e^{j\Omega}) \stackrel{\Delta}{=} H(j\Omega) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] e^{-j\Omega n}$$

ج)
$$x[n] = x[n+N] \quad ; \quad x[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk(\frac{2\pi}{N})n}$$

$$\Rightarrow y[n] = \sum_{k=<N>} b_k \cdot H(jk\frac{2\pi}{N}) \quad ; H(jk\frac{2\pi}{N}) \stackrel{\Delta}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

تذکر: در مورد سيستم زمان گسسته و LTI با ورودي متناوب، خروجي نيز متناوب خواهد بود. دوره تناوب خروجي و ورودي يکسان بوده و ضرايب سري فوريه خروجي از رابطه داده شده در بند ۳ بدست مي‌آيد.

يادآوري (سري هندسي):

الف)
$$\sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n = \begin{cases} N & , \alpha = 1 \\ \dfrac{1-\alpha^N}{1-\alpha} & , \alpha \neq 1 \end{cases}$$

ب)
$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n = \frac{1}{1-\alpha} \quad , \quad |\alpha| < 1$$

ج)
$$\sum_{n=0}^{\infty} n\alpha^n = \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2} \quad , \quad |\alpha| < 1$$

د)
$$\sum_{n=k}^{\infty} \alpha^n = \frac{\alpha^k}{1-\alpha} \quad , \quad |\alpha| < 1$$

تمرين :
$$\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^n \cos(\frac{\pi}{2} n) \stackrel{?}{=} \frac{4}{5}$$

مثال ۱) سیستم LTI با پاسخ ضربه $h[n]=\alpha^{n}u[n]$ داده شده است. پاسخ y[n] را به ورودي $x[n]=\cos(\frac{2\pi}{N}n)$ بدست آوريد.

$$x[n]=\frac{1}{2}e^{j\frac{2\pi}{N}n}+\frac{1}{2}e^{-j\frac{2\pi}{N}n}$$

با توجه به خطي بودن سيستم، پاسخ به تك‌تك ورودي‌هاي نمايي مختلط طبق بند ۲ را بدست آورده و با يكديگر جمع مي‌كنيم تا پاسخ كلي سيستم به ورودي مذكور تعيين شود.

$$H(j\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\alpha^{n}u[n]e^{-j\Omega n}=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^{n}\,e^{-j\Omega n}=\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha\,e^{-j\Omega})^{n}=\frac{1}{1-\alpha e^{-j\Omega}}$$

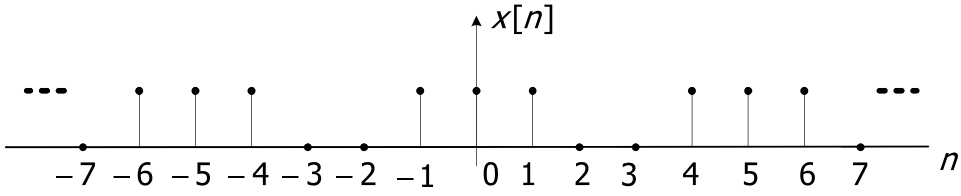
$$\Rightarrow y[n]=\frac{1}{2}e^{j\frac{2\pi}{N}n}\frac{1}{1-\alpha e^{-j\frac{2\pi}{N}n}}+\frac{1}{2}e^{-j\frac{2\pi}{N}n}\frac{1}{1-\alpha e^{+j\frac{2\pi}{N}n}}$$

$$\Rightarrow y[n]=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\alpha e^{-j\frac{2\pi}{N}n}}e^{j\frac{2\pi}{N}n}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\alpha e^{+j\frac{2\pi}{N}n}}e^{-j\frac{2\pi}{N}n}$$

$$b_{1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\alpha\,e^{-j\frac{2\pi}{N}n}}\qquad,\qquad b_{-1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\alpha\,e^{+j\frac{2\pi}{N}n}}$$

مثال ۲) سیستم LTI با پاسخ ضربه h[n] و ورودي متناوب x[n] داده شده است. سري فوريه خروجي را بدست آوريد.

$$h[n]=(\frac{1}{2})^{|n|}\quad,\quad x[n]=\begin{cases}1 & n=0,\pm1\\ 0 & n=\pm2,\pm3\end{cases}\quad;N=6$$



$$a_{k}=\frac{1}{6}\sum_{n=<N>}x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}=\frac{1}{6}(e^{-jk\frac{2\pi}{6}(-1)}+1+e^{-jk\frac{2\pi}{6}(1)})=\frac{1}{6}(1+2\cos(k\frac{\pi}{3}))$$

$$H(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\frac{1}{2})^{|n|} \cdot e^{-j\Omega n}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{-1} (\frac{1}{2} \cdot e^{j\Omega})^{-n} + \sum_{n=0}^{+\infty} (\frac{1}{2} \cdot e^{-j\Omega})^{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{1}{2} \cdot e^{j\Omega})^{n} + \sum_{n=0}^{+\infty} (\frac{1}{2} \cdot e^{-j\Omega})^{n}$$

$$\Rightarrow H(j\Omega) = \frac{\frac{1}{2} e^{j\Omega}}{1 - \frac{1}{2} e^{j\Omega}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{2} e^{-j\Omega}} = \frac{1 - \frac{1}{4}}{1 - \cos(\Omega) + \frac{1}{4}} = \frac{3}{5 - 4\cos(\Omega)}$$

$$H(jk\frac{2\pi}{6}) = \frac{3}{5 - 4\cos(k\frac{\pi}{3})} \Rightarrow y[n] = \sum_{k=<6>} \frac{1}{6}(1 + 2\cos(k\frac{\pi}{3})) \cdot H(jk\frac{\pi}{3}) e^{jk\frac{\pi}{3}n}$$

۳-۱۰- فیلتر کردن (زمان گسسته)

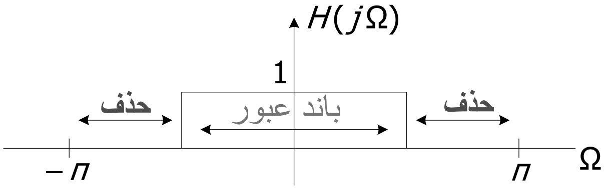
$$x[n] \longrightarrow \underset{h[n]}{\boxed{LTI}} \longrightarrow y[n] \qquad H(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] e^{-j\Omega n}$$

$H(j\Omega)$ با دوره تناوب 2π متناوب است پس مي‌توان نوشت:
$$H(j\Omega) = H(j(\Omega + 2\pi))$$

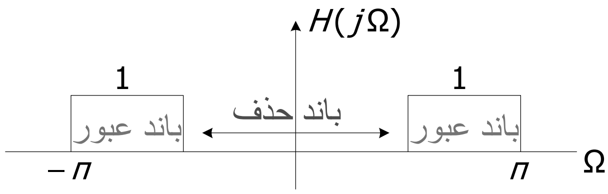
بدين ترتيب براي تشخيص نوع فيلتر در سيستم‌هاي زمان گسسته به اندازه پاسخ فركانسي در بازه $[-\pi, \pi]$ توجه شود.

۳-۱۰-۱- انواع فيلترها

فيلتر پائين‌گذر (LPF*):

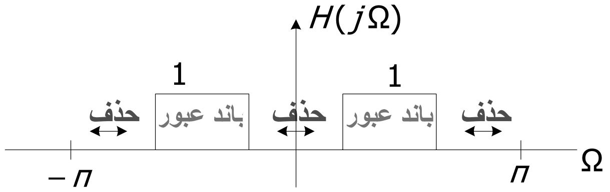


فيلتر بالاگذر (HPF*):



* 1. Low Pass Filter
2. High Pass Filter

فیلتر میانگذر (BPF*):



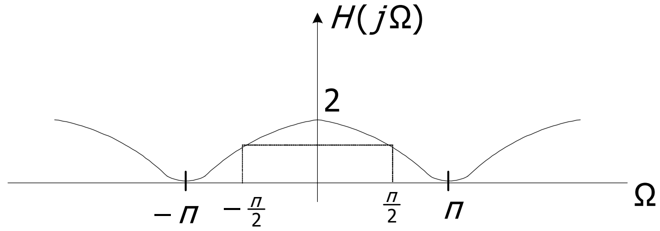
مثال ۳) در سیستم LTI زیر مطلوبست پاسخ ضربه $h[n]$، پاسخ فرکانسي $H(j\Omega)$ و نوع فیلتر؟

$$y[n] = \frac{1}{2}x[n+1] + x[n] + \frac{1}{2}x[n-1]$$

$$h[n] = y[n]\big|_{x[n]=\delta[n]} \Rightarrow h[n] = \frac{1}{2}\delta[n+1] + \delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-1]$$

$$H(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\delta[n+1] + \delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-1]\right)e^{-j\Omega n} = \frac{1}{2}e^{j\Omega} + 1 + \frac{1}{2}e^{-j\Omega} = 1 + \cos(\Omega)$$

$$H(j\Omega) = \begin{cases} 0 & \Omega = -\pi \\ 1 & \Omega = -\frac{\pi}{2} \\ 2 & \Omega = 0 \\ 1 & \Omega = \frac{\pi}{2} \\ 0 & \Omega = \pi \end{cases}$$



با توجه به $H(j\Omega)$ در بازه $[-\pi,\pi]$ (چون همواره مثبت است لذا با $|H(j\Omega)|$ برابر خواهد بود) نوع فیلتر پایینگذر LPF است.

مثال ٤) درسیستم LTI زیر مطلوبست پاسخ فرکانسي $H(j\Omega)$ و نوع فیلتر؟

$$y[n] = -\frac{1}{2}x[n+2] + x[n] - \frac{1}{2}x[n-2]$$

از آنجایي که h[n] در مسئله خواسته شده است، طبق بند ۲ مستقیما $H(j\Omega)$ را بدست ميآوریم.

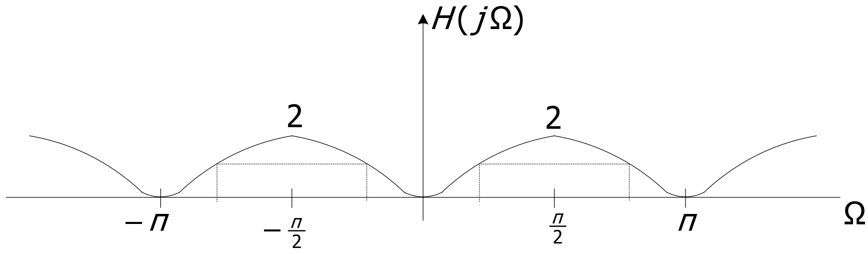
3. Band Pass Filter

$$x[n]=e^{j\Omega n} \Rightarrow y[n]=e^{j\Omega n}H(j\Omega)$$

$$e^{j\Omega n}H(j\Omega)=-\frac{1}{2}e^{j\Omega(n+2)}+e^{j\Omega n}-\frac{1}{2}e^{j\Omega(n-2)}$$

$$\Rightarrow H(j\Omega)=-\frac{1}{2}e^{j2\Omega}+1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega 2}=1-\cos(2\Omega)$$

$$H(j\Omega)=\begin{cases}0 & \Omega=0\\ 1 & \Omega=\pm\frac{\pi}{4}\\ 2 & \Omega=\pm\frac{\pi}{2}\\ 1 & \Omega=\pm\frac{3\pi}{2}\\ 0 & \Omega=\pm\pi\end{cases}$$



با در نظر گرفتن پاسخ فركانسي در بازه $[-\pi,\pi]$ نوع فيلتر ميان‌گذر BPF است.

مثال ۵) سيستم LTI و علي با معادله تفاضلي زير داده شده است.

$$y[n]=\sum_{k=0}^{\infty}(2^{-k})x[n-k]$$

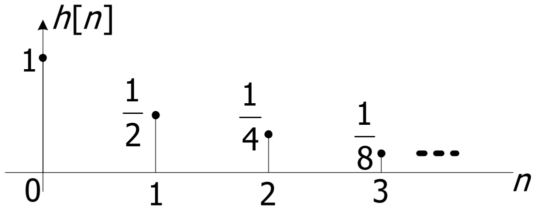
مطلوبست:

الف) پاسخ ضربه h[n] ؟

ب)پاسخ فركانسي $H(j\Omega)$؟

ج) نوع فيلتر ؟

$$h[n]=y[n]\big|_{x[n]=\delta[n]} \Rightarrow h[n]=\sum_{k=0}^{\infty}(2^{-k})\,\delta[n-k]=\delta[n]+2^{-1}\delta[n-1]+2^{-2}\delta[n-2]+\cdots$$

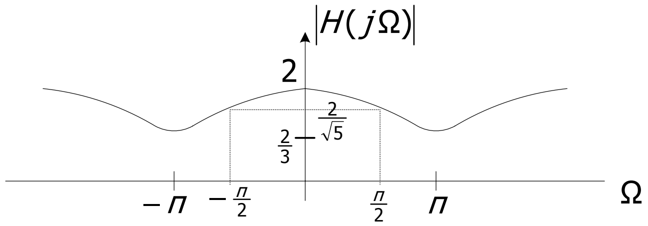


$$H(j\Omega)=1+2^{-1}e^{-j\Omega}+2^{-2}e^{-j2\Omega}+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}2^{-k}\cdot e^{-jk\Omega}=\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{2}\cdot e^{-j\Omega})^{k}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}$$

$$\Rightarrow H(j\Omega)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}\cos\Omega+j\frac{1}{2}\sin\Omega}$$

$$\left|H(j\Omega)\right|=\frac{1}{\sqrt{(1-\frac{1}{2}\cos\Omega)^2+(\frac{1}{2}\sin\Omega)^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{4}-\cos(\Omega)}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}-\cos(\Omega)}}$$

$$\left|H(j\Omega)\right|=\begin{cases}2 & \Omega=0\\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \Omega=\pm\frac{\pi}{2}\\ \frac{2}{3} & \Omega=\pm\pi\end{cases}$$



با در نظر گرفتن اندازه پاسخ فركانسي در بازه $[-\pi,\pi]$، از آنجايي كه با افزايش فركانس ميزان تضعيف با توجه به شكل زياد مي‌شود، نوع فيلتر را مي‌توان پايين‌گذر LPF دانست.

۳-۱۱- خلاصه

اگر $f(t)$ با دوره تناوب T باشد، آنگاه با توجه به $f(t)=f(t+T)$ تابع $G(t)=f(f(t))$ نيز پريوديك با دوره تناوب T خواهد بود. اگر T_1 دوره تناوب اصلي تابع f(t) باشد، در اين صورت دوره تناوب اصلي G(t) لزوما T نيست.

اگر سيگنال در طي يك دوره تناوب (T) فرموله شود (f(t))، با توجه به رابطه گفته شده سيگنال متناوب در كل زمان‌ها بيان مي‌شود $(\tilde{f}(t))$.

سري فوريه، تنها براي توابع متناوب بيان مي‌شود، توابعي كه داراي دوره تناوب اصلي $T=\frac{2\pi}{\omega_0}$, $x(t)=x(t+T)$ مي‌باشند.

در صورتي كه بتوان سيگنال را به صورت مجموعه‌اي از هارمونيها بسط داد، مي‌توان به اين سوال كه در يك سيگنال چه فركانس‌هايي و با چه قدرتي وجود دارند را پاسخ داد.)

پاسخ سيستم LTI به نمايي مختلط $e^{jk\omega_0 t}$ يا به طور كلي $e^{j\omega t}$ به فرم بسيار ساده‌اي تعريف مي‌شود.

هرچه هارمونيها بالاتر باشد فركانس‌ها بالاتر است و برعكس هر چه هارمونيها پايين‌تر باشد فركانس‌ها پايين‌تر است.

اگر سيگنالي در هارموني‌هاي بالا ضرايب سري فوريه بزرگتري داشته باشد سيگنال فركانس بالا است و برعكس اگر سيگنالي در هارموني‌هاي پايين ضرايب سري فوريه بزرگتري داشته باشد سيگنال فركانس پايين است.

به شرط برقرار بودن شرايط ديريكله همگرايي سري فوريه قابل بررسي است.

مجوعه ضرايب $\{a_k\}$ را ضرايب سري فوريه يا ضرايب طيفي x(t) مي‌نامند. اين ضرايب در حالت كلي مختلط هستند و اندازه آن‌ها نشان‌دهنده قدرت سيگنال در هارموني متناظر است. ضريب a_0 مؤلفه DC يا ثابت سيگنال است.

با دانستن خواص سري فوريه، در برخي مسائل براي پيدا كردن ضرايب سري فوريه لزومي به استفاده از تعريف گفته شده براي سري فوريه نيست.

اگر ورودي ضرايب فوريه a_k باشند، خروجي $b_k e^{jkw_0}$ مي‌باشد. مي‌توان تعدادي از ورودي‌ها را از خروجي حذف كرد.

اگر سيستم ورودي سيستم LTI متناوب باشد، خروجي نيز با همان دوره تناوب متناوب خواهد بود.

با توجه به ورودي و خروجي سيستم مي‌توان نوع فيلتر و شكل آن را بدست آورد.

فصل چهارم

تبديل فوريه سيستم‌هاي زمان پيوسته

٤-١- تعريف تبديل فوريه زمان پيوسته

$$f(t) \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\longleftrightarrow}} F(j\omega)$$

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \qquad , \qquad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad ; \quad \omega = 2\pi f$$

٤-٢- شرايط وجود تبديل فوريه

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < \infty$$

١- سيگنال مطلقا انتگرال باشد.

٢- در طول هر بازه محدود سيگنال تعداد محدودي Max يا Min داشته باشد.

٣- در طول هر بازه محدود سيگنال تعداد محدودي ناپيوستگي داشته باشد.

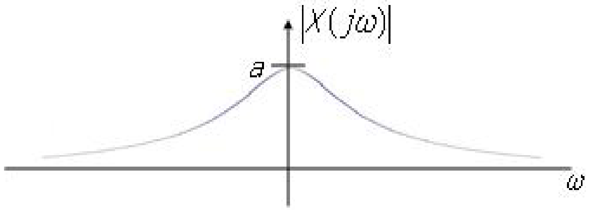
مثال ١) تبديل فوريه سيگنال $x(t) = e^{-at} u(t)\ , a > 0$ ، را بدست آورده و اندازه و فاز آن را بدست آورده و ترسيم نمائيد.

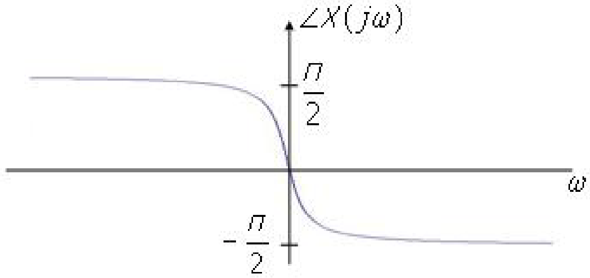
$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at} u(t)\, e^{-j\omega t} dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-at}\ e^{-j\omega t} dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-(a+j\omega)t} dt = -\frac{1}{a+j\omega} e^{-(a+j\omega)t} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{a+j\omega}$$

$$X(j\omega) = |X(j\omega)| \cdot e^{j\angle X(j\omega)};$$

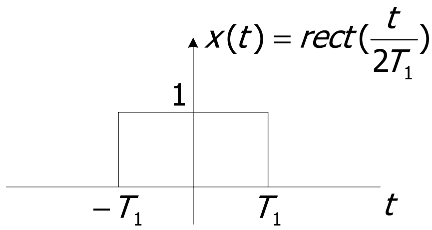
$$|X(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2+\omega^2}} \qquad , \qquad \angle X(j\omega) = -\tan^{-1}\frac{\omega}{a}$$

$$|X(j\omega)| = \begin{cases} \frac{1}{|a|} = \frac{1}{a} & , \quad \omega = 0 \\ 0 & , \quad \omega = \pm\infty \end{cases} \qquad \angle X(j\omega) = \begin{cases} 0 & , \quad \omega = 0 \\ \mp\frac{\pi}{2} & , \quad \omega = \pm\infty \end{cases}$$





مثال ٢) تبديل فوريه سيگنال زير را بدست آوريد.

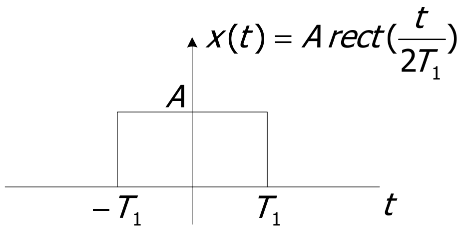


$$X(j\omega) = \int_{-T_1}^{T_1} 1 \times e^{-j\omega t} dt = -\frac{1}{j\omega} e^{-j\omega t}\Big|_{-T_1}^{T_1} = -\frac{1}{j\omega}(e^{-j\omega T_1} - e^{j\omega T_1}) = \frac{2\sin(\omega T_1)}{\omega} = \frac{2\sin(\omega T_1)}{\omega T_1 \cdot \frac{1}{T_1}}$$

$$\Rightarrow X(j\omega) = 2T_1 \frac{\sin(\pi \cdot \frac{\omega T_1}{\pi})}{\pi \cdot \frac{\omega T_1}{\pi}} = 2T_1 \operatorname{sinc}(\frac{\omega}{\pi} \cdot T_1)$$

يادآوري: $\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$

تذكر: در حالت كلي اگر سيگنال پالسي به فرم زير باشد آنگاه:



$$X(j\omega) = \text{سطح پالس} \times \operatorname{sinc}(\frac{\omega}{\pi} \times \text{نصف عرض پالس}) = 2T_1 A \times \operatorname{sinc}(\frac{\omega}{\pi} \cdot T_1)$$

٤-٣- خواص تبديل فوريه

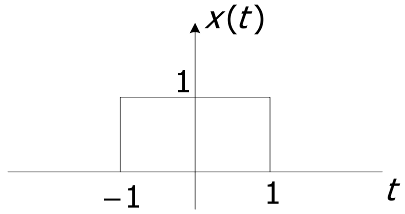
٤-٣-١- خطي بودن

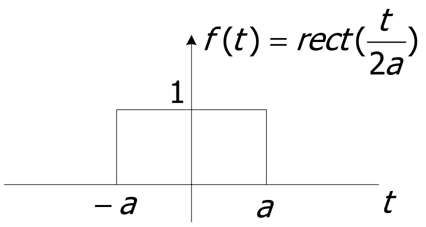
$$\begin{cases} f_1(t) \leftrightarrow F_1(j\omega) \\ f_2(t) \leftrightarrow F_2(j\omega) \end{cases} \Rightarrow af_1(t) + bf_2(t) \leftrightarrow aF_1(j\omega) + bF_2(j\omega)$$

٤-٣-٢- تغيير مقياس زماني

$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega) \Rightarrow f(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} F(j\frac{\omega}{a})$$

مثال ۳) به كمك خواص، تبديل فوريه سيگنال زير را بدست آوريد.





مي‌دانيم: $F(j\omega) = 2a\,\text{sinc}(\frac{\omega}{\pi}\cdot a)$

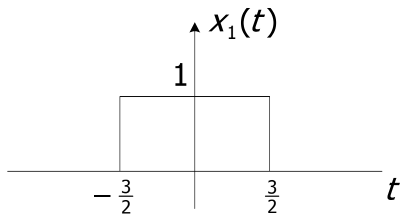
$$x(t) = f(at) \leftrightarrow X(j\omega) = \frac{1}{|a|}F(j\frac{\omega}{a}) = \frac{2a}{|a|}\text{sinc}(\frac{\frac{\omega}{a}}{\pi}\cdot a) = 2\text{sinc}(\frac{\omega}{\pi})$$

۴-۳-۳- شيفت زماني

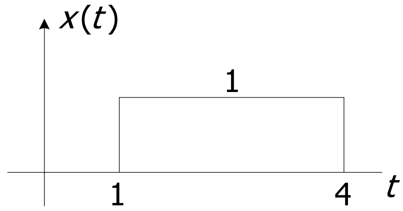
$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega) \Rightarrow f(t-t_0) \leftrightarrow e^{-j\omega t_0}F(j\omega)$$

مثال ۴) تبديل فوريه تابع $x(t) = rect(\frac{t-2.5}{3})$ را به دست آوريد.

۱) $x_1(t) = rect(\frac{t}{3}) \Rightarrow X_1(j\omega) = 3\text{sinc}(\frac{\omega}{\pi}\cdot\frac{3}{2})$



۲) $x(t) = x_1(t-2.5) \Rightarrow X(j\omega) = e^{-j2.5\omega}\cdot X_1(j\omega) = e^{-j2.5\omega}\times 3\sin(\frac{\omega}{\pi}\cdot\frac{3}{2})$



٤-٣-٤- شيفت فركانسي

$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega) \Rightarrow e^{j\omega_0 t} f(t) \leftrightarrow F(j(\omega-\omega_0))$$

مثال ٥) عكس تبديل فوريه را بدست آوريد. $F(j\omega)=2\pi\delta(\omega)$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi\,\delta(\omega)\,e^{j\omega t}d\omega = 1$$

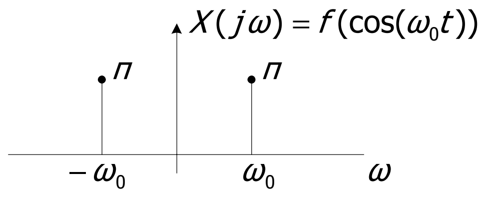
$$\begin{cases}\delta(t)\leftrightarrow 1\\ 1\leftrightarrow 2\pi\,\delta(\omega)\end{cases}$$

تذكر: تبديل فوريه نمايي مختلط $e^{\pm j\omega_0 t}$ را نمي‌توان مستقيما محاسبه نمود. با توجه به دو رابطه بدست آمده در بالا و با استفاده از خاصيت شيفت فركانسي تبديل فوريه اين توابع را محاسبه مي‌كنيم:

$$\Rightarrow \begin{cases} e^{j\omega_0 t}\times 1 \leftrightarrow 2\pi\,\delta(\omega-\omega_0)\\ e^{-j\omega_0 t}\times 1 \leftrightarrow 2\pi\,\delta(\omega+\omega_0)\end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2}e^{j\omega_0 t}+\frac{1}{2}e^{-j\omega_0 t} \leftrightarrow \pi\,\delta(\omega-\omega_0)+\pi\,\delta(\omega+\omega_0)$$

$$\cos(\omega_0 t)\xrightarrow{f}\pi\,\delta(\omega-\omega_0)+\pi\,\delta(\omega+\omega_0)$$

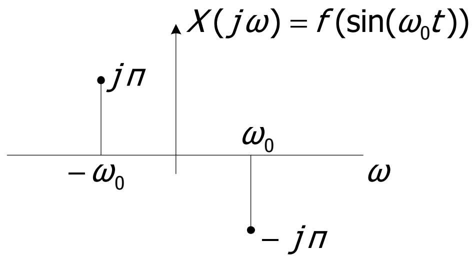
بنابراين تابع $\cos\omega_0 t$ جزو توابعي است كه به كمك خواص، تبديل فوريه‌اش بدست مي‌آيد. سيگنال $x(t)=\cos\omega_0 t$ مطلقا حقيقي و زوج است، همانطوريكه در شكل مشاهده مي‌شود تبديل فوريه آن نيز مطلقا حقيقي و زوج مي‌باشد.



با همان منطق دنبال شده در بالا مي‌توان تبديل فوريه تابع $x(t)=\sin\omega_0 t$ را نيز بدست آورد.

$$\sin\omega_0 t=\frac{1}{2j}e^{j\omega_0 t}-\frac{1}{2j}e^{-j\omega_0 t}\leftrightarrow\frac{\pi}{j}\delta(\omega-\omega_0)-\frac{\pi}{j}\delta(\omega+\omega_0)$$
$$=-\pi j\,\delta(\omega-\omega_0)+\pi j\,\delta(\omega+\omega_0)$$

سيگنال $x(t) = \sin \omega_0 t$ مطلقا حقيقي و فرد است. تبديل فوريه اين سيگنال همانطوريكه در شكل نيز مشاهده مي‌شود مطلقا موهومي و فرد مي‌باشد.



٤-٣-٥- مدولاسیون

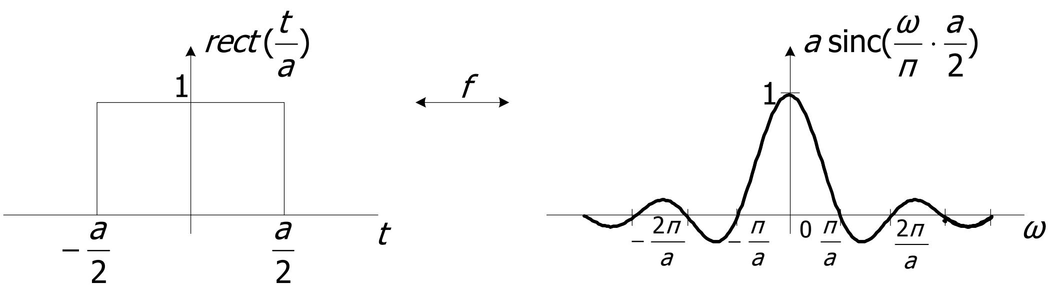
$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega) \Rightarrow f(t)\cos(\omega_0 t) \leftrightarrow \frac{1}{2}F(j(\omega-\omega_0)) + \frac{1}{2}F(j(\omega+\omega_0))$$

اثبات : $$f(t)\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2}f(t)e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2}f(t)e^{-j\omega_0 t} \leftrightarrow \frac{1}{2}F(j(\omega-\omega_0)) + \frac{1}{2}F(j(\omega+\omega_0))$$

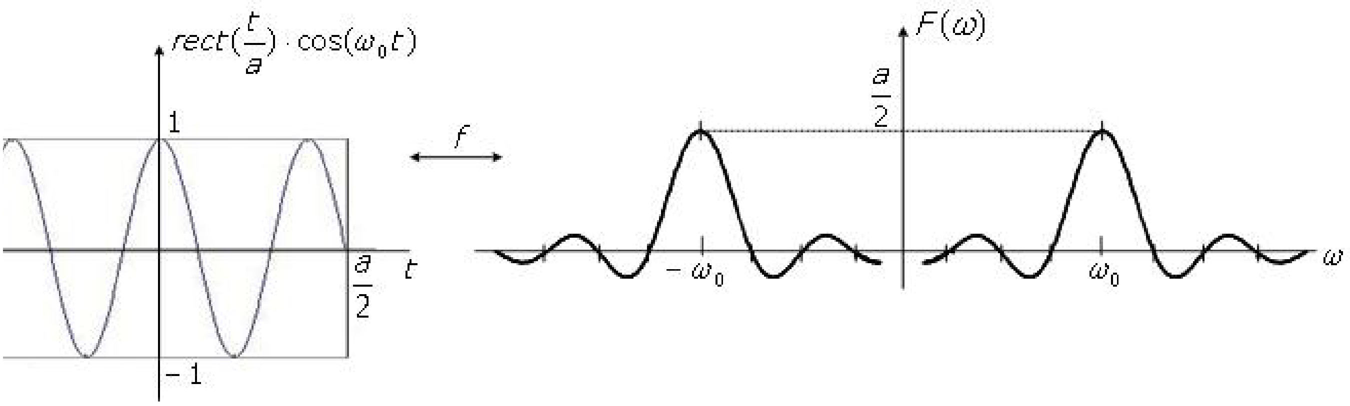
مثال ۱) تبدیل فوریه سیگنال زیر را بدست آورید؟

$$rect(\frac{t}{a})\cos(\omega_0 t) \leftrightarrow ?$$

$$rect(\frac{t}{a}) \leftrightarrow a\,\text{sinc}(\frac{\omega}{\pi}\cdot\frac{a}{2})$$



$$\Rightarrow rect(\frac{t}{a})\cos(\omega_0 t) \leftrightarrow \frac{a}{2}\text{sinc}(\frac{\omega-\omega_0}{\pi}\cdot\frac{a}{2}) + \frac{a}{2}\text{sinc}(\frac{\omega+\omega_0}{\pi}\cdot\frac{a}{2})$$



٤-٣-٦- مشتق فرکانسي

$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega) \Rightarrow (-jt)^n f(t) \leftrightarrow \frac{d^n F(j\omega)}{d\omega^n}$$

٤-٣-٧- مشتق زماني

$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega) \Rightarrow \frac{d^n f(t)}{dt^n} \leftrightarrow (j\omega)^n F(j\omega)$$

٤-٣-٨- مزدوجگيري (تقارن مزدوج)

$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$$
$$f^*(t) \leftrightarrow F(-j\omega)$$

تذكر:

$f(t)$ سيگنال حقيقي و زوج $\Leftarrow$ $F(j\omega)$ مطلقا حقيقي و زوج خواهد بود.

$f(t)$ سيگنال حقيقي و فرد $\Leftarrow$ $F(j\omega)$ مطلقا موهومي و فرد خواهد بود.

٤-٣-٩- خاصيت دوگاني

$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega) \qquad f(t) \leftrightarrow F(\omega)$$
$$F(t) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega) \quad \text{يا} \quad F(t) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$$

مثال ٢) تبديل فوريه سيگنال $x(t) = \frac{1}{1+t^2}$ را به كمك خواص بدست آوريد.

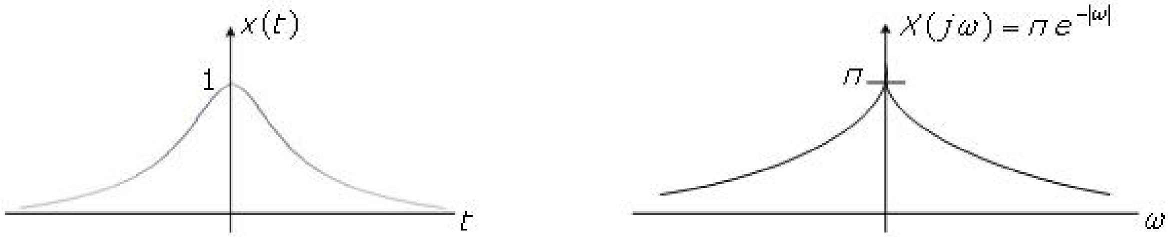
$$f(t) = e^{a|t|} \Rightarrow F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|t|} \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{0} e^{at} \cdot e^{-j\omega t} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-at} \cdot e^{-j\omega t} dt$$
$$= \frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

$$e^{-a|t|} \leftrightarrow \frac{2a}{a^2+\omega^2} \overset{\text{دوگاني}}{\Longrightarrow} \frac{2a}{a^2+t^2} \to 2\pi e^{-a|-\omega|} = 2\pi e^{-a|\omega|}$$

بنابراين $\quad \frac{2a}{a^2+t^2} \leftrightarrow 2\pi e^{-a|-\omega|} = 2\pi e^{-a|\omega|}$

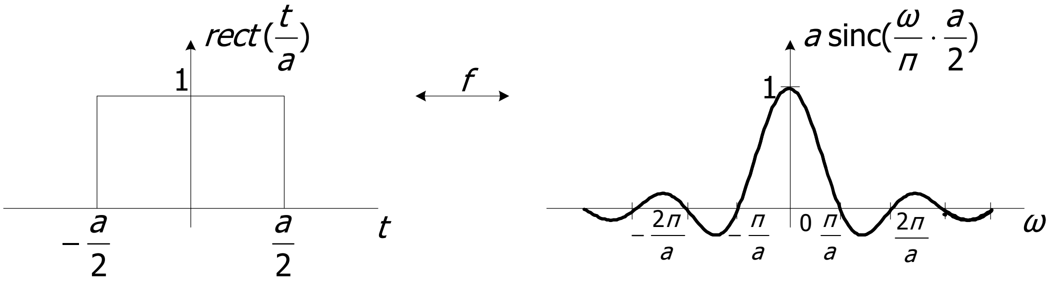
پارامتر a=1 را در نظر ميگيريم:

$$\frac{2}{1+t^2} \leftrightarrow 2\pi e^{-|\omega|} \Rightarrow x(t) = \frac{1}{1+t^2} \leftrightarrow X(j\omega) = \pi\, e^{-|\omega|}$$



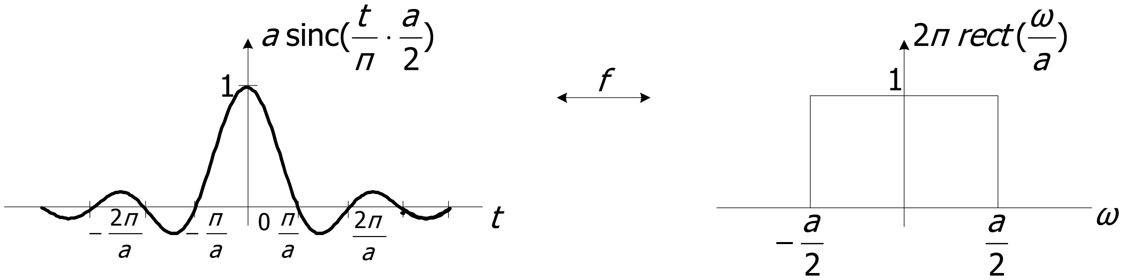
مثال ۳) تبدیل فوریه سیگنال زیر را به کمك خواص بدست آورید.

$$x(t) = a\operatorname{sinc}(\frac{t}{\pi} \cdot \frac{a}{2}) \leftrightarrow ?$$



$$a\operatorname{sinc}(\frac{t}{\pi} \cdot \frac{a}{2}) \leftrightarrow 2\pi\, rect(-\frac{\omega}{a}) = 2\pi\, rect(\frac{\omega}{a})$$

$$x(t) = a\operatorname{sinc}(\frac{t}{\pi} \cdot \frac{a}{2}) \leftrightarrow 2\pi\, rect(-\frac{\omega}{a}) = 2\pi\, rect(\frac{\omega}{a})$$

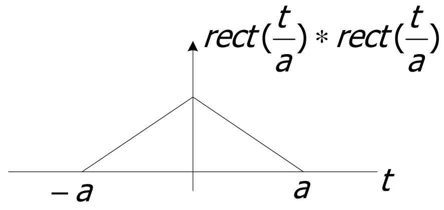


٤-۳-۱۰- ضرب و کانولوشن

$$f_1(t) * f_2(t) \leftrightarrow F_1(j\omega) \cdot F_2(j\omega)$$

$$f_1(t) \cdot f_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} F_1(j\omega) * F_2(j\omega)$$

مثال ٤) $rect(\frac{t}{a}) * rect(\frac{t}{a}) \leftrightarrow ?$



$$rect(\frac{t}{a}) * rect(\frac{t}{a}) \leftrightarrow a^2 \mathrm{sinc}^2(\frac{\omega}{\pi} \cdot \frac{a}{2})$$

۴-۳-۱۱- انتگرال

$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$$

$$\int_{-\infty}^{t} f(\lambda) d\lambda \leftrightarrow \frac{F(j\omega)}{j\omega} + \pi F(j0)\delta(\omega)$$

اثبات:

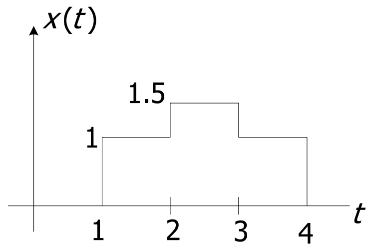
$$f(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) u(t-\lambda) d\lambda = \int_{-\infty}^{t} f(\lambda) d\lambda \leftrightarrow F(j\omega) \cdot U(j\omega)$$

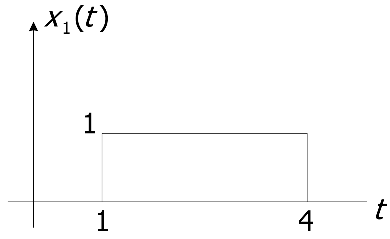
$$u(t) \leftrightarrow U(j\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$$

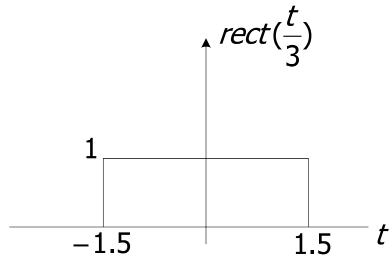
$$F(j\omega)U(j\omega) = \frac{1}{j\omega} F(j\omega) + \pi\delta(\omega) \cdot F(j\omega)$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{t} f(\lambda) d\lambda \leftrightarrow \frac{F(j\omega)}{j\omega} + \pi\delta(\omega) \cdot F(j0)$$

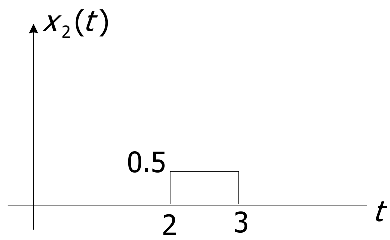
مثال ۵) سیگنال x(t) در ذیل ترسیم شده است. تبدیل فوریه آن را بدست آورید.

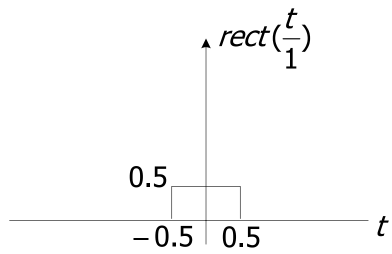






$$rect(\frac{t}{3}) \leftrightarrow 3\text{sinc}(\frac{\omega}{\pi}\cdot\frac{3}{2})$$





$$rect(\frac{t}{1}) \leftrightarrow 0.5\text{sinc}(\frac{\omega}{\pi}\cdot\frac{1}{2})$$

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) \leftrightarrow X(j\omega) = X_1(j\omega) + X_2(j\omega)$$

$$x_1(t) = rect(\frac{t-2.5}{3}) \leftrightarrow e^{-j\omega(2.5)}\cdot 3\text{sinc}(\frac{\omega}{\pi}\cdot\frac{3}{2})$$

$$\underline{x_2(t) = rect(\frac{t-2.5}{1}) \leftrightarrow e^{-j\omega(2.5)}\cdot 0.5\text{sinc}(\frac{\omega}{\pi}\cdot\frac{1}{2})}$$

$$x(t) \leftrightarrow X(j\omega) = e^{-j\omega(2.5)}(3\text{sinc}(\frac{\omega}{\pi}\cdot\frac{3}{2}) + \frac{1}{2}\text{sinc}(\frac{\omega}{\pi}\cdot\frac{1}{2}))$$

٤-٣-١٢- رابطه پارسوال

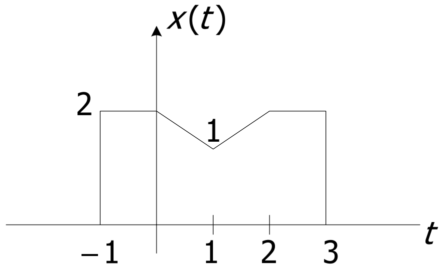
$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)f_2^*(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(j\omega)F_2^*(j\omega)d\omega$$

اگر توابع $f_1(t)$ و $f_2(t)$ يكسان در نظر گرفته شوند، رابطه پارسوال به فرم سادهتري بيان ميشود.

$$f(t) = f_1(t) = f_2(t) \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}\|f(t)\|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\|F(j\omega)\|^2 d\omega$$

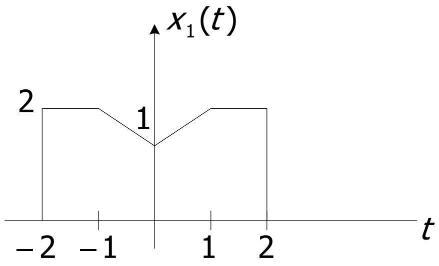
مثال ٦) سيگنال x(t) به صورت زير است.

اگر تبديل فوريه آن $X(j\omega)$ باشد، بدون انجام محاسبات صريح مطلوبست:



الف) $\angle X(j\omega)$ ب) $X(j0)$ ج) $\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)d\omega$ د) $\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$

حل الف: $x_1(t) \leftrightarrow X_1(j\omega)$ چون $x_1(t)$ حقيقي و زوج است، $X_1(j\omega)$ نيز مطلقا حقيقي و زوج خواهد بود. به عبارت ديگر: $\angle X_1(j\omega) = 0$



$x(t) = x_1(t-1)$ يا $x_1(t) = x(t+1)$

$$x(t) = x_1(t-1) \leftrightarrow X(j\omega) = e^{-j\omega} \cdot X_1(j\omega) \Rightarrow \angle X(j\omega) = -\omega + \angle X_1(j\omega)$$
$$\Rightarrow \angle X(j\omega) = -\omega$$

حل ب:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt \Rightarrow X(j0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)dt$$

چون سطح زير منحني x(t) با سطح زير منحني $x_1(t)$ برابر است و با توجه به تعريف تابع زوج داريم:

$$X(j0) = 2\left(\int_0^1 (\text{معادله خط})\, dt + \int_1^2 2dt\right) = 7$$

حل ج:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)d\omega = 2\pi x(0) = 4\pi$$

حل د: رابطه پارسوال مورد نظر است.

$$\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|X(j\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty}|X(j\omega)|^2 d\omega = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2 dt$$

٤-٤- تبديل فوريه سيگنال متناوب

اگر سيگنالي متناوب باشد به اين معني است كه داراي سري فوريه است. تبديل فوريه سيگنال متناوب را به طور مستقيم محاسبه نميكنيم. ابتدا سري فوريه تابع را به دست آورده، سپس از سري فوريه تبديل فوريه را به دست ميآوريم.

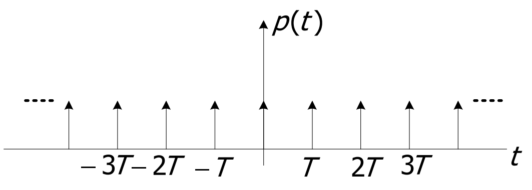
$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k e^{jk(\frac{2\pi}{T_0})t} \qquad , \quad x(t)=x(t+T_0)$$

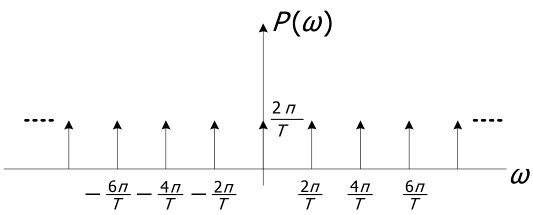
$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k e^{jk(\frac{2\pi}{T_0})t} \xrightarrow{f} X(j\omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}2\pi a_k\delta(\omega-k\frac{2\pi}{T_0})$$

مهمترين سيگنال متناوبي كه ميشناسيم قطار ضربه است. $p(t)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(t-mT)$

ابتدا سري فوريه تابع را به دست آورده:

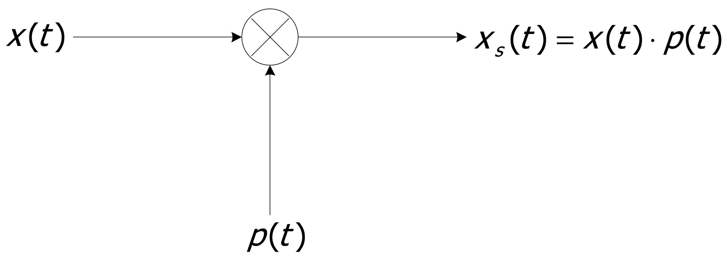
$$a_k=\frac{1}{T};\ p(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{T}e^{jk(\frac{2\pi}{T})t} \leftrightarrow P(j\omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{2\pi}{T}\delta(\omega-k\frac{2\pi}{T})$$





٤-٥- تئوري نمونهبرداري سيگنال

در اين روش سيگنال x(t) در قطار ضربه ضرب ميشود كه با توجه به خواص بيان شده براي تبديل فوريه، تبديل فوريه حاصلضرب دو تابع برابر با كانولوشن آنهاست.

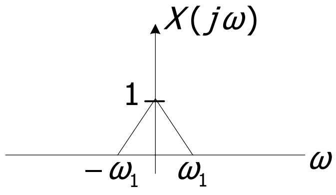


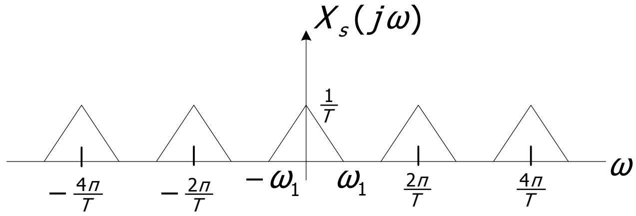
$$x_s(t) = x(t) \cdot p(t) \leftrightarrow X_s(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * P(j\omega)$$

$$p(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} e^{jk\frac{2\pi}{T}t} \leftrightarrow P(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{T} \delta(\omega - k\frac{2\pi}{T})$$

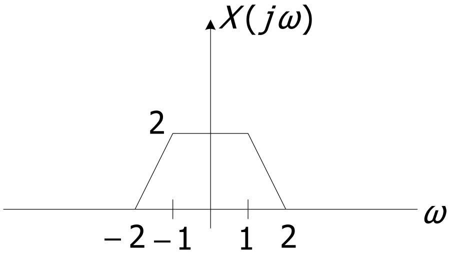
$$X_s(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * (\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{T} \delta(\omega - k\frac{2\pi}{T})) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} X(j(\omega - k\frac{2\pi}{T}))$$

رابطه بدست آمده بیان مي‌کند که در اثر نمونه‌برداري از سیگنال، تبدیل فوریه سیگنال نمونه‌برداري شده $x_s(t)$ برابر تبدیل فوریه سیگنال اولیه $X(j\omega)$ خواهد بود که البته در فواصل $\frac{2\pi}{T}$ عینا تکرار شده و دامنه آن نیز در $\frac{1}{T}$ ضرب شده است.



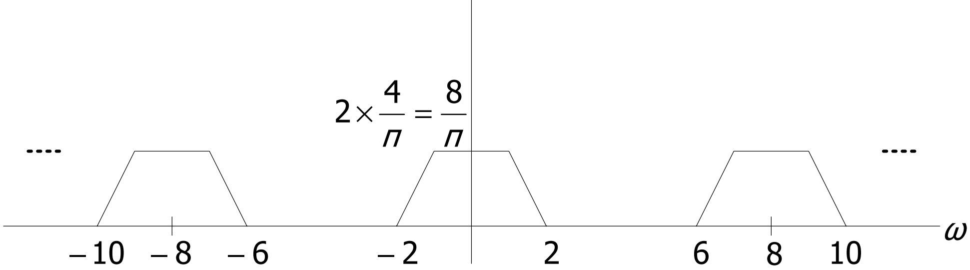


مثال ۷) مطلوب است $X_s(j\omega)$، اگر $X(j\omega)$ به صورت مقابل باشد.

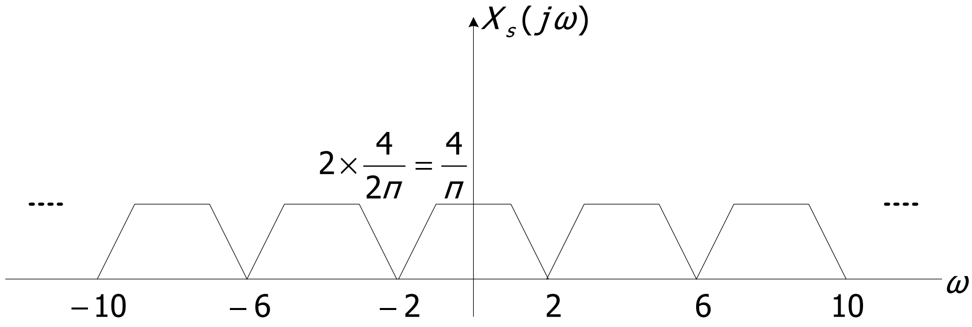


الف) $T = \frac{\pi}{4}$ ب) $T = \frac{\pi}{2}$ ج) $T = \frac{2\pi}{3}$

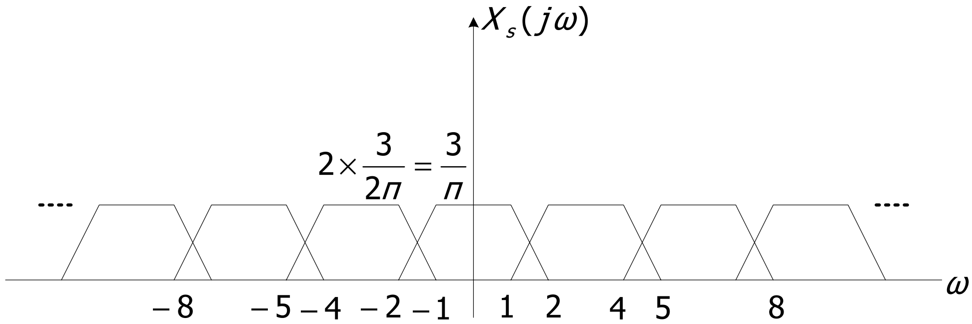
حل الف: $\frac{2\pi}{T} = 8$



حل ب: $\frac{2\pi}{T}=4$



حل ج: $\frac{2\pi}{T}=3$



٤-٦- خلاصه

قبل از بدست آوردن تبديل فوريه با استفاده از بايد شرايط وجود تبديل فوريه (ديريكله) را بررسي كرد.
در تبديل فوريه نيز با توجه به اندازه و فاز مي‌توان نوع فيلتر را تشخيص داد.
با دانستن خواص تبديل فوريه، برخي مسائل به روش ساده‌تري قابل حل است.

تابع $\cos\omega_0 t$ جزو توابعي است كه به كمك خواص، تبديل فوريه‌اش بدست مي‌آيد و با توجه به شكل حاصل، تبديل فوريه آن مطلقا حقيقي و زوج است. همچنين با توجه به شكل بدست آمده براي $\sin\omega_0 t$، تبديل فوريه آن مطلقا موهومي و فرد است.

اگر f(t) سيگنالي زوج و حقيقي باشد، $F(j\omega)$ مطلقا حقيقي و زوج و همچنين اگر f(t) سيگنالي فرد و حقيقي باشد، $F(j\omega)$ مطلقا موهومي و فرد است.

اگر سيگنالي متناوب باشد به اين معني است كه داراي سري فوريه است. تبديل فوريه سيگنال متناوب را به طور مستقيم محاسبه نمي‌كنيم. ابتدا سري فوريه تابع را به دست آورده، سپس از سري فوريه تبديل فوريه را به دست مي‌آوريم.

مهمترين سيگنال متناوبي كه مي‌شناسيم قطار ضربه است.

در نمونه‌برداري سيگنال، تابع x(t) در قطار ضربه ضرب مي‌شود. با توجه به خواص بيان شده براي تبديل فوريه، تبديل فوريه حاصلضرب دو تابع برابر با كانولوشن آنهاست.

فصل پنجم

تبدیل فوریه سیستم‌هاي زمان گسسته

۵-۱- تعريف تبديل فوريه زمان گسسته

$$x[n] \leftrightarrow X(j\Omega) \qquad , \qquad X(j\Omega) = X(j(\Omega + 2k\pi)) = X(j(\Omega + 2\pi))$$

$$X(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-jn\Omega} \qquad , \qquad x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega)e^{jn\Omega}d\Omega$$

۵-۲- خواص تبديل فوريه زمان گسسته

۵-۲-۱- خطي بودن

$$\begin{aligned} &x_1[n] \leftrightarrow X_1(j\Omega) \\ &\qquad\qquad \Rightarrow a x_1[n] + b x_2[n] \leftrightarrow a X_1(j\Omega) + b X_2(j\Omega) \\ &x_2[n] \leftrightarrow X_2(j\Omega) \end{aligned}$$

۵-۲-۲- شيفت زماني

$$x[n] \leftrightarrow X(j\Omega) \Rightarrow x[n - n_0] \leftrightarrow e^{-j\Omega_0 n} X(j\Omega)$$

۵-۲-۳- شيفت فركانسي

$$x[n] \leftrightarrow X(j\Omega) \Rightarrow x[n]e^{+j\Omega_0 n} \leftrightarrow X(j(\Omega - \Omega_0))$$

۵-۲-٤- مزدوج گيري (تقارن مزدوج)

$$x[n] \leftrightarrow X(j\Omega)$$
$$x[n]^* \leftrightarrow X^*(-j\Omega)$$

سيگنال حقيقي و زوج $x[n] \Rightarrow$ مطلقا حقيقي و زوج خواهد بود $X(j\Omega)$

سيگنال حقيقي و فرد $x[n] \Rightarrow$ مطلقا موهومي و فرد خواهد بود $X(j\Omega)$

۵-۲-۵- تفاضل گيري و مجموع گيري

$$\begin{aligned} &x[n] \leftrightarrow X(j\Omega) \\ &\qquad\qquad \Rightarrow x[n] - x[n-1] \leftrightarrow (1 - e^{-j\Omega n})X(j\Omega) \\ &x[n-1] \leftrightarrow e^{-j\Omega n} X(j\Omega) \end{aligned}$$

مثال ۱) تبدیل فوریه سیگنال y[n] را بدست آورید اگر:

$$Y(j\Omega)=? \quad , \quad y[n-1]=\sum_{m=-\infty}^{n-1}x[m] \quad , \quad y[n]=\sum_{m=-\infty}^{n}x[m]$$

$$\begin{cases} y[n]=\sum_{m=-\infty}^{n}x[m] \\ y[n-1]=\sum_{m=-\infty}^{n-1}x[m] \end{cases} \Rightarrow y[n]-y[n-1]=x[n]$$

$$y[n]\leftrightarrow Y(j\Omega)$$

$$y[n-1]\leftrightarrow e^{-j\Omega}Y(j\Omega)$$

$$x[n]=y[n]-y[n-1]\leftrightarrow X(j\Omega)=y(j\Omega)-e^{-j\Omega}y(j\Omega)$$

$$\Rightarrow Y(j\Omega)=\frac{1}{1-e^{-j\Omega}}X(j\Omega)$$

۵-۲-۶- تبدیل فوریه تابع پله و ضربه

$$u[n]=\sum_{m=-\infty}^{n}\delta[m]$$

$$\delta[n]\overset{f}{\leftrightarrow}1$$

$$u[n]\overset{f}{\leftrightarrow}\frac{1}{1-e^{-j\Omega}}+\pi\delta(\Omega)$$

۵-۲-۷- وارون زماني

$$x[n]\leftrightarrow X(j\Omega)\Rightarrow x[-n]\leftrightarrow X(-j\Omega)$$

۵-۲-۸- گسترش زماني

توجه: این خاصیت در گسسته برقرار نیست چون حاصل، يك سیگنال جدید است.

$$x[n]\leftrightarrow X(j\Omega)\Rightarrow x[kn]\leftrightarrow ?\times$$

۵-۲-۹- مشتق‌گيري در فركانس

$$x[n]\leftrightarrow X(j\Omega)\Rightarrow (jn)^{l}x[n]\leftrightarrow \frac{d^{l}X(j\Omega)}{d\Omega^{l}}$$

۵-۲-۱۰- ضرب و كانولوشن

$$x_1[n]\cdot x_2[n]\leftrightarrow X_1(j\Omega)*X_2(j\Omega)$$

$$x_1[n]*x_2[n] \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} X_1(j\Omega)\otimes X_2(j\Omega)$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X_1(j\Omega)X_2(j(\Omega-\theta))$$

تذکر: $\otimes$ (کانولوشن متناوب) با کانولوشن ساده برابر است با این تفاوت که فقط در یك دوره تناوب محاسبه مي‌شود.

۵-۲-۱۱- دوگاني

توجه: در سیستم‌هاي زمان گسسته خاصیت دوگاني وجود ندارد چون n گسسته است اما Ω پیوسته است.

مثال ۲)

$$\delta[n] \xrightarrow{f} 1$$
$$? \xleftarrow[F^{-1}]{} 2\pi\delta(\Omega)$$

۵-۲-۱۲- رابطه پارسوال

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} |X(j\Omega)|^2 d\Omega$$

۵-۳- تبدیل فوریه توابع متناوب

$$x[n]=x[n+N]$$
$$x[n]=\sum_{k=<N>} a_k e^{jk(\frac{2\pi}{N})n} \rightarrow \sum_{k=<N>} 2\pi a_k \delta(\Omega - k\frac{2\pi}{N})$$

مثال ۳) مطلوبست تبدیل فوریه توابع نمايي مختلط $e^{\pm j\Omega_0 n}$.

تبدیل فوریه این توابع با توجه به خواص محاسبه مي‌شوند

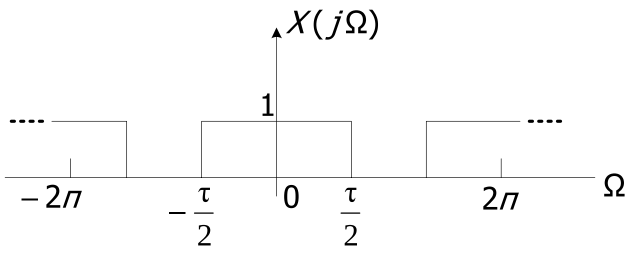
$$1 \rightarrow 2\pi\delta(\Omega)$$
$$e^{\pm j\Omega_0 n} \leftrightarrow 2\pi\delta(\Omega \mp \Omega_0)$$

مثال ٤) مطلوبست تبدیل فوریه قطار ضربه $p[n]=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(n-mN)$.

$$p[n]=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(n-mN)=\sum_{k=<N>}\frac{1}{N}e^{jk(\frac{2\pi}{N})n}\rightarrow P(j\Omega)=\sum_{k=<N>}\frac{2\pi}{N}\delta(\Omega-k\frac{2\pi}{N})$$

با توجه به متناوب بودن سيگنال قطار ضربه ابتدا سري فوريه آن را محاسبه و سپس تبديل فوريه سيگنال را محاسبه مي‌كنيم.

مثال ٥) اگر $X(j\Omega)=rect(\frac{\Omega}{\tau})$. مطلوبست x[n]=?

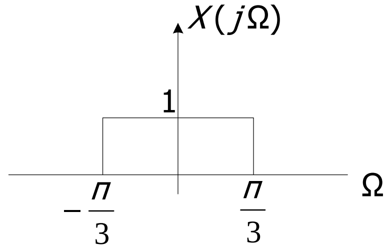


$$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(j\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega=\frac{1}{2\pi}\int_{\frac{-\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}e^{j\Omega n}d\Omega=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{jn}e^{j\Omega n}\Big|_{\frac{-\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}$$

$$x[n]=\frac{1}{j2n\pi}(e^{j\frac{\tau}{2}n}-e^{-j\frac{\tau}{2}n})=\frac{\sin(\frac{\tau}{2}n)}{\pi n}$$

$$\Rightarrow\frac{\sin(\frac{\tau}{2}n)}{\pi n}\rightarrow rect(\frac{\Omega}{\tau})$$

مثال ٦)



$$\frac{\sin(\frac{\pi}{3}n)}{\pi n}\rightarrow rect(\frac{\Omega}{\frac{2\pi}{3}})$$

مثال ٧) با توجه به پاسخ ضربه $h[n]=\frac{\sin(\frac{\pi}{6}n)}{\pi n}+\frac{\sin(\frac{\pi}{2}n)}{\pi n}$ مطلوبست:

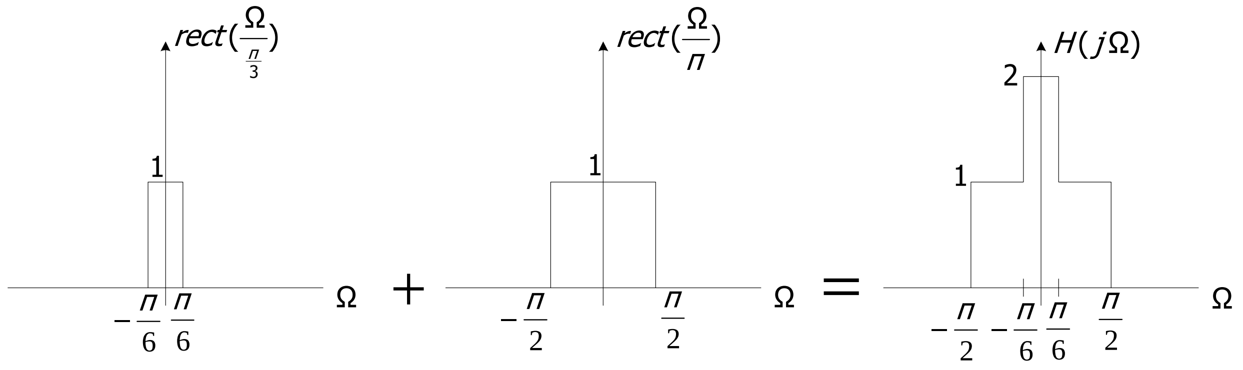
الف) پاسخ فركانسي سيستم $H(j\Omega)$.

ب) خروجي y[n] اگر ورودي $x[n]=2\sin(\frac{\pi}{8}n)-2\cos(\frac{\pi}{4}n)$.

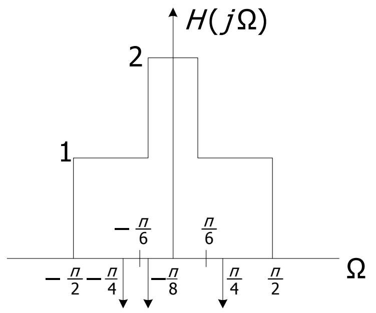
حل الف:

$$\frac{\sin(\frac{\tau}{2}n)}{n\pi} \leftrightarrow rect(\frac{\Omega}{\tau}) \Rightarrow \begin{cases} \tau=\frac{\pi}{3}; & \frac{\sin(\frac{\pi}{6}n)}{n\pi} \to rect(\frac{\Omega}{\frac{\pi}{3}}) \\ \tau=\pi; & \frac{\sin(\frac{\pi}{2}n)}{n\pi} \to rect(\frac{\Omega}{\pi}) \end{cases}$$ داریم

$$h[n]=\frac{\sin(\frac{\pi}{6}n)}{n\pi}+\frac{\sin(\frac{\pi}{2}n)}{n\pi} \Rightarrow H(j\Omega)=rect(\frac{\Omega}{\frac{\pi}{3}})+rect(\frac{\Omega}{\pi})$$



حل ب:



$$y[n]=x[n]*h[n] \Rightarrow Y(j\Omega)=X(j\Omega)\cdot H(j\Omega)$$

$$x[n]=\frac{1}{2j}e^{j\frac{\pi}{8}n}-\frac{1}{2j}e^{-j\frac{\pi}{8}n}-e^{j\frac{\pi}{4}n}-e^{-j\frac{\pi}{4}n}$$

$$X(j\Omega)=2\pi\times(\frac{1}{2j}\delta(\Omega-\frac{\pi}{8})-\frac{1}{2j}\delta(\Omega+\frac{\pi}{8})-\delta(\Omega-\frac{\pi}{4})-\delta(\Omega+\frac{\pi}{4}))$$

$$Y(j\Omega)=2\pi\times(\frac{1}{2j}H(j(\frac{\pi}{8}))\delta(\Omega-\frac{\pi}{8})-\frac{1}{2j}H(j(-\frac{\pi}{8}))\delta(\Omega+\frac{\pi}{8})-H(j(\frac{\pi}{4}))\delta(\Omega-\frac{\pi}{4})$$

$$-H(j(-\frac{\pi}{4}))\delta(\Omega+\frac{\pi}{4}))=2\pi(2\cdot\frac{1}{2j}\delta(\Omega-\frac{\pi}{8})-2\cdot\frac{1}{2j}\delta(\Omega+\frac{\pi}{8})-\delta(\Omega-\frac{\pi}{4})-\delta(\Omega+\frac{\pi}{4}))$$

$$y[n]=2\sin(\frac{\pi}{8}n)-2\cos(\frac{\pi}{4}n)$$

یادآوری:

$$x[n]=\alpha^n u[n] \leftrightarrow X(j\Omega)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n \cdot e^{-j\Omega n}=\frac{1}{1-\alpha e^{-j\Omega}} \quad ; \quad |\alpha|<1$$

$$x[n]=(-\alpha)^n u[n] \leftrightarrow X(j\Omega)=\sum_{n=0}^{\infty}(-\alpha)^n \cdot e^{-j\Omega n}=\frac{1}{1+\alpha e^{-j\Omega}} \quad ; \quad |\alpha|<1$$

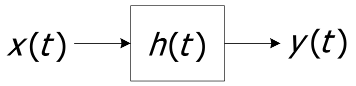
$$x[n]=\alpha^n u[-n] \leftrightarrow X(j\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{0}\alpha^n \cdot e^{-j\Omega n}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{0}(\alpha^{-1}e^{-j\Omega})^n=\frac{1}{1-\alpha^{-1}e^{-j\Omega}} \quad ; \quad |\alpha^{-1}|<1 \text{ یا } |\alpha|>1$$

$$x[n]=(-\alpha)^n u[-n] \leftrightarrow X(j\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{0}(-\alpha)^n \cdot e^{-j\Omega n}$$

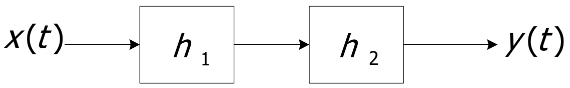
$$=\sum_{n=-\infty}^{0}(-\alpha^{-1}e^{j\Omega})^n=\frac{1}{1+\alpha^{-1}e^{j\Omega}} \quad ; \quad |\alpha^{-1}|<1 \text{ یا } |\alpha|>1$$

٥-٤- سيستم‌هاي LTI و تبديل فوريه زمان پيوسته



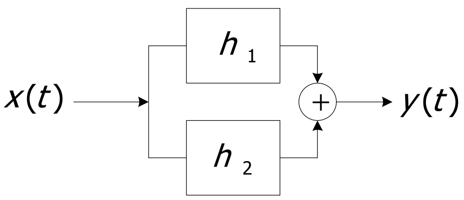
$$y(t) = x(t) * h(t)$$
$$Y(j\omega) = X(j\omega) \cdot H(j\omega)$$

اتصال سري:



$$y(t) = x(t) * (h_1(t) * h_2(t))$$
$$h(t) = h_1(t) * h_2(t)$$
$$H(j\omega) = H_1(j\omega) \cdot H_2(j\omega)$$

اتصال موازي:



$$y(t) = x(t) * (h_1(t) + h_2(t))$$
$$h(t) = h_1(t) + h_2(t)$$
$$H(j\omega) = H_1(j\omega) + H_2(j\omega)$$

مثال ١) تبديل فوريه تابع $h(t) = \dfrac{\sin(t) \cdot \sin(\frac{t}{2})}{\pi t^2}$ را بدست آوريد.

$$h(t) = \frac{\sin(t)}{\pi t} \cdot \frac{\sin(\frac{t}{2})}{t} = \frac{\sin(\frac{t}{\pi} \cdot \pi)}{\pi \cdot \frac{t}{\pi} \cdot \pi} \cdot \frac{\sin(\frac{t}{2\pi} \cdot \pi)}{\frac{t}{2\pi} \cdot 2\pi} = \frac{1}{2\pi} \cdot \mathrm{sinc}(\frac{t}{\pi}) \cdot \mathrm{sinc}(\frac{t}{2\pi})$$

$$\xrightarrow{\text{داريم}} \begin{cases} \mathrm{rect}(\frac{t}{\tau}) \leftrightarrow a\,\mathrm{sinc}(\frac{\omega}{\pi} \cdot \frac{\tau}{2}) \\ \tau\,\mathrm{sinc}(\frac{t}{\pi} \cdot \frac{\tau}{2}) \leftrightarrow 2\pi\,\mathrm{rect}(\frac{\omega}{\tau}) \end{cases}$$

$$\tau = 2 \Rightarrow 2\text{sinc}(\frac{t}{\pi}) \rightarrow 2\pi\, rect(\frac{\omega}{2})$$

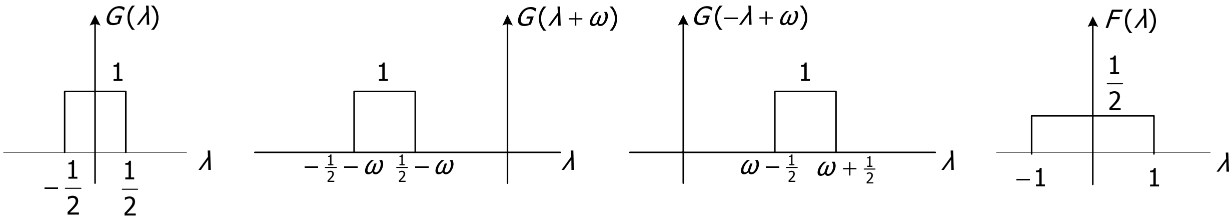
$$\tau = 1 \Rightarrow 1\,\text{sinc}(\frac{t}{2\pi}) \rightarrow 2\pi\, rect(\frac{\omega}{1})$$

$$\xrightarrow{\text{داريم}} f_1(t)\cdot f_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi}F_1(j\omega)\cdot F_2(j\omega)$$

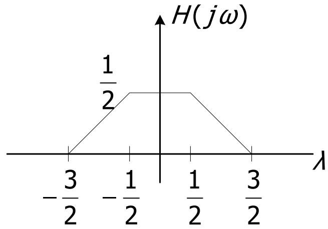
$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi}\text{sinc}(\frac{t}{\pi})\cdot \text{sinc}(\frac{t}{2\pi}) \rightarrow \frac{1}{(2\pi)\,2}(\pi\, rect(\frac{\omega}{2}) * 2\pi\, rect(\frac{\omega}{1})) = \underbrace{\frac{1}{2}rect(\frac{\omega}{2})}_{F(\omega)} * \underbrace{rect(\frac{\omega}{1})}_{G(\omega)}$$

$$H(\omega) = F(\omega) * G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)G(\omega-\lambda)d\lambda$$

از روش گرافيكي حل مي‌كنيم:



.....



مثال ٢) ورودي سيستم LTI و پاسخ ضربه سيستم در ذيل داده شده است. مطلوبست خروجي سيستم؟

$$x(t) = \frac{\sin(\omega_i t)}{\pi t} \quad , \quad h(t) = \frac{\sin(\omega_c t)}{\pi t}$$

$$x(t) = \frac{\sin(\omega_i t)}{\pi t} = \frac{\omega_i}{\pi}\text{sinc}(\frac{t}{\pi}\cdot\omega_i) \quad , \quad h(t) = \frac{\sin(\omega_c t)}{\pi t} = \frac{\omega_c}{\pi}\text{sinc}(\frac{t}{\pi}\cdot\omega_c)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \tau = 2\omega_i \Rightarrow 2\omega_i \text{sinc}(\frac{t}{\pi}\cdot\omega_i) \xrightarrow{f} 2\pi\, rect(\frac{\omega}{2\omega_i}) \\ \tau = 2\omega_c \Rightarrow 2\omega_c \text{sinc}(\frac{t}{\pi}\cdot\omega_c) \xrightarrow{f} 2\pi\, rect(\frac{\omega}{2\omega_c}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow Y(j\omega) = X(j\omega)\cdot H(j\omega) = rect(\frac{\omega}{2\omega_i})\cdot rect(\frac{\omega}{2\omega_c})$$

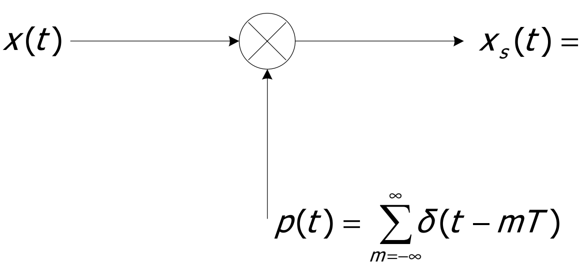
$$Y(j\omega) = \begin{cases} rect(\frac{\omega}{2\omega_i}) & ; \quad \omega_i < \omega_c \Rightarrow y(t) = \frac{\omega_i}{\pi}\operatorname{sinc}(\frac{t}{\pi}\cdot\omega_i) \\ rect(\frac{\omega}{2\omega_c}) & ; \quad \omega_i > \omega_c \Rightarrow y(t) = \frac{\omega_c}{\pi}\operatorname{sinc}(\frac{t}{\pi}\cdot\omega_c) \end{cases}$$

مثال ۳) اگر $p(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(t-mT)$ باشد، مطلوبست $X_s(j\omega)$ با استفاده از تئوري نمونه‌برداري؟

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{T}e^{jk(\frac{2\pi}{T})t} \quad ; \quad p(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{2\pi}{T}\delta(\omega - k\frac{2\pi}{T})$$

$$X_s(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{T}X(j(\omega - k\frac{2\pi}{T}))$$

مثال ٤) از سيگنال $x(t) = 2 + \cos(50\pi t)$ تحت شرايط زير نمونه‌برداري مي‌شود. مطلوبست تبديل فوريه سيگنال نمونه‌برداري شده $X_s(j\omega)$ ؟

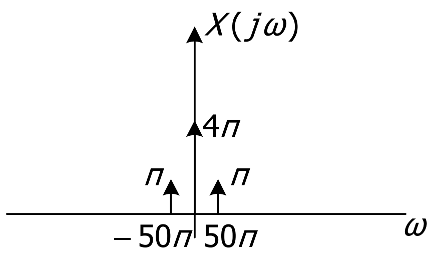


$$x_s(t) = x(t)\cdot p(t) \Rightarrow X_s(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{T}X(j(\omega - k\frac{2\pi}{T}))$$

الف) $T = \frac{1}{100}$

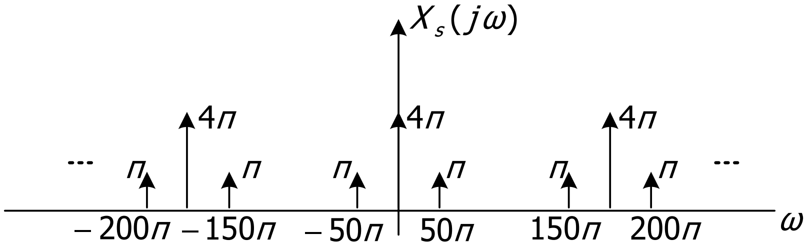
ب) $T = \frac{1}{40}$

$$x(t) = 2 + \cos(50\pi t) \Rightarrow X(j\omega) = 4\pi\delta(\omega) + \pi\delta(\omega + 50\pi) + \pi\delta(\omega - 50\pi)$$



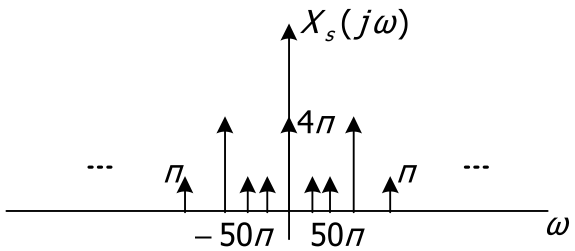
$$\frac{2\pi}{\frac{1}{100}} = 200\pi$$

حل الف:



$$\frac{2\pi}{\frac{1}{40}} = 80\pi$$

حل ب:



۵-۴-۱- سيستم‌هاي LTI با معادلات ديفرانسيل

بدست آوردن h(t) داراي اهميت زيادي است چون نشان دهنده رفتار تابع است.

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{N} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} \Rightarrow H(j\omega) = \frac{\sum_{k=0}^{N} b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k}$$

براي حل معادلات ديفرانسيل دو راه وجود دارد:

۱) ابتدا h(t) را بدست آورده و سپس $H(j\omega)$ كه تبديل فوريه h(t) است را بدست مي‌آوريم.

۲) ابتدا $H(j\omega)$ را بدست آورده و سپس h(t) را با عكس تبديل فوريه گرفتن از $H(j\omega)$ بدست مي‌آوريم.

مثال ۵) پاسخ سيستم LTI زير به ورودي $x(t) = (e^{-t} + e^{-3t})u(t)$ داده شده است، $y(t) = (2e^{-t} + 2e^{-4t})u(t)$

الف) مطلوبست پاسخ فركانسي سيستم $H(j\omega)$

ب) پاسخ ضربه h(t)

ج) معادله ديفرانسيل ارتباط دهنده ورودي و خروجي

$$e^{-at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{a+j\omega}$$

حل الف:

$$X(j\omega)=\frac{1}{1+j\omega}+\frac{1}{3+j\omega} \quad , \quad Y(j\omega)=\frac{2}{1+j\omega}-\frac{2}{4+j\omega}$$

$$H(j\omega)=\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}=\frac{2\left(\frac{3}{(1+j\omega)(4+j\omega)}\right)}{\frac{4+2j\omega}{(1+j\omega)(3+j\omega)}} \Rightarrow H(j\omega)=\frac{3(3+j\omega)}{(2+j\omega)(4+j\omega)}$$

حل ب:

$$H(j\omega)=\frac{\frac{3}{2}}{2+j\omega}+\frac{\frac{3}{2}}{4+j\omega} \Rightarrow h(t)=\frac{3}{2}e^{-2t}u(t)+\frac{3}{2}e^{-4t}u(t)$$

حل ج:

$$\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}=\frac{9+3(j\omega)}{(j\omega)^2+6(j\omega)+8}$$

$$\Rightarrow (j\omega)^2Y(j\omega)+6(j\omega)Y(j\omega)+8Y(j\omega)=9X(j\omega)+3(j\omega)X(j\omega)$$

با توجه به خاصيت مشتق زماني رابطه زير بدست مي‌آيد:

$$y''(t)+6y'(t)+8y(t)=3x'(t)+9x(t)$$

مثال ٦) ورودي و خروجي يك سيستم LTI با معادله $y''(t)+6y'(t)+8y(t)=2x(t)$ به هم مربوط مي‌شوند. مطلوبست:

الف) پاسخ ضربه سيستم h(t)

ب) اگر ورودي $x(t)=te^{-2t}u(t)$ خروجي را بدست آوريد.

حل الف:

$$(j\omega)^2Y(j\omega)+6(j\omega)Y(j\omega)+8Y(j\omega)=2X(j\omega)$$

$$H(j\omega)=\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}=\frac{2}{(j\omega)^2+6(j\omega)+8}=\frac{2}{(j\omega+2)(j\omega+4)}=\frac{1}{(j\omega+2)}+\frac{-1}{(j\omega+4)}$$

$$\Rightarrow h(t)=e^{-2t}u(t)-e^{-4t}u(t)$$

حل ب: چون x(t) و h(t) هر دو توابع پيچيده‌اي هستند به جاي استفاده از كانولوشن مي‌توان ابتدا تبديل فوريه هر دو را بدست آورد سپس با عكس تبديل فوريه گرفتن از $Y(j\omega)$ پاسخ زماني سيستم y(t) را بدست آورد.

$$e^{-2t}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{2+j\omega}$$

$$(jt)e^{-2t}u(t) \leftrightarrow \frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{2+j\omega}\right) = \frac{-j}{(2+j\omega)^2}$$

$$x(t) = te^{-2t}u(t) \leftrightarrow X(j\omega) = \frac{1}{(2+j\omega)^2} \qquad ; \qquad H(j\omega) = \frac{2}{(j\omega+2)(j\omega+4)}$$

$$Y(j\omega) = X(j\omega)\cdot H(j\omega)$$

$$Y(j\omega) = \frac{1}{(2+j\omega)^2}\left(\frac{2}{(2+j\omega)(4+j\omega)}\right) = \cdots$$

به روش تجزيه كسرها $Y(j\omega)$ بدست مي‌آيد و با استفاده از عكس تبديل فوريه y(t) محاسبه خواهد شد.

مثال ۷) يك سيستم LTI و علي با پاسخ فركانسي $H(j\omega) = \frac{1}{3+j\omega}$ را در نظر بگيريد. براي يك ورودي خاص x(t) مشاهده مي‌شود كه خروجي به فرم $y(t) = e^{-3t}u(t) - e^{-4t}u(t)$ است.

مطلوبست ورودي x(t) ؟

$$Y(j\omega) = \frac{1}{3+j\omega} - \frac{1}{4+j\omega} = \frac{1}{(3+j\omega)(4+j\omega)} \quad ; \quad H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} \Rightarrow X(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{H(j\omega)}$$

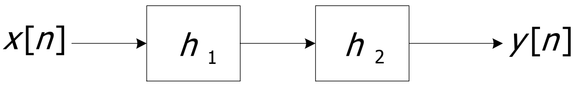
$$X(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{H(j\omega)} = \frac{\dfrac{1}{(3+j\omega)(4+j\omega)}}{\dfrac{1}{(3+j\omega)}} = \frac{1}{(4+j\omega)} \leftrightarrow x(t) = e^{-4t}u(t)$$

۵-۵- سيستم‌هاي LTI و تبديل فوريه زمان گسسته

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n]$$

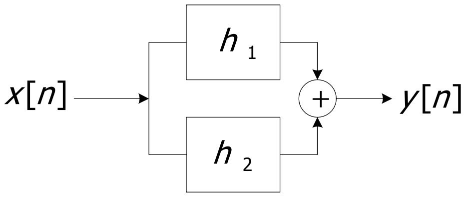
$$y[n] = x[n] * h[n]$$
$$Y(j\Omega) = X(j\Omega)\cdot H(j\Omega)$$

اتصال سري:



$$y[n] = x[n] * (h_1[n] * h_2[n])$$
$$h[n] = h_1[n] * h_2[n]$$
$$H(j\Omega) = H_1(j\Omega) \cdot H_2(j\Omega)$$

اتصال موازي:



$$y[n] = x[n] * (h_1[n] + h_2[n])$$
$$h[n] = h_1[n] + h_2[n]$$
$$H(j\Omega) = H_1(j\Omega) + H_2(j\Omega)$$

۵-۵-۱- سیستم‌هاي LTI با معادلات تفاضلي

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{N} b_k x[n-k]$$

$$H(j\Omega) = \frac{Y(j\Omega)}{X(j\Omega)} \Rightarrow H(j\Omega) = \frac{\sum_{k=0}^{N} b_k e^{-jk\Omega}}{\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-jk\Omega}}$$

مثال ۸) سیستم LTI زمان گسسته علي توصيف شده با معادله تفاضلي زير را در نظر بگيريد:

$$y[n] + y[n-1] + \frac{1}{4} y[n-2] = x[n-1] - \frac{1}{2} x[n-2]$$

مطلوبست:

الف) پاسخ ضربه سيستم h[n].

ب) پاسخ ضربه سيستم معكوس $h_I[n]$.

حل الف:

$$Y(j\Omega)+e^{-j\Omega}Y(j\Omega)+\frac{1}{4}e^{-j2\Omega}Y(j\Omega)=e^{-j\Omega}X(j\Omega)-\frac{1}{2}e^{-j2\Omega}X(j\Omega)$$

$$\Rightarrow(1+e^{-j\Omega}+\frac{1}{4}e^{-j2\Omega})Y(j\Omega)=(e^{-j\Omega}-\frac{1}{2}e^{-j2\Omega})X(j\Omega)$$

$$H(j\Omega)=\frac{Y(j\Omega)}{X(j\Omega)}=\frac{e^{-j\Omega}(1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega})}{(1+\frac{1}{2}e^{-j\Omega})^2}=\frac{e^{-j\Omega}(1-(\frac{1}{2}e^{-j\Omega}+1-1))}{(1+\frac{1}{2}e^{-j\Omega})^2}$$

$$=\frac{e^{-j\Omega}-e^{-j\Omega}(1+\frac{1}{2}e^{-j\Omega})+e^{-j\Omega}}{(1+\frac{1}{2}e^{-j\Omega})^2}=2e^{-j\Omega}\cdot\frac{1}{(1+\frac{1}{2}e^{-j\Omega})^2}-\frac{e^{-j\Omega}}{(1+\frac{1}{2}e^{-j\Omega})^2}$$

$$\Rightarrow h[n]=2(-2n\,(-\frac{1}{2})^n u[n])-(-\frac{1}{2})^{n-1}u[n-1]$$

حل ب:

$$h[n]*h_I[n]=\delta[n]\leftrightarrow H(j\Omega)\cdot H_I(j\Omega)=1$$

$$H(j\Omega)=\frac{e^{-j\Omega}(1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega})}{(1+\frac{1}{2}e^{-j\Omega})^2}$$

$$H_I(j\Omega)=\frac{(1+\frac{1}{2}e^{-j\Omega})^2}{e^{-j\Omega}(1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega})}=\frac{e^{j\Omega}(1+\frac{1}{4}e^{-j2\Omega}+e^{-j\Omega})}{(1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega})}=\frac{e^{j\Omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}+\frac{\frac{1}{4}e^{-j\Omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}+\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}$$

$$h_I[n]=(\frac{1}{2})^{n+1}u[n+1]+\frac{1}{4}(\frac{1}{2})^{n-1}u[n-1]+(\frac{1}{2})^n u[n]$$

مثال ۹) در يك سيستم LTI و علي با توجه به پاسخ ضربه داده شده مطلوبست:

$$h[n]=a^{|n|}\quad,\quad 0<a<1$$

الف) پاسخ فركانسي $H(j\Omega)$

ب) نوع فيلتر.

حل الف:

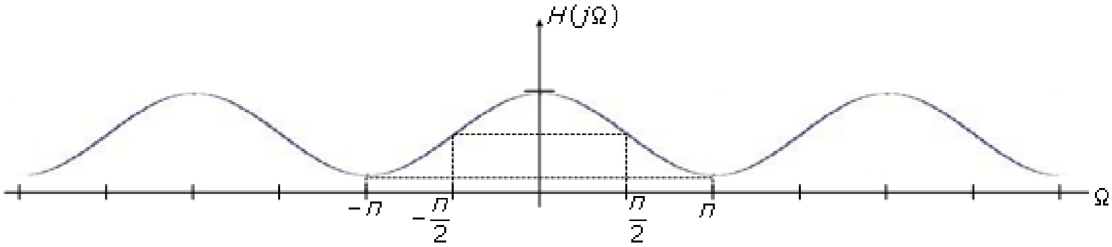
$$H(j\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{-1}a^{-n}\cdot e^{-j\Omega n}+\sum_{n=0}^{\infty}a^n\cdot e^{-j\Omega n}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(a\,e^{j\Omega})^n+\sum_{n=0}^{\infty}(a\,e^{-j\Omega})^n=\frac{a\,e^{j\Omega}}{1-a\,e^{j\Omega}}+\frac{1}{1-a\,e^{-j\Omega}}=\frac{a\,e^{j\Omega}(1-a\,e^{-j\Omega})+1-a\,e^{j\Omega}}{(1-a\,e^{j\Omega})(1-a\,e^{-j\Omega})}$$

$$=\frac{1-a^2}{a^2+1-ae^{-j\Omega}-ae^{j\Omega}}=\frac{1-a^2}{1+a^2-2a\cos(\Omega)}$$

حل ب:

$$H(j\Omega) = \begin{cases} \dfrac{1-a^2}{(1-a)^2} = \dfrac{1+a}{1-a} & \Omega = 0 \\ \dfrac{1-a^2}{(1-a)^2} & \Omega = \pm\dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{1-a^2}{(1-a)^2} = \dfrac{1-a}{1+a} & \Omega = \pm\pi \end{cases}$$



با توجه به شکل بدست آمده نوع فیلتر پایین‌گذز LPF است.