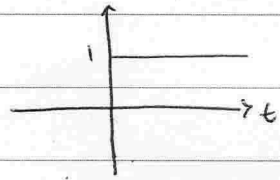
$$u(t) = \begin{cases} 1 & t>0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$$

* در صفر دارای ناپیوستگی است.

از تابع فوق می‌خواهیم مشتق بگیریم یعنی تغییرات تابع را در حالت ناپیوسته بررسی نماییم.

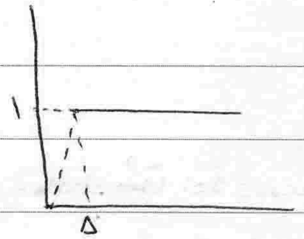


$$\delta(t) \triangleq \frac{du(t)}{dt} \Rightarrow u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau$$

جهت محاسبه $\delta(t)$ ابتدا تابع زیر را در نظر می‌گیریم.

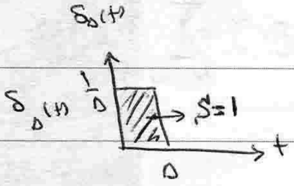
مشتق تابع $u_\Delta(t)$ را برابر $\delta_\Delta(t)$ قرار می‌دهیم

$$\delta_\Delta(t) = \frac{d_\Delta u(t)}{dt}$$



$$u(t) = \lim_{\Delta \to 0} u_\Delta(t)$$

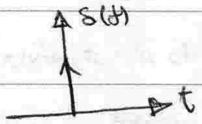
$$\delta_\Delta(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta} & 0 \leq t \leq \Delta \\ 0 & o.w \end{cases}$$



← بنابراین $\delta(t)$ تابعی است که مساحت زیر منحنی آن برابر واحد است.

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau = u(t) = 1$$

نمایش $\delta(t)$ =



$$\int_{-\infty}^{t} k\delta(t)dt = ku(t)$$

$$\boxed{\int_a^b f(t)\delta(t-\alpha) = f(\alpha)^{u(t)} \quad a \leq \alpha \leq b}$$

$$\boxed{x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t)}$$

$$x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0)$$

$$\int_a^b f(t)\delta(t-t_0)dt = \begin{cases} f(t_0) & a \leq t_0 \leq b \\ 0 & o.w \end{cases}$$

تمرین :

۱. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\cos t} \delta(t-\pi)\, dt$ ۳. $\int_{1}^{100} \log t \; \delta(t-10)\, dt$

۲. $\int_{1}^{\infty} e^{-x^2} \delta(x) dx$ ۴. $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(1-\pi t) \cos(\frac{1}{t}) dt$

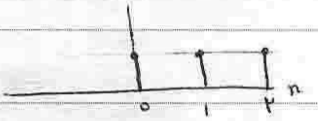
$*\; \delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \delta(a(t-t_0))dt = \frac{1}{|a|} f(t_0)$$

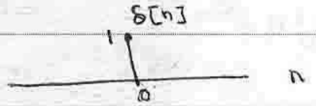
Discrete

گسسته‌ها: unit impulse

$$u[n] \triangleq \begin{cases} 1 & n = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & n<0 \end{cases}$$



$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & n=0 \\ 0 & \text{o.w یا } n\neq 0 \end{cases}$$



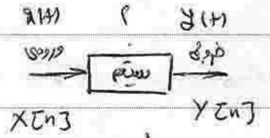
← در گسسته به جای مشتق اختلاف و به جای انتگرال Σ داریم.

$$\boxed{\begin{array}{l} \delta[n] = u[n]-u[n-1] \\ u[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} \delta[m] \qquad u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k] \end{array}}$$

$\delta[n] = u[n]-u[n-1]$

$u[n] = \sum \delta[m]$

* سیستم :



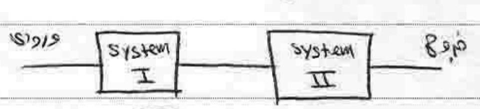
یک سیستم را می‌توانیم یک پروسه در نظر بگیریم که بر روی سیگنال ورودی تغییراتی را به وجود می‌آورد.

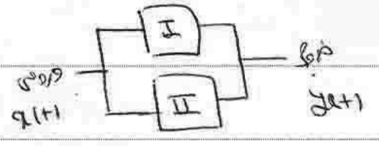
یک سیستم دارای مرزهای محدود می‌باشد و می‌تواند دارای یک یا چند ورودی باشد و متقابلاً یک یا چند خروجی داشته باشد. سیستم را در حالت پیوسته و ناپیوسته تحلیل می‌کنیم. در حالت پیوسته ورودی سیستم x(t) و خروجی y(t) و در حالت ناپیوسته ورودی X[n] خروجی Y[n] را ایجاد می‌کند.

* ارتباط سیستم :

موازی سری

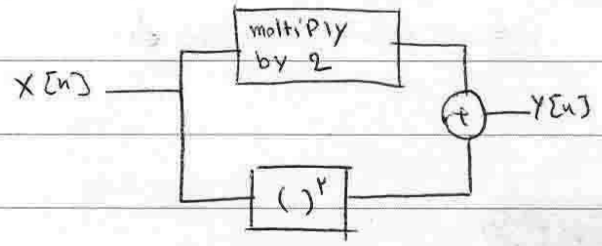
سیستم می‌تواند به طور [illegible] cascade یا پارالل (Parallel) باشد.





iman

مثال) $Y[n] = (۲. X[n] - X[n]^{۲})$



* خواص سیستم :

۱- سیستم بدون حافظه و با حافظه

یک سیستم بدون حافظه را memory less می‌گوییم اگر خروجی ~~[illegible]~~ سیستم برای هر مقدار متغیر مستقل یعنی t یا n فقط به ورودی سیستم در همان لحظه‌ی t یا n بستگی داشته باشد. در غیر این صورت سیستم را با حافظه می‌گوییم.

مثال) $Y(t) = ۴. X(t)$ بدون حافظه

$Y[n] = X[n]$ بدون حافظه $y(t) = x(t+۲)$ با حافظه

$y(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} x(t)\,dt$ با حافظه $\delta[n] = u[n] - u[n-1]$

← نشان دهنده‌ی حافظه است.

* Invertibility

یک سیستم را Invertible می‌گوییم یا دارای قابلیت برگردان باشد که یک ورودی، یک خروجی مشخص را ایجاد کند. یا به عبارت دیگر با مشاهده‌ی خروجی بتوانیم بگوییم دقیقاً از چه منبع ورودی حاصل شده است. (جواب یک به یک باشد حتماً)

$y(t) = ۲x(t) \rightarrow$ Invertible

~~[illegible]~~ $Y[n] = ۳. x[n]^{۲}$ نیست

* causal یا علّی

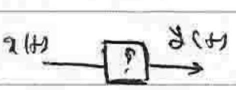
سیستمی را کازال یا علّی گوییم که خروجی در هر لحظه بستگی به ورودی در همان لحظه‌ی حاضر گذشته داشته باشد.

$Y[n] = X[n] - X[n+۲]$ علّی نیست ← عدد می‌دهیم به زمان اگر زمان های خروجی از ورودی بیشتر بود علّی نیست

$y(t) = x(t) + x(t-V_0)$ علّی است

* سیستم T.I مستقل از زمان :

با شیفت زمانی ورودی، خروجی هم به همان مقدار شیفت داده شود. یعنی اگر :



$x(t) \rightarrow y(t)$

$x(t-t_0) \rightarrow y(t-t_0)$

« اندازه‌ی شیفت t_0 »

$X[n] \rightarrow Y[n]$

$X[n-n_0] \rightarrow Y[n-n_0)$

اندازه‌ی شیفت زمانی n_0

«همیشه شکل را بکشیم» ✓

مثال)

$y(t) = \sin(x(t))$ $x(t) \longrightarrow \boxed{?} \longrightarrow y(t)$

← دو ورودی به سیستم به شکل زیر می‌دهیم.

$x_1(t)$ $x_2(t) = x_1(t-t_0)$

$$y_1(t) = \sin(x_1(t)) \quad (1)$$

$$y_2(t) = \sin(x_2(t)) \rightarrow y_2(t) = \sin(x_1(t-t_0)) \quad (2)$$

حال در معادله‌ی شماره‌ی (۱)، قرار می‌دهیم $(t \to t-t_0)$

$$y_1(t-t_0) = \sin(x_1(t-t_0)) \quad (3)$$

طرف راست معادله‌ی (۳) و (۲) را مقایسه می‌کنیم و مشاهده می‌کنیم.

$$\sin(x_1(t-t_0)) = \sin(x_1(t-t_0)) \Rightarrow \boxed{y_2(t) = y_1(t-t_0)} \Rightarrow$$ **T.I است**

مثال)

$y[n] = n\,x[n]$ $x[n] \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow y[n]$

$y_1[n] = n\,x_1[n]$ (1) به ازای $x_1[n]$

$y_2[n] = n\,x_2[n]$ (2) به ازای $x_2[n]$

$x_2[n] = x_1[n-n_0]$

$\Rightarrow y_2[n] = n\,x_1[n-n_0]$

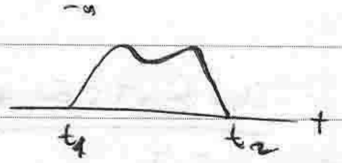
به معادله‌ی (۱) برمی‌گردیم و به جای $n \to n-n_0$.

$\Rightarrow y_1[n-n_0] = (n-n_0)\,x_1[n-n_0]$ $\Rightarrow y_1[n-n_0] \neq y_2[n]$ $\Rightarrow$ ((T.I نیست))

ارتوگنالیتی: (ORthogonality).

سیگنال $f(t)$ را در نظر بگیرید که Time-limited باشد و دارای انرژی محدود است.

$E \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\,dt < \infty$ برای هر مقدار متغیر مستقل (t) یک مقدار برای $f(t)$ (متغیر وابسته) وجود دارد.



ما می‌خواهیم سیگنال $f(t)$ را بر حسب مجموعه‌ای به نام $\Phi_n(t)$ بنویسیم.

$$f(t) = \sum_n f_n \Phi_n(t)$$

که مقادیر f_n مستقل از زمان باشند و هدف ما این است که $\Phi_n(t)$ و f_n را به دست آوریم.

تعریف می‌کنیم $\phi_1(t)$ و $\phi_2(t)$ نسبت به هم ارتوگنال هستند اگر در فاصله‌ی (t_1, t_2) :

$$\int_{t_1}^{t_2} \phi_1(t)\,\phi_2^*(t)\,dt = 0$$

مجموعه‌ی $\phi_n(t)$ را در فاصله‌ی (t_1, t_2) نسبت به هم ارتوگنال می‌گوییم اگر :

$$\int_{t_1}^{t_2} \phi_n(t)\,\phi_m^*(t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \phi_n^*(t)\,\phi_m(t)\,dt = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ k_n & m = n \end{cases}$$

ارتو نرمال

اگر مقدار $k_n = 1$ باشد $\phi_n(t)$ ها نسبت به هم ~~ارتوگنال~~ می‌گویند.

$$k_n = \int_{t_1}^{t_2} |\phi_n(t)|^2\,dt$$

در صورت داشتن چنین مجموعه‌ای آن را مجموعه‌ی پایه می‌گویند. « Basic function »

« $k_n^{1/2}$ را نُرم مجموعه می‌نامند. »

* حال می‌خواهیم سیگنال $f(t)$ با انرژی محدود را در فاصله‌ی (t_1, t_2) برحسب مجموعه‌ای از $\phi_n(t)$ بتوسیع. یعنی $f(t)$ را به شکل مجموعه‌ی خطی از $\phi_n(t)$ نمایش دهیم.

$$f(t) = \sum_{n=1}^{N} F_n \phi_n(t) = F_1\phi_1(t) + F_2\phi_2(t) + \cdots$$

خطای سیگنال : $E_n(t) = f(t) - \sum^{N} F_n \phi_n(t)$

تعریف انرژی خطای سیگنال:

$$\int_{t_1}^{t_2} |E_N(t)|^2\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[|f(t) - \sum_n F_n \phi_n(t)|^2 \right] dt$$

⊘ نظر به اینکه طرف چپ معادله مقداری مثبت است لذا طرف راست نیز مثبت می‌باشد و حداقل آن زمانی صورت می‌گیرد که انتگرال (t_1, t_2) به طرف صفر میل کند. می‌خواهیم با انتخاب مناسب ~~FF~~ F_n و نهایتاً تعداد N انتگرال سمت راست را min کنیم.

$$\int_{t_1}^{t_2} |E_n(t)|^2\,dt = \int_{t_1}^{t_2} |f(t)|^2\,dt - \sum_{n=1}^{N} \left[F_n^* \int_{t_1}^{t_2} f(t)\phi_1^*(t)\,dt + F_n \int_{t_1}^{t_2} f^*(t)\phi_n(t)\,dt - |F_n|^2 k_n \right]$$

$$\boxed{\left(f(t) - \sum_{n=1}^{N} F_n \phi_n(t)\right)\left(f^*(t) - \sum_{n=1}^{N} F_n^* \phi_n^*(t)\right)}$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} |f(t)|^2 dt - \sum_{n=1}^{N} \left\{ F_n \int_{t_1}^{t_2} f^*(t)\, \phi_n(t)\, dt + F_n^* \int_{t_1}^{t_2} f(t)\phi_n(t)\, dt - K_n |F_n|^2 \right\}$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} |E_N(t)|^2 dt = \int_{t_1}^{t_2} |f(t)|^2 dt + \sum_{n=1}^{N} \left[\left| k_n^{1/2} F_n - \frac{1}{k_n^{1/2}} \int_{t_1}^{t_2} f(t)\, \phi_n^*(t)\, dt \right|^2 - \left| \frac{1}{k_n^{1/2}} \int_{t_1}^{t_2} f(t)\phi_n^*(t)\, dt \right| \right]$$

تمام سه جمله‌ی سمت راست مثبت است و تنها ترمی که به F_n بستگی دارد ترم دوم است که مقدار حداقل زمانی اتفاق می‌افتد که صفر شود.

$$k_n^{1/2} F_n - \frac{1}{k_n^{1/2}} \int_{t_1}^{t_2} f(t)\, \phi_n^*(t)\, dt = 0$$

و در حاصل خواهیم داشت :

$$\boxed{F_n = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t)\, \phi_n^*(t)\, dt}{k_n} \quad \text{یا} \quad F_n = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t)\, \phi_n^*(t)\, dt}{\int_{t_1}^{t_2} |\phi_n(t)|^2 dt}}$$

* ترم اول انرژی سیگنال است که دارای مقدار محدود می‌باشد و در حالت ایده‌آل :

$$\int_{t_1}^{t_2} |B(t)|^2 dt < \infty$$

$$\lim_{N \to \infty} \int_{t_1}^{t_2} |\varepsilon_N(t)|^2 dt = 0$$

* که در این صورت اگر چنین مجموعه‌ای وجود داشته باشد آن را مجموعه‌ی کامل می‌گوییم.

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2} |f(t)|^2 dt = \sum_{n=1}^{\infty} |F_n|^2 k_n}$$

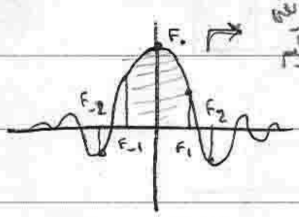
$\int_{t_1}^{t_2}$

$$\boxed{f(t) = \sum F_n \phi_n(t) \qquad F_n = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t)\, \phi_n^*(t)\, dt}{\int_{t_1}^{t_2} |\phi_n(t)|^2\, dt}}$$

$$k_n = \int_{t_1}^{t_2} |\phi_n(t)|^2\, dt \qquad \int_{t_1}^{t_2} |\overset{\text{خطا}}{\varepsilon_N}(t)|^2\, dt = \int_{t_1}^{t_2} |f(t)|^2\, dt - \sum_{n}^{N} |F_n|^2 k_n$$

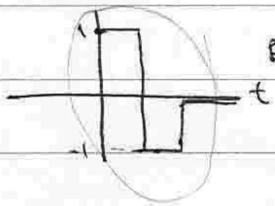
$$\varepsilon_N^{(t)} = f(t) - \sum_{n=1}^{N} F_n\, \phi_n(t)$$

$$\boxed{N \to \infty \xrightarrow{\text{برای صورت دائم}} \int_{t_1}^{t_2} |f(t)|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |F_n|^2 k_n}$$



* همهٔ انرژی‌ها در همین است یعنی همین قدر سو داشته باشیم کافی است.

* مثال) سیگنال f(t) به شکل زیر داده شده است مهم



$$f(t) = \begin{cases} +1 & 0 \leq t \leq 1 \\ -1 & 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

در فاصلهٔ (0,2) مجموعه $\phi_n(t) = \sin(n\pi t)$ داده شده است.

۱- آیا $\phi_n(t)$ ارتوگنال است:

۲- f(t) را به صورت مجموعه‌ای از $\phi_n(t)$ نشان دهید.

۳- راجع به اختلاف انرژی بحث کنید.

$$\int_0^2 \sin n\pi t \cdot \sin m\pi t\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \phi_n(t)\, \phi_m^*(t)\, dt = ?$$ ارتوگنال؟

$$\int_0^2 \underbrace{\sin n\pi t \cdot \sin m\pi t\, dt}_{\text{حساب می‌کنیم}} = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases} \Rightarrow$$ ارتوگنال است

* چون $k_n = 1$ ⇐ ارتونرمال نیز هست.

$$f(t) = \sum_{n=1}^{N} F_n \phi_n(t) = \sum_{n=1}^{N} F_n \sin n\pi t$$

$$F_n = \frac{\int_0^2 \sin n\pi t\, dt \cdot f(t)}{\int_0^1 \sin n\pi t\, dt + \int_1^2 -\sin n\pi t\, dt} \underset{\text{حساب می‌کنیم}}{=} \begin{cases} \frac{4}{n\pi} & n \text{ فرد} \\ 0 & n \text{ زوج} \end{cases} \qquad F_1 = \frac{4}{\pi}, F_3 = \frac{4}{3\pi}, \ldots$$

$f(t) = \sum F_n \phi_n(t)$

$$\Rightarrow f(t) = \frac{4}{\pi} \sin \pi t + \frac{4}{3\pi} \sin 3\pi t + \frac{4}{5\pi} \sin 5\pi t + \cdots = \frac{4}{\pi}\left(\sin \pi t + \frac{1}{3} \sin 3\pi t + \ldots\right)$$

ضرایب همین طوری کم می‌شوند

سیستم خطی ؛ « سیستمی را خطی می‌گوییم که به ازای ورودی صفر خروجی صفر داشته باشیم »

سیستم را خطی می‌گوییم که اگر ورودی ترکیبی خطی از ورودیهای مختلف باشد خروجی نیز ترکیبی خطی از خروجی های مختلف با همان weigh باشد . (عدد هم می‌شمارد که اگر یکی غیرخطی بود را ثابت کند غیرخطی است)

$x_1(t) \rightarrow y_1(t)$

$x_2(t) \rightarrow y_2(t)$

$a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) \rightarrow a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t)$

مثال) $y(t) = t \cdot x(t)$ $x_1(t) \rightarrow y_1(t) = t x_1(t)$

$x_2(t) \rightarrow y_2(t) = t x_2(t)$

$x_3(t) = a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)$

$y_3(t) = t x_3(t) = t\,[a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)] = t a_1 x_1(t) + t a_2 x_2(t)$

$= a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t)$ ✓ خطی

نکته: موارد بالا برای سیستم ناپیوسته نیز صادق است .

$y(t) = x^2(t)$ $x_1(t) \rightarrow y_1(t) = x_1^2(t)$

$x_2(t) \rightarrow y_2(t) = x_2^2(t)$

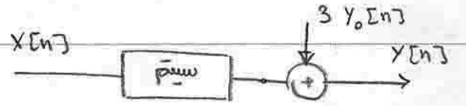
$x_3(t) = a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)$ $y_3(t) = x_3^2(t) = [a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)]^2$ ✗ غیرخطی

bayas → ۱, خطی بودنش را از دست می‌دهد

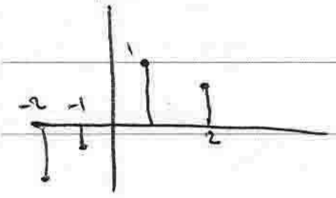
$y[n] = 2x[n] + \textcircled{3}$ $\begin{cases} x_1[n] = 5 \\ y_1[n] = 13 \end{cases}$ $\begin{cases} x_2[n] = 2 \\ y_2[n] = 7 \end{cases}$

$\begin{cases} x_3[n] = 7 \\ y_3[n] = 2(7) + 3 = 17 \end{cases}$ از بالا $y_3[n] = 20$ ⇒ « خطی نیست »

. چون ورودی صفر، خروجی صفر ایجاد نمی‌کند که خطی نیست .



خطی افزایشی



سیستم های LTI (Linear Time Invariant) :

نمایش یک سیگنال به صورت توابع ضربه در حالت پیوسته و ناپیوسته .

می‌خواهیم یک سیگنال ناپیوسته را به شکل توابع ضربه نشان دهیم .

سیگنال $x[n]$ را در نظر می‌گیریم . تابع ضربه در زمان های پیوسته $\delta(t) = \begin{cases} 1 & \text{صفر} \\ 0 & \text{جاهای دیگر} \end{cases}$

تمرين $\left\{ \begin{array}{l} 2.1\ (a,c) \\ 2.2 \\ 2.7\ (a) \\ 2.21\ (d) \end{array} \right.$ 2.22 (b,d)
2.40

$$x[n]\cdot\delta[n] = \begin{cases} x[0] & n=0 \\ 0 & n\neq 0 \end{cases}$$

$$x[0]\delta[n] = \begin{cases} x[0] & n=0 \\ 0 & n\neq 0 \end{cases} \qquad x[n]\,\delta[n-1] = \begin{cases} x[1] & n=1 \\ 0 & n\neq 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x[n] = x[-2]\,\delta[n+2] + x[-1]\,\delta[n+1] + x[0]\,\delta[0] + x[1]\,\delta[x-1] + x[2]\,\delta[n-2]$$

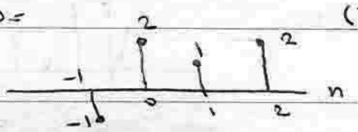
$$\boxed{x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,\delta[n-k]}$$

* فقط با یه سیستم خطی باشه

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, h[n-k]$$

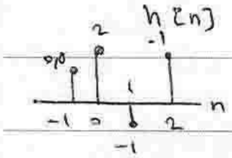
مثال) : سیستم خطی (غیر TI)

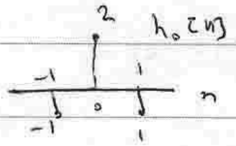
$x[n] =$

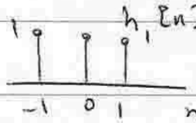


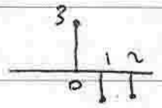
پاسخ ضربه‌ی سیستم در نقاط ..., ۰, ۱, k=0, k=-1 برابر است با

$h[n]$









$$\begin{cases} x[n] = (1-1)\delta[n+1] + 2\delta[n] + 1\delta[n-1] + 3\delta[n-2] \\ y[n] = (-1)h_{-1}[n] + 2h_0[n] + (1)h_1[n] + 3h_2[n] \end{cases}$$

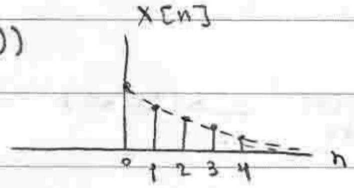
مثال) خروجی سیستم را حساب کنید.

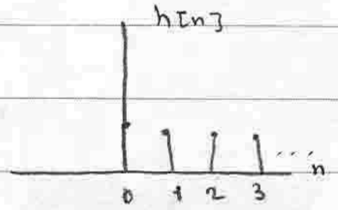
$$\begin{cases} x[n] = a^n u[n] \quad 0 < a < 1 \\ h[n] = u[n] \end{cases} \qquad y[n] = ?$$

$x[n] \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow y[n]$

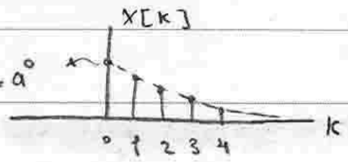
$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, h[n-k]$$

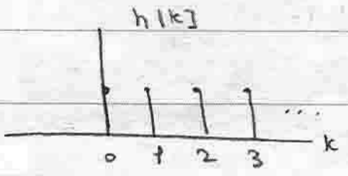
((ترسیم

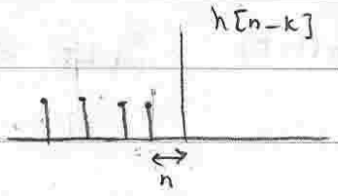




$a^n u[n] = a^0$







* $h[n-k]$ را روی $x[k]$ حرکت
میدهیم.

$n < 0 \rightarrow y[n] = 0$

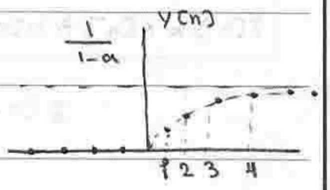
$n = 0 \rightarrow y[0] = a^0 \times 1$

$n = 1 \rightarrow y[n] = a^0 \times 1 + a^1 \times 1$

$n = 2 \rightarrow y[n] = a^0 \times 1 + a^1 \times 1 + a^2 \times 1$

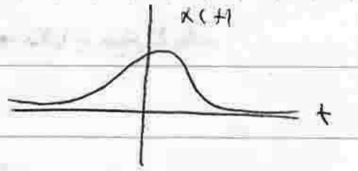
$\Rightarrow y[n] = a^0 + a^1 + a^2 + \dots$

$$= \sum_{k=0}^{n} a^n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \quad n \geq 0$$

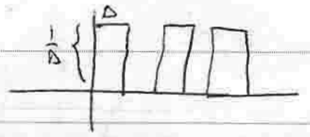


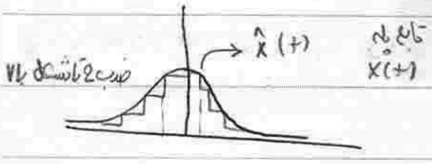
$$\Rightarrow \boxed{y[n] = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} u[n]}$$

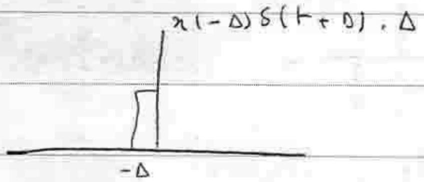
▨ نمایش یک سیگنال پیوسته برحسب توابع ضربه : (δ(t))



$$\delta_\Delta(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta} & 0<t\leq\Delta \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$







چون سیستم خطی است داریم :

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\,\delta(t-k\Delta)\,.\,\Delta$$

$$x(t) = \lim_{\Delta\to 0} \hat{x}(t) = \lim \sum_{k=-\infty} x(k\Delta)\,.\,\delta(t-k\Delta)\,.\,\Delta$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau}$$

چون سیستم خطی است لذا مجموع ترکیب خطی خواهد بود.

$$\hat{y}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\,\hat{h}_{\Delta t}(t)\Delta$$

جاییکه $\hat{h}_{k\Delta}(t) \leftarrow \delta(t-k\Delta)$

$$y(t) = \lim_{\Delta\to 0} \hat{y}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,h_\tau(t)\,d\tau$$

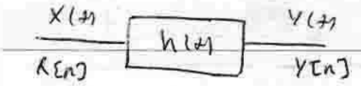
که $h_\tau(t)$ پاسخ ضربه $\delta(t-\tau)$ می‌باشد و انتگرالش هم کانولوشن است.

* اگر سیستم LTI باشد $\delta(t-\tau) \rightarrow h(t-\tau)$

$$\boxed{y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,h(t-\tau)\,d\tau = x(t) * h(t)}$$

$$\boxed{Y[n] = X[n] * h[n] = \sum x[k]\,h[n-k]}$$

$$\delta[n-k] \longrightarrow h[n-k]$$



در سیستم LTI :

$$\begin{cases} y(t) = x(t) * h(t) \\ = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau \end{cases}$$

h(t - τ) را پاسخ ضربه به δ(t-τ) می‌گویند.

$$\begin{cases} y[n] = \sum_{-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \quad = x[n] * h[k] \\ \delta[n-k] \longrightarrow h[n-k] \end{cases}$$

▨ خواص کانولوشن :

1- جابجایی $\quad x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

مثال)

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \qquad n-k=r$$

$$\Rightarrow y[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} h[r]x[n-r]$$

2- خاصیت «Distribution Property»

$$\begin{cases} x[n] * (h_1[n] + h_2[n]) = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n] \\ x(t) * (h_1(t) + h_2(t)) = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t) \end{cases}$$

3- خاصیت Associative

$$x[n] * (h_1[n] * h_2[n]) = (x[n] * h_1[n]) * h_2[n]$$

* سیستم LTI حافظه یا بدون حافظه با توجه به h(t) (Impulse response)

• که خروجی به ورودی در همان لحظه بستگی داشته باشد.

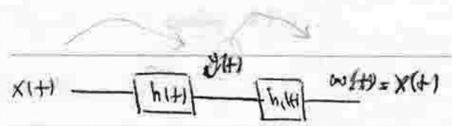
این اتفاق زمانی می‌افتد که h[n] = 0 باشد برای n ≠ 0 به عبارت دیگر

$$\boxed{\begin{cases} h[n] = k\delta[n] \\ y[n] \overset{k}{=} x[n] \end{cases}}$$

یا

$$\boxed{\begin{cases} h(t) = k\delta(t) \\ y(t) = kx(t) \end{cases}}$$

4_ : قابلیت برگردان (از خروجی ورودی را بتوان به دست آورد) ;



در چه شرایطی سیستم می‌تواند برگردان داشته باشد.

اگر $h_1(t)$ برگردان $h(t)$ باشد داریم. $y(t)=h(t)*x(t)$

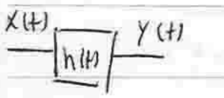
$$w(t)=y(t)*h_1(t)=x(t)*\overbrace{h(t)*h_1(t)}^{\delta(t)}=x(t)$$

سیستم دارای قابلیت برگردان است اگر $\boxed{h(t)*h_1(t)=\delta(t)}$ باشد.

در حالت ناپیوسته : $\boxed{h[n]*h_1[n]=\delta[n]}$

در این صورت $h_1[n]$ و یا $h_1(t)$ برگردان $h[n]$ یا $h_1[n]$ خواهد بود.

علّی : سیستم را علّی می‌گوییم که خروجی آن فقط بستگی به زمان حاضر و گذشته دارد.



$$Y[n]=X[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k]h[n-k]$$

$$=\dots x[-1]h[n+1]+x[0]h[n]+x[+1]h[n-1]+\dots$$

اگر هم علّی نبود که باید همه جملات با زمان‌های بیشتر از خروجی صفر شوند.

برای اینکه سیستم علّی باشد می‌بایست تمام ترم‌های $h[n-k]$ صفر شوند برای مقادیر $k>n$.

لذا به طور کلی سیستم را با پاسخ ضربه‌ی $h[n]$ علّی است برای مقادیر $n<0$.

$$\boxed{Y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]h[n-k]=\sum_{k=0}^{\infty} h[n]x[n-k]}$$

$h[n]=0$ برای $n<0$

اگر بخواهیم علّی باشد :

$$\boxed{y(t)=\int_{-\infty}^{t} x(\tau)h(t-\tau)d\tau}=\int_{0}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

-1

$h(-1-\tau)$

$h(t)=0$ برای $t<0$

برای سیستم‌های علّی همیشه برقرار است.

اگر خواستیم از روی $h(t)$ علّی بودن را تشخیص دهیم باید در تابع‌های t یا n باشد.

پایداری : ؟

سیستمی را پایدار می‌گوییم که به ازای ورودی محدود، خروجی محدود داشته باشد.

$|X[n]|<B$ for all n

$$Y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k]h[n-k] \qquad |Y[n]|=\left|\sum x[k]h[n-k]\right|\leq\sum|X[k]||h[n-k]|$$

$$Y[n]\leq B\sum_{k=-\infty}^{\infty}|h[k]|$$

شرط پایداری این است که : $\boxed{\sum_{k=-\infty}^{\infty}|h[k]|<\infty}$

$\begin{cases} 2.45\,(a,b) \\ 2.43\,(c) \end{cases}$

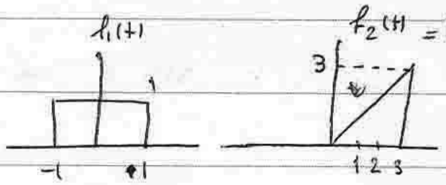
* حالت پیوسته :

$$y(t) = x(t) * y(t) \quad = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

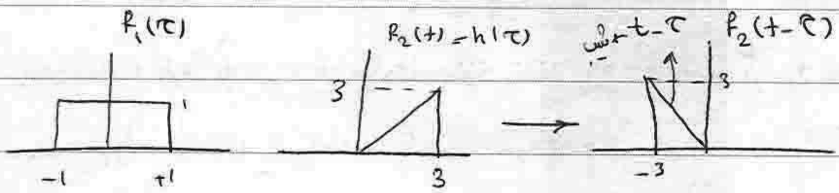
داریم $|x(t)| < \beta$:

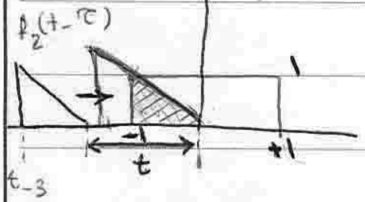
$$|y(t)| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\,x(t-\tau)d\tau\right| \leqslant B\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|d\tau < \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)||x(t-\tau)|d\tau$$

مثال) ورودی برای $f_1(t)$ است . و پاسخ ضربه برای $h(t)$ است .

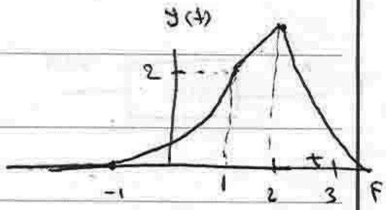


$$y(t) = f_1(t) * h(t) = f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)f_2(t-\tau)d\tau$$





$$t < -1 \Rightarrow f_1(t) * f_2(t) = 0 = y(t)$$

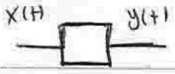


$$-1 < t < 1 \Rightarrow y(t) = \int_{-1}^{t} (t-\tau)\times 1\,d\tau = \boxed{\frac{1}{2}(t+1)^2}$$

$$1 < t < 2 \Rightarrow y(t) = \int_{-1}^{1} (t-\tau)d\tau = \boxed{2t}$$

$$2 < t < 4 \Rightarrow y(t) = \int_{t-3}^{1} (t-\tau)d\tau = (4 + t - \tfrac{1}{2}t^2)$$

مثال) $h(t)$ کدوم سیستم را حساب کنید.



$$y(t) = x(t-t_0)$$

* سیستم تأخیر : اگر t_0 مثبت باشد آن را سیستم Delay می‌گوییم .

* اگر t_0 منفی باشد آن را advanced می‌گوییم .

جهت محاسبه $h(t)$ سیستم ورودی را برابر $x(t) = \delta(t)$ قرار دهیم . $\Leftarrow$ $y(t) = h(t)$

چون سیستم LTI هست تو ادامه

and other singularity

در صفر مقدار ~~بی‌نهایت دارند~~
ندارند (بی‌نهایت اند)

Unit_doublet function

توابع Singular را می‌خواهیم به شکل عملیاتی نشان دهیم.

$$x(t) \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow y(t)$$

فرض کنید که سیستمی دارد که خروجی آن مشتق ورودی است.

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

می‌خواهیم پاسخ پله‌ی واحد سیستم را حساب کنیم: $\delta(t) = ?$

$$x(t) = \delta(t)$$

$$h(t) = \frac{dx(t)}{dt} \Rightarrow h(t) = \delta'(t) \triangleq u_1(t)$$

$$x(t) \rightarrow \boxed{u_1(t)} \rightarrow \frac{dx(t)}{dt}$$

در حقیقت $\frac{dx(t)}{dt} = x(t) * u_1(t)$ ~~[illegible]~~

$$\frac{dx(t)}{dt} \rightarrow \boxed{u_1(t)} \rightarrow \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = x(t) * \underbrace{u_1(t) * u_1(t)}_{u_2(t)}$$

به طور کلی اگر k مرتبه سیستم را سری کنیم داریم:

$$\boxed{u_k(t) = \underbrace{u_1(t) * u_1(t) * \dots * u_1(t)}_{k \text{ مرتبه}}}$$

بنابراین اگر بخواهیم سیستمی داشته باشیم که خروجی مشتق ورودی باشد می‌بایست: $h(t) = u_1(t) = \frac{d\delta(t)}{dt}$

~~[illegible]~~

فرض کنیم سیگنال ثابت داریم یعنی $x(t)=1$ و آن را به یک سیستم می‌دهیم با $h(t) = u_1(t)$ خروجی آن برابر است با صفر:

$$0 = \frac{dx(t)}{dt} = x(t) * u_1(t)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} u_1(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} u_1(\tau) = 0$$

بنابراین $u_1(\tau)$ دارای مساحت صفر می‌باشد.

* تعریف می‌کنیم:

$$x(t) \rightarrow \boxed{u(t)} \rightarrow ?$$

$$\text{خروجی} = x(t) * u(t)$$

$$\boxed{= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, u(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau}$$

$$x(t) \rightarrow \boxed{u(t)} \rightarrow \int_{\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau$$

چندتا سیستم (سری) داریم به همان اندازه انتگرال می‌گیرد.

$$u_{-2}(t) = u(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\,u(t-\tau)\,d\tau = t\,u(t)$$

$$u_{-3}(t) = u(t) * u(t) * u(t)$$

$$\vdots$$

$$u_{-k}(t) = \underbrace{u(t) * u(t) * u(t) \ldots * u(t)}_{k \text{ تا}} = \boxed{\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\,u(t)}$$

▨ معرفی unit Impulse از طریق کانولوشن :

$$x(t) = \delta(t) * x(t)$$

اگر $x(t) = 1 \Rightarrow 1 = \delta(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau)\,x(t-\tau)\,d\tau = \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau)\,d\tau}$

فرض کنید یک سیگنال داریم مانند g(t) برعکسش می‌کنیم g(-t) حال داریم :

$$g(-t) = g(-t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau - t)\,\delta(\tau)\,d\tau$$

$t = 0 \Rightarrow \boxed{g(0) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)\,\delta(\tau)\,d\tau}$ ⚠

▨ سری فوریه :

سیگنال x(t) پریودیک است اگر $x(t) = x(t+T)$ پریود برابر است با کمترین مقدار مثبت غیر صفر T. همینطور $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ را فرکانس اساسی (پایه) سیگنال x(t) می‌گوییم یکی از سیگنال‌های اصلی پریودیک $x(t) = \cos \omega_0 t$ که تابع نمایی آن $x(t) = e^{j\omega_0 t}$ است.

سیگنال $\Phi_k(t) = e^{jk\omega_0 t}$ که $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ را در نظر بگیرید. که مشاهده می‌کنیم که تابع فوق یک تابع ارتونورمال نیز می‌باشد لذا داریم :

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

سیگنال x(t) نیز یک سیگنال پریودیک است و پریود اساسی آن برابر T و فرکانس آن برابر $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ و مربوطه $k = \pm 1$ را ترم‌های اساسی (هارمونیک‌های اول) سیگنال x(t) می‌گویند.

سیگنال پریودیک x(t):

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

سیگنال پریودیک x(t) را می‌توانیم به صورت ترکیب خطی از $e^{jn\omega_0 t}$ هایی که $\omega_0=\frac{2\pi}{T}$ نمایش دهیم.

پریود اساسی سیگنال $T=\frac{2\pi}{\omega_0}$ می‌باشد. ترم‌های مربوط به $k=\pm1$ را ترم‌های اساسی (هارمونیک اول) سیگنال می‌گویند و به همین ترتیب $k=\pm2$ را هارمونیک‌های دوم و ... و a_0 را مقدار ثابت سیگنال می‌نامند. نمایش یک سیگنال پریودیک را به شکل فوق آن را بسط سری فوریه می‌گویند.

وقتی می‌گوییم x(t) حقیقی است از این استفاده می‌کنیم.

$$\boxed{x(t)^* = \sum a_k^* e^{-jk\omega_0 t}}$$

اگر x(t) سیگنال حقیقی باشد یعنی $x(t)=x(t)^*$ در نتیجه داریم:

حال اگر k را به k- تبدیل کنیم:

$$x(t)=x(t)^*=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a^{k} e^{jk\omega_0 t}=\sum a_k^* \overset{k}{e^{j\omega_0 t}}$$

$$\Rightarrow \boxed{a_k=a_{-k}^*} \quad \text{و} \quad \boxed{a_k^*=a_{-k}}$$

همچنین به صورت زیر هم می‌توانیم بسط دهیم.

$$x(t)=a_0+\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[a_k e^{jk\omega_0 t}+a_{-k}e^{-jk\omega_0 t}\right]=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k e^{j\omega_0 t}+R_k^* e^{-jk\omega_0 t}\right]$$

$$=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}2\,\mathrm{Re}\left\{a_k e^{jk\omega_0 t}\right\}$$

فرم پولار (قطبی) a_k

$$a_k=A_k e^{j\theta k}\quad=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}2\,\mathrm{Re}\left\{A_k e^{jk\omega_0 t+\theta_k}\right\}=a_0+2\sum_{k=1}^{\infty}A_k\cos(k\omega_0 t+\theta_k)$$

از روی شکل فقط T را می‌دانیم ما علم به چیز دیگری نداریم.

محاسبه ضرایب سری فوریه:

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}\ ,\quad \omega_0=\frac{2\pi}{T}$$

جهت محاسبه‌ی a_k طرفین را در $e^{-jn\omega_0 t}$ ضرب می‌کنیم و بر روی یک پریود انتگرال می‌گیریم.

$$e^{-jn\omega_0 t}x(t)=e^{-jn\omega_0 t}\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j(k-n)\omega_0 t}$$

از طرفین رابطه فوق روی یک پریود سیگنال انتگرال می‌گیریم:

$$\int_T x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt=\int_T\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j(k-n)\omega_0 t}dt\ ,\quad \omega_0=\frac{2\pi}{T}$$

$$= \sum a_k \int_T e^{j(k-n)\omega_0 t}\, dt \qquad \int_T e^{j(k-n)\omega_0 t} = \int_T \cos(k-n)\omega_0 t\, dt = \begin{cases} T & k=n \\ 0 & k \neq n \end{cases}$$

* در نتیجه خواهیم داشت :

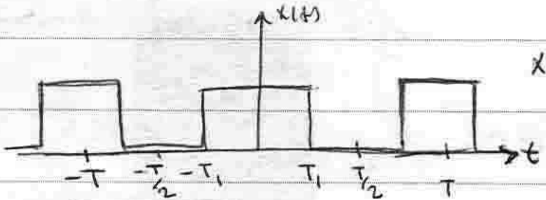
$$\boxed{a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt}$$

* به‌جای k ← 0 خواهیم داشت :

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{T}\int x(t)\, dt}$$ ← مقدار میانگین سیگنال x(t)

مثال (

$$x(t) = \begin{cases} 1 & |t| < T_1 \\ 0 & T_1 < |t| < \frac{T}{2} \end{cases}$$



روی یک پریود انتگرال می‌گیریم .

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} dt = \frac{2t_1}{T} \qquad \boxed{a_0 = \frac{2t_1}{T}}$$

بزرگترین مقدار سیگنال است .

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} (1) e^{-jk\omega_0 t}\, dt = \frac{1}{T}\int_{-T_1}^{T_1} e^{-jk\omega_0 t}\, dt = -\frac{1}{jk\omega_0 t}\Big[e^{-jk\omega_0 t}\Big]_{-T_1}^{+T_1}$$

$$= -\frac{2}{k\omega_0 T}\left[\frac{e^{jk\omega_0 T_1} - e^{-jk\omega_0 T_1}}{2j}\right] = \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi} \quad k \neq 0$$

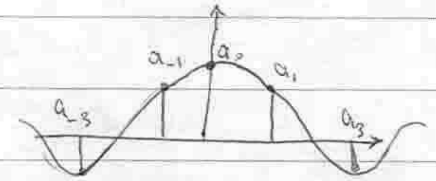
$\boxed{t = 2\pi}$

$T_1 = \frac{\pi}{2} \rightarrow a_k = \frac{\sin(k\pi/2)}{k\pi}$

$a_0 = \frac{1}{2}$

$a_1 = a_{-1} = \frac{1}{\pi}$

$a_3 = a_{-3} = -\frac{1}{3\pi}$



⇒ * طیف انرژی سیگنال

* برای همگرا بودن سری فوریه در هر دوره تناوب بخش شده ، باید تابع $x(t)e^{-j\omega_0 t k}$ قابل انتگرال‌گیری باشد ، یا به عبارت دیگر با انرژی محدود باشد . $|x(t)e^{-jk\omega_0 t}|^2$ محدود باشد .

▨ خواص سری فوریه :

۱) خطی بودن :

$$\begin{cases} x(t) \xrightarrow{\text{فرض}} a_k \\ y(t) \rightarrow b_k \end{cases} \qquad z(t) = Ax(t) + By(t)$$

$$\boxed{C_k = Aa_k + Bb_k} \qquad z(t) \rightarrow C_k$$

۲) Time-shifting :

$y(t) = x(t - t_0)$

$x(t) \rightarrow a_k$

$y(t) \rightarrow b_k$

$$= \frac{1}{T}\int x(\tau)\, e^{-j\omega_0(\tau + t_0)}\, d\tau = e^{-jk\omega_0 t_0} \cdot \underbrace{\frac{1}{T}\int x(\tau)\, e^{-j\omega_0 \tau}\, d\tau}_{a_k}$$

$$\begin{cases} b_k = \frac{1}{T}\int_T \underbrace{x(t - t_0)}_{\tau} e^{-jk\omega_0 t}\, dt \\ t - t_0 = \tau \end{cases} \qquad \Rightarrow \boxed{b_k = a_k e^{-j\omega_0 t_0}}$$

$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk w_0 t}$ $\quad y(t) = x(-t)$ $\quad$ Time _ Reversal (3

$$\begin{cases} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jkw_0(-t)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{-m} e^{jmw_0t} \\ -k = m \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x(t) \rightarrow a_k \\ x(-t) \rightarrow a_{-k} \end{cases}}$$

* اگر x(t) زوج باشد داریم $\boxed{a_{-k} = a_k}$ $\quad$ * اگر x(t) فرد باشد داریم $\boxed{a_{-k} = -a_k}$

multiPLication (4

$$\begin{cases} x(t) \longrightarrow a_k \\ y(t) \longrightarrow b_k \\ x(t).y(t) \longrightarrow h_k \end{cases} \qquad h_k = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l b_{(k-l)}$$

$Z(t) = x(t)\, y(t) = \sum h_k e^{jkw_0t}$

5) میانگین قدرت

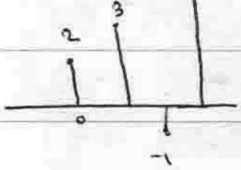
$$\boxed{\frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2}$$

مقدار میانگین قدرت در کامپوننت k_{th} ام برابر است با ;

$$\frac{1}{T}\int |a_k e^{jw_0kt}|^2 dt = \int_T |a_k|^2 dt = \bigcirc\!\!\!\!|a_k|^2$$

(matlab)

$x[n] = \{\overset{\text{زمان n}}{\hat{2}}, 3, -1, 5\}$



~~Stem~~ Stem (n, x)

n = 0:1:3;

x = [2, 3, -1, 5]

شیفت دادن ? → x [n-2]

Stem (n+2, x)

X [-n]

204 ۲۰

e1 0000 - 2 03

x[n-2]

y[10] = X[n-2]

تغییر سطر

سطر

عمود

a = [0 0 ; 0 0 ; 0 0]

تعریف ماتریس :

a = 1 : 2 : 6 → (از یک تا 6 با گام 2)

⇒ 1 3 5

a = [1 : 2 : 6 ; 2 : 2 : 6]

1 3 5

2 4 6

a (2 , 2)

a = 4

a (: , 1) → همه ردیف‌های ستون اول

a (: , end) → ستون آخر تمام ردیف‌هایش

برنامه

X = [2 , 3 , 4 , 5) ;

n = 1 : 4 ;

Y = X ;

nY = n - 2 ;

stem (nY , Y) ; ← برای کشیدن

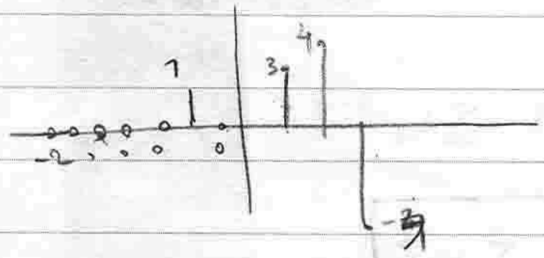
خروجی‌ها ↑ اسم فانکشن ↑ ورودی‌ها ↑

function [d , e] = fun1 [a , r]

end

Com (,) = عنوانش مشخص میشود .

برای کشیدن Y[n]



>> a = 1 : 4 ;

>> b = 3 : 3 : 9

a(end) = [ ] ;

c = [a ; b] → سطری

c = [a b] → ستونی

>> S = cell (4 , 4) → یک ماتریس 4 × 4 خالی به وجود می‌آید

S(2) = (a)

S, 2 a را قرار میدهد ← اگر یک بعدی باشد هم به ترتیب می‌شمرد ولی بهتر است 2 بعدی بدهیم .

Struct

S . F1 = ' ○ '

S . F2 = ' ○ '

:

iman

امتحان (13 اردیبهشت).

13

$Y_2 = [x(1, 2:12), 0]$

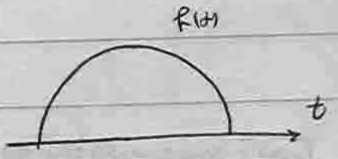
Flipvr $Y = [000m]$

● فوریه ترانسفورم :

$\phi_n e^{jn\omega_0 t}$ ارتوگنال .

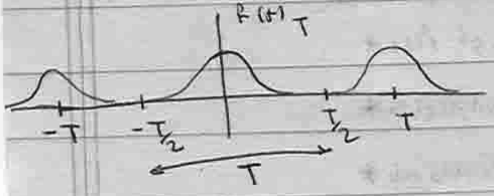
هر سیگنال پریودیک را با sin و cos نشان می دهیم و جزء ثابت مقدار آن a_0 است (قدرت بیشتر را هارمونیک های کم تر دارند).

● می خواهیم تابع f(t) را که به شکل مقابل است آن را به صورت پریودیک نشان دهیم.



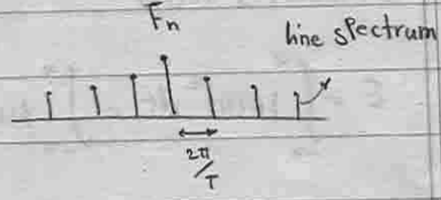
هر سیگنالی را می توانیم پریودیک نمایش دهیم.

چون $f_T(t)$ یک تابع پریودیک است بنابراین دارای بسط فوریه است.



$$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} \quad (2)$$

$$\text{where: } F_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_T(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt \quad (3)$$



$$\omega_n \triangleq n\omega_0 \ (5) \quad , F(\omega_n) \triangleq T . F_n \ (6)$$

با توجه به روابط (6) و (3) داریم ;

$$\begin{cases} f_T(t) = \cancel{\frac{1}{T}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} F(\omega_n) . e^{jn\omega_0 t} & (7) \\ F(\omega_n) = \int_{-T/2}^{T/2} f_T(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt \end{cases}$$

حال اگر $T \to \infty$ مشاهده می کنیم $\Delta\omega$ کوچک می شود و در حالت حد پیوسته می شود :

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$$

جایگذاری می کنیم در فرمول بالا :

$$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega_0) e^{jn\omega_0 t} \frac{\Delta\omega}{2\pi}$$

از رابطه فوق T را به سمت بی نهایت سوق می دهیم.

$$f(t) = \lim_{T \to \infty} f_T(t)$$

$$= \lim \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \Rightarrow f(t) = \boxed{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega}$$

همچنین در رابطه (8) خواهیم داشت.

$$\boxed{F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt}$$

⚠ F(ω) را اصطلاحاً فوریه ترنسفورم f(t) می نامند (یا spectrum) به عبارت دیگر طیف انرژی f(t) را برحسب فرکانس در حالت پیوسته نشان می دهد. f(t) عکس فوریه ترانسفورم F(ω) می نامند

$$f(t) = F^{-1}\{F(\omega)\}$$

$$\boxed{f(n) = \frac{1}{T} F(\omega) \Big|_{\omega = n\omega_0}}$$

* برای نوشتن ضرایب فوریه به درد می‌خورد.

صفحه ۱۰

$$F(\omega) = F\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$f(t) = F^{-1}\{F(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

◍ شرایط وجود سری فوریه ترنسفورم :

* f(t) باید دارای تعداد محدودی max , min در یک فاصله محدود باشد.

* دارای تعداد محدود ناپیوستگی در فاصله ی محدود باشد

* باید دارای قابلیت انتگرال گیری باشد.

◍ Parseval's theory

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega\right]^* dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F^*(\omega) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt\right] d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F^*(\omega) F(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int |F(\omega)|^2 d\omega$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega}$$

* وقتی نمی‌توانیم از f(t) در حوزه‌ی زمان انتگرال بگیریم از ω اش می‌گیریم.

مثال)

$$F\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1$$

$$F\{\delta(t - t_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega t_0}$$

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{j\omega}$$

$$F^{-1}\{\delta(\omega_t - \omega_0)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega_t - \omega_0) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} e^{\pm j\omega_0 t}$$

$$F^{-1}\{\delta(\omega_t - \omega_0)\} = \frac{1}{2\pi} e^{\pm j\omega_0 t}$$

از طرفین رابطه ی فوق فوریه می‌گیریم :

$$FF^{-1}\{\delta(\omega_t - \omega_0)\} = \frac{1}{2\pi} F\{e^{\pm j\omega t}\}$$

$$\boxed{F\{e^{\pm j\omega_0 t}\} = 2\pi \delta(\omega_{\mp} \omega_0)} \qquad \boxed{F\{1\} = 2\pi \delta(\omega)}$$

فوریه ی این اصلا محاسبه‌اش سخت است

14

$$* \; F\{\cos\omega_0 t\} = F\left\{\frac{1}{2}e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{-j\omega_0 t}\right\} = \pi\left[\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0)\right]$$

$$* \; F\{\sin\omega_0 t\} = F\left\{\frac{1}{2j}e^{j\omega_0 t} - \frac{1}{2j}e^{-j\omega_0 t}\right\} = \frac{\pi}{j}\left[\delta(\omega-\omega_0) - \delta(\omega+\omega_0)\right]$$

● فوریه ی ترانسفورم توابع پریودیک: سیگنال $f(t)$ با پریود T و $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ (قبلاً ضرایب Cn را برای اینها ما در کلاس سری فوریه بدست آوردیم).

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} \, , \, \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$\Rightarrow F\{f(t)\} = F\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n F\{e^{jn\omega_0 t}\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n . 2\pi\,\delta(\omega - n\omega_0)$$

شکل کلی این فوریه ها.

$$= 2\pi \boxed{\sum F_n \delta(\omega - n\omega_0) \, , \, \omega_0 = \frac{2\pi}{T}}$$

$$\Rightarrow F_n = \frac{1}{T}\int_T f(t)\, e^{-jn\omega_0 t} dt$$

● خواص فوریه ی ترانسفورم:

(1) $x_1(t) \xrightarrow{F} X_1(\omega)$
$x_2(t) \xrightarrow{F} X_2(\omega)$ $\qquad a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) \xrightarrow{F} a_1 X_1(\omega) + a_2 X_2(\omega)$

(2) $X(\omega) = X^*(\omega) \qquad x(t)$ حقیقی

$$X^*(\omega) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt\right]^* = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{j\omega t}dt = X(-\omega)$$

(3) $x(t-t_0) \xleftrightarrow{F} e^{-j\omega t_0}X(\omega)$

$$F\{x(t-t_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-t_0)e^{-j\omega t}dt \qquad \alpha = t - t_0$$

$$\Rightarrow = \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha)e^{-j\omega(\alpha+t_0)}d\alpha = e^{-j\omega t_0}\int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha)e^{-j\omega\alpha}d\alpha = e^{-j\omega t_0}X(\omega)$$

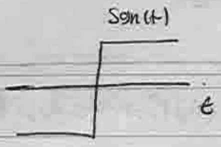
(4) $\frac{dx(t)}{dt} \longleftrightarrow j\omega X(\omega) \qquad \frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} j\omega X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$

(5) $\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \longleftrightarrow \frac{1}{j\omega}X(\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$

مثال)

$$\mathrm{sgn}(t) = \frac{|t|}{t} = \begin{cases} 1 & t>0 \\ 0 & t=0 \\ -1 & t<0 \end{cases}$$

* تابع دارای میانگین صفر است و به طور مطلق قابل انتگرال گیری نیست. لذا به منظور به دست آوردن فوریه ی سیگنال، آن را در یک تابع پیوسته ضرب می کنیم و سپس فوریه می گیریم.



$$F\{\mathrm{sgn}(t)\} = F\left\{\lim_{a\to 0}\left[e^{-a|t|}\,\mathrm{sgn}(t)\right]\right\} = \lim_{a\to 0}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|}\,\mathrm{sgn}(t)\, e^{-j\omega t}\,dt\right\}$$

$$= \lim_{a\to 0}\left\{-\int e^{(a-j\omega)t}\,dt + \int_0^{\infty} e^{-(a+j\omega)t}\,dt\right\} = \lim_{a\to 0}\left\{\frac{-2j\omega}{a^2+\omega^2}\right\} = \frac{2}{j\omega}$$

$$\Rightarrow F\{\mathrm{sgn}(t)\} = \frac{2}{j\omega}$$

- تابع پله واحد $u(t)$ را برحسب $\mathrm{sgn}(t)$ می نویسیم.

$$u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{sgn}(t)$$

$$F\{u(t)\} = \frac{1}{2}F\{1\} + \frac{1}{2}F\{\mathrm{sgn}(t)\} = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

$\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$

$$F\{u(t)\} = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

$$\delta_T(t) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT) \Rightarrow \delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$F_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\delta(t)\,e^{-jn\omega_0 t}\,dt = \frac{1}{T} \Rightarrow \frac{\delta(t)}{T} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{T}e^{jn\omega_0 t}$$

$$= \frac{2\pi}{T}\sum\delta(\omega-n\omega_0) = \omega_0\sum\delta(\omega-n\omega_0) = \omega_0\,\delta_{\omega_0}(\omega)$$

$$\Rightarrow \delta_T(t) = \omega_0\,\delta_{\omega_0}(\omega) \qquad \boxed{\delta(t-nT) = \omega_0\,\delta(\omega-\cancel{k}\,\omega_0)}$$

$$x(at) \longrightarrow \frac{1}{|a|}\,x\!\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

$$\mathcal{F}\{x(at)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(at)\,e^{-j\omega t}\,dt = \begin{cases} \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,e^{-j\omega/a\,\tau}\,d\tau & a>0 \\ -\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,e^{-j\omega/a\,\tau}\,d\tau & a<0 \end{cases}$$

* معروف است

$$\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|X(\omega)|^2\,d\omega$$

[illegible] انتگرال

* برای سیگنال پریودیک داریم:

$$\frac{1}{T_0}\int_{T_0}|x(t)|^2\,dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty}|a_k|^2$$

0912 726 1680

$$\begin{cases} 4.1 & d,k \\ 4.4 & a(i,ii) \\ 4.17 & a \\ 4.21 & f \end{cases}$$

خاصیت کانولوشن :

$$g(t) \longrightarrow \boxed{\quad} \longrightarrow y(t)$$

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau \qquad Y[\omega] = F\{y(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) e^{-j\omega t} dt\, d\tau$$

$$Y[\omega] = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) e^{-j\omega t} dt \right] d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\omega\tau} \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt \right] d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\omega t} d\tau = X(\omega).H(\omega)$$

$$\boxed{\begin{aligned} y(t) &= x(t) \circledast h(t) \\ Y(\omega) &= X(\omega).H(\omega) \end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned} r(t) &= s(t).p(t) \\ R(\omega) &= \frac{1}{2\pi} S(\omega) * P(\omega) \end{aligned}}$$

نمایش سیستم L.T.I :

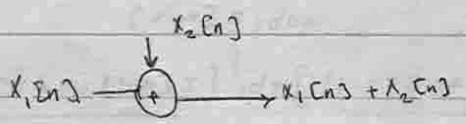
۱. درحالت پیوسته

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{n} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

$m = N$ اگر

$$y(t) = \frac{1}{a_0} \left\{ \sum_{k=0}^{n} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} - \sum_{k=1}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} \right.$$

۲. ناپیوسته .



$$x[n] \xrightarrow{a} a x[n]$$

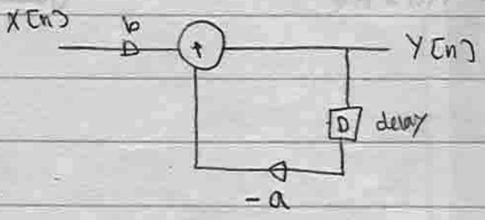
$$x[n] \longrightarrow \boxed{D} \longrightarrow \cancel{x[n-1]} \quad \frac{dx(t)}{dt}$$

مشتق گیر

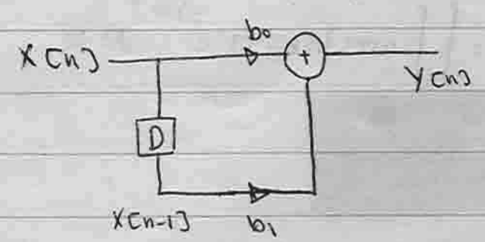
مثال)

$$y[n] + a y[n-1] = b x[n]$$

بلاک دیاگرامش را بکشید .



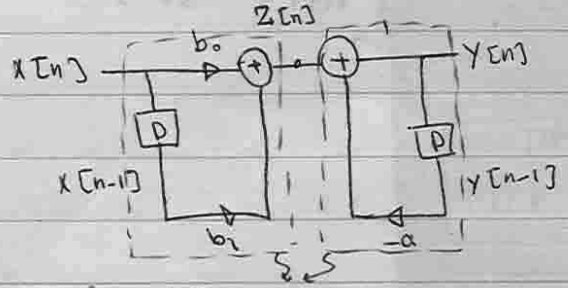
بلوک دیاگرام معادله را بنویسید : $y[n] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1]$



اگر [n-2] داشتیم 2 تا D می‌گذاریم .

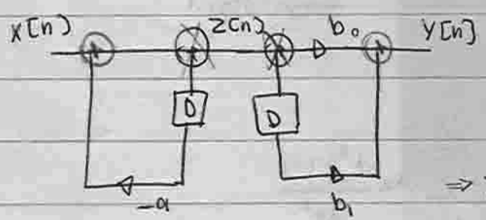
مثال : $y[n] + a y[n-1] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1]$

$y[n] = -a y[n-1] + b_0 x[n] + b_1 x[n-1]$



2 تا جعبه از که با هم سری شده اند جابجایشان (عوض)

می‌کشیم .



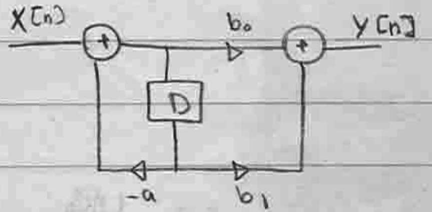
$$\begin{cases} z[n] = -a z[n-1] + x[n] \\ y[n] = b_0 z[n] + b_1 z[n-1] \end{cases}$$

$y[n-1] = b_0 z[n-1] + b_1 z[n-2]$

$\Rightarrow y[n] + a y[n-1] = b_0 z[n] + b_1 z[n-1] + a b_0 z[n-1]$

$+ a b_1 z[n-2]$

$= b_0 [\underbrace{z[n] + a z[n-1]}_{x[n]}] + b_1 [\underbrace{z[n-1] + a z[n-2]}_{x[n-1]}]$



ادغام شده

مثال $R(t) = Ae^{j(\omega_1 t + \phi_1)}$ به سیستم LTI داده شده است خروجی را محاسبه کنید .

* میانترم پنجشنبه **2-4**

▨ پاسخ یک سیستم با معادلات دیفرانسیل :

یک معادله با درجه‌ی n و ضرایب ثابت به صورت زیر است :

نشان دهنده‌ی مرتبه‌ی مشتق $H(w)$ است

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^{\textcircled{k}} y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k (t)}{dt^k} \quad (1)$$

بالاترین درجه‌ی معادله به بالاترین درجه‌ی $\frac{d^n (t)}{dt}$ بستگی دارد. در سیستم LTI می‌دانیم

$y(w) = H(w).x(w)$ [فقط برای LTI صادق است]

از طرفین رابطه‌ی (1) فوریه‌ی ترنسفورم می‌گیریم.

$$F\left\{\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt}\right\} = F\left\{\sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt}\right\}$$

$$\sum a_k F\left\{\frac{d^k y(t)}{dt}\right\} = \sum_{k=0}^{M} b_k F\left\{\frac{d^k x(t)}{dt}\right\}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{M} a_k (jw)^k Y(w) = \sum_{k=0}^{m} b_k (jw)^k X(w) \quad \Rightarrow \boxed{H(w) = \frac{Y(w)}{X(w)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k (jw)^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k (jw)^k}}$$

مثال)

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = x(t)$$

$$H(w) = \frac{1}{jw+a} \qquad h(t) = F^{-1}\{H(w)\} = e^{-at} u(t)$$

مثال)

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 2x(t)$$

از طرفین فوریه‌ی ترنسفورم می‌گیریم. (1)

$$H(w) = \frac{jw+2}{(jw)^2+4(jw)+3} = \frac{\frac{1}{2}}{jw+1} + \frac{\frac{1}{2}}{jw+3}$$

$$h(t) = F^{-1}\{H(w)\} = \frac{1}{2}e^{-t}u(t) + \frac{1}{2}e^{-3t}u(t)$$

▨ Bode Plot دیاگرام بُد

در سیستم LTI داریم $Y(w) = H(w).X(w)$

$$|Y(w)| = |X(w)|.|H(w)|$$

$$\angle Y(w) = \angle X(w) + \angle H(w)$$

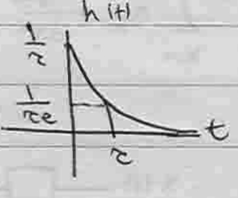
برای معادلات درجه‌ی اول :

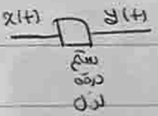
$$\tau \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

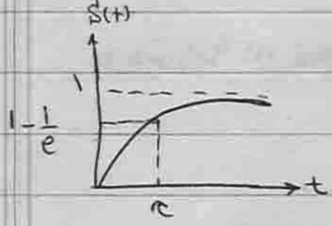
$$H(w) = \frac{1}{jw\tau+1} \qquad h(t) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} u(t)$$

$$S(t) = h(t) * u(t) = \left[1 - e^{-t/\tau}\right] u(t)$$

τ = time constant







سیستم در زمان $t=\tau$ به $\frac{1}{e}$ مقدار اولیه اش در $t=\infty$ می‌رسد.

● پاسخ پله را در سیستم :

به مقدار $1-\frac{1}{e}$ می‌رسد.

هر چقدر مقدار τ کوچکتر باشد، مقدار h(t) سریع‌تر تنزل می‌کند.

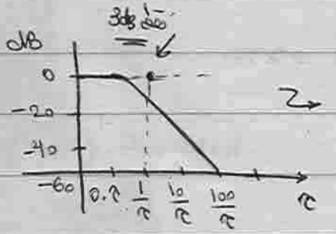
* در دیاگرام بُد :

$$(1)\quad \boxed{dB = 20\log|H(w)|} = 20\log\left|\frac{1}{jw\tau+1}\right| = -10\log\left[(w\tau)^2+1\right]$$

حال اگر $w\tau$ خیلی کوچکتر از 1 باشد :

$$* \begin{cases} w\tau \ll 1 \\ dB = 20\log[1] \approx 0 \end{cases}$$

$$* \begin{cases} w\tau \gg 1 \\ dB = 20\log(w\tau) - 20\log(\tau) \end{cases}$$



* معادله خطی درجه‌ی اول.

$$dB = 20\log|H(w)|\Big|_{w=\frac{1}{\tau}} = -10\log 2 = \boxed{-3\,dB}$$

* در فرکانس های پایین یعنی $\omega \ll \frac{1}{\tau}$ مقدار dB ثابت می باشد با توجه به معادله‌ی (1) برای صفر dB است. در فرکانس های بالا $\omega > \frac{1}{\tau}$ خطی است که به ازای هر دهه τ مقدار 20 dB تنزل می کند.

* این به این معناست که مقدار 2 خط ثابت $\log(w), 20\log|H(w)|\big|_{w=0}$ در مقدار $\omega = \frac{1}{\tau}$ به یکدیگر را ملاقات می‌کنند، و شیب خط در این مقدار 3dB تنزل می‌کند. به همین دلیل نقطه‌ی $\omega = \frac{1}{\tau}$ را فرکانس شکست می‌گویند و به نقطه‌ی 3dB مشهور است.

● فیلتر:

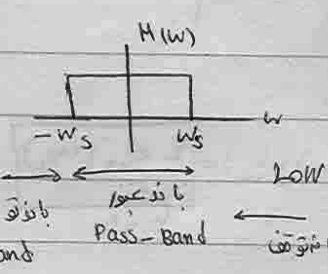
فیلتر یک صافی است. حال یک سیستم LTI درجه‌ی اول را در نظر می‌گیریم که فرض می‌کنیم کانولوشن ورودی با پاسخ ضربه‌ی سیستم h باشد یا به عبارت دیگر فوریه ترنسفورم خروجی برابر فوریه‌ی ترنسفورم ورودی ضرب در پاسخ فرکانس سیستم است.

فیلتر ایده‌آل پایین‌گذر

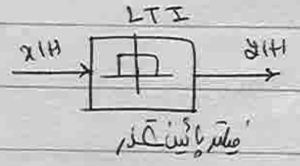
سه نوع سیستم LTI را بررسی می‌کنیم: ۱- فیلترهای ایده‌آل

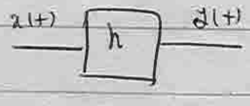
$$\begin{cases} H(w)=1 & |w|<\textcircled{w_s} \\ 0 & |w|>w_s \end{cases}$$

یک سیستم LTI را در نظر بگیرید که $H(w)$ آن به ازای رابطه‌ی فوق باشد، برای فرکانس‌های [illegible] مقدار صفر است.



فیلتری را با پاسخ ضربه‌ی فوق فیلتر پایین‌گذر گویند. Low-Pass-Filter





$$\underbrace{y(t)=kx(t)}_{\text{تابع ویژه}}$$

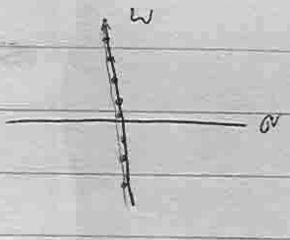
$$x(t)=e^{st}$$

$$\boxed{y(t)}=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)e^{s(t-\tau)}d\tau$$

$$=e^{st}\,(\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)e^{-s\tau}d\tau}_{H(S)})$$

$$\begin{cases} H(S)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t)e^{-st}dt \\ S=\sigma+jw \end{cases}$$



* تبدیل فوریه‌ی قطار ضربه:

$$\boxed{x(w)=\frac{1}{T}2\pi\delta(w-kw_0)}$$

تابع	تبدیل فوریه
$x(t)$	$x(w)$
$x(t-t_0)$	$e^{jwt_0}x(w)$
$e^{jw_0t}x(t)$	$x(w-w_0)$

	$x(w)$
$\delta(t)$	1
1	$2\pi\delta(w)$
e^{jkw_0t}	$2\pi\delta(w-\overset{k}{w_0})$
$\Sigma\delta(t-kT)$ $=\text{rep}_T\,\delta(t)$ فرکانس $\leftarrow T$	$\frac{2\pi}{T}\,\text{rep}_{w_0}\,\delta(w)$ $w_0 \rightarrow \frac{2\pi}{T}$
$\text{rep}_T\,x(t)$	$\frac{2\pi}{T}\,\text{comb}_{\frac{2\pi}{T}}\,X(w)$
$\text{rect}(t)$	$\text{sinc}(f)$

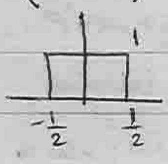
$x(at)$	$\frac{1}{a}x(\frac{w}{a})$
$\text{sinc}(t)$	$\text{reqt}(f)$
$\int_{-\infty}^{\infty}\overset{\text{sinc}^2(t)}{|x(t)|^2}dt$	$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|x(w)|^2dw$
$\Lambda(t)$	$\text{sinc}^2(f)$
$\frac{d}{dt}x(t)$	$jw\,x(w)$

$$rep_T(x(t)) = rep_T(\delta(t)) * x(t)$$

$$= \frac{2\pi}{T}\, rep_{\frac{2\pi}{T}}\, \delta(w) \cdot X(w)$$

$$= comb_{\frac{2\pi}{T}}\, X(w)$$

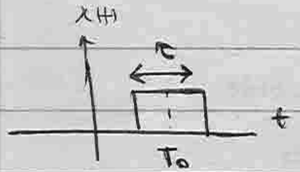
(rect(t))



[illegible] $\xrightarrow{}$ $$x(w) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-jwt}\, dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-jwt}\, dt = -\frac{1}{jw} e^{-jwt} \Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}$$

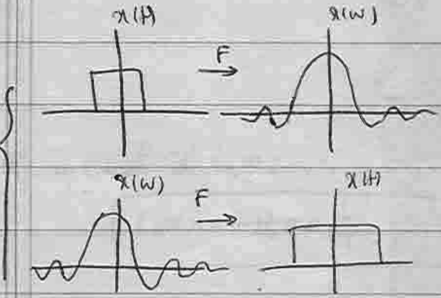
$$= \boxed{\frac{j}{w}\left(e^{-jw/2} - e^{jw/2}\right)} \rightarrow \left(\frac{e^{jw/2} - e^{-jw/2}}{2j}\right)\left(\frac{2}{w}\right) = \boxed{\frac{2}{\underset{\searrow 2\pi f}{w}} \sin(w/2)}$$

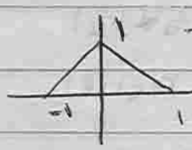
$$= \frac{\sin(\pi f)}{\pi f} = \boxed{sinc(f)}$$



$$rect\left(\frac{t - T_0}{\tau}\right) \xrightarrow{F} \tau\, sinc(f\tau) e^{-j2\pi f T_0}$$

$$\left\{\begin{array}{l} rect(t) \rightarrow rect\left(\frac{t}{\tau}\right) \rightarrow rect\left(\frac{t - t_0}{\tau}\right) \\ b \\ - rect(t) \rightarrow rect(t + t_0) \rightarrow rect\left(t - \frac{t_0}{\tau}\right) \rightarrow rect\left(\frac{t + t_0}{\tau}\right) \end{array}\right.$$



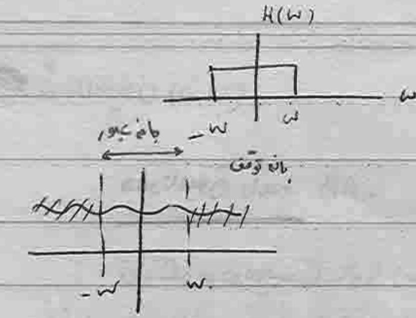


$\Lambda(t)$

$$: rect(t) * rect(t) = sinc^2(f)$$

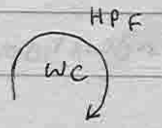
▨ فیلتر پائین گذر ایده آل (L.P.F)

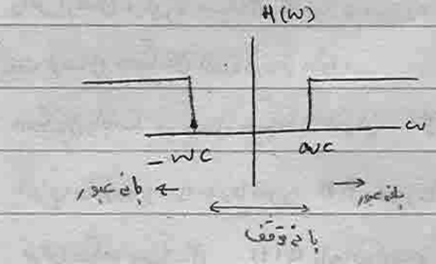
$H(j\omega)=\begin{cases}1 & |\omega|\leq \omega\\ 0 & |\omega|>\omega\end{cases}$



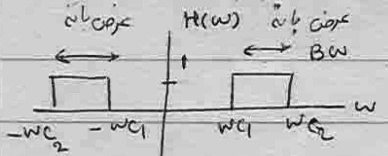
▨ فیلتر بالا گذر : High pass filter (H.P.F)

$H(\omega)=\begin{cases}1 & \omega>\omega c\\ 1 & \omega<-\omega c\\ 0 & o.\omega\end{cases}$





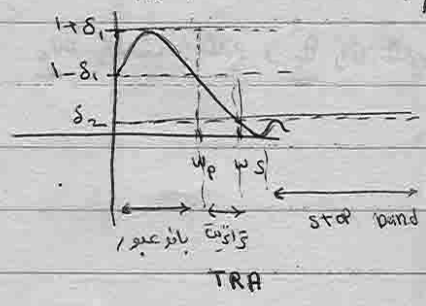
▨ فیلتر میان گذر ؛ Band pass filter (B.P.F)



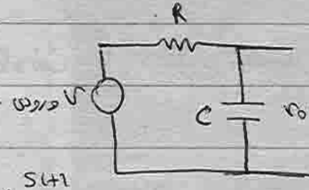
▨ فیلتر غیر ایده آل :

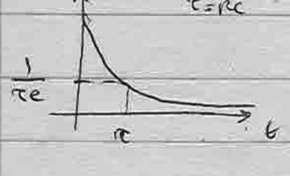
طبعاً ساخت فیلترهای شارپ دارای مشکلاتی می باشد . و در ضمن ما می خواهیم سیستم ما (فیلتر) گاهی دارای نواحی مانند ترانزیشن یا به عبارت دیگر باند گذر داشته باشد یا کمتری روی باند توقف داشته باشیم .

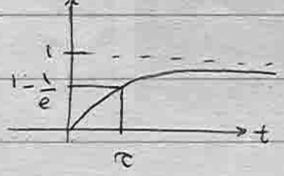
- فیلتر پائین گذر غیر ایده آل :

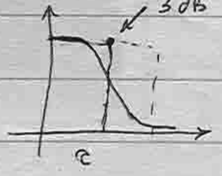


* مثال مدار RC :





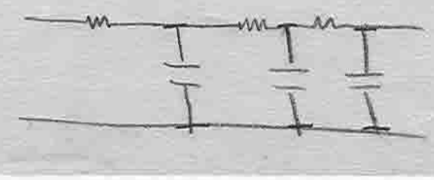


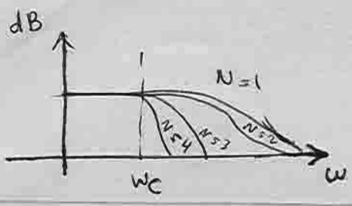


Butter-worth Filter

$$|BW|=\frac{1}{1+\left(\omega/\omega c\right)^{2N}}$$

تعداد المان های ذخیره کننده





مُدولاسیون (ضرب)

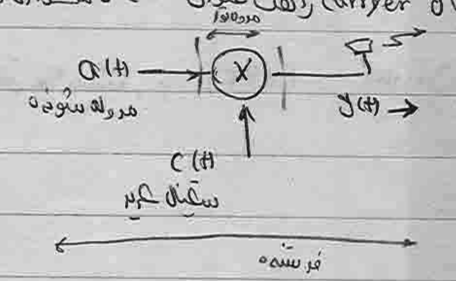
مدولاسیون دامنه AM:

وقتی که ما می خواهیم سیگنالی را (صوت، تصویر یا دیتا) از نقطه ای (فرستنده/مبدا) به نقطه ای دیگر ارسال کنیم (گیرنده/مقصد) بر اثر ارسال، انرژی سیگنال طبیعتاً ضعیف و نهایتاً از بین می رود. (با توجه به مسافت) لذا از تکنیکی به عنوان مُدولاسیون جهت ارسال سیگنال استفاده می شود.

سیگنال را با یک سیگنال دیگر تحت عنوان carrier ترکیب می کنیم (مدوله می کنیم) و سیگنال حاصل را ارسال می کنیم.

در این فصل به بررسی مدولاسیون AM می پردازیم.

فرض کنید سیگنال a(t) را می خواهیم ارسال کنیم. سیگنال carrier را تحت عنوان c(t) نامگذاری می کنیم لذا داریم:



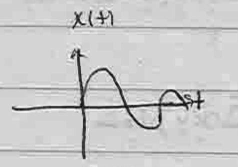
حال فرض کنیم سیگنال ما $\overset{x(t)}{f(t)}$ را می خواهیم مدوله کنیم:

$c(t) = \cos(\omega_c t + \theta_c)$, $a(t) = \overset{x(t)}{f(t)}$

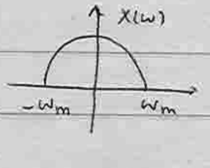
در نتیجه داریم:

$$y(t) = a(t)\cos(\omega_c t + \theta_c)$$

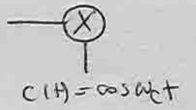
ω_c را فرکانس حامل و θ_c را فاز حامل می گویند.

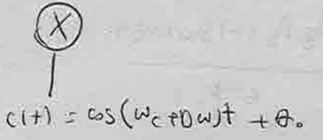


$$\Rightarrow y(t) = x(t)\cos(\omega_c t + \theta_c)$$



فرض می کنیم که x(t) و θ_c، نسبت به $\omega_c t$ خیلی به آهستگی تغییر می کنند (چون ω_c مقدار بالایی دارد).





* در آشکارسازی سنکرون در خیلی از موارد، گیرنده و فاز فرستنده با هم مساوی نیست و ممکن است دارای اختلاف فاز باشند. به طور مثال فرض کنید خطاهای کوچکی Δω برای فرکانس و θ₀ برای زاویه وجود داشته باشد. (در گیرنده).

$\Phi(t) = f(t)\cos\omega t$ فرستنده

? . $w(t) = f(t)\cos[(\omega_c+\Delta\omega)t+\theta_0] = f(t)\left(\cos\omega_c t + \cos[(\omega_c \pm \Delta)t, \theta_0]\right)$

$= \frac{1}{2} f(t)\cos[(\Delta \pm \omega)t+\theta_0] + \underbrace{\frac{1}{2} f(t)[(2\omega_c+\Delta\omega)t+\theta_0]}_{LPF\ (\text{حذف می‌شود})}$

فقط جزء دوم $2\omega_c \pm \Delta\omega$ با یک فیلتر پایین‌گذر را دارد. ولی در خروجی فیلتر خواهیم داشت:

$e_0(t) = \frac{1}{2} f(t)\cos[(\Delta\omega)t+\theta_0]$

آشکارسازی زمانی انجام پذیر است که $\Delta\omega = 0$ و $\theta_0 = 0$ باشد.

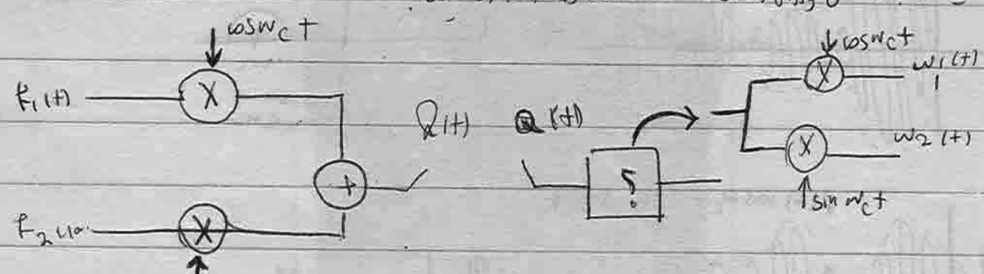
حال فرض می‌کنیم $\Delta\omega = 0$ باشد: مشاهده می‌شود که خروجی برابر است با $\frac{1}{2} f(t)\cos\theta_0$ و خروجی به مقدار θ_0 بستگی دارد. اگر $\theta_0 = 90$ به کلی خروجی از بین می‌رود. اگر مقدار کمی باشد سیگنال دارای تغییرات کمی خواهد بود ولی خطای فاز (θ_0) لزوماً مقدار مشخصی نمی‌باشد و در بعضی موارد می‌تواند کاملاً تصادفی باشد.

اگر خطای فرکانس نداشته باشیم و فقط خطای فاز داشته باشیم قابل تصحیح است.

فرض کنید $\theta_0 = 0$ باشد ⇐ داریم: $e_0(t) = \frac{1}{2} f(t)\cos(\Delta\omega)t$

سیگنال به صورت کلی دارای اغتشاش می‌شود (با یک شکل نیست. تعدیل

* مثال)



* برای آشکارسازی دقیقاً
عکس عملیات مرحله اول انجام
می‌گیرد.

$e(t) = f_1(t)\cos\omega_c t + f_2(t)\sin\omega_c t$

$w_1(t) = \Phi(t)\cos\omega_c t = [f_1(t)\cos\omega_c t + f_2(t)\sin\omega_c t]\cos\omega_c t$

$w_2(t) = \Phi(t)\sin\omega_c t = [f_1(t)\cos\omega_c t + f_2(t)\sin\omega_c t]\sin\omega_c t$

$$w_1(t) = \frac{1}{2} f_1(t) + \underbrace{\frac{1}{2} f_1(t) \cos 2w_c t}_{2PF} + \underbrace{\frac{1}{2} f_2(t) \sin 2w_c t}_{2PF}$$

$$w_2(t) = \frac{1}{2} f_1(t) \sin 2w_c t + \frac{1}{2} f_2(t) - \frac{1}{2} f_2(t) \cos 2w_c t$$

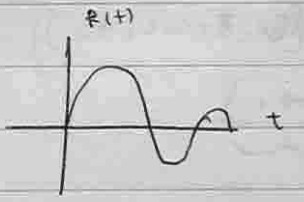
بعد از عبور، از فیلتر پایین گذر، با فرض اینکه $w<w_c$ خواهیم داشت

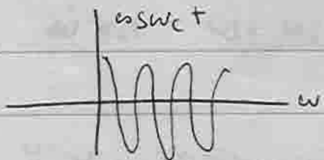
$$e_1(t) = \frac{1}{2} f_1(t)$$

$$e_2(t) = \frac{1}{2} f_2(t)$$

پایان ن ۱.

● آشکارسازی async :





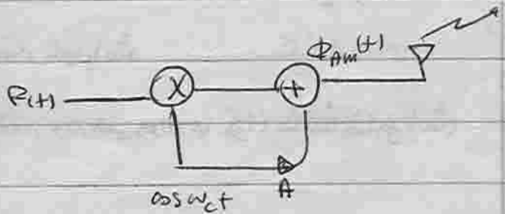
$w_c >>$

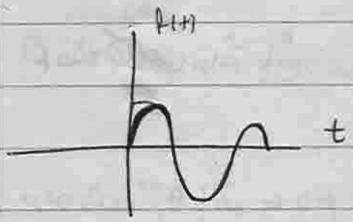
f(t) نسبت به $w_c t$ خیلی به آهستگی تغییر می‌کند،

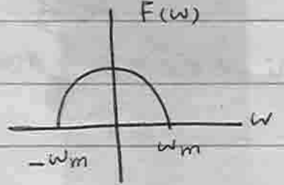
جهت آشکارسازی async یا تشخیص پوش سیگنال را به همراه خود کاریر ارسال می‌کنیم.

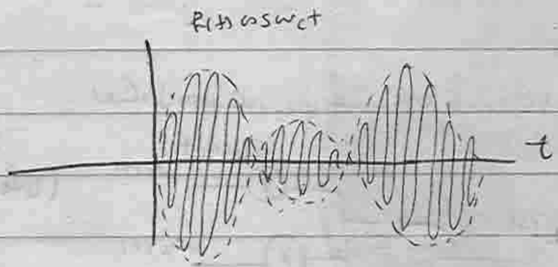
AM modulation whith lang carrier.

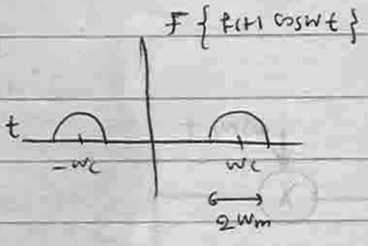
$$\phi_{AM}(t) = f(t) \cos w_c t + A \cos w_c t$$

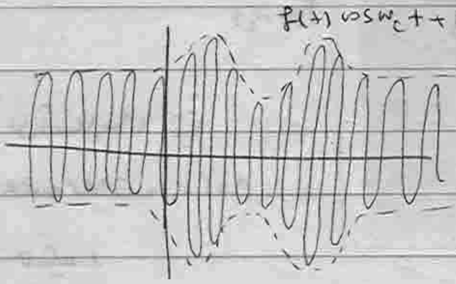


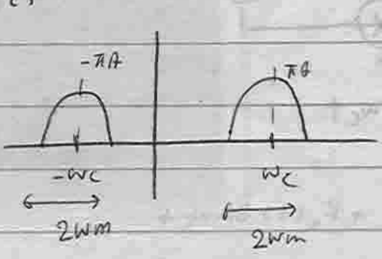










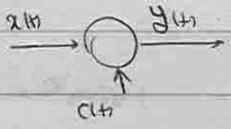


20

H.w 6.15 a
6.22 a,b
6.23 a,b
6.24

8.1, 8.3, 8.4 (2,21)

$y(t) = x(t)\cos(w_c t + \theta_c)$



$y(t) = x(t)\,c(t)$

(دامنه)

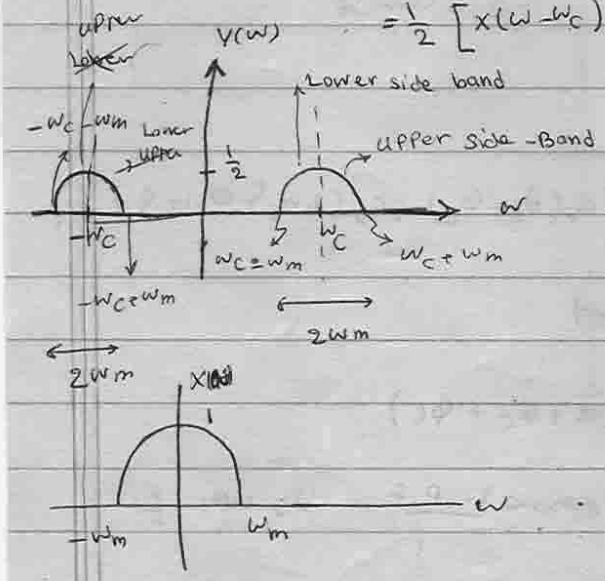
مدولاسیون سینوسی ← $c(t) = \cos(w_c t + \theta_c)$

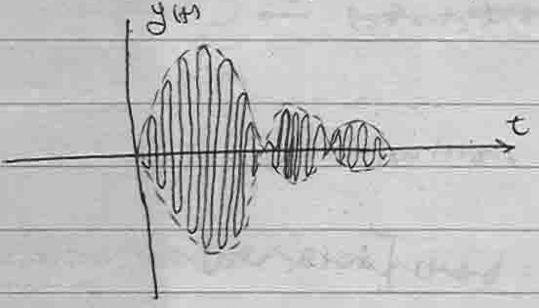
x(t) را سیگنال مدوله شونده، $\overset{c(t)}{\cos(w_c t+\theta_c)}$ را سیگنال حامل می‌گویند.

y(t) را سیگنال مدوله شده می‌نامند. فرض کنید $\theta_c = 0$ در نتیجه خواهیم داشت: $y(t) = x(t)\cos w_c t$

① به اسپکتروم سیگنال نگاه می‌کنیم (طیف سیگنال را):

$$Y(w) = F\{x(t)\cos w_c t\}$$
$$= \frac{1}{2}\left[X(w-w_c) + X(w+w_c)\right]$$



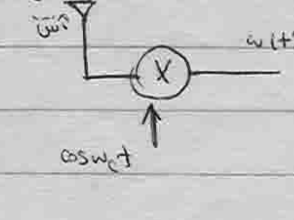


② آشکارسازی (Demodulation):

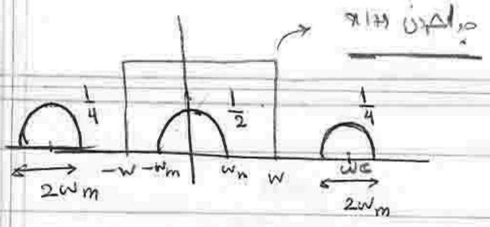
حال می‌خواهیم از سیگنال‌های دریافتی، x(t) را به دست آوریم (آشکارسازی).

آشکارسازی 2 نوع است سنکرون و آسنکرون: 1- سنکرون:

در آشکارسازی سنکرون سیگنال دریافتی را در همان حامل ارسالی دقیقاً ضرب می‌کنیم سپس اسپکتروم آن را ملاحظه می‌کنیم و سیگنال حاصل را از یک فیلتر پایین گذر عبور می‌دهیم و سیگنال x(t) را دقیقاً به دست می‌آوریم.



$$w(t) = y(t)\cos w_c t = x(t)\cos^2 w_c t = \frac{1}{2}\left[x(t)\left[1+\cos 2w_c t\right]\right]$$
$$= \frac{1}{2}x(t) + \frac{1}{2}x(t)\cos 2w_c t$$



از طرفین فوریه تبدیل فوریه می‌گیریم (طیف انرژی سیگنال را ملاحظه کنیم).

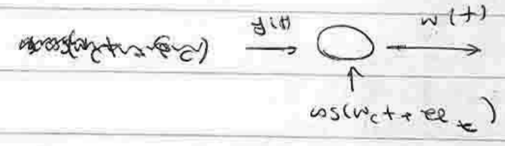
* شرط آشکارسازی:

این است که $w_c >> w_m$ در نظر گرفته شود تا overlap نداشته باشد.

~~مثال~~ 2 سیگنال ~~$f_1(t)$ و $f_2(t)$~~ فرض کنید اسیلاتور (که در فرستنده) دارای فاز θ_c باشد:

$y(t) = x(t)\cos(w_c t + \theta_c)$

جهت آشکارسازی:



$w(t) = x(t)\cos(w_c t + \theta_c) . \cos(w_c t + \varphi_c) \quad = \frac{1}{2}\left[\cos(\theta_c - \varphi_c) + \cos(2w_c t + \theta_c + \varphi)\right]$

~~$= \frac{1}{2}x(t)\left[\cos(\theta_c - \varphi_c) + \cos(2w_c t + \theta_c + \varphi_c)\right]$~~

$= \frac{1}{2}x(t)\cos(\theta_c - \varphi_c) + \frac{1}{2}x(t)\cos(2w_c t + \theta_c + \varphi_c)$

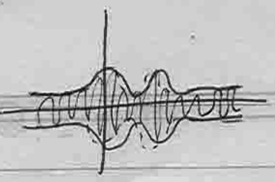
اگر $w(t)$ را از L.P.F عبور دهیم خروجی برابر است با:

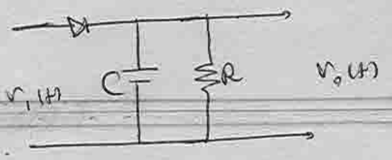
$= \frac{1}{2}\cos(\theta_c - \varphi_c)x(t)$

⇐ آشکارسازی امکان‌پذیر نمی‌باشد مگر اینکه $\boxed{\theta_c - \varphi_c = 2k\pi}$

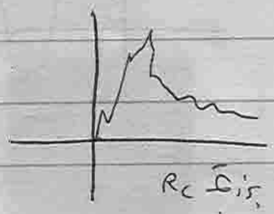
مثال) 2 سیگنال $f_1(t)$ و $f_2(t)$ به وسیله‌ی 2 کاریر مختلف با یک فرکانس کاریر مدوله شده‌اند. سیستم آشکارسازی را مشخص کنید.

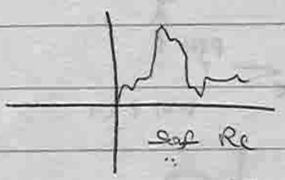
21 $A \, (\min f(t))$





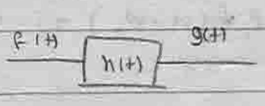
* سیگنال ورودی خازن را تا حداکثر مقدارش شارژ می‌کند و در طول مثبت سیگنال به محض اینکه ورودی سیگنال از مقدار max افت کرد دیود خاموش می‌شود. وولتاژ سیگنال به طور آهسته در ~~مدل~~ مقاومت تخلیه می‌شود تا مقدار مثبت سیگنال بعدی که سیگنال ورودی بزرگتر از ولتاژ خازن شد دوباره دیود روشن می‌شود و خازن مقدار جدید max شارژ می‌شود و همین طور این روند ادامه پیدا می‌کند.





* (امتحان)

مثال) سیگنال $f(t) = Ae^{j(\omega_1 t + \Phi_1)}$ به یک سیستم L.T.I داده شده است، خروجی را حساب کنید.



$$\begin{cases} y(t) = f(t) * h(t) \\ Y(\omega) = F(\omega) \cdot H(\omega) \end{cases}$$

$$Ae^{j\overset{s}{\omega} t + j\Phi_1 j \Phi_1} \, , \, e$$

$$Ae^{st} \cdot e^{j\phi_1} \Rightarrow \frac{A}{\omega - \omega_0}$$

f(t) پریودیک است ; $\sum F_n e^{jnw_0 t} dt \, , \, \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

$$y(t) = f(t) * h(t) = \sum_n F_n e^{jnw_0 t} * h(t) = \int h(\tau) \sum F_n e^{jnw_0(t-\tau)} d\tau$$

$$= \sum_n F_n \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-jnw_0 \tau} d\tau \, e^{jnw_0 t}$$

$\underset{\sim\sim\sim}{nw_0 \triangleq w}$ $$= \sum_n F_n e^{jnw_0 t} H(w) = \sum_n F_n H(nw_0) e^{jnw_0 t}$$

$$\boxed{G_n \triangleq F_n H(nw_0)}$$

$$g(t) = \sum_n G_n e^{jnw_0 t} \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

* میانگین ورودی قدرت برابر است با :

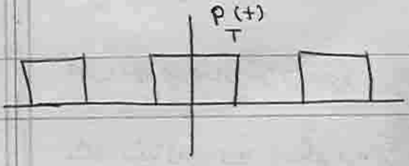
$$\boxed{\begin{aligned} P_f &= \text{قدرت ورودی} = \sum_n |F_n|^2 \\ P_g &= \text{قدرت خروجی} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |G_n|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |H(nw_0)|^2 |F_n|^2 \end{aligned}}$$

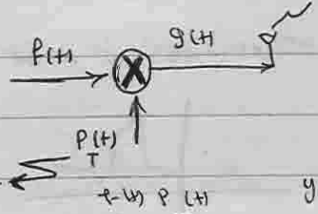
$u(t) = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$ ~~[illegible]~~

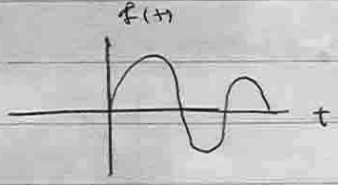
$\pi\delta(\omega)$

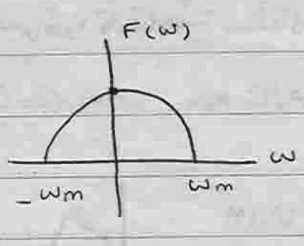
تولید سیگنال: (DSB-SC)

می‌خواهیم یک سیگنال DSB-SC تولید کنیم که بسیار نزدیک به تئوری نمونه‌برداری است.

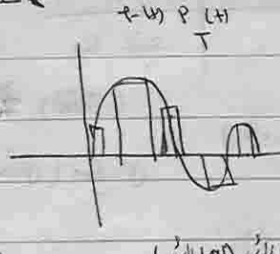






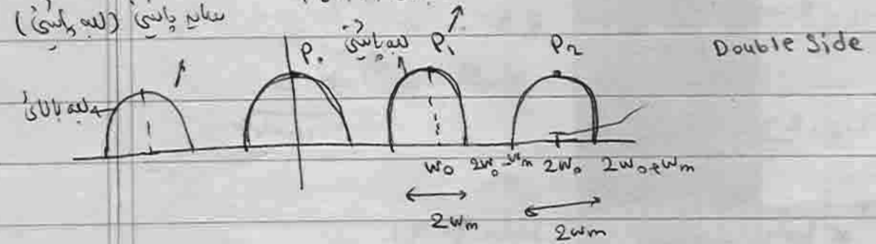


$$y(t) = f(t) P_T(t)$$



$$F\{y(t)\} = F\{f(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n e^{jn\omega_0 t}\} = \sum_n P_n F(\omega - n\omega_0) \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$= \dots + P_{-1} F(\omega + \omega_0) + P_0 F(\omega) + P_1 F(\omega - \omega_0) + \dots$$



Double Side

مولتی پلکسینگ:

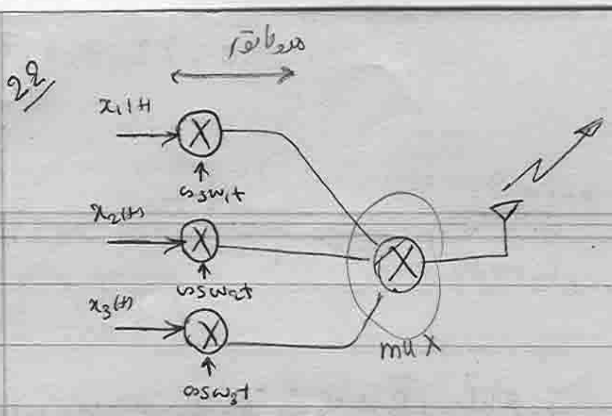
1-FDM

2-TDM

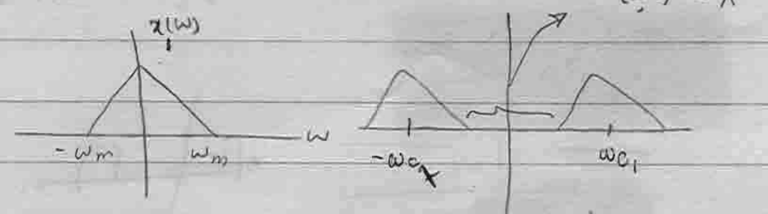
در تکنیک FDM (Dedicate) به هر user یک کانال اختصاص می‌دهیم منظور از کانال عرض باند (BW) است و کانال در تمام حالات اختصاص می‌یابد و فقط جهت مکالمه (انتقال صدا یا تصویر یا دیتا) به همان user به خصوص اختصاص دارد.

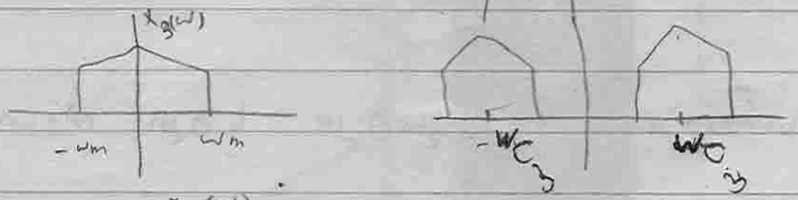
لذا هرگاه user استفاده نکند عرض باند تلف می‌شود و user دیگر که حق استفاده از آن را ندارد.

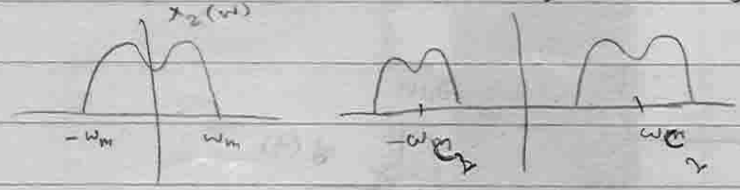
چند سیگنال $x_1(t)$ و $x_2(t)$ و ... را داریم و به هر کدام به ترتیب فرکانس‌های ω_1 و ω_2 و ... را تخصیص می‌دهیم.

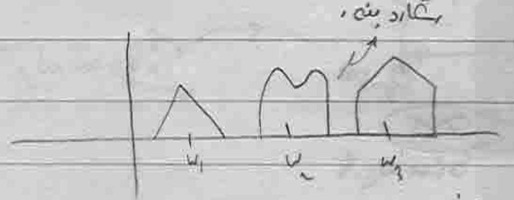


* گارد بند

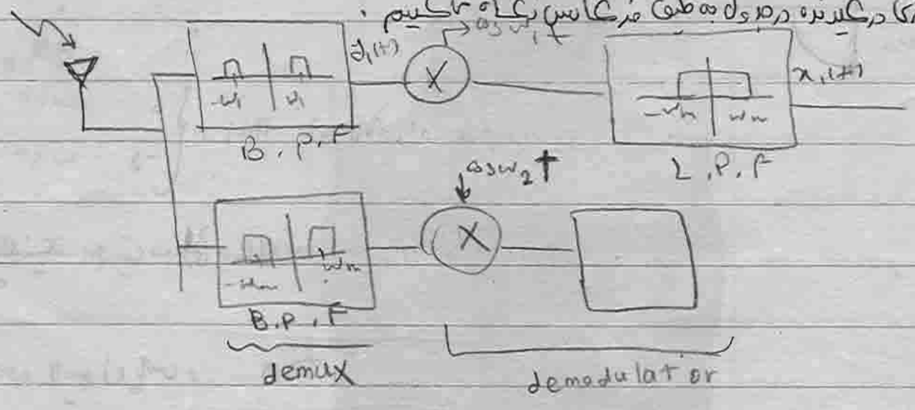




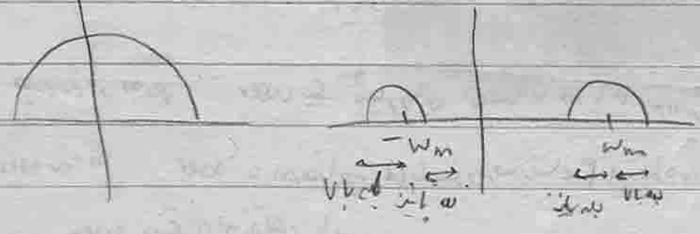




جهت آشکارسازی در گیرنده در حوزه به طرف فرکانس نگاه می‌کنیم .

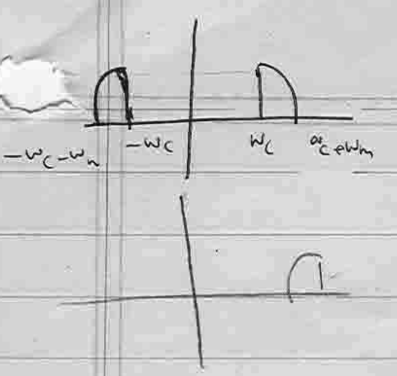


تصویر سیگنال SSB (single side band)



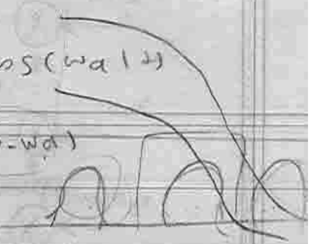
7.1, 7.2, 7.3, 7.6, 7.20 (9)

$Y_u(\omega)$ باند بالای



$(x(t)\cos(\omega_a t) + y(t)\cos(\omega_b(t))\ )\cos(\omega_a t)$

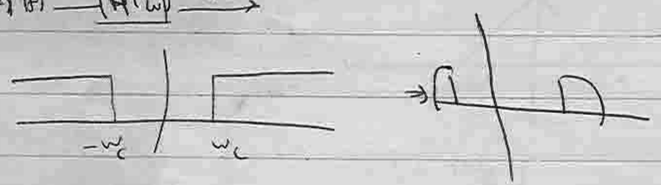
$\frac{1}{2}x(t) + \frac{1}{2}\cos(2\omega_a t)\ \frac{1}{2}y(t)\cos(\omega_b-\omega_a)$



یکی از راه‌ها این است که فیلتر شارپ بالا گذر بگذاریم.

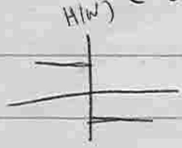
$x(t) \rightarrow \boxed{H(\omega)} \xrightarrow{H(t)}$

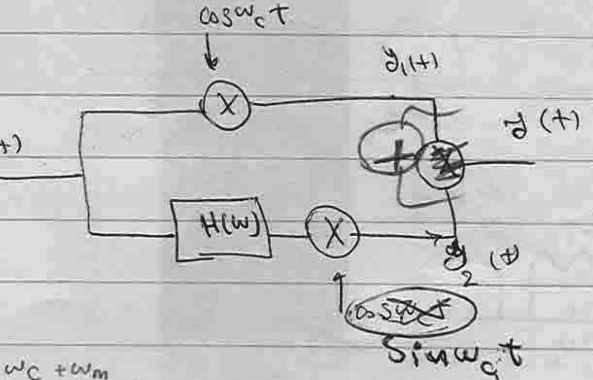
cos(t) →



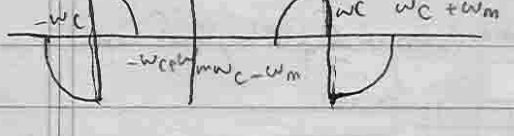
راه دیگر تولید $y_u(t)$ یا $y_l(t)$ به این ترتیب است که فیلتری با مشخصات زیر استفاده شود.

$$H(\omega) = \begin{cases} -j & \omega>0 \\ +j & \omega<0 \end{cases}$$





تولید لبه پایینی



تولید لبه‌ی بالای

اگر $H(\omega) = \begin{cases} j & \omega>0 \\ -j & \omega<0 \end{cases}$ باند بالایی را می‌دهیم در خروجی

مولتی‌پلکسینگ اهمیت بسزایی در کاهش قیمتها در مخابرات دارد.

● مدولاسیون پالس و TDM

PAM (

TDM (Time Division multiplexing)

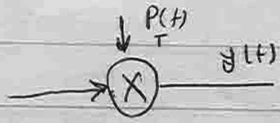
در تکنیک TDM ابتدا فریم را تعریف می‌کنیم که هر فریم به تعدادی Slote (شیار زمانی) تقسیم شده و به هر user یک شیار زمانی اختصاص می‌یابد. عیبش مشابه FDM این است که کانال اختصاص داده شده به user اختصاصی می‌باشد و در صورت عدم استفاده‌ی user از کانال مربوطه، آن کانال نمی‌تواند به user دیگری اختصاص یابد.

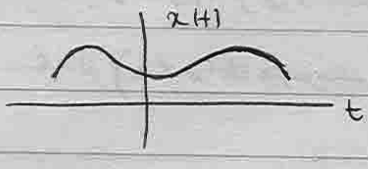
23

فوریه ترنسفورم
مدولاسیون
نمونه برداری
لاپلاس

چهارشنبه 3/13
ساعت 3:30 _ 5:30
اتاق شماره 1

سیگنال x(t) را در نظر بگیرید که توسط سیگنال پریودیک $P_T(t)$ مدوله شده است. (نمونه برداری شده).

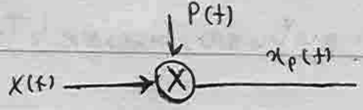




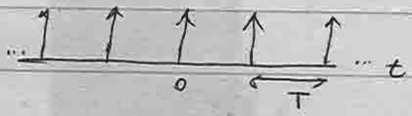
* فصل 8:

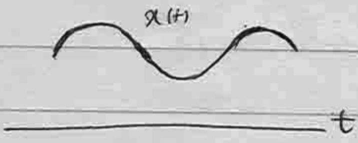
▨ نمونه برداری

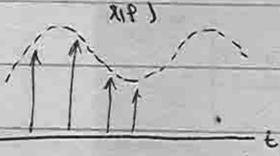
از سیگنال x(t) در فواصل مساوی می خواهیم نمونه بگیریم:



$$P(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT), \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

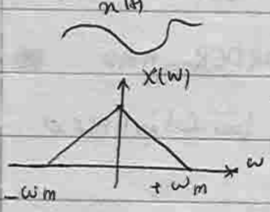






$$X_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\,\delta(t-nT)$$

از طرفی رابطه‌ی زمانی فوریه ترنسفورم را بگیریم. (طیف انرژی یا طیف فرکانسی سیگنال) را نگاه می کنیم.

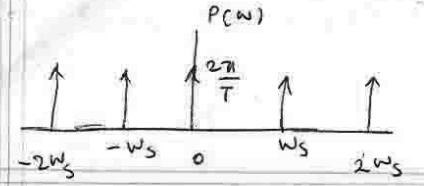


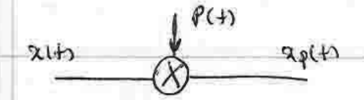
$$X_p(\omega) = \frac{1}{2\pi}\left[X(\omega) * P(\omega)\right]$$

$$P(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} P_n\,\delta(\omega - k\omega_s), \quad \omega_s = \frac{2\pi}{T}$$

$$= \frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s)$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\Rightarrow X_p(\omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega - k\omega_s) \\ &P(\omega) = \frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s) \end{aligned}}$$





برای اینکه سیگنال اصلی را از نمونه بازسازی کنیم لازم است از یک فیلتر پائین گذر استفاده شود و به منظور بازسازی سیگنال (عدم تداخل هارمونیک های مختلف با هم) باید:

$\omega_s - \omega_m > \omega_m$

یا

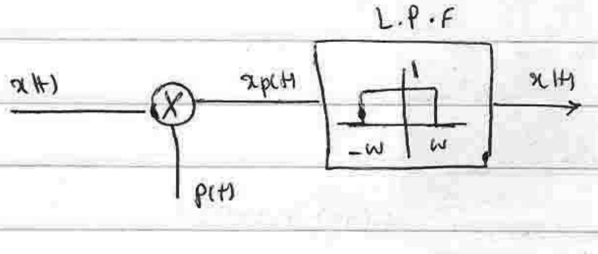
$\boxed{\omega_s > 2\omega_m}$ } رابطه‌ی نمونه برداری

اگر $x(t)$ سیگنالی $X(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \omega_m \\ 0 & |\omega| > \omega_m \end{cases}$ در این صورت

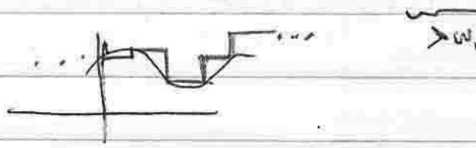
سیگنال به صورت کامل قابل بازسازی از نمونه آن می باشد اگر $\omega_s > 2\omega_m$ ، ω_s را فرکانس نمونه برداری و

T_s را پریود نمونه برداری می‌نامیم:

$$\begin{cases} f_s = \frac{1}{T_s} \ \text{یا} \ 2\pi f_s = \frac{2\pi}{T_s} \ \text{یا} \ \boxed{\omega_s = \frac{2\pi}{T_s}} \\ \Rightarrow \omega_s = 2\pi f_s \end{cases}$$

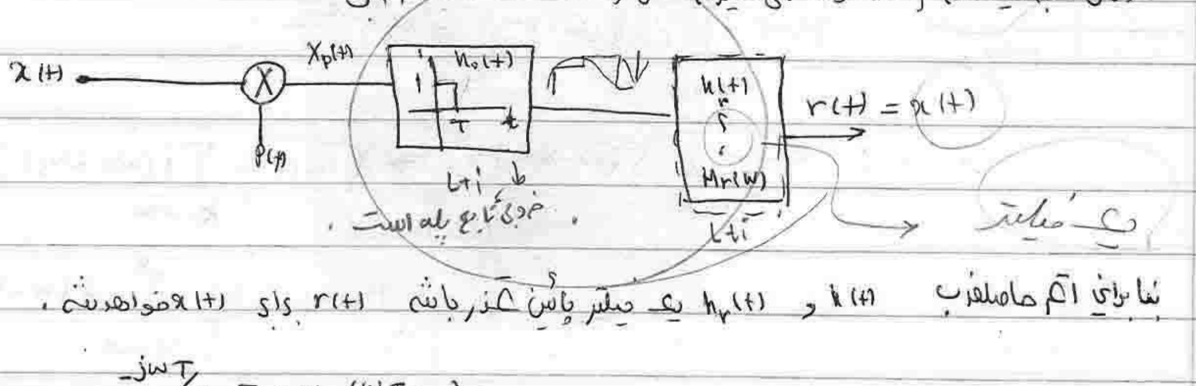


بنابراین اگر خروجی را از یک فیلتر پائین گذر با عرض باند $\omega_m < \omega < \underbrace{\omega_s - \omega_m}_{> \omega_m}$ این سیگنال 100٪ قابل بازسازی می باشد.



ZERO_ORDER_HOLD

در عمل ابتدا یک نقطه را که نمونه می گیرند آن را نگه می‌دارد تا مقدار بعدی



بنابراین اگر حاصلضرب $h(t)$ و $h_r(t)$ یک فیلتر پائین گذر باشد $r(t)$ برابر $x(t)$ خواهد شد.

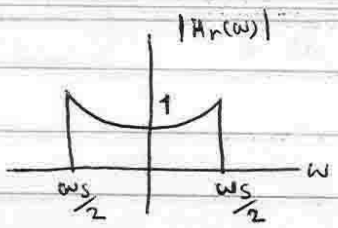
$$H_0(\omega) = e^{-j\omega T/2}\left[\frac{2\sin(\omega T/2)}{\omega}\right]$$

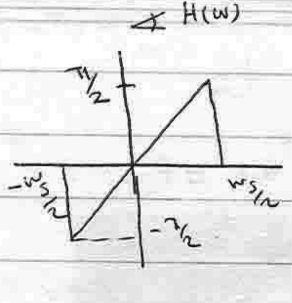
* از آنجا: $H_0(\omega) \times H_r(\omega) = H(\omega)$ که

$H(\omega)$ فیلتر پائین گذر است با عرض باند ω.

$$H_r(\omega) = \frac{e^{j\omega T/2} \cdot H(\omega)}{\left[\frac{2\sin(\omega T/2)}{\omega}\right]}$$

$\begin{cases} 9.1\,(b, f, g) \\ 9.2\,(1, 3) \\ 9.4\,(c, f) \end{cases}$



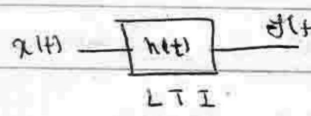


$\omega_s = \frac{2\pi}{1000} = 2000\pi$

▨ لاپلاس ترانسفورم :

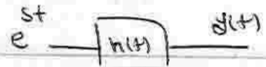
با استفاده از لاپلاس T می توانیم سیستم های LTI را از نقطه نظر پایداری، علیت... فیزیکی و... بهتر و دقیق تر بررسی کنیم.

همان طور که در تبدیل فوریه ملاحظه کردیم اگر یک سیستم LTI داشته باشیم و ورودی سیستم را برابر $x(t)$ بگیریم، خواهیم داشت :



$$y(t) = x(t) * h(t)$$

فرض می کنیم $x(t) = e^{st}$ که s یک عدد مختلط باشد.



$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)\, h(\tau)\, d\tau = \int e^{s(t-\tau)}\, h(\tau)\, d\tau$$

$$= e^{st} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s\tau}\, h(\tau)\, d\tau = e^{st} \cdot H(s)$$

جایی که :

$$H(s) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} e^{s\tau}\, h(\tau)\, d\tau$$

حال اگر $s = j\omega$ یعنی قسمت حقیقی آن صفر باشد داریم :

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau}\, h(\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau = \mathcal{F}\{h(t)\}$$

در حالت کلی $\underbrace{s = \sigma + j\omega}$ که σ قسمت حقیقی و ω قسمت موهومی اش می باشد، لذا تعریف می کنیم :

$$\boxed{X(s) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt}$$

$$X(s) \triangleq \int x(t)\, e^{-st}\, dt$$

رابطه فوق به عنوان لاپلاس T معروف است و به شکل زیر نمایش داده می شود .

$$X[s] = \mathcal{L}[x(t)]$$

اگر $s = j\omega$ باشد لاپلاس T تبدیل به فوریه ترنسفورم می شود .

یا به عبارت دیگر

$$X(s)\Big|_{\substack{s=j\omega \\ \sigma=0}} = F\{x(t)\}$$

$$X(s)\Big|_{s=\sigma+j\omega} = X(\sigma+j\omega) \triangleq \int x(t)\, e^{-st}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-(\sigma+j\omega)t}\, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-\sigma t} \cdot e^{-j\omega t}\, dt = F\{x(t)\, e^{-\sigma t}\}$$

با توجه به رابطه‌ی فوق نقش روی تبدیل $\sigma<0$ یا $\sigma>0$ خواهد بود،

توجه داشته باشیم که فوریه ۲ برای تمام سیگنال‌ها ممکن است تقارب نکند (قابلیت انتگرال گیری نباشد)

در حالی که لاپلاس برای بعضی از مقادیر $\sigma = \mathrm{Real}\{s\}$ تقارب کند در حالی که فوریه تقارب نمی‌کند. به طور مثال:

$$x(t) = e^{-at} u(t)$$

$$\boxed{F\{x(t)\} = F\{e^{-at} u(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-at}\, e^{-j\omega t}\, dt = \frac{1}{a+j\omega} \quad a>0}$$

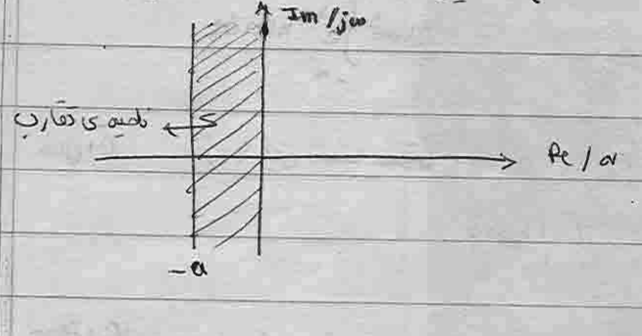
* در ضمن توجه داشته باشید فوریه‌ی $x(t)$ را از حالا به بعد با $X(j\omega)$ نشان می‌دهیم که بیان آن است $\underline{\underline{\sigma=0}}$

$$X(s) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}\, e^{-st}\, u(t)\, dt = \int_0^{\infty} e^{-(a+s)t}\, dt = \frac{1}{s+a}$$

$$\mathrm{Re}\{s\} > -a$$

در لاپلاس چون s یک عدد مختلط می‌باشد $s=\sigma+j\omega$ دارای برای آنکه ~~...~~ سیگنال $x(t)$ دارای لاپلاس باشد باید در صفحه‌ی S ناحیه‌ای را که تقارب می‌کند (قابلیت انتگرال گیری داشته باشد) را مشخص می‌کنیم.

ناحیه‌ی تقارب را ROC (Region of convergence) می‌گوییم صفحه‌ی S به شکل زیر است.



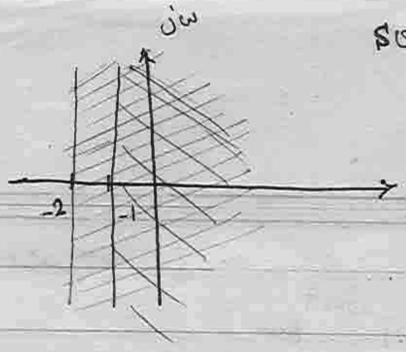
مثال) لاپلاس ۲ عبارت را حساب کنید:

$$x(t) = [3e^{3t} - 2e^{-t}]\, u(t) \qquad -(s+2) \quad s+2>0 \Rightarrow s>-2$$

$$X(s) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} [3e^{-2t} - 2e^{-t}]\, e^{-st}\, u(t)\, dt = \frac{3}{s+2} - \frac{2}{s+1}$$

$$\int_0^{\infty}$$

$$e^{-2t} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s+2} \quad \mathrm{Re}\{s\} > -2 \qquad e^{-t} u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s+1} \quad \mathrm{Re}\{s\} > -1$$



فصل مشترک برای مسئله

$\Rightarrow$ $\boxed{Re\{S\} > -1}$

9.15
9.17(a)
9.23
9.24
9.25
9.27

* اگر فصل مشترک نداشته اصلاً لاپلاس نمی‌شود گفت.

در لاپلاس T، $X(S) = \frac{N(S)}{D(S)}$

ریشه های مخرج را با "x" و ریشه های صورت را با "o" نشان می‌دهیم. ریشه های مخرج را قطب های سیستم و ریشه های صورت را صفرهای سیستم می‌گوییم.

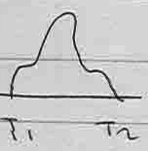
خواص ناحیه‌ی تقارب ;

1) ناحیه‌ی تقارب X(S) شامل یک سری خطوط موازی ~~[illegible]~~ را با محور jω می‌باشد

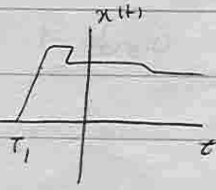
$X(S) = \frac{N(S)}{D(S)}$

2) برای X(S) هایی که کسری است ROC شامل هیچ‌گونه قطبی نمی‌باشد.

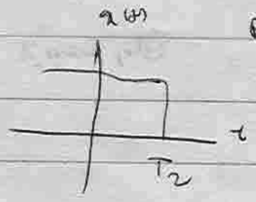
3) اگر x(t)



بین T1، T2 باشد (محدود باشد)، ROC تمام صفحه‌ی S خواهد بود.

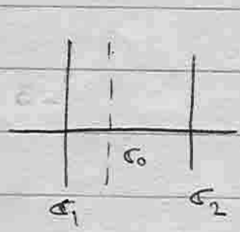


4) اگر x(t) یک سیگنال Right-Side (دست راستی) باشد و اگر $Re\{S\}=\sigma_0$ داخل ناحیه تقارب باشد (داخل ROC) در این صورت تمام ~~[illegible]~~ مقادیر S به طوری که $Re\{S\} > \sigma_0$ باشد داخل ROC خواهد بود.



5) اگر x(t) دست چپی باشد (Left-Side) و اگر $Re\{S\} = \sigma_0$ داخل ROC باشد تمام مقادیر $Re\{S\} < \sigma_0$ داخل ناحیه‌ی تقارب (ROC) خواهد بود.

6) اگر x(t) دو طرفه باشد و اگر $Re\{S\} = \sigma_0$ داخل ناحیه‌ی تقارب باشد. ناحیه‌ی تقارب بین دو خط موازی می‌باشد که خط $Re\{S = \sigma_0\}$ را در بر می‌گیرد.



عکس لاپلاس :

$$X(s) = f\{x(t)\, e^{-\sigma t}\}$$

$$\Rightarrow x(t)\, e^{-\sigma t} = F^{-1}\{x(\sigma + j\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} x[\sigma + j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} x(\sigma + j\omega) e^{(j\omega + \sigma)t}\, d\omega$$

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} X(s)\, e^{st}\, ds}$$

مثال) لاپلاس سیگنال $x(t)$ به شکل زیر داده شده است .

$$X(S) = \frac{1}{(S+1)(S+2)} = \quad Re\{s\} > -1$$

$$\frac{A}{S+1} + \frac{B}{S+2} \Rightarrow \begin{matrix} A = 1 \\ B = -1 \end{matrix} \Rightarrow \overset{Re\{s\}>-1}{\frac{1}{S+1}} - \overset{Re\{s\}>-2}{\frac{1}{S+2}} = \boxed{e^{-t} - e^{-2t}} \Rightarrow \boxed{Re\{s\} > -1}$$

* اگر این ناحیه نگفته شه ⇐ لاپلاس عکس ندارد .

* خواص لاپلاس دو سویه :

1_ خطی بودن

$$x_1(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} x_1(S) \quad RoC: R_1$$

$$x_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} x_2(S) \quad RoC: R_2$$

$$a x_1(t) + b x_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} a x_1(S) + b x_2(S) \quad \boxed{RoC: R_1 \cap R_2}$$

2_ شیفت زمانی

$$\begin{cases} x(t) \longleftrightarrow x(S) & RoC: R \\ x(t - t_0) \longleftrightarrow e^{-St_0} x(S) & RoC: R \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) \longleftrightarrow x(S) & RoC: R \\ e^{S_0 t} x(t) \longleftrightarrow x(S - S_0) & RoC: R + Re\{S_0\} \end{cases}$$

3 -

$$x(at) = \frac{1}{|a|} x(S) \quad \frac{R}{a}$$

$$\begin{cases} x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} x(S) & RoC: R \\ x(at) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{|a|} X(S) & RoC: \frac{R}{a} \end{cases}$$

4) کانولوشن :

$$x_1(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} x_1(s) \qquad Roc : R_1$$

$$x_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} x_2(s) \qquad Roc : R_2$$

$$x_1(t) * x_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} x_1(S) \cdot X_2(S) \qquad R : R_1 \cap R_2$$

5) دیفرانسیل :

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(S) \qquad Roc = R$$

$$\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} S X(S) \qquad Roc : R$$

$$X(S) = \int x(t) e^{-st} dt$$

$$\frac{dX(S)}{dS} = \int_{-\infty}^{\infty} (-t) x(t) e^{-st} dt$$

$$\boxed{-t\, x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{dX(S)}{dS} \qquad Roc : R}$$

$$x(t) \longleftrightarrow X(S) \qquad Roc : R$$

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau) d\tau \longleftrightarrow \frac{1}{S} X(S) \qquad Roc : R \cap \{Re\{s\} > 0\}$$

⊛ بررسی سیستم LTI :

با توجه به تابع انتقال H(S) ملاحظه می‌کنیم که در سیستم LTI رابطه‌ی بین ورودی و خروجی و پاسخ ضربه‌ی سیستم یعنی $x(t)$ ، $y(t)$, $h(t)$ به شکل زیر است.

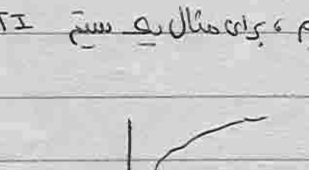
$$Y(S) = X(S) \cdot H(S)$$

به همین ترتیب $Y(S)$ ، $X(S)$, $H(S)$ لاپلاس خروجی و ورودی و پاسخ ضربه‌ی سیستم می‌باشند $H(S)$ را اصطلاحاً تابع انتقال می‌گویند.

$$H(S) = \frac{Y(S)}{X(S)}$$

همانطور که ملاحظه شد برای $S = j\omega$ لاپلاس تبدیل به فوریه ترانسفورم می‌شود. یا $H(S)$ در $S = j\omega$ تبدیل به پاسخ فرکانسی سیستم (طیف سیستم) می‌شود یعنی $H(\omega)$.

سیستم LTI را می‌توانیم با نحوه‌ی مکانی قطب‌های آن مورد تحلیل قرار دهیم ، برای مثال یک سیستم LTI علی است اگر پاسخ ضربه‌ی سیستم ($h(t)$) برابر باشد با صفر برای $t<0$



$$\begin{cases} h(t) = 0 \\ t < 0 \end{cases}$$

یعنی سیستم دست راستی می‌باشد.

بنابراین

* بنابراین همان طور که در رابطه‌ی ۴ گفته شد ناحیه‌ی تقارب آن سمت راست آخرین سمت حقیقی قطب می‌باشد، و تمام ناحیه‌ی صفحه‌ی S خواهد بود. ($\infty > Re\{s\} > \sigma$) که σ بیشترین مقدار حقیقی قطب است.

* سیستم آنتی علّی است اگر سمت چپ صفحه‌ی S باشد ($Re\{s\} < \sigma$) خاصیت ۲ و ۵.

* سیستم LTI پایدار است اگر ناحیه‌ی تقارب شامل محور $j\omega$ باشد. $Re\{s=0\}$.

$H(s) = \frac{1}{s+1}$ $\quad H(t) = e^{-t} u(t) \quad Re\{s\} > -1$

علّی هست

پایدار است

$h(t) = e^{-|t|} \quad H(s) = \frac{-2}{s^2+1}$ $\quad 1 < Re\{s\} < -1$

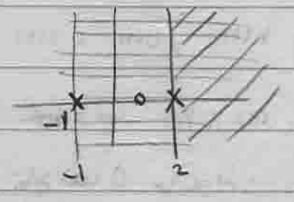
علّی نیست

پایدار است

* سیستم LTI پایدار است اگر $h(t)$ قابلیت انتگرال‌گیری داشته باشد، در این صورت فوریه‌ی ترنسفورم آن تقارب دارد که از آنجایی که فوریه‌ی ترنسفورم یک سیگنال برابر لاپلاس T آن سیگنال در $j\omega$ می‌باشد، بنابراین سیستم LTI را پایدار می‌گوییم اگر ROC سیستم شامل محور $j\omega$ باشد یعنی $Re\{s\} = 0$

$H(s) = \frac{s-1}{(s+1)(s-2)} \quad Re\{s\} > -1$

$\Rightarrow h(t) = \frac{2}{3} e^{-t} + \frac{1}{3} e^{+2t} \quad Re\{s\} > 2$ $\quad \boxed{\Rightarrow Re\{s\} > 2}$



ملاحظه می‌شود که سیستم پایدار نیست (حاوی $j\omega$ نیست) ولی علّی است.

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\, x[n-k]$$

ترانسفورم Z :

یک سیستم LTI را در نظر می‌گیریم در حالت ناپیوسته

فرض می‌کنیم $x[n]=z^n$ که z یک عدد مختلط می‌باشد ، در نتیجه داریم :

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\, z^{n-k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\, z^{-k} z^{n} = z^{n} \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] z^{-k}}_{H(z)}$$

تعریف می‌کنیم $\boxed{H(z) = \sum h[k] z^{-k}}$

$$\Rightarrow \boxed{y[n] = z^n H(z)}$$

$$X(z) = \sum \underbrace{\cancel{a^n}}_{x[n]} z^{-n}$$

اگر $z = e^{j\omega}$ (ω مقداری حقیقی است) در نتیجه داریم $\cancel{H(z)} \neq$

$$* \begin{cases} |z| = 1 \\ H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\, e^{-j\omega k} \end{cases}$$

$$\boxed{X[z] = \sum x[n] z^{-n}} \checkmark$$

$$H(e^{j\omega}) = \sum h[k]\, e^{-j\omega k}$$

فوریه T h[k] می‌گوی

در حالت ناپیوسته .

تعریف می‌کنیم : $X[z] \triangleq \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, z^{-n}$: X[z] را Z T ، x[n] می‌گوییم .

$$x[n] \xrightarrow{Z} X[z]$$

$z = re^{j\omega}$ در حالت کلی می‌باشد .

همان طور که در لاپلاس و فوریه ملاحظه شد (در حالت پیوسته) در ناپیوسته نیز رابطه

$$X[re^{j\omega}] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \left(re^{j\omega}\right)^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{\left[x[n] r^{-n}\right]}_{\downarrow} e^{-j\omega n}$$

که عبارت فوق فوریه ترنسفورم $[x[n]\, r^{-n}]$ می‌باشد .

مثال ; Z T ذیل را حساب کنید .

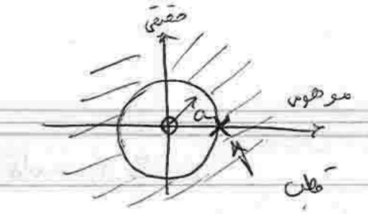
$$x[n] = a^n u[n] \quad -a^n[-u-1]$$

$$X[Z] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n z^{-n} u[n] = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \frac{1}{1-az^{-1}} \quad , \underbrace{|az^{-1}| < 1}_{\text{تقارب}}$$

$$\sum \left(\frac{a}{z}\right)^n$$

شرط اینکه عبارت فوق همگرا باشد آن است که $|az^{-1}|<1 \rightarrow |a|<|z|$ یا $|z|>|a|$

ROC



$$X[z] = \frac{z}{z-a}$$

* ریشه های صورت را صفر "o" می نامند.

* ریشه های مخرج را قطب "x" می نامند.

Z T زیر را حساب کنید.

$$x[n] = -a^n u[-n-1]$$

$$X[z] = \sum_{n=\infty}^{\infty} x[n]^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[-n-1]\, z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n} = \frac{\cancel{}}{1-az}$$

$$= 1-\sum_{n=0}^{\infty} (a^{-1}z^{1})^n = \cancel{\frac{1}{1-a^{-1}z}} \qquad \cancel{|a^{-1}z|<1} \quad ?$$

$$= \frac{a^{-1}z}{a^{-1}z-1} = \boxed{\frac{z}{z-a}} , \quad |z|<|a|$$

Z T زیر را حساب کنید.

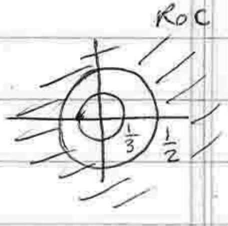
$$x[n] = 7\left(\tfrac{1}{3}\right)^n u[n] - 6\left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[n]$$

$$X[z] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ 7\left(\tfrac{1}{3}\right)^n u[n] - 6\left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[n] \right\} z^{-n}$$

$$= 7\sum \left(\tfrac{1}{3}\right)^n z^{-n} - 6\sum \left(\tfrac{1}{2}\right)^n z^{-n} = 7\sum_{n=0}^{\infty} \left(\tfrac{1}{3}z^{-1}\right) - 6\sum \left(\tfrac{1}{2}z^{-1}\right)^n$$

$$= 7\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} - 6\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

$$\begin{cases} |\frac{1}{3}z^{-1}|<1 \Rightarrow |z|>\frac{1}{3} \\ |\frac{1}{2}z^{-1}|<1 \Rightarrow |z|>\frac{1}{2} \end{cases}$$



* فصل مشترک دو بازه ROC می شود

H.W
Z

10.1(a,g)
10.2(a,c,d)
10.4(a,c)
10.7
10.15

10.26
10.27

100 4 $= \frac{4\times 40}{100} \times \frac{166}{100}$, (1.6)
38 x

خواص :

1. ناحیه‌ی تقارب همواره یک حلقه باشد در صفحه‌ی Z با مرکز مبدا

2. ناحیه‌ی تقارب هیچ وقت شامل قطب نمی‌باشد .

3. اگر x[n] دارای دامنه‌ی محدود باشد $n_1 < n < n_2$ ناحیه‌ی تقارب تمام صفحه‌ی Z است به استثنای احتمالاً $Z=0$, $Z=\infty$.

4. اگر x[n] یک مقدار Right-sided باشد (از یک جایی به سمت راست وجود دارد) و اگر $|z|=r_0$ در ناحیه‌ی تقارب باشد تمام مقادیر محدود Z به نحوی که $|z|>r_0$ باشند در داخل RoC هستند .

5. اگر x[n] ، left-sided باشد و تمام مقادیر $|z|<r_0$ داخل ناحیه‌ی تقارب خواهند بود .
($|z|=r_0$ در داخل ناحیه‌ی تقارب باشد) .

6. اگر x[n] دوطرفه باشد و دایره $|z|=r_0$ داخل ناحیه‌ی تقارب باشد در این حالت ناحیه‌ی تقارب شامل حلقه‌ای در ~~ناحیه~~ی صفحه‌ی Z است که آن شامل $|z|=r_0$ می‌باشد .

مثال) اگر $x(n)=\begin{cases} a^n & 0\le n\le N-1 \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$ ؟ = TZ

چون x[n] دارای دامنه‌ی محدود است ← تمام صفحه‌ی z تقارب می‌کند .

$$X[z]=\sum_{n=\infty}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} (a z^{-1})^n = \frac{1-(az^{-1})^N}{1-az^{-1}} = \boxed{\frac{1}{z^{N-1}} \frac{z^N-a^N}{z-a}}$$

ملاحظه می‌شود دارای N-1 قطب در نقطه‌ی Z=0 هستیم و قطب در Z=a با یکی از صفرهای صورت حذف می‌شود

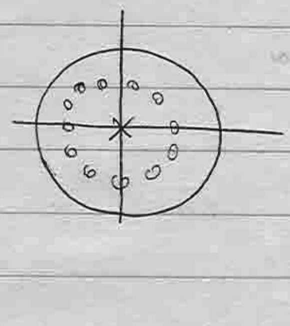
$$z^N - a^N = 0 \Rightarrow z^N = a^N$$

* N ریشه‌ی صورت داریم

$$Z_k = a e^{(j2k\pi/N)} \quad k=0,1,2,\dots N-1$$

یکی از این ریشه‌ها با قطب ساده می‌شود ← N صفر در مرکز داریم .

ملاحظه می‌شود



▨ عکس ترانسفورم z :

$$X(re^{j\omega}) = \mathcal{F}\{x[n]r^{-n}\}$$

$$x[n]r^{-n} = \mathcal{F}^{-1}\{X(re^{j\omega})\} \quad , \quad x[n] = r^{n}\mathcal{F}^{-1}\{X(re^{j\omega})\} \qquad Z = re^{j\omega}$$

$$\boxed{x[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint X[z]\, z^{n-1}\, dz}$$

مثال) $X[z] = \dfrac{3-\frac{5}{6}z^{-1}}{(1-\frac{1}{4}z^{-1})(1-\frac{1}{3}z^{-1})} \qquad |z|>\frac{1}{3}$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{2}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} \Rightarrow x[n] = x_1[n] + x_2[n]$$

$$\begin{cases} x_1[n] = \dfrac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} & |z|>\frac{1}{4} \checkmark \quad = (\frac{1}{4})^n u[n] \\ x_2[n] = \dfrac{2}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} & |z|>\frac{1}{3} \checkmark \quad 2(\frac{1}{3})^n u[n] \end{cases}$$

$$\boxed{x[n] = \left[(\tfrac{1}{4})^n + 2(\tfrac{1}{3})^n\right]u[n]}$$

▨ خواص TZ :

1. $x_1[n] \longrightarrow X_1[z] \quad Roc: R_1$

$x_2[n] \longrightarrow X_2[z] \quad Roc: R_2$

$x_1[n] + x_2[n] \longrightarrow X_1[z] + X_2[z] \quad Roc: R_1 \cap R_2$

2. $x[n] \longrightarrow X[z] \quad Roc: R$

$x[n-n_0] \longrightarrow Z^{-n_0}X[z] \quad Roc: R$ به استثنای $Z=0$ $Z=\infty$

3. $Z_0^{n}x[n] \longrightarrow X[\frac{z}{z_0}] \quad Roc: |z_0| R$

4. $x[n] \longrightarrow X[z] \quad Roc: R$

$x[-n] \longrightarrow X[\frac{1}{z}] \quad Roc: \frac{1}{R}$

5. $x_1[n] \longrightarrow X_1[z]$ ROC : R_1

$x_2[n] \longrightarrow X_2[z]$ ROC : R_2

$x_1[n] * x_2[n] \longrightarrow X_1[Z] \cdot X_2[Z]$ ROC : $R_1 \cap R_2$

6. $x[n] \longrightarrow X[z]$ ROC : R

$\boxed{n x[n] \rightarrow z \frac{dX[z]}{dz}}$

$n x[n] \longrightarrow -Z \frac{dX[Z]}{dZ}$ ROC : R

$n x[n] \rightarrow z \frac{dX[z]}{dz}$ $\quad$ $n x[n] \longleftrightarrow z \frac{dX(z)}{dz}$

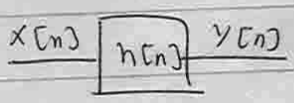
▨ سیستم L.T.I

LTI با ضرایب ثابت :

مثال)

* تابع انتقال را پیدا کنید.

$$y[n] - \frac{1}{2} y[n-1] = x[n] + \frac{1}{3} x[n-1]$$



$Y[Z] = X[Z] H[Z]$

$$Y[Z] - \frac{1}{2} Z^{-1} Y[Z] = X[Z] + \frac{1}{3} Z^{-1} X[Z]$$

$$H(z) = \frac{Y[Z]}{X[Z]} = \frac{1 + \frac{1}{2} Z^{-1}}{1 - \frac{1}{2} Z^{-1}}$$

$\boxed{h[n] = H^{-1}[Z]}$

$\frac{1}{s+3}$

در سیستم LTI داریم که:

$$Y[Z] = H[Z] \cdot X[Z]$$

سیستم LTI علی است اگر h[n]=0 باشد برای n<0 یعنی Right_sided باشد بنابراین یک سیستم LTI با تابع انتقال H(z) علی است اگر ROC آن خارج از دایره ای باشد که از آخرین قطب آن می گذرد.

(خواص 2 و 4).

سیستم LTI پایدار است اگر پاسخ ضربه ی سیستم قابلیت جمع پذیری داشته باشد یا به عبارت دیگر فوریه ی سیگنال آن تقارب کند و ناحیه ی تقارب شامل دایره ی واحد |z|=1 باشد، چون همان طور که ملاحظه شد TZ به فوریه T تبدیل می شود وقتی که |z|=1 باشد.

سیستم LTI پایدار است اگر ناحیه ی تقارب H[z] شامل دایره ی واحد باشد (|z|=1).

یک سیستم علی با تابع کسری $H[z]$ پایدار است اگر تمام قطب ها داخل دایره ی واحد باشند.