(فصل اول مدارها)

## انواع مدارها: مدارهای فشرده و مدارهای گسترده

مدارهای فشرده از بهم پیوستن عناصر فشرده بدست می‌آیند. مثالهایی از عناصر فشرده عبارتند از مقاومت، سلف، خازن و ترانسفورماتور. خاصیت عمدهٔ عناصر فشرده کوچکی اندازهٔ آنها در مقایسه با طول موجی است که در آنها بکار می‌رود. در این مدارها امواج عبوری الکترومغناطیس با توجه به محدودیت اندازهٔ فیزیکی، سبب برابری جریان ورودی و خروجی و معین بودن ولتاژ دو سر عناصر فشرده می‌گردد. در این صورت در مدارهای فشرده قوانین جریان و ولتاژ کیرشف که تقریبی از قوانین ماکسول است، برقرار می‌باشد.

مثال: اگر یک مدار آزمایشگاهی فرکانس کار مدار ۲۵ کیلوهرتز باشد، مدار فشرده است؟

$$\lambda = v.T = \frac{v}{f} = \frac{\text{سرعت امواج الکترومغناطیس}}{\text{فرکانس موج}} = \frac{3\times10^{8}}{25\times10^{3}} = 12\,Km$$

ابعاد یک مدار آزمایشگاهی بسیار کوچکتر از 12Km است پس مداری که با این فرکانس کار کند هم یک مدار فشرده است و قوانین ولتاژ و جریان کیرشف برقرار است.

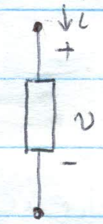
مثال: یک مدار کامپیوتری فرکانس کار ۸۰۰MHz است آیا مدار فشرده است؟

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{3\times10^{8}}{8\times10^{8}} = \frac{3}{8} = 0.375m = 37.5cm$$

اگر ابعاد مدار حداقل ده برابر کوچکتر از طول موج باشد ($l \leq \frac{\lambda}{10} = 3.75$) مدار فشرده است. مدار کامپیوتری کوچکتر از ۳٫۷۵ سانتی‌متر است پس مدار

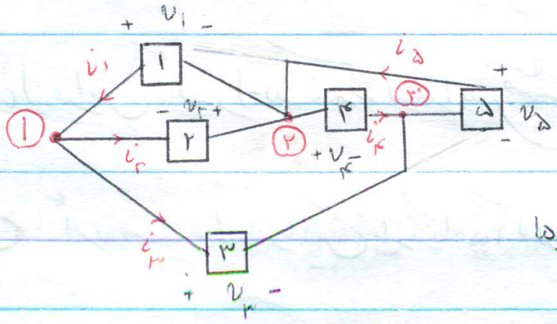
در نظر گرفته شده مهم باشد. مداری که فشرده نباشد مدار گسترده نامیده می‌شود.

**جهت های قراردادی:** انتخاب جهت جریان و ولتاژ در یک مدار آزاد است و در تحلیل مدار اثری ندارد. ولی در جهت قراردادی متناظر جریان از سر مثبت وارد می‌شود.



در این حالت $v(t)i(t)$ توانی است که در لحظهٔ t به شاخه تحویل داده می‌شود.

**شاخه‌ها و گره‌ها:** در یک مدار فشرده، عناصر دوسر شاخه[۱] و سرهای عناصر گره[۲] نامیده می‌شوند. جریان عنصر، جریان شاخه و ولتاژ عنصر، ولتاژ شاخه نامیده می‌شود.



**توضیح:** مدار روبرو پنج عنصر، سه گره و پنج شاخه دارد. جریان شاخه‌ها $i_1$ ... $i_5$ و ولتاژها $v_1$ ، $v_2$ ... $v_5$ هستند. در عنصر ③ قرارداد متناظر بکار رفته و در عنصر ① بکار نرفته است.

**قانون جریان کیرشف (KCL)[۳]:** در هر گره از مدار فشرده در هر لحظه از زمان جمع جریان‌ها برابر صفر است. بهتر است جریان خروجی را مثبت و ورودی را منفی بگیریم. گره ① $\xrightarrow{KCL}$ $-i_1+i_2+i_3=0$

**قانون ولتاژ کیرشف (KVL)[۴]:** در هر حلقه از مدار فشرده در هر لحظه از زمان جمع ولتاژها برابر صفر است.

**توضیح:** در مدار بالا داریم:

$$v_1+v_2=0$$

$$v_4-v_3-v_2=0$$

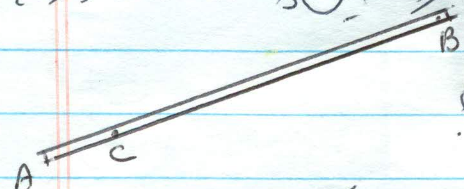
---

۱- Branch ۲. node ۳. Kirchhoff's Current Law (KCL)

۴. Kirchhoff's Voltage Law (KVL)

سوم: در یک مدار گسترده قوانین KVL و KCL صادق نمی‌باشند مثال زیر توجه نمائید

مثال: در یک آنتن دوقطبی (مثلاً در ماشین پلیس) اگر فرستنده FM در نقطه A ولتاژ $v_A(t)=10\cos(2\pi\times10^8 t)$ باشد با توجه به سرعت امواج الکترومغناطیسی ($3\times10^8\ m/s$) ولتاژ در نقطه B (۱/۵ متری A) و C (۱/۵ سانتی‌متری A) چقدر است؟



اگر سرعت انتشار امواج بی‌نهایت باشد $v_A=v_B=v_C$ ولی در صورتی که مطابق مثال باشد داریم:

اختلاف زمان بین B و A برابر است با: $t=\frac{x}{v}=\frac{1.5}{3\times10^8}=5\times10^{-9}$ ثانیه

$$v_B(t)=10\cos(2\pi\times10^8(t-5\times10^{-9}))=10\cos(2\pi\times10^8 t-\pi)=-10\cos(2\pi\times10^8 t)=-v_A(t)$$

یعنی در هر لحظه $t$ ولتاژ نقاط A و B مخالف هم است و این به نظر عجیب می‌آید اما با توجه به فرکانس کار مدار ($f=10^8\ Hz$) و سرعت انتشار امواج الکترومغناطیسی طول موج برابر $\lambda=\frac{v}{f}=\frac{3\times10^8}{10^8}=3\ m$ است و ابعاد مدار باید حداقل ۱۰ برابر کوچکتر باشد ($\frac{3}{10}=0.3$) تا مدار فشرده محسوب شود اما چنین نیست ($1.5>0.3$) پس مدار گسترده و قوانین کیرشف نادرست است.

و برای نقطه C داریم: $t_{تاخیر}=\frac{x}{v}=\frac{1.5\times10^{-2}}{3\times10^8}=0.5\times10^{-10}$ ثانیه

$$v_C(t)=10\cos(2\pi\times10^8(t-0.5\times10^{-10}))=10\cos(2\pi\times10^8 t-\frac{\pi}{100})\simeq10\cos(2\pi\times10^8 t)$$

زیرا در این حالت فاصله نسبت به طول موج بسیار کوچک است. $0.3>1.5\times10^{-2}$

پس فاصله ۱/۵ سانتی‌متری را می‌توان به عنوان مدار فشرده در نظر گرفت و قوانین کیرشف درست است

و طبق KVL ولتاژ AC برابر است:

م ۱

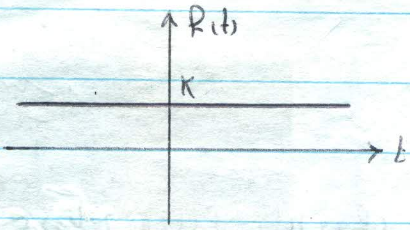
②

فصل ششم و هفتم (اجباری) و فصل هشتم نیست

**توابع مشهور:**

الف) **تابع ثابت:**

$f(t)=k\ ,\ \forall t$

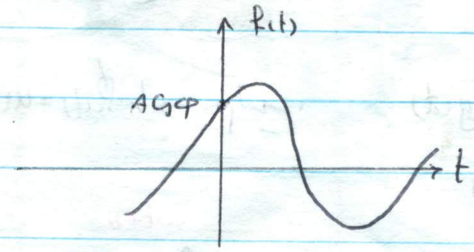


ب) **تابع سینوسی:**

$f(t)=A\cos(\omega t+\varphi)$

حل $f(0)=\sqrt{2}$

$f(1)=0\ ,\ f(-2)=0$



A=دامنه ، ω=فرکانس زاویه‌ای ، φ=اختلاف فاز

پ) **تابع پله واحد**

$$u(t)=\begin{cases}1 & ,\ t>0\\ 0 & ,\ t<0\end{cases}$$

$u(0)=1$ یا $\frac{1}{2}$ یا ۰ بهتر است در تبدیل لاپلاس یا فوریه $u(0)=\frac{1}{2}$ فرض شود ولی در مدار

یک نقطه معنی ندارد

تمرین: الف) $u(t-1)$ ، $\frac{1}{2}u(t+\frac{1}{2})$ ، $u(2t)$ ، $u(2t-\frac{1}{2})\,2(u(t)+1$

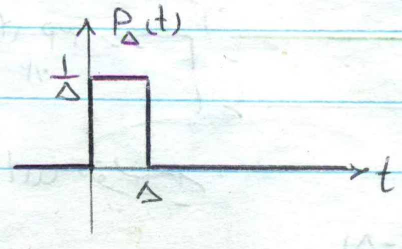
را رسم کنید.

ب) $f(t)=\delta(t)$ ، $f(t)=\delta(2t)$ ، $f(t)=\delta(t-1)$

$f(t)=2\delta(t)$ ، $f(t)=\delta(2t+1)$ ، $f(t)=\delta(t)+1$ را رسم کنید.

ت) **تابع پالس**

$$P_\Delta(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ \frac{1}{\Delta} & 0<t<\Delta\\ 0 & \Delta<t\end{cases}$$

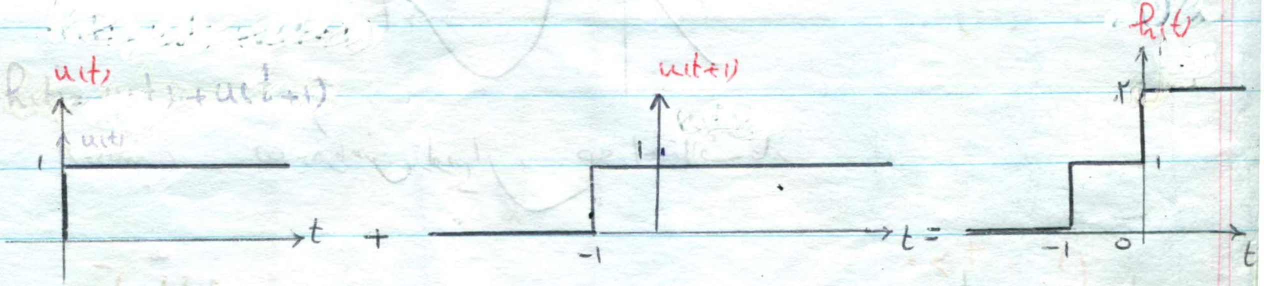


تمرین: نمودارهای $P_{۰/۲}(t)$ ، $۳P_{۰/۲}(t)$ ، $۲P_{۰/۱}(t-۰/۲)$

و $۳P_{۰/۱}(۲t-۰/۲)$ را رسم کنید.

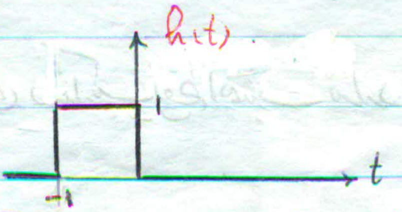
۱- جمع دو تابع: $(f+g)(t)=f(t)+g(t)$ و $D_{f+g}=D_f\cap D_g$

مثال: $h(t)=u(t)+u(t+1)$ را رسم کنید.



۲- تفریق دو تابع: $(f-g)(t)=f(t)-g(t)$ و $D_{f-g}=D_f\cap D_g$

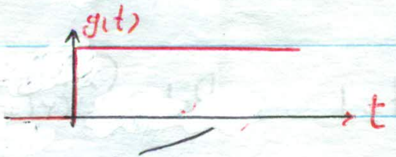
مثال: $h(t)=u(t+1)-u(t)$ را رسم کنید.



۳- ضرب دو تابع: $(f\times g)(t)=f(t)\cdot g(t)$ و $D_{f\times g}=D_f\cap D_g$

۴- تقسیم دو تابع: $\left(\frac{f}{g}\right)(t)=\frac{f(t)}{g(t)}$ و $D_{f/g}=D_f\cap D_g-\{t \mid g(t)=0\}$

تمرین - نمودارهای $h(t)=\frac{u(t)}{u(t+1)}$ و $g(t)=u(t)\cdot u(t+1)$ را رسم کنید.



تمرین: نمودار $۳P_{۰/۲}(t)-۴P_{۰/۲}(t-۰/۱)+۲P_{۰/۱}(t-۱)$ را رسم کنید.

مثال: $P_\Delta(t)$ را برحسب $u(t)$ بنویسید.

$$P_\Delta(t)=\frac{u(t)-u(t-\Delta)}{\Delta}$$

**تمرین:** $\delta(2t)u(t)$ ، $\delta(t)u(t-1)$ را رسم کنید.

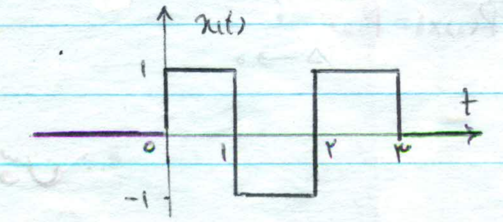
ث) ضربه واحد ( (unit impulse) (دلتای دیراک)

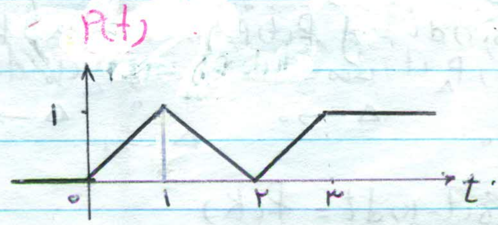
$$\delta(t)=\begin{cases}0 & t\neq 0\\ \text{دره} & t=0\end{cases} \quad , \quad \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt=1 \quad , \quad \lim_{\Delta\to 0} P_\Delta(t)=\delta(t)$$

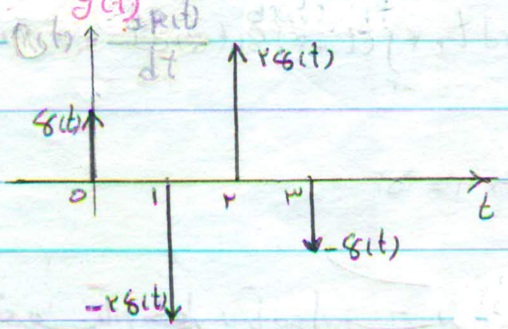
**انتگرال و مشتق یک تابع:**

$$p(t)=\int_{-\infty}^{t}x(t')dt' \quad , \quad g(t)=\frac{dx(t)}{dt}$$

**مثال:** مشتق و انتگرال سیگنال $x(t)$ را رسم کنید.





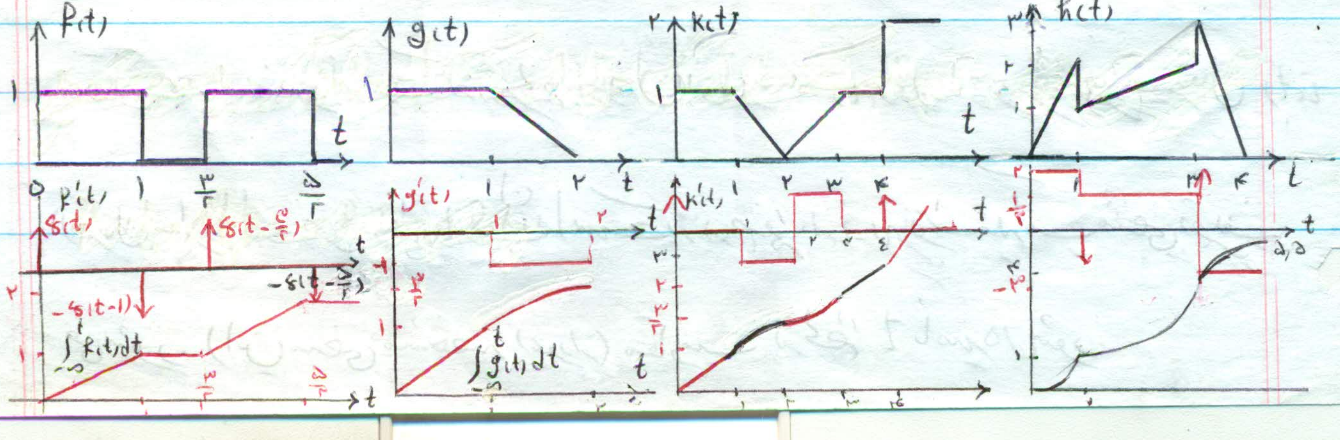


$$p(t)=\int_{-\infty}^{t}x(t')dt'$$

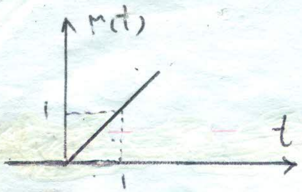
$$g(t)=\frac{dx(t)}{dt}$$

**توجه:** $u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(t')dt' \Longleftrightarrow \frac{du(t)}{dt}=\delta(t)$

**تمرین:** مشتق و انتگرال f ، g ، h و k را رسم کنید.



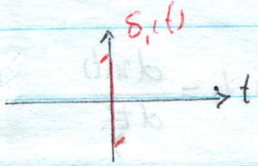
ج - شیب واحد (Ramp) $(r(t))$ $r(t)=tu(t)$



توجه: $\frac{dr(t)}{dt}=u(t) \Longleftrightarrow r(t)=\int_{-\infty}^{t} u(t')dt'$

تمرین: در تمرین ص ۳ $p(t)$ را برحسب $r(t)$ بنویسید: $p(t)=r(t)-2r(t-1)+r(t-2)-r(t-3)$

تابع دوبلت واحد: $\delta'(t)=\frac{d\delta(t)}{dt} \Longrightarrow \delta(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta'(t')dt'$



خاصیت غربالی تابع ضربه: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t)dt = \lim_{\Delta\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)p_{\Delta}(t)dt$

$= \lim_{\Delta\to 0}\int f(t')p_{\Delta}(t')dt' = f(0)\lim_{\Delta\to 0}\int p_{\Delta}(t')dt' = f(0)\times 1 = f(0)$

پس: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-k)dt = f(k)$

مثال: $\int_{-2}^{4}(t^3+4)(\delta(t)+4\delta(t-2))dt = \int_{-2}^{4}(t^3+4)\delta(t)dt + 4\int_{-2}^{4}(t^3+4)\delta(t-2)dt$

$(0+4)\int_{-2}^{4}\delta(t)dt + 4(2^3+4)\int_{-2}^{4}\delta(t-2)dt = 4 + 4\times 12 = 52$

تعریف تابع خطی: تابعی است که $f(\alpha t_1+\beta t_2)=\alpha f(t_1)+\beta f(t_2)$.

نمودار تابع خطی: خطی راست است که از مبداء می‌گذرد.

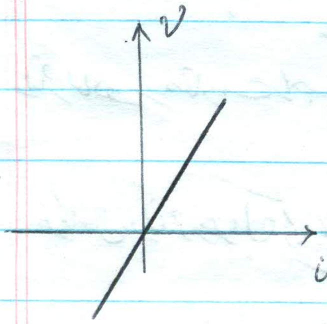
مثال: خطی $h(t)=7t$ و غیرخطی $f(t)=t^2$ , $g(t)=7t+2$

مقاومت: عنصری است که در هر لحظه از زمان ولتاژ $v(t)$ دو سر عنصر و جریان $i(t)$

با یک رابطه در صفحه $i-v$ قابل بیان است. چنین عنصری در هر لحظه مقاومت نامیده می‌شود.

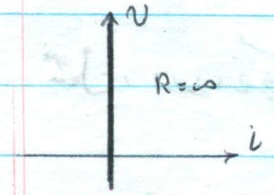
## انواع مقاومت:

۱ـ مقاومت خطی تغییر ناپذیر با زمان: (LTI) (Linear Time-Invarient)

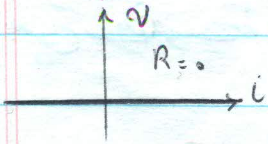


مقاومتی است که نمودار آن در صفحه v-i خط راستی است که از مبدا می‌گذرد. در این حالت شیب نمودار مقاومت (R) نامیده می‌شود.

عکس R را G یا رسانایی می‌نامند و واحد آن مهو (MHO) یا زیمنس (S) است



مثال: نمودارهای مدار باز (open circuit = o.c) ، R = ∞

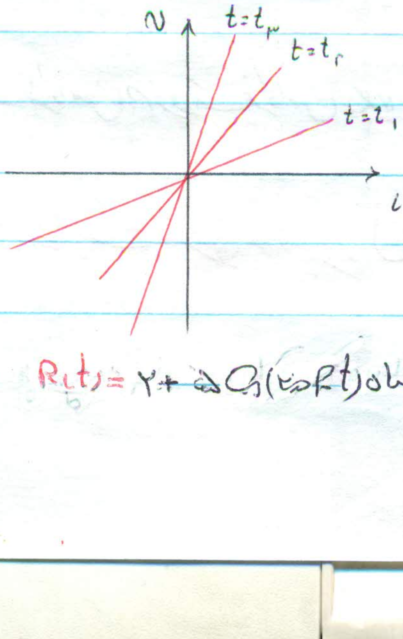


و اتصال کوتاه (Short Circuit = S.C) ، R = 0

نمونه‌هایی از مدارهای با مقاومت خطی هستند

ـ تغییر ناپذیر با زمان (Time Invarient): یعنی عنصری که نمودار آن با زمان تغییر نمی‌کند

۲ـ مقاومت خطی تغییر پذیر با زمان: مقاومتی خطی است که [illegible] شیب آن با زمان تغییر می‌کند.



$$v(t) = R(t)\, i(t)$$

مثال: اگر $v(t) = (۲ + ۵ \cos(۲۰\pi t))\, i(t)$ باشد آنگاه $R(t) = ۲ + ۵ \cos(۲۰\pi t)$

نکته: در مقاومت‌های خطی نامتغیر با زمان فرکانس v و i یکی است ولی در متغیر با زمان می‌توانند یکی نباشند

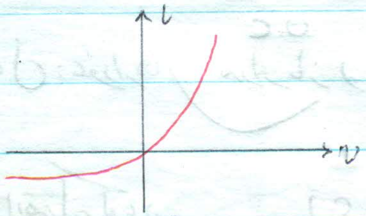
مثال: اگر در یک مدار $i(t)=\cos 400t$ و $R_2(t)=5\cos 300t$ ، $R_1(t)=5\Omega$ باشد در حالت ولتاژ هر دو مقاومت را حساب کنید.

فرکانس ولتاژ و جریان یکی است $v_1(t)=R_1(t)i(t)=5\cos 400t$

فرکانس ولتاژ و جریان یکی نمی‌باشد $v_2(t)=R_2(t)i(t)=5\cos 300t\cos 400t=\frac{5}{2}(\cos 700t+\cos 100t)$

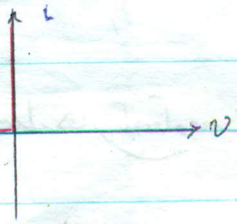
۳- مقاومت غیرخطی نامتغیر با زمان: در این حالت نمودار غیرخطی است.

مثال: دیود عنصری که دارای نمودار روبروست:



$i(t)=I_s(e^{\frac{qv(t)}{KT}}-1)$

پس یک مقاومت غیرخطی است



در حالت ایده‌آل می‌توان با تقریب خوب نمودار ایده‌آل را بدست آورد

دو تکه راست

یعنی اگر ولتاژ دو سر دیود منفی باشد جریان عبوری از آن صفر است (مدار باز) و در ولتاژ مثبت اتصال کوتاه است

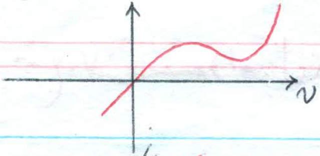
نکته: در مقاومت غیرخطی هم فرکانس v و i ممکن است یکی نباشد.

مثال: اگر $v=i^2$ و $i=\cos 200t$ آنگاه $v(t)=\cos^2 200t=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 400t$

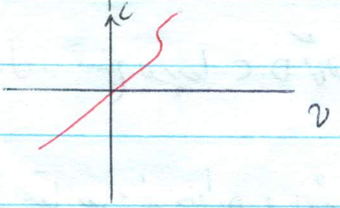
v مؤلفه فرکانس صفر و یک فرکانس دوبرابر دارد در حالی که فرکانس i تنها یک هرتز است.

۴- مقاومت غیرخطی متغیر با زمان: مقاومتی است که هم غیرخطی و هم متغیر با زمان است.

$i(t)=5(e^{2v(t)}-1)\cos 2\pi ft$



در مقاومت کنترل شده بوسیله ولتاژ: به ازای هر ولتاژ یک جریان داریم.



در مقاومت کنترل شده با جریان: به ازای هر جریان یک ولتاژ داریم.

مقاومت دوطرفه: مقاومتی است که نمودار آن نسبت به مبدأ متقارن باشد.

مثال: تمام مقاومت‌های خطی دوطرفه هستند و دیود نمونه یک مقاومت غیر دوطرفه است

مثال: اگر در یک مدار $v = 100i + 0.1i^3$ باشد (مقاومت غیرخطی) به ازای $i_1 = 0.1A$

و $i_2 = \sin 2\pi 50t$ و $i_1 + i_2$ فرکانس‌های ولتاژ را بدست آورید.

(فرکانس صفر) $i_1 = 0.1A$ ⇐ $v_1 = 100 \times 0.1 + 0.1 \times 0.1^3 \simeq 10\,v$ (فرکانس صفر)

در حالت صفر (صفر هرتز) $v = 100i$ در نظر گرفت یعنی مقاومت خطی است و فرکانس‌ها یکی‌اند

در این حالت فرکانس v و جریان یکی است

(فرکانس ۵۰) $i_2 = \sin 2\pi \times 50t$ ⇐ $v_2 = 100 \sin 2\pi 50t + 0.1 \sin^3 2\pi 50t = 100 \sin 2\pi 50t$

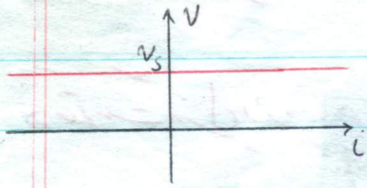
فرکانس‌های صفر، ۵۰ و ۱۰۰ $+0.1\left(\frac{1-\cos 2\pi 100t}{2}\right) = 100 \sin 2\pi 50t + 0.05 - 0.05 \cos 2\pi \times 100t$

$v_{12} = 100(i_1+i_2) + 0.1(i_1+i_2)^3 \neq v_1 + v_2$

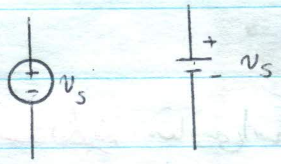
در سیستم غیرخطی $v(i_1+i_2) \neq v(i_1) + v(i_2)$

منابع: منابع ولتاژ و جریان به دو دسته نابسته (مستقل) و وابسته تقسیم می‌شوند

**منبع ولتاژ نابسته (ایده‌آل)**: منبعی است که ولتاژ آن تابع جریان نمی‌باشد



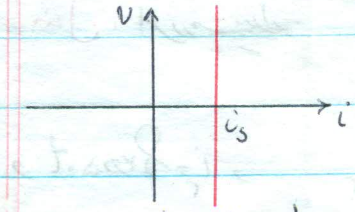
**مثال**: منبع ولتاژ D.C تأثیرشبه و یک منبع ولتاژ نابسته است این منبع

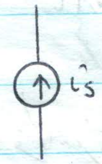


یک مقاومت غیرخطی هم می‌باشد. درصورتی که $v_s = 0$ باشد منبع

مدار اتصال کوتاه می‌باشد.

**منبع جریان نابسته**: جریان $i(t)$ مستقل از ولتاژ دو سر آن $v(t)$ است.

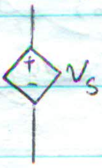


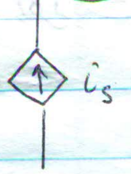


**مثال**: منبع جریان ثابت یک منبع جریان نابسته است.

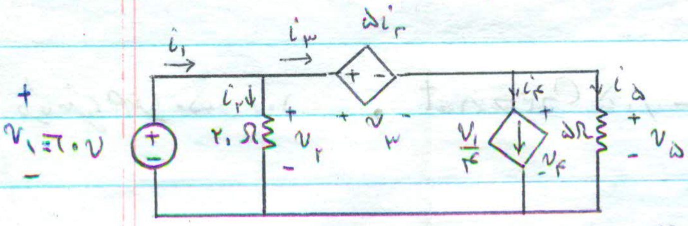
این منبع یک مقاومت غیرخطی است درصورتی که $i_s = 0$ باشد مدار معادل مدار باز است

**منبع جریان یا ولتاژ وابسته**: این منابع دارای جریان (یا ولتاژ) وابسته به شاخه‌ای از مدار می‌باشند.





**مثال**: تمامی ولتاژها، جریان و توان را حساب کنید. جمع توان‌ها چند است؟



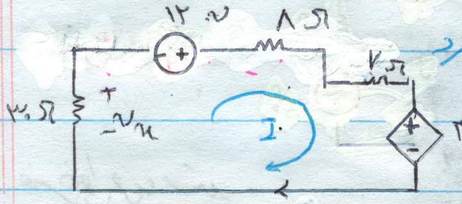
$v_2 = v_1 = 60\,v \Rightarrow i_2 = \frac{60}{20} = 3A \Rightarrow v_3 = 5i_2 = 15v$

$-v_2 + v_3 + v_4 = 0 \Longrightarrow v_4 = 45$ ولت $= v_5$ و $i_4 = \frac{v_1}{4} = \frac{60}{4} = 15A$ , $i_5 = \frac{v_5}{5} = \frac{45}{5} = 9A$

$i_3 = i_5 + i_4 = 9 + 15 = 24A$ و $i_1 = i_2 + i_3 = 24 + 3 = 27A$ و $P_1 = v_1 \times (-i_1) = 60 \times (-27) = -1620\,w$

$P_2 = v_2 i_2 = 60 \times 3 = 180\,w$ و $P_3 = v_3 i_3 = 15 \times 24 = 360\,w$ $P_4 = v_4 i_4 = 45 \times 15 = 675\,w$

$P_{۵} = v_{۵} i_{۵} = ۹ \times ۴۵ = ۴۰۵\,W \Rightarrow P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 = ۰$

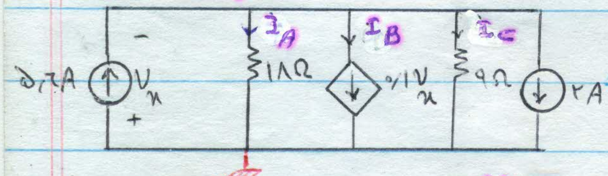


مثال: مدار تک حلقه، جریان I را بدست آورید. ابتدا جهت ساعتگرد

جریانی برای حلقه نسبت می دهیم و معادله KVL را می نویسیم:

$$-۱۲ + ۸I + ۷I + ۴v_x + ۳۰I = ۰ \xrightarrow{v_x = -۳۰I} -۱۲ + ۱۵I - ۱۲۰I + ۳۰I = ۰ \Rightarrow I = \frac{۱۲}{-۷۵} = -۰٫۱۶A$$

مثال: گره جریان های $I_A$، $I_B$، $I_C$ و $v_x$ را بدست آورید. یک نقطه را زمین می گیریم که گره ی



ولتاژ گذاری می کنیم (v) حال در هر گره KCL می نویسیم

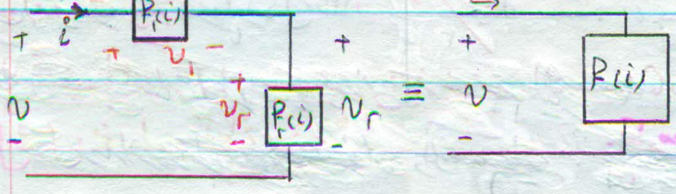
$I_A = \frac{v}{۱۸}$ ، $I_B = ۰٫۱v_x$ ، $I_C = \frac{v}{۹}$

جریان های ورودی به گره را منفی و خروجی را مثبت در نظر می گیریم:

$$-۵٫۶ + \frac{v}{۱۸} + ۰٫۱v_x + \frac{v}{۹} + ۲ = ۰ \xrightarrow{v_x = -v} -v_x + ۱٫۸v_x - ۲v_x = ۳٫۶ \Rightarrow v_x = \frac{۳٫۶}{-۱٫۲} \times ۱۸ = -۵۴v$$

$I_A = \frac{v}{۱۸} = ۵۴ = ۳A$ ، $I_B = -۵٫۴A$ ، $I_C = \frac{v}{۹} = ۶$

## سری کردن مقاومت ها:

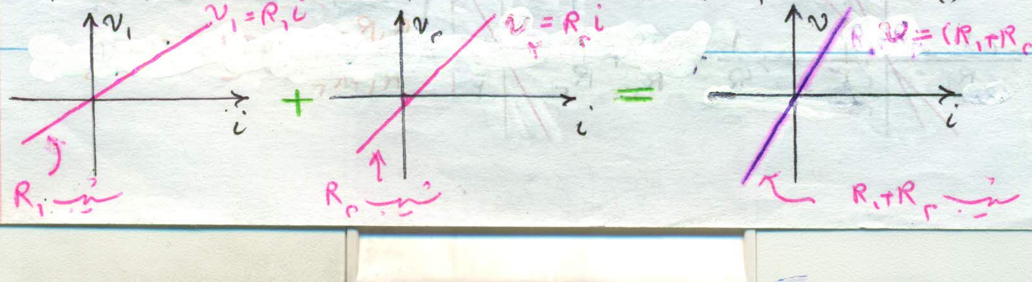


اگر دو مقاومت سری شود داریم:

$$v = v_1 + v_2 = R_1(i) + R_2(i) = (R_1 + R_2)(i) \xrightarrow{v = R(i)} R(i) = (R_1 + R_2)(i)$$

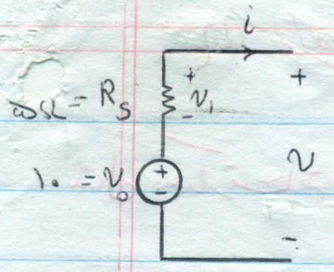
یعنی در مقاومت های سری نمودارهای v–i باهم جمع می شوند. در حالت مقاومت خطی نامتغیر با زمان:

$$R_1(i) = v_1 = iR_1 \;,\; R_2(i) = v_2 = iR_2 \Rightarrow v = v_1 + v_2 = i(R_1 + R_2) = iR_e \Rightarrow R_e = R_1 + R_2$$



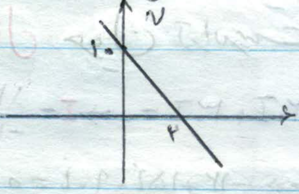
**منبع ولتاژ غیر ایده‌آل**: در مدار روبرو نمودار i-v را رسم کنید. $-v_0 - v_1 + v = 0$

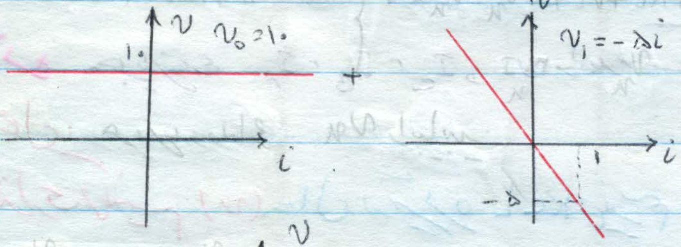
الف



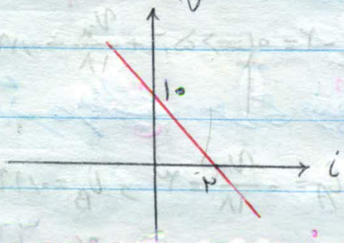
در حقیقت دو مقاومت سری هستند یا $v = v_0 + v_1$

غیرخطی می‌باشد. $v_1 = -R_s i = -5i$ , $v_0 = 10 \Rightarrow v = 10 - R_s i = 10 - 5i$



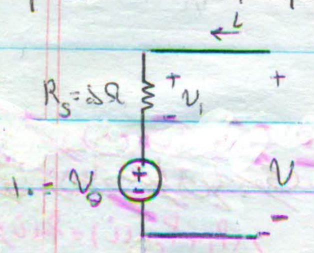


**روش دوم: جمع مقاومتی:**



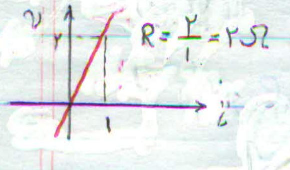
**مثال**: در مدار روبرو نمودار i-v را رسم کنید. **حل**: $v = v_1 + v_0 = 10 + 5i \Leftarrow -v + v_1 + v_0 = 0$

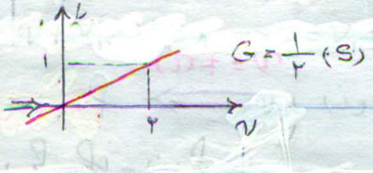
الف



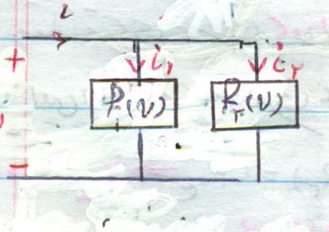
این نمودار قرینه نمودار مثال بالا نسبت به v است.

**توجه**: نمودار رسانایی: شیب در نمودار i-v مقاومت و شیب در نمودار v-i رسانایی است.





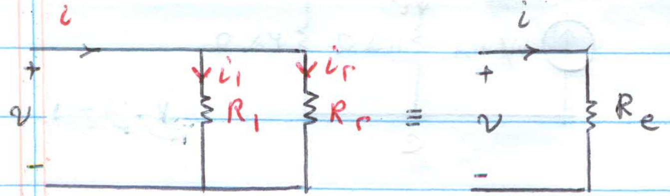
**مقاومت‌های موازی**: اگر دو مقاومت با ویژگی $i = f_1(v)$ و $i = f_2(v)$ را موازی کنیم داریم:



$$i = i_1 + i_2 = f_1(v) + f_2(v) = (f_1 + f_2)(v)$$

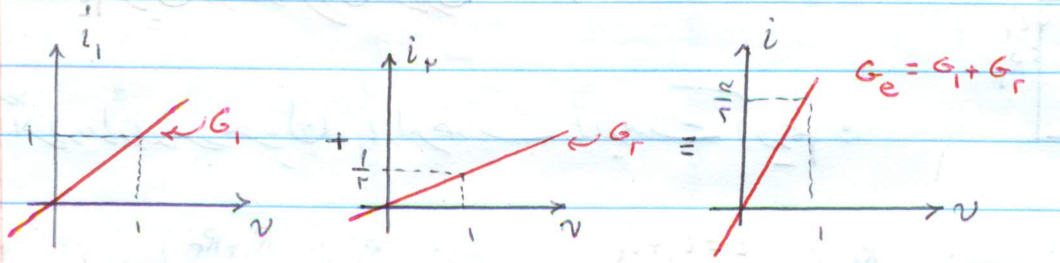
یعنی در مقاومت‌های موازی نمودارهای $v-i$ با هم جمع می‌شوند

در حالت مقاومت‌های خطی نامتغیر با زمان :

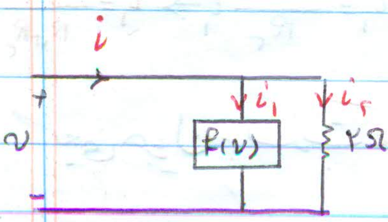


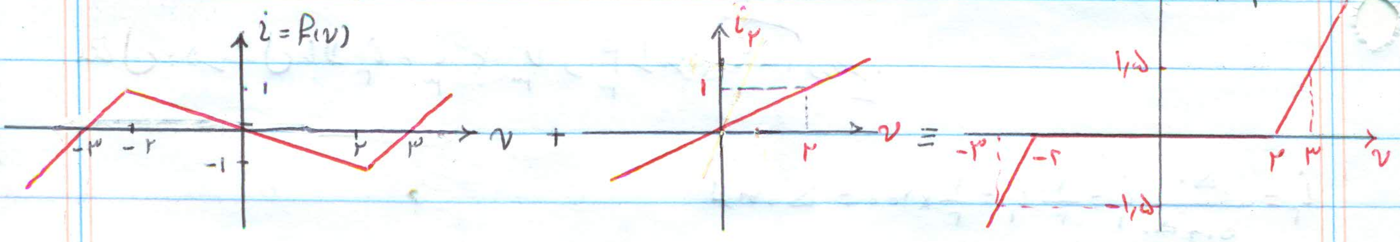
$$i = i_1 + i_2 = \frac{v}{R_1} + \frac{v}{R_2} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)v = \frac{v}{R_e}$$

$$R_e = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad , \quad G_e = \frac{1}{R_e} = G_1 + G_2$$

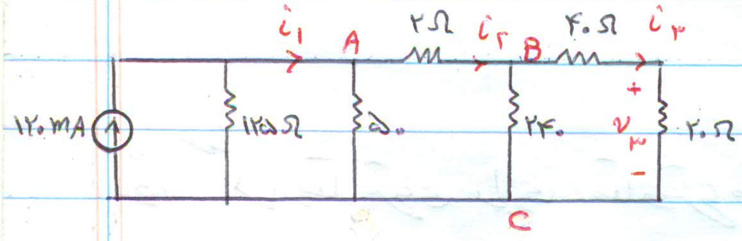


مثال : نمودار $v-i$ را رسم کنید.

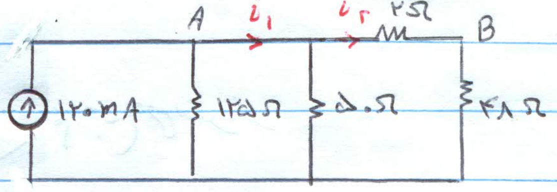




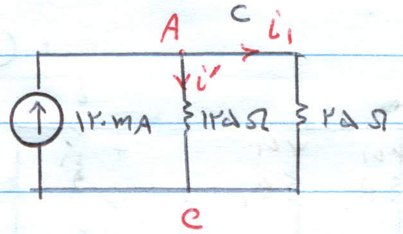
مثال - در مدار زیر جریان‌ها را بدست آورید.



ابتدا مقاومتهای سری یا موازی را به هم ارز خود تبدیل می‌کنیم :

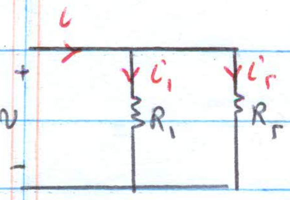


$$R_{BC} = \frac{(۴۰+۲۰)\times ۲۴۰}{(۴۰+۲۰)+۲۴۰} = ۴۸\ \Omega$$



$$R_{AC} = ۵۰ \parallel (۴۸+۲) = \frac{۵۰\times ۵۰}{۵۰+۵۰} = ۲۵\ \Omega$$

$$۲۵ i_1 = ۱۲۵ i' \Rightarrow i_1 = ۵ i' \xrightarrow{i_1+i'=۱۲۰} ۶ i' = ۱۲۰ \Rightarrow i' = ۲۰\ mA \Rightarrow i_1 = ۱۰۰\ mA$$



### تقسیم جریان در مقاومتهای موازی :

اگر در مدار روبرو جریان $i_1$ را بر حسب $i$ بدست آوریم :

$$R_1 i_1 = R_2 i_2 \Rightarrow i_2 = \frac{R_1}{R_2} i_1 \xrightarrow{i = i_1 + i_2} i = i_1 + \frac{R_1}{R_2} i_1 = \frac{R_1+R_2}{R_2} i_1 \Rightarrow i_1 = \frac{R_2}{R_1+R_2} i$$

$$i_2 = \frac{R_1}{R_1+R_2} i$$

یعنی جریان به نسبت عکس مقاومتها تقسیم می‌شود.

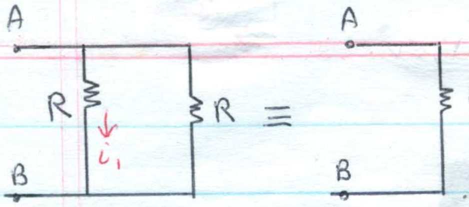
مثال: در مثال بالا $i_2$ ، $i_3$ ، $v_3$ و $p_3$ را بدست آورید.

$$i_2 = \frac{۵۰}{۵۰+۵۰} i_1 = \frac{۱}{۲} i_1 = \frac{۱}{۲}\times ۱۰۰ = ۵۰\ mA$$

$$i_3 = \frac{۲۴۰}{۲۴۰+۴۰+۲۰} i_2 = \frac{۲۴۰}{۳۰۰}\times ۵۰ = ۴۰\ mA \Rightarrow v_3 = ۲۰\times ۴۰ = ۸۰۰\ mv$$

$$P_3 = v_3 i_3 = ۰/۸ \times ۰/۰۴ = ۰/۰۳۲\ W$$

توجه : اگر در مقاومتهای موازی ، مقاومتها مساوی باشند داریم :

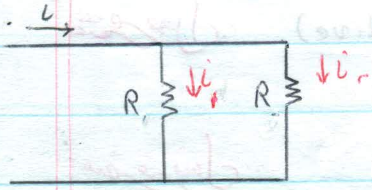


$$R_e=\frac{R\times R}{R+R}=\frac{R}{۲}$$

در حالت کلی n مقاومت موازی هم ارز $R_e=\frac{R}{n}$ است.

در حالت موازی بودن مقاومت ها، مقاومت هم ارز از تک تک مقاومت ها کمتر یا مساوی است

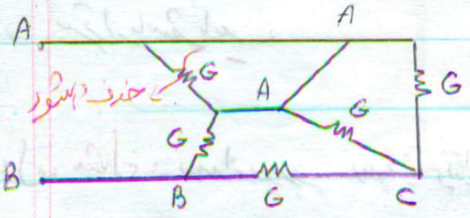
و در حالت سری مقاومت هم ارز از تک تک مقاومت ها بیشتر یا مساوی است.



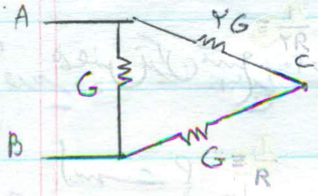
و جریان در تک تک شاخه ها به صورت مساوی تقسیم

می شود یعنی: $i_1=i_2=\frac{i}{۲}$

مثال: مقاومت هم ارز AB را بدست آورید:



حل: بهتر است ابتدا گره ها را اسم گذاری کنیم و مدار ساده شده را رسم کنیم

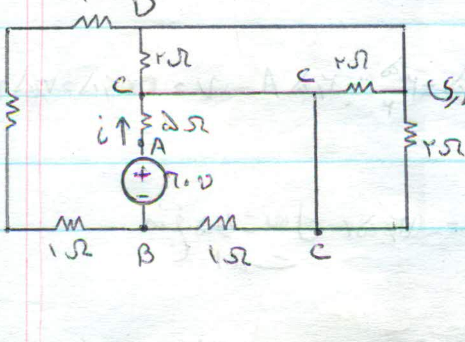


پس کافی است از گره A ، B و C داریم:

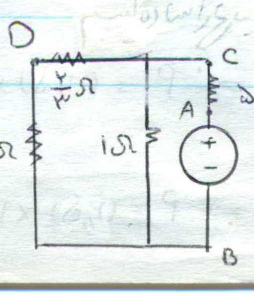
$$R_{ACB}=\frac{1}{۲G}+\frac{1}{G}=\frac{۳}{۲G}$$

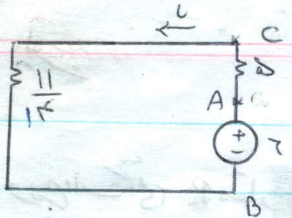
$$G_{AB}=G+\frac{۲G}{۳}=\frac{۵G}{۳}\Rightarrow R_{AB}=\frac{۳}{۵G}=\frac{۳R}{۵}$$

مثال: جریان i را بدست آورید. حل: بهتر است ابتدا گره ها را اسم گذاری



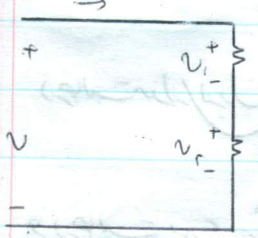
رسم: $R_{CD}=۲\|۲\|۲=\frac{۲}{۳}$ , $R_{BD}=۳$





$$R_{CB}=(۳+\frac{۲}{۳})\,\|\,۱=\frac{\frac{۱۱}{۳}\times ۱}{\frac{۱۱}{۳}+۱}=\frac{۱۱}{۱۴}\,\Omega$$

$$i=\frac{۶۰}{۵+\frac{۱۱}{۱۴}}=۱۰٫۳۷A$$



مدار تقسیم ولتاژ :

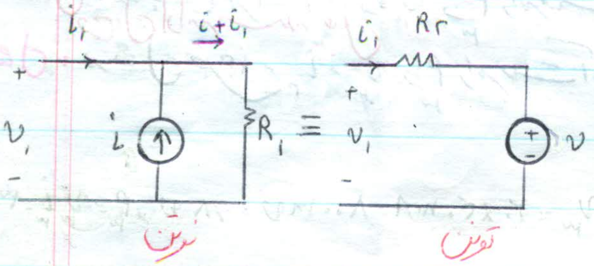
$$v=v_1+v_2=i(R_1+R_2)\Rightarrow i=\frac{v}{R_1+R_2}$$

$$v_2=iR_2=\frac{R_2}{R_1+R_2}v \quad \text{و} \quad v_1=iR_1=\frac{R_1}{R_1+R_2}v$$

عنصر فعال : (Active) عنصری است که توان آن منفی باشد (به مدار توان میدهد) نمودار i-v در ربع دوم و چهارم است

عنصر غیر فعال : (Passive) عنصری است که توان آن مثبت باشد (از مدار توان بگیرد)

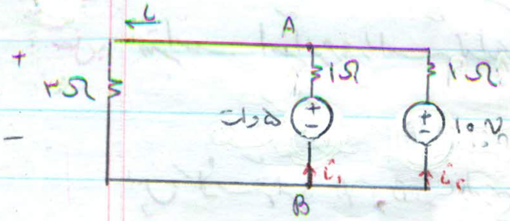
معادل تونن و نورتن :



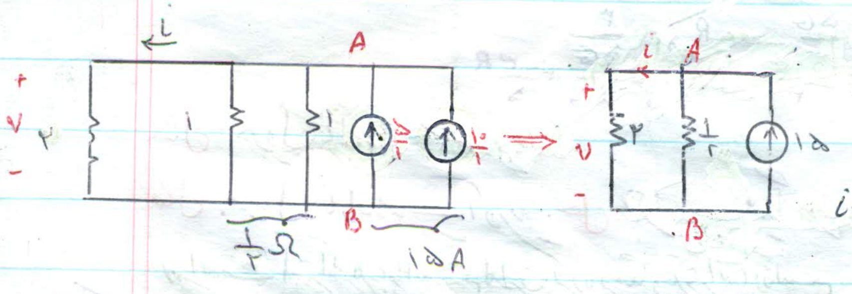
$$v_1=(i+i_1)R_1=R_2 i_1+v$$

اگر بخواهیم رابطه فوق همواره برقرار باشد به ازاء همه iها و vها

برقرار باشد باید : $R_1=R_2$ و $v=iR_1$



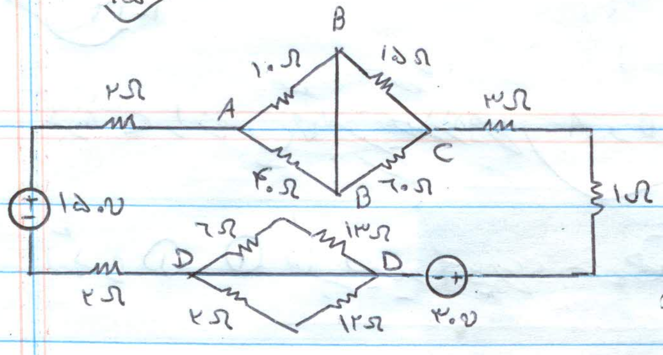
مثال : الف ـ در مدار روبرو $v$ ، $i$ ، $i_1$ و $i_2$ و توان منابع را بدست آورید. ب ـ کدام منبع فعال است؟ حل ـ ابتدا منابع را به معادل نورتن تبدیل می‌کنیم



$$i=\frac{\frac{۱}{۲}}{۲+\frac{۱}{۲}}\times ۱۵=۳\Rightarrow v=۳\times ۲=۶\,v$$

$v_{AB}=v=۵+۱i_1=۶\Rightarrow i_1=۱\Rightarrow P=(-۱)\times ۵=-۵\,W$ منبع ۵ ولت فعال است

$v_{AB}=۶=۱۰+i_2\Rightarrow i_2=-۴\Rightarrow P=(۴)\times ۱۰=۴۰\,W$ منبع ۱۰ ولت غیر فعال است

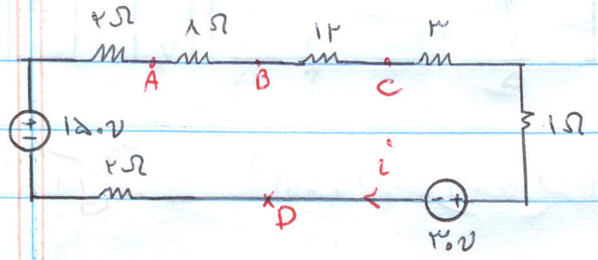


مثال - توان جذب شده به وسیلهٔ مقاومت‌های ۱Ω، ۱۰Ω و ۱۳Ω را به دست آورید.

حل: ابتدا مدار را ساده کنید:

$$R_{AB} = \frac{۱۰×۴۰}{۱۰+۴۰} = ۸\,\Omega, \quad R_{BC} = \frac{۱۵×۶۰}{۱۵+۶۰} = ۱۲\,\Omega$$

پس مدار هم‌ارز به صورت زیر است:



حال KVL را در حلقهٔ به دست آمده بنویسید:

$$(۲+۸+۱۲+۳+۱+۲)i+۳۰-۱۵۰=۰ \Rightarrow i=\frac{۱۲۰}{۲۸}=۴{,}۲۹\,A$$

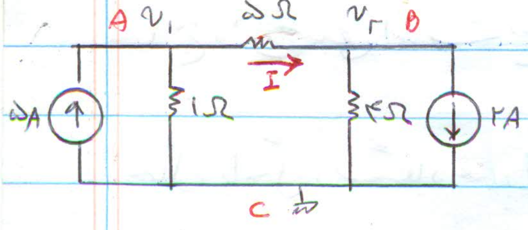
$$P_1 = i^2×۱ = ۴{,}۲۹^2×۱ = ۱۸{,}۳۷\ W$$ چون توان مثبت است پس عنصر غیر فعال می‌باشد.

مقاومت‌های ۱۰ و ۴۰ موازی‌اند پس:

$$i_{AB} = \frac{۴۰}{۱۰+۴۰}×۴{,}۲۹ = ۳{,}۴۳\,A$$

$$P_{10} = P_{AB} = ۱۰×۳{,}۴۳^2 = ۱۱۷{,}۵۵\ W \quad و \quad P_{13} = ۰^2×۱۳ = ۰\ W$$

تحلیل گره‌ای: نقطه‌ای که به بیشترین عناصر به هم وصل است زمین (پتانسیل صفر) بگیرید و ولتاژ گره‌های دیگر را $v_1$، $v_2$ و ... بنامید. با نوشتن KCL در هر گره و حل معادله‌ها، آن مجهول‌های مسئله به دست می‌آید.



مثال: جریان I را در مدار زیر به دست آورید.

حل: به دلیل اتصال عناصر بیشتر به گره C

گره c را زمین گرفته، گره‌های A و B را به ترتیب $v_1$ و $v_2$ بنامید، حال KCL را در گره ① و ② بنویسید جریان‌های خروجی مثبت و ورودی منفی در نظر گرفته شود:

A - گره ۱ $\quad \frac{v_1}{1} + \frac{v_1 - v_2}{5} - 5 = 0$

B - گره ۲ $\quad \frac{v_2}{4} + \frac{v_2 - v_1}{5} + 2 = 0$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} (1+\frac{1}{5}) & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{4}+\frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}$$

با کمی دقت مشاهده می‌شود معادلهٔ بالا $GV = I_s$ نظیر قانون اهم است:

البته در فضای ماتریسی: $RI = V \Rightarrow I = \frac{V}{R} = GV \Rightarrow GV = I_s$

در صورت نبودن منبع وابسته عناصر ماتریس G را می‌توان به آسانی نوشت:

$g_{ii}$ مجموع رسانایی‌های متصل به گره i است پس: $\quad g_{11} = 1 + \frac{1}{5}\ (S)$

$g_{22} = \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$

$i \neq j$ در $g_{ij}$ مجموع رسانایی‌های بین i و j با علامت منفی است پس:

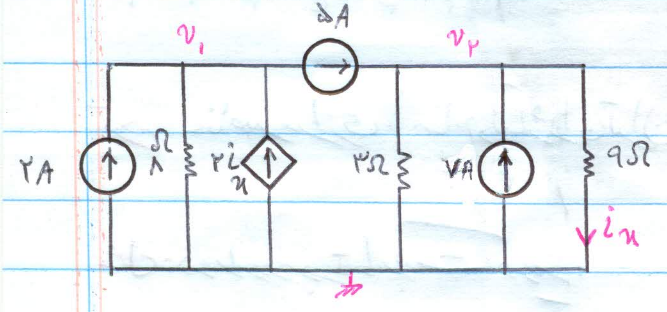
$g_{12} = g_{21} = -\frac{1}{5}$

$i_k$ مجموع منابع جریان متصل به گره k است که اگر به گره وارد شود مثبت و اگر خارج شود منفی است پس $\quad i_1 = 5$ و $i_2 = -2$

حال با حل دستگاه مجهول‌ها معلوم می‌شود:

$$v = G^{-1} I_s = \begin{bmatrix} ۳۶٫۷ \\ -۲٫۸ \end{bmatrix} \Rightarrow I = \frac{v_1 - v_2}{۵} = \frac{۳۶٫۷ + ۲٫۸}{۵} = ۱٫۳A$$

مثال - منبع ۵A چه توانی تولید می‌کند؟



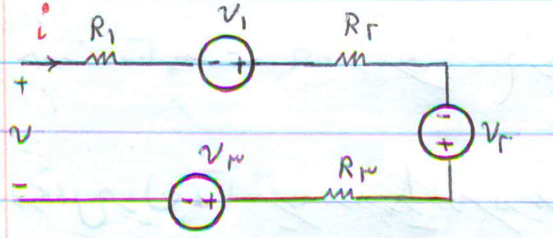
حل: گره زمین در بیشترین اتصال عناصر انتخاب می‌شود سپس معادله‌های KCL در $v_1$ و $v_2$ نوشته می‌شود:

گره ۱: $-۲ + \frac{v_1}{۸} - ۲i_x + ۵ = ۰ \Rightarrow \frac{v_1}{۸} - ۲\times\frac{v_2}{۹} + ۳ = ۰ \Rightarrow ۹v_1 - ۱۶v_2 = -۲۱۶$

گره ۲: $-۵ + \frac{v_2}{۳} - ۷ + \frac{v_2}{۹} = ۰ \Rightarrow ۴v_2 = ۱۰۸ \Rightarrow v_2 = ۲۷ \Longrightarrow v_1 = ۲۴\ v$

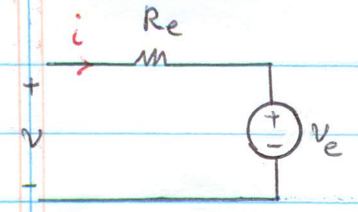
$P_۵ = (v_1 - v_2)\times ۵ = (۲۴ - ۲۷)\times ۵ = -۱۵\ W$ منبع ۵A توان تولید می‌کند (-)

سری کردن منابع ولتاژ: هرگاه چند منبع ولتاژ سری باشند می‌توان همه آنها را به صورت یک منبع ولتاژ در نظر گرفت:



$$-v + R_1 i - v_1 + R_2 i - v_2 + R_3 i + v_3 = ۰$$

$$v = (R_1 + R_2 + R_3)\, i + v_3 - v_1 - v_2 \quad \text{(I)}$$

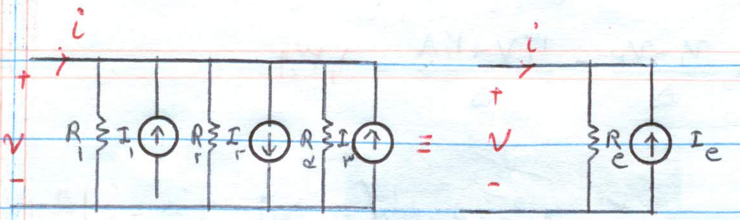


$$-v = R_e i + v_e = ۰ \Rightarrow v = R_e i + v_e \quad \text{(II)}$$

$$\text{I, II} \Rightarrow R_e = R_1 + R_2 + R_3 \quad , \quad v_e = v_3 - v_1 - v_2$$

موازی کردن منابع جریان: هرگاه چند منبع جریان موازی باشند می‌توان همه آنها را به صورت یک منبع جریان

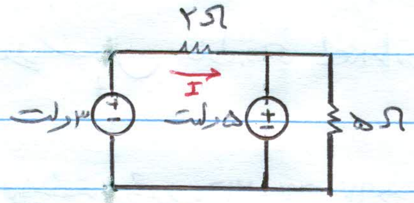
درنظر گرفت :



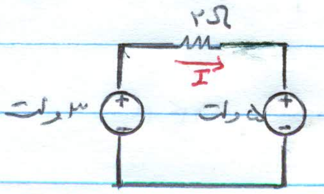
$R_e = R_1 \| R_2 \| R_3$ ، $I_e = I_3 - I_2 - I_1$

توجه: عناصر موازی با منابع ولتاژ را می‌توان حذف کرد در تحلیل مدار خللی وارد نمی‌شود.

مثال: در مدار روبرو I را بدست آورید.



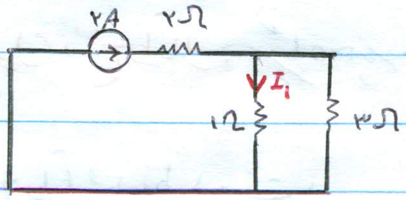
حل: حذف مقاومت ۵Ω در تحلیل جریان I



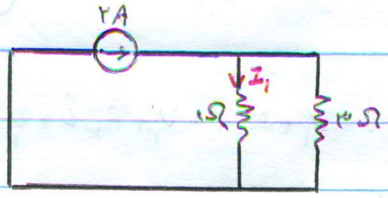
با [illegible] در مدار: $-3+2I+5=0 \Rightarrow I=-1A$

توجه: عناصر سری با منابع جریان را می‌توان حذف کرد در تحلیل مدار خللی وارد نمی‌شود.

مثال: در مدار روبرو جریان $I_1$ را بدست آورید.



حذف مقاومت ۲Ω (سری با منبع جریان ۲A)



تحلیل جریان $I_1$ با [illegible] در مدار:

$$I_1 = 2 \times \frac{3}{3+1} = 1.5\,A$$

۱۹ م

در صورتی که منبع ولتاژ، منابع وابسته، سلف و عناصر تزویج نداشته باشیم معادله‌ها را می‌توان به شکل ساده‌تری نوشت:

روش ماتریسی: گره‌ها را ۱، ۲، ... n می‌نامیم. در صورتی که منبع ولتاژ، منابع وابسته، سلف و عناصر تزویج نداشته باشیم داریم: $GV = I_S$

۱- $g_{ii}$ (عناصر روی قطر اصلی G) مجموع ادمیتانس‌های متصل به گره i است و $g_{ij}$ $(i \neq j)$ مجموع ادمیتانس‌های بین i و j با علامت منفی است. (بنابراین ماتریس G همواره متقارن است.)

۲- $i_{s_i}$ مجموع منابع جریان متصل به گره i است که ورودی به گره با علامت مثبت و خروجی از گره دارای علامت منفی است.

مثال: با اعمال این روش روی مثال قبل داریم:

$$\begin{bmatrix} \frac{6}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{9}{20} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}$$

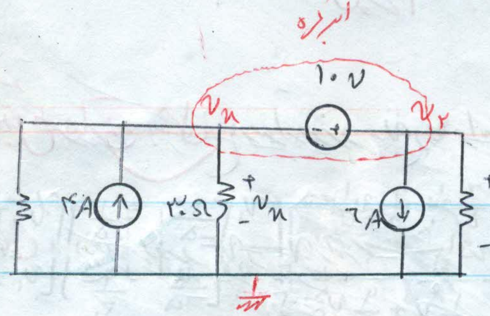
$$v_1 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -\frac{1}{5} \\ -2 & \frac{9}{20} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{6}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{9}{20} \end{vmatrix}} = \frac{\frac{9}{4} - \frac{2}{5}}{.54 - .04} = 3.7\ v \quad , \quad v_2 = \frac{\begin{vmatrix} \frac{6}{5} & 5 \\ -\frac{1}{5} & -2 \end{vmatrix}}{.5} = -2.8\ v$$

ابرگره: در صورت وجود منبع ولتاژ بین دو گره یا باید آن را به منبع جریان تبدیل کرد یا ابرگره گرفت. به مثال‌های زیر توجه کنید.

تعداد گره‌های مستقل $n = n_t - 1$

کل تعداد گره‌ها

ص ۲۰



مثال: $v_x$ را در شکل مقابل پیدا کنید.

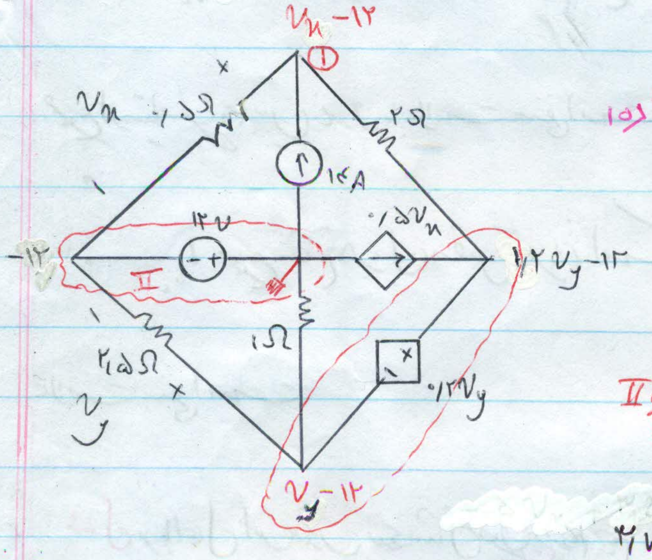
در نوشتن معادله برای گره $v_x$ و $v_۲$ چون منبع

ولتاژ مستقل است و یک مجهول به مسئله اضافه نشده پس بهتر است ابرگره تشکیل بدهیم جمع جریان های ابرگره

صفر است

$$\frac{v_x}{۱۵} - ۴ + \frac{v_x}{۳۰} + ۶ + \frac{v_۲}{۲۰} = ۰ \xrightarrow{\times ۶۰} ۶v_x + ۳v_۲ = -۱۲۰ \xrightarrow{v_۲ - v_x = ۱۰} ۹v_x = -۱۵۰ \Rightarrow v_x = -۱۶٫۶۷$$

مثال: در مدار روبرو $v_x$ و $v_y$ را پیدا کنید.



گره ۱: $\frac{v_x}{۰٫۵} - ۱۴ + \frac{v_x - ۱۲ - ۱٫۲v_y + ۱۲}{۲} = ۰ \xrightarrow{\times ۲}$

$$۵v_x - ۱٫۲v_y = ۲۸ \quad ①$$

ابرگره II: $-\frac{v_x}{۰٫۵} + ۱۴ + ۰٫۵v_x - \frac{v_y - ۱۲}{۱} + \frac{v_y}{۲٫۵} = ۰ \xrightarrow{\times ۲٫۵}$

$$۳٫۷۵v_x + ۳٫۵۷v_y = ۶۵ \quad ②$$

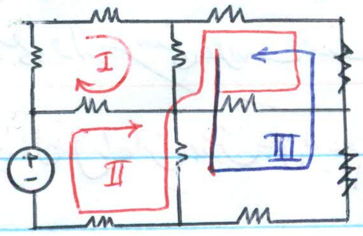
$$\text{I, II} \Rightarrow \begin{bmatrix} ۳٫۷۵ & ۳٫۵ \\ ۵ & -۱٫۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۶۵ \\ ۲۸ \end{bmatrix} \Rightarrow v_x = \frac{\begin{vmatrix} ۶۵ & ۳٫۵ \\ ۲۸ & -۱٫۲ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} ۳٫۷۵ & ۳٫۵ \\ ۵ & -۱٫۲ \end{vmatrix}} = \frac{-۱۷۶}{-۲۲} = ۸ v$$

$$v_y = \frac{\begin{vmatrix} ۳٫۷۵ & ۶۵ \\ ۵ & ۲۸ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} ۳٫۷۵ & ۳٫۵ \\ ۵ & -۱٫۲ \end{vmatrix}} = \frac{-۲۲۰}{۲۲} = ۱۰ v$$

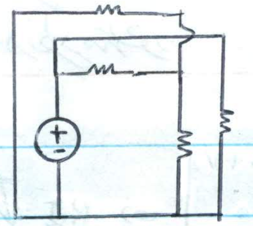
**تعریف مدار صفحه‌ای (مسطح):** مداری که بتوان آن را روی یک صفحه کشید به گونه‌ای که هیچ دو شاخه‌ای

به جز در گره‌ها با هم تلاقی نداشته باشند، مدار مسطح نامیده می‌شود.

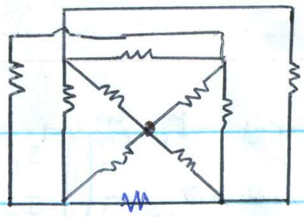
ص ۲۱



مدار مسطح



مدار مسطح



مدار غیرصفحه‌ای

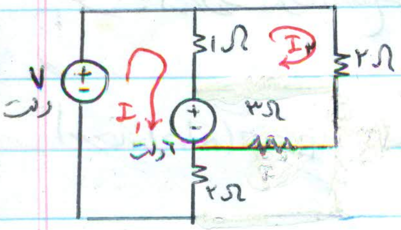
تعریف خانه: هر مسیر بسته که درون آن هیچ شاخه‌ای نباشد، خانه می‌نامند (مسیر I در شکل فوق)

حلقه (Loop): مسیر بسته‌ای است که از گره بیش از یک بار عبور نکرده باشیم (مسیر II حلقه نیست و مسیر III حلقه است)

## تحلیل خانه‌ای

الف - جریان‌ها را در مسیر ساعت‌گرد انتخاب کنید.     ب) به تعداد خانه معادله مستقل می‌توان نوشت

مثال: جریان‌های $I_1$ و $I_2$ را بدست آورید.



① $-7+1(I_1-I_2)+6+2I_1=0 \Rightarrow 3I_1-I_2=1$

② $2I_2+3I_2-6+1(I_2-I_1)=0 \Rightarrow -I_1+6I_2=6$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}=\frac{1}{17}\begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{12}{17} \\ \frac{19}{17} \end{bmatrix} \Rightarrow I_1=0{,}7\ A\ ,\ I_2=1{,}12\ A$$

توجه:

اگر منابع تنها منابع ولتاژی باشد و منبع وابسته و ترانزیستور نداشته باشیم همواره $RI=V_s$

که در آن $R_{ii}$ مجموع مقاومت‌های خانه i و $R_{ij}$ $(i\neq j)$ مقاومت‌های مشترک بین خانه i و j با علامت منفی است. $V_{s_i}$ مجموع منابع ولتاژ خانه i به شرط این که جریان از مثبت

منفی و از بین منفی علامت مثبت در نظر گرفته شود.

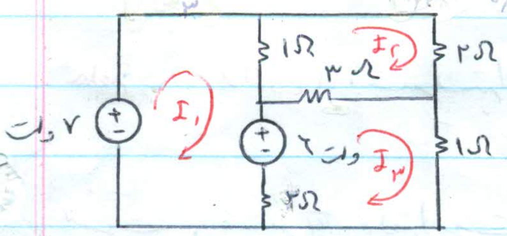
اگر مثال قبل را با این روش حل کنیم:

$R_{11}=۱+۲=۳\Omega$ $\quad R_{12}=R_{21}=-۱$ ، $R_{22}=۶$

$V_{s_1}=-۶+۷=۱$ ، $V_{s_2}=۶$

$$\begin{bmatrix}۳&-۱\\-۱&۶\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_1\\I_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱\\۶\end{bmatrix}\Rightarrow \quad I=R^{-1}V_s=\frac{۱}{۱۷}\begin{bmatrix}۶&۱\\۱&۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱\\۶\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{۱۲}{۱۷}\\\frac{۱۹}{۱۷}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰/۷\\۱/۱\end{bmatrix}$$

مثال: در مدار روبرو $I_1$ ، $I_2$ و $I_3$ را بدست آورید.



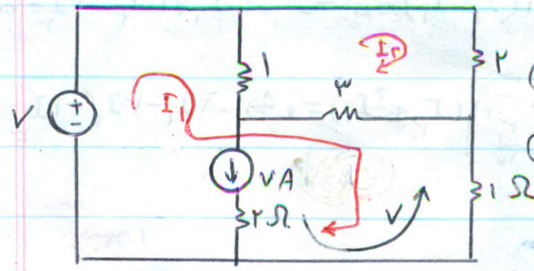
① $-۷+(I_1-I)+۶+۲(I_1-I_3)=۰ \Rightarrow ۳I_1-I_2-۲I_3=۱$

② $۱(I_2-I_1)+۲I_2+۳(I_2-I_3)=۰ \Rightarrow -I_1+۶I_2-۳I_3=۰$

③ $۳(I_3-I_2)+I_3+۲(I_3-I_1)-۶=۰ \Rightarrow -۲I_1-۳I_2+۶I_3=۶$

$$\begin{bmatrix}۳&-۱&-۲\\-۱&۶&-۳\\-۲&-۳&۶\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_1\\I_2\\I_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱\\۰\\۶\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}I_1\\I_2\\I_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰/۶۹&۰/۳۱&۰/۳۸\\۰/۳۱&۰/۳۶&۰/۲۸\\۰/۳۸&۰/۲۸&۰/۴۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱\\۰\\۶\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳\\۲\\۳\end{bmatrix}$$

توجه: در صورت وجود منبع جریان آن خانه را صرف نظر می‌کنیم و یکی از معادلات خانه کم می‌کنیم و به جای خانه ابرخانه (حلقه) در نظر می‌گیریم که در مسیر حلقه تمامی منبع جریان‌ها حضور داشته باشند. این پدیده را در مدار زیر مشاهده می‌کنیم



حل

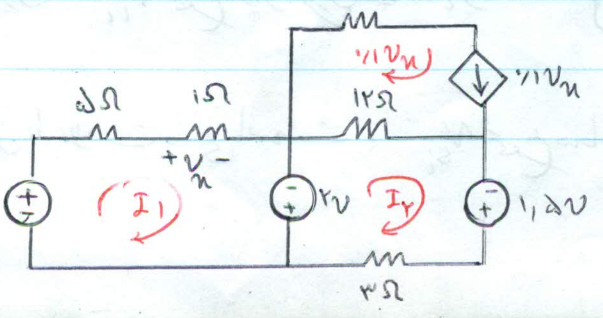
① $-۷+I_1-I_2+۳(I_1-I_2-۷)+۱(I_1-۷)=۰$

② $۲I_2+۳(I_2-I_1+۷)+۱(I_2-I_1)=۰$

$$\Rightarrow\begin{cases}۵I_1-۴I_2=۳۵\\-۴I_1+۶I_2=-۲۱\end{cases}$$

$$I_1=\frac{\begin{vmatrix}۳۵&-۴\\-۲۱&۶\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}۵&-۴\\-۴&۶\end{vmatrix}}=\frac{۳۵\times۶-۲۱\times۴}{۱۴}=۹ \qquad I_2=\frac{\begin{vmatrix}۵&۳۵\\-۴&-۲۱\end{vmatrix}}{۱۴}=\frac{-۱۰۵+۱۴۰}{۱۴}=۲/۵\ A$$

مثال: در مدار زیر $v_x$ و $I_2$ را بدست آورید.



ص ۲۳

① $-۶+۶I_۱-۲=۰ \Rightarrow I_۱=\frac{۸}{۶}=\frac{۴}{۳}=۱,۳۳A \Rightarrow v_x=۱\times I_۱=\frac{۴}{۳}=۱,۳۳ \}$

② $۲+۱۲(I_۲-۰/۱v_x)-۱,۵+۳I_۲=۰ \Rightarrow ۱۵I_۲=۰/۵+۱,۲v_x \Rightarrow I_۲=۰/۰۷A \}$

# فصل پنجم نسبت

## خطی بودن و برهم نهی (جمع آثار) (Super Position)

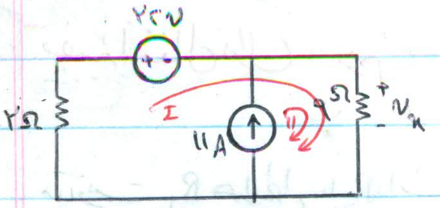
منبع وابسته خطی: منبعی است که جریان یا ولتاژ منبع به صورت خطی با جریان و ولتاژ دیگر شاخه‌ها مرتبط باشد مثلاً:

$v_s = 0/6i - 14v_2$

مدار خطی: مداری است که تنها از عناصر خطی شامل عناصر خطی و منبع وابسته خطی و چند منبع نابسته (مستقل) تشکیل شده باشد

جمع آثار (برهم نهی): در شبکهٔ مقاومتی خطی ولتاژ یا جریان هر مقاومت یا منبع با جمع جبری ولتاژها یا جریان‌ها حاصل از تک تک منابع می‌باشد در این حالت همه منابع ولتاژ نابسته اتصال کوتاه و منابع جریان نابسته باز می‌شوند.

مثال: روش اول:



$2I + 22 + 9(11+I) = 0 \Rightarrow 11I = -11(9+2) \Rightarrow I = -11$

$v_x = 9\times(11-11) = 0$

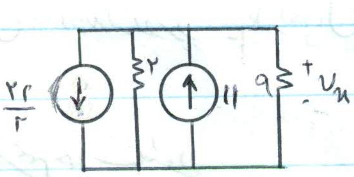
روش دوم جمع آثار:

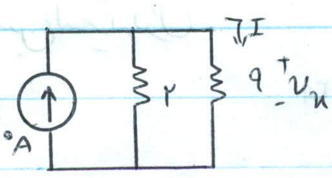
منبع ۲۲ را اتصال کوتاه می‌کنیم $\Rightarrow I_1 = \frac{2}{9+2}\times 11 = 2 \Rightarrow v_{x_1} = 9\times 2 = 18$

۱۱A را باز می‌کنیم $\Rightarrow I_2 = \frac{-22}{11} = -2 \Rightarrow v_{x_2} = 9\times(-2) = -18$

$\Rightarrow v_x = v_{x_1} + v_{x_2} = 0$

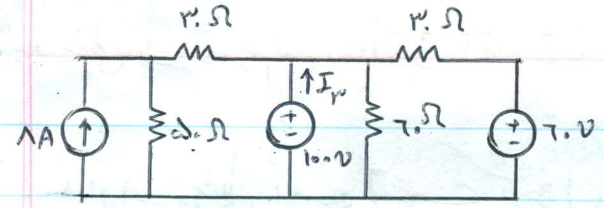
روش سوم: تبدیل منابع:



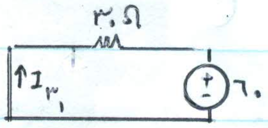


$I = 0 \Rightarrow v_x = 0$

مثال: با جمع آثار جریان $I_3$ را بدست آورید.

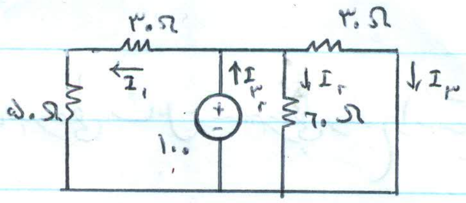


① منبع ۸A باز و ۱۰۰V اتصال کوتاه



$I_{3_1} = -\frac{60}{30} = -2A$

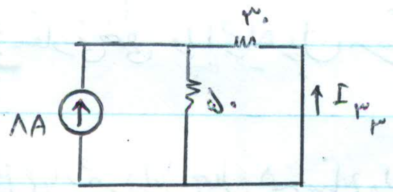
② منبع ۶۰V اتصال کوتاه و ۸A باز شود



$I_{3_2} = I_1+I_2+I_3 = \frac{100}{80}+\frac{100}{60}+\frac{100}{30}$

$= 6{,}25A$

③ ۶۰V، ۱۰۰V اتصال کوتاه شود

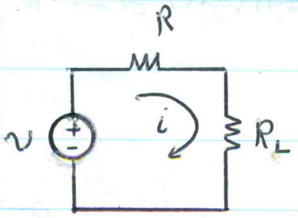


$I_{3_3} = -\frac{8\times50}{50+30} = -5$

توجه: عناصر سری با منبع جریان و موازی با منبع ولتاژ را می‌توان حذف کرد. در جریان و ولتاژ دیگر عناصر مدار تأثیر نمی‌گذارد.

$I_3 = I_{3_1}+I_{3_2}+I_{3_3} = -2+6{,}25-5 = -0{,}75A$

## قضیه انتقال توان ماکزیمم:

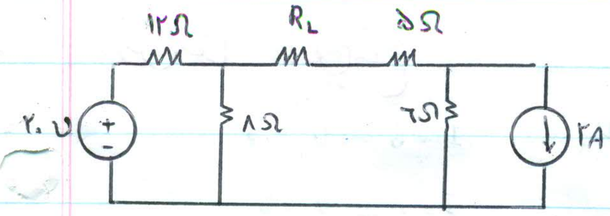


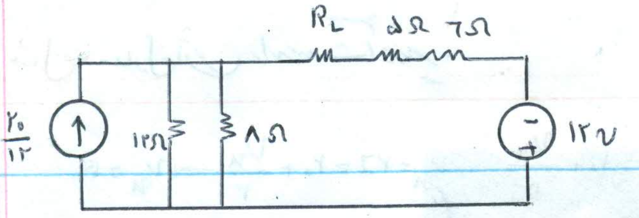
مقاومت $R_L$ چه ارتباطی با R داشته باشد تا ماکزیمم توان به R منتقل شود؟

$i=\frac{v}{R+R_L} \Rightarrow P=i^2R_L=\frac{v^2}{(R+R_L)^2}R_L$

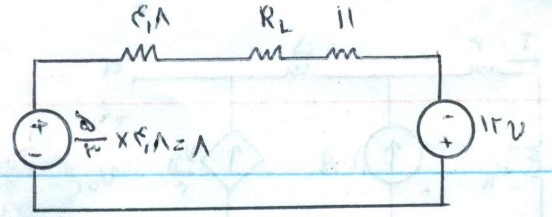
$\frac{dP}{dR_L} = v^2\times\frac{(R+R_L)^2-2(R+R_L)R_L}{(R+R_L)^4}=0 \Rightarrow R+R_L-2R_L=0 \Rightarrow R=R_L \} \Rightarrow P_{max}=\frac{v^2}{4R}$

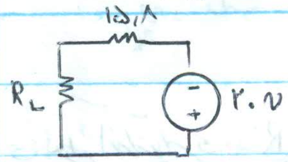
مثال: در مدار روبرو $R_L$ را چنان تعیین کنید که توان ماکزیمم جذب بشود.





$$\frac{12\times 8}{12+8} = \frac{96}{20} = 4.8\,\Omega$$

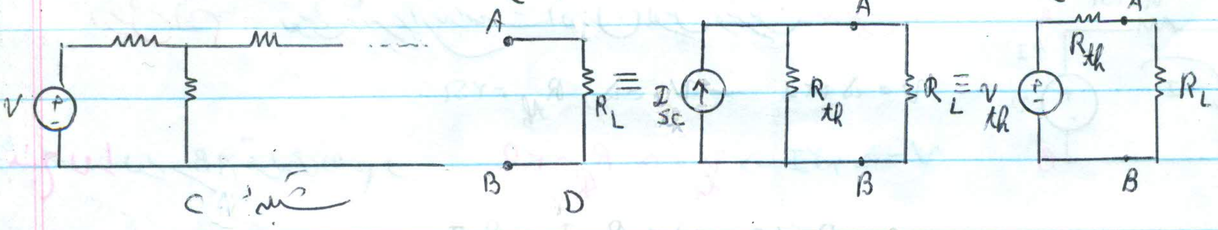




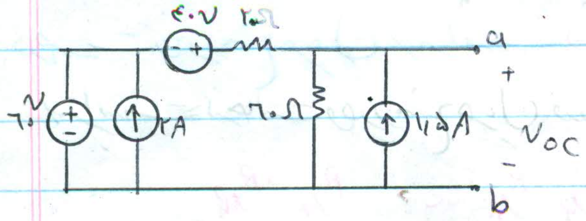
$$\Rightarrow R_L = 15.8\,\Omega \Rightarrow P_{max} = \frac{v^2}{4R} = \frac{400}{4\times 15.8} = 6.33\,W$$

## تونن (Thevenin) و نرتن (Norton) :

مدار خطی داده شده را به دو شبکهٔ C و D تقسیم کنید. شبکهٔ D را می‌توان به صورت یک مقاومت موازی با منبع جریان $I_{sc}$ یا یک مقاومت سری با منبع ولتاژ در نظر گرفت. مقاومت معادل مقاومت معادل مدار با کشتن منابع بدست می‌آید و منبع ولتاژ $v_{oc}$ و منبع جریان $I_{sc}$ جریان اتصال کوتاه است



**مثال :** معادل تونن مدار روبرو را بدست آورید.



منبع موازی با منبع ولتاژ حذف می‌گردد (منبع ۲A)

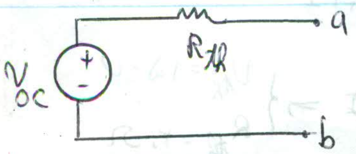
$$v_{oc_1} = \frac{100}{20+60}\times 60 = 75\,v$$ ، حاصل از منبع ۱۰۰ ولت

$$v_{oc_2} = 20\times\frac{1.5}{20+60}\times 60 = 22.5$$ حاصل از منبع ۱٫۵A

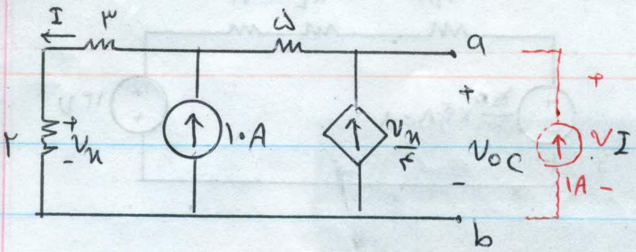
$$\Rightarrow v_{oc} = 97.5$$ ولت

$$R_{th} = \frac{20\times 60}{20+60} = 15\,\Omega$$

مقاومت معادل از دید ab وقتی همهٔ منابع را بکشیم:



مثال: معادل تونن را بدست آورید.



$I = 10 + \frac{v_x}{4} \Rightarrow v_x = 2I = 20 + \frac{v_x}{2} \Rightarrow v_x = 40$

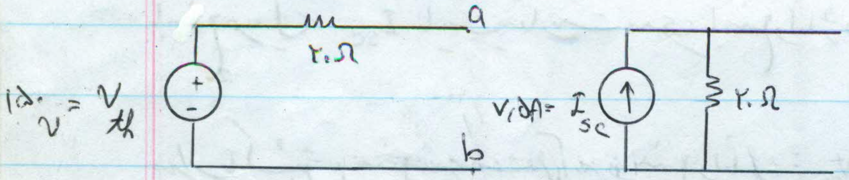
$I = \frac{v_x}{2} = 20 \Rightarrow v_{oc} = 5 \times \frac{v_x}{4} + 5I = 5 \times \frac{40}{4} + 5I = 50 + 5 \times 20 = 150$ ولت $= v_{th}$

برای اندازه‌گیری $R_{th}$ منابع نابسته (۱۰A) را برمیداریم (مدار باز) با قرار دادن منبع جریان 1A و اندازه‌گیری v داریم ($R_{th} = \frac{v}{1}$):

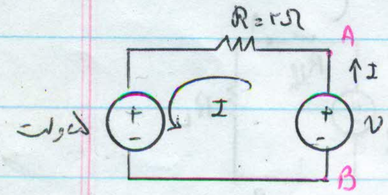
$v = 10\left(\frac{v_x}{4} + 1\right) = 2.5v_x + 10$

$v_x = 2\left(\frac{v_x}{4} + 1\right) \Rightarrow \frac{v_x}{2} = 2 \Rightarrow v_x = 4$

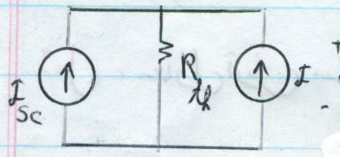
$\Rightarrow v = 20 = R_{th}$ و $I_{sc} = \frac{v_{th}}{R_{th}} = \frac{150}{20} = 7.5A$



روش دوم: روشی دیگر برای بدست آوردن معادل تونن و نورتن:



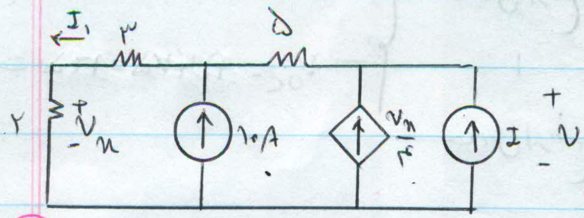
منبع v را در سر AB قرار میدهیم و $v = 5 + 2I \Rightarrow v_{th} = 5, R_{th} = 2\Omega$



در حالت نورتن منبع جریان بهتر است بصورت منبع جریان قرار دهیم:

$v = R_{th}(I_{sc} + I) = R_{th}I_{sc} + R_{th}I \Rightarrow v_{th} = R_{th}I_{sc}$ و $R_{th} = R_{th}$

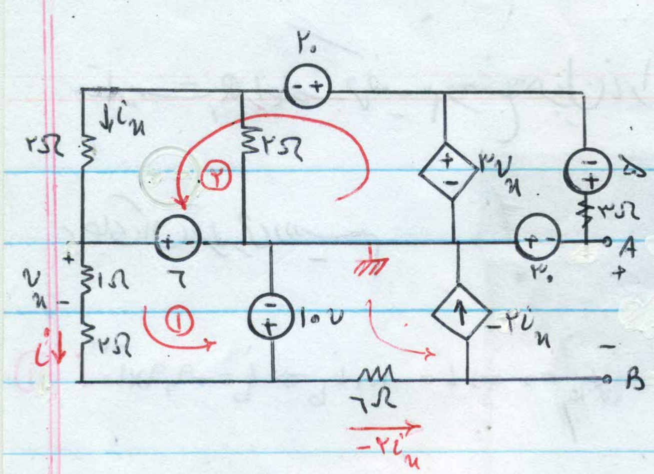
مثال: معادل تونن مدار فوق را بدست آورید:



$I_1 = 10 + \frac{v_x}{4} + I \xRightarrow{\text{Ⓘ}} v_x = 2I_1 = 20 + \frac{v_x}{2} + 2I$

Ⓘ Ⓘ: $v_x = 40 + 4I \xRightarrow{\text{Ⓘ}} I_1 = 10 + (10 + I) + I = 20 + 2I$ و $v = 5\left(\frac{v_x}{4} + I\right) + 5I_1 \overset{\text{II, I}}{=} 20I + 150$

$R_{th} = 20$ و $v_{th} = 150$



مثال: معادل تونن دو سر AB را به دست آورید.

ابتدا $v_{th}=v_{oc}=v_{AB}$ را به دست می‌آوریم:

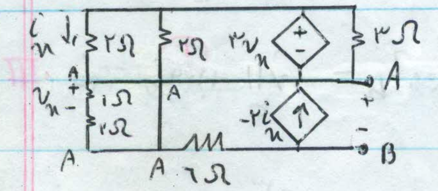
از حلقهٔ ① شروع می‌کنیم تا $v_x$ را به راحتی به دست آوریم:

سپس در حلقهٔ ② می‌توان $i_x$ را نیز به دست آورد. و

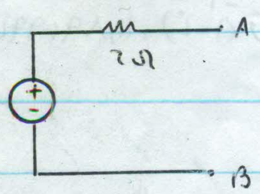
① $۱۰-۶+۳i=۰ \Rightarrow i=-\frac{۴}{۳} \Rightarrow v_x=i=-\frac{۴}{۳}$

② $-۳v_x+۲۰+۲i_x+۶=۰ \Rightarrow i_x=-۱۵$ ، $-v_{AB}-۳۰-۱۰+۶(-۲i_x)=۰ \Rightarrow$

$v_{AB}=-۴۰+۶\times(-۲)\times(-۱۵)=۱۴۰=v_{oc}=v_{th}$



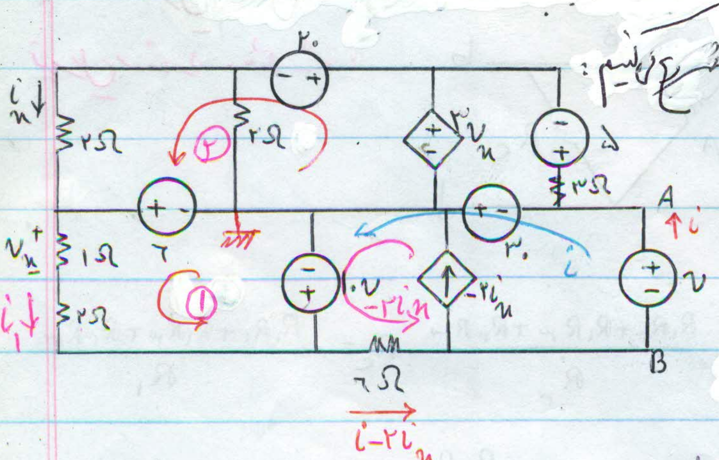
برای محاسبه $R_{th}$ منابع نابسته را می‌کشیم در این صورت:



$v_x=۰ \Rightarrow i_x=۰ \Rightarrow R_{th}=۶\Omega$

روش دوم: منبع v را در سر AB قرار می‌دهیم و جریان i را به دست می‌آوریم:

مانند حالت قبل است. پس از حلقه‌های ① و ② شروع می‌کنیم:

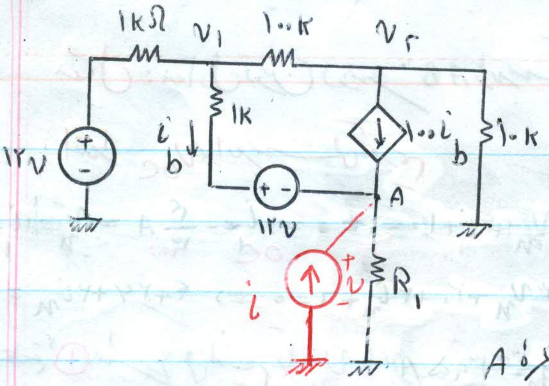


① $۱۰-۶+۳i_1=۰ \Rightarrow i_1=-\frac{۴}{۳} \Rightarrow v_x=i_1=-\frac{۴}{۳}$

② $-۳v_x+۲۰+۲i_x+۶=۰ \Rightarrow i_x=-۱۵$

$-v-۳۰-۱۰+۶(i-۲i_x)=۰ \Rightarrow v=۶i+۱۴۰ \Rightarrow R_{th}=۶$ و $v_{th}=۱۴۰$

مثال: معادل دو سر ab و زمین را به دست آورید.



مقاومت R۱ را حذف می‌کنیم و منبع جریان i را

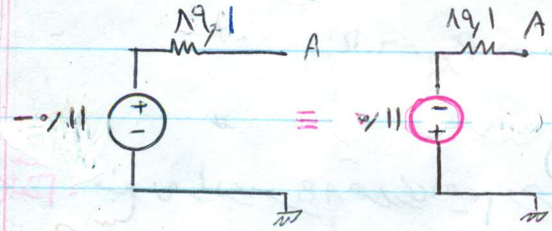
بجای آن قرار می‌دهیم

$A$ گره $= i+i_b+۱۰۰i_b=۰ \Rightarrow i=-۱۰۱i_b \Rightarrow i_b=-۹٫۹\times۱۰^{-۳}\,i$ Ⅱ

$-v-۱۲-۱۰۰۰i_b+v_۱=۰ \Rightarrow v=-۱۲+۱۰۰۰i_b+v_۱$ Ⅰ

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{v_۱-۱۲}{۱۰۰۰}+\dfrac{v_۱-v_۲}{۱۰۰۰۰۰}+i_b=۰ \Rightarrow ۱۰۱v_۱-v_۲=۱۲۰۰-۱۰۰۰۰۰i_b \\[2ex] \dfrac{v_۲}{۱۰۰۰۰}+۱۰۰i_b+\dfrac{v_۲-v_۱}{۱۰۰۰۰۰}=۰ \Rightarrow -v_۱+۱۱v_۲=-۱۰^{۷}i_b\end{array}\right\} \begin{array}{l}\times۱۱\\ \Rightarrow\end{array}$$

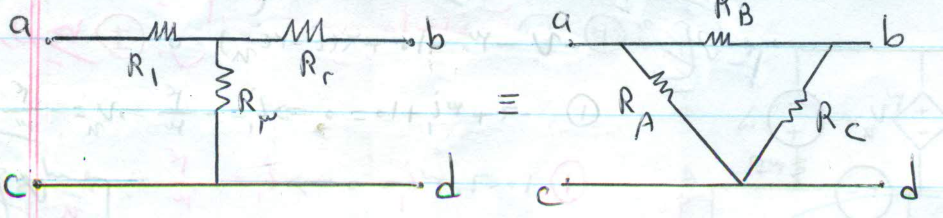
$۱۱\times۱۰۱v_۱-v_۱=۱۱\times۱۲۰۰-۱۱\times۱۰^{۵}i_b-۱۰^{۷}i_b \Rightarrow v_۱=۱۱٫۸۹-۱۰۰۰۰i_b=۱۱٫۸۹+۹۹i$ Ⅲ



Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ $\Rightarrow v=-۱۲+۱۰۰۰\times(-۹٫۹\times۱۰^{-۳}i)+۱۱٫۸۹+۹۹i$

$\Rightarrow v=۸۹٫۱i-۰٫۱۱$

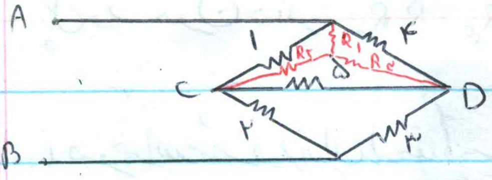
تبدیل ستاره - مثلث :

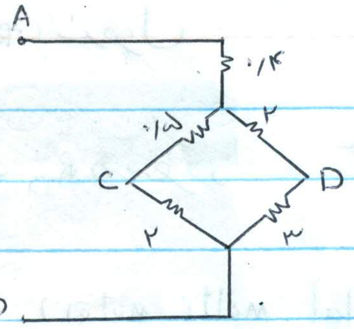


$R_A=\dfrac{R_۱R_۲+R_۱R_۳+R_۲R_۳}{R_۲}$ , $R_B=\dfrac{R_۱R_۲+R_۱R_۳+R_۲R_۳}{R_۳}$ , $R_C=\dfrac{R_۱R_۲+R_۱R_۳+R_۲R_۳}{R_۱}$

$R_۱=\dfrac{R_AR_B}{R_A+R_B+R_C}$ , $R_۲=\dfrac{R_BR_C}{R_A+R_B+R_C}$ , $R_۳=\dfrac{R_CR_A}{R_A+R_B+R_C}$

مثال: مقاومت معادل از دید AB را بدست آورید





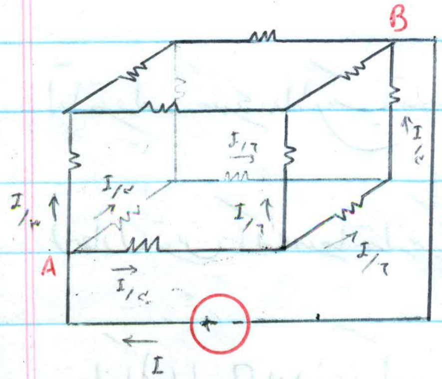
$R_{۱} = \frac{۱\times۴}{۱+۴+۵} = ۰٫۴$

$R_{۲} = \frac{۱\times۵}{۱+۴+۵} = ۰٫۵$

$R_{۳} = \frac{۴\times۵}{۱+۴+۵} = ۲$

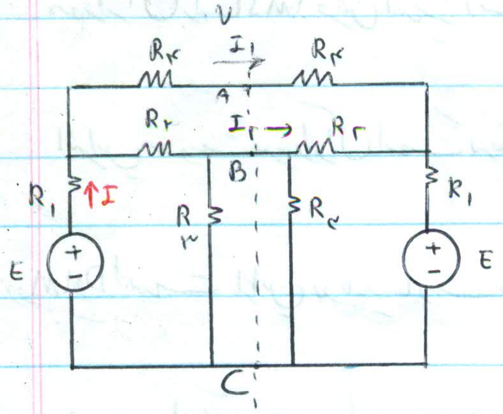
$$R_{AB} = ۲٫۵ \parallel ۵ + ۰٫۴ = \frac{۲٫۵\times۵}{۲٫۵+۵} + ۰٫۴ = ۲٫۰۷\,\Omega$$

## استفاده از تقارن در حل مدارهای مقاومتی



$$-V + R\,I/۲ + R\times\frac{I}{۶} + R\times\frac{I}{۳} = ۰ \Rightarrow \frac{V}{I} = \frac{۳+۲+۲}{۶}R = \frac{۵}{۶}R = R_{AB}$$

حل: جریان I را بدست آوردید.



اگر I۱ را از طریق جمع آثار بدست آوریم، بدلیل تقارن مدار

اگر اثر ناشی از اولین منبع I′۱ باشد دیگری -I′۱ خواهد شد

و I۱ صفر است همینطور I۲ هم باشد پس مدار این‌گونه

از طریق خط‌چین قطع کرد زیرا از A، B و C جریانی عبور نمی‌کند پس:

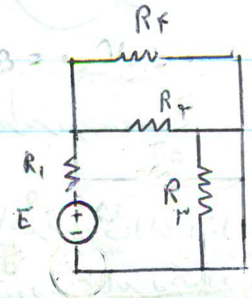
$$I = \frac{E}{R_{۱}+R_{۲}+R_{۴}}$$

مثال: اگر جای منبع E (سمت راست) E- قرار دهیم جریان I را بدست آورید.

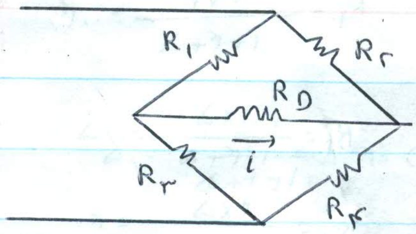
از طریق جمع آثار $V_A$ و $V_B$ و $V_C$ را بدست می‌آوریم

$$V_A = V_{۱} + (-V_{۱}) = ۰ \xRightarrow[\text{ترتیب}]{\text{به همین}} V_B = V_C = ۰$$

پس این سه نقطه را می‌توان بهم وصل کرد



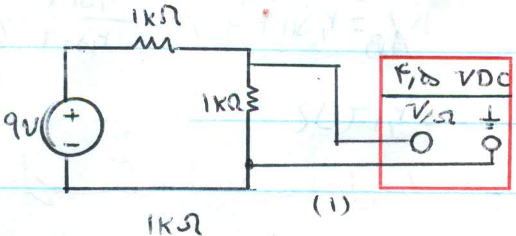
$$I = \frac{E}{R_{۱}+R_{۲}\parallel R_{۴}}$$



پل وتستون: اگر $R_1R_4 = R_2R_3$ باشد جریان

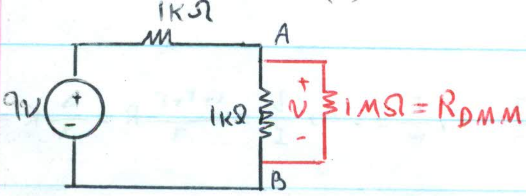
i صفر خواهد شد و می‌توان از مقاومت $R_D$ صرف‌نظر کرد

مولتی‌متر دیجیتال: (DMM) (Digital Molti meter)



(۱)

نحوه نصب DMM برای اندازه‌گیری ولتاژ DC:



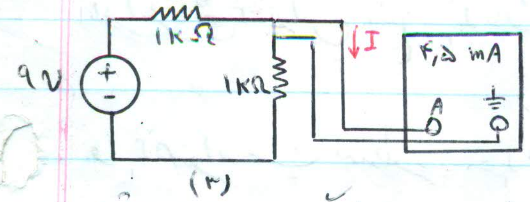
(۲)

اما هر ولت‌متری دارای یک مقاومت درونی است

(معادل تونن) که معمولاً مقدار بزرگی است در این مثال

مقدار آن را 1MΩ فرض کنید. (شکل ۲) $R_{AB} = 1K \parallel 1M = \frac{10^3\times 10^6}{10^3+10^6} = \frac{10^6}{1+10^3} \simeq 999\,\Omega \rightarrow v_{AB} = \frac{9}{10^3+999}\times 999 = 4{,}498$

اثر این مقاومت درونی آن است که مقدار خوانده شده (۴,۴۹۸) کمی کمتر از مقدار واقعی ($4{,}5 = \frac{9}{1+1}$) است. از این



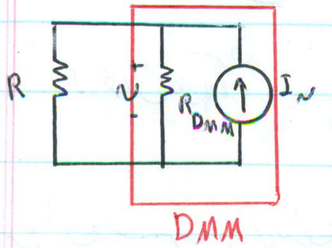
(۳)

رو باید مقاومت درونی DMM بزرگ انتخاب شود.

- در صورت اندازه‌گیری جریان، DMM به صورت سری وصل می‌شود (شکل ۳) در اندازه‌گیری جریان علاقه‌مندیم

مقاومت DMM صفر باشد. اگر مقاومت DMM، ۰/۰۱Ω باشد در این صورت جریان ($I = \frac{9}{2000+0/01} = 4{,}4999\times 10^{-3}$)

کمی کمتر از مقدار واقعی ($\frac{9}{2000} = 4{,}5\times 10^{-3}$) خواهد شد.



- برای اندازه‌گیری مقاومت خارجی، DMM نظیر مدل نرتن عمل می‌کند و مقاومتی که

می‌خواند در حقیقت $R \parallel R_{DMM}$ می‌باشد اگر $R_{DMM} = 1M\Omega$ و $R = 10\,\Omega$ باشد، $R = 9{,}99999\,\Omega$

با R=10MΩ مقدار خوانده شده خواهد بود درصورتی که مقدار واقعی ۱۰ مگا Ω است.

$R_n = 10 \| 10 = 5M\Omega$ خواهد بود که عددی دقیق نمی‌باشد. از این رو در هنگام استفاده از

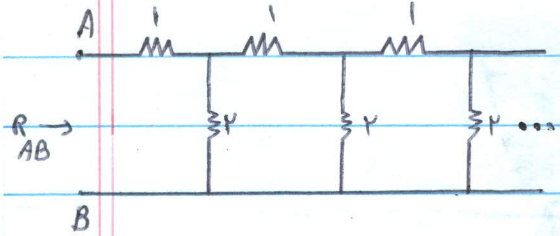
DMM باید به این محدودیت توجه نمود و در حالت اندازه‌گیری مقاومت، مقاومت اندازه‌گیری

شده نسبت به مقاومت داخلی DMM باید بسیار کوچکتر باشد.

آخر فصل

## گوناگون :

مثال : مقاومت هم‌ارز (معادل) را بدست آورید.

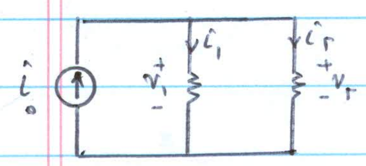


$$R_{AB} = 1 + 2 \parallel R_{AB} = 1 + \frac{2R_{AB}}{2+R_{AB}} \Rightarrow R_{AB}^2 + 2R_{AB} = R_{AB} + 2R_{AB} + 2 \Rightarrow R_{AB}^2 - R_{AB} - 2 = 0$$

$R_{AB} = -1$ غ ق ق , $R_{AB} = 2\Omega$

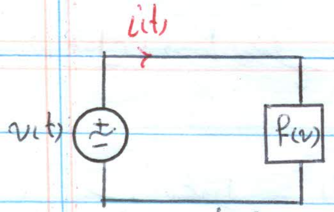
مثال : در مدار روبرو $i_2 = 3v_2$ و $i_1 = 6 + v_1 + v_1^2$ است.

اگر $i_0 = 2A$ باشد، جریانهای بارها را بدست آورید.

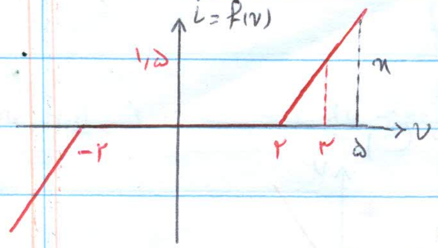


$$i_0 = 2 = i_1 + i_2 = 6 + v + v^2 + 3v \Rightarrow (v+2)^2 = 0 \Rightarrow v = -2 \Rightarrow i_1 = 8A , i_2 = -6A$$

## مثالهای از مقاومت های غیرخطی :

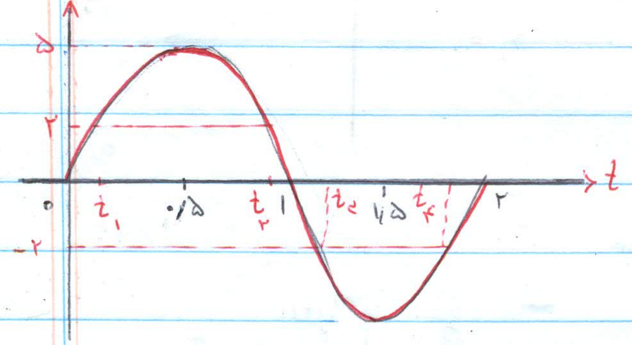


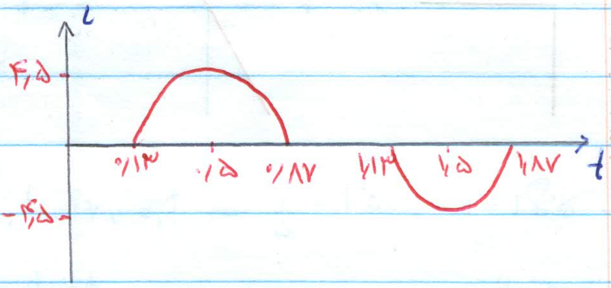
مثال : اگر در مدار روبرو $v(t) = ۵ \sin \pi t$



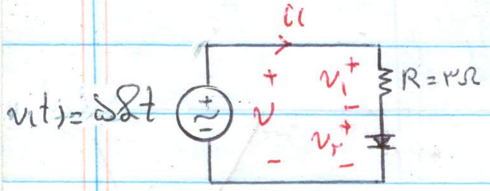
$$\frac{۵-۲}{۳-۲} = \frac{x}{۱,۵} \Rightarrow x = ۴,۵$$

$v = ۵ \sin \pi t = ۲ \Rightarrow t_۱ = ۰,۱۳$ ثانیه , $t_۲ = ۰,۸۷$ ثانیه , $t_۳ = ۱,۱۳$ ثانیه , $t_۴ = ۱,۸۷$ ثانیه





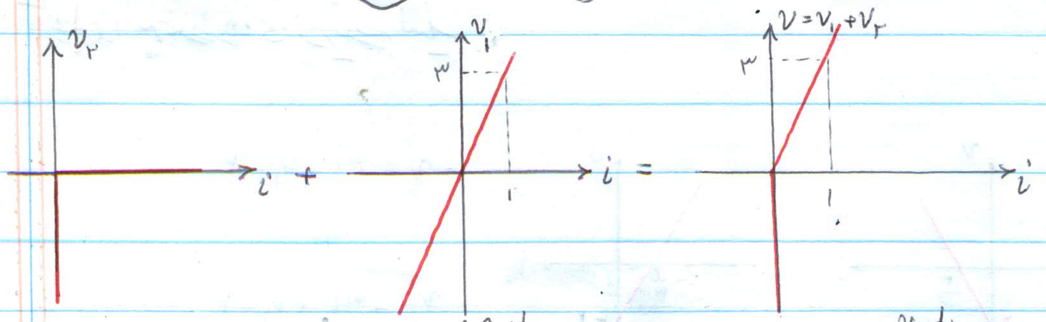
مثال : در مدار روبرو :



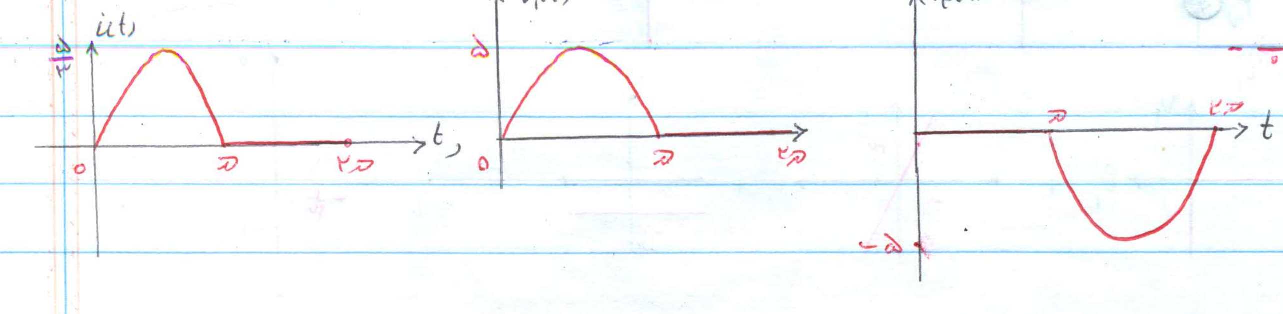
الف - نمودار $v-i$ را رسم کنید.

ب - $i(t)$ ، $v_۱(t)$ و $v_۲(t)$ را رسم کنید.

الف - مقاومت و دیود مقاومت ی سری هستند پس نمودار $v-i$ آنها باهم جمع میشود :

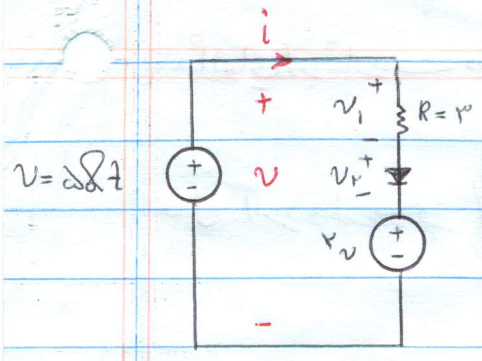


ب -



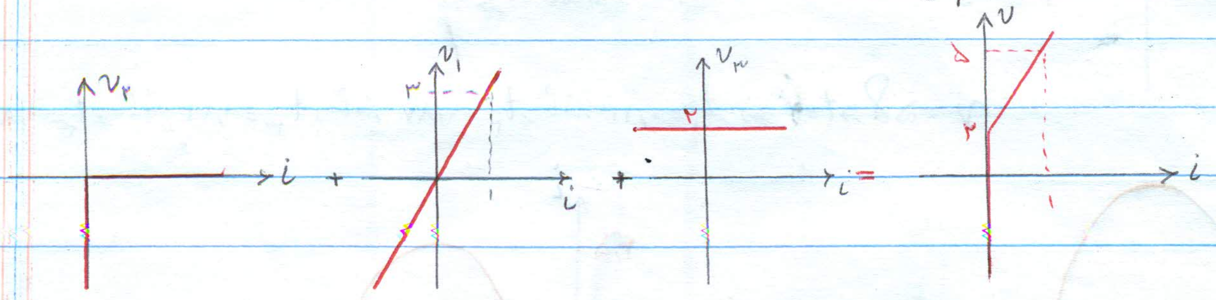
مثال: در مدار روبرو الف- نمودار $i - v$ را رسم کنید.

ب- نمودار $i(t)$ ، $v_1(t)$ و $v_2(t)$ را رسم کنید.



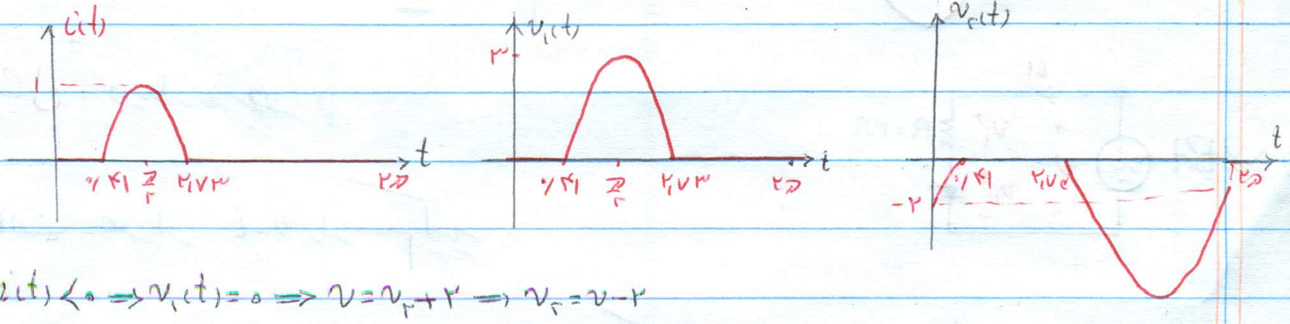
الف- نمودار $i - v$ سه عنصر باهم جمع می‌شود:

$$v = v_1 + v_2 + v_3$$



ب-

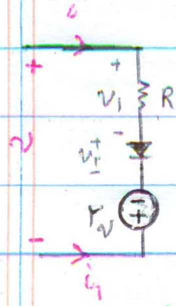
$$۵\sin t = ۲ \Rightarrow \sin t = \frac{۲}{۵} \Rightarrow t_1 = ۰٫۴۱ ,\ t_2 = ۲٫۷۳$$

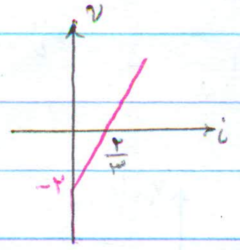


$$i(t) < ۰ \Rightarrow v_1(t) = ۰ \Rightarrow v = v_2 + ۲ \Rightarrow v_2 = v - ۲$$

$$i(t) > ۰ \Rightarrow v_2(t) = ۰ \Rightarrow v_1(t) = v(t) - ۲$$

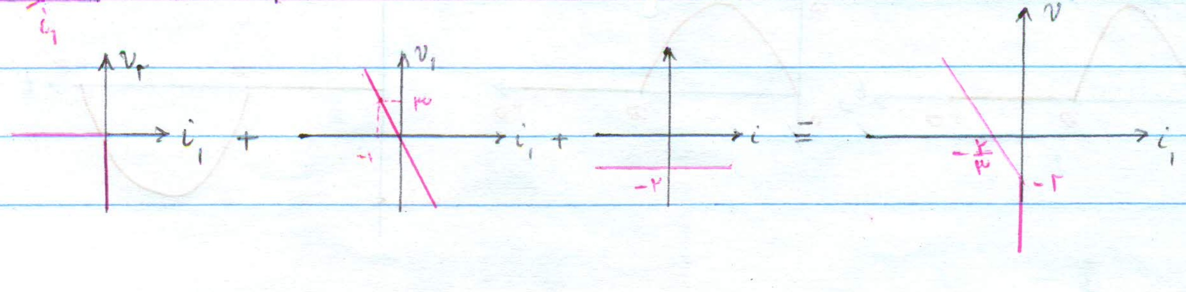
توجه: به نمودارهای زیر توجه کنید:





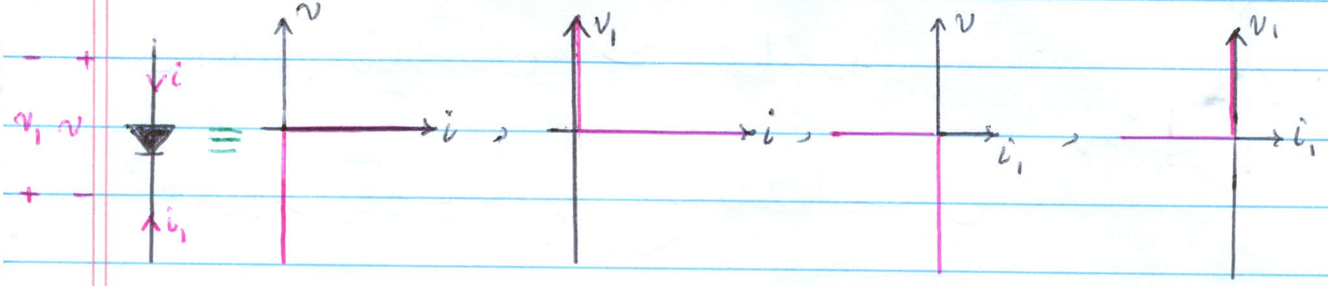
$$v = ۳i + v_2 - ۲$$

$$v = -۳i_1 + v_2 - ۲$$



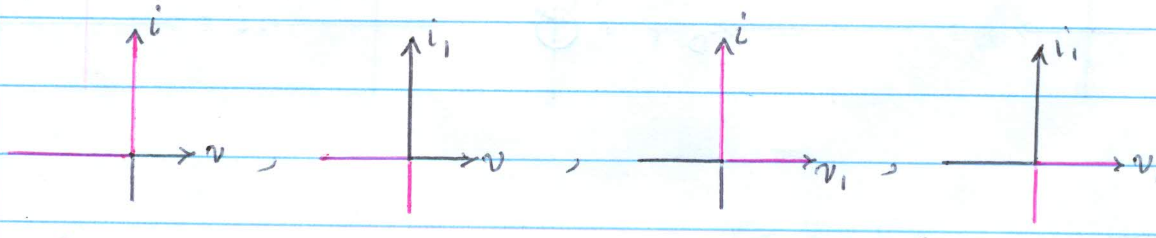
ملاحظه می‌شود با جابجایی جهت i یا v در دیود در دو سیستم نمودارها تغییر می‌کند. همچنین

کافی است یک نمونه را بشناسیم و با تغییر محورها حالت‌های دیگر را بدست آوریم:

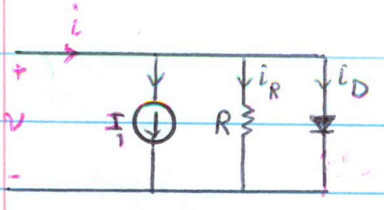


تغییر دیگر موازی شدن عنصر بجای سری شدن آن است در این صورت با نمودار v-i

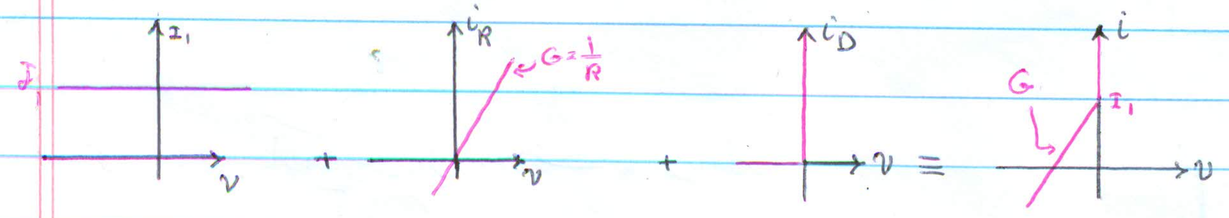
کار داریم:



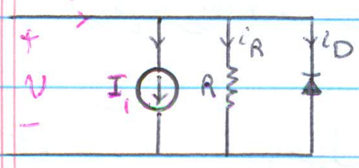
مثال: نمودار v-i را رسم کنید:



$$i = I_1 + i_R + i_D$$

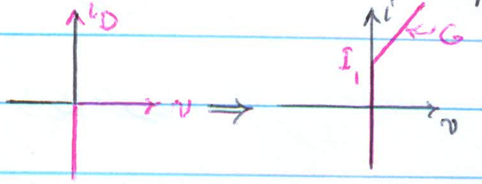


مثال: نمودار v-i را رسم کنید:

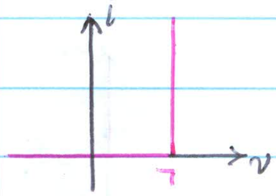


$$i = I_1 + i_R + i_D$$

ابتدا نمودار $v - i_D$ توجه کنید:

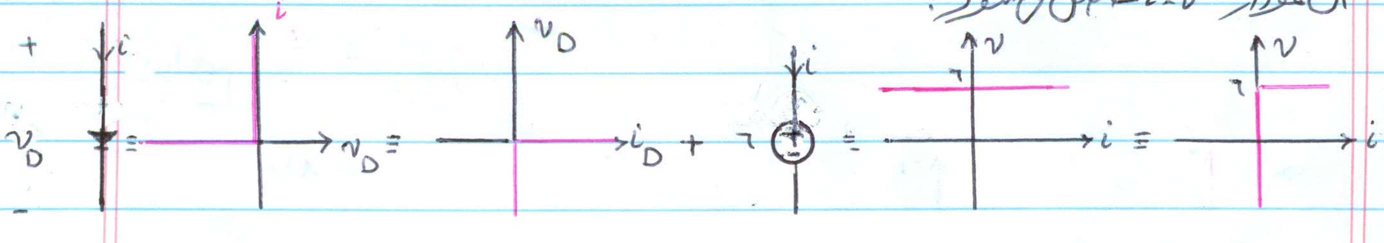


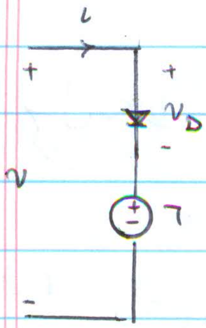
پس از تجزیه و تحلیل حالت‌ها حتماً با کنار هم قرار دادن عناصر حال می‌توان نمودار را داشت و مدار نظیر آن را طراحی کرد.



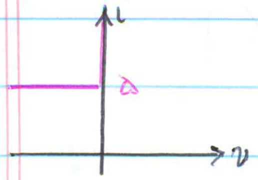
مثال: مداری بسازید که نمودار آن به صورت روبرو باشد:

مشاهده می‌شود نمودار یک دیود روی محور v جابجا شده است پس باید دیودی با منبع ولتاژ سری شود پس ابتدا از نمودار i-v استفاده می‌کنیم و با دوران کردن آن نمودار v-i حاصل می‌شود:





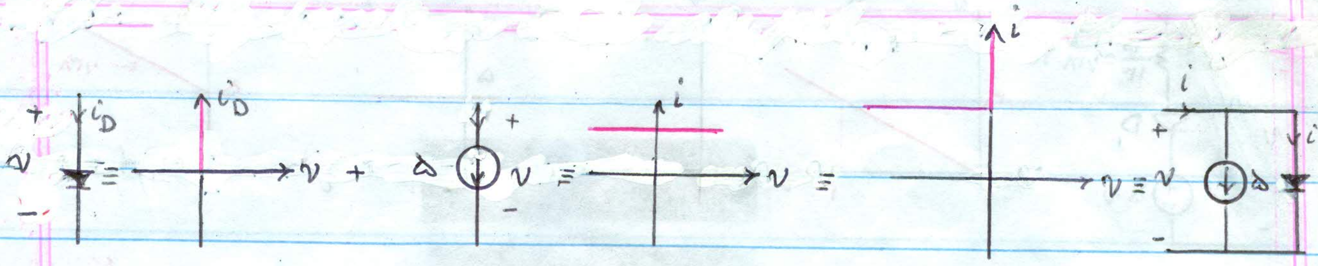
$$v = v_D + 6$$



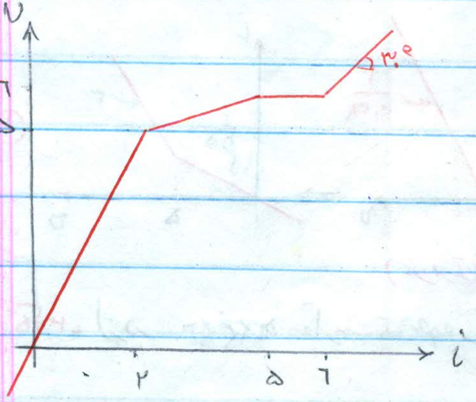
مثال: مداری بسازید که نمودار آن به صورت روبرو باشد:

مشاهده می‌شود نمودار یک دیود روی محور i جابجا شده است پس باید یک دیود با یک منبع جریان موازی شود.

$$i = i_D + 5$$



مثال - مداری طراحی کنید که نمودار i - v آن بصورت

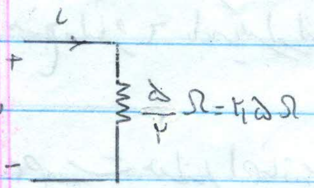


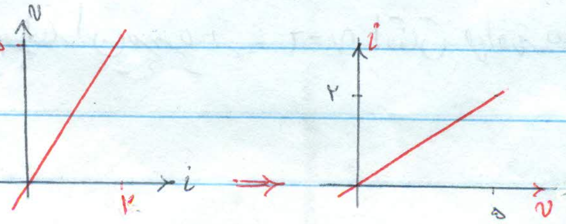
روبرو باشد.

روش اول :

گام اول : برای ساختن با خط اول، مقاومتی با شیب $R=۲/۵\Omega$ مورد نیاز است پس مدار زیر این

وظیفه را انجام می دهد





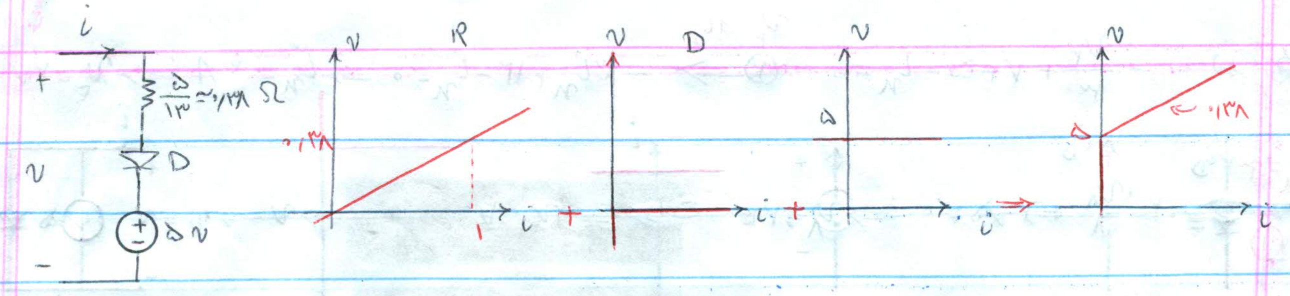
گام دوم : در ۲<i<۵ یا ۵<v<۶ شیب به جای $\frac{۵}{۲}$ به $\frac{۶-۵}{۵-۲}=\frac{۱}{۳}$ تبدیل می شود. پس به دلیل کم

شدن مقاومت، باید یک مقاومت با این مقاومت موازی شود و مقدار آن برابر است با :

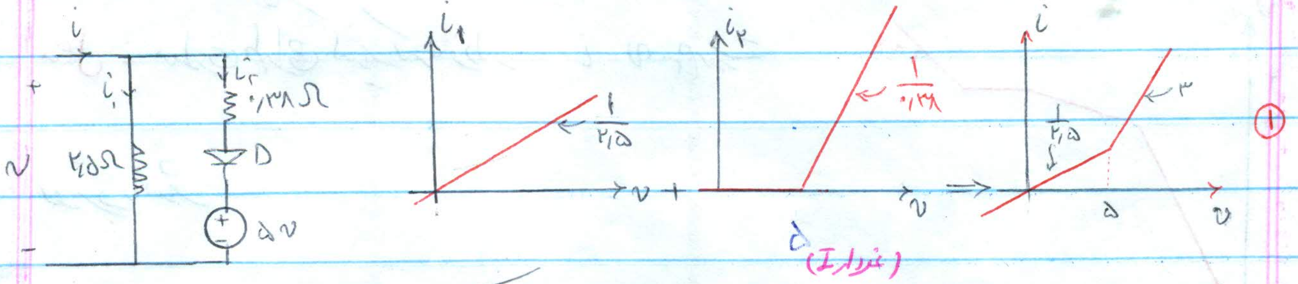
$$R \parallel ۲/۵ = \frac{۱}{۳} \Rightarrow \frac{۲/۵R}{۲/۵+R} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow ۷/۵R = R+۲/۵ \Rightarrow R = \frac{۲/۵}{۶/۵} = \frac{۵}{۱۳} \simeq ۰/۳۸\Omega$$

این مقاومت از ولتاژ ۵ ولت به بعد یا i>۲ باید فعال شود. اگر این مدار با عناصر سری ساخته شود

باید مقاومت با منبع ولتاژ ۵ و ایده آل سری شود. مدار مورد نظر بصورت صفحه بعد خواهد بود :(ادامه)

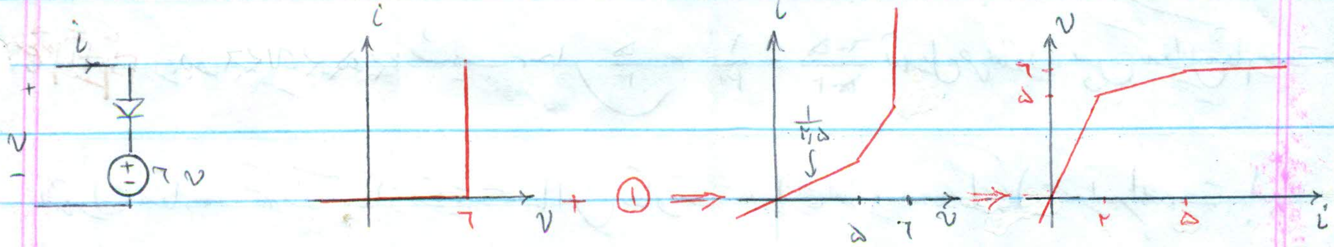


حال اگر دو مدار موازی شوند نمودار های v_i با هم جمع خواهند شد یعنی :



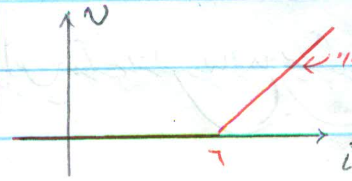
۳گام- در $v > 6$ مقاومت صفر تبدیل می‌شود یعنی بازهم شیب کم شده است پس نیاز به مقاومت صفر اهم است یعنی گام ② را با مقاومت صفر و منبع ولتاژ ۶ باید تکرار کنیم چون این پدیده در $v = 6$ اتفاق افتاده یعنی مدار زیر باید به مدار قبلی بصورت موازی اضافه شود.

$$R \parallel \frac{1}{3} = \frac{\frac{1}{3}R}{R + \frac{1}{3}} = 0 \Longrightarrow R = 0\,\Omega$$

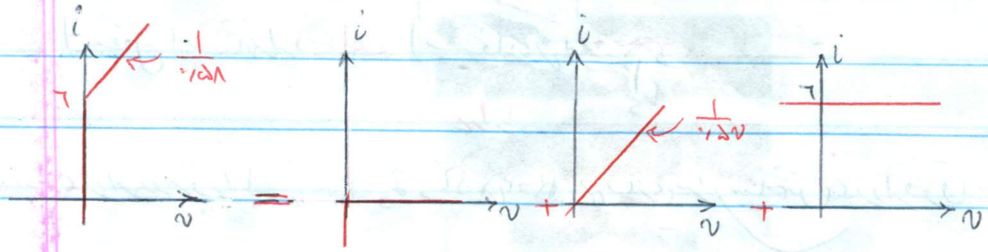


۴گام- از این پس شیب صفر شیب $\tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0/58$ باید تبدیل شود پس مقاومت $0/58\,\Omega$ نیاز است و این مدار از $i > 6$ و $v > 6$ باید وارد شود مدار جدید ما در این کار باید نمودار زیر را داشته باشد:

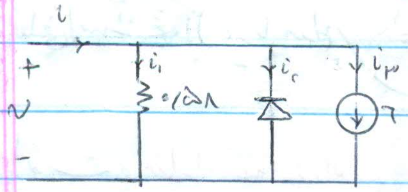
$$R + 0 = 0/58 \Longrightarrow R = 0/58\,\Omega$$



این مدار شامل یک مقاومت R=۰/۵۸ و یک منبع جریان و یک دیود ایده آل باشد که موازی باهم

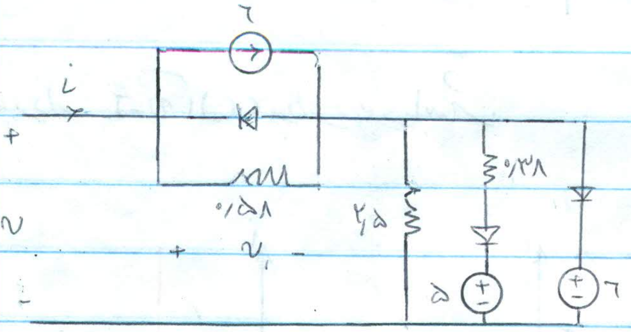


قرار گیرند

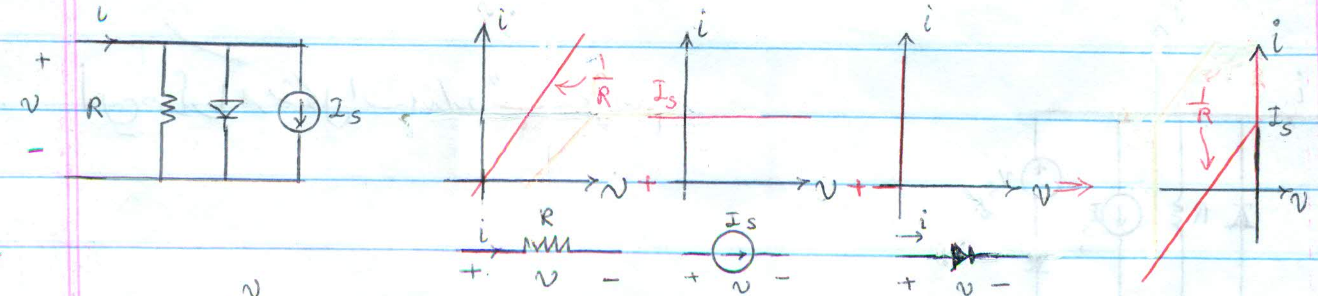


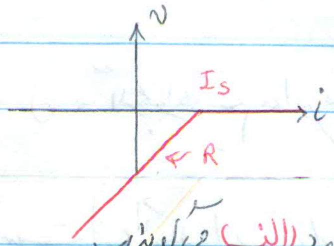
$$i = i_1 + i_2 + i_3$$

مدار کامل با جمع مدارهای عنوان شده ب تا ③ با مدار مدار قبلی بدست می‌آید اسم جالب



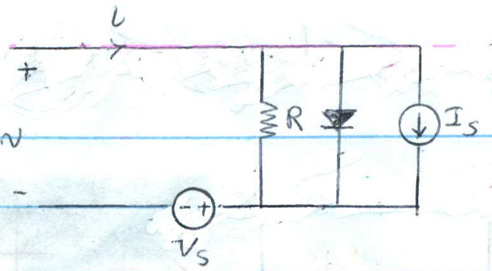
شکل استاندارد (الف) : به مدار روبرو توجه کنید :



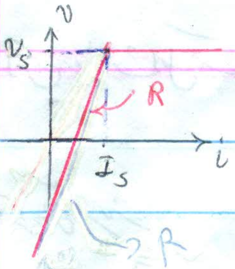


اگر با مدار فوق یک منبع ولتاژ $v_s$ را سری کنیم مدار

و نمودار صفحه بعد را خواهیم داشت. این مدار را شکل استاندارد (الف) می‌گویند.

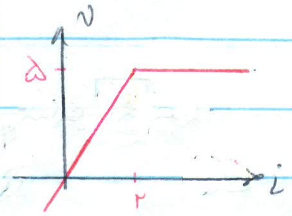


مدار استاندارد «الف»

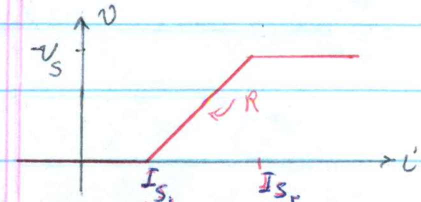


نمودار مدار استاندارد (الف)

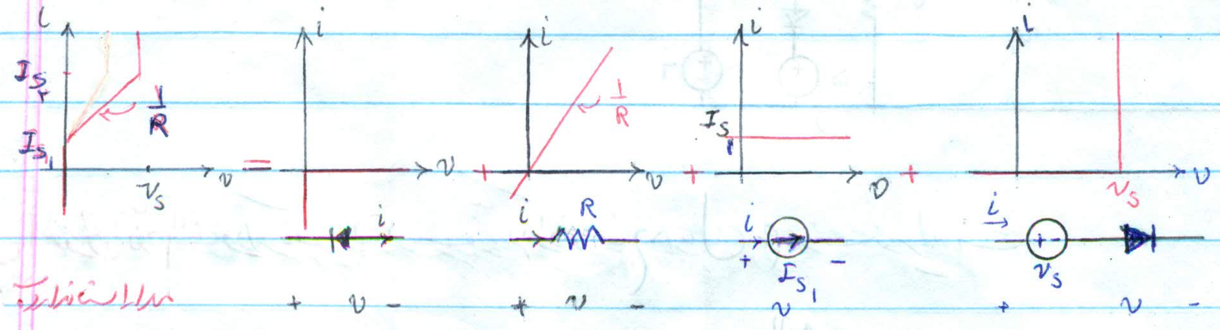
مثال: اگر بخواهیم مداری بسازیم که نمودار آن شکل روبرو باشد کافی است در مدار استاندارد (الف)، $I_s = ۲$ ، $v_s = ۵$ و $R = \frac{۵}{۲}$ بگیریم.



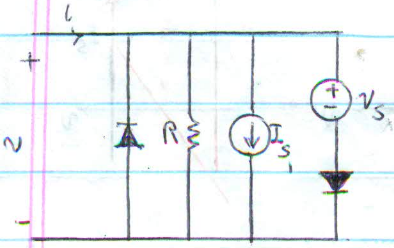
شکل استاندارد (ب): می‌خواهیم مداری بسازیم که نمودار $i$-$v$ آن نمودار روبرو باشد.



شکل استاندارد «ب»

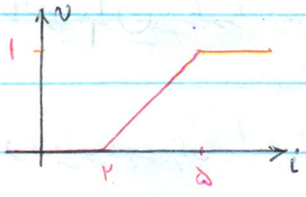


مدار استاندارد



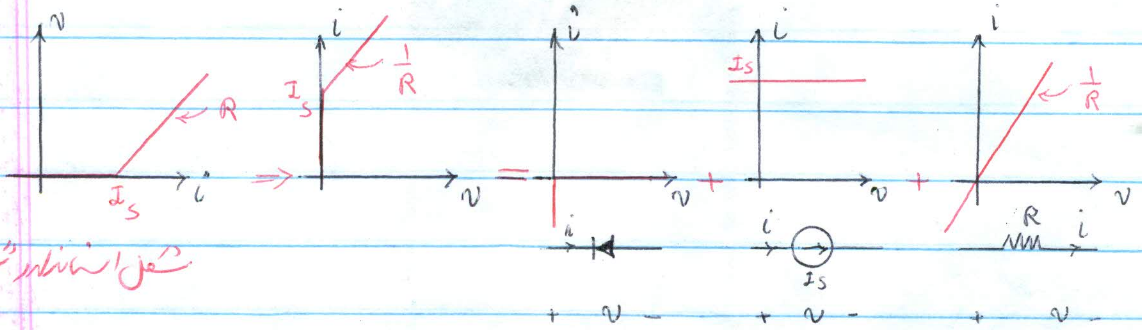
این مدار را «شکل استاندارد ب» می‌نامیم.

مثال: اگر بخواهیم مداری بسازیم که نمودار آن شکل روبرو باشد کافی است از شکل استاندارد «ب» با مقادیر $v_{s_1} = 1v$



$I_{S_1} = ۲A$ و $R = \frac{۱}{۳}$ دارای عنصر مدار مورد نظر است .

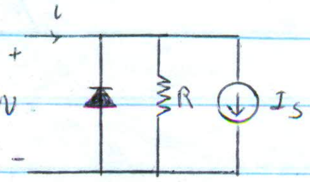
## شکل استاندارد "ب"



شکل استاندارد "ب"

و مدار کامل آن که آن را شکل استاندارد "ب" می‌نامیم

به صورت روبرو است :

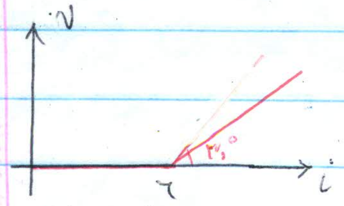


مدار استاندارد "ب"

مثال : برای ساختن مدار با عنصر روبرو فقط کافی است

از مدار استاندارد "ب" استفاده کنیم و $R = tg۳۰ = ۰/۵۸$

و $I_s = ۶$ قرار دهیم .



## روش دوم حل مسئله قبل :

کافی است عنصر را به سه مثال قبل بشکنیم و با بهره گیری از این سه مثال

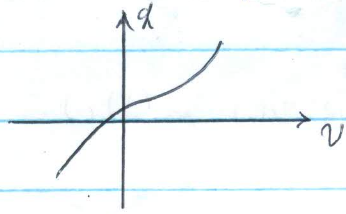
مدار مورد نظر به دست می‌آید .

اضافه کردن مثال امتحان اسفند ۹۲

## خازن و سلف (فصل ششم چوا و هفتم هیت)

**خازن:**

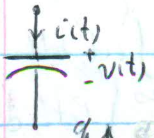
عنصری است که بار الکتریکی را ذخیره می‌کند در هر لحظه از بار الکتریکی ذخیره شده $q(t)$ و ولتاژ $v(t)$ آن در رابطه‌ای



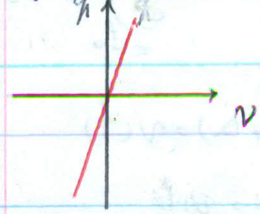
توسط نمودار در صفحه $v\,q$ تعریف می‌شود که آن را نمودار خازن در لحظه $t$ می‌نامند.

توجه: در هر مدار

$$i(t)=\frac{dq}{dt} \Longleftrightarrow q(t)=\int_{-\infty}^{t} i(t')dt'$$



**خازن خطی:** خازنی است که نمودار $v$-$q$ آن خط راستی که از مبدأ می‌گذرد.



یا به عبارت دیگر

$$q(t)=c(t)\,v(t)$$

در حالت نامتغیر با زمان $c(t)=c$ است و در حالت متغیر با زمان

$c(t)$ با زمان تغییر می‌کند

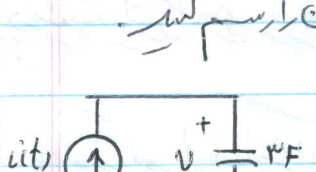
اگر $c(t)=c$ باشد داریم

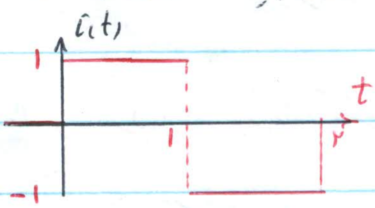
$$i(t)=\frac{dq}{dt}=c\frac{dv}{dt}=\frac{1}{s}\times\frac{dv}{dt}$$

$$v(t)=v(0)+\frac{1}{c}\int_{0}^{t} i(t')dt'=\frac{1}{c}\int_{-\infty}^{t} i(t')dt'=s\int_{-\infty}^{t} i(t')dt' \quad , (s=\frac{1}{c})$$

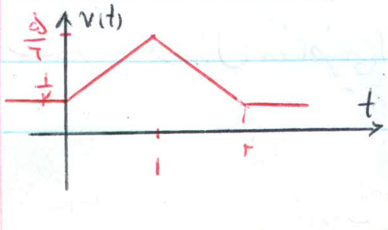
(واحد c **فاراد** و با کاپاسیتانس ظرفیت است و s را الاستانس می‌گویند)

**مثال:** در مداری که $v_c(0)=\frac{1}{2}$ با توجه به نمودار جریان نمودار ولتاژ خازن را رسم کنید.





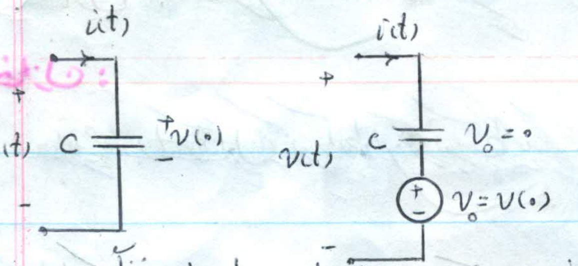
$$v(t)=v(0)+\frac{1}{3}\int_{0}^{t} i(t')dt'=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}t \quad , 0<t<1$$



$$v(1)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$$

نمایش شرایط اولیه در خازن :

خازن :



$$v(t)=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(t')\,dt' = v(0)+\frac{1}{C}\int_{0}^{t} i(t')\,dt'$$

یک خازن با بار اولیه $v(0)$ را می‌توان به صورت یک منبع تغذیه و یک خازن بدون بار در نظر گرفت.

تذکر: ولتاژ خازن خطی تغییر ناپذیر با زمان به ازای جریان کراندار همواره پیوسته است ! زیرا :

$$v(t+\Delta)-v(t) \xrightarrow{v(t)=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(t')dt'} \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t+\Delta} i(t')\,dt' - \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(t')\,dt' = \frac{1}{C}\int_{t}^{t+\Delta} i(t')\,dt'$$

$$\lim_{\Delta\to 0}\left(v(t+\Delta)-v(t)\right)=\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{C}\int_{t}^{t+\Delta} i(t')\,dt'=0 \Rightarrow \lim_{\Delta\to 0} v(t+\Delta)=v(t)$$

خازن خطی تغییر پذیر با زمان

$$q(t)=C(t)\,v(t) \xrightarrow{i(t)=\frac{dq}{dt}}$$

$$i(t)=C(t)\frac{dv(t)}{dt}+v(t)\frac{dC(t)}{dt}$$

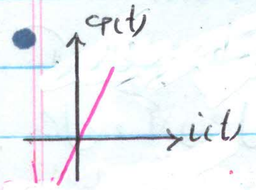
مثال: اگر $v(t)=4\cos 4t$ و $c(t)=2+\cos 2t$ جریان خازن چیست ؟

$$i(t)=(2+\cos 2t)(-16\sin 4t)+4\cos 4t(-2\sin 2t)=-32\sin 4t-16\cos 2t\sin 4t-8\cos 4t\sin 2t$$

خازن غیرخطی عنصری است که مقدار v-q آن غیرخطی می‌باشد که با زمان تغییر می‌کند (خازن غیرخطی متغیر با زمان) یا تغییر نمی‌کند (خازن غیرخطی نامتغیر با زمان).

سلف: در میدان مغناطیسی انرژی ذخیره می‌کند. در هر سلف، در هر لحظه از زمان مقدار شار (φ)

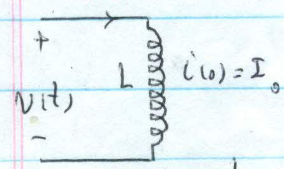
برحسب وبر بیان می‌شود و ولتاژ آن $v(t)=\frac{d\varphi}{dt}$ (وبر بر ثانیه) خواهد بود.

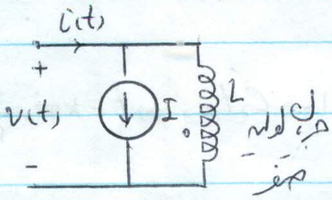


در سلف خطی نامتغیر با زمان نمودار $\varphi-i$ خط راستی است که از مبدا می‌گذرد و شیب آن اندوکتانس (L با واحد هانری) ($\varphi = Li$) دارد که آن (L) اندوکتانس ثابت نامیده می‌شود.

$$v(t)=\frac{d\varphi}{dt}=L\frac{di}{dt} \Rightarrow i(t)=\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v(t')dt' = i(0)+\frac{1}{L}\int_{0}^{t} v(t')dt' = i(0)+۲\int_{0}^{t} v(t')dt'$$

توجه: هر سلف خطی تغییرناپذیر با زمان با جریان اولیه $i(0)$ را می‌توان به صورت یک منبع جریان موازی با سلف بدون جریان اولیه در نظر گرفت

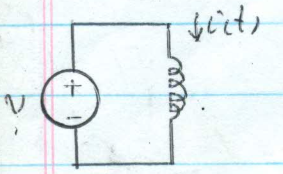


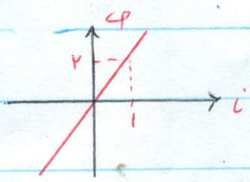


$$i(t)=i(0)+\frac{1}{L}\int_{0}^{t} v(t')dt'$$

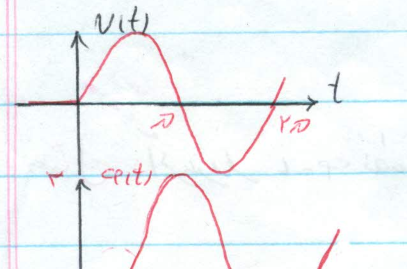
توجه: در سلف خطی تغییرناپذیر با زمان هنگامی که کراندار باشد جریان یک تابع پیوسته است.

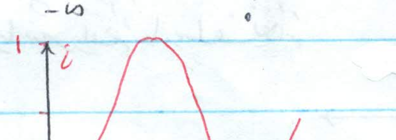
مثال: اگر مدار روبرو مفروض باشد نمودارهای $\varphi(t)$ و $i(t)$ را رسم کنید ($i(0)=0$)





حل: $\varphi(t)=\int_{-\infty}^{t} v(t')dt' = \int_{0}^{t} \sin t'dt' = -\cos t'\Big|_{0}^{t} = 1-\cos t$





$\varphi = Li = ۲i \Rightarrow i = \frac{1}{۲}\varphi$

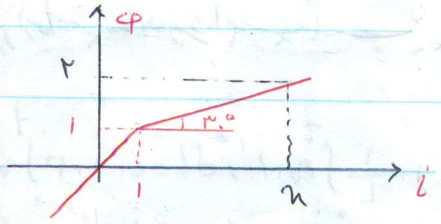
سلف خطی تغییرپذیر با زمان: $\varphi(t)=L(t)\,i(t) \Rightarrow v(t)=L(t)\frac{di}{dt}+i(t)\frac{dL}{dt}$

سلف غیرخطی: نمودار $\varphi - i$ غیرخطی است اگر $\varphi = \tanh(i)$ و $i = 5\cos 2t$ باشد

آنگاه $v(t)$ را بدست آوریم.

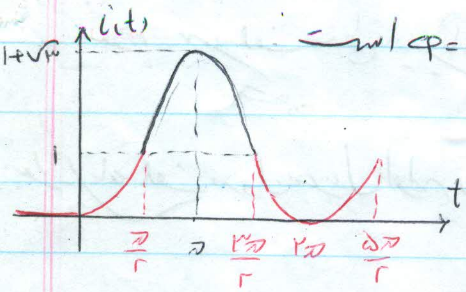
$$v(t) = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi}{di} \times \frac{di}{dt} = (1 - \tanh^2 i)(-10\sin 2t)$$

مثال: اگر در مثال ص ۲-۳۷ نمودار $\varphi - i$ به صورت زیر باشد، نمودار $i(t)$ را رسم کنید.



حل:

نمودار $\varphi(t) = \int_{-\infty}^{t} v(t')\,dt'$ تغییر نمی کند



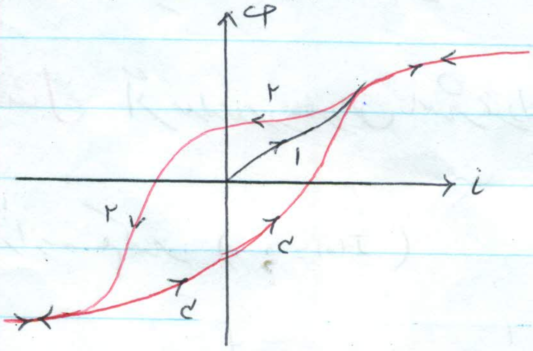
در بازهٔ $\varphi < 1$ با توجه به نمودار $\varphi - i$ تا $\varphi = 1$ ، $\varphi = i$ است

$$1 - \cos t = 1 \Rightarrow \cos t = 0 \Rightarrow t = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

هنگامی که $\varphi > 1$ باشد باز هم نمودار خطی است و شیب آن ۳۰° می باشد پس:

$$\frac{2-1}{x-1} = tg30° = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x - 1 = \sqrt{3} \Rightarrow x = 1 + \sqrt{3} = i$$

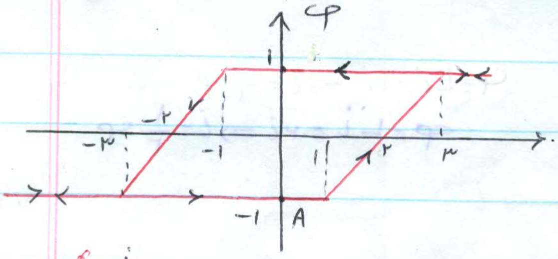
پس ماند:

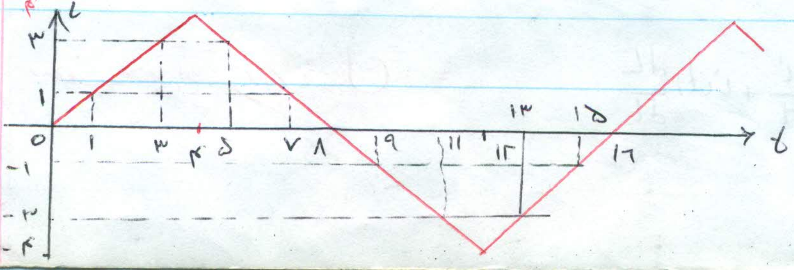


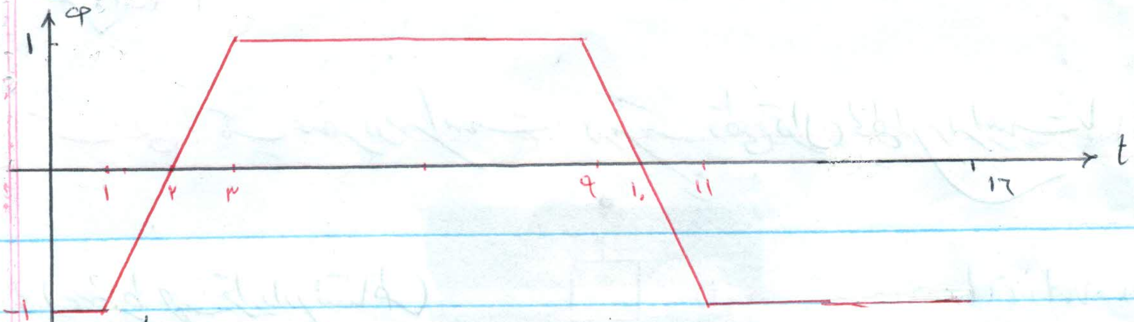
مثال: اگر نمودار $\varphi - i$ نظیر زیر باشد و نقطهٔ کار سلف نقطهٔ

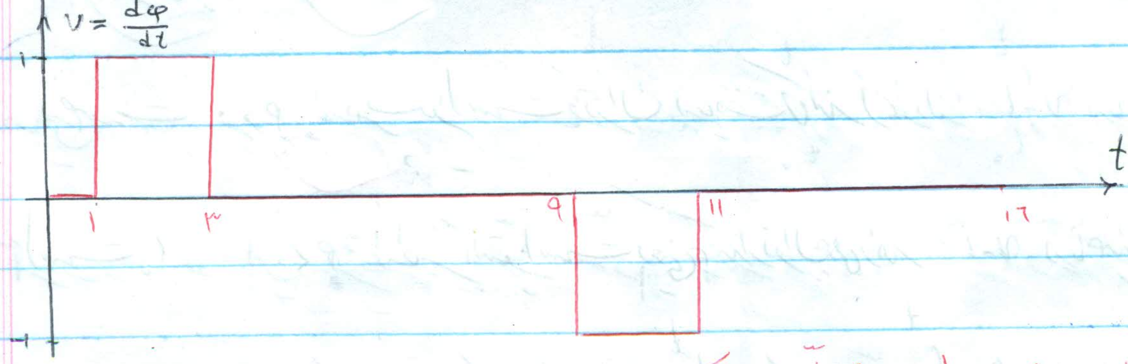
A باشد، i بشکل زیر

شکل ولتاژ را رسم کنید



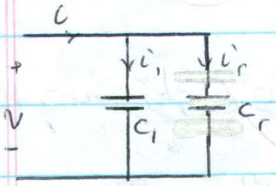






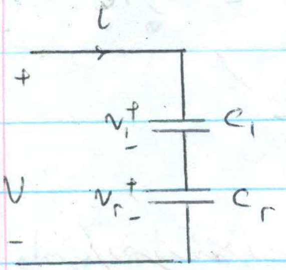
$v(0)=v_1(0)=v_2(0)$

اتصال موازی خازن (با ولتاژ اولیه خازنی باشند)



$$i=i_1(t)+i_2(t)=C_1\frac{dv}{dt}+C_2\frac{dv}{dt}=(C_1+C_2)\frac{dv}{dt}\to C_e=C_1+C_2$$

اتصال سری خازن

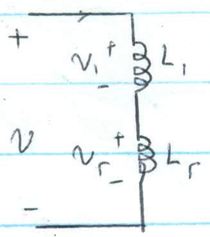


$$v=v_1(0)+\frac{1}{C_1}\int_0^t i\,dt'+v_2(0)+\frac{1}{C_2}\int_0^t i\,dt'$$

$$=(v_1(0)+v_2(0))+\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}\right)\int_0^t i\,dt'\to\frac{1}{C_e}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}$$

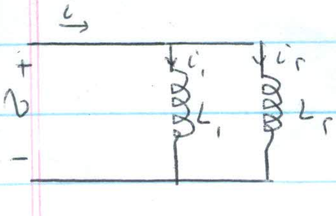
$$v(0)=v_1(0)+v_2(0)$$

اتصال سری سلف (با جریان اولیه‌ها سلفی باشند)



$$v=v_1+v_2=L_1\frac{di}{dt}+L_2\frac{di}{dt}=(L_1+L_2)\frac{di}{dt}\Rightarrow\begin{cases}i(0)=i_k(0)\\L_e=L_1+L_2\end{cases}$$

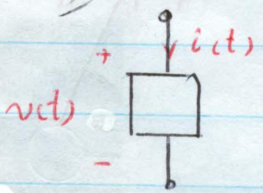
اتصال موازی سلف



$$i=i_1+i_2=i_1(0)+i_2(0)+\frac{1}{L_1}\int_0^t v(t')\,dt'+\frac{1}{L_2}\int_0^t v(t')\,dt'$$

$$=i(0)+\frac{1}{L_e}\int_0^t v(t')\,dt'\Rightarrow\frac{1}{L_e}=\frac{1}{L_1}+\frac{1}{L_2},\ i(0)=i_1(0)+i_2(0)$$

تک قطبی: تک عنصر دو سر است. در یک تک قطبی به شرط رعایت قرارداد متناظر توان لحظه ای برابر است با:



$$p(t)=v(t)\,i(t)$$

در این حالت انرژی برابر است با:

$$w(t_0,t)\triangleq\int_{t_0}^{t}p(t')\,dt'=\int_{t_0}^{t}v(t')\,i(t')\,dt'$$

اگر نمودار $i$-$v$ در این شرایط از ناحیه اول یا سوم عبور کند، $P\geq 0$ است، عنصر توان دریافت میکند و آن عنصر غیرفعال (passive) می گویند. در صورت عبور نمودار $i$-$v$ از ناحیه دوم یا چهارم، $P<0$ است و در این حالت عنصر توان می دهد و به آن عنصر فعال (active) می گویند. در یک خازن خطی نامتغیر با زمان داریم:

$$w(t_0,t)=\int_{t_0}^{t}v(t')\,i(t')\,dt'\xlongequal{i(t)=\frac{dq}{dt}}\int_{q_0}^{q}v(t')\,dq\xlongequal{q_0=0}\int_{0}^{q}v(t')\,dq$$

$$\xlongequal{q=Cv}\int_{0}^{q}\frac{q}{C}\,dq=\frac{1}{2C}q^2=\frac{1}{2}Cv^2$$

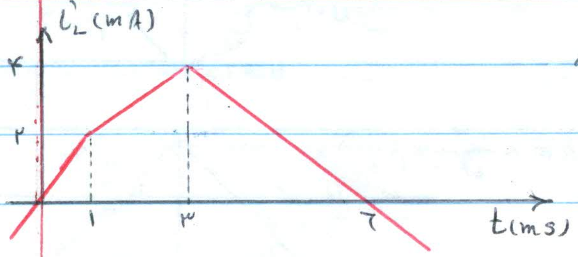
و انرژی ذخیره شده در سلف خطی نامتغیر با زمان در بازه $(t_0,t)$ برابر است با:

$$w(t_0,t)=\int_{t_0}^{t}v(t')\,i(t')\,dt'\xlongequal{v(t)=\frac{d\varphi}{dt}}\int_{\varphi_0}^{\varphi}i(t')\,d\varphi\xlongequal{\varphi_0=0}\int_{0}^{\varphi}i(t')\,d\varphi$$

$$\xlongequal{\varphi=Li}\int_{0}^{\varphi}\frac{\varphi}{L}\,d\varphi=\frac{1}{2L}\varphi^2=\frac{1}{2}Li^2$$

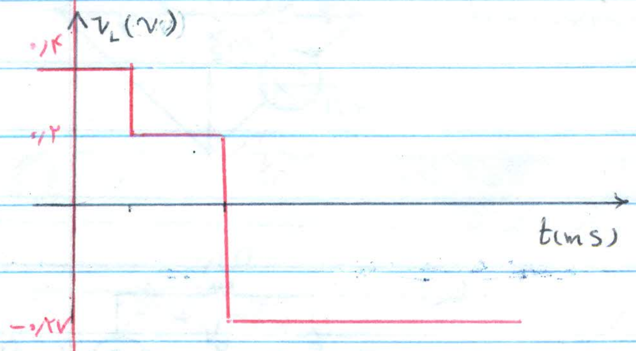
## ○ فصل هفتم تست

در قبل خازن و سلف معرفی شد. حال با چند مثال به این مسئله بیشتر می‌پردازیم:



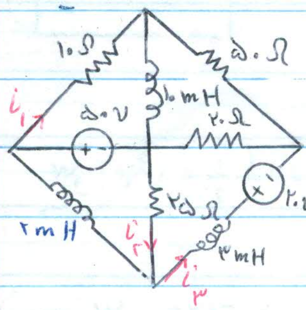
مثال: با توجه به نمودار رسم شده و $L = ۰/۲H$ ، $v_L(۰)$ ، $v_L(۲ms)$ و $v_L(۶ms)$ را بدست آورید.

حل: $v = L\frac{di}{dt} = ۰/۲\frac{di_L(mA)}{dt(ms)}$



حل: $v_L(۰) = ۰/۴v$ و $v_L(۲ms) = ۰/۲$ ، $v_L(۶ms) = -۰/۲۷v$

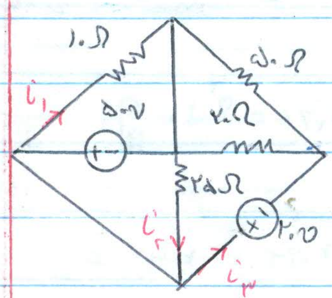
مثال: در مدار مقابل جریان‌های $i_۱$ ، $i_۲$ و $i_۳$ را بدست آورید.



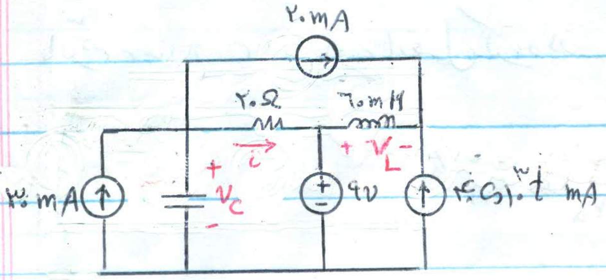
با توجه به عدم تغییر جریان سلف و ولتاژ خازن، سلف اتصال کوتاه و خازن باز می‌شود.

$$v_L = L\frac{di_L}{dt} = L\times ۰ = ۰$$

$$i_C = C\frac{dv}{dt} = C\times ۰ = ۰ \qquad i_۱ = \frac{۵۰}{۱۰} = ۵A, \; i_۲ = \frac{-۵۰}{۲۵} = -۲A$$



$$۲۰ + (۲۰\|۵۰)\,i_۳ - ۵۰ = ۰ \Rightarrow i_۳ = \frac{۳۰}{\frac{۲۰\times۵۰}{۲۰+۵۰}} = ۲/۱A$$



مثال: فرض کنید مدار به مدت طولانی

در وضعیت بوده است $v_L(t)$ و $v_C(t)$

را بدست آورید

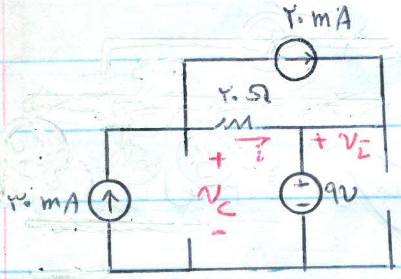
حل: با جمع آثار مسئله را حل می‌کنیم فرض کنیم منبع $۴۰\cos ۱۰^۳ t$ را باز می‌کنیم در منبع DC

$$i_C = C\frac{dv}{dt} = ۰$$

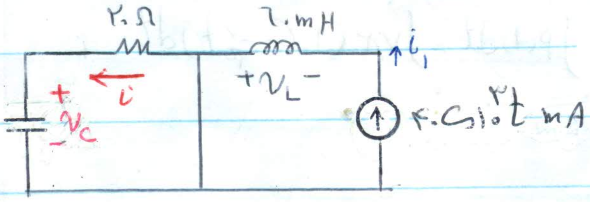
در مدار DC مثل خازن و در مدار داریم

$$v_L = L\frac{di}{dt} = L \times ۰ = ۰$$

ولتاژ سلف صفر است زیرا تغییرات نداریم.



$$v_{L_1} = ۰ \quad , \quad v_{C_1} = ۲۰i + ۹ = ۲۰ \times ۱۰ \times ۱۰^{-۳} + ۹ = ۹{,}۲ \ v$$

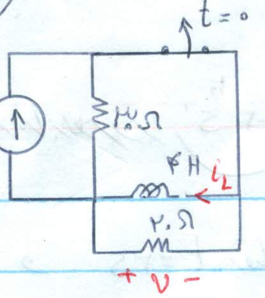


حال منبع DC را باز می‌کنیم:

$$i = ۰ \quad , \quad v_{C_۲} = ۰$$

$$v_{L_۲} = L\frac{di_1}{dt} = ۶۰ \times ۱۰^{-۳} \times (-۴۰ \times ۱۰^{-۳} \times ۱۰^{۳} \sin ۱۰^{۳} t) = ۲{,}۴ \sin ۱۰^{۳} t$$ ولت

$$v_L = v_{L_1} + v_{L_۲} = ۲{,}۴ \sin ۱۰^{۳} t \quad , \quad v_C = v_{C_1} + v_{C_۲} = ۹{,}۲$$ ولت



مثال: در مدار روبرو $i_L(0^-)$ ، $i_L(0^+)$ و $v(0^-)$ و $v(0^+)$ چقدر است؟

حل:

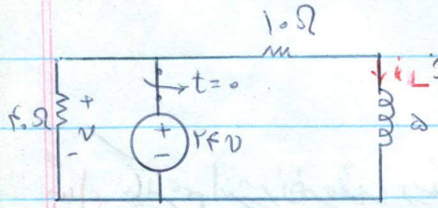
در $t=0^-$ مدار مشروح در این شرایط است پس سلف اتصال کوتاه است ($v_L = L\frac{di}{dt} = L\times 0 = 0$)

پس: $i_L(0^-) = ۲A \Rightarrow v(0^-) = -v_L = 0$

در $t=0^+$ کلید باز می‌شود. در صفحه ۲-۴ ثابت کردیم اگر ولتاژ سلف کراندار باشد جریان سلف تغییر آنی

نمی‌کند پس: $i_L(0^+) = i_L(0^-)$ : $i_L(0^+) = i_L(0^-) = ۲A \Rightarrow v(0^+) = ۲۰\, i_L(0^+) = ۲۰\times۲ = ۴۰\, v$

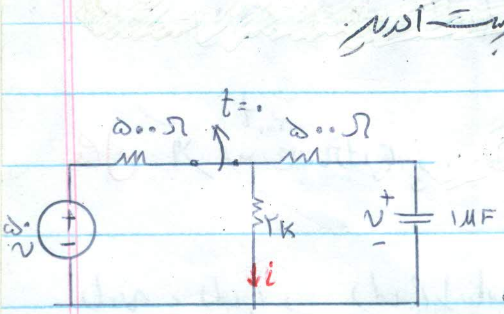
مثال: مقادیر $v(0^-)$ ، $v(0^+)$ ، $i_L(0^-)$ و $i_L(0^+)$ را بدست آورید.



$i_L(0^-) \xrightarrow[\text{کوتاه}]{\text{سلف اتصال}} \frac{۲۴}{۱۰} = ۲/۴\,A$ و $v(0^-) = ۲۴v$

جریان سلف و ولتاژ خازن تغییر آنی نمی‌کند $i_L(0^+) = i_L(0^-) = ۲/۴A$ و $v(0^+) = -۴۰\, i_L(0^+) = -۴۰\times۲/۴ = -۹۶v$

مثال- در مدار روبرو $i(0^-)$ ، $i(0^+)$ ، $v(0^-)$ و $v(0^+)$ را بدست آورید.

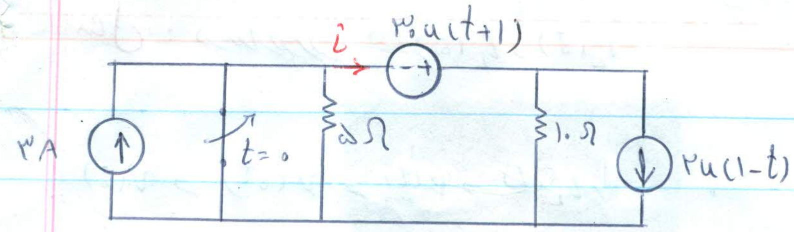


در $t=0^-$ خازن باز است: $i_c(0^-) = 0$ , $i(0^-) = \frac{۵۰}{۲۵۰۰} = ۰/۰۲\,A$

$v(0^-) = ۲۰۰۰\times۰/۰۲ = ۴۰$ ولت

$v(0^+) = v(0^-) = ۴۰ \Rightarrow i(0^+) = \frac{۴۰}{۲۵۰۰} = ۰/۰۱۶A$

مثال: در مدار روبرو برای $t=-۲s$ ، $t=۰٫۵s$ و $t=۲s$ مقدار $i$ را بدست آورید.



در $t=-۲$ ثانیه مقاومت ۵ و ۱۰ به دلیل کلید اتصال کوتاه می‌شوند

$$۳۰u(t+۱)=۳۰u(-۱)=۰$$

$$۲u(۱-t)=۲u(۳)=۲ \quad , \quad i=۲A$$

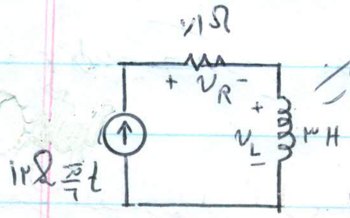
در $t=۰٫۵$ ثانیه منبع در مدار و کلید باز است، با یک حلقه مسئله حل می‌شود.

$$-۳۰+۱۰(i-۲)+۵(i-۳)=۰ \Rightarrow ۱۵i=۶۵ \Rightarrow i=\frac{۶۵}{۱۵}=۴٫۳۳A$$

در $t=۲$ منبع ۲A حذف و کلید باز می‌شود.

$$-۳۰+۱۰i+۵(i-۳)=۰ \Rightarrow ۱۵i=۴۵ \Rightarrow i=۳A$$

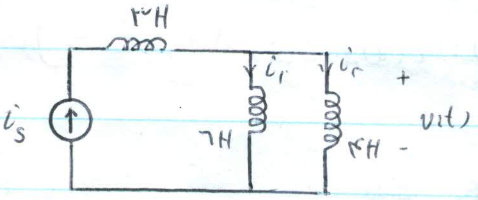
مثال: ماکزیمم انرژی ذخیره شده در سلف و انرژی تلف شده در صفر تا ۶ ثانیه را بدست آورید.



$$W_L(۰,t)=\frac{۱}{۲}Li^۲(t)-\frac{۱}{۲}Li^۲(۰)=\frac{۳}{۲}\times۱۴۴\sin^۲\frac{\pi}{۶}t-۰=۲۱۶\sin^۲\frac{\pi}{۶}t \Rightarrow W_{L_{max}}=۲۱۶J$$

$$P_R(t)=i^۲(t)R=۱۴٫۴\sin^۲\frac{\pi}{۶}t \Rightarrow W(۰,۶)=\int_۰^۶ p(t)dt=\int_۰^۶ ۷٫۲(۱-\cos\frac{\pi}{۳}t)dt=۷٫۲\times۶=۴۳٫۲J$$

مثال: اگر $i_s(t)=۶۰e^{-۲۰۰t}mA$ و $i_1(۰)=۲۰mA$ باشد $v(t)$ ، $i_1(t)$ و $i_2(t)$ را بیابید.

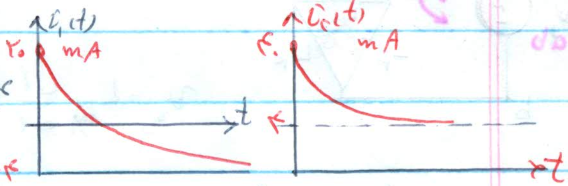


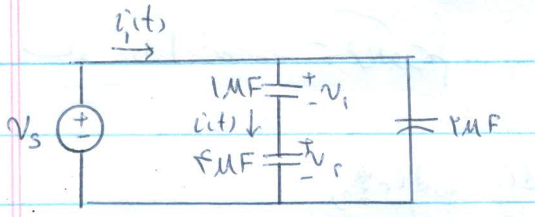
حل:

$$L_{eq}=۶||۴=\frac{۶\times۴}{۶+۴}=۲٫۴H \Rightarrow v(t)=L_{eq}\frac{di_s}{dt}=۲٫۴\times\frac{۶۰\times(-۲۰۰)e^{-۲۰۰t}}{۱۰۰۰}=-۲۸٫۸e^{-۲۰۰t}$$

$$i_1(t)=\frac{1}{L}\int_0^t v(t')dt'+i_1(0)=\frac{1}{۶}\int_0^t -۲۸٫۸e^{-۲۰۰t'}dt'\times۱۰۰۰+۲۰=\frac{۲۸۸}{۶\times۲}e^{-۲۰۰t'}\Big|_0^t+۲۰=۲۴e^{-۲۰۰t}-۴\ mA$$

$$i_2(t)=i_s(t)-i_1(t)=۶۰e^{-۲۰۰t}-۲۴e^{-۲۰۰t}+۴=۳۶e^{-۲۰۰t}+۴$$





مثال: اگر در $v_s=۱۰۰e^{-۸۰t}$ ولت و $v_1(0)=۲۰$

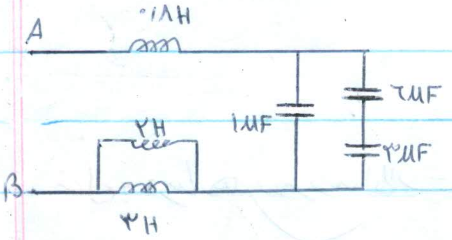
باشد $i(t)$، $v_1(t)$ و $v_2(t)$ را بیابید.

$$i(t)=C_e\frac{dv}{dt}=\frac{۱\times۴}{۱+۴}\times۱۰^{-۶}\times۱۰۰\times(-۸۰)e^{-۸۰t}\times۱۰۰۰=-۶٫۴e^{-۸۰t}\ mA$$

$$v_1(t)=\frac{1}{C_1}\int_0^t i(t')dt'+v_1(0^+)=۱۰^{۶}\int_0^t -۶٫۴\times۱۰^{-۳}e^{-۸۰t'}dt'+۲۰=-\frac{۶۴۰۰}{-۸۰}e^{-۸۰t'}\Big|_0^t+۲۰$$

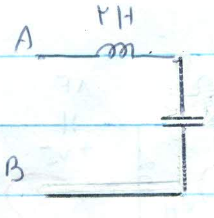
$$=۸۰e^{-۸۰t}-۸۰+۲۰=۸۰e^{-۸۰t}-۶۰,\quad t\geq۰$$

$$v_2(t)=v_s(t)-v_1(t)=۱۰۰e^{-۸۰t}-۸۰e^{-۸۰t}+۶۰=۲۰e^{-۸۰t}+۶۰,\quad t\geq۰$$



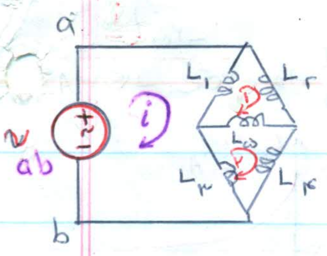
مثال: مدار معادل را رسم کنید

$$C_{eq}=\frac{۶\times۳}{۶+۳}+۱=۲+۱=۳\mu F$$



$$L_{eq}=۰٫۸+\frac{۲\times۳}{۲+۳}=۰٫۸+۱٫۲=۲H$$

ص ۱۲



مثال: سلف معادل را از سر ab بدست آورید. $L_۱=۱, L_۲=۲, L_۳=۳, L_۴=۴, L_۵=۵$

منبع $v_s$ را در سر ab قرار می‌دهیم و داریم:

$$v_{ab}=L_{eq}\frac{di}{dt}$$

سلف معادل را بدست می‌آوریم.

$$-v_{ab}+L_۱\frac{d(i-i_۱)}{dt}+L_۳\frac{d(i-i_۲)}{dt}=۰$$

$$(L_۱+L_۳)\frac{di}{dt}-L_۱\frac{di_۱}{dt}-L_۳\frac{di_۲}{dt}=v_{ab}\Rightarrow ۴\frac{di}{dt}-\frac{di_۱}{dt}-۳\frac{di_۲}{dt}=v_{ab}$$

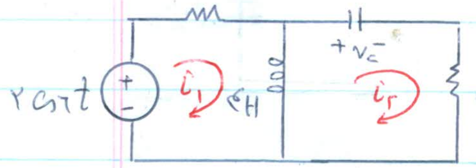
$$(L_۱+L_۲+L_۵)\frac{di_۱}{dt}-L_۱\frac{di}{dt}-L_۵\frac{di_۲}{dt}=۰\Rightarrow -\frac{di}{dt}+۸\frac{di_۱}{dt}-۵\frac{di_۲}{dt}=۰$$

$$(L_۵+L_۳+L_۴)\frac{di_۲}{dt}-L_۵\frac{di_۱}{dt}-L_۳\frac{di}{dt}=۰\Rightarrow -۳\frac{di}{dt}-۵\frac{di_۱}{dt}+۱۲\frac{di_۲}{dt}=۰$$

$$\begin{bmatrix} ۴ & -۱ & -۳ \\ -۱ & ۸ & -۵ \\ -۳ & -۵ & ۱۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{di}{dt} \\ \frac{di_۱}{dt} \\ \frac{di_۲}{dt} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} v_{ab} \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}\Rightarrow \frac{di}{dt}=\frac{\begin{vmatrix} v_{ab} & -۱ & -۳ \\ ۰ & ۸ & -۵ \\ ۰ & -۵ & ۱۲ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} ۴ & -۱ & -۳ \\ -۱ & ۸ & -۵ \\ -۳ & -۵ & ۱۲ \end{vmatrix}}=\frac{۷۱v_{ab}}{۱۷۰}$$

$$\frac{v_{ab}}{\frac{di}{dt}}=\frac{۱۷۰}{۷۱}=۲٫۳۹۴۳۶\ H$$

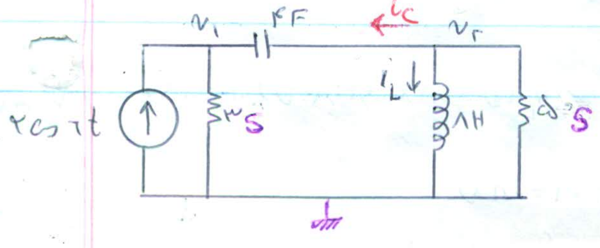
مثال: در مدارهای زیر معادلات دیفرانسیلی و انتگرالی را بنویسید. $(v_c(0^+)=10)$



الف)
$$-۴\frac{di_۱}{dt}+۴\frac{di_۲}{dt}+\frac{1}{۸}\int_0^t i_۲\,dt'+۱۰+۵i_۲=۰$$

$$-۲\cos ۲t+۳i_۱+۴\frac{d(i_۱-i_۲)}{dt}=۰\Rightarrow ۳i_۱+۴\frac{d(i_۱-i_۲)}{dt}=۲\cos ۲t$$

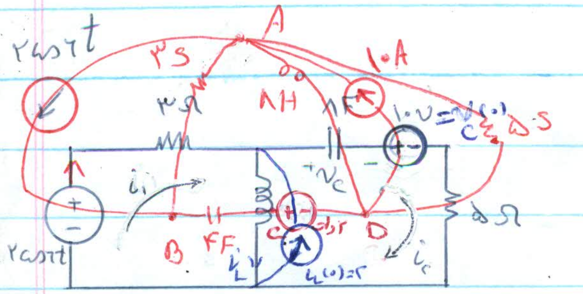
ب) ! $i_L(0^+)=10$ ،
$$i_c+i_L+۵v_۲=۰\Rightarrow ۴\frac{d(v_۲-v_۱)}{dt}+\frac{1}{۸}\int_0^t v_۲\,dt+۱۰+۵v_۲=۰$$



$$۳v_۱+۴\frac{d(v_۱-v_۲)}{dt}=۲\cos ۲t$$

**همزادی - دوگان (Dual)** : هرگاه معادلات حلقه‌ای یک مدار شبیه معادلات گره‌ای مدار دیگر باشد دو مدار دوگان یکدیگرند.

**مثال:** در مثال قبل اگر $v_1 = i_1$ و $v_2 = i_2$ در نظر گرفته شود معادلات دو مدار نظیر یکدیگر می‌شوند پس دو مدار دوگان یکدیگرند. (م ۶-۷)



**روش بدست آوردن دوگان :**

درون هر حلقه نقطه‌ای را در نظر می‌گیریم همینطور در خارج مدار هم نقطه‌ای را در نظر می‌گیریم. هر حلقه نظیر یک گره در دوگان است A، B، C و (D)

این نقاط را بدون عبور از حلقه واسطه بهم وصل می‌کنیم، بطوری که در وصل کردن عنصری از مدار را قطع کند با توجه به $J=kv \leftrightarrow v=kJ$ ، $q \leftrightarrow \varphi$ ، $v \leftrightarrow i$ ، $C \leftrightarrow L$ ، $R \leftrightarrow G$ عنصر را در این اتصال قرار می‌دهیم.

برای یافتن جهت منبع جریان منبع ولتاژ را ۹۰ درجه در جهت عقربه‌های ساعت دوران می‌دهیم جهت منبع جریان بدست می‌آید. ولتاژ اولیه خازن به جریان اولیه سلف تبدیل می‌شود و جهت آن نظیر منبع بدست می‌آید (برای خازن ولتاژ اولیه را بصورت منبع سری با خازن می‌توان در نظر گرفت و برای سلف منبع جریان موازی در نظر گرفت).

**مثال:** در شکل فوق $i_1 = v_1 = v_B$ و $v_C = v_2 = i_2$

سخن آخر حسین را انقلابی نقطه به نقطه سرزمین (حسین سرزمینی) آنچه هم گریبان ملتی است.

۶-۱

ص ۱

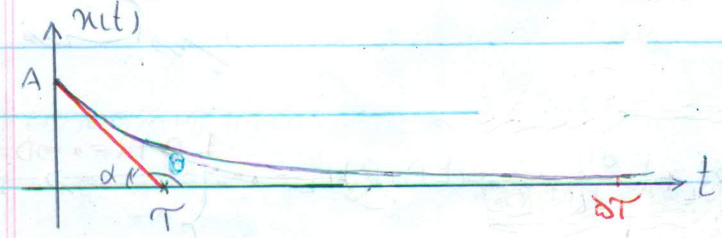
(۵)

# فصل هشتم هیت

توجه: $۵\frac{dv}{dt}+v=۰ \Rightarrow (۵D+۱)v=۰ \Rightarrow ۵D+۱=۰ \Rightarrow D=-\frac{۱}{۵} \Rightarrow v=Ae^{-\frac{t}{۵}}$

زیرا $۵\frac{dv}{v}=-dt \Rightarrow ۵\ln v=-t+c \Rightarrow v=e^{-\frac{t}{۵}+c}=Ae^{-\frac{t}{۵}}$

$$۵\frac{dv}{dt}+v=۲ \Rightarrow (۵D+۱)v=۲ \xrightarrow[v_p=\frac{۱}{۵D+۱}\times ۲=\frac{۲}{۵D+۱}e^{۰t}=\frac{۲}{۵\times۰+۱}e^{۰t}=۲]{۵D+۱=۰ \Rightarrow D=-\frac{۱}{۵} \Rightarrow v_n=Ae^{-\frac{t}{۵}}} v(t)=Ae^{-\frac{t}{۵}}+۲$$



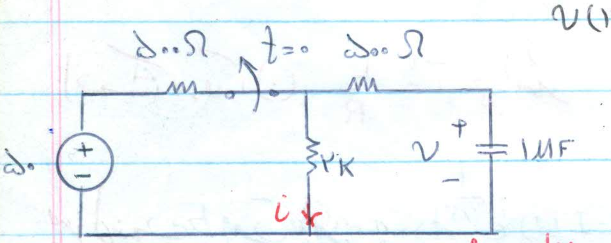
توجه: $x(t)=Ae^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow x(0^+)=A$ ،

$\frac{dx(0^+)}{dt}=-\frac{A}{\tau}=tg\theta=-tg\alpha$ ، $t=۴\tau \Rightarrow x(t)=Ae^{-۴}=۰/۰۱۸۳A$ ، $t=۵\tau \Rightarrow x(t)=Ae^{-۵}=۰/۰۰۶۷A\approx$

یعنی با گذشت ۵τ مقدار تقریبی تابع غایی بدست می‌آید

مثال: در مدار روبرو مطلوبست: $v(۲ms)$ ، $v(۱۲/۵ms)$

را بدست آورید



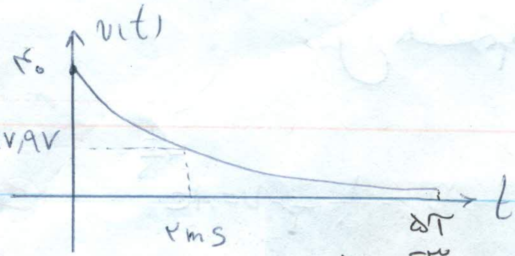
$$t>۰ \Rightarrow -v+۲۵۰۰i=۰ \xrightarrow{-i=c\frac{dv}{dt}} v+۲۵۰۰\times۱۰^{-۶}\frac{dv}{dt}=۰ \Rightarrow (۲/۵\times۱۰^{-۳}D+۱)v=۰$$

$۲/۵\times۱۰^{-۳}D+۱=۰ \Rightarrow D=-\frac{۱}{۲/۵\times۱۰^{-۳}}=-\frac{۱}{\tau} \Rightarrow \tau=۲/۵\times۱۰^{-۳}$ ثانیه ، $v(t)=Ae^{-\frac{t}{۲/۵\times۱۰^{-۳}}}, t>۰$

$t=0^- \xrightarrow{\text{خازن باز}} i(0^-)=\frac{۵۰}{۲۵۰۰}=\frac{۱}{۵۰} \Rightarrow v_c(0^-)=v_c(0^+)=۲۰۰۰\times\frac{۱}{۵۰}=۴۰$

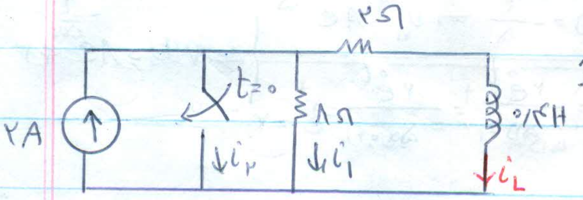
$A=۴۰ \Rightarrow v(t)=۴۰e^{-\frac{t}{۲/۵\times۱۰^{-۳}}}, t>۰ \Rightarrow v(۲\times۱۰^{-۳})=۴۰e^{-۰/۸}=۱۷/۹۷\ v$

و۲



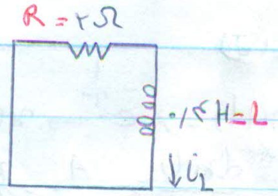
$v(-۱۲٫۵ms)=۴۰e^{-\frac{۱۲٫۵\times۱۰^{-۳}}{۲٫۵\times۱۰^{-۳}}}=۴۰e^{-۵}=۰٫۲۷\simeq ۰$ برای حدود ۵ ثابت زمانی گذشته است

مثال: در مدار روبرو $i_L$ ، $i_۲$ را در $t=۰٫۱۵$ بیابید



بدست آورید

$t>۰\Longrightarrow$



$Ri_L+L\frac{di_L}{dt}=۰\Longrightarrow(LD+R)i_L=۰\xrightarrow{LD+R=۰\Rightarrow D=\frac{-R}{L}}$

$i_L=Ae^{-\frac{R}{L}t}\xrightarrow{i_L(0^+)=A}i_L=I_L(0^+)e^{-\frac{R}{L}t}\quad,\ T=\frac{L}{R}$

$i_L=I_L(0^+)e^{-\frac{R}{L}t}=I_L(0^+)e^{-\frac{t}{T}}$ یعنی در مدار RL همواره جواب بدون منبع به صورت

$i_L=I_L(0^+)e^{-\frac{R}{L}t}=I(0^+)e^{-\frac{t}{T}}$ است که در آن $T=-\frac{L}{R}$ می‌باشد

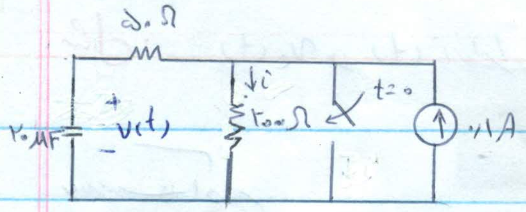
پس: در مدار فوق $R=۲\Omega,\ L=۰٫۴H\rightarrow T=\frac{L}{R}=\frac{۰٫۴}{۲}=۰٫۲\Longrightarrow i_L(t)=I_L(0^+)e^{-\frac{t}{۰٫۲}},\ t>۰$

برای بدست آوردن $i_L(0^+)$ نیاز $i_L(0^-)$ داریم $(i_L(0^-)=i_L(0^+))$ پس:

$t=0^-\xrightarrow[\text{کوتاه}]{\text{کلید باز و سلف اتصال}}i_L(0^-)=\frac{۸\times۲}{۸+۲}=۱٫۶A=i_L(0^+)\Longrightarrow i_L(t)=۱٫۶e^{-\frac{t}{۰٫۲}}=۱٫۶e^{-۵t},\ t>۰$

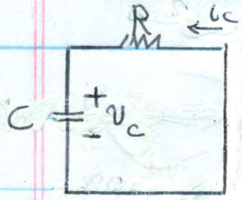
$i_L(۰٫۱۵)=۱٫۶e^{-۵\times۰٫۱۵}=۰٫۷۵۷A\Longrightarrow i_1(۰٫۱۵)=۰$

$i_۲(۰٫۱۵)=۲-i_L(۰٫۱۵)=۲-۰٫۷۵۷=۱٫۲۴۳\ A$



حل: مقادیر v(t) و i(t) را بدست آورید.

توجه:

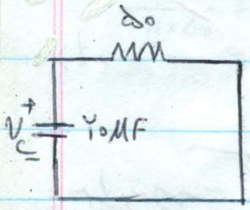


$$Ri_c + v = 0 \xrightarrow{i_c = C\frac{dv}{dt}} RC\frac{dv}{dt} + v = 0 \Rightarrow (RCD+1)v = 0 \Rightarrow RCD+1 = 0 \Rightarrow D = \frac{-1}{RC}$$

$$v(t) = Ae^{-\frac{t}{RC}}\ , t>0 \Rightarrow v(0^+) = A \Rightarrow v(t) = v(0^+)e^{-\frac{t}{RC}} = v(0^+)e^{-\frac{t}{\tau}}\ , t>0 \quad (\tau = RC)$$

که در آن R مقاومت معادل دو سر خازن است

در این مثال در $t>0$ کلید بسته و مقاومت $200\,\Omega$ اتصال کوتاه می‌شود و داریم:



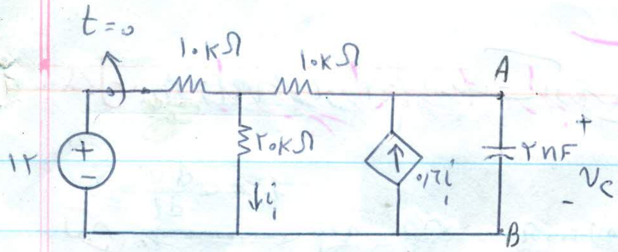
$\tau = RC = 50 \times 20 \times 10^{-6} = 10^{-3}$ باشد $\rightarrow v(t) = v(0^+)e^{-\frac{t}{10^{-3}}}\ , t>0$

$t = 0^-$ (کلید باز و خازن هم باز است) $\Rightarrow v_c(0^-) = 200 \times 0/1 = 20 = v_c(0^+)$

$$v_c(t) = 20\, e^{-\frac{t}{10^{-3}}} = 20\, e^{-1000t}\ , t>0$$

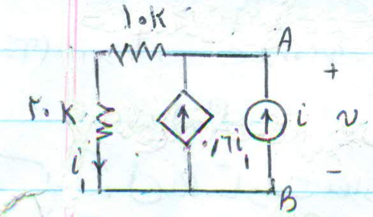
$i = 0/1\ , t<0$ در $t<0$ با باز بودن خازن؛

$i = 0\ , t>0$ در $t>0$ مقاومت $200\,\Omega$ با کلید اتصال کوتاه موازی می‌شود



مثال: $v_c(t)$ و $i_1(t)$ را برای همه زمانها بدست آورید.

$t>0 \Rightarrow v_c(t)=Ae^{-\frac{t}{RC}}$ و $i_1=Be^{-\frac{t}{RC}}=Be^{-\frac{t}{\tau}}$ برای بدست آوردن $R_e$ (مقاومت معادل)



$R=\frac{v}{i}$ در مدار خازن) منبع جریان $i$ را بجای خازن قرار میدهیم

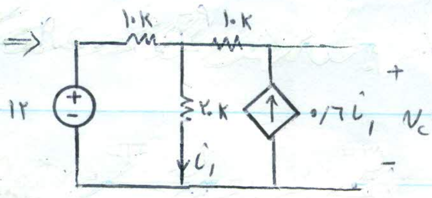
$i_1=۰/۶i_1+i \Rightarrow i=۰/۴i_1 \Rightarrow i_1=۲/۵i$

$-v+۳۰i_1=۰ \Rightarrow v=۳۰i_1=۷۵i \Rightarrow R=\frac{v}{i}=۷۵k\Omega$

$\tau=RC=۷۵\times۱۰^{۳}\times۲\times۱۰^{-۹}=۱/۵\times۱۰^{-۴}$ ثانیه $\rightarrow v_c(t)=Ae^{-\frac{t}{۱/۵\times۱۰^{-۴}}}$ , $i_1(t)=Be^{-\frac{t}{۱/۵\times۱۰^{-۴}}}$ , $t>۰$

$v_c(0^+)=A=v_c(0^-)$ و $B=i_1(0^+)$ : برای بدست آوردن A, B به شرایط اولیه داریم یعنی

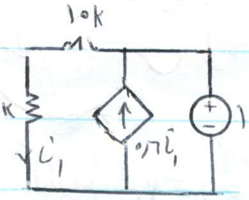
$t=0^- \Rightarrow$



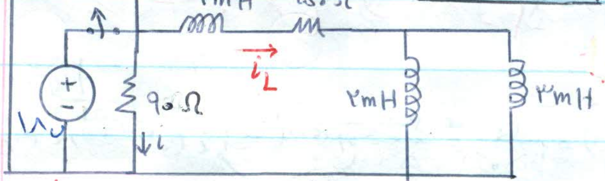
$-۱۲+۱۰\times۰/۴i_1+۲۰i_1=۰ \Rightarrow i_1(0^-)=\frac{۱۲}{۲۴}=\frac{۱}{۲}mA=۰/۵$

$v_c(0^-)=۱۰\times۰/۶i_1+۲۰i_1=۲۶i_1=۱۳=v_c(0^+)=A \Rightarrow v_c(t)=۱۳e^{-\frac{t}{۱/۵\times۱۰^{-۴}}}$

$t=0^+$



$-۱۳+۳۰i_1(0^+)=۰ \Rightarrow i_1(0^+)=\frac{۱۳}{۳۰}=B=۰/۴۳$



مثال: در مدار زیر $i$ و $i_L$ را بدست آورید.

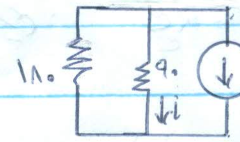
حل: $t>0 \Rightarrow L_{eq}=\frac{۲\times۳}{۲+۳}+۱=۲/۲\ mH$ , $R_{eq}=\frac{۹۰\times(۶۰+۱۲۰)}{۹۰+۶۰+۱۲۰}+۵۰=۱۱۰\Omega$

$\tau=\frac{L_{eq}}{R_{eq}}=\frac{۲/۲\times۱۰^{-۳}}{۱۱۰}=۲۰\mu S \Rightarrow i_L(t)=i_L(0^+)e^{-\frac{t}{۲۰\times۱۰^{-۶}}}=i_L(0^+)e^{-۵۰۰۰۰t}$ , $t>۰$ , $i(t)=i(0^+)e^{-۵۰۰۰۰t}$ , $t>۰$

۵

$t<0 \Rightarrow$ سلف اتصال کوتاه $\rightarrow \begin{cases} i(0^-)=\frac{۱۸}{۹۰}=۰/۲A \\ i_L(0^-)=\frac{۱۸}{۵۰}=\frac{۳۶}{۱۰۰}=۰/۳۶A=i_L(0^+) \Rightarrow i_L(t)=۰/۳۶e^{-۵۰۰۰t}, t>0 \end{cases}$

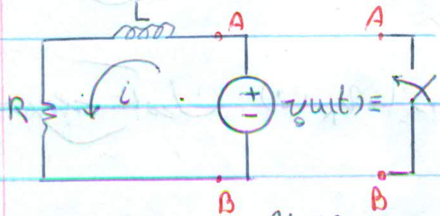
$t=0^+ \Rightarrow$



$$i(0^+)=\frac{-۱۸۰}{۱۸۰+۹۰}\times ۰/۳۶=\frac{-۲}{۳}\times ۰/۳۶=-۰/۲۴A$$

$$i(t)=-۰/۲۴e^{-۵۰۰۰t}u(t)+۰/۲u(-t)$$

حل معادلهٔ دیفرانسیل با داشتن ورودی ::



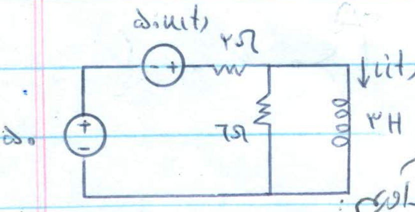
حل: با $v_0=0$ پاسخ طبیعی مدار که تنها ناشی از عناصر مدار است

$t>0 \Rightarrow Ri+L\frac{di}{dt}=v_0 \xrightarrow{v_0=0} R+LD=0 \Rightarrow D=-\frac{R}{L} \Rightarrow i_n(t)=Ae^{-\frac{R}{L}t} \xrightarrow{\tau=\frac{L}{R}} Ae^{-\frac{t}{\tau}}$ بدست می‌آید

پاسخ واداشته (مانا) که ناشی از منبع است برابر: $i_p=\frac{v_0e^{0t}}{R+LD}\Big|_{D=0}=\frac{v_0}{R}$

$i(t)=i_n(t)+i_p(t)=Ae^{-\frac{t}{\tau}}+\frac{v_0}{R}$

حالت کلی $i(t)=Ae^{-\frac{t}{\tau}}+B$ که $A, B$ در $0^+$ و $\infty$ بدست می‌آید.



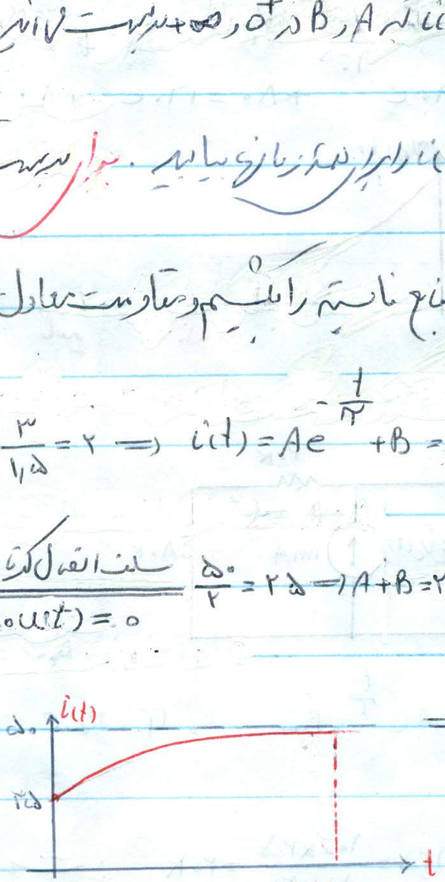
حل: $i(t)$ را برای همهٔ زمانها بیابید. برای بدست آوردن $R_{eq}$

($\tau=\frac{L}{R_{eq}}$) با منابع نابسته را بکشیم و مقاومت معادل دو سر سلف را بدست آوریم

$$R_{eq}=۲||۶=\frac{۲\times ۶}{۲+۶}=\frac{۳}{۲}=۱/۵ \Rightarrow \tau=\frac{L}{R_{eq}}=\frac{۳}{۱/۵}=۲ \Rightarrow i(t)=Ae^{-\frac{t}{\tau}}+B=Ae^{-\frac{t}{۲}}+B, t>0$$

$$t=0^+ \Rightarrow i(0^+)=A+B=i_L(0^+)=i_L(0^-) \xrightarrow[۵۰u(t)=0]{\text{سلف اتصال کوتاه}} \frac{۵۰}{۲}=۲۵ \Rightarrow A+B=۲۵$$

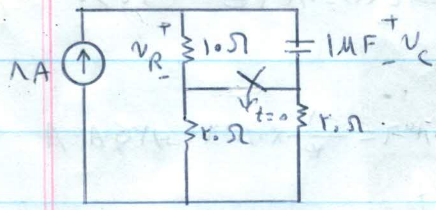
$$i(+\infty)=B=i_L(+\infty) \xrightarrow{\text{سلف اتصال کوتاه}} \frac{۱۰۰}{۲}=۵۰$$



$\Rightarrow A=-۲۵$

$$i(t)=-۲۵e^{-\frac{t}{۲}}+۵۰, t>0$$

مثال. در مدار روبرو $v_R(t)$ را بدست آورید.



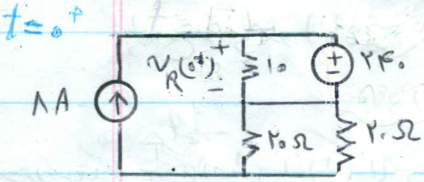
در $t>0$ داریم: $v_R(t)=Ae^{-\frac{t}{T}}+B$ و $T=R_eC$

$R_e$ مقاومت معادل از دو سر خازن است که $R_e=10\Omega \Rightarrow T=10\times10^{-6}=10^{-5}\,s$

برای بدست $v_R(t\to\infty)$ با این توجه که خازن باز می‌شود: $v_R(t\to\infty)=10\times8=80$ ولت $=B$ (I)

برای بدست آوردن $v_R(0^+)$ بایستی $v_C(0^-)$ را داریم: $v_R(0^+)=A+B=A+80$ (II)

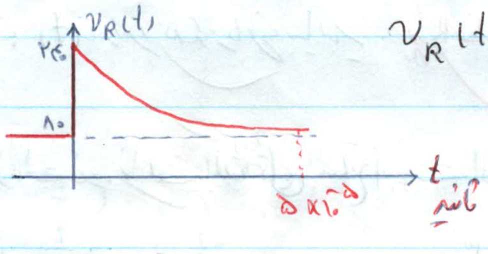
$t=0^- \xrightarrow[\text{خازن باز}]{\text{کلید باز}} v_C(0^-)=30\times8=240\,V=v_C(0^+)$ یعنی در $t=0^+$ می‌توان به جای



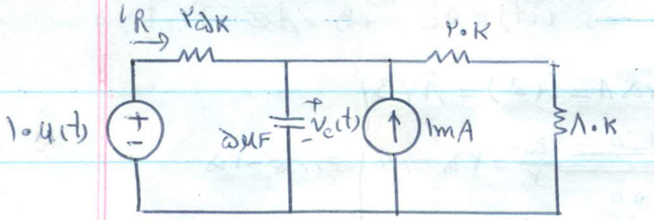
خازن منبع ولتاژ ۲۴۰ ($v_C(0^+)=v_C(0^-)$) قرار داد البته این مدار فقط در $t=0^+$ صادق است:

$$v_R(0^+)=240 \overset{II}{=} A+ \quad \Rightarrow A=160$$

$$v_R(t)=160e^{-\frac{t}{10^{-5}}}+80,\quad t>0$$



مثال: در مدار روبرو $i_R(t)$، $v_C(t)$ را در $t=0^-$، $t=0^+$، $t=\infty$ و $t=0.18$ ثانیه بدست آورید.



$t>0 \Rightarrow v_C(t)=Ae^{-\frac{t}{T}}+B$, $T=R_eC$

$R_e$ مقاومت معادل دو سر خازن با کشتن منابع است: $R_{eq}=(20+80)\|25=\frac{100\times25}{100+25}=20K$

ج -۷

$\tau = ۲۰ \times ۱۰^{۳} \times ۵ \times ۱۰^{-۶} = ۰٫۱$ ثانیه

اثر منبع 1mA :

$t = +\infty \Rightarrow$ خازن باز است $\xrightarrow{\text{باهم کار}} v_{C_۱}(+\infty) = ۲۵ \times \frac{۱۰۰}{۱۲۵} \times ۱ = ۲۰\ v$

$v_{C_۲}(+\infty) = \frac{۱۰}{۱۲۵} \times ۱۰۰ = ۸\ v \Rightarrow v_C(+\infty) = ۲۰ + ۸ = ۲۸\ v = B$

$v(0^-) \xrightarrow[۱۰u(t)=۰]{\text{خازن باز}} \frac{۱ \times ۱۰۰}{۱۲۵} \times ۲۵ = ۲۰ = v_C(0^+) = A + B \xrightarrow{B=۲۸} A = -۸$

$v_C(t) = -۸e^{-۱۰t} + ۲۸ \quad , t > ۰ \Rightarrow v_C(۰٫۰۸) = -۸e^{-۰٫۸} + ۲۸ = ۲۴٫۴\ v$

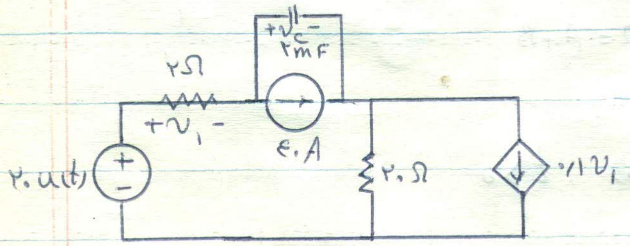
$i_R(t) = A_۱ e^{-۱۰t} + B_۱ \quad , t > ۰$

$i_R(+\infty) = \frac{۱۰ - v_C(+\infty)}{۲۵} = \frac{۱۰ - ۲۸}{۲۵} = -۰٫۷۲\ mA = B_۱$

$i_R(0^+) = \frac{۱۰ - v_C(0^+)}{۲۵} = \frac{۱۰ - ۲۰}{۲۵} = -۰٫۴\ mA = A_۱ + B_۱ \xrightarrow{B_۱ = -۰٫۷۲} A_۱ = ۰٫۳۲$

$i_R(t) = ۰٫۳۲e^{-۱۰t} - ۰٫۷۲ \quad , t > ۰ \quad (mA) \Rightarrow i_R(۰٫۰۸) = ۰٫۳۲e^{-۰٫۸} - ۰٫۷۲ = -۰٫۵۷۶\ mA$

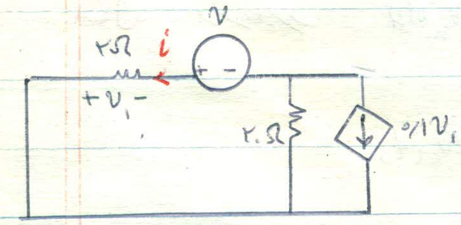
$i_R(0^-) = \frac{-v_C(0^-)}{۲۵} = \frac{-۲۰}{۲۵} = -۰٫۸\ mA$



مثال: در مدار روبرو $v_C(t)$ را بدست آورید.

در $t > ۰$ داریم:

$\tau = R_{eq} C$



برای بدست آوردن $R_{eq}$ منابع نابسته را کشته و مقاومت معادل

دو سر خازن را بدست می‌آوریم برای اینکار یک منبع v قرار داده و i را