به دست آوردیم:

$R_{eq} = \frac{v}{i}$

$-v(t) + 2i + 20(i + 0.1v_1) = 0 \Rightarrow v(t) = 18i \Rightarrow R_{eq} = \frac{v}{i} = 18\Omega \Rightarrow \tau = R_{eq}C = 2\times10^{-3}\times18 = 36\times10^{-3}$ ثانیه

$v_1 = -2i$

$v_c(t) = Ae^{-\frac{t}{36\times10^{-3}}} + B = Ae^{-27.8t} + B$

برای بدست آوردن A, B نیاز به $v_c(+\infty)$ و $v_c(0^+)$ داریم

$t = +\infty$ خازن باز می‌شود $\Rightarrow 2\times40 + 20(40 - 0.1v_1) - 20 + v_c(+\infty) = 0$

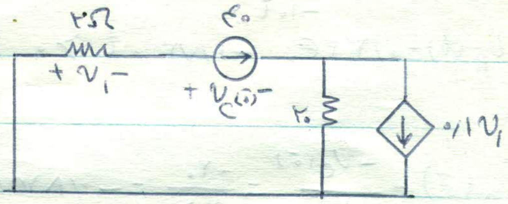
$v_1 = 2\times40 = 80$

$700 + v_c(+\infty) = 0 \Rightarrow v_c(+\infty) = -700$ ولت $= B$

برای $v_c(0^+)$ نیاز به $v_c(0^-)$ داریم پس:

$t = 0^- \Rightarrow v_1 + v_c(0^-) + 20(40 - 0.1v_1) = 0$

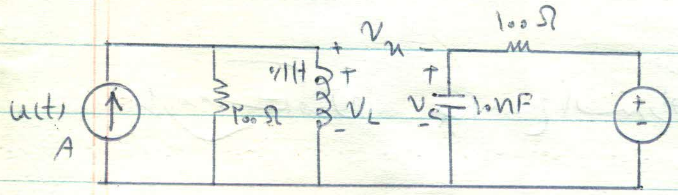
$v_1 = 2\times40 = 80$



$80 + v_c(0^-) + 800 - 160 = 0 \Rightarrow v_c(0^-) = -720 = v_c(0^+) = A + B$

$A = -720 + 700 = -20 \Rightarrow v_c(t) = -20e^{-27.8t} + (-700)$ ، $t > 0$

مثال: مدار مقابل $v_x(t)$ را بیابید



$v_x(t) = v_L(t) - v_C(t)$

$\tau = R_{eq}C = 100 \times 10 \times 10^{-9} = 10^{-6}$ ثانیه $\Rightarrow v_C(t) = Ae^{-10^{6}t} + B$

$v_C(0^-) = 0 = v_C(0^+) = A + B\ ,\ v_C(+\infty) = 100 = B \Rightarrow A = -100$

$\Rightarrow v_C(t) = -100e^{-10^{6}t} + 100\ ,\ t>0$

$\tau_1 = \frac{L}{R} = \frac{0/1}{200} = 5\times10^{-4}$ ثانیه $\Rightarrow v_L(t) = A_1 e^{-\frac{t}{5\times10^{-4}}} + B_1 = A_1 e^{-2000t} + B_1$

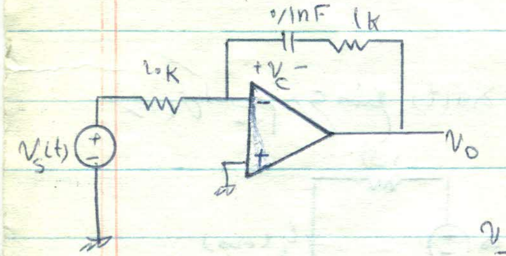
$t = +\infty \Rightarrow v_L(+\infty) = 0 = B_1$

$t = 0^- \Rightarrow$ سلف اتصال باز $\Rightarrow i_L(0^-) = i_L(0^+) = 0 \Rightarrow v_L(0^+) = 1\times200 = 200 = A_1 + B_1$

$\Rightarrow A_1 = 200$

$v_L(t) = 200e^{-2000t}$ معادل در $t=0^+$ بجای سلف منبع جریان $(I = I_L(0^-) = I_L(0^+) = 0)$ قرار داد

$v_x(t) = v_L(t) - v_C(t) = 200e^{-2000t} + 100e^{-10^{6}t} - 100\ ,\ t>0$



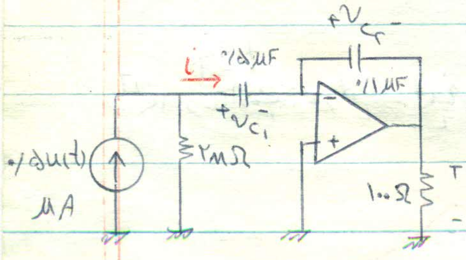
مثال: $v_o(t)$ را بدست آورید. $(v_s(t) = 4e^{-20000t}\ ,\ v_C(0) = 0)$

$v_- = v_+ = 0 \Rightarrow -v_s + 10^{4}i(t) = 0 \Rightarrow i(t) = \frac{v_s}{10^{4}} = 4\times10^{-4}e^{-20000t}$

$v_C + 10^{3}i(t) + v_o(t) = 0 \Rightarrow v_o(t) = -0/4e^{-20000t} - v_C(t)$

$v_C(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(t')dt' + v_C(0^+) = \frac{1}{10^{-10}}\int_0^t 4\times10^{-4}e^{-20000t'}dt' + 0 = \frac{4\times10^{6}}{-20000}e^{-20000t'}\Big|_0^t = -200(e^{-20000t} - 1)$

$\Rightarrow v_o(t) = -0/4e^{-20000t} + 200e^{-20000t} - 200 = 199/6e^{-20000t} - 200\ ,\ t>0$



مثال: $v_o(t)$ را بدست آورید. $(v_{C_2}(0) = 0)$

$v_{C_2}(t) + v_o(t) = 0 \Rightarrow v_o(t) = -v_{C_2}(t)$

$$v_{c_2}(t) = \frac{1}{C_2}\int_0^t i(t')dt' + v_{c_2}(0^+) = 10^7\int_0^t i(t')dt' + 0$$

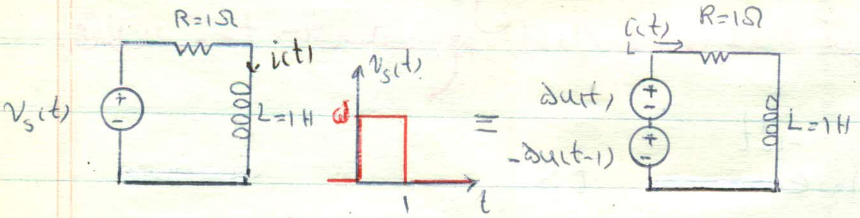
$T = 2\times 10^{6} \times 0.5\times 10^{-6} = 1$ ثانیه $\Rightarrow i(t) = Ae^{-t} + B$

$i(+\infty) = 0 = B$

$t = 0^- \Rightarrow v_{c_1}(0^-) = 0 = v_{c_1}(0^+) \Rightarrow i(0^+) = 0.5\times 10^{-6} A = A + B$ $\Rightarrow A = 0.5\times 10^{-6} A \Rightarrow i(t) = 0.5\times 10^{-6} e^{-t},\ t > 0$

$$v_o(t) = -10^7\int_0^t 0.5\times 10^{-6} e^{-t'}dt' = 5e^{-t'}\Big|_0^t = 5(e^{-t} - 1)\ ,\ t \geq 0$$

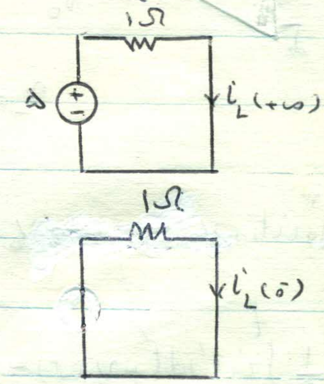
مثال: $i(t)$ را بیابید :



فرض می‌کنیم تنها منبع $5u(t)$ در مدار وجود دارد :

$t > 0 \Rightarrow T = \frac{L}{R} = \frac{1}{1} = 1$ ثانیه

$\Rightarrow i_L(t) = Ae^{-t} + B \Rightarrow i_L(+\infty) = B = \frac{5}{1} = 5$



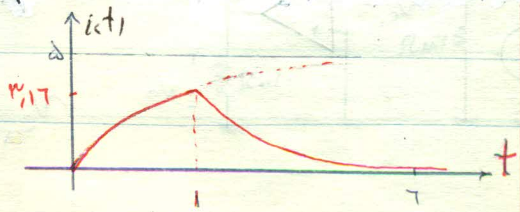
$i_L(0^+) = A + B = i_L(0^-) = 0$

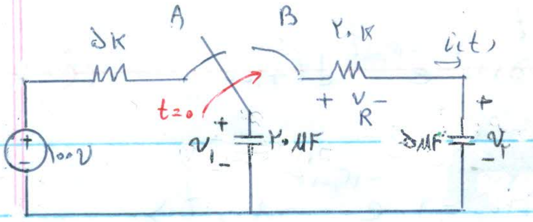
$i_L(t) = -5e^{-t} + 5,\quad 0 < t < 1$

$t > 1 \Rightarrow i_L(t) = A_1 e^{-t} + B_1 \quad \Rightarrow i_L(+\infty) = B_1 = 0$

$i_L(1^+) = A_1 e^{-1} = i_L(1^-) = -5e^{-1} + 5 = 3.16 \Rightarrow A_1 = 8.59$

$i_L(t) = 8.59e^{-t}\ ,\ t > 1$



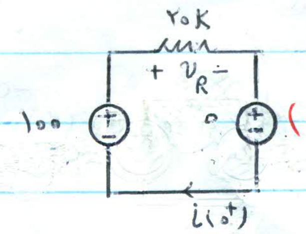


مثال: اگر کلید مدتی در وضعیت A بوده و در $t=0$ به موقعیت B برود. الف) $v_1(0^-)$ و $v_R(0^-)$ را بیابید ($v_2(0^-)=0$). ب) $v_1(0^+)$، $v_2(0^+)$ و $v_R(0^+)$ را بدست آورید. پ) ثابت زمانی را حساب کنید. ت) $v_R(t)$ را در $t>0$ بیابید. ث) $i(t)$ را بیابید. ج) $v_2(t)$ و $v_1(t)$ را بدست آورید. ح) نشان دهید جمع انرژی ذخیره شده در $t=\infty$ و مجموع انرژی تلف شده در مقاومت 20K و ذخیره شده در خازن‌ها در $t=0$ برابر است.

الف)

$t=0^- \Rightarrow v_1(0^-)=100,\quad v_R(0^-)=0\times 20K=0$

ب)



$v_1(0^+)=v_1(0^-)=100,\quad v_2(0^+)=v_2(0^-)=0$

$v_R(0^+)=v_1(0^+)=100\ V,\quad i(0^+)=\dfrac{100}{20\times 10^{3}}=5\times 10^{-3}\ A$

پ و ت)

$\tau = C_{eq}\times R=\dfrac{20\times 5}{20+5}\times 10^{-6}\times 20\times 10^{3}=8\times 10^{-2}$ ثانیه

$v_R(t)=Ae^{-\frac{t}{8\times 10^{-2}}}+B=Ae^{-12.5t}+B$

$v_R(+\infty)=0=B,\quad v_R(0^+)=100=A+B\Rightarrow A=100 \Rightarrow v_R(t)=100e^{-12.5t},\ t>0$

ث)

$i(t)=A_1e^{-12.5t}+B_1 \longrightarrow i(+\infty)=0=B_1,\quad i(0^+)=A_1+B_1=5\times 10^{-3}\Rightarrow A_1=5\times 10^{-3}$

یا راه ساده‌تر: $\Rightarrow i(t)=\dfrac{v_R(t)}{20\times 10^{3}}=5\times 10^{-3}e^{-12.5t},\ t>0$

ج) $v_1 = v_{c_1}(t) = \frac{1}{C_1}\int_0^t -i(t')\,dt' + v_{c_1}(0^+) = \frac{-1}{20\times10^{-6}}\int_0^t 5\times10^{-3} e^{-12.5t'}\,dt' + 100$

$= \frac{-5\times10^{-3}}{20\times(-12.5)} e^{-12.5t'}\Big|_0^t + 100 = 20(e^{-12.5t}-1)+100 = 20e^{-12.5t}+80, \quad t>0$

$v_2 = v_{c_2}(t) = \frac{1}{5\times10^{-6}}\int_0^t 5\times10^{-3} e^{-12.5t'}\,dt' = -80\,e^{-12.5t'}\Big|_0^t = -80(e^{-12.5t}-1), \quad t>0$

د) انرژی ذخیره شده در خازن ها در بی‌نهایت برابر است با:

$v_{c_2}(+\infty)=80 \Rightarrow W_2 = \frac{1}{2}C_2 v_2^2 = \frac{1}{2}\times5\times10^{-6}\times6400 = 16\times10^{-3}\,J$

$v_{c_1}(+\infty)=80 \Rightarrow W_1 = \frac{1}{2}C_1 v_1^2 = \frac{1}{2}\times20\times10^{-6}\times(80)^2 = 64\times10^{-3}\,J$

$W_R = \int_0^{+\infty} i^2 R\,dt' = \int_0^{+\infty} 25\times10^{-6} e^{-25t'}\times2\times10^{3}\,dt' = 0.05\times\frac{1}{-25}(e^{-25t'})\Big|_0^{+\infty} = 0.002\,J$

جمع انرژی در $+\infty$: $W(+\infty) = W_{c_2}+W_{c_1}+W_R = 16\times10^{-3}+64\times10^{-3}+0.002 = 0.1\,J$

$W_{c_1}(0^+) = \frac{1}{2}C_1 v_1^2(0^+) = \frac{1}{2}\times20\times10^{-6}\times10^{4} = 0.1\,J$

$W_{c_2}(0^+) = \frac{1}{2}C_2 v_2^2(0^+) = 0$

جمع انرژی در 0^+ : $W_T(0^+) = W_{c_1}(0^+)+W_{c_2}(0^+) = 0.1\,J$

قانون تبادل انرژی برقرار است یعنی مجموع انرژی در $t=0^+$ با مجموع انرژی در $t=+\infty$ برابر است.

می‌توانستیم در مسئله بالا برای یافتن $v_2(t)$ از قانون تبادل انرژی استفاده کنیم یعنی با:

در ابتدا و در انتها انرژی برابر است پس:

$$v_{c_1}(t)=Ae^{-۱۲٫۵t}+B\ ,\ t>۰$$

$$v_{c_1}(۰^+)=v_{c_1}(۰^-)=۱۰۰=A+B\ ,\ v_c(+\infty)=B$$

در شرایط ثابت ولتاژ $v_{c_1}=v_{c_2}$ خواهد شد چرا که جریان عبوری از مقاومت صفر خواهد شد

پس بار اولیه با بار نهایی برابر است: $\sum q(۰)=\sum q(+\infty)\xrightarrow{q=Cv}$

$$C_1v_1(۰^+)+C_2v_2(۰^+)=C_1v_1(+\infty)+C_2v_2(+\infty)\xrightarrow{v_{c_1}(+\infty)=v_{c_2}(+\infty)=v}$$

$$۲۰\times۱۰^{-۶}\times۱۰۰+۵\times۱۰^{-۶}\times۰=۲۰\times۱۰^{-۶}\times v+۵\times۱۰^{-۶}\times v\Rightarrow v=\frac{۲\times۱۰^{-۳}}{۲۵\times۱۰^{-۶}}=۸۰$$

$$\Rightarrow v_{c_1}(+\infty)=v=B=۸۰\xrightarrow{A+B=۱۰۰}A=۲۰\Rightarrow v_{c_1}(t)=۲۰e^{-۱۲٫۵t}+۸۰\ ,\ t>۰$$

$$v_{c_2}(t)=A_1e^{-۱۲٫۵t}+B_1\ ,\ t>۰\quad ,\ v_{c_2}(+\infty)=v=B_1=۸۰$$

$$v_{c_2}(۰^+)=v_{c_2}(۰^-)=۰=A_1+B_1\Rightarrow A_1=-۸۰\Rightarrow v_{c_2}(t)=۸۰-۸۰e^{-۱۲٫۵t}\ ,\ t>۰$$

$$v_R(t)=v_{c_1}(t)-v_{c_2}(t)=۲۰e^{-۱۲٫۵t}+۸۰-۸۰+۸۰e^{-۱۲٫۵t}=۱۰۰e^{-۱۲٫۵t}\ ,\ t>۰$$

شریا

فصل ۲ جبه‌دار

۴

فرکانس طبیعی: ریشه‌های معادله شناختی (مشخصه) را فرکانس‌های طبیعی شبکه می‌نامند.

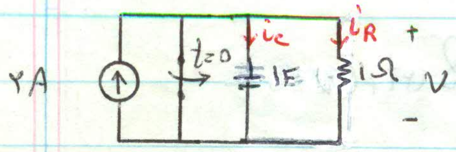
$(D+1)i=0 \Rightarrow D=-1$ فرکانس طبیعی $\Rightarrow i=Ae^{-t}$

پاسخ ورودی صفر: پاسخ سیستم را هنگامی که ورودی نداریم (تمامی منابع را کشته‌ایم)

پاسخ ورودی صفر می‌گویند (که همان پاسخ همگن یا پاسخ طبیعی معادله دیفرانسیل است.)

پاسخ حالت صفر: یعنی پاسخ شبکه در حالت استراحت (شرایط اولیه صفر (initial rest

را پاسخ حالت صفر می‌گویند (که همان پاسخ ناشی از ورودی در معادله دیفرانسیل است.)



مثال: پاسخ حالت صفر، ورودی صفر و دائمی (گذرا)

کمیت‌های کامل را بدست آورید. $v_c(0^-)=7$ ولت

$t>0 \Rightarrow 2=i_c+i_R=C\frac{dv}{dt}+\frac{1}{R}v \Rightarrow (D+1)v=2 \Rightarrow D+1=0 \Rightarrow D=-1 \Rightarrow v(t)=Ae^{-t}+B$

پاسخ کامل $v(0^+)=v(0^-)=7=A+B$, $v(+\infty)=2\times1=2=B \Rightarrow A=5 \Rightarrow v(t)=5e^{-t}+2$

پاسخ گذرا = همگن $=5e^{-t}$ و ۲ = پاسخ دائمی = پاسخ واداشته = پاسخ مانا

پاسخ ورودی صفر (بدون منبع) منبع ۲A را کشتیم $\Rightarrow (D+1)v=0 \Rightarrow v=A_1e^{-t} \Rightarrow v(0^+)=v(0^-)=A_1=7$

$v=7e^{-t}\neq 5e^{-t}$ پاسخ گذرا — پاسخ ورودی صفر

پاسخ حالت صفر (شرایط اولیه را صفر بگیریم) $v_c(0^+)=v_c(0^-)=0$ $(D+1)v=2 \Rightarrow v(t)=A_2e^{-t}+B_2$

پاسخ دائمی $v(+\infty)=B_2=2$ و $v(0^+)=A_2+B_2=0 \Rightarrow A_2=-2 \Rightarrow v(t)=-2e^{-t}+2\neq 5e^{-t}$

پاسخ کامل = پاسخ ورودی صفر + پاسخ حالت صفر = $5e^{-t}+2$, $t>0$

توجه: پاسخ کل را هم ورودی صفر و هم حالت صفر حضور دارد.

مثال: اگر در مسئله قبل $I=\sin 2t$ پاسخ کامل را بدست آورید.

$$(D+1)v=\sin 2t \Rightarrow v_f(t)=\frac{1}{D+1}\sin 2t=\frac{D-1}{D^2-1}\sin 2t=\frac{D-1}{-4-1}\sin 2t$$

$$=-\frac{1}{5}(2\cos 2t-\sin 2t) \quad , D+1=0\Rightarrow D=-1\Rightarrow v_h(t)=Ae^{-t}$$

$$v(t)=Ae^{-t}-\frac{2}{5}\cos 2t+\frac{1}{5}\sin 2t\Rightarrow v(0^-)=v(0^+)=A-\frac{2}{5}=7\Rightarrow A=\frac{37}{5}$$

$$v(t)=\frac{37}{5}e^{-t}-\frac{2}{5}\cos 2t+\frac{1}{5}\sin 2t=\frac{37}{5}e^{-t}+A_1\sin(2t+\theta)$$

$$\Rightarrow A_1\sin 2t\cos\theta+A_1\cos 2t\sin\theta=-\frac{2}{5}\cos 2t+\frac{1}{5}\sin 2t$$

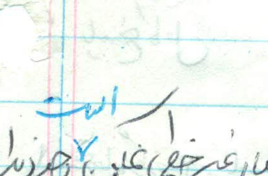
$$\left(A_1\cos\theta=\frac{1}{5},\ A_1\sin\theta=-\frac{2}{5}\right)\Rightarrow A_1^2=\frac{4}{25}+\frac{1}{25}\Rightarrow A_1=\frac{\sqrt5}{5}\Rightarrow\sin\theta=\frac{-\frac{2}{5}}{\frac{\sqrt5}{5}}=-\frac{2}{\sqrt5}\Rightarrow\theta=-63.4^\circ$$

$$v(t)=\frac{\sqrt5}{5}\sin(2t-63.4^\circ)+\frac{37}{5}e^{-t}$$

در مدار خطی: پاسخ ورودی صفر یک تابع خطی حالت اولیه است ولی این ویژگی در مدارهای غیرخطی ممکن است وجود نداشته باشد:

$$v'(t)=v_0'e^{-\frac{t}{\tau}},\ v''(t)=v_0''e^{-\frac{t}{\tau}}\Rightarrow kv'(t)=kv_0'e^{-\frac{t}{\tau}}\ ,\ v'(t)+v''(t)=(v_0'+v_0'')e^{-\frac{t}{\tau}}$$

مثال: در مدار روبرو $v(t)$ را بدست آورید. ($v(0^-)=5$, $i_R=v^3$)



$$i_R+i_C=0\Rightarrow 1\frac{dv}{dt}+v^3=0\Rightarrow\frac{dv}{v^3}=-dt\Rightarrow-\frac{1}{2v^2}\Big|_{v(0)}^{v(t)}=-t$$

$$-\frac{1}{2v^2(t)}+\frac{1}{50}=-t$$

مشاهده می‌شود با دو برابر شدن شرایط اولیه $v(t)$ دو برابر نمی‌شود!

تذکر: پاسخ حالت صفر خطی است.

$$a\frac{d^2v}{dt^2}+b\frac{dv}{dt}+cv=i(t)$$

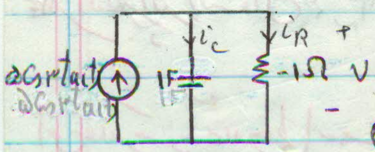
$$a\frac{d^2(\alpha v)}{dt^2}+b\frac{d(\alpha v)}{dt}+c(\alpha v)=\alpha i(t)$$

$$a\frac{d^2(v_1+v_2)}{dt^2}+b\frac{d(v_1+v_2)}{dt}+c(v_1+v_2)=i_1+i_2$$

$$\Rightarrow Z(i_1+i_2)=Z(i_1)+Z(i_2)$$

تذکر: پاسخ کامل خاصیت خطی بودن را ندارد.

مثال: در مدار روبرو پاسخ حالت صفر را بدست آورید. آیا حالت دائمی سینوسی وجود دارد؟ شرایط اولیه را طوری طرح کنید که پاسخ دائمی سینوسی وجود داشته باشد.



$$t>0 \Rightarrow i_S=i_R+i_C \Rightarrow -v+\frac{dv}{dt}=5\cos 3t$$

$$\Rightarrow (D-1)=0 \Rightarrow D=1 \Rightarrow v_n=Ae^{t}$$

$$v_f=\frac{1}{D-1}5\cos3t=\frac{5(D+1)}{D^2-1}\cos3t=\frac{5(D+1)}{-9-1}\cos3t=-\frac{1}{2}(-3\sin3t+\cos3t)$$

$$v(t)=Ae^{t}+\frac{3}{2}\sin3t-\frac{1}{2}\cos3t \xrightarrow[v(0)=0]{\text{حالت صفر}} 0=A+0-\frac{1}{2} \Rightarrow A=\frac{1}{2}$$

$$v(t)=\frac{1}{2}e^{t}+\frac{3}{2}\sin3t-\frac{1}{2}\cos3t \xrightarrow[\text{مثال ۲-۳}]{\text{تغییر}} v(t)=\frac{1}{2}e^{t}+\frac{\sqrt{10}}{2}\sin(3t-18.43^\circ)$$ مسئله حل شود

به دلیل صفر نشدن پاسخ گذرای حالت ماندگار (دائمی) سینوسی نمی‌شود. مهم است:

$$v(0^-)=A-\frac{1}{2}\xrightarrow{A=0}v(0^-)=v(0^+)=-\frac{1}{2} \quad \text{و} \quad v(t)=\frac{\sqrt{10}}{2}\sin(3t-18.43^\circ)$$

یعنی اگر شرایط اولیه خازن $v(0^-)=-\frac{1}{2}$ باشد پاسخ دائمی سینوسی خواهد بود.

خاصیت تغییرناپذیری با زمان در سیستم‌های LTI :

اگر پاسخ صفری $i_0(t)$ (صفری یعنی مدار صفر وارد شده است) را $v_0(t)$ باشد تعریف می‌کنیم

$$v_0(t) \triangleq Z_0(i_0(t))$$

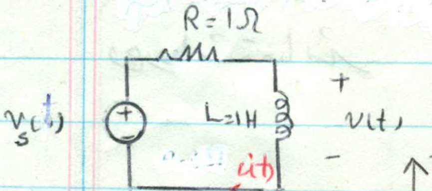
حال اگر ورودی $i(t-T)$ باشد (یعنی ورودی با تأخیر T وارد شود) داریم:

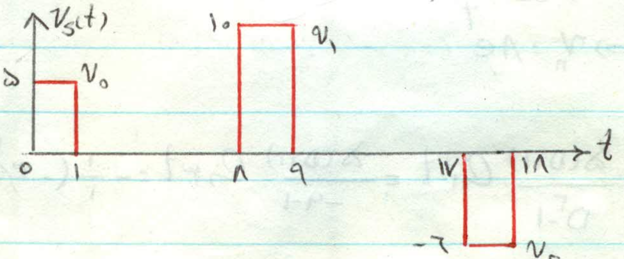
$$v_T(t) = Z_0(i_T) = Z_0(i(t-T)) = v_0(t-T)$$

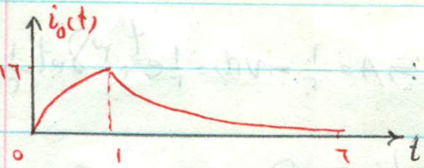
عملگر انتقال: $T_T(f(t)) \triangleq f(t-T) \Rightarrow T_T(f+g) = T_T(f) + T_T(g) \ , \ T_T(\alpha f) = \alpha T_T(f)$

این عملگر خطی است همچنین: $T_T(Z_0(i)) = Z_0(T_T(i))$

مثال: در مدار روبرو $i(t)$ را بدست آورید.







پاسخ این مدار به اولین پالس در مثال ۱۰-۸ بدست آوردیم:

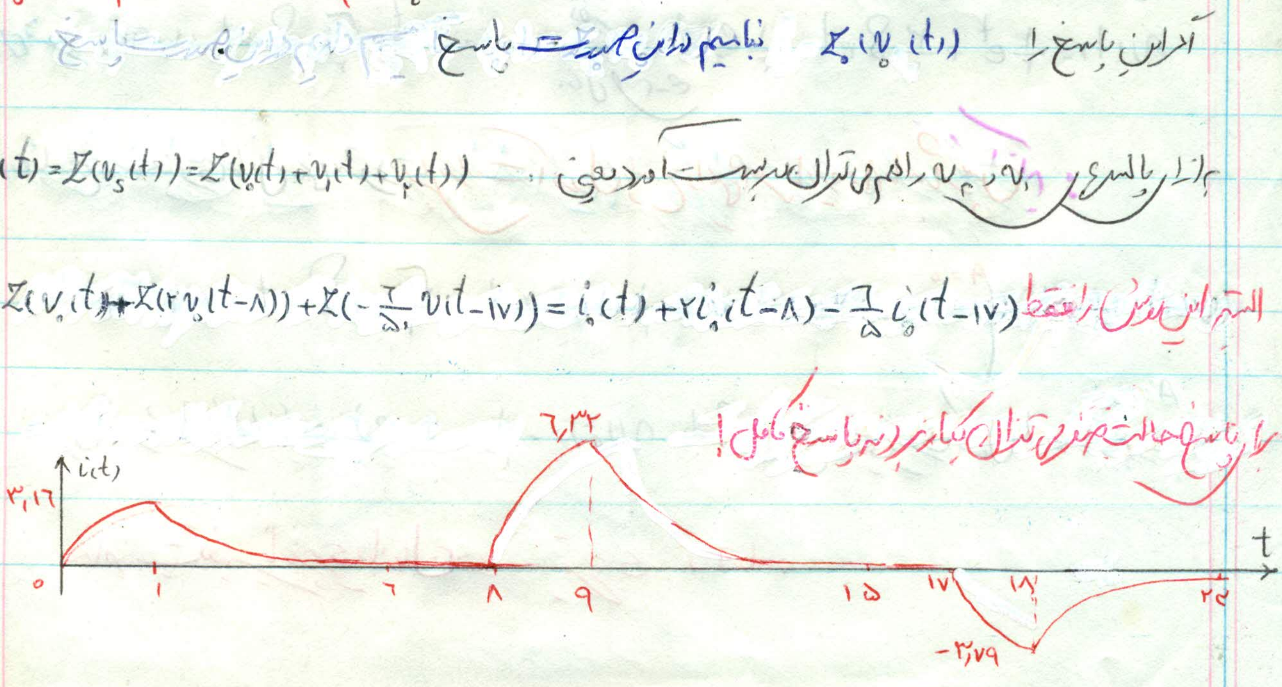
اگر این پاسخ را $Z_0(v_0(t))$ بنامیم داریم پاسخ

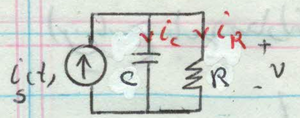
حال با استفاده از v_1 و v_2 را هم می‌توان بدست آورد یعنی:

$$i(t) = Z(v_s(t)) = Z(v_0(t)+v_1(t)+v_2(t))$$

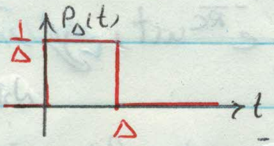
$$= Z(v_0(t)) + Z(2v_0(t-8)) + Z(-\frac{6}{5}v_0(t-17)) = i_0(t) + 2i_0(t-8) - \frac{6}{5}i_0(t-17)$$

البته این روش را فقط برای پاسخ حالت صفر می‌توان بکار برد نه پاسخ کامل!





پاسخ ضربه: اگر $i_s(t)=\delta(t)$ و $v(0^-)=0$ ، $v(t)$ را بدست آورید.



روش اول: فرض کنیم ورودی $P_\Delta(t)$ باشد. $\delta(t)=\lim_{\Delta\to 0} P_\Delta(t)$

$$0<t<\Delta \Rightarrow v_1(t)=Ae^{-\frac{t}{RC}}+B \Rightarrow v_1(+\infty)=\frac{R}{\Delta}=B$$

$$v_1(0^+)=A+B=v_1(0^-)=0 \Rightarrow A=-B=-\frac{R}{\Delta} \Rightarrow v_1(t)=\frac{R}{\Delta}\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right),\quad 0<t<\Delta$$

$$v_1(\Delta^-)=\frac{R}{\Delta}\left(1-e^{-\frac{\Delta}{RC}}\right)=v_1(\Delta^+)$$

$$t>\Delta \Rightarrow v_1(t)=A_1e^{-\frac{t}{RC}} \Rightarrow v_1(\Delta^+)=A_1e^{-\frac{\Delta}{RC}}=\frac{R}{\Delta}\left(1-e^{-\frac{\Delta}{RC}}\right) \Rightarrow A_1=e^{\frac{\Delta}{RC}}\times\frac{R}{\Delta}\left(1-e^{-\frac{\Delta}{RC}}\right)$$

$$\Rightarrow v_1(t)=\frac{R}{\Delta}\left(1-e^{-\frac{\Delta}{RC}}\right)e^{-\frac{t-\Delta}{RC}},\quad \Delta<t$$

$$v(t)=\lim_{\Delta\to 0} v_1(t)=\lim_{\Delta\to 0}\frac{R\left(1-e^{-\frac{\Delta}{RC}}\right)e^{-\frac{t-\Delta}{RC}}}{\Delta}=Re^{-\frac{t}{RC}}\lim_{\Delta\to 0}\frac{1-e^{-\frac{\Delta}{RC}}}{\Delta}\overset{HoP}{=}Re^{-\frac{t}{RC}}\lim_{\Delta\to 0}\frac{+\frac{1}{RC}e^{-\frac{\Delta}{RC}}}{1}=\frac{1}{C}e^{-\frac{t}{RC}},\ t>0$$

در صورتی که شرایط اولیه صفر و ورودی ضربه باشد جواب را پاسخ ضربه می‌نامند و با $h(t)$ نمایش می‌دهند.

روش دوم

$$i_s=i_R+i_C \Rightarrow C\frac{dv}{dt}+\frac{v}{R}=\delta(t) \Rightarrow \int_{0^-}^{0^+}C\frac{dv}{dt'}dt'+\frac{1}{R}\underbrace{\int_{0^-}^{0^+}v(t')dt'}_{0}=\int_{0^-}^{0^+}\delta(t')dt'$$

زیرا $v(t)$ کران دار است در صورتی که کران دار نبود تساوی برقرار نمی‌باشد.

$$\Rightarrow C\int_{v(0^-)}^{v(0^+)}dv=1 \Rightarrow C\left(v(0^+)-\cancel{v(0^-)}\right)=1$$

$$\Rightarrow v(0^+)=\frac{1}{C}\xrightarrow{h(t)=v(t)=Ae^{-\frac{t}{RC}}} h(t)=v(t)=\frac{1}{C}e^{-\frac{t}{RC}},\ t>0$$

روش سوم

$$C\frac{dv}{dt}+\frac{v}{R}=\delta(t),\quad v(0^-)=0 \Rightarrow \left(CD+\frac{1}{R}\right)v=\delta(t)$$

$$CD+\frac{1}{R}=0 \Rightarrow D=-\frac{1}{RC} \Rightarrow h(t)=Ae^{-\frac{t}{RC}}u(t)$$

این پاسخ باید در معادلهٔ دیفرانسیل صدق کند پس:

$$\frac{dv(t)}{dt}=\frac{dh(t)}{dt}=Ae^{-\frac{t}{RC}}\delta(t)-\frac{A}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}u(t)=A\delta(t)-\frac{A}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}u(t)$$ در معادله قرار می‌دهیم

$$CA\delta(t)-\cancel{\frac{A}{R}e^{-\frac{t}{RC}}u(t)}+\cancel{\frac{A}{R}e^{-\frac{t}{RC}}u(t)}=\delta(t)\Rightarrow CA=1\Rightarrow A=\frac{1}{C}\Rightarrow h(t)=\frac{1}{C}e^{-\frac{t}{RC}}u(t)$$

$$h(t)=\frac{ds}{dt}\Longleftrightarrow s(t)=\int_{-\infty}^{t}h(t')dt'$$ توجه: پاسخ ضربه مشتق پاسخ پله است

$$P_\Delta(t)=\frac{1}{\Delta}(u(t)-u(t-\Delta))\Rightarrow h_\Delta(t)=Z(P_\Delta(t))=Z(\frac{1}{\Delta}u(t)-\frac{1}{\Delta}u(t-\Delta))$$

$$=\frac{1}{\Delta}Z(u(t))-\frac{1}{\Delta}Z(u(t-\Delta))=\frac{1}{\Delta}s(t)-\frac{1}{\Delta}s(t-\Delta)=\frac{s(t)-s(t-\Delta)}{\Delta}$$

$$h(t)=\lim_{\Delta\to 0}h_\Delta(t)=\lim_{\Delta\to 0}\frac{s(t)-s(t-\Delta)}{\Delta}=\frac{ds}{dt}$$

روش دوم: پاسخ پله را بدست می‌آوریم $(i_s(t)=u(t))$:

$$(CD+\frac{1}{R})v=u(t)\xrightarrow{t>0}(CD+\frac{1}{R})v=1\Rightarrow s(t)=Ae^{-\frac{t}{RC}}+B$$

$$S(0^+)=v(0^+)=v(0^-)=0=A+B,\quad S(+\infty)=B=R\Rightarrow A=-R$$

$$\Rightarrow s(t)=R(1-e^{-\frac{t}{RC}}),\quad t>0$$

پاسخ ضربه:

$$h(t)=\frac{ds(t)}{dt}=\frac{1}{C}e^{-\frac{t}{RC}},\quad t>0$$

مثال: در مدارهای زیر در هر حالت $v(t)$ را بدست آورید: $(v(0^-)=1$ ولت$)$

الف) $R(t)=\frac{1}{1+0.5\cos t}$ ب) $i_R=v_R^2$

الف)

$$C\frac{dv}{dt}+\frac{v}{R}=0\Rightarrow\frac{dv}{dt}+(1+0.5\cos t)v=0\Rightarrow\frac{dv}{v}=-(1+0.5\cos t)dt$$

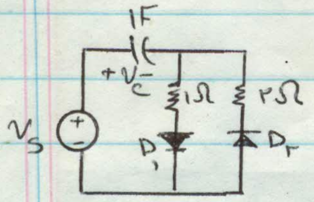
$$\ln v(t)=-t-0.5\sin t+C\Rightarrow\ln(v(0^+))=0+C\Rightarrow C=0\Rightarrow v(t)=e^{-(t+0.5\sin t)},\quad t>0$$

ب) $C\frac{dv}{dt}+i_R=0 \Rightarrow \frac{dv}{dt}+v^2=0 \Rightarrow \frac{dv}{-v^2}=dt \Rightarrow \frac{1}{v}=t+C$

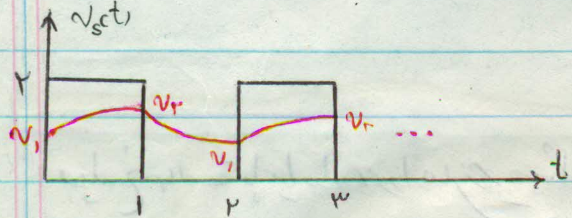
$$\frac{1}{v(0)}=0+C \Rightarrow C=1 \Rightarrow \frac{1}{v}=t+1 \Rightarrow v=\frac{1}{t+1} \qquad t\geq 0$$

مثال: مدار را با ODE حل کنید و جواب را مقایسه کنید.

مثال: در مدار روبرو $v_c(t)$ را در حالت پایدار بدست آورید.



در $0<t<1$ (D_1 روشن و D_2 خاموش) $T=RC=1$



$v_c(0^-)=v_c(0^+)=v_1$ و $v_c(+\infty)=2$ و $v_c(t)=Ae^{-t}+B$

$v_c(+\infty)=B=2$ و $v_c(0^+)=v_1=A+B \Rightarrow A=v_1-2$

$$v_c(t)=(v_1-2)e^{-t}+2, \quad 0<t<1 \Rightarrow v_c(1^-)=(v_1-2)e^{-1}+2=v_c(1^+)=v_2 \quad \text{I}$$

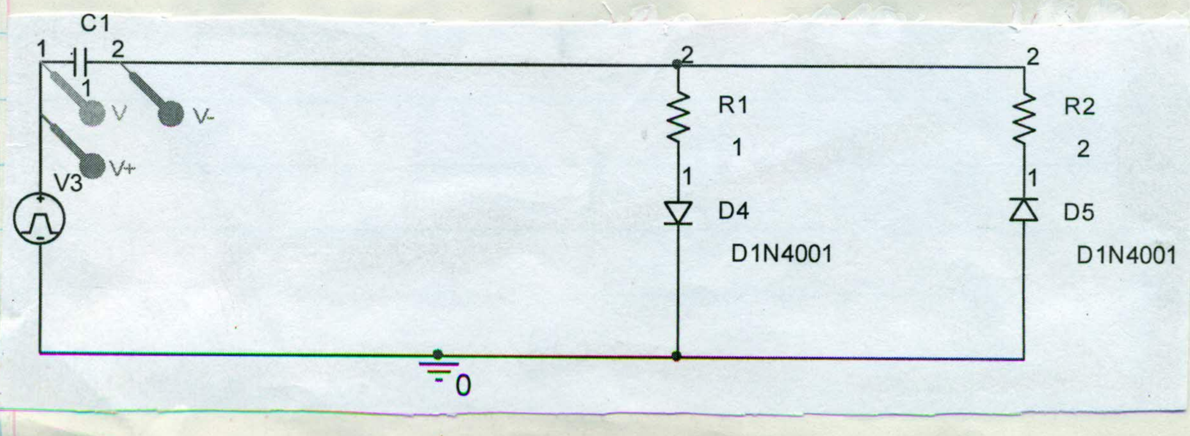
$1<t<2 \Rightarrow$ D_1=خاموش و D_2=روشن و $v_c(t)=A_1e^{-\frac{t}{2}}+B_1$

$$v_c(+\infty)=B_1=0 \text{ و } v_c(1^+)=A_1e^{-\frac{1}{2}}+B_1=v_2 \Rightarrow A_1=e^{\frac{1}{2}}v_2 \Rightarrow v_c(t)=v_2e^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{t}{2}},$$

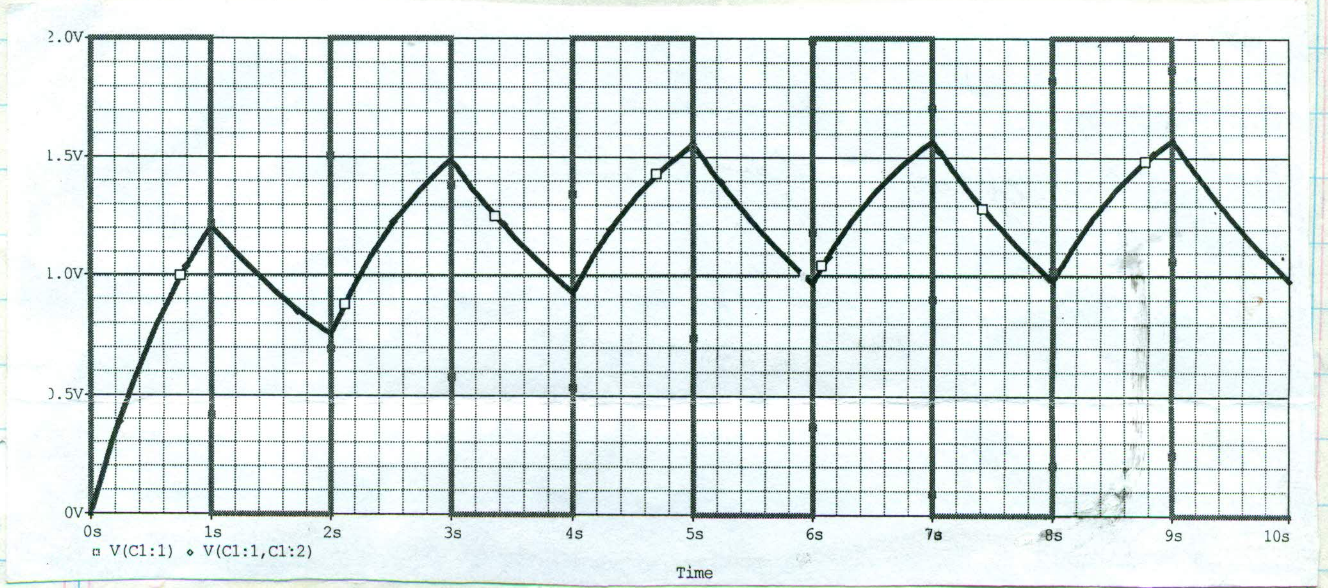
$$v_c(2^-)=v_c(2^+)=v_1=v_2e^{+\frac{1}{2}}e^{-1}=v_2e^{-\frac{1}{2}} \xrightarrow{\text{I}} (v_2e^{-\frac{1}{2}}-2)e^{-1}+2=v_2$$

$$\Rightarrow v_2=\frac{2-2e^{-1}}{1-e^{-\frac{3}{2}}}=1.62 \Rightarrow v_1=v_2e^{-\frac{1}{2}}=0.97$$

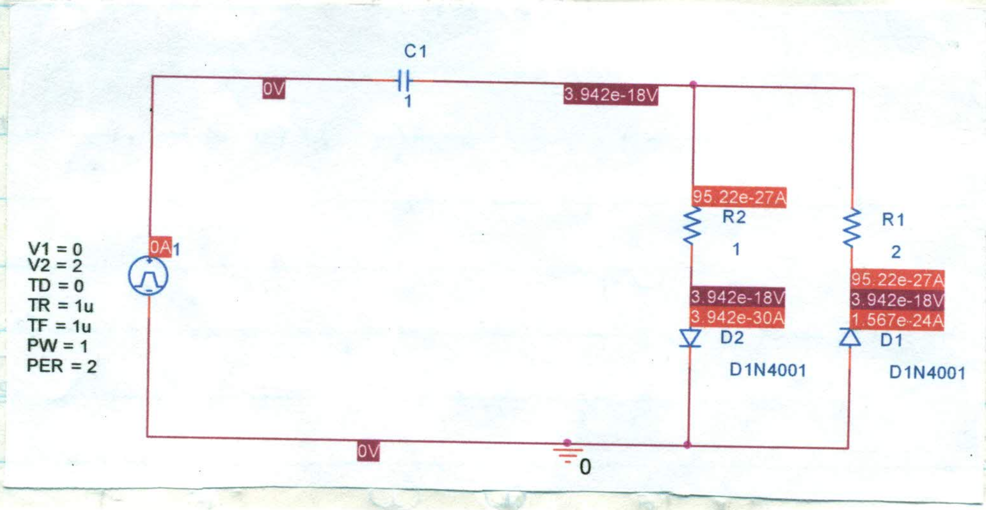
مثال. شکل فوق را با ORCAD رسم نمایید.

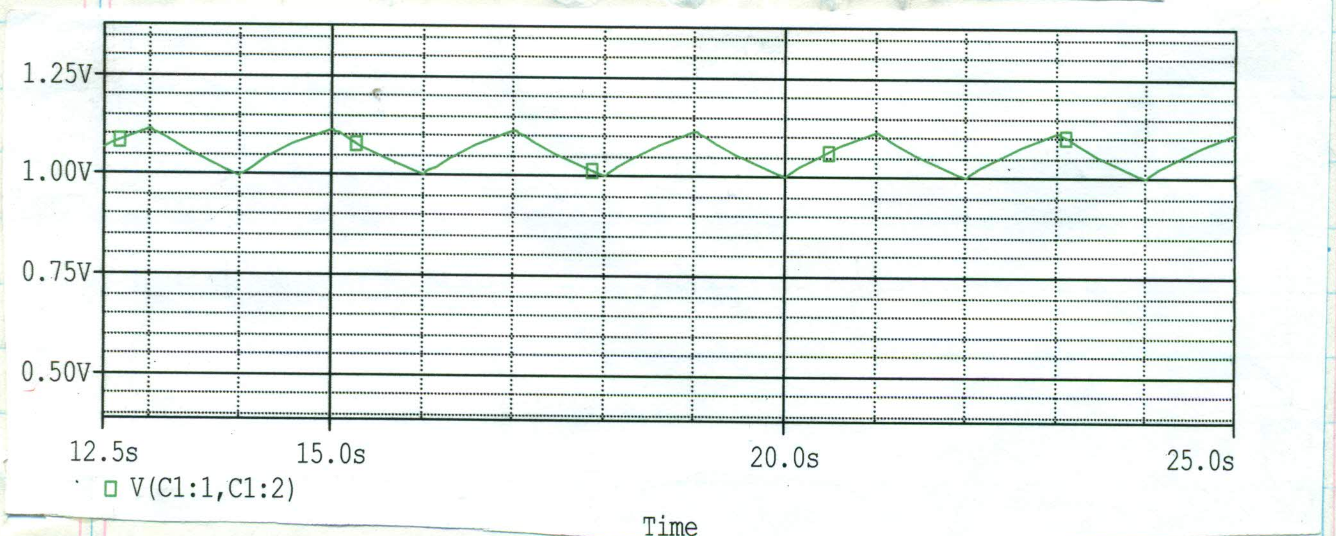


پاسخ مدار در حالت گذرا تا رسیدن به حالت پایدار به نمودار زیر ملاحظه می کنید.



و پاسخ حالت پایدار را در نمودار زیر مشاهده می نمایید.

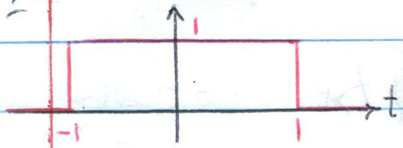




پایان

ص ۹

سؤال: حاصل $\delta(1-t^2)$ را بدست آورید. حل: اگر نمودار $u(1-t^2)$ را در نظر بگیریم



$u(1-t^2)=u(t+1)-u(t-1)$ به صورت مقابل است

از رابطه فوق مشتق می گیریم: $-2t\,\delta(1-t^2)=\delta(t+1)-\delta(t-1) \Rightarrow \delta(1-t^2)=\frac{1}{-2t}\delta(t+1)+\frac{1}{2t}\delta(t-1)$

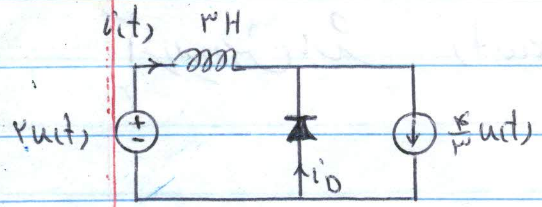
$$\xrightarrow{f(t)\delta(t-\alpha)=f(\alpha)\delta(t-\alpha)} \frac{1}{2}\delta(t+1)+\frac{1}{2}\delta(t-1)$$

$t=1 \Rightarrow \delta(0)=\frac{1}{2}\delta(2)+\frac{1}{2}\delta(0)=0+\frac{1}{2}\delta(0) \Rightarrow \frac{1}{2}\delta(0)=0 \Rightarrow \delta(0)=0$!!!

جواب: چون $\delta(0)=\infty$ کم کردن آن از خودش برابر صفر نمی شود و این راه حل نادرست است.

با توجه به اثبات بالا می توان ثابت کرد: $\delta((t-a)(t-b))=\frac{1}{|b-a|}(\delta(t-a)-\delta(t-b))$

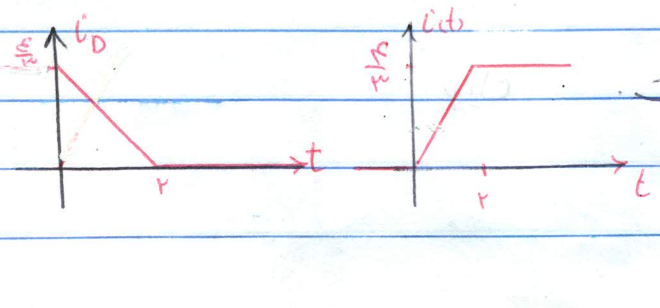
سؤال: در مدار زیر $i(t)$ را رسم کنید. $(i(0)=0)$



فرض می کنیم دیود روشن باشد

$-2u(t)+3\frac{di}{dt}=0 \Rightarrow \frac{di}{dt}=\frac{2}{3}u(t) \Rightarrow i=\frac{2}{3}r(t) \Rightarrow i(t)+i_D=\frac{4}{3}u(t)$

$\Rightarrow i_D=\frac{4}{3}u(t)-i(t)=\frac{4}{3}u(t)-\frac{2}{3}r(t) \xrightarrow{t>0} \frac{4}{3}-\frac{2}{3}t>0 \Rightarrow \frac{4}{3}>\frac{2}{3}t \Rightarrow 2>t$

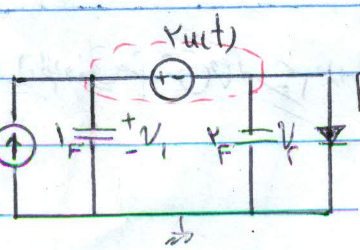


یعنی این حالت تا $t=2$ درست است

در صورتی که دیود خاموش باشد در این حالت می‌ماند و این ($i(t)=\frac{4}{3}u(t)$)

حالت در $t>2$ اتفاق می‌افتد.

حل: $v_1(t)$ را بدست آورید ($v_1(0)=v_2(0)=0$)



حل: فرض کنیم دیود خاموش باشد. در این گره KCL می‌نویسیم

$$-u(t)+\frac{dv_1}{dt}+2\frac{dv_2}{dt}=0$$

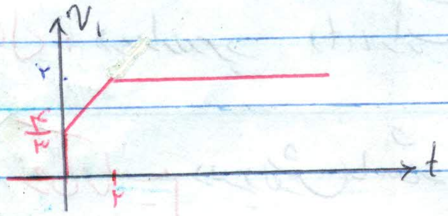
$$-v_1+2u(t)+v_2=0 \Rightarrow v_2=v_1-2u(t)$$

$$\Rightarrow \frac{dv_1}{dt}=u(t)-2\frac{d}{dt}\left(v_1-2u(t)\right)$$

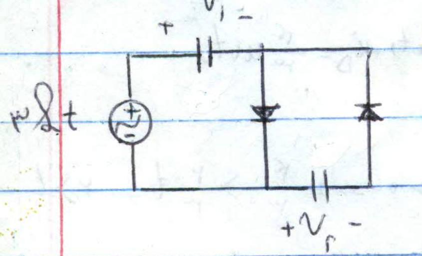
$$\Rightarrow 3\frac{dv_1}{dt}=u(t)+4\delta(t) \Rightarrow v_1(t)=\frac{1}{3}r(t)+\frac{4}{3}u(t) \Rightarrow v_2=\frac{1}{3}r(t)-\frac{2}{3}u(t) \not> 0$$

$$\frac{1}{3}t-\frac{2}{3} \not> 0 \Rightarrow t<2$$

اگر دیود روشن باشد $v_1(t)=2u(t)$



حل: v_1 و v_2 را بدست آورید ($v_1(0)=v_2(0)=0$)

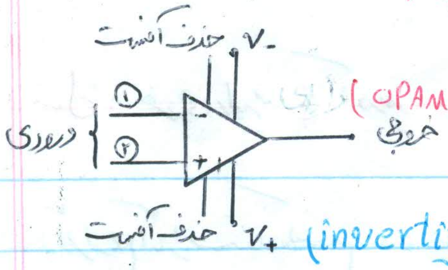


پایان

ص ۱

۲

فصل ششم تست فصل *۳ جبدلد



تقویت کننده عملیاتی (OPAMP = operational Amplifier)

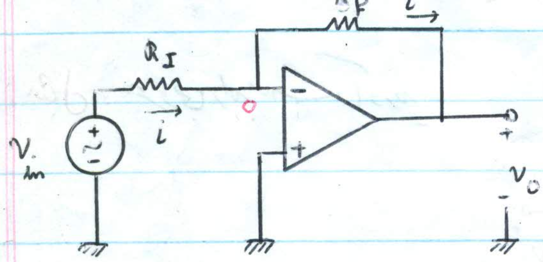
در این شکل ورودی نمایش می دهند که در آن ۱ پایانه وارون ساز (inverting)

۲ پایانه ناوارون ساز (noninverting) و v_- و v_+ تغذیه آن می باشد

در یک OPAMP ایده آل : ۱ جریان ورودی صفر است.

۲- بین دو پایانه (۱ و ۲) هیچ اختلاف پتانسیلی وجود ندارد. (در عمل جریان ورودی و اختلاف پتانسیل بین دو پایانه وجود دارد و بسیار اندک است (از این رو از آن می توان صرف نظر کرد.)

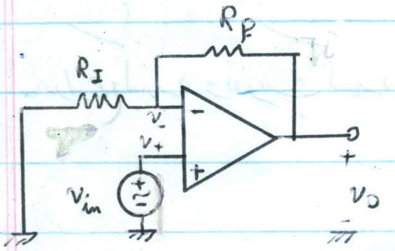
مثال - v_o را بدست آورید



گره ۰ $\dfrac{0-v_{in}}{R_I}+\dfrac{0-v_o}{R_f}=0 \Longrightarrow v_o=-\dfrac{R_f}{R_I}v_{in}$

این مدار ولتاژ ورودی را وارون و تقویت می کند (تقویت کننده)

مثال : خروجی را بدست آورید

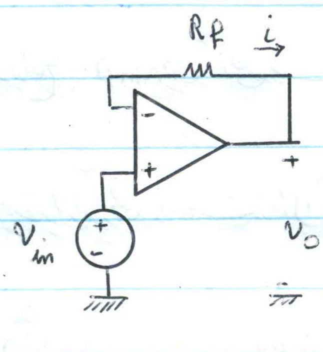


$v_-=v_+=v_{in}$

$$\frac{v_{in}}{R_I}+\frac{v_{in}-v_o}{R_f}=0 \Longrightarrow v_o=\left(1+\frac{R_f}{R_I}\right)v_{in}$$

این مدار ولتاژ ورودی را بدون تغییر جهت تقویت می کند

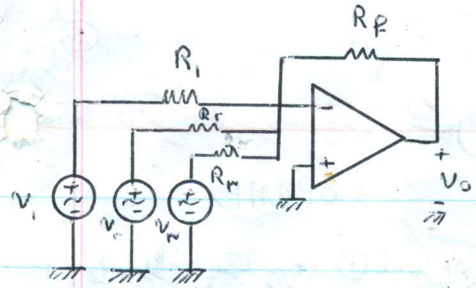
مثال : v_o را بدست آورید.



$i=0$, $v_-=v_+=v_{in}=v_o$

در این مدار علیرغم برابری ورودی و خروجی این مدار مهم است زیرا که مشخص است

این مدار برای حفاظت سیستم بکار می رود (بافر)

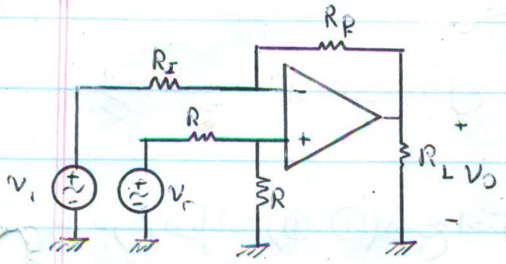


مثال: خروجی را بدست آورید.

از جمع آثار استفاده کنیم:

جمع کننده

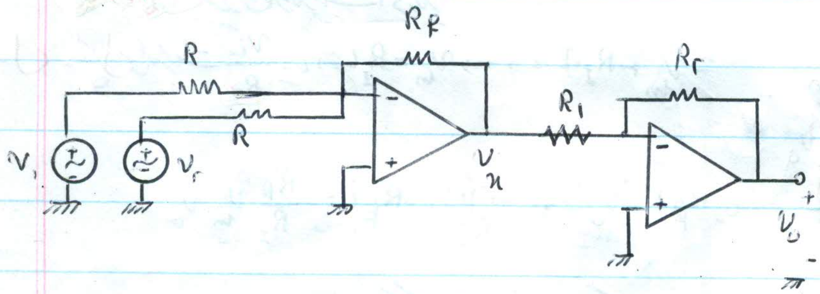
$$v_{o_1} = -\frac{R_f}{R_1}v_1 , \quad v_{o_2} = -\frac{R_f}{R_2}v_2 , \quad v_{o_3} = -\frac{R_f}{R_3}v_3 \Rightarrow v_o = -\frac{R_f}{R_1}v_1 - \frac{R_f}{R_2}v_2 - \frac{R_f}{R_3}v_3$$



مثال: خروجی را بدست آورید.

$$v_+ = \frac{R}{R+R}v_2 = \frac{v_2}{2} = v_-$$

$$\frac{v_1 - v_-}{R_I} = \frac{v_- - v_o}{R_f} \Rightarrow v_o = \frac{-R_f}{R_I}v_1 + \left(1+\frac{R_f}{R_I}\right)v_- = \frac{-R_f}{R_I}v_1 + \left(1+\frac{R_f}{R_I}\right)\frac{v_2}{2}$$

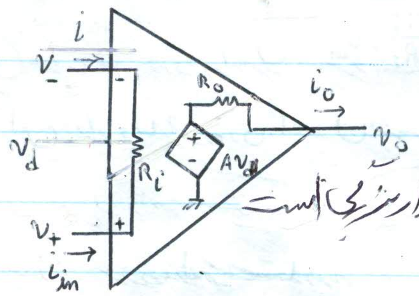


مثال: خروجی را بدست آورید.

$$\left.\begin{aligned} v_x &= -\frac{R_f}{R}v_1 - \frac{R_f}{R}v_2 \\ v_o &= -\frac{R_2}{R_1}v_x \end{aligned}\right\} \Rightarrow v_o = \frac{R_f R_2}{R R_1}(v_1 + v_2)$$

مدار جمع کننده و تقویت کننده

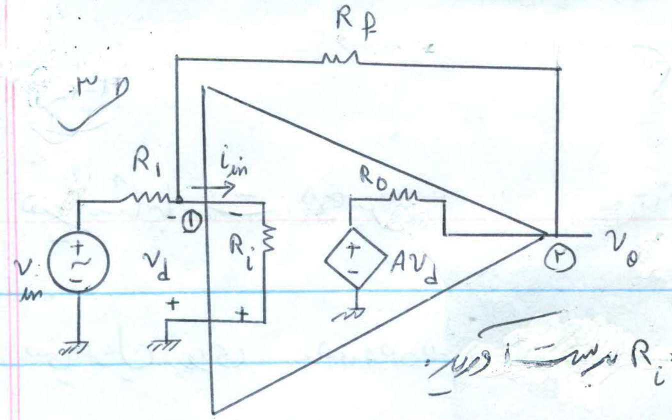
مدل دقیق تر برای OPAMP: مدار OPAMP



در انتهی (غیر ایده‌آل) بجهت بهره بیست که کنترل A مقدار زیادی است

و بهره ولتاژ حلقه باز می‌باشد. در OPAMP 741 ، $R_i = 2M\Omega$ ، $R_o = 75\Omega$ ، جریان ورودی $i = 80nA$

و $A = 2\times10^5$ می‌باشد.



مثال: مقدار v_o را با $A=2\times10^5$ ، $R_i = 2M\Omega$ ، $R_o = 75\Omega$ ، $R_f = 47k\Omega$ ، $R_1 = 4.7k\Omega$ بدست آورید.

گره ①: $\frac{-v_d - v_{in}}{R_1} + \frac{-v_d - v_o}{R_f} - \frac{v_d}{R_i} = 0$ (A) و گره ②: $\frac{v_o + v_d}{R_f} + \frac{v_o - Av_d}{R_o} = 0$ (B)

(A) $\times 47\times10^3 \Rightarrow -10v_d - 10v_{in} - v_d - v_o - 0.0235v_d = 0 \Rightarrow v_d = -0.907v_{in} - 0.0907v_o$

B $\Rightarrow (1+\frac{R_f}{R_o})v_o = -v_d + A\times\frac{R_f}{R_o}v_d \Rightarrow 627.67v_o = (-1+2000000)v_d \Rightarrow v_o = 3186.386v_d \xRightarrow{B}$

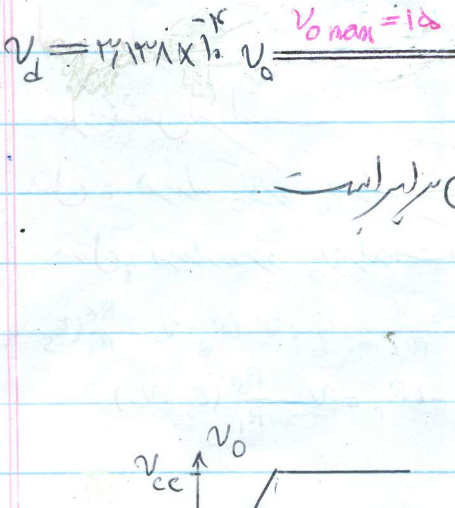
$\Rightarrow v_o = 3186.386(-0.907v_{in} - 0.0907v_o) \Rightarrow v_o = -2890.05v_{in} - 289.005v_o$

$v_o = -9.9655v_{in} \simeq -10v_{in}$

$v_d = 3.138\times10^{-4}v_o \xrightarrow{v_{o\,max}=15} v_{d\,max} \simeq 0.005v \simeq 0$ ، $i_{in} = \frac{-v_d}{R_i} = -0.005\times0.5\times10^{-6} \simeq 0$

یعنی در حالت غیر ایده‌آل هم نتایج با دقت بسیار خوب با ایده‌آل برابر است

اشباع:



منحنی OPAMP که مقدار $v_o - v_d$ به صورت روبرو است:

یعنی خروجی از V_{CC} بیشتر نمی‌شود (حدود ۲۰ ولت)

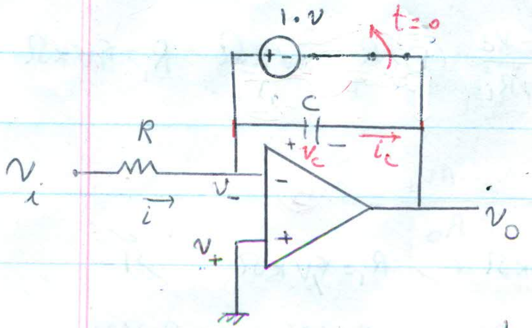
از طرفی (حلقه باز): $v_o = Av_d \Rightarrow v_d \simeq \frac{v_o}{A}$

در حالت ماکزیمم $v_{o\,max} = V_{CC}$ و $A \simeq 10^5$ پس $v_d = 10^{-5}V_{CC} \simeq 0$ یعنی حالت ایده‌آل و غیر ایده‌آل)

$i_{in} = \frac{v_d}{R_i} \simeq 0$ تقریباً مشابه است. همچنین

یعنی جریان ورودی OPAMP هم تقریباً صفر است.

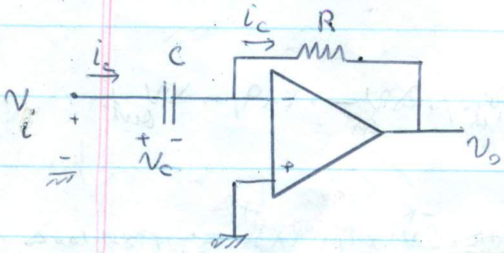
مثال: در مدار روبرو $v_0(t)$ را بدست آورید.



$$v_- = v_+ = 0 \Rightarrow i = i_C = \frac{v_i}{R} \Rightarrow v_C = v_C(0^+) + \frac{1}{C}\int_0^t i_C\,dt \xrightarrow[v_C + v_0 = 0 \Rightarrow v_0 = -v_C]{v_C(0^+) = +10} v_0 = -10 - \frac{1}{C}\int_0^t \frac{v_i}{R}\,dt$$

(انتگرال‌گیر)

مثال: در مدار روبرو $v_0(t)$ را بدست آورید.

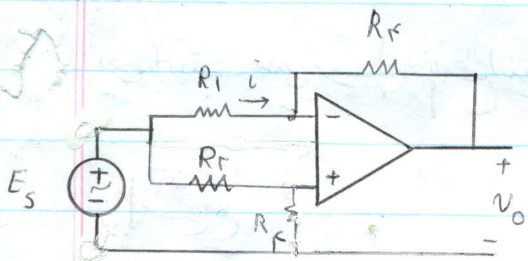


$$v_- = v_+ = 0 \Rightarrow v_0 = -i_C R = -C\frac{dv_C}{dt}R \quad (A)$$

$$-v_i + v_C = 0 \Rightarrow v_i = v_C \xrightarrow{(A)} v_0 = -RC\frac{dv_i}{dt}$$

این مدار مشتق‌گیر است.

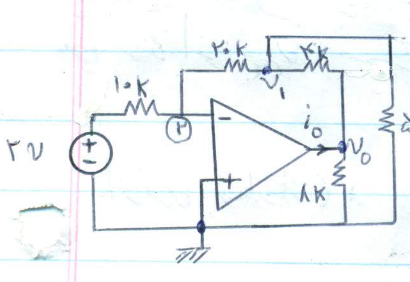
مثال: در مدار روبرو v_0 را بدست آورید.



$$v_+ = v_- = \frac{E_S R_4}{R_3 + R_4} \quad , \quad i = \frac{E_S - v_-}{R_1} \Rightarrow v_0 = v_- - iR_4 = v_- - \frac{R_4}{R_1}(E_S - v_-)$$

$$v_0 = \left(1 + \frac{R_4}{R_1}\right)v_- - \frac{R_4}{R_1}E_S = \left[\left(1 + \frac{R_4}{R_1}\right)\left(\frac{R_4}{R_3 + R_4}\right) - \frac{R_4}{R_1}\right]E_S$$

مثال- در مدار روبرو i_0 را بدست آورید.

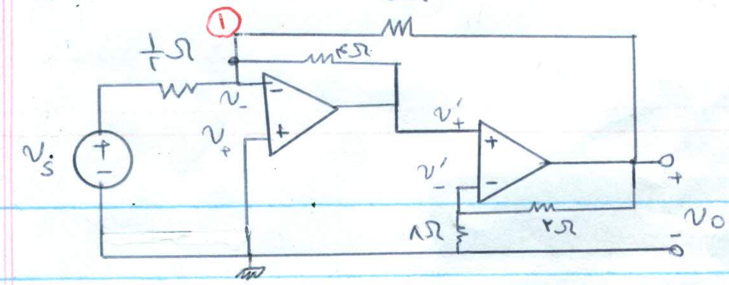


$$v_- = v_+ = 0$$

گره (2): $$\frac{0-2}{10} + \frac{0 - v_1}{20} = 0 \Rightarrow v_1 = -4\ V \quad , \quad \frac{v_1 - 0}{20} + \frac{v_1 - v_0}{4} + \frac{v_1}{5} = 0 \Rightarrow 10v_1 = 5v_0$$

$$v_0 = 2v_1 = -8\ V \quad , \quad \frac{v_0 - 0}{8} + \frac{v_0 - v_1}{4} - i_0 = 0 \Rightarrow i_0 = -1 - 1 = -2\ mA$$

مثال: ولتاژ خروجی v_o را بدست آورید.

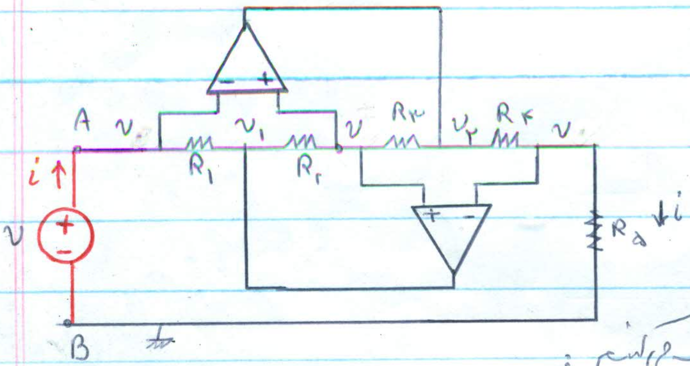


$$v'_- = \frac{v_o \times ۸}{۸+۲} = ۰/۸\, v_o = v'_+ \quad , \quad v_- = v_+ = ۰ \Rightarrow ① \; \frac{۰ - v_s}{\frac{۱}{۲}} + \frac{۰ - ۰/۸ v_o}{۴} + \frac{۰ - v_o}{۵} = ۰$$

$$-۲v_s - ۰/۲ v_o - ۰/۲ v_o = ۰ \Rightarrow v_o = -\frac{۲}{۰/۴} v_s = -۵ v_s$$

مثال: مقاومت دیده شده در سرهای A و B

چیست؟



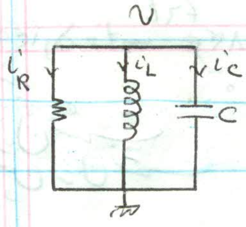
منبع v را در سر A و B قرار می‌دهیم و i را محاسبه می‌کنیم:

$$R_{eq} = \frac{v}{i} \quad , \quad v = R_5 i \Rightarrow R_{eq} = \frac{v}{i} = R_5$$

پایان

فصل هشتم

مدار موازی بدون منبع :



در مدار روبرو $v(t)$ را بدست آورید:

$$i_R+i_L+i_C=0 \Rightarrow \frac{v}{R}+\frac{1}{L}\int_0^t v\,dt+i_L(0^+)+C\frac{dv}{dt}=0 \xrightarrow{\text{مشتق}} C\frac{d^2v}{dt^2}+\frac{1}{R}\frac{dv}{dt}+\frac{1}{L}v=0$$

$$(CD^2+\frac{1}{R}D+\frac{1}{L})=0 \Rightarrow D=\frac{-1}{2RC}\pm\sqrt{(\frac{1}{2RC})^2-\frac{1}{LC}}=s_{1,2} \Rightarrow v(t)=Ae^{s_1t}+Be^{s_2t}$$

توضیح: $\alpha=\frac{1}{2RC}$ را فرکانس نپری یا ضریب میرایی نمایی و $\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$ را فرکانس تشدید

می گویند

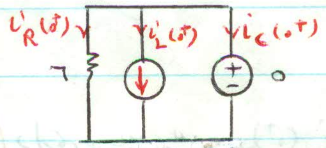
مثال: در مدار فوق اگر $v_C(0^-)=0$ ، $i_L(0^-)=-10A$ باشد و $R=6\Omega$ ، $L=7H$

و $C=\frac{1}{42}F$ ، $v(t)$ را بدست آورید

$$CD^2+\frac{1}{R}D+\frac{1}{L}=\frac{1}{42}D^2+\frac{1}{6}D+\frac{1}{7}=0 \Rightarrow D^2+7D+6=0 \Rightarrow D_1=-1, D_2=-6,\ v(t)=Ae^{-t}+Be^{-6t},\ t>0$$

$$v_C(0^-)=v_C(0^+)=0=A+B \Rightarrow A=-B \quad (1)$$

در $t=0^+$



$$i_R(0^+)=\frac{0}{6}=0 \Rightarrow i_C(0^+)=-i_L(0^+)=+10A=C\frac{dv}{dt}(0^+)$$

$$C\frac{dv(t)}{dt}=\frac{1}{42}(-Ae^{-t}-6Be^{-6t}) \xrightarrow{t=0^+} \frac{1}{42}(-A-6B)=10 \Rightarrow -5B=420 \Rightarrow B=-84 \Rightarrow A=84 \quad (2)$$

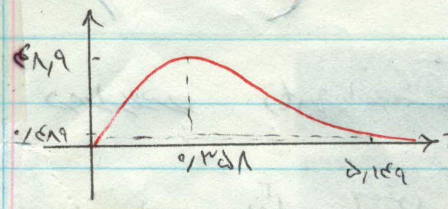
$$v(t)=84e^{-t}-84e^{-6t},\ t>0$$

حالت فوق میرا (رسم منحنی‌ها شرط نیست)

زمان نشست (زمانی که جواب به ۱٪ قدر مطلق مقدار ماکزیمم خود برسد) چند است؟

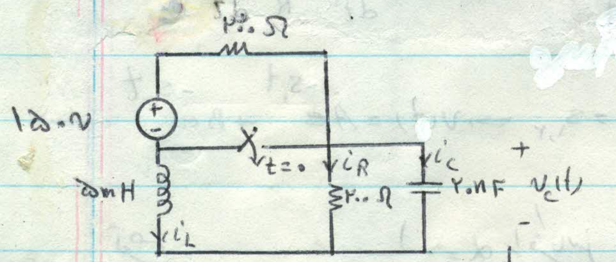
$$\frac{dv}{dt}=-84e^{-t}-84\times(-6)e^{-6t}=0 \Rightarrow (1-6e^{-5t})=0 \Rightarrow e^{-5t}=\frac{1}{6} \Rightarrow -5t=-1.79$$

$$t_{max}=0.358 \Rightarrow v_{max}(0.358)=48.9 \Rightarrow 0.01\,v_m=0.489=84e^{-t}-84e^{-6t} \Rightarrow t=5.149$$



پس زمان نشست ۵٫۱۴۹ ثانیه می‌باشد.

مثال: در مدار روبرو $v_c(t)$ را بدست آورید.



$$t>0 \Rightarrow i_C+i_R+i_L=0\ ,\ \frac{1}{5\times10^{-3}}\int_0^t v_c(t')dt'+i_L(0^+)=i_L(t)$$

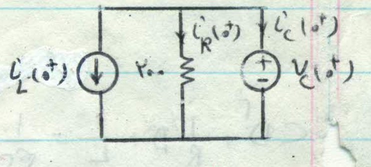
$$20\times10^{-9}\frac{dv_c}{dt}+\frac{v_c}{200}+200\int_0^t v_c(t')dt'+i_L(0^+)=0 \xrightarrow[\text{و تقسیم}]{\text{مشتق}} (D^2+2.5\times10^5D+10^{10})v=0$$

$$D^2+2.5\times10^5D+10^{10}=0 \Rightarrow D_1=-2\times10^5\ ,\ D_2=-5\times10^4 \Rightarrow v_c(t)=Ae^{-2\times10^5t}+Be^{-5\times10^4t}\ ,\ t>0$$

در $t=0^+$ داریم:

$$v_c(0^+)=A+B=v(0^-)\ ,\ \frac{dv_c}{dt}=-2\times10^5Ae^{-2\times10^5t}-5\times10^4Be^{-5\times10^4t}$$

$$\Rightarrow \frac{dv(0^+)}{dt}=-2\times10^5A-5\times10^4B$$



در $t=0^-$ خازن باز و سلف اتصال کوتاه است پس:

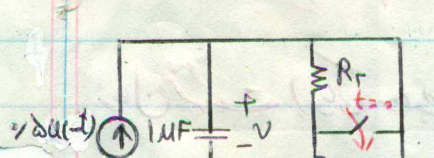
$$i_L(0^-)=-\frac{150}{500}=-0.3A=i_L(0^+)$$

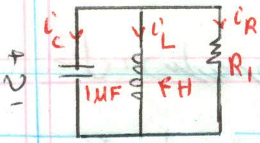
$$v_c(0^-)=200\times\frac{150}{500}=60=v_c(0^+)=A+B \quad \text{(I)}$$

$$i_R(0^+)=\frac{v_c(0^+)}{200}=\frac{60}{200}=0.3 \Rightarrow i_C(0^+)=C\frac{dv_c(0^+)}{dt}=-i_L(0^+)-i_R(0^+)=0.3-0.3=0$$

$$\Rightarrow \frac{dv_c(0^+)}{dt}=0=-2\times10^5A-5\times10^4B \xrightarrow{\text{I}} A=-20\ ,\ B=80 \Rightarrow v_c(t)=-20e^{-2\times10^5t}+80e^{-5\times10^4t}\ ,\ t>0$$

مثال: R_1، R_2 را طوری انتخاب کنید که پاسخ در $t>0$ میرای بحرانی و $v(0)=10$ ولت باشد. در این صورت $v(t)$ را بعد از 10^{-3} ثانیه بدست آورید.



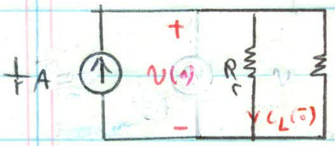


شرط اینکه ریشه ها حقیقی و مساوی باشند حالت را میرایی بحرانی می گویند

$$t>0 \Rightarrow i_R + i_L + i_C = 0 \Rightarrow C\frac{dv}{dt} + \frac{v}{R_1} + \frac{1}{L}\int_0^t v(t')dt' + i_L(0^+) = 0 \Rightarrow (10^{-6}D^2 + \frac{1}{R_1}D + \frac{1}{4})v = 0$$

$$\Rightarrow (4\times10^{-6}R_1D^2 + 4D + R_1)v = 0 \Rightarrow \Delta' = 4 - 4\times10^{-6}R_1^2 = 0 \Rightarrow R_1^2 = 10^6 \Rightarrow R_1 = 10^3\,\Omega = 1k\Omega$$

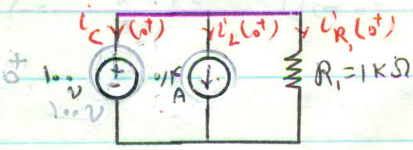
$$D = \frac{-2\pm0}{4\times10^{-6}\times R_1} = \frac{-1}{2\times10^{-3}} = -500 \Rightarrow v(t) = Ae^{-500t} + Bte^{-500t} \Rightarrow v(0^-) = v(0^+) = A = 100$$



$$v(0^+) = v(0^-) = \frac{1}{2}\times\frac{10^3\times R_2}{10^3+R_2} = 100 \Rightarrow R_2 = 250\,\Omega$$ در $t=0^-$: داریم

$$i_L(0^-) = i_{R_2}(0^-) = \frac{10^3}{1000+250}\times\frac{1}{2} = 0.4A = i_L(0^+)$$

$t=0^+$



$$i_{R_1}(0^+) = \frac{100}{1000} = 0.1A \Rightarrow i_C(0^+) = -i_L(0^+) - i_{R_1}(0^+) = -0.5A$$

$$i_C(0^+) = C\frac{dv}{dt}\Big|_{t=0^+} = 10^{-6}(-50000e^{-500t} + Be^{-500t} - 500Bte^{-500t})\Big|_{t=0^+} = -0.05 + B\times10^{-6} = -0.5$$

$$B = -45\times10^4 \Rightarrow v(t) = 100e^{-500t} - (45\times10^4)te^{-500t}\,,\quad t>0$$

$$v(10^{-3}) = 100e^{-\frac{1}{2}} - 45\times10^{-3}e^{-\frac{1}{2}}\times10^4 = -212.2$$ ولت

سوم : حالت زیر میرا - در صورتی که زیر رادیکال منفی شود دو ریشه معادله مشخصه مختلط شود

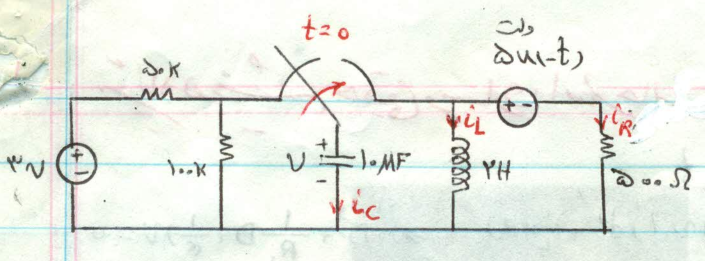
حالت را زیر میرا گویند و در این حالت پاسخ را می توان به صورت زیر ساده کرد. (از ص ۱-۹)

$$s_{1,2} = \frac{-1}{2RC} \pm \sqrt{(\frac{1}{2RC})^2 - \frac{1}{LC}} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -\alpha \pm j\omega_d$$

$$v(t) = e^{-\alpha t}(A_1e^{j\omega_d t} + A_2e^{-j\omega_d t}) = e^{-\alpha t}(A_1(\cos\omega_d t + j\sin\omega_d t) + A_2(\cos\omega_d t - j\sin\omega_d t))$$

$$= e^{-\alpha t}((A_1+A_2)\cos\omega_d t + (A_1-A_2)\sin\omega_d t) = e^{-\alpha t}(B_1\cos\omega_d t + B_2\sin\omega_d t) = Ae^{-\alpha t}\sin(\omega_d t + \theta)$$

مثال: در مدار زیر ، $v(1ms)$ ، $\frac{dv(0^+)}{dt}$ ، $\frac{d^2v(0^+)}{dt^2}$ و $\frac{d^3v(0^+)}{dt^3}$ را بدست آورید.



$$t=0^- \Rightarrow v(0^-)=\frac{3}{150}\times 100=2=v(0^+) \quad , \quad i_L(0^-)=\frac{5}{500}=0.01=i_L(0^+)$$

$$t=0^+ \Rightarrow \left.\begin{array}{l} i_C(0^+)+i_L(0^+)+i_R(0^+)=0 \\ i_L(0^+)=0.01 \ , \ i_R(0^+)=\frac{v(0^+)}{500}=\frac{2}{500}=0.004 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} i_C(0^+)=-0.01-0.004=-0.014A \\ i_C(0^+)=C\frac{dv(0^+)}{dt} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{dv(0^+)}{dt}=\frac{-0.014}{10^{-5}}=-1400$$

$$i_R(t)+i_C(t)+i_L(t)=0 \Rightarrow \frac{v}{500}+10^{-5}\frac{dv}{dt}+\frac{1}{2}\int_0^t v(t')dt'+i(0^+)=0$$

$$\Rightarrow 10^{-2}\frac{d^2v}{dt^2}+2\frac{dv}{dt}+5000v=0 \quad \text{I} \Rightarrow 10^{-2}D^2+2D+5000=0 \Rightarrow D=\frac{-1\pm\sqrt{1-5}}{10^{-2}}=-100\pm 200j$$

$$\Rightarrow v(t)=Ae^{-100t}\sin(200t+\theta) \xrightarrow{v(0^+)=2} A\sin\theta=2$$

$$\frac{dv}{dt}=-100Ae^{-100t}\sin(200t+\theta)+200Ae^{-100t}\cos(200t+\theta) \Rightarrow \frac{dv(0^+)}{dt}=-100A\sin\theta+200A\cos\theta=-1400 \xrightarrow{A\sin\theta=2}$$

$$\Rightarrow A\cos\theta=-6 \Rightarrow A^2\sin^2\theta+A^2\cos^2\theta=40 \Rightarrow A^2=40 \Rightarrow A=6.32 \Rightarrow \cos\theta=-0.95 \Rightarrow \theta=161.7^\circ$$

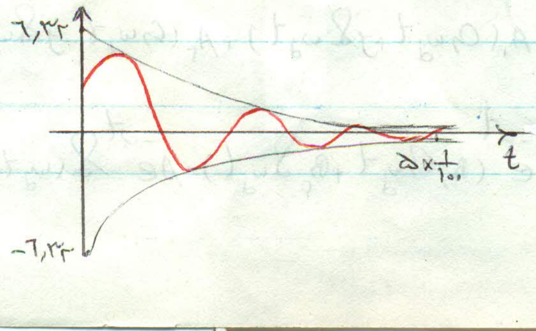
$$\Rightarrow v(t)=6.32e^{-100t}\sin(200t+161.7^\circ)$$

پاسخ سیستم زیرمیرا است

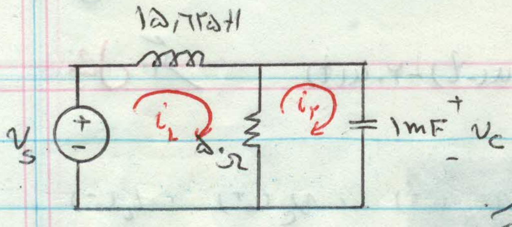
$$\text{I} \quad \frac{d^2v}{dt^2}+200\frac{dv}{dt}+50000v=0 \Rightarrow \frac{d^2v(0^+)}{dt^2}=-200\times(-1400)-50000\times 2=180000$$

$$\frac{d^3v}{dt^3}+200\frac{d^2v}{dt^2}+50000\frac{dv}{dt}=0 \Rightarrow \frac{d^3v(0^+)}{dt^3}=-200\times 180000-50000\times(-1400)$$

$$\frac{d^3v(0^+)}{dt^3}=34000000 \quad , \quad v(1ms)=6.32e^{-100\times 10^{-3}}\sin(\underbrace{200\times 10^{-3}}_{\text{رادیان}}+161.7^\circ)=0.688 \ \text{ولت}$$



مثال: در مدار شکل روبرو $v_s(t) = 10 + 20u(t)$



الف) $i_L(0^+)$ ، $v_C(0^+)$ ، $i_L(t)$ و $i_L(0.1\,s)$ را بیابید.

$v_s = 30$

$$t>0 \Rightarrow \begin{cases} -v_s + 15.625\dfrac{di_L}{dt} + 50(i_L - i_2) = 0 \Rightarrow (50 + 15.625D)i_L - 50 i_2 = 30 \\ v_C = \dfrac{1}{10^{-3}}\displaystyle\int^t i_2(t')\,dt' + v_C(0^+) = 50(i_L - i_2) \xRightarrow{\text{مشتق}} 1000\, i_2 = 50D(i_L - i_2) \Rightarrow -Di_L + (20+D)i_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 15.625D + 50 & -50 \\ -D & 20 + D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow i_L = \frac{\begin{vmatrix} 30 & -50 \\ 0 & 20+D \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 15.625D+50 & -50 \\ -D & 20+D \end{vmatrix}}$$

$$[(D+20)(15.625D+50) - 50D]\,i_L = (20+D)\,30 \Rightarrow (15.625D^2 + 312.5D + 1000)\,i_L = 600$$

$$15.625D^2 + 312.5D + 1000 = 0 \Rightarrow D_1 = -16,\ D_2 = -4 \Rightarrow i_n(t) = Ae^{-16t} + Be^{-4t}$$

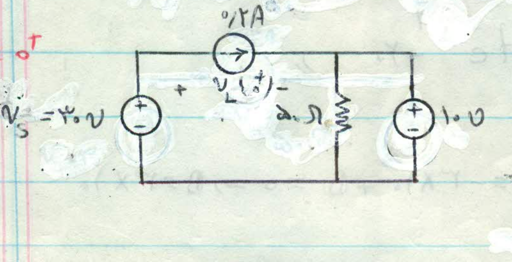
$$i_F(t) = \frac{600}{1000} = 0.6A \Rightarrow i_L(t) = Ae^{-16t} + Be^{-4t} + 0.6 \quad (\mathrm{I})$$

فوق میرا

حال باید با شرایط اولیه A و B را بدست آوریم

$t = 0^- \Rightarrow v_S = 10\,V$ ، خازن باز و سلف اتصال کوتاه $\Rightarrow i_L(0^-) = \frac{10}{50} = 0.2 = i_L(0^+)$ ، $v_C(0^-) = 10 = v_C(0^+)$ (II)

$t = 0^+$



$$-30 + v_L(0^+) + 10 = 0 \Rightarrow v_L(0^+) = 20 = L\frac{di_L(0^+)}{dt}$$

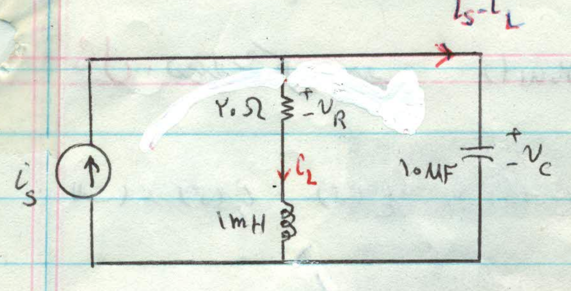
$$\Rightarrow \frac{di_L(0^+)}{dt} = \frac{20}{15.625} = 1.28$$

$$(\mathrm{I}),(\mathrm{II}) \Rightarrow A + B + 0.6 = 0.2 \Rightarrow A + B = -0.4 \ ,\ \frac{di_L(t)}{dt} = -16Ae^{-16t} - 4Be^{-4t} \Rightarrow -16A - 4B = 1.28$$

$$-4A - B = 0.32 \xrightarrow{A+B=-0.4} -3A = -0.08 \Rightarrow A = 0.027\ ,\ B = -0.427 \Rightarrow i_L(t) = 0.027e^{-16t} - 0.427 + 0.6 \quad t>0$$

$$i_L(0.1) = 0.319A$$

مثال : اگر $i_s(t) = 10u(-t) - 20u(t)$ آنگاه



$i_L(0^-)$ ، $v_C(0^+)$ ، $v_R(0^+)$ ، $i_{L,F}$

و $i_L(0.1ms)$ را بدست آورید

$$t>0 \Rightarrow i_s(t) = -20 \Rightarrow 20 i_L + 10^{-3}\frac{di_L}{dt} - \left(\frac{1}{10\times10^{-6}}\int_0^t (i_s(t') - i_L)\,dt' + v_C(0^+)\right) = 0$$

مشتق $\Longrightarrow 10^{-3}\frac{d^2 i_L}{dt^2} + 20\frac{di_L}{dt} - (10^5(-20 - i_L)) = 0 \Rightarrow (D^2 + 2\times10^4 D + 10^8)\, i_L = -2\times10^9 \Rightarrow D_{1,2} = -10^4$

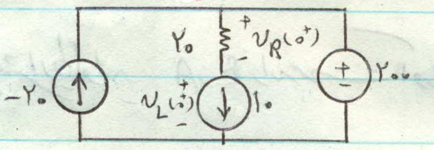
برای بحرانی

$$i_{L_n}(t) = Ae^{-10^4 t} + Bte^{-10^4 t} \quad , \quad i_{L_F}(t) = \frac{-2\times10^9}{10^8} = -20 \Rightarrow i_L(t) = Ae^{-10^4 t} + Bte^{-10^4 t} - 20 \quad \text{(I)}$$

حال شرایط اولیه : $t=0^- \Rightarrow i_s = 10$ ، خازن باز و سلف اتصال کوتاه $\Rightarrow i_s(0^-) - i_L(0^-) = 0$

$$i_L(0^-) = i_s(0^-) = 10 = i_L(0^+) \quad \text{(II)} \quad , \quad v_C(0^-) = 10\times20 = 200 = v_C(0^+)$$

$t=0^+$



$$v_R(0^+) = 20\times10 = 200 \Rightarrow v_L(0^+) = 200 - 200 = 0 = L\frac{di_L(0^+)}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{di_L(0^+)}{dt} = 0$$

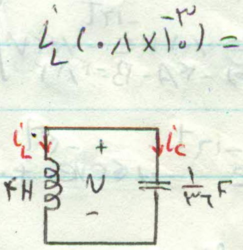
$$\text{I, II} \Rightarrow A - 20 = 10 \Rightarrow A = 30 \Rightarrow i_L(t) = 30e^{-10^4 t} + Bte^{-10^4 t} - 20$$

$$\frac{di_L}{dt} = -30\times10^4 e^{-10^4 t} + Be^{-10^4 t} - 10^4 Bte^{-10^4 t} \Rightarrow \frac{di_L(0^+)}{dt} = -3\times10^5 + B = 0 \Rightarrow B = 3\times10^5$$

$$i_L(t) = 30e^{-10^4 t} + 3\times10^5 te^{-10^4 t} - 20 \quad , \quad t>0$$

$$i_L(0.1\times10^{-3}) = 30e^{-1} + 30e^{-1} - 20 = 2.073\,A$$

مثال : در مدار روبرو $v(t)$ را بدست آورید $(v(0^-) = 0,\ i(0^-) = -\frac{1}{2}A)$



۷

$$i_L + i_C = 0 \Rightarrow \frac{di_L}{dt} + \frac{di_C}{dt} = 0 \xrightarrow[v = L\frac{di_L}{dt} \Rightarrow \frac{di_L}{dt} = \frac{v}{4}]{i_C = C\frac{dv}{dt} \Rightarrow \frac{di_C}{dt} = \frac{1}{36}\frac{d^2v}{dt^2}} \frac{v}{4} + \frac{1}{36}\frac{d^2v}{dt^2} = 0$$

$$(D^2+9)v = 0 \Rightarrow D^2+9 = 0 \Rightarrow D = \pm 3j$$ ⟸ مدار بدون تلفات

$$\Rightarrow v = A\sin(3t+\theta) \Rightarrow v(0) = A\sin\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0 \Rightarrow v(t) = A\sin 3t$$

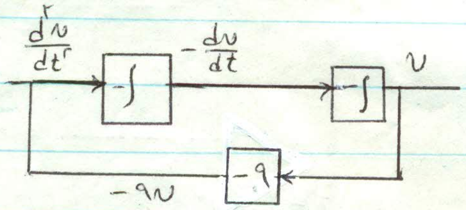
$$\frac{dv}{dt} = 3A\cos 3t \Rightarrow C\frac{dv}{dt} = \frac{3A}{36}\cos 3t \Rightarrow C\frac{dv(0^+)}{dt} = i_C(0^+) = -i_L(0^+)$$

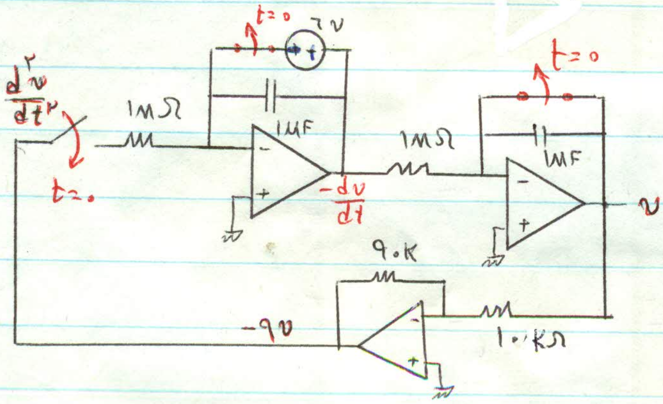
$$\frac{A}{12} = \frac{1}{6} \Rightarrow A = 2 \Rightarrow v(t) = 2\sin 3t,\ t > 0$$

حل معادله دیفرانسیل با کامپیوتر آنالوگ (OPAMP)

مثال: معادله دیفرانسیل $(D^2+9)v = 0$ را با شرایط اولیه $\frac{dv(0^+)}{dt} = -6$, $v(0^+) = 0$

حل کنید: $D^2v = -9v$





پایان

صل ۱

(۹)

پاسخ ضربه :

پاسخ ضربه را در مدارهای مرتبه n بالا نظیر مدار شکل (فصل چهارم) بدست آوردن یکی از راههای ساده آن است که پاسخ پله را بدست آورده و از آن مشتق بگیریم.

$h(t) = \frac{ds(t)}{dt}$

روش دیگر : در حل مدارهای مرتبه ۱ پاسخ ضربه مدار را بدست می آوریم.

$$(D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_n) y = b_0 w^{(m)} + b_1 w^{(m-1)} + \cdots + b_m w$$

با شرایط اولیه

$$y(0^-) = y'(0^-) = \cdots = y^{(n-1)}(0^-) = 0$$

$$D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_n = 0 \Rightarrow D = s_1, s_2, \ldots s_n$$

$$\Rightarrow h(t) = (k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t} + \cdots + k_n e^{s_n t}) u(t)$$

اما این جواب به شرطی در معادله دیفرانسیل صدق می کند که در دو طرف هم از یا شد از این دو طرف قرار دارند $w = \delta(t)$ (پاسخ ضربه) در سمت راست کم بودن عبارت شامل $\delta(t)$ ، $\delta_1(t)$ ، $\delta_2(t)$ ... عبارت لازم را به $h(t)$ اضافه می کنیم و در معادله دیفرانسیل قرار داده و دو طرف را متحد قرار می دهیم و ضرایب را بدست می آوریم. به مثال زیر توجه کنید.

مثال : پاسخ ضربه معادله دیفرانسیل مقابل را بدست آورید : $(D^2 + 4D + 3) y = (3D^2 - D + 1) w(t)$

$$D^2 + 4D + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} D = -1 \\ D = -3 \end{cases} \Rightarrow h(t) = (Ae^{-t} + Be^{-3t}) u(t)$$

$$w(t) = \delta(t) \Rightarrow (3D^2 - D + 1) w(t) = (3D^2 - D + 1)\delta(t) = 3\delta_2(t) - \delta_1(t) + \delta(t)$$

طرف دوم معادله دیفرانسیل شامل $\delta(t)$ ، $\delta_1(t)$ و $\delta_2(t)$ است اما مشتق سری از $u(t)$ تنها تولید

$\delta(t)$ ، $\delta_1(t)$ را که کند افزایش دو : $h(t) = (Ae^{-t} + Be^{-3t})u(t) + C\delta(t)$

یعنی $C\delta(t)$ را به $h(t)$ اضافه می‌کنیم تا طرف اول و دوم مشابه شوند حال $h(t)$ را در معادله دیفرانسیل قرار می‌دهیم:

$$y(t) = h(t) = (Ae^{-t} + Be^{-3t})u(t) + C\delta(t)$$

$$Dy(t) = Dh(t) = (-Ae^{-t} - 3Be^{-3t})u(t) + (Ae^{-t} + Be^{-3t})\delta(t) + C\delta_1(t)$$

یا $Dy(t) = Dh(t) = (-Ae^{-t} - 3Be^{-3t})u(t) + (A+B)\delta(t) + C\delta_1(t)$

یا $D^2y(t) = D^2h(t) = (Ae^{-t} + 9Be^{-3t})u(t) + (-Ae^{-t} - 3Be^{-3t})\delta(t) + (A+B)\delta_1(t) + C\delta_2(t)$

$$= (Ae^{-t} + 9Be^{-3t})u(t) + (-A-3B)\delta(t) + (A+B)\delta_1(t) + C\delta_2(t)$$

$$(D^2+4D+3)y(t) = (\cancel{Ae^{-t}} + \cancel{9Be^{-3t}} - \cancel{4Ae^{-t}} - \cancel{12Be^{-3t}} + \cancel{3Ae^{-t}} + \cancel{3Be^{-3t}})u(t) +$$

$$+(-A-3B+4A+4B+3C)\delta(t) + (A+B+4C)\delta_1(t) + C\delta_2(t) = 3\delta_2(t) - \delta_1(t) + \delta(t)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3A+B+3C = 1 \\ A+B+4C = -1 \\ C = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3A+B = -8 \\ A+B = -13 \end{cases} \Rightarrow 2A = 5 \Rightarrow A = \frac{5}{2} \Rightarrow B = -15.5$$

$$h(t) = (2.5e^{-t} - 15.5e^{-3t})u(t) + 3\delta(t)$$

مثال: پاسخ ضربه معادله دیفرانسیل زیر را بدست آورید:

$$(D^2+4D+3)y = (3D^3+2D^2+1)w(t) \xrightarrow{\text{تقسیم بر } D+1} (D+3)y = (3D^2-D+1)w(t)$$

$$D = -3 \Rightarrow h(t) = Ae^{-3t}u(t)$$

$$(3D^2-D+1)w(t) = (3D^2-D+1)\delta(t) = 3\delta_2(t) - \delta_1(t) + \delta(t)$$

$$\Rightarrow h(t) = Ae^{-3t}u(t) + B\delta(t) + C\delta_1(t)$$

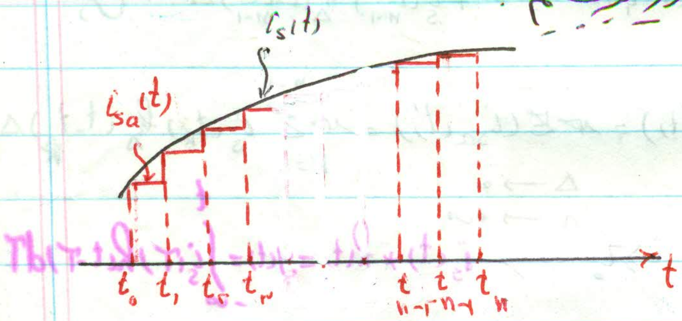
$$Dy(t) = Dh(t) = -3Ae^{-3t}u(t) + Ae^{-3t}\delta(t) + B\delta_1(t) + C\delta_2(t) = -3Ae^{-3t}u(t) + A\delta(t) + B\delta_1(t) + C\delta_2(t)$$

$$(D+3)y(t) = (\cancel{-3Ae^{-3t}} + \cancel{3Ae^{-3t}})u(t) + (A+3B)\delta(t) + (B+3C)\delta_1(t) + C\delta_2(t) = 3\delta_2(t) - \delta_1(t) + \delta(t)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+3B=1 \\ B+3C=-1 \\ C=3 \end{cases} \Rightarrow B=-10 \Rightarrow A=31 \Rightarrow h(t) = 31e^{-3t}u(t) - 10\delta(t) + 3\delta_1(t)$$

پاسخ به ورودی دلخواه :

درصورتی که پاسخ ضربه یک سیستم خطی تغییرناپذیر با زمان معلوم باشد می‌توان پاسخ به ورودی دلخواه را بدست آورد. فرض کنید $i_s(t)$ را به صورت زیر بنویسیم :



$$\Delta = t_1 - t_0 = t_2 - t_1 = \dots = t_n - t_{n-1}$$

تابع‌ها را $i_{sa}(t)$ می‌نامیم

$$i_{sa}(t') = \begin{cases} i_s(t_0), & t_0 < t' < t_1 \\ i_s(t_1), & t_1 < t' < t_2 \\ \vdots \\ i_s(t_{n-1}), & t_{n-1} < t' < t_n \end{cases}$$

درصورتی که t متغیر زمان دلخواه در فاصله $[t_0, t_n]$ می‌باشد. اگر $n \to \infty$ (یا $\Delta \to 0$) داریم

صورت پاسخ $i_s(t)$ و $i_{sa}(t)$ مشابه خواهد بود. فرض کنید :

$$P_\Delta(t') = \begin{cases} 0, & t' < 0 \\ \frac{1}{\Delta}, & 0 < t' < \Delta \\ 0, & \Delta < t' \end{cases} \Rightarrow P_\Delta(t' - t_k) = \begin{cases} 0 & t' < t_k \\ \frac{1}{\Delta} & t_k < t' < t_k + \Delta \\ 0 & t_k + \Delta < t' \end{cases}$$

پس :

$i_{sa}(t') = i_s(t_0)\,p_\Delta(t'-t_0)\Delta + i_s(t_1)\,p_\Delta(t'-t_1)\Delta \cdots + i_s(t_k)\,p_\Delta(t'-t_k)\Delta + \cdots$

$+\, i_s(t_{n-1})\,p_\Delta(t'-t_{n-1})\Delta$

به علت خطی بودن مدار، پاسخ حالت صفر به $i_{sa}(t')$ برابر مجموع پاسخ‌های حالت صفر به ورودی‌های

$i_s(t_0)\,p_\Delta(t'-t_0)\Delta$ ، ...... ، $i_s(t_{n-1})\,p_\Delta(t'-t_{n-1})\Delta$ می‌باشد. فرض کنید:

$$\mathcal{Z}\left(i_s(t_k)\,p_\Delta(t'-t_k)\Delta\right) = i_s(t_k)\,h_\Delta(t-t_k)\Delta$$

پس: $\mathcal{Z}(i_{sa}(t)) = i_s(t_0)\,h_\Delta(t-t_0)\Delta + i_s(t_1)\,h_\Delta(t-t_1)\Delta \cdots + i_s(t_{n-1})\,h_\Delta(t-t_{n-1})\Delta$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} i_s(t_k)\,h_\Delta(t-t_k)\Delta \Longrightarrow \mathcal{Z}(i_s(t)) = \lim_{\substack{\Delta\to 0\\ n\to\infty}} \mathcal{Z}(i_{sa}(t')) = \lim \sum_{k=0}^{n-1} i_s(t_k)\,h_\Delta(t-t_k)\Delta$$

$\Delta \equiv dt'$, $\Sigma \equiv \int$

$$= \int_{t_0}^{t} i_s(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau = i_s(t) * h(t), \quad t \geq t_0 \Longrightarrow i_s(t) * h(t) = y(t) = \int_{-\infty}^{t} i_s(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau$$

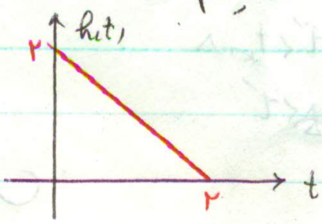
در صورتی که سیستم خطی متغیر با زمان باشد پاسخ:

$$v(t) = \int_{t_0}^{t} h(t,\tau)\,i_s(\tau)\,d\tau, \quad t \geq t_0$$

خواهیم داشت که $h(t,t_k)$ پاسخ ضربه در زمان t_k است. (ضربه در t_k وارد شده است.)

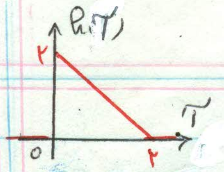
پاسخ کامل: $y(t) = \underbrace{\mathcal{Z}(t)}_{\text{پاسخ ورودی صفر}} + \underbrace{\int_{t_0}^{t} h(t,\tau)\,w(\tau)\,d\tau}_{\text{پاسخ حالت صفر}}$

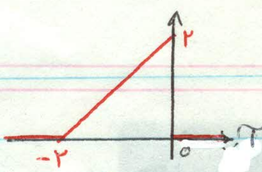
مثال: در صورتی که در یک سیستم $i_s(t) = u(t)$ و پاسخ ضربه سیستم $h(t)$ باشد

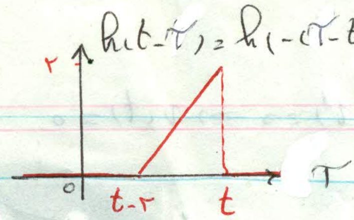


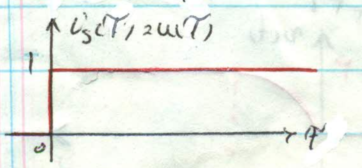
پاسخ به ازای ورودی $i_s(t)$ را بدست آورید.

حل





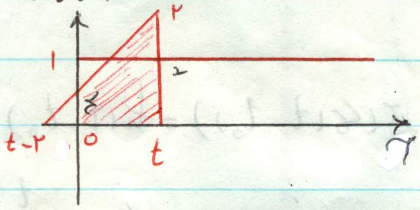




$$v(t) = \int_{-\infty}^{t} h(t-\tau)\, i_s(\tau)\, d\tau$$

$t < 0 \Rightarrow h(t-\tau)\, i_s(\tau) = 0 \Rightarrow v(t) = 0$

$0 < t \,,\; t-2 < 0 \Rightarrow 0 < t < 2$



$\frac{x}{2} = \frac{2-t}{2} \Rightarrow x = 2-t$

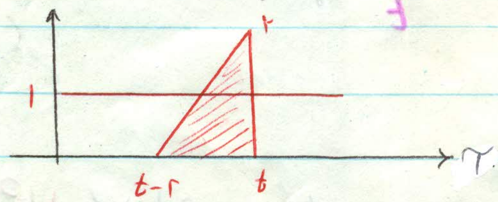
$S = \frac{(x+2)\,t}{2} = \frac{(4-t)\,t}{2}$

$v(t) = \frac{-1}{2} t^2 + 2t$ — از روی شکل

$h(t) = -t+2 \Rightarrow h(t-\tau) = -t+\tau+2$ — از روی محاسبه

$$0 < t < 2 \Rightarrow v(t) = \int_{-\infty}^{t} i_s(t')\, h(t-\tau)\, dt' = \int_{-\infty}^{0} 0\, d\tau + \int_{0}^{t} h(t-\tau) \times 1\, d\tau = \int_{0}^{t} (-t+\tau+2)\, d\tau$$

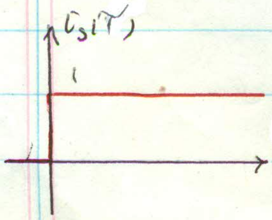
$$= -t\tau + \frac{\tau^2}{2} + 2\tau \Big|_{0}^{t} = -t^2 + \frac{t^2}{2} + 2t = \frac{-t^2}{2} + 2t$$

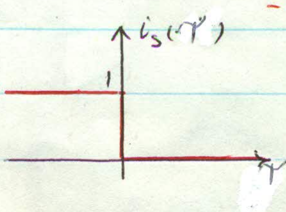


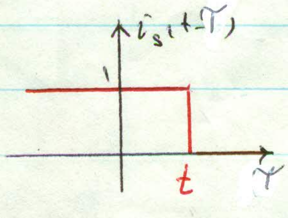
$0 < t-2 \Rightarrow 2 < t \Rightarrow S = \frac{2 \times 2}{2} = 2 \Rightarrow v(t) = 2$ — از روی شکل

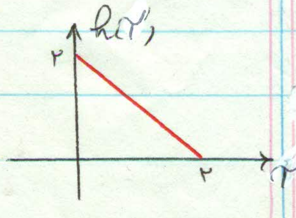
$$v(t) = \int_{-\infty}^{t-2} 0\, d\tau + \int_{t-2}^{t} (-t+\tau+2)\, d\tau = -t\tau + \frac{\tau^2}{2} + 2\tau \Big|_{t-2}^{t} = 2$$ — از روی محاسبه

محاسبه با $v(t) = \int_{-\infty}^{t} i_s(t-\tau)\, h(\tau)\, d\tau$





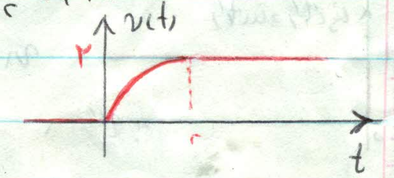




$t<0 \Rightarrow h(\tau)\, i_s(t-\tau) = 0 \Rightarrow v(t) = 0$

$0<t<2 \Rightarrow v(t) = \int_0^t 1\times(2-\tau)\,d\tau = -\frac{1}{2}\tau^2 + 2\tau \Big|_0^t = -\frac{1}{2}t^2 + 2t$

$2<t \Rightarrow v(t) = \frac{2\times 2}{2} = 2$



قضایای کانولوشن :

۱- $Z(\delta(t)) = h(t) \Rightarrow Z(\delta(t-t_0)) = h(t-t_0)$

$Z(\delta(t-t_0)) = \int_{t_0^-}^{t} h(t-\tau)\,\delta(\tau-t_0)\,d\tau = \int_{t_0^-}^{t} h(t-t_0)\,\delta(\tau-t_0)\,d\tau$

$= h(t-t_0)\int_{t_0^-}^{t} \delta(\tau-t_0)\,d\tau = h(t-t_0)$, زیرا $f(t)\delta(t-t_0) = f(t_0)\delta(t-t_0)$

۲- $\int_0^t h(t-\tau)\, i_s(\tau)\,d\tau = \int_0^t h(\tau)\, i_s(t-\tau)\,d\tau$

$\int_0^t h(t-\tau)\, i_s(\tau)\,d\tau \xrightarrow{t-\tau=\tau_1 \Rightarrow -d\tau = d\tau_1} -\int_t^0 h(\tau_1)\, i_s(t-\tau_1)\,d\tau_1 \overset{\tau_1=\tau}{=}$

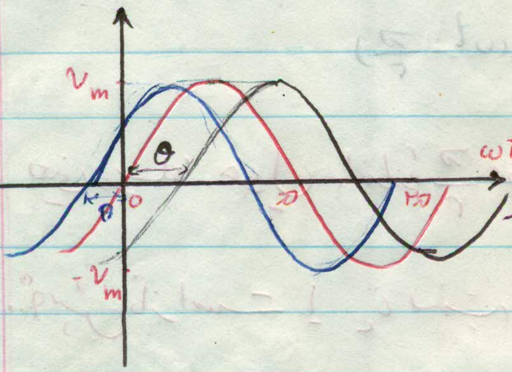
$= \int_0^t h(\tau)\, i_s(t-\tau)\,d\tau$

مثال: کانولوشن دو پالس چه می‌شود؟ عرض پالس یکی باشد یا نباشد و عرض خروجی

چه ارتباطی با عرض پالس دارد؟

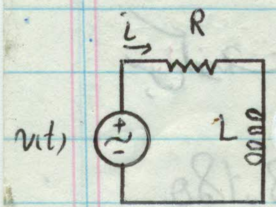
تحلیل حالت مانا به ورودی سینوسی:

به دلیل اینکه صحیح‌ترین سینوسی است، هر تابع متناوب را می‌توان به صورت مجموعی از سینوسی‌ها نوشت و مشتق و انتگرال تابع سینوسی، سینوسی است بررسی ورودی سینوسی اهمیت بسزایی دارد.



تذکر: $v(t)=v_m\sin\omega t$ ، $v_1(t)=v_m\sin(\omega t+\theta)$ در نظر بگیرید چون v_1 به اندازه θ جلوتر است می‌گویند v_1 نسبت به v به اندازه θ پیش‌فاز است و یا v نسبت به v_1 به اندازه θ پس‌فاز است و $v_2(t)=v_m\sin(\omega t-\theta)$ را به اندازه θ پس‌فاز نسبت به v می‌گویند. توجه داشته باشید که $v_3(t)=v_m\cos\omega t$ را می‌توان به صورت $v_3(t)=v_m\sin(\omega t+\frac{\pi}{2})$ نشان داد که به اندازه $\frac{\pi}{2}$ نسبت به v پیش‌فاز است.

پاسخ مانا (ماندگار، دائمی) به ورودی سینوسی:



فرض کنید ورودی $v(t)=v_m\cos\omega t$ باشد. حال می‌خواهیم پاسخ مانا به این ورودی را به دست آوریم. با گذشت پنج ثابت زمانی (5τ) پاسخ گذرا به صفر می‌رسد و تنها پاسخ مانا (پاسخ ناشی از ورودی) باقی می‌ماند به این صورت:

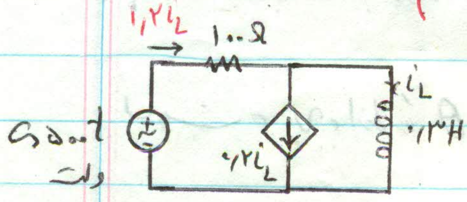
$$L\frac{di}{dt}+Ri=v_m\cos\omega t \Rightarrow i_p(t)=\frac{1}{LD+R}v_m\cos\omega t=\frac{LD-R}{L^2D^2-R^2}v_m\cos\omega t=-\frac{1}{L^2\omega^2+R^2}\Big[-Lv_m\omega\sin\omega t-Rv_m\cos\omega t\Big]=A\cos(\omega t+\theta)=A\cos\omega t\cos\theta-A\sin\omega t\sin\theta$$

$$\begin{cases} A\sin\theta = \dfrac{-L\omega v_m}{L^2\omega^2+R^2} \\ A\cos\theta = \dfrac{R v_m}{L^2\omega^2+R^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A^2 = \dfrac{(R^2 v_m^2 + L^2\omega^2 v_m^2)}{(L^2\omega^2+R^2)^2} \Rightarrow A = \dfrac{v_m}{\sqrt{L^2\omega^2+R^2}} \\ \operatorname{tg}\theta = -\dfrac{L\omega}{R} \end{cases}$$

$$\Rightarrow i(t) = \frac{v_m}{\sqrt{L^2\omega^2+R^2}}\cos\left(\omega t - \operatorname{tg}^{-1}\frac{L\omega}{R}\right)$$

اگر $R = 0 \rightarrow \operatorname{tg}^{-1}\dfrac{\omega L}{R} = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow i(t) = \dfrac{v_m}{L\omega}\cos\left(\omega t - \dfrac{\pi}{2}\right)$

یعنی در سلف جریان به اندازهٔ $\frac{\pi}{2}$ عقب تر از ولتاژ است (v_L نسبت به i_L به اندازهٔ 90° پیش فاز است یا i_L نسبت به v_L 90° پس فاز است)



مثال: در مدار روبرو $i_L(t)$ را در حالت ماندگار بدست آورید.

$$-\cos 500t + 120 i_L + 0{,}3\frac{di_L}{dt} = 0 \Rightarrow i_{L_p}(t) = \frac{1}{120+0{,}3D}\cos 500t = \frac{\frac{1}{0{,}3}(400-D)}{400^2-D^2}\cos 500t$$

$$= -\frac{4}{270}\cos 500t - \frac{5}{270}\sin 500t$$

$$i_{np}(t) = Ae^{-400t}$$

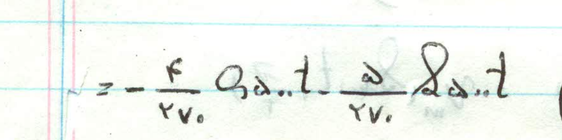
$$\Rightarrow i(t) = Ae^{-400t} - \frac{4}{270}\cos 500t - \frac{5}{270}\sin 500t$$

با گذشت چند ثابت زمانی ($\frac{5}{400}$ ثانیه) پاسخ ماندگار عبارتست:

$$i(t) = -\frac{4}{270}\cos 500t - \frac{5}{270}\sin 500t = A\cos(\omega t+\theta) = A\cos\omega t\cos\theta - A\sin\omega t\sin\theta$$

$$\begin{cases} A\cos\theta = \dfrac{-4}{270} \\ A\sin\theta = \dfrac{5}{270} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A^2 = \dfrac{16+25}{270^2} \Rightarrow A = 2{,}37\times 10^{-3} \\ \cos\theta = -0{,}62 \Rightarrow \theta = 128{,}65^\circ \end{cases} \Rightarrow i(t) = 2{,}37\times10^{-3}\cos(500t + 128{,}65^\circ)$$

نکته: در رژیم دائمی سینوسی در یک مدار خطی تغییرناپذیر



یک منبع سینوسی پاسخ خروجی هم سینوسی خواهد بود ولی دامنه و فاز آن تغییر می‌کند

حال اگر ورودی را به اندازهٔ ۹۰° جابجا کنیم: $v_m \cos(\omega t+\theta-90°) = v_m \sin(\omega t+\theta)$ خروجی هم به دلیل LTI

بودن ۹۰° جابجا می‌شود $I_m \cos(\omega t+\varphi-90°) = I_m \sin(\omega t+\varphi)$ حال با توجه به جمع آثار داریم:

$$v_m(\cos(\omega t+\theta) + j\sin(\omega t+\theta)) = v_m e^{j(\omega t+\theta)} \longleftrightarrow I_m(\cos(\omega t+\varphi) + j\sin(\omega t+\varphi)) = I_m e^{j(\omega t+\varphi)}$$

یعنی با ورودی مختلط، خروجی مختلط است ولی نوع دامنه و فاز آن تغییر نمی‌کند

حال اگر پاسخ مختلط را داشته باشیم قسمت حقیقی جواب، ورودی حقیقی و قسمت موهومی جواب

ورودی موهومی است. حل مسئله ص ۱۰۱ از دیدگاهی دیگر نگاه کنید:

$\cos\omega t = Re(e^{j\omega t})$

توجه:

فرض کنیم منبع ما $v(t) = v_m e^{j\omega t}$ باشد $\qquad Ri + L\frac{di}{dt} = v(t)$

اگر خروجی را $i(t) = I_m e^{j(\omega t+\varphi)}$ در نظر بگیریم داریم:

$$R I_m e^{j(\omega t+\varphi)} + jL\omega I_m e^{j(\omega t+\varphi)} = v_m e^{j\omega t} \Rightarrow I_m e^{j\varphi} = \frac{v_m}{R+jL\omega}$$

(یعنی $e^{j\omega t}$ در محاسبات نقشی ندارد و از طرفین ساده می‌شود)

$$I_m = \frac{v_m}{\sqrt{R^2+L^2\omega^2}}, \quad \varphi = -tg^{-1}\frac{L\omega}{R} \Rightarrow i(t) = Re(I_m e^{j(\omega t+\varphi)}) = \frac{v_m}{\sqrt{R^2+L^2\omega^2}}\cos(\omega t - tg^{-1}\frac{L\omega}{R})$$

که حل از قبلی بسیار ساده‌تر است.

تذکر:

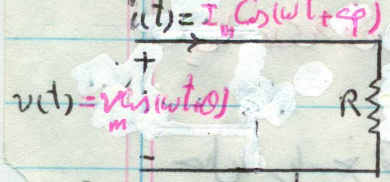
در توجه قبل دیدیم در حل معادلهٔ دیفرانسیل $e^{j\omega t}$ نقشی در حل مسئله ندارد و تنها در

پاسخ نوعی ظاهر می‌شود در این مورد بهتر است برای ساده سازی از فازوری استفاده کنیم

که کار را ساده تر می کند: $v(t)=V_m\cos(\omega t+\theta)=Re(V_m e^{j(\omega t+\theta)})\equiv V_m\angle\theta = V$

این عاشیوری را فازور می گویند: $i(t)=I_m\cos(\omega t+\varphi)=Re(I_m e^{j(\omega t+\varphi)})=I_m\angle\varphi = I$

روابط فازوری: الف - مقاومت (R): در حوزهٔ زمان داریم:



$$V_m e^{j(\omega t+\theta)} = RI_m e^{j(\omega t+\varphi)} \Rightarrow \theta=\varphi ,\ V_m=RI_m$$

$$V_m e^{j(\omega t+\theta)} \equiv V_m e^{j\theta}\equiv V_m\angle\theta = V ,\quad I_m e^{j(\omega t+\varphi)} \equiv I_m e^{j\varphi} = I_m\angle\varphi = I \Rightarrow V=RI$$ (فازوری)

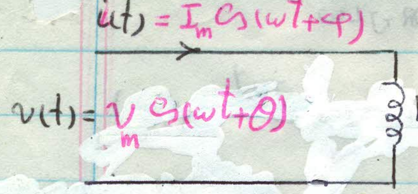
پس در حالت مقاومتی، جریان و ولتاژ هم فاز هستند.

مثال: اگر $v(t)=5\cos(500t-30°)$ در دو سر مقاومت 10Ω باشد، جریان در مقاومت برابر است با:

۱- در حوزهٔ زمان: $i(t)=\frac{v(t)}{R}=\frac{5}{10}\cos(500t-30°)=0.5\cos(500t-30°)$

۲- روش فازوری: $I=\frac{V}{R}=\frac{5\angle -30}{10}=0.5\angle-30 \Rightarrow i(t)=0.5\cos(500t-30°)$

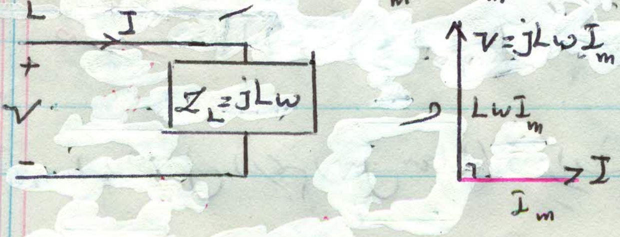
ب - سلف (L): در حوزهٔ زمان داریم:



$$v(t)=L\frac{di}{dt}\Rightarrow V_m e^{j(\omega t+\theta)} = jL\omega I_m e^{j(\omega t+\varphi)}$$

$$\Rightarrow V_m e^{j\theta} = jL\omega I_m e^{j\varphi} = L\omega I_m e^{j\frac{\pi}{2}} e^{j\varphi} = L\omega I_m e^{j(\frac{\pi}{2}+\varphi)} \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{2}+\varphi$$

اگر $Z_L \triangleq jL\omega$ ، $V\triangleq V_m e^{j\theta}=V_m\angle\theta$ و $I\triangleq I_m e^{j\varphi}=I_m\angle\varphi$ در این صورت: $V=Z_L I$

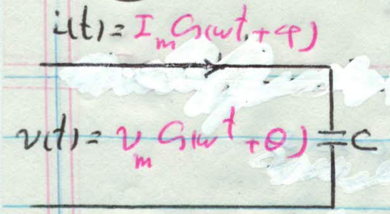


یعنی ولتاژ در سلف ۹۰° از جریان جلوتر است

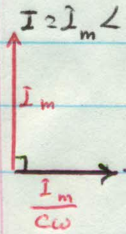
و $V=Z_L I$ (فازوری)

ج)

ب - خازن (c): معادله‌ها را داریم: $i(t) = c\frac{dv}{dt}$



$$\Rightarrow I_m e^{j(\omega t+\varphi)} = cv_m j\omega e^{j(\omega t+\theta)} = cv_m\omega e^{j(\omega t+\theta+\frac{\pi}{2})}$$



$V = \frac{I_m}{c\omega}\angle 0$

$\Rightarrow \varphi = \theta + \frac{\pi}{2}$ یعنی جریان ۹۰° جلوتر از ولتاژ است

$$V = v_m e^{j(\omega t+\theta)} \longrightarrow v_m e^{j\theta} \equiv v_m\angle\theta$$

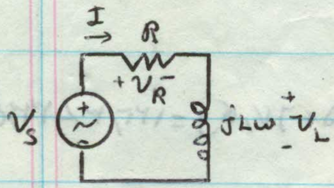
$$I = I_m e^{j(\omega t+\varphi)} \longrightarrow I_m\angle\varphi, \quad Z_c = \frac{1}{jc\omega}$$

$$V = Z_c I$$

قوانین کیرشهف برای فازورها:

یعنی در حالت فازور هم: $v_1(t)+v_2(t)+\dots+v_n(t)=0 \xRightarrow[\text{و حذف } e^{j\omega t}]{\text{با ایجاد}} v_1+v_2+\dots+v_n=0$

قوانین کیرشهف درست است



مثال: مثال ص ۱۰-۱ را مجدداً از راه فازور حل می‌کنیم: $Z_L = jL\omega$

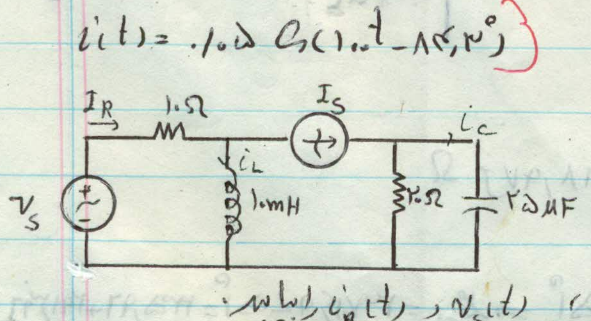
$$-v_s+v_R+v_L=0 \xRightarrow[Z_L=jL\omega]{v_s=v_m\cos\omega t\equiv v_m\angle 0} IR+IZ_L=v_m\angle 0 \Rightarrow I=\frac{v_m}{R+jL\omega}$$

$$=\frac{v_m}{\sqrt{R^2+L^2\omega^2}\angle \arctan\frac{L\omega}{R}} \Rightarrow i(t)=\frac{v_m}{\sqrt{R^2+L^2\omega^2}}\cos\left(\omega t-\arctan\frac{L\omega}{R}\right)$$

در مثال فوق اگر $v_s(t)=5\cos(100t)$ ، $R=10\Omega$ و $L=1H$ باشد داریم:

$$jL\omega = j\times1\times100=100j\,\Omega \Rightarrow 10I+100jI=5\angle 0 \Rightarrow I=\frac{5}{10+100j}=0.05\angle-84.3^\circ$$

$$i(t)=0.05\cos(100t-84.3^\circ)$$



مثال: اگر $\omega=1200\ rad/s$ و $I_c=1.2\angle 28^\circ$ ، $I_L=3\angle 53^\circ$ باشد، I_s ، v_s و I_R ، $i_s(t)$ ، $v_s(t)$ و $i_R(t)$ را بیابید:

تذکر:

امپدانس = $Z = \frac{V}{I}$ (Ω) ، ادمیتانس = $Y = \frac{I}{V}$ (زیمنس)(S)

$$Z_c = \frac{1}{jc\omega} = \frac{1}{j\times 25\times 10^{-6}\times 1200} = \frac{1}{0.03j} = -33.3j\ \Omega$$

$$I_s \times \frac{20}{20-33.3j} = 1.2\angle 28^\circ \Rightarrow I_s = \frac{20-33.3j}{20}\times 1.2\angle 28^\circ = 2.33\angle -31^\circ$$

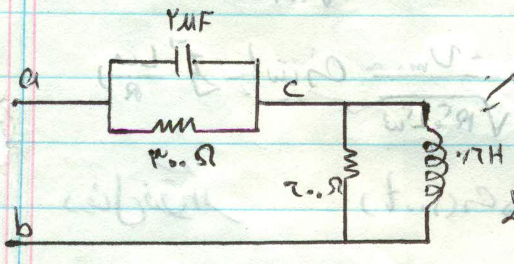
$$i_s(t) = 2.33\cos(1200t - 31^\circ)$$

$$I_R = I_s + I_L = 2.33\angle -31 + 3\angle 53^\circ = 1.997 - 1.2j + 1.8 + 2.396j = 3.797 + 1.196j$$

$$= 3.98\angle 17^\circ \Rightarrow i_R(t) = 3.98\cos(1200t + 17^\circ)$$

$$V_s = 10 I_R + jL\omega I_L = 39.8\angle 17^\circ + j\times 12\times 3\angle 53^\circ = 102.05 + 67.4j = 122.3\angle 33.4^\circ$$

$$v_s(t) = 122.3\cos(1200t + 33.4^\circ)$$



مثال: اگر $\omega = 800\ rad/s$ باشد Z_{ab} را بدست آورید.

$$Z_{ab} = (Z_c \parallel 300) + (Z_L \parallel 600)$$

$$Z_c = \frac{1}{jc\omega} = \frac{1}{j\,2\times 10^{-6}\times 800} = \frac{1}{j\,1.6\times 10^{-3}} \Rightarrow Y_c = 1.6\times 10^{-3}j$$

$$G = \frac{1}{300} = 3.3\times 10^{-3}$$

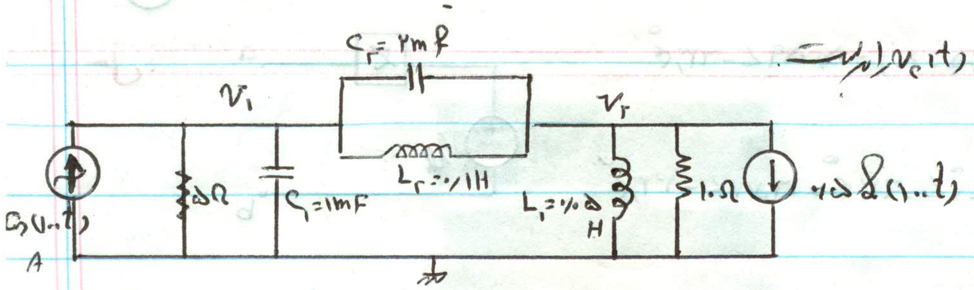
$$\Rightarrow Y_{ac} = 3.3\times 10^{-3} + 1.6\times 10^{-3}j$$

$$Z_{ac} = \frac{1}{Y_{ac}} = 272.6\angle -25.87^\circ = 245.34 - 118.97j\ \Omega$$

$$Y_{cb} = \frac{1}{600} + \frac{1}{0.16\times 800j} = 2.667\times 10^{-3}\angle -51^\circ \Rightarrow Z_{cb} = 374.94\angle 51^\circ = 235.96 + 291.39j$$

$$Z_{ab} = Z_{bc} + Z_{ac} = 490.3 + 172.42j = 519.7\angle 19.37^\circ$$

مثال: ولتاژهای $v_1(t)$ و $v_2(t)$ را بدست آورید.



حل:

$$\cos 100t = 1\angle 0 \quad , \quad \omega = 100\ rad/s \quad , \quad 0.5\sin 100t = 0.5\cos\left(100t - \frac{\pi}{2}\right) = 0.5\angle -\frac{\pi}{2} = -0.5j$$

$$Z_{L_1} = jL_1\omega = 5j\ \Omega \ , \ Z_{L_2} = jL_2\omega = 0.1\times 100 j = 10j\ \Omega \ , \ Z_{C_1} = \frac{1}{jC_1\omega} = \frac{1}{j\times 10^{-3}\times 100} = -10j\ \Omega$$

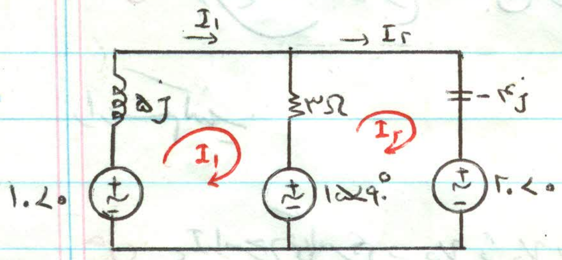
$$Z_{C_2} = \frac{1}{jC_2\omega} = \frac{1}{j\times 2\times 10^{-3}\times 100} = -5j\ \Omega$$

(1) $$\frac{V_1}{5} + \frac{V_1}{-10j} + \frac{V_1 - V_2}{-5j} + \frac{V_1 - V_2}{10j} = 1\angle 0$$

(2) $$\frac{V_2 - V_1}{-5j} + \frac{V_2 - V_1}{10j} + \frac{V_2}{5j} + \frac{V_2}{10} = -(-0.5j) = 0.5j$$

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} 0.2+0.2j & -0.1j \\ -0.1j & 0.1-0.1j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5j \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 1-2j \\ -2+4j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.24\angle -63.4^\circ \\ 4.47\angle 116.56^\circ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} v_1(t) = 2.24\cos(100t - 63.4^\circ) \\ v_2(t) = 4.47\cos(100t + 116.56^\circ) \end{cases}$$



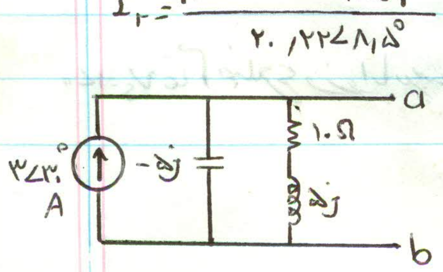
مثال: جریان I_1 را بدست آورید.

حل:

$$\begin{cases} (3+5j)I_1 - 3I_2 = 10 - 15j \\ -3I_1 + (3-4j)I_2 = -20 + 15j \end{cases}$$

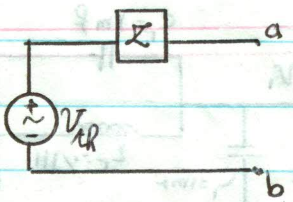
$$\Rightarrow I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 10-15j & -3 \\ -20+15j & 3-4j \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3+5j & -3 \\ -3 & 3-4j \end{vmatrix}} = \frac{30-60-85j-60+45j}{9+20+3j-9} = \frac{98.49\angle -153.4}{20.22\angle 8.5^\circ} = 4.87\angle 164.5^\circ$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3+5j & 10-15j \\ -3 & -20+15j \end{vmatrix}}{20.22\angle 8.5^\circ} = 7.17\angle -144.9^\circ$$



مثال: مدار معادل تونن را بدست آورید.

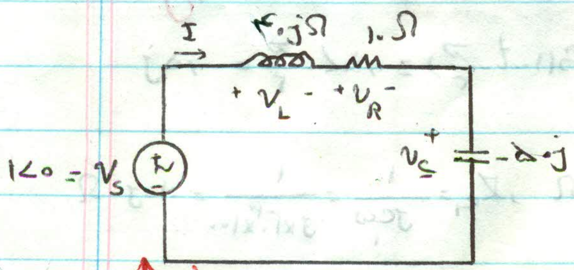
حل:



$$Z_{th} = \frac{-5j(10+5j)}{-5j+10+5j} = 2.5 - 5j = 5.59\angle -63.4^\circ$$

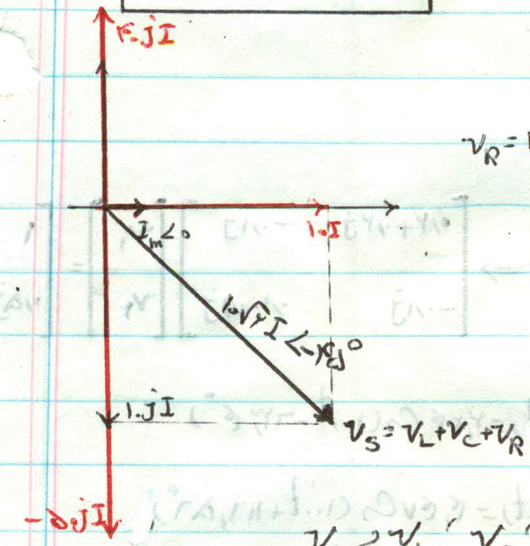
$$V_{ab} = V_{oc} = 3\angle 30^\circ \times 5.59\angle -63.4^\circ = 16.77\angle -33.4^\circ$$

روش ترسیمی:



مثال: در شکل مقابل جریان I را بدست آورید

حل: جریان I را روی محور در نظر می‌گیریم

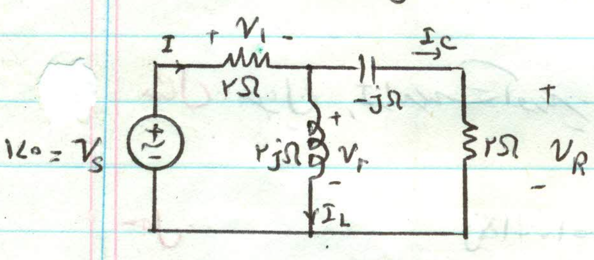


$V_R = 10I$, $V_L = 40jI$, $V_C = -50jI$

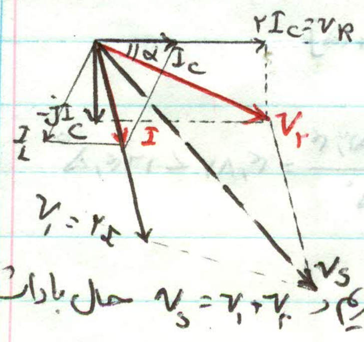
$$V_s = V_L + V_C + V_R = 10\sqrt{2}I\angle -45^\circ = 1\angle 0 \Rightarrow I = \frac{1}{10\sqrt{2}}\angle 45^\circ$$

$$\Rightarrow I = 0.07\angle 45^\circ$$

مثال: برای I_C مقدار مرجع مناسبی فرض کنید و مقدار V_S و V_1 ، V_2 ، V_R را رسم کنید.



حل: I_C را مرجع می‌گیریم و V_C و V_R را رسم کنیم و V_2 را



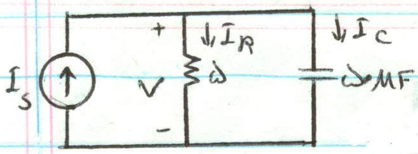
بدست می‌آوریم با شکل $\alpha = 26.57^\circ$

حال I_L را بدست می‌آوریم $I_L = \frac{V_2}{2j} = \frac{V_2}{2}\angle -90^\circ$

و با داشتن I_L و I_C ، I بدست می‌آید حال $V_1 = 2I$ را بدست می‌آوریم و $V_s = V_1 + V_2$ حال با داشتن

$V_s = 1\angle 0$ تمام اضلاع و زوایا بدست می‌آید (می‌شود همه را ریاضی محاسبه کرد)

۹

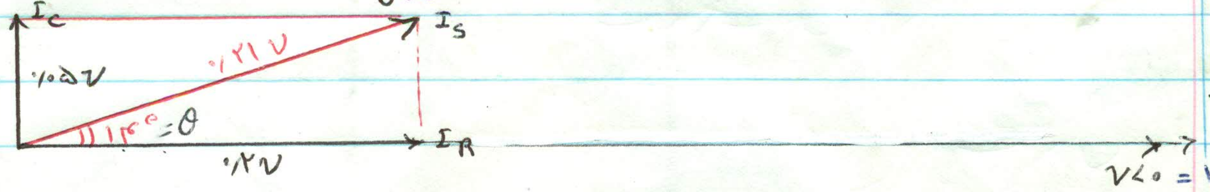


مثال: اگر $\omega = 1000\, rad/s$ ، $V = 1 \angle 0$ باشد

$i_s(t)$ را بدست آورید

از روش نمودار

$I_R = \frac{V}{5} = 0/2 \angle 0$ ، $I_C = \frac{V}{\frac{1}{jC\omega}} = j \times 5 \times 10^{-6} \times 1000 \times 1 \angle 0 = 0/005 \angle 90^\circ$



$I_s^2 = I_C^2 + I_R^2 = (0/005V)^2 + (0/2V)^2 = (0/05)^2 + (0/2)^2 = 0/206$ ، $tg\theta = \frac{0/05V}{0/2V} = tg 14^\circ$

$i_s(t) = 0/206 \cos(1000t + 14^\circ)$

از روش محاسباتی:

$I_s = I_R + I_C = \frac{V}{5} + \frac{V}{\frac{1}{jC\omega}} = 0/2 \angle 0 + 0/05 \angle 90 = 0/206 \angle 14^\circ$

$i_s(t) = 0/206 \cos(1000t + 14^\circ)$

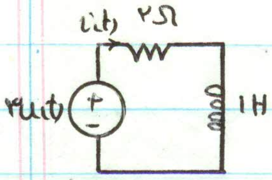
پایان

توان لحظه‌ای: حاصل ضرب ولتاژ لحظه‌ای در جریان لحظه‌ای (با در نظر گرفتن قرارداد علامت متناظر جریان از سر مثبت)

$p(t)=v(t)i(t)$ (ولتاژ وارد می‌شود)

$P_L(t)=v(t)i(t)=L\frac{di}{dt}\cdot i(t)=\frac{1}{L}v\int_{-\infty}^{t} v\,dt$ در القاگر ، $P_R(t)=v(t)i(t)=i^2(t)R=\frac{v^2(t)}{R}$ در مقاومت

$P_C(t)=v(t)i(t)=v(t)C\frac{dv}{dt}=\frac{1}{C}\left(\int_{-\infty}^{t} i\,dt\right)i(t)$ در خازن



مثال: توان را در مقاومت، سلف و منبع بدست آورید.

حل: $i(0^-)=i(0^+)=0$ ، $i(+\infty)=\frac{3}{2}$ ، $\tau=\frac{L}{R}=\frac{1}{2}$ ، $i(t)=ae^{-\frac{t}{\tau}}+b$

$i(t)=\frac{3}{2}(1-e^{-2t})u(t) \Rightarrow p(t)=v(t)i(t)=3u(t)\times\frac{-3}{2}(1-e^{-2t})u(t)=\frac{-9}{2}(1-e^{-2t})u(t)$ W

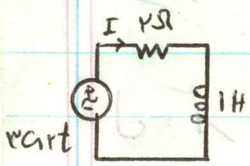
توان لحظه‌ای منبع

$P_R(t)=i^2R=\frac{9}{4}(1-e^{-2t})^2u(t)\times 2=\frac{9}{2}(1-e^{-2t})^2u(t)$ W

$v_L(t)=L\frac{di}{dt}=1\times\frac{-3}{2}(-2)e^{-2t}u(t)\underbrace{-\frac{3}{2}(1-e^{-2t})\delta(t)}_{0}=3e^{-2t}u(t)$

$P_L(t)=v_L(t)i_L(t)=\frac{9}{2}e^{-2t}(1-e^{-2t})u(t)$ توان لحظه‌ای سلف

$p(t)+P_R(t)+P_L(t)=0$



$3\cos 2t=3\angle 0,\ \omega=2$

مثال: توان لحظه‌ای منبع را بدست آورید.

حل: $I=\frac{3\angle 0}{2+2j}=\frac{3}{2\sqrt{2}}\angle -45^\circ=1.06\angle -45^\circ \Rightarrow i(t)=1.06\cos(2t-45^\circ)$

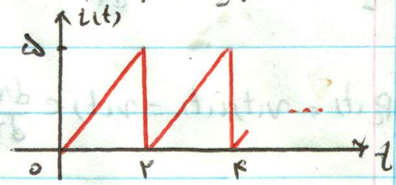
$p(t)=v(t)(-i(t))=-3.18\cos(2t-45^\circ)\cos 2t=-1.59\cos 45^\circ-1.59\cos(4t-45^\circ)$

$=-1.13-1.59\cos(4t-45^\circ)$

توان متوسط: متوسط توان لحظه‌ای را توان متوسط گویند. $P=\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2} p(t)\,dt$

اگر تابع متناوب باشد: $P=\frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_1+T}p(t)\,dt=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}p(t)\,dt$

مثال: اگر جریان عبوری از مقاومت $R=4\Omega$ به شکل زیر باشد توان متوسط را بدست آورید.



$$i(t)=\frac{5}{2}t,\quad 0<t<2$$

$$p(t)=i^2R=\frac{25}{4}t^2\times 4=25t^2,\quad 0<t<2$$

$$P=\frac{1}{2}\int_0^2 p(t)\,dt=\frac{1}{2}\int_0^2 25t^2\,dt=\frac{25}{6}t^3\Big|_0^2=\frac{25\times 8}{6}=\frac{100}{3}=33.3\,W$$

توان متوسط برای توابع غیر متناوب: $P=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}p(t)\,dt$

توان متوسط در حالت ماندگار سینوسی: اگر $i(t)=I_m\cos(\omega t+\varphi),\ v(t)=V_m\cos(\omega t+\theta)$

آنگاه توان لحظه‌ای برابر است با: $p(t)=V_mI_m\cos(\omega t+\varphi)\cos(\omega t+\theta)$

$$=\frac{1}{2}V_mI_m\cos(\theta-\varphi)+\frac{1}{2}V_mI_m\cos(2\omega t+\theta+\varphi)$$

متوسط $\cos(2\omega t+\dots)$ در یک دوره تناوب صفر است. $P=\frac{1}{T}\int_0^T p(t)\,dt=\frac{1}{2}V_mI_m\cos(\theta-\varphi)$

مثال: اگر $v(t)=3\cos(\frac{\pi}{3}t+30^\circ)$ را به امپدانس $Z=2\angle 60^\circ$ اعمال کنیم توان لحظه‌ای و متوسط چقدر است؟

$$I=\frac{3\angle 30}{2\angle 60}=1.5\angle -30\Rightarrow i(t)=1.5\cos(\frac{\pi}{3}t-30^\circ)$$

توان لحظه‌ای: $p(t)=v(t)i(t)=4.5\cos(\frac{\pi}{3}t+30^\circ)\cos(\frac{\pi}{3}t-30^\circ)=2.25\cos(\frac{2\pi}{3}t)+2.25\cos 60^\circ\ W$

توان متوسط: $P=\frac{1}{T}\int_0^T p(t)\,dt=\frac{1}{T}\int_0^T\left(2.25\cos(\frac{2\pi}{3}t)+2.25\cos 60^\circ\right)dt=2.25\cos 60=1.125\,W$

توان متوسط در مقاومت:

$v(t)=V_m\cos\omega t \Rightarrow i(t)=\frac{V_m}{R}\cos\omega t$

$\Rightarrow p(t)=v(t)i(t)=\frac{V_m^2}{R}\cos^2\omega t=\frac{V_m^2}{2R}(1+\cos 2\omega t) \Rightarrow P=\frac{1}{T}\int_0^T p(t)\,dt=\frac{V_m^2}{2R}=\frac{1}{2}I_m^2R$

توان متوسط در سلف:

$v(t)=V_m\cos\omega t \Rightarrow V=V_m\angle 0$

$Z_L=jL\omega=L\omega\angle 90$

$\Rightarrow I=\frac{V_m}{L\omega\angle 90}=\frac{V_m}{L\omega}\angle -90^\circ \Rightarrow i(t)=\frac{V_m}{L\omega}\cos(\omega t-90^\circ)$

$p(t)=v(t)i(t)=\frac{V_m^2}{L\omega}\cos\omega t\cos(\omega t-90^\circ)=\frac{V_m^2}{2L\omega}(\cos(2\omega t-90^\circ)+\cancel{\cos 90^\circ}) \Rightarrow P=\frac{1}{T}\int_0^T p(t)\,dt=0$

یعنی در سلف توان متوسط صفر است

توان متوسط در خازن:

$v(t)=V_m\cos\omega t \Rightarrow V=V_m\angle 0 \Longrightarrow I=\frac{V_m}{Z_C}=jC\omega V_m=V_mC\omega\angle 90^\circ$

$i(t)=V_mC\omega\cos(\omega t+90^\circ) \Longrightarrow p(t)=v(t)i(t)=V_m^2C\omega\cos\omega t\cos(\omega t+90^\circ)=\frac{V_m^2C\omega}{2}(\cos(2\omega t+90^\circ)+\cos 90^\circ)$

$P=\frac{1}{T}\int_0^T p(t)\,dt=0$

توان متوسط در خازن هم صفر است

توجه: اگر توان متوسط را از رابطه $P=\frac{V_mI_m}{2}\cos(\theta-\varphi)=\frac{V_mI_m}{2}\cos(0\pm 90^\circ)=0$

حساب کنیم معلوم بود توان متوسط در خازن و سلف صفر است زیرا اختلاف فاز در

خازن و سلف میان جریان و ولتاژ ± 90 است پس توان متوسط در آن‌ها صفر است.

مثال: توان متوسطی که با گذشتن جریان $I=5\angle 20\ A$ از امپدانس $Z=8-11j\ \Omega$

تولید می‌شود را بدست آورید.

راه حل ا: $v = IZ = 5\angle 20 \times (8-11j) = 5\angle 20 \times 13.6\angle -54^\circ = 68.25\angle -34^\circ$

$P = \frac{V_m I_m}{2}\cos(\theta-\varphi) = \frac{5\times 68.25}{2}\cos(20+34^\circ) = 100W$

راه حل ب: توان مصرف کننده مقاومت است پس $R=8 \Rightarrow P = \frac{1}{2} R I_m^2 = \frac{1}{2}\times 8\times 5^2 = 100W$

مثال: توان متوسط مصرفی $i(t) = \sin t + \sin \pi t$ در مقاومت $R = 1\Omega$ چقدر است؟

$p(t) = Ri^2(t) = \sin^2 t + \sin^2 \pi t + 2\sin t \sin \pi t = \frac{1}{2}(1-\cos 2t) + \frac{1}{2}(1-\cos 2\pi t) + \cos(1+\pi)t + \cos(1-\pi)t$

$P = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} p(t)\,dt = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1$

تذکر: اگر $i(t) = I_0 + I_{m_1}\cos(\omega_1 t+\theta_1) + \dots + I_{m_N}\cos(\omega_N t+\theta_N)$ از مقاومت R عبور کند توان

متوسط برابر است با: $P = \left(I_0^2 + \frac{I_{m_1}^2}{2} + \frac{I_{m_2}^2}{2} + \dots + \frac{I_{m_N}^2}{2}\right)R$

مثال: توان متوسطی که منبع v_s به مقاومت 4Ω می‌دهد را بدست آورید.

الف) $v_s(t) = 8\sin 200t \Rightarrow P = \frac{V_m^2}{2R} = \frac{64}{8} = 8\,W$

ب) $v_s(t) = -5\sin 100t + 4 \Rightarrow P = \frac{V_0^2}{R} + \frac{V_{m_1}^2}{2R} = \frac{16}{4} + \frac{25}{8} = 7.125W$

ج) $v_s(t) = 8\sin 200t - 6\cos(200t - 45^\circ) \Rightarrow \cancel{P = \frac{V_{m_1}^2}{2R} + \frac{V_{m_2}^2}{2R} = \frac{64}{8} + \frac{36}{8} = 8 + \frac{9}{2} = 12.5W}$

$v_s(t) = 8\sin 200t - 6\cos 200t\cos 45^\circ - 6\sin 200t\sin 45^\circ = 5.67\cos(200t + 138.43)$

$\Rightarrow P = \frac{V_m^2}{2R} = \frac{32.14}{8} = 4.02\,W$

پس: ابتدا توابع هم فرکانس را جمع می‌کنیم بعد از فرمول استفاده می‌کنیم

مقادیر ولتاژ و جریان مؤثر:

مقدار مؤثر یک جریان متناوب برابر با مقدار جریان مستقیمی است که در یک مقاومت R توان متوسط یکسان تولید کند.

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T i^2 R\,dt = I_e^2 R$$

$$I_e = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2\,dt} = I_{RMS}$$ (Root Mean Square) (دلیل نامگذاری هم مشخص تعریف است)

مقدار مؤثر (RMS) یک موج سینوسی:

$$i(t) = I_m\cos(\omega t+\varphi) \Rightarrow I_e = I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I_m^2\cos^2(\omega t+\varphi)\,dt} = I_m\sqrt{\frac{1}{2T}\int_0^T (1+\cos(2\omega t+2\varphi))\,dt}$$

$$I_e = I_m\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \Rightarrow V_e = \frac{V_m}{\sqrt{2}}$$

توان متوسط با استفاده از مقادیر مؤثر:

$$P_R = \frac{I_m^2}{2}R = I_e^2 R$$

$$P = \frac{V_m I_m}{2}\cos(\theta-\varphi) = V_e I_e \cos(\theta-\varphi)$$

تعمیم:

$$i(t) = I_0 + I_{m_1}\cos(\omega_1 t+\theta_1) + I_{m_2}\cos(\omega_2 t+\theta_2) + \cdots + I_{m_N}\cos(\omega_N t+\theta)$$

$$I_e = \sqrt{I_0^2 + \frac{I_{m_1}^2}{2} + \frac{I_{m_2}^2}{2} + \cdots + \frac{I_{m_N}^2}{2}} = \sqrt{I_0^2 + I_{e_1}^2 + \cdots I_{e_N}^2}$$

مثال: مقدار مؤثر جریان‌های متناوب زیر را بدست آورید:

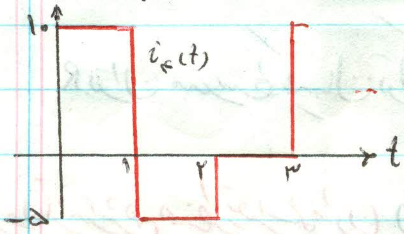
$$i_1(t) = 6\cos 2t \rightarrow I_{1e} = \frac{6}{\sqrt{2}} = 4.24\ A$$

$$i_2(t) = 6\cos 2t + 4\sin(2t+30^\circ) = 6\cos 2t + 4\sin 2t\cos 30 + 4\sin 30\cos 2t = 8.72\cos(2t-23.4^\circ)$$

$$I_{2e} = \frac{8.72}{\sqrt{2}} = 6.16\ A \neq \frac{6}{\sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{2}} = 7.07$$

$$i_3(t) = 6\cos 25t + 5\cos^2 25t = \frac{5}{2} + 6\cos 25t + \frac{5}{2}\cos 50t$$

$$I_{3e} = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{6}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{5}{2\sqrt{2}}\right)^2} = 5.23\,A$$



$$I_{4e} = \sqrt{\frac{1}{3}\int_0^3 i_4^2(t)\,dt} = \sqrt{\frac{1}{3}\left(\int_0^1 100\,dt + \int_1^2 25\,dt + \int_2^3 0\,dt\right)} = \sqrt{\frac{125}{3}} = 6.45\,A$$

توان ظاهری و ضریب توان: اگر $i(t) = I_m\cos(\omega t + \varphi)$ و $v(t) = V_m\cos(\omega t + \theta)$

باشد توان حقیقی، ضریب توان و توان مختلط را بدست آورید

توان متوسط = (توان مصرفی) = توان حقیقی (وات) $P = \frac{1}{2}V_m I_m \cos(\theta - \varphi) = V_e I_e \cos(\theta - \varphi)$ W

PF = ضریب توان = (Power Factor) = $\cos(\theta - \varphi) = \frac{P}{V_e I_e}$

توجه: در حالت سلفی ولتاژ از جریان جلوتر است پس $\theta - \varphi > 0$ در این صورت ضریب توان را

پس فاز (جریان نسبت به ولتاژ پس فاز است) می‌گویند

در حالت **خازنی** جریان جلوتر از ولتاژ است پس $\theta - \varphi < 0$ در این صورت ضریب توان را

پیش فاز می‌گویند

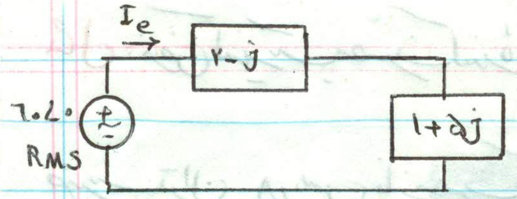
توان ظاهری: واحد ولت آمپر است $|S|$ = توان ظاهری = $V_e I_e$ (VA)

توان اکتیو، راکتیو و مختلط: حقیقی = مصرفی = توان اکتیو = متوسط $P = V_e I_e \cos(\theta - \varphi)$ (W)

واکنشی = موهومی = توان راکتیو $Q = V_e I_e \sin(\theta - \varphi)$ (VAR)

توان مختلط: $S = P + jQ = V_e I_e^* = V_e\angle\theta \, I_e\angle -\varphi = V_e I_e \angle(\theta - \varphi) = V_e I_e\cos(\theta - \varphi) + j V_e I_e \sin(\theta - \varphi)$

$\tan(\theta - \varphi) = \frac{Q}{P}$



مثال: توان متوسط، ظاهری، راکتیو و مختلط کل بار و ضریب توان بار را در مدار روبرو بدست آورید.

حل: $|S| = V_e I_e = 60 \times 12 = 720\ VA$ = توان ظاهری

$$I_e = \frac{60\angle 0}{2-j+1+5j} = 12\angle -53.1^\circ\ A$$

توان متوسط (توان حقیقی یا توان مصرفی)

$$P = V_e I_e \cos(\theta-\varphi) = 720\cos(0+53.1) = 432\,W$$

توان راکتیو

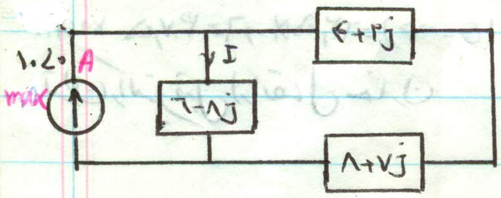
$$Q = V_e I_e \sin(\theta-\varphi) = 720\sin(0+53.1^\circ) = 576\ VAR$$

توان مختلط

$$S = P + jQ = 432 + 576j\ \ VA$$

ضریب توان

$$PF = \cos(\theta-\varphi) = \cos(0+53.1^\circ) = 0.6$$

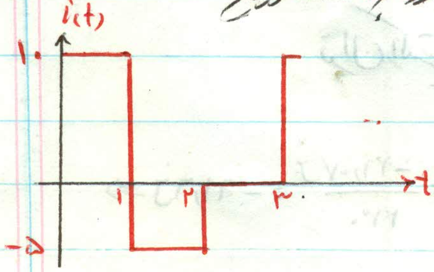


مثال: توانی که امپدانس $6-8j$ از شبکه جذب می‌کند را بدست آورید.

حل:

$$I = \frac{10(12+9j)}{18+j} = 8.32\angle 33.69^\circ \Rightarrow P = \frac{1}{2} I_m^2 R = \frac{1}{2}\times 8.32^2 \times 6 = 207.66\,W$$

مثال: توان متوسطی که منبع جریان در یک مقاومت ۵ اهمی مصرف می‌کند را بدست آورید.

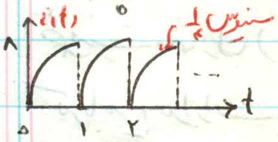


راه اول: مثال ۶-۱۱، I_e را بدست آوردیم:

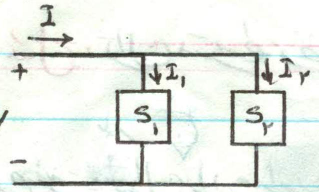
$$I_e = 6.45A \Rightarrow P = I_e^2 R = 6.45^2 \times 5 = 208\,W$$

راه دوم:

$$P = \frac{1}{3}\int_0^3 i^2(t) R\,dt = \frac{1}{3}\left(\int_0^1 100\times 5\,dt + \int_1^2 25\times 5\,dt + \int_2^3 0\times 5\,dt\right) = \frac{625}{3} = 208\,W$$



$$i(t) = 8\sin\frac{\pi}{2}t \Rightarrow P = \frac{1}{1}\int_0^1 64\sin^2\frac{\pi}{2}t \times 5\,dt = 320\int_0^1 \frac{1-\cos\pi t}{2}\,dt = 160\,W$$



مثال: فرض کنید یک مصرف کننده صنعتی $50\,KW$ توان با ضریب توان ۰٫۸ پس فاز مصرف می‌کند و می‌خواهیم برای کم کردن هزینه برق PF را به ۰٫۹۵ پس فاز برسانیم (ولتاژ برق شهر $V_e = 230\angle 0$ و $f = 50\,Hz$)

راه اول: $\frac{Q}{P} = \tan(\theta-\varphi)$ باید $\theta-\varphi$ کوچک شود تا $\cos(\theta-\varphi)$ بزرگ گردد برای این کار باید P اضافه شود یعنی مصرف برای جبران زیاد کنیم که کار خوبی نیست.

راه دوم: افزودن یک خازن به موازات بار

مصرف سلفی $\Leftarrow$ $\theta-\varphi>0 \Leftarrow 0.8$ پس فاز

$$P = V_e I_e \cos(\theta-\varphi) = V_e I_e \times 0.8 = 50 \Rightarrow V_e I_e = |S| = \frac{50}{0.8} = 62.5\,KVA$$ توان ظاهری

$$\left.\begin{array}{l}\cos(\theta-\varphi) = 0.8\\ \theta-\varphi>0\end{array}\right\} \Rightarrow \sin(\theta-\varphi) = 0.6 \rightarrow Q_1 = |S|\sin(\theta-\varphi) = 62.5\times 0.6 = 37.5\,KVAR$$

توان راکتیو قبل از اتصال خازن

$$\text{جدید}\ V_e I_e = |S| = \frac{50}{0.95} = 52.63\,KVA$$

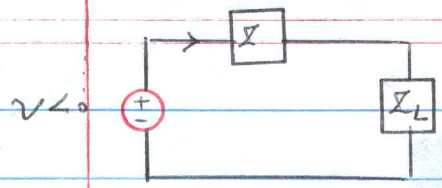
$$\left.\begin{array}{l}\theta-\varphi>0 \quad , \quad \cos(\theta-\varphi) = 0.95\\ 0.95 \text{ پس فاز}\end{array}\right\} \rightarrow \sin(\theta-\varphi) = 0.31 \Rightarrow Q' = |S|\sin(\theta-\varphi) = 52.63\times 0.31$$

$Q' = 16.43\,KVAR$ توان راکتیو بعد از اضافه شدن خازن

$$j\Delta Q = (16.43 - 37.5)j = -21.07j = Q_2 j = V I_2^* \Rightarrow I_2^* = \frac{-21.07j}{230} = -91.6j \Rightarrow$$

$$I_2 = 91.6j \Rightarrow Z_c = \frac{V}{I_2} = \frac{230}{91.6j} = -j\times 2.51 = \frac{1}{jC\omega} \xrightarrow{\omega = 2\pi\times 50} C = 1.27\,mF$$

ظرفیت خازن (بار S_2) که باید به موازات S_1 اضافه شود



قضیه انتقال توان ماکزیمم:

شرط انتقال توان ماکزیمم به بار Z_L آن است که:

$$Z_L = Z^*$$

مثال: اگر $V_{RMS} = 4\angle 0$ و $Z = 2+3j$ باشد برای انتقال توان ماکزیمم به بار Z_L

باید $Z_L = 2-3j$ باشد در این حالت توان برابر است با:

توان بار: $I_{RMS} = \dfrac{4}{2+3j+2-3j} = 1\angle 0 \Rightarrow P = I_{RMS}^2 \times R = 1\times 2 = 2 \quad W$

فصل سیزدهم تحت عنوان مدارهای با تزویج مغناطیسی

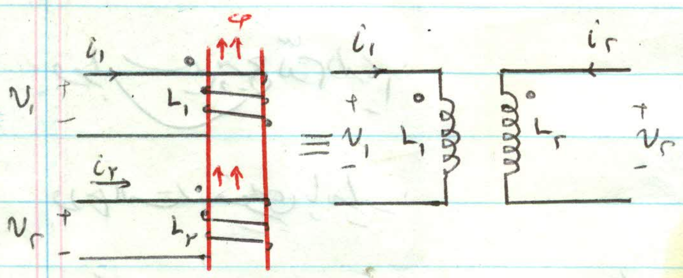
هرگاه جریان ac یا dc در رسانایی جاری شود در اطراف آن میدان مغناطیسی ایجاد می‌شود. در صورتی که جریان عبوری با زمان تغییر کند میدان مغناطیسی متغیر ایجاد می‌شود و این میدان متغیر می‌تواند در سیم پیچ دیگر در نزدیکی سیم پیچ اول ولتاژی را القا کند که آن القای متقابل می‌گویند.

در سیستم‌های خطی شار یا فلوی تولید شده در خود سیم پیچ (خودالقا) برابر است با: $\varphi = Li$

و ولتاژ حاصل از آن برابر است با: $v = \frac{d\varphi}{dt} = L\frac{di}{dt}$

و فلوی حاصل در سیم پیچ دیگر و ولتاژ آن برابر است با: $\varphi = Mi \Rightarrow v = \frac{d\varphi}{dt} = M\frac{di}{dt}$

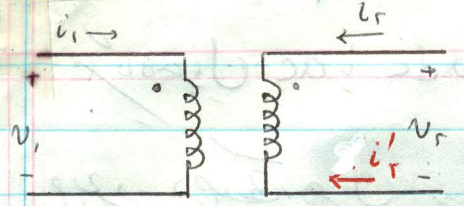
در صورتی که هم خودالقا و هم القای متقابل داشته باشیم صرف‌نظر از علامت آن شار و ولتاژ برابر است با: $\varphi_1 = L_1 i_1 \pm M_{12} i_2 \Rightarrow v_1 = L\frac{di_1}{dt} \pm M_{12}\frac{di_2}{dt}$



قرارداد نقطه: در شکل روبرو سیم پیچ های L_1 و L_2 به گونه‌ای پیچیده شده‌اند که طبق قانون دست راست ورود جریان‌های i_1 و i_2 (با توجه به جهت) شار یا فلوی مغناطیسی هم جهت تولید می‌کند. در مدارها با علامت نقطه‌ای که روی مدار قرار می‌دهند نشان می‌دهند اگر جریان‌های i_1 و i_2 از سر نقطه‌دار وارد شوند شارها با هم جمع می‌شوند: $\varphi_1 = L_1 i_1 + M_{12} i_2$ و $\varphi_2 = M_{21} i_1 + L_2 i_2$

(M_{12} یعنی ضریب تزویج که اثر سیم پیچ دوم را بر روی سیم پیچ اول نشان می‌دهد.)

ولتاژ القای متقابل و خود القا :



برای ولتاژ v_1 ابتدا اثر خود القا را می‌نویسیم : $v_1 = L_1\frac{di_1}{dt} + \dots$

چون جریان i_2 از سر مثبت وارد می‌شود رابطه بالا نوشته شد حال اثر القای متقابل را که می‌نویسیم که

اثر شارها را تقویت کند می‌نویسیم (+) : $v_1 = L_1\frac{di_1}{dt} + M_{12}\frac{di_2}{dt}$

در حالت سینوسی پایدار : $v_1 = jL_1\omega I_1 + jM_{12}\omega I_2$

در صورتی که v_1 را با جریان i_2' می‌نویسیم چون این جریان از سر بی نقطه وارد شده است اثر فلوی i_1

را کم می‌کند یعنی (−) $v_1 = L_1\frac{di_1}{dt} - M_{12}\frac{di_2'}{dt}$

در حالت سینوسی پایدار : $v_1 = jL_1\omega I_1 - jM_{12}\omega I_2'$

درست هم هست زیرا مثل این است که به جای i_2 ، $-i_2'$ گذاشته باشیم .

برای سیم پیچ دوم داریم : $v_2(t) = L_2\frac{di_2}{dt} + M_{21}\frac{di_1}{dt}$

در حالت سینوسی پایدار : $v_2 = jL_2\omega I_2 + jM_{21}\omega I_1$

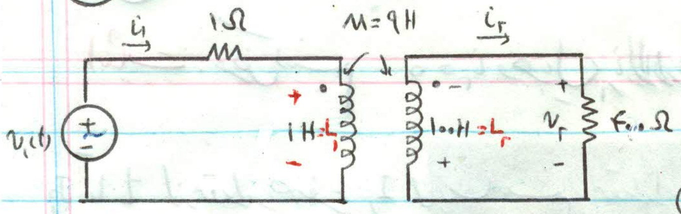
در صورتی که v_2 را بر حسب i_2' بنویسیم : $v_2 + L_2\frac{di_2'}{dt}$ $\Leftarrow$ $v_2 = -L_2\frac{di_2'}{dt} + \dots$

و چون i_1 از سر با نقطه و i_2' از سر بی نقطه وارد می‌شود شار سیم پیچ اول اثر i_2' را کم می‌کند پس

علامت آن باید مثبت شود تا با منفی جمع شود تا کم گردد : $v_2 = -L_2\frac{di_2'}{dt} + M_{21}\frac{di_1}{dt}$

در صورت سینوسی پایدار : $v_2 = -jL_2\omega I_2' + jM_{21}\omega I_1$

۳



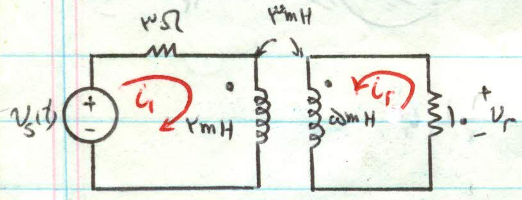
مثال: اگر $v_1(t)=10\cos(10t)$ ، $v_2(t)$ را بدست آورید ($M_{12}=M_{21}=M=9H$)

حل: (از فرمول) $Z_{L_1}=jL_1\omega=10j,\ Z_{L_2}=jL_2\omega=1000j\ ,\ Z_M=jM\omega=90j$

$$\begin{cases}-V_1+I_1+10jI_1-90jI_2=0 \Rightarrow -10+I_1+10jI_1-90jI_2=0 \Rightarrow (1+10j)I_1-90jI_2=10\\ 1000jI_2-90jI_1+400I_2=0 \Rightarrow -90jI_1+(400+1000j)I_2=0\end{cases}$$

$$I_2=\frac{\begin{vmatrix}1+10j & 10\\ -90j & 0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1+10j & -90j\\ -90j & 400+1000j\end{vmatrix}}=\frac{900j}{400+4000j+1000j-10000+8100}=\frac{9j}{-15+50j}=\frac{9\angle 90}{52{,}2\angle 106{,}7^\circ}$$

$I_2=0{/}1724\angle -16{,}7^\circ \Rightarrow V_2=400I_2=68{,}96\angle -16{,}7^\circ \Rightarrow \frac{|V_2|}{|V_1|}=\frac{68{,}96}{10}=6{,}896$ تقویت ولتاژ



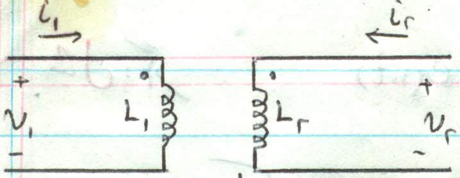
مثال: اگر $v_s(t)=20e^{-1000t}$ (ولت) جبری
$i_1(t)$ و $i_2(t)$ را در حالت ماندگار (پایدار) بدست آورید

$$\begin{cases}-v_s(t)+3i_1+2\times10^{-3}\frac{di_1}{dt}+3\times10^{-3}\frac{di_2}{dt}=0 \Rightarrow (3+0{/}002D)i_1+3\times10^{-3}Di_2=20e^{-1000t}\\ 10i_2+0{/}005\frac{di_2}{dt}+0{/}003\frac{di_1}{dt}=0 \Rightarrow 0{/}003Di_1+(10+0{/}005D)i_2=0\end{cases}$$

$$i_1=\frac{\begin{vmatrix}20e^{-1000t} & 0{/}003D\\ 0 & 10+0{/}005D\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3+0{/}002D & 0{/}003D\\ 0{/}003D & 10+0{/}005D\end{vmatrix}}=\frac{200e^{-1000t}+0{/}1De^{-1000t}}{10^{-6}D^2+0{/}035D+30}=\frac{200e^{-1000t}-100e^{-1000t}}{1-35+30}=-25e^{-1000t}$$

$$i_2(t)=\frac{\begin{vmatrix}3+0{/}002D & 20e^{-1000t}\\ 0{/}003D & 0\end{vmatrix}}{-4}=-15e^{-1000t}$$

حال ثابت می‌کنیم $M_{12}=M_{21}=M$



اثبات: فرض کنیم $i_2=0$ و i_1 را از زمان

۰ تا t_1 از مقدار صفر به I_1 می‌رسانیم. مقدار انرژی ذخیره شده در مدت باز بودن v_2 برابر

است با:

$$W_1=\int_0^{t_1} v_1 i_1\,dt,\qquad v_1=L_1\frac{di_1}{dt}+0 \;\Rightarrow\; W_1=\int_0^{t_1} L_1\frac{di_1}{dt}i_1\,dt=\int_0^{I_1}L_1 i_1\,di_1=\frac{1}{2}L_1I_1^2$$

توان در سیم پیچ دوم به دلیل $i_2=0$ برابر صفر می‌باشد. $v_2 i_2 = v_2\times 0 = 0$ پس $W_2=P\times t=0$

حال از زمان t_1 تا t_2، i_1 را ثابت نگه داشته و i_2 را از صفر به I_2 می‌رسانیم. به دلیل ثابت

بودن i_1 القاء متقابل از سیم پیچ ۱ به ۲ نداریم ولی به دلیل متغیر بودن i_2 القاء متقابل از ۲ به ۱

داریم (M_{12}) انرژی ذخیره شده در سیم پیچ دوم برابر است با:

$$W_2=\int_{t_1}^{t_2} v_2 i_2\,dt,\qquad v_2=L_2\frac{di_2}{dt} \;\Rightarrow\; W_2=\int_{t_1}^{t_2} L_2\frac{di_2}{dt}\times i_2\,dt=\int_0^{I_2}L_2 i_2\,di_2=\frac{1}{2}L_2I_2^2$$

و انرژی ذخیره شده در L_1 برابر است با:

$$W_3=\int_{t_1}^{t_2} v_1 I_1\,dt,\qquad v_1=M_{12}\frac{di_2}{dt} \;\Rightarrow\; W_3=I_1\int_0^{I_2}M_{12}\frac{di_2}{dt}\,dt=M_{12}I_1I_2$$

پس کل انرژی در این حالت برابر است با:

$$W=W_1+W_2+W_3=\frac{1}{2}L_1I_1^2+\frac{1}{2}L_2I_2^2+M_{12}I_1I_2$$

حال اگر ابتدا i_2 از صفر به I_2 (در زمان قبلی) برسد و سپس i_1 از صفر به I_1 برسد (در همان مدت قبل)

انرژی کل برابر است با:

$$W'=\frac{1}{2}L_1I_1^2+\frac{1}{2}L_2I_2^2+M_{21}I_1I_2$$

چون در هر دو حالت انرژی‌ها برابر است پس:

$$W=W' \Rightarrow M_{12}=M_{21}$$

توجه: اگر جریان یکی از سر نقطه و یکی از بی‌نقطه وارد شود داریم: $W=\frac{1}{2}L_1I_1^2+\frac{1}{2}L_2I_2^2-MI_1I_2$

تعریف: ضریب تزویج را با $K \triangleq \frac{M}{\sqrt{L_1L_2}}$ نشان می‌دهند و همواره عددی بین صفر و یک است.

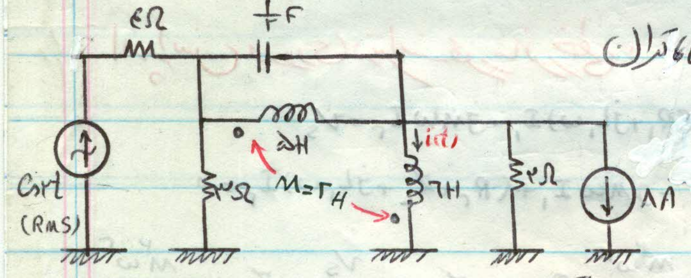
چرا: M و $\sqrt{L_1L_2}$ مثبت یا صفر است پس $K\geq 0$ و چون انرژی همواره مثبت است

$$W=\frac{1}{2}L_1I_1^2+\frac{1}{2}L_2I_2^2-MI_1I_2=\frac{1}{2}(\sqrt{L_1}I_1-\sqrt{L_2}I_2)^2+\sqrt{L_1L_2}I_1I_2-MI_1I_2\geq 0$$

چون رابطه بالا باید برای همه مقادیر درست باشد پس $\sqrt{L_1L_2}\geq M \Rightarrow k=\frac{M}{\sqrt{L_1L_2}}\leq 1$

پس: $0\leq k=\frac{M}{\sqrt{L_1L_2}}\leq 1$ یعنی اگر شارها از سیم پیچ توأم عبور نکنند $K=0$

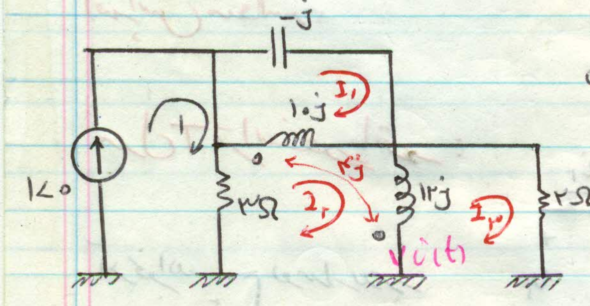
و اگر همه فلوها (شارها) از سیم پیچ توأم عبور کند $K=1$ می‌باشد.



مثال (دی - ۸۱) در مدار شکل مقابل جریان i_0 کدام

مصرف توان ظاهری در مقاومت ۲Ω بدست آورید.

حل: از جمع آثار استفاده می‌کنیم اثر منبع ۸A را حذف می‌کنیم عنصر ۴Ω به دلیل سری بودن با Cos2t (منبع جریان) حذف می‌شود:



$\omega = 2\ rad/s$

$$\begin{cases} -jI_1+10j(I_1-I_2)+4j(I_2-I_3)=0 \quad (1)\\ 3(I_2-1)+10j(I_2-I_1)+12j(I_2-I_3)-4j(I_2-I_3)-4j(I_2-I_1)=0\\ 2I_3+12j(I_3-I_2)-4j(I_1-I_2)=0\end{cases}$$

$$(1)\Rightarrow I_3=2.25I_1-1.5I_2 \Rightarrow \begin{cases}-24jI_1+(3+26j)I_2=3\\ (4.5+23j)I_1-(3+26j)I_2=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_1=0.65\angle 12.5\\ I_2=0.58\angle 8^\circ\\ I_0=I_2-I_3=+0.115\angle -90^\circ\end{cases}$$

$i_0(t)=0.115\cos(2t-90^\circ)$

حال منبع جریان Cos2t را باز می‌کنیم و اثر منبع جریان ۸A را بررسی می‌کنیم $(\omega=0)$

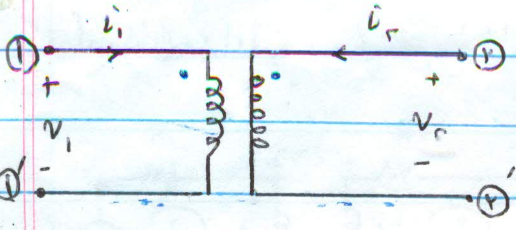
در این حالت خازن باز و سلف اتصال کوتاه می‌شود: $\frac{1}{jC\omega}=\infty$, $jL\omega=0$

$i'(t)=-8A \Rightarrow i(t)=i'(t)+0.115\cos(2t-90^\circ)=-8+0.115\cos(2t-90^\circ)$

جریان 8A باعث عبور جریان از مقاومت 2Ω نمی‌شود: $I_3=0.057+0.195j \Rightarrow V_3=2I_3$

$S=V_3 I_3^*=2(0.057+0.195j)(0.057-0.195j)=0.726\ VA \Rightarrow P=|S|=0.726W$

چون عنصر مقاومت است توان مصرفی، ظاهری و مختلط برابر است.



سلف تزویج از دیدی دیگر

در صورت تزویج بودن جریان‌ها روابط میان شارهای φ_1

φ_2 و جریان‌ها i_1 و i_2 اگر خطی نمی‌باشند در این حالت:

$$\begin{cases}\varphi_1=f_1(i_1,i_2)\\ \varphi_2=f_2(i_1,i_2)\end{cases}$$

$$\text{و}\begin{cases}v_1=\frac{d\varphi_1}{dt}=\frac{\partial f_1}{\partial i_1}\times\frac{di_1}{dt}+\frac{\partial f_1}{\partial i_2}\times\frac{di_2}{dt}\\ v_2=\frac{d\varphi_2}{dt}=\frac{\partial f_2}{\partial i_1}\times\frac{di_1}{dt}+\frac{\partial f_2}{\partial i_2}\times\frac{di_2}{dt}\end{cases}$$

در صورتی که سلف تزویج شده خطی و تغییرناپذیر با زمان باشد شار باید تابع خطی جریان‌ها باشد و به دلیل

تغییرناپذیر بودن ضرایب این توابع باید مقادیر ثابت باشند:

$$\begin{cases}\varphi_1(t)=L_{11}i_1(t)+M_{12}i_2(t)\\ \varphi_2(t)=M_{21}i_1(t)+L_{22}i_2(t)\end{cases}\xrightarrow[\text{فاراده}]{\text{طبق قانون}}\begin{cases}v_1=L_{11}\frac{di_1}{dt}+M\frac{di_2}{dt}\\ v_2=M\frac{di_1}{dt}+L_{22}\frac{di_2}{dt}\end{cases}$$

سلف تزویج با چند سیم پیچ: اگر بیش از دو سلف خطی داشته باشیم می‌توان نوشت:

$$\varphi_1 = L_{11} i_1 + L_{12} i_2 + L_{13} i_3$$

$$\varphi_2 = L_{21} i_1 + L_{22} i_2 + L_{23} i_3 \Rightarrow \varphi = L i \quad , \quad L = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \text{ و } v = \frac{d\varphi}{dt} = L \frac{di}{dt}$$

$$\varphi_3 = L_{31} i_1 + L_{32} i_2 + L_{33} i_3$$

ماتریس L همواره متقارن است $L_{12} = L_{21} \ , \ L_{13} = L_{31} \ , \ L_{23} = L_{32}$

Γ = ماتریس ضریب القای دلیل (Recriprical inductance matrix) $\quad i = L^{-1} \varphi = \Gamma \varphi$

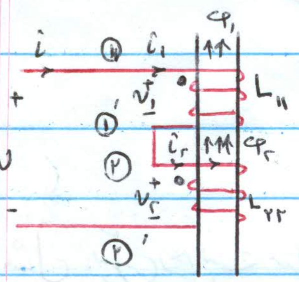
به عنوان مثال در دو سلف داریم:

$$\begin{cases} i_1 = \Gamma_{11}\varphi_1 + \Gamma_{12}\varphi_2 = \Gamma_{11}\int_0^t v_1(t')dt' + \Gamma_{12}\int_0^t v_2(t')dt' + i_1(0) \\ i_2 = \Gamma_{21}\varphi_1 + \Gamma_{22}\varphi_2 = \Gamma_{21}\int_0^t v_1(t')dt' + \Gamma_{22}\int_0^t v_2(t')dt' + i_2(0) \end{cases}$$

در حالت دائمی سینوسی:

$$\begin{cases} I_1 = \frac{\Gamma_{11}}{j\omega} V_1 + \frac{\Gamma_{12}}{j\omega} V_2 \\ I_2 = \frac{\Gamma_{21}}{j\omega} V_1 + \frac{\Gamma_{22}}{j\omega} V_2 \end{cases}$$

اتصال سری سلفهای تزویج:



در صورت سری شدن سلفهای تزویج M سلف معادل چیست؟

$$i = i_1 = i_2 \ , \ v = v_1 + v_2 \Rightarrow \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi_1}{dt} + \frac{d\varphi_2}{dt} \xrightarrow{\varphi(0) = \varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0}$$

$$\Rightarrow \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 \quad \Rightarrow \varphi = (L_{11} + 2M + L_{22}) i \Rightarrow L = \frac{\varphi}{i} = L_{11} + L_{22} + 2M$$ سلف معادل

$$\varphi_1 = L_{11} i_1 + M i_2$$

$$\varphi_2 = M i_1 + L_{22} i_2$$

مثال: اگر $L_{11} = 5$ و $L_{22} = 2$ و $M = 3$ باشد: $L = 5 + 2 + 6 = 13\ H$

در صورتی که در مثال فوق سرهای ۲ و '۲ تعریف شود:

$$i = i_1 = -i_2$$

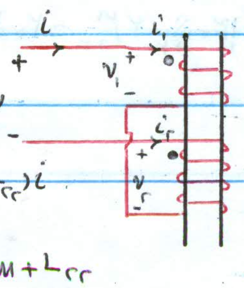
$$v = v_1 - v_2 \Rightarrow \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi_1}{dt} - \frac{d\varphi_2}{dt} \Rightarrow \varphi = \varphi_1 - \varphi_2$$

$$\varphi_1 = L_{11} i_1 + M i_2 = L_{11} i - M i$$

$$\varphi_2 = L_{22} i_2 + M i_1 = -L_{22} i + M i$$

$$\Rightarrow \varphi = (L_{11} - 2M + L_{22}) i$$

$$L = \frac{\varphi}{i} = L_{11} - 2M + L_{22}$$

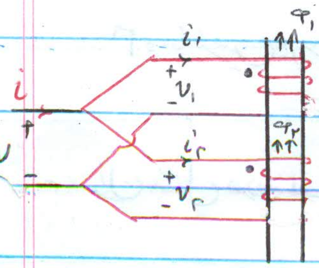


پس اگر در اتصال سری، سر نقطه دار به نقطه متصل شود علامت M مثبت ($L = L_{11}+L_{22}+2M$)

و اگر سر بی نقطه دار هم با بی نقطه هم وصل شوند علامت M منفی خواهد شد. ($L = L_{11}+L_{22}-2M$)

مثال: با مقادیر قبل $L = L_{11}+L_{22}-2M = 5+2-6 = 1\ H$

اتصال موازی سلف تزویج



$$\varphi = Li \Leftrightarrow i = L^{-1}\varphi = \Gamma\varphi$$

$$i_1(0)=\varphi_1(0)=i_2(0)=\varphi_2(0)=0$$

$$i_1 = \Gamma_{11}\varphi_1 + \Gamma_{12}\varphi_2$$

$$i_2 = \Gamma_{21}\varphi_1 + \Gamma_{22}\varphi_2$$

$$i = i_1 + i_2$$

$$\Rightarrow i = i_1+i_2 = (\Gamma_{11}+\Gamma_{12}+\Gamma_{21}+\Gamma_{22})\varphi$$

$$\Rightarrow \Gamma = \frac{i}{\varphi} = \Gamma_{11}+\Gamma_{12}+\Gamma_{21}+\Gamma_{22} = \Gamma_{11}+\Gamma_{22}+2\Gamma_{12}$$

$$v_1 = v_2 \Rightarrow \frac{d\varphi_1}{dt} = \frac{d\varphi_2}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \Rightarrow \varphi = \varphi_1 = \varphi_2$$

تذکر: درحالتی که سر بی نقطه داری نقطه به هم وصل شوند ضریب Γ_{12} منفی خواهد شد:

$$\Gamma = \Gamma_{11}+\Gamma_{22}-2\Gamma_{12}$$

مثال: اگر $L_1=5$ ، $L_2=2$ و $M=3$ باشد

$$\varphi = LI \Rightarrow \begin{bmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5 & 3\\ 3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_1\\ i_2\end{bmatrix}$$

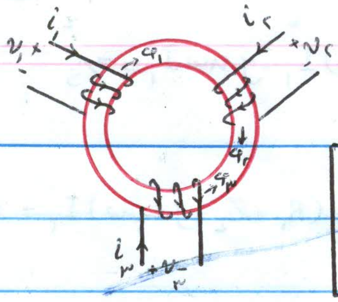
در شکل فوق سلف معادل را به دست آورید

$$I = L^{-1}\varphi \Rightarrow \begin{bmatrix}i_1\\ i_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & -3\\ -3 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{bmatrix}$$

$$\Gamma = \Gamma_{11}+\Gamma_{22}+2\Gamma_{12} = 2+5-2\times3 = 1\ H^{-1}$$

درصورتی که سرهای نقطه داری نقطه به هم وصل شده باشند $\Gamma = \Gamma_{11}+\Gamma_{22}-2\Gamma_{12} = 2+5+2\times3 = 13\ H^{-1}$

سلف با چند سیم پیچی و ماتریس ضریب القا



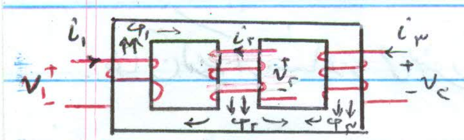
مثال: در شکل مقابل ماتریس L را بنویسید ($L_{11}=2$, $L_{22}=3$, $L_{33}=4$)

$$\begin{bmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\\ \varphi_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 2 & -1\\ 2 & 3 & -2\\ -1 & -2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_1\\ i_2\\ i_3\end{bmatrix}$$

($L_{12}=L_{21}=2$, $L_{13}=L_{31}=-1$ و $L_{23}=L_{32}=-2$)

در روابط بالا φ_1 و φ_2 هم جهت ($L_{12}>0$) و φ_1 و φ_3 غیر هم جهت ($L_{13}<0$) و φ_2 و φ_3 غیر هم جهت است ($L_{23}<0$)

مثال: در شکل مقابل ماتریس L را بنویسید. $L_{11}=2$ ، $L_{22}=3$ ، $L_{33}=4$ ، $L_{12}=L_{21}=2$ ، $L_{13}=L_{31}=1$

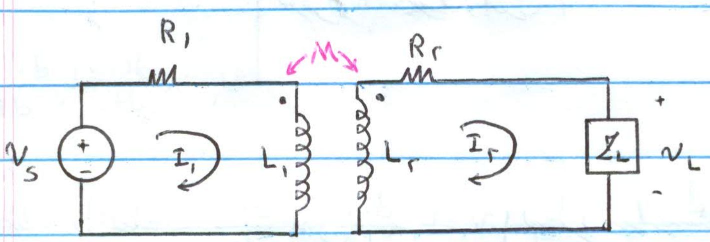


(φ_1 با φ_2 و φ_3 هم جهت $L_{12}>0$ و $L_{13}>0$) ($L_{23}=L_{32}=-2$

و φ_2 با φ_1 هم جهت و با φ_3 غیر هم جهت است.)

$$\begin{bmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\\ \varphi_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 2 & 1\\ 2 & 3 & -2\\ 1 & -2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_1\\ i_2\\ i_3\end{bmatrix}$$

ترانسفورماتور خطی: یک ترانسفورماتور خطی از یک سیم پیچ اولیه L_1 و ثانویه L_2 و متقابل M تشکیل شده است و رابطه میان φ و جریان خطی است.



امپدانس ورودی در ترانسفورماتور خطی:

$$\begin{cases}(R_1+jL_1\omega)I_1-jM\omega I_2=V_s\\ jL_2\omega I_2+R_2I_2+Z_LI_2-jM\omega I_1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(R_1+jL_1\omega)I_1-jM\omega I_2=V_s\\ -jM\omega I_1+(R_2+Z_L+jL_2\omega)I_2=0\end{cases}$$

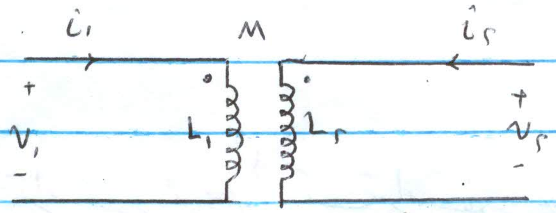
$$\Rightarrow I_2=\frac{jM\omega I_1}{R_2+Z_L+jL_2\omega}\Rightarrow V_s=\left(R_1+jL_1\omega+\frac{M^2\omega^2}{R_2+Z_L+jL_2\omega}\right)I_1$$

$$Z_{11}\triangleq R_1+jL_1\omega\ ,\ Z_{22}\triangleq R_2+jL_2\omega+Z_L$$

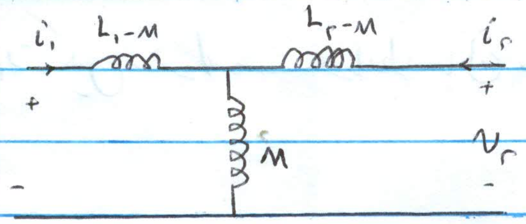
$$Z_{in}=\frac{V_s}{I_1}=Z_{11}+\frac{M^2\omega^2}{Z_{22}}$$ امپدانس ورودی

همانطور که مشاهده می‌شود وجود امپدانس تزویج Z_{in} را تغییر داده است.

مدل T ترانسفورماتور



اگر بخواهیم مدار روبرو را در ورودی و خروجی معادل مدار زیر باشد باید روابط



برقرار باشد که مدل T

$$\begin{cases}v_1=L_1\frac{di_1}{dt}+M\frac{di_2}{dt}\\ v_2=M\frac{di_1}{dt}+L_2\frac{di_2}{dt}\end{cases}$$

مدل T

چنین است. توجه: ممکن است L_2-M یا L_1-M منفی شود که ساخت فیزیکی آن ممکن نمی‌باشد

و خوبی مدل آن است که اثر تزویج وجود ندارد و تنها سه سلف دیده می‌شود.

مدل π : از روابط ترانسفورماتور خطی را بازنویسی کنیم :

$$\begin{cases} v_1 = L_1 \dfrac{di_1}{dt} + M \dfrac{di_2}{dt} \\ v_2 = M \dfrac{di_1}{dt} + L_2 \dfrac{di_2}{dt} \end{cases}$$

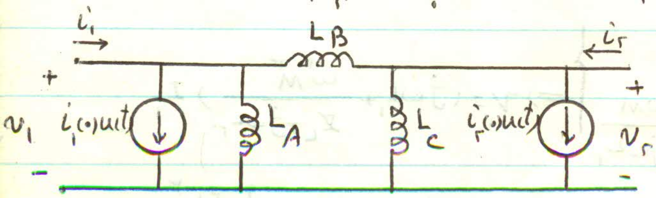
$$\frac{M}{L_2} v_2 - \frac{M^2}{L_2}\frac{di_1}{dt} = M\frac{di_2}{dt} \Rightarrow v_1 = L_1\frac{di_1}{dt} + \frac{M}{L_2}v_2 - \frac{M^2}{L_2}\frac{di_1}{dt} \Rightarrow \frac{di_1}{dt} = \frac{L_2}{L_1L_2-M^2}v_1 - \frac{M}{L_1L_2-M^2}v_2$$

حال از صفر تا t انتگرال می‌گیریم :

$$i_1 - i_1(0)u(t) = \frac{L_2}{L_1L_2-M^2}\int_0^t v_1\,dt - \frac{M}{L_1L_2-M^2}\int_0^t v_2\,dt$$

به روش مشابه :

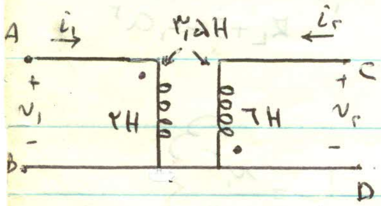
$$i_2 - i_2(0)u(t) = \frac{-M}{L_1L_2-M^2}\int_0^t v_1\,dt + \frac{L_1}{L_1L_2-M^2}\int_0^t v_2\,dt$$



$$L_A = \frac{L_1L_2-M^2}{L_2-M}, \quad L_B = \frac{L_1L_2-M^2}{M}, \quad L_C = \frac{L_1L_2-M^2}{L_1-M}$$

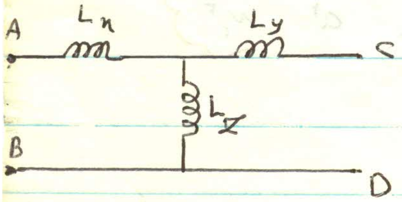
جریان اولیه L_A ، L_B و L_C هم صفر است

مثال : در مدار زیر معادل T و π را بدست آورید



حل : می‌بینیم نقطه‌گذاری عکس است در روابط قبلی

$$\begin{cases} v_1 = L_1\dfrac{di_1}{dt} - M\dfrac{di_2}{dt} \\ v_2 = L_2\dfrac{di_2}{dt} - M\dfrac{di_1}{dt} \end{cases}$$



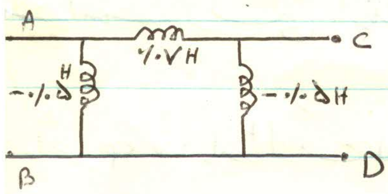
مدار معادل T به جای M ، ‎-M قرار می‌دهیم پس :

$$L_x = L_1 + M = 2 + 3.5 = 5.5\,H, \quad L_z = -M = -3.5\,H, \quad L_y = L_2 + M = 6 + 3.5 = 9.5\,H$$

در مدل π هم به جای M ، ‎-M می‌گذاریم :

$$L_A = \frac{L_1L_2-M^2}{L_2+M} = \frac{12-12.25}{6+3.5} = -0.05\,H$$

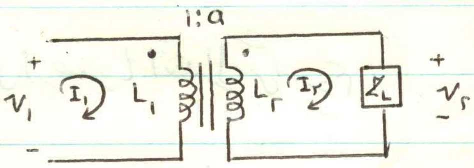
$$L_B = \frac{L_1L_2-M^2}{-M} = \frac{12-12.25}{-3.5} = 0.07\,H, \quad L_C = \frac{L_1L_2-M^2}{L_1+M} = \frac{12-12.25}{2+3.5} \simeq -0.045 \simeq -0.05\,H$$



جریان‌های اولیه را هم صفر فرض می‌کنیم

ترانسفورماتور ایده‌آل : در یک ترانس ایده‌آل تزویج بالا است ($K \simeq 1$) و راکتانس‌های اولیه و ثانویه

(L_1 و L_2) در مقایسه با امپدانس‌های اولیه و ثانویه بسیار بزرگ است. برای انجام این کار در محدوده‌ای از فرکانس‌ها از هسته آهنی استفاده می‌کنند. در این صورت روابط را به شکل زیر خلاصه می‌کنیم:



در الکترومغناطیس داریم:

$$\left.\begin{array}{l} L_1=\mu\mu_0 N_1^2 lA \\ L_2=\mu\mu_0 N_2^2 lA \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{L_2}{L_1}=\frac{N_2^2}{N_1^2}=a^2$$

$$k=\frac{M}{\sqrt{L_1L_2}}=1 \Rightarrow M=\sqrt{L_1L_2} \quad , \quad Z_L \ll L_2 \quad \text{(فرض)}$$

$$\left\{\begin{array}{l} V_1=I_1 j\omega L_1 - j\omega M I_2 \\ 0=-I_1 j\omega M + I_2(Z_L+j\omega L_2) \Rightarrow I_2=\dfrac{I_1 j\omega M}{Z_L+j\omega L_2} \end{array}\right\} \Rightarrow V_1=\left(j\omega L_1+\frac{\omega^2M^2}{Z_L+j\omega L_2}\right)I_1$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow Z_{in}=\dfrac{V_1}{I_1}=j\omega L_1+\dfrac{\omega^2M^2}{Z_L+j\omega L_2}=j\omega L_1+\dfrac{\omega^2L_1L_2}{Z_L+j\omega L_2} \\ L_2=a^2L_1 \end{array}\right\} \Rightarrow Z_{in}=j\omega L_1+\frac{\omega^2a^2L_1^2}{Z_L+j\omega L_1a^2}$$

$$\Rightarrow Z_{in}=\frac{j\omega L_1 Z_L-\cancel{\omega^2L_1^2a^2}+\cancel{\omega^2a^2L_1^2}}{\underbrace{Z_L}_{0}+\underbrace{j\omega L_2}_{j\omega L_1a^2}} \simeq \frac{j\omega L_1 Z_L}{j\omega L_1a^2}=\frac{Z_L}{a^2} \Rightarrow \frac{Z_{in}}{Z_L}=\frac{1}{a^2}=\frac{N_1^2}{N_2^2}$$

$$\frac{I_2}{I_1}=\frac{j\omega M}{\underbrace{Z_L}_{0}+j\omega L_2} \simeq \frac{M}{L_2}=\sqrt{\frac{L_1}{L_2}}=\frac{1}{a}=\frac{N_1}{N_2}$$

$$\left.\begin{array}{l} V_2=I_2Z_L \\ V_1=I_1Z_{in} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{V_2}{V_1}=\frac{I_2}{I_1}\times\frac{Z_L}{Z_{in}}=\frac{1}{a}\times a^2=a=\frac{N_2}{N_1}$$

یا به عبارت دیگر!

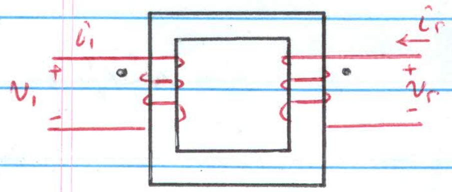
در ترانسفورماتور ایده‌آل: ۱- بازده ۱۰۰٪ است. ۲- ضریب تزویج یک است و نشتی شار نداریم. ۳- ضریب خودالقایی سیم‌پیچ‌ها بی‌نهایت است (L_1 و L_2).

اگر φ شار گذرا از یک حلقه باشد و تعداد حلقه‌های اولیه N_1 و ثانویه N_2 باشد در این صورت:

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_1=N_1\varphi \Rightarrow V_1=\dfrac{d\varphi_1}{dt}=N_1\dfrac{d\varphi}{dt} \\ \varphi_2=N_2\varphi \Rightarrow V_2=\dfrac{d\varphi_2}{dt}=N_2\dfrac{d\varphi}{dt} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{V_1}{V_2}=\frac{N_1}{N_2}=\frac{1}{a}$$

در صورتی که رلوکتانس R باشد نیروی محرکه مغناطیسی برابر است با:

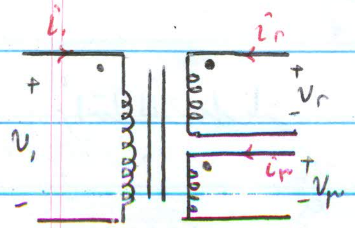
$$m.m.f = R\varphi = N_1 i_1 + N_2 i_2 = 0 \Rightarrow \frac{i_1(t)}{i_2(t)} = -\frac{N_2}{N_1} \rightarrow \frac{v_1}{v_2} = -\frac{i_2}{i_1} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{1}{a}$$



یعنی تلفات صفر است زیرا $\Rightarrow v_1 i_1 + v_2 i_2 = 0$

مجموع توان ورودی و خروجی برابر است.

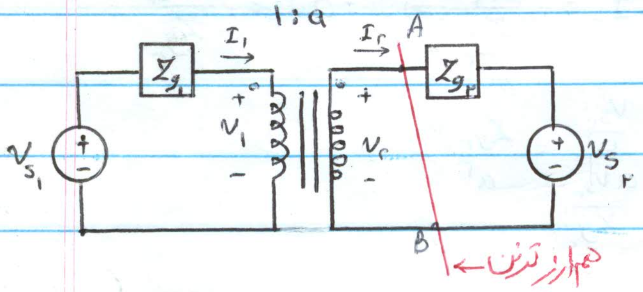
توجه: در صورتی که یک ترانسفورماتور ایده‌آل سه سیم‌پیچ داشته باشیم:



$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{v_1}{N_1} = \frac{v_2}{N_2} = \frac{v_3}{N_3} \quad , \quad N_1 i_1 + N_2 i_2 + N_3 i_3 = 0$$

همارز تونن ترانسفورماتور ایده‌آل از دید ثانویه:

$$\frac{v_2}{v_1} = a \;,\; I_1 = a I_2 \;,\; a = \frac{N_2}{N_1}$$



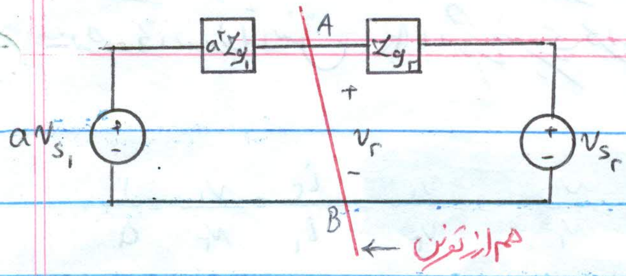
فرض کنید بخواهیم همارز تونن را از دید AB (شکل روبرو) بدست آوریم. ابتدا ولتاژ مدار باز را حساب می‌کنیم $I_2 = 0$ پس $I_1 = aI_2 = 0$ در این صورت:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= v_{s_1} \\ v_{oc} &= v_2 = a v_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow v_{oc} = a v_{s_1}$$

حال جریان اتصال کوتاه I_{sc} را بدست می‌آوریم، پس $v_2 = 0$:

$$v_1 = \frac{v_2}{a} = 0 \Rightarrow I_1 = \frac{v_{s_1}}{Z_{g_1}} \Rightarrow I_2 = I_{sc} = \frac{I_1}{a} = \frac{v_{s_1}}{a Z_{g_1}}$$

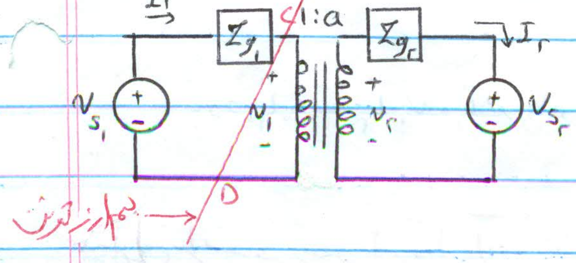
$$Z_{th} = \frac{v_{oc}}{I_{sc}} = \frac{a v_{s_1}}{\frac{v_{s_1}}{a Z_{g_1}}} = a^2 Z_{g_1}$$



این مدار وقتی درست است که اولیه و ثانویه هیچ گونه ارتباط الکتریکی و تبادل جریان نداشته باشند.

$a=\frac{v_2}{v_1}=\frac{I_1}{I_2}$

هم ارز ترانسفورماتور از دید اولیه: اگر هم ارز تونن از دید CD را بدست آوریم:



اتصال مدار باز:

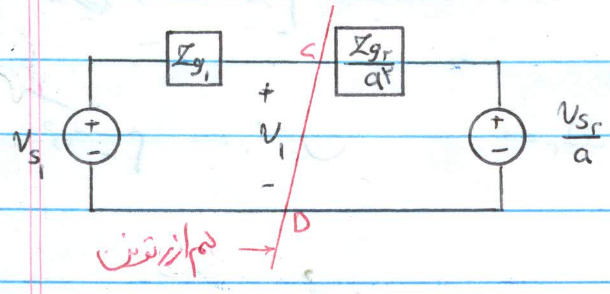
$I_1=0 \Rightarrow I_2=0$

$v_2=v_{s_2} \Rightarrow v_1=v_{oc}=\frac{v_2}{a}=\frac{v_{s_2}}{a}$

و حال جریان اتصال کوتاه:

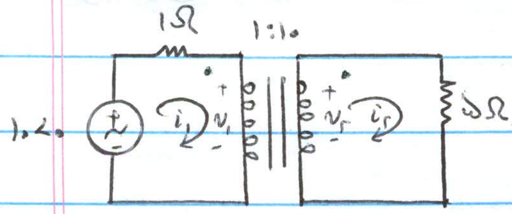
$v_1=0 \Rightarrow v_2=0 \Rightarrow v_{s_2}=-Z_{g_2}I_2 \Rightarrow I_2=-\frac{v_{s_2}}{Z_{g_2}} \Rightarrow I_1=aI_2=-\frac{av_{s_2}}{Z_{g_2}}$

$I_{sc}=-I_1=\frac{av_{s_2}}{Z_{g_2}} \Rightarrow Z_{th}=\frac{v_{th}}{I_{sc}}=\frac{v_{oc}}{I_{sc}}=\frac{\frac{v_{s_2}}{a}}{\frac{av_{s_2}}{Z_{g_2}}}=\frac{Z_{g_2}}{a^2}$



پس با توجه به هم ارز تونن یکی از ویژگی های ترانسفورماتور ایده آل خاصیت تطبیق امپدانس است

مثال: در مدار روبرو i_1 و v_1 را بدست آورید.



$a=\frac{N_2}{N_1}=10$

$\frac{v_1}{v_2}=\frac{1}{10} \Rightarrow v_2=10v_1$

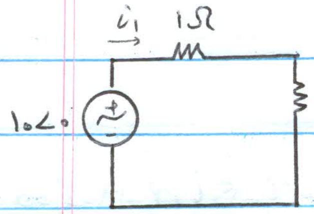
$\frac{i_1}{i_2}=\frac{10}{1} \Rightarrow i_1=10i_2$

$$\left\{\begin{array}{l} -۱۰+i_1+v_1=0 \\ -v_2+۵i_2=0 \Rightarrow v_2=۵i_2 \Rightarrow ۱۰v_1=۵\times\frac{۱}{۱۰}I_1 \Rightarrow i_1=۲۰v_1 \end{array}\right\} \Rightarrow ۱۰=۲۰v_1+v_1=۲۱v_1 \Rightarrow v_1=\frac{۱۰}{۲۱}$$

یا $v_1=۰٫۴۸$ ولت

$v_2=۱۰v_1=۴٫۸$ ولت $\Rightarrow i_2=\frac{v_2}{۵}\simeq\frac{۴٫۸}{۵}=٫۹۶\ A$

روش دوم: انتقال به اولیه

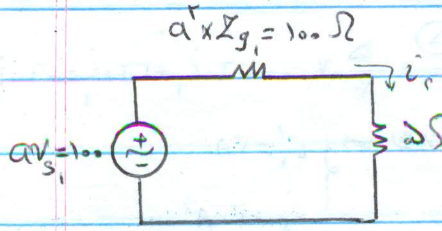


$$\frac{Z_{g_2}}{a^2}=\frac{۵}{۱۰۰}\ \Omega$$

$$i_1=\frac{۱۰}{۱+۰٫۰۵}=۹٫۵۲\ A \Rightarrow i_2=\frac{i_1}{۱۰}=٫۹۵\ A$$

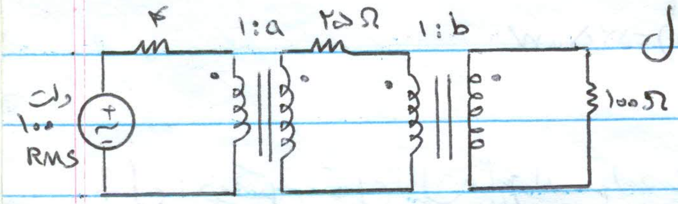
$v_2=۵i_2=۴٫۷۵$ ولت

روش سوم: انتقال به ثانویه



$i_2=\frac{۱۰۰}{۱۰۵}=۰٫۹۵۲\ A \Rightarrow v_2=۵i_2=۴٫۷۵$ ولت

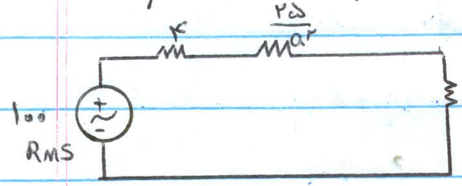
مثال: مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که منبع ایده‌آل ۱kW توان تولید کند و نصف آن به بار ۱۰۰Ω برسد.



حل: بار از دید منبع

$$P=\frac{V^2}{R_{eq}} \Rightarrow R_{eq}=\frac{V^2}{P}=\frac{۱۰^۴}{۱۰۰۰}=۱۰\ \Omega$$

مدار معادل از دید اولیه برابر است با:



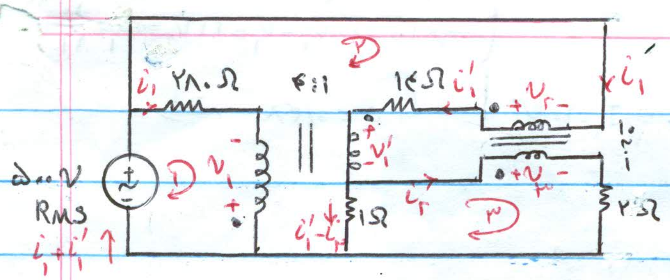
$$\frac{\frac{۱۰۰}{b^2}}{a^2}=\frac{۱۰۰}{a^2b^2}$$

شرط انتقال توان ماکزیمم:

$$\left.\begin{array}{l} ۴+\frac{۲۵}{a^2}=\frac{۱۰۰}{a^2b^2} \quad (۱) \\ ۴+\frac{۲۵}{a^2}+\frac{۱۰۰}{a^2b^2}=۱۰ \end{array}\right\} \Rightarrow ۴+\frac{۲۵}{a^2}+۴+\frac{۲۵}{a^2}=۱۰$$

$$\Rightarrow \frac{۲\times۲۵}{a^2}=۲ \Rightarrow a=۵ \xrightarrow{(۱)} ۴+۱=\frac{۱۰۰}{۲۵b^2} \Rightarrow b^2=\frac{۴}{۵} \Rightarrow b=\frac{۲}{\sqrt{۵}}$$

مثال: توانی که منبع تحویل می‌کند را بیابید



$$\frac{i_1}{i_1'} = \frac{1}{4} \Rightarrow i_1' = 4i_1 \quad , \quad \frac{i_2}{i_1'} = \frac{10}{1} \Rightarrow i_2 = 10 i_1' = 40 i_1 \qquad \text{I}$$

$$\frac{v_1}{v_1'} = \frac{4}{1} \Rightarrow v_1' = \frac{1}{4} v_1 \quad , \quad \frac{v_2}{v_3} = \frac{10}{1} \Rightarrow v_2 = 10 v_3$$

(1) $500 = 280 i_1 - v_1$

(2) $-v_2 + 14 i_1' + v_1' + 1(i_1' - i_2) + v_1 - 280 i_1 \xrightarrow{\text{I}} -10 v_3 + 56 i_1 + \frac{1}{4} v_1 + 4 i_1 - 40 i_1 + v_1 - 280 i_1 = 0$

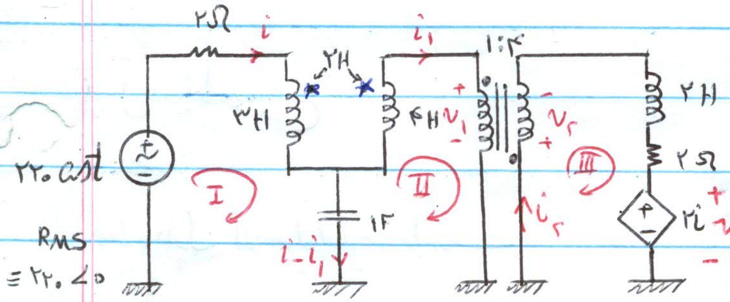
$\Rightarrow -260 i_1 + \frac{5}{4} v_1 = 10 v_3$ (5)

(3) $v_3 + 2 i_2 - (i_1' - i_2) = 0 \Rightarrow v_3 = -120 i_1 + 4 i_1 = -116 i_1 \xrightarrow{(5)} \frac{5}{4} v_1 = -1160 i_1 + 260 i_1 = -900 i_1$

$\Rightarrow v_1 = -720 i_1 \xrightarrow{(1)} 500 = 280 i_1 + 720 i_1 \Rightarrow i_1 = 0.5\,A(RMS) \Rightarrow \begin{cases} i_1' = 2A \\ i_2 = 20A \end{cases}$

$\Rightarrow P = (280 \times i_1^2 + 14 \times i_1'^2 + 2 i_2^2 + 1(i_1' - i_2)^2) = 1250\,W$

مثال: در شکل مقابل توان منبع و V (بصورت مختلط) را بدست آورید



$$1 \times I_1 + 4 I_2 = 0 \Rightarrow I_2 = -\frac{1}{4} I_1$$

$$\omega = 1\ Rad$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{4} \Rightarrow V_2 = 4 V_1$$

(1) $-220 + 2I + 3jI - j(I - I_1) - 2j I_1 = 0 \Rightarrow (2+2j) I - j I_1 = 220$

(2) $-j(I_1 - I) + 4j I_1 - 2j I + V_1 = 0 \Rightarrow -jI + 3j I_1 + V_1 = 0$

(3) $4V_1 + (2j+2)(-\frac{1}{4} I_1) + 2I = 0 \Rightarrow I - (j+1) I_1 + 8 V_1 = 0$

$\Rightarrow (4+8j) I - (25j+1) I_1 = 0$

$$I = \frac{\begin{vmatrix} 220 & -j \\ 0 & -25j-1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2+2j & -j \\ 4+8j & -25j-1 \end{vmatrix}} = 88 \angle 317.9° = 88 \angle -42.1° \Rightarrow V = 2I = 176 \angle -42.3°$$

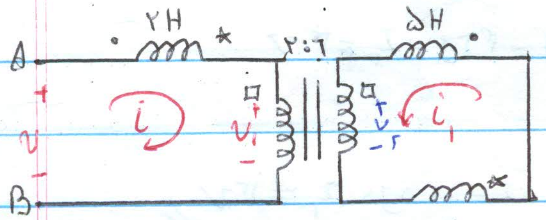
$$I_1=\frac{4+8j}{25j+1}I=31.32\angle-66.6 \Rightarrow I_2=-\frac{1}{4}I_1=7.8\angle113.4^\circ \Rightarrow i_2(t)=7.8\cos(t+113.4^\circ)$$

$$v(t)=176\cos(t-42.3^\circ)$$

$$S=VI_2^*=176\angle-42.3^\circ\times7.8\angle-113.4=1372.8\angle-155.7^\circ=-1251-564.9j\ \ VA$$

$$P=-1251\ W,\quad Q=-564.9\ VAR$$

مثال: سلف معادل از دو سر AB چیست؟



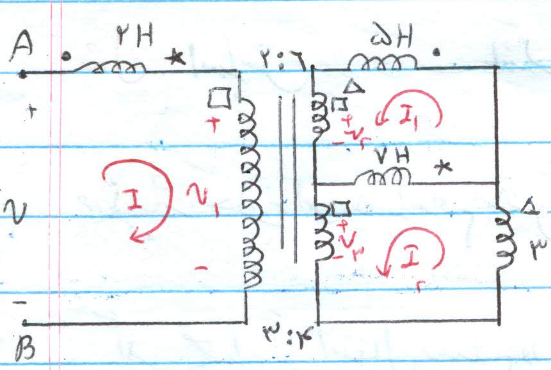
$$M_*=M_\circ=3H$$

$$2i+6i_1=0\Rightarrow i_1=-\frac{1}{3}i,\quad \frac{v_1}{v_2}=\frac{2}{6}\Rightarrow v_2=3v_1$$

$$\begin{cases}-V+2j\omega I+3j\omega I_1+3j\omega I_1+V_1=0\\ 7j\omega I_1+5j\omega I_1+3j\omega I+3j\omega I+\underbrace{3V_1}_{V_2}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}6j\omega I_1+V_1=V-2j\omega I\\ 12j\omega I_1+3V_1=-j\times6\omega I\end{cases}\times\frac{-1}{3}\Rightarrow 2j\omega I_1=V$$

$$\Rightarrow V=2j\omega\times\frac{-1}{3}I\Rightarrow\frac{V}{I}=-\frac{2}{3}j\omega\Rightarrow L_{eq}=\frac{-2}{3}H$$

مثال: سلف معادل از دو سر AB چیست؟



$$M_*=M_\circ=3H,\quad M_\Delta=2H$$

$$\frac{V_1}{2}=\frac{V_2}{6}\Rightarrow V_2=3V_1$$

$$\frac{V_1}{3}=\frac{V_3}{4}\Rightarrow V_3=\frac{4}{3}V_1$$

$$3I+9I_1+4I_2=0\Rightarrow I_1=-\frac{1}{3}I-\frac{4}{9}I_2 \quad (4)$$

حلقه ۱: $-V+2j\omega I+3j\omega I_1+3j\omega(I_1-I_2)+V_1=0\Rightarrow V_1=V-2j\omega I-6j\omega I_1+3j\omega I_2$ (1)

حلقه ۲: $\underbrace{3V_1}_{V_2}+5j\omega I_1+7j\omega(I_1-I_2)+3j\omega I+2j\omega I_2+3j\omega I=0\Rightarrow 6j\omega I_1-4j\omega I_2=3V$ (2)

$$-2j\omega I-\frac{8}{3}j\omega I_2-4j\omega I_2=3V\Rightarrow-6j\omega I-20j\omega I_2=9V \quad (3)$$

$$\Rightarrow I_2 = -\frac{3}{10} I - \frac{9}{20} \times \frac{V}{j\omega} \quad (5)$$

(۳) حلقه: $7j\omega(I_2 - I_1) + 3j\omega I_2 + 2j\omega I_1 - 3j\omega I + \underbrace{\frac{4}{3}V_1}_{V_3} = 0 \Rightarrow -9j\omega I - 15j\omega I_1 + 30j\omega I_2$

$$+4V_1 = 0 \Rightarrow 17j\omega I + 39j\omega I_1 - 42j\omega I_2 = 4V \quad (4)$$

$$4,3,1 \Rightarrow 17j\omega I + 39j\omega\left(-\frac{1}{3}I - \frac{4}{9}I_2\right) - 42j\omega I_2 = 4V$$

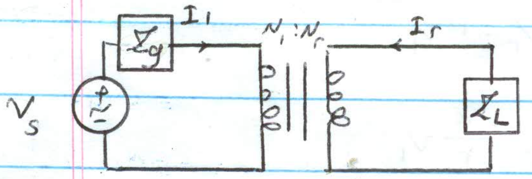
$$\Rightarrow 4j\omega I - \frac{42}{3}j\omega I_2 - 42j\omega I_2 = 4V \Rightarrow 12j\omega I - 168j\omega I_2 = 12V$$

$$3j\omega I - 42j\omega I_2 = 3V \xrightarrow{5} 3j\omega I - 42\left(-\frac{3}{10}I - \frac{9}{20}\times\frac{V}{j\omega}\right)j\omega = 3V$$

$$\Rightarrow 156j\omega I = -159V \Rightarrow \frac{V}{I} = -\frac{156}{159}j\omega \Rightarrow L_{eq} = \frac{-156}{159} = -0.98\,H$$

مثال: امپدانس ورودی یک بلندگو 8Ω است و دستگاه دارای امپدانس خروجی 800Ω

می‌باشد چگونه این دو را بهم متصل کنیم تا توان ماکزیمم منتقل شود؟



$\frac{N_2}{N_1} = a^2$ اگر Z_L را به اولیه انتقال دهیم داریم:

$$Z'_L = \frac{Z_L}{a^2} = \frac{N_1^2}{N_2^2}Z_L \Rightarrow Z_g = \frac{N_1^2}{N_2^2}Z_L \Rightarrow 800 = \frac{N_1^2}{N_2^2}\times 8 \Rightarrow \frac{N_1^2}{N_2^2} = 100 \Rightarrow \frac{N_1}{N_2} = 10$$

***

پایان