بسم الله الرحمن الرحیم

نام جزوه :

معادلات دیفرانسیل

استاد : نیسی

تهیه کننده : حامد مظاهری

①

«معادلات دیفرانسیل»

هر معادله به شکل $f(x, y, y', y'', \ldots, y^{n})=0$ یک معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ n ام نام دارد.

$$y^{n}=f(x, y, y', \ldots, y^{n-1})$$

مثال: $y'-3xy+4x^3=0$, $y^3+4xy^2-y'=0$

* مرتبهٔ معادله = بزرگترین مرتبهٔ مشتق

درجهٔ معادله = درجهٔ بزرگترین مرتبهٔ مشتق

$(y'')^2+3x(y')^5-y=0$ درجهٔ ۲، مرتبهٔ ۲

$y^{(3)}-4xy'-(y')^9=0$ مرتبهٔ ۳، درجهٔ ۱

$(y^{(4)})^5+y-y''=0$ مرتبهٔ ۴، درجهٔ ۵

معادلهٔ خطی: معادلهٔ مرتبهٔ n ام خطی معادله‌ای به شکل زیر است:

$$a_n(x)y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_1(x)y'+a_0(x)y=G(x)$$

$a(x)$ تابعی برحسب x می‌باشد.

مثال: $(x^2+1)y''+4xy'-y=e^x$ خطی - مرتبهٔ ۲ - درجهٔ ۱

$y^2+4xyy'-y=0 \longrightarrow y+4xy'-1=0$ خطی - درجهٔ ۱ مرتبهٔ ۱

$y^3+4xy'y-y^2=0 \longrightarrow y^2+4xy-y=0$

به دلیل وجود y^2 غیرخطی است.

جواب یک معادله: معادلهٔ $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})=0$ مفروض است. تابع $\varphi(x)$ جواب معادله است، هرگاه در معادله صدق کند. یعنی:

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x))=0$$

واحد تهران جنوب - دانشکده فنی (مائده ظاهری)

(۲)

ثابت اساسی: ثابت های $c_1, c_2, \dots, c_n$ در یک تابع اساسی می باشند، با شرط اینکه هرگاه قادر به تقلیل آنها باشیم. به عبارت دیگر نتوان تابع را ساده نمود، به شکلی که تعداد ثابت ها کم شود.

مثال:
$$y = c_1 e^x + c_2 e^x + c_3 e^{x^3}$$
$$= (c_1 + c_2) e^x + c_3 e^{x^3} = c_0 e^x + c_3 e^{x^3}$$
⇐ دو ثابت اساسی وجود دارد.

مثال:
$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$
⇐ دو ثابت اساسی وجود دارد.

برای ساختن معادله دیفرانسیل به تعداد ثابت های اساسی از معادله مشتق می گیریم و ثابت ها را حذف می کنیم.

مثال: در هر مورد معادله دیفرانسیل مربوط تابع را به دست آورید.

i) $y = c_1 \sin x + c_2 \cos x$

$$\begin{cases} y' = c_1 \cos x - c_2 \sin x \\ y'' = c_1 \sin x - c_2 \cos x \end{cases} \longrightarrow \text{دستگاه ۲ معادله، ۲ مجهول}$$

که c_1 و c_2 مجهول هستند. پس از محاسبهٔ c_1 و c_2 آنها را در معادله قرار می دهیم (معادلهٔ i)

⇐ راه ساده تر حل این مسئله به شکل زیر است:

$$y'' = -(c_1 \sin x + c_2 \cos x) \Rightarrow y'' = -y \Rightarrow \boxed{y'' + y = 0}$$

روش کلی:

$$\begin{array}{l} \times \sin x \\ \times \cos x \end{array} \begin{cases} c_1 \cos x - c_2 \sin x = y' \\ -c_1 \sin x - c_2 \cos x = y'' \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 \sin x \cos x - c_2 \sin^2 x = y' \sin x \\ -c_1 \sin x \cos x - c_2 \cos^2 x = y'' \cos x \end{cases}$$

$$-c_2 = y'' \cos x + y' \sin x \longrightarrow \boxed{c_2 = -y'' \cos x - y' \sin x}$$

$$c_1\cos^2x - c_2\sin x\cos x = y'\cos x$$
$$c_1\sin^2x + c_2\sin x\cos x = -y''\sin x$$

$$c_1 = y'\cos x - y''\sin x$$

حال مقادیر c_1 و c_2 را در معادله اصلی قرار می‌دهیم.

$$y = y'\sin x\cos x - y''\sin^2x - y''\cos^2x - y'\sin x\cos x$$
$$y = -y''(\sin^2x+\cos^2x) = -y'' \Rightarrow y = -y''$$
$$\Rightarrow \boxed{y + y'' = 0}$$ دو ثابت

مثال: $y = c_1 + c_2e^x + c_3e^{-x} \longrightarrow y = c_2e^x + c_3e^{-x}$

$$\begin{cases} y' = c_2e^x - c_3e^{-x} \\ y'' = c_2e^x + c_3e^{-x} \end{cases} \Rightarrow y'' = y \Rightarrow y'' - y = 0$$

مثال: $y = c_1x + c_2x^3$

$$\begin{cases} y' = c_1 + 3c_2x^2 \\ y'' = 6c_2x \end{cases} \longrightarrow c_2 = \frac{y''}{6x}$$
$$c_1 = y - \frac{1}{2}y''x$$
$$\Rightarrow y = \left(y - \frac{1}{2}y''x\right)x + \frac{y''}{6x}\times x^3$$
$$y = xy - \frac{1}{2}y''x^2 + \frac{1}{6}y''x^2 = xy - \frac{1}{3}y''x^2$$
$$\Rightarrow y + \frac{1}{3}y''x^2 = 0$$ خطی، مرتبهٔ دوم، درجهٔ دوم

مثال: $x^2 - y^2 = c^2$

$$2x - 2yy' = 0 \Rightarrow yy' - x = 0$$ غیرخطی، مرتبهٔ ۱، درجهٔ ۱

تمرین: $y = c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3e^{x^2}$

معادلات مرتبه اول:

ساده - تفکیک پذیر - همگن - شبه همگن - کامل - معادلاتی که با عامل انتگرال ساز حل می شوند - برنولی - ریکاتی - مرتبه اول درجه n

۱- معادلات ساده:

$y'=f_{(x)}$: صورت کلی

برای حل با توجه به رابطه $y'=\frac{dy}{dx}$ از طرفین تساوی $dy=f_{(x)}dx$ انتگرال می‌گیریم تا به تابع منحنی برحسب x و y برسیم.

مثال: $y'=4x^2+5 \rightarrow dy=(4x^2+5)dx$

$$y=\int(4x^2+5)dx=\frac{4}{3}x^3+5x+c$$

$$\Rightarrow y=\frac{4}{3}x^3+5x+c$$

مثال: $y'=\cos 2x$

$$y=\int \cos 2x\, dx=\frac{1}{2}\sin 2x+c$$

* تذکر: با نوشتن $y'=\frac{dy}{dx}$ و ساده کردن معادله مرتبه اول می‌توان معادله را به شکل $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ نوشت.

مثال: $2x^2y'+3y^3-4x=0$

$$2x^2\frac{dy}{dx}+(3y^3-4x)=0 \Rightarrow 2x^2dy+(3y^3-4x)dx=0$$

$$\underbrace{(3y^3-4x)}_{P}dx+\underbrace{2x^2}_{Q}dy=0$$

۲) معادلات تفکیک پذیر:

تابع $u=F(x,y)$ را تفکیک پذیر نامیم هرگاه قابل تجزیه به حاصل ضرب دو تابع جدا برحسب x, y باشد. یعنی:

$$F(x,y)=f(x)\cdot g(y)$$

۵

مثال: $F(x,y) = x^2y + ye^x = y(x^2+e^x)$

$F(x,y) = x+y+2$ تفکیک پذیر نمی باشد

تعریف: معادله $Pdx+Qdy=0$ تفکیک پذیر است، هرگاه Q و P تقریبی هر یک تفکیک پذیر باشند. یعنی:

$$P = f(x)\cdot g(y)$$
$$Q = F(x)\cdot G(y)$$

روش حل: $f(x)\cdot g(y)\,dx + F(x)\,G(y)\,dy = 0$

$$f(x)g(y)\,dx = -F(x)\,G(y)\,dy \Rightarrow \frac{f(x)}{F(x)}dx = \frac{-G(y)}{g(y)}dy$$

پس از این از طرفین انتگرال می گیریم.

مثال: $(1-x)y' = y^2$

$$\Rightarrow (1-x)\frac{dy}{dx} = y^2 \Rightarrow \frac{dy}{y^2} = \frac{dx}{1-x}$$

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int \frac{dx}{1-x} \Rightarrow \frac{-1}{y} + c = -Ln|1-x|$$

← تا اینجا برای امتحان کافی است.

$$Ln|1-x| = \frac{1}{y} + 2 \Rightarrow |1-x| = e^{\frac{1}{y}+2} = e^{\frac{1}{y}}\cdot \underbrace{e^2}_{K}$$

$$|1-x| = Ke^{1/y} \Rightarrow 1-x = \pm Ke^{1/y}$$

$$\boxed{x = 1 \pm Ke^{1/y}}$$

مثال: $xy^3dx + e^{x^2}dy = 0$

$$xy^3dx = -e^{x^2}dy \Rightarrow xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{y^3}dy$$

$$\int xe^{-x^2}dx = \int -\frac{1}{y^3}dy = \int -y^{-3}dy$$

$$-\frac{1}{2}e^{-x^2} + c = \frac{-y^{-2}}{-2} = \frac{1}{2y^2} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{2y^2} + \frac{1}{2}e^{-x^2} = c}$$

②

مثال: $(1+\ln x)dx+(1+\ln y)dy=0$

$$\Rightarrow (1+\ln x)dx=(-1-\ln y)dy$$

$$\int(1+\ln x)dx=\int(-1-\ln y)dy$$

$$x+x\ln x-x+c=\left[-y-(y\ln y-y)\right]$$

$$\int \underbrace{\ln x}_{u}\ \underbrace{dx}_{dv} \qquad u=\ln x \to v=x \qquad dv=dx \qquad du=\frac{1}{x}dx$$

$$uv-\int v\,du$$

$$=x\ln x-\int x\cdot\frac{1}{x}dx=x\ln x-x+c$$

$$x\ln x+c=-y\ln y$$

$$\Rightarrow \boxed{x\ln x+y\ln y=c}$$

ـ معادلات همگن:

تعریف تابع همگن: $u=f(x,y)$ همگن درجه n می‌باشد هرگاه:

$$f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^n f(x,y)$$

مثال: در هر مورد همگن بودن را بررسی کنید:

1) $f(x,y)=x^2y+y^3-3xy^2$

$$f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^2x^2\lambda y+\lambda^3y^3-3\lambda x.\lambda^2y^2=\lambda^3(x^2y+y^3-3xy^2)$$

$$\Rightarrow f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^3 f(x,y)$$ همگن درجهٔ سوم

---

2) $f(x,y)=x^5y+x^2y^4-1$

$$f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^6x^5y+\lambda^6x^2y^4-1=\lambda^6\left(x^5y+x^2y^4-\frac{1}{\lambda^6}\right)$$ غیرهمگن

۷

۳) $f(x,y) = x^3 \sin\left(\frac{2y}{x}\right) + \frac{x^4}{y} e^{\frac{y}{x}}$

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^3 x^3 \sin\left(\frac{2\lambda y}{\lambda x}\right) + \frac{\lambda^4 x^4}{\lambda y} e^{\frac{\lambda y}{\lambda x}}$$

$$= \lambda^3 \left[x^3 \sin\left(\frac{2y}{x}\right) + \frac{x^4}{y} e^{\frac{y}{x}}\right] = \lambda^3 f(x,y)$$ همگن درجهٔ سوم

---

۴) $f(x,y) = x^2y + 4x^3 \sin y - y^3$

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^3 x^2 y + 4\lambda^3 x^3 \sin(\lambda y) - \lambda^3 y^3$$

$$\lambda^3 (x^2 y + 4x^3 \sin(\lambda y) - y^3)$$ غیرهمگن

* در توابع مثلثاتی (نمایی) باید کمان (توان) به صورت توانی از $\frac{mx}{y}$ یا $\frac{my}{x}$

$$f(x,y) = xy \sin\left(\frac{y}{x} + 1\right) + x^2$$

تعریف: معادلهٔ $Pdx + Qdy = 0$ همگن است، هرگاه P و Q توابع همگن باشند.

روش حل:

پس از قرار دادن: $y = tx \rightarrow dy = tdx + xdt$

در معادله، به معادلهٔ تفکیک پذیر برحسب x و t می‌رسیم که آن را حل می‌کنیم در نهایت به جای t از $\frac{y}{x}$ استفاده می‌کنیم.

۱) $(x^2 + y^2)dx - xydy = 0$

$$y = tx \rightarrow dy = tdx + xdt$$

$$(x^2 + t^2x^2)dx + x \cdot tx(tdx + xdt)$$

$$x^2\left[(1+t^2)dx + t(tdx + xdt)\right] = 0$$

$$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = tx \Rightarrow y = 0 \rightarrow \Big|_0^0$$ غ ق ق

$$(1 + t^2 + t^2)dx + txdt = 0$$

$$(1 + 2t^2)dx = -txdt \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{-tdt}{1 + 2t^2}$$

8

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{-t\,dt}{1+2t^2} \qquad Ln|x| = -\frac{1}{4} Ln\left|1+2t^2\right| + c$$

$$Ln|x| = Ln\left(1+2\frac{y^2}{x^2}\right)^{-\frac{1}{4}} + c \qquad t = \frac{y}{x}$$

$$|x| = e^{Ln\left(\frac{x^2+2y^2}{x^2}\right)^{-1/4}+c} = \underbrace{k}_{e^c} \left(\frac{x^2}{x^2+2y^2}\right)^{1/4} \qquad \boxed{e^{LnA} = A}$$

$$x = \pm k \sqrt[4]{\left(\frac{x^2}{x^2+2y^2}\right)}$$

حل:

$$\left(1+2e^{\frac{x}{y}}\right)dx + 2e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right)dy = 0$$

$$x = ty \qquad dx = t\,dy + y\,dt$$

$$(1+2e^t)(t\,dy + y\,dt) + 2e^t(1-t)\,dy = 0$$

$$(t+2te^t+2e^t-2te^t)\,dy + y(1+2e^t)\,dt = 0$$

$$(t+2e^t)\,dy = -y(1+2e^t)\,dt$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{-(1+2e^t)}{t+2e^t}\,dt \longrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int -\frac{(1+2e^t)}{t+2e^t}\,dt$$

$$Ln|y| = -Ln\left|t+2e^t\right| + c$$

$$t = \frac{x}{y} \qquad \Rightarrow Ln|y| = Ln\frac{1}{\left|\frac{x}{y}+2e^{\frac{x}{y}}\right|} + c$$

حل:

$$xy' = x\sec\left(\frac{y}{x}\right) + y$$

$$\left(x\sec\left(\frac{y}{x}\right) + y\right)dx - x\,dy = 0$$

$$y = tx \qquad dy = t\,dx + x\,dt$$

$$(\underline{x}\sec t + t\,\underline{x})\,dx - \underline{x}\,(t\,dx + x\,dt) = 0$$

$$(\sec t + t - t)\,dx - x\,dt = 0$$

۹

انتگرال

$$\frac{1}{\cos t}\,dx = x\,dt \qquad \frac{dx}{x} = \cos t\,dt$$

$$\ln|x| = \sin t + c \implies \boxed{\ln|x| = \sin\frac{y}{x} + c}$$

$$x\,dy = y\cos\left(\ln\left(\frac{y}{x}\right)\right)dx$$

$$x\,dy - y\,dx = \sqrt{xy}\,dx$$

---

* معادلاتی که به همگن تبدیل می‌شوند (شبه همگن):

$$y' = f\left(\frac{ax+by+c}{a'x+b'y+c'}\right)$$

$$(ax+by+c)\,dx + (a'x+b'y+c')\,dy = 0$$

روش حل:

الف) $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases} \xrightarrow{\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}}$ نقطهٔ برخورد $M\begin{vmatrix}\alpha \\ \beta\end{vmatrix}$

$$\begin{cases} x = X+\alpha \\ y = Y+\beta \end{cases} \implies \begin{matrix} dx = dX \\ dy = dY \end{matrix}$$

با قرار دادن در مسئله، مسئله به معادله همگن برحسب X و Y تبدیل می‌شود که آن را حل می‌کنیم و سپس به جای X و Y مقدار را برحسب x و y قرار می‌دهیم.

ب) $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \implies ax+by = u$

$$\implies a\,dx + b\,dy = du \implies \begin{cases} dy = \frac{1}{b}(du - a\,dx) \\ u = ax+by \end{cases}$$

با قرار دادن در مسئله به همگن یا تفکیک پذیر برحسب x و u تبدیل می‌شود که آن را حل می‌کنیم.

مثال * $y' = \frac{x+y+4}{x-y-6} \implies (x-y-6)\,dy = (x+y+4)\,dx$

$$(x+y+4)\,dx - (x-y-6)\,dy = 0$$

⑩

$$\begin{cases} x+y+4=0 \\ x-y-6=0 \end{cases} \qquad 2x-2=0 \Rightarrow x=1 \qquad 1-y-6=0 \Rightarrow y=-5 \qquad \Rightarrow \begin{cases} \alpha=1 \\ \beta=-5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=X+1 & dx=dX \\ y=Y-5 & dy=dY \end{cases}$$

$$(X+1+Y-5+4)\,dX-(X+1-Y+5-6)\,dY=0$$

$$(X+Y)\,dX-(X-Y)\,dY=0$$ همگن درجه اول

$$Y=tX \qquad dY=t\,dX+X\,dt$$

$$(X+tX)\,dX-\underbrace{(X-tX)}_{-X(1-t)}(t\,dX+X\,dt)=0$$

$$(1+t-t+t^2)\,dX-(1-t)\,X\,dt=0$$

$$(1+t^2)\,dX-(1-t)\,X\,dt=0$$

$$(1+t^2)\,dX=(1-t)\,X\,dt \Rightarrow \frac{dX}{X}=\frac{1-t}{1+t^2}\,dt$$

$$\int\frac{dX}{X}=\operatorname{Ln}|X|$$

$$\int\frac{1-t}{1+t^2}\,dt=\operatorname{Arctan} t-\frac{1}{2}\operatorname{Ln}|1+t^2|$$

$$\Rightarrow \operatorname{Ln}|X|=\operatorname{Arctan} t-\frac{1}{2}\operatorname{Ln}|1+t^2|+C$$

$$t=\frac{Y}{X}=\frac{y+5}{x-1}$$

$$\operatorname{Ln}|x-1|=\operatorname{Arctan}\left(\frac{y+5}{x-1}\right)-\frac{1}{2}\operatorname{Ln}\left(1+\left(\frac{y+5}{x-1}\right)^2\right)+C$$

*** مثال: $(x-2\tan y+3)\,dx+(2x+4\tan y-3)\sec^2 y\,dy=0$

$$u=\tan y \longrightarrow du=\sec^2 y\,dy$$

$$(x-2u+3)\,dx+(2x+4u-3)\,du=0$$

۱۱

$$\times ۲\begin{cases} x-۲u+۳=۰ \\ ۲x+۴u-۳=۰ \end{cases} \qquad ۴x+۶-۳=۰ \qquad x=\boxed{-\frac{۳}{۴}}\ \alpha$$

$$-\frac{۳}{۴}-۲u+۳=۰ \qquad ۲u=۳-\frac{۳}{۴}=\frac{۹}{۴}$$

$$u=\boxed{\frac{۹}{۸}}\ \beta$$

$$\begin{cases} x=X+\alpha & dx=dX \\ u=U+\beta & du=dU \end{cases}$$

$$(X-۲U)dX+(۲X+۴U)dU=۰$$

$$U=tX \rightarrow (X-۲tX)dX+(۲X+۴tX)(tdX+Xdt)=۰$$

$$(۱-۲t)dX+(۲+۴t)(tdX+Xdt)=۰$$

$$(۱-\cancel{۲t}+\cancel{۲t}+۴t^۲)dX+X(۲+۴t)dt=۰$$

$$(۱+۴t^۲)dX=-X(۲+۴t)dt$$

$$\frac{dX}{X}=\frac{-(۲+۴t)}{۱+۴t^۲}dt \longrightarrow \int\frac{du}{a^۲+u^۲}=\frac{۱}{a}Arctg\frac{u}{a}+c$$

$$Ln|X|=-۲\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times Arctan(۲t)-\frac{۱}{۲}Ln|۱+۴t^۲|+c$$

بدلیل $dU=۲dt$

$$U=۲t \Rightarrow dU=cdt \qquad t=\frac{U}{X}=\frac{u-\frac{۹}{۸}}{x+\frac{۳}{۴}}=\frac{tany-\frac{۹}{۸}}{x+\frac{۳}{۴}}$$

مثال: $(x+y+۱)dx+(۲x+۲y+۳)dy=۰$

$$\begin{matrix} x+y+۱=۰ \\ ۲x+۲y+۳=۰ \end{matrix} \longrightarrow \frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۲} \longrightarrow$$ موازی

$$u=x+y \longrightarrow du=dx+dy \Rightarrow dy=du-dx$$

$$(u+۱)dx+(۲u+۳)(du-dx)=۰$$

$$(u+۱-۲u-۳)dx+(۲u+۳)du=۰$$

$$(-u-۲)dx=-(۲u+۳)du$$

$$dx=\frac{۲u+۳}{u+۲}du \longrightarrow \begin{matrix} t=u+۲ & du=dt \\ u=t-۲ & \end{matrix}$$

$$dx=\frac{۲(t-۲)+۳}{t}dt=(۲-\frac{۱}{t})dt$$

۱۲

$$x+c=۲t-\ln|t|$$

$$t=u+۲=x+y+۲$$

$$x+c=۲(x+y+۲)-\ln|x+y+۲|$$

معادله کامل :

یادآوری : دیفرانسیل کامل

$u = f(x,y,z)$

$du = f_x dx + f_y dy + f_z dz$

du را دیفرانسیل کامل u می‌نامیم .

مثال : $u = x^2y^3 + e^{z^2}$ $\qquad du = 2xy^3dx + 3x^2y^2dy + 2ze^{z^2}dz$

$u \longrightarrow du$

$u = f(x,y) \qquad du = f_x dx + f_y dy$

$u = x^3y^4 + y^2 + x^2 \qquad du = \underbrace{(3x^2y^4 + 2x)}_{P}dx + \underbrace{(4x^3y^3 + 2y)}_{Q}dy$

$P_y = 12x^2y^3 \qquad Q_x = 12x^2y^3$

$P_y = Q_x \longrightarrow$ کامل است

عبارت $A = Pdx + Qdy$ کامل است هرگاه $P_y = Q_x$

یعنی تابع u وجود دارد به قسمی که $du = Pdx + Qdy$

* برای به دست آوردن u ، $\int Pdx$ و $\int Qdy$ را حساب کرده ، جملات مشترک را یکبار و غیر مشترک را یک مرتبه می‌نویسیم .

مثال : ابتدا کامل بودن را بررسی کنید سپس u را به دست آورید .

$A = (2xe^y + 3x^2)dx + (x^2e^y - 2y)dy$

$P_y = 2xe^y \qquad Q_x = 2xe^y \longrightarrow$ کامل

$\int 2xe^y + 3x^2 dx = x^2e^y + x^3 \quad , \quad \int x^2e^y - 2y\,dy = x^2e^y - y^2$

$\boxed{u = x^2e^y + x^3 - y^2}$

تعریف : معادله $Pdx + Qdy = 0$ کامل است هرگاه $P_y = Q_x$. برای حل $\int Pdx$ و $\int Qdy$ را حساب کرده . جمع جملات مشترک و غیر مشترک را برابر C قرار می‌دهیم .

مثال : در هر مورد کامل بودن معادله را بررسی کنید ، سپس معادله را حل کنید .

$-y' = \dfrac{y\cos x + \sin y + y}{\sin x + x\cos y + x} = \dfrac{-dy}{dx}$

$$(y\cos x + \sin y + y)\,dx + (\sin x + x\cos y + x)\,dy = 0 \qquad P_y = Q_x$$

$$\int (y\cos x + \sin y + y)\,dx = y\sin x + x\sin y + xy$$

$$\int (\sin x + x\cos y + x)\,dy = y\sin x + x\sin y + xy$$

جواب $\Rightarrow \boxed{y\sin x + x\sin y + xy = c}$

مثال :
۳ ص کتاب

$$(\cot y + x^2)\,dx = x\,\operatorname{cosec}^2 y\,dy$$

$$(\cot y + x^2)\,dx - x\,\operatorname{cosec}^2 y\,dy = 0 \qquad P_y = Q_x$$

$$\int \cot y + x^2\,dx = x\cot y + \frac{x^3}{3}$$

$$\int -x\,\operatorname{cosec}^2 y\,dy = x\cot y \qquad \boxed{x\cot y + \frac{x^3}{3} = c}$$

مثال :

$$(2x\sin 3y + 3x^2)\,dx + (3x^2\cos 3y + 2y)\,dy = 0$$

$$u(x,y) = \int (2x\sin 3y + 3x^2)\,dx + g(y) = x^2\sin 3y + x^3 + \underbrace{g(y)}_{?}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = Q$$

از u نسبت به y مشتق گرفته برابر Q قرار می‌دهیم.

$$3x^2\cancel{\cos} 3y + g'(y) = 3x^2\cancel{\cos} 3y + 2y \Rightarrow g'(y) = 2y$$

$$\Rightarrow g(y) = y^2$$

$$\Rightarrow u = x^2\sin 3y + x^3 + y^2$$

جواب $\boxed{x^2\sin 3y + x^3 + y^2 = c}$

تذکر : در مثال زیر با نوشتن دیفرانسیل کامل ، به یک معادلهٔ کامل می‌رسیم . اگر از معادله عبارت $2x^2y^2$ فاکتور گرفته شود ، به معادله‌ای می‌رسیم که کامل نمی‌باشد . ولی این معادله با ضرب در $2x^2y^2$ کامل می‌شود.

$u = x^3y^2 + 4x^5y^3 = 0 \quad \Rightarrow du = 0$

$(3x^2y^2 + 20x^4y^3)dx + (2x^3y^2 + 12x^5y^2)dy = 0$ کامل $P_y = Q_x$

$2x^2y^2\left[(3+10x^2y)dx + (x+6x^3)dy\right] = 0$ غیرکامل

* حل معادلات به کمک عامل انتگرال ساز:

معادله غیرکامل $Pdx + Qdy = 0$ مفروض است ($P_y \neq Q_x$ غیر کامل). هدف مشخص کردن تابعی مانند $\mu = \mu(x,y)$ است که با ضرب این تابع در معادله، معادله به کامل تبدیل شود.

$\Rightarrow \mu(Pdx + Qdy) = 0 \Rightarrow \mu Pdx + \mu Qdy = 0$ کامل

(عامل انتگرال ساز، همان عامل ناگفته گرفته شده در محاسبهٔ تکرار قبلی می باشد). برای محاسبهٔ عامل μ حالات زیر عنوان می شود.

الف) $\dfrac{M_y - N_x}{N} = f(x) \quad , \quad \mu = e^{\int f(x)\,dx}$

ب) $\dfrac{M_y - N_x}{M} = g(y) \quad , \quad \mu = e^{-\int g(y)dy}$

پ) $yf_1(x,y)dx + xf_2(xy)\,dy = 0$ ← اگر معادله به صورت روبرو باشد

$$\mu(x,y) = \frac{1}{xy\left[f_1(xy) - f_2(xy)\right]}$$

ت) $y(Kx^ay^b + Lx^cy^d)dx + x(K'x^ay^b + L'x^cy^d)dy = 0$ اگر معادله به شکل باشد، دارای عاملی به شکل $\mu = x^\alpha y^\beta$ می باشد که α و β را به دست می آوریم.

ث) $\dfrac{M_y - N_x}{2(xN - yM)} = f(x^2+y^2) \qquad \mu(z) = e^{\int f(z)dz} \qquad z = x^2+y^2$

ج) $\dfrac{M_y - N_x}{yN - xM} = f(xy) \qquad \mu(z) = e^{\int f(z)dz} \qquad z = xy$

چ) $\dfrac{y^2(M_y - N_x)}{xM + yN} = f\left(\dfrac{x}{y}\right) \qquad \mu(z) = e^{\int f(z)dz} \qquad z = \dfrac{x}{y}$

ح) $\dfrac{x^2(M_y - N_x)}{xM + yN} = f\left(\dfrac{y}{x}\right) \qquad \mu_{(z)} = e^{-\int f(z)\,dz} \qquad z = \dfrac{y}{x}$

خ) معادله کامل $Mdx + Ndy$ دارای عامل انتگرال ساز به شکل $\mu(x,y) = \dfrac{1}{xM + yN}$ می باشد.

تذکر: پس از تعیین عامل انتگرال سازما این عامل را در معادله ضرب کرده و معادله جدید را که کامل می باشد حل می کنیم.

مثال: هر یک از معادلات زیر را با استفاده از عامل انتگرال ساز حل کنید.

مثال ۵۴) $(\underbrace{3xe^y + 2y}_{M})dx + (\underbrace{x^2e^y + x}_{N})dy = 0$

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{3xe^y + 2 - 2xe^y - 1}{x^2e^y + x} = \frac{xe^y + 1}{x(xe^y + 1)} = \frac{1}{x} = f_{(x)}$$

$$\mu_{(x)} = e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{\ln x} = x$$

در معادله ضرب می کنیم.

$(3x^2e^y + 2xy)dx + (x^3e^y + x^2)dy = 0$ کامل

$$\int (3x^2e^y + 2xy)\,dx = x^3e^y + x^2y \qquad \int (x^3e^y + x^2)\,dy = x^3e^y + x^2$$

جواب $\boxed{x^3e^y + x^2y = c}$

مثال ۴۲) $(x^2 + y^2 + x)dx + xy\,dy = 0$

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{2y - y}{xy} = \frac{y}{xy} = \frac{1}{x} \qquad \mu = e^{\int \frac{1}{x}dx} = x$$

$(x^3 + xy^2 + x^2)dx + x^2y\,dy = 0$

$$\int (x^3 + xy^2 + x^2)\,dx = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} + \frac{x^3}{3} \qquad \int x^2y\,dy = \frac{x^2y^2}{2}$$

$$\boxed{\frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} + \frac{x^3}{3} = c}$$

مثال ۲۴)

$$(1-xy)\,y' + y^2 + 3xy^3 = 0 \qquad y' = \frac{dy}{dx}$$

$$(y^2+3xy^3)\,dx + (1-xy)\,dy = 0$$

$$\frac{M_y - N_x}{M} = \frac{2y + 9xy^2 + y}{y^2 + 3xy^3} = \frac{\overbrace{9xy^2 + 3y}^{3y(1+3xy)}}{y^2(1+3xy)} = \frac{3}{y^2} = \frac{3}{y}$$

* در عامل انتگرال ساز قدر مطلق اثری ندارد.

$$\mu(y) = e^{-\int g(y)dy} = e^{-\int \frac{3}{y}dy} = e^{-3\ln y} = e^{\ln \frac{1}{y^3}} = \frac{1}{y^3}$$

معادله را بر y^3 تقسیم می‌کنیم تا کامل شود.

$$\left(\frac{1}{y} + 3x\right)dx + \left(\frac{1}{y^3} - \frac{x}{y^2}\right)dy = 0$$

$$\int\left(\frac{1}{y} + 3x\right)dx = \frac{x}{y} + \frac{3x^2}{2}$$

$$\int\left(\frac{1}{y^3} - \frac{x}{y^2}\right)dy = \frac{y^{-2}}{-2} + \frac{x}{y} = \frac{-1}{2y^2} + \frac{x}{y}$$

جواب $\boxed{\frac{x}{y} + \frac{3x^2}{2} - \frac{1}{2y^2} = c}$

زمانی از روش روبرو استفاده می‌شود که:

* چندجمله‌ای باشد.
* جمع توان‌های متناظر با هم برابر است

مثال)

$$(4x^2y^3 + 5x^3y^5)\,dx + (3x^3y^2 + 4x^4y^4)\,dy = 0$$

$$\mu = x^\alpha y^\beta \quad \underbrace{(4x^{\alpha+2}y^{\beta+3} + 5x^{\alpha+3}y^{\beta+5})}_{M}dx + \underbrace{(3x^{\alpha+3}y^{\beta+2} + 4x^{\alpha+4}y^{\beta+4})}_{N}dy = 0$$

$$M_y = N_x$$

$$4(\beta+3)x^{\alpha+2}y^{\beta+2} + 5(\beta+5)x^{\alpha+3}y^{\beta+4} = 3(\alpha+3)x^{\alpha+2}y^{\beta+2} + 4(\alpha+4)x^{\alpha+3}y^{\beta+4}$$

$$\begin{cases} 4(\beta+3) = 3(\alpha+3) \\ 5(\beta+5) = 4(\alpha+4) \end{cases} \qquad \begin{matrix} 5 \\ -4 \end{matrix}\begin{cases} 4\beta - 3\alpha = -3 \\ 5\beta - 4\alpha = -9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 20\beta - 15\alpha = -15 \\ -20\beta + 16\alpha = 36 \end{cases} \Rightarrow \alpha = 36 - 15 = 21$$

$$\boxed{\alpha = 21}$$

$$4\beta - 3(21) = -3$$

$$4\beta = -3 + 63 = 60$$

$$\beta = 15$$

$$\alpha = 21 \quad \beta = 15$$

$$\mu(x,y) = x^{21}y^{15}$$

18

$$\left(4x^{23}y^{18} + 5x^{24}y^{20}\right)dx + \left(3x^{24}y^{17} + 4x^{25}y^{19}\right)dy = 0$$

$$\downarrow$$

$$\left(M_y = 72x^{23}y^{17} + 100x^{24}y^{19} \qquad N_x = 72x^{23}y^{17} + 100x^{24}y^{19}\right)$$

$$\int 4x^{23}y^{18} + 5x^{24}y^{20}\,dx = \frac{4x^{24}}{24}y^{18} + \frac{5x^{25}}{5}y^{20}$$

$$\int \left(3x^{24}y^{17} + 4x^{25}y^{19}\right)dy = \frac{x^{24}y^{18}}{6} + x^{25}y^{20}$$

$$\boxed{\frac{1}{6}x^{24}y^{18} + x^{25}y^{20} = c}$$

مثال: $(3x^2y^4+4x^3y^5)dx+(2x^3y^3+4x^4y^4)dy=0$

$$\mu = x^{\alpha}y^{\beta}$$

$$(\underbrace{3x^{\alpha+2}y^{\beta+4}+4x^{\alpha+3}y^{\beta+5}}_{M})dx+(\underbrace{2x^{\alpha+3}y^{\beta+3}+4x^{\alpha+4}y^{\beta+4}}_{N})dy=0$$

$$M_y=N_x$$

$$3(\beta+4)x^{\alpha+2}y^{\beta+3}+4(\beta+5)x^{\alpha+3}y^{\beta+4}=2(\alpha+3)x^{\alpha+2}y^{\beta+3}+4(\alpha+4)x^{\alpha+3}y^{\beta+4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3(\beta+4)=2(\alpha+3) \\ 4(\beta+5)=4(\alpha+4) \end{cases} \qquad \begin{cases} 3\beta+12=2\alpha+6 \\ \beta+5=\alpha+4 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 3\beta+12=2\alpha+6 \\ -2\beta-10=-2\alpha-8 \\ \hline \beta+2=-2 \Rightarrow \beta=-4 \end{array}$$

$$-4+5=\alpha+4 \Rightarrow 1=\alpha+4$$

$$\boxed{\alpha=-3}$$

$$\mu(x,y)=x^{-3}y^{-4}=\frac{1}{x^3y^4}$$

عبارت را بر x^3y^4 تقسیم می‌کنیم.

$$(\underbrace{\frac{3}{x}+4y}_{M})dx+(\underbrace{\frac{2}{y}+4x}_{N})dy=0$$

$$M_y=4 \qquad N_x=4 \quad \checkmark$$

$$\int \frac{3}{x}+4y\,dx=3\operatorname{Ln}x+4xy$$

$$\int \frac{2}{y}+4x\,dy=2\operatorname{Ln}y+4xy$$

$$3\operatorname{Ln}x+2\operatorname{Ln}y+4xy=c$$

تمرین: $(2x^2y^3+5xy)dx+(4x^3y^2-x^2)dy=0$

مثال: $(x^2y^3+2y)dx+(2x-2x^3y^2)dy=0$

$$\Rightarrow y\underbrace{(x^2y^2+2)}_{f}dx+x\underbrace{(2-2x^2y^2)}_{g}dy=0$$

$$f_{(xy)}=f(t)=t^2+2$$

$$\mu=\frac{1}{xy(f-g)}=\frac{1}{xy(x^2y^2+2-2+2x^2y^2)}=\frac{1}{xy\cdot 3x^2y^2}=\frac{1}{3x^3y^3}$$

طرفین را بر $3x^3y^3$ تقسیم می‌کنیم :

$$\left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{x}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{x^3y^2}\right)dx+\left(\frac{2}{3x^2y^3}-\frac{2}{3y}\right)dy=0$$

$$M_y=\frac{2}{3}\times\frac{1}{x^3}\times\frac{-2}{y^3} \qquad N_x=\frac{2}{3}\times\frac{1}{y^3}\times\frac{-2}{x^3} \checkmark$$

$$\int\frac{1}{3}\times\frac{1}{x}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{y^2}\times\frac{1}{x^3}\,dx=\frac{1}{3}\operatorname{Ln}x+\frac{2}{3y^2}\times\frac{x^{-2}}{-2}$$

$$\int\frac{2}{3x^2}\times\frac{1}{y^3}-\frac{2}{3}\times\frac{1}{y}\,dy=\frac{2}{3x^2}\times\frac{y^{-2}}{-2}-\frac{2}{3}\operatorname{Ln}y$$

$$\boxed{\frac{1}{3}\operatorname{Ln}x-\frac{2}{3}\operatorname{Ln}y-\frac{1}{3x^2y^2}=c}$$

معادلات خطی مرتبه اول :

فرم کلی $\quad a_1(x)y'+a_0(x)y=G(x)$

$$\hookrightarrow y'+P(x)y=q(x)$$

$$\mu_{(x)}=e^{\int P(x)dx}$$

جواب عمومی $\longrightarrow$ $\boxed{y=\frac{1}{\mu(x)}\left(\int\mu(x)\cdot q(x)\,dx+c\right)}$

تذکر : معادله نسبت به x :

$$x'+P(y)x=q(y)$$

$$\mu(y)=e^{\int P(y)dy}$$

$$x=\frac{1}{\mu(y)}\left(\int\mu(y)\cdot q(y)\,dy+c\right)$$

مثال : هر یک از معادلات زیر را حل کنید :

$$x^2y'-2xy=1$$

$$y'-\underbrace{\frac{2}{x}}_{P}y=\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{q} \quad \text{خطی}$$

$$\mu(x)=e^{\int-\frac{2}{x}dx}=e^{-2\operatorname{Ln}x}=\frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow y=\frac{1}{\mu(x)}\left(\int\mu(x)\cdot q(x)\,dx+c\right)$$

$$y=x^2\left(\int\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{x^2}dx+c\right)=x^2\left(\int\frac{1}{x^4}dx+c\right)=x^2\left(\frac{x^{-3}}{-3}+c\right)$$

مثال: $y' + y\,tg\,x = \dfrac{1}{\cos x} \xrightarrow{\text{فرم دیگر ساده نشده سوال}} y'\cot g\,x + y = \dfrac{1}{\sin x}$

$$\mu_{(x)} = e^{\int tg\,x\,dx} = e^{-Ln\cos x} = e^{Ln\frac{1}{\cos x}} = \frac{1}{\cos x}$$

$$y = \frac{1}{\mu_{(x)}}\left(\int \mu_{(x)} \cdot q_{(x)}\,dx + c\right)$$

$$= \cos x\left(\int \frac{1}{\cos x}\cdot\frac{1}{\cos x}\,dx + c\right)$$

$$y = \cos x\,(tg\,x + c)$$

$$\int \sec x\,dx = Ln\left|\sec x + tg\,x\right|$$

$$\int cosec\,x\,dx = -Ln\left|cosec\,x + tg\,x\right|$$

$$\int tg\,x\,dx = -Ln\cos x$$

$$\int cosec^2 x\,dx = -\cot g\,x$$

$$\int \cot g\,x\,dx = Ln\sin x$$

$$\int \sec^2 x\,dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = tg\,x$$

مثال: $(1+y^2) = (Arc\,tg\,y - x)\,y'$

$$\rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{x'}$$

$$\Rightarrow (1+y^2) = (Arc\,tg\,y - x)\frac{1}{x'}$$

$$x'(1+y^2) = Arc\,tg\,y - x$$

$$x' = \frac{arc\,tg\,y}{1+y^2} - \frac{x}{1+y^2} \Rightarrow x' + \frac{1}{1+y^2}\,x = \frac{arc\,tg\,y}{1+y^2}$$

$\longrightarrow$ خطی برحسب x

م ۸۳
صفحه ۵۵) $y + y'Ln^2 y = (x + 2Ln\,y)\,y'$

تمرین $\left(\dfrac{x}{y} - \sin y\right)dy + dx = 0$

* معادلاتی که به خطی مرتبهٔ اول تبدیل می‌شوند:

۱) معادله به شکل $f'_{(y)}\,y' + a_1(x)\,f_{(y)} = G(x)$

حل: با فرض $V = f_{(y)}$ معادله به خطی مرتبهٔ اول تبدیل می‌شود (تغییر متغیر)

این روش زمانی کاربرد دارد که مشتق عبارتی که به عنوان متغیر جدید انتخاب می‌شود، در داخل معادله باشد.

مثال :

1) $x^2 y' \cos y = 2x \sin y - 1$ حل: $u = \sin y$

2) $x^2 \cdot \frac{y'}{y} = 2x \ln y - 1$ حل: $u = \ln y$

مثال ۴۷ $xy' = y + \frac{x^5 e^x}{4y^3} \longrightarrow x\,4y^3 y' = 4y^4 + x^5 e^x$

مثال ۴۹ $yy' = x^2 + \frac{1}{x} y^2$ $u = y^2$

حل ۱) $u = \sin y$ $u' = y' \cos y$

$$\Rightarrow x^2 u' = 2xu - 1 \Rightarrow u' = \frac{2}{x} u - \frac{1}{x^2}$$

$$u' - \frac{2}{x} u = -\frac{1}{x^2} \qquad \mu(x) = e^{\int -\frac{2}{x} dx} = \frac{1}{x^2}$$

$$u = x^2\left(\int \frac{1}{x^2} \cdot -\frac{1}{x^2}\, dx + c\right) = x^2\left(\frac{-x^{-3}}{-3} + c\right) = x^2\left(\frac{1}{3x^3} + c\right)$$

$$u = x^2\left(\frac{1}{3x^3} + c\right) \Rightarrow \boxed{\sin y = x^2\left(\frac{1}{3y^3} + c\right)}$$

۲) معادله برنولی

فرم کلی: $y' + P(x) y = q(x) y^n$

حل: با استفاده از تغییر متغیر $z = y^{1-n}$ معادله به خطی مرتبه اول برحسب z تبدیل می‌شود که آن را حل می‌کنیم.

مثال: $xy' - \frac{y}{2\ln x} = y^2 \longrightarrow y' - \frac{y}{2x \ln x} = \frac{1}{x} y^2$

$n = 2$ $y^{1-n} = z = y^{1-2} = y^{-1} = \frac{1}{y}$ $z' = -y' y^{-2} = \frac{-y'}{y^2} \Rightarrow \boxed{y' = -y^2 z'}$

$$-y^2 z' - \frac{y}{2x \ln x} = \frac{1}{x} y^2 \xrightarrow{\div -y^2}$$

$$z' + \frac{1}{2x \ln x}\overbrace{\left(\frac{1}{y}\right)}^{z} = \frac{-1}{x} \Rightarrow z' + \frac{1}{2x \ln x} z = \frac{-1}{x}$$

خطی

$$\mu(x) = e^{\int \frac{1}{2x \ln x} dx} = e^{\int \frac{du}{2u}} = e^{\frac{1}{2} \ln u} = e^{\ln \sqrt{u}} = e^{\ln \sqrt{\ln x}} = \sqrt{\ln x}$$

$u = \ln x$

$u' = \frac{1}{x}$

$$z=\frac{1}{\mu(x)}\left(\int \mu(x)\,q(x)\,dx+c\right) \qquad \int -\sqrt{u}\,du$$

$$=\frac{1}{\sqrt{Lnx}}\left(\int\sqrt{Lnx}\cdot-\frac{1}{x}dx+c\right)=\frac{1}{\sqrt{Lnx}}\left(-\frac{(Lnx)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c\right)=z$$

$$z=\frac{1}{y}$$

م ۹۵ / عمران

$$xy'+y=(2yx^2Lny)\,y' \qquad y'=\frac{1}{x'}$$

$$\frac{x}{x'}+y=(2yx^2Lny)\frac{1}{x'} \xrightarrow{\times x'}$$

$$x+yx'=2yLny\,x^2 \longrightarrow x'+\frac{1}{y}x=2Lny\,x^{2^n}$$

$$z=x^{1-n}=x^{1-2}=x^{-1} \qquad z'=-x'x^{-2}=\frac{-x'}{x^2}\Rightarrow$$

$$-x^2z'+\frac{1}{y}x=2Lny.x^2 \xrightarrow{\div -x^2} \qquad \boxed{x'=-x^2z'}$$

$$z'-\frac{1}{y}\times\frac{1}{x}=-2Lny \Rightarrow z'-\frac{1}{y}z=-2Lny$$

$$\mu(y)=e^{\int-\frac{1}{y}dy}=e^{-Lny}=e^{Ln\frac{1}{y}}\boxed{=\frac{1}{y}}$$

$$z=y\left(\int\frac{1}{y}(-2Lny)\,dy+c\right)\longrightarrow ?$$

تمرین: $\sin y\,(x+\sin y)\,dx+2x^2\cos y\,dy=0$ $\left(v=\sin y \quad x \text{ برنولی}\right)$

معادله ریکاتی: فرم کلی $y'+f(x)y^2+q(x)y+h(x)=0$

جواب خصوصی $y_1=y_1(x)$ با قراردادن $y=y_1+\frac{1}{z}$ و

محاسبهٔ y' و قراردادن در مسئله، مسئله به معادلهٔ خطی مرتبهٔ اول برحسب z و x تبدیل می‌شود که از حل

می‌کنیم.

تذکر : در صورت معلوم نبودن y_1 ، جوابها $y=\pm x$ و $y=\pm\frac{1}{x}$ را آزمایش می‌کنیم (معمولاً جوابها به این شکل می‌باشند).

مثال : معادلهٔ زیر را حل کنید.

۹۶۲ / ص۵۶

$$y' = 2\,tg\,x \sec x - y^2 \sin x \qquad y_1 = \sec x$$

$$\to y' + \sin x \cdot y^2 = 2\,tg\,x \sec x$$

$$y = y_1 + \frac{1}{z} \Rightarrow y = \sec x + \frac{1}{z}$$

$$y' = \sec x \cdot tg\,x - \frac{z'}{z^2}$$

$$\sec x\, tg\,x - \frac{z'}{z^2} + \sin x\left(\sec x + \frac{1}{z}\right)^2 - 2\,tg\,x \sec x = 0$$

$$-\frac{z'}{z^2} + \sin x\left(\sec^2 x + \frac{1}{z^2} + 2\sec x \cdot \frac{1}{z}\right) - tg\,x \sec x = 0$$

$$-\frac{z'}{z^2} + \sin x \sec^2 x + \frac{1}{z^2}\sin x + 2\sec x \sin x \frac{1}{z} - tg\,x \sec x = 0$$

$$-\frac{z'}{z^2} + \cancel{\frac{\sin x}{\cos^2 x}} + \frac{1}{z^2}\sin x + \frac{2\sin x}{\cos x}\cdot\frac{1}{z} - \cancel{\frac{\sin x}{\cos^2 x}} = 0 \qquad \times -z^2$$

$$z' - \sin x - 2\,tg\,x\, z = 0$$

$$z' - 2\,tg\,x\, z = \sin x \qquad \text{خطی مرتبه اول برحسب } z$$

$$\mu_{(x)} = e^{-\int 2\,tg\,z\,dz} = e^{-2\times -\ln\cos x} = e^{\ln\cos^2 x} = \cos^2 x$$

$$z = \frac{1}{\cos^2 x}\left(\int \cos^2 x \sin x\, dx + c\right) = \frac{1}{\cos^2 x}\left(-\frac{\cos^3 x}{3} + c\right)$$

$$z = \frac{1}{\cos^2 x}\left(-\frac{1}{3}\cos^3 x + c\right) \qquad y = \sec x + \frac{1}{z}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{z} = y - \sec x$$

$$z = \frac{1}{y - \sec x}$$

$$\boxed{\frac{1}{y - \sec x} = \frac{1}{\cos^2 x}\left(-\frac{1}{3}\cos^3 x + c\right)}$$

- معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ اول درجهٔ n :

$$y' = P \longrightarrow P_n(x,y)P^n + P_{n-1}(x,y)P^{n-1} \cdots + P_1(x,y)P + P_0(x,y) = 0$$

که با تبدیل ضریب P^n ($(y')^n$) به یک معادله به شکل زیر تبدیل می‌شود .

$$(y')^n + a_{n-1}(x,y)(y')^{n-1} + a_{n-2}(x,y)(y')^{n-2} + \cdots + a_1(x,y)y' + a_0(x,y) = 0$$

مثال : $(y')^3 + 3xy(y')^2 - 4x^2y' = 0$ یا $(y')^5 + 4\sin x(y')^3 = 0$

حالات مختلف به شکل زیر است :

الف) معادله تجزیه شود :

$$(y' - f_1(x,y)) \cdot y' - (f_2(x,y)) \cdots (y' - f_n(x,y)) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = f_1(x,y) \\ y' = f_2(x,y) \\ y^n = f_n(x,y) \end{cases} \xrightarrow[\text{حل می‌کنیم .}]{\text{هر یک از معادلات را}} \begin{array}{l} \varphi_1(x,y,c) = 0 \\ \varphi_2(x,y,c) = 0 \\ \varphi_n(x,y,c) = 0 \end{array}$$

جواب عمومی $\varphi_1(x,y,c) \cdot \varphi_2(x,y,c) \cdots \varphi_n(x,y,c) = 0$

مثال ۱۰۵ ص ۵۶

$$(y - Px)(P-1)P = 0 \qquad (P = y')$$

$$y - y'x = 0 \rightarrow y'x = y \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|y| = \ln|x| + c$$

$$\Rightarrow \ln|y| - \ln|x| + c = 0$$

$$y' - 1 = 0 \rightarrow y' = 1 \rightarrow y = x + c \rightarrow y - x + c = 0$$

$$y' = 0 \rightarrow y = c \rightarrow y - c = 0$$

$$(y-c)(y-x+c)(\ln|y| - \ln|x| + c) = 0$$

۲۷

حل: $x^2p^2-2pxy+y^2=0$

$$(xp-y)^2=0 \Rightarrow xp-y=0 \rightarrow x\frac{dy}{dx}=y$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y}=\frac{dx}{x} \rightarrow Ln|x|-Ln|y|+c=0$$

۱۰۲ حل
ص ۵۶

$$\underbrace{x^2}_{a}p^2-\underbrace{2xy}_{b}p+\underbrace{2y^2-x^2}_{c}=0$$

$$\Delta=b'^2-ac=x^2y^2-x^2(2y^2-x^2)=x^2y^2-2x^2y^2+x^4=\boxed{x^4-x^2y^2}$$

$$p=\frac{-b'\pm\sqrt{\Delta}}{a}=\frac{xy\pm\sqrt{x^4-x^2y^2}}{x^2}=\frac{xy\pm x\sqrt{x^2-y^2}}{x^2}$$

$$y'=\frac{y\pm\sqrt{x^2-y^2}}{x} \Rightarrow \begin{cases} ① \ \frac{dy}{dx}=\frac{y+\sqrt{x^2-y^2}}{x} \\ ② \ \frac{dy}{dx}=\frac{y-\sqrt{x^2-y^2}}{x} \end{cases}$$

$(y-\sqrt{x^2-y^2})dx-xdy=0$ معادلهٔ همگن

$y=tx \quad dy=tdx+xdt$

$(tx-\sqrt{x^2-t^2x^2})dx-x(tdx+xdt)=0$

$(t-\sqrt{1+t^2})dx-tdx-xdt=0 \qquad -\sqrt{1-t^2}\,dx=xdt$

$$\frac{dx}{x}=\frac{-dt}{\sqrt{1-t^2}} \xrightarrow{\text{انتگرال}} Ln|x|=-Arc\sin t+c$$

$$\boxed{Ln|x|+Arc\sin\left(\frac{y}{x}\right)+c=0} \qquad \varphi_1(x,y,c)=0$$

به روش مشابه φ_2 حساب می شود...

$$Ln|x|-Arc\sin\left(\frac{y}{x}\right)+c=0$$

$$\left(Ln|x|-Arc\sin\left(\frac{y}{x}\right)+c\right).\left(Ln|x|+Arc\sin\left(\frac{y}{x}\right)+c\right)=0$$

ب) معادلاتی که نسبت به y قابل حل می‌باشند. یعنی: $y = f(x,p)$

با مشتق‌گیری از طرفین نسبت به x معادلهٔ جدید به شکل $G(x,p,p') = 0$ حاصل می‌شود

آن را حل می‌کنیم و به جواب $\varphi(x,p,c) = 0$ می‌رسیم. از حذف p از دستگاه زیر جواب عمومی معادله به دست می‌آید:

$$\begin{cases} \varphi = (x,p,c) = 0 \\ y = f(x,p) \end{cases}$$

پ) معادلاتی که نسبت به x قابل حل می‌باشند. یعنی $x = f(y,p)$. با مشتق‌گیری از طرفین نسبت به y و نوشتن $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{p}$ به معادلهٔ جدید $G(y,p,p') = 0$ می‌رسیم که آن را حل می‌کنیم و به جواب $\varphi(y,p,c) = 0$ می‌رسیم. جواب عمومی از حذف p از دستگاه زیر به دست می‌آید:

$$\begin{cases} x = f(y,p) \\ \varphi(y,p,c) = 0 \end{cases}$$

مثال ۱۰۴ ص ۵۶

$$y = y'^2 + xy' - x$$

$$y = p^2 + px - x \longrightarrow \frac{dy}{dx} = 2pp' + p + p'x - 1$$

$$\cancel{p} = 2pp' + \cancel{p} + p'x - 1 \longrightarrow 2pp' + p'x - 1 = 0$$

$$p'(2p + x) = 1 \longrightarrow \underbrace{1}_{M}dx - \underbrace{(2p + x)}_{N}dp = 0$$

غیرکامل

$$\frac{M_p - N_x}{M} = \frac{0 - (-1)}{1} = 1 = g(p) \Rightarrow \mu = e^{-\int g(p)\,dp}$$

$$\mu = e^{-\int 1\,dp} = e^{-p} \xrightarrow{\text{ضرب در دو طرف}} e^{-p}dx - (2p + x)e^{-p}dp = 0$$

$$\int e^{-p}dx = xe^{-p} \int -2pe^{-p} - xe^{-p}\,dp =$$

$$\begin{array}{c|c} -2p\;+ & e^{-p} \\ -2\;- & -e^{-p} \\ 0 & e^{-p} \end{array}$$

$$= 2pe^{-p} + 2e^{-p} + xe^{-p}$$

جواب عمومی
$$\begin{cases} 2pe^{-p} + 2e^{-p} + xe^{-p} + c = 0 \longleftarrow \text{p برحسب x و y جایگذاری در } \varphi \\ y = p^2 + px - x \longrightarrow p^2 + px - (x + y) = 0 \longrightarrow \end{cases}$$

$$\Delta = x^2 + 4(1)(x+y) = x^2 + 4(x+y)$$

$$\begin{cases} p = \dfrac{-x \pm \sqrt{x^2 + 4x + 4y}}{2} \\ 2pe^{-p} + 2e^{-p} + xe^{-p} + c = 0 \end{cases}$$

مثال ۱۰۳ ص ۵۶)

$$x = y' \cdot \cos y' = p \cos p$$

$$\frac{dx}{dy} = p' \cos p - p \cdot p' \sin p \Rightarrow \frac{1}{p} = \underbrace{p'}_{\frac{dp}{dy}} (\cos p - p \sin p$$

$$\Rightarrow dy = p(\cos p - p \sin p)\, dp = (p \cos p - p^2 \sin p)\, dp$$ // تفکیک پذیر

$$y = \int p \cos p - p^2 \sin p \, dp \longrightarrow \begin{array}{c|c} p & \cos p \\ \hline & \end{array} \quad \begin{array}{c|c} p^2 & \sin p \\ \hline & \end{array}$$

با استفاده از روش جزء به جزء $\longrightarrow$ ...

مثال ۱۰۸ ص ۵۶) ***

$$p = tg\left(x - \frac{p}{1-p^2}\right)$$

$$Arc\, tg\, p = x - \frac{p}{1+p^2} \Rightarrow x = Arc\, tg\, p + \frac{p}{1+p^2}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{p'}{1+p^2} + \frac{p'(1+p^2) - 2pp' \cdot p}{(1+p^2)^2} = \frac{p'(1+p^2) + p' + p'p^2 - 2p'p^2}{(1+p^2)^2}$$

$$\frac{1}{p} = \frac{p' + \cancel{p'p^2} + p' + \cancel{p'p^2} - \cancel{2p'p^2}}{(1+p^2)^2} = \frac{2p'}{(1+p^2)^2}$$

$$\longrightarrow dy = \frac{2p\, dp}{(1+p^2)^2} \qquad \int dy = \int \frac{2p\, dp}{(1+p^2)^2}$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{-1}{1+p^2} + c \\ x = \operatorname{Arc\,tg} p + \dfrac{p}{1+p^2} \end{cases} \xrightarrow{\text{را حذف می‌کنیم } p} \frac{1}{1+p^2} = -y + c \rightarrow 1+p^2 = \frac{1}{-y+c}$$

$$p^2 = \frac{1}{-y+c} - 1 = \frac{1+y-c}{y+c}$$

$$p = \pm\sqrt{\frac{1-y-c}{-y+c}}$$

ث) معادلات کلرو (حالت خاص لاگرانژ):

صورت کلی معادله به صورت $y = px + f(p)$ می‌باشد.

$$\cancel{p} = \frac{dy}{dx} = \cancel{p} + p'x + p'f'(p) \Rightarrow p'(x + f'(p)) = 0$$

$$\frac{dp}{dx}\left[x + f'(p)\right] = 0 \qquad \frac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow p = c$$

$$x + f'(p) = 0 \rightarrow x = -f'(p)$$

$$p = c \Rightarrow \begin{cases} y = px + f(p) \\ p = c \end{cases} \Rightarrow \boxed{y = cx + f(c)}$$

جواب عمومی:

اگر به جای x از $-f'_p$ استفاده می‌کنیم. x و y برحسب p حساب می‌شوند که جواب پارامتری نام دارد.

$$\begin{cases} x = -f'(p) \\ y = -pf'(p) + f(p) \end{cases}$$

مثال: $y = x\underset{p}{\underline{y'}} + \underbrace{(3y'^2 + y')}_{f_p} = px + (3p^2 + p)$ جواب عمومی و پارامتری را به دست آورید.

$$\boxed{y = cx + (3c^2 + c)} \text{ عمومی} \qquad \text{پارامتری} \begin{cases} x = -f'(p) \\ y = -p(6p+1) + (3p^2 + p) \end{cases}$$

ج) معادله لاگرانژ:

$$y = f(p)\,x + g(p)$$ ← صورت کلی

$$p = \frac{dy}{dx} = p' f'(p)\cdot x + f(p) + p' g'(p)$$

$$p - f(p) = p'\left[f'(p)\,x + g'(p)\right] \qquad p' = \frac{dp}{dx}$$

$$p - f(p) = \frac{1}{x'}\left[f'(p)\,x + g'(p)\right] \qquad \frac{dx}{dp} = x'$$

$$x'\left(p - f(p)\right) = f'(p)\,x + g'(p)$$

$$x' = \frac{f'(p)}{p - f(p)}\,x + \frac{g'(p)}{p - f(p)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x' - \frac{f'(p)}{p - f(p)}\,x = \frac{g'(p)}{p - f(p)}}$$

خطی شود. ← خطی مرتبه اول برحسب x و p

جواب $\boxed{x = \tau(p)}$

$$\begin{cases} y = f(p)\,x + g(p) \\ x = \tau(p) \end{cases}$$

p را از دستگاه مقابل حذف می‌کنیم تا جواب عمومی به دست آید.

* در صورت مشکل بودن حذف p، جواب پارامتری به شکل زیر خواهد بود:

$$\begin{cases} y = f(p)\cdot\tau(p) + g(p) \\ x = \tau(p) \end{cases}$$

۳۱

(مثال ۱۰۷
ص ۵۶

$$y = xy'^2 + y'^3 = x\underbrace{p^2}_{f} + \underbrace{p^3}_{g}$$

حل: $$x' - \frac{f'(p)}{p - f(p)}x = \frac{g'(p)}{p - f(p)} \Rightarrow x' - \frac{2p}{p - p^2}x = \frac{3p^2}{p - p^2}$$

$$\boxed{x' + \frac{2}{p-1}x = \frac{3p}{1-p}}$$

$$\mu(p) = e^{\int \frac{2}{p-1}dp} = e^{2\ln(p-1)} = e^{\ln(p-1)^2} = (p-1)^2$$

$$x = \frac{1}{\mu(p)}\left(\int \mu(p)\cdot q(p)\,dp + c\right)$$

$$x = \frac{1}{\mu(p)}\left(\int \overset{1-p}{\cancel{(p-1)^2}}\frac{3p}{1-p}\,dp + c\right)$$

$$x = \frac{1}{(p-1)^2}\left(\int 3p - 3p^2\,dp + c\right) = \frac{1}{(p-1)^2}\left(\frac{3p^2}{2} - p^3 + c\right)$$

$$\begin{cases} y = xp^2 + p^3 \\ x = \dfrac{1}{(p-1)^2}\left(\dfrac{3p^2}{2} - p^3 + c\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{p^2}{(p-1)^2}\left(\dfrac{3p^2}{2} - p^3 + c\right) \\ x = \dfrac{1}{(p-1)^2}\left(\dfrac{3p^2}{2} - p^3 + c\right) \end{cases}$$

جواب پارامتری

- کاربردهای معادلات مرتبهٔ اول :

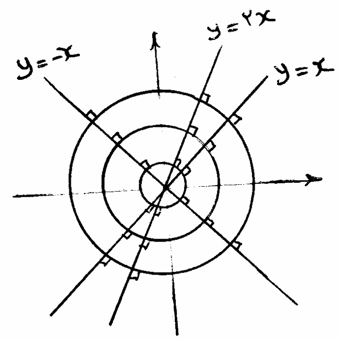
۱- مسیر متعامد :

خانوادهٔ $f(x,y,c)=0$ را یک مسیر متعامد برای خانوادهٔ $g(x,y,c)=0$ گوییم، هرگاه:
هر منحنی f بر تمام منحنی‌های g عمود باشد و برعکس.

مثال :

$$x^2+y^2=c^2$$ ← معادلهٔ دایره

خانوادهٔ دوایری به مرکز مبدأ و شعاع c .



* واضح است که $y=cx$ مسیر متعامد می‌باشد.

* طریقهٔ محاسبهٔ مسیرهای متعامد :

ابتدا معادلهٔ دیفرانسیل نظیر f را به دست می‌آوریم. سپس به جای y' ، $-\frac{1}{y'}$ قرار می‌دهیم. سپس معادلهٔ جدید را حل می‌کنیم تا g به دست آید.

۱- مسیر متعامد $x^2+y^2=c^2$ را بیابید.

مثال:

$$\begin{cases} x^2+y^2=c^2 \\ 2x+2yy'=0 \end{cases} \longrightarrow x+yy'=0 \quad \text{معادلهٔ دیفرانسیل } f$$

$$\xrightarrow{y' \to -\frac{1}{y'}} \quad x-\frac{y}{y'}=0 \quad \text{معادلهٔ دیفرانسیل نظیر } g$$

$$\to x=\frac{x}{y'} \to y'=\frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x} \longrightarrow \int\frac{dy}{y}=\int\frac{dx}{x} \to \ln y=\ln x+\ln c$$

$$\Rightarrow \boxed{y=cx} \quad \text{مسیر متعامد}$$

۲- مسیر متعامد $y=c(\sec x+\tan x)$ را بیابید.

$$\begin{cases} y=c(\sec x+\tan x) \\ y'=(\sec x\tan x+\sec^2 x)c \end{cases}$$

$$(\sec x)'=\left(\frac{1}{\cos x}\right)'=\frac{0-(-\sin x)}{\cos x\cdot\cos x}=\tan x\cdot\sec x$$

$$\frac{y}{y'}=\frac{\cancel{c}(\sec x+\tan x)}{\cancel{c}(\sec x\tan x+\sec^2 x)}=\frac{\cancel{\sec x+\tan x}}{\sec x\,\cancel{(\tan x+\sec x)}}=\frac{1}{\sec x}$$

$$\Rightarrow y'=y\sec x \quad \text{معادلهٔ دیفرانسیل } f \longrightarrow y'\to-\frac{1}{y'}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{y'}=y\sec x \quad \text{معادلهٔ دیفرانسیل نظیر } g$$

$$\Rightarrow y' = \frac{-1}{y\sec x} \xrightarrow{\text{تفکیک‌پذیر}} \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{y\sec x}$$

$$\int y\,dy = \int \frac{-dx}{\sec x} \Rightarrow \boxed{\frac{y^2}{2} = -\sin x + c}$$

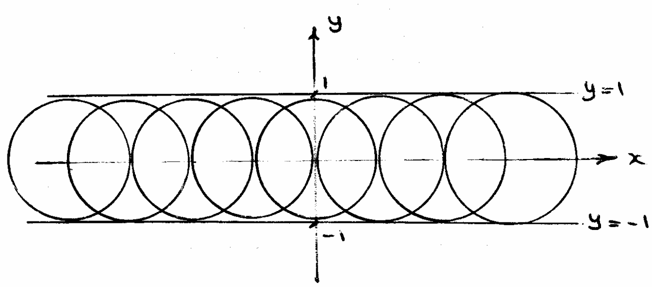
مسیر متعامد

۲- پوش منحنی:

پوش خانوادهٔ $F(x, y, c) = 0$ تابعی است که بر تمام منحنی های F فقط در یک نقطه مماس باشد.

مثال: $(x-c)^2 + y^2 = 1$ ← خانوادهٔ دایره ای به مرکز $(c, 0)$ و شعاع 1

← واضح است که $y = 1$ و $y = -1$ پوش های دسته منحنی می باشند.



* طریقه محاسبهٔ پوش (طریقهٔ محاسبهٔ جواب های ویژه از روی جواب عمومی):

برای این کار خانوادهٔ f و مشتق آن نسبت به c $\left(\frac{\partial f}{\partial c}\right)$ را در یک دستگاه قرار می‌دهیم.

سپس c را از این دستگاه حذف می‌کنیم.

- مثال: پوش خانواده $(x-c)^2+y^2=1$ را بیابید.

$$\begin{cases} (x-c)^2+y^2=1 \\ -2(x-c)=0 \end{cases} \rightarrow \boxed{x=c}$$

$$\xrightarrow[(c-c)^2+y^2=1]{x=c} y^2=1 \Longrightarrow \boxed{y=\pm 1}$$ پوش منحنی

- مثال: پوش خانواده $y=\dfrac{x}{c}+c^2$ را بیابید.

$$\begin{cases} y=\dfrac{x}{c}+c^2 \\ 0=\dfrac{-x}{c^2}+2c \end{cases} \rightarrow \frac{x}{c^2}=2c \rightarrow x=2c^3$$

$$\Rightarrow c=\sqrt[3]{\frac{x}{2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{y=\frac{x}{\sqrt[3]{\frac{x}{2}}}+\sqrt[3]{\frac{x^2}{4}}}$$

فصل دوم - معادلات مرتبهٔ بالاتر از ۱ :

صورت کلی معادلهٔ مرتبهٔ دوم به شکل $F(x,y,y',y'')=0$ می باشد .

$$y''+4y'-y=0 \quad , \quad x^2y''-xy'+cy=0$$

$$(1-x^2)y''-2xy'+3y=0$$

همان طور که می دانیم برای تشکیل معادلهٔ دیفرانسیل به تعداد ثابت های اساسی مشتق می گرفتیم . بنابراین انتظار داریم که در جواب معادلات مرتبهٔ دوم ، ۲ ثابت ظاهر شود . در برخی موارد معادلات مرتبهٔ دوم با استفاده از تغییر متغیر مناسب به معادلهٔ مرتبهٔ اول تبدیل می شود که عبارتند از :

↓

الف) معادله فاقد y باشد . یعنی : $F(x,y',y'')=0$

روش حل : $z=y' \Rightarrow y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{dz}{dx}=z'$

$\Rightarrow F(x,z,z')=0$ مرتبهٔ اول

با حل مرتبهٔ اول z به دست می آید که نتیجه $z=y'=\frac{dy}{dx}$

بنابراین $dy=z\,dx$ $\quad y=\int z\,dx$

مثال : $3y''+\frac{4}{x}y'+\ln x=0$

نوع : فاقد y $\quad y'=z \quad y''=z' \rightarrow 3z'+\frac{4}{x}z=-\ln x$

$\Rightarrow z'+\frac{4}{3x}z=-\frac{1}{3}\ln x$ خطی مرتبهٔ اول برحسب z و x

$$\mu(x)=e^{\int\frac{4}{3x}dx}=e^{\frac{4}{3}\ln x}=x^{\frac{4}{3}}=\sqrt[3]{x^4}$$

$$z=\frac{1}{\mu(x)}\left(\int \mu(x)\cdot q(x)\,dx+c\right)=\frac{1}{x^{\frac{4}{3}}}\left(\int x^{\frac{4}{3}}\cdot -\frac{1}{3}\ln x\,dx+c\right)$$

$$z=x^{-\frac{4}{3}}\left(-\frac{1}{3}\int x^{\frac{4}{3}}\cdot\underbrace{\ln x}_{u}\,dx+c\right) \qquad u=\ln x \quad du=\frac{dx}{x}, \quad dv=x^{\frac{4}{3}}dx \quad v=\frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}}$$

$$\rightarrow z=x^{-\frac{4}{3}}\left(-\frac{1}{3}\left[\frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}}\ln x-\int\frac{3}{7}x^{\frac{4}{3}}dx+c\right]\right. \qquad x^{\frac{7}{3}}\times\frac{1}{x}=x^{\frac{4}{3}}$$

$$z=-\frac{1}{7}x^{\frac{4}{3}}\operatorname{Ln}x+\frac{1}{7}x^{-\frac{3}{3}}\times\frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}}+c$$

$$z=-\frac{1}{7}x^{\frac{4}{3}}\operatorname{Ln}x+\frac{3}{49}x^{\frac{4}{3}}+c \qquad z=y'$$

$$y=\int\left(-\frac{1}{7}x^{\frac{4}{3}}\operatorname{Ln}x+\frac{3}{49}x^{\frac{4}{3}}+c\right)dx$$

$$=-\frac{1}{7}\left(\frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}}\operatorname{Ln}x-\frac{3}{7}\int x^{\frac{4}{3}}dx\right)+\frac{3}{49}\times\frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}}+\underline{\underline{c}}x+\underline{\underline{K}}$$

دو ثابت

مثال : $xy''=y'\operatorname{Ln}\left(\frac{y'}{x}\right)$

$$xz'=z\operatorname{Ln}\left(\frac{z}{x}\right)$$

$$x\frac{dz}{dx}=z\operatorname{Ln}\left(\frac{z}{x}\right)\Rightarrow z\operatorname{Ln}\left(\frac{z}{x}\right)dx-xdz=0$$

همگن درجه ۱ :

$$z=tx \qquad dz=tdx+xdt$$

$$tx\operatorname{Ln}\left(\frac{t\cancel{x}}{\cancel{x}}\right)dx-x(tdx+xdt)=0$$

$$dx(t\operatorname{Ln}t-t)-xdt=0 \qquad (t\operatorname{Ln}t-t)dx=xdt$$

$$\frac{dx}{x}=\frac{dt}{t\operatorname{Ln}t-t}=\frac{dt}{t(\operatorname{Ln}t-1)}$$

$$\int\frac{dx}{x}=\int\frac{dt}{t\underbrace{(\operatorname{Ln}t-1)}_{u}} \qquad \operatorname{Ln}|x|+c=\operatorname{Ln}\left|\operatorname{Ln}t-1\right|$$

$$\Rightarrow\left|\operatorname{Ln}t-1\right|=e^{\operatorname{Ln}|x|+c}=Ke^{\operatorname{Ln}|x|}=K|x| \qquad (K>0)$$

$$\left|\operatorname{Ln}t-1\right|=K|x|\Rightarrow\operatorname{Ln}t-1=1\pm Kx$$

$$\Rightarrow\operatorname{Ln}t=1\pm Kx \qquad t=e^{1\pm Kx} \qquad t=\frac{z}{x}$$

$$\frac{z}{x}=e^{1\pm Kx}\Rightarrow z=xe^{1\pm Kx}\Rightarrow y'=xe^{1\pm Kx}$$

$$y=\int xe^{1\pm Kx}dx+c$$

← با انتگرال جز به جز حل شود.

ب) معادله فاقد متغیر x باشد. یعنی $F(y,y',y'')=0$:

با در نظر گرفتن $z=y'$ و مشتق گیری از دو طرف نسبت به y و محاسبه y'' به معادله مرتبه اول برحسب z و y می‌رسیم.

$$z=y' \Rightarrow \frac{dz}{dy}=\frac{dy'}{dx}\cdot\frac{dx}{dy} \longrightarrow \frac{1}{y'}$$

$$\Rightarrow z'=y''\cdot\frac{1}{y'}=y''\cdot\frac{1}{z} \Rightarrow \boxed{y''=z\cdot z'}$$

$$\Rightarrow \boxed{F(y,z,z\cdot z')=0}$$

مثال) $y''+y'\cdot\cos y=0$

$$z\cdot z'+z\cos y=0 \qquad z(z'+\cos y)=0$$

① $z=0 \Rightarrow y'=0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=0 \Rightarrow \boxed{y=c}$

② $z'+\cos y=0 \qquad \frac{dz}{dy}=-\cos y \qquad dz=-\cos y\,dy$

$$z=\int -\cos y\,dy+c=-\sin y+c \qquad \boxed{z=-\sin y+c}$$

$$z=y'=\frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=c-\sin y \Rightarrow \boxed{\frac{dy}{c-\sin y}=dx}$$

$$\boxed{\int dx=\int\frac{dy}{c-\sin y}}$$

با استفاده از روش نصف کمان حل می‌شود

$$\begin{cases} \sin y=\dfrac{2t}{1+t^2} \\ dy=\dfrac{2dt}{1+t^2} \\ t=\operatorname{tg}\dfrac{y}{2} \end{cases}$$

طرف اول $=x+K$

طرف دوم $=\displaystyle\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{c-\frac{2t}{1+t^2}}=\int\frac{2dt}{ct^2-c-2t}$

$$=\int\frac{2dt}{ct^2-2t+c}$$

$$=\int\frac{2\,dt}{c\left[(t-\frac{1}{c})^2+(1-\frac{1}{c^2})\right]} \longrightarrow ?$$

به مربع کامل می‌شود

$$ct^2-2t+c=c\left(t^2-\frac{2}{c}t+1\right)$$
$$=c\left(t^2-\frac{2}{c}t+\frac{1}{c^2}-\frac{1}{c^2}+1\right)$$
$$=c\left[\left(t-\frac{1}{c}\right)^2+1-\frac{1}{c^2}\right]$$

۳۹

ص ۱۰۵ / ۱۰

مثال : $yy'' - y'^2 = 0 \qquad y' = z \qquad y'' = z.z'$

$$y.zz' - z^2 = 0 \rightarrow z(yz' - z) = 0$$

$$z = 0 \Rightarrow y' = 0 \rightarrow \frac{dy}{dx} = 0 \rightarrow \boxed{y = c}$$

$$yz' - z = 0 \qquad y\frac{dz}{dy} - z = 0 \rightarrow y\frac{dz}{dy} = z$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{z} = \frac{dy}{y} \rightarrow \ln|y| + c = \ln|z|$$

$$\Rightarrow |z| = e^{\ln|y| + c} \rightarrow |z| = K|y|$$

$$\Rightarrow z = \pm Ky \rightarrow \frac{dy}{dx} = \pm Ky$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y} = \pm K dx \rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \pm K dx$$

$$\Rightarrow \ln|y| = \pm Kx + c \rightarrow |y| = e^{\pm Kx + c}$$

$$\boxed{y = \pm K_1 . e^{\pm Kx}}$$

پ) معادله فاقد متغیر x و y باشد. یعنی : $F(y', y'') = 0$

۱) متغیر مستقل x $\qquad y' = z \qquad y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dz}{dx} \Rightarrow y'' = z'$

۲) متغیر مستقل y $\qquad y' = z \qquad y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = z'z$

$$\Rightarrow y' = z \qquad y'' = z.z'$$

در معادله قرار داده و به معادله مرتبه اول می رسیم. آن را حل کرده و z را به دست می آوریم. سپس با انتگرال گیری از z ، y به دست می آید.

مثال : $y'' + y'^2 = 0$

$$x \text{ مستقل} \rightarrow z' + z^2 = 0 \qquad \frac{dz}{dx} + z^2 = 0$$

$$\frac{dz}{dx} = -z^2 \Rightarrow \frac{dz}{-z^2} = dx \qquad \int \frac{-dz}{z^2} = \int dx$$

$$\frac{1}{z}=x+c \qquad \frac{1}{y'}=x+c \to y'=\frac{1}{x+c} \Rightarrow \boxed{y=\ln|x+c|+K}$$

ت) معادلهٔ همگن :

تعریف : معادلهٔ $F(x,y,y',y'')=0$ نسبت به متغیرهای y و y' و y'' همگن است هرگاه :

$$F(x,\lambda y,\lambda y',\lambda y'')=\lambda^k F(x,y,y',y'')$$

اگر معادله همگن باشد با تغییر متغیر $y=e^{\int z\,dx}$ می‌توان معادله را به معادلهٔ مرتبهٔ اول برحسب z و x تبدیل کرد که پس از محاسبهٔ z ، y را از رابطهٔ $y=e^{\int z\,dx}$ حساب می‌کنیم. y' و y'' نیز به شکل زیر حساب می‌شوند :

$$y=e^{\int z\,dx} \qquad y'=\frac{dy}{dx}=ze^{\int z\,dx}$$

$$y''=\frac{dy'}{dx}=z'e^{\int z\,dx}+z\cdot z\cdot e^{\int z\,dx}$$

$$\Rightarrow y''=(z'+z^2)e^{\int z\,dx}$$

$$\Rightarrow F\left(x,\ e^{\int z\,dx},\ ze^{\int z\,dx},\ (z'+z^2)e^{\int z\,dx}\right)=0$$

$$e^{\int \underbrace{(x^2+x)}_{z}\,dx}$$

$$y'=(x^2+x)e^{\int\cdots}$$

سال ۸۴ ص ۱۰۵) $yy''=2(y')^2 \to y'=ze^{\int z\,dx},\ y''=(z^2+z')e^{\int z\,dx}$

$$yy''-2(y')^2=0 \to F(x,\lambda y,\lambda y',\lambda y'')=\lambda^2F(x,y,y',y'')$$

✓ همگن است

$$e^{\int z\,dx}\cdot(z'+z^2)e^{\int z\,dx}-2\cdot z^2e^{2\int z\,dx}=0$$

$$\underbrace{e^{2\int z\,dx}}_{\neq 0}(z'+z^2-2z^2)=0 \qquad z'-z^2=0 \qquad \frac{dz}{dx}=z^2$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{z^2}=dx \Rightarrow \frac{-1}{z}=x+c \Rightarrow -z=\frac{1}{x+c}$$

$$z=\frac{-1}{x+c} \Rightarrow y=e^{\int\frac{-1}{x+c}dx}=e^{-\ln|x+c|}+K$$

$$y=e^{-\ln|x+c|}+K=\frac{1}{|x+c|}+K$$

$$\boxed{y=\frac{1}{|x+c|}+K}$$

$$tghx = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

مثال و تمرین :

۱) $xy'' + y' = 0$

۲) $y'' = y' + tghx$

۳) $yy'' - (y')^2 = 0$

۴) $y'' + e^y (y')^3 = 0$

۵) $y'' + y' tgx = \sin 2x$

۶) xy''

تذکر : در حالت کلی معادلهٔ $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(k+n)}) = 0$ با استفاده از تغییر متغیر $z = y^{(k)}$ به معادلهٔ مرتبهٔ n ام $F(x, z, z', \ldots, z^{(n)})$ تبدیل می‌شود.

مثال) $xy''' + y'' = 1 + x$

$z = y'' \rightarrow z' = y''' \qquad xz' + z = 1 + x$

$z' + \frac{1}{x} z = 1 + \frac{1}{x}$ خطی مرتبهٔ اول

$z = ? \Rightarrow y'' = ? \xrightarrow{\text{دو بار انتگرال}}$

$$z = \frac{1}{x}\left(\int x \cdot \left(1 + \frac{1}{x}\right) dx + c\right) = \frac{1}{x}\left(\frac{x^2}{2} + x + c\right) \longrightarrow$$ ادامه ۲ بار انتگرال‌گیری

- معادلات دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم :

صورت کلی معادلات مرتبهٔ دوم به شکل زیر است :

غیرهمگن

I) $y'' + P(x) y' + Q(x) y = r(x)$

در حالتی که $r(x) = 0$ ، یعنی II $y'' + P(x)y' + Q(x) y = 0$ ، معادله را همگن نامیم .

قضیهٔ ۱ : اگر $y_1(x)$ و $y_2(x)$ جوابهای خصوصی معادلهٔ II (همگن) باشند ، $y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2$ $(c_i \in \mathbb{R})$ جواب عمومی معادلهٔ II می‌باشد

قضیهٔ ۲ : اگر y_p جواب خصوصی معادلهٔ I (غیرهمگن) و y_h جواب عمومی معادلهٔ II باشد ، $y = y_h + y_p$ جواب عمومی معادلهٔ I (غیرهمگن) می‌باشد .

جواب عمومی غیرهمگن ، جواب عمومی همگن ، جواب خصوصی غیرهمگن

در این مبحث برای حل معادلهٔ غیرهمگن ابتدا معادلهٔ همگن را حل می‌کنیم (روشهای مشخص دارد) ، سپس

با توجه به طرف دوم معادلهٔ غیرهمگن ، جواب خصوصی معادله را به دست می‌آوریم جمع دو جواب ، جواب عمومی غیرهمگن می‌باشد

تعریف : توابع $y_1, y_2, \dots, y_n$ مستقل خطی هستند هرگاه از تساوی $c_1y_1+c_2y_2+\dots+c_ny_n=0$ نتیجه $c_1=c_2=\dots=c_n=0$ حاصل شود . درغیر این صورت وابسته‌اند .

مثال : درهر مورد استقلال یا وابستگی را بررسی کنید .

$$1)\quad x, x^2 \rightarrow c_1x+c_2x^2=0 \overset{?}{\Longrightarrow} c_1=c_2=0$$

$$\begin{matrix} x=1 \\ x=2 \end{matrix} \quad \begin{cases} c_1+c_2=0 & \times(-2) \\ 2c_1+4c_2=0 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} -2c_2+4c_2=0 \Rightarrow 2c_2=0 & \boxed{c_2=0} \\ c_1+c_2=0 \rightarrow c_1+0=0 & \boxed{c_1=0} \end{matrix}$$

$\longrightarrow$ x و x^2 مستقل می‌باشند

$$2)\quad e^x, e^{2x} \rightarrow c_1e^x+c_2e^{2x}=0$$

$$\underset{\neq 0}{e^x}(c_1+c_2e^x)=0 \qquad c_1+c_2e^x=0$$

$$\begin{matrix} x=0 \\ x=1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} c_1+c_2=0 \\ -c_1+ec_2=0 \end{cases} \quad c_2-ec_2=0 \quad \begin{matrix} c_2(1-e)=0 & \boxed{c_2=0} \\ c_1=0 \end{matrix}$$

$\Rightarrow$ مستقل هستند

$$3)\quad e^x, 5e^x \rightarrow c_1e^x+c_2(5e^x)=0 \rightarrow \underset{\neq 0}{e^x}(c_1+5c_2)=0$$

$$\Rightarrow c_1+5c_2=0 \Rightarrow \boxed{c_1=-5c_2}$$

$\Leftarrow$ پس مستقل نیستند .

تعریف : فرض کنیم توابع $y_1, y_2, \dots, y_n$ تا مرتبهٔ $n-1$ مشتق‌پذیر باشند ، دراین صورت رونسکی (رونسکین) این توابع به این صورت تعریف می‌شود :

$$w(y_1, y_2, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

مثال:

$$w(x^2, x^3) = \begin{vmatrix} x^2 & x^3 \\ 2x & 3x^2 \end{vmatrix} = 3x^4 - 2x^4 = x^4 \neq 0$$

$\Rightarrow$ مستقل اند

تذکر: توابع $y_1, y_2, \dots, y_n$ مستقل خطی می باشند هرگاه $w(y_1, y_2, \dots, y_n) \neq 0$ باشد. مثال:

$$w(e^x, 3e^x) = \begin{vmatrix} e^x & 3e^x \\ e^x & 3e^x \end{vmatrix} = 3e^{2x} - 3e^{2x} = 0 \Rightarrow$$ پس وابسته اند

تذکر: اگر $y_1, y_2, \dots, y_n$ ، n جواب مستقل معادلهٔ مرتبهٔ n ام باشند، جواب عمومی به شکل زیر می باشد:

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x)$$

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 + \cdots + c_n y_n$$

درحالتی که معادلهٔ مرتبهٔ دوم باشد: $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$

معادلهٔ خطی مرتبهٔ دوم همگن:

صورت کلی $\rightarrow y'' + P(x) y' + Q(x) y = 0$

$y_1 = y_1(x)$
جواب خصوصی

ترجیحاً اثبات فرمول در کتاب دیده شود. $\longrightarrow$ $\boxed{y_2 = y_1 \left(\int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int P(x)\,dx} dx \right)}$ $\Rightarrow \boxed{y = c_1 y_1 + c_2 y_2}$

- در حالات زیر جواب خصوصی مشخص می شوند:

۱) $1 + P(x) + Q(x) = 0 \Rightarrow y_1 = e^x$

۲) $1 - P(x) + Q(x) = 0 \Rightarrow y_1 = e^{-x}$

۳) $P(x) + xQ(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad y_1 = x$

۴) $m^2 + mP(x) + Q(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad y_1 = e^{mx}$

مثال: هریک از معادلات زیر را حل کنید:

$Q(x)$ مساوی y را نیز دارد
لذا در جواب y_2 دیده
نمی‌شود.

۱) $xy'' + 2y' + xy = 0 \quad , \quad y_1 = \dfrac{\sin x}{x}$

(یکی از جوابهای خصوصی داده شده است،
برای یافتن جواب عمومی، کافیست یک
جواب دیگر خصوصی را به دست آورد که با
اولی مستقل خطی باشد)

ابتدا به فرم
استاندارد می‌نویسیم $\longrightarrow$ $y'' + \dfrac{2}{x}y' + y = 0$

$$y_2 = y_1\left(\int \frac{1}{y_1^2} \cdot e^{-\int P(x)\,dx}\,dx\right)$$

$$y_2 = \frac{\sin x}{x}\left(\int \frac{x^2}{\sin^2 x}\, e^{-\int \frac{2}{x}dx}\,dx\right) = \frac{\sin x}{x}\left(\int \frac{\cancel{x^2}}{\sin^2 x} \cdot \frac{1}{\cancel{x^2}}\,dx\right)$$

$$y_2 = \frac{\sin x}{x}\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = \frac{\sin x}{x}\int (1 + \cot^2 x)\,dx$$

$$y_2 = \frac{\sin x}{x} \times -\cot x = -\frac{\cos x}{x} \qquad \boxed{y_2 = \frac{-\cos x}{x}}$$

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 = c_1\frac{\sin x}{x} + c_2\left(-\frac{\cos x}{x}\right)$$

مثال: $(x+1)y'' - (2x+3)y' + (x+2)y = 0 \qquad y_1 = e^x$

حل: $y'' - \left(\dfrac{2x+3}{x+1}\right) + \dfrac{x+2}{(x+1)}y = 0$

$$\boxed{\begin{aligned}&\int \frac{2x+3}{x+1}\,dx = \int \frac{2x+2+1}{x+1}\,dx \\ &\int 2 + \frac{1}{x+1}\,dx = 2x + \ln(x+1)\end{aligned}}$$

$$y_2 = e^x\left(\int \frac{1}{e^{2x}} \cdot e^{\int \frac{2x+3}{x+1}dx}\,dx\right)$$

$$y_2 = e^x\left(\int e^{-2x} \cdot e^{2x + \ln(x+1)}\,dx\right)$$

$$= e^x\left(\int e^{\ln(x+1)}\,dx\right) = e^x\left(\int x+1\,dx\right) = e^x\left(\frac{x^2}{2} + x\right)$$

$$y_2 = e^x\left(\frac{x^2}{2} + x\right)$$

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 = c_1e^x + c_2e^x\left(\frac{x^2}{2} + x\right)$$

تمرین:

۱) $(1+x)^2y'' - 2(x+1)y' + 2y = 0 \qquad y_1 = 1+x$

۲) $y'' - y' + e^{2x}y = 0 \qquad y_1 = \sin(e^x)$

۳) $(1-x)^2y'' + 4(1-x)y' + 2y = 0 \qquad y_1 = \dfrac{1}{1-x}$

* معادلات خطی مرتبهٔ nام همگن با ضرایب ثابت:

صورت کلی: $a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$

شکل اپراتوری: $a_n D^n y + a_{n-1} D^{n-1} y + \cdots + a_1 D y + a_0 y = 0$

$$(a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0)y = 0 \qquad \left(Dy = \frac{dy}{dx},\quad D^n y = \frac{d^n y}{dx^n} \right)$$

معادلهٔ مشخصه $\rightarrow a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0 = 0$

معادلهٔ مشخصه را حل می‌کنیم. این معادله دارای n جواب حقیقی یا مختلط می‌باشد (بدون تکرار یا با تکرار)

جواب متناظر هر ریشهٔ معادلهٔ مشخصه را به دست می‌آوریم. به جوابهای $y_1, y_2, \ldots, y_n$ می‌رسیم. بنابراین جواب عمومی به شکل زیر است:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n$$

برای نوشتن جوابهای متناظر ریشه‌های معادلهٔ مشخصه به مثال زیر توجه کنید:

مثال: در هر مورد ریشه‌های معادلهٔ مشخصه داده شده، جوابهای متناظر را بنویسید و پس از تشکیل معادلهٔ مشخصه، معادلهٔ اصلی را بنویسید.

اگر ریشه‌های تکراری باشد، در x ضرب می‌کنیم (آنقدر در x ضرب می‌کنیم تا تکراری نباشد) $x, x^2, x^3, \ldots$

۱) ۵ و ۲

$y_1 = e^{5x} \qquad y_2 = e^{2x}$

$y = c_1 e^{5x} + c_2 e^{2x}$

$(D-5)(D-2) = 0$

$D^2 - 7D + 10 = 0$

$(D^2 - 7D + 10)y = 0$

$y'' - 7y' + 10y = 0$

۲) ۳ و ۳ و ۳ و ۲ $\rightarrow e^{2x}$

$e^{3x} \quad xe^{3x} \quad x^2e^{3x}$

$y = c_1 e^{3x} + c_2 xe^{3x} + c_3 x^2 e^{3x} + c_4 e^{2x}$

$(D-3)(D-3)(D-3)(D-2) = 0$

$(D^3 - 9D^2 + 27D - 27)(D-2) = 0$

$D^4 - 9D^3 + 27D^2 - 27D - 2D^3 + 18D^2 - 54D + 54 = 0$

$D^4 - 11D^3 + 45D^2 - 81D + 54 = 0$

$y^{(4)} - 11y''' + 45y'' - 81y' + 54y = 0$

* هرگاه ریشه تکراری باشد، با ضرب توانهای طبیعی x (x, x^2, x^3 —) در جوابهای متناظر، جوابها را از یکدیگر مستقل می کنیم .

یادآوری :

$$x^2+4x+9=0 \qquad \Delta = 16-4(9)=-20$$

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{-20}}{2}=-2\pm\sqrt{5}=-2\pm\sqrt{5}\,i$$

جوابها مزدوج و مختلط

$\alpha \pm \beta i$

$e^{\alpha x}\cos\beta x,\ e^{\alpha x}\sin\beta x$

۳) $2,\ 3\pm 5i$

$e^{2x} \qquad e^{3x}\cos 5x,\ e^{3x}\sin 5x$

$$y=c_1e^{2x}+c_2e^{3x}\cos 5x+c_3e^{3x}\sin 5x$$

$$y=c_1e^{2x}+e^{3x}(c_2\cos 5x+c_3\sin 5x)$$

(اثبات)

برای امتحان اثبات لازم نیست.

$$z_1=\alpha+\beta i \qquad y_1=e^{z_1x}=e^{(\alpha+\beta i)x}=e^{\alpha x}\cdot e^{i\beta x}$$

$$=e^{\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta x) \qquad (e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta)$$

$$z_2=\alpha-\beta i \qquad y_2=e^{\alpha x}(\cos\beta x-i\sin\beta x)$$

$$c_1y_1+c_2y_2=c_1e^{\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta x)+c_2e^{\alpha x}(\cos\beta x-i\sin\beta x)$$

$$\xrightarrow{3}\ =(c_1+c_2)e^{\alpha x}\cos\beta x+(c_1i-c_2i)\sin\beta x\cdot e^{\alpha x}$$

$$(D-2)(D-(3+5i))(D-(3-5i))=0 \longrightarrow ?$$

۴) $2,\ 5\pm 2i,\ 5\pm 2i,\ 3$

$$e^{2x},\ e^{5x}\cos 2x,\ e^{5x}\sin 2x,\ xe^{5x}\sin 2x,\ xe^{5x}\cos 2x,\ e^{3x}$$

$$y=c_1y_1+c_2y_2+\cdots+c_6y_6$$

$$(D-2)(D-3)(D-(5+2i))^2(D-(5-2i))^2=0$$

معادلات مرتبه دوم همگن با ضرایب ثابت:

$$y''+py'+qy=0$$
$$m^2+pm+q=0$$

1) $\Delta>0 \longrightarrow$ دو ریشه m_2, m_1 $\qquad y=c_1e^{m_1x}+c_2e^{m_2x}$

2) $\Delta=0 \longrightarrow$ ریشه مضاعف $\qquad y=c_1e^{mx}+c_2xe^{mx}$

3) $\Delta<0 \longrightarrow \alpha\pm\beta i \qquad y=e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x)$

ج ۳۷ ص ۱۰۷) $y'''-y''-y'+y=0$

$$D^3-D^2-D+1=0$$
$$D^2(D-1)-(D-1)=0$$
$$(D-1)(D^2-1)=0$$
$$(D-1)(D-1)(D+1)=0$$

$1, 1, -1$

$e^x \quad xe^x \quad e^{-x}$

$$y=c_1e^x+c_2xe^x+c_3e^{-x}$$

۳۸) $y^{(4)}+y=0 \qquad D^4+1=0 \qquad D^2=t \Rightarrow t^2+1=0$

$t^2=-1 \qquad t=\pm\sqrt{-1}$

$t=\pm i$

$D^2=i \rightarrow$ ریشه‌های i $=D$

$D^2=-i \rightarrow$ $-i$ ″ ″ $=D$

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

$$z=i=1\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right) \qquad \left(z_k=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k}{n}\right)\right)$$

$$z_k=\sqrt[2]{1}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2}+i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2}\right)$$

$$z_0=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$z_1=\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$z=-i \qquad z_K=\sqrt[2]{1}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{2}+2K\pi}{2}+i\sin\frac{\frac{3\pi}{2}+2K\pi}{2}\right)$$

$$z_0=\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}=\boxed{-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i}$$

$$z_1=\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}=\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\pm\frac{\sqrt{2}}{2}i \ , \ -\frac{\sqrt{2}}{2}\pm\frac{\sqrt{2}}{2}i \rightarrow$$

$$\underbrace{e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}\cdot\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x}_{y_1},\ \underbrace{e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}\sin\frac{\sqrt{2}}{2}x}_{y_2} \qquad \underbrace{e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x}\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x}_{y_3},\ \underbrace{e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x}\sin\frac{\sqrt{2}}{2}x}_{y_4}$$

$$y=c_1y_1+c_2y_2+c_3y_3+c_4y_4$$

* معادلاتی که به معادلات همگن با ضرایب ثابت تبدیل می‌شوند:

الف) معادلهٔ کشی اویلر مرتبهٔ n:

صورت کلی: $a_nx^ny^{(n)}+a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1xy'+a_0y=0$

شکل اپراتوری $\left(a_nx^nD^n+a_{n-1}x^{n-1}D^{n-1}+\cdots+a_1xD+a_0\right)y=0$

با تعریف $z=\ln x$ (یا $x=e^z$) و محاسبهٔ $y^{(n)}$ نسبت به z، معادله به معادلهٔ مرتبهٔ nام همگن با ضرایب ثابت برحسب y و z تبدیل می‌شود که آن را حل می‌کنیم سپس به جای z، مقدار آن را برحسب x قرار می‌دهیم.

$$y^{(K)}=\frac{D^Ky}{x^K}=\frac{D_z(D_z-1)(D_z-2)\cdots(D_z-(K-1))y}{x^K}$$

$y'=D_zy \qquad y''=D_z(D_z-1)y \qquad$ مشتق y نسبت به z $=D_zy$

$K\geq 1$ و ←

در مورد معادلهٔ مرتبهٔ دوم:

$$a_2x^2y''+a_1xy'+a_0y=0$$

$$\Rightarrow x^2y''+\alpha xy'+\beta y=0 \qquad \alpha=\frac{a_1}{a_2}\ ,\ \beta=\frac{a_0}{a_2}$$

$$\boxed{y''+(\alpha-1)y'+\beta y=0} \leftarrow z=\ln x$$

مثال: $x^2y''+6xy'+6y=0$

$y''+5y'+6y=0 \qquad D^2+5D+6=0 \qquad (D+2)(D+3)=0$

$D_1=-2 \qquad D_2=-3$

$y=c_1e^{-2z}+c_2e^{-3z}=c_1e^{-2\ln x}+c_2e^{-3\ln x}$

$y=c_1x^{-2}+c_2x^{-3}=\dfrac{c_1}{x^2}+\dfrac{c_2}{x^3}$

$\Rightarrow y=\dfrac{c_1}{x^2}+\dfrac{c_2}{x^3}$

وقتی ضریب x^2، ۱ است، x و x^2 را حذف ولی ضریب x، ۱ واحد کم می‌کنیم

مثال: $1x^2y''+2xy'+y=0 \qquad y''+y'+y=0 \qquad D^2+D+1=0$

$\Delta=1-4=-3 \qquad D=\dfrac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}=\underbrace{-\dfrac{1}{2}}_{\alpha}\pm\underbrace{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}_{\beta}i$

$y=e^{\alpha z}(c_1\cos\beta z+c_2\sin\beta z)$

$y=e^{-\frac{1}{2}z}\left(c_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}z+c_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}z\right) \qquad z=\ln x$

$y=e^{-\frac{1}{2}\ln x}\left(c_1\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)+c_2\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)\right)$

$y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}\left[c_1\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)+c_2\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)\right]$

اثبات

$y''=\dfrac{D_z(D_z-1)y}{x^2} \qquad y'=\dfrac{D_zy}{x}$

$x^2\cdot\dfrac{D_z(D_z-1)y}{x^2}+2x\dfrac{1}{x}D_zy+y=0$

$(D_z^2-D_z+(D_z+1)y=0$

$(D_z^2+D_z+1)y=0$

مثال: $x^3y'''+3x^2y''-2xy'+2y=0 \qquad z=\ln x$

$y'''=\dfrac{1}{x^3}D_z(D_z-1)(D_z-2)y \qquad y''=\dfrac{1}{x^2}D_z(D_z-1)y \qquad y'=\dfrac{1}{x}D_zy$

طی می‌کنیم $D(D_z-1)(D_z-2)y+3D_z(D_z-1)y-2D_zy+2y=0$

$(D_z(D_z-1)(D_z-2)+3D_z(D_z-1)-2D_z+2)y=0$

$D_z(D_z^2-3D_z+2)+3D_z^2-3D_z-2D_z+2=0$

$D_z^3-3D_z^2+2D_z+3D_z^2-3D_z-2D_z+2=0$

$D_z^3-3D_z+2=0 \qquad D_z^3-D_z-2D_z+2=0$

ادامه ۵۸

مثال قبل :

$$D_z(D_z^2-1)-2(D_z-1)=0 \qquad (D_z-1)\big(D_z(D_z+1)-2\big)=0$$

$$(D_z-1)(D_z^2+D_z-2)=0 \qquad (D_z-1)(D_z-1)(D_z+2)=0$$

۱ و ۱ و ۲-

$$e^{z},\ ze^{z},\ e^{-2z}$$

$$\Rightarrow y=c_1e^{z}+c_2ze^{z}+c_3e^{-2z}$$

$$\longrightarrow y=c_1e^{\ln x}+c_2\ln x\, e^{\ln x}+c_3e^{-2\ln x}=\boxed{c_1x+c_2x\ln x+c_3\times\frac{1}{x^2}}$$

مثال : $x^3y'''+2x^2y''=0$ $\qquad z=y''$ ← روش اول

$$x^3z'+2x^2z=0 \qquad x^2(xz'+2z)=0 \qquad x\frac{dz}{dx}+2z=0$$

$\frac{dz}{z}=\frac{-2dx}{x}$ ⟵ z را حساب کرده و ۲ بار انتگرال می‌گیریم.

روش دوم ←

$$y'''=\frac{1}{x^3}D_z(D_z-1)(D_z-2)y \qquad y'=\frac{1}{x^2}D_z(D_z-1)y$$

$$D_z(D_z-1)(D_z-2)y+2D_z(D_z-1)y=0$$

در معادله مشخصه y نمی‌نویسیم ⟶ $D_z(D_z-1)(D_z-2)+2D_z(D_z-1)=0$

$$D_z(D_z-1)(D_z-2+2)=0 \qquad D_z^2(D_z-1)=0$$

۰ و ۰ و ۱

$$1,\ z.1,\ e^{z}$$

$$y=c_1+c_2z+c_3e^{\ln x}$$

$$\boxed{y=c_1+c_2\ln x+c_3e^{\ln x}}$$

ب) معادله لژاندر مرتبه n ام :

فرم ↘ $$a_n(ax+b)^ny^{(n)}+a_{n-1}(ax+b)^{n-1}y^{(n-1)}+\dots+a_1(ax+b)y'+a_0y=0$$

فرم اپراتوری ⟶ $$\big(a_n(ax+b)^nD^n+a_{n-1}(ax+b)^{n-1}D^{n-1}+\dots+a_1(ax+b)D+a_0\big)y=0$$

$$z=\ln(ax+b)$$

$$y^{(k)}=\frac{a^k}{(ax+b)^k}D_z(D_z-1)\cdots(D_z-(k-1))$$

با انجام تغییرات فوق، معادله به یک معادله مرتبه n ام برحسب y و z با ضرایب ثابت تبدیل می‌شود که آنرا حل می‌کنیم. سپس به جای z از $\ln(ax+b)$ استفاده می‌کنیم.

(۵۱)

مثال: $(x+5)^3 y''' + 2(x+5)^2 y'' = 0$ $\qquad y'' = z$

روش اول:

$$(x+5)^3 z' + 2(x+5)^2 z = 0$$

$$(x+5) z' + 2z = 0 \longrightarrow$$ z را حساب کرده و ۲ بار انتگرال می‌گیریم.

روش دوم:

$$y''' = \frac{1}{(x+5)^3} D_z(D_z-1)(D_z-2)y$$

$$y'' = \frac{1}{(x+5)^2} D_z(D_z-1)y$$

$$D_z(D_z-1)(D_z-2)y + 2D_z(D_z-1)y = 0 \qquad z = Ln(x+5)$$

معادله مشخصه $\longrightarrow$ $$D_z(D_z-1)(D_z-2) + 2D_z(D_z-1) = 0$$

$$D_z(D_z-1)(D_z-2+2) = 0 \Rightarrow D_z^2(D_z-1)$$

$$0, 0, 1$$

$$1 \quad z \quad e^z$$

$$y = c_1 + c_2 Ln(x+5) + c_3 e^{Ln(x+5)}$$

$$y = c_1 + c_2 Ln(x+5) + c_3(x+5)$$

* حل معادلات غیرهمگن:

همان‌طورکه می‌دانیم، برای حل معادلهٔ غیرهمگن ابتدا معادلهٔ همگن را حل می‌کنیم، سپس جواب عمومی این معادله را با جواب خصوصی معادلهٔ غیرهمگن جمع می‌کنیم.

$$\Rightarrow y = y_h + y_p$$

y_h: جواب عمومی همگن $\qquad$ y_p: جواب خصوصی غیرهمگن

حل معادلات همگن بررسی شد، برای به دست آوردن y_p سه روش وجود دارد.

الف) ضرایب نامعین

ب) روش اپراتور معکوس

ج) روش تغییر پارامتر لاگرانژ

الف) روش ضرایب نامعین :

این روش را برای معادلهٔ مرتبهٔ دوم غیرهمگن با ضرایب ثابت عنوان می‌کنیم .

$$y''+py'+qy=g(x) \xrightarrow[\text{فرم دیگر}]{} ay''+by'+cy=g(x)$$

شکل جواب خصوصی به شکل تابع g بستگی دارد. یعنی با توجه به شکل g نوع جواب خصوصی را حدس زده، سپس جواب را در معادلهٔ اصلی قرار داده و ضرایب مجهول جواب خصوصی را به دست می‌آوریم:

حالت اول → $g(x)=Ae^{\alpha x}$

- α ریشهٔ معادلهٔ مشخصه نباشد: $y_p=a_0e^{\alpha x}$ $\quad a_0=?$
- α ریشهٔ ساده باشد: $y_p=a_0xe^{\alpha x}$ $\quad a_0=?$
- α ریشهٔ مضاعف معادلهٔ مشخصه باشد: $y_p=a_0x^2e^{\alpha x}$ $\quad a_0=?$

مثال: $y''+5y'+6y=-2e^{-x}=Ae^{\alpha x}$

$y''+5y'+6y=0 \xrightarrow{\text{معادلهٔ مشخصه}} D^2+5D+6=0 \qquad (D+2)(D+3)=0$

$-2 \to e^{-2x} \qquad -3 \to e^{-3x}$

$y_h=c_1e^{-2x}+c_2e^{-3x}$

$\alpha=-1 \longrightarrow$ ریشه نمی‌باشد

$y_p=a_0e^{-x}$ در معادلهٔ اصلی می‌گذاریم

$y'=-a_0e^{-x} \qquad y''=a_0e^{-x}$

$a_0e^{-x}+5(-a_0e^{-x})+6a_0e^{-x}=-2e^{-x}$

$2a_0e^{-x}=-2e^{-x} \Rightarrow 2a_0=-2 \qquad \boxed{a_0=-1}$

$y=y_h+y_p \qquad \boxed{y_p=-e^{-x}}$

$$\boxed{y=c_1e^{-2x}+c_2e^{-3x}-e^{-x}}$$

مثال: $y''+2y'+y=10e^{-x} \to \alpha=-1$

$y''+2y'+y=0 \qquad D^2+2D+1=0 \qquad (D+1)^2=0 \qquad D_1=-1,-1 \to e^{-x},\ xe^{-x}$

$y_h=c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}$

$y_p=a_0x^2e^{-x}$ $\qquad \alpha=-1$ ریشهٔ مضاعف

$y'=2a_0xe^{-x}-a_0x^2e^{-x}$

$y''=2a_0e^{-x}-2a_0xe^{-x}-2a_0xe^{-x}+a_0x^2e^{-x}$

$$2a_0e^{-x}-4a_0xe^{-x}+a_0x^2e^{-x}+4a_0xe^{-x}-2a_0x^2e^{-x}+a_0x^2e^{-x}=10e^{-x}$$

$$2a_0e^{-x}=10e^{-x} \Rightarrow 2a_0=10 \Rightarrow a_2=5$$

$$\boxed{y=c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}+5x^2e^{-x}} \qquad \boxed{y_p=5x^2e^{-x}}$$

* اگر ریشه ساده بود در x ضرب می‌شد، اما در اینجا در x^2 ضرب می‌شود. $2a_0$

---

۲)

$$g(x)=A\sin\alpha x+B\cos\alpha x$$

$$\begin{cases} \sin\alpha x=\dfrac{e^{i\alpha x}-e^{-i\alpha x}}{2i} \\[2ex] \cos\alpha x=\dfrac{e^{i\alpha x}+e^{-i\alpha x}}{2} \end{cases}$$

الف) $i\alpha$ ریشهٔ معادلهٔ مفسر نباشد $\longrightarrow y_p=a_0\sin\alpha x+b_0\cos\alpha x$

ب) $i\alpha$ ریشهٔ معادلهٔ مفسر باشد $\longrightarrow y_p=x\,(a_0\sin\alpha x+b_0\cos\alpha x)$

مثال

1) $y''+y'=2\cos x-\sin x$

$$y''+y'=0 \rightarrow D^2+D=0 \quad D=0,-1 \quad y_h=c_1e^{0}+c_2e^{-x}$$

$$\alpha=1 \Rightarrow i^2+i\neq 0 \quad -1+i\neq 0$$

ریشهٔ معادله نمی‌باشد

$$y_p=a_0\sin x+b_0\cos x \qquad y'=a_0\cos x-b_0\sin x$$

$$y''=-a_0\sin x-b_0\cos x$$

$$2\cos x-\sin x = y''+y'-(a_0-b_0)\cos x-(a_0+b_0)\sin x$$

$$(a_0-b_0)\cos x-(a_0+b_0)\sin x=2\cos x-\sin x$$

$$\begin{cases} a_0-b_0=2 \\ -a_0-b_0=-1 \end{cases} \Rightarrow -2b_0=1 \Rightarrow \boxed{b_0=-\frac{1}{2}}$$

$$a_0+\frac{1}{2}=2 \Rightarrow \boxed{a_0=\frac{5}{2}}$$

$$\boxed{y_p=\frac{5}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x} \qquad y=y_h+y_p$$

مثال: $y''+4y=-2\sin 2x$ α در مورد ۲

$\alpha i = 2i$

ریشه بودن αi

$y''+4y=0 \qquad D^2+4=0 \Rightarrow D^2=-4 \Rightarrow D=\pm 2i$

این α با α که در ۳ گفته شد تفاوت دارد، این α ریشه‌های D است.

$y_h=e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x)$

$\Rightarrow y_h=e^{0x}(c_1\cos 2x+c_2\sin 2x)=\boxed{c_1\cos 2x+c_2\sin 2x}$

$y_p=x(a_0\cos 2x+b_0\sin 2x)=a_0x\cos 2x+b_0x\sin 2x$

$(2i)^2+4=4i^2+4=0\ \checkmark$

$y'=a_0\cos 2x-2a_0x\sin 2x+b_0\sin 2x+2b_0x\cos 2x$

$y''=-2a_0\sin 2x-2a_0\sin 2x-4a_0x\cos 2x+2b_0\cos 2x+2b_0\cos 2x-$

$-4b_0x\sin 2x=-4a_0\sin 2x-4a_0x\cos 2x+4b_0\cos 2x-4b_0x\sin 2x$

$4y=4a_0x\cos 2x+4b_0x\sin 2x$

$y''=-4a_0\sin 2x-4a_0x\cos 2x-4b_0x\sin 2x+4b_0\cos 2x$

$y''+4y=-4a_0\sin 2x+4b_0\cos 2x=-2\sin 2x$

$$\begin{cases}-4a_0=-2\\ a_0=\frac{1}{2}\\ 4b_0=0\\ b_0=0\end{cases}$$

$\boxed{y_p=\frac{1}{2}x\cos 2x}$ $\qquad y=y_h+y_p$

(۳)

$g(x)=$ چندجمله‌ای دارای درجه n

الف) $c\neq 0 \longrightarrow y_p=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$

ب) $c=0\ ,\ b\neq 0 \longrightarrow y_p=x\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$

ج) $b=c=0 \longrightarrow y_p=x^2\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$

مثال: $y''-5y'+6y=x^2+1$

حل همگن $y''-5y'+6y=0 \qquad D^2-5D+6=0 \qquad D=2,3$

$y_h=c_1e^{2x}+c_2e^{3x}$

$y_p = Ax^2 + Bx + C$

$y' = 2Ax + B \qquad y'' = 2A$

$y'' = 2A \qquad -5y' = -10Ax - 5B$

$6y = 6Ax^2 + 6Bx + 6C$

جمع $\quad 6Ax^2 + (6B - 10A)x + (2A - 5B + 6C) = x^2 + 1$

$6A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{6}$

$6B - 10A = 0 \Rightarrow 6B - \frac{10}{6} = 0 \qquad \boxed{B = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}}$

$2A - 5B + 6C = 1 \Rightarrow \frac{2}{6} - \frac{25}{18} + 6C = 1 \qquad 6C = 1 - \frac{1}{3} + \frac{25}{18}$

$6C = \frac{18 - 6 + 25}{18}$

$\boxed{C = \frac{37}{108}}$

$y_p = \frac{1}{6}x^2 + \frac{5}{18}x + \frac{37}{108}$

$\boxed{y = y_h + y_p}$

مثال: $\quad y'' + y' = x^2 + x$

$y'' + y' = 0 \qquad D^2 + D = 0 \rightarrow D = 0, -1 \qquad \boxed{y_h = c_1 e^0 + c_2 e^{-x}}$

$C = 0 \rightarrow y_p = x(Ax^2 + Bx + C) = Ax^3 + Bx^2 + Cx$

$y' = 3Ax^2 + 2Bx + C$

$y'' = 6Ax + 2B$

$3Ax^2 + (2B + 6A)x + (2B + C) = x^2 + x \Rightarrow \begin{cases} 3A = 1 \\ 6A + 2B = 1 \\ 2B + C = 0 \end{cases} \qquad A = \frac{1}{3}$

$2 + 2B = 1 \qquad \boxed{B = -\frac{1}{2}}$

$-1 + C = 0 \Rightarrow C = 1$

$y_p = x\left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{2}x + 1\right)$

$\Rightarrow \boxed{y_p = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x} \quad , \quad \boxed{y = y_h + y_p}$

روش فوق را برای معادلهٔ مرتبهٔ n ام غیرهمگن با ضرایب ثابت به شکل زیر بیان می‌کنیم: (صفحهٔ ۸۴ و ۸۵ کتاب)

معادله $\quad y^{(n)} + P_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + P_1 y' + P_0 y = r(x)$

حالت

① $r(x) = ce^{\alpha x} \longrightarrow y_p = Ae^{\alpha x}$

② $r(x) = a\cos\alpha x + b\sin\alpha x \longrightarrow y_p = A\cos\alpha x + B\sin\alpha x$

③ $\underbrace{r(x) = P_n(x)}_{\text{چندجمله‌ای}} \longrightarrow y_p = \underbrace{A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \cdots + A_1 x + A_0}_{\text{چندجمله‌ای}}$

④ $r(x) = P_n(x)\cdot e^{\alpha x} \longrightarrow y_p = (A_n x^n + \cdots + A_1 x + A_0)e^{\alpha x}$

⑤ $r(x) = P_n(x)\,(a\cos\alpha x + b\sin\alpha x) \longrightarrow y_p = (A_n x^n + \cdots + A_0)\cos\alpha x + (B_n x^n + \cdots + B_0)\sin\alpha x$

⑥ $r(x) = e^{\alpha x}(a\cos\beta x + b\sin\beta x) \rightarrow y_p = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$

⑦ $r(x) = e^{\alpha x}\cdot P_n(x)\cdot(a\cos\beta x + b\sin\beta x)$

$$\rightarrow y_p = e^{\alpha x}\cdot\left[(A_n x^n + \cdots + A_0)\cos\beta x + (B_n x^n + \cdots + B_0)\sin\beta x\right]$$

(در کتاب به جای αx در توابع مثلثاتی از $(ax+b)$ استفاده کرده است).

* در معادلهٔ غیرهمگن ابتدا معادله را به همگن تبدیل می‌کنیم. معادله را حل می‌کنیم. y_p در نظر گرفته شده و y_h را مقایسه می‌کنیم. اگر y_p و y_h جملهٔ وابسته (مشترک) داشته باشند y_p را در کمترین توان طبیعی از x یعنی x^m ضرب می‌کنیم تا جملات مشترک به جملات مستقل (غیرمشترک) تبدیل شوند.

$\frac{۵۶}{ص ۱۰۸}$ مثال) $y'' - y' + y = x^3 - 3x^2 + 1$ | $y_p = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$

$y'' - y' + y = 0 \qquad D^2 - D + 1 = 0$

$\Delta = 1 - 4 = -3 \qquad D = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$

$y_h = e^{\frac{1}{2}x}\left(c_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$

(۵۷) ۵۷/۲ ص ۱۰۸

$$y''+3y'+2y=\sinh x=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}=\frac{1}{2}e^{x}-\frac{1}{2}e^{-x}$$

$$y''+3y'+2y=0 \qquad D^2+3D+2=0 \qquad (D+1)(D+2)=0 \qquad D=-1,-2$$

$$y_h=c_1\underline{\underline{e^{-x}}}+c_2e^{-2x} \qquad\qquad y_p=Ae^{x}+B\underline{\underline{e^{-x}}}$$

جمله مشترک داریم.

$$\Rightarrow \boxed{y_p=Axe^{x}+Bxe^{-x}}$$

* حل کامل در جلسه حل تمرین.

مثال ۵۸ :

$$y'''-y''+y'=x^2e^{x}-4x^2$$

$$D^3-D^2+D=0 \qquad D(D^2-D+1)=0 \qquad D=0\ ,\ D=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$y_h=\underline{\underline{c_1e^{0x}}}+e^{\frac{1}{2}x}\left(c_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+c_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

$$y_p=(Ax^2+Bx+C)e^{x}+\left(A_4x^4+A_3x^3+A_2x^2+A_1x+\underline{\underline{A_0}}\right)$$

- بنابراین قسمت دوم را در x ضرب می‌کنیم.

$$y_p=(Ax^2+Bx+C)e^{x}+\left(A_4x^5+A_3x^4+A_2x^3+A_1x^2+A_0x\right)$$

۲۶۲)

$$y''+3y'=3xe^{-3x} \qquad\qquad y_p=(Ax+B)e^{-3x}$$

$$D^2+3D=0 \qquad D=0 \qquad D=-3 \qquad\qquad =Axe^{-3x}+B\underline{\underline{e^{-3x}}}$$

$$y_h=c_1e^{0x}+c_2\underline{\underline{e^{-3x}}} \qquad\qquad \Rightarrow y_p=(Ax^2+Bx)e^{-3x}$$

$$y_p=Ax^2e^{-3x}+Bxe^{-3x}$$

$$y'=2Axe^{-3x}-3Ax^2e^{-3x}+Be^{-3x}-3Bxe^{-3x}$$

$$y''=2Ae^{-3x}-6Axe^{-3x}-6Axe^{-3x}+9Ax^2e^{-3x}-3Be^{-3x}-3Be^{-3x}+9Bxe^{-3x}$$

$$y''=(2A-6Ax-6Ax+9Ax^2-3B-3B+9Bx)e^{-3x}$$

$$y''=(2A-12Ax+\cancel{9Ax^2}-6B+\cancel{9Bx})e^{-3x}$$

$$3y'=(6Ax-\cancel{9Ax^2}+3B-\cancel{9Bx})e^{-3x}$$

$$y''+3y'=(-6Ax-3B+2A)e^{-3x}=3xe^{-3x}$$

$$\begin{cases} -6A = 3 \Rightarrow A = -\frac{1}{2} \\ 2A - 3B = 0 \qquad 2\left(-\frac{1}{2}\right) - 3B = 0 \Rightarrow -1 - 3B = 0 \end{cases}$$

$$B = -\frac{1}{3}$$

$$\boxed{y_p = -\frac{1}{2} x^2 e^{-3x} - \frac{1}{3} x e^{-3x}}$$

* روش اپراتور معکوس:

معادله روبرو را در نظر بگیرید: $\underbrace{(D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0)}_{F(D)}\, y = r(x)$

$F(D)$ یک عملگر می باشد و معکوس آن را $\frac{1}{F(D)}$ می نامیم. اگر y_p یک جواب خصوصی باشد، در معادله صدق می کند.

$$F(D) \cdot y_p = r(x) \xrightarrow[\text{اثر می دهیم}]{\text{تحت } \frac{1}{F(D)}} \boxed{y_p = \frac{1}{F(D)} r(x)}$$

باید $\frac{1}{\Pi(D)}$ را بدست آوریم.

$F(D)=0$ $\qquad$ λ_1، λ_2، ... و λ_n ریشه های $F(D)=0$ هستند.

$$F(D) = (D-\lambda_1)(D-\lambda_2)\cdots(D-\lambda_n) = \prod_{i=1}^{n} (D-\lambda_i)$$

مهم

$$\boxed{y_p = e^{\lambda_1 x}\int e^{(\lambda_2-\lambda_1)x}\int e^{(\lambda_3-\lambda_2)x} \cdots \int e^{(\lambda_n-\lambda_{n-1})x}\int e^{-\lambda_n x} r(x)\, dx^n}$$

مثال ۲۵ ص ۱۰۸

$$y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{x^2}$$

$y'' + 4y' + 4y = 0 \qquad D^2 + 4D + 4 = 0 \qquad \boxed{\lambda_1 = \lambda_2 = -2}$

$$y_p = e^{\lambda_1 x}\int e^{(\lambda_2-\lambda_1)x}\int e^{-\lambda_2 x} r(x)\, dx^2$$

$$y_p = e^{-2x}\int e^{(-2+2)x}\int \underbrace{e^{2x} \cdot \frac{e^{-2x}}{x^2}\, dx}\, dx$$

$\Pi \leftarrow$ ضرب

$\Sigma \leftarrow$ جمع

$$\int \frac{e^{2x}\cdot e^{-2x}}{x^2}\,dx = \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}$$

$$y_p = e^{-2x}\int e^{0}\cdot -\frac{1}{x}\,dx = e^{-2x}\cdot -\operatorname{Ln}|x| = -e^{-2x}\operatorname{Ln}|x|$$

$$y_h = c_1e^{-2x} + c_2xe^{-2x}$$

$$\Rightarrow y = y_h + y_p = \boxed{c_1e^{-2x} + c_2\,xe^{-2x} - e^{-2x}\operatorname{Ln}|x|}$$

* تذکر: هرگاه ریشه های معادله $F(D)=0$ مختلط باشند، بهتر است از این روش استفاده نکنیم.

مثال ۷۱ : $y'' - y = e^{x}\sin 2x$ $\quad \lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = 1$

$$D^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1 \;,\; \lambda_2 = -1$$

$$y_p = e^{x}\int e^{(-1-1)x}\int e^{-(-1)x}\cdot e^{x}\sin 2x\,dx\,dx$$

$$y_p = e^{x}\int e^{-2x}\int e^{2x}\sin 2x\,dx\,dx$$

این بار برای راحتی $\lambda_1=-1$ و $\lambda_2=1$ می گیریم.

$$y_p = e^{-x}\int e^{(1-(-1))x}\int \underbrace{e^{-x}\cdot e^{x}\sin 2x\,dx}\,dx$$

$$y_p = e^{-x}\int e^{2x}\int \underbrace{\sin 2x\,dx}\,dx$$

$$y_p = e^{-x}\int e^{2x}\cdot -\frac{1}{2}\cos 2x\,dx = -\frac{e^{-x}}{2}\underbrace{\int e^{2x}\cos 2x\,dx}_{\text{جزء به جزء}}$$

$$y_h = c_1e^{x} + c_2e^{-x}$$

$$y = y_h + y_p$$

* روش اپراتور معکوس تنها مختص نوع خطی است.

* روش تغییر پارامتر لاگرانژ:

می‌خواهیم جواب خصوصی معادله‌ی زیر را به دست آوریم:

$$y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_1(x)y'+a_0(x)y=r(x)$$

فرض کنیم $y=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\cdots+c_ny_n(x)$ جواب عمومی همگن باشد. دنبال جوابی به شکل زیر هستیم:

$$y_p=u_1(x)y_1(x)+u_2(x)y_2(x)+\cdots+u_n(x)y_n(x)$$

$$\Rightarrow y_p=\sum_{i=1}^{n}u_i(x)\,y_i(x)$$

که $u_i(x)$ را حساب می‌کنیم:

ابتدا از دستگاه زیر $u_i'(x)$ ها را حساب می‌کنیم. سپس از آن‌ها انتگرال گرفته u_i را حساب می‌کنیم:

$$\begin{cases}u_1'y_1+u_2'y_2+\cdots+u_n'y_n=0\\ u_1'y_1'+u_2'y_2'+\cdots+u_n'y_n'=0\\ \vdots\\ u_1'y_1^{(n-1)}+u_2'y_2^{(n-1)}+\cdots+u_n'y_n^{(n-1)}=r(x)\end{cases}$$

دستگاه را به روش کرامر حل می‌کنیم:

$$u_1'=\frac{\Delta u_1'}{\Delta}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}y_1 & y_2 & \cdots & y_n\\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n'\\ \vdots & & & \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)}\end{vmatrix}=W(y_1,y_2,\cdots,y_n)$$

$$\Delta_{u_1'}=\begin{vmatrix}0 & y_2 & \cdots & y_n\\ 0 & y_2' & \cdots & y_n'\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ r(x) & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)}\end{vmatrix}=W_1(y_1,y_2,\cdots,y_n)\qquad \boxed{u_1'=\frac{W_1(y_1\cdots y_n)}{W(y_1\cdots y_n)}}$$

$$u_i'=\frac{W_i(y_1\cdots y_n)}{W(y_1\cdots y_n)}\qquad \boxed{u_i=\int\frac{W_i}{W}\,dx}$$

حالت خاص :

$$y''+P(x)\,y+q(x)\,y=r(x)$$

$$y_h=c_1y_1+c_2y_2$$

$$\begin{cases} u_1=-\displaystyle\int \frac{y_2\,r(x)}{W}\,dx \\ u_2=\displaystyle\int \frac{y_1\,r(x)}{W}\,dx \end{cases}$$

روش حل: اگر y_1 معلوم باشد، از فرمول زیر y_2 را حساب کرده و سپس ادامه می‌دهیم

$$y_2=y_1\int \frac{1}{y_1^2}\,e^{-\int p\,dx}\,dx$$

* اگر ضریب y'' ، یک نبود ابتدا آن را با استفاده از تقسیم ۱ می‌کنیم و سپس ادامه می‌دهیم.

مثال : $xy''+2y'+xy=\operatorname{cotg} x$ و $y_1=\dfrac{\sin x}{x}$

$$y''+\frac{2}{x}y'+y=\frac{\operatorname{cotg} x}{x} \qquad y_2=y_1\int \frac{1}{y_1^2}\,e^{-\int P(x)\,dx}$$

$$y_2=y_1\int \frac{x^2}{\sin^2 x}\cdot e^{-\int \frac{2}{x}dx}\,dx=y_1\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx=\frac{\sin x}{x}\times \operatorname{cotg} x$$

$$y_2=\frac{-\sin x}{x}\times\frac{\cos x}{\sin x}\Rightarrow y_2=\boxed{\frac{-\cos x}{x}} \qquad y_1=\boxed{\frac{\sin x}{x}}$$

$$u_1'=\frac{W_1}{W} \qquad W\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \dfrac{\sin x}{x} & \dfrac{-\cos x}{x} \\ \dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2} & \dfrac{x\sin x+\cos x}{x^2} \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow W=\frac{x\sin^2 x+\sin x\cos x}{x^3}+\frac{x\cos^2 x-\sin x\cos x}{x^3}=\frac{x(\sin^2 x+\cos^2 x)}{x^3}=\frac{1}{x^2}$$

$$W_1=\begin{vmatrix} 0 & \dfrac{-\cos x}{x} \\ \dfrac{\operatorname{cotg} x}{x} & \dfrac{x\sin x+\cos x}{x^2} \end{vmatrix}=\frac{\cos x}{x}\times\frac{\operatorname{cotg} x}{x}=\boxed{\frac{\cos^2 x}{x^2\sin x}}$$

(2)

$$u_1' = \frac{W_1}{W} = \frac{\frac{\cos^2 x}{x^2 \sin x}}{\frac{1}{x^2}} = \frac{\cos^2 x}{\sin x} \qquad u_1 = \int \frac{\cos^2 x}{\sin x}\, dx$$

$$= \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin x}\, dx = \int \frac{1}{\sin x} - \sin x \, dx$$

$$\boxed{u_1 = -\operatorname{Ln}\left|\operatorname{cosec} x - \operatorname{cotg} x\right| + \cos x}$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} \frac{\sin x}{x} & 0 \\ \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} & \frac{\operatorname{cotg} x}{x} \end{vmatrix} = \frac{\sin x \operatorname{cotg} x}{x^2} = \boxed{\frac{\cos x}{x^2}}$$

$$u_2' = \frac{W_2}{W} = \frac{\frac{\cos x}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = \cos x \Rightarrow u_2 = \int \cos x \, dx = \boxed{\sin x}$$

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + u_1 y_1 + u_2 y_2$$

$$\int \sec dx = \operatorname{Ln}\left|\sec + \operatorname{tg}\right|$$

$$\int \operatorname{cosec} x \, dx = -\operatorname{Ln}\left|\operatorname{cosec} x + \operatorname{cotg} x\right|$$

* تبدیلات لاپلاس :

یکی از روش های قوی برای حل معادلات دیفرانسیل، استفاده از تبدیلات لاپلاس می باشد. در این روش ابتدا از طرفین معادله تبدیل لاپلاس می گیریم. سپس با استفاده از قضایا و روابط مربوط به تبدیل لاپلاس معادله را به یک معادله درجه اول با مجهول $L[y]$ تبدیل می شود. که پس از محاسبه $L[y]$ و استفاده از تبدیل معکوس، y را به دست می آوریم.

تعریف تبدیل لاپلاس :

فرض کنیم تابع حقیقی f که بر بازه $[0,+\infty)$ با ضابطه $y=f(x)$ تعریف شده و در شرایط معینی صدق کند (بعداً عنوان می شود)، در این صورت تبدیل لاپلاس تابع f که با نماد $L\{f(x)\}$ نشان داده می شود، توسط انتگرال ناسره زیر تعریف می شود :

$$L\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-sx} f(x)\, dx = F(s)$$

البته به ازای مقادیری از s که انتگرال فوق همگرا شود.

$$= \lim_{b \to +\infty} \int_0^{b} e^{-sx} f(x)\, dx$$

مثال :

$c =$ عدد ثابت

$$L[c] = \int_0^{+\infty} e^{-sx} \cdot c\, dx = \frac{-c}{s} e^{-sx} \Big|_0^{+\infty} = \frac{-c}{s}\left(\cancel{e^{-\infty}}^{\,0} - e^{0}\right) = \frac{c}{s}$$

$$\Rightarrow \boxed{L[c] = \frac{c}{s}}$$

مثال: $L[e^{\alpha x}]=\int_0^{+\infty} e^{-sx}.e^{\alpha x}\,dx=\int_0^{\infty} e^{(\alpha-s)x}\,dx$

$$=\frac{1}{(\alpha-s)}e^{(\alpha-s)x}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{\alpha-s}\left(e^{-\infty}-e^{0}\right)=\frac{-1}{\alpha-s}=\frac{1}{s-\alpha}$$

$\alpha-s<0$
$s>\alpha$

$$\Rightarrow L[e^{\alpha x}]=\frac{1}{s-\alpha}$$

* فرمولهای تبدیل لاپلاس:

1) $L(c)=\frac{c}{s}$ $\qquad L^{-1}\left(\frac{c}{s}\right)=c$

2) $L(e^{\alpha x})=\frac{1}{s-\alpha}$ $\qquad L^{-1}\left(\frac{1}{s-\alpha}\right)=e^{\alpha x}$

3) $L(\sin\alpha x)=\frac{\alpha}{s^2+\alpha^2}$ $\qquad L^{-1}\left(\frac{\alpha}{s^2+\alpha^2}\right)=\sin\alpha x$

$\rightarrow L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+\alpha^2}\right)=\frac{1}{\alpha}\sin\alpha x$

4) $L(\cos\alpha x)=\frac{s}{s^2+\alpha^2}$ $\qquad L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+\alpha^2}\right)=\cos\alpha x$

5) $L(\sinh\alpha x)=\frac{\alpha}{s^2-\alpha^2}$ $\qquad L^{-1}\left(\frac{\alpha}{s^2-\alpha^2}\right)=\sinh\alpha x$

$\rightarrow L^{-1}\left(\frac{1}{s^2-\alpha^2}\right)=\frac{1}{\alpha}\sinh\alpha x$

6) $L(\cosh\alpha x)=\frac{s}{s^2-\alpha^2}$ $\qquad L^{-1}\left(\frac{s}{s^2-\alpha^2}\right)=\cosh\alpha x$

7) $L(x^n)=\frac{n!}{s^{n+1}}$ $\qquad L^{-1}\left(\frac{n!}{s^{n+1}}\right)=x^n$

$\rightarrow L^{-1}\left(\frac{1}{s^{n+1}}\right)=\frac{x^n}{n!}$

$\sinh x=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$

$\cosh x=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$

۴۵

۸) $L(x^\alpha) = \dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$ $\qquad$ $L^{-1}\left(\dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}\right) = x^\alpha$

تعریف تابع گاما: تابع گاما به صورت زیر تعریف می شود:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha-1}\, dx$$

برای این تابع می توان اثبات کرد:

۱) $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\, \Gamma(\alpha)$

۲) $\begin{cases} \Gamma(n+1) = n! \\ n \in \mathbb{Z}^+ \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad L(x^\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-sx} x^\alpha\, dx \qquad sx = t \to dx = \frac{dt}{s}, \quad x = \frac{t}{s}$$

$$= \int_0^\infty e^{-t} \cdot \left(\frac{t}{s}\right)^\alpha \frac{dt}{s} = \frac{1}{s^{\alpha+1}} \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-t} t^\alpha\, dt}_{\Gamma(\alpha+1)} \qquad x\Big|_0^{+\infty} \to t\Big|_0^{+\infty}$$

$$\Rightarrow \boxed{L(x^\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}}$$

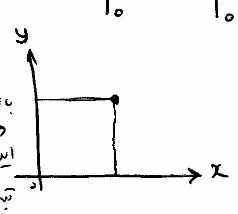
مثال: $\Gamma(\frac{1}{2})$ را حساب کنید:

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} e^{-x} \cdot x^{\frac{1}{2}-1}\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t}\, 2t\,dt \qquad x = t^2, \quad dx = 2t\,dt$$

$$= 2\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = ? \qquad x\Big|_0^{+\infty} \to t\Big|_0^{+\infty}$$

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \qquad I = \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy$$

با استفاده از این ایده ۲ انتگرال تبدیل شده است.



$$I^2=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx\cdot\int_0^{+\infty}e^{-y^2}dy=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}e^{-(x^2+y^2)}dA$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{+\infty}e^{-r^2}r\,dr\,d\theta$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\cdot\int_0^{+\infty}re^{-r^2}dr=\frac{\pi}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-r^2}\Big|_0^{+\infty}$$

$$=\frac{\pi}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)\left(e^{+\infty}-e^{0}\right)=\frac{\pi}{4}\qquad I^2=\frac{\pi}{4}\qquad \boxed{I=\frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=2I=2\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\sqrt{\pi}\implies\boxed{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}}\longleftarrow$$ حفظ شود

مثال: با استفاده از $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$ ، $\Gamma(\frac{3}{2})$ ، $\Gamma(\frac{5}{2})$ ، $\Gamma(-\frac{1}{2})$ را به دست آورید.

فرمول $\longrightarrow\boxed{\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)}$

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\times\sqrt{\pi}=\boxed{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right)=\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}\times\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\boxed{\frac{3}{4}\sqrt{\pi}}$$

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)=?\qquad\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\Gamma\left(-\frac{1}{2}+1\right)=-\frac{1}{2}\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\sqrt{\pi}=-\frac{1}{2}\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)\implies\boxed{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)=-2\sqrt{\pi}}$$

مثال

1) $L(5)=\frac{5}{s}$

2) $L(x^3)=\frac{3!}{s^4}$

3) $L(\sin 2x)=\frac{2}{s^2+4}$

4) $L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+1}\right)=\cos x$

5) $L(e^{3x})=\frac{1}{s-3}$

6) $L(\sinh 2x)=\frac{2}{s^2-4}$

7) $L^{-1}\left(\frac{9!}{s^{10}}\right)=x^9$

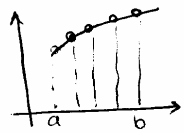
8) $L(\sqrt{x})=\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+1)}{s^{\frac{1}{2}+1}}=\frac{\sqrt{\pi}}{2s^{\frac{3}{2}}}$

۹) $L(x^{3/4}) = \dfrac{\Gamma(\frac{3}{4}+1)}{s^{\frac{3}{4}+1}}$

۱۰) $L^{-1}\left(\dfrac{\Gamma(\frac{3}{5}+1)}{s^{\frac{3}{5}+1}}\right) = x^{\frac{3}{5}}$

* قضایای تبدیل لاپلاس:

۱- قضیهٔ وجودی تبدیل لاپلاس: فرض کنیم تابع حقیقی f بر بازه $[0, +\infty)$ تعریف شده و در شرایط زیر صدق کند:



الف) f بر $[0, +\infty)$ پیوستهٔ تکه‌ای باشد.

ب) ثابت های حقیقی مانند α, K, M $(K > 0)$ موجود باشند به قسمی که:

$$\forall x \qquad x \geq M \Longrightarrow |f(x)| \leq Ke^{\alpha x}$$

← (در این حالت گفته می‌شود که تابع f زمانی که $x \to +\infty$ از ردهٔ نمایی است و می‌نویسیم $f \in E_\alpha$)

در این صورت می‌توان نشان داد که تبدیل لاپلاس تابع f به ازای هر $s > \alpha$ وجود دارد.

۲- تبدیل لاپلاس و تبدیل معکوس لاپلاس تبدیلات خطی می‌باشند. یعنی:

۱) $L[\alpha f \pm \beta g] = \alpha L[f] \pm \beta L[g]$

۲) $L^{-1}[\alpha F(s) \pm \beta G(s)] = \alpha L^{-1}[F(s)] \pm \beta L^{-1}[G(s)]$

۳- قضیهٔ لاپلاس مشتق: فرض کنیم توابع $f^{(k)}_{(x)}$ و $k = 0, 1, \dots, n-1$ بر $[0, +\infty)$ پیوستهٔ تکه‌ای بوده و $f^{(k)}_{(x)} \in E_\alpha$ باشد. حال اگر $f^{(n)}_{(x)}$ بر $[0, +\infty)$ پیوستهٔ تکه‌ای باشد و از ردهٔ نمایی باشد، تبدیل لاپلاس آن از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$\boxed{L[f^{(n)}] = s^n L[f] - s^{n-1} f_{(0)} - s^{n-2} f'_{(0)} - \dots - f^{(n-1)}_{(0)}}$$

$$n=1 \rightarrow L[y'] = sL[y] - f_{(0)}$$

$$n=2 \rightarrow L[y''] = s^2 L[y] - s f_{(0)} - f'_{(0)}$$

$$n=3 \rightarrow L[y'''] = s^3 L[y] - s^2 f_{(0)} - s f'_{(0)} - f''_{(0)}$$

۴- قضیهٔ مشتق لاپلاس:

$$\boxed{L\left(x^n f_{(x)}\right) = (-1)^n \left(F_{(s)}\right)^n}$$

$$n=2 \rightarrow L\left(x^2 f_{(x)}\right) = (-1)^2 F''_{(s)}$$

مثال: $L\left[e^{2x}\right] = \dfrac{1}{s-2}$ $\qquad$ $L\left(x^2 e^{2x}\right) = (-1)^2 \left(\dfrac{1}{s-2}\right)''$

$$\left(\frac{1}{s-2}\right)' = \frac{-1}{(s-2)^2} \qquad = \frac{2(s-2)}{(s-2)^4} = \frac{2}{(s-2)^3}$$

$$\boxed{L^{-1}\left((-1)^n F^{(n)}_{(s)}\right) = x^n L^{-1}\left(F_{(s)}\right) = x^n f_{(s)}}$$

۵- قضیهٔ لاپلاس انتگرال:

فرض کنیم تابع $f_{(x)}$ دارای تبدیل لاپلاس $F_{(s)}$ باشد و $g_{(x)} = \int_0^x f_{(t)}\,dt$.

در این صورت تابع g دارای تبدیل لاپلاس است که از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$L\left(\int_0^x f_{(t)}\,dt\right) = \frac{L(f)}{s} = \frac{F_{(s)}}{s}$$

توان s برابر با تعداد انتگرال‌گیری است.

$$L^{-1}\left(\frac{F_{(s)}}{s}\right) = \int_0^x \underbrace{L^{-1}\left(F_{(s)}\right)}_{\text{برحسب } t} dt$$

$$\begin{cases} L^{-1}\left(\dfrac{F_{(s)}}{s^n}\right) = \displaystyle\int_0^x \int_0^x \cdots \int_0^x L^{-1}\left(F_{(s)}\right)(dt)^n \\ n \geq 1 \end{cases}$$

(۴۹) مثال:

$$f(x) = e^{3x} \qquad L(f) = \frac{1}{s-3}$$

$$g(x) = \int_0^x e^{3t}\,dt \Rightarrow L(g) = \frac{\frac{1}{s-3}}{s} = \frac{1}{s(s-3)}$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s^2(s-3)}\right) = \int_0^x \underbrace{\int_0^x \underbrace{L^{-1}\left(\frac{1}{s-3}\right)}_{e^{3t}} dt}\,dt$$

$$\int_0^x e^{3t}\,dt = \frac{1}{3} e^{3t}\Big|_0^x = \frac{1}{3}(e^{3x}-1)$$

$$\frac{1}{3}\int_0^x (e^{3t}-1)\,dt = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}e^{3t}-t\right)\Big|_0^x = \cdots$$

* قضیهٔ انتگرال از لاپلاس:

$$L\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_s^{\infty} F(s)\,ds$$

$$L^{-1}\left(\int_s^{+\infty} F(s)\,dt\right) = \frac{L^{-1}(F(s))}{x} = \frac{f(x)}{x}$$

توضیحات بیشتر در جلسهٔ حل تمرین ذکر شد.

مثال: شرط موجود $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$

$$L\left(\frac{\sin x}{x}\right) = ?$$

$$\Rightarrow L\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \int_s^{+\infty} L(\sin x)\,dt = \int_s^{+\infty} \frac{1}{s^2+1}\,dt$$

$$\int_s^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \operatorname{arctg} t\Big|_s^{+\infty} = \operatorname{arctg} +\infty - \operatorname{artg} s$$

$$= \boxed{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} s}$$

تذکر: هرگاه محاسبهٔ $L^{-1}(G(s))$ مشکل باشد ولی محاسبهٔ $L^{-1}(G'(s))$ ساده‌تر باشد، برای محاسبهٔ $L^{-1}(G(s))$ از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم:

$$L^{-1}(G(s)) = -\frac{L^{-1}(G'(s))}{x}$$

مثال:

1) $L^{-1}\left(\ln\sqrt{s+1}\right) = ?$ $\quad L^{-1}\left(\frac{1}{2}\ln(s+1)\right) = \frac{1}{2}L^{-1}\left(\ln(s+1)\right)$

$$= -\frac{\frac{1}{2}L^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right)}{x} = -\frac{1}{2x}\times e^{-x} = \boxed{\frac{-e^{-x}}{2x}}$$

2) $L^{-1}\left(\ln\left(\frac{\sqrt{s^2+4}}{s-3}\right)\right) = L^{-1}\left(\frac{1}{2}\ln(s^2+4) - \ln(s-3)\right)$

$$= -\frac{\frac{1}{2}L^{-1}\left(\frac{2s}{s^2+4}\right) - L^{-1}\frac{1}{s-3}}{x} = -\boxed{\frac{\cos 2x - e^{3x}}{x}}$$

3) $L^{-1}\left(\frac{1}{s}\ln\left(\frac{s+1}{s}\right)\right) = \int_0^x L^{-1}\left(\ln\left(\frac{s+1}{s}\right)\right)dt \quad *$

$$L^{-1}\left(\ln\left(\frac{s+1}{s}\right)\right) = L^{-1}\left(\ln(s+1) - \ln s\right) = -\frac{L^{-1}\left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s}\right)}{x}$$

$$= -\frac{e^{-x}-1}{x} = \frac{1-e^{-x}}{x} \qquad * = \int_0^x \frac{1-e^{-t}}{t}dt$$

4) $L\left(\int_0^x \frac{e^{-2t}-e^{-3t}}{t}dt\right) = \frac{L\left(\frac{e^{-2x}-e^{-3x}}{x}\right)}{s}$

$$= \frac{\int_s^{+\infty} L\left(e^{-2x}-e^{-3x}\right)dt}{s} = \frac{\int_s^{+\infty}\frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+3}\,dt}{s}$$

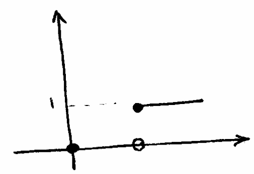
$$= \frac{\int_s^{\infty}\left(\frac{1}{t+2} - \frac{1}{t+3}\right)dt}{s} = \frac{\ln(t+2) - \ln(t+3)\Big|_s^{+\infty}}{s} = \frac{\ln\left(\frac{t+2}{t+3}\right)\Big|_s^{+\infty}}{s}$$

$$= \frac{0 - \ln\left(\frac{s+2}{s+3}\right)}{s}$$

* قضیهٔ انتقال روی محور x ها:

تعریف تابع پله‌ای یکه یا تابع هوی ساید

$$u_c(x)=H(x-c)=\begin{cases}0 & 0\leqslant x<c\\ 1 & x\geqslant c\end{cases}$$



اگر تابع $f(x)$ دارای تبدیل لاپلاس $F(s)$ باشد، رابطهٔ زیر برقرار است:

$$L\left(u_c(x).f(x-c)\right)=e^{-cs}L\left(f(x)\right)=e^{-cs}F(s)$$

$$L^{-1}\left(e^{-cs}F(s)\right)=u_c(x).\underset{x\to x-c}{L^{-1}\left(F(s)\right)}=u_c(x).f(x-c)$$

مثال:

$$g(x)=\begin{cases}0 & 0\leqslant x<2\\ \underbrace{x^2+3x}_{f(x-2)} & x\geqslant 2\end{cases}\qquad f(x)=?$$

$$x-2\to x=t+2$$

$$x^2+3x=(t+2)^2+3(t+2)$$

$$\to t^2+4t+4+3t+6=t^2+7t+10$$

$$f(x)=x^2+7x+10$$

$$g(x)=u_2(x).\ x^2+3x=\begin{cases}0 & 0\leqslant x<2\\ 1 & x\geqslant 2\end{cases}$$

$$L\left(g(x)\right)=e^{-cs}.L\left(f(x)\right)=e^{-2s}\left(\frac{2!}{s^3}+\frac{7}{s^2}+\frac{10}{s}\right)$$

مثال:

$$g(x)=\begin{cases}0 & 0\leqslant x<1\\ x^2-1 & x\geqslant 1\end{cases}\quad\to f(x-1)$$

$$x-1=t\ \to\ x=t+1$$

$$x^2-1=(t+1)^2-1$$

$$=t^2+2t+1-1=t^2+2t$$

$$f(x)=x^2+2x$$

$$L(g(x))=e^{-s}L(x^2+2x)=e^{-s}\left(\frac{2!}{s^3}+\frac{2}{s^2}\right)$$

$$L^{-1}\left(e^{-2s}\frac{1}{s-2}\right) = u_2(x) \cdot \underset{x \to x-2}{L^{-1}\left(\frac{1}{s-2}\right)}$$

$$= u_2(x) \cdot \underset{x \to x-2}{e^{2x}} = u_2(x)\, e^{2(x-2)} = u_2(x) \cdot e^{2x-4}$$

$$\begin{cases} 0 & 0 \leqslant x < 2 \\ e^{2x-4} & x \geqslant 2 \end{cases}$$

* لاپلاس تابع چندضابطه‌ای :

می‌توان تابع چندضابطه‌ای $g(x)$ را

به شکل زیر نوشت :

$$g(x) = \begin{cases} g_1(x) & 0 \leqslant x < c_1 \\ g_2(x) & c_1 \leqslant x < c_2 \\ \vdots & \\ g_{n-1}(x) & c_{n-2} \leqslant x < c_{n-1} \\ g_n(x) & x \geqslant c_{n-1} \end{cases}$$

به این صورت $\rightarrow$ $g(x) = g_1(x) + u_{c_1}(x) \cdot (g_2 - g_1) + u_{c_2}(x)\,(g_3 - g_2) + \cdots +$

$u_{c_{n-1}}(x)\,(g_n - g_{n-1})$

که برای محاسبه $L\{g\}$ از طرف دوم ↑ لاپلاس می‌گیریم :

مثال

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leqslant x < \pi \\ 0 & \pi \leqslant x < 2\pi \\ \sin x & x \geqslant 2\pi \end{cases}$$

$f(x) = x + \pi$

$x - \pi = t$

$\rightarrow x = t + \pi$

$f(t) = \pi + t$

$f(x) = x + u_\pi(x)\,(0 - x) + u_{2\pi}(x)(\sin x - 0)$

$L(x) = \frac{1}{s^2}$ $\qquad L\left(u_\pi(x)(-x)\right) = -L\left(u_\pi(x) \cdot x\right)$

$f(x-\pi)$ $\qquad f = ?$

$= e^{-\pi s} L(x+\pi) = e^{-\pi s}\left(\frac{1}{s^2} + \frac{\pi}{s}\right)$

$$\begin{cases} 0 & 0 \leqslant x < \pi \\ x & x \geqslant \pi \end{cases}$$

$$u_{c\pi}(x)\sin x = \begin{cases} 0 & 0 \leqslant x < 2\pi \\ \sin x & x \geqslant 2\pi \end{cases}$$

$x - 2\pi = t$ $\qquad f(x-2\pi)$

$x = t + 2\pi \Rightarrow \sin x = \sin(t+2\pi) = \sin t = f(x) = \sin x$

$$L\left(u_{c\pi}(x)\cdot\sin x\right) = e^{-2\pi s}\cdot L(\sin x) = \text{\_\_\_\_\_\_}$$

تضیه انتقال بر روی محور s ها:

فرض کنیم تابع $f(x)$ دارای تبدیل لاپلاس $F(s)$ باشد و $g(x) = e^{\alpha x}f(x)$ در این صورت $g(x)$ دارای تبدیل لاپلاس است و داریم:

$$L(g(x)) = L\left(e^{\alpha x}\cdot f(x)\right) = \underset{s \to s-\alpha}{L(f(x))} = F(s-\alpha)$$

$$L^{-1}\left(F(s-\alpha)\right) = e^{\alpha x}\cdot L^{-1}(F(s)) = e^{\alpha x}\cdot f(x)$$

مثال: $L\left(e^{3x}\sin 2x\right) = \underset{s \to s-3}{\dfrac{2}{s^2+4}} = \dfrac{2}{(s-3)^2+4}$

$$L\left(e^{-2x}\cosh x\right) = \underset{s \to s+2}{\frac{s}{s^2-1}} = \frac{s+2}{(s+2)^2-1}$$

مثال:

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+s+1}\right)=L^{-1}\left(\frac{1}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\right) \qquad s^2+s+1=s^2+s+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+1$$

$$(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$$

$$=e^{-\frac{1}{2}x}L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+\underbrace{\frac{3}{4}}_{\alpha^2}}\right)=e^{-\frac{1}{2}x}\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

مثال:

$$L^{-1}\left(\frac{s+1}{s^2+4s+5}\right) \qquad s^2+4s+5=(s+2)^2+1$$

$$=L^{-1}\left(\frac{s+1}{(s+2)^2+1}\right)=L^{-1}\left(\frac{s+2-1}{(s+2)^2+1}\right)=e^{-2x}L^{-1}\left(\frac{s-1}{s^2+1}\right)$$

$$e^{-2x}\left(L^{-1}\frac{s}{s^2+1}-L^{-1}\frac{1}{s^2+1}\right)=\boxed{e^{-2x}(\cos x-\sin x)}$$

* قضیهٔ پیچش یا کانولوشن:

فرض کنیم توابع f و g بر $[0,+\infty)$ تعریف شده و به ازای هر $x>0$ پیچش دو تابع f و g که با نماد $f*g$ یا $g*f$ نمایش می‌دهیم، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f_{(x)}*g_{(x)}=\int_0^x f(x-t)\cdot g(t)\,dt=\int_0^x f(t)\cdot g(x-t)\,dt$$

- قضیه: اگر f و g دارای تبدیل لاپلاس $F(s)$ و $G(s)$ باشند، در این صورت:

$$L\left((f_{(x)}*g_{(x)})\right)=F(s)\cdot G(s)$$

$$L^{-1}\left(F(s)\cdot G(s)\right)=(f_{(x)}*g_{(x)})=\int_0^x f(x-t)\,g(t)\,dt$$

مثال: $L^{-1}\left(\frac{1}{s^2(s-2)}\right)=?$

$$F(s)=\frac{1}{s^2}\rightarrow f(x)=x$$

$$G(s)=\frac{1}{s-2}\rightarrow g(x)=e^{2x}$$

$$= (f_{(x)} * g_{(x)}) = \int_0^x e^{2x}\cdot x\,dt = \int_0^x e^{2t}\cdot (x-t)\,dt$$

$x \to t$ $\qquad$ $x \to x-t$

$x-t$	e^{2t}
-1	$\frac{1}{2}e^{2t}$
0	$\frac{1}{4}e^{2t}$

$$= \frac{1}{2}(x-t)e^{2t} + \frac{1}{4}e^{2t}\Big|_0^x$$

$$= \frac{1}{4}e^{2x} - \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)$$

مثال: $L^{-1}\left(\frac{1}{s^{10}(s-2)}\right) = \underbrace{\int_0^x \cdots \int_0^x}_{\text{۱۰ بار انتگرال}} L^{-1}\left(\frac{1}{s-2}\right) dt \cdots dt = ?$

مثال: $L^{-1}\left(\frac{1}{(s^2+4)(s^2-9)}\right)$

$$f(x) = L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+4}\right) = \frac{1}{2}\sin 2x$$

$$g(x) = L^{-1}\left(\frac{1}{s^2-9}\right) = \frac{1}{3}\sinh 3x$$

$$= \int_0^x \frac{1}{2}\sin 2t \cdot \frac{1}{3}\sinh 3(x-t)\,dt$$

* حل معادله به کمک تبدیل لاپلاس:

مثال (ص ۲۰۸): $y'' - y' + 6y = 0 \qquad y(0) = 1,\ y'(0) = -1$

$$L(y'') = s^2 L(y) - s y(0) - y'(0) = s^2 L(y) - s + 1$$

$$L(y'') - L(y') + 6L(y) = 0$$

$$L(y') = sL(y) - y(0) = sL(y) - 1$$

$$\Rightarrow s^2 L(y) - s + 1 - sL(y) + 1 + 6L(y) = 0$$

$$L(y)(s^2 - s + 6) = s - 2 \rightarrow L(y) = \frac{s-2}{s^2-s+6}$$

$$\Rightarrow y = L^{-1}\left(\frac{s-2}{s^2-s+6}\right)$$

$$s^2 - s + 6 = s^2 - s + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 6 = \left(s - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{23}{4}$$

$$= L^{-1}\left(\frac{s-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-2}{(s-\frac{1}{2})^2+\frac{23}{4}}\right) = L^{-1}\left(\frac{(s-\frac{1}{2})-\frac{3}{2}}{(s-\frac{1}{2})^2+\frac{23}{4}}\right)$$

$$= e^{\frac{1}{2}x} L^{-1}\left(\frac{s-\frac{3}{2}}{s^2+\frac{23}{4}}\right) \longrightarrow ?$$

مثال: $y''+\alpha^2 y = \cos 2x \qquad y(0)=1 \;,\; y'(0)=0$

$$L(y'') = s^2 L(y) - s y(0) - y'(0) = s^2 L(y) - s \qquad L(\cos 2x) = \frac{s}{s^2+4}$$

$$\Rightarrow L(y'') + \alpha^2 L(y) = L(\cos 2x)$$

$$s^2 L(y) - s + \alpha^2 L(y) = \frac{s}{s^2+4}$$

$$L(y)\,(s^2+\alpha^2) = \frac{s}{s^2+4} + s = \frac{s^3+4s+s}{s^2+4} = \frac{s^3+5s}{s^2+4}$$

$$L(y) = \frac{s}{(s^2+\alpha^2)(s^2+4)} + \frac{s}{s^2+\alpha^2} = \frac{s^3+5s}{(s^2+\alpha^2)(s^2+4)}$$

تجزیه کسر طولانی است.

$$\xrightarrow{\text{با راه دیگر}} \quad y = L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+\alpha^2}\cdot\frac{1}{s^2+4} + \frac{s}{s^2+\alpha^2}\right)$$

$$= \int_0^x \cos \alpha t \cdot \frac{1}{2} \sin 2(x-t)\, dt + \cos \alpha x$$

مثال: $y''-2y'+2y = e^x \qquad y(0)=0 \;,\; y'(0)=1$

$$L(y'') = s^2 L(y) - s y(0) - y'(0) = s^2 L(y) - 0 - 1 = s^2 L(y) - 1$$

$$L(y') = s L(y) - y(0) = s L(y) - 0 = s L(y)$$

$$s^2 L(y) - 1 - 2s L(y) + 2 L(y) = \frac{1}{s-1}$$

$$L(y)\,(s^2-2s+2) = \frac{1}{s-1} + 1 = \frac{1+s-1}{s-1} = \frac{s}{s-1}$$

$$\Rightarrow L(y) = \frac{s}{(s-1)(s^2-2s+2)} = \frac{s-1+1}{(s-1)\left(\underbrace{(s-1)}_{S}{}^2+1\right)}$$

$$s^2-2s+2 \to (s-1)^2+1$$

$$\Rightarrow y = e^x L^{-1}\left(\frac{s+1}{s(s^2+1)}\right) = e^x \int_0^x L^{-1} \frac{s+1}{s^2+1}\, dt$$

$$= e^x \int_0^x L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+1}\right) + L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) dt = e^x \int_0^x \cos t + \sin t \; dt$$

$$\cos x \quad + \quad \sin x \qquad \longrightarrow ?$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = ? \qquad L\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \int_0^\infty e^{-sx} \frac{\sin x}{x}\, dx$$

$$L\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \int_s^{+\infty} \underbrace{L(\sin x)}_{\frac{1}{s^2+1}} dt = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arc\,tg} s \underset{s=0}{=} \frac{\pi}{2}$$

حد متناهی

$$\Rightarrow \int_0^\infty e^{-sx} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arc\,tg} s$$

$$s=0 \quad \rightarrow \quad \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\, dx = \ln\left(b/a\right)$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \overset{H}{=} \frac{-ae^{-ax} + be^{-bx}}{1} = \frac{b-a}{1} = \text{متناهی}$$

$$L\left(\frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\right) = \int_s^{+\infty} L\left(e^{-ax} - e^{-bx}\right) dt =$$

(۷۸)

$$\int_s^{+\infty} \frac{1}{s+a} - \frac{1}{s+b}\, dt = \int_s^{+\infty} \frac{1}{t+a} - \frac{1}{t+b}\, dt$$

$$= Ln\,(t+a) - Ln(t+b) \Big|_s^{+\infty} = Ln\left(\frac{t+a}{t+b}\right)\Big|_s^{+\infty} = Ln\,1 - Ln\,\frac{s+a}{s+b}$$

$$= Ln\left(\frac{s+b}{s+a}\right)$$

با فرمول تعریفی

$$L(\quad) = \int_0^{+\infty} e^{-sx}\,\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx = \int \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx$$

$s=0$

$$s=0 \quad = Ln\,\frac{b}{a}$$

- هریک از معادلات زیر را حل کنید.

$$\varphi(x) + \int_0^x \underbrace{(x-t)}_{f(x-t)}\,\underbrace{\varphi(t)}_{\varphi(t)}\,dt = \sin 2x$$

$$\underset{x}{f(x-t)} = \underset{X}{x-t} \Rightarrow f(x) = x$$

$$L(\varphi(x)) + L\left(\int_0^x f(x-t)\cdot\varphi(t)\,dt\right) = L(\sin 2x)$$

$$L(\varphi) + L(x)\cdot L(\varphi) = \frac{2}{s^2+4} \qquad L(\varphi) + \frac{1}{s^2}L(\varphi) = \frac{2}{s^2+4}$$

$$L(\varphi)\left(-1+\frac{1}{s^2}\right) = \frac{2}{s^2+4} \Rightarrow L(\varphi)\left(\frac{s^2+1}{s^2}\right) = \frac{2}{s^2+4}$$

$$\Rightarrow L(\varphi) = \frac{2s^2}{(s^2+1)(s^2+4)} = \frac{As+B}{s^2+1} + \frac{Cs+D}{s^2+4} \rightarrow \text{تفکیک}$$

$$\varphi(x) = 2L^{-1}\left(\underbrace{\frac{s}{s^2+1}}_{F(s)}\cdot\underbrace{\frac{s}{s^2+4}}_{G(s)}\right) = 2\int_0^x \cos(x-t)\cdot\cos 2t\,dt$$

$$f(x) = \cos x \qquad \cos 2x$$

$$x \to x-t \qquad x \to t$$

۷۹

$$\varphi(x) = 2x^2 + \int_0^x \sin 4t \cdot \varphi(x-t)\, dt$$

$$L(\varphi) = L(2x^2) + L\left(\int_0^x \sin 4t \cdot \varphi(x-t)\, dt\right)$$

$$L(\varphi) = \frac{2\times 2!}{s^3} + \frac{4}{s^2+16} \times L(\varphi) \qquad L(\varphi)\left(1 - \frac{4}{s^2+16}\right) = \frac{4}{s^3}$$

$$L(\varphi)\left(\frac{s^2+16-4}{s^2+16}\right) = \frac{4}{s^3} \Rightarrow L(\varphi) = \frac{4(s^2+16)}{s^3(s^2+12)}$$

$$\varphi = L^{-1}\left(\frac{4(s^2+16)}{s^3(s^2+12)}\right) = 4L^{-1}\left(\frac{s^2+16}{s^3(s^2+12)}\right) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s^3} + \frac{Ds+E}{s^2+12} \quad \ldots$$

$$\xrightarrow{\text{راه دیگر}} \varphi = 4L^{-1}\left(\frac{s^2}{s^3(s^2+12)} + \frac{16}{s^3(s^2+12)}\right)$$

$$= 4L^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2+12)} + \frac{16}{s^3(s^2+12)}\right)$$

در مخرج s داشت با انتگرال می‌بریم

$$= 4L^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2+12)} + \frac{16}{s^3(s^2+12)}\right)$$

$$= 4\left[\int_0^x L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+12}\right) dt + 16\int_0^x\int_0^x\int_0^x L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+12}\right) dt\,dt\,dt\right]$$

$$\to \varphi = 4\left(\int_0^x \frac{1}{\sqrt{12}} \sin\sqrt{12}\,t\, dt + 16\int_0^x\int_0^x\int_0^x \frac{1}{\sqrt{12}} \sin\sqrt{12}\,t\; dt\,dt\,dt\right)$$

$$\xrightarrow[\text{دوم}]{\text{حل انتگرال}} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{12}} \sin\sqrt{12}\,t\, dt = -\frac{1}{12}\cos\sqrt{12}\,t\Big|_0^x = -\frac{1}{12}\left(\cos\sqrt{12}\,x - \cos 0\right) = \frac{1}{12}\left(1 - \cos\sqrt{12}\,t\right)$$

$$\int_0^x \frac{1}{12}\left(1-\cos\sqrt{12}\,t\right) dt = \frac{1}{12}\left(t - \frac{1}{\sqrt{12}}\sin\sqrt{12}\,t\right)\Big|_0^x = \frac{1}{12}\left(x - \frac{1}{\sqrt{12}}\sin\sqrt{12}\,x\right)$$

$$\int_0^x \frac{1}{12}\left(t - \frac{1}{\sqrt{12}}\sin\sqrt{12}\,t\right) dt = \frac{1}{12}\left(\frac{t^2}{2} + \frac{1}{12}\cos\sqrt{12}\,t\right)\Big|_0^x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{12}\left(\boxed{\frac{x^2}{2} + \frac{1}{12}\cos\sqrt{12}\,x - \frac{1}{12}}\right)$$

$$\varphi(x) = 4\left[\frac{1}{12}\left(1-\cos\sqrt{12}\,x\right) + 16\times\frac{1}{12}\left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{12}\cos\sqrt{12}\,x - 1\right)\right]$$

* جواب معادله به صورت سری:

تعریف سری تابعی به شکل زیر است:

$$\sum_{n=1} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots$$

مثال $\rightarrow \quad \sum_{n=1} \frac{x^2}{(n+1)!} \quad , \quad \sum \frac{(-1)^n x}{n+2}$

سری تیلور: اگر تابع در نقطهٔ $x=a$ از هر مرتبه مشتق پذیر باشد، دارای سری تیلور به شکل زیر است:

$$f(x) = \sum a_n (x-a)^n \quad , \quad a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

$a=0 \longrightarrow$ سری مکلورن $\quad f(x) = \sum a_n x^n \quad , \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$

به ازای بعضی مقادیر x، سری تابعی همگرا می باشد. برای مشخص کردن بازهٔ همگرایی سری تابعی از آزمون نسبت استفاده می کنیم. به شکل زیر:

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \rightarrow \sum a_n$ همگرا

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1 \rightarrow \sum a_n$ واگرا

و $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1 \rightarrow$ این روش جواب نمی دهد

مثال: شعاع همگرایی سری زیر را به دست آورید.

$\sum \underbrace{\left(\frac{x^n}{n+1}\right)}_{}^{a_n} \rightarrow \lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ $\nearrow < 1$ همگرا ، $\rightarrow > 1$ واگرا ، $\searrow = 1$ بی جواب

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{n+2}}{\frac{x^n}{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x(n+1)}{(n+2)} \right| = \lim_{n\to\infty} |x| \cdot \left| \frac{n+1}{n+2} \right| < 1$$

شرط همگرایی

$$\Rightarrow |x| \cdot \underbrace{\lim_{n\to\infty} \left| \frac{n+1}{n+2} \right|}_{1 \; = \frac{1}{R}} < 1 \Rightarrow |x| < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$$

بازهٔ همگرایی

شعاع همگرایی $= R$

قضیه: مشتق و انتگرال سری نیز در بازهٔ همگرایی سری، همگرا می باشند.

$$\sum f(x) \quad , \quad \sum f'_n(x) \quad , \quad \sum \int f_n(x)\, dx$$

نقاط عادی و غیرعادی :

$$P(x)\,y'' + q(x)\,y' + r(x)\,y = 0$$

$P(x_0) \neq 0 \implies x = x_0$ نقطهٔ عادی

$P(x_0) = 0 \implies x = x_0$ نقطهٔ غیرعادی

$x = x_0$ غیرعادی منظم

$$\lim_{x \to x_0} (x - x_0)\frac{q(x)}{P(x)} = P_0 \text{ متناهی} \quad , \quad \lim_{x \to x_0} (x - x_0)^2 \frac{r(x)}{P(x)} = q_0 \text{ متناهی}$$

مثال:

$$(x^2 - 2x - 3)^2 y'' + (x - 3)\,y' + 2y = 0$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \implies (x+1)(x-3) = 0 \qquad x = -1 \;,\; x = 3$$

$$\lim_{x \to -1} \frac{(x+1)(x-3)^2}{(x+1)^2(x-3)^2} = \infty$$ غیرعادی نامنظم $x = -1$

$$\lim_{x \to 3} \frac{(x-3)^2}{(x+1)^2(x-3)^2} = \frac{1}{16} \quad , \quad \lim_{x \to 3} \frac{2(x-3)^2}{(x+1)^2(x-3)^2} = \frac{2}{16}$$

$x = 3$ غیرعادی منتظم

قضیه : فرض کنیم $x_0 = a$ یک نقطهٔ عادی معادلهٔ دیفرانسیل ذکر شده باشد، در این صورت معادله دارای جوابی به شکل زیر است:

$$y = \sum a_n (x - a)^n$$

$$a = 0 \implies y = \sum a_n x^n$$

مثال : معادلهٔ زیر را حول نقطهٔ $x = 0$ حل کنید.

$y'' + 4y = 0 \qquad x = 0$ عادی

$$y = \sum_{n=0} a_n x^n \qquad y' = \sum_{n=1} n a_n x^{n-1}$$

$$y = a_0 x^0 + a_1 x + \cdots \qquad y' = 0 + a_1 x^0 + 2a_2 x + \cdots$$

$$y'' = \sum_{n=2} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

$$\sum_{n=2} n(n-1) a_n x^{n-2} + 4\sum_{n=0} a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0} (n+2)(n+1)\, a_{n+2} x^n + \sum_{n=0} 4a_n\, x^n = 0$$

۸۲

$$\sum_{n=0} x^n\left((n+2)(x+1)a_{n+2}+4a_n\right)=0$$

$$(n+2)(n+1)a_{n+2}=-4a_n \Rightarrow a_{n+2}=\frac{-4a_n}{(n+2)(n+1)}$$

a_0, a_1 معلوم

$$a_2=\frac{-4a_0}{2}=-2a_0 \qquad a_3=\frac{-4a_1}{3\times 2}=\frac{-2a_1}{3}$$

$$a_4=\frac{-4a_2}{4\times 3}=-\frac{1}{3}a_2=\frac{-1}{3}\times -2a_0=\frac{2}{3}a_0$$

$$y''-xy'+2y=0 \qquad x_0=0$$

$$y=\sum_{n=0} a_nx^n \qquad y'=\sum_{n=1} na_nx^{n-1} \qquad y''=\sum_{n=2} n(n-1)a_nx^{n-2}$$

$$\sum_{n=2} n(n-1)a_nx^{n-2}-x\sum_{n=1} na_nx^{n-1}+2\sum_{n=0} a_nx^n=0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=2} n(n-1)a_nx^{n-2}-\sum_{n=1} na_nx^n+\sum_{n=0} 2a_nx^n=0$$

$n\to n+2$

$$\sum_{n=0}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n-\sum_{n=1} na_nx^n+\sum_{n=0} 2a_nx^n=0$$

$$2a_2+\sum_{n=1}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n-\sum_{n=1} na_nx^n+2a_0+\sum_{n=1} 2a_nx^n=0$$

$$2a_2+2a_0+\sum_{n=1} x^n\left((n+2)(n+1)a_{n+2}-na_n+2a_n\right)=0$$

$$2a_2+2a_0=0 \Rightarrow a_0=-a_2$$

$$(n+2)(n+1)a_{n+2}+a_n(2-n)=0 \Rightarrow \boxed{a_{n+2}=\frac{a_n(n-2)}{(n+2)(n+1)}}$$

رابطه بازگشتی

(۳)

جواب حول نقطهٔ غیرعادی :

اگر $x = x_0$ برای معادلهٔ نقطهٔ غیرعادی منتظم باشد، ابتدا معادلهٔ مشخصه زیر را حل می‌کنیم :

$$r^2 + (p_0 - 1) r + q_0 = 0$$ معادلهٔ مشخصه

برای امتحان می‌بینیم y_1 را خواسته، فقط y_1 فرمول نوشته شود.

① r_1, r_2 دو ریشه ، $r_1 - r_2 \notin \mathbb{Z} \rightarrow y_1 = \sum_{n=0} a_n x^{n+r_1}, \quad y_2 = \sum_{n=0} b_n x^{n+r_2}$

② $r_1 = r_2 = r \qquad y_1 = \sum a_n x^{n+r} \qquad y_2 = y_1 \operatorname{Ln} x + \sum_{n=0} b_n x^{n+r}$

③ $r_1 - r_2 \in \mathbb{Z} \qquad y_1 = \sum a_n x^{n+r_1} \qquad y_2 = K y_1 \operatorname{Ln} x + \sum b_n x^{n+r_2}$

$r_1 > r_2$

در تمام حالات پس از به دست آوردن جواب‌های y_1 و y_2 جواب عمومی معادلهٔ $P(x)y'' + Q(x)y' + r(x)y = 0$ از رابطهٔ زیر حساب می‌شود:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

مثال : $(2x^2 + x^3) y'' + (x + 3x^2) y' - (1 + 4x) y = 0 \qquad x = 0$

$$\lim_{x \to 0} x \times \frac{(x + 3x^2)}{2x^2 + x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2(1 + 3x)}{x^2(2 + x)} = \frac{1}{2} = p_0$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 \times -(1 + 4x)}{x^2(2 + x)} = \frac{-1}{2} \qquad q_0 = -\frac{1}{2}$$

$$r^2 + (p_0 - 1) r + q_0 = 0 \qquad r^2 + \left(\frac{1}{2} - 1\right) r - \frac{1}{2} = 0 \ , \quad r^2 - \frac{1}{2} r - \frac{1}{2} = 0$$

$$2r^2 - r - 1 = 0 \qquad \Delta = 1 - 4(2)(-1) = 9 \qquad r = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{4} \begin{cases} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$r_1 = 1 \qquad r_2 = \frac{-1}{2} \qquad r_1 - r_2 \notin \mathbb{Z}$$

$$y_1 = \sum_{n=0} a_n x^{n+1} \qquad y_2 = \sum_{n=0} a_n x^{n - \frac{1}{2}}$$

$$y_1' = \sum_{n=0} (n+1) a_n x^n \qquad y_1'' = \sum_{n=1} n(n+1) a_n x^{n-1}$$

(86)

$$(2x^2+x^3)\sum_{n=1} n(n+1)a_n x^{n-1} + (x+3x^2)\sum_{n=0}(n+1)a_n x^n$$

$$-(1+4x)\sum_{n=0} a_n x^{n+1}$$

$$\sum_{n=1} 2n(n+1)a_n x^{n+1} + \sum_{n=1} n(n+1)a_n x^{n+2} + \sum_{n=0}(n+1)a_n x^{n+1} + \sum_{n=0} 3(n+1)a_n x^{n+2}$$

$$-\sum_{n=0} a_n x^{n+1} - \sum_{n=0} 4a_n x^{n+2} = 0$$

$n+2 \to n+1$

$\to n \to n+1$

$$\sum_{n=1} 2n(n+1)a_n x^{n+1} + \sum_{n=2}(n-1)n\,a_{n-1}x^{n+1} + \sum_{n=0}(n+1)a_n x^{n+1} +$$

$$\sum_{n=1} 3n a_{n-1} x^{n+1} - \sum_{n=0} a_n x^{n+1} - \sum_{n=1} 4a_{n-1}x^{n+1} = 0$$

$$4a_1x^2 + a_0x + 2a_1x^2 + 3a_0x^2 - a_0x - a_1x^2 - 4a_0x^2 + \sum_{n=2} x^{n+1}\Big(2n(n+1)a_n +$$

$$n(n-1)a_{n-1} + (n+1)a_n + 3na_{n-1} - a_n - 4a_{n-1}\Big) = 0$$

$$x^2(4a_1+2a_1-a_1-4a_0) + \sum x^{n} \;\_\_\_\_$$

$$5a_1 - 4a_0$$

$$a_n(2n^2+2n+n+1-1) + a_{n-1}(n^2-n+3n-4) = 0$$

$$a_n(2n^2+3n) + a_{n-1}(n^2+2n-4) = 0$$

$$\boxed{a_n = \frac{-(n^2+2n-4)}{2n^2+3n}\,a_{n-1}}$$

رابطه

$$5a_1 - 4a_0 = 0$$

$$\boxed{a_1 = \frac{4a_0}{5}}$$

پایان

(1)

* جلسهٔ حل تمرین:

در ماتریس ها:

$$|2A|_{3\times 3} = \underbrace{8}_{2^{3}}|A|$$

← تعداد سطرها (توان ۳)

← فاکتور گرفته شده از همه درایه ها (پایه ۲)

$$x^2y''+2xy'+\frac{1}{2}y=0 \qquad x=e^{z} \qquad z=\ln x$$

$$\left(x^2D^2+2xD+\frac{1}{2}\right)y=0$$

$$y''=\frac{1}{x^2}D(D-1)y \qquad , y'=\frac{1}{x}Dy$$

$$D(D-1)y+2Dy+\frac{1}{2}y=0 \qquad \left(D^2+D+2D+\frac{1}{2}\right)y=0$$

$$\left(D_z^2+D_z+\frac{1}{2}\right)y=0 \qquad D^2+D+\frac{1}{2}=0 \longrightarrow 2D^2+2D+1=0$$

$$y=e^{\alpha z}\left(c_1\cos\beta z+c_2\sin\beta z\right) \qquad \Delta=4-4(2)(1)=-4$$

$$z=\ln x \qquad D=\frac{-2\pm\sqrt{-4}}{4}=-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}i$$

$$y=e^{-\frac{1}{2}\ln x}$$

$$y=e^{-\frac{1}{2}\ln x}\left[c_1\cos\left(\frac{1}{2}\ln x\right)+c_2\sin\left(\frac{1}{2}\ln x\right)\right] \qquad \alpha=-\frac{1}{2}$$

$$\beta=\frac{1}{2}$$

مثال: (روش تغییر پارامتر)

$$y''-6y'+9y=25e^{3x}\sin x$$

$$\left(D^2-6D+9\right)y=25e^{3x}\sin x$$

$$D^2-6D+9=0 \qquad (D-3)^2=0 \qquad \lambda_1=3 \;,\; \lambda_2=3 \quad \rightarrow y_h=c_1\underbrace{e^{3x}}_{y_1}+c_2\underbrace{xe^{3x}}_{y_2}$$

$$W=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} e^{3x} & xe^{3x} \\ 3e^{3x} & e^{3x}+3xe^{3x} \end{vmatrix}$$

$$=e^{6x}(1+3x-3x)=e^{6x} \qquad W_1=\begin{vmatrix} 0 & xe^{3x} \\ 25e^{3x}\sin x & e^{3x}+3xe^{3x} \end{vmatrix}$$

$$=-25xe^{6x}\sin x$$

$$u_1'=\int\frac{W_1}{W}dx=\int\frac{-25xe^{6x}\sin x}{e^{6x}}dx=\int -25x\sin x\,dx$$

x	$\sin x$
1	$-\cos x$
0	$-\sin x$

$$\rightarrow = -x\cos x+\sin x$$

۲

$$u_1' = -\left[25(-x\cos x + \sin x)\right] \qquad u_1 = 25\int -x\cos x + \sin x \, dx$$

$$\rightarrow u_1 = -25(-x\sin x - \cos x) - \cos x$$

$$= +25x\sin x + 24\cos x$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} e^{3x} & 0 \\ 3e^{3x} & 25e^{3x}\sin x \end{vmatrix} = 25e^{6x}\sin x$$

$$u_2' = \int \frac{W_2}{W}dx = \int \frac{25e^{6x}\sin x}{e^{6x}}dx = -25\cos x \qquad \boxed{u_2 = -25\sin x}$$

$$y_p = u_1y_1 + u_2y_2 = (25x\sin x + 24\cos x).e^{3x} + (-25\sin x).xe^{3x}$$

$$\boxed{y = y_h + y_p}$$

$$y_p = Ae^{3x}\sin x + Be^{3x}\cos x \leftarrow$$ اگر از روش ضرایب نامعین حل می‌کردیم

** تذکر:

در روش اپراتور معکوس:
(در حالت خاص)

$$\frac{1}{F(D)}.e^{\alpha x}.u(x) = e^{\alpha x}\frac{1}{F(\alpha)}u(x)$$

$$\frac{1}{F(D)}e^{\alpha x} = \frac{1}{F(\alpha)}e^{\alpha x} \qquad F(\alpha) \neq 0$$

$$\frac{1}{(D-\alpha)^n F(D)}e^{\alpha x} = \frac{1}{n!\,F(\alpha)}x^n e^{\alpha x} \qquad f(\alpha) = 0$$

- مثال:

$$y'' + y' + y = e^{3x} + 4e^{x} - 3e^{-2x} + 5$$

$$y'' + y' + y = 0 \qquad D^2 + D + 1 = 0 \qquad D = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

$$y_h = e^{-\frac{1}{2}x}\left(c_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \qquad D = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

(۳)

$$(D^2+D+1) = e^{3x}+6e^{x}-3e^{-2x}+5$$

$$y_p = \frac{1}{D^2+D+1}\left(e^{3x}+6e^{x}-3e^{-2x}+e^{0x}.5\right)$$

اگر ریشه بودند، ناچار باید از روش عملی یعنی انتگرال‌گیری حل می‌کردیم.

$$y_p = \frac{1}{9+3+1}e^{3x}+6\,\frac{1}{1+1+1}e^{x}-\frac{3}{4-2+1}e^{-2x}+\frac{1}{0+0+1}5$$

$$y_p = \frac{1}{13}e^{3x}+2e^{x}-e^{-2x}+5$$

$$\boxed{y = y_h + y_p}$$

مثال : $x^2y''+xy'+y = \sin(2\ln x)$ $\qquad x = e^{z} \Rightarrow z = \ln x$

(کوشی اویلر)

$$y'' = \frac{1}{x^2}D(D-1)y \qquad y' = \frac{1}{x}Dy$$

$$D(D-1)y + Dy + y = \sin(2z) \qquad (D^2+\cancel{D}-\cancel{D}+1)y = \sin 2z$$

$$(D^2+1)y = \sin 2z$$

$$D^2+1 = 0 \rightarrow D = \pm i \qquad \rightarrow y_h = e^{0z}(c_1\cos z + c_2\sin z)$$

$$= c_1\cos z + c_2\sin z$$

- جواب خصوصی را به روش تغییر پارامتر حساب می‌کنیم :

$$w\begin{vmatrix} \cos z & \sin z \\ -\sin z & \cos z \end{vmatrix} = 1$$

$$w_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin z \\ \sin 2z & \cos z \end{vmatrix} = -\sin z\sin 2z = -2\sin^2 z\cos z$$

$$u_1 = \int \frac{w_1}{w}dz = \int -2\sin^2 z\cos z\,dz = \int -2u^2du = -\frac{2u^3}{3} = -\frac{2}{3}\sin^3 z$$

$$w_2 = \begin{vmatrix} \cos z & 0 \\ -\sin z & 2\sin z\cos z \end{vmatrix} = 2\sin z\cos^2 z$$

$$u_2 = \int \frac{w_2}{w} = \int 2\sin z \cos^2 z \, dz = -\frac{2}{3}\cos^3 z$$

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2 = \left(-\frac{2}{3}\sin^3 z\right)\cos z - \frac{2}{3}\cos^3 z \cdot \sin z$$

$$y = y_h + y_p \qquad -\frac{2}{3}\sin z \cos z \left(\sin^2 z + \cos^2 z\right)$$

اگر طرف دوم نمایی یا مثلثاتی بود ، به صورت نمایی نوشته و از روش گفته شده در تذکر استفاده می‌کنیم .

به روش اپراتور معکوس

$$y_p = \frac{1}{D^2+1}\sin 2z = \frac{1}{D^2+1}\left(\frac{1}{2i}\left(e^{2iz} - e^{-2iz}\right)\right)$$

$$\frac{1}{2i}\left(-\frac{1}{3}e^{2iz} - \frac{-1}{3}e^{-2iz}\right) = -\frac{1}{3}\left(\frac{e^{2iz} - e^{-2iz}}{2}\right)$$

$$= -\frac{1}{3}\sin 2z \qquad\qquad y = y_h + y_p$$

* قضیهٔ انتگرال از لاپلاس :

فرض کنیم تابع $f(x)$ دارای تبدیل لاپلاس $F(s)$ باشد و $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x}$ موجود و متناهی باشد ، در این صورت تابع $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ دارای تبدیل لاپلاس است و داریم :

$$L\left(\frac{f(x)}{x}\right) = \int_s^{+\infty} F(t)\,dt$$

$$L^{-1}\left(\int_s^{+\infty} F(t)\,dt\right) = \frac{L^{-1}\left(f(x)\right)}{x}$$

تذکر : در مواردی که محاسبهٔ تبدیل معکوس یک تابع مشکل باشد ، ولی محاسبهٔ تبدیل معکوس مشتق آن ساده باشد ، از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم :

$$\boxed{L^{-1}\left(G(s)\right) = -\frac{L^{-1}\left(G'(s)\right)}{x}}$$

مثال ۱:

$$L\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\int_s^{+\infty}\underbrace{L(\sin x)}_{F(t)}\,dt=\int_s^{+\infty}\frac{1}{t^{۲}+1}\,dt$$

$$=\mathrm{Arc\,tg}\,t\Big|_s^{+\infty}=\mathrm{Arctg}(+\infty)-\mathrm{Arc\,tg}(s)=\frac{\pi}{۲}-\mathrm{Arctg}(s)$$

مثال ۲:

$$L^{-1}\left(\mathrm{Ln}\left(\frac{s+1}{s}\right)\right)=L^{-1}\left(\mathrm{Ln}(s+1)-\mathrm{Ln}(s)\right)$$

$$=-L^{-1}\left(\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s}\right)\Big/x=-\frac{(e^{-x}-1)}{x}=\frac{1-e^{-x}}{x}$$

مثال ۳:

$$L^{-1}\left(\mathrm{Ln}\left(\frac{s^{۲}+1}{s^{۲}+۴}\right)\right)=L^{-1}\left(\mathrm{Ln}(s^{۲}+1)-\mathrm{Ln}(s^{۲}+۴)\right)$$

$$=\frac{-L^{-1}\left(\frac{۲s}{s^{۲}+1}-\frac{۲s}{s^{۲}+۴}\right)}{x}=\frac{-۲(\cos x-\cos ۲x)}{x}$$

مثال ۴:

$$L\left\{\int_0^x\frac{e^{-۲t}-e^{-۳t}}{t}\,dt\right\}=\frac{L\left(\frac{e^{-۲x}-e^{-۳x}}{x}\right)}{s}$$

$$L\left(\frac{e^{-۲x}-e^{-۳x}}{x}\right)=\int_s^{+\infty}\underbrace{L\left(e^{-۲x}-e^{-۳x}\right)}_{\frac{1}{s+۲}-\frac{1}{s+۳}}\,dt$$

$$=\int_s^{+\infty}\frac{1}{t+۲}-\frac{1}{t+۳}\,dt=\mathrm{Ln}(t+۲)-\mathrm{Ln}(t-۳)\Big|_s^{+\infty}$$

$$\mathrm{Ln}\left(\frac{t+۲}{t+۳}\right)\Big|_s^{+\infty}=0-\mathrm{Ln}\left(\frac{s+۲}{s+۳}\right)\longrightarrow$$ جواب $$=\boxed{\frac{1}{s}\mathrm{Ln}\left(\frac{s+۲}{s+۳}\right)}$$

* تذکر:

$$\mathrm{Ln}(f(x))=F(s)\Rightarrow\mathrm{Ln}\left(e^{\alpha x}f(x)\right)=F(s-\alpha)$$

$$L^{-1}\left(F(s-\alpha)\right)=e^{\alpha x}L^{-1}\left(F(s)\right)$$

۹۱

مثال ①: $L\left(e^{3x}\sin 2x\right)=\dfrac{2}{s^2+4} \Rightarrow$ جواب $=\dfrac{2}{(s-3)^2+4}$

$s\to s-3$

مثال ②: $L\left(e^{2x}\cosh 5x\right)=\dfrac{s}{s^2-25} \Rightarrow$ جواب $=\dfrac{s-2}{(s-2)^2-25}$

$s\to s-2$

مثال ③: $L\left(e^{5x}\cdot x^4\right)\xrightarrow{\text{راه اول}}(-1)^4\left(L\left(e^{5x}\right)\right)^{(4)}$

$=\left(\dfrac{1}{s-5}\right)^{(4)} \longrightarrow$ ۴ بار مشتق

راه دوم: $\dfrac{4!}{s^5}=\dfrac{4!}{(s-5)^5}$

$s\to s-5$

مثال ④: $L\left(x\cos^2 x\right)= \quad L\left(x\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x\right)\right)=\frac{1}{2}L\left(x+x\cos 2x\right)$

$\frac{1}{2}\left[L(x)+L(x\cos 2x)\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{s^2}+(-1)^1\left(\frac{s}{s^2+4}\right)'\right]$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s^2}-\frac{s^2+4-2s^2}{(s^2+4)^2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s^2}-\frac{4-s^2}{(s^2+4)^2}\right)$ $\qquad L\cos\alpha x=\dfrac{s}{s^2+\alpha^2}$

مثال ⑤: $L^{-1}\left(\dfrac{1}{(s-\alpha)^n}\right)=e^{\alpha x}L^{-1}\left(\dfrac{1}{s^n}\right)=e^{\alpha x}\dfrac{1}{(n-1)!}L^{-1}\left(\dfrac{(n-1)!}{s^{n-1+1}}\right)$

$=\dfrac{1}{(n-1)!}e^{\alpha x}\cdot x^{n-1}$ $\qquad L(x^n)=\dfrac{n!}{s^{n+1}}$

مثال ⑥: $L^{-1}\left(\dfrac{2s+3}{(s+4)^3}\right)=e^{-4x}L^{-1}\left(\dfrac{2(A-4)+3}{A^3}\right)$

$s+4=A \Rightarrow s=A-4$

$=e^{-4x}L^{-1}\left(\dfrac{2A-5}{A^3}\right)=e^{-4x}\left(L^{-1}\left(\dfrac{2}{A^2}-\dfrac{5}{A^3}\right)\right)$

۷

$$e^{-4x}\left(2L^{-1}\left(\frac{1}{A^2}\right)-5L^{-1}\left(\frac{1}{A^3}\right)\right)=e^{-4x}\left(2x-\frac{5}{2!}x^2\right)$$

مثال ۷ : $L^{-1}\left(\dfrac{s-2}{s^2+6s+5}\right)$

روش اول ⟵ $s^2+6s+5=s^2+6s+9-9+5 \rightarrow (s+3)^2-4$

$$=L^{-1}\left(\frac{s-2}{(s+3)^2-4}\right)=e^{-3x}\left(\frac{A-3-2}{A^2-4}\right)=e^{-3x}\left(\frac{A-5}{A^2-4}\right)$$

$s+3=A \rightarrow s=A-3$

$$=e^{-3x}L^{-1}\left(\frac{A}{A^2-4}-\frac{5}{A^2-4}\right)=e^{-3x}\left(\cosh 2x-\frac{5}{2}\sinh 2x\right)$$

روش دوم ⟵ تجزیه کسرها

مثال ۸ : $L^{-1}\left(\dfrac{s+5}{s^2+7s+12}\right)=L^{-1}\left(\dfrac{s+5}{(s+3)(s+4)}\right)$

$$=L^{-1}\left(\frac{A}{s+3}+\frac{B}{s+4}\right)=Ae^{-3x}+Be^{-4x}$$

مثال ۹ : $\left(\operatorname{Ln}\sqrt{\dfrac{s+1}{s-1}}\right)=-L^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\operatorname{Ln}\left(\dfrac{s+1}{s-1}\right)\right)=\dfrac{1}{2}L^{-1}\left(\operatorname{Ln}(s+1)-\operatorname{Ln}(s-1)\right)$

$$L^{-1}(G)=\frac{-L^{-1}(G')}{x}$$

$$=\frac{-1}{2}\cdot\frac{L^{-1}\left(\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s-1}\right)}{x}=\frac{-1}{2x}\left(e^{-x}-e^{x}\right)$$

مثال ۱۰ : $L^{-1}\left(\operatorname{Arctg}\dfrac{1}{s}\right)=-\dfrac{L^{-1}\left(\frac{-1/s^2}{1+1/s^2}\right)}{x}=-\dfrac{L^{-1}\left(\frac{-1}{s^2+1}\right)}{x}$

$$=\frac{1}{x}L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)=\frac{1}{x}\sin x$$

مثال ۱۱ : $L^{-1}\left(\dfrac{2s+1}{s^2(s-1)(s+2)}\right)=\displaystyle\int_0^x\int_0^x L^{-1}\left(\dfrac{2s+1}{(s+1)(s+2)}\right)dt\,dt$

$$L^{-1}\left(\frac{2s+1}{(s-1)(s+2)}\right)=L^{-1}\left(\frac{A}{s-1}+\frac{B}{s+2}\right)=Ae^{x}+Be^{-2x}$$

(۷)

$$\int_0^x Ae^t + Be^{-2t}\,dt = Ae^t - \frac{B}{2}e^{-2t}\Big|_0^x = Ae^x - \frac{B}{2}e^{-2x}$$

$$\int_0^x Ae^t - \frac{B}{2}e^{-2t}\,dt\Big|_0^x = Ae^t + \frac{B}{4}e^{-2t}\Big|_0^x = \boxed{Ae^x + \frac{B}{4}e^{-2x}}$$

حل: (۱۲) $L^{-1}\left(\frac{1}{s}\,\text{Arctg}\,\frac{1}{2s+5}\right)$ $\qquad L\left(\int_0^x f\right) = \frac{L(f)}{s}$

$$= \int_0^x L^{-1}\Big(\underbrace{\text{Arctg}\,\frac{1}{2s+5}}_{t\ \text{ضرب}}\Big)dt$$

$$L^{-1}\left(\text{Arctg}\,\frac{1}{2s+5}\right) = -\frac{L^{-1}\left(\frac{\frac{2}{(2s+5)^2}}{1+\frac{1}{(2s+5)^2}}\right)}{x}$$

$$s+\frac{5}{2} = A$$

$$= \frac{-1}{x}L^{-1}\left(\frac{-2}{(2s+5)^2+1}\right) = -\frac{1}{4x}e^{-\frac{5}{2}x}L^{-1}\left(\frac{-2}{A^2+\frac{1}{4}}\right)$$

$$= \frac{-1}{x}L^{-1}\left(\frac{-2}{(2s+5)^2+1}\right) = -\frac{1}{4x}e^{-\frac{5}{2}x}L^{-1}\left(\frac{-2}{A^2+\frac{1}{4}}\right)$$

$$\left(2\left(s+\frac{5}{2}\right)\right)^2+1$$

$$4\left(\left(s+\frac{5}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{2e^{-\frac{5}{2}x}}{4x}L^{-1}\left(\frac{1}{A^2+\frac{1}{4}}\right) = \frac{2e^{-\frac{5}{2}x}}{4x}\times 2L^{-1}\left(\frac{1/2}{A^2+1/4}\right)$$

$$\frac{e^{-5/2\,x}}{x}\cdot\sin\frac{1}{2}x$$

$$L(xe^{2x}\sin 3x) = (-1)^1\left(L(e^{2x}\sin 3x)\right)'$$

$$= -\left(\frac{3}{s^2+9}\right)' = -\left(\frac{3}{(s-2)^2+9}\right)' = -\left(\frac{3}{s^2+4-4s+9}\right)'$$

$$= -\left(\frac{-3(2s+1)}{(s^2-4s+13)^2}\right)$$

مبحث تکمیلی برای اپراتور

- روش اپراتور معکوس:

برای محاسبهٔ جواب خصوصی معادله با ضرایب ثابت به کار می‌رود.

فرم کلی معادله → $y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\dots+a_1y'+a_0y=r(x)$

$D \to$ عملگر مشتق

$y' \to Dy=y' \quad \to \quad (\underbrace{D^n+a_{n-1}D^{n-1}+\dots+a_1D+a_0}_{F(D)})y=r(x)$

در این صورت → $y_p=\dfrac{1}{F(D)}r(x)$

* برای حل ابتدا معادلهٔ همگن $F(D)=0$ را حل می‌کنیم و ریشه‌های آن را به دست می‌آوریم. اگر λ_1 و λ_2 و ... ریشه‌های $F(D)$ باشند، در این صورت:

$$F(D)=(D-\lambda_1)(D-\lambda_2)\cdots(D-\lambda_{n-1})(D-\lambda_n)$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$y_p=\frac{1}{D-\lambda_1}\cdot\frac{1}{D-\lambda_2}\cdots\underbrace{\frac{1}{D-\lambda_{n-1}}\cdot\underbrace{\frac{1}{D-\lambda_n}r(x)}_{u}}_{v}$$

- اکنون برای حل $u=\dfrac{1}{D-\lambda_n}r(x)$ را در نظر گرفته و معادلهٔ آن را ($u'-\lambda_n u=r(x)$) حل می‌کنیم. سپس $v=\dfrac{1}{D-\lambda_{n-1}}u$ را در نظر گرفته و معادلهٔ آن را نیز حل می‌کنیم و به همین ترتیب پیش می‌رویم تا به $y_p=\dfrac{1}{D-\lambda_1}w$ برسیم که با حل معادلهٔ آن یعنی $y_p'-\lambda_1y_p=w$ تا y_p به دست آید.

- مثال:

$$y''-3y'+2y=e^x$$

$$\lambda^2-3\lambda+2=0 \longrightarrow \lambda_1=-1\,,\ \lambda_2=-2$$

$$\Rightarrow y_p=\frac{1}{D-1}\cdot\frac{1}{D-2}e^x$$

$$\to u=\frac{1}{D-2}e^x \longrightarrow u'-2u=e^x$$

* چون جواب خصوصی را می‌خواهیم، پس c را نمی‌نویسیم.

$$u=e^{-\int -2dx}\left[\int e^{\int -2\,dx}e^x dx\right]=e^{2x}(-e^{-x})=-e^x$$

$$\Rightarrow y_p=\frac{1}{D-1}\cdot u=\frac{1}{D-1}(-e^x)$$

$$y_p'-y_p=-e^x \Rightarrow y_p=e^{-\int -dx}\left[\int e^{\int -dx}\cdot(-e^x)\,dx\right]$$

$$=-xe^x$$

* فرمول های برای روش اپراتور معکوس:

۱- اگر $r(x)=e^{ax}$ باشد:

$$D\to a$$

$$\Rightarrow y_p=\frac{1}{F(D)}r(x)=\frac{1}{F(a)}r(x)$$

۲- اگر $r(x)$ تابعی از $\sin(ax+b)$ یا $\cos(ax+b)$ باشد:

$$D^2\to -a^2$$

$$\Rightarrow y_p=\frac{1}{F(D^2)}\sin(ax+b)=\frac{1}{F(a^2)}\sin(ax+b)$$

یا

$$y_p=\frac{1}{F(D^2)}\cos(ax+b)=\frac{1}{F(a^2)}\cos(ax+b)$$

مثال برای فرمول ۱:

$$y''+5y'+6y=e^{2x}$$

$$\rightarrow D^2+5D+6=0 \xrightarrow{a=2} \quad D=2$$

$$\Rightarrow y_p=\frac{1}{2^2+5(2)+6}e^{2x}=\frac{1}{20}e^{2x}$$

مثال دوم $\rightarrow \quad (D-1)(D-3)(D+2)y=e^{3x}$

$$y_p=\frac{1}{(3-1)(D-3)(3+2)}e^{3x}$$

*چون $D-3$ با قرار دادن a، صفر می‌شود، به همان صورت می‌نویسیم.

$$y_p=\frac{1}{10(D-3)}e^{3x} \rightarrow y'_p-3y_p=\frac{1}{10}e^{3x}$$

$$\Rightarrow y_p=e^{-\int -3dx}\left[\int e^{\int -3dx}\cdot\frac{1}{10}e^{3x}\,dx\right]=\frac{1}{10}xe^{3x}$$

مثال برای فرمول ۲:

$$y''+4y=\sin(3x)$$

$$D^2+4=0 \qquad y_p=\frac{1}{D^2-(a^2)}(\sin ax+b)$$

$$y_p=\frac{1}{D^2+4}\sin(3x) \xrightarrow{\text{طبق فرمول}} y_p=\frac{1}{-9+4}\sin(3x)=-\frac{1}{5}\sin(3x)$$

۳- $r(x)$ یک چندجمله‌ای درجه n باشد: $P_n(x)$

$$\Rightarrow y_p = \frac{1}{F(D)} P_n(x) = q_n(D) P_n(x)$$

که $q_n(D)$ چندجمله‌ای درجه n است که از تقسیم عدد ۱ بر $F(D)$ تا درجه n به دست می‌آید.

که این تقسیم تا زمانی که درجه خارج قسمت به n برسد ادامه دارد.

مثال: $y'' + 3y' + 2y = x^2 + x - 1$

$$\begin{cases} F(D) = D^2 + 3D + 2 \\ P(x) = x^2 + x - 1 \end{cases} \longrightarrow q(x) = \frac{1}{F(D)}$$

$$\Rightarrow y_p = q(D) P(x)$$

$$y_p = \frac{1}{2}(x^2 + x - 1) - \frac{3}{4} D (x^2 + x - 1) + \frac{7}{8} D^2 (x^2 + x + 1) =$$

$$y_p = \frac{1}{2}(x^2 + x - 1) - \frac{3}{4}(2x + 1) + \frac{7}{8}(2)$$

$$\begin{array}{l|l} 1 & D^2 + 3D + 2 \\ \hline -1 - \frac{3}{2}D - \frac{D^2}{2} & \frac{1}{2} - \frac{3}{4}D + \frac{7}{8}D^2 \\ \hline -\frac{3}{2}D - \frac{D^2}{2} & \\ \frac{3}{2}D + \frac{9}{4}D^2 + \frac{3}{4}D^3 & \\ \hline \frac{7}{4}D^2 + \frac{3}{4}D^3 & \\ -\frac{7}{4}D^2 - \frac{21}{8}D^3 - \frac{7}{8}D^4 & \\ \hline \end{array}$$

با ضرب در این می‌سازیم

تا همین جا کافی است. چون درجه خارج قسمت به ۲ رسید.

$$\Rightarrow q(D) = \frac{7}{8} D^2 - \frac{3}{4} D + \frac{1}{2}$$

۴- $r(x)$ حاصلضرب $e^{\alpha x}$ در $\sin(ax+b)$ یا $\cos(ax+b)$ باشد.

$$\Rightarrow y_p = \frac{1}{F(D)} e^{\alpha x} \sin(ax+b) = e^{\alpha x} \frac{1}{F(D+\alpha)} \sin(ax+b)$$

یا

$$y_p = \frac{1}{F(D)} e^{\alpha x} \cos(ax+b) = e^{\alpha x} \frac{1}{F(D+\alpha)} \cos(ax+b)$$

مثال :

$$y'' + 2y' + y = e^{3x}\sin(4x)$$

$$y_p = \frac{1}{D^2+2D+1} e^{3x}\sin(4x) \xrightarrow{a=3} y_p = e^{3x}\frac{1}{(D+3)^2+2(D+3)+1}\sin(4x)$$

$$y_p = e^{3x}\frac{1}{D^2+8D+16}\sin(4x)$$

$D^2 = -16$ باتوجه به فرمول قبلی (مثل رده ۲) :

$$\rightarrow y_p = e^{3x}\frac{1}{-16+8D+16}\sin(4x) = \frac{e^{3x}}{8}\frac{1}{D}\sin(4x)$$

$\frac{1}{D}$ = انتگرال

$$y_p = \frac{e^{3x}}{8}\left(-\frac{1}{4}\cos(4x)\right) = \frac{-e^{3x}}{32}\cos(4x)$$

۵- $r(x)$ حاصلضرب x در $\sin(ax+b)$ یا $\cos(ax+b)$ باشد.

$$\Rightarrow y_p = \frac{1}{F(D)}x\sin(ax+b) = x\frac{1}{F(D)}\sin(ax+b) - \frac{F'(D)}{(F(D))^2}\sin(ax+b)$$

یا

$$y_p = \frac{1}{F(D)}x\cos(ax+b) = x\frac{1}{F(D)}\cos(ax+b) - \frac{F'(D)}{(F(D))^2}\cos(ax+b)$$

۶- $r(x)$ جمع چند تابع باشد.

$$y_p = \frac{1}{F(D)}(u+v+\cdots+w) = \frac{1}{F(D)}u + \frac{1}{F(D)}v + \cdots + \frac{1}{F(D)}w$$

۱۴

شماره ۵ :

$$y'' + 4y = x\sin(3x) \xrightarrow{\text{مشخصه}} D^2 + 4 = 0$$

$$y_p = \frac{1}{D^2+4}\, x\sin(3x)$$

$$\xrightarrow{\text{با فرمول}} y_p = x\,\frac{1}{D^2+4}\sin(3x) - \frac{2D}{(D^2+4)^2}\sin(3x)$$

$$= x\,\frac{1}{-9+4}\sin(3x) - \frac{2D}{(-9+4)^2}\sin(3x)$$

$$= \frac{-x}{5}\sin(3x) - \frac{6}{25}\cos(3x)$$

شماره ۶ :

$$y''\ 4y = e^{5x} + \sin(0x)$$

$$y_p = \frac{1}{D^2+9}\left(e^{5x} + \sin(2x)\right)$$

$$y_p = \frac{1}{D^2+9}e^{5x} + \frac{1}{D^2+9}\sin(2x)$$

$$= \frac{1}{(5)^2+9}e^{5x} + \frac{1}{-4+9}\sin(2x)$$

$$= \frac{1}{34}e^{5x} + \frac{1}{5}\sin(2x)$$

« خلاصه مطالب »

* معادلات درجه اول :

۱ـ تفکیک پذیر : قابل تجزیه به حاصلضرب دو تابع یکی برحسب x و دیگری برحسب y. برای حل کافی است از طرفین انتگرال بگیریم.

۲ـ معادله همگن : روش حل این معادلات تغییر متغیر $y = ux$ است.

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$$

معادله همگن ←

$$dy = u\,dx + x\,du$$

اگر در معادله برفرض $m\,\frac{x}{y}$ (ضریب) باشد، معادله همگن است. $m\,\frac{y}{x}$ هم همینطور

ـ اگر $\frac{y}{x}$ بود از $y = ux$ حل می‌کنیم.

ـ اگر $\frac{x}{y}$ بود بهتر است از $x = uy$ استفاده کنیم.

۳ـ معادله شبه همگن :

$$y' = f\left(\frac{ax+by+c}{a'x+b'y+c'}\right)$$

$\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'} \Rightarrow$ دو معادله را دستگاه قرار می‌دهیم و x و y را به دست می‌آوریم. α مختصات x نقطه تلاقی و β مختصات y است.

$M\begin{vmatrix}\alpha\\ \beta\end{vmatrix} \Rightarrow$ $x = X + \alpha\,,\; dx = dX$ ، $y = Y + \beta\,,\; dy = dY$

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \Rightarrow ax + by = u$$

۴ـ معادلات به فرم ←

$$y' = f(ax + by + c)$$

برای حل از تغییر متغیر $u = ax + by + c$ استفاده می‌کنیم.

۵ـ معادلات کامل : $M\,dx + N\,dy = 0$

شرط کامل بودن → $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

برای حل از M (یا N) انتگرال گرفته تا u به دست آید. سپس با مشتق گرفتن از u نسبت به x (یا y)، N (یا M) به دست می‌آید که مطابقت می‌دهیم.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M\,,\quad \frac{\partial u}{\partial y} = N$$

②

۶- معادلات غیرکامل: $M\,dx + N\,dy = 0$ غیرکامل → $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$

با ضرب μ در معادلهٔ اصلی، معادلهٔ کامل به دست می‌آید که آن را حل می‌کنیم.

$$\Delta = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}$$

$\frac{\Delta}{N}$ تابعی برحسب x باشد. $\longrightarrow \mu = e^{\int \frac{\Delta}{N} dx}$

$\frac{\Delta}{M}$ تابعی برحسب y باشد. $\longrightarrow \mu = e^{-\int \frac{\Delta}{M} dy}$

* اگر معادله به فرم $y(\underbrace{\quad}_{f})dx + x(\underbrace{\quad}_{g})dy = 0$ باشد،

$$\Rightarrow \mu = \frac{1}{xy(f-g)}$$

* اگر معادله به صورتی باشد که توانهای متناظر باهم برابر باشند، مثل:

$$(3x^2y^3 + 5xy)\,dy + (4x^3y^2 - x^2)\,dx = 0$$

در این صورت عامل انتگرال‌ساز $\mu = x^{\alpha} y^{\beta}$ است.

که پس از ضرب در معادله α و β را محاسبه کرده و ...

۷- معادلات خطی مرتبهٔ اول: فرم → $y' + P(x)y = q(x)$

$$\text{حل} \rightarrow y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int e^{\int P(x)dx} \cdot q(x)\,dx + c\right]$$

* در برخی موارد می‌توان $y' = \frac{1}{x'}$ گرفت و سپس انتگرال‌ها را نسبت به y حساب کرد (در مواردی که P و q تابعی از y باشند).

* مواردی که به معادلات خطی تبدیل می‌شوند:

۱- معادله برنولی:

فرم کلی : $y' + P(x)y = q(x)y^n$

برای حل ابتدا در y^{-n} ضرب می‌کنیم. سپس $u = y^{1-n}$ درنظر می‌گیریم.

۲- تغییر متغیر: اگر مشتق تابعی که به عنوان متغیر جدید انتخاب می‌شود در داخل معادله دیفرانسیل وجود داشته باشد. مثلاً:

$x^2 y' \cos y = 2x \sin y - 1$

$\rightarrow u = \sin y \rightarrow u' = y' \cos y$

۳- معادله ریکاتی (با جواب خصوصی):

فرم : $y' + P(x)y = q(x)y^2 + g(x)$

$y = y_1 + \frac{1}{u}$

مثال : $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{u} \rightarrow y' = \underbrace{\frac{-1}{x^2}}_{y_1} - \frac{u'}{u^2}$

* در برنولی درصورتی که در دو طرف معادله x باشد، بهتر است از $\frac{1}{x}$ استفاده شود.

* معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ اول ـ درجهٔ n :

۱- y را بتوان برحسب x و y' نوشت :

حل $\to y' = p$

از طرفین نسبت به x مشتق می‌گیریم که یک معادلهٔ درجهٔ اول خطی برحسب p حاصل می‌شود.

مثال : $y = x(y')^2 + (y')^3 \to y' = p$ $\qquad \left(x' = \frac{1}{p}\right)$

$$\begin{cases} x = \dots \\ y = \dots \end{cases} \longrightarrow \underset{p}{\text{حذف}} \qquad \text{جواب عمومی}$$

۲- y' را برحسب x و y بتوان نوشت :

در این صورت برای یک معادلهٔ nام ، n معادلهٔ درجهٔ اول حاصل می‌شود. مثال :

$$\underbrace{x}_{a}p^2 - \underbrace{2xy}_{b}p + \underbrace{2y^2 - x^2}_{c} = 0$$

$$b' = \frac{b}{2} \quad , \quad \Delta' = b'^2 - ac \qquad \Rightarrow p = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a}$$

۳- x را بتوان برحسب y و x' محاسبه کرد.

همانند اولی تنها با این فرق که نسبت به y مشتق می‌گیریم.

٥٥

* معادلات درجهٔ ۲:

$y' = z$
$y'' = z'$

فاقد متغیر y (وابسته)

حالت خاص

فاقد متغیر x (مستقل)

$y' = z$
$y'' = z \cdot z'$

- خطی مرتبهٔ دوم:

فرم: $y'' + P(x)y' + q(x)y = r(x)$

$$y = y_h + y_p$$

عمومی معادلهٔ همگن ← y_h ؛ y_p → خصوصی معادلهٔ غیرهمگن

۱- ضرایب ثابت ($ay'' + by' + cy = 0$)

فرم جواب:

$\Delta > 0$: $y_h = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$

$\Delta = 0$: $y_h = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}$

$\Delta < 0$: $y_h = c_1 e^{\alpha x}\cos(\beta x) + c_2 e^{\alpha x}\sin(\beta x)$

روش های محاسبهٔ y_h

۲- لژاندر $(a(Ax+B)^2y'' + b(Ax+B)y' + cy = 0)$

تغییر متغیر → $u = \ln(Ax+B)$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = y'_u \cdot \frac{A}{Ax+B}$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'_u}{du}\cdot\frac{du}{dx} = \frac{A^2}{(Ax+B)^2}(y''_u - y'_u)$$

۳- کاهش مرتبه (جواب خصوصی): $y'' + P(x)y' + q(x)y = 0$: فرم

$$y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

$$y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int P(x)dx} dx$$

ضریب y'

⑥

$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

- روش‌های محاسبهٔ y_p :

۱- ضرایب نامعین:

۱- $r(x) = ae^{\alpha x} \longrightarrow y_p = Ae^{\alpha x}$

۲- $r(x) = a\sin(\beta x+\gamma)$ یا $r(x) = a\cos(\beta x+\gamma) \longrightarrow y_p = A\cos(\beta x+\gamma) + B\sin(\beta x+\gamma)$

۳- $r(x) = P_n(x)$ (چندجمله‌ای نسبت به x) $\longrightarrow y_p = Ax^n + Bx^{n-1} + \cdots + Cx + D$

اگر عدد ثابت بود یعنی $r(x) = 1 \longrightarrow y_p = A$

اگر یعنی A در y_h ، c بود باز هم باید ضرب کنیم.

۴- $r(x) = P_n(x)e^{\alpha x} \longrightarrow y_p = (Ax^n + Bx^{n-1} + \cdots + Cx + D)e^{\alpha x}$

۵- $r(x) = P_n(x)\sin(\beta x+\gamma)$ یا $r(x) = P_n(x)\cos(\beta x+\gamma) \longrightarrow y_p = (Ax^n + \cdots + Bx + C)\cos(\beta x+\gamma) + (Dx^n + \cdots + Ex + F)\sin(\beta x+\gamma)$

۶- $r(x) = ae^{\alpha x}\sin(\beta x+\gamma)$ یا $r(x) = ae^{\alpha x}\cos(\beta x+\gamma) \longrightarrow y_p = Ae^{\alpha x}\sin(\beta x+\gamma) + Be^{\alpha x}\cos(\beta x+\gamma)$

۷- $r(x) = P_n(x)e^{\alpha x}\cos(\beta x+\gamma)$ یا $r(x) = P_n(x)e^{\alpha x}\sin(\beta x+\gamma) \longrightarrow y_p = (Ax^n + \cdots + Bx + C)e^{\alpha x}\cos(\beta x+\gamma) + (Dx^n + \cdots + Ex + F)e^{\alpha x}\sin(\beta x+\gamma)$

۸- $r(x) = r_1(x) \pm r_2(x) \pm \cdots \pm r_n(x) \longrightarrow y_p = y_{p_1} + y_{p_2} + \cdots + y_{p_n}$

مهم * صرف‌نظر از ضرایب، هیچ یک از جملات y_h و y_p نباید یکسان باشند. اگر باشند، y_p را در x^m ضرب می‌کنیم که m کوچکترین عدد طبیعی است که سبب می‌شود تا جملات y_h و y_p یکسان نباشند.

۲- تغییر پارامتر:

اگر $\rightarrow y_h = c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n$

$$\underset{\text{رونسکین}}{w(y_1, y_2, \ldots, y_n)} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \cdots & y_n'' \\ \vdots & \vdots & & \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

$$u_1 = \int \frac{w_1}{w}\,dx$$

$$u_2 = \int \frac{w_2}{w}\,dx$$

$$\vdots$$

$$u_n = \int \frac{w_n}{w}\,dx$$

* w_i همان رونسکین است ولی در ستون i اُم آن بردار $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ r(x) \end{pmatrix}$ جایگزین شده است.

$$\Rightarrow y_p = y_1u_1 + y_2u_2 + \cdots + y_nu_n$$

۷

۳- اپراتور معکوس :

$$\underbrace{(D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0)}_{F(D)}\, y = r(x)$$

$$y_p = \frac{1}{F(D)}\, r(x)$$

$\lambda_1 , \lambda_2 , \ldots$ - ریشه های معادله همگن باشند :

$$y_p = \frac{1}{D-\lambda_1}\,\frac{1}{D-\lambda_2}\cdots r(x)$$

۱- $r(x) = e^{ax}$ ←

$$D = a$$

$$y_p = \frac{1}{F(a)}\, r(x)$$

۲- $r(x) \to \sin(ax+b)$

یا $\to \cos(ax+b)$ ←

$$D^2 \to -a^2$$

$$y_p = \frac{1}{F(a^2)} \sin(ax+b)$$

یا

$$y_p = \frac{1}{F(a^2)} \cos(ax+b)$$

← حتما باید D^2 در مخرج باشد تا بتوان با a^2 عوضش کرد .

۳- $r(x) = P_n(x)$ ←

چندجمله ای

$$y_p = Q_n(D)\, P_n(x)$$

که $Q_n(D)$ چندجمله ای درجه n است که از تقسیم 1 بر $F(D)$ به دست می آید و تقسیم تا زمانی ادامه دارد که درجه خارج قسمت به n برسد .

۴- $r(x) = e^{\alpha x}\sin(ax+b)$ ←

یا $r(x) = e^{\alpha x}\cos(ax+b)$

$$y_p = e^{\alpha t}\,\frac{1}{F(D+\alpha)} \sin(ax+b)$$

یا

$$y_p = e^{\alpha t}\,\frac{1}{F(D+\alpha)} \cos(ax+b)$$

۵- $r(x) = x \sin(ax+b)$ ←

یا $r(x) = x\cos(ax+b)$

$$y_p = x\,\frac{1}{F(D)} \sin(ax+b) - \frac{F'(D)}{(F(D))^2} \sin(ax+b)$$

یا

$$y_p = x\,\frac{1}{F(D)} \cos(ax+b) - \frac{F'(D)}{(F(D))^2} \cos(ax+b)$$

$\sec x + \tan x = 1$

۶- جمع چند تابع $= r(x)$ ← $y_p = \dfrac{1}{F(D)}(u+v+\cdots) = \dfrac{1}{F(D)}u + \dfrac{1}{F(D)}v + \cdots$

* حل معادلات درجه n همگن با ضرایب ثابت :

پس از تشکیل معادله مشخصه ۳ حالت پیش می آید .

۱- معادله دارای m ریشه حقیقی متمایز است (λ_1 و λ_2 و λ_3 و ...) :

$$y_h = c_1e^{\lambda_1 x} + c_2e^{\lambda_2 x} + \cdots + c_me^{\lambda_m x}$$

۲- معادله مشخصه دارای ریشه λ تکرار شده از مرتبه m باشد ، در این صورت به جواب عمومی جمله زیر را اضافه می کنیم .

$$c_1e^{\lambda x} + c_2xe^{\lambda x} + \cdots + c_mx^{m-1}e^{\lambda x}$$

۳- معادله مشخصه دارای ریشه های مختلط $\alpha \pm i\beta$ باشد ، در این صورت به جواب عمومی جمله

$$c_1e^{\alpha x}\cos(\beta x) + c_2e^{\alpha x}\sin(\beta x) + c_3xe^{\alpha x}\cos(\beta x) + c_4xe^{\alpha x}\sin(\beta x) +$$

$$\cdots + c_{2m-1}x^{m-1}e^{\alpha x}\cos(\beta x) + c_{2m}x^{m-1}e^{\alpha x}\sin(\beta x)$$

* چنانچه جمع ضرایب صفر باشد یکی از ریشه ها ۱ است و برای محاسبه بقیه ریشه ها عبارت را $(\lambda-1)$ تقسیم می کنیم . مثلاً : $\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = 0$

* چنانچه جمع ضرایب توان های زوج و فرد باهم برابر باشد ، یکی از ریشه ها ۱- است و برای محاسبه بقیه ریشه ها بر $(\lambda+1)$ تقسیم می کنیم . مثلاً : $\lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6 = 0$

* معادلهٔ لژاندر مرتبهٔ n همگن :

$u = \ln(Ax+B)$

$(Ax+B)\,y' = A\,y'_u \quad \rightarrow Dy$

$(Ax+B)^2 y'' = A^2\left(y''_u - y'_u\right) \quad \rightarrow D(D-1)y$

$(Ax+B)^3 y''' = A^3\left(y'''_u - 3y''_u + 2y'_u\right) \quad \rightarrow D(D-1)(D-2)y$

$(Ax+B)^4 y^{(4)} = A^4\left(y^{(4)}_u - 6y'''_u + 11y''_u - 6y'_u\right) \rightarrow D(D-1)(D-2)(D-3)y$

* تعریف لاپلاس :

$$L\{f(x)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(x)\,dx$$

\- فرمول های لاپلاس :

$L[c] = \dfrac{c}{s} \quad , \quad L^{-1}\left(\dfrac{c}{s}\right) = c$

عدد ثابت

$L\left[e^{\alpha t}\right] = \dfrac{1}{s-\alpha} \quad , \quad L^{-1}\left[\dfrac{1}{s-\alpha}\right] = e^{\alpha t}$

$L\left[\cos\alpha t\right] = \dfrac{s}{s^2+\alpha^2} \quad , \quad L^{-1}\left[\dfrac{s}{s^2+\alpha^2}\right] = \cos\alpha t$

$L\left[\sin\alpha t\right] = \dfrac{\alpha}{s^2+\alpha^2} \quad , \quad L^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2+\alpha^2}\right] = \dfrac{1}{\alpha}\sin\alpha t$

$L\left[\cosh\alpha t\right] = \dfrac{s}{s^2-\alpha^2} \quad , \quad L^{-1}\left[\dfrac{s}{s^2-\alpha^2}\right] = \cosh\alpha t$

$L\left[\sinh\alpha t\right] = \dfrac{\alpha}{s^2-\alpha^2} \quad , \quad L^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2-\alpha^2}\right] = \dfrac{1}{\alpha}\sinh\alpha t$

$\dfrac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$

در صورتی که n کسری باشد.

$L\left[t^n\right] = \dfrac{n!}{s^{n+1}} \quad , \quad L^{-1}\left[\dfrac{1}{s^{n+1}}\right] = \dfrac{t^n}{n!}$

$L\left[t^n\right] = \dfrac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}} \quad , \quad L^{-1}\left[\dfrac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}\right] = t^n$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

(15)

تابع گاما $\rightarrow \Gamma_{(\alpha)} = \int_0^\infty e^{-u} u^{\alpha-1} du$

$$\Gamma_{(\alpha+1)} = \alpha!$$

تابع پله‌ی واحد
یا u $H(t-a)$ $\begin{cases} 0 & 0<t<a \\ 1 & t>a \end{cases}$

$$L\left[H(t-a)\right] = \frac{e^{-as}}{s} \quad , L^{-1}\left[\frac{e^{-as}}{s}\right] = H(t-a)$$

تابع ضربه
$\delta(t-a)$ $\begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} & a<t<a+\varepsilon \\ 0 & 0<t<a \ , \ t>a+\varepsilon \end{cases}$

$$L\left[\delta(t-a)\right] = e^{-as} \quad , L^{-1}\left[e^{-as}\right] = \delta(t-a)$$

$\xrightarrow{a=0}$ $L\left[\delta(t)\right] = 1 \quad , \quad L^{-1}\left[1\right] = \delta(t)$ $\leftarrow$ مهم*

*قضایای لاپلاس:

انتقال روی محور sها $\rightarrow L\left[e^{at} f_{(t)}\right] = F(s-a) \ , L^{-1}\left[F(s-a)\right] = e^{at} f_{(t)}$

انتقال روی محور tها $\rightarrow L\left[H(t-a) f_{(t-a)}\right] = e^{-as} F_{(s)}$

$, \ L^{-1}\left[e^{-as} F_{(s)}\right] = H(t-a) f_{(t-a)}$

تفسیر مشتق لاپلاس: $L\left[t^n f_{(t)}\right] = (-1)^n F_{(s)}^{(n)}$

$, \ L^{-1}\left[(-1)^n F_{(s)}^{n}\right] = t^n f_{(t)}$

قضیهٔ لاپلاس مشتق $\rightarrow$ $$L\left[f^{(n)}\right]=s^{n}L[f]-s^{n-1}f_{(0)}-s^{n-2}f'_{(0)}-\cdots-f_{0}^{(n-1)}$$

$$L[y']=sL[y]-y_{(0)}$$

$$L[y'']=s^{2}L[y]-sy_{(0)}-y'_{(0)}$$

$$L[y''']=s^{3}L[y]-s^{2}y_{(0)}-sy'_{(0)}-y''_{(0)}$$

قضیهٔ لاپلاس انتگرال $\rightarrow$ $$L\left[\int_0^x f_{(t)}\,dt\right]=\frac{L[f_{(t)}]}{s}=\frac{F_{(s)}}{s}$$

توان s برابر با تعداد انتگرال گیری است. و

$$L^{-1}\left[\frac{F_{(s)}}{s^{n}}\right]=\int_0^x\int_0^x\cdots\int_0^x L^{-1}\left(F_{(s)}\right)(dt)^{n}$$

قضیهٔ انتگرال لاپلاس $\rightarrow$ $$L\left[\frac{f_{(t)}}{t}\right]=\int_s^\infty F_{(s)}\,ds$$

$$L^{-1}\left[\int_s^\infty F_{(s)}\,ds\right]=\frac{f_{(t)}}{t}$$

قضیهٔ پیچش $\rightarrow$ $$L\left[f_{(t)}*g_{(t)}\right]=F_{(s)}G_{(s)}$$

پیچش $\rightarrow$ $$f_{(t)}*g_{(t)}=\int_0^t f_{(u)}\,g_{(t-u)}\,du$$

- اگر لاپلاس معکوس توابع ln ، Arctan یا Arccot خواسته باشد:

$$L^{-1}\left[F_{(s)}\right]=\frac{-L^{-1}\left[F'_{(s)}\right]}{t}$$

Arctg, Arccot, ln

- کاربردهای لاپلاس:

حل معادلات انتگرالی ← ابتدا انتگرال موجود در معادله را به فرم پیچش در می‌آوریم. سپس از طرفین لاپلاس می‌گیریم و از حل یک معادله جبری $L[y]$ را می‌یابیم و از آن لاپلاس معکوس می‌گیریم تا y به دست آید.

حل معادلات دیفرانسیل ← از طرفین معادله لاپلاس می‌گیریم و از حل یک معادله جبری $L[y]$ را می‌یابیم و از آن لاپلاس معکوس می‌گیریم تا y می‌یابیم شود.

حل دستگاه معادلات دیفرانسیل ← برای حل یک دستگاه n معادله n مجهول، از معادلات دیفرانسیل، از تک تک معادلات دستگاه لاپلاس می‌گیریم. یک دستگاه n معادله n مجهول خطی حاصل می‌شود. از حل این دستگاه لاپلاس توابع مجهول را به دست می‌آوریم و سپس از آنها لاپلاس معکوس می‌گیریم.

13

توابع چند ضابطه‌ای :

$$f(t)\begin{cases} g_1(t) & 0<t<a_1 \\ g_2(t) & a_1<t<a_2 \\ g_3(t) & a_2<t<a_3 \\ \vdots & \vdots \\ g_n(t) & t>a_{n-1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(t) = g_1(t) + \left(g_2(t)-g_1(t)\right) H(t-a_1) + \left(g_3(t)-g_2(t)\right) H(t-a_2) + \cdots$$

$$\cdots + \left(g_n(t) - g_{n-1}(t)\right) H(t-a_{n-1})$$

* مراحل حل یک معادله به روش سری‌ها:

$$P_1(x)y'' + P_2(x)y' + P_3(x)y = 0$$

اگر $P_1(x_0)\neq 0$ ، x_0 را نقطهٔ عادی می‌گوئیم . در غیر این صورت غیرعادی است .

اگر $P_1(x_0)=0$ و $(x-x_0)\dfrac{P_2(x)}{P_1(x)}$, $(x-x_0)^2\dfrac{P_3(x)}{P_1(x)}$ در نقطهٔ x_0 تحلیلی باشند ، نقطهٔ غیرعادی منظم است .

فرم جواب برای نقطهٔ عادی $\rightarrow \quad y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$

فرم جواب برای نقطهٔ غیرعادی منظم $\rightarrow \quad y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^{n+r}$

(طبق جزوه دانشگاه درسی)

- مراحل کار حل سری برای نقطه عادی:

۱- از جواب، مشتق گرفته و در معادله صدق می‌دهیم.

۲- ضرایب ثابت $\sum$ ها را به داخل $\sum$ می‌بریم.

۳- به کمک قانون تغییر حدود توان‌های x را یکسان می‌نماییم.

قانون تغییر حدود: $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} x^{n-1} = \sum_{n=-2} c_{n+2} x^{n+2}$

۴- حدود $\sum$ ها را براساس بیشترین مقدار n یکسان می‌نماییم.

۵- برحسب توان‌های صعودی x را مرتب کرده، کلیه $\sum$ ها را به یک $\sum$ تبدیل می‌کنیم.

۶- کلی ضرایب را متحد صفر قرار می‌دهیم و ضرایبی که دارای بزرگترین اندیس می‌باشند را برحسب ضرایب دیگر محاسبه می‌کنیم.

۷- به کمک رابطه بازگشتی همه ضرایب سری را برحسب c_0 و c_1 محاسبه نموده و در معادله جایگزین می‌کنیم.

روش حل برای نقطه غیرعادی منظم:

۸- پس از آنکه در مرحله ۶ ضریب توان‌های x را متحد صفر قرار دادیم، ضریب کمترین توان x معادله کملی می‌باشد که با فرض $c_0 \neq 0$ دو مقدار برای r به دست می‌آید. سپس در مرحله ۷ به کمک رابطه بازگشتی کلیه ضرایب را برحسب c_0 به دست می‌آوریم و در فرم جواب قرار می‌دهیم تا جواب معادله به فرم $y = c_0 F(x, r)$ تبدیل شود. حال با توجه به مقادیر r ۳ حالت پیش می‌آید:

① - معادله کملی دارای دو ریشه r_1 و r_2 باشد و $r_1 - r_2 > 0$ باشد، در این حالت $c_0 = 1$ و دو جواب خصوصی از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$y_1 = F(x, r_1) \quad , \quad y_2 = F(x, r_2)$$

② - معادله کملی دارای ریشه مضاعف $r_1 = r_2$ باشد، در این حالت $c_0 = 1$ و دو جواب خصوصی به صورت زیر است:

$$y_1 = F(x, r_1) \quad , \quad y_2 = \frac{\partial F}{\partial r}(x, r_1)$$

۴- معادله دارای دو ریشه r_1 و r_2 باشد، و فرض شود $r_1 < r_2$ ، چنانچه $r - r_1$ در مخرج که $F(x,r)$ موجود نباشد همانند حالت اول عمل می‌کنیم.

اما اگر $r - r_1$ در مخرج کسر موجود باشد، C_0 را برابر $r - r_1$ فرض می‌کنیم. در این صورت:

$$y = C_0 F(x,r) = \underbrace{(r - r_1)\, F(x,r)}_{G(x,r)}$$

و جواب خصوصی به صورت زیر است:

$$y_1 = G(x, r_1) \qquad y_2 = \frac{\partial G}{\partial r}(x, r_1)$$

بیان دیگر (خلاصه شده):

① r_1, r_2 دو ریشه ، $r_1 - r_2 \notin Z \rightarrow$

$$y_1 = \sum_{n=0} a_n x^{n+r_1}$$

$$y_2 = \sum_{n=0} b_n x^{n+r_2}$$

② $r_1 = r_2 = r$

$$y_1 = \sum a_n x^{n+r}$$

$$y_2 = y_1 \operatorname{Ln} x + \sum_{n=0} b_n x^{n+r}$$

③ $r_1 - r_2 \notin Z$

$r_1 > r_2$

$$y_1 = \sum a_n x^{n+r_1} \, ,$$

$$y_2 = K y_1 \operatorname{Ln} x + \sum b_n x^{n+r_2}$$

* برای حل ابتدا معادلهٔ مشخصهٔ $r^2 + (P_0 - 1) r + q_0 = 0$ را حل کرده و سپس جواب را تشخیص می‌دهیم

فرم کلی $P(x) y'' + Q(x) y' + r(x) y = 0$

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

* رابطه‌های کاربردی:

$$\frac{1}{2}\operatorname{Ln} y = y^{\frac{1}{2}}$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + c$$

$$u = \tan y \rightarrow du = \sec^2 y\, dy$$

$$(\sin 3u)' = 3\cos 3u$$

$$(e^u)' = u' e^u$$

$$\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\tan x}$$

$$(\operatorname{Arc}\sin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$(\operatorname{Arc}\cos u)' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$(\operatorname{Arc}\tan u)' = \frac{u'}{1+u^2}$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 u} = \int (1+\tan^2 u) = \tan u$$

$$\int \sec x\, dx = \operatorname{Ln}\left|\sec x + tg\, x\right|$$

$$\int \operatorname{cosec} x\, dx = -\operatorname{Ln}\left|\operatorname{cosec} + tg\, x\right|$$

جزبجز $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

- تابع مناسب تابعی است که در آن درجهٔ چندجمله‌ای صورت $(P(s))$ کمتر از درجهٔ چندجمله‌ای مخرج $(Q(s))$ باشد.

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

* اگر تابعی مناسب نبود، ابتدا $P(s)$ را بر $Q(s)$ تقسیم می‌کنیم و سپس از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم:

$$F(s) = \underbrace{\hat{P}(s)}_{\text{خارج قسمت تقسیم}} + \frac{\overbrace{R(s)}^{\text{باقیماندهٔ تقسیم}}}{Q(s)}$$

جایی که صورت صفر شود: صفرها یا همان ریشه‌های صورت

جایی که مخرج صفر شود: قطب‌ها یا همان ریشه‌های مخرج

* تجزیه به کسرهای جزئی:

ابتدا باید تابع مناسب باشد، سپس با توجه به قطب‌ها عمل می‌کنیم:

۱- قطب‌های ساده:

$$\boxed{Q(s) = \prod_{j=1}^{n} (s - p_j)}$$

قطب ساده است $\rightarrow$ $j = ۱, ۲, ۳, \ldots, n$

مثلاً قطب‌ها = ۳-، ۲-، ۱- $\rightarrow \quad Q(s) = (s+1)(s+2)(s+3)$

$$\boxed{F(s) = \sum_{j=1}^{n} \frac{K_j}{s - p_j}}$$

$$\rightarrow \quad F(s) = \frac{K_1}{s+1} + \frac{K_2}{s+2} + \frac{K_3}{s+3}$$

$$\boxed{K_j = (s - p_j) F(s) \Big|_{s = p_j}}$$

$$F(s) = \frac{s^2+3s+5}{(s+1)(s+2)(s+3)} \rightarrow K_1 = \cancel{(s+1)} \frac{s^2+3s+5}{\cancel{(s+1)}(s+2)(s+3)} \Bigg|_{s=-1} = \frac{(-1)^2 + 3(-1) + 5}{(-1+2)(-1+3)} = \frac{3}{2}$$

۲- قطب‌های مکرر:

فرض کنیم مخرج تابع $F(s)$ چندجمله‌ای زیر باشد:

$$Q(s) = (s-p_1)^{n_1}(s-p_2)^{n_2}\cdots(s-p_r)^{n_r}$$

بنابراین تابع $F(s)$ دارای یک قطب مرتبهٔ n_1 در p_1، یک قطب مرتبهٔ n_2 در p_2 و ... و یک قطب مرتبهٔ n_r در p_r است.

$K_{ij} \longrightarrow$ i = متناظر با قطب p_i ، j = متناظر با مخرج نظیر به آن

گسترش به صورت کسرهای جزئی تابع $F(s)$ چنین است:

قطب 1 — مرتبهٔ مخرج

$$F(s) = \frac{K_{11}}{s-p_1} + \frac{K_{12}}{(s-p_1)^2} + \cdots + \frac{K_{1n_1}}{(s-p_1)^{n_1}}$$

$$+ \frac{K_{21}}{s-p_2} + \frac{K_{22}}{(s-p_2)^2} + \cdots + \frac{K_{2n_2}}{(s-p_2)^{n_2}}$$

$$+ \cdots\cdots$$

$$+ \frac{K_{r1}}{s-p_r} + \frac{K_{r2}}{(s-p_r)^2} + \cdots + \frac{K_{rn_r}}{(s-p_r)^{n_r}}$$

$$\Rightarrow \quad K_{1,n_1} = (s-p_1)^{n_1} F(s)\Big|_{s=p_1}$$

$$K_{1,n_1-1} = \frac{d}{ds}\left[(s-p_1)^{n_1} F(s)\right]\Big|_{s=p_1}$$

$$K_{1,n-2} = \frac{1}{2!}\frac{d^2}{ds^2}\left[(s-p_1)^{n_1} F(s)\right]\Big|_{s=p_1}$$

*** قطب های مختلط:**

در قطب های مختلط اگر $P_1=\sigma_1+j\omega_1$ یک قطب باشد، مزدوج آن نیز قطب خواهد بود. یعنی $P_2=\sigma_1-j\omega_1$

$$F(s)=\frac{s^2+3s+7}{\Big[\underbrace{(s+2)^2+4}_{\pm 2j}\Big](s+1)}=\frac{K_1}{s+2-j2}+\frac{\overline{K_1}}{s+2+j2}+\frac{K_3}{s+1}$$

$$\rightarrow K_1=(s+2-j2)\,F(s)\Big|_{s=-2+j2}=\frac{s^2+3s+7}{(s+2+j2)(s+1)}\Big|_{s=-2+j2}=\frac{(-2+j2)^2+3(-2+j2)+7}{j4(-1+j2)}$$

$$=j\frac{1}{4}=\boxed{\frac{1}{4}e^{j90}}$$

$$K_3=(s+1)\frac{s^2+3s+7}{(s+2)+4}\Big|_{s=-1}=1$$

نتیجه $\longrightarrow$

$$K_1=|K_1|e^{j\measuredangle K_1}$$

$$K_2=|K_1|e^{-j\measuredangle K_1}=\overline{K_1}$$

$$K_1e^{(\alpha+j\beta)t}+K_2e^{(\alpha-j\beta)t}=|K_1|e^{\alpha t}\left[e^{j(\beta t+\measuredangle K_1)}+e^{-j(\beta t+\measuredangle K_1)}\right]$$

$$=2|K_1|e^{\alpha t}\cos(\beta t+\measuredangle K)$$ * مهم

$$\frac{1}{2}e^{-2t}\sin 2t+e^{-t}$$

مثال برای قطب های مکرر:

$$F_{(s)} = \frac{1}{(s+1)^3 s^2}$$

(دو قطب مکرر) $P_1 = -1$

(یک قطب مکرر) $P_2 = 0$

$$\rightarrow F_{(s)} = \frac{K_{11}}{s+1} + \frac{K_{12}}{(s+1)^2} + \frac{K_{13}}{(s+1)^3} + \frac{K_{21}}{s} + \frac{K_{22}}{s^2}$$

برای به دست آوردن K_{11} ، K_{12} و K_{13} : $(s+1)^3 F_{(s)} = \frac{1}{s^2}$

$$K_{13} = \left[\frac{1}{s^2}\right]_{s=-1} = 1$$

$$K_{12} = \frac{d}{ds} \frac{1}{s^2}\bigg|_{s=-1} = \frac{-2}{s^3}\bigg|_{s=-1} = 2$$

$$K = \frac{1}{2!} \frac{d^2}{ds^2} \frac{1}{s^2}\bigg|_{s=-1} = \frac{1}{2} \frac{6}{s^4}\bigg|_{s=-1} = 3$$

برای به دست آوردن K_{21} و K_{22} :

$$\longrightarrow s^2 F_{(s)} = \frac{1}{(s+1)^3}$$

$$K_{22} = \frac{1}{(s+1)^3}\bigg|_{s=0} = 1$$

$$K_{21} = \frac{d}{ds} \frac{1}{(s+1)^3}\bigg|_{s=0} = -3$$

$$\rightarrow F_{(s)} = \frac{3}{s+1} + \frac{2}{(s+1)^2} + \frac{1}{(s+1)^3} + \frac{-3}{s} + \frac{1}{s^2}$$

$$\Rightarrow f_{(t)} = 3e^{-t} + 2te^{-t} + \frac{1}{2}t^2 e^{-t} - 3 + t$$

تجزیهٔ کسرها:

مثال :
$$\frac{1}{s^2(s+3)} = \frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{C}{s+3} = \frac{As+3A+Bs^2+3Bs+Cs^2}{s^2(s+3)}$$
$$= \frac{(B+C)s^2 + (A+3B)s + 3A}{s^2(s+3)}$$

$$\begin{cases} B+C=0 & \rightarrow C = \frac{1}{9} \\ A+3B=0 & \rightarrow B = \frac{-1}{9} \\ 3A=1 & \rightarrow A = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{s^2(s+3)} = \frac{\frac{1}{3}}{s^2} + \frac{-\frac{1}{9}}{s} + \frac{\frac{1}{9}}{s+3}$$

مثال :
$$\frac{s}{(s^2+1)(s^2+4)} = \frac{As+B}{(s^2+1)} + \frac{Cs+D}{(s^2+4)}$$
$$\frac{(As+B)(s^2+4) + (Cs+D)(s^2+1)}{(s^2+1)(s^2+4)}$$

$$\rightarrow As^3 + 4As + Bs^2 + 4B + Cs^3 + Cs + Ds^2 + D = s$$
$$s^3(\underbrace{A+C}_{0}) + s^2(\underbrace{B+D}_{0}) + s(\underbrace{4A+C}_{1}) + \underbrace{D+4B}_{0} = s$$

$$\begin{cases} A+C=0 \\ 4A+C=1 \end{cases} \rightarrow A = \frac{1}{3} \ , \ C = -\frac{1}{3} \ , \ B=0 \ , \ D=0$$

$$\rightarrow = \frac{(\frac{1}{3})s}{(s^2+1)} + \frac{(-\frac{1}{3})s}{(s^2+4)} = \frac{\cos(t) - \cos(2t)}{3}$$

مثال :
$$\frac{4s^2+64}{s^3(s^2+12)} = \frac{A}{s^3} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s} + \frac{Ds+E}{s^2+12}$$

در مخرج s^5 تفصیل می‌شود، پس در صورت A و B و C و D و E قرار می‌گیرد.

$$xy''=y'\ln\left(\frac{y'}{x}\right)$$

راه حل $\rightarrow$ حالت خاص (فاقد y) $\rightarrow y'=z \rightarrow xz'=z\ln\left(\frac{z}{x}\right)$

$$z'=\frac{z\ln\left(\frac{z}{x}\right)}{x} \xrightarrow[u=\frac{z}{x}]{\text{همگن درجه اول}} u+xu'=\frac{u\cancel{x}\ln\left(\frac{u\cancel{x}}{\cancel{x}}\right)}{\cancel{x}}$$

$$z=ux,\ z'=u+xu'$$

$$\Rightarrow u+xu'=u\ln u \longrightarrow \frac{du}{dx}x=u\left(\ln(u)-1\right)$$

$$\rightarrow \int\frac{\overset{dt}{\cancel{du}}}{\cancel{u}\underbrace{(\ln(u)-1)}_{t}}=\int\frac{dx}{x} \rightarrow \ln\left(\ln(u)-1\right)=\ln x+\ln c_1$$

$$\Rightarrow \ln(u)-1=c_1x \longrightarrow \ln(u)=\boxed{c_1x+1}$$

$$\xrightarrow{u=\frac{z}{x}} \ln\left(\frac{z}{x}\right)=c_1x+1 \xrightarrow{e} \frac{z}{x}=e^{1+c_1x} \rightarrow \frac{y'}{x}=e^{1+c_1x}$$

$y'=xe^{1+c_1x} \rightarrow$ تفکیک‌پذیر $\rightarrow \int dy=\int xe^{1+c_1x}dx$

$$\boxed{y=\frac{x}{c_1}e^{1+c_1x}-\frac{1}{c_1^2}e^{1+c_1x}+c_2}$$

چندجمله‌ای	نمایی
x	e^{1+c_1x}
1	$+\ \frac{1}{c_1}e^{1+c_1x}$
0	$-\ \frac{1}{c_1^2}e^{1+c_1x}$

$$y'' + e^{y}(y')^{3} = 0$$

ص $\longrightarrow$ حالت خاص (x نشده) $\longrightarrow z = y' \rightarrow zz' = y''$

$$zz' + e^{y}(z)^{3} = 0 \longrightarrow z' = \frac{-e^{y}(z)^{3}}{z} \rightarrow z' = -e^{y}(z)^{2}$$ تفکیک‌پذیر

$$\frac{dz}{dy} = -e^{y}(z)^{2} \longrightarrow \int \frac{-dz}{z^{2}} = \int e^{y}\,dy$$

$$\rightarrow \frac{1}{z} = e^{y} + c_1 \xrightarrow{z=y'} \frac{1}{y'} = e^{y} + c_1 \longrightarrow y' = \frac{1}{e^{y} + c_1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^{y} + c_1} \longrightarrow$$ تفکیک‌پذیر $$\int (e^{y} + c_1)\,dy = \int dx$$

$$\Rightarrow \boxed{e^{y} + c_1 y = x + c_2}$$

$$y''' - y'' - y' + y = 0 \rightarrow \lambda^{3} - \lambda^{2} - \lambda + 1 = 0$$

جمع ضرایب ۰ است. پس یکی از ریشه‌ها ۱ بوده و برای محاسبهٔ ریشه‌های دیگر عبارت را بر $(\lambda - 1)$ تقسیم می‌کنیم.

$$\begin{array}{r|l} \lambda^{3} - \lambda^{2} - \lambda + 1 & \lambda - 1 \\ \cline{2-2} -\lambda^{3} + \lambda^{2} & \lambda^{2} - 1 \\ \hline -\lambda + 1 & \\ \lambda - 1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\rightarrow \lambda^{2} - 1 = 0 \longrightarrow \lambda = \pm 1$$

* λ همان اپراتور D است.

$$\Rightarrow y_h = c_1 e^{x} + c_2 x e^{x} + c_3 e^{-x}$$

$$\begin{cases} x^2y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 0 \\ y_1 = x \end{cases}$$

$$\rightarrow y'' - \frac{(x+2)}{x}y' + \frac{(x+2)}{x^2}y = 0 \qquad , \quad y_h = c_1y_1 + c_2y_2$$

$$y_2 = y_1\int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int -\frac{(x+2)}{x}dx} dx = x\int \frac{1}{x^2} e^{\int (1+\frac{2}{x})dx} dx$$

$$\Rightarrow y_2 = x\int \frac{1}{\cancel{x^2}} e^x (\cancel{x^2})\, dx = xe^x$$

$$\Rightarrow \boxed{y_h = c_1x + c_2xe^x}$$

$$y^{(5)} - 3y^{(4)} + 2y^{(3)} = 0$$

خطی مرتبه ۵
ضرایب ثابت

معادله مشخصه $\rightarrow \lambda^5 - 3\lambda^4 + 2\lambda^3 = 0$

$$\lambda^3(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = 0$$

$$\lambda_{1,2,3} = 0$$

$$\lambda_{4,5} \longrightarrow b' = -\frac{3}{2} \quad , \quad \Delta = \frac{9}{4} - 2 = \frac{1}{4} \quad \begin{cases} \nearrow \lambda_4 = \dfrac{3/2 + 1/2}{1} = 2 \\ \searrow \lambda_5 = \dfrac{3/2 - 1/2}{1} = 1 \end{cases}$$

$$\rightarrow y_h = c_1e^{0x} + c_2xe^{0x} + c_3x^2e^{0x} + c_4e^{2x} + c_5e^x$$

$$\boxed{y_h = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4e^{2x} + c_5e^x}$$

$$\begin{cases} (x-1)y'' - xy' + y = 0 \\ y_1 = x \end{cases} \quad \rightarrow \quad y'' - \frac{x}{(x-1)} y' + \frac{y}{(x-1)} = 0$$

$$y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

$$y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int P(x)dx} dx = x \int \frac{1}{x^2} e^{-\int \frac{x}{(x-1)} dx} dx = x \int \frac{1}{x^2} e^{-\int \frac{x-1+1}{(x-1)} dx} dx$$

$$= x \int \frac{1}{x^2} e^{x + \ln(x-1)} dx = x \int \frac{1}{x^2} e^x (x+1) dx = x\left(\int x^{-1} e^x dx - \int x^{-2} e^x dx\right)$$

$$\int \underbrace{x^{-1}}_{u} \underbrace{e^x dx}_{dv} = uv - \int v du = x^{-1} e^x - \int e^x (-x^{-2}) dx$$

$$\Rightarrow y_2 = x\left(\cancel{\int x^{-2} e^x dx} + x^{-1} e^x - \cancel{\int x^{-2} e^x dx}\right) = e^x$$

$$\Rightarrow y_h = c_1 x + c_2 e^x$$

$$y^{(5)} - 8y'' = 0 \quad \rightarrow \lambda^5 - 8\lambda^2 = 0 \quad \rightarrow \lambda^2(\lambda^3 - 8) = 0$$

$$\underbrace{\lambda^2}_{\lambda_{1,2}} \underbrace{(\lambda - 2)}_{\lambda_3} \underbrace{(\lambda^2 + 2\lambda + 4)}_{\lambda_{4,5}} = 0 \qquad \begin{cases} \lambda_{1,2} = 0 \\ \lambda_3 = +2 \\ \lambda_{4,5} \rightarrow b' = \frac{2}{2} = 1 \ , \ \Delta = 1 - 4 = -3 \end{cases}$$

$$\lambda_{4,5} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{1} = \frac{-1 \pm \sqrt{3} i}{1} \qquad \alpha = -1, \quad \beta = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow y_h = c_1 e^{0x} + c_2 x e^{0x} + c_3 e^{2x} + c_4 e^{-x} \cos(\sqrt{3} x) + c_5 e^{-x} \sin(\sqrt{3} x)$$

$$x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$$

حالت خاص لژاندر $\quad A = 1 \,,\, B = 0 \rightarrow u = \ln x$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = y'_u \cdot \frac{1}{x}$$

$$y'' = \frac{dy'_u}{dx} = \frac{-1}{x^2} y'_u + \frac{1}{x} \Big(\underbrace{\frac{dy'_u}{du}}_{y''_u} \cdot \underbrace{\frac{du}{dx}}_{\frac{1}{x}} \Big) = \frac{1}{x^2} \left(y''_u - y'_u \right)$$

جایگذاری
$$\longrightarrow \frac{1}{\cancel{x^2}} \cancel{x^2} \left(y''_u - y'_u \right) - 2\cancel{x} \frac{1}{\cancel{x}} y'_u + 2y = 0$$

$$y''_u - y'_u - 2y'_u + 2y = 0 \rightarrow y''_u - 3y'_u + 2y = 0$$ ضرایب ثابت

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \rightarrow b' = -\frac{3}{2} \rightarrow \Delta = \frac{9}{4} - 2 = \frac{1}{4} > 0$$

$$\lambda = \frac{\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}}}{1} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2} \begin{cases} \rightarrow \lambda_1 = 2 \\ \rightarrow \lambda_2 = 1 \end{cases}$$

$$y_h = c_1 e^{2u} + c_2 e^{u} \xrightarrow{u = \ln x} y_h = c_1 e^{2\ln x} + c_2 e^{\ln x}$$

$$\boxed{y_h = c_1 x^2 + c_2 x}$$

$$y^{(4)} + 2y'' + y = 0 \longrightarrow \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0 \longrightarrow (\lambda^2 + 1)^2 = 0$$

$$\lambda^2 + 1 = 0 \rightarrow \lambda^2 = -1 \rightarrow \lambda = \pm i \quad \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 1 \end{cases}$$ ریشه مضاعف مختلط

$$y_h = c_1 e^{\cancel{0x}} \cos x + c_2 e^{\cancel{0x}} \sin x + c_3 x e^{\cancel{0x}} \cos x + c_4 x e^{\cancel{0x}} \sin x$$

$$\boxed{y_h = c_1 \cos x + c_2 \sin x + c_3 x \cos x + c_4 x \sin x}$$

$$x^2y'' + xy' - 9y = 0$$

حالت خاص لژاندر $\rightarrow A = 1 \ , B = 0$

$$u = \ln x$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = y'_u \cdot \frac{1}{x}$$

$$y'' = \frac{dy'_u}{dx} = \frac{dy'_u}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{-1}{x^2} y'_u + \frac{1}{x}\left(\underbrace{\frac{dy'_u}{du}}_{y''_u} \cdot \underbrace{\frac{du}{dx}}_{\frac{1}{x}}\right) = \frac{1}{x^2}\left(y''_u - y'_u\right)$$

$$\xrightarrow{\text{جایگذاری}} \cancel{x^2} \frac{1}{\cancel{x^2}}\left(y''_u - y'_u\right) + \cancel{x}\frac{1}{\cancel{x}} y'_u - 9y = 0$$

$$y''_u - y'_u + y'_u - 9y = 0 \rightarrow y''_u - 9y = 0$$ ضرایب ثابت

$$\lambda^2 - 9 = 0 \longrightarrow \lambda = \pm 3$$

$$y_h = c_1 e^{3u} + c_2 e^{-3u} \xrightarrow{u = \ln x}$$

$$\boxed{y_h = c_1 x^3 + \frac{c_2}{x^3}}$$

$$y''' + 6y'' + 11y' + 6y = 0$$

جمع ضرایب توان های زوج = جمع ضرایب توان های فرد

$$\lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6 = 0$$

پس یکی از ریشه ها ۱- است و آن را بر $\lambda+1$ تقسیم می کنیم.

$$\begin{array}{l|l} \lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6 & \lambda + 1 \\ \cline{2-2} \underline{-\lambda^3 - \lambda^2} & \lambda^2 + 5\lambda + 6 \\ 5\lambda^2 + 11\lambda + 6 & \\ \underline{-5\lambda^2 - 5\lambda} & \\ 6\lambda + 6 & \\ \underline{6\lambda + 6} & \\ 0 & \end{array}$$

$$\rightarrow \lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0 \qquad (\lambda+2)(\lambda+3) = 0$$

$$\lambda_2 = -2 \ , \ \lambda_3 = -3$$

$$\Rightarrow y_h = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{-3x}$$

$$y'' - 5y' + 6y = 0$$

معادله مشخصه $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \rightarrow a=1 \;,\; b=-5 \;,\; c=6$

$$b' = \frac{b}{2} = -\frac{5}{2} \rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{b'^2 - ac} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

چون $\Delta > 0$ پس دو ریشه حقیقی متمایز داریم.

$$\lambda = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta}}{a} = \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 3 \end{cases}$$

$$\boxed{y_h = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}}$$

$$y'' + 2y' + 5y = 0$$

معادله مشخصه $\rightarrow \lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0 \rightarrow a=1 \;,\; b=2 \;,\; c=5$

$$b' = \frac{b}{2} = 1 \rightarrow \Delta = (b')^2 - ac = -4$$

$\Delta < 0$ پس ریشه ها مختلط داریم.

$$\rightarrow \lambda = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta}}{a} = \frac{-1 \pm 2\sqrt{-1}}{1} = \begin{cases} y_1 = -1 + 2i \\ y_2 = -1 - 2i \end{cases} \qquad i^2 = \sqrt{-1}$$

$\alpha = -1$

$\beta = 2$

$$\Rightarrow y_h = c_1 e^{-x} \cos(2x) + c_2 e^{-x} \sin(2x)$$

$$y'''' - 81y = 0$$

معادله مشخصه $\rightarrow \lambda^4 - 81 = 0 \rightarrow \lambda^4 = 81 \rightarrow \lambda^2 = \pm 9$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_{1,2} = \pm 3 \\ \lambda_{3,4} = \pm 3i \rightarrow \alpha = 0,\; \beta = 3 \end{cases}$$

$$y_h = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x} + c_3 \underbrace{\cancel{e^{0x}}}_{1} \cos(3x) + c_4 \underbrace{\cancel{e^{0x}}}_{1} \sin(3x)$$

$$x = y' \cos(y')$$

$$y' = u \longrightarrow x = u\cos u \xrightarrow{\text{نسبت به y مشتق}} x' = u'\cos u - u u' \sin u = \frac{1}{u}$$

$$\Rightarrow u'(\cos u - u\sin u) = \frac{1}{u} \Rightarrow u' = \frac{1}{u(\cos u - u\sin u)}$$

$$\frac{du}{dy} = \frac{1}{u\cos u - u^2 \sin u}$$ تفکیک‌پذیر

$$\int (u\cos u - u^2 \sin u)\, du = \int dy$$

$$\Rightarrow u\sin u + \cos u + u^2\cos u - 2u\sin u - 2\cos u = y + c$$

$$\begin{cases} y + c = u^2\cos u - u\sin u - \cos u \\ x = u\cos u \end{cases} \longrightarrow \text{حذف } u$$

$$\int (u\cos u)\, du = \longrightarrow$$

مشتق u	انتگرال $\cos u$
u	$\cos u$
1	$\sin u$
0	$-\cos u$

$$\int (u^2 \sin u)\, du = \longrightarrow$$

مشتق u^2	انتگرال $\sin u$
u^2 +	$\sin u$
$2u$ −	$-\cos u$
2 +	$-\sin u$
0	$\cos u$

$$(2x+1)^2 y'' + 4(2x+1)y' + 5y = 0$$

لژاندر مرتبه دوم $\rightarrow \quad u = \ln(2x+1)$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = y'_u \cdot \frac{2}{2x+1}$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = y'_u \cdot \frac{-4}{(2x+1)^2} + \frac{2}{2x+1}\left(\underbrace{\frac{dy'_u}{du}}_{y''_u} \cdot \underbrace{\frac{du}{dx}}_{\frac{2}{2x+1}}\right)$$

$$\Rightarrow y'' = \frac{4}{(2x+1)^2}\left(y''_u - y'_u\right)$$

حال جایگذاری می‌کنیم $\rightarrow \quad (2x+1)^2 \frac{4}{(2x+1)^2}\left(y''_u - y'_u\right) + 4(2x+1)\frac{2}{2x+1} y'_u + 5y = 0$

$$4y''_u - 4y'_u + 8y'_u + 5y = 0 \longrightarrow 4y''_u - 4y'_u + 5y = 0$$ ضرایب ثابت

معادله مشخصه $\rightarrow \quad 4\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0 \quad \rightarrow b' = \frac{-4}{2} = -2 \quad \rightarrow \Delta = 4 - 20 = -16 < 0$

$$\lambda = \frac{-2 \pm 4\sqrt{-1}}{4} = -\frac{1}{2} \pm 1 \longrightarrow \begin{array}{l} \alpha = -1/2 \\ \beta = 1 \end{array}$$

$$\rightarrow y_h = c_1 e^{-\frac{1}{2}u}\cos u + c_2 e^{-\frac{1}{2}u}\sin u \xrightarrow{u = \ln(2x+1)}$$

$$y_h = c_1 e^{-\frac{1}{2}\ln(2x+1)} \cdot \cos(\ln(2x+1)) + c_2 e^{-\frac{1}{2}\ln(2x+1)} \cdot \sin(\ln(2x+1))$$

$$\Rightarrow y_h = c_1 (2x+1)^{-\frac{1}{2}} \cos(\ln(2x+1)) + c_2 (2x+1)^{-\frac{1}{2}} \sin(\ln(2x+1))$$

$$(x-۱)^۲ y'' - ۲(x-۱)y' + ۳y = ۰$$

لژاندر مرتبه دوم $\rightarrow u = \ln(x-۱)$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{۱}{x-۱} \cdot y'_u$$

$$y'' = \frac{dy'_u}{dx} = \frac{-۱}{(x-۱)^۲} \cdot y'_u + \frac{۱}{x-۱}\left(\underbrace{\frac{dy'_u}{du}}_{y''_u} \cdot \underbrace{\frac{du}{dx}}_{\frac{۱}{x-۱}}\right) = \frac{۱}{(x-۱)^۲}\left(y''_u - y'_u\right)$$

$$\rightarrow \cancel{(x-۱)^۲}\, \frac{۱}{\cancel{(x-۱)^۲}}\left(y''_u - y'_u\right) - ۲\cancel{(x-۱)}\, \frac{۱}{\cancel{x-۱}}\, y'_u + ۳y = ۰$$

$$y''_u - y'_u - ۲y'_u + ۳y = ۰ \rightarrow y''_u - ۳y'_u + ۳y = ۰$$

معادله مشخصه $\rightarrow \lambda^۲ - ۳\lambda + ۳ = ۰ \rightarrow b' = -\frac{۳}{۲} \rightarrow \Delta = \frac{۹}{۴} - ۳ = \frac{-۳}{۴}$

$$\lambda = \frac{+\frac{۳}{۲} \pm \sqrt{-\frac{۳}{۴}}}{۱} = +\frac{۳}{۲} \pm \frac{\sqrt{۳}}{۲} i \nearrow \begin{array}{l} \alpha = \frac{۳}{۲} \\ \beta = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \end{array}$$

$$y_h = c_۱ e^{\frac{۳}{۲}u} \cos\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}u\right) + c_۲ e^{\frac{۳}{۲}u} \sin\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}u\right)$$

$$\xrightarrow{u = \ln(x-۱)} y_h = c_۱ (x-۱)^{\frac{۳}{۲}} \cos\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\ln(x-۱)\right) + c_۲ (x-۱)^{\frac{۳}{۲}} \sin\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\ln(x-۱)\right)$$

مثال: $y''+۳y'-۴y=\sin(۲x)$

$$D^۲+۳D-۴=۰$$

$$\rightarrow y_p=\frac{۱}{D^۲+۳D-۴}\sin(۲x)\xrightarrow{D^۲=-a^۲}=\frac{۱}{-۴+۳D-۴}\sin(۲x)$$

* حال باید در مخرج $D^۲$ تولید کنیم که برای این کار صورت و مخرج را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم.

$$y_p=\frac{۱}{۳D-۸}\times\frac{۳D+۸}{۳D+۸}\sin(۲x)=\frac{۳D+۸}{۹D^۲-۶۴}\sin(۲x)$$

$$=\frac{۳D+۸}{۹(-۴)-۶۴}\sin(۲x)=\frac{-۱}{۱۰۰}(۳D+۸)\sin(۲x)$$

$$=\frac{-۳}{۱۰۰}\underbrace{D\sin(۲x)}_{\text{مشتق}}-\frac{۸}{۱۰۰}\sin(۲x)=\frac{-۶}{۱۰}\cos(۲x)-\frac{۸}{۱۰۰}\sin(۲x)$$

$$L^{-۱}\left[\frac{۱}{s^{۲}+۵s+۲}\right]=L^{-۱}\left[\frac{۱}{\left(s+\frac{۵}{۲}\right)^{۲}-\frac{۲۵}{۴}+۲}\right]=e^{-\frac{۵}{۲}t}\left(\frac{۲}{\sqrt{۱۷}}\sinh\frac{\sqrt{۱۷}}{۲}t\right)$$

$$L^{-۱}\left[\frac{s}{s^{۲}+۲s+۵}\right]=L^{-۱}\left[\frac{s+۱-۱}{(s+۱)^{۲}-۱+۵}\right]=e^{-t}L^{-۱}\left[\frac{s-۱}{s^{۲}+۴}\right]$$

$$=e^{-t}\left[L^{-۱}\left[\frac{s}{s^{۲}+۴}\right]-L^{-۱}\left[\frac{۱}{s^{۲}+۴}\right]\right]=e^{-t}\left(\cos(۲t)-\frac{۱}{۲}\sin(۲t)\right)$$

$$L\left[H(t-۱)(t^{۲}+۵t-۳)\right]=L\left[H(t-۱)\left((t-۱)^{۲}+۷(t-۱)+۳\right)\right]$$

$$=e^{-s}L\left[t^{۲}+۷t+۳\right]=e^{-s}\left(\frac{۲}{s^{۳}}+\frac{۷}{s^{۲}}+\frac{۳}{s}\right)$$

$$L\left[H\left(t-\frac{\pi}{۲}\right)\sin t\right]=L\left[H\left(t-\frac{\pi}{۲}\right)\cos\left(t-\frac{\pi}{۲}\right)\right]=$$

$\sin t = \cos t-\frac{\pi}{۲}$

$\sin t = \sin(t-\pi)$

$$=e^{-\frac{\pi}{۲}s}L[\cos t]=e^{-\frac{\pi}{۲}s}\frac{s}{s^{۲}+۱}$$

$$L\left[H(t-\pi)\sin t\right]=-L\left[H(t-\pi)\sin(t-\pi)\right]=-e^{-\pi s}L[\sin t]$$

$$=-e^{-\pi s}\frac{۱}{s^{۲}+۱}$$

$$f_{(t)}=\begin{cases} 5t+1 & 0<t<1 \\ 3t-2 & 1<t<3 \\ t^2+4t+3 & t>3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f_{(t)}=(5t+1)+\big((3t-2)-(5t+1)\big)H(t-1)+\big((t^2+4t+3)-(3t-2)\big)H(t-3)$$

$$=(5t+1)+\big(-2(t-1)-5\big)H(t-1)+\big((t-3)^2+7(t-3)+17\big)H(t-3)$$

$$L\left[f_{(t)}\right]=\frac{5}{s^2}+\frac{1}{s}+e^{-s}\left(\frac{-2}{s^2}+\frac{-5}{s}\right)+e^{-3s}\left(\frac{2}{s^3}+\frac{7}{s^2}+\frac{17}{s}\right)$$

$$L^{-1}\left[\frac{e^{-2s}}{s^2+9}\right]=$$

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+9}\right]=\frac{1}{3}\sin(3t)\Rightarrow \quad =H(t-2)\,\frac{1}{3}\sin\big(3(t-2)\big)$$

$$L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+5s+4}\right]=$$

$$L^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+\frac{5}{2})^2-\frac{25}{4}+4}\right]=L^{-1}\left[\frac{(s+5/2)-5/2}{(s+5/2)^2-(\frac{3}{2})^2}\right]=e^{-\frac{5}{2}t}\left(L^{-1}\left[\frac{s}{s^2-(\frac{3}{2})^2}\right]\right.$$

$$\left.-L^{-1}\left[\frac{5/2}{s^2-(\frac{3}{2})^2}\right]\right)$$

$$=e^{-\frac{5}{2}t}\left(\cosh\left(\frac{3}{2}t\right)-\frac{5}{2}\times\frac{2}{3}\sinh\left(\frac{3}{2}t\right)\right.$$

$$L^{-1}\left[\frac{s}{(s^2-9)^2}\right]=$$

$$L\left[t^n f_{(t)}\right]=(-1)^n F_{(s)}^{(n)}$$

$$L^{-1}\left[F_{(s)}^{(n)}\right]=(-1)^n f_{(t)}$$

چون کل عبارت مخرج به توان ۲ رسیده است، پس از قضیهٔ مشتق لاپلاس استفاده می‌کنیم. زیرا نشان دهندهٔ این است که از لاپلاس مشتق گرفته شده است.

با انتگرال گیری از $F'_{(s)}$، $F_{(s)}$ را می‌یابیم و سپس لاپلاس معکوس می‌گیریم.

$$\int\frac{s}{(s^2-9)^2}ds=\frac{1}{2}\int\frac{2s}{(s^2-9)^2}ds=\frac{1}{2}\int\frac{1}{u^2}du=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{u}\right)=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s^2-9}\right)$$

$$u=s^2-9$$

$$du=2s$$

$$\Rightarrow L^{-1}\left[\frac{s}{(s^2-9)^2}\right]=(-1)^1\left(-\frac{1}{2}\right)L^{-1}\left(\frac{1}{s^2-9}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\sinh(3t)\right)$$

$$L\left[t^2\,\delta(t-\pi)\right]=$$

$$=(-1)^2\Big(L\left[\delta(t-\pi)\right]\Big)''=\left(e^{-\pi s}\right)''=\pi^2 e^{-\pi s}$$

$$L\left[\frac{\sinh_{(t)}}{t}\right]=$$

$$L\left[\frac{f_{(t)}}{t}\right]=\int_s^\infty F_{(s)}ds$$

$$=\int_s^\infty\frac{1}{s^2-1}ds=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{s-1}{s+1}\right)\Bigg|_s^\infty=\frac{1}{2}\cancel{\ln(1)}^{\,0}-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{s-1}{s+1}\right)$$

$$L\left[\int_0^x f_{(t)}dt\right]=\frac{F_{(s)}}{s}$$

$$L\left[\frac{\sin t}{t}\right]=\int_s^\infty\frac{1}{s^2+1}ds=\mathrm{Arc}\tan(s)\Big|_s^\infty=\frac{\pi}{2}-\mathrm{Arc}\tan(s)=\mathrm{Arc}\cot(s)$$

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2-4)}\right]=$$

هرجا ضریب کلی s در مخرج بود، به معنای انتگرال گیری است. ←
(در تبدیل معکوس)

$$= L^{-1}\left[\frac{1}{(s^2-4)}\Big/ s\right]=$$

$$\Rightarrow L = \int_0^x \frac{1}{2}\sinh(2t) = \frac{1}{4}\cosh(2t)$$

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s^2-4}\right]=\frac{1}{2}\sinh(2t)$$

$$L^{-1}\left[\ln\left(\frac{s}{s+1}\right)\right]=$$

برای توابع Ln و Arctg، Arccot →

$$L^{-1}=\frac{-L^{-1}\left[F'(s)\right]}{t}$$

$$=L^{-1}\left[\ln(s)-\ln(s+1)\right]=-L^{-1}\left[\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}\right]\Big/ t=\frac{-(1-e^{-t})}{t}=\frac{e^{-t}-1}{t}$$

$$L^{-1}\left[\operatorname{Arc\,cot}(s)\right]=\frac{-L^{-1}\left[\frac{-1}{1+s^2}\right]}{t}=\frac{L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right]}{t}=\frac{\sin t}{t}$$

$$t^2 * \sin(3t)=\int_0^t u^2\sin(3t-3u)\,du=\int_0 \frac{u^2}{3}\cos(3t-3u)+\frac{2u}{9}\sin(3t-3u)$$

$$-\frac{2}{27}\cos(3t-3u)\Big|_0^t$$

$$f(t)*g(t)=\int_0^t f(u)\,g(t-u)\,dt=$$

$$=\frac{t^2}{3}-\frac{2}{27}+\frac{2}{27}\cos(3t)$$

$$L\left[\int_0^t\frac{\sin u}{u}\,du\right]=?$$

$$L\left[f(t)*g(t)\right]=F(s)\,G(s)$$

$$=L\left[\frac{\sin t}{t}*1\right]=\frac{1}{s}\operatorname{Arc\,cot}(s)$$

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s^2(s+3)}\right]=$$

از تجزیه کسرها استفاده می‌کنیم.

$$\frac{1}{s^2(s+3)}=\frac{K_{11}}{s^2}+\frac{K_{12}}{s}+\frac{K_{21}}{s+3}$$

$$K_{12}=\frac{1}{s^2(s+3)}\times s^2\Big|_{s=0}=\frac{1}{3}$$

$$K_{11}=\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2(s+3)}\times s^2\right)\Big|_{s=0}=-\frac{1}{9}$$

$$K_{21}=\frac{1}{s^2(s+3)}(s+3)\Big|_{s=-3}=\frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow L^{-1}\left[\frac{1}{3s^2}-\frac{1}{9s}+\frac{1}{9(s+3)}\right]=\frac{1}{3}t-\frac{1}{9}+\frac{e^{-3t}}{9}$$

$$L^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+1)(s^2+4)}\right]=L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\times\frac{1}{s^2+4}\right]=\cos(t) * \frac{\sin(2t)}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^t \sin(2u)\cos(t-u)\,du$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^t\left[\sin(u+t)+\sin(3u-t)\right]du=\frac{1}{4}\left(-\cos(u+t)-\frac{1}{3}\cos(3u-t)\right)\Big|_0^t$$

$$=\frac{1}{4}\left(-\cos(2t)-\frac{1}{3}\cos(2t)+\cos t+\frac{1}{3}\cos(t)\right)=$$

$$=\frac{\cos t-\cos(2t)}{3}$$

***

$$L^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+1)(s^2+4)}\right]$$

روش دیگر حل با استفاده از تجزیه کسرها

$$= L^{-1}\left[\frac{As+B}{s^2+1} + \frac{Cs+D}{s^2+4}\right]$$

$$\Rightarrow As^3 + 4As + Bs^2 + 4B + Cs^3 + Cs + Ds^2 + D = s$$

$$s^3(A+C) + s^2(B+D) + s(4A+C) + (4B+D) = s$$

$$\begin{cases} 4B+D=0 \\ 4A+C=1 \\ B+D=0 \\ A+C=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4A+C=1 \\ A+C=0 \quad \times -1 \end{cases} \Rightarrow A = \tfrac{1}{3}, \; C = -\tfrac{1}{3}$$

$$B = 0, \; D = 0$$

$$\Rightarrow = L^{-1}\left[\frac{\frac{1}{3}s}{s^2+1} + \frac{\left(-\frac{1}{3}s\right)}{s^2+4}\right] = \frac{1}{3}\cos t - \frac{1}{3}\cos(2t)$$

$$L^{-1}\left[\frac{A}{s^3} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s} + \frac{Ds+E}{s^2+12}\right] =$$

چون ریشه‌های مختلط دارد به این صورت نوشته می‌شود.

$$= A\frac{t^2}{2} + Bt + C + D\cos(\sqrt{12}\,t) + \frac{E}{\sqrt{12}}\sin(\sqrt{12}\,t)$$

$$y(t) = 2t^2 + \int_0^t \sin(4u)\, y(t-u)\, du$$

$$\rightarrow y = 2t^2 + \sin 4t * y$$

$$L[y] = \frac{4}{s^3} + \frac{4}{s^2+16} L[y]$$

$$\left(1 - \frac{4}{s^2+16}\right) L[y] = \frac{4}{s^3}$$

$$\frac{s^2+12}{s^2+16} L[y] = \frac{4}{s^3} \qquad \Rightarrow L[y] = \frac{4s^2+64}{s^3(s^2+12)}$$

حال کافیست از L[y] لاپلاس معکوس بگیریم.

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 2y = \delta(t-\pi) \\ y(0) = y'(0) = 1 \end{cases}$$

$$L[y''] + 2L[y'] + 2L[y] = L[\delta(t-\pi)]$$

$$s^2 L[y] - s\,\underbrace{y(0)}_{1} - \underbrace{y'(0)}_{1} + 2sL[y] - 2\underbrace{y(0)}_{1} + 2L[y] = e^{-\pi s}$$

$$L[y](s^2+2s+2) = e^{-\pi s} + s + 3$$

$$\Rightarrow L[y] = \frac{e^{-\pi s} + s + 3}{(s^2+2s+2)} = \underbrace{\frac{e^{-\pi s}}{(s^2+2s+2)}}_{A} + \underbrace{\frac{s+3}{(s^2+2s+2)}}_{B}$$

$$B = \frac{(s+1)+2}{(s+1)^2+1} = e^{-t} L^{-1}\left[\frac{s+2}{s^2+1}\right] = e^{-t}(\cos t + 2\sin t)$$

$$A = H(t-\pi)\, e^{-(t-\pi)} \sin(t-\pi)$$ ← نکته دارد *