سرفصل ها:

فصل اول: معادلات دیفرانسیل مرتبه اول :

فصل دوم: معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم :

فصل سوم: تبدیلات لاپلاس :

یادآوری انتگرال:

اگر u یک تابع مشتق پذیر باشد آنگاه:

$$1-\int x^n\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+c$$

$$2-\int u^n\,du=\frac{u^{n+1}}{n+1}+c$$

$$3-\int \frac{dx}{u}=\ln|u|+c$$

$$4-\int e^{kx}\,dx=\frac{1}{k}e^{kx}+c$$

$$5-\int a^{kx}\,dx=\frac{1}{k\ln a}a^{kx}+c$$

$$6-\int \sin kx\,dx=-\frac{1}{k}\cos kx+c$$

$$7-\int \cos kx\,dx=\frac{1}{k}\sin kx+c$$

$$8-\int (1+tg^2 kx)\,dx=\frac{1}{k}tg\,kx+c$$

$$9-\ \int (1+\cot^2 kx)\,dx = -\frac{1}{k}\,\mathrm{cotg}\,kx + c$$

$$10-\ \int \mathrm{tg}\,kx\,dx = -\frac{1}{k}\ln|\cos kx| + c$$

$$11-\ \int \mathrm{cotg}\,kx\,dx = \frac{1}{k}\ln|\sin kx| + c$$

$$12-\ \int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\,\mathrm{Arctg}\,\frac{u}{a} + c$$

$$13-\ \int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \mathrm{Arc}\sin\frac{u}{a} + c$$

$$14-\ \int \frac{du}{a^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right| + c$$

مثال:
$$\int x^7\,dx = \frac{x^{7+1}}{7+1} + c = \frac{x^8}{8} + c$$

تکنیک های انتگرال گیری

۱- روش تغییر متغیر (جانشانی)

هرگاه یک عبارت و ضریبی از یک دیفرانسیل کنار هم باشند از روش تغییر متغیر استفاده می شود و در این حالت عبارت مورد نیاز را u در نظر می گیریم، سپس

از آن دیفرانسیل گرفته و در عبارت زیر انتگرال جایگزین می‌کنیم و با استفاده از فرمولهای انتگرال گیری انتگرال را محاسبه می‌کنیم.

مثال:

انتگرال های زیر را محاسبه کنید.

$$1-\ \int (x^5-3x^2+1)^4 (5x^4-6x)\,dx =$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u = x^5-3x^2+1 \\ du = (5x^4-6x)\,dx \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int u^4\,du = \frac{u^5}{5}+c = \frac{(x^5-3x^2+1)^5}{5}+c$$

$$2-\ \int \frac{(x^2+1)\,dx}{x^3+3x-4} \Rightarrow \begin{cases} u = x^3+3x-4 \\ du = (3x^2+3)\,dx \\ du = 3(x^2+1)\,dx \\ \frac{du}{3} = (x^2+1)\,dx \end{cases}$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{du}{du} \ln|u| + c = \frac{1}{3}\ln|x^3+3x-4|+c$$

۲- روش جزء به جزء:

اگر u و v دو تابع مشتق پذیر باشند آنگاه فرمول زیر را فرمول انتگرال گیری به روش جزء به جزء نامیم:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

در این روش قسمتی از عبارت زیر انتگرال را در u در نظر می گیریم و بقیه عبارت را در dv در نظر گرفته سپس با استفاده از فرمول فوق انتگرال را محاسبه می کنیم. روش جزء به جزء برای محاسبه ی انتگرال هایی کاربرد دارد که عبارت زیر انتگرال به صورت حاصل ضرب دو تابع از توابع زیر باشد:

(لگاریتمی - وارون مثلثاتی - جبری - مثلثاتی - نمائی) $\log_n$ $\ln x$

در این صورت عبارتی را در u در نظر می گیریم که در ترتیب فوق سمت راست دیگری باشد و بقیه عبارات را در dv در نظر می گیریم.

مثال ۶:

انتگرال های زیر را محاسبه کنید:

$$1-\int \underbrace{\overset{\text{جبری}}{x}}_{u}\ \underbrace{\overset{\text{نمایی}}{e^{2x}}\ dx}_{dv} \Longrightarrow \begin{cases} u = x \xrightarrow{\text{دیفرانسیل}} du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = e^{2x}\, dx \xrightarrow{\text{انتگرال}} \int dv = \int x^4 dx \end{cases}$$

$$2-\int \underbrace{x^4}_{\text{جبری}}\ \underbrace{\ln x}_{\text{لگاریتمی}}\ dx \Longrightarrow \begin{cases} u = \ln x \xrightarrow{\text{دیفرانسیل}} du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = x^4 . dx \xrightarrow{\text{انتگرال}} \int dv = \int x^4 dx \end{cases}$$

$$V = \frac{x^5}{5}$$

$$\Longrightarrow \int x^4 \ln x\, dx = \ln x . \frac{x^5}{5} = \int \frac{\overset{x^4}{\cancel{x^5}}}{5} . \frac{dx}{\cancel{x}}$$

$$= \ln x\ \frac{x^5}{5} - \frac{1}{5} . \frac{x^3}{5} + C$$

فصل اول:

معادلات دیفرانسیل مرتبه‌ی اول

تعریف (معادله دیفرانسیل) هر معادله که شامل متغیر مستقل x و متغیر وابسته‌ی y و مشتقات آن ($y', y'', y''', \ldots, y^{(n)}$) باشد را معادله دیفرانسیل می‌نامیم که شکل کلی آن به صورت

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \quad \text{و یا} \quad f(x, y, y', y'', y''', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

می‌باشد.

مثال:

1. $y' - 4xy = 0$
2. $y'' - 3y' + y = 0$
3. $x^3 y''' + xy'' - e^{3x+}$
4. $(y'')^2 - 7xy' = \sin(x+2y)$

تعریف (مرتبه معادله دیفرانسیل): بزرگترین تکرار مشتق در معادله دیفرانسیل را مرتبه معادله دیفرانسیل می‌نامیم.

تعریف (درجه معادله دیفرانسیل) بالاترین توان بزرگترین تکرار مشتق (مرتبه) را درجه معادله دیفرانسیل می‌نامیم.

مثال: مرتبه هر یک از معادلات زیر را بیابید.

a) $4xy'' - 7y' + xy^2 = 0$ مرتبه ۲ - درجه ۱

b) $3(y''')^2 - 6y''' + 8e^y = 0$ مرتبه ۳ - درجه ۲

c) $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) - 4\frac{dy}{dx} = \cos(x+y^2)$ مرتبه ۳ - درجه ۴

جواب عمومی معادلات دیفرانسیل:

هر تابعی که بر حسب ثابت‌ها باشد را

جواب عمومی معادله دیفرانسیل مرتبه n

$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ تابعی است که با n ثابت دلخواه

که این تابع به ازاء مجموعه معینی از ثابت‌ها در معادله دیفرانسیل فوق صدق می‌کند و به صورت زیر نمایش داده می‌شود.

$g(x, y, c_1, \dots, c_n) = 0$

نکته: برای نشان دادن اینکه یک تابع جواب عمومی یک معادله دیفرانسیل است یا خیر کافیست مشتقات y را به تعداد ثابت‌ها را بدست آوریم. پس به همراه y در معادله دیفرانسیل جایگزین میکنیم درصورتیکه در معادله مشتق شده آن تابع را در جواب عمومی معادله دیفرانسیل می‌نامیم.

مثال: نشان دهید که جوابهای عمومی معادله دیفرانسیل داده شده است.

$$1.\ y = ce^{2x} \quad , \quad y' - 2y = 0$$

$$y' = 2ce^{2x} \Longrightarrow 2ce^{2x} - 2ce^{2x} = 0 \checkmark$$

$$2.\ y = c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x \ , \ y'' + 4y = 0$$

$$y' = 2c_1 \cos 2x - 2c_2 \sin 2x$$

$$y'' = -4c_1 \sin 2x - 4c_2 \cos 2x$$

$$\Rightarrow y'' + 4y = -4c_1 \sin 2x - 4c_2 \cos 2x + 4(c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x) = 0$$

$$\cancel{4c_1 \sin 2x} + \cancel{4c_2 \cos 2x}$$

جواب خصوصی: اگر در جواب عمومی یک معادله دیفرانسیل به ثابت‌ها عدد مشخص را نسبت دهیم جواب خصوصی به دست می‌آید.

برای مثال اگر در مثال قبلی $c_1=6$ (۲) و $c_2=8$ آنگاه جواب خصوصی به صورت زیر است.

$$y=6\sin 2x+8\cos 2x$$

یافتن معادله دیفرانسیل در یک تابع

هر تابع مفروض $y(x,y,c_1,\dots,c_n)$ جواب عمومی یک معادله دیفرانسیل موجود است که تابع فوق در آن صدق می‌کند. برای بدست آوردن این معادله دیفرانسیل کافیست ثابت‌های $c_1,\dots,c_n$ را از معادلات $y=f(x)$ و $y'=f'(x)$ و ... و $y^n=f^n(x)$ حذف کنیم به عبارتی به تعداد ثابت‌ها از تابع مشتق بگیریم سپس با حذف ثابت‌ها معادله دیفرانسیل را بدست آوریم.

مثال: معادله دیفرانسیل هر یک از توابع زیر را بدست آورید.

1) $y=cx^2$

$$y'=2cx \Rightarrow \frac{y}{y'}=\frac{c x^{\cancel{2}}}{2\cancel{c}\cancel{x}}=\frac{x}{2}$$

$$\frac{y}{y'} = \frac{x}{2} \Rightarrow 2y = xy' \Rightarrow xy' - 2y = 0$$

۲) $y = c_1 \sin(x + c_2)$

$$y' = c_1 \cos(x + c_2) \Rightarrow \frac{y}{y''} = \frac{c_1 \cancel{\sin(x + c_2)}}{-c_1 \cancel{\sin(x + c_2)}}$$

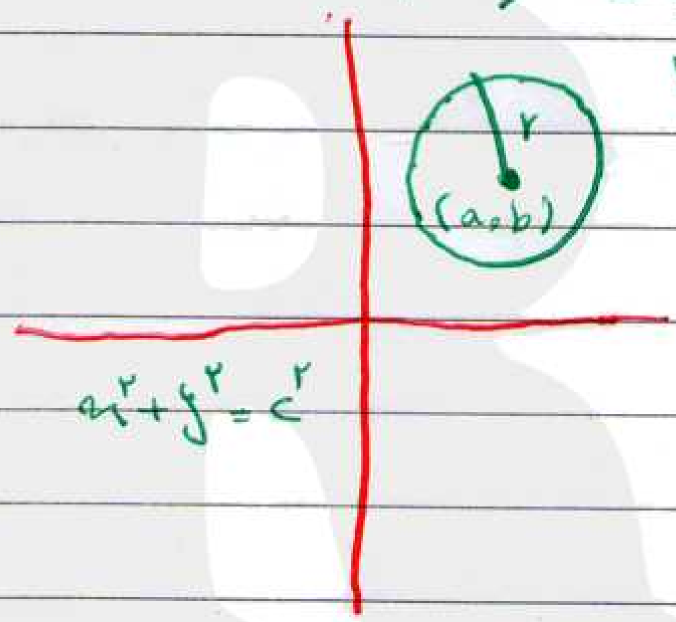
$$y'' = -c_1 \sin(x + c_2)$$

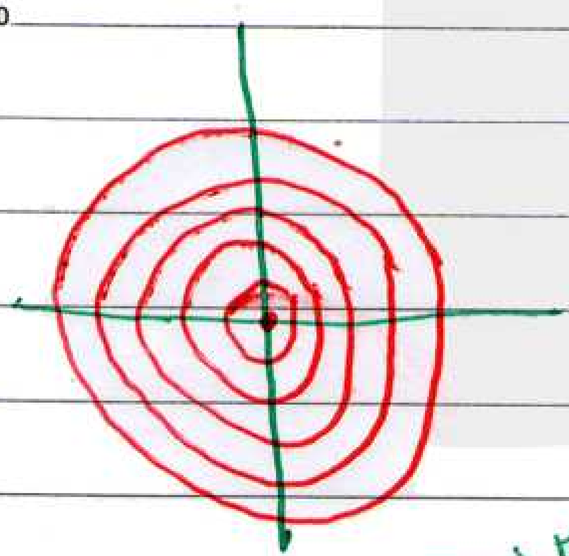
$$\frac{y}{y''} = -1 \Rightarrow -y'' = y \Rightarrow y + y'' = 0$$

مثال: معادله دیفرانسیل دسته دوایری را بیابید به شعاع c که مرکز در مبداء مختصات قرار گرفته باشد.

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

معادله دایره ای مرکز (a,b) و شعاع r





$$\Rightarrow 2x + 2yy' = 0$$

نکته: برای یافتن معادله دیفرانسیلی که تابع آن بفرم

$$y = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots c_n(f_n(x))$$

می‌باشد می‌توان از بسط دترمینان زیر استفاده کرد.

$$\begin{vmatrix} y & y' & y'' & \cdots & y^{(n)} \\ f_1 & f_1' & f_1'' & \cdots & f_1^{(n)} \\ f_2 & f_2' & f_2'' & \cdots & f_2^{(n)} \\ \vdots & & & & \\ f_n & f_n' & f_n'' & \cdots & f_n^{(n)} \end{vmatrix} = 0$$

مثال: معادله دیفرانسیل تابع زیر را بیابید.

$$y = c_1 \underbrace{e^{x}}_{f_1} + c_2 \underbrace{e^{-x}}_{f_2}$$

$$\begin{vmatrix} y & y' & y'' \\ e^{x} & e^{x} & e^{x} \\ e^{-x} & -e^{-x} & e^{-x} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} y & y' & y'' \\ e^{x} & e^{x} & e^{x} \\ e^{-x} & -e^{-x} & e^{-x} \end{vmatrix} \begin{matrix} y & y' & y'' \\ e^{x} & e^{x} & e^{x} \\ e^{-x} & -e^{-x} & e^{-x} \end{matrix}$$

$$(y + y' - y'') - (-y + y' + y'') = 0$$

$$y + y - y'' + y - y' - y'' = 2y - 2y'' = 0$$

$$\Longrightarrow 2y - 2y'' = 0$$

معادلات دیفرانسیل خطی:

معادله دیفرانسیل $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)})=0$ را یک معادله خطی می‌نامیم هرگاه به فرم زیر باشد

$$F_n(x)y^{(n)} + F_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots\dots F_1(x)y' + F(x)y = g(x)$$

که $F(x)$ ها و $g(x)$ برحسب x هستند. و معادلات دیفرانسیلی که به صورت فوق نمایش داده نمی‌شوند را معادلات غیر خطی می‌نامیم

مثال ⇐ معادلات زیر خطی اند.

1) $(2x^4 - 3x)y'' - (3x+1)y'$

2) $xy^{(5)} + \cos(2x+1)y''' + y' = x^2$

3) $\frac{x}{x+2}y''' - e^x y'' - 2xy' = \sin x$

مثال ⇐ معادلات زیر غیر خطی می‌باشند:

1) $\sin 2x y'' + 2xy'^2 - 3x = 0$ → غیر خطی چون توان دارد

2) $x^2y' - \sin(x+y) = 0$ → مشتقات y و x باید جدا باشند

۳) $\frac{x}{x+y}\, y^{(4)} = e^{x+y}$

معادلات دیفرانسیل مرتبه اول ⇐

معادلات مرتبه اولی که بتوان برای آنها راه حل ارائه نمود به ۳ دسته زیر تقسیم می‌شوند.

۱- معادلات تفکیک پذیر (جدایی‌پذیر)

۲- معادلات همگن

۳- معادلات کامل

۱) معادلات تفکیک پذیر:

هر معادله به شکل $M(x)dx+N(y)dy=0$ را یک معادله تفکیک پذیر می‌نامیم به عبارتی هر معادله که بتوان آن را به صورت دو تابع برحسب x و y جدا نمود را معادله تفکیک پذیر می‌گوئیم و برای حل آن کافیست از آن انتگرال بگیریم. جواب حاصل را جواب عمومی معادله می‌نامیم.

مثال ⇐ معادلات زیر را حل کنید:

1) $y' = \frac{x^2+x}{y^2-y} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x^2+x}{y^2+y}$

$\Rightarrow (y^2-y)\,dy = (x^2+x)\,dx = \int (y^2-y)\,dy = \int (x^2-x)\,dx$

$\frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2} = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + c$

2) $y' = \frac{1+y^2}{1+x^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{1+x^2}$

$\Rightarrow \frac{dy}{1+y^2} = \frac{dx}{1+x^2} = \int \frac{dy}{1+y^2} = \int \frac{dx}{1+x^2}$

$\mathrm{Arc\,tg}\, y = \mathrm{Arc\,tg}\, x + c$

$y = \mathrm{tg}(\mathrm{Artg}\, x + c)$

شرط وجود مقدار اولیه: جوابهایی که برای معادلات قبل بدست می‌آید جواب عمومی برحسب تغییرات c است. بنابراین با شرط وجود مقدار اولیه می‌توان جواب خصوصی معادله را بدست آورد.

مثال ⇐ $\sin 2x\,dx + \cos 3y\,dy = 0$ و $y(\overbrace{\pi/2}^{x}) = \overbrace{\pi/3}^{y}$

$$\int \sin 2x\,dx + \int \cos 3y\,dy = 0$$

$-\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{3}\sin 3y = c \longrightarrow$ جواب عمومی

$$-\frac{1}{2}\cos \overbrace{2\cdot\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \frac{1}{3}\sin \overbrace{3\cdot\frac{\pi}{3}}^{\pi} = c$$

$+\frac{1}{2} = c \Rightarrow -\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{3}\sin 3y = \frac{1}{2} \rightarrow$ جواب خصوصی

۲) معادلات همگن:

توابع همگن ⇐ تابع دو متغیر $F(x,y)$ را همگن از درجه‌ی n می‌نامیم

هرگاه به ازای $\lambda > 0$ و دو زوج مرتب (x,y)، $(\lambda x, \lambda y)$

که در دامنه‌ی تابع باشند داشته باشیم:

$$F(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n F(x,y)$$

مثال ⇐ همگن بودن توابع زیر را بررسی کنید.

$$1)\ F(x,y) = 4xy^2 - 7y^3$$

$$F(\lambda x, \lambda y) = \lambda F(x,y) \Rightarrow F(\lambda x, \lambda y) = 4\lambda x \cdot 7(\lambda y)^3$$

$$= 4\lambda^3 x y^2 - 7\lambda^3 y^3$$

$$\Rightarrow \lambda^3 \underbrace{(4xy^2 - 7y^3)}_{F(x,y)} = \lambda^3 F(x,y)$$ همگن از درجه ۳

$$2)\ F(x,y) = x^2 y^3 + 4xy^4 + 2x^5$$

$$F(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 x^2 \cdot \lambda^3 y^3 + 4\lambda x \cdot \lambda^4 y^4 + 2\lambda^5 x^5 =$$

$$\lambda^5 x^2 y^3 + 4\lambda^5 x y^4 + 2\lambda^5 x^5 = \lambda^5 \underbrace{(x^2 y^3 + 4xy^4 + 2x^5)}_{F(x,y)}$$

$$= \lambda^5 F(x,y) \rightarrow$$ همگن از درجه ۵

$$3)\ F(x,y) = x^2 - 3y$$

$$F(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 x^2 - 3\lambda y = \lambda(\lambda x^2 - 3y)$$

همگن نیست

معادله دیفرانسیل $m(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ را همگن می‌نامیم هرگاه $m(x,y)$ و $N(x,y)$ هر دو همگن و از درجه یکسان باشند.

مثال: همگن بودن توابع زیر را بررسی کنید.

1) $(\overbrace{x+2y}^{m(x,y)})dx+(\overbrace{3y-4x}^{N(x,y)})dy$

$m(\lambda x,\lambda y)=\lambda x+2\lambda y=\lambda(x+2y)=\lambda m(x,y)$ همگن از درجه 1

$N(\lambda x,\lambda y)=3\lambda y-4\lambda x=\lambda(3y-4x)=\lambda N(x,y)\to$ درجه 1

بنابراین معادله فوق همگن است

2) $\underbrace{\frac{y^2}{x^2-y^2}}_{m(x,y)}dx+\underbrace{\sin\frac{2x}{y}}_{N(x,y)}dy$

$m(\lambda x,\lambda y)=\frac{\lambda^2y^2}{\lambda^2x^2+\lambda^2y^2}=\frac{\lambda^2y^2}{\lambda^2(x^2+y^2)}=\frac{y^2}{x^2+y^2}=m(x,y)$

$=\lambda^0 m(x,y)\to$ همگن از درجه 0

$N(\lambda x,\lambda y)=\sin\frac{2\cancel{\lambda}x}{\cancel{\lambda}y}=\sin\frac{2x}{y}=N(x,y)=\lambda^0N(x,y)$

همگن درجه 0

حل معادلات همگن:

درصورتی که معادله $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ یک معادله همگن باشد. برای حل آن از تغییر متغیر $v = \frac{y}{x}$ استفاده می‌کنیم آنگاه داریم $v = \frac{y}{x} \Rightarrow y = xv \to \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$ سپس با جایگزین کردن $\frac{dy}{dx}$ و $y = xv$ در معادله دیفرانسیل آن را به معادله تفکیک پذیر تبدیل کرده و آن را حل می‌کنیم.

مثال ⇐ معادله زیر را حل کنید.

$$y' = \frac{y^2 + xy}{x^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + xy}{x^2}$$

$$x^2 dy = dx\,(y^2 + xy) \to$$ همگن از درجه ۲

$$v = \frac{y}{x} \to y = xv \to \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{x^2 v^2 + x \cdot xv}{x^2} = \frac{\cancel{x^2}(v^2 + v)}{\cancel{x^2}}$$

$$\cancel{v} + x\frac{dv}{dx} = v^2 + \cancel{v} \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{v^2}{1} \to$$ طرفین وسطین می‌کنیم

$$\Rightarrow \frac{dv}{v^2} = \frac{dx}{x} \Rightarrow$$ تفکیک پذیر شد انتگرال می‌گیریم.

$$\int \frac{dv}{v^2} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\int v^{-2} dv = \int \frac{dx}{x} \rightarrow \frac{v^{-1}}{-1} = \operatorname{Ln}|x| + \underbrace{c}_{\operatorname{Ln} c_1}$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{v} = \operatorname{Ln} x \cdot c_1 \Rightarrow \frac{-1}{\underbrace{y}_{y/x}} = -\ln x c_1$$

$$-\frac{x}{y} = \ln x c_1 \Rightarrow y = \frac{-x}{\operatorname{Ln} x c_1}$$

معادله دیفرانسی کامل

معادله $m(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ را کامل می‌نامیم هرگاه تابع دو متغیره $F(x,y)$ وجود داشته باشد بطوریکه

$$\frac{\partial F}{\partial x}=m(x,y),\ \frac{\partial F}{\partial y}=N(x,y)$$ یا ~~$dF=m(x,y)dx$~~

$$dF=m(x,y)dx+N(x,y)dy$$

در این صورت با توجه به معادله فوق $dF=0$ است و بنابراین $F=C$ جواب معادله دیفرانسیل است به طور کلی تابع $m(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ کامل می‌نامیم هرگاه شرط زیر برقرار باشد:

$$\frac{\partial m}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

مثال ⟸ کدام یک از معادلات زیر کامل است

1) $\overbrace{(7x+2y)}^{m(x,y)}dx+\overbrace{(2x+9y)}^{N(x,y)}dy$

$$\frac{\partial m}{\partial y}=2,\ \frac{\partial N}{\partial x}=2 \Rightarrow \frac{\partial m}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$ معادله کامل است

۲) $\overbrace{(x-y)}^{m(x,y)}dx+\overbrace{(-x+y^2)}^{n(x,y)}dy$

$\frac{\partial m}{\partial y}=-1$, $\frac{\partial n}{\partial x}=-1 \Rightarrow \frac{\partial m}{\partial y}=\frac{\partial n}{\partial x}=$ کامل است

۳) $(e^x\cos y-x^2)dx+(e^y\sin x+y)dy$

$\frac{\partial m}{\partial y}=-e^x\sin y$, $\frac{\partial n}{\partial x}=e^y\cos x$

$\frac{\partial m}{\partial y}\neq\frac{\partial n}{\partial x}$ ، معادله کامل نیست

حل معادله کامل:

اگر معادله $m(x,y)dx+n(x,y)dy=0$ کامل باشد برای حل آن روند زیر را به کار می‌بریم.

۱- ابتدا یکی از روابط $\frac{\partial F}{\partial x}=m(x,y)$ و $\frac{\partial F}{\partial y}=n(x,y)$ را در نظر می‌گیریم

برای مثال رابطه اول $\frac{\partial F}{\partial x}=m(x,y)$ را در نظر گرفته و از آن نسبت به x انتگرال می‌گیریم:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = m(x,y) \xrightarrow{\int} F = \int m(x,y)\,dx + h(y)$$

که $h(y)$ ثابت انتگرال گیری است.

۲- برای بدست آوردن $h(y)$ از معادله فوق نسبت به y مشتق می‌گیریم

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \left(\int m(x,y)\,dx\right) + h'(y)$$

سپس با جایگذینی رابطه دوم

$\frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y)$ ، $h'(y)$ را بدست می‌آوریم و با انتگرال گیری از آن $h(y)$ را محاسبه کرده و در تابع F جایگذینی می‌کنیم سپس برابر $F = C$

جواب معادله دیفرانسیل است.

مثال ⟸

$$1)\ \overbrace{(2x+y)}^{m(x,y)}dx + \overbrace{(x+3y^2)}^{N(x,y)}dy$$

$$\frac{\partial m}{\partial y} = 1 \ , \ \frac{\partial N}{\partial x} = 1 \Rightarrow \frac{\partial m}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = m(x,y) = 2x+y \ , \ \frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y) = x+3y^2$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x+y \xrightarrow{\int} F = \int (2x+y)\,dx + h(y)$$

$F=\frac{\cancel{2}x^2}{\cancel{2}}+xy+h(y) \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y}=x+h'(y)$

$\cancel{x}+3y^2=\cancel{x}+h'(y) \Rightarrow h'(y)=3y^2$

$h(y)=\int 3y^2dy=3\frac{y^3}{3}+c=y^3+c$

$F=x^2+xy+y^3=c$

2) $(\overbrace{x^3+3xy^2}^{M(x,y)})dx+(\overbrace{y^3+3x^2}^{N(x,y)})dy=0$, $y(1)=2$

$\frac{\partial M}{\partial y}=6xy$, $\frac{\partial N}{\partial x}=6xy \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ کامل است

$\frac{\partial F}{\partial x}=x^3+3xy^2$, $\frac{\partial F}{\partial y}=y^3+3x^2y+3x^2y$

$\frac{\partial F}{\partial x}=x^3+3xy^2 \Rightarrow F=\int(x^3+3xy^2)dx+h(y)$

$F=\frac{x^4}{4}+\frac{3x^2}{2}y^2+h(y) \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y}=3x^2y+h'(y)$

$y^3+3x^2y=3x^2y+h'(y) \Rightarrow h'(y)=y^3 \Rightarrow h(y)=\int y^3dy$

$h(y)=\frac{y^4}{4}+c \Rightarrow F=\frac{x^4}{4}+\frac{3}{2}x^2y^2+\frac{y^4}{4}=c \Rightarrow$

$x=1$, $y=2$: $\frac{1}{4}+\frac{3}{2}\cdot 1\cdot 4+\frac{16}{4}=c \Rightarrow c=\frac{1}{4}+10=\frac{41}{4}$

$F=\frac{x^4}{4}+\frac{3}{2}x^2y^2+\frac{y^4}{4}=\frac{41}{4}$

عامل انتگرال ساز: برخی از معادلات کامل نیستند ولی با ضرب آنها در یک تابع مانند μ که آن را عامل انتگرال ساز می نامیم معادله را به یک معادله کامل تبدیل کرد چگونگی محاسبه عامل انتگرال ساز به صورت زیر است:

۱- اگر μ تابعی از x باشد آنگاه: $P(x)=\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)$, $\mu=e^{\int p(x)dx}$ عامل انتگرال ساز است.

۲- اگر μ تابعی از y باشد آنگاه: $q(y)=\frac{1}{-M}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)$, $\mu=e^{\int q(y)dy}$ عامل انتگرال ساز است.

مثال: معادلات زیر را با تبدیل به معادلات کامل حل کنید.

$$1)\ y+(y^2-x)y'=0 \Rightarrow y+(y^2-x)\frac{dy}{dx}=0 \Rightarrow$$

$$\underbrace{y}_{M(x,y)}dx+\underbrace{(y^2-x)}_{N(x,y)}dy=0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=1\ ,\ \frac{\partial N}{\partial x}=-1$$

$$g(y) = \frac{1}{-M}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{1}{-y}(1-(-1)) = \frac{2}{-y}$$

$$u = e^{\int \frac{2}{-y}dy} = e^{-2\ln y} = e^{\ln y^{-2}} = y^{-2} \Rightarrow u = y^{-2} \Rightarrow$$

$$y^{-2} \cdot y\,dx + y^{-2}(y^2+x)dy = 0 \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{y}}_{m(x,y)}dx + \underbrace{\left(1-\frac{x}{y^2}\right)}_{n(x,y)}dy = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{y} \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 1 - \frac{x}{y^2}$$

$$\Rightarrow F = \int \frac{1}{y}dx + h(y) = \frac{x}{y} + h(y) \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{-x}{y^2} + h'(y)$$

$$1 - \cancel{\frac{x}{y^2}} = \cancel{-\frac{x}{y^2}} + h'(y) \Rightarrow h'(y) = 1 \Rightarrow h(y) = \int 1\,dy = y + C$$

$$F = \frac{x}{y} + y = C$$

$$2)\ (8y\,dx + 8x\,dy) + x^2y^3(4y\,dx + 5x\,dy) = 0$$

$$(\underbrace{8y + 4x^2y^4}_{M})dx + (\underbrace{8x + 5x^3y^3}_{N})dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 8 + 16x^2y^3 \quad , \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 8 + 15x^2y^3$$

$$F(x,y) = \frac{1}{yN + xM}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) =$$

$$\cancel{x} - 14x^2y^3 - \cancel{x} - 15x^2y^3$$

$$y(8x + 5x^3y^4) - x(8y + 4x^2y^4)$$

$$\cancel{8xy} + 5x^3y^4 - \cancel{8xy} - 4x^3y^4 =$$

$$\frac{x^3y^3}{x^4y^4} = \frac{1}{xy}, \quad z = xy$$

$$\Rightarrow u = e^{\int \frac{1}{z} dz} = e^{\ln z} = z \Rightarrow u = xy$$

بنابراین معادله فوق را در xy ضرب کرده و از روش حل معادله کامل جواب معادله را بدست می‌آوریم.

* معادله خطی مرتبه اول

هر معادله به شکل $F_2(x)y' + F_1(x)y = g(x)$ یا $F(x,y)=0$

را معادله خطی مرتبه اول می‌نامیم

فرم دیگر آن به فرم استاندارد معروف است به صورت زیر است:

$$y' + p(x)y = q(x)$$

در این صورت جواب عمومی معادله از فرمول زیر که به فرمول لاگرانژ

معروف است محاسبه می‌شود.

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left(\int e^{\int p(x)dx} \cdot q(x)dx + c\right)$$

مثال ⇐ معادلات زیر را حل کنید

1) $y' + y = 0 \Rightarrow p(x) = 1 \quad , \quad q(x) = 0$ (مقداری بر حسب x است) (ضریب x)

$$y = e^{-\int 1dx}\left(\underbrace{\int e^{\int 1dx} \cdot 0dx}_{0} + c\right) = e^{-x}(0+c) = ce^{-x}$$

جواب انتگرال سوال ۲ ⇐ $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx \Rightarrow \begin{cases} u=e^x \\ du=e^x dx\end{cases}$

$\Rightarrow \int \frac{du}{1+u^2} = Arctg \frac{u}{1} = Arctg \frac{e^x}{1}$

۲) $y'+y=\frac{1}{1+e^{2x}}$, $y(0)=0$

$P(x)=1$, $q(x)=\frac{1}{1+e^{2x}}$

$y=e^{-\int 1dx}\left(\int e^{\int 1dx} \cdot \frac{1}{1+e^{2x}}dx+c\right)=e^{-x}\left(\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx+c\right)=$

$e^{-x}\left(Arctg\, e^x+c\right)=e^{-x}Arctg\, e^x+e^{-x}c$

$\Rightarrow y=e^{-x}Arctg\, e^x+e^{-x}c \xrightarrow{y(0)=0} 0=e^0 Arctg\, e^0+e^0 c$

(جواب عمومی)

$\Rightarrow 0=\frac{\pi}{4}+c$

$\Rightarrow c=-\frac{\pi}{4}$ $\quad y=e^{-x}Arctg\, e^x\,\frac{\pi}{4}\,e^{-x}$ (جواب خصوصی)

* معادلات برنولی

هر معادله به فرم $y'+P(x)y=q(x)y^n$ را معادله برنولی می‌نامیم. در صورتی که $n=0$ باشد یک معادله مرتبه اول خطی است و در صورتیکه $n=1$

باشد، معادله تفکیک پذیر است. در غیر اینصورت $(n \neq 0)$ برای حل معادله ابتدا طرفین معادله را در y^{-n} ضرب می‌کنیم، سپس از تغییر متغیر $z = y^{1-n}$ استفاده می‌کنیم و با مشتق گیری از آن داریم: $z' = (1-n)y^{-n}y'$

سپس به کمک فرمول لاگرانژ جواب عمومی را بدست می‌آوریم و در نهایت $z = y^{-n}$ را جایگذین کرده و y را محاسبه می‌کنیم.

مثال ⇐ معادلات زیر را حل کنید

$$y' + \frac{2}{x}y = \frac{1}{x^2}y^3 \Rightarrow n = 3$$

$$y^{-3}y' + \frac{2}{x}y^{-2} = \frac{1}{x^2} \quad , \quad z = y^{1-3} = y^{-2} \Rightarrow z = -2$$

$$z' = -2y^{-3}\cdot y' \Rightarrow \frac{z'}{-2} + \frac{2}{x}z = \frac{1}{x^2}$$

$$\xRightarrow{x-2} z' - \frac{4}{x}z = \frac{-2}{x^2} \Rightarrow p(x) = \frac{-4}{x} \, , \, q(x) = \frac{-2}{x^2}$$

$$z = e^{\int \frac{-4}{x}dx}\left(\int e^{\int \frac{-4}{x}dx}\cdot\left(\frac{-2}{x^2}\right)dx + c\right)$$

$$= e^{4\ln x}\left(\int e^{-4\ln x}\cdot\left(\frac{-2}{x^2}\right)dx + c\right) = x^4\left(\int x^{-4}\left(\frac{-2}{x^2}\right)dx + c\right)$$

$$= x^4\left(\int -2x^{-6}dx + c\right) = x^4\left(\frac{-2x^{-5}}{-5}+c\right) = \frac{2}{5}x^{-1} + cx^4$$

فصل دوم: معادلات خطی مرتبه ۲

هر معادله به شکل $f_3(x)y'' + f_2(x)y' + f_1(x)y = g(x)$ را معادله خطی مرتبه دوم می‌نامیم و در صورتی که $g(x)=0$ باشد آنگاه معادله خطی مرتبه ۲ همگن می‌نامیم که فرم استاندارد آن به صورت $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ است. در صورتیکه f_1 و f_2 و f_3 مقادیر ثابت باشند معادله را همگن مرتبه ۲ با ضرایب ثابت می‌نامیم که به صورت $a_3y'' + a_2y' + a_1y = 0$ است و فرم استاندارد آن به صورت $y'' + ay' + by = 0$ است.

تعریف ⟸ فرض کنیم a و b دو تابع باشند که بر $[a,b]$ تعریف شده باشند اگر K عدد ثابت باشد و $\forall x \in [a,b]\ ,\ f(x) = Kg(x)$ آنگاه f و g را وابسته خطی می‌نامیم، در غیر اینصورت f و g مستقل خطی‌اند.

به عبارتی f و g مستقل خطی هستند اگر مضربی از یکدیگر نباشند.

تعریف ⟸ اگر y_1 و y_2 دو جواب معادله همگن $y''+P(x)y'+q(x)y=0$ باشد

و در $[a,b]$ تعریف شده باشند، آنگاه رونسکین y_1 و y_2 را با نماد $W(y_1,y_2)$

نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

قطر اصلی

$$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}=y_1y_2'-y_2y_1'$$

قطر فرعی

قضیه ⟸ اگر P و q دو تابع که بر $[a,b]$ پیوسته باشند و y_1 و y_2 دو

جواب معادله همگن مرتبه ۲ باشد و $W(y_1,y_2)\neq 0$ آنگاه

$y=c_1y_1+c_2y_2$ جواب عمومی معادله است.

قضیه ⟸ اگر y_1 و y_2 دو جواب معادله همگن مرتبه ۲ $y''+P(x)y'+q(x)y=0$

باشند، آنگاه y_1 و y_2 مستقل خطی‌اند اگر و تنها اگر $W(y_1,y_2)\neq 0$

قضیه ⟸ اگر y_1 و y_2 دو جواب مستقل خطی معادله مرتبه ۲ همگن

$y''+P(x)y'+q(x)y=0$ باشند آنگاه $y=c_1y_1+c_2y_2$ جواب عمومی

معادله است.

مثال: معادله دیفرانسیل $y''-y=0$ دارای دو جواب $y_1=e^{x}$ و $y_2=e^{-x}$ است. نشان دهید $y=c_1e^{x}+c_2e^{-x}$ جواب عمومی معادله است.

(نکته: e به توان هر عددی برسد نمی‌تواند صفر شود)

$$w(e^{x}, e^{-x})=\begin{vmatrix} e^{x} & e^{-x} \\ e^{x} & -e^{x} \end{vmatrix}=-e^{2x}-1\neq 0$$

بنابراین $y=c_1e^{x}+c_2e^{-x}$ جواب عمومی معادله است.

روش کاهش مرتبه

روشی است که یک معادله دیفرانسیل خطی به معادله‌ی دیفرانسیل خطی تبدیل می‌کند که مرتبه آن یک واحد کمتر است، می‌دانیم اگر y_1 و y_2 دو جواب مستقل خطی معادله همگن $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ باشند آنگاه می‌توان جواب عمومی معادله را محاسبه کرد. در این روش باید یکی از جواب‌ها را داشته باشیم یا بتوانیم آن را حدس بزنیم فرض می‌کنیم y_1 را داشته باشیم در صورت y_2 از فرمول زیر محاسبه می‌شود

$$y_2=v(x)y_1 \quad , \quad v(x)=\int\frac{1}{y^2}\cdot e$$

در این صورت $y=c_1y_1+c_2y_2$ جواب عمومی معادله می‌شود

مثال:

1) $xy''+3y'=0$, $y_1=1 \xrightarrow{\div x} y''+\frac{3}{x}y'=0$

$$v(x)=\int\frac{1}{y_1^2}\cdot e^{-\int p(x)dx}dx=\int\frac{1}{1}\cdot e^{-\int\frac{3}{x}dx}dx=$$

$$\int e^{-3\ln x}dx=\int x^{-3}dx=\frac{x^{-2}}{-2}\Rightarrow y_2=v(x)y_1=\frac{-x^{-2}}{-2}\cdot 1=-\frac{x^{-2}}{2}$$

$$y = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot \left(\frac{-x^{-2}}{2}\right) = c_1 - c_2 \frac{x^{-2}}{2}$$

$$2)\ x^2 y'' + x y' - 4y \quad , \quad y_1 = x^2 \xrightarrow{\div x^2} y'' + \frac{1}{x} y' - \frac{4}{x^2} y = 0$$

$$p(x) = \frac{1}{x}$$

$$v(x) = \int \frac{1}{y_1^2} \cdot e^{-\int p(x)\, dx} dx = \int \frac{1}{(x^2)^2} \cdot e^{-\int \frac{1}{x} dx} dx =$$

$$\int \frac{1}{x^4} \cdot e^{-\ln x} dx = \int \frac{1}{x^4} \cdot x^{-1} dx = \int x^{-5} dx =$$

$$\frac{x^{-4}}{-4} \Rightarrow y_2 = v(x) y_1 = \frac{x^{-4}}{-4} \cdot x^2 = -\frac{x^{-2}}{4} \Rightarrow$$

$$y = c_1 x^2 - c_2 \frac{x^{-2}}{4}$$

حل معادلات خطی همگن با ضرایب ثابت مرتبه ۲

می دانیم شکل کلی این معادلات به صورت $y'' + ay' + by = 0$ است. برای یافتن

جوابهای مستقل خطی y_1 و y_2 باید جوابهایی به فرم $y = e^{\lambda x}$ را جستجو کنیم

زیرا تنها تابعی است که اختلافش با مشتقاتش در یک ضریب ثابت است. در این

صورت جایگذاری در معادله فوق داریم:

$$x=e^{\lambda x} \longrightarrow y'=\lambda e^{\lambda x} \longrightarrow y''=\lambda^2 e^{\lambda x}$$

$$y''+ay'+by=0 \Rightarrow \lambda^2 e^{\lambda x}+a\lambda e^{\lambda x}+be^{\lambda x}=0$$

$$(\lambda^2+a\lambda+b)\overset{\neq 0}{e^{\lambda x}}=0 \Rightarrow (\lambda^2+a\lambda+b)=0$$ معادله مشخصه یا کمکی

بنابراین $e^{\lambda x}$ جواب معادله فوق است هنگامی که λ معادله درجه دوم $\lambda^2+a\lambda+b=0$ باشد که این معادله را معادله کمکی یا مشخصه می نامیم و برای این معادله کمکی است سه حالت زیر اتفاق افتد.

حالت اول: معادله دارای دو ریشه حقیقی λ_1 و λ_2 باشد در این صورت جوابهای معادله $y_1=e^{\lambda_1 x}$ و $y_2=e^{\lambda_2 x}$ است و جوابهای عمومی معادله $y=c_1e^{\lambda_1 x}+c_2e^{\lambda_2 x}$ است.

حالت دوم: معادله دارای یک ریشه کمکی مضاعف λ باشد در این صورت جواب عمومی معادله $y=c_1e^{\lambda x}+c_2xe^{\lambda x}$ است.

حالت سوم: معادله دارای دو ریشه مختلط $\alpha+\beta i$ و $\alpha-\beta i$ باشد در این صورت جواب عمومی معادله بصورت زیر است.

$$y=e^{\alpha x}\left(c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x\right)$$

مثال ← معادلات زیر را حل کنید:

$$1)\ y''-y'-6y=0 \Rightarrow \lambda^2-\lambda-6=0$$

$$(\lambda-3)(\lambda+2)=0 \Rightarrow \lambda_1=3,\ \lambda_2=-2$$

$$y=c_1e^{3x}+c_2e^{-2x}$$

$$2)\ y''-2y'+y=0 \Rightarrow \lambda^2-\lambda+1=0$$

$$(\lambda-1)^2=0 \Rightarrow \lambda-1=0 \Rightarrow \lambda=1$$

$$y=c_1e^{1x}+c_2xe^{1x}$$

۳) $y''-2y'+5y=0 \Rightarrow \lambda^2-2\lambda+5=0 \Rightarrow \Delta=b^2-4ac=$

$(-2)^2-4\cdot1\cdot5 \Rightarrow 4-20=-16<0$

$$\lambda_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2+\sqrt{-16}}{2}=\frac{2+4i}{2}=\frac{\cancel{2}(1+2i)}{\cancel{2}}=\overset{\alpha}{1}+\overset{\beta}{2}i$$

$$\lambda_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2-\sqrt{16}}{2a}=\frac{2-4i}{2}=\frac{\cancel{2}(1-2i)}{\cancel{2}}=1-2i$$

$$y=e^{1x}(c_1\cos 2x+c_2\sin 2x)$$

معادلات خطی مرتبه دوم غیرهمگن

شکل کلی این معادلات به فرم $y''+P(x)y'+q(x)=g(x)$

قضیه: اگر $y''+P(x)y'+q(x)=g(x)$ یک معادله غیرهمگن باشد و y_p یک جواب خصوصی معادله فوق باشد و y_c جواب عمومی معادله همگن $y''+P(x)y'+q(x)=0$ باشد آنگاه $\bar{y}=y_p+y_c$ یک جواب عمومی معادله غیرهمگن فوق است.

بنابراین برای بدست آوردن جواب عمومی معادله غیرهمگن ابتدا جواب

عمومی معادله همگن را به دست می‌آوریم (که روش محاسبه آن در مباحث قبلی ارائه شد) سپس یک جواب خصوصی y_p برای معادله غیر همگن به دست می‌آوریم و در نهایت $y = y_c + y_p$ جواب عمومی معادله غیر همگن است y_p از دو روش زیر محاسبه می‌شود.

۱- روش تغییر پارامتر:

در این روش لزومی ندارد ضرایب معادله درجه دوم ثابت باشند و محدودیتی برای $g(x)$ وجود ندارد اما باید جوابهای مستقل خطی معادله همگن را در اختیار داشته باشیم.

بنابراین اگر y_1 و y_2 دو جواب معادله همگن $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ باشند آنگاه y_p به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$y_p = -y_1 \int \frac{y_2\, g(x)}{W(y_1, y_2)} + y_2 \int \frac{y_1\, g(x)}{W(y_1, y_2)}$$

و در نهایت $y = y_c + y_p$ جواب معادله غیر همگن است.

معادلهٔ زیر را حل کنید:

$$y''+6y'+9y=\frac{e^{-3x}}{x^3}$$

$$y''+6y'+9y=0 \Rightarrow \lambda^2+6\lambda+9=0 \Rightarrow (\lambda+3)^2=0$$

$$\Rightarrow \lambda+3=0 \Rightarrow \lambda=-3$$ ریشه مضاعف

$$y_c=\underbrace{c_1e^{-3x}}_{y_1}+\underbrace{c_2xe^{-3x}}_{y_2}$$

$$y_p=-y_1\int\frac{y_2 g(x)}{w(y_1,y_2)}+y_2\int\frac{y_1 g(x)}{w(y_1,y_2)}dx$$

$$w\left(e^{-3x},xe^{-3x}\right)=\begin{vmatrix}e^{-3x} & xe^{-3x}\\ -3e^{-3x} & e^{-3x}-3xe^{-3x}\end{vmatrix}=e^{-3x}\left(e^{-3x}-3xe^{-3x}\right)$$

$$-\left(-3e^{-3x}\,xe^{-3x}\right)=e^{-6x}-3xe^{-6x}+3xe^{-6x}=e^{-6x}$$

$$y_p=e^{-3x}\int\frac{xe^{-3x}\frac{e^{-3x}}{x^3}}{e^{-6x}}dx+xe^{-3x}\int\frac{e^{-3x}\cdot\frac{e^{-3x}}{x^3}}{e^{-6x}}dx$$

$$=-e^{-3x}\int\frac{e^{-6x}}{x^2e^{-6x}}dx+xe^{-3x}\int\frac{e^{-6x}}{x^3e^{-6x}}dx=$$

$$=-e^{-3x}\int\frac{1}{x^2}dx+xe^{-3x}\int\frac{1}{x^3}dx$$

$$e^{-3x}\left(\frac{x^{-1}}{-1}\right)+xe^{-3x}\left(\frac{x^{-2}}{-2}\right)$$

$$y=y_c+y_p=c_1e^{-3x}+c_2xe^{-3x}+\frac{e^{-3x}}{x}-\frac{e^{-3x}}{2x}$$

$$e^{-3x}\left(\frac{x^{-1}}{-1}\right) + x e^{-3x}\left(\frac{x^{-2}}{-2}\right)$$

$$y = y_c + y_p = c_1 e^{-3x} + c_2 x e^{-3x} + \frac{e^{-3x}}{x} - \frac{e^{-3x}}{2x}$$

۲,۲۳

۲- روش ضرایب نامعین

این روش برای محاسبه معادلات خطی با ضرایب ثابت کاربرد دارد.

یعنی معادلاتی که به فرم $y'' - ay' + by = g(x)$ هستند که $g(x)$ تنها می‌تواند یک تابع چندجمله‌ای، نمایی، مثلثاتی (مضربی از $\cos\beta x$ $\sin\beta x$) و یا ترکیب خطی از این توابع باشد.

در این صورت با توجه به این معادلات خاص می‌توان جواب خصوصی معادله را حدس زد. سپس تابع بدست آمده را که شامل مجهولات A_i است به همراه مشتقاتش در معادله دیفرانسیل قرار می‌دهیم و مجهولات A_i را محاسبه می‌کنیم.

حالت اول ⇐ اگر $g(x)$ یک تابع چندجمله‌ای باشد یعنی $g(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots a_nx^n$ آنگاه جواب خصوصی معادله به فرم زیر است $y_p=x^s(A_0+A_1x+A_2x^2+\dots A_nx^n)$ که s تعداد ریشه‌های مساوی با صفر در معادله کمکی است.

حالت دوم ⇐ اگر $g(x)$ یک تابع نمایی باشد $g(x)=ke^{\alpha x}$ آنگاه درصورتیکه α ریشه معادله کمکی نباشد جواب خصوصی به فرم $y_p=Ae^{\alpha x}$ است و درصورتیکه α ریشه مرتبه s معادله کمکی باشد جواب خصوصی به صورت زیر است. $y_p=Ax^se^{\alpha x}$

حالت سوم ⇐ اگر $g(x)$ مضربی از $\sin\beta x$ و یا $\cos\beta x$ و یا ترکیب خطی آنها باشد یعنی $g(x)=k_1\cos\beta x+k_2\sin\beta x$ آنگاه درصورتیکه βi ریشه معادله کمکی نباشد جواب خصوصی به صورت $y_p=A\sin\beta x+B\cos\beta x$ است و اگر βi ریشه مرتبه s معادله کمکی باشد آنگاه $y_p=x^s(A\sin\beta x+B\cos\beta x)$

حالت چهارم) اگر $g(x)=p(x)e^{\alpha x}$ که $p(x)$ یک چند جمله‌ای از درجه n است آنگاه اگر α ریشه معادله مشخصه نباشد جواب خصوصی بصورت زیر است

$$y_p=(A_0+A_1x+A_2x^2+\dots A_nx^n)e^{\alpha x}$$

و اگر α ریشه مرتبه s معادله کمکی باشد جواب خصوصی به فرم زیر است.

$$y_p=x^s(A_0+A_1x+A_2x^2+\dots A_nx^n)e^{\alpha x}$$

مثال: معادلات زیر را حل کنید:

$$1)\ y''-y'=\overbrace{2x-1}^{g(x)}$$

$$\lambda^2-\lambda=0\Rightarrow\lambda(\lambda-1)=0\Rightarrow\begin{cases}\lambda=0\\ \lambda=1\end{cases}\rightarrow y_c=c_1e^{0x}+c_2e^{1x}=c_1+c_2e^x$$

$$y_p=x^s(A_0+A_1x+A_2x^2+\dots A_nx^n)=x^1(A_0+A_1x)\,s$$

$$A_0x+A_1x^2\Rightarrow y_p=A_0x+A_1x^2$$

$$y_p'=A_0+2A_1x\Rightarrow y_p''=2A_1\xrightarrow{\text{جایگذاری}}y''-y'=2x-1\rightarrow$$

$$2A_1-A_0-2A_1x=2x-1\Rightarrow\begin{cases}-2A_1=2\Rightarrow A_1=-1\\ 2A_1-A_0=-1\Rightarrow 2(-1)-A_0=-1\rightarrow\end{cases}$$

$$2+1=A_0\Rightarrow A_0=-1$$

$$\Rightarrow y_p = -1x - 1x^2 = -x - x^2$$

$$y = y_c + y_p = C_1 + C_2 + C_3 e^{x} - x - x^2$$

$$2)\ y'' - y' - 2y = 20e^{4x} \longrightarrow \alpha = 4$$

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \Rightarrow (\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 2 \\ \lambda = -1 \end{cases} \Rightarrow y_c = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}$$

$$y_p = Ae^{\alpha x} = Ae^{4x} \Rightarrow y_p = Ae^{4x} \longrightarrow y'_p = 4Ae^{4x}$$

$$y_p = 16Ae^{4x} - 4Ae^{4x} - 2Ae^{4x} = 20e^{4x}$$

$$1\cancel{0}Ae^{4x} = 2\cancel{0}e^{4x} \Rightarrow Ae^{4x} = 2e^{4x} \Rightarrow A = 2$$

$$y_p = 2e^{4x} \Rightarrow y = y_c + y_p = C_1 e^{2x} + C_2 e^{4x}$$

مثال:

$$3)\ y'' - y = 3\sin x$$

$$\lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = -1 \end{cases} \Rightarrow y_c = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x}$$

$$y_p = A\sin\beta x + B\cos\beta x = A\sin x + B\cos x + B\cos x$$

$$\Rightarrow y_p = A\sin x + B\cos x$$

$$y'_p = A\cos x - B\sin x \longrightarrow y''_p = -A\sin x - B\cos x$$

$\xrightarrow{\text{جایگذاری}}$ $y''-y=3\sin x-A\sin x-B\cos x-A\sin x-B\cos x$

$=3\sin x-2A\sin x-2B\cos x=3\sin x \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2A=3 \rightarrow \boxed{A=\frac{3}{-2}} \\ -2B=0 \rightarrow \boxed{B=0} \end{cases}$$

$\Rightarrow y_p=-\frac{3}{2}\sin x+0\cos x=-\frac{3}{2}\sin x \Rightarrow y=y_c+y_p=$

$c_1e^{x}+c_2e^{-x}-\frac{3}{2}\sin x$

$p(x)\rightarrow y(x)$

۴) $y''-4y=12xe^{2x}$

$\lambda^2-4\lambda+4=0 \Rightarrow (\lambda-2)^2=0 \Rightarrow \lambda-2=0 \Rightarrow \lambda=2 \Rightarrow$

$y_c=c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}$

$y_p=x^s(A_0+A_1x+A_2x^2+A_nx^n)\cdot e^{\alpha x}=$

$x^2(A_0+A_1x)\cdot e^{2x} \Rightarrow y_p=(A_0x^2-A_1x^3)e^{2x}$

فصل سوم: تبدیلات لاپلاس

تعریف $\Leftarrow$ اگر تابع f بر بازه ی $(\alpha, +\infty)$ تعریف شده باشد و s یک متغیر حقیقی باشد آنگاه $F(s)=\int_0^{+\infty} e^{-st}f(t)\,dt$ را

تبدیل لاپلاس تابع f می نامیم و با نماد $L[f(t)]$ نمایش می دهیم

به عبارتی

$$L[f(t)] = F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\,dt \quad (1)$$

واضح است که انتگرال فوق را ناسره است و به صورت زیر محاسبه می شود

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\,dt = \lim_{b\to+\infty}\left(\int_0^{b} e^{-s} f(t)\,dt\right)$$

که انتگرال فوق همگرا می نامیم هرگاه حد فوق وجود داشته باشد

بنابراین رابطه (1) تعریف می شود هرگاه انتگرال آن همگرا باشد

مثال $\Leftarrow$ 1) $f(t)=1 \Rightarrow L[f(t)] = L[1] = \int_0^{+\infty} e^{-st}\cdot 1\,dt =$

$$\lim_{b\to+\infty}\left(\int_0^b e^{-st}\,dt\right) = \lim\left(\frac{-1}{s}e^{-st}\Big|_0^b\right) = \lim\left(\frac{-1}{s}e^{-sb} + \frac{1}{s}e^{-s\times 0}\right)$$

$$= \frac{-1}{s}e^{-s(\infty)} + \frac{1}{s} = \frac{1}{s}$$

$$۲)\ f(t)=e^{at} \Rightarrow L[f(t)]=L[e^{at}]=$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-st}\cdot e^{at}\,dt=\int_0^{+\infty} e^{(as)t}\,dt=\lim\int_0^{b} e^{(a-s)t}\,dt=$$

$$\lim\left(\frac{1}{a-s}\cdot e^{(a-s)t}\Big|_0^b\right)=$$

$$\lim\left(\frac{1}{a-s}\cdot e^{(a-s)b}-\frac{1}{a-s}e^{(a-s)\times 0}\right)=\frac{1}{a-s}e^{(a-s)(+\infty)}-\frac{1}{a-s}=$$

$$=\frac{-1}{a-s}=\frac{1}{s-a}$$

جدول تبدیل لاپلاس چند تابع مقدماتی:

$f(t)$	$F(s)=L[f(t)]$
1	$\frac{1}{s}$
a	$\frac{a}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
$t^n,\ n\in N$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$

معادلات دیفرانسیل

جزوه:

جلسه: هشتم صفحه (این جلسه): ۳

نام استاد: زهرا ملک زنگنه

مثال:

1) $F(t)=2t+e^{4t}-\cos 5t$

$\Rightarrow L[2t+e^{4t}-\cos 5t]=2L[t]+L[e^{4t}]-L[\cos 5t]=$

$\frac{2}{s^2}+\frac{1}{s-4}-\frac{s}{s^2+25}$

2) $F(t)=3t^3-4\sinh 7t+9$

$L[3t^3-4\sinh 7t+9]=3L[t^3]-4L[\sinh 7t]+L[9]=3\cdot\frac{3!}{s^4}-4\frac{7}{s^2+49}+\frac{9}{s}$

3) $F(t)=\cos^2 at \Rightarrow L\{\cos^2 at\}=$

$L\left[\frac{1+\cos 2at}{2}\right]=\frac{1}{2}L[1+\cos 2at]=\frac{1}{2}L[1]+\frac{1}{2}L[\cos 2at]=$

$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s}+\frac{1}{2}\cdot\frac{s}{s^2+(2a)^2}=\frac{1}{2s}+\frac{s}{2(s^2+4a^2)}$

$\sin^2 at=\frac{1-\cos 2at}{2}$

$\cos^2 at=\frac{1+\cos 2at}{2}$

$\sin 2t=2\sin t\cos t$

تبدیل لاپلاس معکوس

اگر لاپلاس $f(t)$ وجود داشته باشد و برابر $F(s)$ باشد یعنی

$L[f(t)]=F(s)$ آنگاه $f(t)$ را لاپلاس معکوس $F(s)$ می‌نامیم به

عبارتی $f(t)=L^{-1}[F(s)]$

جدول لاپلاس معکوس چند تابع مقدماتی

$L^{-1}[F(s)]$	$f(t)$
$L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]$	1
$L^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right]$	t
$L^{-1}\left[\frac{1}{s^{n+1}}\right]$	$\frac{t^n}{n!}$
$L^{-1}\left[\frac{a}{s^2+a^2}\right]$	$\sin at$
$L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+a^2}\right]$	$\cos at$
$L^{-1}\left(\frac{a}{s^2-a^2}\right)$	$\sinh at$
$L^{-1}\left[\frac{s}{s^2-a^2}\right]$	$\cosh at$
$L^{-1}\left[\frac{1}{s-a}\right]$	e^{at}

مثال ۳: لاپلاس معکوس توابع زیر را بیابید؟

$$1)\ F(s)=\frac{7+s}{s^2-49} \Rightarrow f(t)=L^{-1}\left[\frac{7+s}{s^2-49}\right]$$

$$=L^{-1}\left[\frac{7}{s^2-49}+\frac{s}{s^2-49}\right]=L^{-1}\left[\frac{7}{s^2-49}\right]+L^{-1}\left[\frac{s}{s^2-49}\right]=$$

$$=\sinh 7t+\cosh 7t$$

$$2)\ F(s)=\frac{4}{s^2+s-6} \Rightarrow f(t)=L^{-1}\left[\frac{4}{s^2+s-6}\right]=\frac{4}{s^2+s-6}=$$

$$\frac{4}{(s+3)(s-2)}=\frac{A(s-2)}{(s+3)(s-2)}+\frac{B(s+3)}{(s-2)(s+3)} \rightarrow$$ تجزیه کسر

$$=\frac{(A+B)s-2A+3B}{(s+3)(s-2)} \Rightarrow \begin{cases}-2A+3B=4\\ A+B=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}-\cancel{2A}+3B=4\\ \cancel{2A}+2B=0\end{cases}$$

$$5B=4 \Rightarrow B=\frac{4}{5}$$

$$A+\frac{4}{5}=0 \Rightarrow A=-\frac{4}{5}$$

$$\frac{4}{s^2+s-6}=\frac{-\frac{4}{5}}{s+3}+\frac{\frac{4}{5}}{(s-2)}$$

$$= L^{-1}\left[\frac{-\frac{4}{5}}{s+3} + \frac{\frac{4}{5}}{s-2}\right] = -\frac{4}{5} L^{-1}\left[\frac{1}{s+3}\right] + \frac{4}{5} L^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right] = \frac{4}{5} e^{-3t} + \frac{4}{5} e^{2t}$$

مشتق گیری از تبدیلات لاپلاس:

اگر $L[F(t)] = F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} F(t)\,dt$ وجود داشته باشد آنگاه

با مشتق گیری نسبت به متغیر s داریم:

$$F'(s) = \int_0^{+\infty} -t e^{-st} F(t)\,dt = -\int_0^{+\infty} e^{-st} (tF(t))\,dt =$$

$$-L[tF(t)] \Rightarrow F'(s) = -L[tF(t)] \Rightarrow L[tF(t)] = -F'(s)$$

با استقرا می توان نشان داد که

$$L[t^n F(t)] = (-1)^n F^{(n)}(s)$$

نکته:

$$1)\ L[e^{at}\sin bt] = \frac{b}{(s-a)^2+b^2}$$

$$2)\ L[e^{at}\cos bt] = \frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$$

مثال ⇐ لاپلاس توابع زیر را بیابید.

۱) $L[t\sin t] = (-1)^1 F'(s)$

$F(s) = L[f(t)] = L[\sin t] = \frac{1}{s^2+1} \Rightarrow F(s) = \frac{1}{s^2+1}$

$F'(s) = \frac{-2s}{(s^2+1)^2} \Rightarrow L[t\sin t] = \frac{2s}{(s^2+1)^2}$

۲) $L[e^{4t}\cos 3t] = \frac{s-4}{(s-4)^2+9}$

۳) $L[t^2e^{3t}] = (-1)^2 \cdot F''(s)$

$F(s) = L[f(t)] = L[e^{3t}] = \frac{1}{s-3} \Rightarrow F(s) = \frac{1}{s-3}$

$F'(s) = \frac{-1}{(s-3)^2} \Rightarrow F''(s) = \frac{\cancel{2(s-3)}}{\cancel{(s-3)^4}_{3}} = F''(s) = \frac{2}{(s-3)^3} \Rightarrow$

$L[t^2e^{3t}] = \frac{2}{(s-3)^3}$

$L(t^n e^{at}) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$ در حالت کلی

لاپلاس مشتق تابع

اگر $f(t)$ پیوسته و $f'(t)$ وجود داشته باشد آنگاه

$$L[f'(t)] = sL[f(t)] - f(0)$$

به همین ترتیب f'' و f''' و ...... $f^{(n)}$ به صورت زیر محاسبه می‌شوند.

$$L[f''(t)] = s^2L[f(t)] - sf(0) - f'(0)$$

$$L[f'''(t)] = s^2L[f(t)] - s^2f(0) - sf'(0) - f''(0)$$

$\vdots$

$$L[f^{(n)}(t)] = s^nL[f(t)] - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - s^{n-3}f''(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

نکته: تبدیل لاپلاس مشتق یک تابع حل معادلات دیفرانسیل با ضرایب ثابت با مقادیر اولیه در نقطه صفر را آسان می‌کند.

مثال: معادلات زیر را به کمک تبدیلات لاپلاس محاسبه کنید.

1) $y'+y=3e^{2x}, \; y(0)=0 \Rightarrow L[y']+L[y]=3L[e^{2x}]=$

$sL[y]-\cancel{y(0)}^{0}+L[y]=3\frac{1}{s-2} \Rightarrow$

$$[s+1]L[y] = \frac{3}{s-2} \Rightarrow$$

$$L[y] = \frac{3}{(s+1)(s-2)} = \frac{\overbrace{A(s-2)}^{As-2A}}{(s+1)(s-2)} + \frac{\overbrace{B(s+1)}^{Bs+B}}{(s-2)(s+1)} = \frac{(A+B)s-2A+B}{(s+1)(s-2)} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -2A+B=3 \\ A+B=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\cancel{2A}+B=3 \\ \cancel{2A}+2B \end{cases}$$

$$3B=3 \Rightarrow B=1 \Rightarrow A+B=0 \Rightarrow A=-1$$

$$L[y] = \frac{-1}{s+1} + \frac{1}{s-2} \Rightarrow y = L^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] + L^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right] = -e^{-t} + e^{2t}$$

۲) $y''+3y'+2y=0 \qquad y(0)=0$ و $y'(0)=1$

$$L[y'']+3L[y']+2L[y]=L[0] = s^2L[y]-s\cancel{y(0)}$$

$$-\overset{1}{y'(0)}+3(sL[y]-\cancel{y(0)})+2L[y]=0 \Rightarrow$$

$$s^2L[y]-1+3sL[y]+2L[y]=0 \Rightarrow (s^2+3s+2)L[y]=1 \Rightarrow$$

$$L[y] = \frac{1}{s^2+3s+2} = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{\overbrace{A(s+2)}^{As+2A}}{(s+1)(s+2)} + \frac{\overbrace{B(s+1)}^{Bs+B}}{(s+2)(s+1)} =$$

$$\frac{(A+B)s+2A+B}{(s+1)(s+2)} \Rightarrow \begin{cases} 2A+B=1 \\ A+B=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{2A}+B \\ \cancel{-2A}-2B=0 \end{cases}$$

$$-B=1 \Rightarrow B=-1$$

$$A+B=0 \Rightarrow A-1=0 \Rightarrow A=1$$

$$L[y]=\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}=y\,L^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right]-L^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right]=$$

$$e^{-t}-e^{-2t}= \qquad y=e^{-t}-e^{-2t}$$

قضیه: اگر $F(s)=L[f(t)]$ آنگاه $\int_0^{+\infty}\frac{f(t)}{t}dt=\int_0^{+\infty}F(s)ds$

مثال: انتگرال های زیر را به کمک تبدیلات لاپلاس محاسبه کنید.

$$1)\int_0^{+\infty}\frac{\overset{f(t)}{\sin 2t}}{t}dt=\int_0^{+\infty}L[\sin 2t]ds=$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{2}{s^2+4}ds=\lim_{b\to+\infty}\left(2\int_0^b\frac{ds}{s^2+4}\right)=\lim_{b\to\infty}\left(\cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\,\mathrm{Arctg}\frac{s}{2}\Big|_0^b\right)=$$

$$\lim_{b\to+\infty}\mathrm{Arctg}\frac{b}{2}-\mathrm{Arctg}\,0 \Rightarrow \mathrm{Arctg}\,\infty-\mathrm{Arctg}\,0=\frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{2}$$

$$2)\ \int_0^{+\infty} \frac{e^{-2t}\sin 2t}{t}\,dt = \int_0^{+\infty} L\left[e^{-2t}\sin 2t\right] dt =$$

$$\int_0^{+\infty} L\left[e^{-2t}\sin 2t\right] dt = \int_0^{+\infty} \frac{2}{(s+2)^2+4}\,ds =$$

$$\operatorname{Lim}\left(2\int_0^{b} \frac{1}{(s+2)^2+4}\,ds\right) = \operatorname{Lim}\left(\cancel{2}\cdot \frac{1}{\cancel{2}} \operatorname{Arctg}\frac{s+2}{2}\right)\Big|_0^b$$

$$= \operatorname{Lim}\operatorname{Arctg}\frac{b+2}{2} - \operatorname{Arctg}\infty - \operatorname{Arctg}1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

$\sin\frac{\pi}{2} = 1$	$tg\,0 = 0$	$tg\frac{\pi}{2} = \infty$	$tg\frac{\pi}{4} = 1$
$\operatorname{Arc}\sin 1 = \frac{\pi}{2}$	$\operatorname{Arctg}0 = 0$	$\operatorname{Arctg}\infty = \frac{\pi}{2}$	$\operatorname{Arctg}1 = \frac{\pi}{4}$

α	0	$30^\circ = \pi/6$	$45^\circ = \pi/4$	$60^\circ = \pi/3$	$90^\circ = \pi/2$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos\alpha$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$tg\,\alpha$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	0
$cotg\,\alpha$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$	0

	$180^\circ = \pi$	$360^\circ = 2\pi$
$\sin\alpha$	0	0
$\cos\alpha$	-1	1
$tg\,\alpha$	0	0
$cotg\,\alpha$	∞	∞

آخرین جلسه

پیام استاد:

پرتلاش باشید

موفق و سربلند باشید