بسمه تعالی

جزوه

فیزیک پایه۱

دانشگاه

علم و صنعت

استاد

دکتر عقدائی

بردارها

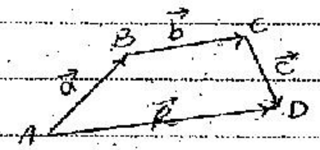
انواع کمیت‌ها { اسکالر، عددی، نرده‌ای مثل: ثانیه، طول، کیلوگرم، متر، لیتر، ولت...
برداری، جهت‌دار مثل: جابجایی، سرعت، نیرو، میدان الکتریکی و شتاب و...

انواع بردارها { ۱. بردار آزاد: مثل شتاب (چون با توجه به جهت آن می‌توانیم آن را در هر نقطه‌ای نشان دهیم)
۲. بردار لغزان: می‌توانیم نقطه‌ی اثر را در امتداد خودش انتقال دهیم (بردار آن عوض نمی‌شود)
۳. بردار بسته: نقطه‌ی اثرش همان نقطه است.

v_0 $2v_0$ v_0

شتاب یکنواخت   بردار آزاد

جمع دو یا چند بردار



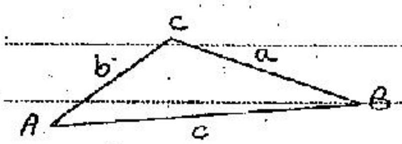
$$\vec{R} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$
$$\vec{R} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$$
$$\vec{R} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$

$$\vec{R} = \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$
$$R^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta$$

* برای اینکه بدانیم کمیت فرضی A برداری است یا نه باید:

$$A_1 + A_2 = A_2 + A_1$$

• جریان کمیت برداری نیست.



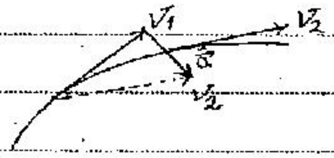
• قضیه کسینوس‌ها:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$
$$c^2 = b^2 + a^2 - 2ab\cos C$$

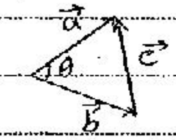
• قانون سینوس‌ها

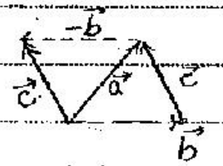
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

تفاضل دو بردار



$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \frac{\vec{V_2} - \vec{V_1}}{t_2 - t_1}$$





$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}$$

$$\vec{a} = \vec{c} + \vec{b}$$

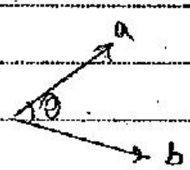
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$

ضرب یک عدد در بردار

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{A} \times n = n\vec{A}$$

ضرب عددی دو بردار



$$\vec{b} \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot \vec{b} = ab\cos\theta$$

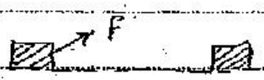
$\Downarrow$

$\cos\theta = \cos(-\theta)$ زوج

$\theta > 90 \Rightarrow a \cdot b < 0$

$\theta < 90 \Rightarrow a \cdot b > 0$

$\theta = 90 \Rightarrow a \cdot b = 0$



$$\cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ab}$$

$W = \vec{F} \cdot \vec{x}$

توان $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$

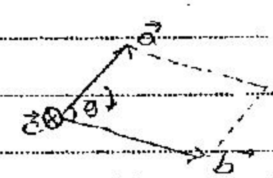
ضرب برداری دو بردار

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$$

$$C = |\vec{c}| = ab\sin\theta$$

* اندازه بردار $\vec{c}$ برابر است با سطح متوازی الاضلاعی که بر روی بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ساخته می‌شود * راستای $\vec{c}$ عمود بر صفحه است

* جهت بردار $\vec{c}$ از قاعده دست راست یا پیچ مشخص می‌شود



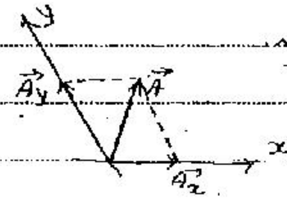
$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

مؤلفه‌های یک بردار - بردار یکه

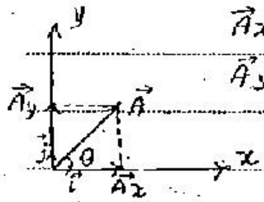
$\vec{A} = \hat{u} \cdot A$

$\vec{A}$ بردار یکه $\qquad \hat{u} = \dfrac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$

$\vec{A}$ را در دو محور x و y تجزیه کنید.



برای رسم مؤلفه‌های یک بردار از انتهای بردار به موازات محورها رسم کنید



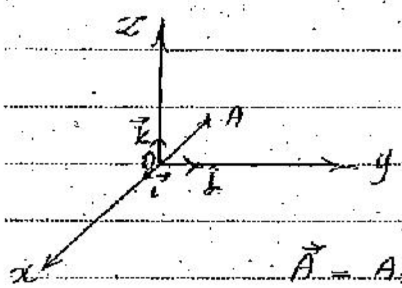
$\vec{A}_x = \vec{A}\cos\theta$

$\vec{A}_y = \vec{A}\sin\theta$

$$\begin{cases} \vec{A}_x = A\cos\theta\,\vec{i} \\ \vec{A}_y = A\sin\theta\,\vec{j} \end{cases} \qquad \vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y$$

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y = A\cos\theta\,\vec{i} + A\sin\theta\,\vec{j}$$

$$|\vec{A}| = A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$



از صفحه موازی xoz یک عمود رسم می‌کنیم در راستای y مؤلفه‌ی $\vec{A}_y$ به دست می‌آید و همچنین مؤلفه‌های $\vec{A}_z, \vec{A}_x$

$$\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$$

اندازه A $\qquad A^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$

جمع و تفریق دو بردار

$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$

$\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x)\vec{i} + (a_y \pm b_y)\vec{j} + (a_z \pm b_z)\vec{k}$$

$$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{(a_x + b_x)^2 + (a_y + b_y)^2 + (a_z + b_z)^2}$$

داریم $\quad i \cdot i = j \cdot j = 1$, $\quad i \cdot k = j \cdot k = 0$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) \cdot (b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k})$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x (\cancel{i \cdot i}) + a_y b_y (\cancel{j \cdot j}) + a_z b_z (\cancel{k \cdot k})$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Subject:

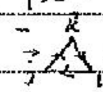
Year. 200 Month. Day.

از طرفی $\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{ab}$

$$\cos\theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{(a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)(b_x^2 + b_y^2 + b_z^2)}}$$

$\vec{i}\times\vec{i}$, $k \times k = 0$

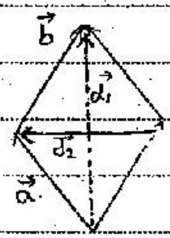
$$\vec{a}\times\vec{b} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) \times (b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k})$$



$\vec{i}\times\vec{j} = \vec{k}$
$\vec{j}\times\vec{k} = \vec{i}$

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_z b_y - a_y b_z)\vec{i} - (a_z b_x - a_x b_z)\vec{j} + (a_y b_x - a_x b_y)\vec{k}$$

مثال: با استفاده از ضرب برداری نشان دهید قطرهای لوزی بر هم عمودند



$\vec{d_1} = \vec{a} + \vec{b}$ دو بردار وقتی بر هم عمودند که ضرب

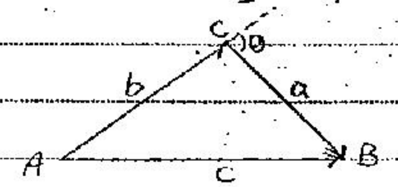
$\vec{d_2} = \vec{a} - \vec{b}$ داخلی آن‌ها صفر شود.

$$\vec{d_1}\cdot\vec{d_2} = (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})$$
$$= \vec{a}\cdot\vec{a} - \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{a} - \vec{b}\cdot\vec{b}$$
$$= a^2 - \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{b} - b^2$$

d_1 و d_2 بر هم عمودند.

اضلاع لوزی باهم برابرند $\Rightarrow \vec{d_1}\cdot d_2 = a^2 - a^2 = 0$

تمرین: با استفاده از خواص بردارها دستور کسینوس‌ها را در یک مثلث ثابت کنید



قضیه کسینوس‌ها: $\vec{C} = \vec{b} + \vec{a}$

$$\vec{C}\cdot\vec{C} = (\vec{b}+\vec{a})\cdot(\vec{b}+\vec{a})$$
$$C^2 = b^2 + a^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b}$$
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\underbrace{(\pi - C)}_{\theta} = -ab\cos C$$

$$\Rightarrow C^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

حل دیگر: $\vec{b} = \vec{C} - \vec{a}$
$\vec{a} = \vec{C} - \vec{b}$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

تفسیر هندسی:

در هر مثلث $|\vec{a}\times\vec{b}| = ab\sin C = 2S_{ABC}$

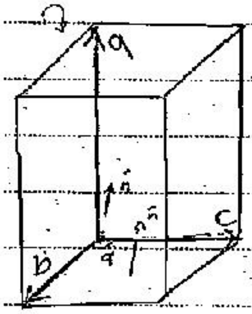
$$|\vec{a}\times\vec{c}| = ac\sin B = 2S_{ABC}$$

$$|\vec{b}\times\vec{c}| = bc\sin A = 2S_{ABC}$$

$$\rightarrow \frac{bc\sin A}{abc} = \frac{ab\sin C}{abc} = \frac{ac\sin B}{abc}$$

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c} = \frac{\sin B}{b} \xrightarrow{\text{معکوس می‌کنیم}} \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

مثال: ثابت کنید حجم متوازی‌السطوح از رابطه روبرو بدست می‌آید. $V = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ ضرب مختلط



$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{a}\cdot(bc\sin\alpha\,\hat{n})$$

$$= \vec{a}\cdot\hat{n}\,(S)$$

$$= hS$$

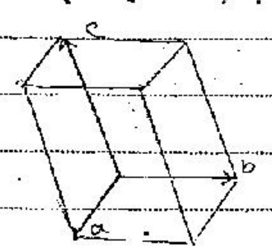
$\vec{a}\cdot\hat{n}$ تصویر بردار a روی n ارتفاع را نشان می‌دهد

بنابراین حجم متوازی‌السطوح برابر است با ضرب مختلط سه بردار a, b, c

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a}) = \vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$$

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

مثال: حجم متوازی‌السطوحی که روی سه بردار a و b و c غیر واقع در یک صفحه با اندازه برابر ٤ بنا شده و زوایای بین بردارها α و β و γ است را بدست آورید (در حالتی که هیچ کدام از بردارها بر هم عمود نیستند)



$$V = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

$$V^2 = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_xa_x+a_ya_y+a_za_z & a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z & a_xc_x+\dots \\ & & \\ & & \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow V^2 = \begin{vmatrix} a\cdot a & a\cdot b & a\cdot c \\ b\cdot a & b\cdot b & b\cdot c \\ c\cdot a & c\cdot b & c\cdot c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 & ab\cos\gamma & ac\cos\beta \\ ab\cos\gamma & b^2 & bc\cos\alpha \\ ac\cos\beta & bc\cos\alpha & c^2 \end{vmatrix}$$

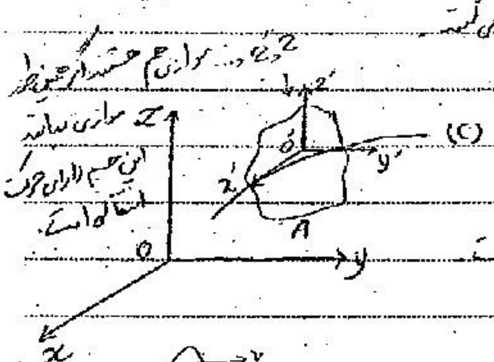
$$\rightarrow V^2 = a^2b^2c^2(1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)$$

$$\Rightarrow V = abc\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$$

سینماتیک

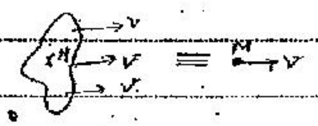
انواع حرکت:

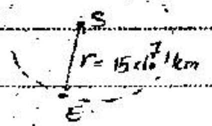
حرکت انتقالی: اجزای جسم به موازات هم حرکت می‌کنند



ذره: هر جسمی که دارای حرکت انتقالی است.
(صرف نظر از ابعاد آن)

اگر ابعاد جسمی در مقایسه با ابعاد مسیرش ناچیز باشد ذره است
مثل (خورشید و زمین)
حکم ذره را دارد.





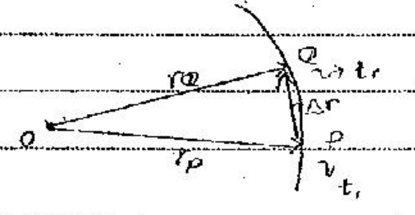
$R_E = 6400\ km$

$$\frac{2R_E}{r} = \frac{2\times 6400}{15\times 10^7} < 10^{-6}$$

ذرات تشکیل دهنده گرد و غبار، اتم‌ها ... را ذره می‌گوییم

بردار مکان

برداری که از مبدأ مختصات (دلخواه) به مکان ذره وصل می‌کنیم



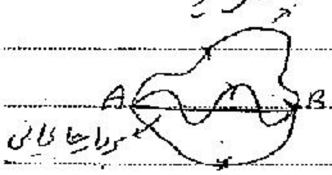
$\Delta r = r_Q - r_P$

Subject:

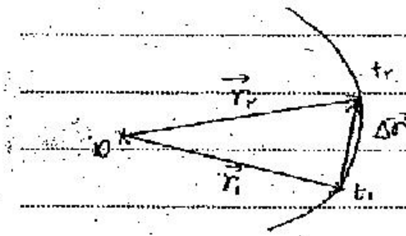
Year. 200 Month. Day.

بردار جابجایی :

پاره خطی است که نقطه‌ی آغاز و پایان را به هم وصل می‌کند



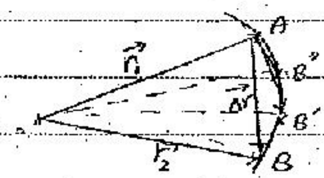
سرعت متوسط :



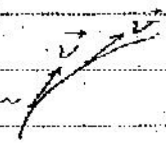
لحظه t_1 $\quad \vec{r}_1$

لحظه t_2 $\quad \vec{r}_2$

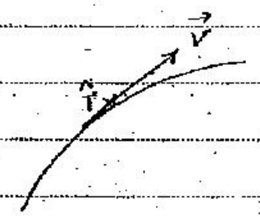
$$\vec{V}_{av} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1} \quad \text{یا} \quad \vec{V}_{av} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$



$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \quad \text{یا} \quad \vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$



بردار سرعت لحظه‌ای مماس بر مسیر است.



$$\vec{V} = V \cdot \underbrace{\hat{T}}_{\text{یکه بردار}}$$

$$\vec{a}_{av} = \frac{\vec{V}_2 - \vec{V}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t}$$

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

بردار سرعت و شتاب را بدست آورید

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \qquad x = x(t) \; , \; y = y(t) \; , \; z = z(t)$$

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k}$$

$$V_x = \frac{dx}{dt} \qquad V_y = \frac{dy}{dt} \qquad V_z = \frac{dz}{dt} \qquad \text{یا} \quad V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}\hat{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{k}$$

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv_x}{dt}$$

$$a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dv_y}{dt} \quad \rightsquigarrow \quad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

$$a_z = \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{dv_z}{dt}$$

معادلات حرکت روی خط راست با شتاب ثابت

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

$$V_x = \frac{dx}{dt}$$

O — A — B — C — D

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$\vec{r} = x\hat{i}$ $x =$ طول نقطه است

$a_x =$ ثابت

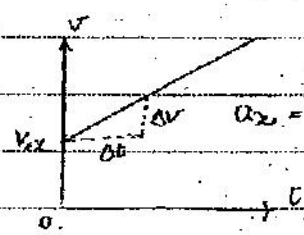
تا آخر فصل ثابت

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} \rightsquigarrow dv_x = a_x\,dt$$

$$\int_{V_{0x}}^{V_x} dV_x = a_x \int_0^t dt$$

$$V_x - V_{0x} = a_x t$$

$$V_x = a_x t + V_{0x}$$



$$a_x = \frac{\Delta V_x}{\Delta t} = \frac{dV_x}{dt} > 0$$

$$V_x = \frac{dx}{dt} = a_x t + V_{0x}$$

$$\frac{dx}{dt} = V_{0x} + a_x t$$

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t V_{0x}\,dt + \int_0^t a_x t\,dt$$

$$a_x \int_0^t t\,dt = a_x\left(\frac{t^2}{2}\right)$$

$\Rightarrow \quad x - x_0 = t V_{0x} + \frac{1}{2} a_x t^2$

$x - x_0 = V_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2 \Rightarrow \underline{x = V_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2 + x_0}$

x به عنوان تابعی از t

〃 〃 〃 x_0

$x - x_0$ جابجایی و نه الزاماً مسافت طی شده

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{dV_x}{dx} \cdot \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{V_x} \Rightarrow a_x = V_x \cdot \frac{dV_x}{dx}$$

$$\int_{x_0}^{x} a_x \, dx = \int_{V_{0x}}^{V_x} V_x \, dV_x = \frac{V_x^2}{2} = \frac{V_x^2}{2} - \frac{V_{0x}^2}{2}$$

$$a_x (x - x_0) = \frac{1}{2} (V^2 - V_0^2)$$

$$\underline{V^2 - V_0^2 = 2a_x (x - x_0)}$$

حرکت سقوط آزاد

$a = g$ با در نظر گرفتن مبدأ حرکت تمام معادلات بالا (شتاب ثابت)

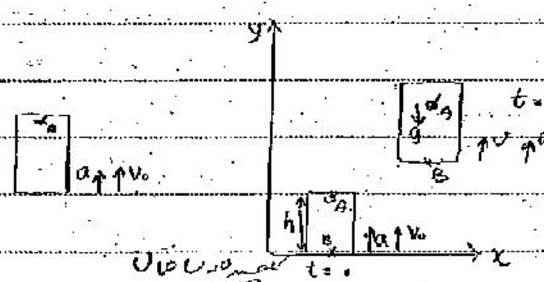
را می‌توان برای حرکت سقوط آزاد هم نوشت.

مثال: آسانسوری با شتاب a در حال بالا رفتن است در لحظه‌ای که سرعت آن V_0 است پیچ a شل شده و

از سقف سقوط می‌کند.

معادلات حرکت پیچ و کف آسانسور

جابجایی و مسافت طی شده توسط پیچ



شتاب پیچ $a_A = -g$

$V_A = -gt + V_0$

$y_A = V_0 t - \frac{1}{2} g t^2 + h$ معادله حرکت پیچ (از دید ناظر ساکن)

$y_B = V_0 t + \frac{1}{2} a t^2$

معادله حرکت کف آسانسور

Subject:

Year. 200 Month. Day.

رسیدن A به B : $y_A = y_B$

$$\cancel{v_0 t} - \frac{1}{2}gt^2 + h = \cancel{v_0 t} + \frac{1}{2}at^2$$

$$h = \frac{1}{2}(a+g)t^2 \Rightarrow \underbrace{t}_{\text{زمان رسیدن}} = \sqrt{\frac{2h}{a+g}}$$

حل $g = 9.8\ m/s^2$

$a = 1.2\ m/s^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2(2.2)}{11}} = \sqrt{\frac{4.4}{11}} = \sqrt{0.4} = 0.63\ s$

$h = 2.2\ m$

$v_0 = 2\ m/s$

جابجایی $\underbrace{y_A - h}_{\text{جابجایی}} = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 = 2(0.63) - \frac{1}{2}(9.8)(0.4)$

$= 1.26 - 1.96 = -0.7\ (m)$

مسافت طی شده تا لحظه برخورد

$v_A = -gt + v_0$

$0 = -10t + 2 \Rightarrow t = 1/5$

$y_A = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 = \frac{2}{5} - 5\left(\frac{1}{25}\right) = \frac{1}{5}\ (m)$

$\frac{1}{5} \times 2 + 2.2\,m = \frac{2}{5} + \frac{11}{5} = \frac{13}{5}$

حرکت روی خط راست با شتاب متغیر

$a = a(t)$ شتاب تابع زمان است

$a = a(v)$

$a = a(x)$

مثال: شتاب حرکت ذره‌ای که روی محور x حرکت می‌کند با تابع بیان شده است سرعت و موقعیت ذره را به صورت تابعی از زمان بدست آورید.

$$\begin{cases} t = 0 \\ x = 0 \\ v = v_0 \end{cases} \qquad a = a_0 e^{-kt}$$

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dt\,\frac{dv}{dt} = a_0 e^{-kt}\,dt$$

$$\int_{v_0}^{v} dv = a_0 \int_0^t e^{-kt}\,dt$$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

$$v - v_0 = -\frac{a_0}{k} \left. e^{-kt} \right|_0^t$$

$$v = v_0 - \frac{a_0}{k}(e^{-kt} - 1) \rightarrow v = v_0 + \frac{a_0}{k}(1 - e^{-kt})$$

$$\frac{dx}{dt} = v_0 + \frac{a_0}{k}(1 - e^{-kt})$$

$$\frac{dv}{dt} = a_0 e^{-kt}$$

$$\int_0^x dx = \int_0^t \left(v_0 + \frac{a_0}{k}(1 - e^{-kt})\right) dt$$

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_0^t a_0 e^{-kt} dt$$

$$x = v_0 t + \frac{a_0}{k}\left(t + \frac{1}{k} e^{-kt}\right)\Big|_0^t$$

$$v - v_0 = \frac{-a_0}{k} e^{-kt}$$

$$-ke^{-kt}$$

$$x = v_0 t + \frac{a_0}{k}\left(t + \frac{1}{k} e^{-kt} - \frac{1}{k}\right)$$

این فرمول از نظر بعد درست است

بعد k، T^{-1} ، e^{-kt} بعد ندارد

چون توان یک عبارت نمی‌تواند دارای بعد باشد باید بی‌بعد باشد e^{-kt} پس باید $-kt$ فاقد بعد باشد در

چون بعد t، T است پس بعد k باید T^{-1} باشد

$$x = \left(v_0 + \frac{a_0}{k}\right)t - a_0(1 - e^{-kt})$$

مثال: قایقی با سرعت ثابت v_0 در حرکت است ناگهان موتورش خاموش می‌شود اگر شتاب حرکت کند شونده ی قایق پس از خاموش شدن موتور به صورت $a = -kv$ باشد

الف) سرعت قایق به صورت تابعی از زمان

ب) موقعیت x به صورت تابعی از زمان

ج) سرعت قایق به صورت تابعی از مکان

د) زمان و مکان ایستادن قایق

$$a = -kv$$

$$a = \frac{dv}{dt} \rightarrow dt \cdot \frac{dv}{dt} = -kv \cdot dt$$

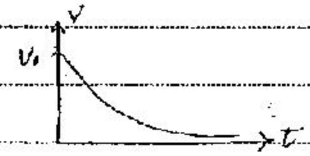
$$\frac{dv}{v} = -k\frac{v}{v} dt$$

$$\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v} = \int_0^t -k\,dt$$

$$\log v \Big|_{v_0}^{v} = -kt \rightarrow \log v - \log v_0 = -kt$$

$$\log \frac{v}{v_0} = -kt$$

$\ln \frac{v}{v_0} = -kt \Rightarrow e^{-kt} = \frac{v}{v_0} \Rightarrow v = v_0 e^{-kt}$



$v = v_0 e^{-kt}$

$\Rightarrow v = v_0 e^{-kt}$

$dt \cdot \frac{dx}{dt} = v_0 e^{-kt} dt$

$\int_0^x dx = \int_0^t v_0 e^{-kt} dt$

$x - 0 = v_0 \int_0^t e^{-kt} dt$

$x = v_0 \left(1 - \frac{e^{-kt}}{-k}\right)$

$x = \frac{v_0}{k}\left(1 - e^{-kt}\right)$

ج) $a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot v \Rightarrow a = v \frac{dv}{dx} \Rightarrow v \frac{dv}{dx} = -kv$

$a = -kv$

$\int_{v_0}^{v} dv = \int_0^x -k\,dx$

$v - v_0 = -kx$

$\boxed{v = -kx + v_0}$

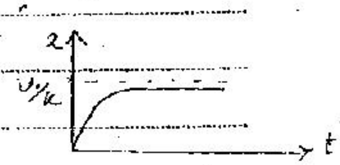
د) $v = v_0 e^{-kt}$

[illegible]

تا ابد $\Rightarrow 0 = v_0 e^{-kt} \Rightarrow t = \infty$

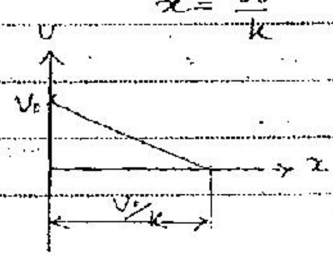
$x = \frac{v_0}{k}\left(1 - e^{-kt}\right) \Rightarrow x = \frac{v_0}{k}\left(1 - e^{-\infty}\right)$

$x = \frac{v_0}{k}$



ایست $v = v_0 - kx$

ایست $0 = v_0 - kx \Rightarrow x = \frac{v_0}{k}$



مثال: در مسئله فوق اگر شتاب حرکت قایق پس از خاموش شدن موتور متناسب با مجذور سرعت لحظه‌ای باشد مسئله را از نو حل کنید.

$$a = -kv^2$$

$$a = -kv^2 \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -kv^2 \Rightarrow dv = -kv^2 dt$$

$$dt = \frac{dv}{-kv^2} \Rightarrow \int_0^t dt = \int_{v_0}^{v} -\frac{1}{k} v^{-2} dv$$

$$\Rightarrow t = -\frac{1}{k}(-v^{-1})\Big|_{v_0}^{v}$$

$$\Rightarrow -kt = -v^{-1}\Big|_{v_0}^{v} \Rightarrow -kt = -\frac{1}{v} + \frac{1}{v_0} \Rightarrow \frac{1}{v} = kt + \frac{1}{v_0} \Rightarrow v = \frac{v_0}{v_0 kt + 1}$$

ب) $$\frac{dx}{dt} = \frac{v_0}{v_0 kt + 1} \Rightarrow \int_0^x dx = \int \frac{v_0}{v_0 kt+1} dt \Rightarrow x = \int \frac{1}{kt + \frac{1}{v_0}} dt$$

$$kt + \frac{1}{v_0} = u \Rightarrow du = k\,dt,\quad dt = \frac{du}{k} \;\Bigg\}\Rightarrow x = \int \overbrace{\frac{1}{kt + \frac{1}{v_0}}}^{\frac{1}{u}} \underbrace{dt}_{\frac{du}{k}} = \int \frac{du}{ku} = \frac{1}{k}\ln u$$

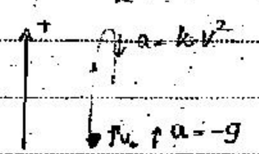
$$x = \frac{1}{k}\ln\left(kt + \frac{1}{v_0}\right)\Big|_0^t = \frac{1}{k}\left(\ln\left(kt+\frac{1}{v_0}\right) - \ln\frac{1}{v_0}\right) = \frac{1}{k}\ln(ktv_0+1) \Rightarrow e^{kx} = ktv_0 + 1$$

ج) $$\frac{dv}{dx}\cdot v = -kv^2 \Rightarrow dv = -kv\,dx \Rightarrow \int dx = \int \frac{dv}{-kv} \Rightarrow x = -\frac{1}{k}\ln\frac{v}{v_0}$$

مثال: جسمی با سرعت اولیه v_0 به بالا پرتاب می‌شود اگر شتاب حاصل از مقاومت هوا متناسب با مجذور سرعت لحظه‌ای باشد و g ثابت فرض شود (نقطه پرتاب مبدأ فرض شود و جهت مثبت به بالا)

سرعت حدی $V_T^2 = \frac{g}{k}$

الف) جسم تا چه ارتفاعی بالا می‌رود



$R = kmv^2$

ب) با چه سرعتی به نقطه پرتاب برمی‌گردد؟

سرعت حدی: $\Sigma F = 0 \Rightarrow -mg - kmv^2 \Rightarrow v^2 = \frac{g}{k}$ v_T

$$\Sigma F = ma \Rightarrow -mg - kmv^2 = ma \Rightarrow -g - kv^2 = a$$

$$\frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = -g - kv^2$$

$$\frac{dv}{dx}\cdot v = -g - kv^2$$

$$\Rightarrow g + kv^2 = -v\frac{dv}{dx} \Rightarrow \frac{v\,dv}{g + kv^2} = -dx$$

$$\int_{v_0}^{0} \frac{v\,dv}{\frac{g}{k} + v^2} = -k\int_0^H dx$$

تغییر متغیر $\frac{g}{k} + v^2 = u \Rightarrow v\,dv = \frac{du}{2}$

$$\Rightarrow \int \frac{du}{2u} = \frac{\ln u}{2} = \frac{\ln}{2}\left(v^2 + \frac{g}{k}\right)$$

Subject: سرعت برخورد با زمین $v^2 = \frac{V_0^2 V_T^2}{V_T^2 + V_0^2} \to V = \frac{V_0 V_T}{(V_T^2 + V_0^2)^{1/2}}$

Year. 200 Month. Day.

رفت $\int_{V_0}^{0} \frac{v\,dv}{\frac{g}{k} + v^2} = -k\int_0^H dx \to \ln \frac{g}{g + kV_0^2} = -2kH$ (1)

$\Sigma f_i = ma \to -mg + kmv^2 = ma \to -g + kv^2 = v\frac{dv}{dx}$

برگشت $\int_0^V \frac{v\,dv}{kv^2 - g} = \int_H^0 dx \to \ln \frac{-kv^2 + g}{g} = -2kH$ (2)

(1) = (2) $\Rightarrow \frac{g}{g + kV_0^2} = \frac{-kv^2 + g}{g}$

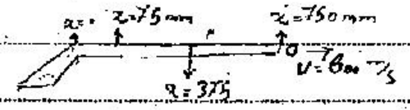
$V_T^2 = \frac{g}{k}$ $\to 1 - (\frac{V}{V_T})^2 = \frac{1}{1 + (\frac{V_0}{V_T})^2} = \frac{V_T^2}{V_T^2 + V_0^2} \to (\frac{V}{V_T})^2 = \frac{1 - V_T^2}{V_T^2 + V_0^2}$ ↑ از رابطه V_T^2 کم

مثال: شتاب گلوله در داخل لوله‌ی تفنگ با رابطه‌ی $a = \frac{k}{x}$ تغییر می‌کند که k عدد ثابت است.

$x = 7.5$ mm به حرکت در می‌آید با سرعت $600\ m/s$ از دهانه‌ی تفنگ خارج می‌شود $(x = 750 mm)$

شتاب و سرعت گلوله را در $x = 375$ mm بیابید.

$\begin{cases} x = 7.5\ mm \\ V_0 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 750\ mm \\ v = 600\ m/s \end{cases}$ $\begin{cases} x = 375\ mm \\ v = ? \\ a = ? \end{cases}$



$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} \to a = v\frac{dv}{dx}$, $a = \frac{k}{x}$

$\Rightarrow v\frac{dv}{dx} = \frac{k}{x}$

$\int_{V_0}^{V} v\,dv = \int_{x_0}^{x} k\frac{dx}{x} \to \frac{1}{2}v^2\Big|_{V_0}^{V} = k\underbrace{\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{x}}_{\log x|_{x_0}^{x}}$

$\to v^2 - v_0^2 = 2k\log\frac{x}{x_0}$

$(600)^2 - 0 = 2k\log\frac{750}{7.5} \Rightarrow 36\times10^4 = 2k\log 100$ $\qquad a = \frac{k}{x}$

$k = \frac{36\times10^4}{2\log 100} = 3.91\times10^4\ m^2/s^2$ $\qquad k = ax,\ k = LT^{-2}L,\ k = L^2T^{-2}$

$a = \frac{k}{x} = \frac{3.91\times10^4\ m^2/s^2}{0.375} = 1.04\times10^5\ m/s^2$

سرعت $V_2^2 - V_1^2 = 2k\log\frac{x_2}{x_1}$

$(600)^2 - V_1^2 = 2\times3.91\times10^4\log\frac{750}{375}$

$36\times10^4 - V_1^2 = 2\times3.91\times10^4\underbrace{\log 2}_{0.693} \to V_1 = 553\ m/s$

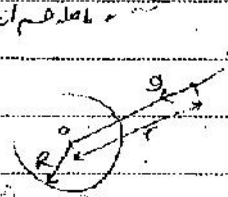
Subject: ۱۳۸۵

Year. 2006 Month. Day.

مثال: از سطح زمین جسمی را حداقل با چه سرعت اولیه‌ای به بالا پرتاب کنیم تا الف) به اندازه شعاع زمین از سطح زمین بالا برود ب) دیگر به زمین برنگردد.

$$g = \frac{GM_e}{R_e^2} \qquad a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dr} \cdot \frac{dr}{dt}$$

$$a = v\,\frac{dv}{dr} \Rightarrow v\frac{dv}{dr} = -\frac{GM}{r^2}$$



از طرفی $g = -\dfrac{GM_e}{r^2}$

$$\int_{v_1}^{v_2} v\,dv = GM\int_{r_1}^{r_2} -\frac{dr}{r^2}$$

$$\frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2) = GM\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$

$$v_2^2 - v_1^2 = 2GM\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$

الف، از سطح زمین: $v_1 = v_0$, $r_1 = R_e$, $r_2 = 2R_e$, $v_2 = 0$

$$\Rightarrow 0 - v_0^2 = 2GM\left(\frac{1}{2R_e} - \frac{1}{R_e}\right)$$

$$v_0^2 = 2GM\left(\frac{1}{2R_e}\right)$$

$$v^2 = \cancel{2}\frac{GM}{\cancel{2}R_e}$$

$$\rightarrow v_0^2 = \frac{g_0 R_e^{\cancel{2}}}{\cancel{R_e}} = g_0 R_e \Rightarrow v_0 = \sqrt{g_0 R_e}$$

ب) $v_1 = v_0$, $r_1 = R_e$, $r_2 = \infty$, $v_2 = 0$

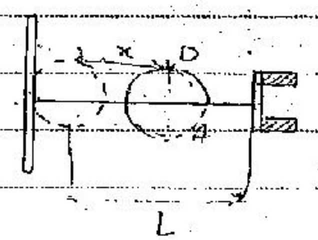
$$0 - v_0^2 = 2GM\left(\frac{1}{R_e} - \frac{1}{\infty}\right) \Rightarrow v_0^2 = \frac{2GM}{R_e} = 2g_0R_e$$

$$v_{0\,min} = \sqrt{2g_0R_e} = \sqrt{2\times 9.8\times 64\times 10^5}$$

$$\simeq \sqrt{2\times 10\times 64\times 10^5} \simeq 11.2\ \mathrm{km/s}$$

$$v_0 = \sqrt{2g_0R_e}$$

مثال: مطابق شکل گوی فولادی A به قطر D بر میله افقی که به قطب یک آهنربا منتهی می‌شود می‌لغزد و شتاب گوی از رابطه $a = \dfrac{k}{(L-x)^2}$ تبعیت می‌کند که در آن k اندازه شدت میدان مغناطیسی است. اگر در $x = 0$ گوی از حالت سکون رها شود با چه سرعتی با قطب آهنربا برخورد می‌کند؟



$$a = \frac{k}{(L-x)^2}$$

$$v\frac{dv}{dx} = \frac{k}{(L-x)^2} \Rightarrow \int_{0}^{v} v\,dv = \int \frac{k}{(L-x)^2}\,dx$$

$$\int_0^v v\,dv = \int_{D/2}^{L-D/2} k\frac{dx}{(L-x)^2} \Rightarrow \frac{1}{2}v^2 = k(L-x)^{-1}\Big|_{D/2}^{L-D/2}$$

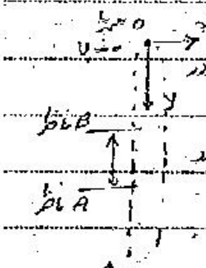
$(v_0=0)$ چون ساکن

$$\Rightarrow \frac{1}{2}v^2 = k\left(\frac{1}{D/2} - \frac{1}{L-D/2}\right)$$

$$v^2 = 2k\left(\frac{2}{D} - \frac{2}{2L-D}\right) = 2k\,\frac{4(L-D)}{D(2L-D)}$$

سرعت ذرات در لحظه برخورد: $v = \sqrt{\frac{8k(L-D)}{D(2L-D)}}$

مثال: جسمی را به بالا پرتاب می‌کنیم.



برای نقطه A: زمانی که توپ دوبار از آن عبور می‌کند $= T_A$

زمانی که توپ دوبار از آن عبور می‌کند $= T_B$ برای نقطه B

فاصله $AB = H \Rightarrow g = ?$

$$OA = \frac{1}{2}g\left(\frac{T_A}{2}\right)^2$$

$$OB = \frac{1}{2}g\left(\frac{T_B}{2}\right)^2$$

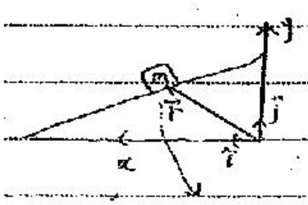
$$OA - OB = \frac{1}{2}g\left(\frac{T_A^2}{4} - \frac{T_B^2}{4}\right)$$

$$H = \frac{1}{8}g(T_A^2 - T_B^2)$$

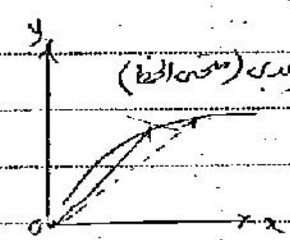
$$g = \frac{8H}{T_A^2 - T_B^2}$$

حرکت دوبعدی (منحنی الخط)

$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$



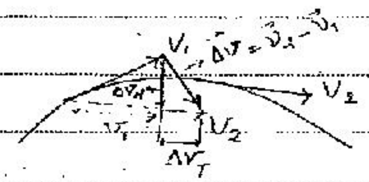
این یک حرکت یک بعدی است چون جسم (m) روی خط راست حرکت می‌کند.



حرکت دو بعدی (منحنی الخط)

اگر جسم روی منحنی حرکت کند حرکت دو بعدی است.

شتاب مماسی و شتاب عمودی یا نرمال



اندازه و راستای بردار سرعت تغییر کرده

ΔV_N تفاضل در بردار به دلیل تغییر راستا

ΔV_T تفاضل بردار به دلیل تغییر اندازه

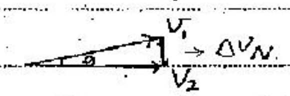
$$\vec{\Delta V} = \vec{\Delta V}_N + \vec{\Delta V}_T$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{\Delta V}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec V_N}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec V_T}{\Delta t}$$

$$\vec a = \vec a_N + \vec a_T$$

نرمال یا عمودی — شتاب مماسی که به موازات بردار سرعت.

وقتی $\Delta t \to 0$ میل می‌کند



$\theta \to 0 \Rightarrow \Delta V_N \perp \vec V_1 , \vec V_2$

a_T شتاب مماسی به موازات تغییر اندازه سرعت. ، a_N شتاب نرمال ناشی از تغییر راستای سرعت

محاسبه شتاب مماسی و نرمال

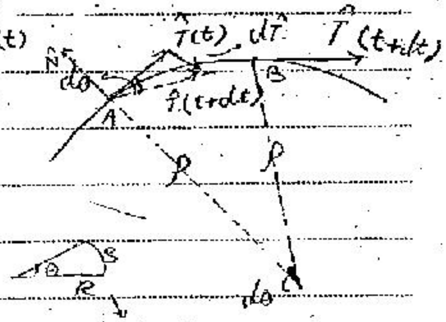
$\vec V = V \hat T$ (مشتق بگیریم)

$$\frac{d\vec V}{dt} = \frac{dV}{dt}\hat T + \frac{d\hat T}{dt} V$$

اندازه شتاب — می‌بینیم که شتاب مماسی است.

$\frac{d\hat T}{dt}$?

$$d\hat T = \hat T(t+dt) - \hat T(t)$$



$$\Rightarrow |d\vec T| = \underbrace{|\hat T|}_{=1} d\theta$$

$$|d\vec T| = d\theta \rightsquigarrow d\vec T = d\theta \cdot \hat N$$

$S = R\theta$

$$\frac{d\vec T}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\hat N$$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{ds}\,\underbrace{\frac{ds}{dt}}_{V} \qquad \frac{d\theta}{ds} = \frac{d\theta}{\rho\, d\theta} = \frac{1}{\rho} \quad \text{خمیدگی}$$

ρ = شعاع خمیدگی

$\widehat{AB} = ds$

$$\frac{d\hat{T}}{dt} = -\frac{V}{\rho}\hat{N} \qquad \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{T} - \frac{V^2}{\rho}\hat{N}$$

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{a}$$

$$\frac{dv}{dt} = a_T \qquad \frac{-V^2}{\rho} = a_N$$

بزرگی سرعت

شعاع خمیدگی مسیر است.

مثال: شعاع خمیدگی مسیر حرکت را برحسب بردار سرعت و شتاب بدست آورید

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{T} - \frac{V^2}{\rho}\hat{N}$$

$\times\vec{V}$

$$\vec{V}\times\vec{a} = \frac{dv}{dt}(\hat{T}\times\vec{V}) - \frac{V^2}{\rho}(\hat{N}\times\vec{V})$$

$$\vec{a}\times\vec{V} = \frac{dv}{dt}(\hat{T}\times V\hat{T}) - \frac{V^3}{\rho}(\hat{N}\times\hat{T})$$

$$\vec{a}\times\vec{V} = 0 + \frac{V^3}{\rho}(\hat{T}\times\hat{N}) \quad \Rightarrow \quad \vec{a}\times\vec{V} = \frac{V^3}{\rho}\hat{b}$$

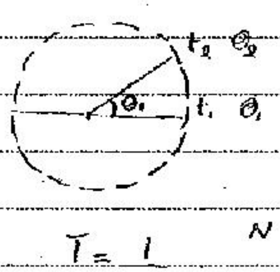
بردار یکه عمود بر صفحه $\hat{T}$ و $\hat{N}$ است.

$$\Rightarrow |\vec{a}\times\vec{V}| = \frac{V^3}{\rho} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\rho} = \frac{|\vec{a}\times\vec{V}|}{V^3}$$

از نظر بعد: $\frac{(LT^{-2})(LT^{-1})}{L^3T^{-3}} = \frac{1}{L}$

بعد ρ

حرکت دایره‌ای یکنواخت



سرعت زاویه‌ای متوسط $\overline{W} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$

$$W = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} \quad \frac{rad}{s}$$

$T = \frac{1}{\text{بسامد } \nu}$ بسامد ν

زمان تناوب

PILAVARAN

PAGE:

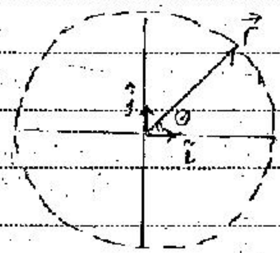
Subject:

Year. 200 Month. Day.

شتاب متوسط زاویه‌ای $\bar{\alpha} = \dfrac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \dfrac{\Delta \omega}{\Delta t} \quad \text{rad}/s^2$

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} \quad \text{rad}/s^2$$

در حرکت دایره‌ای یکنواخت $\alpha = 0$ است.



مختصات قطبی

$$\vec{r} = r\sin\theta\,\hat{j} + r\cos\theta\,\hat{i}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{v} = r\frac{d\theta}{dt}\cos\theta\,\hat{j} + r\frac{d\theta}{dt}(-\sin\theta)\,\hat{i}$$

$\dfrac{d\theta}{dt} = \omega$

$$\vec{v} = -r\omega\sin\theta\,\hat{i} + r\omega\cos\theta\,\hat{j}$$

$v^2 = \sqrt{v_i^2 + v_j^2}$ $\quad v^2 = r^2\omega^2\sin^2\theta + r^2\omega^2\cos^2\theta$

$$\boxed{v = r\omega}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -r\omega^2\cos\omega t\,\hat{i} - r\omega^2\sin\omega t\,\hat{j}$$

پس شتاب بدون حرکت دایره‌ای یکنواخت ثابت است.

$$\vec{a} = -\omega^2(r\cos\omega t\,\hat{i} + r\sin\omega t\,\hat{j})$$

$$\vec{a} = -\omega^2\vec{r}$$

$a = \omega^2 r \;,\; a_N = \dfrac{v^2}{r}$, $a_N = \dfrac{v^2}{\rho}$

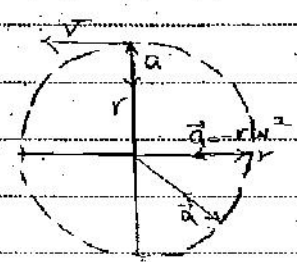
شتاب مماسی صفر است.

$a_T = \dfrac{dv}{dt}$

$v = r\omega \Rightarrow a_T = r\dfrac{d\omega}{dt}$

$\rightarrow a_T = r\alpha = 0$

حرکت دایره‌ای یکنواخت $\alpha = 0$



$|\vec{r}| =$ ثابت

(دایره)

$$\vec{r}\cdot\vec{r} = r^2$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt}\cdot\vec{r} + \vec{r}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr^2}{dt}$$

چون r^2 ثابت است مشتق آن صفر

$$2\vec{r}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt} = 0$$

PILAVARAN

PAGE:

$$2\vec{r}\cdot\vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{r} \perp \vec{v}$$

$$\vec{v}\cdot\vec{v} = v^2 \Rightarrow \text{ثابت}$$

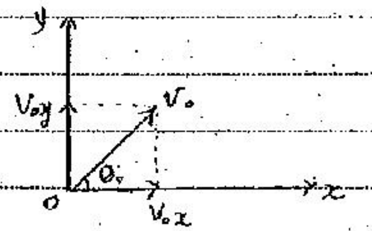
حرکت دایره‌ای یکنواخت

$$\vec{v}\,\frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v}\,\frac{d\vec{v}}{dt} = 0$$

$$2\vec{v}\,\frac{d\vec{v}}{dt} = 0 \rightsquigarrow 2\vec{v}\cdot\vec{a} = 0 \rightsquigarrow \vec{v} \perp \vec{a}$$

حرکت پرتابه

از نقطه O جسمی با سرعت اولیه v_0 که زاویه θ نسبت به افق پرتاب می‌کنیم معادلات حرکت، سرعت



$$V_{0x} = V_0 \cos\theta_0$$

$$V_{0y} = V_0 \sin\theta_0$$

در راستای x :

$$a_x = 0$$

چون نیرویی نداریم $\quad v_x = \text{ثابت}$

$$V_x = V_0 \cos\theta_0$$

$$\frac{dx}{dt} = V_0 \cos\theta_0 \rightsquigarrow \int_0^x dx = \int_0^t V_0 \cos\theta_0\, dt$$

$$\rightsquigarrow x = V_0 t \cos\theta_0$$

در راستای y : $\quad a_y = -g$

$$\frac{dv_y}{dt} = -g \rightsquigarrow \int_{V_{0y}}^{V_y} dv_y = -g\int_0^t dt$$

$$v_y - V_{0y} = -g t$$

$$v_y = -g t + V_0 \sin\theta_0$$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

$$V_y = -gt + V_0 \sin\theta$$

$$\frac{dy}{dt} = -gt + V_0 \sin\theta_0 \rightsquigarrow \int_0^y dy = \int -gt + V_0 \sin\theta_0 \, dt$$

$$\rightarrow y = V_0 t \sin\theta_0 - \tfrac{1}{2} g t^2$$

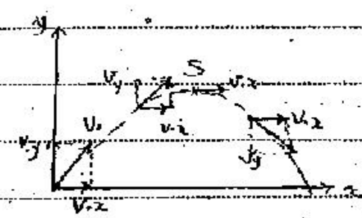
$$\begin{cases} V_x = V_0 \cos\theta_0 \\ x = V_0 t \cos\theta_0 \\ V_y = V_0 \sin\theta_0 - gt \\ y = V_0 t \sin\theta_0 - \tfrac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

معادله مسیر: $x = V_0 t \cos\theta_0 \rightsquigarrow t = \dfrac{x}{V_0 \cos\theta_0}$

$$y = V_0 \left(\frac{x}{V_0 \cos\theta_0}\right) \sin\theta_0 - \tfrac{1}{2} g \left(\frac{x^2}{V_0^2 \cos^2\theta_0}\right)$$

$$y = x \tan\theta_0 - g \frac{x^2}{2V_0^2 \cos^2\theta_0}$$

معادله سهمی $y = Ax - Bx^2$



$V_y = 0$ در نقطه S

$$0 = V_0 \sin\theta_0 - gt \rightsquigarrow V_0 \sin\theta_0 = gt$$

زمان رسیدن به اوج $t = \dfrac{V_0 \sin\theta_0}{g}$

S نقطه $\rightsquigarrow$ $x = V_0 \left(\dfrac{V_0 \sin\theta_0}{g}\right) \cos\theta_0$

نصف برد $x = \dfrac{V_0^2 \sin 2\theta_0}{2g}$

$$y = V_0 \left(\frac{V_0 \sin\theta_0}{g}\right) \sin\theta_0 - \tfrac{1}{2} g \left(\frac{V_0 \sin\theta_0}{g}\right)^2$$

ارتفاع اوج $y = \dfrac{V_0^2 \sin^2\theta}{2g}$

Subject:

Year. 200   Month.   Day.

$$y = v_0 t \sin\theta_0 - \tfrac{1}{2} g t^2$$

$\Rightarrow y = 0$

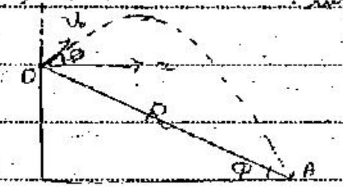
$t = 0$

زمان رفت و برگشت $\quad t = \dfrac{2v_0 \sin\theta_0}{g}$ $\quad$ زمان رفت و زمان برگشت با هم برابرند (صرف‌نظر از مقاومت هوا)

برد پرتابه $\quad R = \dfrac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g}$

$\theta_0 = 45 \Rightarrow R = R_{Max} = \dfrac{v_0^2}{g}$

مثال: از بالای تپه‌ای به زاویه‌ی شیب φ پرتابه‌ای را با سرعت اولیه v با زاویه θ نسبت به افق پرتاب می‌کنیم. θ را چنان تعیین کنید که برد پرتابه در امتداد تپه بیشینه باشد.



$$x = v_0 t \cos\theta$$

$$y = v_0 t \sin\theta - \tfrac{1}{2} g t^2$$

معادله مسیر پرتابه : $\quad y = x\tan\theta - \dfrac{g x^2}{2v_0^2 \cos^2\theta}$

مختصات نقطه A را در معادله مسیر پرتابه قرار می‌دهیم

$$A\begin{cases} x = R\cos\varphi \\ y = -R\sin\varphi \end{cases}$$

از R فاکتور گیری

$$-R\sin\varphi = R\cos\varphi\tan\theta - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta} R^2\cos^2\varphi$$

$$R(\cos\varphi\tan\theta + \sin\varphi) - \frac{g\cos^2\varphi}{2v_0^2\cos^2\theta} R^2 = 0$$

جواب بدیهی $\quad R = 0 \quad$ نقطه پرتاب

$$R = \frac{2(\cos\varphi\tan\theta + \sin\varphi) v_0^2 \cos^2\theta}{g\cos^2\varphi}$$

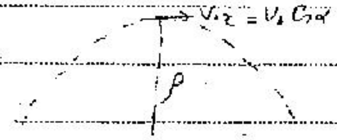
مشتق گرفتیم

شرط بیشینه بودن R $\quad \dfrac{dR}{d\theta} = 0 \Rightarrow 0 = \dfrac{\left(2(\cos\varphi(1+\tan^2\theta)) v_0^2\cos^2\theta - 2v_0^2\sin\theta\cos\theta\right) g\cos^2\varphi}{g^2\cos^4\varphi}$ $\quad$ صورت $= 0$

پس $\quad 2\cos\varphi\, v_0^2\cos^2\theta(1+\tan^2\theta) \cdot g\cos^2\varphi = 2v_0^2\sin\theta\cos\theta \cdot g\cos^2\varphi$

$$\cos\varphi\cos\theta(1+\tan^2\theta) = \sin\theta$$

مثال: شعاع انحنای مسیر یک پرتابه را در نقطه اوج بدست آورید.



$$\frac{1}{\rho} = \frac{|\vec{v} \times \vec{a}|}{v^3} = \frac{|V_0 \cos\theta_0 x - g|}{v^3}$$

$$\rightarrow \rho\, |V_0 \cos\theta_0 - g| = v_{0x}^3 \Rightarrow \rho\, v_{0x}\, g = v_{0x}^{3}$$

$$\rho g = v_{0x}^2 \rightarrow \rho = \frac{v_{0x}^2}{g}$$

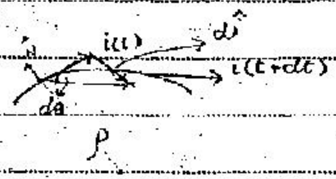
مثال: بردار مکان ذره‌ای در دستگاه مختصات دکارتی به صورت $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ که در آن x و y و z که خود توابعی از زمان هستند. شتاب مماسی، شتاب نرمال، شعاع انحنای مسیر را برحسب x و y و z و مشتقات آن بدست آورید.

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k}$$

$$\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k} \qquad \vec{v}_x = v_x\hat{i} \Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\hat{i} + \frac{d\hat{i}}{dt} \cdot v_x$$

$$\Rightarrow \vec{a}_x = a_{T_x}\hat{i} + \frac{d\hat{i}}{dt} \cdot v_x$$

$$d\hat{i} = \hat{i}(t+dt) - \hat{i}(t)$$



$$|d\hat{i}| = \underbrace{|\hat{i}(t)|}_{1} \cdot d\theta \Rightarrow d\vec{\hat{i}} = d\theta \cdot \hat{N}$$

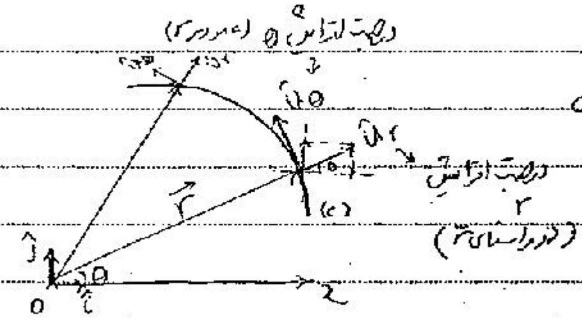
$$\frac{d\hat{i}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\hat{N} = \frac{v_x}{\rho}\hat{N}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \underbrace{\frac{d\theta}{ds}}_{\rho d\theta} \cdot \underbrace{\frac{ds}{dt}}_{v_x} = \frac{v_x}{\rho}$$

$$\vec{a}_x = a_{T_x}\hat{i} - \frac{v_x^2}{\rho}\hat{N}$$

برای y، z چی؟

$$\vec{a} = \underbrace{a_{T_x}\hat{i} + a_{T_y}\hat{j} + a_{T_z}\hat{k}}_{\vec{a}_T} - \underbrace{\left(\frac{v_x^2}{\rho} + \frac{v_y^2}{\rho} + \frac{v_z^2}{\rho}\right) \cdot \hat{N}}_{\vec{a}_N}$$



سرعت و شتاب در مختصات قطبی

$$\hat{u}_{r_x} = |\hat{u}|\cos\theta\,\hat{i} = \cos\theta\,\hat{i}$$
$$\hat{u}_{r_y} = |\hat{u}|\sin\theta\,\hat{j} = \sin\theta\,\hat{j} \quad \Rightarrow \hat{u}_r = \cos\theta\,\hat{i} + \sin\theta\,\hat{j}$$

به همین ترتیب $\hat{u}_\theta = \cos\theta\,\hat{j} - \sin\theta\,\hat{i}$

$$\frac{d\hat{u}_r}{dt} = \dot{\hat{u}}_r = -\dot{\theta}\sin\theta\,\hat{i} + \dot{\theta}\cos\theta\,\hat{j}$$
$$\dot{\hat{u}}_r = \dot{\theta}(-\sin\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j})$$
$$\dot{\hat{u}}_r = \dot{\theta}\,\hat{u}_\theta$$

$$\dot{\hat{u}}_\theta = -\dot{\theta}\cos\theta\,\hat{i} - \dot{\theta}\sin\theta\,\hat{j}$$
$$\dot{\hat{u}}_\theta = -\dot{\theta}(\cos\theta\,\hat{i} + \sin\theta\,\hat{j})$$
$$\dot{\hat{u}}_\theta = \dot{\theta}\,\hat{u}_r$$

$$\vec{r} = r\hat{u}_r \Rightarrow \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}\hat{u}_r + r\dot{\hat{u}}_r$$

شتاب $= (\dot{r}\dot{\theta} + \dot{\theta}\dot{r})\hat{u}_\theta + r\ddot{\theta}\hat{u}_\theta$

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{u}_r + r\dot{\theta}\hat{u}_\theta$$
$$v_r = \dot{r}, \quad v_\theta = r\dot{\theta} \Rightarrow V = \sqrt{V_r^2 + V_\theta^2}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{r}\hat{u}_r + \dot{r}\dot{\hat{u}}_r + (\dot{r}\dot{\theta}\hat{u}_\theta + r\ddot{\theta}\hat{u}_\theta + r\dot{\theta}\dot{\hat{u}}_\theta)$$
$$\vec{a} = \ddot{r}\hat{u}_r + \dot{r}\dot{\theta}\hat{u}_\theta + \dot{r}\dot{\theta}\hat{u}_\theta + r\ddot{\theta}\hat{u}_\theta + r\dot{\theta}(-\dot{\theta}\hat{u}_r)$$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{u}_\theta$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$

$$a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \quad \rightsquigarrow a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2}$$

حرکت دایره‌ای یکنواخت (با مقدار ثابت)

$r =$ ثابت است (شعاع دایره)

$\dot{r} = 0 \quad , \quad \ddot{r} = 0$

$\dot{\theta} = \omega \quad , \quad \ddot{\theta} = \dot{\omega} = \underset{\text{شتاب زاویه‌ای}}{\alpha} = 0$

$V_r = 0$

$V_\theta = r\dot{\theta} = r\omega$

$a_r = 0 - r\omega^2$

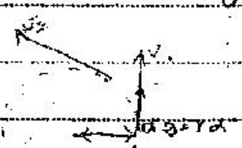
$a_\theta = 0 + 0 = 0$ شتاب زاویه‌ای صفر است.

حرکت دایره‌ای غیر یکنواخت

r ثابت $\quad \dot{r} = 0$

$\dot{\theta} = \omega \qquad \begin{cases} V_r = 0 \\ V_\theta = r\omega \end{cases} \qquad \begin{cases} a_r = -r\omega^2 \\ a_\theta = r\ddot{\theta} = r\alpha \end{cases}$ شتاب مماسی

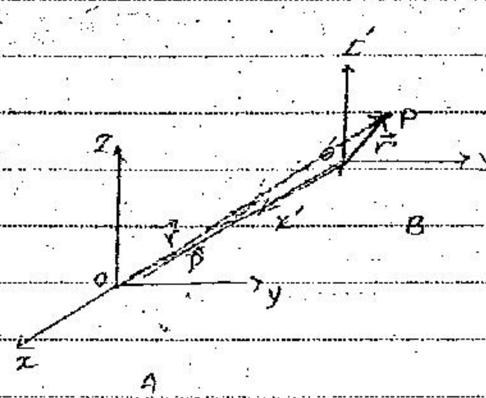
$\ddot{\theta} \neq 0$



پس حرکت دستگاه نسبی

دستگاه A ثابت است ولی دستگاه B است

A در مبدا خود حرکت کند



$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{\rho}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}'}{dt} + \frac{d\vec{\rho}}{dt}$$

$$V_{P/A} = \vec{V}_{P/B} + \vec{V}_{B/A}$$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

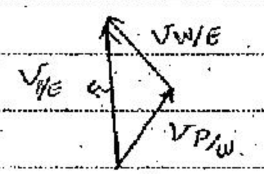
مشتق گیری: $\frac{d}{dt}(\vec{V}_{P/A}) = \frac{d}{dt}(\vec{V}_{P/B}) + \frac{d}{dt}(\vec{V}_{B/A})$

(شتاب نسبی حرکت دو ذره) $\vec{a}_{P/A} = \vec{a}_{P/B} + a_{B/A}$

اگر B با سرعت ثابت نسبت به A حرکت انتقالی داشته باشد

$\vec{a}_{B/A} = 0 \Rightarrow \vec{a}_{P/A} = \vec{a}_{P/B}$

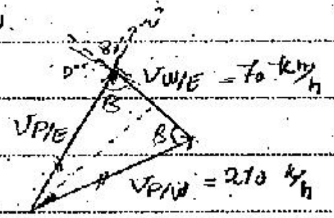
مثال: فرض کنید هواپیمای (p) در هوا حرکت می‌کند و باد (w) هم می‌وزد.



$\vec{V}_{P/E} = \vec{V}_{P/W} + \vec{V}_{W/E}$

چگونه بچرخد تا سرعت هواپیما تغییری نکند

$V_{P/E}$ نیز همان $210\ \frac{km}{h}$ است

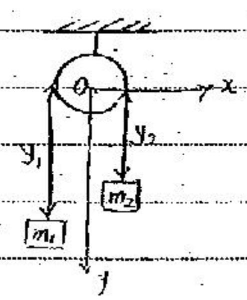


$\sin\frac{\theta}{2} = \frac{1/2 \times 70}{210} = 1/6$

$\theta/2 = \sin^{-1}(1/6) \Rightarrow \theta = 18.4$

$180 - 18.4 = 161.6 \rightarrow \beta = 81 \Rightarrow V_{P/E} \simeq V_{P/W}$

حرکت وابسته



$y_1 + y_2 + \pi R =$ ثابت

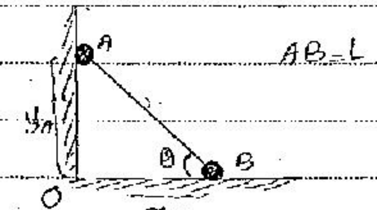
$y_1 + y_2 =$ ثابت

$\dot{y}_1 + \dot{y}_2 = 0 \qquad \ddot{y}_1 + \ddot{y}_2 = 0$

$V_1 + V_2 = 0 \Rightarrow |V_1 = -V_2 \qquad a_1 + a_2 = 0$

$(a_1 = -a_2)$

مثال: سرعت های A و B را بیابید.



$$x_B^2 + y_A^2 = L^2 \quad \text{ثابت}$$

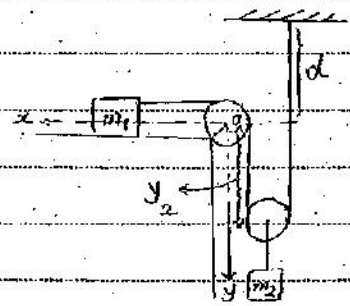
$$2x_B\dot{x}_B + 2y_A\dot{y}_A = 0$$

$$x_B v_B + y_A v_A = 0$$

$$\frac{v_B}{v_A} = -\frac{y_A}{x_B} \Rightarrow \frac{v_B}{v_A} = -\tan\theta$$

$$v_B = -v_A \tan\theta$$

مثال: رابطه شتاب ها را بیابید.

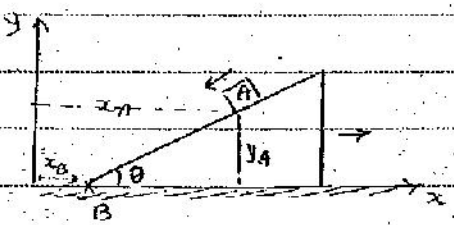


$$x_1 + 2y_2 + d = \text{ثابت}$$

$$\dot{x}_1 + 2\dot{y}_2 = 0$$

$$\ddot{x}_1 + 2\ddot{y}_2 = 0 \Rightarrow a_1 = -2a_2$$

مثال: رابطه شتاب ها را بدست آورید.



$$\tan\theta = \frac{y_A}{x_A - x_B}$$

$$y_A = \tan\theta\,(x_A - x_B)$$

$$\dot{y}_A = \tan\theta\,(\dot{x}_A - \dot{x}_B)$$

$$\ddot{y}_A = \tan\theta\,(\ddot{x}_A - \ddot{x}_B)$$

$$a_{Ay} = \tan\theta\,(a_{Ax} - a_{Bx})$$

مثال: اولاً ثابت کنید در حرکت منحنی الخط شعاع انحنای مسیر حرکت ذره از رابطه $\rho = \dfrac{V^3}{|\vec{a} \times \vec{V}|}$ بدست می‌آید.

مثال: اگر بردار موقعیت ذره‌ای به صورت زیر باشد شتاب مماسی و نرمال و شعاع انحنای مسیر را بدست آورید.

$$\vec{r} = b(t + \sin t)\,\hat{i} + b(1 - \cos t)\,\hat{i}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = b(1+\cos t)\,\hat{i} + b(\sin t)\,\hat{j} \Rightarrow V_x = b(1+\cos t)\,\hat{i}$$

$$V_y = b \sin t\,\hat{j}$$

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\hat{T} + \frac{v^2}{\rho}\hat{N} \qquad |V| = \sqrt{b^2(1+\cos t)^2 + b^2\sin^2 t}$$

[illegible]

$$|V| = b\sqrt{1+\cos^2 t + 2\cos t + \sin^2 t}$$

$$|V| = b\sqrt{2}\cdot\sqrt{1+\cos t}$$

$$a_T = \frac{dv}{dt}\hat{T} = b\sqrt{2}\cdot\frac{-\sin t}{2\sqrt{1+\cos t}}\hat{T} = -\frac{b\sqrt{2}}{2}\frac{\sin t}{\sqrt{1+\cos t}}\hat{T}$$

ولی : $\dfrac{dv_x}{dt} = a_x = -b\sin t\,\hat{i}$, $\dfrac{dv_y}{dt} = a_y = -b\cos t\,\hat{j}$

$$|\vec{a}| = b$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_T^2 + a_N^2} \Rightarrow b^2 = a_T^2 + a_N^2 \Rightarrow a_N^2 = b^2 - a_T^2$$

[illegible] $\Rightarrow |\vec{a}_N| = \dfrac{\sqrt{2}}{2} b\sqrt{1+\cos t} \Rightarrow \vec{a}_N = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} b\sqrt{1+\cos t}\,\hat{N}$

$$a_N = \frac{v^2}{\rho} \Rightarrow \rho = \frac{2b(1+\cos t)}{\frac{\sqrt{2}}{2} b(\sqrt{1+\cos t})} = b\,2\sqrt{2}\cdot\sqrt{1+\cos t}$$

راه دوم $\qquad |a \times V| = b^2(\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t) = b^2(1+\cos t)$

[illegible] بردارهای V و a برابر

[illegible] $\qquad \vec{a}_N = -\dfrac{v^2}{\rho}\hat{N}$, $|a \times V| = \dfrac{v^3}{\rho}$ $\Bigg\}\Rightarrow \rho = \cdots$

$$\vec{a}_N = -\frac{v^2}{\rho}\hat{N}$$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

مثال: ذره‌ای در مسیری به معادله زیر حرکت می‌کند برای آن سرعت و شتاب ذره را به صورت تابعی از زمان بدست آورید (و اندازه‌ی آن‌ها)

$y = R(1 - \cos\omega t)$

$x = R(\omega t - \sin\omega t)$

$\frac{dx}{dt} = R(\omega - \omega\cos\omega t)$

$V_x = R\omega(1 - \cos\omega t)$

$\frac{dV}{dt} = R(\omega \sin\omega t)$

$V_y = R\omega \sin\omega t$

$\left.\begin{array}{l} a_x = R\omega^2 \sin\omega t \\ a_y = R\omega^2 \cos\omega t \end{array}\right\} \Rightarrow |a| = R\omega^2$

$|\vec{V}| = \sqrt{R^2\omega^2(2 - 2\cos\omega t)} = R\omega\sqrt{2 - 2\cos\omega t}$

زاویه‌ی بین بردار سرعت و شتاب برابر است با: $\theta = \frac{1}{2}\omega t$

$$\underset{a_x V_x + a_y V_y}{a \cdot v} = |a||v|\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{R^2\omega^3 \sin\omega t(1 - \cos\omega t) + R^2\omega^3 \sin\omega t \cos\omega t}{R^2\omega^3\sqrt{2 - 2\cos\omega t}}$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{\cancel{R^2\omega^3} \sin\omega t}{\cancel{R^2\omega^3}\underbrace{\sqrt{2 - 2\cos\omega t}}_{2(2\sin^2\frac{\omega t}{2})}} = \frac{\overset{2\sin\frac{\omega t}{2}\cos\frac{\omega t}{2}}{\sin\omega t}}{2\sin\frac{\omega t}{2}} = \cos\frac{\omega t}{2}$$

$$\cos\theta = \cos\frac{\omega t}{2} \Rightarrow \theta = \frac{1}{2}\omega t$$

مثال: ذره‌ای روی مسیر زیر حرکت می‌کند. شتاب و سرعت ذره را به صورت تابعی از t بدست آورید. زاویه‌ی بین $\vec{a}$ و $\vec{V}$ را بدست آورده و نشان دهید مقدار آن ثابت است

$r = be^{kt}$ $\quad b, k, c =$ ثابت‌اند

$\theta = ct$

داریم $\vec{V} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$

$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta}$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V} = bke^{kt}\hat{r} + bce^{kt}\hat{\theta} = be^{kt}(k\hat{r} + c\hat{\theta})$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = be^{kt}\left((k^2 - c^2)\hat{r} + 2kc\hat{\theta}\right)$$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{|a||v|} \qquad \vec{a}\cdot\vec{v} = (be^{kt})^2 \; M(k,c)$$

$$|a||v| = (be^{kt})^2 \; N(k,c)$$

$$|a| = be^{kt}\sqrt{(k^2-c^2)^2+(2kc)^2}$$

$$|v| = be^{kt}\sqrt{k^2+c^2}$$

$$\cos\theta = \frac{(be^{kt})^2}{(be^{kt})^2}\;\frac{M(k,c)}{N(k,c)}$$

دینامیک:

قانون اول نیوتن: هر جسم اگر بر آن نیرویی وارد نشود حالت سکون یا حرکت یکنواخت خود را ادامه می‌دهد.

قانون دوم نیوتن: اگر به جسم (دو یا) نیرو وارد شود دارای شتاب می‌شود هم جهت

$$\frac{F_1}{a_1} = \frac{F_2}{a_2} = \frac{\text{نیرو}}{\text{شتاب}} = m \;\Rightarrow\; \vec{F} = m\vec{a} \qquad \Sigma \vec{F}_x = m\vec{a}_x$$

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a} \qquad \Sigma\vec{F}_y = m\vec{a}_y$$

$$\vec{F}_{net} = m\vec{a} \qquad \Sigma\vec{F}_z = m\vec{a}_z$$

$$N = 1kg.m/s^2$$

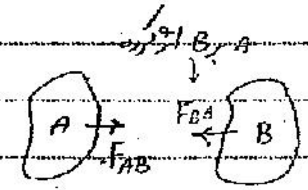
قانون هوک: $F_x = -kx$ برای هم برابر کردن نیرو، x را در برابر می‌کنیم.

افزایش طول فنر

قانون دوم شامل قانون اول هم می‌شود یعنی اگر $F=0$ باشد چون $m\neq 0$ است پس $a=0$ است.

قانون نیوتن در چارچوب لخت قرار گرفته است.

قانون سوم نیوتن: نیرو برهم کنش دو جسم است

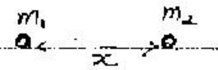


$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$$

اگر نتوانستیم برای نیرویی عکس العمل پیدا کنیم آن شبه نیرو است.

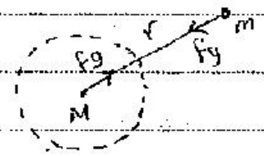
Subject:

Year. 200 Month. Day.



$$F = G\frac{m_1 m_2}{x^2} \qquad G = 6.67\times10^{-11}\ \frac{N\cdot m^2}{kg^2}$$

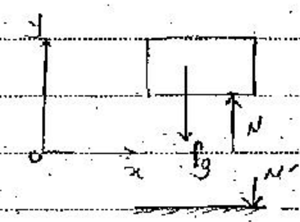
جرم جاذبه ای



$$f_g = \frac{Mm}{r^2}G$$

طبق آزمایشات جرم جاذبه ای و لختی یکی هستند.

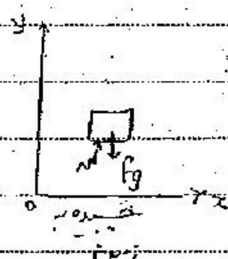
مثال: جسمی روی سطحی قرار دارد آن را تجزیه و تحلیل کنید



$$\Sigma f_y = N - f_g = 0$$
$$N = f_g = mg$$

وزن جسم: وزن نیرویی است که بر جسمی وارد می کنیم تا آن را متعادل نگه داریم

مثال. شکل زیر را تجزیه و تحلیل کنید.



$$\Sigma f_y = N - f_g = ma_y$$
$$N = f_g + ma_y$$
$$N = m(g + a_y)$$

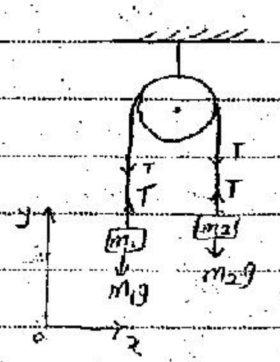
اگر $a > 0$ آنگاه $N > mg$

اگر $a < 0$ آنگاه $N < mg$

اگر $a = -g$ آنگاه $N = 0$

کشش = نیرویی که به نخ پاره شده باید وارد کرد تا حالت حرکت تغییر نکند

نخ ایده آل نخی است که در اثر کشش طولش ثابت بماند.



m_1 حرکت: $T - m_1 g = m_1 a_1$

m_2 حرکت: $T - m_2 g = m_2 a_2$

با توجه به اینکه طول نخ ثابت است $a_1 + a_2 = 0$

$$T - m_1 g = -m_1 a_2$$
$$-T + m_2 g = m_2 a_2$$
$$g(m_2 - m_1) = -(m_2 + m_1)a_2$$

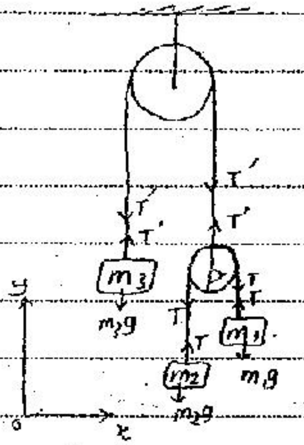
$$a_2 = \frac{g(m_2 - m_1)}{-(m_2 + m_1)}$$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

آیا $m_1+m_2=m_3$ شرط لازم $a_3=0$ است یا $m_1=m_2$؟

مثال: کشش‌ها و شتاب‌ها را بیابید

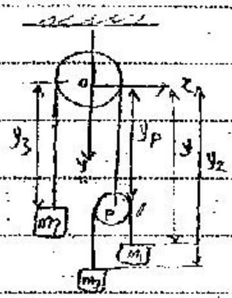


P قرقره: $T'-2T-W_p=m_p a_p$ (وزن قرقره، جرم قرقره)

در این مثال $m_p\simeq 0$

$T'-2T=0 \Rightarrow \boxed{T'=2T}$

$$\begin{cases} T-m_1g=m_1a_1 \\ T-m_2g=m_2a_2 \\ T'-m_3g=m_3a_3 \\ T'=2T \\ a_1+a_2+2a_3=0 \end{cases}$$



$$\times(-2)\begin{cases} T-m_1g=-2m_1a_3-m_1a_2 \\ T-m_2g=m_2a_2 \\ 2T-m_3g=m_3a_3 \end{cases}$$

(I) $2m_2g-m_3g=-2m_2a_2+m_3a_3$

$$\begin{cases} T-m_1g=-2m_1a_3-m_1a_2 \\ -T+m_2g=-m_2a_2 \end{cases}$$

(II) $m_2g-m_1g=-2m_1a_3-m_1a_2-m_2a_2$

$(y_1-y_p)+(y_2-y_p)=Cost$

$y_1+y_2-2y_p=Cost$

$\dot{y}_1+\dot{y}_2-2\dot{y}_p=0$

$\ddot{y}_1+\ddot{y}_2-2\underbrace{\ddot{y}_p}_{-\ddot{y}_3}=0 \Rightarrow a_1+a_2+2a_3=0$

$y_3+y_p=Const$

$\dot{y}_3+\dot{y}_p=0$

$\ddot{y}_3+\ddot{y}_p=0$

$\ddot{y}_3=-\ddot{y}_p$

$\times 2m_1$: $2m_2g-m_3g=-2m_2a_2+m_3a_3$

$\times m_3$: $m_2g-m_1g=-2m_1a_3-m_1a_2-m_2a_2$

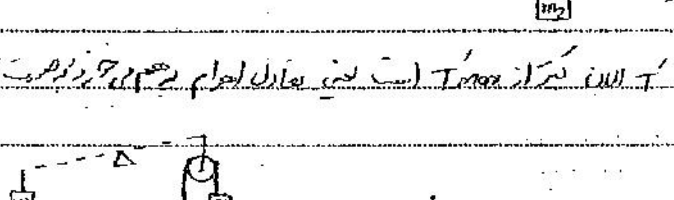
$4m_1m_2g-3m_1m_3g+m_2m_3g=-4m_1m_2a_2-a_2m_3(m_1+m_2)$

$4m_1m_2g-3m_1m_3g+m_2m_3g=a_2(-4m_1m_2-m_1m_3-m_2m_3) \Rightarrow a_2=\dfrac{g(4m_1m_2-3m_1m_3+m_2m_3)}{-4m_1m_2-m_1m_3-m_2m_3}$

I $\Rightarrow$ $2m_2g-m_3g-2m_2\left(\dfrac{g(4m_1m_2-3m_1m_3+m_2m_3)}{-4m_1m_2-m_1m_3-m_2m_3}\right)=m_3a_3$

$a_3=$

مثال:



$m_1+m_2=m_3$

$m_1\neq m_2$

m_1, m_2 کشش ماکزیمم وقتی بوجود می‌آید که $m_1=m_2$ باشد

$\Rightarrow T'=\dfrac{2m_1m_2g}{m_1+m_2}$

$T'=T'_{max} \Leftarrow m_1=m_2$

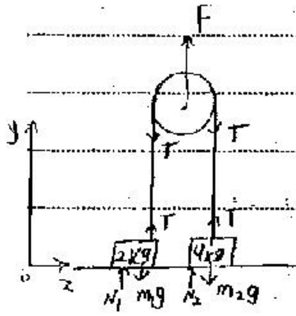
که در این صورت $a=0$

پس T' الان کمتر از T'_{max} است یعنی معادل اجرام ... کمتر از m_3 است

Subject:

Year. 200   Month.   Day.

مثال: مسئله را در حالت‌های زیر حل کنید



حالت اول $\quad F - 2T = m_p a_p = 0$ $\qquad F = 30N$

$F = 2T$ $\qquad F = 50N$

$T = F/2$ $\qquad$ حل کنید $\quad F = 100N$

$g = 9.8\ m/s^2$ $\qquad T = 15\ N$

هیچکدام حرکت نمی‌کنند

حالت دوم $\quad T = F/2 = 25$ $\qquad\qquad$ حالت سوم $\quad T = F/2 = 50$

$T - m_1 g = m_1 a_1$ $\qquad\qquad T - m_1 g = m_1 a_1$

$25 - 2\times 9.8 = 2a_1 \Rightarrow a_1 = 2.7\ m/s^2 \uparrow$ $\qquad 50 - 2\times 9.8 = 2a_1$

$a_2 = 0$ $\qquad\qquad \boxed{a_1 = 15.2}$

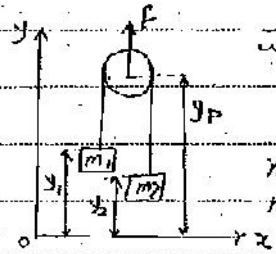
$N_2 = \dots$ $\qquad\qquad T - m_2 g = m_2 a_2$

$50 - 4\times 9.8 = 4a_2$

$\boxed{a_2 = 2.7}\ m/s^2$

در حالتی که $F = 100N$ است شتاب قرقره را نسبت به زمین و شتاب جرم‌ها را نسبت به قرقره بدست آورید

دستگاه مختصات را متحرک در نظر می‌گیریم قرقره دارای شتاب است



طول نخ ثابت است $\rightarrow$ $(y_p - y_1) + (y_p - y_2) = Const$

$2y_p - y_1 - y_2 = Const$

$m_1 = 2kg$ $\qquad 2\dot{y}_p - \dot{y}_1 - \dot{y}_2 = 0$

$m_2 = 4kg$ $\qquad 2\ddot{y}_p - \ddot{y}_1 - \ddot{y}_2 = 0$

از راه دینامیکی حل نمی‌شد از سینماتیک حل کردیم

$2a_p - a_1 - a_2 = 0$

دینامیک: $F - 2T = m_p a_p = 0$

$a_p = \dfrac{a_1 + a_2}{2} = \dfrac{15.2 + 2.7}{2} = 8.95 \simeq 9\ m/s^2$

$a_{m_1/E} = a_{m_1/P} + a_{P/E}$

$a_1 = a_1' + a_p \Rightarrow 15.2 = a_1' + 8.95$

$a_1' = 6.25\ m/s^2 \uparrow$

$a_2 = a_2' + a_p \Rightarrow 2.7 = a_2' + 8.95$

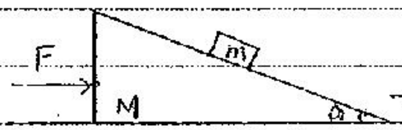
$a_2' = -6.25 \downarrow$

شتاب‌های نسبی باهم برابر است

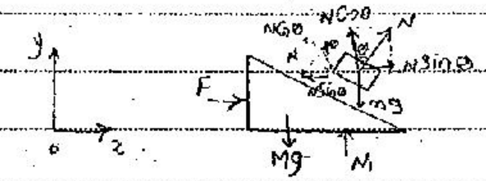
PILAVARAN

PAGE:

کاربردهای قوانین نیوتن:



مثال: این که با چه شتابی حرکت کند تا جسم m روی گوه ساکن باقی بماند



حرکت m:
$$\begin{cases}\Sigma F_x = N\sin\theta = m a_x \\ \Sigma F_y = N\cos\theta - mg = m a_y\end{cases}$$

حرکت M:
$$\begin{cases}\Sigma F_x = F - N\sin\theta = Ma \\ \Sigma F_y = N_1 - N\cos\theta - Mg = 0\end{cases}$$
$$a_y = 0$$

گر $a_x = a$ چون می‌خواهیم جسم m حرکت نکند (یعنی شتابش با شتاب گوه برابر باشه)

$$N\sin\theta = ma$$
$$N\cos\theta - mg = 0$$
$$\tan\theta = \frac{a}{g} \Rightarrow a = g\tan\theta$$

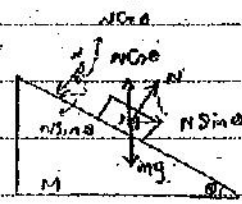
محاسبه F:

چون m نسبت به M شتاب ندارد می‌توان هر دو را با هم یک جسم واحد در نظر گرفت.

$$\begin{cases}F - N\sin\theta = Ma \\ N\sin\theta = ma\end{cases}$$
$$F = (m+M)g\tan\theta$$

اگر گوه را به حال خود رها کنیم چه اتفاقی می‌افتد.

کلیه معادلات بالا با $F=0$ است.

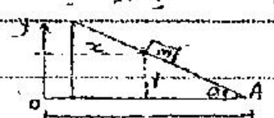


$$\begin{cases}N\sin\theta = m a_x \\ N\cos\theta - mg = m a_y \\ -N\sin\theta = Ma \\ a_y = -\tan\theta\,(a - a_x)\end{cases}$$

چون جسم m دیگر شتاب y دارد. $a_y = 0$ نیست پس

← ۴ مجهول داریم و ۳ معادله، معادله سوم را باید از شتاب نسبی استفاده کنیم.

$$a = a_x$$



$$\tan\theta = \frac{y}{x_A - x}$$

$$N\sin\theta = ma$$
$$-N\sin\theta = Ma$$
$$2N\sin\theta = (m-M)a$$
$$a = \frac{2N\sin\theta}{m-M}$$

$$y = \tan\theta\,(x_A - x)$$
$$\ddot{y} = \tan\theta\,(\ddot{x}_A - \ddot{x})$$
$$a_y = \tan\theta\,(a - a_x)$$

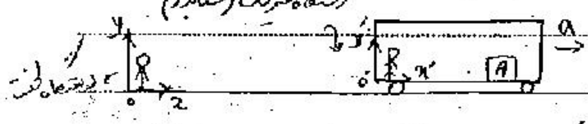
Subject:

Year. 200   Month.   Day.

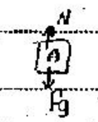
شبه نیروی لخت :

دستگاه غیرلخت (شتابدار)

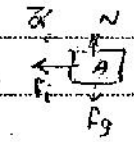
دستگاه لخت



A از دید ناظر (دستگاه لخت) ساکن است و درون با شتاب a حرکت می‌کند

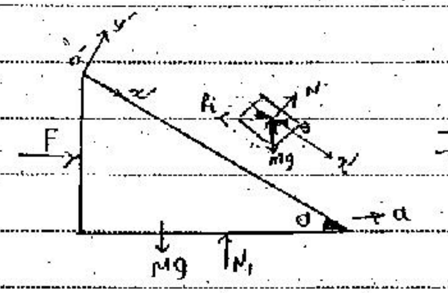


از دید ناظر (دستگاه شتابدار) A با شتاب a' در جهت مخالف حرکت می‌کند.



$|F_i| = m|\vec{a}|$ ⟸ $\vec{F_i} = -m\vec{a}$ ⟸ بردار F_i در خلاف جهت بردار a است.

مسئله را از طریق شبه نیروی لخت حل کنید.



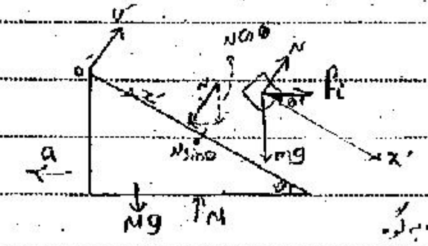
در دستگاه m ساکن است: $F_i + N + mg = 0$

$$\begin{cases} \sum F_{x'} = mg\sin\theta - F_i\cos\theta = 0 \\ \sum F_{y'} = N - mg\cos\theta - F_i\sin\theta = 0 \end{cases}$$

$$mg\sin\theta - ma\cos\theta = 0$$

$$a = g\tan\theta$$

$$F = (m+M)a = (m+M)g\tan\theta$$



وقتی گوه را رها کنیم:

(جسم m حرکت می‌کند)

ولی ناظر m

ناظر جسم به گوه

$$\begin{cases} \sum F_{x'} = F_i\cos\theta + mg\sin\theta = ma'_{x} \\ \sum F_{y'} = N - mg\cos\theta + F_i\sin\theta = ma'_{y} = 0 \end{cases}$$

در راستای y حرکت ندارد ($a'_y = 0$)

حرکت گوه از دید ناظر لخت

$$\begin{cases} \sum F_x = -N\sin\theta = -Ma \\ \sum F_y = N_1 - Mg - N\cos\theta = 0 \end{cases}$$

از دید ناظر روی گوه، گوه دارای شتاب نیست.

$N\sin\theta - Ma = 0$

$N\sin\theta - F_i = 0$

ادامه

شتاب m در راستای سطح شیب دار از ← $ma\cos\theta + mg\sin\theta = ma'$ ⇒ $a' = a\cos\theta + g\sin\theta$

در راستای عمود بر آن

$$\xrightarrow{\times\sin\theta}\begin{cases} N = mg\cos\theta - ma\sin\theta \\ N\sin\theta = Ma \end{cases} \Rightarrow Ma = mg\sin\theta\cos\theta - ma\sin^2\theta$$

شتاب بین زمین گوه . $a = \dfrac{mg\sin\theta\cos\theta}{M + m\sin^2\theta}$

مثال: از سطح زمین گلوله‌ای را با سرعت اولیه V_0 به بالا پرتاب می‌کنیم. اگر شتاب حرکت گلوله در امتداد y در سطح زمین از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید.
سرعت گلوله به صورت تابعی از y را به دست آورید.

$$a = \frac{g_0}{(1+\frac{y}{R})^2}$$

$$\vec{a} = \frac{-g_0}{(1+\frac{y}{R})^2}\hat{r} \qquad a = \frac{dv}{dy}\underbrace{\frac{dy}{dt}}_{v} \Rightarrow v\frac{dv}{dy} = \frac{-g_0}{(1+\frac{y}{R})^2}$$

$$\Rightarrow \int v\,dv = \int \frac{-g_0}{(1+\frac{y}{R})^2}dy \Rightarrow \int -v\,dv = \int \frac{g_0R^2}{(y+R)^2}dy$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}V_0^2 - \frac{1}{2}V^2 = g_0R^2\int_0^y \frac{dy}{(y+R)^2}$$

$$\frac{1}{2}V_0^2 - \frac{1}{2}V^2 = g_0R^2\left(\frac{1}{y+R}\right)\Big|_0^y$$

$$V^2 = 2g_0R^2\left(\frac{1}{y+R} - \frac{1}{R}\right) + V_0^2$$

اگر g ثابت فرض شود ارتفاع بیشینه را به دست آورید

ارتفاع: $v = 0 \Rightarrow V_0^2 = 2g_0R^2\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{y+R}\right)$

$$2g_0R - V_0^2 = \frac{2g_0R^2}{y+R} \Rightarrow y_{max} = \frac{RV_0^2}{2g_0R - V_0^2}$$

مثال: ذره‌ای در مختصات قطبی با رابطه‌ی زیر داده شده، r برحسب m، t برحسب s، θ برحسب رادیان
سرعت و شتاب ذره در لحظه‌ی $t=1s$ به دست آورید. اندازه‌ی بردارهای سرعت و شتاب را بیابید.

$r = t^3 - 2t^2 \qquad \theta = t^3 - 4t$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta})^2\,\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\,\hat{\theta}$$

$$\vec{v} = \dot{r}\,\hat{r} + r\dot{\theta}\,\hat{\theta}$$

$$\begin{cases} r = t^3 - 2t^2 \\ \theta = t^3 - 4t \end{cases} \Rightarrow \vec{v} = (3t^2 - 4t)\,\hat{r} + (t^3 - 2t^2)(3t^2 - 4)\,\hat{\theta}$$

$$\vec{a} = \left(6t - 4 - (t^3 - 2t^2)(3t^2 - 4)^2\right)\hat{r} + \left(2(3t^2 - 4t)(3t^2 - 4) + (t^3 - 2t^2)\,6t\right)\hat{\theta}$$

به جای t عدد 1 را می‌دهیم

مثال: از ارتفاع زیاد جسمی بدون سرعت اولیه رها می‌شود. اگر نیروی مقاومت هوا ثابت فرض شود یا سرعت خطی v متناسب باشد. الف. سرعت ذره به صورت تابعی از زمان. ب. پس از چه مدت جسم به سرعت حدی می‌رسد؟ ج. پس از چه مدتی سرعت جسم به ۹۹٪ سرعت حدی می‌رسد؟ در این مدت جسم چه مسافتی را طی کرده است؟

زمین $\downarrow +$ $\quad R \uparrow \; \downarrow mg$

$$R = -k\vec{v} \qquad * \int \frac{1}{x \pm a}\,dx = \ln|x \pm a|$$

$$\vec{F} = m\vec{g} - k\vec{v}$$

$$m\frac{dv}{dt} = -kv + mg \Rightarrow -dt = \frac{m\,dv}{kv - mg}$$

$$-dt = \frac{m}{k}\left(\frac{dv}{v - \frac{mg}{k}}\right)$$

$$\Rightarrow \int_0^t -dt = \int_0^v \frac{m}{k}\left(\frac{dv}{v - \frac{mg}{k}}\right) \Rightarrow -t = \frac{m}{k}\ln\left|v - \frac{mg}{k}\right|\Big|_0^v$$

$$\Rightarrow -t = \frac{m}{k}\ln\left|\frac{v - mg/k}{-mg/k}\right| = \frac{m}{k}\ln\left|1 - \frac{v}{mg/k}\right|$$

+ مثبت است این عبارت چون

[illegible]

$$\frac{v}{mg/k} < 1$$

$$\sum F = 0 \rightarrow -kv + mg = 0$$

$$v = v_T = \frac{mg}{k}$$

$$-t = \frac{m}{k}\ln\left(1 - \frac{v}{v_T}\right)$$

سقوط

$$v < v_T \Rightarrow v < \frac{mg}{k}$$

$$\frac{v}{mg/k} < 1$$

$$e^{-\frac{k}{m}t} = 1 - \frac{v}{v_T} \Rightarrow \frac{v}{v_T} = \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$$

$$v = v_T\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$$

$$t \to \infty \Rightarrow e^{-\frac{k}{m}t} \to 0 \Rightarrow v \to v_T$$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

$V = \frac{99}{100} V_T \Rightarrow \frac{99}{100} V_T = V_T (1 - e^{-\frac{k}{m}t}) \Rightarrow e^{-\frac{k}{m}t} = \frac{1}{100}$

$\Rightarrow -\frac{k}{m} t = Ln \frac{1}{100} = -4.6$

$t_1 = \frac{m}{k} 4.6$

$V = \frac{dy}{dt} = (1 - e^{-\frac{k}{m}t}) V_T \Rightarrow \int_H^y dy = V_T \int_0^t (1 - e^{-\frac{k}{m}t})\, dt$

$\Delta y = V_T (t + \frac{m}{k} e^{-\frac{k}{m}t}) \Big|_0^t$

$\Delta y = V_T (t + \frac{m}{k} e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{m}{k})$

$t = t_1 = \frac{m}{k} Ln \frac{1}{100}$ $\quad \Delta y = V_T (-Ln\frac{1}{100} \frac{m}{k} + \frac{m}{k} e^{-Ln\frac{1}{100}} - \frac{m}{k})$ $\quad = Ln 100$

$\Delta y = \frac{m}{k} V_T (4.6 + 100 - 1)$

$\Delta y = 103.6 \frac{m}{k} V_T$

مثال: اگر سرعت ذره‌ای به جرم 4kg در لحظات مختلف به صورت زیر باشد، رابطه V(t) را بیابید و شتاب را تعیین کنید

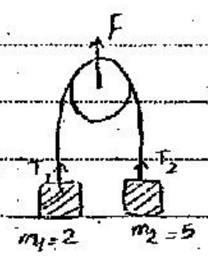
$t =$	0	1	2	3	4
$V =$	2	5	8	11	14

$\Rightarrow V = 3t + 2 \Rightarrow a = 3$

مثال: مسئله را در حالت‌های زیر حل کنید: $F = 35\ N$

$F = 70\ N$

$F = 140\ N$



$$\begin{cases} m_1 g - T_1 = m_1 a_1 \\ m_2 g - T_2 = m_2 a_2 \\ F = T_1 + T_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} m_1(g + a_1) = T_1 \\ m_2(g + a_2) = T_2 \end{matrix} \Bigg\} \Rightarrow F = T_1 + T_2$$

$F = m_1(g + a_1) + m_2(g + a_2)$

$\Rightarrow F - 7g = 2a_1 + 5a_2$

اگر $F = 35\ N$ $\therefore F < 7g$ یا $F = 7g$

دستگاه ساکن می‌ماند (جسم‌ها روی زمین می‌مانند)

Subject:

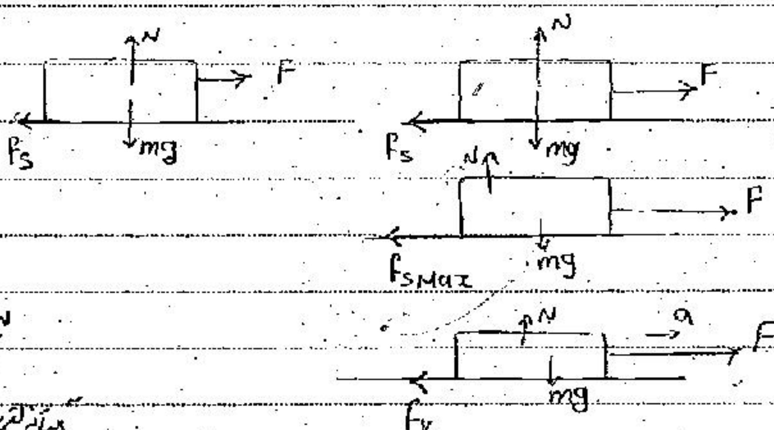
Year. 200 Month. Day.

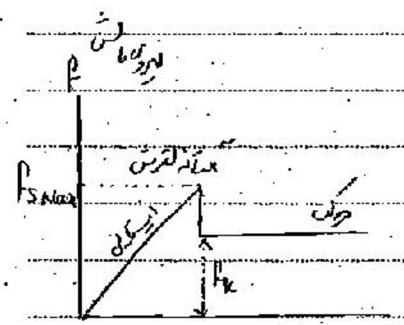
$T = 140\,N \Rightarrow 70 = (2a_1 + 5a_2)$

$$\begin{cases} m_1 g - T_1 = m_1 a_1 \\ m_2 g - T_2 = m_2 a_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 20 - T_1 = 2a_1 \\ 50 - T_2 = 5a_2 \\ T_1 + T_2 = 140 \Rightarrow T_2 = 140 - T_1 \end{cases}$$

$$70 + 2a_1 = 5a_2 \Rightarrow a_2 = \frac{70 + 2a_1}{5} \Rightarrow a_1, a_2 \ldots$$

حالت ها





$$\begin{cases} f_s \le \mu_s N \\ f_{sMax} = \mu_s \cdot N \end{cases}$$

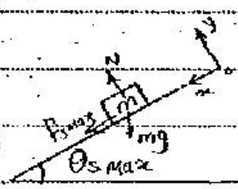
$f_k = \mu_k \cdot N$

نیروی مالش لغزشی یا جنبشی

ضریب مالش ایستایی

$\mu_s > \mu_k$

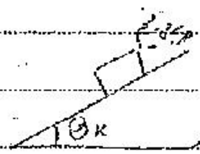
نیروی مالش به وسعت سطح تکیه گاه بستگی ندارد بلکه به N بستگی دارد $\mu_s \cdot N$



$\sum F_x = mg\sin\theta_s - f_{s\,Max} = 0$ آستانه لغزش

$\sum F_y = N - mg\cos\theta_s = 0$

$mg\sin\theta_s - \mu_s mg\cos\theta_s = 0 \Rightarrow \mu_s = \tan\theta_s$



$\mu_k = \tan\theta_k$

θ_k را همیشه از θ_s کمتر در نظر میگیریم

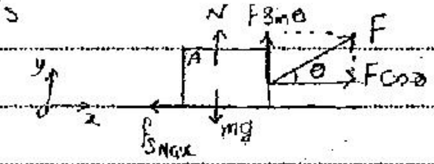
حرکت کند تا حرکت یکنواخت داشته باشد

Subject:

Year. 200 Month. Day.

در شکل مقابل θ را چنان تعیین کنید که برای به حرکت درآوردن جسم A کمترین نیرو لازم باشد؟

ضریب اصطکاک ایستایی بین جسم و تکیه‌گاه $= \mu_s$



$\sum F_y = 0$

$$\begin{cases} N + F\sin\theta - mg = 0 \\ N = mg - F\sin\theta \end{cases}$$

در آستانه حرکت $\sum F_x = 0$ (تعادل دارد)

$$\begin{cases} F\cos\theta - f_{s\,max} = 0 \\ F\cos\theta - \mu_s(mg - F\sin\theta) = 0 \end{cases}$$

$$F = \frac{\mu_s mg}{\cos\theta + \mu_s \sin\theta}$$

برای اینکه F مینیمم باشد باید مخرج آن ماکسیمم باشد.

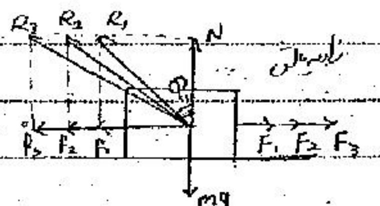
برای اینکه A ماکسیمم باشد باید مشتق آن صفر باشد $\quad A = \cos\theta + \mu_s \sin\theta$

$$\frac{dA}{d\theta} = -\sin\theta + \mu_s \cos\theta = 0$$

$$\mu_s \cos\theta = \sin\theta$$

$$\mu_s = \tan\theta$$

$$\theta = \tan^{-1}\mu_s$$



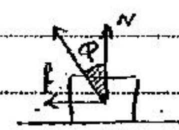
زاویه اصطکاک

زاویه‌ی بین نیروی عمودی و واکنش تکیه‌گاه ثابت است

زاویه‌ای که با راستای واکنش تکیه‌گاه و راستای عمود می‌سازد

مؤلفه‌ی مماسی واکنش تکیه‌گاه را نیروی اصطکاک می‌گویند

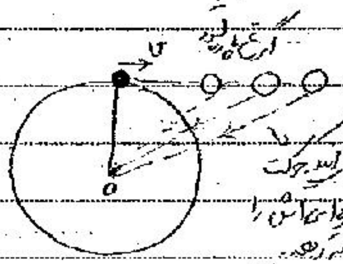
زاویه‌ای که واکنش تکیه‌گاه با مؤلفه نرمال خود می‌سازد را زاویه اصطکاک می‌گوییم



$$\tan\varphi = \frac{f}{N} \qquad \tan\varphi_k = \frac{\mu_k N}{N} = \mu_k \quad \text{(در حین حرکت)}$$

$$\tan\varphi_s = \frac{f_{s\,max}}{N} = \mu_s$$

دینامیک حرکت دایره‌ای



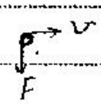
اگر نخ پاره شود

در راستای حرکت دایره‌ای اش را ادامه می‌دهد

$$F = ma \qquad a = \frac{v^2}{r}$$

$$F = m\frac{v^2}{r}$$

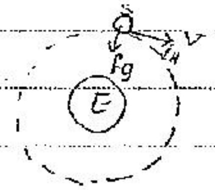
برای اینکه در یک حرکت دایره‌ای داشته باشیم باید یک نیروی عمود بر آن داشته باشیم



باید F طوری باشد که مؤلفه‌ی آن عمود بر v باشد.

Subject:

Year. 200 Month. Day.



چون f_g در این نقطه شعاعی است اما سرعت (v) مماس است پس این ماهواره حول زمین در حال سقوط است و شتاب آن شتاب سقوط است.

یک ماهواره مخابراتی را در چه ارتفاعی از سطح زمین در مدار قرار دهیم تا ناظر زمینی آن را ساکن ببیند

$$f_g = m\frac{v^2}{r} = mr\omega^2$$

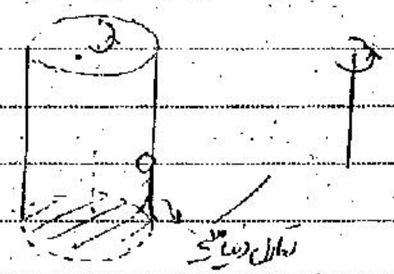
$$\frac{GmM}{r^2} = mr\omega^2 \Rightarrow r^3 = \frac{GM}{\omega^2} \Rightarrow r^3 = \frac{GMT^2}{4\pi^2}$$

$$r^3 = \frac{g_0 R_E^2}{4\pi^2} \cdot T^2$$

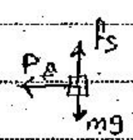
$$r^3 = \frac{9.8 \times (64\times 10^5)^2}{4\pi^2}(86400)^2 \simeq (73)^{1/3} \times 10^7 \, m$$

$$\simeq 4.2 \times 10^7 \simeq 42000 \, km$$

(ارتفاع از زمین) $h = 42000 - R_E =$



تعادل دینامیکی



$$\begin{cases} P = ma = m\frac{v^2}{r} = mr\omega^2 \\ mg - f_{s\,Max} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_{s\,Max} = \mu_s P \\ P = mr\omega^2 \end{cases}$$

$$mg - \mu_s P = 0$$

$$\omega^2 = \frac{g}{\mu_s r} \Rightarrow \omega_{min} = \sqrt{g/\mu_s \cdot r}$$

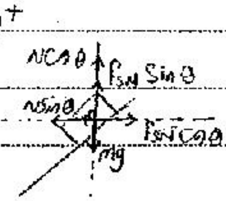
(هر چیز که روی کره زمین هست تعادل دینامیکی دارند نه ساکن چون خود کره زمین در حال حرکت است)

هر چه شعاع دوران بیشتر باشد راحت‌تر در دوران به تعادل می‌رسد.

اگر ω زیاد شود به سمت فشار بیشتری به دیواره وارد می‌شود.

مثال. جسم کوچکی روی سطح قیفی قرار می‌دهیم قیف را حول محور قائم به دوران درمی‌آوریم حدود ω را چنان تعیین کنید که جسم نسبت به سطح قیف ساکن بماند.

ضریب اصطکاک ایستایی بین جسم و قیف $= \mu_s$



$\omega_{Min} \ldots\ldots \omega_{Max}$

$\Sigma F_{\perp} = N\sin\theta - f_{sMax}\cos\theta = mr\omega^2$

عمود بر راستای شعاع در P

$\Sigma F_{\parallel} = N\cos\theta + f_{sMax}\sin\theta - mg = 0$

موازی محور دوران

$$\begin{cases} N\sin\theta - \mu_s N\cos\theta = mr\omega_{min}^2 \\ N\cos\theta + \mu_s N\sin\theta = mg \end{cases}$$

$$\frac{\sin\theta - \mu_s\cos\theta}{\cos\theta + \mu_s\sin\theta} = \frac{r}{g}\omega_{min}^2$$

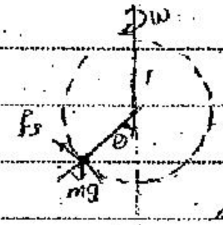
$$\omega_{min} = \left(\frac{\tan\theta - \mu_s}{1 + \mu_s\tan\theta} \times \frac{g}{r}\right)^{\frac{1}{2}}$$

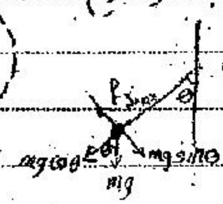
$$\omega_{Max} = \left(\frac{\tan\theta + \mu_s}{1 - \mu_s\tan\theta} \times \frac{g}{r}\right)^{\frac{1}{2}}$$

در قسمت بعدی نیز شرایط به همین صورت است با این تفاوت که اصطکاک رو به پایین است چون میل به بالا رفتن دارد

مثال. حد ω چقدر باشد تا زاویه θ حفظ شود؟

برای اینکه θ حفظ شود باید جسم m یک حرکت دایره‌ای با سرعت ω (حول محور قائم) داشته باشد





$-mg\cos\theta = mr\omega^2$

$f_{sMax} = mg\sin\theta \Rightarrow \mu_s mg\cos\theta = mg\sin\theta$

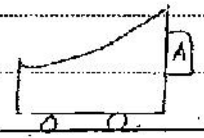
$\cos\theta = \frac{1}{\mu_s}\sin\theta$

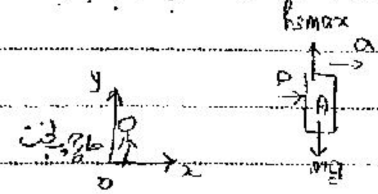
$-g\cos\theta = r\omega^2$

$g \cdot \frac{1}{\mu_s \cdot r} \cdot \sin\theta = \omega_{min}^2 \Rightarrow \omega_{min} = \sqrt{\frac{g}{\mu_s \cdot r}\sin\theta}$

مثال: در شکل مقابل ارابه با چه شتابی حرکت کند که جسم A روی بدنه‌ی ارابه به پایین نلغزد

ضریب اصطکاک ایستایی بین ارابه و جسم μ_s





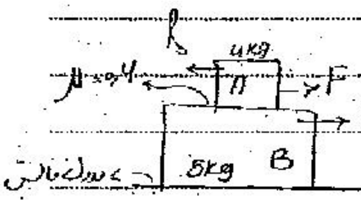
$\sum f_x = p = ma$

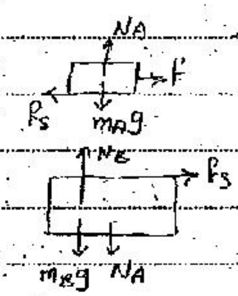
$\sum f_y = f_{smax} - mg = 0 \Rightarrow f_{smax} = \mu_s p$

$$\left.\begin{array}{l} p = ma \\ \mu_s p = mg \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{\mu_s} = \frac{a}{g} \Rightarrow a = \frac{g}{\mu_s}$$

$a \geq \frac{g}{\mu_s}$ اگر شتاب ارابه این اندازه باشد جسم پایین نمی‌لغزد

مثال: در حالت‌های زیر که F مقادیر زیر را اختیار کند حرکت را بدست آورید.





$F = 20 , 28.8 , 40$

$g = 10$

در آستانه لغزش A روی B نیروی اصطکاک ایستایی بیشینه است

$f_{smax} = \mu_s N_A = \mu_s m_A g$
$= 0.4 \times 4 \times 10 = 16 N$

$\sum F_x = f_{smax} = m_B a_B$

$16 = 5 \times a_B \Rightarrow a_B = \frac{16}{5} = 3.2 \ m/s^2$

چون دو جسم با هم حرکت می‌کنند پس

$\sum F_x = F - f_{smax} = m_A a_A \qquad a_B = a_A = 3.2 \ m/s^2$

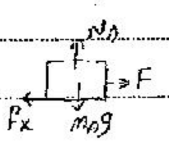
$F - 16 = 4 \times 3.2$

$F = 28.8 N$ ماکسیمم نیرویی که می‌توان وارد کرد تا دو جسم با هم حرکت کنند.

حالت: $20 < 28.8$ پس دو جسم با هم حرکت می‌کنند $\Rightarrow a = \frac{20}{4+5} = 2.2 \ m/s^2 , \ f_s = 11N$

حالت: $28.8 = 28.8$ دو جسم با هم حرکت می‌کنند ولی A در آستانه لغزش روی B است. $f_s = 16$

حالت: $40 > 28.8$ A روی B می‌لغزد و هر کدام شتاب جداگانه‌ای دارند.



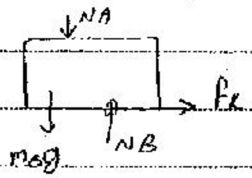
$f_k = \mu_k N = 0.4 \times 4 \times 10$
$= 16 N$

$F - f_k = m_A a_A$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

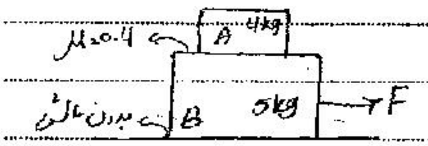
$40 - 16 = 4a_A \Rightarrow a_A = 6\ m/s^2$

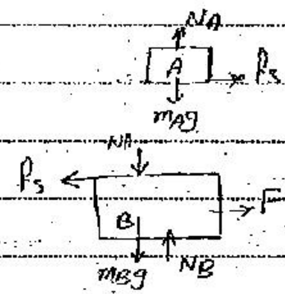


$f_k = m_B a_B$

$a_B = \frac{16}{5} = 3.2\ m/s^2$

در مسئله فوق اگر نیروی F به جسم B اثر کند مسئله را دوباره حل کنید.
حداکثر نیرویی که می‌توان به جسم B اثر داد تا دو جسم با هم حرکت کنند.





در استاتیک اصطکاک نیز داریم:

$f_{s\,max} = \mu_s . N$

$= 0.4 \times 4 \times 10 = 16\ N$

$f_{s\,max} = m_A a_A$

$16 = 4a_A \Rightarrow a_A = 4\ m/s^2$

چون دو جسم با هم حرکت می‌کنند $a_A = a_B = 4\ m/s^2$

$F - f_{s\,max} = m_B a_B$

$F - 16 = 5 \times 4 \Rightarrow F = 36\ N$ حداکثر نیروی لازم

حالت اول، $F = 20N$ $\quad 20 < 36$ دو جسم با هم حرکت می‌کنند و شتاب یکسان دارند $\rightarrow a = \frac{20}{4+5} = 2.2\ m/s^2$

حالت دوم، $F = 28.8\ N$ $\quad 28.8 < 36$ " " " $\rightarrow a = \frac{28.8}{4+5} = 3.2\ m/s^2$

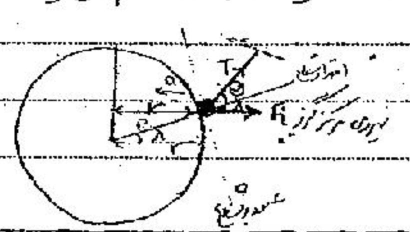
حالت سوم، $F = 40\ N$ $\quad 40 > 36$ هر یک از دو جسم شتاب‌های
مختلفی دارند و نمی‌توان آن‌ها را یک جسم فرض کرد.

حالت سوم: $f_k = m_A a_A$

$16 = 4a_A \Rightarrow a_A = 4\ m/s^2$

$F - f_k = m_B a_B \Rightarrow 40 - 16 = 5a_B \Rightarrow a_B = 4.8\ m/s^2$

مثال: به علت دوران زمین خط شاقول با شعاع زمین زاویه‌ای می‌سازد، زاویه را در عرض جغرافیایی λ محاسبه کنید.



$\vec{T} + \vec{F_i} + m\vec{g} = 0$ از دید ناظر چسبیده به زمین

PILAVARAN

PAGE:

$\Sigma f_x = T\cos\theta - mg_0 + F_i\cos\lambda = 0$

$\Sigma f_y = T\sin\theta - F_i\sin\lambda = 0 \Rightarrow \tan\theta = \dfrac{F_i\sin\lambda}{mg_0 - F_i\cos\lambda}$

$F_i = mr\omega^2 = mR\cos\lambda\,\omega^2 \qquad \tan\theta = \dfrac{mR\omega^2\sin\lambda\cos\lambda}{mg_0 - mR\omega^2\cos^2\lambda}$

$\tan\theta = \dfrac{\frac{1}{2}R\omega^2\sin 2\lambda}{g - R\omega^2\cos^2\lambda} \Rightarrow \theta \simeq \dfrac{\frac{1}{2}R\omega^2\sin 2\lambda}{g}$

$R\omega^2 = 6.4\times10^6 \cdot \left(\dfrac{2\pi}{86400}\right)^2 \simeq 3\times10^{-2}$

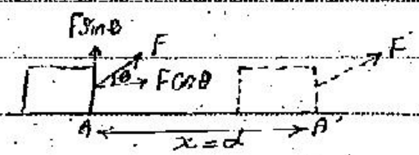
اگر $\lambda = 45^\circ \Rightarrow \theta \to \theta_{max}$

$\theta_{Max} = \dfrac{R\omega^2}{2g} \Rightarrow \theta_{Max} = \dfrac{6400\times10^3\left(\frac{2\pi}{86400}\right)^2}{2\times9.8}$

$\simeq 0.1^\circ$

کار انرژی

تعریف کار

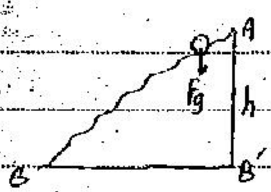


$W = F_x \cdot d = F\cos\theta \cdot d$

جابجایی × تصویر نیرو در جابجایی = کار

$W = Fd\cos\theta$

تصویر جابجایی بر نیرو × نیرو = کار

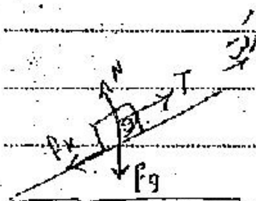


$W = F_g \times AB' = F_g h = mgh$

$\theta < 90 \quad W > 0$

$\theta > 90 \quad W < 0$

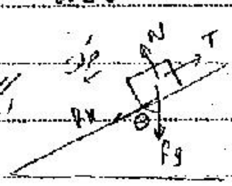
$\theta = 90 \quad W = 0$



$W_{Fg} < 0 \qquad W_T > 0$

$W_N = 0$

اگر T را برداریم



$W_T < 0$

$W_{Fg} > 0$

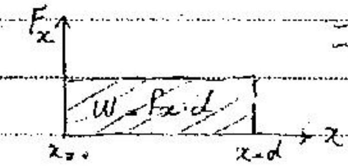
$W_N = 0$

اگر نیرو ثابت باشد ← $\vec{W} = \vec{F} \cdot \vec{d}$
ضرب نقطه‌ای

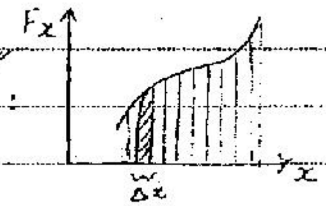
واحد کار = واحد نیرو × واحد جابجایی

$1N.m = 1N \times 1m \rightarrow 1N.m = 1J$

F ثابت است



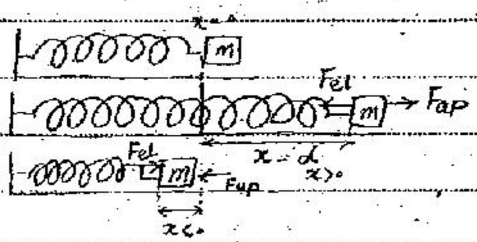
اگر F ثابت نباشد :



$\Delta W = F_x \cdot \Delta x$

$W = \sum_{i=1}^{N} F_x \Delta x_i \xrightarrow{\text{حد مجموع}} W = \int_{x_1}^{x_2} F(x)dx$ = سطح زیر منحنی نیرو برحسب جابجایی

کار نیروی فنر



$F_{el} = -kx$

k ← ضریب سختی فنر

x ← تغییر طول فنر نسبت به حالت آزاد فنر

$k = -\frac{F_{el}}{x} \quad N/m$

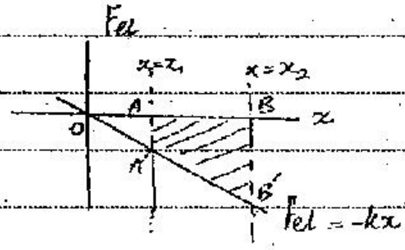
$k = 100\ N/m$ اگر بخواهیم فنر را $1m$ بکشیم 100 نیوتن نیرو لازم است.

$$W_{el} = \int_{x_1}^{x_2} F_{el}\, dx = \int_{x_1}^{x_2} -kx\, dx = -\frac{1}{2}k(x_2^2 - x_1^2)$$

کار نیروی کشسانی فنر ⇐ $W_{el} = -\frac{1}{2}k(x_2^2 - x_1^2)$

$x_1 = 0 \quad x_2 = x$

$W_{el} = -\frac{1}{2}kx^2$



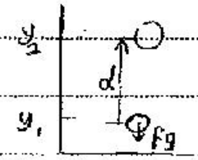
$S_{ABA'B'} = S_{OBB'} - S_{OAA'}$
$= \frac{OB \times BB'}{2} - \frac{OA \times AA'}{2}$
$= \frac{x_2 \times kx_2}{2} - \frac{x_1 \times kx_1}{2}$
$= \frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}k(x_2^2 - x_1^2)$

$W = S_{ABA'B'}$

کار نیروی گرانش

g ثابت فرض شود

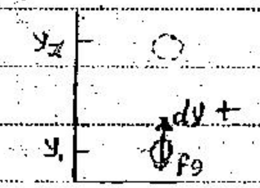
وقتی g را ثابت فرض می‌کنیم که جابجایی زیاد نباشد که موجب تغییر g شود.



$$W = -F_g \cdot d = -mg(y_2 - y_1)$$

$y_2 < y_1 \Rightarrow W > 0$

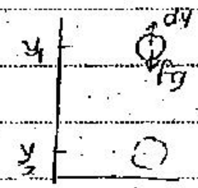
$y_1 < y_2 \Rightarrow W < 0$



$$W = \int_{y_1}^{y_2} F_g\, dy = -mg \int_{y_1}^{y_2} dy = -mg(y_2 - y_1) < 0$$

$y_2 > y_1$

dx , dz , dy در راستای مثبت باشد

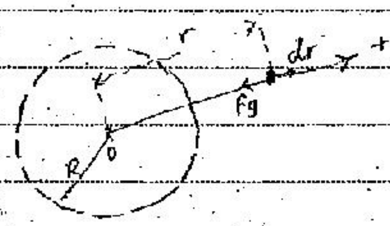


$$W = \int_{y_1}^{y_2} F_g\, dy = -mg \int_{y_1}^{y_2} dy$$

$$= -mg(y_2 - y_1) > 0$$

$y_1 > y_2$

جسمی را به فاصله r از مرکز زمین (نقطه ۱) بر می‌داریم و در راستای عمود بر زمین جابجا می‌شود کار را بیابیم



$$W = \int_1^2 \vec{F_g} \cdot \vec{dr} = \int_{r_1}^{r_2} -\frac{GmM}{r^2}\, dr$$

$$W = GmM \int_{r_1}^{r_2} -\frac{dr}{r^2}$$

$$W = GmM\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$

$r_2 > r_1 \rightarrow W < 0$

$r_1 < r_2 \rightarrow W > 0$

مثلا $r_1 = r$, $r_2 = r + \Delta r$

جابجایی زیاد نباشد $\Delta r << r$ $\rightarrow$ $W = GmM\left(\frac{1}{r+\Delta r} - \frac{1}{r}\right)$

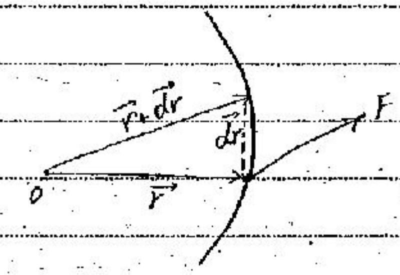
$$W = GmM\left(\frac{r - r - \Delta r}{r(r+\Delta r)}\right)$$

$$W = GmM\left(\frac{-\Delta r}{r(r+\Delta r)}\right) \quad \text{یا} \quad W = -\frac{GmM}{r^2}(\Delta r)$$

$$r(r+\Delta r) = r^2\left(1+\frac{\Delta r}{r}\right) \simeq r^2 \qquad W = -F_g(\Delta r)$$

$$W = -mg\,(y_2 - y_1)$$

محاسبه کار در حالت کلی



$$dW = \vec{F}\cdot\vec{dr} = F_s\cdot ds$$

$$W = \int_1^2 \vec{F}\cdot\vec{dr}$$

$$\vec{F} = F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k}$$

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

$$W = \int_1^2 (F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k})(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})$$

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F_x\,dx + \int_{y_1}^{y_2} F_y\,dy + \int_{z_1}^{z_2} F_z\,dz$$

توان: آهنگ انجام کار

توان متوسط $\bar{P} = \frac{\Delta W}{\Delta t}$ $\quad J/s = W$

توان لحظه‌ای $P = \frac{dW}{dt} = \frac{F\cdot dr}{dt} = \vec{F}\cdot\frac{\vec{dr}}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v}$ یا $P = \vec{F}\cdot\vec{V}$

$1\,HP = 550 \quad = 746$ wat
اسب بخار

$1\,cv = 75\,kgf\ m/s \simeq 736$ wat
کیلوگرم نیرو

$1\,kWh = 1\,kW \times 1h$

$= 10^3 J/s \times 3600\,s = 3.6\times10^6\,J = 3600\,kJ$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

قضیه کار انرژی

$\vec{F} = m\vec{a}$

$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \vec{F}\cdot d\vec{r} = m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot d\vec{r}$

$$\int_1^2 \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_1^2 m\, d\vec{v}\cdot\vec{v}$$

$$W = \frac{1}{2}\left(mV_2^2 - \frac{1}{2}mV_1^2\right)$$

$$W = k_2 - k_1$$

کار کل = تغییرات انرژی جنبشی $\leftarrow$ $W = \Delta k$

$\vec{V}\cdot\vec{V} = V^2 \Rightarrow \vec{V}\,d\vec{V} + \vec{V}\cdot d\vec{V} = 2V\,dV$

$$2\vec{V}\cdot d\vec{V} = 2V\,dV$$

$$\int \vec{V}\cdot d\vec{V} = \int V\,dV \Rightarrow \int \vec{V}\cdot d\vec{V} = \frac{1}{2}V^2 + C$$

مثال: کار نیروی زیر در حالی که ذره‌ای در صفحه xoy طی می‌کند اگر مرکز دایره بر مبدأ مختصات واقع بوده و شعاع دایره 3 واحد فرض شود. کار نیروی $\vec{F}$ را یک دور کامل بر روی دایره در جهت مثبت بیابید. ج: $W = 18\pi$

$\vec{F} = (2x - y + z)\hat{i} + (x + y + z^2)\hat{j} + (3x - 2y)\hat{k}$

$r = 3$

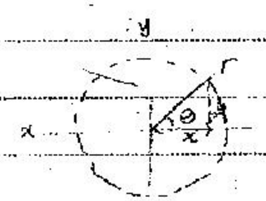
$z = 0 \Rightarrow \vec{F} = (2x - y)\hat{i} + (x + y)\hat{j} + (3x - 2y)\hat{k}$

چون روی صفحه xoy دایره را طی می‌کند

$z =$ ثابت $\rightarrow dz = 0$

$$W = \int F_x\,dx + \int F_y\,dy + \int F_z\,dz$$

$$W = \int_1^2 (2x - y)\,dx + \int_1^2 (x + y)\,dy$$



$x = r\cos\theta \;,\; y = r\sin\theta$

$dx = -r\sin\theta\, d\theta \quad dy = r\cos\theta\, d\theta$

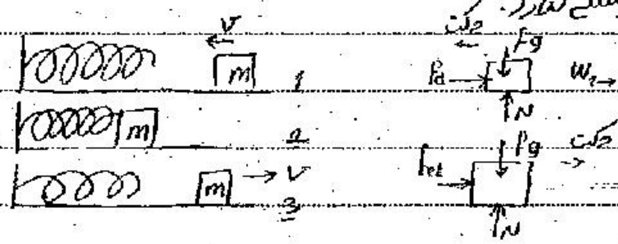
$$W=\int_0^{2\pi}(2r\cos\theta - r\sin\theta)(-r\sin\theta\,d\theta)+\int_0^{2\pi}(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\cos\theta\,d\theta$$

$$W=\int_0^{2\pi} r^2(\sin2\theta+\underbrace{\sin^2\theta}_{\frac{1-\cos2\theta}{2}})\,d\theta+\int_0^{2\pi} r^2(\underbrace{\cos^2\theta}_{\frac{1+\cos2\theta}{2}}+\tfrac{1}{2}\sin2\theta)\,d\theta$$

$r=3 \rightarrow W=18\pi$

پتانسیل انرژی

- کار نیروی پایستار به مسیر حرکت بستگی ندارد.



$W_{1\rightarrow2}=-\frac{1}{2}kx^2$

$W_{2\rightarrow3}=+\frac{1}{2}kx^2$

$W_{کل}=-\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{2}kx^2=0$

اصطکاک نیرویی ناپایستار است.

$W_{کل}=\Delta K$

کار نیروی اصطکاک منفی است و موجب سبب اتلاف انرژی میشود.

$\Delta K=0 \Rightarrow K_1=K_2$

پتانسیل انرژی $U_1+K_1=U_2+K_2$

$(K_2-K_1)+(U_2-U_1)=0$

$\Delta K+\Delta U=0$ اگر در هر صورت انرژی جنبشی کم شود انرژی پتانسیل زیاد می شود تا جمع ثابت بماند و بالعکس

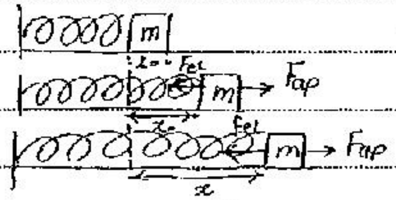
انرژی پتانسیل نوعی از انرژی مکانیکی است که به سرعت بستگی ندارد بلکه به وضعیت جسم بستگی دارد.

$$\begin{cases}\Delta U+\Delta K=0 & \text{مخصوص نیروهای پایستار}\\ W=\Delta K & \text{(برای همه نیروها) همه جا}\end{cases}\Rightarrow \underbrace{\Delta U}_{\text{تغییر انرژی پتانسیل}}=-\underbrace{W}_{\text{کار نیروی پایستار}}$$

محاسبه انرژی پتانسیل یک فنر.

Subject:

Year. 200   Month.   Day.



$$U(x) - U(x_0) = -\int_{x_0}^{x} F_{el}\, dx$$

$$U(x) - U(x_0) = -\int_{x_0}^{x} -kx\, dx$$

$$U(x) - U(x_0) = \tfrac{1}{2}kx^2 - \tfrac{1}{2}kx_0^2$$

قرارداد: $\begin{cases} x_0 = 0 \quad \text{مبدأ} \\ U(x_0) = 0 \end{cases}$ در این صورت $U(x) - 0 = \tfrac{1}{2}kx^2$

$$U(x) = \tfrac{1}{2}kx^2$$

اگر فنری را به اندازه‌ی x کشیده یا فشرده کنیم افزایش انرژی پتانسیل فرقی نمی‌کند (در هر دو حالت مثبت است)

انرژی پتانسیل گرانشی

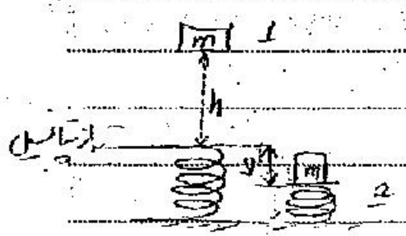
$$\Delta U = -W$$

$$U_2 - U_1 = -(-mg(y_2 - y_1))$$

$$U_2 - U_1 = mg(y_2 - y_1)$$

قرارداد (دلخواه) $\begin{cases} U_1 = 0 \\ y_1 = 0 \\ y_2 = h \end{cases}$ در این صورت $U_2 = mgy_2 = mgh$

مثال: در شکل زیر اگر جسم m رها شود حداکثر تراکم فنر را بیابید.



$$(U_{el} + U_g + k)_1 = (U_{el} + U_g + k)_2$$

$$0 + mgh + 0 = \tfrac{1}{2}ky^2 - mgy + \tfrac{1}{2}mv^2$$

$$ky^2 - 2mgy + mv^2 - 2mgh = 0$$

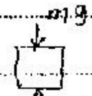
$$\cancel{\text{if}}\ y = y_{Max} \rightarrow v = 0$$

$$ky_{Max}^2 - 2mgy_{Max} - 2mgh = 0$$

$$y_{Max} = \frac{mg \pm \sqrt{m^2g^2 + 2kmgh}}{k}$$

$$y_{Max} = \frac{mg}{k} \pm \sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + \frac{2mgh}{k}}$$

سرعت ماکسیمم را هم بدست آورید.



نیروی فنر

$$F_{net} = mg - ky$$

(هم جهت می‌کند (هرچه y بیشتر باشد ky هم بیشتر است)

در حال تعادل سرعت ماکسیمم است ← $mg - ky = 0$

$$y = \frac{mg}{k}$$

می‌توانیم از معادله حرکت جسم v را بدست آوریم

$$ky^2 - 2mgy + mv^2 - 2mgh = 0 \longrightarrow v^2 = -\frac{k}{m}y^2 + 2g(y+h)$$

مشتق بگیریم: $2v\frac{dv}{dt} = -\frac{2k}{m}y\underbrace{\frac{dy}{dt}}_{v} + 2g\underbrace{\frac{dy}{dt}}_{v}$

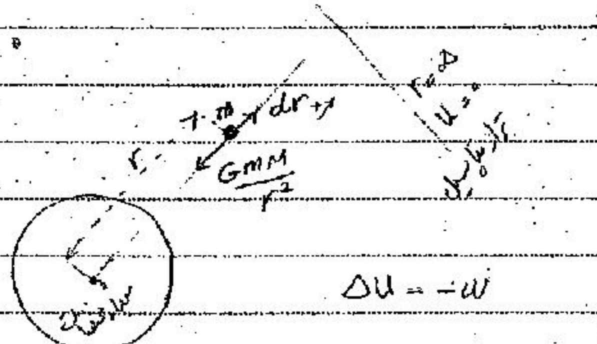
$$2\frac{dv}{dt} = -\frac{2k}{m}y + 2g$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m}y + g = 0 \Rightarrow y = \frac{mg}{k}$$

به ازای $y = \frac{mg}{k}$ سرعت به بیشینه خود می‌رسد

$$v^2_{Max} = -\frac{k}{m}\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + 2g\left(\frac{mg}{k} + h\right)$$

آیا ماکسیمم در چه لحظه‌ای است؟



مثال: پتانسیل انرژی جسم m را بیابید.

$$\Delta U = -W$$

$$U(r_0) - U(r) = \int_r^{r_0} \vec{F_g} \cdot \vec{dr}$$

$$U(r_0) - U(r) = -\int_r^{r_0} -\frac{GmM}{r^2}\, dr$$

Subject:

Year.200 Month. Day.

$$U(r_0) - U(r) = -GmM\left|\frac{1}{r}\right|_r^{r_0}$$

کاری که گرانش انجام می‌دهد تا از این نقطه به بی‌نهایت برسیم

$$U(r_0) - U(r) = -\frac{GmM}{r_0} + \frac{GmM}{r}$$

قرارداد $\begin{cases} r_0 = \infty \\ U(r_0) = 0 \end{cases}$ $\qquad U(r) = -\frac{GmM}{r}$ (جرم m را) $\quad r \geq R_e$

$$U_2 - U_1 = -\frac{GmM}{r_2} - \left(-\frac{GmM}{r_1}\right)$$

مبدا = مرکز زمین

تراز پتانسیل = مکانی که پتانسیل صفر است

$$U_2 - U_1 = GmM\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$ اگر $r_2 = r + \Delta r$

$$U_2 - U_1 = GmM\left(\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}\right)$$ $r_1 = r$, $\Delta r \ll r$

$$U_2 - U_1 = \frac{GmM}{r^2}(r_2 - r_1)$$ $r_1 r_2 = r(r + \Delta r) = r^2\left(1 + \frac{\Delta r}{r}\right)$, $\Delta r \ll r$ $\simeq r^2$

$$U_2 - U_1 = mg(r_2 - r_1) \rightarrow r_2 - r_1 = y_2 - y_1$$

$$U_2 - U_1 = mg(y_2 - y_1)$$

مثال: جسمی به جرم m را از نقطه‌ای به فاصله r از مرکز زمین به بی‌نهایت می‌بریم. کار نیروی گرانش را در این جابجایی به دست آورید و آن را با پتانسیل گرانشی جرم m در نقطه آغاز مقایسه کنید.

$$U(r) = -G\frac{mM}{r} \qquad W = \int_1^2 \vec{F_g} \cdot d\vec{r}$$

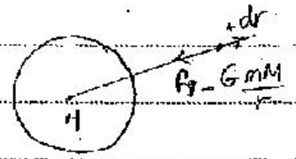
$$W = -\int_r^{\infty} G\frac{mM}{r^2}\, dr \Rightarrow W = GmM\left[\frac{1}{r}\right]_r^{\infty}$$

$$W = GmM\left(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{r}\right)$$

پتانسیل گرانشی جرم m در یک نقطه از میدان گرانشی برابر است با کاری که گرانش روی جرم m انجام می‌دهد تا m از نقطه مورد نظر به بی‌نهایت برده شود.

$$W = -G\frac{mM}{r}$$

$$U(r) = -G\frac{mM}{r}$$



پتانسیل گرانشی جرم m در یک نقطه از میدان گرانش برابر است با کاری که ما انجام می‌دهیم تا جرم m را در شرایط تعادل از بی‌نهایت به نقطه‌ی مورد نظر آورده شود.

$$\Delta U = -W$$

$$U_{(x)} - U_{(x_0)} = -W$$

(مشتق می‌گیریم) $dU_{(x)} - dU_{(x_0)} = -dW \Rightarrow dU_{(x)} = -F_x\,dx$

ثابت

$$* \quad F_x = -\frac{dU_{(x)}}{dx} \quad *$$

$$U_{el} = \tfrac{1}{2}kx^2 \qquad F_x = -\frac{d}{dx}\left(\tfrac{1}{2}kx^2\right)$$

$$F_x = -kx$$

$$U_r = -\frac{GmM}{r}$$

$$F_r = \frac{d}{dx}\left(\frac{GmM}{r}\right) \Rightarrow F_r = -\frac{GmM}{r^2}$$

هرگاه پتانسیل دارای $U=U_{(x,y,z)}$ باشد داریم

$$F_{(x)} = -\frac{\partial u}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial u}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$F = -\left(\frac{\partial u}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\hat{k}\right)$$

$$\vec{F} = -\operatorname{grad} u$$

مثال: نیرو را بدست آورید. (کار نیرو را طی انتقال از نقطه $A(1,1,1)$ به $B(2,2,2)$ بدست آورید)

$$u = \frac{2x^2}{y} + \frac{y^2}{2xz} + x^2y^2z^2$$

$$F_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{4x}{y} + \frac{y^2}{2zx^2} - 2y^2z^2x$$

کافیست U را محاسبه کنیم
یا باید پتانسیل را در B نیز

$$F_y = -\frac{\partial u}{\partial y} = +2x^2\frac{1}{y^2} - \frac{y}{xz} - 2x^2z^2y$$

$$F_z = -\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{y^2}{2xz^2} - 2x^2y^2z$$

Subject:

Year. 200   Month.   Day.

$$\vec{F} = \left(-\frac{4z}{y} + \frac{y^2}{2x^2z} - 2xy^2z^2\right)\hat{i} + \left(\frac{2x^2}{y^2} - \frac{y}{xz} - 2x^2yz^2\right)\hat{j} + \left(\frac{y^2}{2xz^2} - 2x^2y^2z\right)\hat{k}$$

$$\Delta U = -W \;\leadsto\; W = -(U_B - U_A) \qquad A(1,1,1)$$

$$W = U_A - U_B \qquad B(2,2,2)$$

مثال: نشان دهید نیروی F پایستار است.

$$F = (y^2z^3 - 6xz^2)\hat{i} + 2xyz^3\hat{j} + (3xy^2z^2 - 6x^2z)\hat{k}$$

1. آیا می‌توان برای آن یک تابع پتانسیل بدست آورد

چون تابع پتانسیل مشخص نیرو پایستار است.

2. نشان دهید کار نیرو در مسیر دلخواه به مسیر بستگی ندارد

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}$$

$$U = -\int F_x\,dx \;\leadsto\; U = -\int (y^2z^3 - 6xz^2)\,dx$$

$$U = -y^2z^3x + 3x^2z^2 + C_1(y,z) \quad ①$$

$$F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} \;\leadsto\; U = -\int F_y\,dy \;\leadsto\; U = -\int 2xyz^3\,dy$$

$$U = -xy^2z^3 + C_2(x,z) \quad ②$$

$$F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} \;\leadsto\; U = -\int (3xy^2z^2 - 6x^2z)\,dz$$

$$U = -xy^2z^3 + 3x^2z^2 + C_3(x,y) \quad ③$$

$$\text{فرض}\begin{cases} C_2(x,z) = 3x^2z^2 + C \\ C_1(y,z) = C_3(x,y) = C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U_① = -y^2z^3x + 3x^2z^2 + C \\ U_② = -xy^2z^3 + 3x^2z^2 + C \\ U_③ = -xy^2z^3 + 3x^2z^2 + C \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\overbrace{\frac{\partial U}{\partial y}}^{-F_y}\Big) = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\overbrace{\frac{\partial U}{\partial x}}^{-F_x}\Big) \;\leadsto\; \frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y} = -\frac{\partial}{\partial x}(F_y) = -\frac{\partial}{\partial y}(F_x)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\overbrace{\frac{\partial U}{\partial z}}^{-F_z}\Big) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) \;\leadsto\; \frac{\partial^2 U}{\partial x\partial z} = -\frac{\partial}{\partial x}(F_z) = -\frac{\partial}{\partial z}(F_x)$$

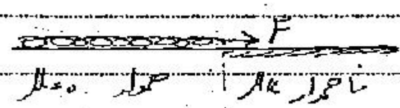
$$\frac{\partial^2 U}{\partial z\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) \;\leadsto\; \frac{\partial^2 U}{\partial z\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y}(F_z) = -\frac{\partial}{\partial z}(F_y)$$

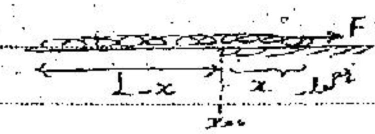
Subject:

Year. 200 Month. Day.

$$\text{curl}\,\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = 0$$

مثال: زنجیر همگن به جرم واحد طول λ روی سطح افقی شامل یک بخش هموار (بدون اصطکاک) و یک بخش ناهموار به ضریب اصطکاک μ_k قرار دارد. یک سر این زنجیر با نیروی ثابت F کشیده می‌شود. اگر در آغاز تمام زنجیر روی سطح هموار ($x=0$) در حالت سکون باشد، در لحظه‌ای که تمام طول زنجیر روی سطح ناهموار منتقل می‌شود ($x=L$) سرعت زنجیر چقدر است؟





$$F - \mu_k g \lambda x = m\frac{dv}{dt}$$

$$F - \mu_k g \lambda x = \lambda L v \frac{dv}{dx}$$

$$\int_0^x (F - \mu_k g \lambda x)\,dx = \lambda L \int_0^v v\,dv$$

$$Fx - \frac{1}{2}\mu_k g \lambda x^2 \Big|_0^x = \frac{1}{2}\lambda L v^2$$

$$2Fx - \mu_k g \lambda x^2 = \lambda L v^2$$

$$v = \left(\frac{2Fx}{L\lambda} - \frac{\mu_k g x^2}{L}\right)^{1/2}$$

$$x = L \quad \rightarrow \quad v = \left(\frac{2F}{\lambda} - \mu_k g L\right)^{1/2}$$

سرعت حد:

نیروی مقاومت R که تابعی از سرعت است.

$$\vec{mg} + \vec{R} = m\vec{a}$$

برای $\vec{R} = -k\vec{v}$ تابع سرعت $\quad mg - kv = m\frac{dv}{dt}$

مثلاً $R = -kv$ $\quad kv$ آنقدر زیاد می‌شود تا با mg برابر شود

اندازه $|R| = kv$ $\quad g$

سرعتی $V = V_T$ برآیند نیروهای مؤثر بر جسم صفر شده و حرکت یکنواخت می‌شود (یعنی $a=0$) سرعت این حرکت را سرعت نهایی یا حد گویند

Subject:

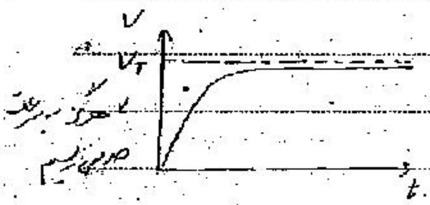
Year. 200 Month. Day.

$mg - kV_T = 0 \Rightarrow V_T = \frac{mg}{k}$

$\underbrace{mg}_{kV_T} - kV = m\frac{dV}{dt} \Rightarrow kV_T - kV = m\frac{dV}{dt} \Rightarrow$ تغییر متغیر

$\frac{dV}{V_T - V} = \frac{k}{m}dt$

$\int_0^V \frac{-dV}{V_T - V} = -\frac{k}{m}\int_0^t dt$



$\log(V_T - V)\Big|_0^V = -\frac{k}{m}t$

$\log\frac{V_T - V}{V_T} = -\frac{k}{m}t \Rightarrow \frac{V_T - V}{V_T} = e^{-\frac{k}{m}t}$

$\Rightarrow 1 - \frac{V}{V_T} = e^{-\frac{k}{m}t} \Rightarrow V = V_T(1 - e^{-\frac{k}{m}t})$

$t = ?$

$V = V_T \Rightarrow V_T = V_T(1 - e^{-\frac{k}{m}t}) \Rightarrow t = \infty$

پس از چه زمانی $V = 0.99V_T$ ؟

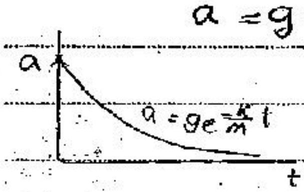
از V نسبت به t مشتق می‌گیریم $\frac{dV}{dt} = V_T(0 + \frac{k}{m}e^{-\frac{k}{m}t})$

$0.99V_T = V_T(1 - e^{-\frac{k}{m}t})$

$\frac{1}{100} = e^{-\frac{k}{m}t}$

$a = ge^{-\frac{k}{m}t}$

$\log 1 - \log 100 = -\frac{k}{m}t \Rightarrow t = \frac{\log 100}{k/m}$



$\frac{dy}{dt} = V_T(1 - e^{-\frac{k}{m}t})$

$dy = V_T(1 - e^{-\frac{k}{m}t})dt \Rightarrow \int_0^y dy = V_T\int_0^t (1 - e^{-\frac{k}{m}t})dt$

V را [illegible] است

$y = V_T(t + \frac{m}{k}e^{-\frac{k}{m}t})\Big|_0^t$

$y = V_T(t + \frac{m}{k}e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{m}{k})$

$y = V_T(t + \frac{m}{k}(e^{-\frac{k}{m}t} - 1))$

$y = V_T(t + \frac{m}{k}(e^{-\frac{k}{m}t} - 1))$

$a = \frac{dV}{dt}$

$t = \infty \to y = \infty$

$t = 0 \to y = 0$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

مثال: نشان دهید نیروی زیر پایستار است. (آن را در دستگاه قطبی بیابید)

$$\vec{F} = -2kx\hat{i} - 2ky\hat{j} \qquad \frac{\partial F_x}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial F_y}{\partial x} = 0$$

F پایستار است ⇐ $\left\{ \frac{\partial F_y}{\partial z} = 0 \qquad \frac{\partial F_z}{\partial y} = 0 \right.$

از طرفی $F_x = -\frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow \int F_x dx = -u$

$$u = -\int -2kx\,dx \Rightarrow u = kx^2 + C_1(y,z) \quad ①$$

$$F_y = -\frac{\partial u}{\partial y} \rightarrow \int F_y dy = -u \Rightarrow u = -\int -2ky\,dy$$

$$\Rightarrow u = ky^2 + C_2(x,z) \quad ②$$

$$\begin{cases} ① \; u = kx^2 + C_1(y,z) \\ ② \; u = ky^2 + C_2(x,z) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = kx^2 + ky^2 + C \\ u = kx^2 + ky^2 + C \end{cases} \Rightarrow \text{نیرو پایستار است}$$

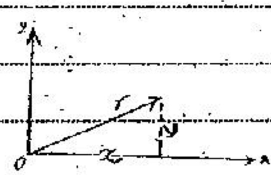
$$C_1(y,z) = ky^2 + C$$

$$C_2(x,z) = kx^2 + C$$

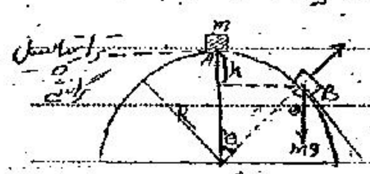
در دستگاه قطبی

$$u = k(x^2 + y^2) + C$$

$$u = kr^2 + C$$



مثال: جرم m روی سطح کره‌ای قرار دارد ضربه‌ای به آن وارد می‌کنیم. می‌خواهیم ببینیم با چه زاویه‌ای سطح را ترک می‌کند؟



$$\sum F_t = mg\sin\theta = ma_t \Rightarrow a_t = g\sin\theta$$

$$\sum F_r = mg\cos\theta - N = \frac{mv^2}{R}$$

در لحظه‌ای که m سطح کره را ترک می‌کند: $N = 0 \qquad mg\cos\theta = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow v^2 = gR\cos\theta \quad ①$

$$h = R - R\cos\theta \qquad (U + k)_A = (U + k)_B$$

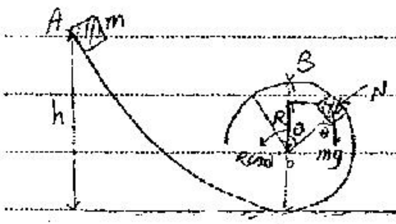
$$0 + 0 = -mgh + \tfrac{1}{2}mv^2$$

$$v^2 = 2gh \Rightarrow v^2 = 2g(R - R\cos\theta) \quad ②$$

نسبت می‌گیریم $\frac{①}{②} \begin{cases} v^2 = gR\cos\theta \\ v^2 = 2g(R - R\cos\theta) \end{cases} \Rightarrow \cos\theta = \frac{2}{3}$

$$\theta = \operatorname{Arc}\cos\tfrac{2}{3}$$

مثال - جرم m که حلقه را ترک می‌کند



$$\Sigma F_r = mg\cos\theta + N = \frac{mv^2}{R}$$

در لحظه‌ای که m حلقه را ترک می‌کند $N=0 \Rightarrow v^2 = gR\cos\theta$ (1)

قانون پایستگی انرژی $mgh + 0 = mg(R + R\cos\theta) + \frac{1}{2}mv^2$

$$v^2 = 2gh - 2gR(1+\cos\theta) \quad (2)$$

$$\begin{cases} (1) & v^2 = gR\cos\theta \\ (2) & v^2 = 2gh - 2gR(1+\cos\theta) \end{cases} \Rightarrow gR\cos\theta = 2gh - 2gR(1+\cos\theta)$$

$$3gR\cos\theta = 2h - 2R$$

$$\cos\theta = \frac{2(h-R)}{3R}$$

حداقل h چقدر باشد تا جسم بتواند حلقه را دور بزند؟ یعنی وقتی از نقطه B عبور کند یعنی θ صفر باشد

$$\theta = 0 \Rightarrow \cos\theta = \frac{2(h-R)}{3R} \Rightarrow 1 = \frac{2h-2R}{3R} \Rightarrow 3R = 2h - 2R$$

$$5R = 2h \Rightarrow h \geq \frac{5}{2}R$$

$$h = \frac{5}{2}R$$

اگر h=2R باشد چه اتفاقی می‌افتد؟ جسم به نقطه اوج نمی‌رسد
(بدون سرعت اولیه از h=2R رها شود که حلقه را ترک می‌کند)

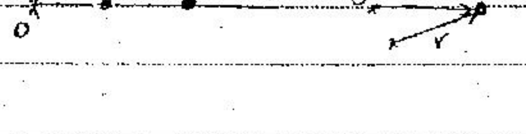
$h = 2R$

$\cos\theta = \frac{2(2R-R)}{3R} \Rightarrow \cos\theta = \frac{2}{3}$

مرکز جرم

مثل این است که جرم جسم در آن نقطه اثر کند.
یک نقطه‌ای در هر جسم که مسیر منحنی طی می‌کند.
بقیه نقاط جسم حرکت پیچیده‌ای دارند.

گشتاور اول جرم:



گشتاور اول جرم $= m.\vec{r}$
حاصلضرب بردار مکان در جرم جسم

Subject:

Year. 200 Month. Day.

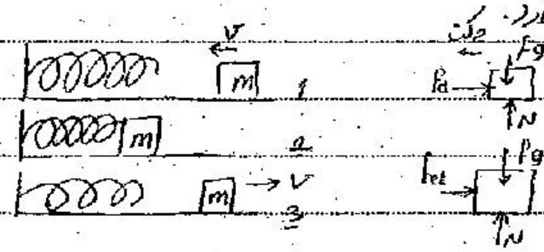
$$W=\int_0^{2\pi}(2r\cos\theta - r\sin\theta)(-r\sin\theta\, d\theta)+\int_0^{2\pi}(r\cos\theta + r\sin\theta)\, r\cos\theta\, d\theta$$

$$W=\int_0^{2\pi} r^2(\sin 2\theta + \overbrace{\sin^2\theta}^{\frac{1-\cos 2\theta}{2}})\, d\theta + \int_0^{2\pi} r^2(\overbrace{\cos^2\theta}^{\frac{1+\cos 2\theta}{2}} + \tfrac{1}{2}\sin 2\theta)\, d\theta$$

$r=3 \rightarrow W = 18\pi$

پتانسیل انرژی

ـ کار نیروی پایستار به مسیر حرکت بستگی ندارد.



$W_{1\to 2} = -\frac{1}{2}kx^2$

$W_{2\to 3} = +\frac{1}{2}kx^2$

$W_{کل} = -\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}kx^2 = 0$

$W_{کل} = \Delta K$

$\Delta K = 0 \Rightarrow K_1 = K_2$

اصطکاک نیروی ناپایستار است.

کار نیروی اصطکاک منفی است و هرچه مسیر طولانی‌تر

اتلاف انرژی بیشتر است.

پایستگی انرژی $U_1 + K_1 = U_2 + K_2$

$(K_2 - K_1) + (U_2 - U_1) = 0$

$\Delta K + \Delta U = 0$

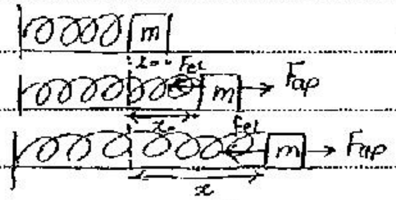
اگر در هر صورت انرژی جنبشی کم شود

انرژی پتانسیل زیاد می‌شود تا حاصل جمع ثابت بماند و بالعکس

انرژی پتانسیل نوعی از انرژی مکانیکی است که به سرعت بستگی ندارد بلکه به وضعیت جسم بستگی دارد.

$$\begin{cases}\Delta U + \Delta K = 0 & \text{مخصوص نیروهای پایستار}\\ W = \Delta K & \text{(برای همه نیروها) کار}\end{cases} \Rightarrow \underbrace{\Delta U}_{\text{تغییر انرژی پتانسیل}} = -\underbrace{W}_{\text{کار نیروی پایستار}}$$

محاسبه انرژی پتانسیل یک فنر.



$$U(x) - U(x_0) = -\int_{x_0}^{x} F_{el} \, dx$$

$$U(x) - U(x_0) = -\int_{x_0}^{x} -kx \, dx$$

$$U(x) - U(x_0) = \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{2}kx_0^2$$

قرارداد: اگر $\begin{cases} x_0 = 0 \\ U(x_0) = 0 \end{cases}$ در این صورت

$$U(x) - 0 = \frac{1}{2}kx^2$$

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

اگر فنر را به اندازه‌ی x کشیده یا فشرده کنیم افزایش انرژی پتانسیل فرقی نمی‌کند (در هر دو حالت مثل هم است)

انرژی پتانسیل گرانشی

$$\Delta U = -W$$

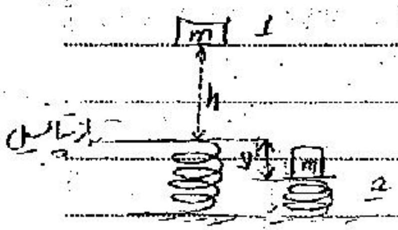
$$U_2 - U_1 = -(-mg(y_2 - y_1))$$

$$U_2 - U_1 = mg(y_2 - y_1)$$

قرارداد (در مبدا) $\begin{cases} U_1 = 0 \\ y_1 = 0 \\ y_2 = h \end{cases}$ در این صورت

$$U_2 = mgy_2 = mgh$$

مثال: در شکل زیر اگر جسم m رها شود حداکثر تراکم فنر را بیابید.



$$(U_{el} + U_g + K)_1 = (U_{el} + U_g + K)_2$$

$$0 + mgh + 0 = \frac{1}{2}ky^2 - mgy + \frac{1}{2}mv^2$$

$$ky^2 - 2mgy + mv^2 - 2mgh = 0$$

$$y = y_{Max} \rightarrow v = 0$$

$$ky_{Max}^2 - 2mgy_{Max} - 2mgh = 0$$

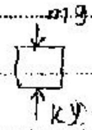
$$y_{Max} = \frac{mg \pm \sqrt{m^2g^2 + 2kmgh}}{k}$$

Subject:

Year. 200   Month.   Day.

$$y_{Max} = \frac{mg}{k} \pm \sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + \frac{2mgh}{k}}$$

سرعت ماکسیمم را هم بدست آورید.



نیروی فنر ... هم جهت می‌کند (هر چه y بیشتر باشد ky هم بیشتر است)

$$F_{net} = mg - ky$$

در حال تعادل سرعت ماکسیمم است ← $mg - ky = 0$

$$y = \frac{mg}{k}$$

می‌توانیم از معادله حرکت جسم v را بدست آوریم

$$ky^2 - 2mgy + mv^2 - 2mgh = 0 \longrightarrow v^2 = -\frac{k}{m}y^2 + 2g(y+h)$$

مشتق می‌گیریم : $2v\frac{dv}{dt} = -\frac{2k}{m}y\frac{dy}{dt} + 2g\frac{dy}{dt}$

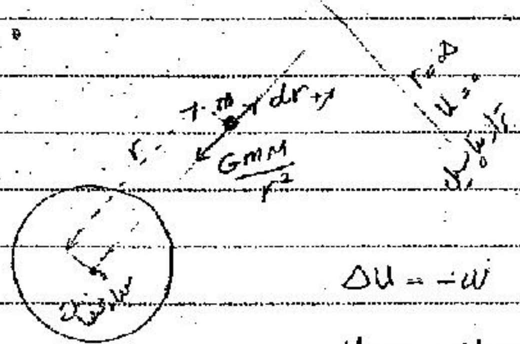
$$2\frac{dv}{dt} = -\frac{2k}{m}y + 2g$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m}y + g = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{mg}{k}$$

به ازای $y = \frac{mg}{k}$ سرعت به بیشینه خود می‌رسد

$$V_{Max}^2 = -\frac{k}{m}\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + 2g\left(\frac{mg}{k} + h\right)$$

زمان ماکسیمم در چه لحظه‌ای است؟



مثال: پتانسیل انرژی جسم m را بیابید.

$$\Delta U = -W$$

$$U_{(r_0)} - U_{(r)} = -\int_r^{r_0} \vec{F_g}\cdot\vec{dr}$$

$$U_{(r_0)} - U_{(r)} = -\int_r^{r_0} -\frac{GMm}{r^2}\,\vec{dr}$$

$$U(r_0) - U(r) = -GmM\left|\frac{1}{r}\right|_r^{r_0}$$

$$U(r_0) - U(r) = -\frac{GmM}{r_0} + \frac{GmM}{r}$$ کاری که گرانش انجام می‌دهد تا از این نقطه به بی‌نهایت برسد

قرار داد $\begin{cases} r_0 = \infty \\ U(r_0) = 0 \end{cases}$ $U(r) = -\frac{GmM}{r}$ (جرم m) $r \geq R_e$

$$U_2 - U_1 = -\frac{GmM}{r_2} - \left(-\frac{GmM}{r_1}\right)$$ مبنا = مرز زمین

گرانش سطحی = حالت خاص پتانسیل جاذبه

$$U_2 - U_1 = GmM\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$ اگر $r_2 = r + \Delta r$

$$U_2 - U_1 = GmM\left(\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}\right)$$ $r_1 = r$, $\Delta r \ll r$

$$U_2 - U_1 = \frac{GmM}{r^2}(r_2 - r_1)$$ $r_1 r_2 = r(r + \Delta r) = r^2\left(1 + \frac{\Delta r}{r}\right)$, $\Delta r \ll r$ $\simeq r^2$

$$U_2 - U_1 = mg(r_2 - r_1) \rightarrow r_2 - r_1 = y_2 - y_1$$

$$U_2 - U_1 = mg(y_2 - y_1)$$

مثال: جسمی به جرم m را از نقطه‌ای به فاصله r از زمین به بی‌نهایت می‌بریم. کار نیروی گرانش را در این جابجایی به دست آورید و آن را با پتانسیل گرانشی جرم m در نقطه آغاز مقایسه کنید.

$U(r) = G\frac{mM}{r}$ $\qquad W = \int_1^2 \vec{F_g} \cdot d\vec{r}$

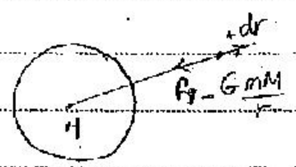
$$W = -\int_r^{\infty} G\frac{mM}{r^2}\, d\vec{r} \Rightarrow W = GmM\left[\frac{1}{r}\right]_r^{\infty}$$

$$W = GmM\left(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{r}\right)$$

پتانسیل گرانشی جرم m در یک نقطه از میدان گرانشی برابر است با کاری که گرانش روی جرم m انجام می‌دهد تا m از نقطه مورد نظر به بی‌نهایت برده شود.

$W = -G\frac{mM}{r}$

$U(r) = -G\frac{mM}{r}$



پتانسیل گرانشی جرم m در یک نقطه از میدان گرانشی برابر است با کاری که ما انجام می‌دهیم تا جرم m در شرایط تعادل از بی‌نهایت به نقطه مورد نظر آورده شود.

Subject:

Year. 200   Month.   Day.

$$\Delta U = W$$

$$U_{(x)} - U_{(x_0)} = -W$$

[انتگرال] $dU_{(x)} - \underset{\text{ثابت}}{dU_{(x_0)}} = -dW \rightarrow dU_{(x)} = -F_x\,dx$

$$* \; F_x = -\frac{dU_{(x)}}{dx} \; *$$

$$U_{el} = \tfrac{1}{2}kx^2 \qquad F_x = -\frac{d}{dx}\left(\tfrac{1}{2}kx^2\right)$$

$$F_x = -kx$$

$$U_r = -\frac{GmM}{r}$$

$$F_r = \frac{d}{dx}\left(\frac{GmM}{r}\right) \rightarrow F_r = -\frac{GmM}{r^2}$$

هرگاه پتانسیل را بدانیم $U = U_{(x,y,z)}$ ابتدا داریم

$$F_{(x)} = -\frac{\partial U}{\partial x} \;,\; F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} \;,\; F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

$$F = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{k}\right)$$

$$\vec{F} = -\operatorname{grad} U$$

مثال. پتانسیل است . (کار نیروی حاصل از نقطه $A(1,1,1)$ تا $B(2,2,2)$ به دست آورید)

$$U = \frac{2x^2}{y} + \frac{y^2}{2xz} + x^2y^2z^2$$

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{4x}{y} + \frac{y^2}{2zx^2} - 2y^2z^2x$$

کار نیروی پایستار مستقل از مسیر حرکت است

و تنها بستگی به دو نقطه دارد

$$F_y = \frac{\partial U}{\partial y} = +2x^2\frac{1}{y^2} - \frac{y}{xz} - 2x^2z^2y$$

$$F_z = \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{y^2}{2xz^2} - 2x^2y^2z$$

$$\vec{F} = \left(\frac{-4z}{y} + \frac{y^2}{2x^2 z} - 2xy^2z^2\right)\hat{i} + \left(\frac{2x^2}{y^2} - \frac{y}{xz} - 2x^2yz^2\right)\hat{j} + \left(\frac{y^2}{2xz^2} - 2x^2y^2z\right)\hat{k}$$

$$\Delta U = -W \implies W = -(U_B - U_A) \qquad A(1,1,1)$$

$$W = U_A - U_B \qquad B(2,2,2)$$

مثال: نشان دهید نیروی F پایستار است.

$$F = (y^2z^3 - 6xz^2)\hat{i} + 2xyz^3\hat{j} + (3xy^2z^2 - 6x^2z)\hat{k}$$

۱. آیا می‌توان برای آن یک تابع پتانسیل بدست آورد

چون تابع پتانسیل مختص نیروی پایستار است.

۲. نشان دهیم کار نیرو در مسیر دلخواه به مسیر بستگی ندارد

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}$$

$$U = -\int F_x\,dx \implies U = -\int (y^2z^3 - 6xz^2)\,dx$$

$$U = -y^2z^3x + 3x^2z^2 + C_1(y,z) \quad ①$$

$$F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} \implies U = -\int F_y\,dy \implies U = -\int 2xyz^3\,dy$$

$$U = -xy^2z^3 + C_2(x,z) \quad ②$$

$$F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} \implies U = -\int (3xy^2z^2 - 6x^2z)\,dz$$

$$U = -xy^2z^3 + 3x^2z^2 + C_3(x,y) \quad ③$$

$$\text{فرض}\begin{cases} C_2(x,z) = 3x^2z^2 + C \\ C_1(y,z) = C_3(x,y) = C \end{cases} \implies \begin{cases} U_① = -y^2z^3x + 3x^2z^2 + C \\ U_② = -xy^2z^3 + 3x^2z^2 + C \\ U_③ = -xy^2z^3 + 3x^2z^2 + C \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\overbrace{\frac{\partial U}{\partial y}}^{-F_y}\Big) = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\overbrace{\frac{\partial U}{\partial x}}^{-F(x)}\Big) \implies \frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y} = -\frac{\partial}{\partial x}(F_y) = -\frac{\partial}{\partial y}(F_x)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\overbrace{\frac{\partial U}{\partial z}}^{-F_z}\Big) = \frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{\partial U}{\partial x}\Big) \implies \frac{\partial^2 U}{\partial x\partial z} = -\frac{\partial}{\partial x}(F_z) = -\frac{\partial}{\partial z}(F_x)$$

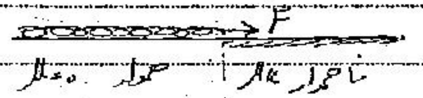
$$\frac{\partial^2 U}{\partial z\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial U}{\partial z}\Big) = \frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{\partial U}{\partial x}\Big) \implies \frac{\partial^2 U}{\partial z\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y}(F_z) = -\frac{\partial}{\partial z}(F_y)$$

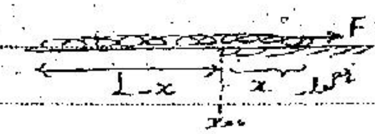
Subject:

Year. 200 Month. Day.

$$\text{curl}\,\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = 0$$

مثال: فرض کنید زنجیر همگنی به جرم واحد طول λ روی سطح افقی شامل یک بخش هموار (بدون اصطکاک) و یک بخش ناهموار به ضریب اصطکاک μ قرار دارد یک سر این زنجیر با نیروی ثابت F کشیده می‌شود اگر در آغاز تمام زنجیر روی سطح هموار ($x=0$) در حالت سکون باشد در لحظه‌ای که تمام طول زنجیر روی سطح ناهموار منتقل می‌شود ($x=L$) سرعت زنجیر چقدر است؟





$$F - \mu_k g \lambda x = m\frac{dv}{dt}$$

$$F - \mu_k g \lambda x = \lambda L\, v\frac{dv}{dx}$$

$$\int_0^x (F - \mu_k g \lambda x)\,dx = \lambda L \int_0^v v\,dv$$

$$Fx - \frac{1}{2}\mu_k g \lambda x^2 \Big|_0^x = \frac{1}{2}\lambda L v^2$$

$$2Fx - \mu_k g \lambda x^2 = \lambda L v^2$$

$$v = \left(\frac{2Fx}{L\lambda} - \frac{\mu_k g x^2}{L}\right)^{1/2}$$

$$x = L \quad \rightarrow \quad v = \left(\frac{2F}{\lambda} - \mu_k g L\right)^{1/2}$$

سرعت حد:

فرض کنید نیروی R تابعی از سرعت است.

$$\vec{mg} + \vec{R} = m\vec{a}$$

برای $\vec{R} = -k\vec{v}$ تابع سرعت $\qquad mg - kv = m\frac{dv}{dt}$

مثل $R = -kV$ $\qquad$ kV آنقدر زیاد می‌شود تا با mg برابر شود

اندازه $|R| = kV$

سرانجام $V = V_T$ برآیند نیروهای مؤثر بر جسم صفر شده و حرکت یکنواخت می‌شود (یعنی $a=0$) سرعت این حرکت را سرعت نهایی یا حد گویند

Subject:

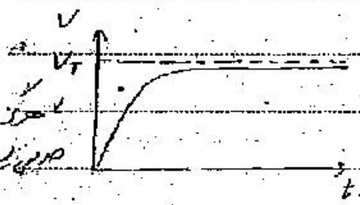
Year. 200 Month. Day.

$mg - kV_T = 0 \Rightarrow V_T = \dfrac{mg}{k}$

$\underbrace{mg}_{kV_T} - kV = m\dfrac{dv}{dt} \Rightarrow kV_T - kV = m\dfrac{dv}{dt}$ [illegible]

$\dfrac{dv}{V_T - V} = \dfrac{k}{m}\, dt$

$\displaystyle\int_0^V \frac{-dv}{V_T - V} = -\frac{k}{m}\int_0^t dt$



[illegible]

$\text{Log}\,(V_T - V)\Big|_0^V = -\dfrac{k}{m}t$

$\log \dfrac{V_T - V}{V_T} = -\dfrac{k}{m}t \Rightarrow \dfrac{V_T - V}{V_T} = e^{-\frac{k}{m}t}$

$\Rightarrow 1 - \dfrac{V}{V_T} = e^{-\frac{k}{m}t} \Rightarrow V = V_T(1 - e^{-\frac{k}{m}t})$

$t = ?$

$V = V_T \Rightarrow V_T = V_T(1 - e^{-\frac{k}{m}t}) \Rightarrow t = \infty$

[illegible] $V = 0.99V_T$?

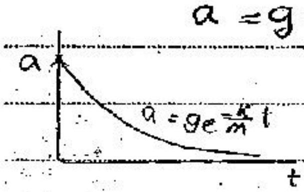
$0.99V_T = V_T(1 - e^{-\frac{k}{m}t})$

$\dfrac{1}{100} = e^{-\frac{k}{m}t}$

$\log 1 - \log 100 = -\dfrac{k}{m}t \Rightarrow t = \dfrac{\log 100}{k/m}$

[illegible] $\dfrac{dv}{dt} = V_T(0 + \dfrac{k}{m}e^{-\frac{k}{m}t})$

$a = g e^{-\frac{k}{m}t}$



$\dfrac{dy}{dt} = V_T(1 - e^{-\frac{k}{m}t})$

$dy = V_T(1 - e^{-\frac{k}{m}t})\,dt \Rightarrow \displaystyle\int_0^y dy = V_T\int_0^t (1 - e^{-\frac{k}{m}t})\,dt$

[illegible] V

$y = V_T(t + \dfrac{m}{k}e^{-\frac{k}{m}t})\Big|_0^t$

$y = V_T(t + \dfrac{m}{k}e^{-\frac{k}{m}t} - 0 - \dfrac{m}{k})$

$y = V_T\left(t + \dfrac{m}{k}(e^{-\frac{k}{m}t} - 1)\right)$

$y = V_T(t + \dfrac{m}{k}(e^{-\frac{k}{m}t} - 1))$

$a = \dfrac{dv}{dt}$

$t = \infty \rightarrow y = \infty$

$t = 0 \rightarrow y = 0$

Subject:

Year. 200   Month.   Day.

مثال: نشان دهید نیروی زیر پایستار است. (انرژی پتانسیل در دستگاه قطبی بیابید)

$$\vec{F} = -2kx\hat{i} - 2ky\hat{j} \qquad \frac{\partial F_x}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial F_y}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial z} = 0 \qquad \frac{\partial F_z}{\partial y} = 0 \Rightarrow$$ F پایستار است

از طرفی $F_x = -\dfrac{\partial U}{\partial x} \rightarrow \int F_x\,dx = -U$

$$U = -\int -2kx\,dx \Rightarrow U = kx^2 + C_1(y,z) \quad ①$$

$$F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} \rightarrow \int F_y\,dy = -U \Rightarrow U = -\int -2ky\,dy$$

$$\Rightarrow U = ky^2 + C_2(x,z) \quad ②$$

$$\begin{cases} ① & U = kx^2 + C_1(y,z) \\ ② & U = ky^2 + C_2(x,z) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U = kx^2 + ky^2 + C \\ U = kx^2 + ky^2 + C \end{cases} \Rightarrow$$ پس پایستار است

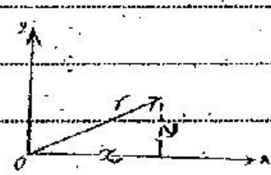
$$C_1(y,z) = ky^2 + C$$

$$C_2(x,z) = kx^2 + C$$

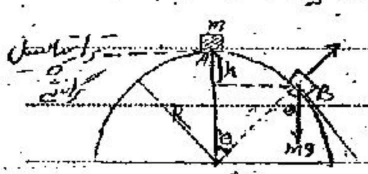
در دستگاه قطبی

$$U = k(x^2 + y^2) + C$$

$$U = kr^2 + C$$



مثال: ذره‌ای روی سطح کره‌ای قرار دارد. ضربه‌ای به آن وارد می‌کنیم. می‌خواهیم ببینیم در چه زاویه‌ای سطح را ترک می‌کند؟



$$\sum F_t = mg\sin\theta = ma_t \Rightarrow a_t = g\sin\theta$$

$$\sum F_r = mg\cos\theta - N = \frac{mv^2}{R}$$

در لحظه‌ای که m سطح کره را ترک کند: $N = 0$ $\qquad mg\cos\theta = \dfrac{mv^2}{R} \Rightarrow v^2 = gR\cos\theta \quad ①$

$$h = R - R\cos\theta \qquad (U+k)_A = (U+k)_B$$

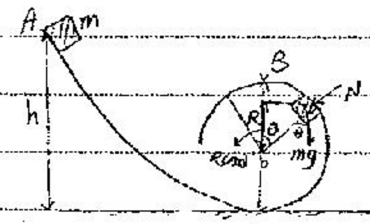
$$0 + 0 = -mgh + \tfrac{1}{2}mv^2$$

$$v^2 = 2gh \Rightarrow v^2 = 2g(R - R\cos\theta) \quad ②$$

با تقسیم $\dfrac{①}{②}$ $\begin{cases} v^2 = gR\cos\theta \\ v^2 = 2g(R - R\cos\theta) \end{cases} \Rightarrow \cos\theta = \dfrac{2}{3}$

$$\theta = \operatorname{ArcCos} \tfrac{2}{3}$$

مثال: جرم m که حلقه را ترک می‌کند



$$\Sigma F_r = mg\cos\theta + N = \frac{mv^2}{R}$$

در لحظه‌ای که m حلقه را ترک می‌کند $N = 0$ و $\Rightarrow v^2 = gR\cos\theta$ (1)

پایستگی انرژی: $mgh + 0 = mg(R + R\cos\theta) + \frac{1}{2}mv^2$

$$v^2 = 2gh - 2gR(1+\cos\theta) \quad (2)$$

$$\begin{cases} (1)\ v^2 = gR\cos\theta \\ (2)\ v^2 = 2gh - 2gR(1+\cos\theta) \end{cases} \Rightarrow gR\cos\theta = 2gh - 2gR(1+\cos\theta)$$

$$3gR\cos\theta = 2h - 2R$$

$$\cos\theta = \frac{2(h-R)}{3R}$$

حداقل h چقدر باشد تا جسم بتواند حلقه را دور بزند؟ یعنی باید از نقطه B عبور کند یعنی θ صفر باشد

$$\theta = 0 \Rightarrow \cos\theta = \frac{2(h-R)}{3R} \Rightarrow 1 = \frac{2h-2R}{3R} \Rightarrow 3R = 2h - 2R$$

$$5R = 2h \Rightarrow h \geq \frac{5}{2}R$$

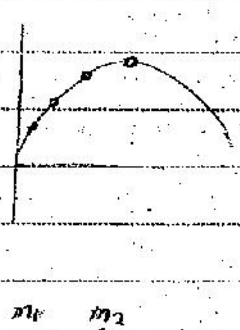
$$h = \frac{5}{2}R$$

اگر $h = 2R$ باشد چه اتفاقی می‌افتد؟ مسلماً به نقطه اوج نمی‌رسد
(بدون سرعت اولیه از $h = 2R$ رها شود که حلقه را ترک می‌کند)

$h = 2R$

$\cos\theta = \frac{2(2R-R)}{3R} \Rightarrow \cos\theta = \frac{2}{3}$

مرکز جرم



مثل این است که جرم در آن نقطه اثر کند.
یک نقطه‌ی ویژه در جسم که مسیر منحنی طی می‌کند.
بقیه نقاط جسم حرکت پیچیده‌ای دارند.

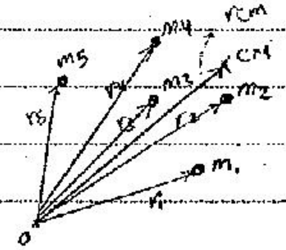
گشتاور اول جرم:

گشتاور اول جرم $= m \cdot \vec{r}$

حاصلضرب بردار مکان در جرم جسم

گشتاور جرم $= m\vec{r}$

$$\underset{\text{مرکز جرم}}{x_{cm}} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$



$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 + \cdots}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots}$$

مرکز جرم سامانه‌ای از ذرات نقطه‌ای است که اگر کل جرم در آن نقطه قرار گیرد گشتاور اول آن نسبت به هر نقطه دلخواه برابر است با مجموع گشتاورهای جرمی ذرات نسبت به آن نقطه.

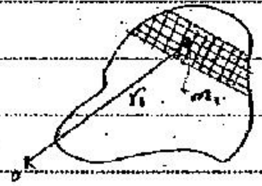
$$M\vec{r}_{cm} = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 + \cdots$$

مرکز جرم نقطه‌ای است که گشتاور اول آن برابر است با مجموع گشتاورهای اول کلیه نقاط

$$x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \cdots}{M}$$

$$y_{cm} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \cdots}{M}$$

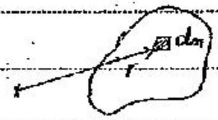
$$z_{cm} = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + \cdots}{M}$$



$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M \text{ یا } \sum m_i}$$

اگر توزیع جرم تابع پیوسته ریاضی مشخص باشد می‌توان نوشت $\vec{r}_{cm} = \dfrac{\int \vec{r}\, dm}{\int dm}$

$\Delta m = dm$



$$x_{cm} = \bar{x} = \frac{\int x\, dm}{\int dm} \qquad z_{cm} = \bar{z} = \frac{\int z\, dm}{\int dm}$$

$$y_{cm} = \bar{y} = \frac{\int y\, dm}{\int dm} \qquad \int dm = M$$

مرکز هندسی (جرم یکنواخت) می‌شود $\vec{r}_{cm} = \dfrac{\int \vec{r}\, dA}{\int dA}$ سطح

(مرکز سطح همان مرکز جرم)

Subject:

Year. 200 Month. Day.

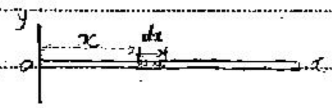
مثال. مرکز جرم میله‌ای به طول L را تعیین کنید در صورتی که بدانیم توزیع جرم از رابطه زیر تبعیت می‌کند.

1. انتخاب محورهای مختصات مناسب

2. انتخاب جزء انتگرال‌گیری و تعیین جرم و مختصات آن $\lambda=\lambda_0(1+ax)$

3. استفاده از رابطه $\bar{Y}=\dots \quad \bar{x}=\frac{\int x\,dm}{\int dm}$

4. انجام انتگرال‌گیری



$\lambda=\lambda_0(1+ax) \qquad dm=\lambda\,dx$

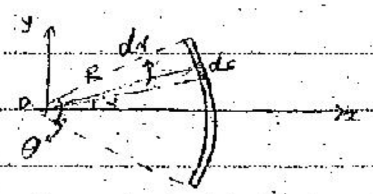
$dm=\lambda_0(1+ax)\,dx \Rightarrow \bar{x}=\frac{\int x\,dm}{\int dm}$

$$\bar{x}=\frac{\int_0^L \lambda_0(1+ax)\,x\,dx}{\int_0^L \lambda_0(1+ax)\,dx} \Rightarrow \bar{x}=\frac{\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}ax^3\Big|_0^L}{x+\frac{1}{2}ax^2\Big|_0^L}$$

$$\bar{x}=\frac{\frac{1}{2}L^2+\frac{1}{3}aL^3}{L+\frac{1}{2}aL^2}=\frac{3L+2aL^2}{6+3aL}$$

آزمون ⇐ درستی‌سنجی، $a=0 \Rightarrow \bar{x}=\frac{L}{2}$

مثال. سیم خمیده‌ای به شکل قوس دایره به شعاع R است. مرکز جرم آن را بیابید.



جرم واحد طول

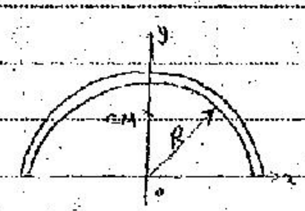
$dm=\lambda\,dS=\lambda R\,d\alpha$

$ds \left| \begin{array}{l} x=R\cos\alpha \\ y=R\sin\alpha \end{array}\right.$

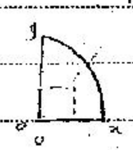
$$\bar{x}=\frac{\int x\,dm}{\int dm}=\frac{\lambda R^2\int_{-\theta/2}^{\theta/2}\cos\alpha\,d\alpha}{\lambda R\int_{-\theta/2}^{\theta/2}d\alpha}=\frac{2R\int_0^{\theta/2}\cos\alpha\,d\alpha}{2\int_0^{\theta/2}d\alpha}$$

$$\bar{x}=\frac{R\sin\alpha\Big|_0^{\theta/2}}{\alpha\Big|_0^{\theta/2}}=\frac{R\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}$$

مثال. مرکز جرم سیم نیم‌دایره را بیابید.



$$y=\frac{R\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}}=\frac{2R}{\pi}$$



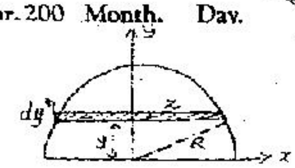
$$\bar{y}=\frac{R\sin\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}}=\frac{4R\frac{\sqrt{2}}{2}}{\pi}=\frac{2R\sqrt{2}}{\pi}$$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

مثال: مرکز جرم قطاع را بیابید

مرکز جرم نیمکره:



$$dm = \overset{\text{جرم حجمی}}{\rho} \cdot \pi x^2 \, dy$$

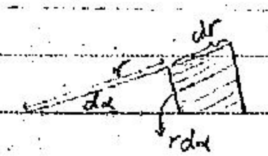
$$R^2 = x^2 + y^2 \rightarrow x^2 = R^2 - y^2$$

$$\bar{y} = \frac{\int y \cdot \rho\pi (R^2 - y^2)\, dy}{\int \rho\pi (R^2 - y^2)\, dy}$$

$$\rightarrow \bar{y} = \frac{\rho\pi \int_0^R (yR^2 - y^3)\, dy}{\rho\pi \int_0^R (R^2 - y^2)\, dy} = \frac{\frac{1}{2}y^2R^2 - \frac{1}{4}y^4 \Big|_0^R}{R^2 y - \frac{1}{3}y^3 \Big|_0^R} =$$

$$\frac{\frac{1}{2}R^4 - \frac{1}{4}R^4}{R^3 - \frac{1}{3}R^3} = \frac{\frac{1}{4}R^4}{\frac{2}{3}R^3} = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{2} R = \frac{3}{8} R$$

حال باید مرکز جرم این سطح بگیریم



$$dm = \overset{\text{جرم سطحی}}{\sigma}\, r\, d\alpha\, dr$$

$$x = r\cos\alpha$$

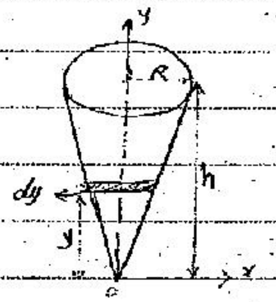
$$y = r\sin\alpha$$

$$\bar{x} = \frac{\int (r\cos\alpha)\, \sigma\, r\, d\alpha\, dr}{\int \sigma\, r\, d\alpha\, dr}$$

$$\bar{x} = \frac{\int_0^R r^2 dr \int_{-\theta/2}^{\theta/2} \cos\alpha\, d\alpha}{\int_0^R r\, dr \int_{-\theta/2}^{\theta/2} d\alpha} = \frac{2}{3} \frac{R \sin \theta/2}{\theta/2}$$

مثال: مرکز جرم یک مخروط کامل را بیابید.

حالت دو بعدی آن که مرکز جرم یک مثلث است



$$dm = \overset{\text{جرم حجمی}}{\rho}\, \pi x^2\, dy$$

$$\bar{y} = \frac{\int y\, dm}{dm} = \frac{\pi\rho \int x^2 y\, dy}{\pi\rho \int x^2 dy}$$

$$\frac{x}{R} = \frac{y}{h} \rightarrow x = \frac{R}{h} y$$

$$\bar{y} = \frac{\int_0^h (\frac{R}{h}y)^2 y\, dy}{\int_0^h (\frac{R}{h}y)^2 dy} = \frac{\int_0^h y^3 dy}{\int_0^h y^2 dy} = \frac{\frac{y^4}{4}\Big|_0^h}{\frac{y^3}{3}\Big|_0^h}$$

$$\bar{y} = \frac{3}{4} R$$

اگر نیمکره توخالی داشته باشیم به صورت بالا عمل می‌کنیم

$$G: \bar{y} = \frac{3}{8} R$$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

حرکت مرکز جرم:

$$M\vec{r}_{CM} = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 + \cdots$$

نسبت به زمان مشتق می‌گیریم:

$$M\frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} = m_1\frac{d\vec{r}_1}{dt} + m_2\frac{d\vec{r}_2}{dt} + \cdots$$

$$M\vec{V}_{CM} = m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2 + \cdots$$

$$M\vec{V}_{CM} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \cdots \Rightarrow \vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{P}_3 + \cdots$$

$$\vec{P} = M\vec{V}_{CM}$$

$$\vec{P} = M\vec{V}_{CM} = m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2 + \cdots$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = M\frac{d\vec{V}_{CM}}{dt} = m_1\frac{d\vec{V}_1}{dt} + m_2\frac{d\vec{V}_2}{dt} + \cdots$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = M\vec{a}_{CM} = m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 + m_3\vec{a}_3 + \cdots$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = M\vec{a}_{CM} = \underbrace{\Sigma\vec{F}_{ext}}_{\text{نیروی خارجی}} + \underbrace{\Sigma\vec{F}_{int}}_{=0,\ \text{نیروی داخلی}}$$

قانون دوم نیوتن در استفاده سامانه‌ی ذرات:

$$\Rightarrow \begin{cases} \Sigma\vec{F}_{ext} = \dfrac{d\vec{P}}{dt} \\ \Sigma\vec{F}_{ext} = M\vec{a}_{CM} \end{cases}$$

$\Sigma F = \dfrac{dP}{dt}$, $\Sigma F = ma$ $\Rightarrow$ قانون نیوتن

در استفاده یک ذره (همه نیروها خارجی اند)

* نیروی داخلی نمی‌توانند تکانه کل را تغییر دهد و یا مرکز جرم را شتاب دار کند اما می‌توانند اجزاء جسم را شتاب دار کنند.

اصل پایستگی تکانه خطی:

اگر $\Sigma\vec{F}_{ext} = 0 \Rightarrow \dfrac{d\vec{P}}{dt} = 0$

$\vec{P} =$ ثابت

اگر نیروی خارجی بر سامانه‌ای از ذرات اعمال نشود تکانه کل پایا است.

اگر $\Sigma\vec{F}_{ext} = 0 \Rightarrow \vec{a}_{CM} = 0$

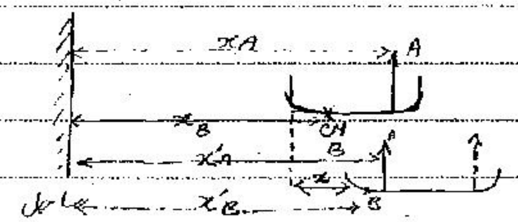
Subject:

Year. 200 Month. Day.

مثال: این شخص روی قایق به سمت چپ حرکت می‌کند چه اتفاقی می‌افتد؟ (با فرض بیان یا قایق؟)

قایق عقب می‌رود (چون شخص به جلو می‌رود عکس‌العمل

باعث می‌شود قایق به عقب برود)



$$x_{CM}=\frac{m_A x_A+m_B x_B}{m_A+m_B}$$

$$x'_{CM}=\frac{m_A x'_A+m_B x'_B}{m_A+m_B}$$

چون $\sum F_{ext}$ برابر صفر است مرکز جرم سامانه (شخص + قایق)

جابجا نمی‌شود. (نسبت به ساحل اجزای سامانه جابجا می‌شوند)

$$x'_{CM}=x_{CM}$$

$$m_A x'_A+m_B x'_B=m_A x_A+m_B x_B$$

$$m_A x'_A-m_A x_A=m_B x_B-m_B x'_B$$

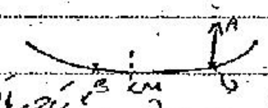
$$* \quad m_A(x'_A-x_A)=-m_B(x'_B-x_B) \quad *$$

اگر قایق را جابجا کنیم — اگر قایق به اندازه x جابجا شود A به اندازه d جابجا می‌شود

$$x'_A=x_A-d+x \quad \text{(به اندازه جابجایی قایق)}$$

$$x'_B=x_B+x$$

$$\begin{cases} x'_A-x_A=x-d & (1)\\ x'_B-x_B=x & (2)\end{cases}$$

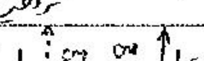


$$m_A(x-d)=-m_B(x)$$

$$m_A x-m_A d=-m_B x \rightarrow x(m_A+m_B)=m_A d$$

$$x=\frac{m_A}{m_A+m_B}\,d \quad \text{به سمت عقب رفتن قایق}$$

مرکز جرم سامانه (بین این دو یا مرکز جرم و نزدیکتر به جرم سنگین‌تر)



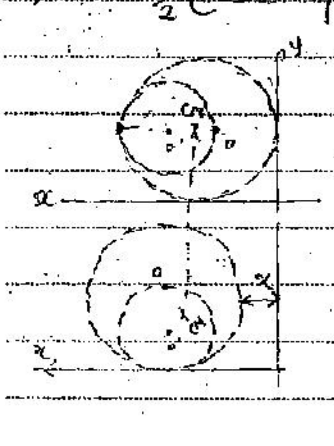
مثال: یک پوسته کروی به جرم M و شعاع R داریم و درون آن یک کره توپر به جرم M و شعاع $\frac{R}{2}$ را

رها کنیم این کره در پوسته می‌غلتد. کل سامانه چقدر جابجا می‌شود؟

چون نیروی خارجی در راستای x نداریم پس مرکز جرم در راستای x جابجا نمی‌شود.

در راستای y نیرو داریم (که نیروی ... است) پس

تغییری ندارد.



$$\text{مرکز جرم در راستای } x: \quad \bar{x}=\frac{M\times R+M\times \frac{3}{2}R}{M+M}=\frac{5}{4}R$$

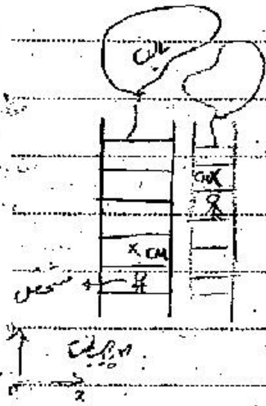
$$\bar{y}=\frac{MR+MR}{M+M}=\frac{2MR}{2M}=R$$

$$\begin{cases} \bar{x}' = \dfrac{(M+M)(R+x)}{2M} = R+x \\[2ex] \bar{y}' = \dfrac{M\times R + M\times R/2}{2M} = \frac{3}{4}R \end{cases}$$

$\bar{x}' = \bar{x}$

$\frac{5}{4}R = R + x \Rightarrow x = R/4$

مثال: بالنی داریم که نردبانی به آن معلق بسته شده و مجموعه در حال تعادل است. اگر شخص از پایین با پله بالا رود چه اتفاقی می‌افتد.



$M =$ جرم بالن + نردبان

$m =$ جرم شخص

$V_r =$ سرعت شخص نسبت به نردبان

$u =$ سرعت شخص نسبت به زمین

$V =$ سرعت نردبان بالن نسبت به زمین

وقتی شخص بالا می‌رود مرکز جرم سامانه چون به سمت بالا تغییر می‌کند پس باید نردبان پایین آید تا جای مرکز جرم ثابت را بگیرد y_{CM} تغییری نکند.

چون $\sum F_{ext} = 0$

$\rightarrow \vec{P} = \vec{P}'$

$0 = mu + MV$

سرعت نردبان نسبت به زمین + سرعت شخص نسبت به نردبان = سرعت شخص نسبت به زمین

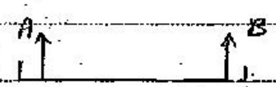
$u = V_r + V$

$$\begin{cases} 0 = mu + MV \\ u = V_r + V \end{cases} \Rightarrow 0 = mV_r + mV + MV$$

$$0 = V(M+m) + mV_r \Rightarrow V = -\frac{m}{m+M} V_r$$

که نشانه پایین آمدن به سمت پایین است.

مثال: اگر جرم A و B عوض شود چه اتفاقی می‌افتد.



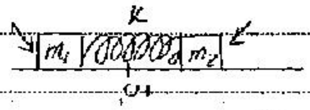
اگر $m_A = m_B \Rightarrow$ اتفاقی نمی‌افتد

$m_A > m_B$ حالت

$m_B > m_A$ مرکز جرم به طرف B می‌رود (سمت جرم بیشتر) میله در جهت عکس آن می‌رود یا کج می‌شود.

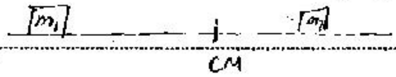
Subject:

Year. 200 Month. Day.



پس از پاره کردن ریسمان ، در راستای افقی نیروی خارجی بر سیستم

وارد نمی‌شود پس $\Sigma F_{ext} = 0$ پس مرکز جرم ثابت باقی می‌ماند



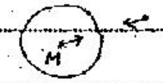
$$p = p'$$

$$0 = m_1 V_1 + m_2 V_2 \rightsquigarrow \frac{V_1}{V_2} = -\frac{m_2}{m_1}$$

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{\frac{1}{2} m_1 V_1^2}{\frac{1}{2} m_2 V_2^2} = \frac{m_1}{m_2}\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^2 \rightsquigarrow \frac{k_1}{k_2} = \frac{m_1}{m_2}\left(-\frac{m_2}{m_1}\right)^2 \Rightarrow \frac{k_1}{k_2} = \frac{m_2}{m_1}$$

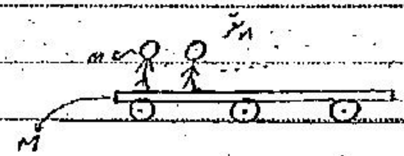
مثلاً: جرم m_1 ، دو برابر جرم m_2 باشد در آن صورت جابجا می‌شوند، باز هم مرکز جرم تغییری نمی‌کند

وقتی یک جسم را از سطح زمین رها می‌کنیم باید زمین هم به سمت جسم بیاید اما چون جرم زمین بسیار زیاد است این جابجایی محسوس نمی‌باشد.



مثال: n نفر روی این واگن قرار گرفته‌اند سیستم در حال حاضر ساکن است. افراد یکی یکی از واگن پایین می‌آیند سرعت نهایی را حساب کنید

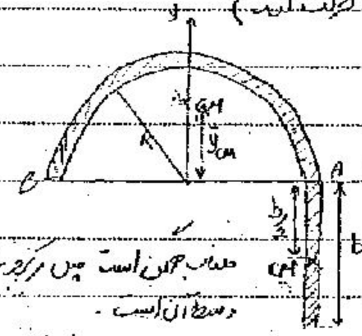
با دیگری حالت n نفر با هم با هم می‌پرند در این صورت سرعت نهایی چه تغییری می‌کند؟



Subject:

Year. 200 Month. Day.

مثال: یک میله‌ی لوله‌ای را به صورت نیم‌دایره درآورده‌ایم. طنابی از داخل آن عبور داده‌ایم که بیشتر از آن هم درازتر است.
وقتی طناب از نقطه A می‌گذرد سرعت آن چقدر است. (طناب را آزاد می‌گذاریم تا حرکت کند)



$$\overline{y} = \frac{R\sin\theta/2}{\theta/2} = \frac{R\sin 90}{\pi/2} = \frac{2R}{\pi}$$

$$(U+K)_1 = (U+K)_2$$ در حالت 2 کل طناب (L) از لوله خارج شده

$$\lambda\pi R g\,\overline{y} + \left(\lambda b g \times -\frac{b}{2}\right) = \left(\lambda L g \times -\frac{L}{2}\right) + \frac{1}{2}\lambda L v^2$$

طناب چون است چون مرکز جرم این قسمت در وسط آن است.

جرم طناب : $\lambda \cdot R\pi$

$$Rg\frac{2R}{\pi}\pi - \frac{b^2 g}{2} = -\frac{1}{2}L^2 g + \frac{1}{2}Lv^2$$

$$2R^2 g - \frac{b^2 g}{2} = -\frac{1}{2}L^2 g + \frac{1}{2}Lv^2$$

مرکز جرم نیم‌دایره

$ds = Rd\theta$ $\quad x = R\cos\theta$ $\quad dm = \delta \cdot ds$

$$v^2 = \frac{4R^2 g - b^2 g + L^2 g}{L}$$ (به طور ساده است.)

$$\overline{Y} = \frac{\int x\,dm}{\int dm} = \frac{\delta\int R\cos\theta \cdot Rd\theta}{\delta\int Rd\theta} = \frac{R^2\sin\theta\big|_0^{\pi/2}}{R\theta\big|_0^{\pi/2}} = \frac{2R}{\pi}$$

$$v = \sqrt{\frac{g}{L}\left(4R^2 - b^2 + L^2\right)}$$

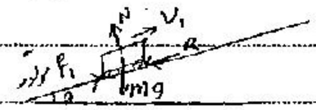
مثال: دو گلوله را در یک لحظه (بدون سرعت اولیه) رها می‌کنیم ... و برای هم ... که ... بار
که ... بار ... هر کدام چقدر می‌شود؟

Subject:

Year. 200 Month. Day.

مثال: کامیونی با سرعت v_1 بالا می‌رود نیروی مقاوم جاده $R = 0.04mg$ ، $\sin\theta = 0.02$

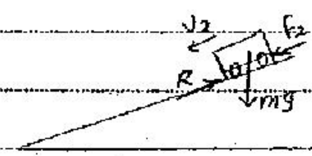
اگر برگشت این کامیون همین توان را مصرف کند سرعتش را بیابید. $P_1 = P_2$



$$\Sigma F = f_1 - mg\sin\theta - R = 0$$

$$f_1 = mg \times 0.02 + 0.04mg$$

$$f_1 = 0.06mg$$



در پایین آمدن

$$\Sigma F = f_2 - R + mg\sin\theta = 0$$

$$f_2 = R - mg\sin\theta$$

$$f_2 = 0.04mg - 0.02mg$$

$$f_2 = 0.02mg$$

توان تغییری نکند $P_1 = P_2$

$$f_1 v_1 = f_2 v_2 \rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \frac{f_1}{f_2} \Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \frac{0.06mg}{0.02mg} = 3 \rightarrow v_2 = 3v_1$$

مثال: هواپیمایی از نقطه A به B می‌رود (مسافت بین دو را ساعت می‌کند) و برمی‌گردد زمان رفت و برگشت آن $t = \frac{2L}{v}$ است نشان دهید اگر باد بیاید این زمان بیشتر می‌شود (بادی که سرعتش تغییری نکند)

$AB = L$

$A \xrightarrow{v}$ $\xleftarrow{u}$ B

سرعت ثابت $x = vt + x_0$

$x - x_0 = vt$

$L = vt \rightarrow t = \frac{L}{v}$

$$\begin{cases} t_1 = \frac{L}{v-u} & \text{(رفت، بادی)} \\ t_2 = \frac{L}{v+u} & \text{(برگشت، در راستای باد)} \end{cases} \Rightarrow t' = t_1 + t_2 = \frac{L}{v-u} + \frac{L}{v+u}$$

رفت و برگشت $t = \frac{2L}{v}$

$$t' = \frac{L(2v)}{v^2 - u^2} = 2L\frac{v}{v^2 - u^2}$$

$$t' = \frac{2Lv/v^2}{\frac{v^2 - u^2}{v^2}} = \frac{2L/v}{1 - u^2/v^2}$$

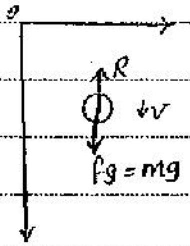
$t = \frac{2L}{v}$

$$\Rightarrow t' = \frac{t}{1 - \frac{u^2}{v^2}} \rightarrow t' > t$$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

مثال: جسمی داریم که از ارتفاع نسبتاً زیاد سقوط می‌کند



$R = -kV$

$\vec{F}_g + \vec{R} = m\vec{a}$

$F_g = mg$

$mg - kV = ma$

در آغاز حرکت چون سرعت نداریم سقوط آزاد است یعنی

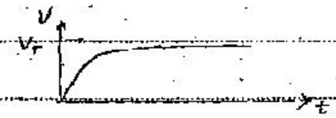
$mg - 0 = mg$

$g = a$

حرکت یکنواخت پس از رسیدن به شتاب صفر

سرعت آنقدر زیاد می‌شود که تا mg برابر شود

$\rightarrow mg - kV_T = 0 \rightarrow V_T = \frac{mg}{k}$



$mg - kV = m\frac{dv}{dt}$

$kV_T - kV = m\frac{dv}{dt}$

$\frac{dv}{V_T - V} = \frac{k}{m}dt$

$\int_0^V \frac{dv}{V_T - V} = \frac{k}{m}\int_0^t dt$

$\ln|V_T - V|_0^V = -\frac{k}{m}t$

$\ln\frac{V_T - V}{V_T} = -\frac{k}{m}t$

$\frac{V_T - V}{V_T} = e^{-\frac{k}{m}t} \rightarrow 1 - \frac{V}{V_T} = e^{-\frac{k}{m}t} \rightarrow V = V_T(1 - e^{-\frac{k}{m}t})$

از نظر ریاضی این جسم هیچ گاه به سرعت حدی نمی‌رسد ($a = 0$) ولی از نظر فیزیکی این طور نیست

$\begin{cases} V = V_T \\ t = \infty \end{cases}$

ضربه و برخورد

نیروی ضربه‌ای و

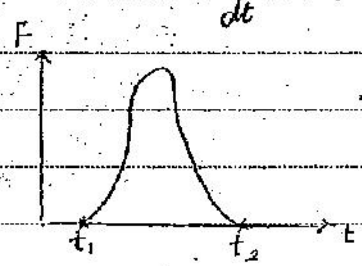
نیرویی است که زمان تأثیر آن کوتاه

اما مقدار آن خیلی زیاد است.

$F = ma$

$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} \rightarrow \vec{F}dt = d\vec{P}$

$\underbrace{\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt}_{I} = \int_{P_1}^{P_2} d\vec{P} \rightarrow$



این انتگرال قابل محاسبه نیست چون

F برحسب t نداریم فقط شکل آن را

حدس می‌زنیم.

$\underbrace{\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt}_{I = \text{ضربه}} = P_2 - P_1$

Subject:

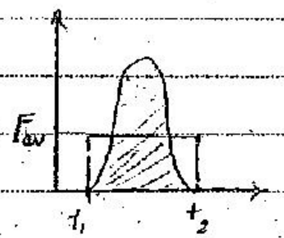
Year. 200 Month. Day.

ضربه برابر است با تغییرات تکانه $\vec{J} = \Delta\vec{P}$ ... $J = P_2 - P_1$

انتگرال زمانی نیرو

این رابطه چون برداری است سه معادله به ما می‌دهد $u = \Delta t$ (انتگرال زمانی نیرو)

پس از تجزیه کار با اینها بهتر است:



$$J_x = \Delta P_x = m(V_x - V_{0x})$$
$$J_y = \Delta P_y = m(V_y - V_{0y})$$
$$J_z = \Delta P_z = m(V_z - V_{0z})$$

$\int F\,dt = J =$ سطح زیر منحنی تغییرات نیرو بر حسب زمان

$$\bar{F} = \frac{\Delta P}{\Delta t}$$

$$\int F\,dt = J = F_{av}(t_2 - t_1) \rightarrow F_{av} = \frac{J}{t_2 - t_1} = \frac{J}{\Delta t} = \frac{\Delta P}{\Delta t}$$

مثال: گلوله‌ای به جرم 200g از ارتفاع h برابر 4.9 m بدون سرعت اولیه رها می‌شود. این گلوله پس از برخورد با زمین تا ارتفاع 4m بالا می‌رود. اگر طول مدت برخورد 0.01 s فرض شود مطلوب است:

الف) ضربه وارد بر گلوله از زمین؟

ب) متوسط نیروی ضربه‌ای؟ متوسط نیروی ضربه‌ای را با وزن جسم و زمان برخورد را با زمان حرکت مقایسه کنید.

$$V = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 9.8 \times 4.9} = 9.8\ m/s \downarrow$$
$$V' = \sqrt{2gh'} = \sqrt{2 \times 9.8 \times 4} = 8.85\ m/s \uparrow$$

$V \downarrow O \quad O \uparrow V'$

$$J_y = m(V' - V) \qquad J = 0.200\,kg\,(+8.85\ m/s + 9.8\ m/s)$$

ضربه وارد بر گلوله $J = 3.73\ kg\,m/s\ (N\,s) \uparrow$

(چون ما جرم گلوله و سرعت گلوله را در نظر گرفتیم)

ضربه وارد بر زمین $J = 3.73\ N\,s \downarrow$

$$F_{av} = \frac{J}{\Delta t} = \frac{3.73\ N\,s}{0.01\ s} = 373\ N \qquad \frac{F_{av}}{mg} = \frac{373\ N}{0.2 \times 9.8\ N} = \frac{373}{1.96} \simeq 190$$

(F_{av}) این نیرو 190 برابر وزن جسم است پس قابل توجه است.

$V = gt$

زمان حرکت $t = \frac{9.8\ m/s}{9.8\ m/s^2} = 1s$ $\qquad \frac{t}{\Delta t} = \frac{1s}{0.01} = 100$ (زمان برخورد) این زمان 100 برابر کوچکتر از زمان حرکت است پس حتما این نیرو یک نیروی ضربه‌ای بوده است.

t زمان برخورد را با زمان حرکت مقایسه می‌کنیم

Subject:

Year. 200 Month. Day.

برخورد پدیده‌ای است که در آن چند جسم بر هم کنش دارند.

در برخورد سرعت قبل از برخورد و سرعت حین برخورد و سرعت بعد از برخورد قابل بررسی هستند

(A)(B)

در حین برخورد برای (A) F_A F_B (B)

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_A \, dt = \Delta \vec{P}_A$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_B \, dt = \Delta \vec{P}_B$$

چون در هر لحظه $\vec{F}_A = -\vec{F}_B$

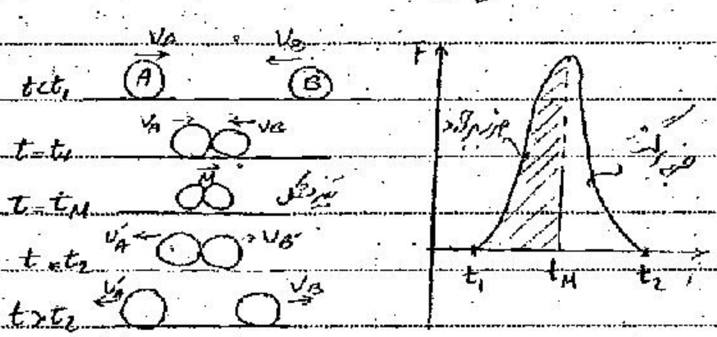
پس:

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_A \, dt = -\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_B \, dt$$

$$\Delta \vec{P}_A = -\Delta \vec{P}_B$$

$$\Delta \vec{P}_A + \Delta \vec{P}_B = 0$$

نتیجه: اگر در حین برخورد نیروی خارجی اثر نکند (یا بتوان از ضربه نیروی خارجی در مقایسه با ضربه برخورد صرف نظر کرد) آنگاه تکانه کل پایسته است



$$e = \frac{\int_{t_M}^{t_2} F_A \, dt}{\int_{t_1}^{t_M} F_A \, dt}$$

ضریب برخورد (ضریب بازگشت)

$$0 \le e \le 1$$

$e = 1$ برخورد کشسان — در کشسان کامل اتلاف انرژی وجود ندارد.

$e = 0$ ناکشسان کامل

ضریب برخورد برابر $e = \dfrac{V_A' - V_B'}{V_A - V_B}$

در برخورد مایل

نشان دهید در برخورد کشسان کامل ($e = 1$) اتلاف انرژی جنبشی وجود ندارد.

$e = 1$ باشد $1 = \dfrac{V_A' - V_B'}{V_A - V_B}$ پس $1 = \dfrac{V_B' - V_A'}{V_A - V_B} \Rightarrow V_B' - V_A' = V_A - V_B$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

- برخورد کشسان دو جسم:

شرط اینکه / انرژی جنبشی / سامانه از [illegible] باشد

$$\begin{cases} m_A V_A + m_B V_B = m_A V'_A + m_B V'_B \\ e = -\dfrac{V'_A - V'_B}{V_A - V_B} = 1 \quad \text{کشسان کامل} \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_A V_A + m_B V_B = m_A V'_A + m_B V'_B \\ m_A \mid V_A - V_B = -V'_A + V'_B \end{cases}$$

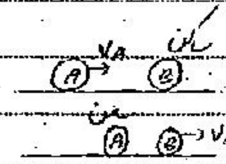
$$2 m_A V_A + V_B (m_B - m_A) = V'_B (m_A + m_B)$$

$$\begin{cases} V'_B = \dfrac{2 m_A V_A}{m_A + m_B} + \dfrac{(m_B - m_A) V_B}{m_A + m_B} \\ V'_A = \dfrac{2 m_B V_B}{m_A + m_B} + \dfrac{(m_A - m_B) V_A}{m_A + m_B} \end{cases}$$

حالت‌های خاص:

الف) اگر $m_A = m_B$ $\Leftarrow$ $\begin{cases} V'_A = V_B \\ V'_B = V_A \end{cases}$

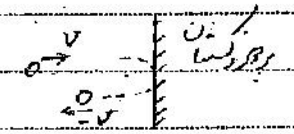
ب) اگر $m_A = m_B$ و $V_B = 0$



$\Leftarrow \begin{cases} V'_A = 0 \\ V'_B = V_A \end{cases}$

ج) اگر $m_A >> m_B$ و $V_A = 0$

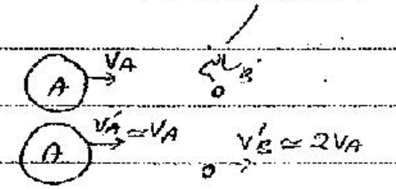
$\Leftarrow \begin{cases} V'_B = -V_B \\ V'_A \simeq 0 \end{cases}$



$e = 1 \quad V'_A - V'_B = -(V_A - V_B)$

لذا سرعت نسبی قبل از برخورد با سرعت نسبی بعد از برخورد برابر است

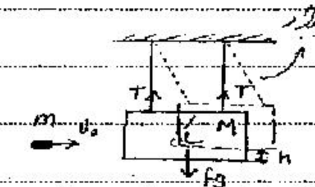
د) اگر $m_A >> m_B$ و $V_B = 0$



Subject:

Year. 200   Month.   Day.

برخورد ناکشسان کامل:



$\Sigma F_y = 0$ پس نیروی خارجی نداریم

اگر چوب سخت باشد و گلوله چوب را سوراخ نکند و نخ ها مایل نشدند   پایستگی تکانه: $mV_0 + M\times 0 = (m+M)V$

آن گاه در راستای x نیروی خارجی داریم و دیگر نمی توانیم از $V = \dfrac{mV_0}{m+M}$

اصل پایستگی تکانه استفاده کنیم پس باید چوب سخت نباشد یا

طناب ها بلند باشد

- در طول برخورد تکانه کل پایسته است اما انرژی مکانیکی پایسته نیست

پس از برخورد تکانه کل پایسته نیست ولی انرژی مکانیکی پایسته است.

در اثر برخورد مایل می شود به طوری که مرکز جرم سامانه به اندازه h بالا می رود $(M+m)gh = \frac{1}{2}(m+M)V^2$

$$V^2 = 2gh \rightarrow V_0 = \frac{(m+M)\sqrt{2gh}}{m}$$

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{\frac{1}{2}mV_0^2}{\frac{1}{2}(m+M)V^2} = \frac{m}{(m+M)}\left(\frac{V_0}{V}\right)^2$$

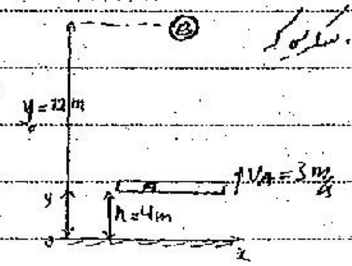
$$= \frac{m}{m+M}\left(\frac{m+M}{m}\right)^2 \Rightarrow \frac{K_1}{K_2} = \frac{m+M}{m}$$

اگر $m_1 = 10g$, $M = 990g$

$$\frac{K_2}{K_1} = \frac{10}{10+990} = \frac{1}{100} \Rightarrow K_2 = \frac{1}{100}K_1$$

$$\frac{K_1 - K_2}{K_1} = \frac{m+M-m}{m+M} \Rightarrow \frac{\Delta K}{K_1} = \frac{M}{m+M}$$

مثال: در لحظه $t=0$ از ارتفاع $y = 12m$ نسبت به سطح زمین توپی رها می شود. در لحظه رها شدن توپ، سکویی که در ارتفاع $h = 4m$ از سطح زمین قرار دارد با سرعت ثابت $v = 3m/s$ به طرف بالا حرکت می کند. توپ پس از برخورد با سکو به بالا برمی گردد. الف) توپ در چه ارتفاعی بالای سطح زمین پس از چه مدت توپ برای بار اول به سکو برخورد می کند؟ (جرم سکو بزرگ فرض شود)



$$\begin{cases} y_A = V_A t + h \\ y_B = -\frac{1}{2}gt^2 + y_0 \end{cases}$$

شرط برخورد: $y_A = y_B$

$V_A t + h = -\frac{1}{2}gt^2 + y_0$

$\frac{1}{2}gt^2 + V_A t - y_0 + h = 0 \Rightarrow 5t^2 + 3t - 8 = 0$

$t = 1s$ $y_A = y_B = 7m$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

$m_A \gg m_B \Rightarrow$ سرعت بازگشت در V_A تغییری نمی‌کند $\qquad V_B = -gt$

$V_B = -10 \times 1$

$V_B = -10 \, m/s$

$$e = -\frac{V'_A - V'_B}{V_A - V_B} \Rightarrow 1 = -\frac{V_A - V'_B}{V_A - V_B}$$

$$1 = -\frac{3 - V'_B}{3 - (-10)} \Rightarrow 13 = -3 + V'_B \Rightarrow V'_B = 16 \, m/s \uparrow$$

$$H = \frac{V'^2_B}{2g} = \frac{(16 \, m/s)^2}{2 \times 10 \, m/s^2} = 12.8 \, m$$ از نقطه برخورد

$y_{max} = 12.8 + 7 = 19.8$ از زمین

$$\begin{cases} y_B = -\frac{1}{2}gt^2 + V'_B t + 7 \\ y_A = V_A t + 7 \end{cases}$$

نقطه برخورد : $y_A = y_B$

$V_A t + 7 = -\frac{1}{2}gt^2 + V'_B t + 7$

$\frac{1}{2}gt^2 - V'_B t + V_A t = 0$

$5t^2 - 16t + 3t = 0 \Rightarrow 5t^2 - 13t = 0$

$$\begin{cases} t = 0 & \text{لحظه برخورد اول} \\ t = 2.6 \, s & \text{لحظه برخورد دوم} \end{cases}$$

مسئله: نشان دهید که اولین سرعت ... ما می‌خواهیم در نوع برخورد ها را انتقال بدهیم، چه شرطی لازم است که در این فرایند بیشترین انرژی جنبشی از m به M منتقل شود

$(m) \xrightarrow{V_0} \quad (m')$ ساکن $\quad (M)$ ساکن

$$\begin{cases} mV_0 + m' \times 0 = mV'_0 + m'V' \\ e_1 = -\dfrac{V'_0 - V'}{V_0 - V} \end{cases} \Rightarrow m \begin{cases} mV_0 = mV'_0 + m'V' \\ e_1 V_0 = -V'_0 + V' \end{cases}$$

$$mV_0 (1 + e_1) = V'(m + m')$$

$$V' = \frac{mV_0 (1 + e_1)}{m + m'}$$ سرعت m' بعد از برخورد اول

$(m') \rightarrow V' \quad (M)$ ساکن

$$\begin{cases} m'V' + M \times 0 = m'V'' + MV' \\ e_2 = -\dfrac{V'' - V'}{V' - V} \end{cases} \Rightarrow V' = \frac{(1 + e_2) m'V'}{M + m'} \Rightarrow V' = \frac{(1 + e_1)(1 + e_2) mm'V_0}{(m + m')(m' + M)}$$

که سرعت M بعد از برخورد است

$$V' = \frac{\overset{\text{ثابت}}{A} (mm')}{(m + m')(m' + M)}$$

$$\frac{dV'}{dm} = \frac{m(mm' + mM + m'^2 + m'M) - mm'(m + 2m' + M)}{D^2}$$

m و M ثابت هستند و m' متغیر هستیم

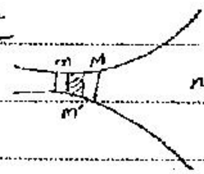
مشتق برابر صفر

$$mm' + mM + m'^2 + m\cancel{M} - mm' - 2m'^2 - \cancel{m}M = 0$$

$-m'^2 + mM = 0$

$m'^2 = mM \rightarrow m' = \sqrt{mM}$

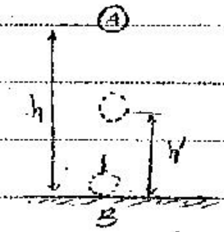
تشدید



برای اینکه بیشترین مقدار منتقل شود

$\Rightarrow m' = \sqrt{mM}$

مثال $e = ?$



$V = \sqrt{2gh}$

$V' = \sqrt{2gh'}$

مسافت $S = h + 2h' + 2h'' + 2h''' + \cdots$

$$e = -\frac{V_A' - V_B'}{V_A - V_B}$$

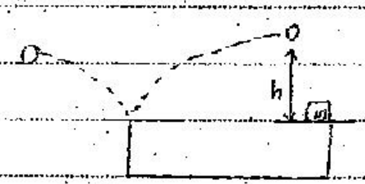
$S = h + 2e^2 h + 2e^4 h + 2e^6 h + \cdots$

تصاعد هندسی

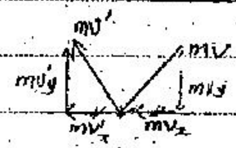
$$e = \frac{\sqrt{2gh'} - 0}{-\sqrt{2gh} - 0} \Rightarrow e = \sqrt{\frac{h'}{h}}$$

$h' = e^2 h$

مثال: یک گلوله ... به یک سطح افقی ...



$n = 100$



مولفه افقی تغییر نکرده است

$\Delta P_x = 0 \Rightarrow mV_x = mV_x'$

$\Delta P_y = mV_y' - mV_y$

$\Delta P_y = mV_y - (-mV_y)$

$\Delta P_y = 2mV_y$

$\bar{F} = \frac{\Delta P}{\Delta t}$ $\qquad \bar{F} = n(\Delta P)$

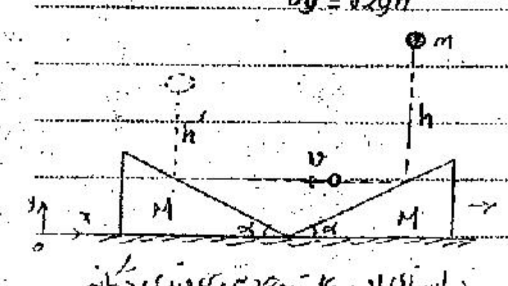
$\bar{F} = n(2mV_y)$

$V_y = \sqrt{2gh} \rightarrow \bar{F} = 2nm\sqrt{gh} = 2 \times 100 \times 5 \times 10^{-4} \, kg \times \sqrt{2 \times 9.8 \times 0.5}$

$= 0.31\ N$

$m = \frac{0.31}{9.8} \times 10^3 = 30g$

مثال ۴



در راستای y ـ علت وجود نیروی خارجی تکانه

حفظ نیست

$M\times 0 + m\times 0 = MV + mv$ رفت ۲

$V = -\frac{m}{M}v$ ①

پایستگی انرژی : $mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 \Rightarrow 2gh = v^2 + \frac{M}{m}\left(-\frac{m}{M}v\right)^2$

$2gh = v^2 + \frac{m}{M}v^2$ ②

برگشت : $mv + M\times 0 = MV' + m\times 0 \Rightarrow V' = \frac{m}{M}v$

$\frac{1}{2}mv^2 + 0 = \frac{1}{2}MV'^2 + mgh'$

$\Downarrow$

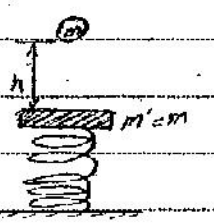
$2gh' = v^2 - \frac{M}{m}\left(\frac{m}{M}v\right)^2$

$2gh' = v^2\left(1 - \frac{m}{M}\right)$ ③

$\frac{③}{②} \rightarrow \frac{h'}{h} = \frac{1-\frac{m}{M}}{1+\frac{m}{M}} = \frac{M-m}{M+m}$

مثال: با استفاده از اصول نظریه جنبشی فشار گاز را بر حسب چگالی بدست آورید

$p = \frac{1}{3}\rho\bar{v}^2$



مثال: مطابق شکل گلوله‌ای به جرم $m = 1kg$ از ارتفاع $h = 0.8m$ بالای
رها می‌شود. بلافاصله پس از برخورد به جسم $m' = m$ که روی فنری
با ضریب سختی $k = 400 N/m$ قرار دارد به آن می‌چسبد. مطلوبست:
الف) سرعت مجموعه بلافاصله پس از برخورد
ب) حداکثر تراکم فنر
ج) حداکثر سرعت مجموعه پس از برخورد ($g = 10 m/s^2$)

$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2\times 10\times 0.8} = 4 m/s \downarrow$

$mv + m'\times 0 = (m+m')v'$

$v' = \frac{v}{2} = 2 m/s$ سرعت بلافاصله

بلافاصله پس از برخورد

Subject:

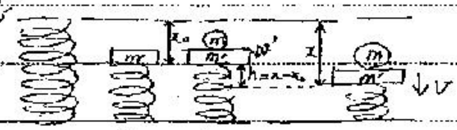
Year. 200   Month.   Day.

[illegible]:

$$\tfrac{1}{2}(m+m')V'^2+\tfrac{1}{2}kx^2=\tfrac{1}{2}(m+m')V^2+\tfrac{1}{2}kx^2-(m+m')g(x-x_0)$$

تراز تعادل [illegible]

تراز تعادل [illegible]



$$V'^2+\tfrac{1}{2}kx^2=V^2+\tfrac{1}{2}kx^2+2g(x-x_0)$$

$$4+200\left(\tfrac{1}{40}\right)^2=V^2+200x^2-20x+20\times\tfrac{1}{40}$$

تراز تعادل جدید $x_0=\frac{m'g}{k}=\frac{1\times10}{400}=\frac{1}{40}$

$$4+\tfrac{1}{8}-\tfrac{1}{2}=V^2+200x^2-20x$$

$$V^2=-200x^2+20x+\tfrac{29}{8}$$

حداکثر تراکم فنر وقتی است که سامانه به سکون لحظه‌ای برسد $(V=0)$: $0=-200x_{Max}^2+20x_{Max}+\frac{29}{8}$

$$x_{Max}=\ ---$$

حداکثر سرعت وقتی است که مشتق آن برابر صفر باشد. : $2V\frac{dV}{dt}=-200\times2x\frac{dx}{dt}+20\frac{dx}{dt}+0$

$$2\frac{dV}{dt}=0 \Rightarrow -400x+20=0 \Rightarrow x=\frac{20}{400}=\frac{1}{20}\,(m)=2x_0$$

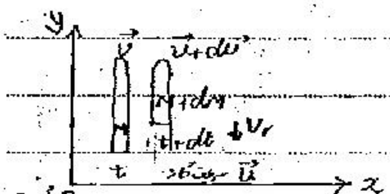
$$x=\tfrac{1}{20}m \rightarrow V_{Max}^2=-200\left(\tfrac{1}{20}\right)^2+20\left(\tfrac{1}{20}\right)^2+\tfrac{29}{8}$$

$$V_{Max}=$$

* وقتی توان ماکزیمم است که مشتق $P=F.V$ برابر صفر باشد.

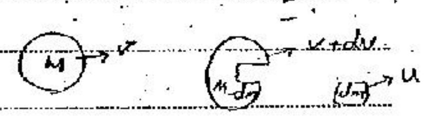
حرکت راکت:

• راکتی را در لحظه t (جرم m، سرعت V) در لحظه $t+\Delta t$ یا $(t+dt)$ مقداری از جرم راکت سوخته و بیرون رانده شده. $m+dm$ در نتیجه سرعت $v+dV$ شده، تغییر تکانه خطی را بدست آورید.



$$M_2-M_1=dM$$

$$M_2=dM+M_1$$



$$d\vec{P}=\vec{P}_2-\vec{P}_1$$

$$d\vec{P}=\left((M+dM)(\vec{v}+d\vec{v})+M(-dM)\right)-M\vec{v}$$

[illegible]

$$d\vec{P}=Md\vec{v}+\vec{v}dM+dM\,d\vec{v}-MdM$$

$dM\,d\vec{v}\approx 0$ مرتبه دوم

[illegible]

$$\frac{d\vec{P}}{dt}=M\frac{d\vec{v}}{dt}-(\vec{u}-\vec{v})\frac{dM}{dt}$$

$$F_{ext}=M\frac{d\vec{v}}{dt}-(\vec{u}-\vec{v})\frac{dM}{dt}$$

سرعت راکت نسبت به زمین + سرعت گاز نسبت به راکت = سرعت گازهای خارج شده نسبت به زمین

$\vec{u} = \vec{v}_r + \vec{v} \Rightarrow \vec{u} - \vec{v} = \vec{v}_r$

$$F_{ext} = M\frac{d\vec{v}}{dt} - \vec{v}_r \frac{dM}{dt}$$

$\vec{F}_{ext} \simeq 0$ اگر به اندازه کافی از زمین دور باشیم (یعنی در خلاء و مقاوم نداریم)

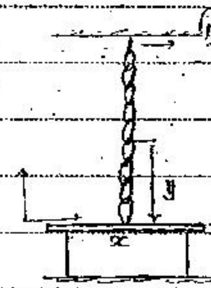
$v_r \frac{dM}{dt} = T$ پیشرانه یا نیروی پیشران

$$\vec{v}_r \frac{dM}{dt} = M\frac{d\vec{v}}{dt} \;\; \underline{L} \;\; v_r \frac{dM}{dt} = M\frac{dv}{dt}$$

$$\int_{v_0}^{v} dv = v_r \int_{M_0}^{M} \frac{dM}{M} \Rightarrow v - v_0 = v_r \ln\frac{M}{M_0}$$

هر چه نسبت جرم باقی مانده به جرم اولیه عدد قابل توجهی شود ⇐ راکت بهتر است

زنجیری را که به سقف است می‌بینیم. دانه‌های زنجیر به ... روی میز را که ... روی میز به صورت ... است ... احتمال



این نخ را رها کنیم

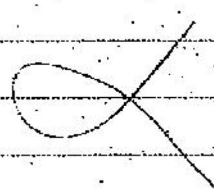
همه دانه‌ها بالا ... روی میز ... نیروی ... وارد می‌کند

زنجیر چگونه است ... نیروی وارد بر میز چقدر است؟ (دانه‌ای که ابتدا ارتباطی به بالا ...

... با ... بالای میز ... می‌کنند) ... ثابت است

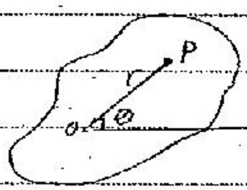
$\sum F_{ext} = 0 \Rightarrow \Delta P$ ثابت

$P_1 = P_2 \Rightarrow$



سینماتیک دورانی:

دوران حول محور ثابت (یک) (حول محور)



موقعیت لحظه‌ای P $\quad t_1 \;\; t_2 \quad \theta_1 \;\; \theta_2$

$$\omega_{av} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \; rad/s$$

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

Subject:

Year. 200   Month.   Day.

$t_1 \quad t_2$

$\omega_1 \quad \omega_2 \qquad \alpha_{av} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \quad rad/s^2 \qquad \alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$

$$\alpha = \frac{d\omega}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \omega\frac{d\omega}{d\theta}$$

معادلات حرکت با شتاب زاویه‌ای ثابت

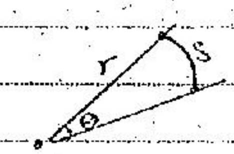
$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \qquad \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \alpha\int_0^t dt \quad \omega = \omega_0 + \alpha t \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \omega_0 + \alpha t$$

معادله مکان زاویه‌ای $\theta = \theta_0 + \omega t + \frac{1}{2}\alpha t^2$

$$\alpha = \omega\frac{d\omega}{d\theta} \qquad \int_{\omega_0}^{\omega}\omega\, d\omega = \alpha\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta$$

$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha(\theta - \theta_0)$ رابطه بین سرعت و جابجایی

مقایسه کمیت‌های زاویه‌ای و خطی



(برحسب رادیان) تعریف

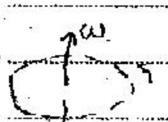
$S = r\theta$

s = جابجایی

رابطه بین این دو؟ ←

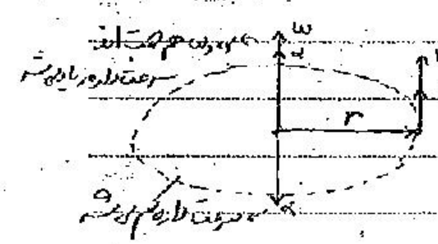
θ = دوران

$\frac{ds}{dt} = r\frac{d\theta}{dt} \Rightarrow v = r\omega$ مقایسه اندازه سرعت

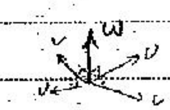


$\frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} \rightarrow a_T = r\alpha$ ← شتاب مماسی

ω اگر جهت عوض شود $\quad a_r = \frac{v^2}{r} = r\omega^2 = v.\omega$. در حرکت دورانی شتاب مرکزگرا را هم داریم a_r نمایش می‌دهیم.



$$\vec{v} = \vec{r} \times \vec{\omega}$$



$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}\vec{r} + \vec{\omega}\frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\alpha}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times\vec{v} \Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a_T} + \vec{a_r}$$

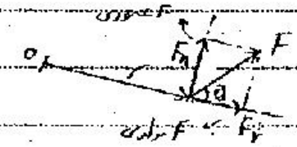
$|\vec{\alpha}\times\vec{r}| = r\alpha \rightarrow a_T = r\alpha \qquad \vec{a_T} = \vec{\alpha}\times\vec{r}$ بردار شتاب مماسی است

$|\vec{\omega}\times\vec{v}| = \omega.v = \omega.r\omega = r\omega^2 \rightarrow a_r = r\omega^2 \qquad \vec{a_r} = \vec{\omega}.\vec{v}$

دینامیک دورانی

گشتاور دوران یک نیرو

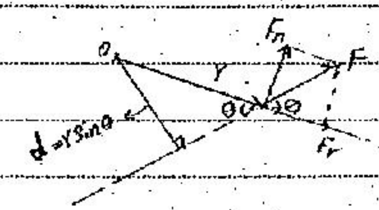
* در انتقال نیرو عامل حرکت است * در دوران گشتاور عامل حرکت است.



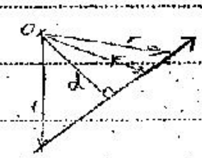
گشتاور برابر است با حاصلضرب برداری بردار مکان در نیرو گشتاور $\vec{\tau}=\vec{r}\times\vec{F}$

$\tau = F_n \cdot r = F\sin\theta \cdot r$

$\tau = F\,\underline{r\sin\theta} = F\cdot d$ $d=$ بازوی گشتاور

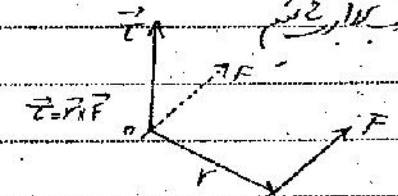


گشتاور کمیتی برداری است



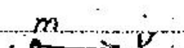
$$\vec{\tau} = \vec{r}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

اگر F و r در صفحه کاغذ باشند

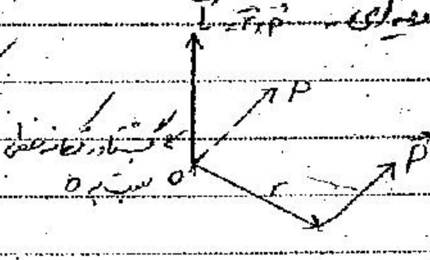


مثلاً اگر F و r در صفحه باشند (z) بردار $\vec{\tau}$ عمود بر آن است.

تکانه زاویه‌ای $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}$



* تکانه خطی $\vec{p}=m\vec{v}$ اگر گشتاور این را نسبت به یک نقطه حساب کنیم می‌شود تکانه زاویه‌ای



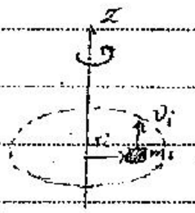
* تکانه زاویه‌ای گشتاور تکانه خطی نسبت به نقطه است.

$$\text{تکانه زاویه‌ای } \vec{L} = \vec{r}\times\vec{P} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & z \\ mv_x & mv_y & mv_z \end{vmatrix}$$

تکانه زاویه‌ای یک ذره، سیستم ذرات، جسم صلب:

$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ تکانه زاویه‌ای یک ذره

$\vec{L} = \sum \vec{L}_i = \sum \vec{r}_i \times m_i\vec{v}_i$ تکانه زاویه‌ای سیستم ذرات



$\vec{l}_i = \vec{r}_i \times m_i\vec{v}_i$

$v_i = r_i\omega$ ← ω اندیس نمی‌گیرد چون جسم صلب همه اجزایش با هم حرکت می‌کنند.

$\vec{l}_i = \vec{r}_i \times (m_i(\vec{r}_i\vec{\omega}))$

$l_i = m_i r_i^2 \omega$

$\vec{l}_i = m_i r_i^2 \omega \hat{k}$

$\vec{L} = \sum \vec{l}_i = \sum m_i r_i^2 \omega \hat{k}$

گشتاور لختی $I = \sum m_i r_i^2$

$\vec{L} = I\omega\hat{k}$

تکانه زاویه‌ای $L = I\omega$ تکانه خطی $p = mv$

قانون دوم نیوتن (دورانی): (برای یک ذره، سیستم ذرات، جسم صلب)

برای یک ذره: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}$ مشتق تکانه زاویه‌ای نسبت به زمان برابر است با گشتاور نیروی وارده

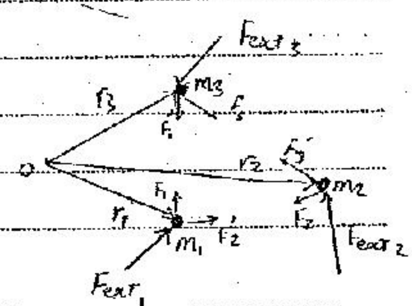
(مثل $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$)

$$\begin{cases} \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} = \vec{v} \times m\vec{v} = 0 \\ \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau} \quad \text{گشتاور} \end{cases}$$

برای سیستم ذرات: $\sum \vec{\tau}_{ext} + \sum \vec{\tau}_{int} = \frac{d\vec{L}}{dt}$

داریم $\sum \vec{\tau}_{int} = 0$

بنابراین $\sum \vec{\tau}_{ext} = \frac{d\vec{L}}{dt}$



Subject:

Year. 200 Month. Day.

F, F' قرینه‌اند

(1) در $\vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_1 \times \vec{F}_2' + \vec{r}_1 \times \vec{F}_{ext_1} = \frac{d\vec{L}_1}{dt}$

(2) در $\vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_3' + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{ext_2} = \frac{d\vec{L}_2}{dt}$

(3) در $\vec{r}_3 \times \vec{F}_3 + \vec{r}_3 \times \vec{F}_1' + \vec{r}_3 \times \vec{F}_{ext_3} = \frac{d\vec{L}_3}{dt}$

با هم جمع می‌کنیم

$$\vec{C}_{ext_1} + \vec{C}_{ext_2} + \vec{C}_{ext_3} + (\vec{r}_1 - \vec{r}_3) \times \vec{F}_1 + (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times \vec{F}_2 + (\vec{r}_3 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_3 = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

$$\sum \vec{C}_{ext} + 0 = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

با توجه به شکل چون $\vec{F}_1$ بر $(\vec{r}_1 - \vec{r}_3)$ منطبق است پس ضرب خارجی آنها صفر است.

$$\sum \vec{C}_{ext} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

$$\sum \vec{C}_{ext} = \frac{d(I\omega)}{dt} = I\frac{d\omega}{dt} = I\alpha \Rightarrow \sum C_{ext} = I\alpha$$

پس رابطه $\sum C_{ext} = I\alpha$ به ازای هر جسم صلبی در دوران جسم صلب حول محور ثابت

نسبت به مرکز جرم (یا نقطه‌ای که ساکن باشد)

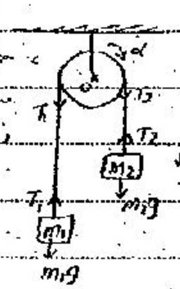
مثال: نخ و قرقره ایده‌آل نیستند. شتاب حرکت را بدست آورید.

قرقره اصطکاک دارد و نخ روی آن سر نمی‌خورد.

بنابراین T_1 و T_2 برابر نیستند.

حول مرکز جرم است چون ساکن است. نسبت به این نقطه در نظر بگیریم

سه جسم داریم که یکی حرکت دورانی و دوتا حرکت انتقالی دارند.



$$T_1 - m_1 g = m_1 a \quad (1)$$

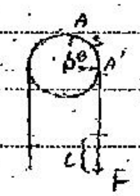
$$T_2 - m_2 g = -m_2 a \quad (2)$$

$$(T_2 R - T_1 R) = I\alpha \quad (3)$$

گشتاور نیروی T_2

$$a = R\alpha \quad (4)$$

عامل حرکت دوران (نیرو و بازو (R)) است



$\rightarrow s = l \qquad s = R\theta$

$\dot{s} = \dot{l} \qquad \dot{s} = R\omega$

$\ddot{s} = \ddot{l} \qquad \ddot{s} = R\alpha$

$v_A = v$

$a_A = a$

$a = R\alpha$

چون نخ روی قرقره نمی‌لغزد

$$\begin{cases} T_1 = m_1 g + m_1 a \\ T_2 = m_2 g - m_2 a \\ (T_2 - T_1) = \frac{I\alpha}{R} = \frac{Ia}{R^2} \end{cases}$$

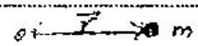
$$\alpha = \frac{a}{R}$$

$$a = \frac{(m_2 - m_1)g}{m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}}$$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

اینرسی دورانی:



برای ذره $\qquad m\vec{r} =$ گشتاور اول جرم

$I_o = m(\vec{r}\cdot\vec{r}) = mr^2$ گشتاور دوم جرم m نسبت به o

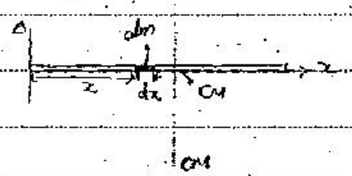
برای n ذره (سیستم ذرات): $\quad I_o = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2$

برای جسم صلب:

$I_o = \sum m_i r_i^2$

$I_o = \int_{\text{روی جسم}} r^2\, dm$

مثال: اینرسی دورانی میله‌ای نازک به جرم M و طول L را یکبار نسبت به محوری که از انتهای میله گذشته بر میله عمود است و بار دیگر نسبت به محوری که از مرکز جرم میله گذشته و بر میله عمود است بدست آورید.



$dm = \frac{M}{L}\, dx$

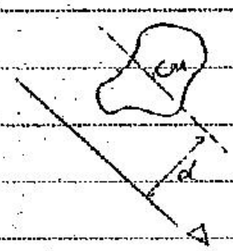
$dI_\Delta = x^2 dm = \frac{M}{L} x^2 dx$

$I_{CM} = \frac{M}{L}\int_{-L/2}^{L/2} x^2 dx \qquad I_\Delta = \frac{M}{L}\int_0^L x^2 dx = \frac{1}{3} ML^2$

$I_{CM} = \frac{1}{12} ML^2$

قضیه محورهای موازی:

برای اینکه اینرسی دورانی را نسبت به Δ حساب کنیم طبق این قضیه اول اینرسی دورانی را نسبت به محوری که از CM گذشته و موازی Δ است محاسبه می‌کنیم.



$$I_\Delta = I_{CM} + Md^2$$

اینرسی دورانی جسم نسبت به محور Δ — جرم جسم — فاصله دو محور

اینرسی دورانی جسم نسبت به محوری که از مرکز جرم گذشته و موازی Δ است

Subject:

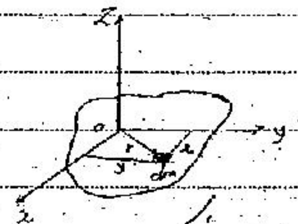
Year. 200 Month. Day.

مثال: با استفاده از قضیه محورهای موازی گشتاور ماند یک میله را نسبت به مرکز جرم آن بدست آورید درصورتیکه ممان اینرسی دوران جسم نسبت به انتهای میله آن $I_0 = \frac{1}{3}ML^2$

$I_0 = I_{CM} + Md^2 \Rightarrow I_{CM} = I_0 - \underbrace{Md^2}_{\text{فاصله}}$

$I_{CM} = \frac{1}{3}ML^2 - M\left(\frac{L}{2}\right)^2 \Rightarrow I_{CM} = \frac{1}{12}ML^2$

قضیه محورهای متعامد برای ورقه‌های نازک: (دو بعدی)



$I_0 = \int r^2 dm$

با توجه به شکل $r^2 = x^2 + y^2$

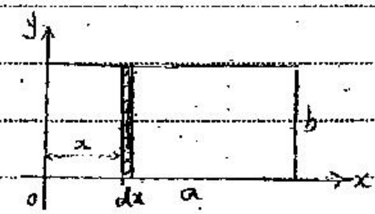
$I_0 = \int y^2 dm + \int x^2 dm$

$I_0 = I_{xx} + I_{yy}$

قضیه محورهای متعامد $I_{zz} = I_{xx} + I_{yy}$

گشتاور ماند:

۱. مستطیل



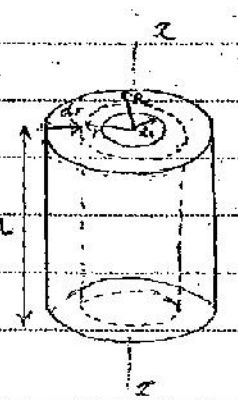
$dm = \frac{M}{ab} b\, dx = \frac{M}{a} dx$

$I_{yy} = \int x^2 dm = \frac{M}{a}\int_0^a x^2 dx$

$I_{yy} = \frac{1}{3}Ma^2$

$I_{xx} = \frac{1}{3}Mb^2$

۲. گشتاور ماند استوانه



$I_{zz} = \frac{1}{2}\pi L\rho(R_2^4 - R_1^4)$

$dm = 2\pi r L\, dr\, \rho$

$m = \pi(R_2^2 - R_1^2) L \rho$

$dI_{zz} = r^2 dm$

$I_{zz} = \frac{1}{2}m(R_1^2 + R_2^2)$

$I_{zz} = 2\pi\rho\int_{R_1}^{R_2} r^3 dr$

$I_z = 2\pi\rho(R_2^4 - R_1^4)$

Subject:

Year. 200 Month. / Day.

قرص توپر

$dm = 2\pi x \cdot \rho \cdot dx$

$I = \int x^2 dm$

$I = \int_0^R 2\pi\rho\, x^3 dx$

$I = 2\pi\rho \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2} MR^2$

$M = \rho \times \pi R^2$

$I_{zz} = \frac{1}{2} mR^2$

حالت خاص: الف) استوانه توپر: $R_1 = 0$

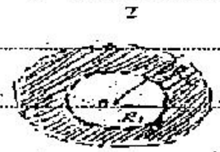
ب) استوانه توخالی: $R_2 = R$ $\quad dm = \rho L \cdot 2\pi r dr$

ج) پوسته استوانه‌ای نازک:

$(R_1 \simeq R_2) = R$

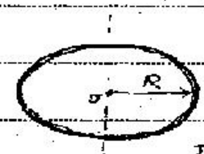
$I_{zz} = \frac{1}{2} mR^2 \cdot 2 = mR^2$

یک برش از این استوانه انتخاب می‌کنیم (قرص نازک)



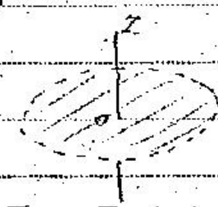
$I_{zz} = I_o = \frac{1}{2} m (R_1^2 + R_2^2)$

حلقه نازک:



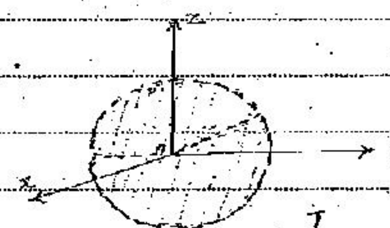
$I_{zz} = I_o = mR^2$

قرص کامل:



$I_{zz} = I_o = \frac{1}{2} mR^2$

قرص نازک:



$I_{zz} = I_{xx} + I_{yy}$

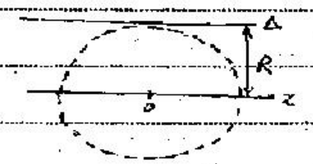
متقارن است $\rightarrow$ $I_{xx} = I_{yy}$

$I_{zz} = 2 I_{xx} = 2 I_{yy}$

$I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{2} I_{zz}$

$I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{4} mR^2$

قرص نازک:



$I_\Delta = I_{CM} + mR^2$

$I_\Delta = \frac{1}{4} mR^2 + mR^2$

$I_\Delta = \frac{5}{4} mR^2$

$I_A = I_\Delta + I_{yy}$

$I_A = \frac{5}{4} mR^2 + \frac{1}{4} mR^2$

$I_A = \frac{3}{2} mR^2$

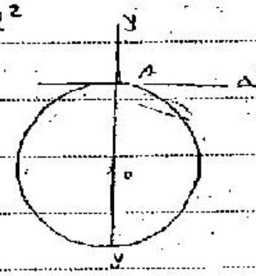
یا

$I_A = I_o + mR^2$

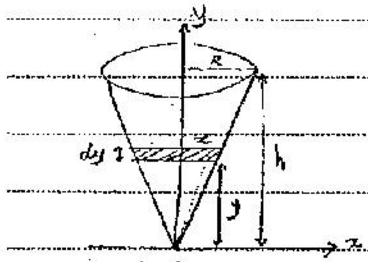
$I_A = \frac{1}{2} mR^2 + mR^2$

$I_A = \frac{3}{2} mR^2$

قرص نازک:



گشتاور ماند یک مخروط



$$dm = \pi x^2 dy\, \rho$$

$$\frac{x}{R} = \frac{y}{h} \Rightarrow x = \frac{R}{h} y$$

$$dI_{yy} = \frac{1}{2} x^2 dm$$ (زیرا قرص است و محور از وسط آن رد شده)

$$dI_{yy} = \frac{1}{2} \pi \rho x^4 dy$$

$$dI_{yy} = \frac{1}{2} \pi \rho \left(\frac{R}{h} y\right)^4 dy$$

$$dI_{yy} = \frac{1}{2} \pi \rho \frac{R^4}{h^4} y^4 dy$$

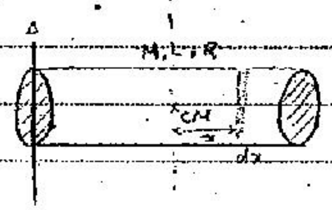
$$I_{yy} = \frac{1}{2} \pi \rho \frac{R^4}{h^4} \int_0^h y^4 dy \rightarrow I_{yy} = \frac{1}{10} \pi \rho \left(\frac{R^4}{h^4}\right) . h^5$$

$$I_{yy} = \frac{1}{10} \pi \rho R^4 h$$

$$I_{yy} = \frac{1}{3} \pi R^2 \rho h . \frac{3}{10} R^2$$

$$I_{yy} = \frac{3}{10} m R^2$$

مثال: گشتاور ماند استوانه زیر را نسبت به محور مشخص شده بدست آورید.



$I_\Delta = ?$ $\quad I_\Delta = \frac{1}{3} ML^2 + \frac{1}{4} MR^2$ ([illegible])

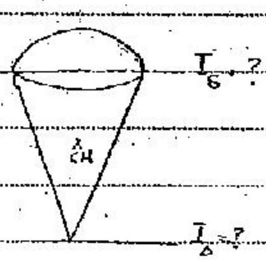
([illegible])

$dm = \pi R^2 \rho\, dx$ $\qquad I_{CM} = \int x^2 dm$

$M = \rho \times \pi R^2 L$ $\qquad I_{CM} = \int_0^L x^2 \pi R^2 \rho\, dx = \pi R^2 \rho . \frac{L^3}{3} = \frac{1}{3} ML^2$

$$I_\Delta = I_{CM} + Md^2 \Rightarrow I_\Delta = \frac{1}{3} ML^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 \Rightarrow I_\Delta = \frac{1}{3} ML^2 + \frac{1}{4} ML^2$$

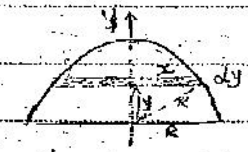
مثال: گشتاور ماند مخروط را نسبت به محور مشخص شده بدست آورید.



$I_\delta = ?$

$I_\Delta = ?$

مثال: اینرسی دورانی یک نیم‌کره همگن را نسبت به قطر آن بیابید.



$$dm = \pi \underbrace{x^2}_{R^2-y^2} dy\, \rho$$

$$I = \int y^2 dm = \int_0^R y^2 (R^2 - y^2)\, \pi \rho\, dy$$

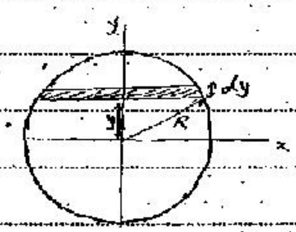
$$m = \rho \times \frac{4}{3}\pi R^3 \times \frac{1}{2}$$

$$m = \frac{2}{3}\rho \pi R^3$$

$$= \rho\pi \cdot \frac{2}{15} R^5$$

$$= \rho\pi \cdot \frac{2}{3} R^3 \times \frac{1}{5} R^2 = \frac{1}{5} m R^2$$

اینرسی دورانی یک کره



$$dm = \pi x^2 dy\, \rho$$

$$dI_{yy} = \frac{1}{2} x^2 dm$$

$$dI_{yy} = \frac{1}{2} x^4 \pi \rho\, dy$$

$$x^2 = R^2 - y^2 \rightarrow dI_{yy} = \frac{1}{2}\pi\rho (R^2 - y^2)^2 dy$$

$$I_{yy} = \frac{1}{2}\pi\rho \int_{-R}^{R} (R^2 - y^2)^2 dy$$

$$I_{yy} = \pi\rho \left(R^4 y + \frac{y^5}{5} - \frac{2}{3} R^2 y^3\right)\Big|_0^R$$

$$I_{yy} = \frac{8}{15}\pi R^5 \rho = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho \times \frac{2}{5} R^2$$

$$I_{yy} = \frac{2}{5} M R^2$$

مثال: اینرسی دورانی یک کره همگن نسبت به محور قطری آن $I = \frac{8}{15}\pi R^5 \rho$ است با استفاده از این رابطه اینرسی دورانی یک پوسته کروی نازک را نسبت به یکی از قطرهای آن بدست آورید.

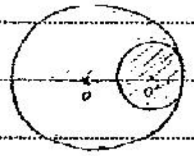
$$I = \frac{8}{15}\pi\rho (R_2^5 + R_1^5)$$

پوسته نازک $R_1 \simeq R_2$ $\rightarrow I = \frac{8}{15}\pi\rho (2R^5) = \frac{16}{15}\rho\pi R^5$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

از قرص همگن به شعاع R مطابق شکل قرصی کوچکتر به شعاع $r = \frac{R}{4}$ بیرون آورده‌ایم. لختی دورانی جسم باقی‌مانده را نسبت به مرکز قرص بدست آورید. (برحسب m' جرم باقی‌مانده و R شعاع قرص اصلی)



$$I_o = \frac{1}{2} MR^2$$

$$I'_{o'} = \frac{1}{2} mr^2$$

$$I'_o = \frac{1}{2} mr^2 + m(R-r)^2$$

$$\frac{m}{M} = \frac{\pi r^2}{\pi R^2} = \frac{R^2/16}{R^2} = \frac{1}{16} \rightarrow M = 16m$$

$$I'_o = \frac{1}{2} m \frac{R^2}{16} + \frac{9}{16} mR^2 = \frac{19 mR^2}{32}$$

اینرسی دورانی قرص بیرون آورده شده نسبت به مرکز قرص اصلی:

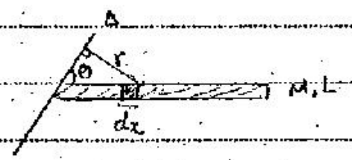
$M = 16m$

لختی قسمت باقی‌مانده: $I''_o = I_o - I'_o$

$$I''_o = \frac{16}{2} mR^2 - \frac{19}{32} mR^2 = \frac{237}{32} mR^2 \rightarrow I''_o = \frac{237}{32} \times \frac{m' R^2}{15} = \frac{237}{480} m' R^2$$

$$M' = M - m = 16m - m = 15m \Rightarrow m = \frac{m'}{15}$$

اینرسی میله مایل حول محور:



$r = x \sin\theta$

$$dm = \frac{M}{L} dx$$

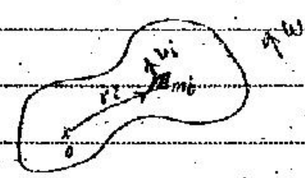
$$dI_\Delta = r^2 dm$$

$$dI_\Delta = \frac{M}{L} r^2 dx$$

$$dI_\Delta = \frac{M}{L} x^2 \sin^2\theta \, dx$$

$$I_\Delta = \frac{M}{L} \sin^2\theta \int_0^L x^2 dx = \frac{1}{3} ML^2 \sin^2\theta$$

انرژی جنبشی در دوران:



$$k_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

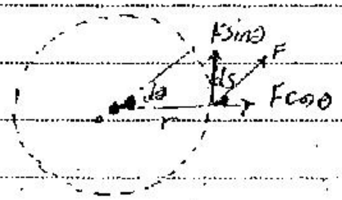
$$k_i = \frac{1}{2} m_i (r_i \omega)^2$$

$$k_i = \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2$$

$$k = \sum \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} I_o \omega^2$$

I_o لختی دورانی جسم نسبت به محور دوران

محاسبه کار در دوران:



$$dW = F\sin\theta \cdot ds$$

$$ds = r\,d\theta \Rightarrow dW = F\sin\theta \cdot r\,d\theta \Rightarrow dW = \tau\,d\theta$$

$$W = \int \tau\,d\theta$$

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\tau\,d\theta}{dt} \Rightarrow P = \tau\omega$$

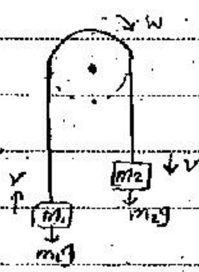
$$\vec{\tau} = \frac{dL}{dt} \Rightarrow \tau = I\alpha$$

$$\tau\,d\theta = I\frac{d\omega}{dt}\cdot d\theta \Rightarrow \int_{\theta_1}^{\theta_2}\tau\,d\theta = \int_{\omega_1}^{\omega_2} I\omega\,d\omega$$

$$W = \frac{1}{2}I\omega_2^2 - \frac{1}{2}I\omega_1^2$$

$$W = K_2 - K_1 = \Delta K$$

- با استفاده از قضیه کار انرژی شتاب را در سامانه نخ و قرقره بدست آورید.



$$\left(\frac{1}{2}m_1v^2 + \frac{1}{2}m_2v^2 + \frac{1}{2}I\omega^2\right) - 0 = m_2gy - m_1gy$$

$$v = R\omega$$ اگر نخ روی قرقره نلغزد

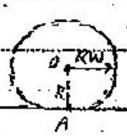
$$\omega = v/R$$

$$\frac{1}{2}v^2(m_1 + m_2 + I/R^2) = (m_2 - m_1)gy$$

$$v^2 = \frac{2(m_2 - m_1)gy}{m_1 + m_2 + I/R^2}$$

$$2v\cdot\frac{dv}{dt} = \frac{2g(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2 + I/R^2}\cdot\frac{dy}{dt} \Rightarrow a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + I/R^2}$$

غلتش:



حرکت آن دوران و انتقال است و مرکز جرم آن تغییر می‌کند

$$\left.\begin{array}{l} K = \frac{1}{2}I_A\omega^2 \\ I_A = I_{cm} + MR^2 \end{array}\right\} \Rightarrow K = \frac{1}{2}(I_{cm} + MR^2)\omega^2$$

غلتش برابر است با دوران
جسم حول محور آنی دوران

$$K = \frac{1}{2}MR^2\omega^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2$$

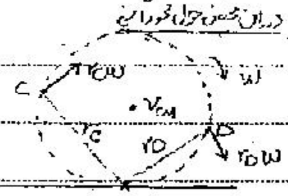
$$K = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2$$

انرژی جنبشی جسم غلتان = انرژی جنبشی (انتقالی) مرکز جرم + (انرژی) دورانی حول مرکز جرم

Subject:

Year. 200 Month. Day.

دوران حول محور آنی , $2RW$



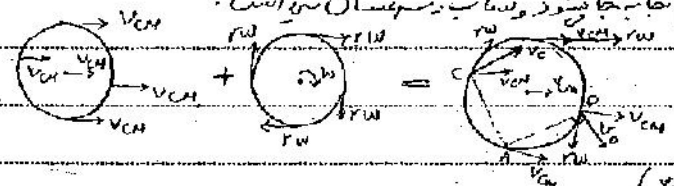
$V_A = 0 \qquad a_A = 0$

$V_{CM} = RW \qquad a_{CM} = R\alpha$

$V_B = 2RW \qquad a_B = 2R\alpha$

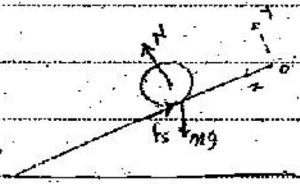
a) شتاب نقاط برابر است با شتاب حاصل از آن ... در a

انتقال یعنی اینکه همه نقاط به موازات هم جابجا شوند و شتاب و سرعتشان یکی است.



- اگر غلتش بدون لغزش باشد (ادامه *)

انتقال مرکز جرم



$$\Sigma F(x) = mg\sin\alpha - f_s = m\bar{a} \quad (1)$$

$$\Sigma F_y = N - mg\cos\alpha = 0 \quad (2)$$

دوران حول مرکز جرم ; $\bar{\tau} = \bar{I}\alpha$

$$f_s \cdot R = \bar{I}\alpha \quad (3)$$

(غلتش بدون لغزش) شرط غلتیدن $\bar{a} = R\alpha$

$$\begin{cases} mg\sin\alpha - f_s = m\bar{a} \\ f_s \cdot R = \bar{I}\alpha \\ \bar{a} = R\cdot\alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow f_s = \frac{\bar{I}\alpha}{R} = \frac{\bar{I}\bar{a}}{R^2}$$

- f_s شتاب انتقال را کم می‌کند یعنی حرکت کندتر می‌شود

$$mg\sin\alpha - \frac{\bar{I}\bar{a}}{R^2} = m\bar{a} \Rightarrow \bar{a} = \frac{mg\sin\alpha}{m + \bar{I}/R^2}$$

نقش نیروی مالش در انتقال به خلاف انتقال ... گردش شتاب آن را کم می‌کند.

می‌غلتد ولی نمی‌لغزد یعنی اصطکاک داریم.

اگر غلتش بدون لغزش باشد باید نقطه تماس یعنی نباید سرعت داشته باشد. (ادامه *)

$$V_A = V_{CM} - RW = 0 \rightarrow V_{CM} = RW$$

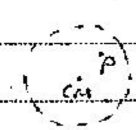
$$V_B = V_{CM} + RW = 2RW \rightarrow V_B = 2RW$$

$V_C = R_C W$ این روابط برای شتاب هم صادق است.

در حالت کلی ،

$$\vec{V}_P = \vec{V}_{CM} + \vec{V}_{P/CM}$$

$$\vec{a}_P = \vec{a}_{CM} + \vec{a}_{P/CM}$$



Subject:

Year. 200 Month. Day.

الف) استوانه همگن:

$\bar{I} = \frac{1}{2}MR^2$

اصطکاک سبب اتلاف را کم می‌کند

$\bar{a} = \frac{2}{3} g\sin\alpha$ ~ به علت لغزش نداری

انرژی تلف نمی‌شود به همین دلیل $\frac{2}{3}$ شد.

ب) کره همگن

$\bar{I} = \frac{2}{5} mR^2$

$\bar{a} = \frac{5}{7} g\sin\alpha$

ج) محاسبه حداقل ضریب مالش برای غلتش بدون لغزش

استوانه همگن

$$f_s = \frac{\bar{I}\bar{a}}{R^2} = \frac{\frac{1}{2}mR^2(\frac{2}{3}g\sin\alpha)}{R^2}$$

$f_s = \frac{1}{3}mg\sin\alpha$ که این f_s مورد نیاز است تا لغزش نیست.

کمترین نیروی مالش مورد نیاز

بیشترین نیروی مالش ایستایی قابل دسترس ←

$f_{s\,max} = \mu_s N = \mu_s mg\cos\alpha$

اگر $\frac{1}{3}mg\sin\alpha = \mu_s mg\cos\alpha$

$\mu_s = \frac{1}{3}\tan\alpha$ اصطکاک مورد نیاز تامین شده غلتش

بدون لغزش ولی استوانه در آستانه

لغزش است.

$\mu_s mg\cos\alpha > \frac{1}{3}mg\sin\alpha$

$\mu_s > \frac{1}{3}\tan\alpha$ غلتش بدون لغزش است و جسم

از لغزش بدور

اگر $\mu_s < \frac{1}{3}\tan\alpha$ ← غلتش همراه با

لغزش

کره همگن

کره همگن ← $f_s = \frac{\bar{I}\bar{a}}{R^2} = \frac{\frac{2}{5}mR^2 \cdot \frac{5}{7}g\sin\alpha}{R^2}$

$\mu_s = \frac{2}{7}\tan\alpha$

$\mu_s > \frac{2}{7}\tan\alpha$. $\mu_s < \frac{2}{7}\tan\alpha$

حرکت انتقالی مرکز جرم را با شتاب a حساب کنیم (با استفاده از قوانین نیوتن ...)

در انتقال فرض این است که جرم در مرکز جرم جمع شده

$a, \bar{a}, P$

$$\bar{x} = \frac{1}{2}\bar{a}t^2 + \bar{V}_0 t + x_0$$

$$\bar{V} = \bar{a}t + \bar{V}_0$$

$$\bar{V}^2 - \bar{V}_0^2 = 2\bar{a}(\bar{x} - \bar{x}_0)$$

(مثال از حل تمرین)

پایستگی تکانه زاویه‌ای

$$\vec{\tau}_{ext} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

اگر بر سامانه‌ای گشتاور خارجی اثر نکند تکانه زاویه‌ای کل تغییر نمی‌کند یعنی برای اجزا ممکن است تغییر کند.

اگر بر سامانه‌ای $\tau_{ext} = 0$ آنگاه $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \rightarrow \vec{L} =$ ثابت

$$\vec{L}_i = \vec{L}_f$$

پایستگی تکانه زاویه‌ای

در مورد جسم صلب در حال چرخش حول محور ثابت : $I_1\omega_1 = I_2\omega_2$

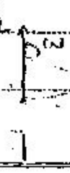
اگر این شخص که نشسته است دستهایش را جمع کند سرعت زاویه‌ای بیشتر می‌شود

$$L_1 = I_1\omega_1$$
$$L_2 = I_2\omega_2$$

$$L_1 = L_2 \Rightarrow I_1\omega_1 = I_2\omega_2$$

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{I_1}{I_2}$$

حرکت دوچرخه هنگام راندن آسان است چون تعادل آن مشکل است که ... ساکن است تعادل آن ... است

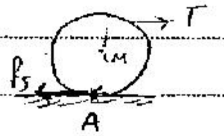


وقتی حرکت می‌کند بردار L تا زمین ... وقتی ساکن است L ندارد
وقتی هنگام حرکت L بزرگ دارد و اگر بخواهیم بیفتد باید L تغییر کند که تغییر آن مشکل است.

Subject:

Year.200 Month. Day.

(3)



$T - f_s = M\bar{a}$

$f_s.R + T.R = I\alpha$

$\bar{a} = R\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{\bar{a}}{R}$

$\bar{a} = ?$

$a = \frac{2T}{M + I/R^2}$

$\begin{cases} T - f_s = Ma \\ f_s + T = \frac{Ia}{R \times R} \end{cases}$

$2T = a(M + \frac{I}{R^2}) \rightarrow a = \frac{2T}{M + I/R^2} = \frac{2T}{M + \frac{MR^2}{2R^2}} = \frac{4T}{3M}$

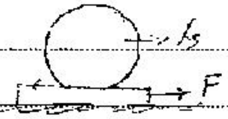
$T.2R = I_A\alpha$

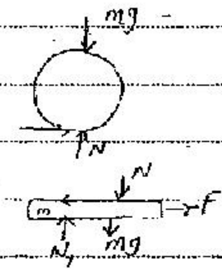
$T.2R = (\frac{1}{2}MR^2 + MR^2)\alpha$

$\left.\begin{array}{l} \alpha = \frac{2RT}{3/2 MR^2} \\ \bar{a} = R\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \bar{a} = \frac{4T}{3M}$

(2)

دینامیک حرکت



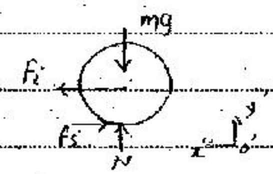


$$\begin{cases} f_s = ma \\ -f_s \cdot R = \frac{2}{5} m R^2 \alpha \\ \bar{a} - R\alpha = a \end{cases}$$

$$\rightarrow \bar{a} = a + R\alpha$$

$$F - f_s = ma$$

مثال: یک استوانه به جرم M، شعاع R که ابتدا ساکن است فرض می‌کنیم پشت اتاقک کامیونی در حالت سکون قرار دارد. اگر کامیون با شتاب ثابت a به حرکت درآید پس از طی چه مسافتی غلتک از پشت کامیون می‌افتد؟ طول اتاقک کامیون را L، غلتش را بدون لغزش فرض کنید. (مسئله را از دید ناظر متصل به کامیون تجزیه و تحلیل کنید)



$$-f_s + f_i = M\bar{a}'$$

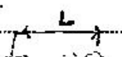
$$f_s \cdot R = \frac{1}{2} M R^2 \alpha$$

$$\bar{a}' = R\alpha$$

شتاب کامیون

$$f_s = \frac{1}{2} M \bar{a}' \rightarrow -\frac{1}{2} M\bar{a}' + Ma = M\bar{a}'$$

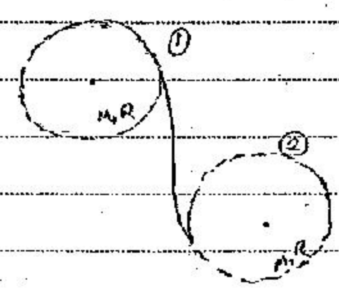
شتاب انتقال مرکز جرم استوانه نسبت به شتاب کامیون $\bar{a}' = \frac{2}{3} a$

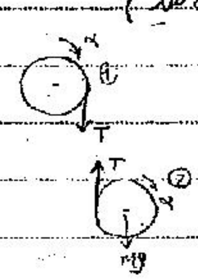


$$x = \frac{1}{2} a t^2$$
$$L = \frac{1}{2} a' t^2 \Rightarrow \frac{x}{L} = \frac{a}{a'} = \frac{a}{2/3\, a} = \frac{3}{2}$$

مثال: یک نخ به طول R دور قرقره پیچیده شده است. (شکل مقابل) قرقره‌ها را از حالت سکون رها می‌کنیم نخ از قرقره ۲ باز شده ... قرقره ۱ حول محور ثابت حرکت ... قرقره 2 انتقالی و دورانی است. اگر نخ روی قرقره‌ها نلغزد مطلوب است: شتاب زاویه‌ای هر یک از دو قرقره، شتاب انتقالی مرکز جرم قرقره 2، کشش نخ

(اینرسی دورانی قرقره‌ها را $\frac{1}{2} MR^2$ فرض کنید)





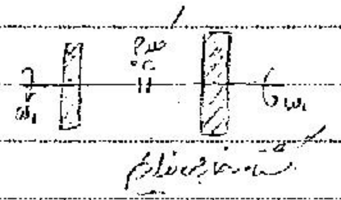
$$\begin{cases} T R = \bar{I} \alpha \\ Mg - T = M\bar{a} \\ T R = \bar{I} \alpha \\ \bar{a} = R\alpha (+) R\alpha \end{cases}$$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

(1)

[illegible]



$$I_1\omega_1 + I_2\omega_2 = (I_1 + I_2)\,\omega$$

$$\omega = \frac{I_1\omega_1 + I_2\omega_2}{I_1 + I_2}$$

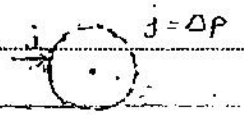
$$k = \frac{1}{2} I_1\omega_1^2 + \frac{1}{2} I_2\omega_2^2$$

$$k' = \frac{1}{2}(I_1 + I_2)\,\omega_2^2$$

(مثال از تمرین)

صفحه 382 کتاب

سوال 17



$J = \Delta P$

$$J = mV_0 - 0$$

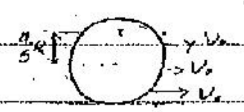
$$J\cdot d = I\omega_0$$

$$mV_0 d = I\omega_0$$

$$V_0 = \bar{V} = R\omega_0$$

$$m(R\omega_0)\,d = \frac{2}{5} mR^2\omega_0 \Rightarrow d = \frac{2}{5}R$$

17



$$J = \Delta P \rightarrow J = mV_0 - 0$$

$$J\cdot d = I\omega_0$$

$$\cancel{m}V_0 \times \frac{4}{5}R = \frac{2}{5}\cancel{m}R^2\omega_0$$

$\frac{4}{5} \neq \frac{2}{5} \rightarrow$ پس عکس [illegible] $V_0 = \frac{1}{2}R\omega_0$?

حرکت با پرش است.

$$f_k = m\bar{a} \Rightarrow \mu_k \cancel{m} g = \cancel{m}\bar{a} \rightarrow \bar{a} = \mu_k g$$

$$\frac{\bar{V} - V_0}{t} = \mu_k g \quad (1)$$

$$-f_k \cdot R = \frac{2}{5} mR^2\alpha \rightarrow -\mu_k \cancel{m} g R = \frac{2}{5}\cancel{m}R^2 \frac{\omega - \omega_0}{t}$$

$$\mu_k g = \frac{2}{5t}(R\omega_0 - R\omega) \quad (2)$$

(1) = (2)

شرط غلتش: $\bar{V} = R\omega$

$$\frac{2}{5}(R\omega_0 - R\omega) = \bar{V} - V_0$$

$$\bar{V} = R\omega \ ,\ V_0 = \frac{1}{2}R\omega_0$$

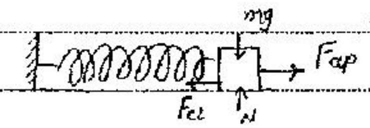
$$2(2V_0 - V) = 5\bar{V} - 5V_0 \Rightarrow 9V_0 = 7V \rightarrow V = \frac{9}{7}V_0$$

[illegible]

PILAVARAN

PAGE:

نوسان :



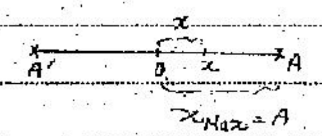
$F = ma$

$$-kx = m\frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

معادلات دیفرانسیل همگنی از تابع x, $\ddot{x}$, x $\qquad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$

$x = A\cos(\omega t + \varphi)$

$x = A\cos\omega t + B\sin\omega t$



$x_1 = A_1\cos(\omega t + \varphi_1)$

$x_2 = A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$

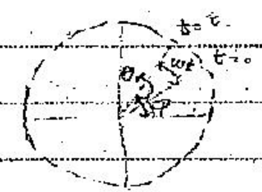
$\omega = \frac{2\pi}{T} \qquad \frac{1}{T} = f = \nu$

$y = A\sin\omega t$

$x = A\cos\omega t$

$x = A\cos\theta$

$= A\cos(\omega t + \varphi)$



$x = A\cos(\omega t + \varphi)$

$\frac{dx}{dt} = v = -A\omega\sin(\omega t + \varphi)$

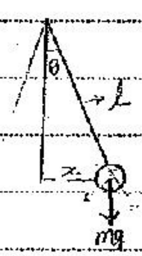
$\frac{dv}{dt} = a = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow a = -\omega^2 x$

$F = -m\omega^2 x$

$$\left.\begin{array}{l} F = -m\omega^2 x \\ F = -kx \end{array}\right\} \Rightarrow k = m\omega^2 \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

حرکت این سیستم هارمونیک ساده است



$F = ma$

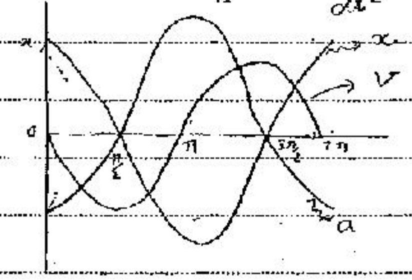
$-mg\sin\theta = m\frac{d^2x}{dt^2}$

اگر θ کوچک باشد $\Rightarrow \sin\theta = \tan\theta = \theta = \frac{x}{L}$

Subject:

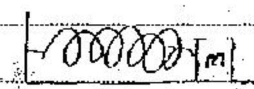
Year. 200 Month. Day.

$mg\frac{x}{L} = m\frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{L}x = 0 \Rightarrow \omega^2 = \frac{g}{L}$



$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

ωt	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
x	$+A$	0	$-A$	0	A



$U + K =$ مقدار ثابت

$\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kA^2$

$kx^2 + mv^2 = kA^2 \rightarrow v^2 = \frac{k}{m}(A^2 - x^2)$

$v = \pm\sqrt{\frac{k}{m}(A^2 - x^2)}$

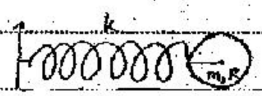
$T = ?$ $\quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$ [illegible]

$\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kA^2 \xrightarrow{\text{مشتق}} kx\frac{dx}{dt} + mv\frac{dv}{dt} = 0$

$kx + m\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$

$\rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

مثال: در شکل مقابل با فرض اینکه استوانه غلتش بدون لغزش دارد پریود حرکت نوسانی را بیابید



پایستگی انرژی: $U + K =$ مقدار ثابت

جسمی که غلتش دارد دو انرژی دارد
یکی انتقالی مرکز جرم و یکی
دورانی حول مرکز

$\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m\bar{v}^2 + \frac{1}{2}\bar{I}\omega^2 = \frac{1}{2}kA^2$

شرط غلتش بدون لغزش $\leftarrow \omega = \frac{\bar{v}}{R} \quad ; \bar{I} = \frac{1}{2}mR^2$

$\Rightarrow kx^2 + mv^2 + \frac{1}{2}mR^2\frac{\bar{v}^2}{R^2} = kA^2$

$kx^2 + \frac{3}{2}m\bar{v}^2 = kA^2 \Rightarrow 2kx\frac{dx}{dt} + \frac{3}{2}m\cdot 2\bar{v}\frac{d\bar{v}}{dt} = 0$

$\Rightarrow 2kx + 3m\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \frac{2}{3}\frac{k}{m}x = 0$

$\omega = \sqrt{\frac{2k}{3m}} \quad , T = 2\pi\sqrt{\frac{3m}{2k}}$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

آونگ پیچشی 8

- به یک میله نسبتاً ثابت جرم سنگینی می‌آویزیم تا آونگ پیچشی شود.

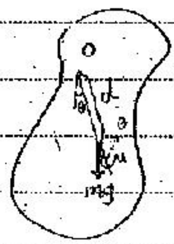
$\tau = I\alpha$ ضریب لختی

$\tau = -k'\theta \qquad F = -kx$

$-k'\theta = I\alpha \rightarrow -k'\theta = I\dfrac{d^2\theta}{dt^2} \rightarrow I\dfrac{d^2\theta}{dt^2} + k'\theta = 0$

$\dfrac{d^2\theta}{dt^2} + \dfrac{k'}{I}\theta = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{\dfrac{k'}{I}} \rightarrow T = 2\pi\sqrt{\dfrac{I}{k'}}$

مثال: پریود نوسان جسمی را حول محور O دوران می‌کند را بدست آورید.

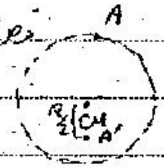


$-mgd\sin\theta = I_0\alpha$ اگر θ کوچک باشد $\Rightarrow \sin\theta = \theta$

$-mg\theta . d = I_0\dfrac{d^2\theta}{dt^2}$

$I_0\dfrac{d^2\theta}{dt^2} + mg\theta d = 0 \Rightarrow \dfrac{d^2\theta}{dt^2} + \dfrac{mgd}{I_0}\theta = 0 \rightarrow T = 2\pi\sqrt{\dfrac{I_0}{mgd}}$

قرص

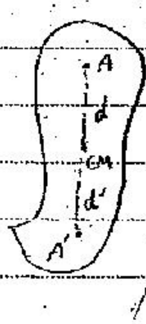


پریود نوسانات حول A مانند حول A'

$T_A = 2\pi\sqrt{\dfrac{I_A}{mgR}}$

$T_A = 2\pi\sqrt{\dfrac{3/2\, mR^2}{mgR}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{3R}{2g}}$ → مرکز نوسان

$T_{A'} = 2\pi\sqrt{\dfrac{I_{A'}}{mg R/2}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{3/2\, mR^2}{mg R/2}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{3R}{2g}}$



- نقطه‌ای مانند A' در سمت دیگر CM وجود دارد که دوره تناوب آن با A برابر است.

$T_A = 2\pi\sqrt{\dfrac{I_A}{mgd}}$

$d + d' = L$ ← طول آونگ ساده معادل

آونگ برگشت‌پذیر

$T_{A'} = 2\pi\sqrt{\dfrac{I_{A'}}{mgd'}}$

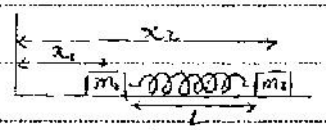
PILAVARAN

PAGE:

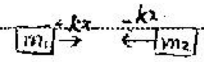
Subject:

Year. 200   Month.   Day.

پریود نوسان را بیابید



$x = (x_2 - x_1 - L)$



$$kx = m_1\ddot{x}_1 \xrightarrow{\times m_2} \left\{ m_2 kx = m_1 m_2 \ddot{x}_1 \right.$$
$$-kx = m_2\ddot{x}_2 \xrightarrow{\times m_1} \left\{ m_1 kx = m_1 m_2 \ddot{x}_2 \right.$$
$$kx(m_1 + m_2) = -m_1 m_2(\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1)$$

$x = x_2 - x_1 - L$

$\dot{x} = \dot{x}_2 - \dot{x}_1 - 0$

$\ddot{x} = \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1$

$$\Rightarrow kx\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2} + \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 = 0$$

$$\Rightarrow kx\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2} + \ddot{x} = 0$$

$$\ddot{x} + k\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2}x = 0 \rightarrow \frac{m_1+m_2}{m_1 m_2} = \frac{1}{\mu}$$

$$\Rightarrow \frac{m_1}{m_1 m_2} + \frac{m_2}{m_1 m_2} = \frac{1}{\mu}$$

$$\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_1} = \frac{1}{\mu}$$

$\mu =$ جرم کاهیده

جرم کاهیده (چون از هر دو جرم کمتر است)

معادلات: $x = A\sin(\omega t + \varphi)$

$v = A\omega\cos(\omega t + \varphi)$

$a = -\omega^2 x$

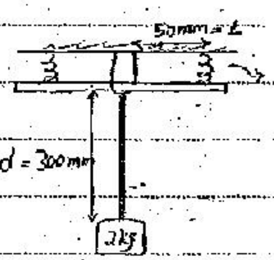
$x = x_2 - x_1 - L$

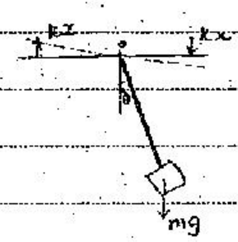
$v = \dot{x}_2 - \dot{x}_1$

$a = \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1$

مثال: سیستم زیر شامل یک میله و دو فنر است که به انتهای آن وزنه‌ای به جرم 2kg آویزان است. فنرها در حالت تعادل کشیده نیستند. دوره تناوب نوسانات کم را بیابید.

وقتی جرم m را به سمت راست حرکت دهیم فنر ① متراکم می‌شود





$\tau = I\alpha$

$-mgd\sin\theta - kxL - kxL = md^2\ddot{\theta}$

$x \simeq L\theta$

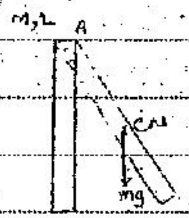
$\sin\theta \simeq \theta$ چون زاویه کوچک است

$$mg\,d\theta + 2kL^2\theta + md^2\ddot{\theta} = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{(mgd + 2kL^2)\theta}{md^2} = 0$$

$$\omega^2 = \frac{mgd + 2kL^2}{md^2} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{md^2}{mgd + 2kL^2}}$$

$$\Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{2\times(0.3)^2}{2\times 9.8\times 0.3 + 800\,(0.5)^2}} = 2\pi\sqrt{\frac{18\times 10^{-2}}{0.6\times 9.8 + 2}}$$

میله همگنی به طول L و جرم m از یک انتها آویزان کرده‌ام دوره تناوب نوسانات کم دامنه این میله را بیابید
طول آونگ ساده هم‌زمان با این آونگ را نیز بیابید.
نقطه‌ای روی میله پیدا کنید که وقتی نسبت به آن حول آن نقطه برابر حالت اول بود.



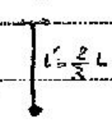
$$-mg\frac{L}{2}\sin\theta = I_A\cdot\alpha$$

$$-mg\frac{L}{2}\theta = \frac{1}{3}mL^2\ddot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} + \left(\frac{gL/2}{1/3\,L^2}\right)\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{3g}{2L}\theta = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3g}{2L}}$$

$T' = 2\pi\sqrt{\frac{L'}{g}}$ ← (پاندول ساده) $\qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}}$

$$T' = T \Rightarrow \sqrt{\frac{L'}{g}} = \sqrt{\frac{2L}{3g}} \rightarrow \frac{2L'}{3g} = \frac{L}{g}$$



$$\Rightarrow L' = \frac{2}{3}L$$

طول آونگ ساده هم‌زمان با آونگ فیزیکی

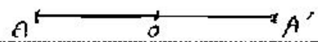
$$\frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{4-3}{6} = \frac{1}{6}$$

تعریف: طول آونگ ساده هم‌زمان با آونگ مرکب را ... است است.

Subject:

Year. 200 Month. Day.

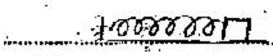
تمرین: ذره‌ای بین نقاط A و A' که نوسان می‌کند متوسط زمانی و متوسط مکانی سرعت را بیابید.

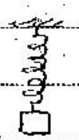


$x = A\sin(\omega t + \varphi)$

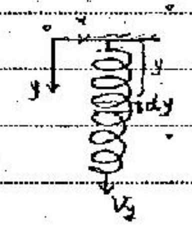
تمرین: فنری را یکبار بصورت افقی و بار دیگر بصورت عمودی نصب می‌کنیم ثابت کنید در هر حالت $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ است.

تنها تفاوت آن‌ها این است که نقطه‌ی تعادلشان فرق می‌کند.





مثال:



جرم فنر

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m + \frac{m_{spring}}{3}}{k}}$$

انرژی جنبشی

$$dk = \frac{1}{2} dm\,(v_y)^2$$

$$dm = \lambda dy$$

$$V_y = \frac{V}{L} y \rightarrow dk = \frac{1}{2}\lambda dy \cdot \frac{V^2}{L^2} y^2$$

$$\Rightarrow dk = \frac{1}{2}\lambda \frac{V^2}{L^2} \cdot y^2 dy$$

$$k = \frac{1}{2}\frac{\lambda V^2}{L^2} \cdot \int_0^L y^2 dy \Rightarrow k = \frac{1}{2}\frac{\lambda V^2}{L^2} \times \frac{L^3}{3}$$

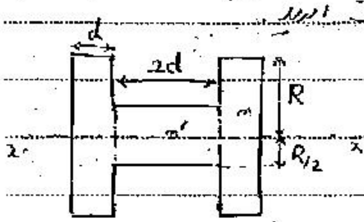
$$k = \frac{1}{2}\lambda \frac{L}{3} V^2 \rightarrow \lambda L = m_s$$

$$k = \frac{1}{2} \cdot \frac{m_s}{3} \cdot V^2$$

$$k = \frac{1}{2} m V^2$$

اگر استوانه‌هایی به شعاع R به طول $L = 4d$ قرقره‌ای مطابق شکل می‌سازیم.

الف: انرژی دورانی قرقره را حول محور zz' بر حسب جرم قرقره (M) و R بدست آورید.



$m = \pi R^2 d\rho + 2m' \qquad m' = \pi \frac{R^2}{4} \cdot 2d\rho = \pi R^2 \frac{d}{2}\rho$

$I_{1zz} = \frac{1}{2} m R^2 \qquad I_{2zz} = \frac{1}{2} m' (\frac{R}{2})^2 = \frac{1}{16} m R^2$

Subject:

Year.200 Month. Day.

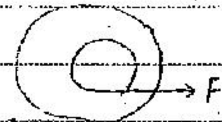
$$M = 2m + m'$$

$$M = 2\pi R^2 d\rho + \frac{\pi R^2 d}{2}\rho = \frac{5}{2}\pi R^2 d\rho$$

$$I_{xx} = 2I_1 + I_2 \rightarrow I_{xx} = 2 \cdot \frac{1}{2} mR^2 + \frac{1}{16} mR^2$$

$$I_{xx} = \frac{17}{16} mR^2 \qquad \left.\begin{array}{l} m = \pi R^2 d\rho \\ M = \frac{5}{2}\pi R^2 d\rho \end{array}\right\} \Rightarrow M = \frac{5}{2} m$$

$$I_{xx} = \frac{17}{16} \cdot \frac{2}{5} MR^2 = \frac{17}{40} MR^2$$



$a = ?$ [illegible]

[illegible]

$(I = Mk^2)$

[illegible]

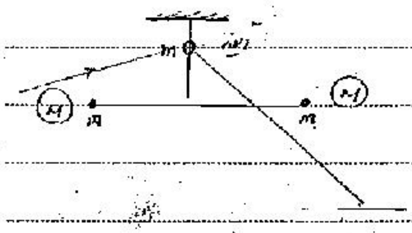
PILAVARAN

PAGE:

گرانش :

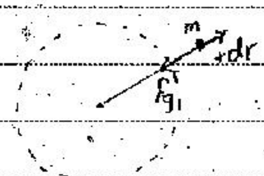
$m_1 \xrightarrow{x} m_2$

$$F = G\frac{m_1 m_2}{x^2} \quad , \quad G = 6.67 \times 10^{-11} \ \frac{Nm^2}{kg^2}$$



$$\tau = -k'\theta$$

انرژی پتانسیل گرانشی :



$$\Delta U = -W$$

$$U_{(r_0)} - U_{(r)} = -\int_r^{r_0} \vec{F_g} \cdot \vec{dr}$$

$$\Rightarrow \quad U_{(r_0)} - U_{(r)} = -\int_r^{r_0} \frac{GmM}{r^2} \, dr$$

$$U_{(r_0)} - U_{(r)} = -\frac{GmM}{r}\Big|_r^{r_0}$$

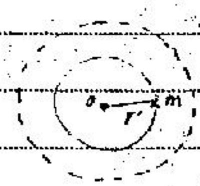
$$U_{(r_0)} - U_{(r)} = \frac{GmM}{r} - \frac{GmM}{r_0}$$

اگر $\begin{cases} U_{(r_0)} = 0 \\ r_0 = \infty \end{cases}$

$$0 - U_{(r)} = G\frac{mM}{r} \rightarrow U_{(r)} = -G\frac{mM}{r}$$

$r \geq R$ برای نقاط خارج زمین این فرمول صادق است

حال نیروی جاذبه را در داخل زمین بررسی می کنیم.



نیروی نقاط خارج از این
کره ی فرضی هیچ نقشی
ندارند.

$$F_g = G\frac{mM'}{r'^2}$$

$$\frac{M'}{M} = \frac{\frac{4}{3}\pi r'^3 \rho}{\frac{4}{3}\pi R_e^3 \rho} \rightarrow \frac{M'}{M} = \left(\frac{r'}{R_e}\right)^3$$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

$$\Rightarrow f_g = G\frac{m}{(r')^2}\left(\frac{r'}{R_e}\right)^3 M \rightarrow f_g = \frac{GmM}{R_e^3}\,r'$$

در مرکز زمین جاذبه وجود ندارد.

- پتانسیل گرانشی را در یک نقطه در داخل زمین بدست آورید.

$$f_g = G\frac{mM}{R_e^3}\,.\,r'$$ احتیاج به انرژی پتانسیل داریم. (پتانسیل در مرکز زمین صفر نیست)

$\Delta U = -W$ ← کار نیروی گرانش در داخل زمین.

نیرو متناسب با فاصله است اثر می‌کند یعنی نوسان می‌کند.

اگر تونلی از مرکز زمین عبور دهیم و جسمی درون آن قرار دهیم پریود نوسانات آن را حساب کنید.

$$f = -\frac{GmM}{R^3}\,.\,r = -kr$$

$$-kr = m\ddot{r}$$

$$\ddot{r} + \frac{k}{m}r = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\frac{GmM}{R^3}}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$$

$$M = \frac{4}{3}\pi R^3\rho$$ [illegible] g_0

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{G\cdot\frac{4}{3}\pi\rho R^3}}$$

$$\Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{g_0 R^2}} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{3}{4\pi G\rho}}$$

$$\Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{6400\times 10^3\,m}{9.8}} \simeq 84\ min$$

84 دقیقه طول می‌کشد (از این سر زمین به آن سر برود).

- پریود نوسانات را حساب کنید.

$$f_g = G\frac{mM}{R_e^3}\,.\,r$$ ← فاصله آن نقطه تا مرکز زمین

فاصله $= \cos\theta$

جرم تا نقطه تعادل

Subject:

Year. 200 Month. Day.

$$f_x = F_g \cos\theta = G\frac{mM}{R^3} r \cos\theta \qquad \cos\theta = \frac{x}{r}$$

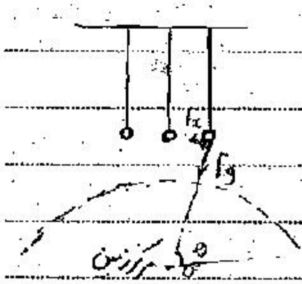
$$\rightarrow f_x = G\frac{mM}{R^3} r \cdot \frac{x}{r} \rightarrow f_x = G\frac{mM\,x}{R^3}$$

$$\rightarrow -G\frac{mM}{R^3} x = m\ddot{x} \rightarrow \ddot{x} + G\frac{M}{R^3} x = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{GM}{R^3}}, \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{g_0 R^2}} \rightarrow T = 2\pi\sqrt{R/g}$$

مثال: یک تونل حفر می‌کنیم. پریود آن چقدر است؟ (در برد نوسانات کم زاویه)

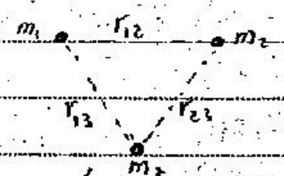


$$F_x = F_g \cos\theta \rightarrow F_x = G\frac{mM}{R^3} \cdot r \cdot \frac{x}{r}$$

اندازه $f_x = G\frac{mM}{R^3} \cdot x \rightarrow -G\frac{mMx}{R^3} = m\ddot{x}$

$$\rightarrow \ddot{x} + G\frac{M}{R^3} x = 0 \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{GM}{R^3}}, \; T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$$

مثال: سه جرم داریم انرژی پتانسیل آن را بیابید.



$U(r) = -G\frac{mM}{r}$ این علامت نشان دهنده جاذبه است $\bigcirc$ کار نیروی خارجی

$$U = -G\frac{m_1 m_2}{r_{12}} - G\frac{m_2 m_3}{r_{23}} - G\frac{m_1 m_3}{r_{13}}$$

m_1 را از r_{12} جسم دوم در بی‌نهایت

m_3 ، m_1 در صورتیکه جاذبه

نیست

حالا m_3 را می‌آوریم از بی‌نهایت با این جاذبه آن با m_1 عمل کنیم

اگر جاذبه نبود همین کار را می‌کردیم

$$U = -\left(G\frac{m_1 m_2}{r_{12}} + G\frac{m_2 m_3}{r_{23}} + G\frac{m_1 m_3}{r_{13}}\right)$$

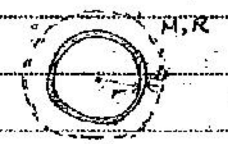
در این معادله چه اصل تعمیم برای ... پتانسیل قرار گرفته است.

Subject:

Year. 200 Month. Day.

[illegible]

مثال انرژی پتانسیل یک کره همگن را بیابید



$$m = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$$

$$dm = 4\pi r^2 \rho \, dr$$

$$du = G\frac{m\,dm}{r} \Rightarrow du = \frac{G(\frac{4}{3}\pi r^3 \rho) \cdot 4\pi r^2 \rho \, dr}{r}$$

$$\Rightarrow du = \frac{16}{3} G\pi^2 r^4 \rho^2 dr \Rightarrow U = -\frac{16}{3} G\pi^2 \rho^2 \int_0^R r^4 dr$$

$$\Rightarrow U = -\frac{16}{3} G\pi^2 \rho^2 \frac{R^5}{5} \Rightarrow U = -G\left(\frac{4}{3}\pi R^3 \rho\right)^2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{R}$$

$$U = -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R}$$

مثال انرژی پتانسیل کهکشان N ستاره‌ای به جرم M و شعاع R را بیابید

$N = 1.6 \times 10^{11}$

$R = 10^{23}$ cm

$M = 2 \times 10^{30}$ kg

$$U = -G(N-1)(N) \cdot \frac{M^2}{2R}$$

$$F = G\frac{mM}{r^2} \Rightarrow G\frac{mM}{r^2} = mr\omega^2$$

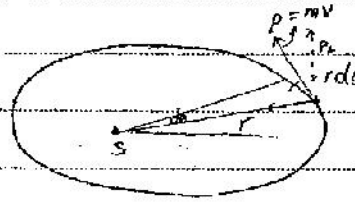
$$\frac{GM}{r^3} = \frac{4\pi^2}{T^2} \Rightarrow \frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

PILAVARAN

PAGE:

Subject:

Year. 200 Month. Day.



$$dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt}$$

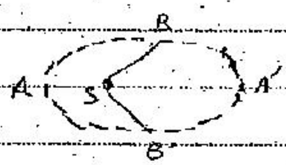
سرعت سطحی $\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \omega$

تکانه زاویه‌ای $L = P_\perp \cdot r \Rightarrow L = mr\omega \cdot r = mr^2\omega$

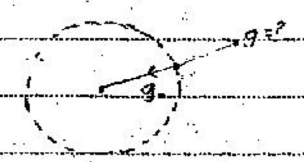
$$\frac{dA}{dt} = \frac{mr^2\omega}{2m} = \frac{L}{2m} =$$ مقدار ثابت

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$ چون گشتاور خارجی وجود ندارد L ثابت است.

مثال: در حرکت زمین به دور خورشید نشان دهید زمان حرکت از B به B' در مقایسه با زمان حرکت از B' به B برابر یکسان
نیست و نسبت آن را بیابید.



مثال: در سطح زمین g چگونه تغییر می‌کند



$$g = G\frac{M}{r^2} \Rightarrow dg = -2r\frac{GM}{r^4}\,dr$$

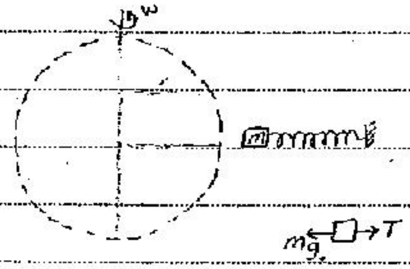
$$\Rightarrow \frac{dg}{dr} = -2\frac{GM}{r^3} \Rightarrow \frac{dg}{dr} = -2\frac{GM}{r^2} \times \frac{1}{r}$$

$$\Rightarrow \frac{dg}{dr} = -\frac{2g}{r}$$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

مثال:



$$mg_0 - T = ma$$

$$T = m(g_0 - a)$$

$$W = m(g_0 - a)$$

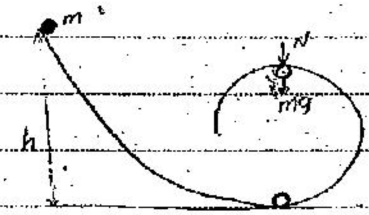
$$mg = m(g_0 - r\omega^2)$$

مقدار $r\omega^2$ برابر $\frac{3}{100}$ % است (در مسئله ...)

$$g_0 = G\frac{Mm}{r^2}$$

عرض جغرافیایی λ $\rightarrow$ $g_{(\lambda)} = g_0 - a\cos\lambda$ $\quad a = r\omega^2$

مثال: از چه ارتفاع h باید رها شود تا جسم m حلقه را دور بزند؟



$$mgh = \frac{1}{2}m\bar{V}^2 + \frac{1}{2}\bar{I}\omega^2 + mg(2R-2r)$$

$$mgh = \frac{1}{2}m\bar{V}^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}m\underbrace{r^2\omega^2}_{\bar{V}^2} + 4mg(R-r)$$

$$2gh = \frac{7}{5}\bar{V}^2 + 2g(R-r) \quad (1)$$

$N = 0$

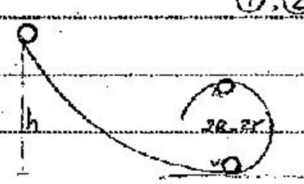
$$N + mg = \frac{m\bar{V}^2}{R-r}$$

$$mg = \frac{mV^2}{R-r}$$

$$\bar{V}^2 = g(R-r) \quad (2)$$

$$(1),(2) \rightarrow h = 2.7(R-r) \qquad r \ll R$$

$$h = 2.7R$$



m ... r ... است