

فصل اول : خطاها

فصل دوم : حل عددی معادلات غیر خطی $(f(x) = 0)$

فصل سوم : درونیابی

فصل چهارم : اشتغال نسبی عددی

فصل پنجم : روش های عددی حل معادلات دیفرانسیل معمولی

فصل اول

خطاها

منابع خطا : برای حل هر مسئله ای واقعی یک مدل ریاضی درست می آید، حاصل این مدل سازی ممکن است یک معادله ای یک مجهولی، معادله دیفرانسیل معمولی و غیره باشد. سپس با روش عددی مناسب جواب تقریبی آن مسئله درست می آید. خطاهای شناخته شده در فرآیند حل عددی مسئله علاوه بر خطای مدل و داده ها عبارتند از:

* خطای ناپیش اعداد و یا (خطای گرد کردن) :

در ابزارهای محاسباتی مانند ماشین حساب یا کامپیوتر تعداد ارقامی که برای ناپیش اعداد پیش بینی می شود محدود است. بنابراین ناپیش اعدادی که تعداد ارقام آنها از تعداد پیش بینی شده بیشتر باشد همراه با خطا است.

* خطای اعمال ریاضی (حسابی) : انجام اعمال ریاضی مانند جمع، تفریق، ضرب و تقسیم

روی اعداد تقریبی معمولاً باعث رشد خطای عملوندها می باشد.

Subject : محاسبات عددی

Year: ۸۹ Month: ۱۲ Date: |

* خطای رویش: برای بدست آوردن جواب تقریبی یک مسئله ممکن است الگوریتم‌ها متفاوتی وجود داشته باشد. از هر الگوریتم تقریبی برای جواب بدست می‌آید که خطای آن بویژه کس‌های کس الگوریتم بستگی دارد.

گرد کردن اعداد تا n رقم اعشار:

مثال: عدد 2.317847 را تا 3 رقم اعشار گردانید: 2.318

* رقم سوم بعد از اعشار را نگاه می‌کنیم و عدد بعدی را (n) را با 5 مقایسه می‌کنیم. اگر بیشتر بودیم قطعاً $(n+1)$ را می‌زنیم.

یک عدد اضافه کنیم و اگر کمتر از 5 بود همان می‌ماند. 2.318

2.317847 \approx 2.318 ← رقم اعشار 3 گردانید $(3D)$

2.317847 \approx 2.317 ← رقم اعشار 3 گردانید $(3D)$

هرگاه بخواهیم یک عدد را تا n رقم اعشار گردانیم از رقم $(n+1)$ ام این عدد کمتر از 5 باشد در این صورت رقم $(n+1)$ ام و تمام ارقام بعد از آن را حذف می‌کنیم.

اما هرگاه رقم $(n+1)$ ام اعشار بیشتر یا مساوی 5 باشد یک واحد به رقم n ام اضافه می‌کنیم.

مثال: 2.317847 را تا 3 رقم اعشار گردانید. 2.318

تا n رقم اعشار را با nD نایس می‌دهند. $3D \rightarrow 3$ رقم اعشار

انواع خطا: صوری خطا مثبت هستند

الف) **خطای مطلق**: اگر a تقریبی از A باشد خطای مطلق a را با A و $e(a)$ نشان

نشان داده و بصورت زیر تعریف می کنیم: $e(a) = |A - a|$

خطای مطلق نسبی: هرگز آن بالای خطای مطلق a را خطای مطلق نسبی نامیده و با

نماد e_a نشان می دهیم. $e(a) \leq e_a$

مثال زیر چند عدد تقریبی و اعداد واقعی داده شده اند، خطای مطلق و خطای مطلق نسبی

هر کدام را محاسبه کنید.

خطای مطلق: $A = \pi$ $a = ۳,۱۴۲$ (الف)

$$e(a) = |A - a| = |\pi - ۳,۱۴۲| = ۰,۰۰۰۴$$

خطای مطلق نسبی: $A = \sqrt{۲}$ $a = ۱,۴۱$ (ب)

$$e(a) = |A - a| = |\sqrt{۲} - ۱,۴۱| = ۰,۰۰۰۴۲$$

خطای مطلق نسبی:

$$e(a) = ۰,۰۰۰۴ \leq ۰,۰۰۰۵$$

$$e(a) = ۰,۰۰۰۴۲ \leq ۰,۰۰۰۵$$

یک واحد به اولین عدد بعد صفرها اعشاری است و نشان می دهد که به عدد چه نزدیک است.

توجه: e_a منحصر به فرد نمی باشد اما $e(a)$ منحصر به فرد است.

ب) خطای نسبی: اگر a تقریبی از A باشد، خطای نسبی a را با $\delta(a)$ نشان داده و بصورت زیر می نویسیم:

$$\delta(a) = \frac{|A - a|}{|A|} = \frac{e(a)}{|A|}$$

مثال قبل

الف) $\delta(a) = \frac{e(a)}{|A|} = \frac{0.0004}{\pi} = 0.000127$

* حل عددی معادلات $f(x) = 0$

مقدمه: یکی از مسائلی که اغلب در طراحی مهندسی با آن مواجه می شویم، حل معادله به شکل $f(x) = 0$ است که در آن f تابع مفروض است. منظور از حل معادله $f(x) = 0$ یافتن مقداری از متغیر x است که به ازای آن مقدار تابع صفر شود. هرگاه $f(\alpha) = 0$ آنگاه α را یک ریشهی معادله می نامیم و یا می نویسیم α یک صفر تابع f می باشد. با حل معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ و تعیین ریشه های آن آشنا هستیم، اما معادلاتی مانند

معادلات زیر را باروش های قبلی نمی توان حل نمود و برای حل آن ها باید از روش های تقریبی استفاده شود $x + \cos x = 0$ و $e^{-x} + \cos x = 0$

معمولا برای تعیین ریشه ای از یک معادله با دقت مورد نظر لازم است تقریبی از آن ریشه یا فاصله ی کوچکی را که حاوی آن ریشه باشد معلوم کرد، باین منظور

محدودیت‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

الف فاصله‌ای موجود باشد که شامل ریشه باشد. ^{فاصله} (بازه)

ب باید ریشه در فاصله مورد نظر نباشد از نظر ریاضی محدودیت الف در صورت

تغییر بیان می‌کنیم:

۱- تابع $f(x)$ در فاصله (a, b) پیوسته باشد

۲- $f(a)$ و $f(b)$ مختلف‌العلامت باشند یا $f(a) \cdot f(b) < 0$

در نتیجه بنا به قضیه میانی عددی مانند α در فاصله $[a, b]$ وجود دارد بطوریکه

$f(\alpha) = 0$ باشد

برای متن شرایط ۱ و ۲ محدودیت **ب** از نظر ریاضی بصورت زیر بیان می‌شود:

۳- برای هر $x \in [a, b]$ ، $f'(x) = 0$

* روش‌های عددی حل معادلات « $f(x) = 0$ » :

۱ روش تصنیف (دو بخش): در این روش فرض می‌کنیم بازه‌های مانند

$[a, b]$ وجود داشته باشند، بطوریکه الف تابع $f(x)$ در $[a, b]$ پیوسته

باشد، ب $f(a) \cdot f(b) < 0$ باشد. ج) معادله $f(x) = 0$ در (a, b)

تنها یک ریشه داشته باشد.

$[a, b]$ را به دو بخش مساوی تقسیم می‌کنیم، یعنی قرار می‌دهیم: $x_1 = \frac{a+b}{2}$

x_1 را وسط بازه $[a, b]$ در نظر می‌گیریم تا $[a, b]$ به دو بخش مساوی

$[a, x_1]$ و $[x_1, b]$ تقسیم شود.
 در روش دو بخش وسط فاصله $[a, b]$ یعنی x_1 را بعنوان اولین تقریب
 ریشه α (مورد نظر) در نظر می گیریم.
 ① اگر $f(a) \cdot f(x_1) < 0$ باشد، آنگاه ریشه در $[a, x_1]$ قرار دارد و $x_1 = a$
 و عمل را تکرار می کنیم.

② اگر $f(a) \cdot f(x_1) > 0$ باشد، آنگاه ریشه در $[x_1, b]$ قرار دارد و $x_1 = a$
 در نظر گرفته و عمل را تکرار می کنیم.

③ اگر $f(a) \cdot f(x_1) = 0$ باشد، x_1 ریشه معادله است و عملیات پایان نمی پذیرد.
 «معیارهای توقف»

معیار توقف یعنی تعیین n ای که تقریب $x_n = \alpha$ را بدهد، معیار توقف
 محاسباتی x_n ها نامیده می شود.

$$① |f(x_n)| < \epsilon$$

$$② |x_n - x_{n-1}| < \epsilon$$

③ گاهی از مخرج خواسته می شود که پس از m تکرار m (معلوم) معادله را به پایان
 رسانده و ریشه معادله را تقریب بزینم.

مثال تقریبی از ریشه‌ی معادله‌ی $x^3 + x - 1 = 0$ را در $(1, 0)$ قرار داده بدست آورید. به طوری که $f(x_n) < 10^{-2}$ باشد. تقریب را تا رقم اعشار (۴D) بنویسید.

حل: باید دو شرط برقرار باشد: $f(a) \cdot f(b) < 0$ و $f(x_n) < 10^{-2}$ همیشه باید برقرار باشد. تابع چند جمله‌ای همیشه پیوسته است.

$f(a) = f(0) = -1$ و $f(b) = f(1) = 1$ $\rightarrow f(a) \cdot f(b) < 0$

نکته: همیشه باید رقم بیشتر از آنچه خواسته است گردی کنیم.

n	a	b	$x_n = \frac{a+b}{2}$	علامت $f(a) \cdot f(b)$	$f(x_n)$
۱	۰	۱	$x_1 = \frac{0+1}{2} = 0.5$	$(-)(-) = (+)$	$f(x_1) = f(0.5) = -0.375$ $x_1 = a$ و $[x_1, b]$
۲	$x_1 = 0.5$	۱	$x_2 = \frac{0.5+1}{2} = 0.75$	$(-)(+) = (-)$	$f(x_2) = f(0.75) = 0.171875$ $x_2 = b$ و $[a, x_2]$
۳	۰.۵	$x_2 = 0.75$	$x_3 = \frac{0.5+0.75}{2} = 0.625$	$(-)(-) = (+)$	$f(x_3) = f(0.625) = -0.13084$ $x_3 = a$ و $[x_3, b]$
۴	۰.۶۲۵	۰.۷۵	$x_4 = \frac{0.625+0.75}{2} = 0.6875$	$(-)(+) = (-)$	$f(x_4) = f(0.6875) = 0.1245$ $x_4 = b$ و $[a, x_4]$
۵	۰.۶۲۵	۰.۶۸۷۵	$x_5 = \frac{0.625+0.6875}{2} = 0.65625$	$(-)(-) = (+)$	$f(x_5) = f(0.65625) = -0.06113$ $x_5 = a$ و $[x_5, b]$
۶	۰.۶۵۶۲۵	۰.۶۸۷۵	$x_6 = \frac{0.65625+0.6875}{2} = 0.671875$	$(-)(-) = (+)$	$f(x_6) = f(0.671875) = -0.02483$ $x_6 = a$ و $[x_6, b]$
۷	۰.۶۷۱۸۸	۰.۶۸۷۵	$x_7 = \frac{0.671875+0.6875}{2} = 0.6796875$		$f(x_7) = f(0.6796875) = -0.00631$

با توجه به این که شرط پایان $|f(x_n)| < 10^{-2}$ لذا این شرط برای x_7 برقرار است:

$|f(x_7)| < 10^{-2} \rightarrow |-0.00631| < 0.01$

و تقریب ریشه با چهار رقم اعشار بصورت زیر می باشد: x_7 را تا رقم اعشار گردی کنیم:

$x_7 \approx \alpha \rightarrow \alpha \approx 0.6797$

تمرین تقریبی از ریشه‌ی معادله‌ی $x^2 - (1-x)^5 = 0$ را که در (۱۰) قرار دارد را

با $\epsilon = 10^{-2}$ درست آورید، بطوریکه داشته باشیم $|f(x_n)| < 10^{-2}$

حل: شروط $\left\{ \begin{array}{l} \text{تابع چند جمله‌ای همیشه پیوسته است} \end{array} \right.$

$f(a) = f(0) = -1$ و $f(b) = f(1) = +1 \Rightarrow f(a) \cdot f(b) < 0$

n	a	b	$x_n = \frac{a+b}{2}$	علامت $f(a) \cdot f(x_n)$	$f(x_n)$
۱	۰	۱	$x_1 = \frac{0+1}{2} = 0.5$	$(-)(+) = (-)$	$f(x_1) = 0.21875$ $\rightarrow [a, x_1], x_1 = b$
۲	۰	$x_1 = 0.5$	$x_2 = \frac{0+0.5}{2} = 0.25$	$(-)(-) = (+)$	$f(x_2) = -0.1748$ $\rightarrow [x_2, b], x_2 = a$
۳	$x_2 = 0.25$	0.5	$x_3 = 0.375$	$(-)(+) = (-)$	$f(x_3) = 0.0524$ $\rightarrow [a, x_3], x_3 = b$
۴	0.25	$x_3 = 0.375$	$x_4 = 0.3125$	$(-)(-) = (+)$	$f(x_4) = 0.0593$ $\rightarrow [x_4, b], x_4 = a$
۵	$x_4 = 0.3125$	0.375	$x_5 = 0.34375$		$f(x_5) = -0.00355$

با توجه به این که مقدار $f(x_5)$ از 10^{-2} کوچکتر است شرط پایان مسئله برقرار است

$|f(x_n)| < 10^{-2} \rightarrow |f(x_5)| < 10^{-2} \rightarrow |-0.00355| < 0.01$

پس تقریب ریشه معادله از $x_n \approx \alpha \rightarrow x_5 \approx \alpha$

بدست می‌آید:

$x_5 \approx \alpha \rightarrow \alpha \approx 0.3438$ ← تا ۴ رقم اعشار گرد شد

تمرین: تقریب از ریشه معادله $x^3 - e^{-x} = 0$ را که در $(\frac{1}{25}, \frac{1}{27})$

قرار دارد با $\epsilon = 10^{-3}$ بدست آورید، بطوریکه داشته باشیم $|f(x_n)| < 10^{-3}$

شرط مسدود $f(a)f(b) < 0$ $f(a) = f(\frac{1}{25}) = -0.211$

$f(b) = f(\frac{1}{27}) = +0.466$

n	a	b	$x_n = \frac{a+b}{2}$	علامت $f(a)f(x_n)$	$f(x_n)$
1	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{27}$	$x_1 = \frac{\frac{1}{25} + \frac{1}{27}}{2} = \frac{1}{26}$	$(-)(+) = -$	$f(x_1 = \frac{1}{26}) = 0.019$
2	$\frac{1}{25}$	$x_1 = \frac{1}{26}$	$x_2 = \frac{\frac{1}{25} + \frac{1}{26}}{2} = \frac{1}{25.5}$	$(-)(-) = +$	$f(x_2 = \frac{1}{25.5}) = -0.099$
3	$x_2 = \frac{1}{25.5}$	$\frac{1}{26}$	$x_3 = \frac{\frac{1}{25.5} + \frac{1}{26}}{2} = \frac{1}{25.75}$		$f(x_3 = \frac{1}{25.75}) = -0.0041$

$|f(x_n)| < 10^{-3}$

شرط با بیان مسدود برقرار است

$\hookrightarrow |f(x_3)| < 10^{-3} \rightarrow |(-0.0041)| < 10^{-3}$

پس تقریب ریشه منسوب:

$x_n \approx \alpha \rightarrow \alpha = x_3$

$\alpha = \frac{1}{25.75} \leftarrow x_3 = \frac{1}{25.75}$ رقم اعشاری در نهم

توجه: این پاسخ ممکن است اشتباه باشد

روش نابجایی

اگر $f(x)$ در بازه $[a, b]$ پیوسته باشد، $f(a)f(b) < 0$ باشد و

معادله $f(x) = 0$ در بازه (a, b) تنها یک ریشه داشته باشد، برای تعیین

تقریب از ریشه آن را x_1 می نامیم داریم:

$$x_1 = \frac{af(b) - b f(a)}{f(b) - f(a)}$$

حالت اول اگر $f(a)f(x_1) < 0$ باشد، ریشه در (a, x_1) قرار دارد و

$x_1 = b$ و x_2 را بصورت زیر می نویسیم:

$$x_2 = \frac{af(x_1) - x_1 f(a)}{f(x_1) - f(a)}$$

حالت دوم اگر $f(a)f(x_1) > 0$ باشد، ریشه در (x_1, b) قرار دارد و

$x_1 = a$ و x_2 بصورت زیر می نویسیم:

$$x_2 = \frac{x_1 f(b) - b f(x_1)}{f(b) - f(x_1)}$$

حالت سوم اگر $f(a)f(x_1) = 0$ پس x_1 ریشه معادله می باشد و مسئله حل

شده است

مثال تقریبی از ریشه مثبت $f(x) = x^2 - 2 = 0$ را به روش نابجایی با دو رقم اعشار

۲.۵ بدست آورید. ریشه در فاصله a و b قرار دارد: محاسبات را تا

دو تکرار از روش نابجایی بدست آورید:

$$\begin{matrix} (1, 2) \\ a, b \end{matrix}$$

$$\left. \begin{matrix} f(a=1) = -1 \\ f(b=2) = 2 \end{matrix} \right\} \Rightarrow f(a)f(b) < 0 \quad \text{شرط مسئله}$$

فرمول: $x_1 = \frac{a(f(b)) - b(f(a))}{f(b) - f(a)} = \frac{(1)(2) - (2)(-1)}{2 - (-1)} = \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$

$$f(x_1 = \frac{4}{3}) = \frac{16}{9} - 2 = -\frac{2}{9} = 0.222$$

$$f(a) f(x_1) = (-) (+) \rightarrow \text{در حد: } (x_1, b) \text{ و } x_1 = a$$

$$\rightarrow x_2 = \frac{a f(b) - b f(x_1)}{f(b) - f(x_1)} = \frac{x_1 f(b) - b f(x_1)}{f(b) - f(x_1)} = \frac{(\frac{4}{3})(2) - (2)(-\frac{2}{9})}{2 - (-\frac{2}{9})}$$

$$\rightarrow x_2 = 1.4 \rightarrow \boxed{\alpha \approx 1.4}$$

مثال به روش نابجایی تقریبی از ریشه منفی $f(x) = \sin x - \frac{x}{\pi} = 0$ را که در ضلع $(-2, -1)$ قرار دارد با ϵ_D طوری بدست آورید که ریشه باشیم:

$$|f(x_n)| < 10^{-2}$$

چون لغت ϵ_D ما تا آن رقم نرد می بین

$$f(a = -2) = 0.09070$$

$$f(b = -1) = -0.34147$$

n	a	b	$X_n = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$	علامت $f(a)f(X_n)$	$f(X_n)$
1	-2	-1	$X_1 = -1.19013$	$(+)(-) = (+)$	-0.08098 $(a, x_1), x_1 = b$
2	-2	-1.79013	$X_2 = -1.88912$		0.00520

$f(X_2) = 0.00520$ چون کمتر از 0.01 در شرط مسئله است پس مقدار تقریبی ریشه :

$$\alpha = -1.8891 \quad \text{و بعد از چهار رقم اعشار گرد کردن} \quad X_2 = -1.88912$$

Subject : حساب عدد

Year: ۸۹ Month: ۱۵ Date: ۱۵

روش نیوتون - راسون :

با درست داشتن x_n خواصیم داشت

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

فرمول روش تکرار نیوتون ←

$$(f'(x) \neq 0)$$

مثال: فرمول روش نیوتون را برای تعیین ریشه k ام عدد مثبت a بدست آوریم

و با استفاده از آن و $x_0 = 1$ تقریبی برای $\sqrt[3]{2}$ را تا رقم اعشار (10) بدست آوریم.

$$\left(x = \sqrt[k]{a} \right)^k \rightarrow x^k = a \rightarrow f(x) = x^k - a = 0$$

$$f(x_n) = x_n^k - a$$

$$f'(x_n) = k x_n^{k-1}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^k - a}{k x_n^{k-1}} \leftarrow \text{فرمول روش نیوتون برای محاسبه ریشه } k \text{ ام عدد } a$$

$$x_0 = 1 \rightarrow (x = \sqrt[3]{2})^3 \rightarrow x^3 = 2 \rightarrow f(x) = x^3 - 2$$

$$f'(x) = 3x^2$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \rightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 2}{3x_n^2}$$

$$n=0 \rightarrow x_1 = x_0 - \frac{x_0^3 - 2}{3x_0^2} \rightarrow x_0 = 1 \rightarrow x_1 = 1 - \frac{1-2}{3 \cdot 1} = 2 \rightarrow \boxed{x_1 = 2}$$

Subject :

کتاب عدس

Year: ۸۹ Month: ۱۵ Date: ۱۵



$$n=1 \rightarrow x_2 = x_1 - \frac{x_1^2 - 2}{2x_1} = 2 - \frac{2^2 - 2}{2 \times 2} = 1.75$$

$$n=2 \rightarrow x_3 = x_2 - \frac{x_2^2 - 2}{2x_2} = 1.75 - \frac{1.75^2 - 2}{2 \times 1.75} = 1.73214$$

$$n=3 \rightarrow x_4 = x_3 - \frac{x_3^2 - 2}{2x_3} = 1.73214 - \frac{1.73214^2 - 2}{2 \times 1.73214} = 1.73205$$

$$n=4 \rightarrow x_5 = x_4 - \frac{x_4^2 - 2}{2x_4} = 1.73205 - \frac{1.73205^2 - 2}{2 \times 1.73205} = 1.73205$$

$\Rightarrow \alpha \approx 1.7321$ چون x_4 و x_5 تا ۵ رقم اعشاری برابر شده اند

با هم برابر شده اند عنوان تقریبی از ریشه تقریبی است

[نمودار روش کلام عدد a را با خط افقی]

«تقریب» ریشه عدد $f(x) = x^2 - 2 = 0$ را در فاصله $[a, b]$ تقریبی

با بردن نوبت با ϵ به دست آوریم. طبقه 10^{-4} $|x_n - x_{n-1}| < 10^{-4}$

وقتی رسیدیم $\alpha \approx 1.7321$

«تقریب» تقریبی از ریشه عدد $f(x) = x^2 - 2 = 0$ را که در فاصله $(-1, 1)$

با بردن نوبت با ϵ به دست آوریم. طبقه 10^{-2} $|f(x_n)| < 10^{-2}$

$\alpha \approx -1.7321$

Subject : حسابات عددی

Year: ۱۹ Month: ۱۲ Date: ۱۵



تعمیر تعمیر ریشه معادله $f(x) = x - \cos(x) = 0$ را که در فاصله $[0, 1]$

قرار دارد را به روش نیوتون با $\epsilon = 10^{-4}$ درست آوردید بطوریکه $|x_n - x_{n-1}| < 10^{-4}$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad f'(x) = 1 + \sin x$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - \cos(x_n)}{1 + \sin(x_n)}$$

$$x_0 = 0 \rightarrow x_1 = x_0 - \frac{x_0 - \cos(x_0)}{1 + \sin(x_0)} = 0.707106781$$

$$n=1 \rightarrow x_2 = x_1 - \frac{x_1 - \cos(x_1)}{1 + \sin(x_1)} = 0.739085133$$

$$n=2 \rightarrow x_3 = x_2 - \frac{x_2 - \cos(x_2)}{1 + \sin(x_2)} = 0.739085133$$

$\rightarrow |x_3 - x_2| = |0.739085133 - 0.739085133| < 10^{-4}$ چون
پس، ریشه معادله برابر است با x_3 با گرد شدن ϵ ، رقم اعشار

$$\rightarrow \alpha \approx 0.7391$$

تمرین تقریبی از ریشه معادله $f(x) = x^2 - 2^x = 0$ را که در ضمیمه (۱۰۵) قرار دارد را به روش نابجایی تا چهار رقم اعشار بدست آورید بطوریکه

$$\langle\langle |f(x_n)| < 10^{-2} \rangle\rangle$$

شرط مسئله : $f(a)f(b) < 0$
 $f(a) = f(-1) = 1/5$
 $f(b) = f(0) = -1$

n	a	b	$x_n = \frac{af(b) - b(fa)}{f(b) - f(a)}$	علامت $f(a)f(x_n)$	$f(x_n)$
۱	-1	0	$x_1 = -0.66667$	$(+)(-) = (-)$	$f(x_1) = -0.18551$ $(a, x_1), x_1 = b$
۲	-1	-0.66667	$x_2 = -0.75687$	$(+)(-) = (-)$	$f(x_2) = -0.1893$ $(a, x_2), x_2 = b$
۳	-1	-0.75687	$x_3 = -0.76573$		$f(x_3) = -0.0181$

چون $|f(x_3)| = 0.0181 < 10^{-2}$ مطابق

شرط پایان مسئله شد پس تقریبی از ریشه معادله x_3 است

$x \approx -0.7657$ ← x_3 گردیده به ۴ رقم اعشار

روش نیوتن یا (خط مماس):

$$f'(x_n) = \lim_{x \rightarrow x_n} \frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x}$$

x انتخابی به x_n نزدیک باشد، فرض کنیم x_{n+1}

$$f'(x_n) \sim \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{f(x_n)}{\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

فرمول برداشتن نیوتن

* در این روش تا آنکه از یک شروع می شود *

مثال با استفاده از روش نیوتن ریشه‌های معادله $f(x) = x^3 + x - 1 = 0$ را با سه رقم اعشار بدست آورید. بطوری که دایسه باشد $|f(x_n)| < 0.001$ و قرار دهیم $x_0 = 0$ و $x_1 = 1$.

رقم اعشار بدست آورید. بطوری که دایسه باشد $|f(x_n)| < 0.001$ و قرار دهیم

$$f(x_1 = 1) = 1 \text{ و } f(x_0 = 0) = -1 \quad \cdot \quad x_1 = 1 \text{ و } x_0 = 0$$

$$n=1 \Rightarrow x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)(x_1 - x_0)}{f(x_1) - f(x_0)} = 1 - \frac{1(1-0)}{1-0} = \frac{1}{2}$$

$$f(x_2 = 0.5) = -0.375$$

$$n=2 \Rightarrow x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)(x_2 - x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} = 0.5 - \frac{(-0.375)(0.5-1)}{(-0.375)-1} = 0.4344$$

$$f(x_3 = 0.4344) = -0.1059$$

$$n=3 \rightarrow x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)(x_3 - x_2)}{f(x_3) - f(x_2)} = 0.4344 - \frac{(-0.1059)(0.4344-0.5)}{(-0.1059)-(-0.375)} = 0.4901$$

$$f(x_4 = 1.4901) = 0.188$$

$$n=4 \rightarrow x_5 = x_4 - \frac{f(x_4)(x_4 - x_3)}{f(x_4) - f(x_3)} = 1.4901 - \frac{(0.188)(1.4901 - 1.4394)}{(0.188) - (-0.059)}$$

$$= 1.4820 \rightarrow f(x_5 = 1.4820) = -0.0001$$

شرط مسئله برقرار است یعنی $|f(x_5)| = 0.0001 < 0.001$

و α را بعنوان تقریب از ریشه در نظر می گیریم

$$\alpha = 1.482$$

روش تکرار ساده یا (نقطه ثابت یا تکرار تابعی):

در این روش پس از آزمون ^{شرط} موجود بودن ریشه برای معادله $f(x) = 0$ در $[a, b]$

معادله $f(x) = 0$ پس از جایجایی های بصورت $x = g(x)$ نوشته می شود، بطوری که α ریشه

هر دو معادله باشد، معمولاً از روی معادله $f(x) = 0$ بصورت های مختلفی می توان به شکل

$$x = g(x) \text{ رسید، } f(x) = 0, \alpha = g(\alpha)$$

برای بدست آوردن فرمول؟ پس از نوشتن معادله $f(x) = 0$ بصورت $x = g(x)$ و $x_n \in [a, b]$

بصورت زیر ساخته می شوند. بطور کلی با در دست داشتن x_n خواهم داشت:

$$x_{n+1} = g(x_n) \rightarrow x_1 = g(x_0) \text{ و } x_2 = g(x_1) \text{ و } \dots$$

رابطه بالا فرمول روش تکرار ساده برای بدست آوردن α ریشه معادله $f(x) = 0$

نامیده می شود.

شرایط انتخاب $g(x)$ مناسب:

$$\forall x \in [a, b] \text{ و } g(x) \in [a, b] \quad (1)$$

$$\forall x \in [a, b] \text{ و } |g'(x)| \leq 1 \quad (2)$$

مثال برای تعیین تقریب ریشه‌ی معادله‌ی $f(x) = 3x e^x - 1 = 0$ که \rightarrow

(اوه) و کاربرد آن از روش تکرار ساده استفاده کنید و قرار دهید $x_0 = 1$ و تقریب را

با $3D$ محاسبه کنید. **توجه** جای ادا هم در روش معادله 3 رقم اعشاری با هم ضابطه

$$3x e^x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{3e^x} \rightarrow x = \frac{1}{3} e^{-x} = g(x)$$

برای ساختن $g(x)$ اعداد ثابت فرب را در نظر بگیرید و توان منفی را هم بایزم:

$$0 < x < 1 \xrightarrow{\text{تقریب}} -1 < -x < 0 \xrightarrow{\text{جذب}} e^{-1} < e^{-x} < e^0 \rightarrow \frac{1}{e} < \frac{1}{3} e^{-x} < \frac{1}{3} \rightarrow 0 < \frac{1}{3} e^{-x} < 1 \rightarrow 0 < g(x) < 1$$

شرط اول برقرار است

$$\forall 0 < x < 1 \rightarrow 0 < \frac{1}{3} e^{-x} < 1$$

چون برد تابع a^x است $|g'| = \left| -\frac{1}{3} e^{-x} \right| = \frac{e^{-x}}{3} < 1$ شرط دوم

$$\rightarrow \frac{e^{-x}}{3} < 1 < 1$$

$$x_{n+1} = g(x_n) \rightarrow x_{n+1} = \frac{e^{-x_n}}{3}$$

$$n=0 \rightarrow x_1 = \frac{e^{-x_0}}{3} = \frac{e^{-1}}{3} = 0.2022$$

$$n=1 \rightarrow x_2 = \frac{e^{-x_1}}{3} = \frac{e^{-0.2022}}{3} = 0.2723$$

$$n=2 \rightarrow x_3 = \frac{e^{-x_2}}{3} = \frac{e^{-0.2723}}{3} = 0.2539$$

$$n=3 \rightarrow x_4 = \frac{e^{-x_3}}{3} = \frac{e^{-0.2539}}{3} = 0.2514$$

$$n=4 \rightarrow x_5 = \frac{e^{-x_4}}{3} = \frac{e^{-0.2514}}{3} = 0.2574$$

$$n=5 \rightarrow x_6 = \frac{e^{-x_5}}{3} = \frac{e^{-0.2574}}{3} = 0.2577$$

شرط متوقف شدن برقرار است و x_6 به عنوان تقریب مورد نظر باشد. $\alpha \approx 0.2577$

تمرین ۵: ریشه مثبت معادله $f(x) = 2 \sin x + x - 2 = 0$ را تا ۳D به روش

وتری حساب کنید: $(x_0 = 1 \text{ و } x_1 = 0.5)$

$$\alpha \approx 0.705$$

تمرین ۶: تقریبی از ریشه معادله $f(x) = x - \cos x = 0$ را در فاصله

$[1, 0.5]$ قرار داده با ۳D بسط آورید بطوری که $|f(x_n)| < 10^{-2}$

و قرار دهید $\alpha = 1$. این مسئله را با استفاده روش تکرار ساده حل کنید:

$$\alpha \approx 0.734$$

تمرین ۷: با فرض $\alpha = 1$ و انتخاب $g(x)$ مناسب تقریبی از ریشه مثبت معادله

$f(x) = 2x - \sin x - 1 = 0$ طوری حساب کنید که $|f(x_n)| < 10^{-3}$ باشد. با شرط

$$\alpha \approx 0.888$$

رشته مثبت معادله $f(x) = 2 \sin x + x - 2 = 0$ را با رقم اعشار 10^{-5} تمرین

به روش وترقی حساب کنید: $(x_0 = 1.5, x_1 = 1)$

$f(x_0 = 1.5) = -0.5411$

$f(x_1 = 1) = 0.4829$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

$n=1 \rightarrow x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)(x_1 - x_0)}{f(x_1) - f(x_0)} \Rightarrow x_2 = 1 - \frac{(0.4829)(1.5 - 1)}{(0.4829) - (-0.5411)}$

$\rightarrow x_2 = 1.279 \rightarrow f(x_2) = 1.1945$

$n=2 \rightarrow x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)(x_2 - x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} \Rightarrow x_3 = 1.279 - \frac{(1.1945)(1.279 - 1)}{(1.1945) - (0.4829)}$

$\rightarrow x_3 = 0.9276 \rightarrow f(x_3) = -0.198$

$n=3 \rightarrow x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)(x_3 - x_2)}{f(x_3) - f(x_2)} \Rightarrow x_4 = 0.9276 - \frac{(-0.198)(0.9276 - 1.279)}{(-0.198) - (1.1945)}$

$\rightarrow x_4 = 0.7202 \rightarrow f(x_4) = 0.0393$

$n=4 \rightarrow x_5 = x_4 - \frac{f(x_4)(x_4 - x_3)}{f(x_4) - f(x_3)} \Rightarrow x_5 = 0.7202 - \frac{(0.0393)(0.7202 - 0.9276)}{(0.0393) - (-0.198)}$

$\rightarrow x_5 = 0.7049 \rightarrow f(x_5) = 0.0001$

$n=5 \rightarrow x_6 = x_5 - \frac{f(x_5)(x_5 - x_4)}{f(x_5) - f(x_4)} \Rightarrow x_6 = 0.7049 - \frac{(0.0001)(0.7049 - 0.7202)}{(0.0001) - (0.0393)}$

$\rightarrow x_6 = 0.7049$ مع رقم بعد از اعشار 5 و x_4 مسا با از پس شرط است. بزرگتر است

$x = 0.705$ پس x_4 بعنوان تقریب از ریشه با 3 رقم گرد کردن مورد نظر است.

تقریب از ریشه معادله $f(x) = x - \cos x = 0$ را که در فاصله $[0, 1]$ قرار

دارد، با $\epsilon = 10^{-2}$ پوست آورید. بطوری که $|f(x_n)| < 10^{-2}$ و $x_0 = 1$ باشد.

مسئله را به روش تکرار ساده حل کنید: $g(x) = \cos x$ \rightarrow $x - \cos x = 0$

رایگان: $x = \cos x \rightarrow 0 < x < 1 \rightarrow \cos(1) < \cos(x) < \cos(0)$

$0 < 0.7071 < \cos(x) < 1$

$\rightarrow 0 < \cos(x) < 1$

$g(x) = \cos(x) \rightarrow g'(x) = -\sin(x) \rightarrow |-\sin(x)| \xrightarrow{0 < x < 1} |g'(x)| < 1$

$0 < x < 1 \rightarrow \sin(0) < \sin(x) < \sin(1) \rightarrow 0 < \sin(x) < 0.84 < 1$

$x_{n+1} = \cos(x_n)$

$n=0 \rightarrow x_1 = \cos(x_0) = \cos(1) =$

$x_1 = \cos(1) = 0.7071 \rightarrow f(x_1) = 0.7071 - \cos(0.7071) = -0.2173$

$n=1 \rightarrow x_2 = \cos(x_1) = 0.7660 \rightarrow f(x_2) = 0.2033$

$n=2 \rightarrow x_3 = \cos(x_2) = 0.7262 \rightarrow f(x_3) = -0.1392$

$n=3 \rightarrow x_4 = \cos(x_3) = 0.7442 \rightarrow f(x_4) = 0.0921$

$n=4 \rightarrow x_5 = \cos(x_4) = 0.7301 \rightarrow f(x_5) = -0.0620$

$n=5 \rightarrow x_6 = \cos(x_5) = 0.7414 \rightarrow f(x_6) = 0.0118$

$n=6 \rightarrow x_7 = \cos(x_6) = 0.7371 \rightarrow f(x_7) = 0.0113$

$n=7 \rightarrow x_8 = \cos(x_7) = 0.7390 \rightarrow f(x_8) = 0.0190$

$n=8 \rightarrow x_9 = \cos(x_8) = 0.7374 \rightarrow f(x_9) = -0.0128$

$n=9 \rightarrow x_{10} = 0.7442 \rightarrow f(x_{10}) = 0.0016 \rightarrow |f(x_{10})| < 10^{-2}$

پس شرط مسئله برقرار است و چون $|f(x_{10})| < 10^{-2}$ است پس x_{10} بعد از $n=9$

$\alpha \approx 0.744$

پس بعنوان تقریب از ریشه ما خواهد بود:

تقریب: با فرض $g(x)$ و انتخاب مناسب تقریبی از ریشه مثبت معادله زیر را طوری

حساب کنید که $|f(x_n)| < 10^{-2}$ باشد $D \gg 1$ و $f(x) = x - \sin x - 1 = 0$

$0 < x < 1 \rightarrow \sin(0) < \sin x < \sin(1) \rightarrow \frac{\sin(0)+1}{2} < \frac{\sin x+1}{2} < \frac{\sin(1)+1}{2} < 1.05$

$x - \sin x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{\sin x + 1}{2} \xrightarrow{g(x)} x_{n+1} = \frac{\sin(x_n) + 1}{2} \quad g'(x) < 1$

$n=0 \rightarrow x_1 = \frac{\sin(x_0)+1}{2} = 0.9207 \rightarrow f(x_1) = 0.0602$

$n=1 \rightarrow x_2 = \frac{\sin(x_1)+1}{2} = 0.891 \rightarrow f(x_2) = 0.0139$

$n=2 \rightarrow x_3 = \frac{\sin(x_2)+1}{2} = 0.891 \rightarrow f(x_3) = 0.0043$

$n=3 \rightarrow x_4 = \frac{\sin(x_3)+1}{2} = 0.8889 \rightarrow f(x_4) = 0.0014$

$n=4 \rightarrow x_5 = \frac{\sin(x_4)+1}{2} = 0.8882 \rightarrow f(x_5) = 0.0004 \quad \checkmark$

چون $|f(x_5)| = 0.0004 < 10^{-3}$ است پس شرط مسئله برقرار بوده و می توان x_5

$\alpha \approx 0.888$

را به عنوان تقریب از ریشه پذیرفت

چند جمله‌ای درون‌یاب

x_i	x_0	x_1	x_2	...	x_n
$f(x_i)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$...	$f(x_n)$

تابع جدولی زیر را در نظر بگیرید

من خواهم مقدار تابع f را در نقطه‌ای مانند x^* که عضو (x_0, x_n) باشد و علاوه بر $x_i \neq x^*$ که از (x_0, x_n) خارج است (برای این عمل در نیاید) با صیغه‌های f برای این کار روش‌های متفاوتی وجود دارد که یکی از این روش‌ها پیدا کردن چند جمله‌ای مانند $P(x)$ است به گونه‌ای که $P(x_i) = f_i$ (برای $i=0, \dots, n$)

حال بجای $f(x)$ می‌توان از $P(x)$ در بازه $[x_0, x_n]$ استفاده نمود

به این ترتیب مسئله‌ای که مطرح می‌شود تعیین $f(x) \approx P(x)$

چند جمله‌ای $P(x)$ می‌باشد که به چند جمله‌ای درون‌یاب معروف است

* معرفی چند روش برای تعیین $P(x)$ که در شرط $P(x_i) = f_i$ صدق کند:

چند جمله‌ای‌های لاگرانژ:

در این روش فرض می‌کنیم $L_0(x), L_1(x), \dots, L_n(x)$ هر یک یک چند جمله‌ای از درجه n

باشند و داشته باشیم $P(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + \dots + f(x_n)L_n(x)$

$$L_j(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\dots(x-x_n)}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\dots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\dots(x_j-x_n)}$$

تعریف: چند جمله‌ای $L_j(x)$ که بصورت بالا تعریف می‌شود، چند جمله‌ای لاگرانژ نامیده می‌شود.

می شود که چند جمله ای از درجه n می باشد.

مثال: چند جمله ای $P(x)$ مربوط به تابع جدولی زیر را بنویسید:

x_i	x_0	x_1	x_2	x_3
	۰	۱	۳	۴
f_i	-۱۲	۰	۴	۱۲
	f_0	f_1	f_2	f_3

$P(x) = f_0 L_0(x) + f_1 L_1(x) + f_2 L_2(x) + f_3 L_3(x)$

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{-12} = \frac{x^3 - 8x^2 + 19x - 12}{-12}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{(x-0)(x-3)(x-4)}{(1-0)(1-3)(1-4)} = \frac{x^3 - 7x^2 + 12x}{4}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{(x-0)(x-1)(x-4)}{(3-0)(3-1)(3-4)} = \frac{x^3 - 5x^2 + 4x}{-9}$$

$$L_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{(4-0)(4-1)(4-3)} = \frac{x^3 - 4x^2 + 3x}{12}$$

$$P(x) = \frac{x^3 - 8x^2 + 19x - 12}{-12} (-12) + \frac{(x^3 - 7x^2 + 12x)}{4} (0) + \frac{(x^3 - 5x^2 + 4x)}{-9} (4) + \frac{(x^3 - 4x^2 + 3x)}{12} (12) = x^3 - 7x^2 + 18x - 12$$

چند جمله ای درون باب بر حسب تفاضلات تقسیم شده بنویس

فرض کنید x_0 تا x_n نقاط دو به دو متمایزی باشند و (f_0, \dots, f_n) مقادیر تابع f

در این نقاط باشند. تفاضلات تقسیم شده f مرتبگی متفاوت را برای نقاط x_i

بصورت زیر تعریف می کنیم:

① تفاضلات مرتبگی اول بین دو نقطه x_i و x_{i+1} ایجاد می شود:

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f_i - f_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \rightarrow f[x_0, x_1] = \frac{f_0 - f_1}{x_0 - x_1}$$

۲) تفاضل مرتبه دوم بین سه نقطه x_i, x_{i+1}, x_{i+2} روی منحنی دهد.

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_i, x_{i+1}] - f[x_{i+1}, x_{i+2}]}{x_i - x_{i+2}}$$

مثال: $f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_2, x_3]}{x_1 - x_3}$

۳) تفاضل مرتبه i در x_0, x_1, \dots, x_i نقطه x_{i+1} روی منحنی دهد.

$$f[x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}] = \frac{f[x_0, \dots, x_{i-1}, x_i] - f[x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}]}{x_0 - x_{i+1}}$$

مثال: هندجهای درونیاپ تفاضلات تقسیم شده ی نیوتون تابع جدولی زیر را بساز

آفرید

$n=4$

x_i	x_0	x_1	x_2	x_3
f_i	۲	۳	۱۲	۱۴۷
	f_0	f_1	f_2	f_3

x_i	f_i	اول $f[x_i, x_{i+1}]$	دوم $f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	سوم $f[x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x_i]$
x_0	۲	$\frac{3-2}{0-1} = 1$	$\frac{1-9}{0-2} = 4$	$\frac{4-9}{0-3} = 1$
x_1	۳	$\frac{12-2}{1-0} = 10$	$\frac{9-147}{1-3} = 70$	
x_2	۱۲	$\frac{147-12}{2-1} = 135$		
x_3	۱۴۷			

* فرض اول چند جمله‌ای درون یاب بر حسب تفاضلات تقسیم شده نیوتون *

چند جمله‌ای درونیاب f در نقاط x_0, x_1, \dots, x_n به صورت زیر می‌باشد:

$$P(x) = f_0 + (x-x_0) f[x_0, x_1] + (x-x_0)(x-x_1) f[x_0, x_1, x_2] + \dots$$

$$+ (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1}) f[x_0, x_1, \dots, x_n] \quad \text{فرض اول کلمه!}$$

ارائه

$$P(x) = f_0 + (x-x_0) f[x_0, x_1] + (x-x_0)(x-x_1) f[x_0, x_1, x_2] +$$

$$+ (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) f[x_0, x_1, x_2, x_3] =$$

$$= 2 + (x-0)(1) + (x-0)(x-1)(1^2) + (x-0)(x-1)(x-2)(1) =$$

$$= 2 + x + 1x^2 - 1x + x^3 - 3x^2 + 2x = x^3 + x^2 - x + 2$$

ABADANOMRAN

تمرین ۱ چند جمله‌ای درونیاب تابع جدولی زیر

x_i	۵	۷	۱۱	۱۳	۲۱
f_i	۱۵۰	۳۹۲	۱۴۵۲	۳۳۴۶	۹۷۵۲

را با استفاده از روش تفاضلات تقسیم شده نیوتون

محاسبه کرده و به کمک آن f_4 را تقریباً برآورد.

$$f(4) = 252$$

تمرین ۲ چند جمله‌ای درونیاب تابع جدولی زیر را برآورد

x_i	-1	0	1	2
f_i	1	1	3	7

لاگرانژ بدست آورید.

$$P(x) = x^2 + x + 1$$

x_i	۵	۷	۱۱	۱۳	۲۱
f_i	۱۵۰	۳۹۲	۱۴۵۲	۲۳۲۶	۹۷۰۲

چند جمله‌ای درون باب تابع جدولی زیر را با استفاده از روش تفاضل تقسیم شده نیوتن محاسبه و $f(x)$ را تقریب برینند.

x_i	f_i	اول	دوم	سوم	چهارم
x_0 ۵	f_0 ۱۵۰				
x_1 ۷	f_1 ۳۹۲	$\frac{150-392}{5-7} = 121$	$\frac{121-242}{5-11} = 24$	$\frac{24-22}{5-13} = 1$	
x_2 ۱۱	f_2 ۱۴۵۲	$\frac{392-1452}{7-11} = 242$	$\frac{242-457}{7-13} = 32$	$\frac{32-44}{7-21} = 1$	$\frac{1-1}{5-21} = 0$
x_3 ۱۳	f_3 ۲۳۲۶	$\frac{1452-2326}{11-13} = 457$	$\frac{457-917}{11-21} = 44$		
x_4 ۲۱	f_4 ۹۷۰۲	$\frac{2326-9702}{13-21} = 917$			

ABADANOMRAN

$$P(x) = 150 + (x-5)(121) + (x-5)(x-7)(24) + (x-5)(x-7)(x-11)(1)$$

$$+ (x-5)(x-7)(x-11)(x-13)(0) = x^3 + x^2$$

$$\rightarrow P(x) \approx f(x) = x^3 + x^2 \quad \checkmark$$

$$\rightarrow f(4) = 4^3 + 4^2 = 252 \quad \checkmark$$

Subject :

محاسبه عددی

Year: 90 Month: 1 Date: 28



چند جمله ای درون یاب تابع جدولی زیر را با روش لاکرینگ

x_i	x_0	x_1	x_2	x_3
	-1	0	1	2
f_i	1	1	3	5
	f_0	f_1	f_2	f_3

بوست آورید؟ $n=3$

$$P(x) = f_0 L_0(x) + f_1 L_1(x) + f_2 L_2(x) + f_3 L_3(x)$$

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(-1-0)(-1-1)(-1-2)} = \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{-6}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{(0-(-1))(0-1)(0-2)} = \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{+2}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{(x+1)(x-0)(x-2)}{(1-(-1))(1-0)(1-2)} = \frac{x^3 - x^2 - 2x}{-2}$$

$$L_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{(x+1)(x-0)(x-1)}{(2-(-1))(2-0)(2-1)} = \frac{x^3 - x}{+4}$$

$$P(x) = \left(\frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{-6} \right) (1) + \left(\frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{+2} \right) (1) +$$

$$+ \left(\frac{x^3 - x^2 - 2x}{-2} \right) (3) + \left(\frac{x^3 - x}{+4} \right) (5) = x^3 + x + 1$$

$$\rightarrow P(x) = x^3 + x + 1$$

خطای چند جمله‌ای درون‌یاب

تابع خطای $E(x)$ در چند جمله‌ای درون‌یاب بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$E(x) = f(x) - P(x)$$

من خواهم یک کران بالا برای $E(x)$ بدست آورم:

اگر M_{n+1} یک کران بالای $f^{(n+1)}$ باشد، (یعنی $f^{(n+1)}(\eta) \leq M_{n+1}$)

آنگاه رابطه‌ی زیر برای خطای چند جمله‌ای درون‌یاب برقرار است.

$$E(x) = |f(x) - P(x)| \leq |(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)| \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= -1 \\ x_1 &= 0 \\ x_2 &= 1 \end{aligned} \right\}$$

مثال فرض کنید $f(x) = \sin \frac{\pi}{2} x$ ، یک تابع جدولی در نقاط:

باشد، چند جمله‌ای درون‌یاب P را در نقاط فوق محاسبه کنید و

یک کران بالا برای خطای آن بدست آورید؟

$n=2$

x_i	f_i	اول	دوم
-1	-1		
0	0	$\frac{-1-0}{-1-0} = 1$	$\frac{1-1}{-1-1} = 0$
1	1	$\frac{0-1}{0-1} = 1$	

$$P(x) = f_0 + (x-x_0) f'_{[x_0, x_1]} + (x-x_0)(x-x_1) f''_{[x_0, x_1, x_2]}$$

$$\Rightarrow P(x) = -1 + (x-(-1)) \times 1 = x + 1 - 1 = x \Rightarrow \boxed{P(x) = x}$$

$$|f^{(3)}(\eta)| \leq M_3$$

$$\left. \begin{aligned} f' &= \frac{\pi}{4} \times \cos \frac{\pi}{4} x \\ f'' &= -\frac{\pi^2}{4} \times \sin \frac{\pi}{4} x \\ f^{(3)} &= -\frac{\pi^3}{8} \cos \frac{\pi}{4} x \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{مشتق سوم تابع } f(x) \end{array}$$

$$|f^{(3)}| = \frac{\pi^3}{8} |\cos \frac{\pi}{4} x| \leq \frac{|\cos x|}{|\sin x|} \leq \frac{\pi^3}{8} \times 1 = \frac{\pi^3}{8} = M_3$$

$$|f(x) - P(x)| \leq |(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)| \frac{M_3}{3!} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(x) - P(x)| \leq |(x+1)x(x-1)| \frac{\frac{\pi^3}{8}}{6}$$

$$|f(\frac{1}{2}) - P(\frac{1}{2})| \leq |(\frac{1}{2})^3 - (\frac{1}{2})| \times \frac{\pi^3}{48} \leq 0.242$$

ران بالا برای خطا در نقطه 1/2

* تفاوت متناهی و درون یابی یک تابع هرگاه نقاط درون یابی مساوی الفاصله باشند:

روش های لاکرانز و تفاضلات تقسیم ندهی نیز چون در حالت کلی برای نقاط x_0 تا x_n چه مساوی الفاصله باشند چه نباشند چند جمله ای درون یابی را بدین روش آوردن اقل و قسری h ها مساوی الفاصله باشند روش های دیگری را برای محاسبه چند جمله ای درون یابی معرفی می کنیم.

هرگاه فاصله $[a, b]$ را به n زیر فاصله مساوی بصورت $[x_{i-1}, x_i]$ به طول h تقسیم کنیم داریم:

$$x_i = x_0 + ih \quad i = 0, 1, \dots, n$$

$$x_i - x_{i-1} = h$$

$$\Delta^0 f_i = f_i$$

تعريف عملگر بسير (Δ) :

$$\Delta f_i = f_{i+1} - f_i$$

$$\Delta^{k+1} f_i = \Delta^k f_{i+1} - \Delta^k f_i$$

فردا على

مساب جدول تفاضلات تقسيم شده نيوتون هرگاه نقاط x_i مساوي الفاصل

باشند، مي توان جدول تفاضلات را به جدول تفاضلات مساوي تقسيم نمود

$n=3$

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$
x_0	f_0	$f_1 - f_0$	$\Delta f_1 - \Delta f_0$	$\Delta^2 f_1 - \Delta^2 f_0$
x_1	f_1	$f_2 - f_1$	$\Delta f_2 - \Delta f_1$	$\Delta^3 f_0$
x_2	f_2	$f_3 - f_2$	$\Delta^2 f_1$	
x_3	f_3	Δf_3		

تفاضلات مساوي مربوط به جدول زير را حساب نمايد:

x_i	-1	0	1	2
f_i	0	-1	2	9

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$
-1	$f_0 = 0$	$-1 - 0 = -1$	$2 - (-1) = 3$	$9 - 2 = 7$
0	$f_1 = -1$	$2 - (-1) = 3$	$9 - 2 = 7$	
1	$f_2 = 2$	$9 - 2 = 7$		
2	$f_3 = 9$			

فرضول چند جمله ای درون یاب بر حسب تفاضلات متناهی :

هرگاه x_i نقاط مستوی الفاعله باشند و $x = x_i + \theta h$ در این صورت

چند جمله ای درون یاب f بر حسب تفاضلات بسط و بصورت زیر می باشد :

$$P(x) = f_0 + \theta \Delta f_0 + \frac{\theta(\theta-1)}{2!} \Delta^2 f_0 + \dots + \frac{\theta(\theta-1)\dots(\theta-(n-1))}{n!} \Delta^n f_0$$

فرضول چند جمله ای درون یاب را برای تابع جدولی مثال قبل به روش

تفاضلات متناهی بسط و بصورت آدرین

$$P(x) = f_0 + \theta \Delta f_0 + \frac{\theta(\theta-1)}{2!} \Delta^2 f_0 + \frac{\theta(\theta-1)(\theta-2)}{3!} \Delta^3 f_0$$

$$\rightarrow P(x) = 0 + \theta(-1) + \frac{\theta(\theta-1)}{2!} x^2 + 0 = 2\theta^2 - 2\theta - \theta = 2\theta^2 - 3\theta$$

$$x = x_i + \theta h \xrightarrow{i=0} x = x_0 + \theta h \rightarrow x = -1 + \theta \times 1 \rightarrow \boxed{\theta = x+1}$$

$$\rightarrow P(x) = 2(x+1)^2 - 3(x+1) = 2x^2 + x - 1$$

چند جمله ای درون یاب

تعریف: عملگر پسرو ∇ که به صورت زیر تعریف می کنیم: ∇ دلتا بلاس

$$\nabla^0 f_i = f_i$$

$$\nabla f_i = f_i - f_{i-1} \quad \nabla^{k+1} f_i = \nabla^k f_i - \nabla^k f_{i-1}$$

x_i	f_i	∇f_i	$\nabla^2 f_i$	$\nabla^3 f_i$
x_0	f_0			
x_1	f_1	∇f_1	$\nabla^2 f_1$	$\nabla^3 f_1$
x_2	f_2	∇f_2	$\nabla^2 f_2$	
x_3	f_3	∇f_3		

فرض کنید جمله ای درون باب بر حسب تفاضلات پسرو: x برای تعیین مقدار f_x وقتی x نزدیک به نقاط انتهایی جدول است، لازم است که از تفاضلات پسرو به بر حسب مقادیر تابع در نقاط انتهایی جدول بیان می شود استفاده کنیم. چند جمله ای درون باب f در نقاط مساوی الفاصدی x_n تا x_{n+k} و $x = x_n + \theta h$ به صورت زیر تعریف می شود.

$$P(x) = f_n + \theta \nabla f_n + \frac{\theta(\theta+1)}{2!} \nabla^2 f_n + \dots + \frac{\theta(\theta+1)(\theta+2)\dots(\theta+n-1)}{n!} \nabla^n f_n$$

که فرض اول بالا را تفاضلات پسرو نیوتون می نامیم.

مثال: جدول تفاضلات منتهی مربوط به تابع جدولی زیر را بدست آورده و چند جمله ای درون یاب آن را با استفاده از تفاضلات بیسرو محاسبه نمایید

x_i	-1	0	1	2
f_i	0	-1	2	9

x_i	f_i	∇f_i	$\nabla^2 f_i$	$\nabla^3 f_i$
$x_0 = -1$	0	$\nabla f_0 = -1$	$\nabla^2 f_0 = 2$	$\nabla^3 f_0 = 0$
$x_1 = 0$	-1	$\nabla f_1 = 1$	$\nabla^2 f_1 = 2$	$\nabla^3 f_1 = 0$
$x_2 = 1$	2	$\nabla f_2 = 3$	$\nabla^2 f_2 = 2$	$\nabla^3 f_2 = 0$
$x_3 = 2$	9			

$n=3$

نکته: در تفاضلات بیسرو n در f_n به n جدول بندی دارد و برابر آن است.

$$P(x) = f_n + \theta \nabla f_n + \frac{\theta(\theta+1)}{2!} \nabla^2 f_n + \frac{\theta(\theta+1)(\theta+2)}{3!} \nabla^3 f_n \quad \rightarrow n=3$$

$$\rightarrow P(x) = 9 + \theta(3) + \frac{\theta(\theta+1)}{2!} (2) + 0 = 9\theta + 2\theta^2 + 9$$

$$x = x_n + \theta h \rightarrow x = x_3 + \theta(1) \rightarrow x - 2 = \theta$$

$$\Rightarrow 2(x-2)^2 + 9(x-2) + 9 \rightarrow \boxed{P(x) = 2x^2 + x - 1} \quad \checkmark$$

* انستراال گیری عددی:

برای محاسبه انستراال $\int_a^b f(x) dx$ فرمات تابع اولیهی f موجود نباشد و

یا f را بصورت تابع جدولی داده شده باشد، از انستراال گیری عددی استفاده

می شود.

فرض کنیم $[a, b]$ را به n قسمت مساوی بصورت زیر تقسیم کنیم:

$$[x_i, x_{i+1}] \quad i = 0, 1, \dots, n$$

$$x_{i+1} - x_i = h \quad h = \frac{b-a}{n}$$

* قاعده ذوزنقه‌ای (از روش های اشتراک‌گیری):

در $[x_i, x_{i+1}]$ تقریب زیر را به کار می‌بریم:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \approx \frac{h}{2} [f_i + f_{i+1}]$$

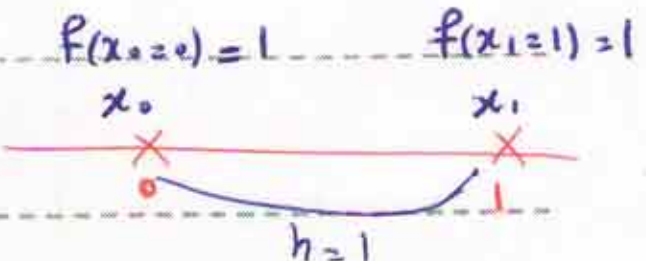
رابطه‌ی بالا مساحت ذوزنقه‌ای به قاعده‌های f_i و f_{i+1} و ارتفاع h می‌باشد.

$$\int_a^b f(x) dx \approx T(h) = \frac{h}{2} [f_0 + 2f_1 + \dots + 2f_{n-1} + f_n]$$

T نماد قاعده‌ی ذوزنقه‌ای
فاصله‌ی بازه
فرض اول قاعده‌ی ذوزنقه‌ای


مثال تقریبی از $\int_0^1 x^2 dx$ را به روش ذوزنقه‌ای به ازای $h=1$ و $h=\frac{1}{2}$ و $h=\frac{1}{4}$ محاسبه کنید.

الف) $h=1 \rightarrow h = \frac{b-a}{n} \rightarrow 1 = \frac{1-0}{n} \rightarrow \boxed{n=1}$



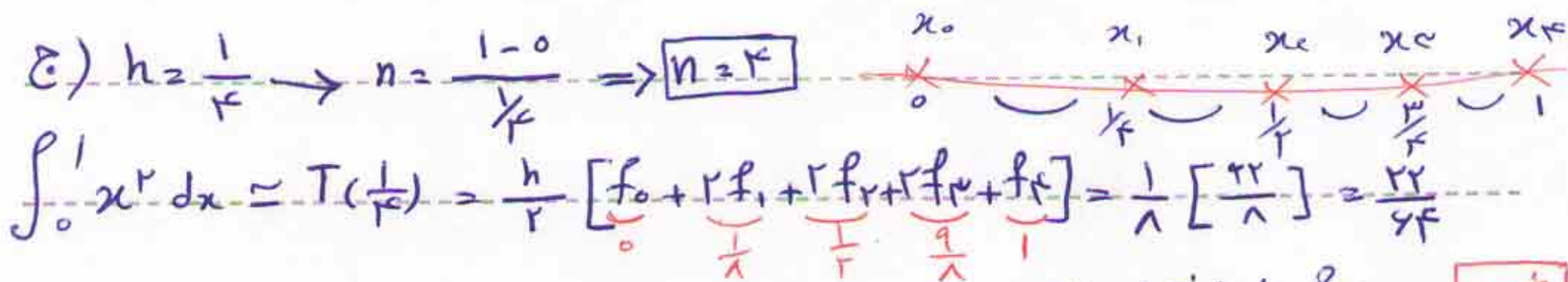
$$\int_0^1 x^2 dx \approx T(1) = \frac{h}{2} [f_0 + f_1] = \frac{1}{2} [0 + 1] = \frac{1}{2}$$

ب) $h = \frac{1}{2} \rightarrow n = \frac{1-0}{\frac{1}{2}} \Rightarrow \boxed{n=2}$



$$\int_0^1 x^2 dx \approx T\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{h}{2} [f_0 + 2f_1 + f_2] = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{4} + 1\right] = \frac{5}{8}$$

ج) $h = \frac{1}{4} \rightarrow n = \frac{1-0}{\frac{1}{4}} \Rightarrow \boxed{n=4}$



$$\int_0^1 x^2 dx \approx T\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{h}{3} [f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + f_4] = \frac{1}{12} \left[\frac{0}{1} + 4\left(\frac{1}{16}\right) + 2\left(\frac{1}{4}\right) + 4\left(\frac{9}{16}\right) + 1 \right] = \frac{1}{12} \left[\frac{22}{1} \right] = \frac{22}{12}$$

مثالی: به روش ذوزنقه ای

تقریب انتگرال $\int_0^1 f(x) dx$ را با استفاده از جدول مقادیر زیر بدست آورید:

x_i	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	$x_5 \rightarrow \boxed{n=5}$
	0	1/2	1/4	3/4	1/8	1
f_i	1	1,2214	1,4918	1,8221	2,2255	2,7183

$\rightarrow h = 1/2, n = 5$



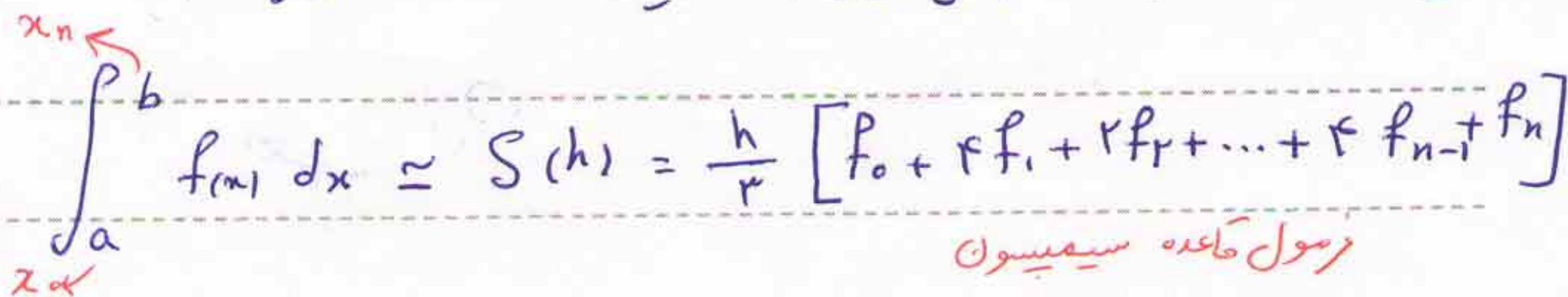
$$\int_0^1 f(x) dx \approx T(1/2) = \frac{h}{8} [f_0 + 3(f_1 + f_2 + f_3 + f_4) + f_5] = 1,172$$

ABADANOMRAN

* قاعده سیه پسون:

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x) dx \approx \frac{h}{3} [f_i + 4f_{i+1} + f_{i+2}]$$

این قاعده فقط برای n زوج برقرار است. یعنی تعداد نقاط فرد باشد.



$$\int_a^b f(x) dx \approx S(h) = \frac{h}{8} [f_0 + 3f_1 + 3f_{n-1} + f_n]$$

رمول قاعده سیه پسون

تقریب از $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \, dx$ را با استفاده از قاعده سیمنسون و به ازای $\frac{\pi}{4}$ محاسبه کنید:

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{\frac{\pi}{4} - 0}{4} \Rightarrow h = \frac{\pi}{16}$$

$x_0 = 0$ $x_1 = \frac{\pi}{4}$ $x_2 = \frac{\pi}{4}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \, dx \approx S\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{h}{3} [f_0 + 4f_1 + f_2] = \frac{\pi}{12} [1 + 4\sqrt{2} + 1]$$

$$h = \frac{\pi}{8} \rightarrow n = \frac{\frac{\pi}{4} - 0}{\frac{\pi}{8}} \Rightarrow n = 2$$

$x_0 = 0$ $x_1 = \frac{\pi}{8}$ $x_2 = \frac{\pi}{4}$ $x_3 = \frac{\pi}{4}$ $x_4 = \frac{3\pi}{8}$ $x_5 = \frac{\pi}{2}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \, dx \approx S\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{h}{3} [f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + f_4]$$

$$= \frac{\pi}{24} [0 + 4(\cdot) + 2(\cdot) + 4(\cdot) + 1] = 0,32\pi$$

* قاعده‌ی نقطه‌ی میانی:

این قاعده برای جی سمی استرال‌های که در نقاط ابتدایی و انتهایی بازه تعریف شده اند.

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \approx h f\left(x_i + \frac{h}{2}\right) \quad \text{برای بازه‌ی زیر بازه}$$

فرمول قاعده‌ی نقطه‌ی میانی

$$\int_a^b f(x) dx \approx M(h) = h \left[f\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) + f\left(x_1 + \frac{h}{2}\right) + \dots + f\left(x_{n-1} + \frac{h}{2}\right) \right]$$

برای بازه‌ی a تا b می‌باید:

مثال: تقریب از استرال از 0 تا 1 با $h = \frac{1}{2}$ و $\frac{1}{4}$ حساب کنید؟

$$h = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1-0}{n} \Rightarrow n = 2$$



$$\int_0^1 x^2 dx \approx M\left(\frac{1}{2}\right) = h \left[f\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) + f\left(x_1 + \frac{h}{2}\right) \right] = \frac{1}{2} \left[f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right) \right]$$

$$f(x) = x^2 \rightarrow f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{16} \text{ و } f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{9}{16}$$

$$\Rightarrow M\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{16} + \frac{9}{16} \right] = \frac{5}{16}$$

$$h = \frac{1}{4} \rightarrow \frac{1}{4} = \frac{1-0}{n} \Rightarrow n = 4$$



$$\int_0^1 x^2 dx \approx M\left(\frac{1}{4}\right) = h \left[f\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) + f\left(x_1 + \frac{h}{2}\right) + f\left(x_2 + \frac{h}{2}\right) + f\left(x_3 + \frac{h}{2}\right) \right]$$

$$f(x) = x^2 \rightarrow f\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{64}, f\left(\frac{3}{8}\right) = \frac{9}{64}, f\left(\frac{5}{8}\right) = \frac{25}{64}, f\left(\frac{7}{8}\right) = \frac{49}{64}$$

$$\Rightarrow M\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{64} + \frac{9}{64} + \frac{25}{64} + \frac{49}{64} \right] = \frac{1}{4} \times \frac{84}{64} = \frac{21}{64}$$

* قاعده‌ی دو نقطه‌ای گاوس:

فرمول‌های قاعده‌ی گاوس برای فاصله‌ی [1 و -1] بدست می‌آید، با استفاده از تغییر متغیر زیر بازه‌های [a و b] را به سادگی می‌توان به بازه [1 و -1] تبدیل کرد.

$$x = \frac{1}{2} [(b-a)u + (b+a)] \quad dx = \frac{b-a}{2} du$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{-1}^1 g(u) du$$

$$g(u) = f\left[\frac{1}{2}(b-a)u + (b+a)\right]$$

فرمول دو نقطه‌ای گاوس عبارت است از:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

با استفاده از فرمول دو نقطه‌ای گاوس بدست آورید: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ مثال

$$\left[0 \text{ و } \frac{\pi}{2}\right]$$

$$x = \frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{2}u + \frac{\pi}{2}\right] = \frac{\pi}{4}(u+1) \rightarrow dx = \frac{\pi}{4} du$$

$$\frac{\pi}{4} \int_{-1}^1 \sin\left(\frac{\pi}{4}(u+1)\right) du = \frac{\pi}{4} \left[\sin\left[\frac{\pi}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{3} + 1\right)\right] + \sin\left[\frac{\pi}{4}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3} + 1\right)\right] \right]$$

$$= 0.99841$$

روش‌های حل عددی معادلات دیفرانسیل معمولی:

در این فصل حل عددی دستگاه زیر را بررسی می‌کنیم: $y' = f(x, y)$ $y(x_0) = y_0$

که در آن $f(x, y)$ یک تابع در متغیره و مفروضی است و x_0 و y_0 دو عدد معلوم

می‌باشند.

* روش اول : روش سبب تیلور :

الگوریتم روش تیلور از مرتبه k :

برای پیدا کردن جواب تقریبی معادله دیفرانسیل مرتبه اول $y' = f(x, y)$ در $[a, b]$ با $y(x_0) = y_0$

به ترتیب زیر عمل می کنیم .

فاصله $[a, b]$ را به n قسمت مساوی به طول $h = \frac{b-a}{n}$ تقسیم کرده و فرآیند را

$$x_0 = a, x_n = b \rightarrow x_i = x_0 + ih \rightarrow y(x_i) = y(a + ih)$$

با داشتن y_i ، $y(x_{i+1})$ را به تقریب از y_{i+1} می باشد را با استفاده از فرمول زیر مطابق

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) + \frac{h^2}{2!} f'(x_i, y_i) + \frac{h^3}{3!} f''(x_i, y_i) + \dots + \frac{h^k}{k!} f^{(k-1)}(x_i, y_i) \quad i = 0, \dots, n-1$$

مثال با استفاده از سبب تیلور مرتبه چهارم مقدار $y(1/5)$ را محاسبه کرده و به شرط

آن که داشته باشیم $h = 1/7$ و $y' = x + y$ ، $y(0) = 1$

$$x_i = x_0 + ih \rightarrow x_i = 1/7 i$$

$$i = 0 \rightarrow x_0 = 0$$

$$i = 1 \rightarrow x_1 = 1/7$$

$$i = 2 \rightarrow x_2 = 2/7$$

$$i = 3 \rightarrow x_3 = 3/7$$

$$i = 4 \rightarrow x_4 = 4/7$$

$$i = 5 \rightarrow x_5 = 1/5$$

$$y(1/5 = x_5) = y_5$$

معمولاً $f(x, y) = x + y$

$$f'(x, y) = 1 + y' = 1 + x + y$$

$$f''(x, y) = 1 + y' = 1 + x + y$$

$$f^{(3)}(x, y) = 1 + y' = 1 + x + y$$

Subject : حساب عددی

Year: 90 Month: 2 Date: 25



$$i=0 \rightarrow y_1 = y_0 + h(f(x_0, y_0)) + \frac{h^2}{2!} f'(x_0, y_0) + \frac{h^3}{3!} f''(x_0, y_0) + \frac{h^4}{4!} f^{(4)}(x_0, y_0)$$

$$\Rightarrow y_1 = 1 + 2(1) + \frac{(2)^2}{2!} (2) + \frac{(2)^3}{3!} (2) + \frac{(2)^4}{4!} (2) = 1, 11$$

$$i=1 \rightarrow y_2 = y_1 + h(f(x_1, y_1)) + \frac{h^2}{2!} f'(x_1, y_1) + \frac{h^3}{3!} f''(x_1, y_1) + \frac{h^4}{4!} f^{(4)}(x_1, y_1)$$

$$\Rightarrow y_2 = 1, 11 + 2(1, 22) + \left[\frac{(2)^2}{2!} + \frac{(2)^3}{3!} + \frac{(2)^4}{4!} \right] (2, 22) = 1, 24$$

$$i=2 \rightarrow y_3 = 1, 24 + 2(1, 44) + [0, 14 \times 10^{-2}] (2, 44) = 1, 29$$

$$i=3 \rightarrow y_4 = 1, 29 + 2(1, 79) + [0, 14 \times 10^{-2}] (2, 79) = 1, 34$$

$$i=4 \rightarrow y_5 = 1, 34 + 2(1, 68) + [0, 14 \times 10^{-2}] (2, 68) = 1, 38$$

$$y(x_5 = x_0) = y_5 = 1, 38$$

① الگوریتم تیلور از مرتبه K (جایزه قبول)

② روش اولیتر:

اگر در الگوریتم تیلور قرار دهید $K=1$ ، فرمول زیر محاسبه می شود:

که فرمول روش اولیتر می نامیم \leftarrow $y_{i+1} = y_i + h f(x_i, y_i)$

مثال تقریبی از $y(1.5)$ را برای معادله ی زیر به روش اولیتر با ازای $h=0.1$ محاسبه

کنید؟ $x_i = x_0 + ih \rightarrow x_i = (i) \cdot 0.1$
 $x_0 = 0 \rightarrow x_1 = 0.1 \rightarrow x_2 = 0.2$
 $x_3 = 0.3 \rightarrow x_4 = 0.4$ $x_5 = 0.5$

$y_{i+1} = y_i + h f(x_i, y_i) = y_i + 0.1 x_i + 0.1 y_i = 0.1 x_i + 1.1 y_i$

$i=0 \rightarrow y_1 = 0.1 x_0 + 1.1 y_0 = 1.1$

$i=1 \rightarrow y_2 = 0.1 x_1 + 1.1 y_1 = 0.1 + 1.21 = 1.31$

$i=2 \rightarrow y_3 = 0.1 x_2 + 1.1 y_2 = 0.2 + 1.342 = 1.542$

$i=3 \rightarrow y_4 = 0.1 x_3 + 1.1 y_3 = 0.3 + 1.6964 = 1.9964$

$i=4 \rightarrow y_5 = 0.1 x_4 + 1.1 y_4 = 0.4 + 2.19604 = 2.59604$ $y(1.5) = y(x_5) = 2.59604$

جواب نهایی

③ روش رونگه-کوتا:

- روش رونگه-کوتا در تیردهم: با داشتن « h » و « $x_i = x_0 + ih$ » فرمول روش را

صورت زیر بیان می کنیم: $K_1 = h f(x_i, y_i)$

$K_2 = h f(\underbrace{x_i + h}_x, \underbrace{y_i + K_1}_y)$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{p} (k_1 + k_2)$$

مثال: تقریبی از $y(0.2)$ بدست آورید. $y' = x + y$ با شرط $y(0) = 1$

$$\begin{cases} y' = x + y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

از روش رونده کوئی فریبی دوم استفاده کنید و قراردادید $h = 0.1$

$$f(x_i, y_i) = x_i + y_i$$

$$x_i = x_0 + ih \rightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = 0.1 \\ x_2 = 0.2 \end{cases}$$

$$k_1 = 0.1 (x_i + y_i)$$

$$k_2 = 0.1 f(x_i + 0.1, y_i + k_1)$$

$$y(0.2 = x_2) = y_2 = ?$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{p} (k_1 + k_2)$$

$$i=0 \Rightarrow k_1 = 0.1 (x_0 + y_0) = 0.1$$

$$k_2 = 0.1 f(x_0 + 0.1, y_0 + k_1) = 0.1 f(0.1, 1.1) = 0.12$$

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{p} (k_1 + k_2) = 1 + 0.11 = 1.11$$

$$i=1 \Rightarrow k_1 = 0.1 (x_1 + y_1) = 0.121$$

$$k_2 = 0.1 f(x_1 + 0.1, y_1 + k_1) = 0.1 f(0.2, 1.231) = 0.1431$$

$$y_2 = y_1 + \frac{1}{p} (k_1 + k_2) = 1.11 + \frac{1}{p} (0.121 + 0.1431) = 1.2425$$

روش رونده کوئی مرتبه چهارم:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{p} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = h f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = h f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2})$$

$$k_3 = h f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2})$$

$$k_4 = h f(x_i + h, y_i + k_3)$$

مثال تقریب از $y(1)$ برای معادله دیفرانسیل و شرایط اولیه

$$\begin{cases} y' = x + y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$h = 0.1$ با استفاده از روش رونگه کومای و پسی چهارم

محاسبه کنید؟

$$x_i = x_0 + ih \rightarrow x_1 = 0.1 \rightarrow x_0 = 0$$

$x_1 = 0.1 \rightarrow y(x_1 = 0.1) = y_1 = ?$

$i = 0 \rightarrow$

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6} (k_1 + 4k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$= 1 + \frac{1}{6} (0.1 + 4(0.11) + 2(0.1105) + 0.12105) = 1.11034$$

$$k_1 = 0.1 f(x_0, y_0) = 0.1 (0 + 1) = 0.1$$

$$k_2 = 0.1 f(x_0 + \frac{0.1}{2}, y_0 + \frac{0.1}{2}) = 0.1 f(0.05, 1.05) = 0.11$$

$$k_3 = 0.1 f(x_0 + \frac{0.1}{2}, y_0 + \frac{0.11}{2}) = 0.1 f(0.05, 1.055) = 0.1105$$

$$k_4 = 0.1 f(x_0 + 0.1, y_0 + 0.1105) = 0.1 f(0.1, 1.1105) = 0.12105$$

تمرین به روش اولر تقریب از جواب را برای $y(2)$ به ازای $h = 0.5$ برای معادله دیفرانسیل زیر محاسبه کنید؟

$$y' = 1 - \frac{y}{x} \quad \text{و} \quad y(1) = 2$$

تمرین فرض کنید $y' = 1 - y$ و $y(0) = 0$ و $h = 0.5$ ، تقریب از $y(1.05)$ را به روش رونگه کومای در سه قدم بدست آورید؟

تمرین فرض کنید $y' = 1 - y^2$ و $y(0) = 0$ و $h = 0.1$ تقریب از $y(1)$ را به روش رونگه کومای در سه قدم بدست آورید؟