« روش‌های محاسبات عددی »

فصل اول: خطاها و تقریب‌ها

فصل دوم: حل معادلات غیر خطی

فصل سوم: درون یابی

فصل چهارم: مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری عددی

فصل پنجم: معادلات دیفرانسیل عددی معمولی

فصل ششم: حل عددی دستگاه معادلات خطی

فصل هفتم: مقادیر و بردارهای ویژه

فصل هشتم: برازش منحنی

فصل اول : خطاها و تقریب‌ها

۱- خطای مطلق و نسبی

۲- قطع

۳- پارامترهای عددی

۴- خطای شمارش (گرد کردن)

۵- خطای محاسبات

نمایش اعداد

بسط یک عدد در مبنای r :

$$a_m \times r^m + a_{m-1} \times r^m + \ldots$$
$$a_m \neq 0$$
$$m \in \mathbb{Z}$$
$$r \in \mathbb{Z} \qquad 2 \leq r \leq 10$$

بسط مختوم $(62/544)_{10} = 6\times10^1 + 2\times10^0 + 5\times10^{-1} + 4\times10^{-2} + 4\times10^{-4}$

بسط نامتناهی و تکراری

$$(0/0\overline{101})_2 = 1\times2^{-2} + 0\times2^{-3} + 1\times2^{-4} + 1\times2^{-5} + \ldots = (?)_{10}$$
$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = \frac{8+2+1}{32} = \frac{11}{32}$$

قضیه: هر عدد حقیقی یک نمایش منحصر به فرد بسط در مبنای r، $2 \leq r \leq 10$ دارد. بسط منحصر به فرد است مگر اینکه سمت راست عدد بی نهایت (r-۱) داشته باشد! هر گرد کردنی دلیل بر این نمی‌شود که ۲ بسط داشته باشد.

$$A = 1/29999... = 1/2\overline{9} = 1\times10^{0} + 2\times10^{-1} + 9\times10^{-2} + 9\times10^{-3}$$

تصاعد عددی $S \quad a_0 + (1-a_0)d$

$$a_0, (a_0+m), (a_0+2m) = 1 + 0/2 + 9(10^{-2} + 10^{-4} + ...) = 1/2 + \frac{0/09}{0/9} = 1/3 = 1\times10^{0} + 30$$

هندسی $\begin{cases} a_0 + a_0q + a_0q^2 + a_0q^3 + ... \sum \text{Sum} \dfrac{a_0}{1-q} \\ \text{if} \quad |q| < 1 \end{cases}$

قضیه: اگر بسط عدد A ، مختوم یا نامختوم متناوب باشد، بسط مربوط به یک عدد گویاست.

عکس قضیه نیز برقرار است.

بسط یک عدد در مبنای ۲ :

$$\begin{array}{llllll} 56\,\underline{|2} & & & & & \\ & 28\,\underline{|2} & & & & \\ \overline{0} & & 14\,\underline{|2} & & & \\ & \overline{0} & & 7\,\underline{|2} & & \\ & & \overline{0} & & 3\,\underline{|2} & \\ & & & \overline{1} & & 1 \\ & & & & \overline{1} & \end{array} \qquad (56)_{10} = (111000)_2$$

$C_i = 0$ یا $1 \qquad C_1, C_2, ...? \qquad A = [0/C_1C_2C_3...]_2 = (C_1\times2^{-1} + C_2\times2^{-2} + C_3\times2^{-3} + ...)$

$2A = (C_1 + \underbrace{C_2\times2^{-1} + C_3\times2^{-2} + ...}_{0\le x<1})$ سری هندسی $\qquad [2A] = [C_1 + x] = C_1 \qquad 0 < x < 1$

$A \longleftarrow 2A - C_1$

(اگر همه اعداد ۱ باشد، ۱ می‌شود) و روش را تکرار می‌کنیم

الگوریتم:

۱- A و n را بگیر (n تعداد تکرارها)

۲- $[۲A] \longrightarrow C_i$

۳- $۲A - C_i \longrightarrow A$

۴- $i + ۱ \longrightarrow i$ ، اگر $i < n$ برو به ۲ در غیر این صورت توقف کن.

بسط عدد $\frac{9}{10}$ در مبنای ۲ کدام است؟

الف) $0/1\overline{1001}$

ب) $0/0\overline{1001}$

ج) $0/1\overline{1100}$ ✓

د) $0/\overline{0011}$

i	A	2A	C=[2A]	$A \leftarrow 2A - C_1$
1	0/9	1/8	$C_1 = 1$	0/8
2	0/8	1/6	$C_2 = 1$	0/6
3	0/6	1/2	$C_3 = 1$	0/2
4	0/2	0/4	0	0/4
5	0/4	0/8	0	0/8

حالت ۱ : $A = 0$ ⟵ بسط مختوم

حالت ۲ : A تکرار شود ⟵ بسط متناوب

حالت۳ : $i = n$ ⟵ چیزی نمی‌توان گفت ، n را می دهند.

بسط $\frac{1}{5}$ در مبنای ۲ ؟

نمایش عدد A در مبنای ۲ عبارت است از $A = 0/0\overline{101}$ نمایش A در مبنای ۱۰ کدام است؟

الف) $\frac{3}{16}$

ب) $\frac{5}{8}$

ج) $\frac{5}{16}$

✓ د) $\frac{1}{3}$

$$A = 0/0\overline{101} = 0/01010101\ldots = 0\times 2^{-1} + 1\times 2^{-2} + 0\times 2^{-3} + 1\times 2^{-4} + \ldots =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

ضرایب دو جمله‌ای

خطای مطلق و نسبی:

اگر a تقریبی از A باشد، آنگاه خطای a را با e(a) نشان می‌دهند: $e(a) = A - a$

E(a) که به صورت زیر تعریف می‌شود، خطای مطلق a نامیده می‌شود: $E(a) = |e(a)| = |A - a|$

و خطای مطلق حدی a را با e(a) نمایش می دهیم که: $|A - a| \le e_a$

مثال: اگر ۳/۱۴ تقریبی از عدد π باشد، خطای مطلق حدی a = ۳/۱۴ را پیدا کنید. π = ۳/۱۴۱۵

$$3/14 < \pi < 3/15 \quad \rightarrow \quad |\pi - 3/15| < 0/01 \quad e_a = 0/01$$

$$\Rightarrow \quad e_a = 0/01$$

$$3/14 < \pi < 3/1416 \quad \rightarrow \quad |\pi - 3/14| < 0/0016 \quad e_a = 0/0016$$

خطای مطلق حدی $2 \pm 0/5$

$$\begin{cases} 2/5 \pm 0/5 \\ 94262 \pm 0/5 \end{cases}$$

مقدار دوم خطای بهتری است $\Leftarrow$ خطای نسبی مقدار کمتری به‌دست می‌آید.

تعریف: اگر a تقریبی از A باشد، آنگاه خطای نسبی a به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\delta(a) = \frac{|A-a|}{|A|} = \frac{E(a)}{|A|}$$

با خطای نسبی امکان مقایسه خطاها فراهم می‌گردد.

اگر $\frac{|A-a|}{|A|} \le \delta(a)$ ، $\delta(a)$ را خطای نسبی حدی می‌گویند.

$$|a| - |A| \le |A-a| \le e_a \qquad (۱)$$

$$|A| \ge |a| - e_a \qquad (۲)$$

خطا نمی‌تواند از مقدار واقعی بزرگتر باشد

$$(۲) \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{|A|} \le \frac{1}{|a|-e_a} \qquad (۳)$$

(۱) و (۳) $\Longrightarrow \quad \delta(a) = \frac{|A-a|}{|A|} \le \frac{e_a}{|a|-e_a}$

قضیه: $\delta(a) \le \frac{e_a}{|a|-e_a}$

توجه: معمولاً از e_a در مقابل $|a|$ صرف‌نظر می‌شود: $\delta(a) \le \quad \delta(a) = \frac{e_a}{|a|}$

کران بالای خطای نسبی

مثال: در تعیین ثابت گازها برای هوا عدد $R \approx$ ۲۹/۲۵ به‌دست آمده است. با دانستن این‌که خطای نسبی این مقدار ۰/۰۰۱ می‌باشد، حدود R را به‌دست آورید.

$$\delta(a) \approx \quad \delta(a) \approx \frac{e_a}{|a|} = 0/001$$

$$e_a = |R - 29/25| \quad \Rightarrow \quad \frac{|R - 29/25|}{29/25} = 0/001 \quad \Rightarrow \quad |R - 29/25| \approx 0/03$$

$R = 29/25 \pm 0/03$ اختلاف مقدار واقعی با مقدار تقریبی

بسط تیلور $f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x + \frac{f''(x)(\Delta x)^2}{2} + \dots$

$$54/26 = 5/426 \times 10^1$$
$$0/00026 = 2/6 \times 10^{-4}$$

ارقام با معنی: نماد علمی یک عدد اعشاری به صورت زیر است:

$$A = a \times 10^b$$

$$1 \le a < 10$$

ارقام با معنی شامل: ۱- ارقام غیر صفر،۲- ارقام صفر بین دو رقم غیر صفر، ۳- صفرهای جلوی عدد

ارقام با معنی با تعداد ارقام نماد علمی برابر است.

انتخاب تقریبی از یک عدد معلوم:

$2/5653$

۲ رقم اعشار گرد $\Longrightarrow \; 2/57$

روش قطع کردن $\Longrightarrow \; 2/56$

تا تعداد رقم خواسته شده نوشته می‌شود و سایر ارقام در نظر گرفته نمی‌شوند.

گرد شده تا دو رقم اعشار $2/5653 = 2/57 \quad (2D)$

گرد شده تا چهار رقم معنادار $2/5653 = 2/565 \quad (4S)$

$$2/5656 = 2/566 \quad (4S)$$

قضیه: اگر a گرد شده عدد A تا n رقم اعشار باشد، آنگاه:

$$e(a) = |a - A| \le 5 \times 10^{-(n+1)}$$

ارقام با معنی درست یک تقریب:

فرض کنید a تقریبی از A باشد و d تعداد ارقام با معنی a باشد.

تعداد ارقام با معنای درست a ، بزرگترین n که $n \le d$ و در رابطه‌ی * صدق کند.

بسط اعشاری عدد $a = a_m \times 10^m + a_{m-1} \times 10^{m-1} + \ldots$

$$* \quad |a - A| < 5 \times 10^{m-n}$$

مثال: فرض کنید ۲/۲۴۲ تقریبی از ۲/۳۱۴۵ باشد، تعداد ارقام با معنای درست a=۲/۲۴۲ را به‌دست آورید.

$$a = 2 \times 10^0 + 2 \times 10^{-1} + \ldots \qquad m = 0 \qquad d = 4$$

$$|2/3145 - 2/242| < 5 \times 10^{0-n}$$

$$0/0725 < 5 \times 10^{-n} = 0/5$$

n = ۱ ، تعداد ارقام با معنای درست

قضیه: اگر a ، گردشده A تا n رقم با معنا باشد، آنگاه تعداد ارقام با معنای درست a ، برابر n است.

قضیه: اگر a ، دارای n رقم با معنای درست باشد آنگاه داریم:

$$\delta(a) \le 5 \times 10^{-n}$$

اگر بخواهیم تقریبی از A با خطای نسبی کمتر از 10^{-n} به دست آوریم، آن را تا $10^{-(n+1)}$ گرد می‌کنیم.

پس کافیست A تا (n+1) رقم با معنا گرد شود.

$$\delta(a) < 5\times10^{-(n+1)} < 10^{-n} = 10\times10^{-(n+1)}$$

مثال: تقریبی از A به‌دست آورید که خطای نسبی آن از ۱۰^{-n} کمتر باشد.

$$A = 2/42539$$

$$\delta(a) < 10^{-4} \qquad a = 2/4254$$

خطای حاصل جمع

مقدار واقعی $A_1 \quad A_2 \; \dots \; A_n$

مقدار تقریبی $a_1 \quad a_2 \; \dots \; a_n$

خطای مطلق $e(a_1) \quad e(a_2) \; \dots \; e(a_n)$

$$E(a) = |e(a)| = |A - a| \le \underbrace{|e(a_1)| + |e(a_2)| + \dots + |e(a_n)|}_{\sum |e(a_i)|}$$

خطای مجموع کوچکتر مساوی از مجموع خطاهاست.

$$A = A_1 + A_2 + \dots + A_n \qquad A = \sum A_i$$

$$a = a_1 + a_2 + \dots + a_n \qquad a = \sum a_i$$

$$E(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \le \underbrace{E(a_1) + E(a_2) + \dots + E(a_n)}_{\sum E(a_i)}$$

خطای حاصل‌ضرب

$$A = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \qquad A = \prod A_i$$

$$a = a_1 \times \ a_2 \times \ \ldots \ \times a_n \qquad a = \prod a_i$$

$$E(a) = |e(a)| = |A - a| \le \max\{E(a_i)\}$$

$$E(a) \le \max\{E(a_i)\}$$

خطای نسبی حاصل جمع: مثل خطای مطلق حاصل‌ضرب

مقدار واقعی $A_1 \quad A_2 \ \ldots \ A_n$

مقدار تقریبی $a_1 \quad a_2 \ \ldots \ a_n$

خطای نسبی $\delta(a_1) \quad \delta(a_2) \ \ldots \ \delta(a_n)$

$$\left.\begin{array}{l} A = A_1 + A_2 \\ \\ a = a_1 + a_2 \end{array}\right\} \quad \delta(a_1 + a_2) \le \max\{\delta(a_1), \delta(a_2)\}$$

$$\delta(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \le \max\{\delta(a_1), \delta(a_2), \delta(a_n)\}$$

$$E(a_1 + \ a_2 + \ \ldots \ + a_n) \le E(a_1) + E(a_2) \ + \ \ldots \ + \ E(a_n)$$

مطابق فرمول اصلی $E(a_1 \, . \ a_2) \le \ a_1 E(a_2) + a_2 E(a_1) \ \le \delta(a_1) + \delta(a_2)$

$$\begin{aligned} E(a_1 \, . \ a_2 . \ a_3) &\le \ a_1 a_2 \, E(a_3) + a_3 \ E(a_1 \, a_2) \\ &\le \ a_1 a_2 \, E(a_3) + a_3[a_1 \, E(a_2) + \ a_2 E(a_1)] \\ &\le \ a_1 a_2 \, E(a_3) + a_1 a_3 \, E(a_2) + \ a_2 a_3 E(a_1) \end{aligned}$$

توجه: خطای نسبی حاصل‌ضرب کوچکتر مساوی از مجموع خطاها

$$\delta(a_1 .\ a_2 \dots\ a_n) \leq \delta(a_1) + \delta(a_2) + \dots + \delta(a_n)$$ خطای نسبی

$$\delta(a_1 +\ a_2 + \dots\ a_n) \leq \max\{\delta(a_1), \dots\ \delta(a_n)\}$$ خطای نسبی

تمرین ۱ : خطای نسبی حاصل‌ضرب $u = x_1\ x_2 \dots x_n$ در چه رابطه‌ای صدق می‌کند؟

$$\delta(a_1\ a_2 \dots\ a_n) \leq \sum \delta(a_i)$$

✓ الف) $\delta u \leq \delta x_1 + \delta x_2 + \dots$

ب) $\delta u = |\delta x_1| + |\delta x_2| + \dots$

ج) $\delta u = \delta x_1 + \delta x_2 + \dots \delta x_n$

د) $\delta u = \delta x_1 .\ \delta x_2 .\ \dots\ \delta x_n$

تمرین ۲ : اگر a گردشده A تا n رقم اعشار باشد، در روش گرد کردن داریم:

الف) $|A - a| \leq 5 \times 10^{-(n+1)}$

ب) $|A - a| \leq 5 \times 10^{-n+1}$

✓ ج) $|A - a| \leq 10^{-(n+1)}$

د) $|A-a| \le 10^{-n}$

سری تیلور

$$f(x) \approx a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_k x^k$$

$$f(x) \approx a_0 + a_1(1) + a_2(1) + \ldots + E(1)$$

سری فوریه $\sum a \sin nx + b \cos nx$

فرضیات: f و مشتقات آن تا مرتبه k موجود و پیوسته باشند (حول یک نقطه $x= a$ ، مثلاً در یک بازه (b,c) که $a \in (b,c)$) حد چپ و راست موجود باشد و با هم برابر باشند، پیوستگی و $x \in b,c$ قرار می‌دهیم.

$n \le k$

$$R_n(x) = f(a) + f'(a)\frac{x-a}{2!} + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \ldots + f^n(a)\frac{(x-a)^n}{n!}$$

حکم: برای هر $x \in b,c$ داریم:

$$f(x) = R_n(x) + E_n(x)$$

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\alpha x)}{(n+1)!}(x-a)^{(n+1)}$$

αx بین x و a است

در صورتی که تابعی از درجه n باشد، خطای آن در مرتبه $n+1$ صفر می‌باشد.

اگر حول نقطه $x=0$ بسط تیلور را بنویسیم، بسط را بسط مک لورن گویند.

$$f(x)=e^{x}$$

$$R(x)=f(0)+f'(0)x+f''(0)\frac{(x)^2}{2!}+\dots$$

$f(x)=e^{x} \;\rightarrow\; x=0$ حول نقطه : $R_n(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots+\frac{x^n}{n!}=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$

$$f(x)=\sin x \;\rightarrow\; R_{2n+1}(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}\dots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$f(x)=\cos x \;\rightarrow\; R_{2n+1}(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}\dots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{2n!}=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k x^{2k}}{2k!}$$

تمرین: بسط تیلور توابع زیر را حول نقطه x=0 بنویسید. (تا هر چند جمله که فرضیات قضیه را نقض نکند.)

$$f(x)=\text{arc}\;\;\text{tg}x$$

$$f(x)=\ln(1-x)$$

$$f(x)=\frac{1}{1+x^4}$$

$$f(x)=\begin{cases}x^3\\ \cos x-1\end{cases}$$

خطای بسط تیلور مرتبه n ام :

$$\left|E_n(x)\right|=\left|\frac{f^{(n+1)}(\alpha x)}{(n+1)!}(x-a)^{(n+1)}\right|\le\frac{M}{(n+1)!}\left|x-a\right|^{n+1}$$

کران بالای خط   کران بالا

t بین α و x باشد. $M=\max\left|f^{(n+1)}(t)\right|$

n در فاصله $[0,2]$ $f^{(n+1)}=x+\sin x-2x^2$

$$\Rightarrow\ \left|x+\sin x-2x^2\right|<|x|+|\sin x|+2|x|^2\le 11$$

تابع هدف: بیشترین مقداری که تابع نشان می‌دهد، در نقطه اعلام شده.

ماکزیمم در نقطه x=2 ، ۸ است. $\max\limits_{0\le x\le 2}(x^2+2x)=8$

تمرین: می‌خواهیم $\cos(0/1)$ را با استفاده از سری تیلور حول صفر با $1-\frac{(0/1)^2}{2}$ تقریب بزنیم. کران بالای خطای این تقریب برابر است با:

الف) $\frac{10^{-14}}{12}$

ب) $\frac{10^{-14}}{24}$ ✓

ج) $\frac{10^{-3}}{6}$

د) $\frac{10^{-6}}{24}$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\dots$$

E_2 E_3 بهترین خطا

$$\cos x=1+0x-\frac{x^2}{2!}+0x^3+\frac{x^4}{4!}+0x^5+\dots$$

$$\begin{cases}\left|f(x)-R_3(x)\right|=f(x)=R_n(x)+E_n(x)\\ R_2(x)=R_3(x)\end{cases}$$

$$f(x)=\cos(x) \;\rightarrow\; f'(x)=-\sin(x) \;\rightarrow\; f''(x)=-\cos(x)$$
$$f'''(x)=\sin(x) \;\rightarrow\; f^{(4)}(x)=\cos(x)$$

$$E_2=\frac{f^3(\alpha x)}{3!}(x)^3 \quad , \quad E_3=\frac{f^4(\alpha x)}{4!}(x)^4$$

$$\left|E_3(x)\right|=\left|\frac{f^4(\alpha x)}{4!}(x)^4\right|<\frac{M|x|^4}{4!}$$

$$M=\max_{x\in[0,0/1]}\left|f^4(x)\right|=\max_{x\in[0,0/1]}|\cos x|=1$$

$$\frac{1}{4!}(0/1)^4=\frac{(0/1)^4}{4!}=\frac{10^{-4}}{24}$$

$$\left|\frac{M}{(n+1)!}x^{n+1}\right|<0/001 \qquad \text{یا} \qquad \left|\frac{f^{(n+1)}(\alpha x)}{(n+1)!}x^{n+1}\right|<?$$

این مقدار راداریم

مثال: اگر بخواهیم $e^{0/1}$ را چگونه با بسط تیلور تقریب بزنیم حول نقطه $x=0$ تا چند جمله (مرتبه) از بسط تیلور $e^{0/1}$ را بنویسیم تا خطای آن کمتر از 10^{-3} باشد؟

فصل دوم : حل عددی معادلات غیرخطی

تعیین محل تقریبی و تعداد ریشه‌ها با استفاده از رسم منحنی

مثال ۱ : محل تقریبی ریشه را برای معادله زیر پیدا کنید.

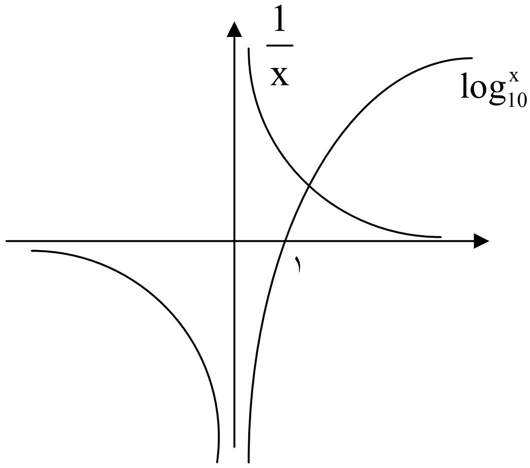
$$x\log_{10}^{x}-1=0$$

$$\log_{10}^{x}=\frac{1}{x}$$

نقاط تقاطع منحنی‌ها ریشه است

$$2=10^{?}\Rightarrow \log_{10}^{2}<\frac{1}{2} \qquad \log_{10}^{3}<\frac{1}{3}$$

$$\log_{10}^{x}=\frac{\mathrm{Ln}x}{\mathrm{Ln}10}$$



ریشه بین ۲ و ۳ است.

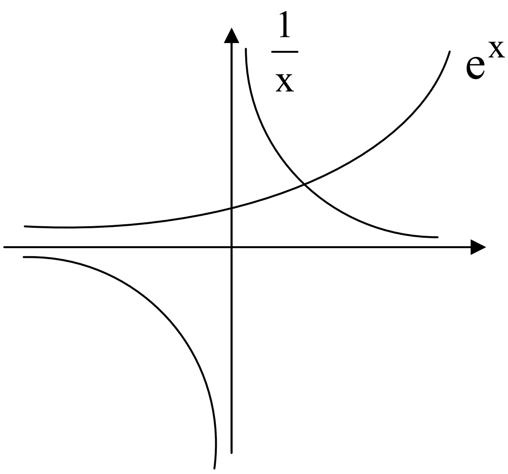
مثال ۲ : معادله $xe^{x}-1$ چند ریشه دارد؟

الف) صفر

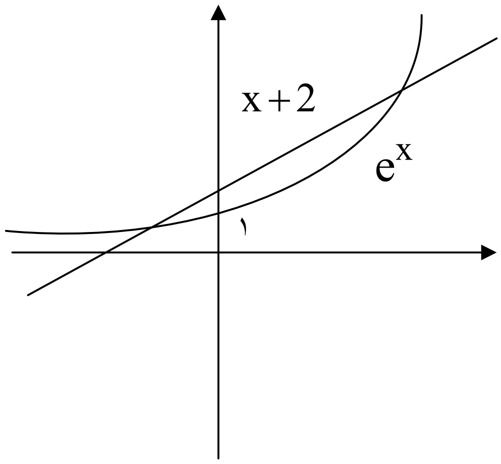
✓ ب) یک

ج) ۳

د) بی نهایت



مثال ۳ : تعداد ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $e^x - x - 2 = 0$ کدام است؟



الف) 0

ب) 1

✓ ج) 2

د) 3

مثال ۴ : معادله $f(x) = x^2 - 3x - e^x = 0$ در فاصله‌ی [1,4] چند ریشه حقیقی دارد؟

الف) 2

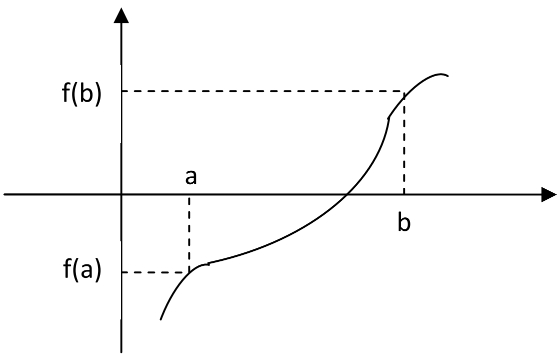
ب) 1

✓ ج) ریشه ندارد

د) اصولاً ریشه‌اش منفی است.

روش تنصیف (دو بخشی) Bisection Method

شرایط:



۱- f در [a,b] پیوسته باشد.

۲- $f(a).f(b)<0$

بنابراین حتماً یک ریشه در a,b دارد.

الگوریتم:

۱- بازه (a,b) که $f(a).f(b)<0$ انتخاب شود. $(N>0)$ در نظر گرفته شود. $i=1$

۲- $x_i = \dfrac{a+b}{2}$

۳- اگر $f(x_i).f(a)<0$ ، $b \leftarrow x_1$ و اگر $f(b).f(x_i)<0$ ، $a \leftarrow x_1$ و اگر $f(x_i)=0$ ، x_i ریشه است، متوقف شوید.

۴- شرط توقف اگر $i<N$ ، $i \leftarrow i+1$ برو به مرحله ۲ و اگر $i \geq N$ ، توقف کن، x_i تقریب ریشه است.

شرط توقف:

۱- $\left|f(x_i)\right| < \varepsilon$

۲- $\left|x_{i-1} - x_i\right| < \varepsilon$

۳- $\dfrac{\left|x_{i-1} - x_i\right|}{\left|x_i\right|} < \varepsilon$

i	a	b	f(a)	f(b)	x_i	$f(x_i)$	مقایسه
1	0	1	2	/1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$f(a).f(x_i)<0 \Rightarrow b \leftarrow x_1 \quad a \leftarrow \frac{1}{4}$
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	/1	$\frac{3}{4}$	$-\frac{7}{16}$	$f(b).f(x_i)<0 \Rightarrow a \leftarrow x_1 \quad b \leftarrow \frac{3}{4}$
3	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{7}{16}$	$\frac{5}{8}$		

ریشه معادله $f(x) = x^2 - 4x + 2 = 0$ در بازه (۱و۰) پیدا کنید.

با روش دوبخشی و سه مرحله

$$\frac{9}{16} - \frac{12}{4} + 2 = \frac{9-48+32}{16} = \frac{-5}{16}$$

$$x_3 = \frac{5}{8}$$

چند مرحله از روش دوبخشی لازم است تا خطای مطلق تقریب ریشه برای معادله‌ی $x + \cos x = 0$ در بازه‌ی (۱و۰) قرار گیرد و $۱۰^{-۲}$ کمتر باشد؟

خطای مطلق = مقدار واقعی – مقدار تقریبی

$$|x_n - \alpha| \le \frac{b-a}{2^n}$$

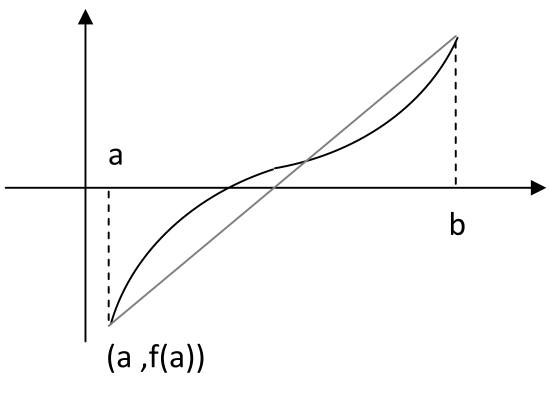
$$E_\alpha = |x_n - \alpha| < 10^{-2} \quad \Rightarrow \quad |x_n - \alpha| < \frac{b-a}{2^n} < 10^{-2}$$

$$\frac{1-0}{2^n} < 10^{-2} \Rightarrow \quad n^2 > 100 \quad \Rightarrow \quad n > 10$$

روش نابجایی

$$x_1 = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$$

سؤال: چرا x_1 با رابطه‌ی فوق تعیین می‌شود؟



فرض: f یک تابع پیوسته در $[a,b]$ و $f(a).f(b)<0$

۱- $i=1$ ، a و b را بگیر. (به شرطی که $f(a).f(b)<0$)

۲- $x_i = \dfrac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}$ اگر شرط توقف برقرار است، x_i تقریبی از ریشه است، توقف کن در غیر این‌صورت به مرحله ۳ برو.

۳- اگر $f(x_i).f(a)<0$ ، $b \leftarrow x_1$

و اگر $f(b).f(x_i)<0$ ، $a \leftarrow x_1$

سپس $i \leftarrow i+1$ و به مرحله ۲ برو.

مثال: ریشه معادله $x^2 - 3x + 1 = 0$ را با روش نابجایی و تا سه مرحله به‌دست آورید.

بازه (۱و۰)

i	a	b	x_i	f(a)	f(b)	$f(x_i)$	مقایسه
1	0	1	$x_1 = \dfrac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)} = \dfrac{1}{2}$	1	/1	$\frac{-1}{4}$	
2	0	$\frac{1}{2}$	$x_2 = \dfrac{-\frac{1}{2}(1)}{-\frac{1}{4}-1} = \dfrac{2}{5}$	1	$\frac{-1}{4}$	$-\frac{1}{25}$	
3	0	$\frac{2}{5}$	$x_3 = \dfrac{-\frac{2}{5}(1)}{-\frac{1}{25}-1} = \dfrac{10}{26}$	1	$-\frac{1}{25}$		

$x_3 = \frac{10}{26}$ تقریب جواب است.

توجه: سرعت همگرایی روش دوبخشی از روش نابجایی کمتر است.

روش تکرار ساده

فرض می کنیم که x_0 نقطه آغازین

$$
\begin{aligned}
x_1 &= g(x_0) \\
x_2 &= g(x_1) \\
&. \\
&. \\
&. \\
x_n &= g(x_{n-1})
\end{aligned}
$$

سؤال:

۱- x_0 چگونه تعیین می‌شود، آیا هر x_0 مناسب است؟

۲- g مناسب چگونه تعیین می‌شود که همگرایی تضمین شود؟

قضیه:

فرضیات:

۱- حتماً f در فاصله (a,b) حداقل یک ریشه دارد.

۲- معادله‌ی $f(x)=0$ به صورت $x=g(x)$ نوشته شود.

۳- تابع g از [a,b] به توی [a,b] تعریف شود.

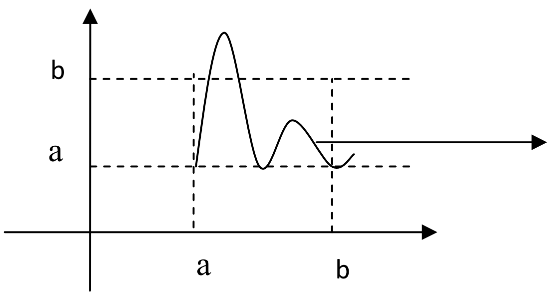
$$x \in [a,b] \to f(x) \in [a,b]$$

۴- برای $x \in (a,b)$ داشته باشیم: $|g'(x)| < 1$

(برای هر g(x) که در بازه پیدا کردیم، مشتقش کوچکتر از یک باشد.)

x_0 را در بازه‌ی a,b تعیین می‌کنیم.

تابع پیوسته ماکزیمم و مینیمم خودش را در فاصله‌ی بسته می‌تواند بگیرد.



شرط ۳ را ندارد

نتایج:

۱- معادله f(x)=0 فقط یک ریشه در (a,b) دارد. ⟵ فرضیه ۳

۲- اگر $x_0 \in [a,b]$ آنگاه دنباله تشکیل شده با روش تکرار ساده $\{x_n\}$

$x_{n+1} = g(x_n)$ به ریشه معادله همگرا می‌شود: $x_n \to a$

بسط تیلور

$$g(x) = g(a) + g'(a)(x-a)$$

بسط تیلور حول x_n:

$$g(x) = g(x_n) + g'(x_n)(x - x_n)$$

$$g(a) = g(x_n) + g'(a_n)(a - x_n)$$

$$a = x_{n+1} + g'(a_n)(a - x_n)$$

$$|a - x_{n+1}| = |g'(a_n)||(a - x_n)|$$

$$|g'(x)| < L < 1 \qquad x \in [a,b]$$

$$n = 0 \quad \Rightarrow \quad |x_1 - a| < L|x_0 - a|$$

$$|x_2 - a| < L|x_1 - a|$$

$$\dots$$

$$|x_{n-1} - a| < L|x_{n-2} - a|$$

$$|x_n - a| < L|x_{n-1} - a|$$

$$|x_n - a| < L(L|x_{n-2} - a|) \quad \rightarrow \quad |x_n - a| < L^2|x_{n-2} - a|$$

$$\dots$$

$$|x_n - a| < L^n|x_0 - a|$$

$$n \to \infty \quad \Rightarrow \quad x_n \to a$$

مثال: برای محاسبه تقریبی تنها ریشه مثبت معادله $x^3 - x^2 - 1 = 0$ که در فاصله‌ی (۱و۰) قرار دارد، این معادله را به صورت $x = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ می‌نویسیم. نشان دهید این انتخاب مناسب‌تر است و تقریبی از این ریشه را به روش تکرار شاده تا ۶ تکرار به‌دست آورید.

$$x^3 - x^2 - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2(x+1) = 1 \quad \rightarrow \quad x^2 = \frac{1}{(x+1)} \quad \rightarrow \quad x = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$$

$f(0) = -1 \quad f(0)f(1) < 0$ یک ریشه در بازه $[0,1]$ داریم

$$x=\frac{1}{\sqrt{x+1}} \quad \Rightarrow \quad g(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}} \qquad g:[0,1]\to[0,1]$$

مرحله اول:

$$0\le x<1$$
$$1\le x+1<2$$
$$\frac{1}{2}\le\frac{1}{x+1}<1$$
$$0<\frac{1}{\sqrt{2}}\le\frac{1}{\sqrt{x+1}}\le 1 \quad \Rightarrow \quad 0\le\frac{1}{\sqrt{x+1}}\le 1$$

هر چه L کوچکتر باشد، همگرایی سریعتر است.

مرحله دوم:

$$g'(x)=\frac{-\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{x+1}=\frac{-1}{2(\sqrt{x+1})(x+1)}$$

$$g'(x)=\left|\frac{1}{2(x+1)(\sqrt{x+1})}\right|\le\frac{1}{2}\le 1 \qquad x\in[0,1]$$

$$g(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}} \qquad x_0=\frac{1}{2}$$

$$x_1=g(x_0)=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}+1}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}}}=\sqrt{\frac{2}{3}}=0/82$$

$$x_2=g(x_1)=\frac{1}{\sqrt{0/82+1}}=\frac{1}{\sqrt{1/82}}=?$$

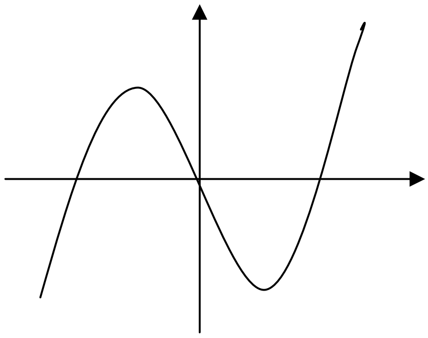
مثال: در روش‌های تکرار ساده برای حل معادله $x^3-2x^2-5=0$ کدام تابع مناسب‌تر است؟ $x\in[2,3]$

الف) $g(x)=\dfrac{\sqrt{x^3-5}}{2}$

ب) $g(x)=\dfrac{5}{x^2-2}$

ج) $g(x)=\dfrac{x^4-2x^3}{5}$

د) $g(x)=\sqrt[3]{5+2x^2}$ ✓



$x^3-2x^2=5$

مشتق

$3x^2-4$

تعریف مرتبه همگرایی دنباله:

فرض کنید دنباله $\{x_n\}$ وقتی $n\to\infty$، به ∞ همگرا شود.

$(\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\alpha)$

آن‌گاه می‌گوییم مرتبه همگرایی دنباله‌ی $\{x_n\}$ برابر $P>0$ است، اگر $C>0$ موجود باشد که:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x_{n+1}-\alpha}{(x_{n-\alpha})^P}\right|=C$$

هرچقدر P بزرگتر باشد، سرعت همگرایی بیشتر است.

تمرین: دلیل هندسی عبارت فوق چیست؟ (چرا)

مرتبه همگرایی روش تکرار ساده

فرض کنید $\{x_n\}$ دنباله‌ی تولید شده با روش تکرار ساده باشد $(x_{n+1} = g(x_n)$ آن‌گاه اگر $g'(\alpha) \neq 0$ (α ریشه معادله) ، روش تکرار ساده از مرتبه همگرایی ۱ است.

وجود دارد β بین x و α

$$\begin{array}{lcl} \alpha = g(x) & & \\ f(x) = 0 & \rightarrow & f(x) = 0 \\ \updownarrow & & \\ x = g(x) & \rightarrow & \alpha = g(x) \end{array}$$

مرتبه صفر $f(x) = f(\alpha) + f'(\beta_1)(x - \alpha)$

مرتبه ۱ $f(x) = f(\alpha) + f'(\alpha)(x - \alpha) + \dfrac{f''(\beta_2)(x - \alpha)^2}{2}$

$$f(x) = f(\alpha) + f'(\alpha)(x - \alpha) + \frac{f''(\beta_3)(x - \alpha)^3}{3!} + \frac{f''(\beta_4)(x - \alpha)^4}{4!}$$

غلط $f(x) \boxed{=} f(\alpha) + f'(\alpha)(x - \alpha)$

درست $f(x) \boxed{\approx} f(\alpha) + f'(\alpha)(x - \alpha)$

قضیه تیلور $f(x) = R_n(x) + E_n(x)$

اگر یک تابع مشتق‌پذیر باشد، β_1 بین x و α هست که:

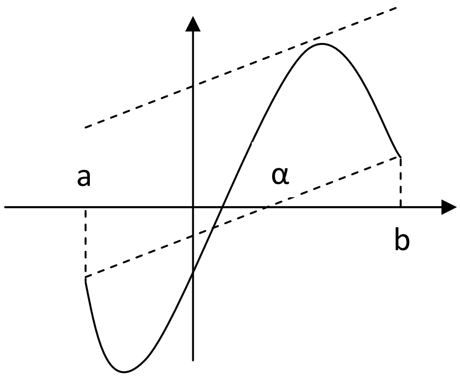
$$f'(\beta_1) = \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$$

قضیه مقدار میانگین

$$f'(\beta)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

قضیه تیلور از مرتبه صفر، قضیه مقدار میانگین می‌شود.

از نظر هندسی :



بسط تیلور تا مرتبه صفر را برای تابع $g(x)$ حول نقطه $x=\alpha$ می‌نویسیم.

$$g'(\alpha)\neq 0$$

$$g(x)=g(\alpha)+g'(\alpha_x)(x-\alpha)$$ α_x بین α و x

$$g(x_n)=g(\alpha)+g'(\alpha_n)(x-\alpha)$$ α_n بین α و x_n

$$x_{n+1}=\alpha+g'(\alpha_n)(x_n-\alpha)\ \Rightarrow\ \frac{x_{n+1}-\alpha}{x_n-\alpha}=g'(\alpha_n)$$

$$\Rightarrow\ \left|\frac{x_{n+1}-\alpha}{x_n-\alpha}\right|=|g'(\alpha_n)|\quad,\quad \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x_{n+1}-\alpha}{x_n-\alpha}\right|=\lim_{n\to\infty}|g'(\alpha_n)|=|g'(\lim\alpha_n)|=|g'(\alpha)|>0$$

مثال $x_n=e^{-n}\ ,\quad \lim_{n\to\infty}x_n=0\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{e^{-(n+1)}}{e^{-n}}=\frac{e^{-n}e^{-1}}{e^{-n}}=e^{-1}=\frac{1}{e}$

α_n بین α و x_n است، x_n به سمت ریشه یعنی α همگرا می‌شود. (وقتی $g'(\alpha)$ پیوسته باشد.)

بنابراین مرتبه همگرایی تکرار ساده وقتی $g'(\alpha) \neq 0$ ، برابر ۱ است.

نتیجه: اگر $g'(\alpha) = 0$ و $g''(\alpha) \neq 0$ مرتبه همگرایی روش تکرار ساده چقدر است؟

$$g(x_n) = g(\alpha) + g'(\alpha)(x_n - \alpha) + \frac{g''(\alpha_n)(x_n - \alpha)^2}{2!}$$

α_n بین α و x_n

$$x_{n+1} - \alpha = \frac{g''(\alpha_n)(x_n - \alpha)^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{x_{n+1} - \alpha}{(x_n - \alpha)^2}\right| = \frac{1}{2} g''(\alpha_n)$$

$$\lim_{x \to \infty} \left|\frac{x_{n+1} - \alpha}{(x_n - \alpha)^2}\right| = \frac{1}{2} |g''(\alpha_n)| > 0$$

مرتبه همگرایی برابر ۲ است.

(اگر $g'(\alpha) \neq 0$ ، مرتبه همگرایی دقیقاً ۱ است.)

نتیجه:

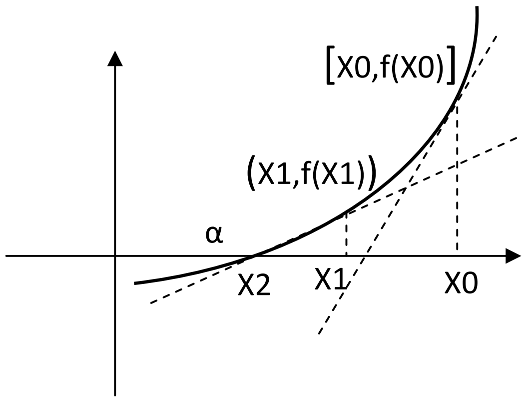
۱- اگر $g'(\alpha) = 0$ ، مرتبه همگرایی حداقل ۲ است.

۲- اگر $g'(\alpha) = 0$ و $g''(\alpha) \neq 0$ ، مرتبه همگرایی دقیقاً ۲ است.

۳- اگر $g'(\alpha) = 0$ و $g''(\alpha) = 0$ ، مرتبه همگرایی حداقل ۳ است.

۴- اگر $g'(\alpha) = 0$ و $g''(\alpha) = 0$ ولی $g'''(\alpha) \neq 0$ ، مرتبه همگرایی دقیقاً ۳ است.

روش نیوتن رافسون



معادله خط مماس : $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

$$-f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \qquad , \quad f'(x_0) \neq 0$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$ برای حل معادلات غیر خطی

توجه: روش نیوتن یک روش تکرار ساده است؟

اگر $f(x) = 0 \quad \leftrightarrow \quad x = g(x)$ (۱)

$x_{n+1} = g(x_n)$ روش تکرار ساده

در روش تکرار ساده داریم:

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \qquad *$$

باید نشان دهیم که (۱) برقرار است :

فرض می کنیم :

$$f(x) = 0 \quad \leftrightarrow \quad \frac{f(x)}{f'(x)} = 0 \quad \leftrightarrow \quad -\frac{f(x)}{f'(x)} = 0 \quad \leftrightarrow \quad x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x$$

پس روش نیوتن یک روش تکرار ساده است.

توجه: مرتبه همگرایی روش نیوتن، اگر $f'(\alpha) \neq 0$ ، حداقل ۲ است.

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

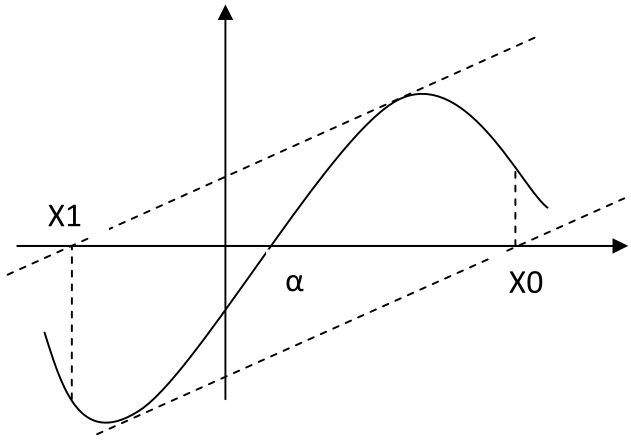
$$g'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} \qquad \Rightarrow \qquad g'(\alpha) = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} = 0$$

α ریشه است ، $f(\alpha) = 0$ $\Rightarrow$ پس مرتبه همگرایی حداقل ۲ است.

نکته: ممکن است روش نیوتن همگرا نشود :

۱- $f'(x_n)$ برای بعضی n ها صفر شود، کسر بی معنی می‌شود. $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

۲- ممکن است دنباله‌ای تکراری تولید شود که همگرا نیست.



توجه: اگر نقطه شروع x_0 در روش نیوتن به اندازه کافی به ریشه α نزدیک باشد، همگرایی روش نیوتن تضمین می‌شود. معمولاً نقطه شروع، از روش‌های ساده‌تر تقریبی از را برای روش نیوتن به‌دست می‌آورند. (مثل نابجایی، وتری، تنصیف و ...)

توجه: اگر $f'(\alpha) = 0$ ، مرتبه همگرایی روش نیوتن، دقیقاً ۱ است.

$$g'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

x_0

x_1

$\dots$

$f'(x_n)$

مثال: چند جمله‌ای $p(x) = x^3 + 6x^2 + 9x$ دارای ریشه‌های 3/ و 0 است، برای پیدا کردن ریشه $x = -3$ با نقطه شروع مناسب روش نیوتن از چه مرتبه همگرایی است؟

$$p'(x) = 3x^2 + 12x + 9 \qquad \rightarrow \qquad p'(-3) = 3(3)^2 - 36 + 9 = 0$$

مرتبه همگرایی دقیقاً برابر ۱ است.

✓ الف) 1 ب) 3 ج) 2 د) 0

مثال: روش نیوتن رافسون برای محاسبه ریشه $f(x)=(x-2)^3-8$ وقتی x نزدیک عدد ۴ باشد، دارای چه مرتبه همگرایی است؟

الف)

ب) ✓

ج)

د)

$$\begin{cases} f'(x)=3(x-2)^2 \\ f'(4)\neq 0 \end{cases} \quad , \quad g'(x)=\frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} \quad , \quad g'(4)=0$$

$$f''(x)=6(x-2)$$

$$g'(x)=\frac{6[(x-2)^2-8][x-2]}{9(x-2)^4}=\frac{6}{9}[1-\frac{8}{(x-2)^3}]$$

$$g''(x)=-\frac{48}{9}[\frac{-3}{(x-2)^4}] \quad , \quad g''(4)\neq 0$$

g'' در نقطه ۴ غیر صفر است.

پس مرتبه همگرایی دقیقاً ۲ است.

مثال: ریشه سوم عدد ۱۲ را با روش تکرار ساده تا ۶ مرحله به‌دست آورید.

$$x=\sqrt[3]{12} \quad \rightarrow \quad x^3-12=0$$

$$x_1=1<0$$
$$x_2=2<0$$
$$x_3=3>0$$

بین ۲ و ۳ یک ریشه داریم، پس نقطه‌ای در بازه‌ی [۳و۲] را به عنوان نقطه شروع در نظر می‌گیریم:

$$x_0=2/5$$

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \Rightarrow \quad x_1=2/5-\frac{[(2/5)^3-12]}{3[2/5]^2}=2/3$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{{x_n}^3 - 12}{3{x_n}^2} \qquad \Rightarrow \qquad x_2 = 2/3 - \frac{[(2/3)^3 - 12]}{3[2/3]^2} = \dots$$

روش نیوتن تعمیم یافته برای ریشه‌های تکراری:

$f(\alpha) = 0$ ، α ریشه‌ی f

$f(\alpha) = 0$ و $f'(\alpha) = 0$ ، α ریشه مرتبه ۲ (مضاعف)

$f(\alpha) = 0$ و $f''(\alpha) = f'(\alpha) = 0$ ، α ریشه مرتبه ۳

اگر α ریشه مرتبه P برای f باشد، آن‌گاه از فرمول تعمیم‌یافته زیر برای پیدا کردن ریشه استفاده می‌کنیم:

$$x_{n+1} = x_n - P\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

توجه: اگر α ریشه مرتبه‌ی P ام f باشد، ریشه مرتبه $P-1$ ام f' ، مرتبه $P-1$ ام f'' و ... است. پس باید دنباله‌های زیر به یک مقدار همگرا شوند:

$$x_{n+1} = x_n - P\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

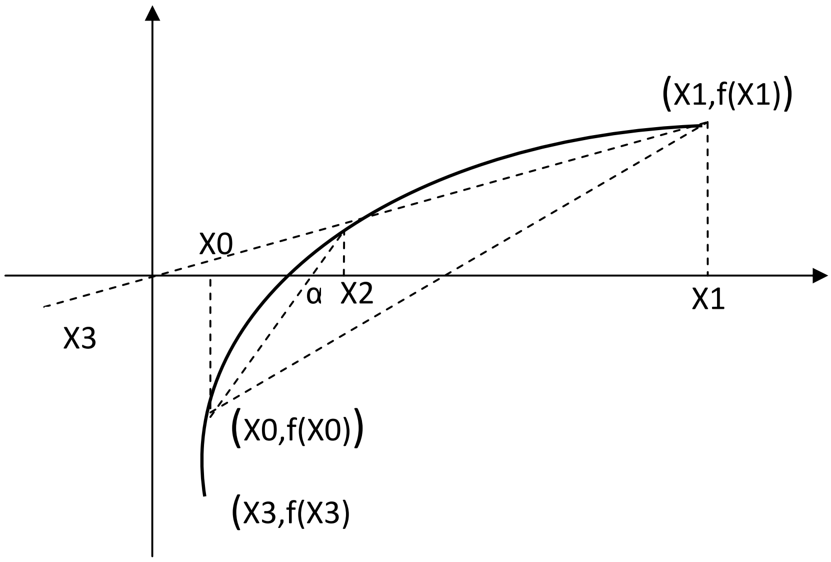
$$x_{n+1} = x_n - P\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1} = x_n - P\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

...

در صورتی که عددی برای P در نظر بگیریم و x_{n+1} را برای $f(x)$ و $f'(x)$ و $f''(x)$ به‌دست آوریم، در صورتی که نزدیک به هم باشند، آن‌گاه P همان هرتبه همگرایی است.

روش وتری



همانند روش نابجایی است ولی مقایسه وجود ندارد و به ترتیب نقاط به‌دست آمده، مقادیری را به‌دست می‌آوریم.

x_1 , x_0 نقاط ابتدایی و شروع هستند.

$$x_2 = \frac{x_0 f(x_1) - x_1 f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}$$

$$x_3 = \frac{x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)}$$

...

$$x_{n+1}=\frac{x_{n-1}f(x_n)-x_n f(x_{n-1})}{f(x_n)-f(x_{n-1})}$$

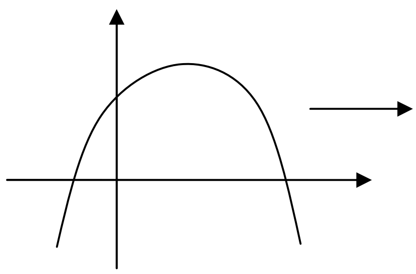
توجه: مرتبه همگرایی روش وتری حدوداً ۱/۶ است. (در صورت همگرایی)

فصل سوم : درون یابی

تابعی داریم که در بعضی از نقاط مقدار آن مشخص می‌باشد (تابع جدولی) و با استفاده از مقادیر مشخص شده، سایر مقادیر را به‌طور تقریبی محاسبه نماییم.

تابع جدولی

x_i	0	1	2
f_i	2	3	1



تابع درون‌یاب

چند جمله‌ای درون‌یاب

تابع درون‌یاب

$$\begin{cases} P_2(x) = a + bx + cx^2 \\ Q(x) = ae^x + b\ln(x+1) + c\sin x \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_2(0) = a = 2 \\ P_2(1) = a + b + c = 3 \\ P_2(2) = a + 2b + 4c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2b + 4c = -1 \\ b + c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2b + 4c = -1 \\ \underline{-2b + -2c = -2} \end{cases}$$

$$2c = -3$$

$$\rightarrow \quad c = -\frac{3}{2}$$

$$a+b+c=3 \quad \rightarrow \quad 2+b-\frac{4}{2}=1 \quad \rightarrow \quad b+0/5=1 \quad \rightarrow \quad b=0/5$$

برای معادله Q داریم:

$$\begin{cases} Q(0)=a=2 \\ Q(1)=ae+b\ln 2+c\sin 1=3 \\ Q(2)=ae^2+b\ln 3+c\sin 2=1 \end{cases}$$

درون‌یابی چند جمله‌ای

تابع جدولی

x_i	x_0	x_1	...	x_i
f_i	f_0	f_1	...	f_n

را در نظر بگیرید. می‌خواهیم چند جمله‌ای از درجه حداکثر n ، $p_n \in P_n$ (p_n : مجموعه چندجمله‌ای‌ها از درجه حداکثر n را به‌دست آوریم که در شرط زیر صدق کند):

$$P_n(x_i)=f_i \qquad i=0,1,....,n$$

درون‌یابی لاگرانژ

فرض کنید $(i=0,1,....,n)$ $L_i(x)$ چند جمله‌ای از درجه حداکثر n باشند.

x_i	x_0	x_1	...	x_n
f_i	f_0	f_1	...	f_n

طوری تعریف کنیم که

$$\begin{cases} L_0(x) & \rightarrow & L_0(x_0)=1 \ , \ L_0(x_i)=0 & i\neq 0 \\ L_1(x) & \rightarrow & L_1(x_1)=1 \ , \ L_1(x_i)=0 & i\neq 1 \\ \dots & & & \\ L_n(x) & \rightarrow & L_n(x_n)=1 \ , \ L_n(x_i)=0 & i\neq n \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad p_n(x)=f_0 \ L_0(x)+f_1 \ L_1(x)+\dots+f_n \ L_n(x)$$

$$p_n(x_i)=f_i$$

L_iها را چطور می‌توان به‌دست آورد :

$$L_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)}$$

$$L_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)}$$

$$L_j(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\dots(x-x_n)}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\dots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\dots(x_j-x_n)}$$

$$j=0,\dots,n$$

مثال: چندجمله‌ای درون‌یاب تابع $f(x)=\ln x$ را در نقاط گره‌ی $x_0=1$, $x_0=2$, $x_0=3$ درون‌یابی کنید. (روش لاگرانژ)

* چندجمله‌ای درون‌یاب از درجه حداکثر ۲ است.

درجه صفر یعنی تابع ثابت است.

x_i	$x_0 = 1$	$x_1 = 2$	$x_2 = 3$
f_i	$f_0 = 0$	$f_1 = 0/69$	$f_2 = 1/09$

$$p_2(x) = f_0 \; L_0(x) + f_1 \; L_1(x) + f_2 \; L_2(x)$$

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{(x-1)(x-2)}{(2-1)(3-2)}$$

$$p_2(x) = -0/69(x-1)(x-3) + \frac{1/09}{2}(x-1)(x-2)$$

$$L_n(2/5) = p_n(2/5) = -0/69(2/5-1)(2/5-3) + \frac{1/09}{2}(2/5-1)(2/5-2)$$

حجم محاسبات بالا می‌رود.

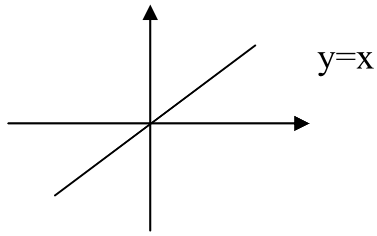
نقطه ضعف روش لاگرانژ

۱- برای n های بزر ج، حجم محاسبات زیاد می‌شود.

۲- با اضافه شدن نقطه گره‌ی جدید همه محاسبات از سر گرفته می‌شود.

از درجه حداکثر ۲

x_i	1	2	3
f_i	1	4	9



از درجه ۱ چندجمله‌ای لاگرانژ داریم.

x_i	1	2	3
f_i	1	2	3

چندجمله‌ای به‌دست آمده از روش لاگرانژ یکتا است.

قضیه: برای تابع جدولی

x_i	x_0	x_1	...	x_n
f_i	f_0	f_1	...	f_n

چندجمله‌ای درون‌یاب از درجه حداکثر n یکتاست.

فرض کنید $p_n(x)$ و $Q_n(x)$ که $Q_n(x) \neq p_n(x)$ هر دو چندجمله‌ای‌های درون‌یاب (درجه حداکثر n) و $K(x)$ از درجه حداکثر n است، پس حداکثر n ریشه دارد. از طرفی چون $p_n(x)$ و $Q_n(x)$ چندجمله‌های درون‌یاب هستند از نقاط گره‌ی می‌گذرند.

$$K(x) = p_n(x) - Q_n(x)$$

پس K، $n+1$ ریشه دارد که تناقض است. پس $Q_n(x) = p_n(x)$.

پس حکم ثابت شد.

$$p_n(x) = Q_n(x) = f_i \qquad i = 0,1,\dots,n$$

$$K(x_i) = 0 \qquad i = 0,1,\dots,n$$

چند جمله‌ای از درجه n، n ریشه دارد.

مثال: چندجمله‌ای درون‌یاب $f(x)=x^3$ در نقاط $x_0=1$, $x_1=2$, $x_2=3$ کدام است؟

x_i	0	1	2
f_i	0	1	8

الف) x^3-x^2

ب) x^2-x-1

ج) x^3-x^2-1

✓ د) $3x^2-2x$

مثال: برای تابع جدولی روبه‌رو تقریب $f(2/5)$ برابر کدام گزینه است؟

x_i	1	2	3	4
f_i	2	5	10	11

الف) 7/625

ب) 6/725

ج) 7/526

د) 6/527

$$L_0(x) = \frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(2-1)(2-3)(2-4)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(3-1)(3-2)(3-4)}$$

$$L_3(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(4-1)(4-2)(4-3)}$$

$$p_3(x) = f_0\ L_0(x) + f_1\ L_1(x) + f_3\ L_3(x)$$

روش تفاضلات تقسیم شده نیوتنی

$$f[x_i, x_j] = \frac{f(x_i) - f(x_j)}{x_j - x_i}$$

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i}$$

$$f[x_{j-2}, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}] = \frac{f[x_{j-1}, x_j, x_{j+1}] - f[x_{j-2}, x_{j-1}, x_j]}{x_{j+1} - x_{j-2}}$$

x_i	f_i	$f[x_i,x_{i+1}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$
x_0	f_0			
		$\frac{f_1-f_0}{x_1-x_0}=\alpha=f[x_0,x_1]$		
x_1	f_1		$\frac{\beta-\alpha}{x_2-x_0}=\eta=f[x_0,x_1,x_2]$	
		$\frac{f_2-f_1}{x_2-x_1}=\beta=f[x_1,x_2]$		$\frac{\theta-\eta}{x_3-0}=1$
x_2	f_2		$\frac{\gamma-\beta}{x_3-x_1}=\theta=f[x_1,x_2,x_3]$	
		$\frac{f_3-f_2}{x_3-x_1}=\gamma=f[x_2,x_3]$		
x_3	f_3			

$$p_n(x)=f_0+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)+$$
$$+\ldots+f[x_0,x_1,\ldots,x_n](x-x_0)\ldots(x-x_{n-1})$$

$$p_3(x)=f_0+\alpha(x-x_0)+\eta(x-x_0)(x-x_1)+K(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

مثال: چندجمله‌ای درون‌یاب تابع $f(x)=\ln x$ را در نقاط گره‌ی $x_0=1$, $x_1=2$, $x_2=3$ ، با روش تفاضلات نیوتن به‌دست آورید؟

x_i	1	2	3
f_i	0	0/69	1/09

x_i	f_i		
1	0		
		0 / 7	
2	0 / 7		−0 / 2
		0 / 3	
3	1		

$$p_2(x)=0+0/7(x-1)-0/2(x-1)(x-2)$$

توجه: در جدول تفاضلات نیوتن اگر آخرین عنصر روی قطر اول صفر شود، چندجمله‌ای:

$$p_n(x) = f_0 + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) +$$
$$+ \ldots + f[x_0, x_1, \ldots, x_n](x - x_0)\ldots(x - x_{n-1})$$

از درجه حداکثر n-1 است، اگر عنصر ماقبل آخر نیز صفر شود، چندجمله‌ای از درجه حداکثر n-2 است.

تمرین: چندجمله‌ای لاگرانژی بنویسید که از نقاط $(x_0, f_0), (x_1, f_1), (x_2, f_1), (x_2, f_2)$ بگذرد و سپس عبارت $\dfrac{3x^2 + x + 1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$ را به صورت جمع جبری چند کسر جزئی بیان کنید.

خطا در چندجمله‌ای‌های درون‌یاب

مقدار تابع در یک نقطه را نمی‌توانیم حساب کنیم، از بسطش استفاده می‌کنیم.

بسط تیلور مرتبه n $\quad f(x) = R_n(x) + E_n(x)$

$$\forall x, E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\alpha_x)(x - \alpha)^{(n+1)}}{(n+1)!}$$

یک چندجمله‌ای از درجه حداکثر n که از یک سری نقاط می‌گذرد و یکتا است.

$$f(x) \approx p_n(x)$$

x_i	x_0	x_1	...	x_n
f_i	f_0	f_1	...	f_n

قضیه: اگر f یک تابع k+1 بار مشتق‌پذیر با مشتقات پیوسته باشد، p_n چندجمله‌ای درون‌یاب f از درجه حداکثر n ، در نقاط $x_0, x_1, \ldots, x_n$ باشد، آن‌گاه خطای چندجمله‌ای درون‌یاب به صورت زیر است:

چند جمله‌ای درون‌یاب از نقاط گرهی می‌گذرند و در نقاط گرهی خطای دقیق آن در گره صفر است.

$$E_n(x)=f(x)-R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\alpha)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_n) \qquad \alpha\in I(x_0,...,x_n)$$
$$=\frac{f^{(n+1)}(\alpha)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$$

$$E_n(x)=f(x)-R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\alpha_x)}{(n+1)!}(x-\alpha)^{(n+1)}$$

α_x برای هر x ای فرق می‌کند.. (بین x و α)

$$|E_n(x)|<\frac{M}{(n+1)!}|(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_n)|$$ کران بالا خطا در نقطه به طول x

$$\forall x \quad |E_n(x)|=\frac{MN}{(n+1)!}$$ اگر به x وابسته نباشد.

$$M=\text{Max}\left|f^{(n+1)}(x)\right| \qquad x\in I\ (x_0,x_1,...,x_n)$$

$$N=\text{Max}|(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_n)| \qquad x\in I\ (x_0,x_1,...,x_n)$$

توجه: با نگاه کردن به خطای چند جمله‌ای درون‌یاب واضح است که خطا برای چندجمله‌ای‌های با درجه حداکثر n صفر است، زیرا مشتق n+1 ام این توابع برابر صفرند و همچنین به وضوح خطا در نقاط گرهی برابر با صفر است.

$$f(x)-p_3(x)=E_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\alpha)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_n)$$

مثال: چندجمله‌ای درون‌یاب تابع $f(x)=\sin(\frac{\pi}{2}x)$ را در نقاط گرهی، $x_0=-1$, $x_1=0$, $x_2=1$ به‌دست آورید.

الف) کران بالای خطا در نقطه $x=\frac{1}{2}$ چقدر است؟

ب) کران بالای خطا را به‌دست آورید.

الف)

$$n=3 \qquad \left|E_n(x)\right| < \frac{M}{3!}\left|(x+1)(x)...(x-1)\right| = \frac{M}{6}(\frac{3}{2})(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}) = \frac{3M}{48} =$$

$$= \frac{M}{16} = (\frac{M}{2})^3\frac{1}{16} = \frac{M^3}{128}$$

$$f'(x) = \frac{\pi}{2}\cos(\frac{\pi}{2}x)$$

$$f''(x) = -(\frac{\pi}{2})^2\sin(\frac{\pi}{2}x)$$

$$f'''(x) = -(\frac{\pi}{2})^3\cos(\frac{\pi}{2}x)$$

$$M = \underset{x\in[-1,1]}{\mathrm{Max}}\left|f^3(x)\right| = \mathrm{Max}(\frac{\pi}{2})^3\left|\cos(\frac{\pi}{2})x\right| = (\frac{\pi}{2})^3$$

ب)

$$N = \underset{x\in[-1,1]}{\mathrm{Max}}\left|(x)(x-1)(x+1)\right| = 0/384$$

$$g(x) = (x)(x-1)(x+1)$$

$$g'(x) = (x^2-1)+(x^2+x)+x^2-x = 3x^2-1$$

$$g'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{+\sqrt{3}}{-3} \quad \Rightarrow \quad g'(x) = (\frac{+\sqrt{3}}{-3}) = \pm 0/384$$

$$\left|E_n(x)\right| < \frac{MN}{(n+1)!} = \frac{1}{6}(\frac{\pi}{2})^3[0/384]$$

تفاضلات متناهی:

درون‌یابی با تفاضلات پیشرو نیوتن

عملگر تفاضلات پیشرو: تابع جدولی

x_i	x_0	x_1	...	x_n
f_i	f_0	f_1	...	f_n

مفروض است، فرض کنید:

$$x_{i+1} - x_i = h \qquad i = 0, ..., n-1$$

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$$
$$\Delta^2 f(x) = \Delta(\Delta f(x)) - \Delta f(x+h) - \Delta f(x) =$$
$$= (f(x+2h) - f(x+h)) - (f(x+h) - f(x)) =$$
$$= f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)$$

بنابراین:

$$\Delta f_i = \Delta f(x_i) = f(x_i + h) - f(x_i) = f_{i+1} - f_i$$
$$\Delta^2 f_i = f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i$$

جدول تفاضلات پیشرو نیوتن:

$$
\begin{array}{c|ccccc}
x_i & f_i & \Delta f_i \;\; {\scriptstyle i=0,1,2} & \Delta^2 f_i \;\; {\scriptstyle i=0,1} & \Delta^3 f_0 \\
\hline
x_0 & f_0 & & & \\
 & & f_1 - f_0 & & \\
x_1 & f_1 & & \Delta f_1 - \Delta f_0 & \\
 & & f_2 - f_1 & & \Delta^2 f_1 - \Delta^2 f_0 \\
x_2 & f_2 & & \Delta f_2 - \Delta f_1 & \\
 & & f_3 - f_2 & & \\
x_3 & f_3 & & & \\
\end{array}
$$

فرض کنید $x = x_0 + h\theta$ و داریم $\theta = \dfrac{x - x_0}{h}$

چندجمله‌ای درون‌یاب f به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$p_n(x) = f_0 + \theta \Delta f_0 + \frac{\theta(\theta-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{\theta(\theta-1)(\theta-2)}{3!}\Delta^3 f_0 + \ldots + \frac{\theta(\theta-1)\ldots(\theta-n)}{n!}\Delta^n f_0$$

مثال: برای تابع جدولی زیر با استفاده از درون‌یابی مقدار تقریبی $f(0/5)$ را به‌دست آورید.

x_i	f_i	$\Delta f_i \quad {\scriptstyle i=0,1,2}$	$\Delta^2 f_i \quad {\scriptstyle i=0,1}$	$\Delta^3 f_0$
x_0	0			
		2		
x_1	2		-5	
		-3		12
x_2	-1		7	
		4		
x_3	3			

$$p_n(x) = f_0 + \theta\Delta f_0 + \frac{\theta(\theta-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{\theta(\theta-1)(\theta-2)}{3!}\Delta^3 f_0$$

$$p_n(x) = 0 + 2\theta - \frac{5}{2}\theta(\theta-1) + \frac{12}{6}\theta(\theta-1)(\theta-2)$$

$$x = x_0 + h\theta = -1 + 2\theta$$

$$\frac{1}{2} = -1 + 2\theta \quad \rightarrow \quad 2\theta = \frac{3}{2} \quad \rightarrow \quad \theta = \frac{3}{4}$$

$$f(\frac{1}{2}) \approx p_n(\frac{1}{2}) = 0 + 2(\frac{3}{4}) - \frac{5}{2}(\frac{3}{4})(-\frac{1}{4}) + 2(\frac{3}{4})(-\frac{1}{4})(\frac{3}{4})$$

$$\theta = \frac{x - x_0}{h} = \frac{x+1}{2}$$

$$p_n(x) = 2(\frac{x+1}{2}) - \frac{5}{2}(\frac{x+1}{2})(\frac{x+1}{2} - 1) + 2(\frac{x+1}{2})(\frac{x+1}{2} - 1)(\frac{x+1}{2} - 2)$$

$$p_n(x) = f_0 + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$

ارتباط بین تفاضلات تقسیم شده نیوتن و تفاضلات پیشرو:

$$f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] = \frac{\Delta^k f_i}{h^k k!}$$

مثلاً:

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{\Delta^2 f_0}{h^2 2!}$$

مثال:

x_i	f_i	Δf_i	Δf_0
0	5		
		-4	
2	1		2
		-2	
4	-1		

$$f[2,4] = \frac{\Delta f_1}{h} = \frac{\Delta f_1}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

خطا در چندجمله‌ای درون‌یاب پیشرو

$$E_n(x) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\theta(\theta-1)\ldots(\theta-n)f^{n+1}(\alpha) \qquad \alpha \in I \ \ (x_0, x_1, \ldots, x_n)$$

کران بالای خطا

$$\left|E_n(x)\right| < \frac{Mh^{n+1}}{(n+1)!}\left|\theta(\theta-1)\ldots(\theta-n)\right| \qquad \theta = \frac{x - x_0}{h}$$

چندجمله‌ای درون‌یاب پسرو

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x) = E(f) - f = (E-1)f \qquad \Delta = (E-1)$$

$E = f(x+h)$ عملگر تغییر مکان

تفاضلات پسرو نیوتن

$$\begin{aligned}
\nabla f(x) &= f(x) - f(x-h) \\
\nabla^2 f(x) &= \nabla(\nabla f(x)) = \nabla f(x) - \nabla f(x-h) = \\
&= \big(f(x) - f(x-h)\big) - \big(f(x-h) - f(x-2h)\big) = \\
&= f(x) - 2f(x-h) + f(x-2h)
\end{aligned}$$

$$h = x_{i+1} - x_i \qquad i = 0, \ldots, n-1$$

$$\begin{aligned}
\nabla f_i &= f_i - f_{i-1} \\
\nabla^2 f_i &= f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2}
\end{aligned}$$

x_i	f_i	∇f_i $i=1,2,3$	$\nabla^2 f_i$ $i=2,3$	$\nabla^3 f_3$
x_0	f_0			
		$f_1 - f_0$		
x_1	f_1		$\nabla f_2 - \nabla f_1$	
		$f_2 - f_1$		$\nabla^2 f_3 - \nabla^2 f_2$
x_2	f_2		$\nabla f_3 - \nabla f_2$	
		$f_3 - f_2$		
x_3	f_3			

چندجمله‌ای درون‌یاب f به صورت زیر است:

فرض $x_n + h\theta$

$$p_n(x) = f_n + \theta\nabla f_n + \frac{\theta(\theta+1)}{2!}\nabla^2 f_n + \frac{\theta(\theta+1)(\theta+2)}{3!}\nabla^3 f_n + \dots +$$
$$+\frac{\theta(\theta+1)\dots(\theta+n-1)}{n!}\nabla^n f_n$$

مثال: چندجمله‌ای درون‌یاب پسرو را برای جدول زیر به‌دست آورید و مقدار $f(\frac{1}{3})$ را تقریب بزنید.

x_i	f_i	∇f_i	$\nabla^2 f_2$
0	3		
		2	
2	5		1
		3	
4	8		

$$x = x_n + h\theta = 2 + \theta \qquad \theta = x - 2 \xrightarrow{x=\frac{1}{3}} \theta = -\frac{5}{3}$$

$$\begin{cases} p_2(x) = 8 + 3\theta + \dfrac{\theta(\theta+1)}{2} \\ p_2(x) = f_n + 3(x-2) + \dfrac{(x-2)(x-1)}{2} \end{cases}$$

$$f(\frac{1}{3}) = p_2(\frac{1}{3}) = 8 + 3(\frac{1}{3} - 2) + \frac{(\frac{1}{3}-2)(\frac{1}{3}-1)}{2} = ?$$

توجه: اگر مقدار تقریبی تابع را در نقطه‌ای بخواهیم که به بالای جدول نزدیک باشد، از چندجمله‌ای درون‌یاب پیشرو استفاده می‌کنیم و اگر به پایین جدول نزدیک باشد، از چندجمله‌ای درون‌یاب پسرو استفاده می‌کنیم.

ارتباط بین تفاضلات تقسیم شده نیوتن و تفاضلات پسرو

$$f[x_{i-k}, x_{i-k+1}] = \frac{\nabla f_i}{h^k k!}$$

خطا در چندجمله‌ای پسرو

$$E_n(x) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\theta(\theta+1)...(\theta+n)f^{n+1}(\alpha) \qquad \alpha \in I\ (x_0, x_1, ..., x_n)$$

$$|E_n(x)| < \frac{Mh^{n+1}}{(n+1)!}|\theta(\theta+1)...(\theta+n)|$$ کران بالای خطا

$$x = x_n + h\theta \qquad \theta = \frac{x - x_n}{h}$$

تمرین: $f(x) = x^{n+1}$ ، چه شرطی لازم است تا چندجمله‌ای درون‌یاب f در نقاط $x_0, x_1, ..., x_n$ درجه‌ای کمتر از n داشته باشد؟

الف) نقاط متساوی الفاصله

✓ ب) $\sum_{i=0}^{n} x_i = 0$

ج) $\prod_{i=0}^{n} x_i = 0$

د) $\sum_{i=0}^{n} x_i = h$

$$p_n(x) = x^{n+1} - \overbrace{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)}^{n+1}$$
$$= x^{n+1} - [x^{n+1} - (x_0 + x_1 + \dots + x_n)]x^n + Q(x)$$
$$p_n(x) = (x_0 + x_1 + \dots + x_n)]x^n + Q_{n-1}(x)$$
$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{n} x_i = 0$$

تمرین: تابع cosx را با چه اندازه گام h باید جدول‌بندی کرد تا خطای حاصل از درون‌یابی خطی نابیشتر ($\leq$) از $\frac{1}{2}\times 10^{-4}$ شود؟

الف) 0/01

ب) 0/015

✓ ج) 0/02

د) 0/04

$$|E_n(x)| = \left|\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\theta(\theta-1)\dots(\theta-n)f^{n+1}(\alpha)\right|$$ خطا در درون‌یابی پیشرو

$$|E_1(x)| = \left|\frac{f^2(\alpha)}{2!}(x-x_0)(x-x_1)\right| < \frac{MN}{2}$$ روش نیوتن

$$M = \max|-\cos x| = 1 \qquad x \in [x_0, x_1]$$

$$g(x) = (x-x_0)(x-x_1) \quad \Rightarrow \quad g'(x) = (x-x_0) + (x-x_1) = 0$$
$$\downarrow$$
$$x = \frac{x_0 + x_1}{2}$$

$$< \frac{MN}{2} = \frac{h^2}{8} < \frac{1}{2} \times 10^{-4} \qquad h^2 = \frac{8}{2} \times 10^{-4} = 4 \times 10^{-4}$$

$$h = 2 \times 10^{-2}$$

$$|E_n(x)| = \left| \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \theta(\theta-1)...(\theta-n) f^{n+1}(\alpha) \right| < \frac{h^2}{2} \theta(\theta-1) < \frac{h^2}{2} N$$

$$N = \max \theta(\theta-1) = \max \left| \theta^2 - \theta \right| = \frac{1}{4}$$

$$\theta \in [0,1]$$

$$2\theta - 1 = 0 \quad \to \quad \theta = \frac{1}{2}$$

$$|E_n(x)| < \frac{h^2}{8} < \frac{1}{2} \times 10^{-4} \qquad h^2 < 4 \times 10^{-4}$$

$$h < 2 \times 10^{-2}$$

تمرین: یک تابع جدولی به شکل روبه‌رو داریم. مقدار تابع در نقطه $\frac{1}{2}$ چقدر است؟

(تابع یکنوا باشد، از کوچک به بزرگ باشد)

x_i	-1	2	4
f_i	0	6	9

$$f(\frac{1}{2}) = ? \qquad f(?) = \frac{1}{2}$$

مثال: برای تابع جدولی زیر تقریبی از ریشه را به‌دست آورید.

$\overline{x_i}$	f_i	5	6	9
$\overline{f_i}$	x_i	-1	2	4

$$f(\alpha)=0 \quad \rightarrow \quad \alpha=?$$

$\downarrow$

ریشه

x_i	f_i		
5	-1		
6	2		$-\frac{7}{12}$
9	4	$\frac{2}{3}$	

$$\overline{p_2}(\overline{x})=-1+3(\overline{x}-5)-\frac{7}{12}(\overline{x}-5)(\overline{x}-6)$$

تقریب ریشه $\overline{p_2}(0)=-1-15+\frac{35}{12}(-6)=-1-15-17/5=-33/5$

چون صفر درون بازه نمی‌باشد، درون‌یابی امکان‌پذیر نیست.

مشتق‌گیری عددی

فرض کنید تابع جدولی زیر در اختیار است. هدف پیدا کردن تقریبی از $f'(\alpha)$ است که $\alpha \in I \ (x_0, x_1, ..., x_n)$

x_i	x_0	x_1	...	x_n
f_i	f_0	f_1	...	f_n

برای این کار فرض می‌کنیم نقاط متساوی‌الفاصله هستند. چندجمله‌ای درون‌یاب پیشرو به صورت زیر است:

$$p_n(x) = f_0 + \theta\Delta f_0 + \frac{\theta(\theta-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{\theta(\theta-1)(\theta-2)}{3!}\Delta^3 f_0 + ...$$

$$p_n'(x) = \frac{dp_n(x)}{dx} = \frac{dp_n(x)}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{h}\left[\Delta f_0 + (\theta - \frac{1}{2})\Delta^2 f_0 + (\frac{\theta^2}{2} - \theta + \frac{1}{3})\Delta^3 f_0 + ...\right]$$

$$\begin{cases} x = x_0 + h\theta \\ dx = hd\theta \ \rightarrow \ \dfrac{d\theta}{dx} = \dfrac{1}{h} \end{cases}$$

$$f'(x_0) \approx p_n'(x_0) \xrightarrow{\theta=0} \frac{1}{h}[\Delta f_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 f_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 f_0 - \frac{1}{4}\Delta^4 f_0 + ...]$$

$$f'(x_0) \approx \frac{1}{h}\Delta f_0 \quad , \quad f'(x) \approx [\Delta f_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 f_0]$$

$$f'(x_1) \approx p_n'(x_1) \xrightarrow{\theta=1} \frac{1}{h}[\Delta f_0 + \frac{1}{2}\Delta^2 f_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 f_0 + \frac{1}{4}\Delta^4 f_0 + ...]$$

$$f'(x_1) \approx \frac{1}{h}\Delta f_0$$

۲ نقطه

$$f'(x_1) \approx \frac{1}{h}[\Delta f_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 f_0], \ldots$$ ۳ نقطه

مثال: برای تابع جدولی زیر مقدار تقریبی

۱- $f'(3)$

۲- $f'(4)$

را به‌دست آورید.

x_i	f_i	Δf_0	$\Delta^2 f_0$	$\Delta^3 f_0$
$x_0 = 1$	4			
$x_1 = 3$	2	-3	-1	-1
$x_2 = 5$	-1	-5	2	
$x_3 = 7$	-6			

۱- ابتدا با استفاده از ۳ تا گره پایینی جدول مشتق را تقریب می‌زنیم:

$$f'(3) = f'(x_0) = \frac{1}{h}[\Delta f_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 f_0] = \frac{1}{2}[-3 - \frac{1}{2}(-2)] = -1$$

۲- اگر از همه گره‌ها استفاده کنیم:

$$f'(4) = f'(x_1) = \frac{1}{h}[\Delta f_0 + \frac{1}{2}\Delta^2 f_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 f_0] = \frac{1}{2}[-2 + \frac{1}{2}(-1) + \frac{1}{3}(-1)] =$$
$$= \frac{1}{2}[-2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}] = \frac{1}{2}(\frac{-12-3-2}{6}) = \frac{-17}{12}$$

$f'(4)$ را به کمک سه گره آخر به‌دست می‌آوریم:

$f'(4)$ در نقاط گره نیست $\longleftarrow$ با استفاده از ۳ گره پایینی

$$f'(x)=\frac{1}{h}[\Delta f_0+(\theta-\frac{1}{2})\Delta^2 f_0]=\frac{1}{2}[-3+0]=-\frac{3}{2}$$

$$x=4 \quad , \quad x=x_0+h\theta \quad \Rightarrow \quad 4=3+2\theta \quad \Rightarrow \quad \theta=\frac{1}{2}$$

خطا در مشتق‌گیری عددی

$$x=4 \quad , \quad x_0=1 \quad \Rightarrow \quad 4=1+2\theta \quad \Rightarrow \quad \theta=\frac{3}{2}$$

$$f'(x)=\frac{1}{h}[\Delta f_0+(\theta-\frac{1}{2})\Delta^2 f_0+(\frac{\theta^2}{2}-\theta+\frac{1}{3})\Delta^3 f_0+\dots]$$

(مثلاً sinh در نزدیکی صفر به کدام یک معادل یک تابع خطی درجه ۱ عمل می‌کند.)

خطا در مشتق‌گیری عددی

تعریف O بزرگ :

اگر $f(h)$ یک تابع و k یک عدد حقیقی مثبت باشد، آنگاه می‌گوییم f از مرتبه‌ی $O(h^k)$ است. (یا متناسب با h^k است.)

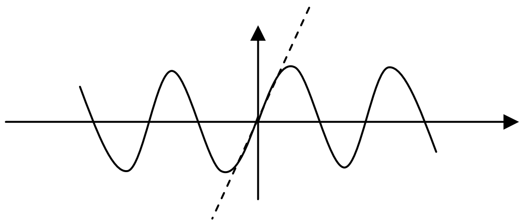
اگر $C \neq 0$ موجود باشد که:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h^k}=C$$

$$f(h)=\frac{1}{8}h^3+\frac{1}{2}h^4+\frac{1}{3}h^5+\frac{1}{4}h^6+\ldots$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h^3}=\frac{1}{\delta}\quad\Rightarrow\quad f(h)=O(h^3)$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h}=1\quad\Rightarrow\quad \sin(h)=O(h)$$



تمرین: خطاهای برشی روش‌های مشتق‌گیری را به‌دست آورید.

$$f'(x_i+\frac{h}{2})\approx\frac{f(x_i+h)-f(x_i)}{h}\qquad \text{خطا}=O(h^?)$$

مقدار تقریبی − مقدار واقعی = خطا

$$\text{خطا}=\frac{f(x_i+h)-f(x_i)}{h}-f'(x_i+\frac{h}{2})=O(h^?)$$

بسط تیلور $f(x_i)$ و $f(x_i+h)$ را حول نقطه $(x_i+\frac{h}{2})$ می‌نویسیم:

بسط تیلور حول x

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\frac{h^3}{3!}f'''(x)+\ldots$$

$$f(x_i+h)=f(x_i+\frac{h}{2}+\frac{h}{2})=f(x_i+\frac{h}{2})+\frac{h}{2}f'(x_i+\frac{h}{2})+\frac{h^2}{8}f''(x_i+\frac{h}{2})+\frac{h^3}{48}f'''(x_i+\frac{h}{2})+\ldots$$

$$f(x_i)=f(x_i+\frac{h}{2}-\frac{h}{2})=f(x_i+\frac{h}{2})-\frac{h}{2}f'(x_i+\frac{h}{2})+\frac{h^2}{8}f''(x_i+\frac{h}{2})-\frac{h^3}{48}f'''(x_i+\frac{h}{2})+\ldots$$

$$\text{خطا} = \frac{f(x_i+h)-f(x_i)}{h} - f'(x_i+\frac{h}{2}) = \frac{h^2}{24} f'''(x_i+\frac{h}{2}) + \ldots = O(h^2)$$

پس خطا از مرتبه h^2 است.

تعریف مشتق با استفاده از تفاضلات پسرو

چندجمله‌ای درون‌یاب با استفاده از تفاضلات پسرو به‌صورت زیر است:

$$x = x_n + h\theta$$

$$\frac{dx}{d\theta} = h \quad \rightarrow \quad dx = hd\theta \quad \rightarrow \quad \frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{h}$$

$$f(x) \approx p_n(x) = f_n + \theta \nabla f_n' + \frac{\theta(\theta+1)}{2!} \nabla^2 f_n + \ldots$$

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{dp_n(x)}{dx} = \frac{dp_n(x)}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{h}\frac{dp_n(x)}{d\theta} = \frac{1}{h}[\nabla f_n + (\theta + \frac{1}{2})\nabla^2 f_n + \frac{3\theta^2+6\theta+2}{6}\nabla^3 f_n + \ldots)]$$

$$\theta = 0 \quad \rightarrow \quad f'(x_n) \approx p_n'(x) = \frac{1}{h}[\nabla f_n + \frac{1}{2}\nabla^2 f_n + \frac{1}{3}\nabla^3 f_n + \ldots]$$

$$f'(x_n) \approx \frac{1}{h}[\nabla f_n]$$ ۲ نقطه

$$f'(x_n) \approx \frac{1}{h}[\nabla f_n + \frac{1}{2}\nabla^2 f_n], \ldots$$ ۳ نقطه

مثال: تقریبی از $f'(2)$ را با استفاده از فرمول مشتق تفاضلات پسرو به‌دست آورید.

x_i	f_i	∇f_i	$\nabla^2 f_2$
0	4		
		-5	
1	-1		9
		4	
2	3		

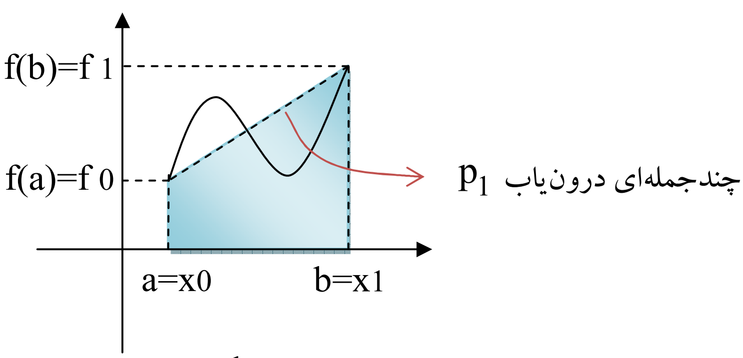
$$f'(x_n) \approx \frac{1}{h}[\nabla f_n + \frac{1}{2}\nabla^2 f_n] \qquad \theta = \frac{x - x_n}{h} = \frac{2-2}{1} = 0$$

$$f'(2) = f'(x_n) \approx \frac{1}{1}[4 + \frac{1}{2}(9)] = 8/5$$

انتگرال‌گیری عددی

۱- انتگرال‌گیری عددی نیوتن کاتس : اگر به جای انتگرال‌گیری از خود تابع، از چندجمله‌ای درون‌یاب انتگرال بگیریم، فرمول‌های انتگرال‌گیری نیوتن کاتس به‌دست می‌آید.

اگر از دو نقطه گرهی x_1, x_0 استفاده شود، روش انتگرال‌گیری ذوزنقه به‌دست می‌آید.



$$h = \frac{b-a}{n}$$

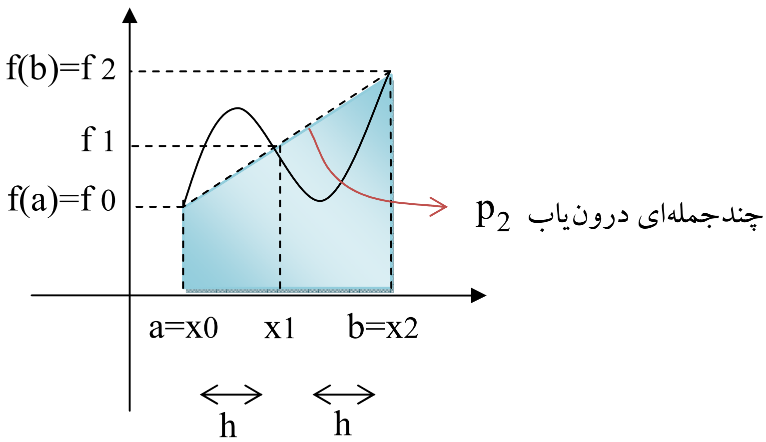
با فرض $x_{i+1}-x_i=h$:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}[f_0+f_1]$$

$$\begin{cases} x_1 \text{تـــا} x_0 = h \\ x_1 \text{تـــا} x_2 = h \end{cases}$$ یعنی فاصله‌ها مساویند

۲- اگر از سه نقطه گرهی $b=x_2$ و x_1 و $a=x_0$ استفاده کنیم (در چندجمله‌ای درون‌یاب) فرمول انتگرال‌گیری سیمسون را داریم:

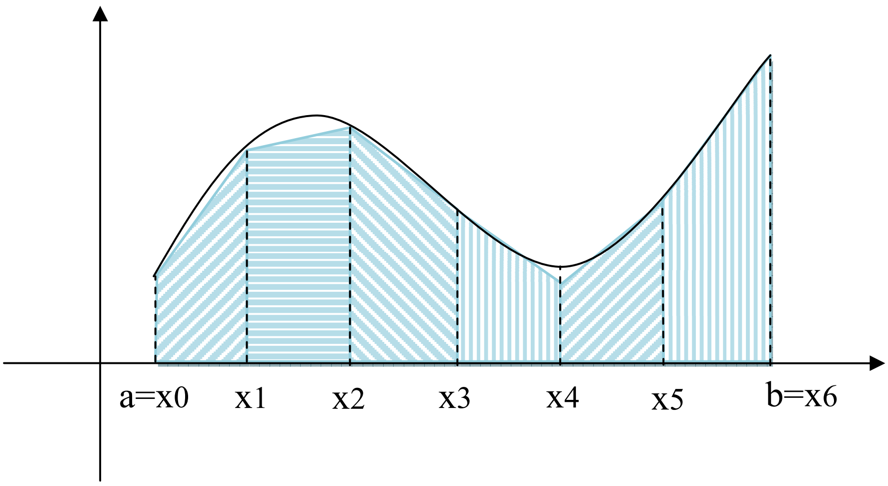
۳ نقطه $h=\dfrac{b-a}{2}$



$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}[f_0+4h+f_2]$$

روش ذوزنقه‌ای مرکب

نقطه ابتدا و انتها تنها یک بار جمع می‌شوند.



$$h = \frac{b-a}{n}$$

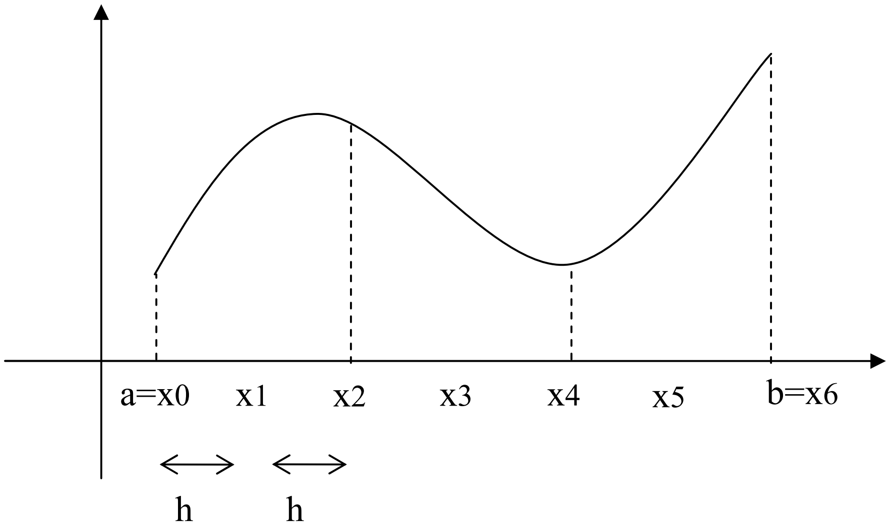
$$x_{i+1} - x_i = h \qquad i = 0,1,\ldots,n-1$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}[f_0 + f_1] + \frac{h}{2}[f_1 + f_2] + \ldots + \frac{h}{2}[f_{n-1} + f_n]$$

$$\approx \frac{h}{2}[f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \ldots + 2f_{n-1} + f_n]$$

روش سیمپسون مرکب

تعداد نقاط فقط باید فرد باشد.



$$h = \frac{b-a}{n}$$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}[f_0 + 4f_1 + f_2] + \frac{h}{3}[f_2 + 4f_3 + f_4] + \frac{h}{3}[f_4 + 4f_5 + f_6]$$
$$= \frac{h}{3}[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + 4f_5 + f_6]$$

مثال: مقدار تقریبی انتگرال $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ را به روش سیمسون و با شرایط زیر حل کنید.

الف) تقسیم فاصله به ۶ قسمت

ب) تفسیم فاصله به ۴ قسمت (حل این قسمت)

فاصله ۴ قسمت $n = 4 \quad \Rightarrow \quad h = \frac{b-a}{n} = \frac{\frac{\pi}{2}}{4} = \frac{\pi}{8}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \frac{h}{3}[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + f_4] = \frac{\pi}{24}[0 + 4(0/38) + 2(0/7) + 4(0/92) + 1]$$

x_i	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$3\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$
f_i	0	0/38	0/7	0/99	1

خطای انتگرال‌گیری روش‌های ذوزنقه‌ای سیمسون

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}[f_0 + f_1] + E_I$$ ذوزنقه

خطای ذوزنقه‌ای ساده $E_I = -\frac{h^3}{12} f''(\alpha) \qquad a \le \alpha \le b$

$\text{If} \quad f''(\alpha) = 0 \quad \Rightarrow \quad E_I = 0$ تابع خطی

توجه: روش انتگرال‌گیری ذوزنقه‌ای برای چندجمله‌ای‌های خطی دقیق است.

مثلاً $\int_1^{1000} (x+6)dx \qquad h = 0/1$

$$= \frac{x^2}{6} + 6x \Big|_1^{1000} = \left[\frac{(10000)^2}{2} + 6(10000) - (\frac{1}{2} + 6 \times 1)\right]$$

خطای ذوزنقه‌ای مرکب Trapezoidal

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\underbrace{[f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \ldots + 2f_{n-1} + f_n]}_{T(h)} + \underbrace{E}_{E(T(h))}$$ بازه n قسمتی است

$$E(T(n)) = \frac{-nh^3 f''(\alpha)}{12} \quad , \quad \alpha \in [a,b]$$

خطای مرکب هم برای تابع‌های خطی مقدار دقیق می‌دهد.

$$\frac{b-a}{h} = n = -\frac{(b-a)h^2 f''(\alpha)}{12}$$

توجه: برای پیدا کردن $\int_a^b f(x)dx$ به روش ذوزنقه‌ای مرکب با مقدار بازه‌ی n، کران بالای خطا به صورت زیر است:

$$|E(T(h))| \le \frac{(b-a)}{12} h^2 M_2 \qquad M_2 = \max f''(x) \qquad x \in (a,b)$$

خطای انتگرال‌گیری سیمسون

برای توابع درجه ۳، مقدار انتگرال‌گیری دقیق است.

$$x_1 \leftarrow \int_{x_0=a}^{x_2=b} f(x)dx = \frac{h}{3}[f_0 + 4f_1 + f_2] + E_I$$

$$E_I = -\frac{h^5}{90} f^4(\alpha) \quad , \quad \alpha \in [a,b] \quad \text{یا} \quad a < \alpha < b$$ خطای سیمسون ساده

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + ... + 4f_{n-1} + f_n] + E(S(h))$$

$$E(S(h)) = \frac{-nh^5 f^4(\alpha)}{180} = \frac{-(b-a)h^4 f^4(\alpha)}{180} \quad , \quad a < \alpha < b$$

کران بالای انتگرال‌گیری سیمسون برای $\int_a^b f(x)dx$ با n بازه (n زوج) به صورت زیر است:

$$\left|E(S(h))\right| \le \frac{(b-a)h^4}{180} M_4 \quad , \quad M_4 = \max\left|f^4(x)\right| \qquad x \in [a,b]$$

$$[\frac{b-a}{h}] = n$$

دنبال عدد صحیح می‌گردیم و تعداد بازه‌ای که می‌خواهیم بیشتر باشد در واقع جزء صحیح مقدار کمتری دارد.

$$[7/6] + 1 = 8$$

یعنی $$h = \frac{b-a}{8} = 0/125 = \frac{1}{8}$$

n را که بیشتر کردیم، h کمتر می‌شود.

مثال: برای محاسبه $\int_0^1 \sin x^2 dx$ به روش ذوزنقه مرکب طول گام h چقدر باشد به‌طوری که خطا از 10^{-4} کمتر باشد؟

$$\left|E(T(h))\right| < \frac{b-a}{12} h^2 M^2 < 10^{-2}$$
$$M_2 = \max\left|f''(x)\right| < 6$$
$$x \in [0,1]$$

$$f'(x) = 2x\cos x^2$$
$$f''(x) = 2\cos x^2 - 4x^2 \sin x^2$$
$$\left|f''(x)\right| = \left|2\cos x^2 - 4x^2 \sin x^2\right|$$

تابع cosx و sinx را از یک کمتر می‌گیریم:

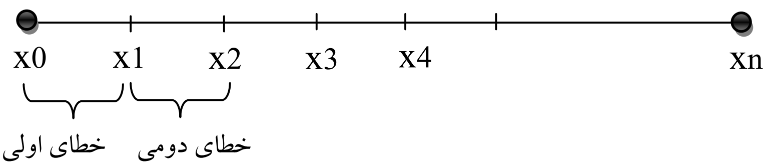
$$\to \ \left|f''(x)\right| < 2\left|\cos x^2\right| + 4x^2\left|\sin x^2\right| < 6$$

$$x^2 = \frac{\pi}{4} \qquad \sqrt{2} + \pi(\frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$\frac{h^2}{12}6 < 10^{-2} \quad \to \quad h^2 < 2\times 10^{-2} \quad \to \quad h = 0/14$$

$$n = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{0/14} = \frac{100}{14} = 7/14 \quad \to \quad n = 8 \quad \to \quad h = \frac{1}{8}$$

چون n زوج است، تعداد بازه‌هایی که انتگرال‌گیری می‌کنیم، $\frac{n}{2}$ است.



بر اساس قضیه مقدار میانی

$$E(S(h)) = -\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \frac{h^5 f^4(\alpha_i)}{90} = -\frac{h^5}{90}\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} f^4(\alpha_i) \qquad *$$

$$f^4(x) = M \quad , \quad f^4(x) = m$$
$$x \in [a,b] \qquad x \in [a,b]$$

$$\left.\begin{array}{l} m \le f^4(d_1) \le M \\ \text{مینیمم} \qquad\qquad \text{ماکزیمم} \\ \\ \frac{n}{2} m \le \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} f^4(\alpha_i) \le \frac{n}{2} M \end{array}\right\} \Rightarrow \quad m \le \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} f^4(\alpha_i) \le M$$

$$f^4(\beta) = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} f^4(\alpha_i)$$

$$\beta \in [a,b]$$

$$* = -\frac{nh^5}{2(90)} f^4(\beta) = -\frac{nh^5}{180} f^4(\beta) = -\frac{(b-a)}{180} h^4 f^4(\beta)$$

روش ضرایب مجهول نیوتن کاتس

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \approx W_0 f(x_0) + W_1 f(x_1) \approx W_0 f_0 + W_1 f_1$$

برای تابع $f(x)=1$ و $f(x)=x$ هم دقیق باشد، یعنی مقدار دقیق انتگرال را به ما بدهد.

w_0 , w_1 را چنان بیابیم که فرمول انتگرال‌گیری برای چندجمله‌ای‌های خطی دقیق باشد. فرض می‌کنیم $f(x)=1$ باشد.

$$\begin{array}{ll} f(x)=1 \quad \rightarrow & \left\{ \begin{array}{l} \int_{x_0}^{x_1} 1dx = w_0 + w_1 = h = x_1 - x_0 \\ \\ \int_{x_0}^{x_1} xdx = w_0 x_0 + w_1 x_1 = \frac{{x_1}^2 - {x_0}^2}{2} \end{array}\right. \\ f(x)=x \quad \rightarrow & \end{array}$$

۲ معادله، ۲ مجهول داریم $w_1 = w_0 = \frac{x_1 - x_0}{2} = \frac{h}{2}$

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \approx \frac{h}{2}[f_0 + f_1]$$ روش ذوزنقه‌ای ساده

$$\begin{cases} -w_0x_0 - x_0w_1 = -x_0(x_1 - x_0) = -x_0x_1 + x_0^2 \\ w_0x_0 + x_1w_1 = \frac{x_1^2 - x_0^2}{2} \end{cases}$$

جمع می‌کنیم $\Rightarrow \quad w_1(x_1 - x_0) = -x_0x_1 + x_0^2 + \frac{x_1^2}{2} - \frac{x_0^2}{2}$

داریم: $2w_1(x_1 - x_0) = x_0^2 + x_1^2 - 2x_0x_1$

$$\xrightarrow{\times -} 2w_1(x_1 - x_0) = (x_1 - x_0)^2$$

$$w_1 = \frac{x_1 - x_0}{2} = \frac{h}{2} \quad \& \quad w_0 = \frac{h}{2}$$

h فاصله بین دو نقطه است.

$$* \quad \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \approx w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1) \simeq w_0 f_0 + w_1 f_1$$

فرمول نیوتن کاتس سه نقطه‌ای:

h فاصله نقطه‌ها از همدیگر است.

$$x_1 \leftarrow \int_{a=x_0}^{b=x_2} f(x)dx \approx w_0 f_0 + w_1 f_1 + w_2 f_2$$

$$f(x)=1 \quad \rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{x_0}^{x_2} 1dx = w_0 + w_1 + w_2 \\ \int_{x_0}^{x_2} xdx = w_0x_0 + w_1x_1 + w_2x_2 = \dfrac{x_1^{\ 2} - x_0^{\ 2}}{2} \\ \int_{x_0}^{x_2} x^2dx = w_0x_0^{\ 2} + w_1x_1^{\ 2} + w_2x_2^{\ 2} \end{array} \right.$$

$$f(x)=x \quad \rightarrow$$

$$w_0 = \frac{h}{3} \quad , \quad w_1 = \frac{4h}{3} \quad , \quad w_2 = \frac{h}{3}$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}[f_0 + 4f_1 + f_2]$$ روش سیمسون

فرمول نیوتن کاتس $\frac{3}{8}$ سیمسون: اگر همین مراحل را برای فرمول

$$\begin{array}{l} x_2 \leftarrow \\ x_1 \leftarrow \end{array} \quad \int_{a=x_0}^{b=x_3} f(x)dx = w_0f_0 + w_1f_1 + w_2f_2 + w_3f_3$$

انجام دهیم، فرمول انتگرال‌گیری $\frac{3}{8}$ سیمسون را به‌دست می‌آوریم:

دقیق $\left\{ \begin{array}{l} f=1 \\ f=x \\ f=x^2 \\ f=x^3 \end{array} \right. \quad \therefore \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)dx \approx \frac{3h}{8}[f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3]$

ارتباط کلی بین خطاهای نیوتن کاتس

برای خطی $n=1$ (ذوزنقه) ۲ نقطه خطای نیوتن کاتس $= M_1 h^3 f^{(2)}(\alpha) \nearrow (n+1)$

برای درجه ۲ و ۳ $n=2$ (سیمسون) ۳ نقطه‌ای خطای نیوتن کاتس $= M_2 h^5 f^{(4)}(\alpha) \nearrow (n+2)$

برای درجه ۳ $n=3$ ($\frac{3}{8}$سیمسون) ۴ نقطه خطای نیوتن کاتس $= M_3 h^5 f^{(2)}(\alpha) \nearrow (n+1)$

$$|M_2| < |M_3|$$

$\therefore$ پس روش سیمسون از روش $\frac{3}{8}$ سیمسون دقیق‌تر است.

توجه: در فرمول‌های نیوتن کاتس نقاط $x_0, x_1, \ldots, x_n$ ، معلوم بوده، با فواصل مساوی که (h) است.

اما در روش گوس هم ضرایب مجهول هستند و هم نقاط.

b و a را به جای x_1, x_0 می‌گذاریم، چون معلوم نیست و ممکن است x_1, x_0 بین b و a باشد.

$$\int_{x_0 \neq a}^{b} f(x)dx \approx w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1)$$

اکنون چهار مجهول داریم که با تشکیل ۴ معادله این مجهول‌ها به‌دست می‌آید. معادلات را به گونه‌ای می‌نویسیم که این فرمول انتگرال‌گیری تا درجه حداکثر ۳ دقیق باشد. فرض کنید $(b = 1, a = -1)$ باشد:

۴ معادله، ۴ مجهول داریم. نهایتاً ضرایب و نقاط را به‌دست می‌آوریم.

تابع در این نقاط تعریف می‌شود و با فرض پیوستگی تابع برایمان مبرهن شده است.

: مهم

$$\begin{cases} f(x)=1 \\ f(x)=x \\ f(x)=x^2 \\ f(x)=x^3 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \int_{-1}^{1} 1dx = w_0 + w_1 \\ \int_{-1}^{1} xdx = w_0x_0 + w_1x_1 \\ \int_{-1}^{1} x^2dx = w_0{x_0}^2 + w_1{x_1}^2 \\ \int_{-1}^{1} x^3dx = w_0{x_0}^3 + w_1{x_1}^3 \end{cases}$$

پس از حل دستگاه ۴ معادله و چهار مجهول فوق، ضرایب و نقاط به صورت زیر تعیین می‌شوند:

$$w_0 = w_1 = 1$$

$$\begin{cases} x_0 = -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx f(-\frac{\sqrt{3}}{3}) + f(\frac{\sqrt{3}}{3})$$

چندجمله‌ای از درجه ۳ هم، مقدار دقیق است.

تغییر متغیر:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx \quad , \quad x = \frac{1}{2}[(b-a)u + (b+a)] \quad \rightarrow \quad dx = \frac{1}{2}(b-a)du$$

$$\begin{cases} u=-1 & \rightarrow \quad x=a \\ u=0 & \rightarrow \quad x=2b \end{cases}$$

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{1}{2}(b-a)\int_{-1}^{1} f(\frac{1}{2}[(b-a)u+(b+a)])du$$

تمرین: فرمول قاعده ۲ نقطه‌ی گاوس را به‌دست آورید و سپس انتگرال $\int_{a=1}^{b=2}\frac{\sin^2 x}{x}dx$ را با این روش تقریب بزنید.

$$\int_{a=1}^{b=2}\frac{\sin^2 x}{x}dx=\frac{1}{2}(2-1)\int_{-1}^{1} f(\frac{1}{2}(u+3))du=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{\sin^2(\frac{1}{2}u+\frac{3}{2})}{(\frac{1}{2}u+\frac{3}{2})}du$$

کران انتگرال از ۱- تا این است.

$$\int_1^2\frac{\sin^2 x}{x}dx\approx\frac{1}{2}[\frac{\sin^2(-\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{3}{2})}{(-\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{3}{2})}+\frac{\sin^2(\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{3}{2})}{(\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{3}{2})}]$$

سؤال: مقدار انتگرال روبه‌رو را با روش دونقطه‌ای گاوس حساب کنید.

$$\int_1^2 (x^3+2x^2+5)dx$$

* از آن‌جایی که روش ۲ نقطه‌ای گاوس برای چندجمله‌ای‌های با درجه ۳ دقیق است، بنابراین کافی است انتگرال معمولی را حساب کنید.

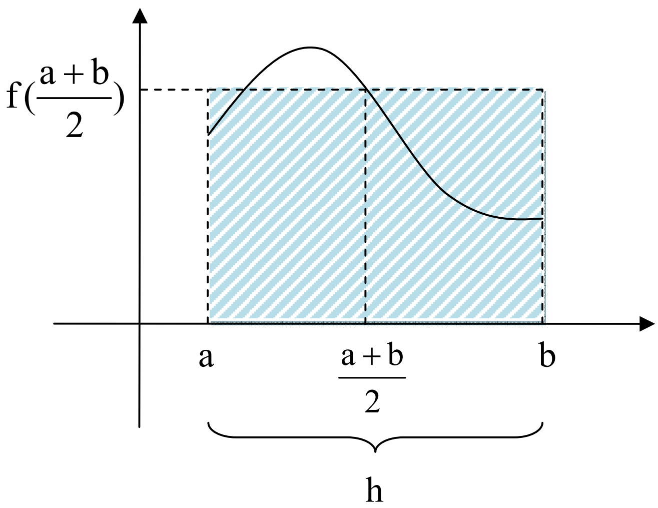
فرمول قاعده‌ی ۳ نقطه‌ای گاوس :

تقارن در این روش برای جواب‌ها واجب است.

$$\int_{a=-1}^{b=1} f(x)dx \approx \frac{5}{9}f(-\frac{\sqrt{3}}{3})+\frac{8}{9}f(0)+\frac{5}{6}f(\frac{\sqrt{3}}{3})$$

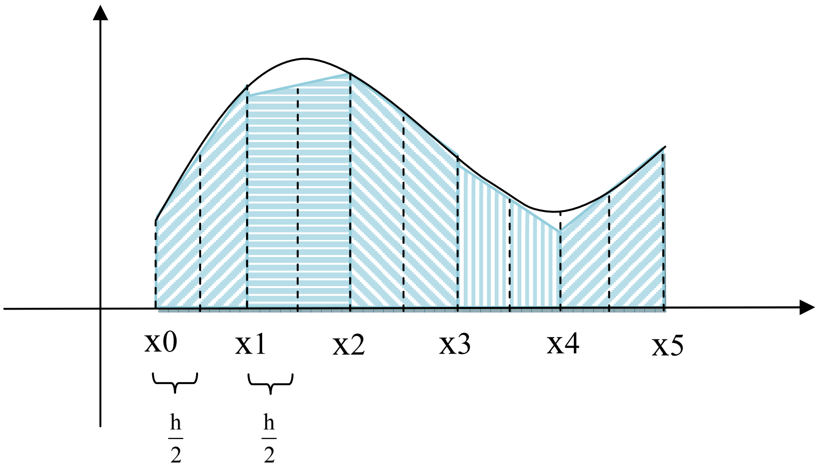
توجه: فرمول انتگرال‌گیری گاوس تا درجه حداکثر ۵ دقیق است.

قاعده نقطه میانی



$$\int_{a}^{b} f(x)dx = hf(\frac{a+b}{2})$$ قاعده نقطه میانی ساده

قاعده نقطه میانی مرکب چیست و فرمول خطا قاعده نقطه میانی مرکب را به‌دست آورید.



$$x_{i+1} - x_i = h \qquad i = 0,1,\dots,n$$

$$M(h) = h[f(x_0 + \frac{h}{2}) + f(x_1 + \frac{h}{2}) + \dots + f(x_{n-1} + \frac{h}{2})]$$
$$= h\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i + \frac{h}{2})$$

$$\int_0^1 x^2 dx \qquad h = \frac{1}{4}$$

x_i	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1
f_i					

$$\frac{1}{4}[f(\frac{1}{8}) + f(\frac{3}{8}) + f(\frac{5}{8}) + f(\frac{7}{8})] = \frac{1}{4}(\frac{1}{64} + \frac{9}{64} + \frac{25}{64} + \frac{49}{64}) = \frac{1}{4} \times \frac{84}{64} = \frac{84}{256}$$

خطای نقطه میانی مثل خطای ذوزنقه‌ای است اما ضریبش کوچکتر است.

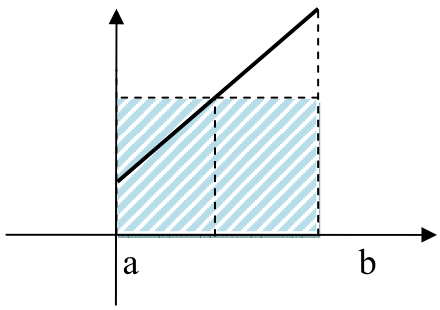
خطا در قاعده نقطه میانی ساده

$$E_I = \frac{h^3}{24} f''(\alpha) \qquad \alpha \in [a,b]$$

خطا در قاعده نقطه میانی مرکب

$$E(M(h)) = \frac{nh^3}{24} f''(\beta) \qquad \beta \in [a,b] \qquad nh = (b-a)$$
$$= \frac{(b-a)h^2}{24} f''(\beta)$$

روش قاعده نقطه میانی تا درجه یک دقیق است و خطای آن برابر صفر است.



سؤال: کدامیک از گزینه‌های زیر صحیح می‌باشد؟

الف) برای محاسبه $\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx$ می‌توان از قاعده ذوزنقه‌ای استفاده نمود.

ب) برای محاسبه $\int_1^2 \frac{\sin x}{x-1} dx$ می‌توان از قاعده سیمسون استفاده نمود.

✓ ج) دقت روش سیمسون از روش ذوزنقه بیشتر است.

د) همواره روش سیمسون و روش ذوزنقه جواب‌های یکسانی برمحاسبه انتگرال به‌دست می‌دهند.

فصل پنجم : حل عددی معادلات دیفرانسیل معمولی

هدف: حل عددی معادلات به فرم:

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

به $y(x_0) = y_0$ شرط اولیه می‌گویند.

مثال:

$$\begin{cases} y' = xy \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx} = xy \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = \int x dx \quad \Rightarrow \quad \ln y = \frac{1}{2}x^2$$

$$\begin{cases} y' = ce^{\frac{1}{2}x^2} \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 1 = ce^{\frac{1}{2}(0)^2} \quad \Rightarrow \quad c = 1 \quad \Rightarrow \quad y = e^{\frac{x^2}{2}}$$

روش تکرار پیکارد

می‌توانیم $y' = f(x,y)$ را به صورت $y' = f(x,y(x))$ نوشت و از آن نتیجه می‌شود: $\frac{dy}{dx} = f(x,y(x))$

$$\int_{x_0}^{x} dy = \int_{x_0}^{x} f(t,y(t))dt = y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(t)\cdot y(t)dt$$

$$y_0 = y(t)$$

نتیجه:

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_0(t))dt$$

$$y_2 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t))dt$$

...

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))dt$$

مثال: جواب معادله دیفرانسیل $\begin{cases} y' = xy^2 + 2y \\ y(1) = 2 \end{cases}$ را از روش تکرار پیکارد و تا y_2 به‌دست آورید.

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt = 2 + \int_{1}^{x} 4t + 4 = 2 + 2t^2 + 4t\Big|_1^x = 2x^2 + 4x - 4$$

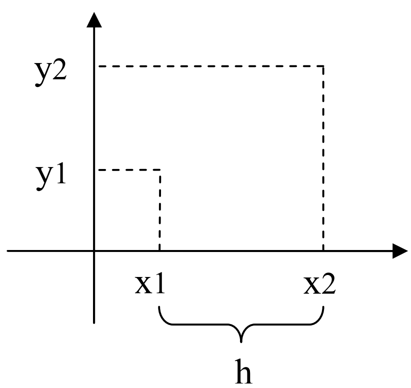
انتگرال را به‌دست می‌آوریم

$$y_2 = y_0 + \int_{1}^{x} t(2t^2 + 4t - 4)^2 + 2(2t^2 + 4t - 4)dt$$

روش تک گامی

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y \end{cases}$$

ساده‌ترین روش تک‌گامی روش اویلر می‌باشد. اگر داشته باشیم $x = x_0$ آن‌گاه $y = y_0(x)$ در این روش (اویلر) ، h را طول گام می‌گویند.



$$x_2 = x_1 + h$$

$$x_1 = x_0 + h \quad \Rightarrow \quad y_1 = y(x_0 + h)$$

$$y_1 \simeq y_0 + hf(x_0, y_0)$$
$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1)$$
$$\dots$$
$$y_n = y_{n-1} + hf(x_{n-1}, y_{n-1})$$

مثال: فرض کنید h=0/4 مقدار تقریبی y(2/8) را برای معادله دیفرانسیل زیر به روش اویلر به‌دست آورید.

$$\begin{cases} y' = xy^2 + y \\ y(2) = 3 \end{cases}$$

$$x_0 = 2$$
$$y_0 = 3$$

$$x_1 = x_0 + h = 2 + 0/4 = 2/4$$

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = 3 + 0/4(2 \times (3)^2 + 2) = 3 + 0/4(21) = 11/4$$

$$x_2 = x_1 + h = 2/8$$

$$y_2 = 11/4 + 0/4[(2/4)(11/4)^2 + 11/4)] = 140/72$$

روش بست تیلور

فرمول کلی:

$$y_0(x_0 + h) = y(x_0) + hy'(x_0) + \frac{h^2}{2!}y''(x_0) + \dots + \frac{h^n}{n!}y^{n'}(x_0)$$

مثال: معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} y' = (e^x)^y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

الف) با استفاده از بست تیلور مرتبه ۳ و $h = 0/1$ تخمینی از $y(0/1)$ را به‌دست آورید.

$$x_0 = 0 \quad , \quad n = 0/1$$

$$\begin{cases} y(0/1) \quad \to \quad y(x_0 + h) = y_0 + hy'(0) + \frac{h^2}{2!} y''(0) + \frac{h^3}{3!} y''(0) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$y'(x) = e^{x(y(x))} \quad \to \quad y'(0) = e^{0^1} = 1^0$$

$$y''(x) = [e^{x(y(x))}]' = [y(x) + xy'(x)]e^{xy(x)} = [y(0) + 0y'(0)]e = 1^{ay(0)}$$

$$y'''(x) = [y(x) + xy'(x)e^{xy(x)}]' = [y'(x) + y'(x) + xy''(x)]e^{xy(x)} + [y(x_0) + xy'(x)]^2$$

$$y''' = (1 + 1 + 0)e^{0(1)} + (1 + 0)e = 3$$

$$y(0/1) + (0/1)(1^0) + \frac{(0/1)^2}{2}(1) + \frac{0/1}{6} \times 3$$

ب) خطای y را تقریب بزنید.

$$\frac{h^4}{24} f''''(0)$$

روش‌های رنگه کوتاهی مرتبه ۲

طول گام h

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} k_1 = h(f(x_0, y_0)) \\ k_2 = h(f(x_0 + h), y_0 + k_1) \end{cases}$$

$$y = y(x_0 + h) \quad \rightarrow \quad y_0 + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

مثال: $\begin{cases} y' = 4e^{0/8x} - 0/5y \\ y(0) = 2 \end{cases}$ را با انتخاب h=0/5 به روش رونگه کوتای ۲ حل کنید.

$$k_1 = 0/5(4e^{0/8(0)} - 0/5 \times (2)) = 1/5$$

$$k_2 = h(f(\underbrace{x_0 + h}_{0/5}), \underbrace{y_0 + k_1}_{0/5}) = 0/5(4e^{0/8(5)} - 5 \times (3/5)) = 1/95$$

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = 2 + \frac{1}{2}(1/5 + 1/95) = 3/72$$

فصل ششم : حل عددی دستگاه‌های معادلات خطی

روش ژاکوبی

در این روش باید یک نقطه شروع برای x داشته باشیم که هم می‌تواند ذکر شده باشد و هم می‌توانیم آن را خودمان بگیریم.

این روش را با ذکر یک مثال توضیح می‌دهیم:

مثال: جواب دستگاه زیر را به روش ژاکوبی تا دو مرحله حل کنید.

فرض می‌کنیم که: $Z=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$(1)\begin{cases} -4x_0+12x_2-6x_3=0 \\ 7x_1+4x_2=12 \\ -6x_2+14x_3=0 \end{cases}$$

$$(2)\begin{cases} x_1=\dfrac{12-4x_2}{7} \\ x_2=\dfrac{4x_1+6x_3}{12} \\ x_3=\dfrac{6x_2}{14} \end{cases}$$

Z را در ۲ قرار می‌دهیم

$$(3)\begin{cases} x_1=\dfrac{12-4}{7}=1/14 \\ x_2=\dfrac{4+6}{12}=0/83 \\ x_3=\dfrac{6}{14}=0/42 \end{cases}$$

$$(4)\begin{cases} {x_1}^{(2)}=\dfrac{12-4(0/83)}{7} \\ {x_2}^{(2)}=\dfrac{4(1/14)+6(0/42)}{12} \\ {x_3}^{(2)}=\dfrac{6(0/83)}{14} \end{cases}$$

روش گاوس سایدل

در این روش به جای x_3, x_2 عدد همان مرحله را که به‌دست آوردیم جای‌گذاری می‌کنیم.

توجه: شرط همگرایی روش‌های گاوس سایدل و ژاکوبی: قطر غالب سطری اکید است یعنی:

$$\left|a_{ij}\right| > \sum_{i=1}^{n}\left|a_{ij}\right| \qquad i \neq j$$

مثال: $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 7 & -4 \\ 3 & 1 & 8 \end{vmatrix}$

یعنی جمع هر دو عدد سطر از قدرمطلق قطر اصلی کمتر باشد، در غیر این‌صورت باید جابجا کنیم.

مثال: با انجام تغییرات لازم در دستگاه معادلات خطی زیر آن‌را به روش گاوس سایدل با انجام سه تکرار چنان حل کنید که دنباله حاصل همگرا به جواب واقعی دستگاه باشد.

نقطه دلخواه : $g = \begin{pmatrix} x^0 \\ y^0 \\ z^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$(1)\begin{cases} -4x + 12y - 6z = 0 \\ -7x - 4y = 12 \\ -6y + 14z = 0 \end{cases}$$

جابجا شده (۱) $(2)\begin{cases} -7x - 4y = 12 \\ -4x + 12y - 6z = 0 \\ -6y + 14z = 0 \end{cases}$

$$(3)\begin{cases} x = \dfrac{12+4y}{-7} \\ y = \dfrac{4x+6z}{12} \\ z = \dfrac{6y}{14} \end{cases} \quad \text{را در معادله قرار می‌دهیم } g \rightarrow (4)\begin{cases} x^1 = \dfrac{12}{-7} = 1/14 \\ y^1 = \dfrac{-4(1/71)+6(0)}{12} = 0/57 \end{cases}$$

فصل هفتم : مقادیر و بردارهای ویژه یک ماتریس

اگر A یک ماتریس مربعی باشد برای به‌دست آوردن مقدار ویژه ماتریس معادله $|A-\lambda I|=0$ را حل می‌کنیم. مقادیر λ که به‌دست می‌آید، مقادیر ویژه است.

بردار ویژه : اگر برای یک λ (مقدار ویژه) بردار x غیر صفر موجود باشد که $Ax=\lambda x$ ، یک بردار ویژه متناظر با λ نامیده می‌شود.

مثال: مقدار ویژه ماتریس $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ را به‌دست آورید.

$$p(\lambda)=|A-\lambda I|=0$$

$$p(\lambda)=\left|\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right|=\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix}=0$$

$$(2-\lambda)(2-\lambda)=0 \qquad \lambda=2 \quad , \quad \lambda=3$$

روش توانی برای به‌دست آوردن بزرگترین مقدار ویژه از نظر قدر مطلق را با یک مثال حل می‌کنیم.

مثال: بزرگترین مقدار ویژه از نظر قدرمطلق را برای ماتریس زیر تقریب برآیند تا دو مرحله به‌دست آورید.

نقطه شروع : $x^0=\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}$

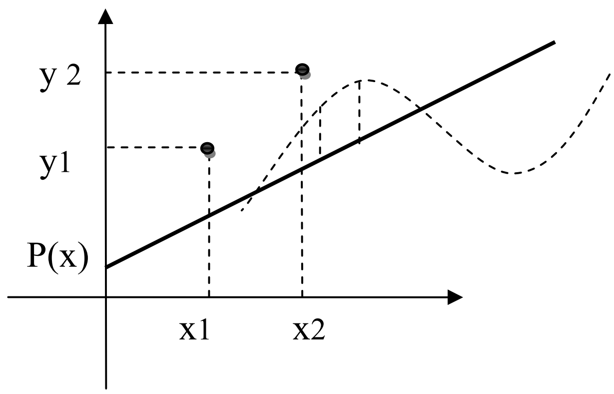
$$A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 10 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 1 \end{vmatrix} = A(x)^0 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 10 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 17 \\ 17 \\ 10 \end{vmatrix} \qquad \alpha_0 = 17$$

بزرگترین

$$(1) \quad x_1 = \frac{A(x)^0}{17} \quad \to \quad Ax_1^{(1)} = \begin{vmatrix} 5 \\ 9/5 \\ 7/8 \end{vmatrix} \quad \to \quad x_1 = 9/5 \quad \to \quad x^2 = \frac{Ax^{(1)}}{\alpha_1} \begin{vmatrix} 0/52 \\ 1 \\ 0/83 \end{vmatrix}$$

$$(2) \quad x_1 = \begin{vmatrix} \frac{7}{17} \\ \frac{17}{17} \\ \frac{10}{17} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0/41 \\ 1 \\ 0/59 \end{vmatrix} \quad \to \quad Ax^2 = \begin{vmatrix} 5/7 \\ 11/6 \\ 8/4 \end{vmatrix} \quad \alpha_2 = 11/6 \quad \to \quad \alpha_2 = 11/6$$

فصل هشتم : برازش منحنی



تابع جدولی زیر مفروض است:

x_i	x_1	x_2	...	x_n
y_i	y_1	y_2	...	y_n

هدف پیدا کردن خط کمترین مربعات است یعنی خطی با ضابطه $p(x) = Ax + B$ به شرطی که مجموع زیر مینیمم شود:

$$E(A,B) = \sum_{i=1}^{n} p(x_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (Ax + B - y_i)^2$$

$$\frac{dE}{dA} = \sum_{i=1}^{n} 2(x_i)(Ax_i + B - y_i) = 0 \quad \rightarrow \quad 2A\sum_{i=0}^{n} x_i^{\ 2} + 2B\sum_{i=0}^{n} x_i - 4x_i y_i = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{dE}{dB} = \sum_{i=1}^{n} 2(Ax_i + B - y_i) = 0 \quad \rightarrow \quad A\sum_{i=0}^{n} x_i + nB - \sum_{i=0}^{n} y_i = 0 \qquad (2)$$

مثال: خط کمترین مربعات را برای تابع جدولی زیر به‌دست آورید.

x_i	1	2	3	6
y_i	3	0	-1	1

$$(1)\quad \sum_{i=0}^{n} x_i^2 = 57 \quad , \quad \sum_{i=0}^{n} x_i = 13 \quad , \quad \sum_{i=0}^{n} x_i y_i = 5$$

$$(2)\quad \sum_{i=0}^{n} y_i = 3$$

$$\begin{cases} 57A - 13B = 5 \\ 13A + 4B = 3 \end{cases}$$

بعد از محاسبه A و B را در $y = Ax + B$ قرار می‌دهیم.

سهمی کمترین مربعات:

برای تابع جدولی مفروض یک چندجمله‌ای به فرم $p(x) = Ax + B$ پیدا می‌کنیم که تابع زیر را مینیمم کند.

$$\sum(A,B,C) = \sum(Ax_i^2 + Bx_i + C - y_i)^2$$

$$\begin{array}{ll} (1)\ \dfrac{dE}{dA} & \\ (2)\ \dfrac{dE}{dB} & \\ (3)\ \dfrac{dE}{dC} & \end{array} \quad \begin{cases} (\sum_{i=1}^{n} x_i^4)A + (\sum_{i=1}^{n} x_i^3)B - (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)C = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i \\ (\sum_{i=1}^{n} x_i^3)A + (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)B - (\sum_{i=1}^{n} x_i)C = 4x_i y_i \\ (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)A + (\sum_{i=1}^{n} x_i)B + nC = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases}$$

مثال: سهمی کمترین مربعات را برای ۴ نقطه (3,3-) و (0,1) و (2,1) و (4,3) به‌دست آورید.

x_i	0	2	-3	4
y_i	1	1	3	3

$$\sum_{i=1}^{4} x_i^4 = 353 \quad , \quad \sum_{i=1}^{4} x_i^3 = 45 \quad , \quad \sum_{i=1}^{4} x_i^2 = 29 \quad , \quad \sum_{i=1}^{4} x_i^2 y_i = 79$$

$$\sum_{i=1}^{4} x_i y_i = 5 \quad , \quad \sum_{i=1}^{4} y_i = 8$$

$$\begin{cases} 353A + 45B + 29C = 79 \\ 45A + 29B + 3C = 5 \\ 29A + 3B + \underbrace{4}_{n=4} C = 8 \end{cases}$$

بعد از به‌دست آوردن A و B و C را در $y = Ax^2 + B + C$ قرار می‌دهیم.

خطی‌سازی داده‌ها

برازش منحنی را برای جدول جدید به‌دست می‌آوریم.

x_i	x_1	x_2	...	x_n
$\ln y_i = Y_i$	Y_1	Y_2	...	Y_n

$$y = C\exp(Ax) = Ce^{Ax}$$
$$\ln y = \ln(Ce^{Ax})$$
$$\ln y = \ln C + \ln e^{Ax}$$
$$Y = \ln y = Ax + \ln C$$

$$Y = AB + B$$
$$\ln C = B \quad \rightarrow \qquad C = e^{B}$$
$$y = Ce^{Ax}$$

مثال: از روش خطی‌سازی داده‌ها برای پیدا کردن برازش‌های نمایی تابع جدولی زیر استفاده کنید.

x_i	0	1	2	3	4
y_i	1/5	2/5	3/5	5	7/5

$$\sum_{i=1}^{5} x_i^{\,2} = 30 \quad , \quad \sum_{i=1}^{5} x_i = 10 \quad , \quad \sum_{i=1}^{5} x_i Y_i = 16/3 \quad , \quad \sum_{i=1}^{5} Y_i = 6/2$$

$$\begin{cases} 30A + 10B = 16/3 \\ 10A + 5B = 6/2 \end{cases}$$

$$\rightarrow \quad A = 0/39 \quad , \quad B = 0/46 \quad , \quad C = e^{0/46} = 1/58$$

$$y = Ce^{Ax} = 1/58e^{0/39x}$$

x_i	0	1	2	3	4
$\ln y_i = Y_i$	0/4	0/91	1/25	1/6	2/01

مثال: می‌خواهیم برازشی به فرم $Ax^3 + B = y$ برای یک تابع جدولی پیدا کنیم، ضرایب A و B با چه معادله‌ای تعیین می‌شوند؟

$$E(A,B) = \sum (Ax_i^3 + B - y_i)$$

$$\frac{dE}{dA} = \sum 2(x_i^3)(Ax_i^3 + B - y_i) = 0 \quad \rightarrow \quad 2(\sum x_i^6)A + (\sum x_i^3)B + 4x_i^3 y_i = 0$$

$$\frac{dE}{dB} = \sum 2(Ax_i^3 + B - y_i) = 0 \quad \rightarrow \quad \sum x_i^3 A + nB = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

سؤال: چندجمله‌ای لاگرانژ بنویسید که از نقاط (x_0, f_0) و (x_1, f_1) و (x_2, f_2) بگذرد و سپس عبارت $\dfrac{3x^2 + x + 1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$ را به صورت جمع جبر با چند کسر جزئی بیان کنید.

حل: چندجمله‌ای درون‌یاب تابع $f(x) = 3x^2 + x + 1$ را در نقاط گره‌ای $x_0 = 1$ و $x_1 = 2$ و $x_2 = 3$ می‌نویسیم. چندجمله‌ای به‌دست آمده با خود تابع یکی است و می‌توان کسر جایگزین کرد.

$$L_0 = \frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)} = \frac{1}{2}(x-2)(x-3)$$

$$L_1 = \frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)} = -(x-1)(x-3)$$

$$L_2 = \frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)} = \frac{1}{2}(x-1)(x-2)$$

x_i	1	2	3
y_i	5	15	31

$$p_2(x) = f_0L_0 + f_1L_1 + f_2L_2$$

$$p_2(x) = \frac{5}{2}(x-2)(x-3) - 15(x-2)(x-3) + \frac{31}{2}(x-1)(x-2)$$

تمرین: معادله دیفرانسیل زیر مفروض است:

$$\begin{cases} y' = 2y \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

اولاً جواب واقعی را محاسبه کنید. h تا چه اندازه کوچک انتخاب شود تا جواب تقریب به‌دست آید. از روش اویلر تا ۴ رقم اعشار صحیح باشد.

$$\frac{dy}{dx} = 2y \quad \rightarrow \quad \int\frac{dy}{y} = \int 2dx \quad \rightarrow \quad \ln y = 2x \times 0 \quad \rightarrow \quad C = 0$$

$$\ln y = 2x$$

خطا :

$$E = \frac{y''(\alpha)}{2!} + h^2 \qquad\qquad y(0) + hy'(0) + \frac{h^2 y''(0)}{2!}$$

$$|E| < \frac{h^2}{2}\max y''(\alpha) \qquad\qquad y(x) = e^{2x} \quad , \quad y'(x) = 2e^{2x}$$

$$|E| < \frac{h^2}{2}4e^2 = 14/77h^2 < \frac{1}{2}\times 10^{-4} = 4e^2$$

$$\max|y'(\alpha)| = 4e^2$$

$$h^2 < \frac{1^2}{2\times 14/77}\times 10^{-4} \quad \rightarrow \quad h < 10^{-2}\sqrt{\frac{1}{2\times 14/77}} = 18\times 10^{-4}$$

طول گام h