به نام خدا

جزوه درسی محاسبات عددی

استاد: شیرمحمدی

فصل اول: خطاها

۱–مقدمه

هدف محاسبات عددی، حل مسائل عددی پیچیده، تنها با استفاده از اعمال ساده حساب است. روش-های محاسبه الگوریتم نامیده می‌شوند. به خاطر اهداف مورد نظر در این درس، الگوریتم را به عنوان توصیفی کامل و بدون ابهام از روش ساختن جواب یک مساله ریاضی تعریف می‌کنیم. هدف ما جستجوی الگوریتم‌های محاسباتی است. درحالی‌که بعضی مسائل داری چندین الگوریتم برای حل هستند، مسائلی یافت می‌شوند که هنوز الگوریتم رضایت بخشی برای حل آنها وجود ندارد. هرگاه یک مساله الگوریتم‌های متفاوتی برای حل داشته باشد، دلایل مختلفی برای انتخاب یکی از آنها به عنوان الگوریتم بهتر وجود دارد. دو دلیل عمده این انتخاب، سرعت و دقت الگوریتم می‌باشد. پیشرفت‌های سریع در طراحی کامپیوترهای رقمی تاثیر فراوانی در محاسبات عددی داشته است. هم اینک کامپیوترها میلیون‌ها عملیات محاسباتی را در کمتر از یک ثانیه انجام می‌دهند. این بدان معنی است که انجام محاسبات طولانی و پیچیده امکان‌پذیر شده، اما درعوض امکان وجود خطا نیز افزایش پیدا کرده است.

برنامه‌نویسی کامپیوتر اساسا به مساله به رمز درآوردن الگوریتم‌ها به شکلی مناسب برای کامپیوتر مربوط می‌شود. با توجه به اینکه روش‌های عددی شامل محاسبات زیاد روی اعداد است و انجام این محاسبات

با دست امکان‌پذیر نیست، لازم است محاسبات توسط یک ابزار محاسباتی صورت گیرد. در ماشین حساب و کامپیوتر، اعداد، علی‌الخصوص اعداد اصم و اعداد گویایی که دارای بسط اعشاری متناهی نیستند، مانند $\frac{1}{3} = 0.333..$ بصورت تقریبی ذخیره می‌شوند. با انجام محاسبه روی این اعداد تقریبی، خطاهای موجود روی جواب نهایی اثر می‌گذارد، به نحوی که گاهی اوقات جواب نتایج عددی دور از مقدار واقعی بوده و در نتیجه بی‌فایده هستند.

۲–خطای مطلق و خطای نسبی

تعریف۱: عدد تقریبی a عددی است که مقدار کمی با عدد دقیق A تفاوت داشته و بجای آن در محاسبات بکار برده شود.

تعریف۲: اگر $a < A$ آنگاه a را تقریب نقصانی (کوچکتر) A و چنانچه $a > A$ در آن صورت a را تقریب اضافی (کوچکتر)A می‌نامیم.

توجه۱: هرگاه a یک مقدار تقریبی برای A باشد می‌نویسیم $a \cong A$.

تعریف۳ : خطای مطلق عدد تقریبی a به عنوان یک تقریب از A را با $e(a)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$e(a) = |A - a|$$

چون معمولا مقدار A برای ما مشخص نیست بنابراین $e(a)$ در اغلب موارد قابل محاسبه نمی‌باشد. بنابراین سعی می‌کنیم یک کران بالا برای $e(a)$ پیدا کنیم.

تعریف٤ : خطای مطلق حدی عدد تقریبی a عددی است که از خطای مطلق آن کوچکتر نباشد. خطای مطلق حدی را معمولا با e_a نشان می‌دهیم. بنابراین $e(a) \le e_a$.

توجه۲ : e_a منحصر به فرد نیست درحالیکه $e(a)$ منحصر به فرد است.

توجه۳ : هرگاه e_a خطای مطلق حدی a به عنوان تقریبی برای عدد A باشد آنگاه

$$|A-a| \le e_a \qquad \Rightarrow \qquad a-e_a \le A \le a+e_a$$

بنابر قرارداد نامساوی اخیر را به صورت زیر می‌نویسیم

$$A = a \pm e_a$$

مثال ۱ : اگر $A = 1.324 \pm 0.003$ در این صورت $1.321 \le A \le 1.327$

توجه ٤ : نامساوی $1.321 \le A \le 1.327$ در مثال ۱ نشان می‌دهد که در بسط اعشاری عدد A حتما 1.32 موجود است، ولی رقم سوم اعشار یکی از ارقام 1 تا 7 می‌باشد. بنابراین رقم سوم اعشار مشکوک است.

توجه ۵ : معمولا خطای مطلق حدی و حتی خطای مطلق برای نشان دادن دقت یک عدد تقریبی کفایت نمی‌کنند.

تعریف ۵ : هرگاه a تقریبی از عدد $A \neq 0$ باشد ، کمیت زیر را خطای نسبی A می‌گوییم

$$\delta(a) = \frac{|A-a|}{|A|} = \frac{e(a)}{|A|}$$

مثال۲ : هرگاه $A = \frac{2}{3}$ و $a = 0.67$ تقریبی از آن باشد آنگاه

$$e(a) = |\frac{2}{3} - 0.67| = \frac{1}{300}$$

$$\delta(a) = \frac{e(a)}{|A|} = \frac{1}{200}$$

۳-منابع اصلی خطا

خطاهایی که در مسائل ریاضی با آنها مواجه می‌شویم عمدتا به پنج گروه تقسیم می شوند

الف. خطاهایی که در نحوه بیان مساله وجود دارند. این نوع خطا را خطای مدل می‌نامیم.

ب. خطاهایی که از وجود عملیات نامتناهی ناشی می‌شوند. این نوع خطا را خطای باقیمانده یا خطای برشی می‌نامیم.

ج. خطای پارامترهای عددی که مقادیر آنها از طریق اندازه‌گیری بدست می‌آیند. این نوع خطا را خطای اولیه یا خطای داده‌ها می‌نامیم.

د. به خاطر محدودیت در ذخیره ارقام بسط اعشاری اعداد، تقریبا تمامی اعداد اعشاری در وسایل محاسباتی با خطا ذخیره می‌شوند. این خطا را خطای نمایش اعداد یا خطای گرد کردن می نامیم.

ه. هنگام انجام محاسبات با اعداد تقریبی، خطای مربوط به داده‌های اولیه به نتیجه نهایی منتقل می‌گردد. این نوع خطا، خطای عملیات نامیده می‌شود.

طبیعی است که در یک مساله خاص، بعضی از خطاها حذف شده و برخی دیگر اثری ناچیز در نتیجه نهایی داشته باشند، ولی بطور کلی یک تحلیل کامل بایستی هرنوع خطایی را شامل گردد. در ادامه خطاهای مربوط به عملیات را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

٤-خطای چهار عامل اصلی

خطای حاصل جمع : فرض کنید b, a تقریب‌هایی از B, A و این اعداد همگی مثبت باشند. همچنین فرض کنید e_a و e_b به ترتیب خطاهای مطلق حدی b, a باشند. اگر e_c خطای مطلق حدی $\mathrm{C} = A + B$ باشد در این صورت

$$e_c \leq e_a + e_{\mathrm{b}}$$

خطای تفاضل : با مفروضات موجود در خطای حاصل جمع هرگاه $\mathrm{C} = A - B$ داریم

$$e_c \leq e_a + e_{\mathrm{b}}$$

مثال ۳ : هرگاه اعداد π و $\sqrt{2}$ را تا چها رقم اعشار گرد کنیم، مطلوب است محاسبهٔ $\pi \pm \sqrt{2}$ و محاسبه حداکثر خطای حاصل جمع و تفاضل.

حل: داریم

$$\pi = 3.1416 + e_1 \qquad , \qquad \sqrt{2} = 1.4142 + e_2$$

چون اعداد تا چهار رقم اعشار گرد شده‌اند پس

$$e_1 \leq \frac{1}{2} \times 10^{-4} \qquad , \qquad e_2 \leq \frac{1}{2} \times 10^{-4}$$

بنابراین داریم

$$\pi+\sqrt{2}=(3.1416+1.4142)+e_3=4.5558+e_3$$

که در آن با استفاده از رابطه مربوط به خطای حاصل جمع داریم

$$e_3\leq e_1+e_2 \qquad , \quad e_3\leq\left(\frac{1}{2}\times 10^{-4}\right)+\left(\frac{1}{2}\times 10^{-4}\right)=10^{-4}$$

لذا

$$4.5558-10^{-4}\leq\pi+\sqrt{2}\leq 4.5558+10^{-4}$$

$$4.5557\leq\pi+\sqrt{2}\leq 4.5559$$

به طور مشابه خطای حدی $\pi-\sqrt{2}$ کوچکتر یا مساوی 10^{-4} بوده و داریم

$$1.7273\leq\pi-\sqrt{2}\leq 1.7275$$

توجه ٦ : خطای گرد کردن تا n رقم اعشار همواره کمتر یا مساوی $\frac{1}{2}\times 10^{-n}$ است.

خطای حاصل‌ضرب: اگر $\mathrm{C}=AB$ آنگاه

$$e_{\mathrm{c}}=ae_{\mathrm{b}}+\mathrm{b}e_a$$

توجه ٧ : در عمل تقسیم معمولا به گونه‌ای عمل می‌شود که تقسیم تبدیل به حاصل‌ضرب گردد. مثال ٥ این مطلب را نشان می‌دهد.

مثال ٤ : مقدار$\pi\sqrt{2}$ را با چهار رقم اعشار محاسبه نموده و حداکثر خطای این حاصل‌ضرب را بدست آورید.

حل: داریم

$$\pi = 3.1416 + e_1 \quad , \quad \sqrt{2} = 1.4142 + e_2$$

که در آن $e_1 \leq \frac{1}{2} \times 10^{-4}$ ، $e_2 \leq \frac{1}{2} \times 10^{-4}$ و داریم

$$\pi\sqrt{2} = (3.1416 \times 1.4142) + \mathrm{e}_3$$

حال بنا بر رابطه مربوط به خطای حاصل‌ضرب برای e_3 داریم

$$e_3 \leq 3.1416 \;\; e_2 + 1.4142 e_1$$

$$e_3 \leq \frac{1}{2} \times 10^{-4}(3.1416 + 1.4142)$$

$$e_3 \leq 2.2779 \times 10^{-4}$$

اما $\pi\sqrt{2} = 4.4429 + e'_3$. زیرا حاصل‌ضرب اعداد 3.1416 و 1.4142 در محاسبه $\pi\sqrt{2}$ بیش از چهار رقم اعشار دارد، لذا هنگام نمایش حاصل‌ضرب دو عدد مذکور با چهار رقم اعشار، خطای دیگری مرتکب شده‌ایم. لذا خطای حدی کل را با e'_3 نشان داده‌ایم. برای $\acute{e}_3$ داریم

$$\acute{e}_3 \leq \frac{1}{2} \times 10^{-4} + e_3$$

$$\acute{e}_3 \leq \frac{1}{2} \times 10^{-4} + 2.2779 \times 10^{-4} = 2.7779 \times 10^{-4}$$

لذا

$$4.4426 \leq \pi\sqrt{2} \leq 4.4432$$

حداکثر خطا در حاصلضرب سه عدد حقیقی: هر گاه c,b,a تقریب‌هایی از C,B,A بوده، و این اعداد همگی مثبت باشند رابطه زیر را برای مطلق حدی حاصل‌ضرب abc به عنوان تقریبی از ABC داریم

$$e_{abc} \leq a\mathrm{be_c} + a\mathrm{ce_b} + \mathrm{bce}_a$$

مثال ۵ : هرگاه اعداد را تا سه رقم اعشار گرد کنیم، عبارت $\frac{\pi}{3\sqrt{5}}$ را محاسبه نموده و یک خطای مطلق حدی برای این محاسبه بدست بیاورید.

حل: قرار دهید $x = \frac{\pi}{3\sqrt{5}}$. لذا

$$x = \pi \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \pi . \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} . \sqrt{5}$$

$$= \pi \cdot \frac{1}{3} \cdot (0.2) \sqrt{5} = (0.2)\pi \cdot \frac{1}{3}\sqrt{5}$$

مقدار 0.2 بطور دقیق مشخص است. چون اعداد را تا سه رقم اعشار گرد می‌کنیم داریم

$$\pi = 3.142 + e_\pi \quad , \quad e_\pi \leq \frac{1}{2} \times 10^{-3}$$

$$\sqrt{5} = 2.236 + e_{\sqrt{5}} \quad , \quad e_{\sqrt{5}} \leq \frac{1}{2} \times 10^{-3}$$

$$\frac{1}{3} = 0.333 + e_{\frac{1}{3}} \quad , \quad e_{\frac{1}{3}} \leq \frac{1}{2} \times 10^{-3}$$

و از آنها داریم

$$x = (0.2)3.142 \times 2.236 \times 0.333 + e_x$$

$$x = 0.468 + e'_x$$

باید توجه داشته باشید که چون حاصل‌ضرب اعداد فوق بیشتر از سه رقم اعشار دارد، هنگام نمایش این حاصل‌ضرب‌ها، با سه رقم اعشار، خطای دیگری را مرتکب می‌شویم که خطای حدی را با $\acute{e}_x$ نشان داده‌ایم. در واقع داریم

$$\acute{e}_x \leq \frac{1}{2} \times 10^{-3} + e_x$$

بنابر رابطه مربوط به خطای حاصل‌ضرب سه عدد حقیقی برای e_x داریم

$$e_x \leq 0.2\left[2.236 \times 0.333e_\pi + 3.142 \times 0.333e_{\sqrt{5}} + 3.142 \times 2.236e_{\frac{1}{3}}\right]$$

$$e_x \leq 8.816 \times 10^{-4}$$

لذا

$$\acute{e}_x \leq \frac{1}{2} \times 10^{-3} + 8.816 \times 10^{-4}$$

$$\acute{e}_x \leq 1.382 \times 10^{-3}$$

۵–خطای محاسبه فرمول‌ها و توابع

خطای محاسبه فرمول‌ها: هرگاه تابعی n متغیره به صورت $y = f(x_1, \dots x_n)$ داشته باشیم و بخواهیم مقدار این تابع را در نقاط $A_i = a_i + e_{a_i}$ برای $i = 1, \dots, n$ حساب کنیم، در این صورت خواهیم داشت

$$f(A_1, A_1, \dots, A_n) = f(a_1, a_2, \dots, a_n) + e_f$$

که در آن

$$e_{\mathrm{f}} \leq \mathrm{e}_{a1}\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}_1}\Big|a \ + e_{a_2}\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}_2}\Big|a \ + \cdots + e_{a_n}\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}_n}|a$$

در رابطه فوق منظور از a بردار مقادیر تقریبی a_i یعنی $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ است.

همچنین $\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}_i}|a$ به معنی محاسبه مقدار تابع $\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}_i}$ به ازای بردار a است.

مثال ٦ : حجم کره‌ای به شعاع $\frac{5}{3}$ متر را محاسبه کرده و حداکثر خطای این محاسبه را بدست آورید. این اعداد را تا چهار رقم اعشار گرد کنید.

حل: داریم $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ یا $V = xyz^3$ که در آن

$$x = \frac{4}{3} = 1.3333 + e_x \qquad , \qquad e_x \leq \frac{1}{2}\times 10^{-4}$$

$$\mathrm{y} = \pi = 3.1416 + \mathrm{e_y} \qquad , \qquad \mathrm{e_y} \leq \frac{1}{2}\times 10^{-4}$$

$$z = \frac{5}{3} = 1.6667 + e_z \qquad , \qquad e_z \leq \frac{1}{2}\times 10^{-4}$$

$$V = (1.3333)(3.1416)(1.6667)^3 + e_v$$

$$= 19.3933 + e'_v$$

که در آن مشابه مثال‌های قبل داریم

$$e'_v \leq \frac{1}{2}\times 10^{-4} + e_v$$

$$e_v \leq e_x\frac{\partial v}{\partial x} + e_y\frac{\partial v}{\partial y} + e_z\frac{\partial v}{\partial z}$$

که عبارت سمت راست را بایستی در نقطه $(1.3333,3.1416,1.6667)$ محاسبه کرد. لذا

$$e_v \leq \frac{1}{2} \times 10^{-4} \{ \mathrm{yz^3 + xz^3 + 3xyz^2} \}$$

$$e_{\mathrm{v}} \leq \ 0.0028$$

$$e'_v \leq \frac{1}{2} \times 10^{-4} \times 0.0028$$

$$e'_v \leq 0.00285$$

$$e'_v \leq 0.0029$$

در نتیجه $V = 19.3933 + 0.0029$.

خطای محاسبه توابع: در اکثر محاسبات تابعی نیاز به محاسبات توابعی مانند $\sqrt{\mathrm{x}}, \sin \mathrm{x}, \ln \mathrm{x}, \dots$ در دامنه تعریف آنها پیش می‌آید. در محاسبه این توابع علاوه بر خطای موجود در نمایش x به شکل اعشاری و با تعداد متناهی رقم، خطای دیگری نیز وارد می‌شود که ذیلا آن را بررسی می‌کنیم.

فرض کنید می‌خواهیم مقدار $e^{\frac{1}{3}}$ را محاسبه کنیم. می‌دانیم

$$e^{\mathrm{x}} = 1 + \frac{\mathrm{x}}{1!} + \frac{\mathrm{x}^2}{2!} + \cdots + \frac{\mathrm{x}^{\mathrm{n}}}{\mathrm{n}!} + \cdots$$

مقدار $e^{\frac{1}{3}}$ یعنی مقدار سری واقع در سمت راست تساوی بالا به ازای $x = \frac{1}{3}$. چون محاسبه جمع بینهایت جمله (عدد) عملا امکان‌پذیر نیست، معمولا تعدادی متناهی از جملات نخست این سری را متناسب با دقت لازم انتخاب و به ازای $x = \frac{1}{3}$ یا تقریب مناسبی از $\frac{1}{3}$ محاسبه می‌شود. در واقع می-نویسیم

$$e^{x} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + E_n(x)$$

که در آن

$$E_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} + \cdots$$

$E_n(x)$ باقیمانده سری یا خطای برشی در x نامیده می‌شود. حال فرض کنید که $e^{\frac{1}{3}}$ را با خطای کمتر از 10^{-3} بخواهیم. قرار می‌دهیم $|E_n(x)| \leq \frac{1}{2} \times 10^{-3}$ (به ضریب $\frac{1}{2}$ در سمت راست عبارت فوق توجه کنید. چون باید $x = \frac{1}{3}$ را به صورت تقریبی بنویسیم که آن هم دارای خطای $\frac{1}{2} \times 10^{-3}$ است).

برای محاسبه n معمولا از اولین جمله $E_n(x)$ استفاده می‌کنیم. یعنی قرار می‌دهیم

$$E_n(x) \cong \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

بنابراین برای محاسبه $e^{\frac{1}{3}}$ با خطای کمتر از 10^{-3} قرار می‌دهیم

$$\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{1}{2} \times 10^{-3}$$

برای $n = 3$ نامساوی فوق برقرار نیست اما برای $n \geq 4$ برقرار است. لذا مقدار $n = 4$ را برگزیده و $e^{\frac{1}{3}}$ با خطای کمتر از 10^{-3} به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$e^{\frac{1}{3}} \cong \frac{1}{3} + \frac{\frac{1}{9}}{2} + \frac{\frac{1}{27}}{6} + \frac{\frac{1}{81}}{24} = 1.3956$$

و بنابراین با سه رقم اعشار داریم

$$e^{\frac{1}{3}} \cong 1.396$$

فصل دوم : حل عددی معادلات $f(x) = 0$

۱–مقدمه

یکی از مسائلی که اغلب در کارهای مهندسی با آن مواجه می‌شویم، حل معادله‌ای به صورت $f(x) = 0$ است که در آن f یک تابع مفروض است. منظور از حل معادله $f(x) = 0$ یافتن مقادیری از متغیر x است که به ازای آنها مقدار تابع صفر شود. هرگاه $f(\alpha) = 0$ آنگاه α را یک ریشه معادله $f(x) = 0$ می‌گوییم.

فرض بر این است که دانشجو با حل معادلاتی مانند $ax^2 + \mathrm{bx} + \mathrm{c} = 0$ آشناست. همچنین فرض می‌کنیم که خواننده با حل بعضی معادلات مثلثاتی مانند $sinx + cosx = 1$ نیز آشناست. اما معادلاتی مانند معادلات زیر با استفاده از روش‌های تحلیلی قابل حل نیستند.

$$e^{-x} - cosx = 0$$

$$x + cosx = 0$$

$$x^2 - (1 - x)^5 = 0$$

در این فصل به حل این معادلات می‌پردازیم. پیدا کردن جواب دقیق این نوع معادلات مشکل و بعضا غیرممکن است. بنابراین در این فصل روش‌هایی برای پیدا کردن جواب تقریبی این معادلات با دقت مطلوب ارائه می‌شود. فرض کنید شرایط زیر برقرار باشند

الف. تابع $y = f(x)$ در بازه ای مانند $[a, b]$ پیوسته است.

ب. معادلهٔ $f(x) = 0$ در بازه $[a, b]$ دارای دقیقا یک ریشه است. یعنی اولا $f(a)f(b) < 0$ ثانیا به ازای هر $f'(x) \neq 0, x \in [a, b]$.

۲- تعیین ریشه با دقت مورد نظر

با مشخص بودن بازه $[a, b]$ که شامل یک ریشه معادله $f(x) = 0$ است، برای تعیین تقریبی از ریشه مورد نظر با دقت مطلوب، دنباله ای از اعداد مانند x_n می‌سازیم به طوری که با افزایش مقدار n، مقدار x_n به α (مقدار دقیق ریشه که برای ما نامعلوم است) نزدیک شود. یعنی

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = \alpha$$

بنابراین با توجه به تعریف حد، عددی مانند N وجود دارد که

$$x_{\mathrm{N}} \cong \alpha$$

تعیین N ی که تقریب فوق را بدهد معیار توقف محاسبه x_nها نامیده می‌شود. در زیر دو معیار برای توقف داده می‌شود.

الف- هرگاه $\varepsilon > 0$ عدد کوچک دلخواهی باشد (مثلا $\varepsilon = 10^{-6}$) x_nها را تا جایی محاسبه می‌کنیم که $|f(x_N)| < \varepsilon$. در این حالت x_N را به عنوان تقریبی برای α می‌پذیریم.

ب- هرگاه برای $\varepsilon > 0$ دلخواه داشته باشیم $|x_{\mathrm{N}} - x_{\mathrm{N-1}}| < \varepsilon$ ، در این صورت عملیات را متوقف کرده و x_N را به عنوان تقریبی برای α می‌پذیریم.

در این درس معمولا از یکی از دو معیار فوق استفاده می‌کنیم.

۳- روش‌های عددی حل معادله $f(x) = 0$

الف. روش دوبخشی یا تنصیف

فرض کنید بازه $[a,b]$ طوری باشد که $f(x)$ در این بازه پیوسته بوده و دارای دقیقا یک ریشه مانند α در این بازه باشد. با این مفروضات الگوریتم زیر را داریم.

الگوریتم روش دوبخشی با معیار توقف $|f(x_n)| < \varepsilon$

گام اول : قرار دهید $x = \frac{a+b}{2}$

گام دوم: اگر $|f(x)| < \varepsilon$ الگوریتم خاتمه پیدا کرده و x به عنوان تقریب مورد نظر برای α با دقت مطلوب انتخاب شود.

گام سوم: اگر $f(a)f(x) < 0$ آنگاه ریشه در فاصله (a,x) قرار دارد. قرار دهید $b = x$ و گام اول را در فاصله جدید $[a,b]$ تکرار کنید.

گام چهارم: اگر $f(a)f(x) > 0$ آنگاه ریشه در فاصله(x,b) قرار دارد. قرار دهید $a = x$ و گام اول را در فاصله جدید $[a,b]$ تکرار کنید.

مثال ۱ : تقریبی از ریشه معادله $f(x) = 3x - e^{-x} = 0$ را که در فاصله$(0.25,0.27)$ قرار دارد با سه رقم اعشار بدست آورید به طوری که داشته باشیم $|f(x_n)| < 0.001$ که x_n تقریب ریشه در تکرار nام است.

حل : با توجه به الگوریتم مذکور جدول زیر داریم

n	a	b	$x_n = \frac{a+b}{2}$	$f(a)$	$f(x_n)$	$f(a)\,f(x_n)$
1	0.25	0.27	0.26	-0.0288	0.0089	$-$
2	0.25	0.26	0.255	-0.0288	-0.0099	$+$
3	0.255	0.26	0.2575	-0.0099	-0.0005	

چون $|f(x_3)| = 0.0005$ بنابراین x_3 را به عنوان تقریب ریشه معادله در نظر می گیریم، یعنی $\alpha \cong 0.2575$، یا با سه رقم اعشار $\alpha \cong 0.258$.

توجه ۱ : روش دو بخشی همگرایی تضمین شده دارد. یعنی همواره با دقت مورد نظر به جواب خواهیم رسید.

توجه ۲ : درصورتیکه بازه $[a,b]$ که ریشه در آن قرار دارد کوچکتر انتخاب شود سرعت رسیدن به جواب و در نتیجه تعداد محاسبات کمتر خواهد شد.

توجه ۳ : دقت کنید که معادله فوق در بازه $(0.25,0.27)$ دارای دقیقا یک ریشه است. زیرا داریم

$$f(a) = f(0.25) = -0.0288$$

$$f(b) = f(0.27) = 0.0466$$

بنابراین $f(a)f(b) < 0$ یعنی این معادله در بازه $[a, b]$ دارای حداقل یک ریشه است.

از طرفی برای هر $x \in (0.25,0.27)$ داریم

$$f'(x) = 3 + e^{-\mathrm{x}} > 0$$

یعنی معادله فوق در بازه $(0.25,0.27)$ دارای حداکثر یک ریشه است. لذا با توجه به اینکه معادله در بازه $(0.25,0.27)$ داری حداقل یک ریشه و حداکثر یک ریشه است نتیجه می‌گیریم که این معادله در این بازه دارای دقیقا یک ریشه است. پیوسته بودن $f(x)$ داده شده در بازه مورد نظر نیز بدیهی است. بنابراین شرایط لازم برای بکارگیری الگوریتم برقرار هستند.

ب. روش نابجایی

تنها تفاوت این روش با روش دوبخشی در این است که x_nها را از فرمول زیر محاسبه می‌کنیم

$$x_n = \frac{af(b) - b\, f(a)}{f(b) - \ f(a)}$$

الگوریتم روش نابجایی

با فرض اینکه معادله $f(x) = 0$ در بازه‌ای مانند $[a, b]$ دارای دقیقا یک ریشه مانند α است، الگوریتم زیر را با معیار توقف $|f(x_n)| < \varepsilon$ برای ε مفروض داده شده داریم.

گام اول : قرار دهید $x = \frac{af(b)-b\, f(a)}{f(b)- f(a)}$

گام دوم: اگر $|f(x)|< \varepsilon$ آنگاه الگوریتم خاتمه پیدا کرده و x را به عنوان تقریب مورد نظر برای α با دقت مطلوب در نظر می‌گیریم.

گام سوم : اگر $f(a)f(x) < 0$ آنگاه ریشه در فاصله (a, x) قرار دارد. قرار دهید $a = x$ و گام اول را در فاصله جدید $[a, b]$ تکرار کنید.

گام چهارم: اگر $f(a)f(x) > 0$ آنگاه ریشه در فاصله (x, b) قرار دارد. قرار دهید $a = x$ و گام اول را در فاصله جدید $[a, b]$ تکرار کنید.

مثال۲: تقریبی از ریشه معادله $f(x) = x^2 - 2^x = 0$ را که در فاصله $(-1,0)$ قرار دارد به روش نابجایی و با چهار رقم اعشار بدست بیاورید به طوری که $|f(x_n)|< 10^{-2}$.

حل: با توجه به الگوریتم جدول زیر داریم

n	a	b	x_n	$f(a)$	$f(x_n)$	$f(a)\, f(x_n)$
1	-1	0	-0.66667	0.5	-0.18552	$-$
2	-1	-0.66667	-0.75688	0.5	-0.01892	$-$
3	-1	-0.75688	-0.76574	0.5	-0.00179	

چون $|f(x_3)|= 0.00179 < 10^{-2}$ پس x_3 تقریب مورد نظر ریشه است. بنابراین $\alpha \cong -0.76574$ و یا با دقت چهار رقم اعشارخواسته شده $\alpha \cong -0.7657$.

توجه ٤: روش نابجایی نیز مانند روش دوبخشی همگرایی تضمین شده دارد.

ج. روش نیوتن– رفسون

در این روش فرض بر این است که یک تقریب اولیه مانند x_0 از α مشخص شده است. با معلوم بودن x_0 دنباله x_n را از فرمول زیر می‌سازیم

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

توجه۵: روش نیوتن- رفسون تضمین همگرایی ندارد، اما به محض قرار گرفتن در مسیر همگرایی می-توان نشان داد x_nها به طور سریعی به جواب مورد نظر میل می‌کنند.

الگوریتم روش نیوتن- رفسون با معیار توقف $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$

فرض کنید x_0 مشخص باشد.

گام اول : قرار دهید $x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$.

گام دوم : اگر $|x - x_0| < \varepsilon$ آنگاه الگوریتم خاتمه پیدا کرده و x را به عنوان تقریب مورد نظر می-پذیریم. در غیر این صورت قرار دهید $x = x_0$ و گام اول را با x_0 جدید تکرار کنید.

توجه ٦ : درصورتیکه معیار $|f(x_n)| < \varepsilon$ مدنظر باشد کافیست در گام دوم به جای $|x - x_0| < \varepsilon$ قرار دهیم $|f(x_n)| < \varepsilon$.

مثال ۳ : با استفاده از روش نیوتن- رفسون تقریبی از ریشه معادله

$f(x) = sinx - \frac{x}{2} = 0$ را که در فاصله $[1.5,2]$ قرار دارد با چهار رقم اعشار دست

آورید به طوری‌که داشته باشیم $|f(x_n)| < 10^{-3}$. قرار دهید $x_0 = 1.75$.

حل: داریم $f(x) = sinx - \frac{x}{2}$ و $f'(x) = cosx - \frac{1}{2}$. لذا رابطه زیر را برای محاسبه x_nها خواهیم داشت

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\sin x_n - \frac{x_n}{2}}{\cos x_n - 0.5}$$

n	x_n	$f(x_n)$
0	1.75	0.10899
1	1.91069	−0.01255
2	1.89563	−0.00011

چون $|f(x_2)| < 10^{-3}$ لذا x_2 تقریبی از ریشه مورد نظر است. بنابرین $\alpha \cong -1.89563$ و یا با چهار رقم اعشار خواسته شده $\alpha \cong -1.8956$

مثال ٤ : ریشه معادله $f(x) = x - cosx = 0$ را که در بازه [0,1] قرار دارد به روش نیوتن- رفسون و با چهار رقم اعشار دست آورید به طوریکه $|x_n - x_{n-1}| < 10^{-4}$ قرار دهید $x_0 = 0.5$.

حل: داریم $f(x) = x - cosx = 0$ و در نتیجه $f'(x) = 1 + sinx$.

بنابراین $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - \cos x_n}{1 + \sin x_n}$. با قرار دادن $x_0 = 0.5$ داریم

n	x_n	$\lvert x_n - x_{n-1} \rvert$
0	0.5	$-$
1	0.75522	0.25522
2	0.73914	0.01608
3	0.73909	0.00005

چون $\lvert x_3 - x_2 \rvert < 10^4$ بنابراین x_3 تقریب مورد نظر است. لذا$\alpha \cong -0.7391$.

مثال ۵ : با استفاده از روش نیوتن- رفسون تقریبی برای $\sqrt{2}$ بدست آورید(تا هفت رقم اعشار).

حل: قرار دهیم $f(x) = x^2 - 2 = 0$. در این صورت با حل این معادله که یکی از ریشه‌های آن $\sqrt{2}$ است می‌توانیم تقریبی برای $\sqrt{2}$ بدست بیاوریم. بازه اولیه مورد نظر را به صورت$[1,2]$ در نظر می گیریم. داریم

$$f(x) = x^2 - 2 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2x$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n}$$

با قرار دادن $x_0 = 1$

$$x_1 = 1.5 \quad \text{و} \quad x_2 = 1.4166667 \quad \text{و} \quad x_3 = 1.4142157$$

$$x_4 = 1.4142136 \quad \text{و} \quad x_5 = 1.4142136$$

لذا 1.4142136 را به عنوان تقریبی از $\sqrt{2}$ برمی‌گزینیم.

د. روش وتری

تنها تفاوت روش وتری با روش نیوتن- رفسون در این است که x_nها از رابطه زیر محاسبه می‌شوند

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

همچنین برای محاسبه x_n ها به دو مقدار اولیه x_0 و x_1 نیاز داریم.

الگوریتم روش وتری با معیار توقف $|f(x_n)| < \varepsilon$

گام اول: قرار دهید $x = x_1 - \frac{f(x_1)(x_1 - x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}$

گام دوم: اگر $|f(x)| < \varepsilon$ آنگاه الگوریتم خاتمه پیدا کرده و x را به عنوان تقریب مورد نظر می پذیریم. در غیر این صورت قرار دهید $x_0 = x_1$ و $x_1 = x$ و گام اول را با x_0 و x_1 جدید تکرار کنید.

مثال ٦ : با استفاده از روش وتری ریشه معادله $x^3 + x - 1 = 0$ را با سه رقم اعشار بدست بیاورید به طوری که داشته باشیم $|f(x_n)| < 0.001$.

قرار دهید $x_0 = 0$ و $x_1 = 1$ (دقت کنید که این معادله تنها دارای یک ریشه است)

حل : با استفاده از الگوریتم فوق داریم

n	x_n	$f(x_{\mathrm{n}})$
0	0	-1
1	1	1
2	0.5	-0.375
3	0.6364	-0.1059
4	0.6901	0.0188
5	0.6820	-0.0008

چون $|f(x_5)| < 0.001$ پس $\alpha \cong 0.6820$ یا با دقت سه رقم اعشار $\alpha \cong 0.682$

توجه۷ : روش وتری همگرایی تضمین شده ندارد.

ه. روش تکرار ساده

در این روش پس از آزمون شرایط موجود بودن ریشه برای معادله $f(x) = 0$ در فاصله $[a, b]$، معادله $f(x) = 0$ پس از دستکاری‌های لازم به صورت $x = g(x)$ نوشته می‌شود، به طوری که ریشه هر دو معادله یکسان باشد. بنابراین اگر α ریشه معادله $f(x) = 0$ باشد داریم

$$f(\alpha) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = g(\alpha)$$

توجه۸ : معمولا از روی یک معادله $f(x) = 0$ به صورت‌های مختلفی می‌توان به معادله $x = g(x)$ رسید. مثال زیر این مطلب را نشان می‌دهد.

مثال ۷ : معادله $f(x) = x^2 - x - 2 = 0$ را در نظر بگیرید. در این صورت برای تابع $g(x)$ انتخاب‌های زیر وجود دارد.

الف) $g(x) = x^2 - 2$

ب) $g(x) = \sqrt{x+2}$

ج) $g(x) = 1 + \frac{2}{x}$

توجه ۹ : بدیهی‌ترین حالات انتخاب $g(x)$ به صورت زیر هستند

$$x = x - f(x) \Rightarrow g(x) = x - f(x)$$

$$x = x + f(x) \Rightarrow g(x) = x + f(x)$$

پس از نوشتن معادله $f(x) = 0$ به صورت $x = g(x)$ هرگاه x_0 تقریبی از α ریشه معادله باشد x_n ها به طریق زیر ساخته می‌شوند

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

توجه ۱۰ : روش تکرار ساده همگرایی تضمین شده ندارد.

شرط کافی برای همگرایی روش تکرار ساده به صورت زیر است

۱- برای هر $x \in [a,b]$ داشته باشیم $g(x) \in [a,b]$.

۲- برای هر $x \in [a,b]$ داشته باشیم $|g'(x)| < 1$.

مثال ۸ : برای تعیین تقریب ریشه معادله $f(x) = 3xe^x - 1 = 0$ که در فاصله $[0,1]$ قرار دارد از روش تکرار ساده استفاده کنید. قرار دهید $x_0 = 0.5$. و تقریب را با سه رقم اعشار درست بدست بیاورید.

حل : معادله را به صورت $x = \frac{e^{-x}}{3}$ می‌نویسیم. قرار می‌دهیم $g(x) = \frac{e^{-x}}{3}$ و بررسی می‌کنیم که آیا این $g(x)$ شرایط کافی برای همگرایی را دارد یا خیر داریم

$$x \in (0,1) \Rightarrow \quad 0 < x < 1 \;\; \Rightarrow \quad -1 < -x < 0$$

$$e^{-1} < e^{-x} < e^{0} \Rightarrow \; \frac{1}{3e} < \frac{e^{-x}}{3} < \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3e} < g(x) < \frac{1}{3} \Rightarrow \; 0 < g(x) < 1$$

نتیجه آخر بدلیل زیر بدست آمده است

$$\frac{1}{3e} \cong 0.12 \;\; \Rightarrow \quad 0 < 0.12 < g(x) < \frac{1}{3} < 1$$

پس شرط اول برقرار است. حال شرط دوم را بررسی می‌کنیم

$$g'(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{3} < \frac{\mathrm{e}^{0}}{3} = \; \frac{1}{3} < 1$$

بنابراین این $g(x)$ انتخاب شده شرایط کافی برای همگرایی را دارد. حال به محاسبه x_n ها می‌پردازیم.

$$x_1 = 0.2022 \qquad , \qquad x_2 = 0.2723$$

$$x_3 = 0.2539 \qquad , \qquad x_4 = 0.2586$$

$$x_5 = 0.2574 \qquad , \qquad x_6 = 0.2577$$

$$x_7 = 0.2576 \qquad , \qquad x_8 = 0.2576$$

بنابراین $\alpha \cong 0.2576$.

فصل سوم : درونیابی و برونیابی

۱-مقدمه

در اغلب کشورها هر ده سال یکبار جمعیت سرشماری می‌شود. فرض کنید جدول زیر جمعیت کشوری را در سالهای 1940 تا 1990 میلادی (به هزار نفر نشان دهد).

سال	1940	1950	1960	1970	1980	1990
جمعیت	107923	126407	133117	150905	171110	192237

حال سوال این است که آیا می‌توان با توجه به داده‌های فوق جمعیت کشور را در سال 1975 و یا در سال 2000 در حد قابل قبول تخمین زد؟

تخمین جمعیت کشور را در سال 1975 که بین اعداد جدول است درونیابی، و تخمین جمعیت کشور را در سال 2000 که در فاصله [1940,1990] قرار ندارد برونیابی می‌نامیم.

تعریف۱ : تابعی مانند f که مقادیر آن در بعضی نقاط مشخص است و توسط جدولی مانند جدول زیر بیان شده، یک تابع جدولی نامیده می‌شود.

x_{i}	x_0	x_1	…	x_n
f_{i}	f_0	f_1	…	f_n

۲–درونیابی

فرض کنید تابع f با جدول بالا داده شده است به طوری که برای $i \neq j$ داشته باشیم $x_i \neq x_{\mathrm{j}}$. برای تخمین $f(x)$ که $x \in [x_0, x_n]$ و $x \neq x_i$ ، یکی از راه‌های ساده این است که یک چندجمله‌ای مانند $P(x)$ پیدا کنیم که مقدار آن در x_i همان f_i باشد. یعنی

$$P(x_i) = f_i \qquad i = 0\,, 1, 2, ...$$

و بعد به جای $f(x)$ در فاصله $[x_0, x_n]$ ، با $P(x)$ کار کنیم.

قضیه ۱: فقط یک چندجمله‌ای حداکثر از درجه n وجود دارد که درشرط $P(x_i) = f_i$ صدق می‌کند.

تعریف ۲ : چندجمله‌ای که درشرط $P(x_i) = f_i$ صدق می‌کند چندجمله‌ای درونیاب تابع f نامیده می‌شود.

در زیر دو روش برای تعیین $P(x)$ مورد بحث و بررسی قرار گرفته است.

الف. روش لاگرانژ

در این روش فرض می‌کنیم که $l_0(x), l_1(x), \dots, l_n(x)$ چندجمله‌ای‌های درجه n باشند. در این صورت فرمول چندجمله‌ای لاگرانژ به صورت زیر است.

$$P(x) = l_0(x)f_0 + l_1(x)f_1 + \cdots + l_n(x)f_n$$

که در آن برای $j = 0,1,2,\dots,n$ و داریم

$$l_{\mathrm{j}}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{\mathrm{j-1}})(x-x_{\mathrm{j+1}})\dots(x-x_{\mathrm{n}})}{(x_{\mathrm{j}}-x_0)(x_{\mathrm{j}}-x_1)\dots(x_{\mathrm{j}}-x_{\mathrm{i-1}})(x_{\mathrm{j}}-x_{\mathrm{i+1}})\dots(x_{\mathrm{j}}-x_{\mathrm{n}})}$$

این چندجمله‌ای، چندجمله‌ای لاگرانژ نامیده می‌شود.

مثال ۱: الف) با استفاده از روش لاگرانژ، چندجمله‌ای درونیاب مربوط به تابع جدولی زیر را بدست بیاورید.

ب) $f(-\frac{1}{2})$ و $f(\frac{3}{2})$ را بدست بیاورید.

x_{i}	-1	0	1	2
f_{i}	-2	-1	0	7

حل(الف): داریم $n = 3$. لذا باید $l_3(x), l_2(x), l_1(x)\,, l_0(x)$ را بدست بیاوریم

$$l_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{x^3-3x^2+2x}{-6}$$

$$l_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{x^3-2x^2-x+2}{2}$$

$$l_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{x^3-x^2-2x}{-2}$$

$$l_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_1)} = \frac{x^3-x}{6}$$

بنابرین

$$P(x) = l_0(x)f_0 + l_1(x)f_1 + l_2(x)f_2 + l_3(x)f_3$$

$$P(x) = -2\frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{-6} + (-1)\frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{2} + 0 + 7\frac{x^3 - x}{6}$$

$$P(x) = x^3 - 1$$

ب) با توجه به اینکه $P(x) = x^3 - 1$ لذا

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) \cong P\left(-\frac{1}{2}\right) = (-\frac{1}{2})^3 - 1 = \frac{-9}{8}$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) \cong P\left(\frac{3}{2}\right) = (\frac{3}{2})^3 - 1 = \frac{19}{8}$$

ب.چندجمله‌ای درونیاب بر حسب تفاضلات تقسیم شده نیوتن

تعریف ۳ : فرض کنید$x_0, x_1, \dots, x_n$ نقاط دو به دو متمایز و $f_0, f_1, \dots, f_n$ مقادیرتابع f در این نقاط باشند. تفاضلات تقسیم شده مرتبه اول نیوتن بینx_i وx_{i+1} را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f_i - f_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}$$

همچنین تفاضلات تقسیم شده مرتبه دوم نیوتن بین x_i ، x_{i+1} و x_{i+2} نیز به صورت زیر تعریف می-شوند.

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_i, x_{i+1}] - f[x_{i+1}, x_{i+2}]}{x_i - x_{i+2}}$$

به همین صورت تفاضلات تقسیم شده مراتب بالاتر قابل تعریف است

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots x_{i+k}] = \frac{f[x_i, x_{i+1}, \dots x_{i+k-1}] - f[x_{i+1}, \dots x_{i+k}]}{x_i - x_{i+k}}$$

باتوجه به تفاضلات تقسیم شده نیوتن، چندجمله‌ای درونیاب برحسب این تفاضلات بصورت زیر است

$$P(x) = f_0 + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2]$$

$$+ \cdots + (x - x_0)(x - x_1) \dots . (x - x_{n-1})f[x_0, x_1, \dots, x_n]$$

مثال ۲: با استفاده از روش نیوتن چندجمله‌ای درونیاب تابع جدولی زیر را بدست بیاورید.

x_i	0	1	2	4
f_i	1	1	2	5

حل: جدول تفاضلات تقسیم شده نیوتن به صورت زیر است

x_i	f_i	اول	دوم	سوم
0	1			
		0		
1	1		$\frac{1}{2}$	
		1		$-\frac{1}{12}$
2	2		$\frac{1}{6}$	
		$\frac{3}{2}$		
4	5			

$$P(x) = 1 + 0 + \frac{1}{2}x(x-1) - \frac{1}{12}x(x-1)(x-2)$$
$$= \frac{1}{12}(-x^3 + 9x^2 - 8x + 12)$$

مثال ۳: در مثال قبل $f(3)$ را بدست بیاورید.

حل :

$$f(3) \cong P(3) = \frac{1}{12}(-27 + 81 - 24 + 12) = \frac{42}{12}$$

۳- خطای چند جمله ای درونیاب

هرگاه $P(x)$ چندجمله‌ای درونیاب تابع f در نقاط دو به دو متمایز $x_0, x_1, \dots, x_n$ بوده و f دارای مشتق مرتبه $(n+1)$ام باشد آن گاه با فرض

$$\left|f^{(n+1)}(x)\right| \le \mathrm{M} \quad ; \;\; x \in [x_0 \,, x_n]$$

داریم

$$|f(x) - P(x)| \le |(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)| \frac{M}{(n+1)!}$$

رابطه بالا یک کران بالا برای خطای چندجمله‌ای درونیاب $P(x)$ ارائه می‌دهد.

مثال ٤: چندجمله‌ای درونیاب تابع $f(x) = \cos\frac{\pi}{2}x$ را در نقاط $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ بدست آورده و کران بالایی برای $|f(x) - P(x)|$ حساب کنید. مقدار $\left|f\left(\frac{1}{2}\right) - P(\frac{1}{2})\right|$ را با کران بالا در $x = \frac{1}{2}$ مقایسه کنید.

حل : داریم

$$P(x) = f_0 + (x - x_0)f[x_0, x_1] = 1 - x$$

واضح است که

$$\left|f\left(\frac{1}{2}\right) - P(\frac{1}{2})\right| = \left|\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\right| \cong 0.21$$

برای تعیین یک کران بالا برای $|f(x) - P(x)|$ ، ابتدا باید کران بالایی برای مشتق دوم تابع f بدست آوریم

$$f'(x) = -\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}x \Rightarrow f''(x) = -\frac{\pi^2}{4}\cos\frac{\pi}{2}x$$

$$\Rightarrow f''(x)|=|-\frac{\pi^2}{4}\cos\frac{\pi}{2}x\right| \leq \frac{\pi^2}{4}$$

در نتیجه

$$|f(x) - P(x)| \leq |(x-0)(x-1)|\frac{\frac{\pi^2}{4}}{2!} = \frac{\pi^2}{8}|x^2 - x|$$

یعنی کران بالای خطا عبارتست از $\frac{\pi^2}{8}|x^2 - x|$. مقدار این کران بالا برای $x = \frac{1}{2}$ برابر است با $\frac{\pi^2}{8}\left|\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right| = \frac{\pi^2}{32} \cong 0.31$ ، که با مقدار واقعی خطا یعنی 0.21 به مقدار 0.1 اختلاف دارد. مقدار خطا همچنین کران بالای خطا اعداد بزرگی هستند که بیانگر خوب نبودن تقریب یا نامناسب بودن چندجمله‌ای درجه اول بعنوان تقریب تابع $cos\frac{\pi}{2}x$ است. در صورت معلوم بودن تابع f در نقاط بیشتر و در نتیجه استفاده از چندجمله ای های درجات بالاتر می‌توان این خطا را کمتر کرد.

٤-برونیابی

هرگاه تابع f در نقاط $x_0, x_1, \dots, x_n$ مقادیر معلوم $f_0, f_1, \dots, f_n$ را داشته باشد و هدف تخمین مقدار f در خارج از بازه $[x_0, x_n]$ باشد از برونیابی استفاده می‌کنیم.

درونیابی و برونیابی دو مفهوم از یک روند می‌باشند، بنابرین برای تخمین مقدار تابع f در خارج از بازه $[x_0, x_n]$ می‌توان از همان چندجمله‌ای درونیاب استفاده کرد.

مثال ٥: چند جمله ای درونیاب مربوط به تابع جدول زیر را بر حسب تفاضلات نیوتن بدست آورده و $f(0.5)$ و $f(4.2)$ را تخیمن بزنید.

حل : به راحتی می توان نشان داد که $P(x) = x^2 + 1$. بنابراین

$$f(0.5) \cong P(0.5) = 1.25$$

$$f(4.2) \cong P(4.2) = 18.64$$

برای برونیابی می‌توان از روش زیر که درونیابی خطی نامیده می‌شود نیز استفاده کرد.

فرض کنید هدف تخمین مقدار f در نقطه‌ای مانند a خارج از بازه $[x_0, x_n]$ باشد. در این صورت اگر $a < x_0$ از رابطه زیر برای تخمین تابع در نقطه a استفاده می‌کنیم

$$f(a) = f_0 + (a - x_0)\frac{f_0 - f_1}{x_0 - x_1}$$

و اگر $a > x_n$ آنگاه از رابطه زیر استفاده می‌کنیم

$$f(a) = f_{n-1} + (a - x_{n-1})\frac{f_{n-1} - f_n}{x_{n-1} - x_n}$$

مثال ٦ : تابع جدول زیر را در نظر گرفته و با استفاده از درونیابی خطی $f(-1.5)$ و $f(2.2)$ را تخمین بزنید.

x_i	-1	0	1	2
f_i	0	-1	2	9

حل : برای $a = -1.5$ داریم

$$f(a) = 0 + (-1.5 + 1)\frac{0 + 1}{-1 + 0} = 0.5$$

لذا $f(-1.5) \cong 0.5$ همچنین برای $a = 2.2$ داریم :

$$f(a) = 2 + (2.2 - 1)\frac{2 - 9}{1 - 2} = 10.4$$

فصل چهارم : مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری عددی

۱–مشتق‌گیری عددی

کاربرد مشتق در ریاضیات فراوان است. معمولا برای تابعی که دارای ضابطه معلوم باشد، مشتق آن را می‌توانیم با روش‌های حساب دیفرانسیل بدست بیاوریم، اما هرگاه ضابطه تابع پیچیده و یا تابع تنها به صورت یک جدول معلوم باشد، برای مشتق‌گیری بایستی به روش‌های عددی روی آورد. دستورهای مشتق‌گیری عددی را می‌توان با مشتق گرفتن از چندجمله‌ای درونیاب بدست آورد. هرگاه $P(x)$ چندجمله‌ای درونیاب تابع f باشد، در این صورت مشتق‌های $f''(x), f'(x)$ و... را به کمک $P''(x), P'(x)$ و... بدست می‌آوریم. البته باید متذکر شد که مشتق‌گیری عددی براساس چندجمله‌ای درونیاب یک عمل ناپایدار است. یعنی نمی‌توانیم دقت خوبی را برای جواب انتظار داشته باشیم.

مثال ۱ : تابع جدولی زیر را در نظر گرفته و $f''(0), f'(1)$ را بدست بیاورید.

x_i	0	1	3	6	10
f_i	1	-6	4	169	921

حل : ابتدا با استفاده ازروش نیوتن چند جمله ای درونیاب را بدست می‌آوریم. به راحتی می‌توان نشان داد که $P(x) = x^3 - 8x + 1$. حال داریم

$$f'(x) \cong P'(x) = 3x^2 - 8$$

$$f'(1) \cong P'(1) = 3(1)^2 - 8 = -5$$

$$f''(x) \cong P''(x) = 6\mathrm{x}$$

$$f''(0) \cong P''(0) = 0$$

دستورهای مشتق‌گیری با استفاده از بسط تیلور:

به کمک بسط تیلور یک تابع می‌توان دستورهایی برای مشتق‌گیری بدست آورد. فرض کنید x_iها متساوی‌الفاصله باشند. یعنی

$$x_{i+1} = x_i + \mathrm{h}$$

با این فرض‌ها روابط زیر را برای مشتق‌گیری داریم.

$$f'(x_\mathrm{i}) \cong \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{\mathrm{h}} = \frac{f_{i+1} - f_i}{\mathrm{h}} \quad ,\mathrm{i} = 0,1,2,\dots,n-1 \qquad (1)$$

$$f'(x_\mathrm{i}) \cong \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{\mathrm{h}} = \frac{f_{i-}f_{i+1}}{\mathrm{h}} \quad , \quad \mathrm{i} = 1,2,\dots,n \qquad (2)$$

توجه ۱ : برای محاسبه $f'(x_\mathrm{i})$ از رابطه (۱) و برای محاسبه $f'(x_\mathrm{n})$ از رابطه (۲) استفاده می‌کنیم.

هرگاه طرفین دو رابطه فوق را با هم جمع و بر دو تقسیم کنیم خواهیم داشت

$$f'(x_{\mathrm{i}}) \cong \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\mathrm{h}} \quad , \mathrm{i} = 1,2, \ldots, n-1 \qquad (3)$$

همچنین دستورهای زیر را برای مشتق‌های مرتبه دوم و سوم داریم.

$$f''(x_{\mathrm{i}}) \cong \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{\mathrm{h}^2}$$

$$f'''(x_{\mathrm{i}}) \cong \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + 2f_{i-1} - f_{i-2}}{2\mathrm{h}^3}$$

مثال ۲: تابع جدول زیر مفروض است. مقادیر $f'(0)$ ، $f'(2)$ ، $f''(2)$ را بدست بیاورید.

x_{i}	0	1	2	3
f_i	0	0.375	0.971	1.511

حل : با توجه به جدول داریم $h = 1$ بنابراین با استفاده از فرمول (۱) داریم

$$f'(0) \cong \frac{f_1 - f_0}{\mathrm{h}} = \frac{0.375 - 0}{1} = 0.375$$

$$f'(2) \cong \frac{f_3 - f_2}{\mathrm{h}} = \frac{1.511 - 0.971}{1} = 0.540$$

همچنین برای $f'(2)$ می توان از فرمول (۲) به صورت زیر استفاده کرد.

$$f'(2) \cong \frac{f_2 - f_1}{\mathrm{h}} = \frac{0.971 - 0.375}{1} = 0.596$$

با استفاده از فرمول (۳) نیز می توان $f'(2)$ را محاسبه کرد.

$$f'(2) \cong \frac{f_3 - f_1}{2\mathrm{h}} = \frac{1.511 - 0.375}{2} = 0.568$$

حال $f''(2)$ را محاسبه می‌کنیم.

$$f''(2) \cong \frac{f_1 - 2f_2 + f_3}{\mathrm{h}^2} = \frac{0.375 - 2(0.942) + 1.511}{1} = 0.056$$

۲-انتگرال‌گیری عددی

برای محاسبه $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ هرگاه تابع اولیه f موجود نباشد و یا f به صورت جدولی داده شده باشد از انتگرال‌گیری عددی استفاده می‌شود. واضح است که انتگرال معین را می‌توان به عنوان مساحت زیر منحنی $y = f(x)$ که مصور است بین محور x ها و خطوط $x = a$ و $x = b$ تعبیر کرد و با تقسیم فاصله $[a, b]$ به چند زیر فاصله و جمع کردن مساحت‌های مربوط به این زیر فاصله‌ها مقدار انتگرال را محاسبه کرد.

فرض کنید $[a, b]$ را به n قسمت مساوی به صورت زیر تقسیم کنیم

$$[x_i, x_{i+1}] \quad , \quad i = 0\,, 1, \ldots, n-1$$

که در آن

$$x_{i+1} - x_i = \mathrm{h} \quad , \qquad i = 0\,, 1, \ldots, n-1$$

بنابراین $h = \frac{b-a}{n}$.

الف. قاعده ذوزنقه‌ای: در فاصله $[x_i, x_{i+1}]$ تقریب زیر را به کار می‌بریم

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(\mathrm{x})\mathrm{d}x \cong \frac{\mathrm{h}}{2}(f_\mathrm{i} + f_{\mathrm{i+1}})$$

رابطه فوق مساحت ذوزنقه‌ای به قاعده‌های $f_\mathrm{i}, f_{\mathrm{i+1}}$ و ارتفاع h می‌باشد.

بنابراین برای پیدا کردن تقریبی از $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\mathrm{d}x$ به صورت زیر عمل می‌کنیم

$$\int_{b}^{a} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$$

$$+ \cdots + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx + \cdots \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$$

$$\cong \frac{h}{2}(f_0 + f_1) + \frac{h}{2}(f_1 + f_2) + \cdots + \frac{h}{\mathrm{c}}(f_{\mathrm{i}} + f_{\mathrm{i+1}}) + \cdots \frac{h}{2}(f_{\mathrm{n-1}} + f_{\mathrm{n}})$$

$$= \frac{h}{2}[f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \cdots 2f_{\mathrm{n-1}} + f_{\mathrm{n}}]$$

بنابراین با استفاده از قاعده ذوزنقه‌ای مقدار $\int_{b}^{a} f(x)dx$ به صورت زیر بدست می‌آید

$$\int_{b}^{a} f(x)dx \cong T(h) = \frac{h}{2}[f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \cdots 2f_{\mathrm{n-1}} + f_{\mathrm{n}}]$$

توجه ۲ : $T(h)$ به معنی مقدار انتگرال با استفاده از روش ذوزنقه‌ای (Trapeziod) می‌باشد که هر زیر فاصله دارای طول h می‌باشد.

توجه ۳ : هر چه مقدار h کوچکتر باشد می‌توان به تقریب بهتری دست یافت.

مثال ۳ : تقریب‌هایی از $\int_{0.1}^{0.3} f(x)dx$ را به روش ذوزنقه‌ای و به ازای $h = 0.2, 0.1, 0.05$ بدست آورده و مقدار آنها را با جواب دقیق مقایسه کنید.

حل: ابتدا جواب دقیق را بدست می‌آوریم

$$\int_{0.1}^{0.3} e^x dx = e^x \Big|_{0.1}^{0.3} = e^{0.3} - e^{0.1} \cong 0.24469$$

که البته این جواب تا پنج رقم اعشار درست است. حال جواب‌های تقریبی را به ازاء h های داده شده محاسبه می‌کنیم.

$$T(0.2) = \frac{0.2}{2}[f(0.1) + f(0.3)] = 0.1[1.10517 + 1.34986] = 0.24550$$

$$T(0.1) = \frac{0.1}{2}[f(0.1) + 2f(0.2) + f(0.3)]$$
$$= 0.05[1.10517 + 2(1.22140) + 1.34986] = 0.24489$$

$$T(0.05) = \frac{0.05}{2}[f(0.1) + 2f(0.15) + 2f(0.2) + 2f(0.25) + f(0.3)]$$
$$= 0.025[1.10517 + 2(1.16183 + 1.22140 + 1.28403) + 1.34986] = 0.24474$$

که ملاحظه کنیم که $T(0.05)$ به دلیل اینکه مقدار h کوچکتر است، دقیق‌تر می‌باشد.

مثال ٤ : با استفاده از مقادیر جدول زیر تقریبی از $\int_0^1 f(x)dx$ حساب کنید.

x_{i}	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
f_i	1	1.2214	1.4918	1.8221	2.2255	2.7183

حل : با قرار دادن $h = 0.2$ داریم

$$T(0.2) = \frac{0.2}{2}[f(0) + 2f(0.2) + 2f(0.4) + 2f(0.6) + 2f(0.8) + f(1)]$$
$$= 1.72399$$

ب. قاعده سیمپسون

در قاعده ذوزنقه‌ای برای تقریب $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$ یک چندجمله‌ای درجه یک (یک خط) را جایگزین $f(x)$ می‌کنیم. اما در روش سیمپسون یک چندجمله‌ای درجه دوم را جایگزین تابع $f(x)$ در فاصله $[x_i, x_{i+2}]$ می‌کنیم و از آن تقریب زیر را خواهیم داشت

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \cong \frac{h}{3}(f_i + 4f_{i+1} + f_{i+2})$$

برای بدست آوردن فرمول قاعده سیمپسون در سراسر فاصله $[x_0, x_n]$ باید n عددی زوج باشد. به عبارت دیگر باید تعداد نقاط فرد باشد. با فرض زوج بودن n داریم

$$\int_b^a f(x)dx = \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx$$

$$+\cdots+\int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)dx \cong \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2) + \frac{h}{3}(f_2 + 4f_3 + f_4)$$

$$+\cdots+\frac{h}{3}(f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n)$$

بنابرین

$$s(h) = \int_b^a f(x)dx \cong \frac{h}{3}(f_0 + 4f_{1+} + 2f_2 + 4f_3 + \cdots + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n$$

فرمول بالا، فرمول قاعده سیمپسون برای محاسبه تقریبی $\int_b^a f(x)dx$ نامیده می‌شود.

مثال۵ : تقریب‌هایی از $\int_1^{1.3} \sqrt{x}dx$ را به روش سیمپسون و به ازاء $h = 0.15$ و $h = 0.05$ بدست بیاورید. مقادیر بدست آمده را با مقدار واقعی انتگرال مقایسه کنید.

حل : داریم : $f(x) = \sqrt{x}$ لذا

$$s(0.15) = \frac{0.15}{3}[1 + 4(1.07238) + 1.14018] = 0.321485$$

$$s(0.05) = \frac{0.05}{3}[1 + 4(1.02470) + 2(1.04881) + 4(1.07238) + 2(1.09545) + 4(1.11803) + 1.14018] = 0.32149$$

از طرفی

$$\int_{1}^{1.3} \sqrt{x}\mathrm{d}x = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_{1}^{1.3} = \frac{2}{3}\left[(1.3)^{\frac{3}{2}} - 1\right] \cong 0.321485$$

ج. روش نیوتن – کاتس

در زیر فرمول چهار نقطه‌ای نیوتن – کاتس داده شده است

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx \cong \frac{3\mathrm{h}}{8}(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3)$$

مثال۶ : با استفاده از فرمول چهار نقطه‌ای نیوتن – کاتس مقدار انتگرال $\int_0^1 xe^x dx$ را بدست آورده و آن را با مقدار واقعی مقایسه کنید.

حل : چون فرمول چهارنقطه‌ای است بنابراین $n = 3$ واز آن $h = \frac{1-0}{3} = \frac{1}{3}$ لذا

$$x_0 = 0 \quad , x_1 = \frac{1}{3} \quad , x_2 = \frac{2}{3} \quad , x_3 = 1$$

بنابراین

$$\int_0^1 xe^x dx \cong \frac{1}{8}\left[0 + e^{\frac{1}{3}} + 2e^{\frac{2}{3}} + e^1\right] = 1.00117$$

اما مقدار واقعی انتگرال به صورت زیر است

$$\int_0^1 xe^x dx = (xe^x - e^x)\Big|_0^1 = 0 - (-e^0) = 1$$

د. روش دونقطه‌ای و سه نقطه‌ای گاوس

تفاوت اساسی روش گاوس با روش‌های قبلی در این است که در روش‌های قبلی تمام فرمول‌های بیان شده برای نقاط متساوی‌الفاصله x_{k} می‌باشند، در حالی که در روش گاوس چنین نیست. همچنین فرمول‌های قاعده گاوس برای فاصله $[-1\,,1]$ بدست می‌آیند. واضح است که فاصله های $[a\,,b]$ و $[-1\,,1]$ را به سادگی می‌توان با تغییر متغیر زیر به هم تبدیل نمود. فرض کنید $x \in [a\,,b]$ و $u \in [-1\,,1]$ در این صورت هرگاه قرار دهیم

$$x = \frac{1}{2}[(b-a)u + (b+a)]$$

داریم

$$dx = \frac{b-a}{2}du$$

لذا

$$\int_{\mathrm{a}}^{b} f(x)dx \cong \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} g(u)du$$

که در آن

$$g(u) = f(\frac{1}{2}(b-a)u + (b+a))$$

فرمول دونقطه‌ای گاوس برای فاصله $[-1\,,1]$ به صورت زیر است

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \cong f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

همچنین فرمول سه نقطه‌ای گاوس برای فاصله $[-1\,,1]$ به صورت زیر است

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \cong \frac{1}{9}\left[5f(-\sqrt{\frac{3}{5}}) + 8f(0) + 5f(\sqrt{\frac{3}{5}})\right]$$

مثال۷ : مقدار $\int_{1}^{2} \frac{\sin^2 x}{x} dx$ را با استفاده از روش دونقطه‌ای و سه نقطه‌ای گاوس بدست بیاورید.

حل: قرار می‌دهیم $x = \frac{u+3}{2}$ لذا $dx = \frac{du}{2}$ لذا با استفاده از روش دونقطه‌ای گاوس داریم

$$\int_{1}^{2} \frac{\sin^2 x}{x} dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{\sin^2(\frac{u+3}{2})}{\frac{u+3}{2}} du$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{\sin^2(\frac{u+3}{2})}{u+3} \cong f(-\frac{\sqrt{3}}{3}) + f(-\frac{\sqrt{3}}{3})$$

که در آن

$$f(x) = \frac{\sin^2\left(\frac{x+3}{2}\right)}{x+3}$$

لذا

$$f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 0.361691231\,, \qquad f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 0.266475236$$

بنابرین

$$\int_1^2 \frac{\sin^2 x}{x}\,dx \cong 0.361691231 + 0.266475236 = 0.628166467$$

همچنین با استفاده از فرمول سه نقطه‌ای گاوس داریم

$$\int_1^2 \frac{\sin^2 x}{x}\,dx$$
$$\cong \frac{1}{9}[5(0.361473246) + 8(0.331665416) + 5(0.239264512)]$$
$$= 0.628556902$$

ه. انتگرال‌های منفرد و قاعده نقطه میانی

در قسمت‌های قبل محاسبه انتگرال‌هایی به صورت $\int_a^b f(x)dx$ مورد بحث قرار گرفت که در آن $f(x)$ در تمام فاصله $[a\,,b]$ معین و تعریف شده بود. در این قسمت انتگرال‌هایی را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

الف) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

ب) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

ج) $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

که در آن توابعی که می‌خواهیم انتگرال آنها را محاسبه کنیم در یک یا هر دو نقطه انتهایی فاصله انتگرال‌گیری تعریف نشده‌اند. بعنوان مثال، در انتگرال الف، تابع در نقطه $x = 0$ تعریف نشده است. این نقطه را نقطه منفرد یا تکین تابع می‌نامیم.

محاسبه چنین انتگرال‌هایی با استفاده از روش‌های قبل امکان پذیر نیست. برای محاسبه این انتگرال‌ها از قاعده نقطه میانی استفاده می‌کنیم. فرمول قاعده نقطه میانی به صورت زیر است.

$$\int_{\mathrm{a}}^{b} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_{\mathrm{n}}} f(x)dx \cong \mathrm{M(h)} = \mathrm{h}\left[f\left(x_0 + \frac{\mathrm{h}}{2}\right) + \cdots + f(x_{\mathrm{n-1}} + \frac{\mathrm{h}}{2})\right]$$

مثال۸ : تقریبی از $\int_0^{0.09} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$ را با $h = 0.03$ و $h = 0.01$ به روش نقطه میانی به دست آورید. این مقدارهای تقریبی را به مقدار واقعی انتگرال مقایسه کنید.

حل: داریم

$$\int_0^{0.09} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} \cong M(0.03) = 0.03[f(0.015) + f(0.045) + f(0.075)]$$

$$= 0.03[8.1650 + 4.7140 + 3.6515] = 0.4959$$

همچنین

$$\int_0^{0.09} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} \cong M(0.01) = 0.01\left[\frac{1}{\sqrt{0.005}} + \frac{1}{\sqrt{0.015}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{0.085}}\right]$$
$$= 0.539587$$

مقدار واقعی انتگرال به صورت زیر است

$$\int_0^{0.09} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = \left(2\sqrt{x}\right)\Big|_0^{0.09} = 0.6$$

ملاحظه می کنیم که میزان خطا زیاد می‌باشد. بنابراین توصیه می‌شود در چنین انتگرال‌هایی برای قسمتی که نزدیک نقطه تکین تابع است مقدار h را بسیار کوچک اختیار کنید و برای بقیه فاصله، h را یک مقدار بزرگ‌تر در نظر بگیرید.

مثال۹ : انتگرال $\int_0^{0.09} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$ را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\int_0^{0.09} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int_0^{0.01} \frac{dx}{\sqrt{x}} + \int_{0.01}^{0.09} \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

انتگرال $\int_0^{0.01} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$ را با M(0.002) و انتگرال $\int_{0.01}^{0.09} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$ را با M(0.02) تقریب بزنید.

حل : داریم

$$\int_0^{0.01} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} \cong \mathrm{M}(0.002)$$
$$= 0.002\left[\frac{1}{\sqrt{0.001}} + \frac{1}{\sqrt{0.003}} + \frac{1}{\sqrt{0.005}} + \frac{1}{\sqrt{0.007}} + \frac{1}{\sqrt{0.009}}\right]$$
$$= 0.173031$$

$$\int_0^{0.09} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} \cong \mathrm{M}(0.02) = 0.02\left[\frac{1}{\sqrt{0.02}} + \frac{1}{\sqrt{0.04}} + \frac{1}{\sqrt{0.06}} + \frac{1}{\sqrt{0.08}}\right]$$
$$= 0.393782$$

لذا

$$\int_0^{0.09} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} \cong 0.173031 + 0.393782 = 0.566813$$

که ملاحظه می‌کنیم که خطا کمتر شده است.

۳- خطای روش‌های انتگرال‌گیری

الف. خطای روش ذوزنقه‌ای

اگر خطای روش ذوزنقه ای را با ET(h) نشان دهیم داریم

$$|ET(h)| \leq \frac{b-a}{12}\mathrm{h}^2 M_2$$

که در آن M_2 یک کران بالا برای $f''(x)$ است. یعنی داریم

$$|f''(x)| \leq M_2$$

مثال۱۰: تقریبی از $\int_0^1 x\ sinx\ dx$ بدست بیاورید به طوری که خطای آن حداکثر 0.01 باشد.

حل: داریم $b = 1, a = 0$. برای بدست آوردن M_2 چون

$$f''(x) = 2\cos x - x\sin x$$

لذا

$$|f''(x)| = |2\cos x - x\sin x| \leq 2|\cos x| + |x||\sin x| \leq 2 + 1 = 3$$

پس $M_2 = 3$ بنابراین h را طوری تعیین می‌کنیم که داشته باشیم

$$\frac{1-0}{12}\ \mathrm{h}^2(3) \leq 10^{-2} \Rightarrow \frac{\mathrm{h}^2}{4} \leq 10^{-2} \Rightarrow \mathrm{h} \leq 0.2$$

بنابراین قرار می‌دهیم $h = 0.2$ و $T(0.2)$ را محاسبه می‌کنیم

$$T(0.2) = \frac{(0.2)}{2}(0 + 2(0.2\sin 0.2 + 0.4\sin 0.4 + 0.6\sin 0.6 + 0.8\sin 0.8) + \sin 1) = 0.30578$$

ب. خطای روش سیمپسون

اگر M_4 یک کران بالا برای $f''''(x)$ و $Es(h)$ خطای روش سیمپسون باشد داریم

$$|ES(h)| \leq \frac{b-a}{180} h^4 M_4$$

مثال ۱۱ : با استفاده از روش سیمپسون مقدار $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\, dx$ را با حداکثر خطای 10^{-5} تعیین کنید.

حل : داریم $b = \frac{\pi}{2}, a = 0$ و $f(x) = x\cos x$ لذا

$$f^{(4)}(x) = f''''(x) = 4\sin x + x\cos x$$

برای $x \in \left[0\ , \frac{\pi}{2}\right]$

$$|f^4(x)| = |4\sin x + x\cos x| \leq 4\left|\sin x\right| + |x||\cos x| \leq 4 + \frac{\pi}{2} < 6$$

بنابراین قرار می‌دهیم $M_4 = 6$ و از آنجا داریم

$$\frac{b-a}{180} h^4 M_4 = \frac{\frac{\pi}{2} - 0}{180} h^4 \times 6 = \frac{\pi h^4}{60} \leq 10^{-5}$$

$$\Rightarrow h \leq 0.1 \sqrt[4]{\frac{6}{\pi}} \cong 0.1176$$

لذا چون $\frac{\pi}{2} = nh = b - a$ پس $n = \frac{\pi}{2h}$ و از آن

$$n = \frac{\pi}{2h} \geq \frac{\pi}{2 \times 0/1176} = 13.3571$$

چون در روش سیمپسون بایستی n زوج باشد لذا قرار می دهیم $n = 14$ و از آن

$$h = \frac{\pi/_2}{n} = \frac{\pi}{28} \cong 0.1122$$

بنابراین s(0.1122) را محاسبه می‌کنیم (تمرین).

ج. خطای قاعده نقطه میانی

اگر EM(h) خطای قاعده نقطه میانی باشد در این صورت داریم

$$|EM(h)| \leq \frac{b - a}{24} h^2 M_2$$

که در آن M_2 یک کران بالا برای $f''(x)$ است.