جزوه دینامیک

استاد: جناب آقای دکتر صادق اعتدالی

جلسه اول

Subject : بنام خدا
Year. Month. Date.

تعریف علم مکانیک :

علمی است که اجسام را در وضعیت سکون و یا حرکت تحت تاثیر نیروها وارده بررسی و تحلیل می کند.

علم مکانیک به سه دسته زیر تقسیم می شود.

۱- مکانیک اجسام صلب { الف) ایستایی (استاتیک) ← جسم ساکن است.

ب) پویایی (دینامیک) ← جسم متحرک است.

۲- مکانیک اجسام شکل پذیر

۳- مکانیک شاره ها (سیالات)

مفاهیم و اصول پایه :

مفاهیم بنیادی که در مکانیک به کار برده می شوند عبارتند از فضا ، زمان ، جرم و نیرو.

فضا : عبارتست از ناحیه ای هندسی که واقعه فیزیکی درون آن اتفاق می افتد.

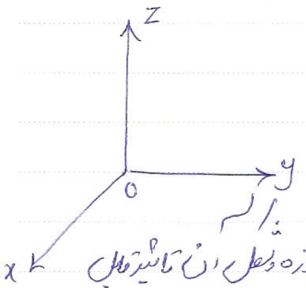
زمان : وسیله سنجش توالی وقایع فیزیکی است و واحد آن ثانیه می باشد

جرم : سنجش کمی نیروی اینرسی که با نیروی جاذبه ثقل رابطه مستقیم دارد.

نیرو : عمل یک جسم بر جسم دیگر را نیرو می نامند، که دو جسم یا در تماس با یکدیگرند یا با هم تماس ندارند.

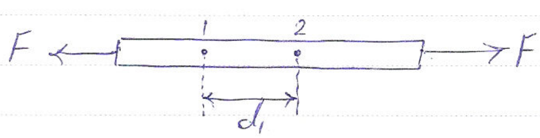
اینرسی: توانایی یک جسم برای مقاومت در برابر تغییر حرکت است.

دستگاه مرجع: یک سیستم مختصات ثابت است که حرکت نسبت به آن سنجیده می‌شود. خود حرکت نمی‌کند و بر نقطه مرجع استوار است.



ذره مادی: نقطه بسیار کوچکی از ماده که در اثر تغییر جهت نیرو، تنها انتقال را دخیل می‌کند و اندازه و شکل آن تأثیر قابل ملاحظه‌ای در حل مسئله ندارد.

جسم صلب: جسمی که فاصله نقاط آن در طول حرکت ثابت است یعنی جسم کشیده یا فشرده نمی‌شود.



منظور از بررسی سینماتیک، بررسی پارامترهای حرکت (موقعیت، سرعت، شتاب) بدون در نظر گرفتن عامل آن است.

منظور از بررسی سینتیک، بررسی عوامل به وجود آورنده حرکت یعنی نیروها می‌باشد.

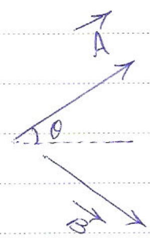
سیستم واحدهای اندازه گیری:

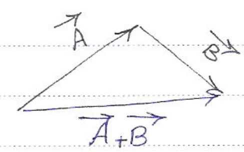
	زمان	طول	جرم
بین المللی (SI)	sec	m	kg
انگلیسی (FPS)	sec	ft	Lb

کمیت ها بر دو نوع اند:

۱- کمیت های عددی که فقط مقدار دارند. مانند: جرم، زمان و ...

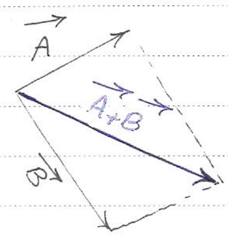
۲- کمیت های برداری که علاوه بر مقدار جهت نیز دارند.



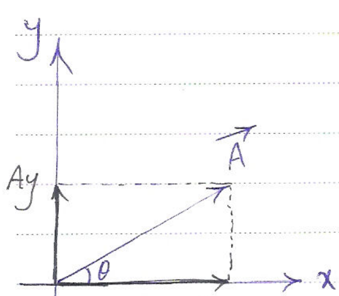


جمع برداری دو بردار:

روش ترسیمی
- ۱- روش مثلث
- ۲- روش متوازی الاضلاع



تجزیه بردارها در فضای دو بعدی



$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j}$$

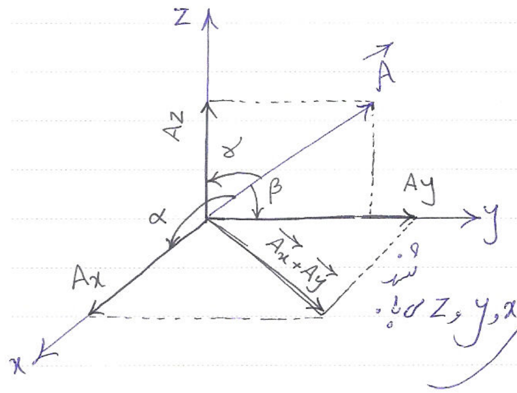
$$|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$

$A_x = |A| \cos\theta$

$\tan\theta = \dfrac{A_y}{A_x} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\dfrac{A_y}{A_x}$

$A_y = |A| \sin\theta$

تجزیه بردار در فضای سه بعدی :



$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$

α و β و γ زوایای بردار A با جهت مثبت محورهای x و y و z می باشد.

$A_x = |A| \cos\alpha$

$|A| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$

$A_y = |A| \cos\beta$

$A_z = |A| \cos\gamma$

$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

$\vec{e_A} = \cos\alpha\,\hat{i} + \cos\beta\,\hat{j} + \cos\gamma\,\hat{k}$

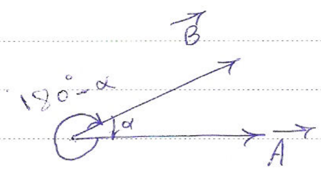
$\vec{e_A}$ = بردار واحد بردار $\vec{A}$

$\vec{e_A} = \dfrac{A}{|\vec{A}|}$

ضرب

- اسکالر × اسکالر $3\times5=15$
- اسکالر × بردار $C\vec{A}=\vec{B}$ ← اسکالر
- حاصلضرب برداری ←
  - حاصلضرب داخلی $\vec{A}\cdot\vec{B}$ ← عدد
  - حاصلضرب خارجی $\vec{A}\times\vec{B}$ ← بردار

حاصلضرب داخلی دو بردار



$$\vec{A}\cdot\vec{B}=|A||B|\cos\alpha$$

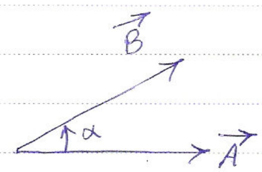
$$i\cdot i=j\cdot j=k\cdot k=1$$
$$i\cdot j=j\cdot k=i\cdot k=0$$

$$\vec{A}=A_x\vec{i}+A_y\vec{j}+A_z\vec{k}$$

$$\vec{B}=B_x\vec{i}+B_y\vec{j}+B_z\vec{k}$$

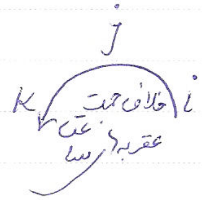
$$\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z}$$

حاصلضرب خارجی دو بردار



$$\vec{A}\times\vec{B}=|A||B|\sin\alpha=-(\vec{B}\times\vec{A})$$

حاصلضرب خارجی بردارهای یکه: $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$



$$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k} \qquad \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}$$

$$\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k} \qquad \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$$

$$\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i} \qquad \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}$$

$$\vec{A}=A_x\vec{i}+A_y\vec{j}+A_z\vec{k}$$

$$\vec{B}=B_x\vec{i}+B_y\vec{j}+B_z\vec{k}$$

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{A}\times\vec{B}=+(A_yB_z-A_zB_y)\vec{i}-(A_xB_z-A_zB_x)\vec{j}+(A_xB_y-A_yB_x)\vec{k}$$

بنام خدا — جلسه دوم

مشتق توابع برداری:

مشتق توابع برداری همواره یک بردار است.

$3\vec{i}+4\vec{j}+5\vec{k}$

تابع برداری: $f(t)\vec{i}+g(t)\vec{j}+h(t)\vec{k}$

فرض کنید هدف بدست آوردن مشتق تابع برداری P نسبت به متغیر زمان (t) باشد، در این صورت اگر $\vec{P}=P_x\vec{i}+P_y\vec{j}+P_z\vec{k}$

آنگاه:

$$\frac{d\vec{P}}{dt}=\frac{dP_x}{dt}\vec{i}+\frac{dP_y}{dt}\vec{j}+\frac{dP_z}{dt}\vec{k}=\dot{\vec{P}}$$

$\rightarrow \vec{P}$ آهنگ تغییر بردار

$$\Rightarrow \vec{\dot{P}} = \dot{P}_x\vec{i} + \dot{P}_y\vec{j} + \dot{P}_z\vec{k}$$

$$\frac{d(P.Q)}{dt} = \frac{dP}{dt}.Q + P.\frac{dQ}{dt} \xrightarrow{\text{جواب}}$$ تابع برحسب t

$$\frac{d(P\times Q)}{dt} = \frac{dP}{dt}\times Q + P\times\frac{dQ}{dt} \xrightarrow{\text{جواب}}$$ تابع برداری برحسب $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

به عنوان مثال، مشتق تابع برداری A نسبت به زمان به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\vec{A} = t^2(\sin 3t\,\vec{i} - \cos 3t\,\vec{j}) = (t^2\sin 3t)\vec{i} + (-t^2\cos 3t)\vec{j}$$

$$\frac{dA}{dt} = (2t\sin 3t + 3t^2\cos 3t)\vec{i} + (3t^2\sin 3t - 2t\cos 3t)\vec{j}$$

مثال:

$$\vec{A} = 5t\vec{i} + 8\vec{j}$$

$$\vec{B} = 3t^2\vec{i} + 4t^2\vec{j}$$

$$\vec{A}.\vec{B} = 15t^3 + 32t^2 \longrightarrow \frac{d(\vec{A}.\vec{B})}{dt} = 45t^2 + 64t$$

$$\frac{d(\vec{A}.\vec{B})}{dt} = \frac{d\vec{A}}{dt}.\vec{B} + \vec{A}.\frac{d\vec{B}}{dt} = (5\vec{i})(3t^2\vec{i} + 4t^2\vec{j}) + (5t\vec{i} + 8\vec{j})(6t\vec{i} + 8t\vec{j})$$

$$= 15t^3 + 32t^2$$

$$\vec{A}\times\vec{B} = (20t^3 - 24t^2)\vec{k}$$

$$\frac{d(\vec{A}\times\vec{B})}{dt} = (60t^2 - 48t)\vec{k}$$

V

$$\frac{d(\vec{A}\times\vec{B})}{dt} = \frac{d\vec{A}}{dt}\times\vec{B} + \vec{A}\times\frac{d\vec{B}}{dt}$$

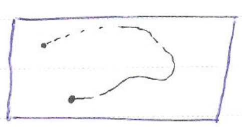
فصل اول: سینماتیک ذره مادی

یک ذره مادی، دو شکل حرکتی دارد، حرکت مستقیم الخط، حرکت منحنی (صفحه‌ای و فضایی)

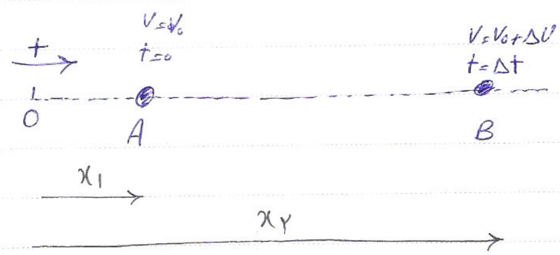
حرکت یک جسم بر روی یک مسیر راست را حرکت مستقیم الخط گویند. مانند حرکت روی یک سطح شیبدار.

هرگاه حرکت یک جسم روی یک مسیر منحنی باشد، حرکت منحنی الخط خواهد بود. در اینصورت اگر در تمامی زمانها حرکت شود صفحه‌ای را در نظر گرفت که در آن موقعیت جسم در طول کل حرکت در آن صفحه انجام شود حرکت صفحه‌ای و در غیر اینصورت، حرکت فضایی است.

در حل مسائل ابتدا باید نقطه مرجع را تعیین نمود. انتخاب نقطه مرجع اختیاری است. در طول حل شده نباید آن را تغییر دهیم سپس باید جهت مثبت حرکت را تعیین کنیم.



حرکت مستقیم الخط ذره مادی:



سرعت متوسط $\overline{V}_{ave} = \dfrac{\overrightarrow{\Delta x}}{\Delta t} = \dfrac{x_2 - x_1}{\Delta t}$

سرعت لحظه‌ای $\overrightarrow{V} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{dx}{dt} = \overrightarrow{\dot{x}}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{V} = \overrightarrow{\dfrac{dx}{dt}} = \overrightarrow{\dot{x}}$$

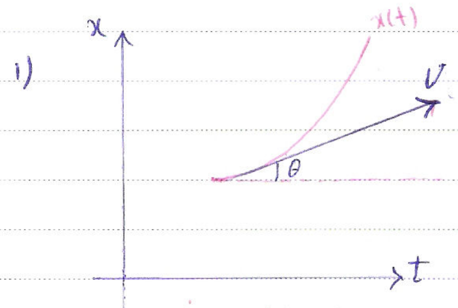
شتاب متوسط : $\overline{a}_{ave} = \dfrac{\overrightarrow{\Delta V}}{\Delta t}$

شتاب لحظه‌ای ، $\overrightarrow{a} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\overrightarrow{\Delta V}}{\Delta t} = \dfrac{dV}{dt} = \dfrac{d^2x}{dt^2} = \overrightarrow{\ddot{x}}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{a} = \dfrac{\overrightarrow{dV}}{dt} = \dfrac{dV}{dx} \times \underbrace{\dfrac{dx}{dt}}_{V} = V\dfrac{dV}{dx}$$

بررسی مفاهیم فیزیکی درباره منحنی های حرکت :

1)



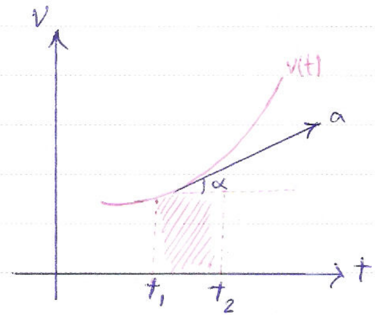
نمودار جابجایی-زمان

$$V = \dfrac{dx}{dt} = \tan\theta$$

$$V(t) = \dfrac{dx}{dt} \longrightarrow dx = V dt$$

$$\Rightarrow \int_{x_1}^{x_2} dx = \int_{t_1}^{t_2} V(t)\, dt \Rightarrow x_2 - x_1 = \int_{t_1}^{t_2} V(t)\, dt$$

۲)



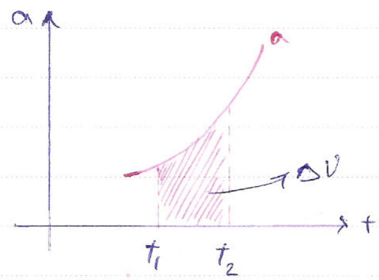
نمودار سرعت - زمان

$$a(t) = \frac{dv}{dt} \quad , \quad a = \frac{dv}{dt} = \tan\alpha$$

$$\Rightarrow \int_{v_1}^{v_2} dv = \int_{t_1}^{t_2} a(t)\,dt$$

$$\Rightarrow \Delta v = v_2 - v_1 = \int_{t_1}^{t_2} a(t)\,dt$$

۳)



نمودار شتاب - زمان

۲) به عبارت دیگر Δx (تغییرات جابجایی) برابر است با مساحت محصور بین منحنی v و محور زمان در فواصل زمانی t_1 و t_2.

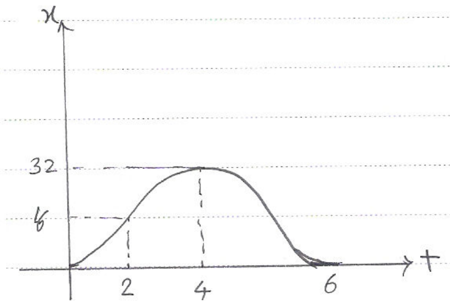
۳) به عبارت دیگر Δv (تغییرات سرعت) برابر است با مساحت محصور بین منحنی شتاب و محور زمان در فواصل زمانی t_1 و t_2.

مثال: ذره‌ای با معادله مکان $x = 6t^2 - t^3$، روی خط راست حرکت می‌کند. مطلوب است معادله‌های سرعت و شتاب و رسم منحنی‌های حرکت.

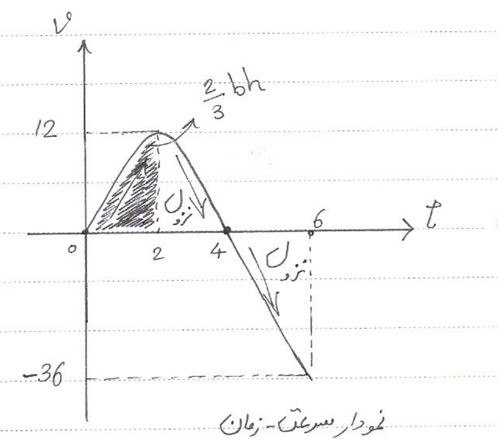
$x = 6t^2 - t^3$

$v = 12t - 3t^2$

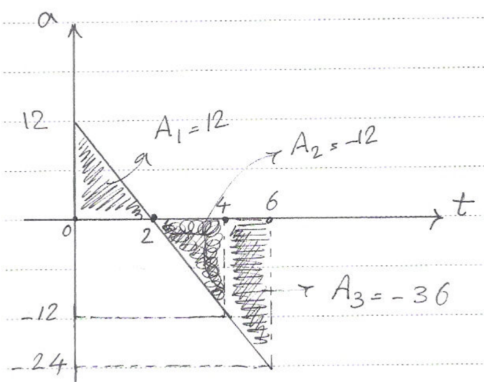
$a = 12 - 6t$



نمودار جابجایی - زمان



نمودار سرعت - زمان



نمودار شتاب - زمان

تعیین حرکت یک ذره مادی :

بسته به اینکه شتاب تابعی از زمان، تغییر مکان، تابعی از سرعت و یا ثابت باشد، مسئله را دنبال می‌کنیم.

۱- شتاب تابعی از زمان باشد، یعنی $a=f(t)$

حال بررسی می‌کنیم دو پارامتر دیگر حرکت یعنی سرعت و جابجا چگونه تغییر می‌کنند؟

$$a=f(t)=\frac{dv}{dt} \rightarrow dv=f(t)\,dt \rightarrow \int_{v_0}^{v} dv=\int_{t_0=0}^{t} f(t)\,dt \Rightarrow v=v_0+\int_{0}^{t} f(t)\,dt$$

$$v = g(t) \quad dt = \frac{dx}{dt} \longrightarrow dx = g(t)\,dt$$

$$\Rightarrow \int_{x_0}^{x} dx = \int_{0}^{t} g(t)\,dt \longrightarrow x = x + \int_{0}^{t} g(t)\,dt = h(t)$$

۲ـ شتاب تابعی از تغییر مکان باشد یعنی $a = f(x)$

$$a = v\frac{dv}{dx} = f(x) \Rightarrow a\,dx = v\,dv \longrightarrow f(x)\,dx = v\,dv$$

$$\Rightarrow \int f(x)\,dx = \int v\,dv \longrightarrow \frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$$

$$\Rightarrow v^2 = v_0^2 + 2\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = g(x)$$

۳ـ شتاب تابعی از سرعت باشد یعنی $a = f(v)$

$$a = f(v) = \frac{dv}{dt} \longrightarrow dt = \frac{dv}{f(v)} \longrightarrow \int_{0}^{t} dt = \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{f(v)} = g(v)$$

$$\Rightarrow t = \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{f(v)} = g(v)$$

$$a = v\frac{dv}{dx} = f(v) \longrightarrow \frac{v\,dv}{f(v)} = dx \longrightarrow \int_{v_0}^{v}\frac{v\,dv}{f(v)} = \int_{x_0}^{x} dx$$

$$\Rightarrow x = x_0 + \int_{v_0}^{v}\frac{v\,dv}{f(v)}$$

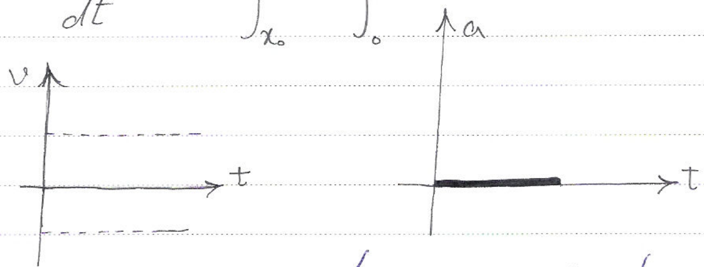
۴- شتاب ثابت، دو حالت دارد ← الف) شتاب صفر باشد، $a=0$

ب) شتاب ثابت باشد $a_t = a$

الف) شتاب صفر باشد که در این حالت، حرکت مستقیم الخط با سرعت یکنواخت گویند.

$$a=0 \longrightarrow \frac{dv}{dt}=0 \longrightarrow v=v_0=cte$$

$$v=\frac{dx}{dt} \longrightarrow \int_{x_0}^{x} dx = \int_{0}^{t} v\,dt \longrightarrow x = x + vt$$



ب) شتاب ثابت باشد، در این حالت، حرکت مستقیم الخط با شتاب یکنواخت گوییم.

$\begin{cases} \text{if } a>0 & \text{شتاب تند شونده} \\ \text{if } a<0 & \text{شتاب کند شونده} \end{cases}$

$\begin{cases} \text{if } av>0 & \text{حرکت تند شونده} \\ \text{if } av<0 & \text{حرکت کند شونده} \end{cases}$

شرایط اولیه : $t=0$ ، $V=V_0$ ، $x=x_0$

$$a=\frac{dv}{dt}\longrightarrow\int_{v_0}^{v}dv=\int_{0}^{t}a\,dt\longrightarrow v=at+v_0$$

ثابت

$$v=\frac{dx}{dt}\longrightarrow\int_{x_0}^{x}dx=\int_{t_0=0}^{t}v\,dt\longrightarrow\int_{x_0}^{x}dx=\int_{t_0=0}^{t}(at+v_0)\,dt$$

$$\Rightarrow x-x_0=\frac{1}{2}at^2+v_0t\Rightarrow x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0$$

$$a=v\frac{dv}{dx}\longrightarrow\int_{x_0}^{x}a\,dx=\int_{v_0}^{v}v\,dv\longrightarrow a(x-x_0)=\frac{v^2}{2}-\frac{v_0^2}{2}$$

$$\Rightarrow v^2-v_0^2=2a(x-x_0)$$

Subject :
Year. Month. Date.

بنام خدا :

جلسه سوم

حل چند مثال :

- در مکانیزم بعضی از تفنگ ها رابطه $a=-kv$ که رابطه بین سرعت و شتاب پیستون و لوله تفنگ می باشد برقرار است :

الف) v برحسب t ب) x برحسب t ج) v برحسب x

$$v=\frac{dx}{dt} \quad , \quad a=\frac{dv}{dt} \quad , \quad a=\frac{v\,dv}{dx}$$

$$a=-kv=\frac{dv}{dt}$$

$$\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{v}=\int_0^t -k\,dt \longrightarrow \ln v-\ln v_0=-kt \Rightarrow \ln\frac{v}{v_0}=-kt$$

$$\Rightarrow v=v_0 e^{-kt}$$ الف

$$v=\frac{dx}{dt}=v_0 e^{-kt} \longrightarrow \int_0^x dx=\int_0^t v_0 e^{-kt}\,dt \Rightarrow x=v_0\left(-\frac{1}{k}e^{-kt}\right)\Big|_0^t$$

$$\Rightarrow x=\frac{v_0}{k}\left(1-e^{-kt}\right)$$ ب .

$$a=-kv$$

$$a=\frac{v\,dv}{dx} \Rightarrow -kv=\frac{v\,dv}{dx} \Rightarrow v=v_0-kx$$

بررسی صحت محاسبات :

$$\begin{cases} V = V_0 e^{-kt} \longrightarrow e^{-kt} = \dfrac{V}{V_0} \\ x = \dfrac{v}{k}\left(1 - e^{-kt}\right) \xrightarrow{2} x = \dfrac{V}{k}\left(1 - \dfrac{V}{V_0}\right) = \dfrac{V_0}{k} - \dfrac{V}{k} \end{cases}$$

$$\Rightarrow V = V_0 - kx$$

ft sec

* حرکت ذره ای بر روی خط افقی با رابطه $x = x^3 - 6t^2 - 15t + 40$ توصیف می شود.

الف) سرعت ذره در چه زمانی صفر است ؟

ب) در این لحظه ذره در کجاست و چه مسافتی را پیموده است؟

ج) شتاب ذره در این لحظه چقدر است؟

د) ذره در فاصله زمانی 4 تا 6 ثانیه چه مسافتی را پیموده است؟

$$V = \dot{x} = \frac{dx}{dt} = 3t^2 - 12t - 15$$

$$a = \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = 6t - 12$$

الف : $V = 0 \longrightarrow 3t^2 - 12t - 15 = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = -1\,sec \quad \times \\ t = 5\,sec \end{cases}$$

ب) $x_{(t,5)} = -60\,ft$

برای تعیین مسافت ابتدا باید تشخیص دهیم ذره در چه جهتی حرکت می کند. برای این کار لازم است ابتدا v را تعیین علامت کنیم.

$V = 3t^2 - 12t - 15$

	-1	sec	5	
موافق علامت a		مخالف علامت a		موافق علامت a
		−		+

$\Rightarrow$ if $\quad 0<t<5 \Rightarrow v<0$

$\Rightarrow$ if $\quad t>5 \Rightarrow v>0$

$\Rightarrow$ مسافت طی شده $= -60 - 40 = -100^{ft}$

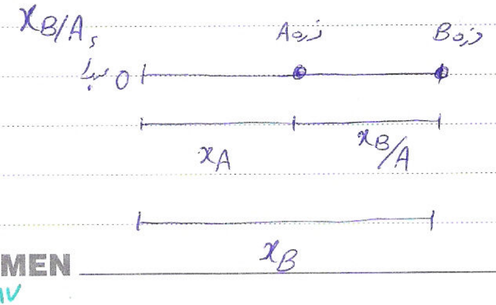
$$4 \le t < 5,\ v<0 \begin{cases} x_5 = -60 \\ x_4 = -52 \end{cases} \longrightarrow \text{مسافت طی شده} = x_5 - x_4 = -8^{ft}$$

مسافت کل $= -50 + 60 = 10^{ft}$

$$5 \le t \le 6,\ v>0 \begin{cases} x_6 = -50 \\ x_5 = -60 \end{cases} \longrightarrow \text{مسافت طی شده} = |-8| + |10| = 18^{ft}$$

حرکت چندین ذره:

دو ذره A و B را در نظر بگیرید که روی یک خط راست حرکت می‌کنند. اگر با انتخاب مبدأ O، مختصات A و B را با x_A و x_B نمایش دهیم، آنگاه مختصه مکانی نسبی B نسبت به A را با $x_{B/A}$ نمایش می‌دهند.



$$x_{B/A} = x_B - x_A \quad \text{یا} \quad x_B = x_A + x_{B/A}$$

مشتق ↓

$$v_{B/A} = v_B - v_A \quad \text{یا} \quad v_B = v_A + v_{B/A}$$

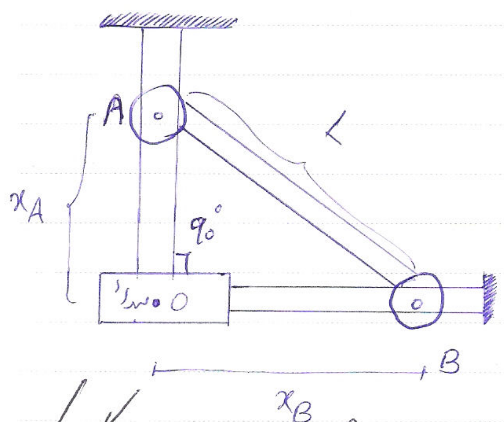
مشتق ↓

$$a_{B/A} = a_B - a_A \quad \text{یا} \quad a_B = a_A + a_{B/A}$$

حرکت های وابسته:

اگر مکان یک ذره به مکان ذره یا ذره های دیگر بستگی داشته باشد، به چنین حرکتی، حرکت وابسته گویند.

مثال:



رابطه وابستگی حرکت

$$x_A^2(t) + x_B^2(t) = L^2$$

مشتق ↓

$$2x_A(t)\frac{dx_A}{dt} + 2x_B(t)\frac{dx_B}{dt} = 0$$

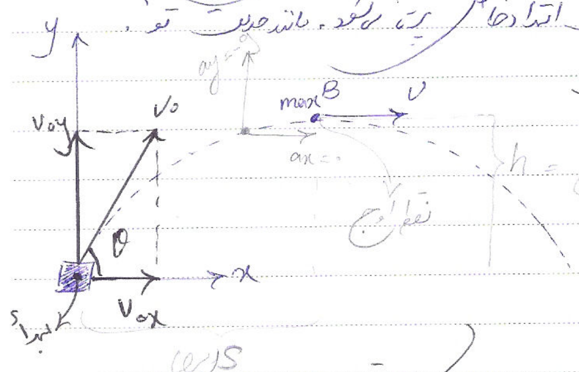
$$\Rightarrow x_A v_A + x_B v_B = 0 \longrightarrow$$ رابطه وابستگی سرعت

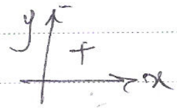
$$\frac{dx_A}{dt}v_A + x_A\frac{dv_A}{dt} + \frac{dx_B}{dt}v_B + x_B\frac{dv_B}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow v_A^2 + v_B^2 + x_A a_A + x_B a_B = 0$$

حرکت منحنی الخط ذره مادی در صفحه:

هرگاه ذره‌ای روی مسیری غیر از خط راست حرکت کند، حرکت منحنی الخط است. نمونه‌ای از این حرکت‌ها، حرکت پرتابه است که طی آن، جسم با یک سرعت اولیه در یک امتداد خاص پرتاب می‌شود. مانند حرکت توپ.





$V_{0x} = V_0 \cos\theta$ $\qquad a_x = 0$

$V_{0y} = V_0 \sin\theta$ $\qquad a_y = -g$

$a_x = 0 \Rightarrow$ حرکت در راستای x، حرکت با سرعت ثابت است.

$a_y = -g \Rightarrow$ در راستای y، حرکت با شتاب ثابت است.

شرایط اولیه: $t = 0 \longrightarrow x = 0$

$\qquad\qquad\qquad\; \longrightarrow y = 0$

$\qquad\qquad\qquad\; \longrightarrow V = V_0$

حرکت در راستای افقی :

$$a_x = 0 \longrightarrow \frac{dv}{dt} = 0 \longrightarrow v_x = cte \Rightarrow v_x = v_0 \cos\theta$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} \longrightarrow (v_0 \cos\theta)\, dt = dx \Rightarrow x = (v_0 \cos\theta)\, t$$

$$a_y = -g \longrightarrow a_y = \frac{dv_y}{dt} \longrightarrow \int_{v_0 \sin\theta}^{v_y} dv_y = \int_0^t -g\, dt$$

$$\Rightarrow v_y = v_0 \sin\theta - gt$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} \longrightarrow \int_0^y dy = \int_0^t v_y\, dt = \int_0^t (v_0 \sin\theta - gt)\, dt$$

$$\Rightarrow y = (v_0 \sin\theta)\, t - \frac{1}{2} g t^2$$

در نقطه B :

$$v_y = 0 \longrightarrow v_0 \sin\theta - gt = 0 \Rightarrow t = \frac{v_0 \sin\theta}{g} \longrightarrow$$ زمان اوج

در راستای x، S : $x = (v_0 \cos\theta)\, t \Rightarrow S = (v_0 \cos\theta)\left(\frac{v_0 \sin\theta}{g}\right)$

$$\Rightarrow S = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{2g}$$

y در راستای h: $y=-\frac{1}{2}gt^2+(V_0\sin\theta)t$

$$\Rightarrow h=\frac{V_0^2}{2g}\sin^2\theta$$

معادله مسیر حرکت:

* ثابت کنید معادله حرکت پرتابه سهمی است!

$$y=f(x)$$

$$y=-\frac{1}{2}gt^2+(V_0\sin\theta)t$$

$$x=(V_0\cos\theta)t \longrightarrow t=\frac{x}{V_0\cos\theta}$$

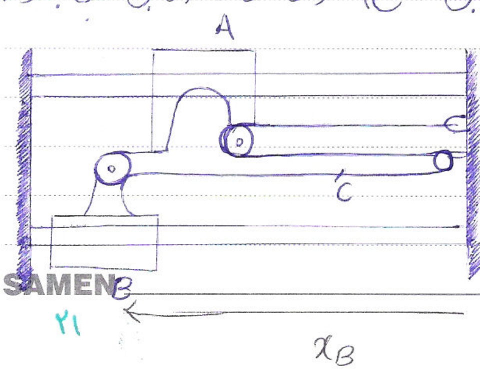
$$y=x\tan\theta-\frac{1}{2}g\frac{x^2}{V_0^2\cos^2\theta} \longrightarrow y=x\tan\theta-\frac{1}{2}g\frac{x^2}{V_0^2}\sec^2\theta$$

بنام خدا

جلسه چهارم

مثال: در وضعیت نشان داده شده طوقه B به سمت چپ با سرعت ثابت $300\ mm/s$ حرکت می‌کند. مطلوبست

الف) سرعت طوقه A ، ب) سرعت قسمت C از کابل ، ج) سرعت قسمت C از کابل نسبت به طوقه B.



$$L=cte$$

$$\Rightarrow 2x_A+x_B+x_B-x_A=L=cte$$

$$\Rightarrow x_A+2x_B=l$$

$\xrightarrow{\text{مشتق‌گیری}} x_A + 2x_B = 0 \Rightarrow V_A + 2V_B = 0$

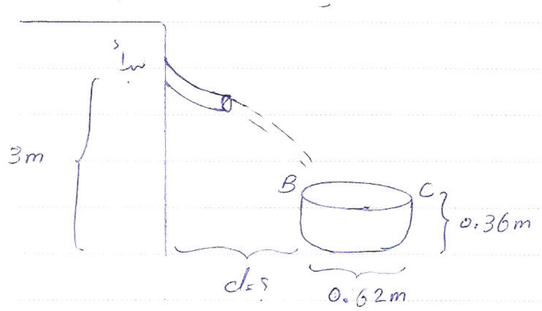
الف) $V_A = -2V_B = -600\ mm/s$

ب) $2x_A + x_C = cte$

$2V_A + V_C = 0 \longrightarrow V_C = -2V_A = 1200\ mm/s$

C) $V_{C/B} = V_C - V_B = 1200 - 300 = 900\ mm/s$

* مثال: از یک ناودان آب با سرعت اولیه $0.76\ m/s$ و با زاویه $15°$ نسبت به افق پایین می‌ریزد. گستره مقادیر فاصله d را طوری تعیین کنید که آب داخل ظرف BC بریزد. (باید آب بین نقطه B و C فرود بیاید)



در راستای افق $d = d + 0.62$

در راستای قائم $3 - 0.36 = 2.64$

حرکت قائم:

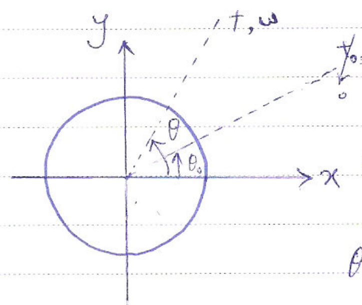
$$\begin{cases} y = y_0 + (V_{0y})t - \frac{1}{2}gt^2 \\ V_{0y} = -V_0 \sin 15° = -0.76 \sin 15° \\ \quad = -0.19670\ m/s \end{cases}$$

$$y - y_0 = 3 - 0.36 = 2.64$$

$$4.905t^2 + 0.1961t - 2.64 = 0 \rightarrow \begin{cases} t = 0.7139 \checkmark \\ t = -\infty \times \end{cases}$$

حرکت افقی :

$$x = (V_{0x})t = (V_0 \cos 15^\circ)t = 0.524\,m \Rightarrow d < 0.524\,m$$



حرکت ذره مادی بر روی مسیر دایره‌ای شکل :

ذره در لحظه $t = 0$ با سرعت زاویه‌ای ω_0 در موقعیت θ_0 قرار دارد، و در لحظه t با سرعت زاویه‌ای ω در موقعیت θ قرار دارد.

سرعت زاویه‌ای $\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \frac{\vec{d\theta}}{dt} = \vec{\dot{\theta}} \Rightarrow \vec{\omega} = \vec{\dot{\theta}}$

شتاب زاویه‌ای $\vec{\alpha} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{\vec{d\omega}}{dt} = \vec{\dot{\omega}} = \vec{\ddot{\theta}} \Rightarrow \vec{\alpha} = \vec{\dot{\omega}} = \vec{\ddot{\theta}}$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta} \times \frac{d\theta}{dt} = \omega \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow \alpha = \omega \frac{d\omega}{d\theta}$$

که شبیه هم روابط بین پارامترهای حرکت خطی یعنی x، v، a می‌باشد. لذا برای حالتهای مختلف زیر:

۱) $\alpha(t)$: α تابعی از زمان

۲) $\alpha(\omega)$: α تابعی از سرعت زاویه‌ای

۳) $\alpha(\theta)$: α تابعی از جابجایی زاویه‌ای

۴) $\alpha = 0$: سرعت زاویه‌ای ثابت

۵) $\alpha = cte$: شتاب زاویه‌ای یکنواخت

با کمک ۳ فرمول حرکت امکان پذیر است.

به عنوان مثال (حالت 5)

$a \longrightarrow \alpha$

$V \longrightarrow \omega$

$x \longrightarrow \theta$

$$\alpha = cte \begin{cases} \theta = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \omega_0 t + \theta_0 \\ \omega = \omega_0 + \alpha t \\ 2\alpha(\theta - \theta_0) = \omega^2 - \omega_0^2 \end{cases}$$

	جابجایی	سرعت	شتاب
حرکت مستقیم الخط در راستا	$\vec{x}$	$\vec{V} = \dot{\vec{x}}$	$\vec{a} = \dot{\vec{V}} = \ddot{\vec{x}}$
حرکت زاویه‌ای	$\vec{\theta}$	$\vec{\omega} = \dot{\vec{\theta}}$	$\vec{\alpha} = \dot{\vec{\omega}} = \ddot{\vec{\theta}}$

مثال: حرکت زاویه‌ای عضوی از یک مکانیزم، چنان برنامه‌ریزی شده که میزان تغییرات سرعت زاویه‌ای به جابجایی زاویه‌ای برابر ثابت k است. در شرایط اولیه $t=0$، مقادیر θ صفر است و $\omega = \omega_0$، مطلوب است تعیین θ، ω و α برحسب زمان؟

$$\frac{\dot{\omega}}{\theta} = k \longrightarrow \frac{\ddot{\theta}}{\theta} = k \longrightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} - k\theta = 0$$

[illegible]

$$\begin{cases} t=0 \\ \theta=0 \\ \omega=0 \end{cases} \qquad \theta = C_1 e^{\sqrt{k}t} + C_2 e^{-\sqrt{k}t}$$

$$\omega = \dot{\theta} = C_1\sqrt{k}\, e^{\sqrt{k}t} - C_2\sqrt{k}\, e^{-\sqrt{k}t}$$

شرایط اولیه: $t=0$

$$\begin{cases} \theta=0 \longrightarrow C_1 + C_2 = 0 \\ \omega=\omega_0 \longrightarrow \omega_0 = C_1\sqrt{k} - C_2\sqrt{k} \Rightarrow C_1 - C_2 = \dfrac{\omega_0}{\sqrt{k}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = \dfrac{\omega_0}{2\sqrt{k}} \\ \\ C_2 = \dfrac{-\omega_0}{+2\sqrt{k}} \end{cases}$$

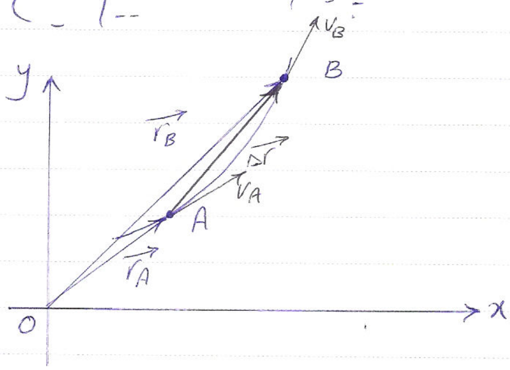
$$\theta = \frac{\omega_0}{2\sqrt{k}}\left(e^{\sqrt{k}t} - e^{-\sqrt{k}t}\right) = \frac{\omega_0}{\sqrt{k}} \sinh(\sqrt{k}\,t)$$

$$\omega = \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \omega_0 \, Ch(\sqrt{k}\,t)$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = +\omega_0 \sqrt{k} \, Sinh(\sqrt{k}\,t)$$

حرکت منحنی الخط یک ذره مادی :

اگر یک ذره مادی روی یک مسیر منحنی الخط حرکت کند به چنین حرکتی منحنی الخط گوئیم. در این حرکت بردار سرعت مماس بر مسیر حرکت است.



$$\begin{cases} \vec{\Delta r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A \\ \vec{v}_{ave} = \dfrac{\vec{\Delta r}}{\Delta t} \\ v_t = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\vec{\Delta r}}{\Delta t} = \dfrac{dr}{dt} = \dot{\vec{r}} \end{cases}$$

مشتق تابع برداری

$$\begin{cases} \vec{a}_{ave} = \dfrac{\vec{\Delta v}}{\Delta t} \\ a(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\vec{\Delta v}}{\Delta t} = \dfrac{\vec{dv}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} \end{cases}$$

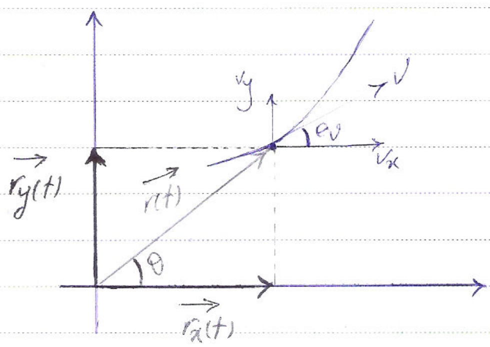
برای بررسی حرکت منحنی الخط در صفحه می توان از سه دستگاه مختصات استفاده کرد:

۱ـ دستگاه مختصات کارتزین ($x - y$)

۲ـ دستگاه مختصات عمود و مماس (T , N)

۳ـ دستگاه مختصات قطبی (شعاع و عمود بر شعاع)
r θ

دستگاه مختصات کارتزین :



$$r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2}$$

$$\tan\theta = \frac{r_y}{r_x}$$

$$\vec{r} = r_x(t)\vec{i} + r_y(t)\vec{j} \xrightarrow{\text{مشتق}} \vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{dr}{dt}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} \\ v_x = \dot{r}_x \\ v_y = \dot{r}_y \end{cases} \Rightarrow |v| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad , \quad \tan\theta_v = \frac{v_y}{v_x}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(v_x(t)\vec{i} + v_y(t)\vec{j}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} \\ a_x = \dot{V}_x = \ddot{r}_x & |a| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \\ a_y = \dot{V}_y = \ddot{r}_y & \tan\theta_a = \dfrac{a_y}{a_x} \end{cases}$$

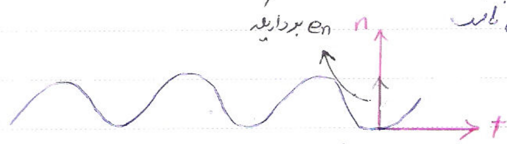
نوع این حرکت، حرکت پرتابی است.

به نام خدا

جلسه پنجم

۲- دستگاه عمود و مماس (t,n)

فرض کنید یک متحرک روی مسیر منحنی حرکت کند که در هر نقطه می‌توان مماسی بر آن رسم کرد که آن را t و در همان نقطه می‌توان عمودی رسم کرد که آن را n می‌نامند.

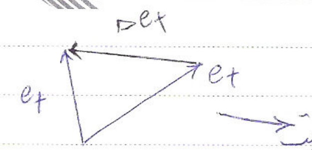


* در این دستگاه سرعت تنها در راستای t مولفه دارد چون سرعت مماس بر مسیر حرکت است.

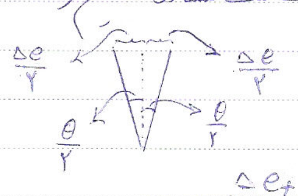
بردار سرعت $\quad \vec{V}(t) = V(t) \cdot \vec{e_t}$

بردار شتاب $\quad \vec{a} = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{dv(t)}{dt} \cdot \vec{e_t} + \dfrac{v \cdot \vec{e_t}}{dt}$

اثبات :



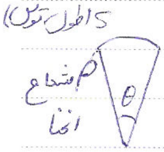
e_t نسبت به زمان تغییر می‌کند و می‌تواند در ۲ جهت حرکت کند و دوران شروع کردن به Δe_t . تشکیل یک مثلث متساوی‌الساقین را می‌دهد که نیمساز عمود منصف نیز است.



$$\sin\frac{\Delta\theta}{2} = \frac{\frac{\Delta e_t}{2}}{e_t} \longrightarrow \Delta e_t = 2 e_t \sin\frac{\Delta\theta}{2}$$

$$\lim \frac{\Delta e_t}{\Delta\theta} = \frac{de_t}{d\theta} = \lim \frac{2 e_t \sin \Delta\theta/2}{\Delta\theta} = 1 \quad ①$$

s (طول قوس)



$$s = \rho\theta \Rightarrow ds = \rho d\theta \Rightarrow \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\rho} \quad (2)$$

قاعده زنجیره‌ای : $$\frac{de_t}{dt} = \frac{de_t}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} \quad (3)$$

$$1,2,3 \Rightarrow \vec{e_n} \times \frac{1}{\rho} \times v = \frac{v}{\rho} . e_n$$

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} . \vec{e_t} + \frac{v^2}{\rho} e_n$$

$$\bar{a} = a_n \vec{e_n} + a_t \vec{e_t} \Rightarrow \begin{cases} a_n = \frac{v^2}{R} \text{ (R شعاع انحنا)} \\ a_t = \frac{dv}{dt} \end{cases}$$

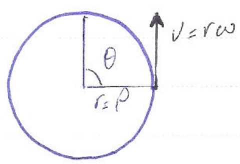
به طور کلی برای هر نقطه مسیر

$$\Rightarrow a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}$$

* شتاب جانب مرکز a_n همواره مثبت ($a_n = \frac{v^2}{\rho} > 0$) و به سمت داخل مسیر منحنی می‌گرداند.

* اگر حرکت ذره بر روی مسیر منحنی الخط با سرعت ثابت انجام شود، آنگاه $a_t = 0$ ولی $a_n \neq 0$.

نمونه‌ای از این حرکت، حرکت بر روی مسیر دایره‌ای است.



اثبات:

$$\rho = r = cte$$

$$S = \rho\theta \Rightarrow S = r\theta \Rightarrow \frac{ds}{dt} = r\frac{d\theta}{dt}$$

$$\rightarrow v = r\dot{\theta} = r\omega \Rightarrow \boxed{v = r\omega}$$

a_n در حرکت دایره‌ای:

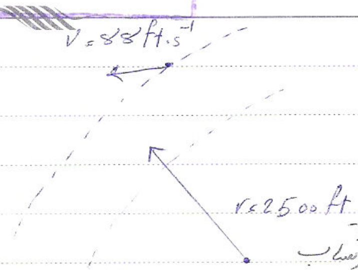
$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(r\dot{\theta})^2}{r} \Rightarrow a_n = r\dot{\theta}^2$$

a_t در حرکت دایره‌ای:

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(r\dot{\theta}) = r\alpha \Rightarrow a_t = r\ddot{\theta}$$

مثال: راننده اتومبیل در پیچ بزرگراه به شعاع $2500\ ft$ با سرعت $88\ ft.s^{-1}$ حرکت می‌کند. راننده اتومبیل ناگهان ترمز می‌گیرد و سرعت اتومبیل را با آهنگ ثابتی کاهش می‌دهد. با فرض اینکه پس از $8s$ سرعت اتومبیل به $66\ ft.s^{-1}$ برسد، شتاب اتومبیل را بلافاصله پس از ترمز تعیین کنید.

Subject :
Year. Month. Date.



$$a_t = a_{VR} = \frac{66-88}{8} = -2.75\ ft.s$$

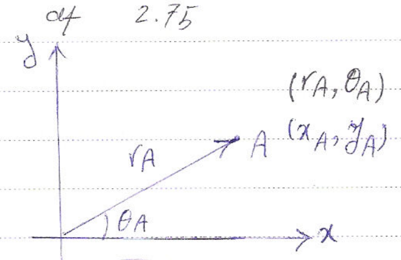
$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{88^2}{2500} = 3.1\ ft$$

بردار شتاب $\vec{a} = a_n \vec{e_n} + a_t \vec{e_t} = 3.1 \vec{e_n} - 2.75\, e_t$

$$|a| = \sqrt{3.1^2 + 2.75^2} = 4.13\ ft.s^{-1}$$

$$\tan\alpha = \frac{a_n}{a_t} = \frac{3.1}{2.75} = 48.4^\circ$$

۳- دستگاه قطبی (r, θ):



$$r_A = \sqrt{x_A^2 + y_A^2}$$

$$\theta_A = \tan^{-1} \frac{y_A}{x_A}$$

$$x_A = r_A \cos\theta_A$$

$$y_A = r_A \sin\theta_A$$

e_r: بردار یکه در راستای شعاع

e_θ: بردار یکه در راستای عمود بر شعاع (چرخش 90° پادساعتگرد)

$$\vec{v} = \dot{r} e_r + r\dot{\theta} e_\theta$$

$$\vec{v} = v_r \vec{e_r} + v_\theta \vec{e_\theta} \Rightarrow \vec{v_r} = \dot{r}, \quad \vec{v_\theta} = r\dot{\theta}$$

طول $v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2}$

$$\tan\alpha = \frac{v_\theta}{v_r}$$

مولفه های بردار شتاب در دستگاه قطبی:

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e_r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e_\theta}$$

$$\vec{a} = a_r\vec{e_r} + a_\theta\vec{e_\theta}$$

$$\Rightarrow \quad a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$

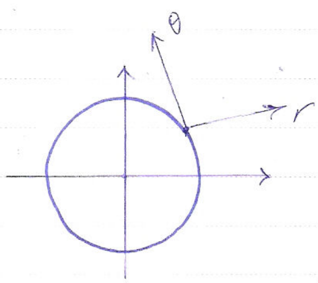
$$a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}$$

$$a_{\text{کل}} = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2}$$

$$\tan\beta = \frac{a_\theta}{a_r}$$

بررسی حالات خاص قطبی:

حرکت بر روی مسیر دایره‌ای



$$r = cte \qquad \dot{r} = \ddot{r} = 0$$

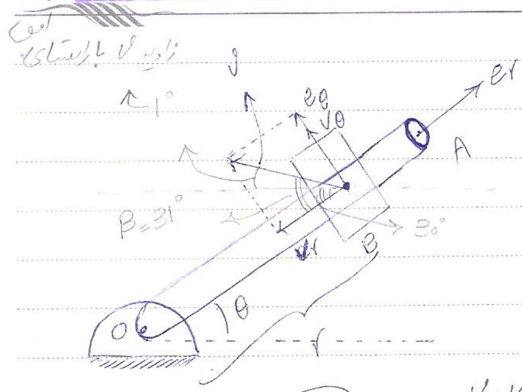
$$\begin{cases} v_r = \dot{r} = 0 \\ v_\theta = r\dot{\theta} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a_r = -r\dot{\theta}^2 \\ a_t = r\ddot{\theta} \end{cases}$$

مثال: حرکت دورانی بازوی $OA = 0.9m$ حول نقطه O با رابطه $\theta = 0.15t^2$ می‌باشد که در آن θ بر حسب رادیان و t بر حسب ثانیه است. مهره B طوری روی بازو می‌لغزد که فاصله آن از O با رابطه $r = 0.9 - 0.12t^2$ بیان می‌شود. پس از آنکه بازو به اندازه $30°$ چرخید مطلوب است:

الف) سرعت کامل طوقه

ب) شتاب کامل طوقه

ج) شتاب نسبی طوقه نسبت به بازوی O



$\theta = 0.15t^2$

$r = 0.9 - 0.12t^2$

$\vec{V} = V_r \vec{e_r} + V_\theta \vec{e_\theta}$

$\theta = 30° \longrightarrow \theta = 0.524 \text{ rad}$

$\vec{a} = a_r \vec{e_r} + a_\theta \vec{e_\theta}$

$\theta = 0.15t^2 \rightarrow 0.524 = 0.15t^2$

$\rightarrow t = 1.869$

$\begin{cases} V_r = \dot{r} \\ V_\theta = r\dot{\theta} \end{cases}$ $\begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \end{cases}$

$\theta = 0.15t^2 \longrightarrow \dot{\theta} = 0.3t \longrightarrow \ddot{\theta} = 0.3$

$r = 0.9 - 0.12t^2 \longrightarrow \dot{r} = -0.24t \longrightarrow \ddot{r} = -0.24$

الف)

$\begin{cases} V_r = -0.449 \\ V_\theta = 0.481(0.561) = 0.270 \end{cases}$

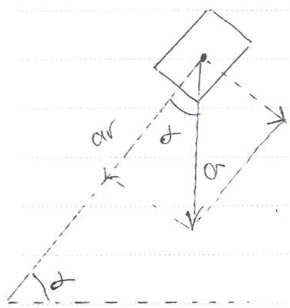
$\vec{V} = -0.449\vec{e_r} + 0.27$

$|\vec{V}| = \sqrt{V_r^2 + V_\theta^2} = 0.524$ ، $\beta = \tan^{-1}\frac{V_\theta}{V_r} = 31°$

ب)

$$\begin{cases} a_\theta = 0.481(0.3)+2(-0.449)(0.561) = -0.359 \\ a_r = -0.24-0.481(0.561)^2 = -0.391 \end{cases}$$

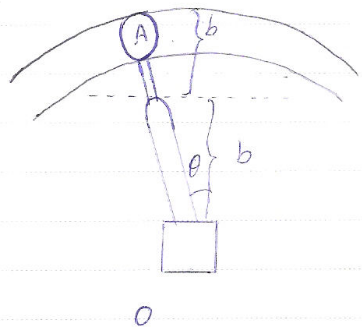
$$\alpha = 42.6^\circ$$

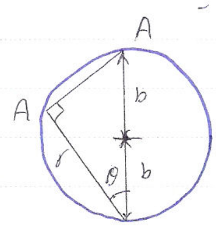


حرکت طوقه نسبت به بازو مستقیم الخط است در راستای بازو و بردار موقعیت نسبت به زمان همان r به t است پس لازم است نسبت به آن هم با شتاب برابر.

$$a_{B/OA} = \ddot r = -0.24\, m.s^{-1}$$

مثال: حرکت غلتک A در شکاف مدور ثابت توسط بازوی OA کنترل می‌شود. انتهای فوقانی بازوی مذکور می‌تواند در لوله تحتانی آن بچرخد تا به موازات تغییر θ، طول OA نیز قابلیت تغییر داشته باشد. اگر در دوره‌ای از حرکت بازو، سرعت زاویه‌ای آن در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت برابر K باشد، شتاب نقطه‌ای A را به ازای هر موقعیت از بازو تعیین کنید.





r = بردار جابجایی غلتک A نسبت به نقطه O

رابطه مثلثاتی $\cos\theta = \dfrac{r}{2b} \longrightarrow r = 2b\cos\theta$

$\omega = \dot{\theta} = k$ سرعت زاویه‌ای

در دستگاه قطبی (r,θ) :
$$\begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \end{cases}$$

$r = 2b\cos\theta$

$\dot{r} = \dfrac{dr}{dt} = -2b\dot{\theta}\sin\theta = -2bk\sin\theta$

$\ddot{r} = -2bk\dot{\theta}\cos\theta = -2bk^2\cos\theta$

$$\begin{cases} a_r = -2bk^2\cos\theta - 2bk^2\cos\theta = -4bk^2\cos\theta \\ a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = -4bk^2\sin\theta \end{cases}$$

$a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2} = -4bk^2$

بنام خدا

فصل دوم: سینتیک ذرات مادی

انواع حرکت:

۱- حرکت مستقیم الخط: ذره در راستای یک خط مستقیم حرکت می‌کند.

$\vec{a} = a_x i + a_y j$ $\qquad \sum \vec{F}_x = m\vec{a}_x$

$a_y = 0 \;,\; a_x \neq 0$

$$\sum \vec{F}_y = m\underbrace{\vec{a}_y}_{0} \Rightarrow \sum \vec{F}_y = 0$$

۲- حرکت منحنی الخط: این حرکت می‌تواند در صفحه یا در فضا انجام شود.

صفحه ۲ بعدی 2D:
- ۱- دستگاه متعامد (کارتزین) (x, y)
- ۲- " عمود و مماس (t, n)
- ۳- " قطبی (r, θ)

در فضا 3D:
- ۱- دستگاه متعامد (x, y, z)
- ۲- " استوانه‌ای (r, θ, z)
- ۳- " کروی (r, θ, φ)

با توجه به مطالب حل شده در فصل قبل. معادلات سینتیک را در دستگاه‌های مختلف بدست می‌آوریم

دستگاه قائم در صفحه :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \longrightarrow \begin{cases} \sum F_x = M\vec{a_x} = m\ddot{x} \\ \sum F_y = M\vec{a_y} = m\ddot{y} \end{cases}$$

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$$

دستگاه عمود و مماس : (در صفحه)

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

شتاب کل

$$\begin{cases} a = a_n e_n + a_t e_t \\ a_t = \dfrac{dv}{dt} \quad (1) \\ a_n = \dfrac{v^2}{R} \quad (2) \end{cases}$$

$$\sum f_t e_t + \sum f_n e_n$$

$$\sum f_t = m\frac{dv}{dt}$$

$$\sum f_n = m\frac{v^2}{R}$$

اگر شتاب را بسط بدهیم نیرو نیز باید بسط بدهید.

دستگاه قطبی : (در صفحه)

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \longrightarrow \sum f_r e_r + \sum f_\theta e_\theta$$

$$\vec{a} = a_r\vec{e_r} + a_\theta\vec{e_\theta}$$

$$\vec{a_r} = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$

$$\vec{a_\theta} = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow \sum F_r = m.a_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)$$

$$\sum F_\theta = ma_\theta = m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})$$

دستگاه متعامد در فضا :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = \sum \vec{F_x} + \sum \vec{F_y} + \sum \vec{F_z}$$

$$a = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

$$\sum F_x = m\vec{a_x} = m\ddot{x}$$

$$\sum F_y = m\vec{a_y} = m\ddot{y}$$

$$\sum F_z = m\vec{a_z} = m\ddot{z}$$

دستگاه استوانه‌ای (در فضا) :

حالت خاصی از قطبی است که مولفه Z به آن اضافه می‌شود.

$$\sum \vec{F} = M\vec{a} = \sum F_r\vec{e_r} + \sum F_\theta\vec{e_\theta} + \sum F_z\vec{k}$$

$$\vec{a} = a_r\vec{e_r} + a_\theta e_\theta + a_z\vec{k}$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \longrightarrow \sum F_r = ma_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)$$

$$a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \longrightarrow \sum F_\theta = ma_\theta = m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})$$

$a_z = \ddot{z} \longrightarrow \sum F_z = ma_z = m\ddot{z}$

قبل از بررسی معادله تعادل دینامیکی می بایستی با بعضی از نیروها آشنا شویم :

۱- نیروی اصطکاک :

ضریب اصطکاک

$F_f = \mu . N$

نیروی عکس العمل

در دو حالت : الف) سکون : ب) حرکت :

الف) سکون : $F_s = \mu_s . N$ ← نیروی اصطکاک استاتیکی

ضریب اصطکاک استاتیکی

ب) حرکت : $F_k = \mu_k . N$ ← نیروی اصطکاک دینامیکی

ضریب اصطکاک دینامیکی

۲- نیروی فنر : هرگاه نیروی وارد بر جسم و تغییر شکل حاصله از آن نیرو با هم متناسب باشند، در آن صورت به آن جسم فنر می توان گفت .

نیروی فنر

$F_s = k_s . x \longrightarrow$ تغییرات طول

سختی فنر

طول ثانویه

$x = L - L_0 \longrightarrow$ طول اولیه

برای حل مسائل سینتیک از ۳ روش می‌توان استفاده نمود که موضوع مورد بحث این فصل می‌باشند:

۱- استفاده مستقیم: هنگامی که نیرو و شتاب مستقیماً با هم در ارتباط هستند.

۲- روش کار و انرژی: این روش نتیجه‌ای از روش مستقیم است و در حالتی که تغییرات نیرو برحسب فاصله مطرح باشد، از این روش استفاده می‌کنیم.

۳- ضربه و مومنتم: اگر تغییرات نیرو برحسب زمان باشد، می‌توان از این روش استفاده نمود.

۱- روش مستقیم:

قانون دوم نیوتن: اگر برآیند نیروهای وارد بر ذره‌ای صفر نباشد، ذره شتابی متناسب با بزرگی برآیند خواهد داشت.

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

و چون جرم ثابت است: $m = \frac{F_1}{a_1} = \frac{F_2}{a_2}$ ، که با توجه به مطالب فوق:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \xrightarrow{\text{نتیجه}} \sum \vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \xrightarrow[\text{ثابت باشد}]{\text{اگر } m} \frac{d}{dt}(m\vec{v})$$

* بردار $m\vec{v}$ را اندازه حرکت خطی یا به اختصار اندازه حرکت ذره می‌گویند و راستای آن با v یکی است، و بزرگی آن $|m|$ برابر اندازه سرعت است، و آن را با G نشان می‌دهیم.

اندازه حرکت $\vec{G} = m\vec{v}$

بنابراین برایند نیروهای وارده بر ذره را می‌توان بصورت زیر نشان داد.

$$\sum \vec{F} = \vec{\dot{G}} = m\vec{a}$$

یعنی برآیند نیروهای وارد بر ذره برابر با آهنگ تغییرات اندازه حرکت ذره است.

رابطه فوق اصل پایستگی اندازه حرکت خطی یک ذره را بصورت زیر بیان می‌دارد:

$$\sum \vec{F} = \dot{\vec{G}} = \frac{d\vec{G}}{dt}$$

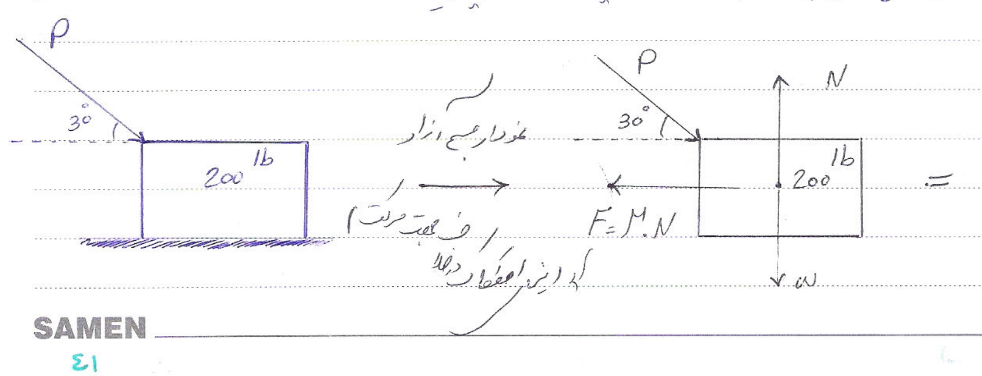
اگر برایند نیروهای وارد بر ذره صفر باشد، اندازه حرکت خطی ذره هم از نظر مقدار و هم از نظر جهت ثابت باقی می‌ماند.

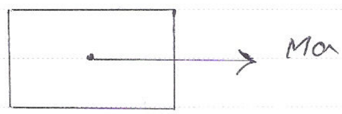
معادله تعادل دینامیکی در روش مستقیم: (با استفاده از قانون دوم نیوتن)

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \longrightarrow \sum \vec{F} - m\vec{a} = 0$$

به عبارت دیگر اگر $-m\vec{a}$ را به نیروهای وارد بر ذره اضافه کنیم، سیستمی از نیروهای معادل صفر بدست می‌آید.

مثال: قطعه‌ای به جرم 200^{lb} در سطح افقی در حال سکون قرار دارد. مقدار نیروی P لازم برای شتاب دادن به آن $10\,ft/s^2$ به طرف راست این قطعه را بیابید. $\mu_k = 0.25$ (جسم حرکت می‌کند)





چون حرکت در راستای محور x می‌باشد پس $y=0$.

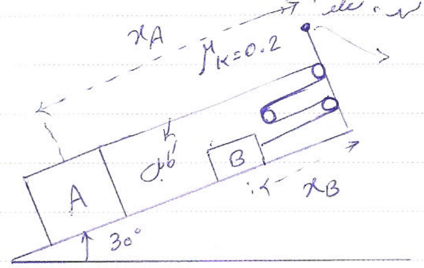
$$\sum F_y = ma_y = 0$$

$$+\uparrow \quad ① \quad N - P\sin 30^\circ - W_0 = 0 \longrightarrow N = P\sin 30^\circ + W_0$$

$$\xrightarrow{+} \sum F_x = Ma_x \Rightarrow P\cos 30^\circ - 0.25N = \frac{200}{32.2}a$$

$$\Rightarrow P = 151 \text{ lb} \quad ②$$

مثال: دو قطعه نشان داده شده در ابتدا ساکن هستند. از جرم قرقره‌ها صرفنظر می‌کنیم. با فرض اینکه ضریب اصطکاک بین قطعه‌ها و سطح شیبدار $\mu_s=0.25$ باشد، مطلوب است:



الف) شتاب هر قطعه،

ب) کشش در کابل،

حرکت قطعه B را نسبت به A.

$$x_A + 3x_B = L \xrightarrow[\text{مشتق}]{\text{2 بار}} a_A + 3a_B = 0$$

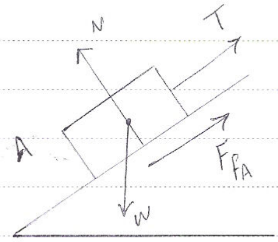
* مبدأ فرض در نقطه می‌گیریم.

$$\text{روابط وابستگی} \longrightarrow a_A = -3a_B \Rightarrow a_B = -\frac{1}{3}a_A$$

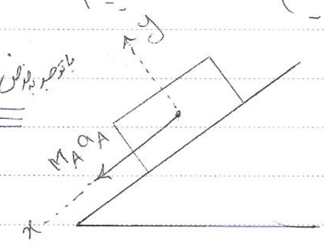
(طول طناب ثابت است.)

نمودار جسم آزاد را رسم می‌کنیم. (برای A و B)
(با این فرض که A رو به پایین می‌رود.)

نمودار جسم آزاد A
(چون حرکت آن رو به
پایین، در نتیجه F_{f_A}
به سمت بالا می‌شود)



با توجه به ارتباط $\equiv$



$\overset{+}{\swarrow} \sum F_x = ma$

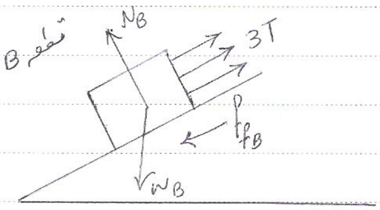
$w_A \sin\alpha - \mu N_a - T = m_A a_A$

$\Rightarrow$ با حذف N_A داریم

$\overset{+}{\nwarrow} \sum F_y = 0 \longrightarrow N_A - w_A \cos 30^\circ = 0 \longrightarrow N_A = w_A \cos 30^\circ$

$\Rightarrow w_A(\sin 30^\circ - \mu \cos 30^\circ) - T = m_A a_A$

قطعه B



$\overset{+}{\swarrow} \sum F_x = m a_B$

$\Rightarrow w_B \sin 30^\circ + \mu N_B - 3T = m_B a_B$

$= m_B\left(-\frac{1}{3} a_A\right)$

$\overset{+}{\nwarrow} \sum F_y = 0 \Rightarrow N_B - w_B \cos 30^\circ = 0 \Rightarrow N_B = w_B \cos 30^\circ$

با حذف N_B داریم: $w_B(\sin 30^\circ + \mu \cos 30^\circ) - 3T = m_B \frac{a_A}{3}$ **

با حذف T از * و ** داریم:

$$(3w_A - w_B)\sin 30 - \mu(3w_A + w_B)\sin 30^\circ = \left(3w_A + \frac{w_B}{3}\right)\frac{a_A}{g}$$

حال مقدار μ_s را برای تعادل استاتیکی بررسی می‌کنیم.

تعادل استاتیکی زمانی برقرار است که شتاب صفر باشد. بنابراین با فرض $a_A = a_B = 0$ و قرار دادن مقادیر $a_A = 0$ در رابطه بالا μ را بدست می‌آوریم.

تعادل استاتیکی: $a_A = 0 \Rightarrow \mu = \frac{(3w_A - w_B)\sin 30^\circ}{(3w_A + w_B)\cos 30^\circ} = 0/334 > \mu_s = 0.25$

چون μ بدست آمده از مقدار μ_s بزرگتر است، لذا اجسام حرکت خواهند داشت. بنابراین باید از μ_k در معادلات بدست آمده استفاده می‌کردیم، بنابراین در تمام معادلات نوشته شده بجای μ از مقدار $\mu_k = 0.2$ استفاده نمود و با استفاده از روابط مجهول شتاب و کشش را بدست آورد.

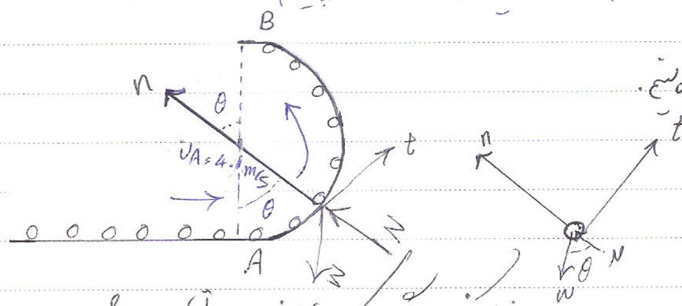
$a_A = 4.36\ ft.cm^{-2}$

$a_B = 1.452\ ft/cm^2$

$T = 4.79\ lb$

مثال: ساچمه‌های کوچک فولادی که هر کدام 65 گرم جرم دارند با سرعت افقی 4.1 m/s در نقطه A وارد حفره (از یک لوله می‌غلتند) نیم‌دایره‌ای شکل که در صفحه قائم واقع است می‌شوند. نیروی N که از طرف حفره به هر یک از ساچمه‌ها وارد می‌شود را برحسب θ به دست آورید. سرعت گلوله را در نقطه B محاسبه کنید. (اصطکاک ناچیز)

R = 0.32



از دستگاه (t و n) استفاده می‌کنیم.

وقتی صفحه افقی است نیروی وزن عمود بر صفحه است و در محاسبات اثر نمی‌کند. هنگامی که قائم باشد در محاسبات وارد می‌شود.

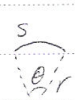
$$a_t = \frac{dv}{dt} \qquad a_n = \frac{v^2}{R}$$

$$\sum F_t = ma_t \Rightarrow -w\sin\theta = ma_t \Rightarrow a_t = -g\sin\theta$$

$$\sum F_n = ma_n \Rightarrow N - w\cos\theta = ma_n \Rightarrow N = m\left(g\cos\theta + \frac{v^2}{R}\right)$$

بنا به معادله مستقل از زمان داریم

$$\left.\begin{aligned} a_t &= \frac{dv}{dt} = v\frac{d\theta}{ds} \\ S &= r\theta \Rightarrow ds = r\,d\theta \end{aligned}\right\} \Rightarrow a_t r\,d\theta = v\,dv \overset{*}{\Longrightarrow}$$



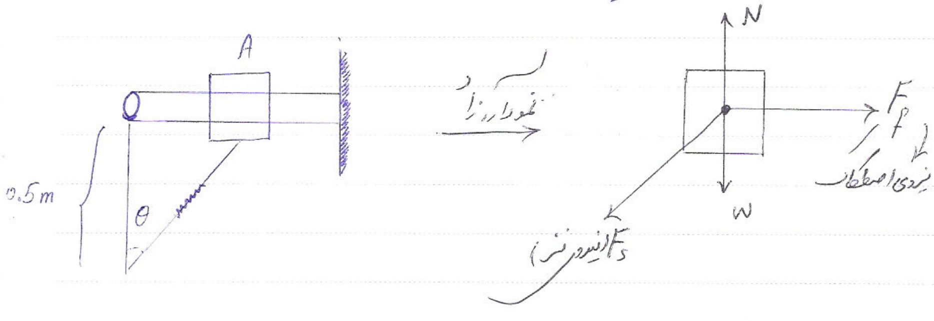
$$\overset{*}{\Rightarrow} (-g\sin\theta)\, r\,d\theta = v\,dv \xrightarrow{\int} \int_0^{\theta} (-g\sin\theta)\, r\,d\theta = \int_{v_A}^{v} v\,dv$$

$$-2rg(\cos\theta - 1) = v^2 - v_A^2 \Rightarrow v^2 = v_A^2 + 2rg(\cos\theta - 1)$$

$$N = m\left(g\cos\theta + \frac{v^2}{R}\right) = 1.913\cos\theta + 2.14$$

$$\begin{cases} v^2 = v_A^2 + 2rg(\cos\theta - 1) \\ \theta = \pi \Rightarrow v_B = ? \quad v_B(\theta = 180) = \sqrt{4gr + v_A^2} = 2.06 \text{ m/sec} \end{cases} \Rightarrow v = 2.06 \text{ m/s}$$

مثال: طوقه A به جرم 10kg از حالت سکون در حالت $\theta=30^\circ$ رها و در طول میله ثابت افقی می‌لغزد. ضریب ثابت فنر 1750 N/m و به ازای $\theta=0$ طول آزاد خود را دارد. اگر ضریب اصطکاک بین طوقه و میله 0.2 باشد شتاب اولیه طوقه را محاسبه نمایید.



$F_s = kx$

$x = L - L_0$

$L_0 = 0.5\text{m} \quad ; \quad L = \dfrac{0.5}{\cos\theta}$: L طول ثانویه $\quad \Rightarrow x = \dfrac{0.5}{\cos 30} - 0.5 = 0.077$

$\Rightarrow F_S = 135.37$

$\sum F_x = ma \Rightarrow F_S \sin\theta - F_f = ma$ ①

$\sum F_y = 0 \Rightarrow N - W - F\cos\theta = 0 \Rightarrow N = W + F_S \cos\theta \Rightarrow N = 10 \times 9.81 + 135.37 \times \cos 30^\circ = 215.32$

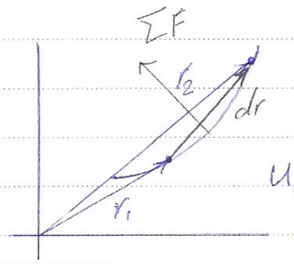
$F_f = \mu N = 0.2 \times 215.32 = 43.06\ N$

معادله ① $\Rightarrow a = 2.46\ m/s$

۲- روش کار و انرژی :

همانطور که قبلاً اشاره شد این روش نتیجه‌ای از روش مستقیم است به این صورت که

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}, \quad a = v\,\frac{dv}{ds} \Rightarrow \sum F \cdot ds = mv\,dv \Rightarrow \underbrace{\int_{s_0}^{s} \sum F\,ds}_{\text{کار}} = \underbrace{\int_{v_0}^{v} mv\,dv}_{\text{انرژی}}$$



کار: حاصلضرب اسکالر یا داخلی بردار نیرو در بردار تغییر مکان است.

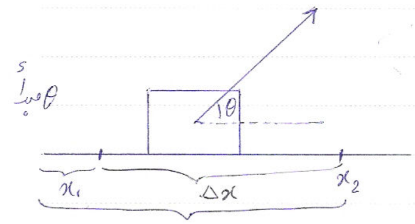
$$U_{1-2} = \int_1^2 \sum F \cdot \vec{dr}$$

Subject :
Year. Month. Date.

اگر بردار نیرو بر بردار جابجایی عمود باشد، آنگاه کار انجام شده صفر است.

حال این رابطه را برای حرکت مستقیم الخط و منحنی الخط بررسی می‌کنیم:

حرکت مستقیم الخط:



$$\sum \vec{F} = \sum \vec{F_x i} + \sum \vec{F_y j}$$

$$\vec{dr} = \vec{dx_i}$$

کار

$$\Rightarrow du = \sum \vec{F}\cdot\vec{dr} = \sum \vec{F_x}\cdot dx = \sum F\cos\theta\cdot\Delta x \Rightarrow u_{1-2} = \sum F\cos\theta\cdot\Delta x$$

$\theta = 90 \longrightarrow$ برابر صفر می‌شود ، $\theta = 0, 180 \longrightarrow$ حالتی دیگر است

حرکت منحنی الخط:

بررسی این حرکت را می‌توان در دستگاه‌های کارتزین، عمودی مماسی و قطبی انجام داد.

$$\sum \vec{F} = \sum \vec{F_x i} + \sum \vec{F_y j}$$

$$\vec{dr} = \vec{dr_x i} + \vec{dr_y j}$$

$$\vec{du} = \sum \vec{F}\cdot\vec{dr} \Rightarrow u_{1-2} = \int_{x_1}^{x_2} \sum F_x\cdot dx + \int_{y_1}^{y_2} \sum F_y\cdot dy$$

SAMEN

۲- دستگاه عمود و مماس :

چون جابجایی ذره در این دستگاه مماس بر مسیر حرکت یعنی در راستای $\sum F_t$ می‌باشد، لذا داریم

دستگاه : $du = \sum F_t \cdot \boxed{\Delta s} \rightarrow$ طول قوس

۳- دستگاه قطبی :

در دستگاه قطبی :

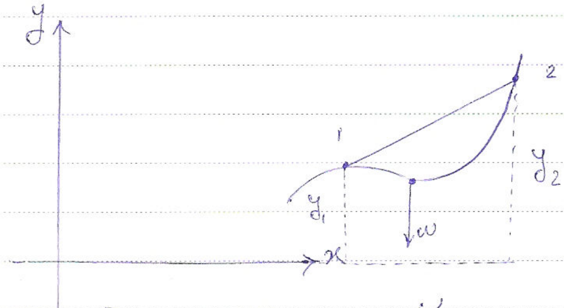
$$\vec{V} = \overset{\dot{r}}{v_r}\vec{e_r} + \overset{\dot{\theta}}{v_\theta}\vec{e_\theta}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{e_r} + \frac{d\theta}{dt}\vec{e_\theta} \rightarrow \overset{*}{\boxed{d\vec{r} = dr\vec{e_r} + r\,d\theta\,\vec{e_\theta}}}$$

$$\sum\vec{F} = \sum F_r\vec{e_r} + \sum F_\theta\vec{e_\theta} \quad , * \Rightarrow du = \sum\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$u_{1-2} = \int_{r_1}^{r_2}\sum F_r \cdot dr + \int_{\theta_1}^{\theta_2}\sum F_\theta \, d\theta$$

کار انجام شده توسط نیروی وزن :



$\sum F_y = -w\vec{j}$ / بردار جابجایی : $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j}$

Subject :
Year. Month. Date.

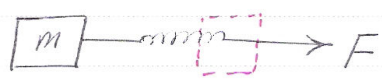
$du = -w\,dy$

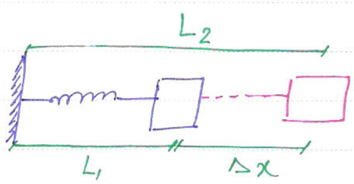
$$U_{1-2} = -w(\Delta y) \longrightarrow \text{if} \begin{cases} \Delta y = y_2 - y_1 > 0 \quad \Rightarrow U_{1-2} < 0 \\ y_2 > y_1 \\ \Delta y = y_2 - y_1 < 0 \quad \Rightarrow U_{1-2} > 0 \end{cases}$$

اگر بردار جابجا و بردار نیرو در یک جهت باشند، $(\theta = 0^\circ) \Rightarrow U > 0$

اگر بردار جابجایی و نیرو مخالف الجهت باشند، $(\theta = 180^\circ) \Rightarrow U < 0$

کار انجام شده توسط فنر :





تغییر طول اولیه فنر : $x_1 = L_1 - L_0 =$ طول اولیه - طول آزاد

تغییر طول ثانویه : $x_2 = L_2 - L_0 =$ طول ثانویه - طول آزاد

بردار نیرو و جابجایی در خلاف جهت هم

$$U_{1-2} = -\int_{x_1}^{x_2} f_s\,dx \qquad f_s = kx \longrightarrow f_s = k_s \Delta x$$

$$\Rightarrow U_{1-2} = -\int_{x_1}^{x_2} kx\,dx = \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2$$

وقتی فنر در حالت بازگشت به حالت اولیه یا وضعیت آزاد خود می‌باشد، چون نیروی فنر با بردار جابجایی جسم هم جهت است، کار نیروی فنر مثبت است.

انرژی جنبشی ذره:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \qquad a = v\frac{dv}{ds}$$

$$\rightarrow \sum \vec{F}\cdot dr = mv\,dv \longrightarrow \underbrace{\int \sum F\cdot dr}_{\text{کار } (U)} = \underbrace{\int mv\,dv}_{\text{انرژی جنبشی } (T)}$$

اصل کار و انرژی

$$T = \int_{v_1}^{v_2} mv\,dv \longrightarrow T_{1-2} = T_2 - T_1 = \Delta T = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_2^2$$

v_1 و v_2، سرعت جسم در موقعیت (1) و (2).

اصل کار و انرژی:

(هنگامی که در مبحث ما اصطکاک داشته باشیم، از این اصل استفاده می‌کنیم)

کل کار انجام شده = تغییرات انرژی جنبشی

$$U_g + U_{e_{1-2}} + U_{1-2} = \Delta T$$

کار انجام شده توسط نیروی وزن

کار انجام شده توسط نیروی فنر

کار انجام شده توسط سایر نیروهای وارد بر جسم

تغییرات انرژی جنبشی

توان: آهنگ زمانی انجام کار را گویند.

توان متوسط $= \frac{\Delta u}{\Delta t} \quad (\frac{J}{s})$

if $\Delta T \to 0 \Rightarrow P =$ توان $= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{du}{dt} = \frac{d(\vec{F}.\vec{r})}{dt} = \frac{\vec{F}.d\vec{r}}{dt} = \vec{F}.\vec{V}$

$\Rightarrow P = \vec{F}.\vec{V} = \frac{du}{dt}$

واحد توان در SI : $\frac{J}{sec} = \frac{1N.m}{sec} = 1wat$

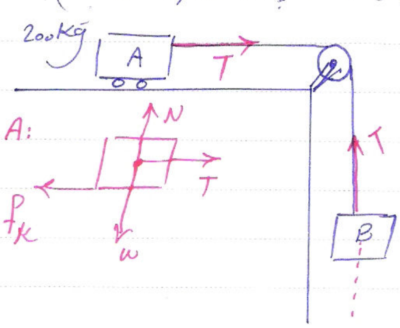
واحد توان در سیستم انگلیسی : $1(hp) = 550\frac{ft.lb}{sec} = 746\,wat$

(horse power, اسب بخار)

بازده مکانیکی: معیاری جهت بررسی اتلاف انرژی‌های مختلف مانند گرما، اصطکاک و...

بازده مکانیکی $=$ توان خروجی / توان ورودی

مثال: دستگاه زیر از حالت سکون رها می‌شود. سرعت جسم A پس از 2m چقدر است؟ ($\mu_k = 0.25$) بین جسم A و سطح.



(از نیروی اصطکاک قرقره صرف‌نظر شود)

چون جسم A در راستای افق حرکت می‌کند و نیروی وزن رو به پایین است،

لذا زاویه بین بردار جابجایی و نیرو 90° است پس کار صفر است.

محمد حسین سلیمانی

Subject : نیروی اصطکاک
Year. Month. Date.

$$U_{g_{1-2}} + U_{e_{1-2}} + U_{1-2} = \Delta T \Rightarrow -F_k \times 2 + 2T = \frac{1}{2} m v_{1A}^2 - \frac{1}{2} m \cancel{v_{oA}^2}$$

نیرو و جابجایی خلاف جهت

نیروی کشش کابل و نیروی اصطکاک

$$\Rightarrow -2F_f + 2T = \frac{1}{2} m_A v_A^2 \quad \boxed{2T - 2F_f = 100 v^2}$$

$$F_f = \mu_k N = \mu_k \cdot w = 0$$

$$\boxed{N = w = 0}$$

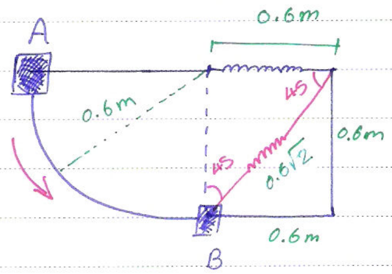
جسم B :

$$U_g + \cancel{U_{e_{1-2}}} + U_{1-2} = \Delta T$$

$$\Rightarrow 2w - 2T = \underbrace{\frac{1}{2} m v_{1B}^2}_{150 v^2} - \frac{1}{2} m \cancel{v_{oB}^2}$$

$$\Rightarrow 2 \times (300 \times 9.81) - 2T = 150 v^2$$

مثال: لغزنده‌ای به جرم 3kg از حالت سکون در موقعیت A رها شده و با اصطکاک ناچیز در امتداد میله راهنمای خمیده که در صفحه قائم قرار دارد می‌لغزد. فنری که به لغزنده متصل است دارای $k = 350 \frac{N}{m}$ و طول آزاد 60^{cm} است. سرعت لغزنده هنگام عبور از B ؟



$$U_{g_{AB}} = 0.6mg - mgh$$

$$U_{A-B} = \Delta T_{A-B}$$

$$U_{g_{A-B}} + U_{e_{A-B}} + U_{A-B} = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m \cancel{v_A^2}$$

SAMEN

$$u_{e_{A\,B}} = \frac{1}{2}k(x_A^2 - x_B^2)$$

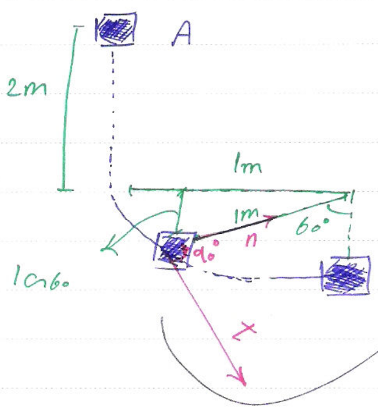
$$x_A = l_A - l_0 = 1.2 - 0.6 = 0.6$$

$$x_B = l_B - l_0 = 0.6\sqrt{2} - 0.6 = 0.25$$

$$0.6mg + \frac{1}{2} \times 350 \times (0.6^2 - 0.25^2) = \frac{1}{2} m v_B^2 \Rightarrow v_B = 6.8\ m/sec$$

$$m = 3kg$$

مثال: بسته‌ای به جرم 5kg از حالت سکون و از نقطه A و در امتداد سطحی بدون اصطکاک مطابق شکل زیر می‌لغزد. نیروی وارد از طرف سطح بر بسته وقتی که: الف) به نقطه B ب) به نقطه C می‌رسند را بدست آورید.



$$u_{A-B} = \Delta T_{A-B}$$

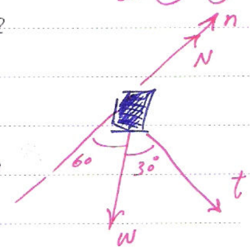
$$u_{n_{A-B}} = \cos 90° = 1$$

$$u_{g_{A-B}} = (2 + 1\cos 60°)mg$$

$$(2 + \cos 60)mg = \frac{1}{2} m v_B^2 - \underbrace{\frac{1}{2} m v_A^2}_{0}$$

$$\Rightarrow (2 + \cos 60)mg = \frac{1}{2} m v_B^2 \longrightarrow \boxed{v_B = 7 m/s}$$

عکس شکل اشتباه



$$\sum F_n = m a_n \rightarrow N - W \cos 60 = m a_n = \frac{m v_B^2}{r}$$

$$\rightarrow N = W \cos 60 + \frac{m v_B^2}{r} \Rightarrow N = 269.78 \ N/m$$

ب)
$$U_{g_{A-C}} = 3mg$$

$$U_{A-C} = T_{A-C} \quad , \quad U_{g_{A-C}} = T_{A-C}$$

$$3mg = \frac{1}{2} m v_C^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 \rightarrow v_C = 7.67 \ m/sec$$

$$\sum F_n = m a_n \rightarrow N = mg + \frac{m v_C^2}{r} = 343.35 \ N$$

بنام خدا

فصل سوم:

اندازه حرکت خطی: اگر جسمی دارای سرعت V باشد، آنگاه اندازه حرکت خطی آن که با G نشان می‌دهیم برابر است با:

$$\vec{G} = m\vec{V}$$

اندازه حرکت زاویه‌ای: گشتاور بردار اندازه حرکت خطی حول نقطه مورد نظر است.

$$\vec{H} = \vec{r} \times m\vec{V}$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{r}=r_x\vec{i}+r_y\vec{j}+r_z\vec{k}\\ \vec{V}=V_x\vec{i}+V_y\vec{j}+V_z\vec{k}\\ G=G_x\vec{i}+G_y\vec{j}+G_z\vec{k}\end{array}\right\} \Rightarrow \vec{G}=m\vec{V}=m(V_x\vec{i}+V_y\vec{j}+V_z\vec{k})$$

$$H_o=\begin{vmatrix} i & j & k \\ r_x & r_y & r_z \\ mV_x & mV_y & mV_z \end{vmatrix} \qquad H=\begin{vmatrix} i & j & k \\ r_x & r_y & r_z \\ mV_x & mV_y & mV_z \end{vmatrix}$$

$$H_{oz}=m(r_xV_y-r_yV_x) \;/\; H_{ox}=m(r_yV_z-r_zV_y)$$

$$H_{oy}=m(r_xV_y-r_yV_x)$$

اصل ضربه :

$$\sum\vec{F}=m\vec{a}$$

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \sum\vec{F}=m\frac{dv}{dt}=\frac{d}{dt}(m\vec{V})=\frac{d\vec{G}}{dt}$$

$$\rightarrow \sum\vec{F}dt=d\vec{G}$$

$$\rightarrow \int_{t_1}^{t_2}\sum\vec{F}dt=\int_{G_0}^{G}dG=G_2-G_1$$

$$Imp = \int_{t_1}^{t_2} \sum F\,dt = \Delta G$$

به عبارت دیگر سطح زیر نمودار نیرو بر حسب زمان، معرف تغییر اندازه حرکت خطی است.

$$\sum = \dot{\vec{G}}$$

$$H_o = \vec{r} \times \vec{G} \rightarrow \frac{dH_o}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{G}) = \cancel{\frac{d\vec{r}}{dt}} \times \vec{G} + \vec{r} \times \frac{d\vec{G}}{dt}$$

$$= \vec{r} \times \dot{\vec{G}} = \vec{r} \times \sum \vec{F} = \sum M_o$$

برآیند گشتاورهای نیروهای خارجی وارد بر جسم برابر است با نرخ تغییر مومنتم زاویه‌ای.

$$\frac{dH_o}{dt} = \dot{H}_o = \sum M_o$$

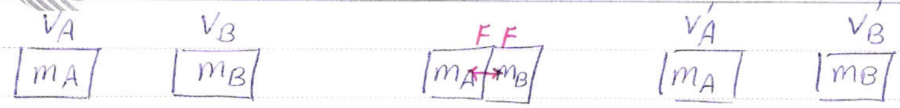
تغییر اندازه حرکت زاویه‌ای : $\Delta \vec{H}_o = \int_{t_1}^{t_2} \sum \vec{M}_o\,dt$

با توجه به فرمول‌های بدست آمده می‌توان نتایج زیر را بدست آورد:

۱- در غیاب اگر برآیند نیروهای خارجی وارد بر سیستم، تغییر مومنتم نداریم به عبارت دیگر $G_1 = G_2$

کاربرد: در غیاب نیروهای خارجی اگر دو ذره به اجرام های A و B به هم برخورد کنند.

جهت حرکت



قبل از برخورد   لحظه برخورد   پس از برخورد

سیستم قبل از برخورد ← $G = G' \longrightarrow m_A v_A + m_B v_B = m_A v'_A + m_B v'_B$

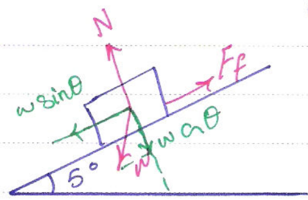
سیستم پس از برخورد

۲- در غیاب اثر برآیند گشتاور نیروهای خارجی وارد بر سیستم، تکانه‌ی زاویه‌ای سیستم پایسته است، به عبارت دیگر:

$H_{o1} = H_{o2}$

مثال ۵: اتومبیلی به جرم m با سرعت $90 km.h^{-1}$ به طرف پایین مسیری با شیب $5°$ در حرکت است. در این لحظه راننده ترمز گرفته، زمان لازم برای توقف اتومبیل در هر یک از شرایط زیر:

الف) جاده خشک $\mu = 0.75$ ب) جاده یخ زده $\mu = 0.1$



$$Imp_{1-2} = \Delta G$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow N - w\cos\theta = 0 \Rightarrow N = w\cos\theta$$

$$\sum F_x = ma_x \rightarrow w\sin\theta - \mu \underbrace{w\cos\theta}_{N} = \sum F_x$$

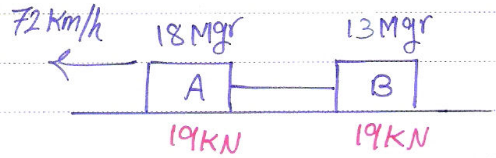
$$\rightarrow \int_0^t \sum F_x\,dt = \Delta G = G_2 - G_1 \rightarrow \int_0^t (w\sin\theta - \mu_w \cos\theta)\,dt = m\cancel{v_2} - mv_1$$

$$\Rightarrow t = \frac{mv}{mg(\mu\cos\theta - \sin\theta)} \rightarrow \begin{cases} \mu = 0.75 \Rightarrow t = 3.85\ sec \\ \mu = 0.1 \Rightarrow t = 193.8\ sec \end{cases}$$

سؤال: قطار سبکی از دو واگن ساخته شده است و با سرعت 72km/h حرکت می‌کند. ناگهان ترمز می‌کشد و نیروی ثابت 19kN بر هر یک از واگن‌ها وارد می‌شود. مطلوبست:

الف) زمان لازم برای اینکه قطار پس از ترمز گرفتن متوقف شود.

ب) نیروی منتقل شده بین دو واگن در حال کم شدن سرعت.



$72 km/h = 20 m/s$

الف) معادله $Imp_{1-2} = \Delta G$ را می‌توان برای کل سیستم نوشت. سرعت ثانویه بعد از ترمز گرفتن برای کل سیستم صفر است.

$$(F_t)_A + (F_t)_B = (m_A \cancel{v'_A} + m_B \cancel{v'_B}) - (m_A v - m_B v) = -(m_A + m_B)v$$

$$\Rightarrow -2\times19\times10^{3}\,t=(13+18)\times10^{3}\times20\,m/s \Rightarrow t=16.315\,sec$$

ب) می‌توان رابطه $Imp_{1-2}=\Delta G$ را برای یک جسم، مثلاً جسم A نوشت تا نیروی متصل کننده بین دو جسم را بدست آورد.

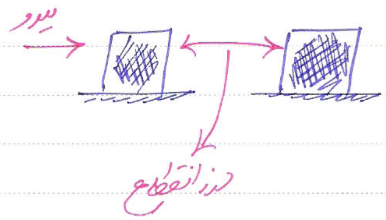
$$Imp_{1-2}=\Delta G \longrightarrow (\sum F)t=\Delta G$$

$$\Rightarrow (F+19\times10^{3})\times16.315=20\times18\times10^{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{F=3058.8\,N}$$

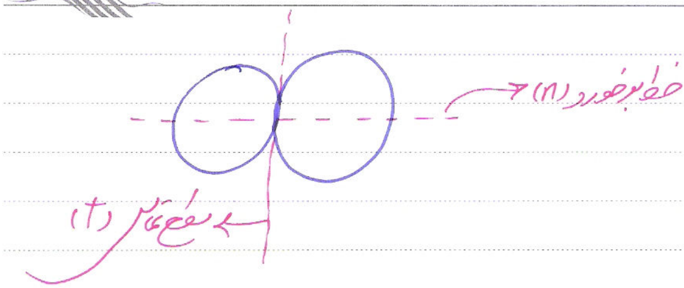
برخورد:

اصابت دو جسم در یک بازه زمانی بسیار کوچک که طی آن دو جسم بر یکدیگر نیروهای خیلی بزرگی وارد می‌کنند را برخورد گویند.



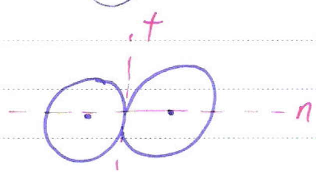
خط برخورد:

در حین برخورد، عمود مشترک بر سطوح تماس را خط برخورد گویند.

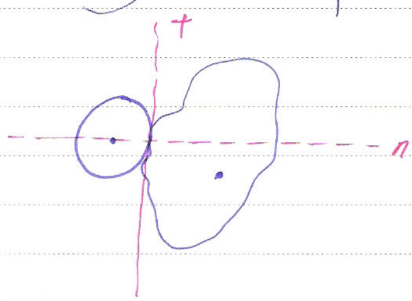


انواع برخورد:

۱- برخورد مرکزی: اگر مرکز جرم های دو جسمی که به هم برخورد می‌کنند بر روی خط برخورد باشند، به آن برخورد، برخورد مرکزی می‌گویند، مانند برخورد بین ذرات مادی.

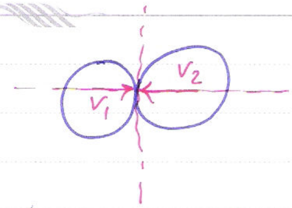


۲- برخورد خارج از مرکز: اگر مرکز جرم های دو جسمی که به هم برخورد می‌کنند روی خط برخورد نباشند برخورد خارج از مرکز می‌باشد.

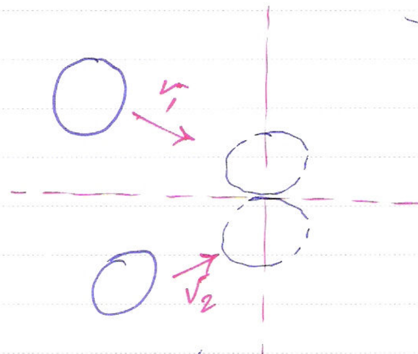


انواع برخورد مرکزی:

- برخورد مرکزی مستقیم: هرگاه امتداد سرعت های دو جسم در امتداد خط برخورد باشند، برخورد را مرکزی مستقیم گویند.



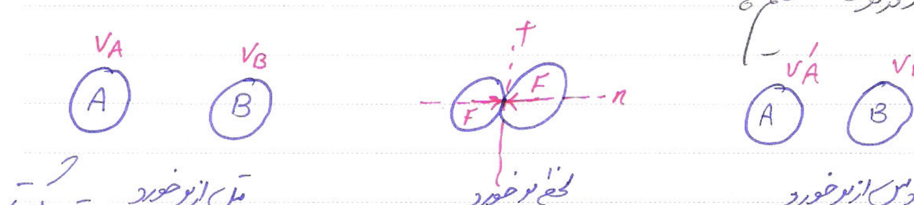
۵- برخورد مایل: هرگاه امتداد سرعت های دو جسم در امتداد خط برخورد نباشند، برخورد را مایل گوییم.



ضریب بازگشت (استرداد): خاصیتی است از اثر ترکیبی جنس دو جسم و شکل دو جسم.

$$e = \frac{\text{ضربه ناشی از بازیابی تغییر شکل}}{\text{ضربه ناشی از تغییر شکل}} = \frac{\int P\,dt}{\int f\,dt} \qquad 0 \leq e \leq 1$$

برخورد مرکزی مستقیم:

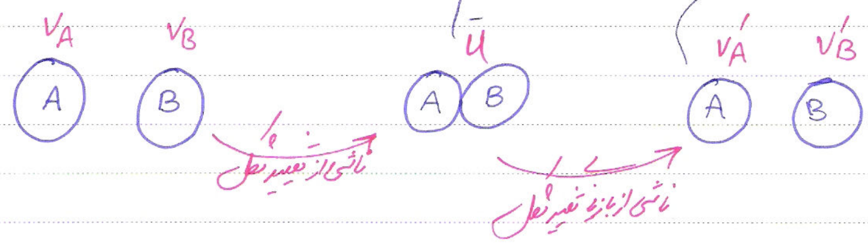


اگر سرعت ذره A از ذره B بیشتر باشد، ذره A سرانجام به ذره B برخورد می کند. در اثر برخورد، دو ذره تغییر شکل خواهند داد و در پایان دوره تغییر شکل، سرعت یکسان u را خواهند داشت. سپس دوره بازگشت رخ خواهد داد. که در پایان آن بسته به مقدار نیروهای برخورد و مواد سازنده ذره های A و B، هر ذره یا شکل اولیه خود را بازمی یابد یا به حالت تغییر شکل یافته باقی می ماند. در پایان دوره بازگشت دو ذره دارای سرعت ها V'_A و V'_B خواهند بود.

از آنجایی که در سیستم (شامل دو ذره) برآیند نیروهای وارده صفر می باشد.

برای کل سیستم : $\underbrace{\int F dt}_{0} = \Delta G \rightarrow \underbrace{\vec{G}_1}_{\text{قبل از برخورد}} = \underbrace{\vec{G}_2}_{\text{پس از برخورد}} \rightarrow m_A V_A + m_B V_B = m_A V'_A + m_B V'_B$

برای بدست آوردن ضریب بازگشت (e) داریم :



ذره A : $\int F dt = m_A u - m_A V_A$

$\int P dt = m_A V'_A - m_A u$ $\rightarrow e = \dfrac{\int P dt}{\int F dt} = \dfrac{V'_A - u}{u - V_A} = \boxed{\dfrac{u - V'_A}{V_A - u}}$ ①

Subject :
Year. Month. Date.

②

ذره B : $\int f\,dt = m_B u - m_B v_B$

$\int P\,dt = m_B v'_B - m_B u$ $\longrightarrow e = \dfrac{\int P\,dt}{\int f\,dt} = \dfrac{v'_B - u}{u - v_B}$

ترکیب روابط ① و ② و حذف u از بین آنها

$$\xrightarrow{} \quad e = \frac{v'_B - v'_A}{v_A - v_B}$$

ضریب برگشت ثابت برابر اختلاف سرعت‌ها بعد از برخورد به اختلاف سرعت‌ها قبل از برخورد

۱- برخورد کاملاً پلاستیک (مومسان) (e=0) :

در این حالت دو ذره در کنار هم می‌مانند و دو ذره بازگشت ندارد، سرعت ذره پس از برخورد یکی است.

$e = 0 \longrightarrow v'_B = v'_A$

درصد اتلاف انرژی جنبشی : $n = \dfrac{E_1 - E_2}{E_1} \times 100$

انرژی جنبشی سیستم : $E_1 = \dfrac{1}{2} m_A v_A^2 + \dfrac{1}{2} m_B v_B^2$ ،

انرژی جنبشی سیستم پس از برخورد : $E_2 = \dfrac{1}{2}(m_A + m_B) v'^2$

$v' = v'_A = v'_B$

۲- برخورد کاملاً الاستیک (e=1) :

$e = \dfrac{v'_B - v'_A}{v_A - v_B} = 1$ ، $e = 1 \Rightarrow v_A + v'_A = v_B + v'_B$

SAMEN

حل سیستم : $G_{T_1} = G_{T_2}$

$$m_A v_A + m_B v_B = m_A v'_A + m_B v'_B \longrightarrow m_A(v_A - v'_A) = m_B(v'_B - v_B)$$

$$\xrightarrow{v_A + v'_A = v_B + v'_B} m_A(v_A - v'_A)(v_A + v'_A) = m_B(v'_B - v_B)(v_B + v'_B)$$

$$\xrightarrow{\times \frac{1}{2}} \frac{1}{2} m_A(v_A - v'_A)(v_A + v'_A) = \frac{1}{2} m_B(v'_B - v_B)(v_B + v'_B)$$

$$\longrightarrow \frac{1}{2} m_A(v_A^2 - v'^2_A) = \frac{1}{2} m_B(v'^2_B - v_B^2)$$

$$\longrightarrow \underbrace{\frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2}_{E_1} = \underbrace{\frac{1}{2} m_B v'^2_B + \frac{1}{2} m_A v'^2_A}_{E_2}$$

$$\Rightarrow E_1 = E_2 \longrightarrow n = \frac{E_1 - E_2}{E_2} \times 100 = 0$$

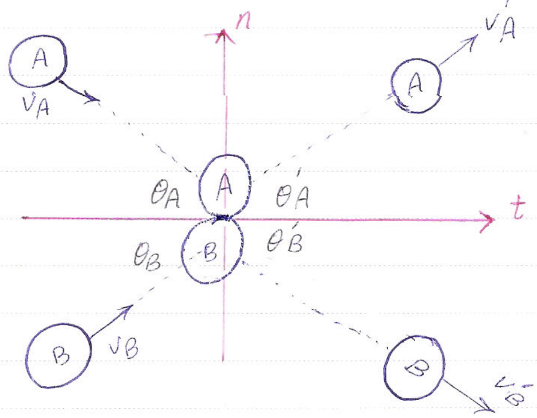
⇐ در این حالت ثابت می‌شود انرژی جنبشی کل قبل از برخورد و بعد از برخورد با هم برابر است.

۳- حالت کلی $0 < e < 1$

$$0 < e = \frac{v'_B - v'_A}{v_A - v_B} < 1 \longrightarrow v'_B - v'_A < v_A - v_B$$

$$\Rightarrow E_1 > E_2$$

برخورد مرکزی مایل :



در راستای $(t-t)$ یعنی صفحه تماس:

ذره A : $(G_A)_t = (G'_A)_t \Rightarrow m_A V_A \cos\theta_A = m_A V'_A \cos\theta'_A$

$$\Rightarrow V_A \cos\theta_A = V'_A \cos\theta'_A \qquad (1)$$

ذره B : $(G_B)_t = (G'_B)_t \Rightarrow m_B V_B \cos\theta_B = m_B V'_B \cos\theta'_B$

$$\Rightarrow V_B \cos\theta_B = V'_B \cos\theta'_B \qquad (2)$$

در راستای سیستم $(n-n)$: (برای کل سیستم)

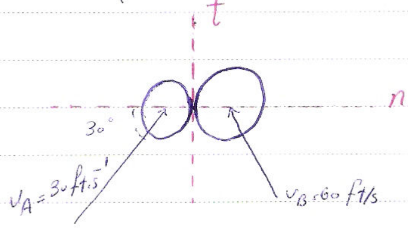
کل سیستم قبل از برخورد : $(G)_n = (G')_n$

$$-m_A V_A \sin\theta_A + m_B V_B \sin\theta_B = m_A V'_A \sin\theta'_A + m_B V'_B \sin\theta'_B \qquad (3)$$

ترکیب روابط از 2 و 3 $\longrightarrow$

$$e = \frac{(V'_B)_n - (V'_A)_n}{(V_A)_n - (V_B)_n}$$

مثال : بزرگی و جهت سرعت دو گلوله یکسان بدون اصطکاک قبل از برخورد به یکدیگر در شکل زیر نشان داده شده است. با فرض $e=0.9$ ، بزرگی و جهت سرعت دو گلوله را پس از برخورد تعیین کنید.

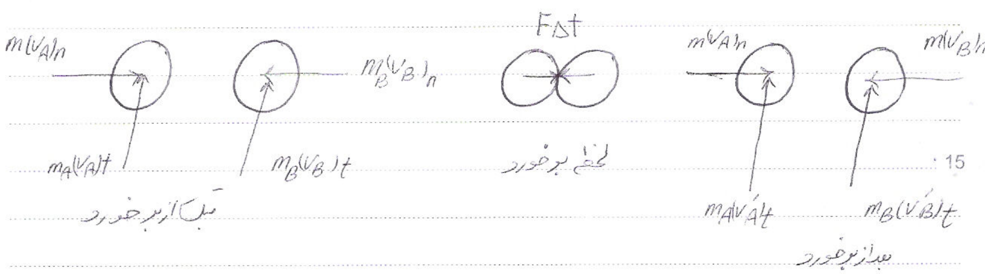


$$(V_A)_n = V_A \cos 30° = 26 \frac{ft}{sec}$$

$$(V_A)_t = V_A \sin 30° = 15 \frac{ft}{sec}$$

$$(V_B)_n = -V_B \cos 60° = -20\ ft.sec^{-1}$$

$$(V_B)_t = +V_B \sin 60 = 34.6\ ft.sec^{-1}$$



حرکت در راستای مماس مشترک (t) :

ذره A : $m_A(V_A)_t = m_A(V'_A)_t \longrightarrow (V_A)_t = (V'_A)_t = 15\ ft.sec^{-1}$

ذره B : $m_B(V_B)_t = m_B(V'_B)_t \longrightarrow (V_B)_t = (V'_B)_t = 34.6\ ft.sec^{-1}$

در این راستا هیچ نیرویی وارد نمی‌شود

لذا اصل ضربه و اندازه حرکت را بصورت جداگانه می‌نویسیم.

حرکت در راستای خط برخورد برای کل سیستم ($\sum F=0$) :

(برای سیستم شامل دو گلوله برآیند نیرو، صفر)

بعد از برخورد $G' = G$ قبل از برخورد

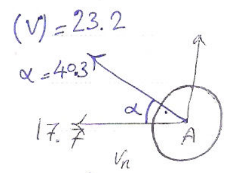
$$\cancel{m_A}(\underset{26}{\cancel{V_A}})_n + \cancel{m_B}(\underset{-20}{\cancel{V_B}})_n = \cancel{m_A}(V'_A)_n + \cancel{m_B}(V'_B)_n \Rightarrow (V'_A)_n + (V'_B)_n = 6 \quad (1)$$

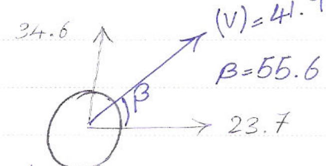
$m_A = m_B$

$$e = \frac{(V'_B)_n - (V'_A)_n}{(V_A)_n - (V_B)_n} \longrightarrow 0.9\left[26-(-20)\right] = (V'_B)_n - (V'_A)_n$$

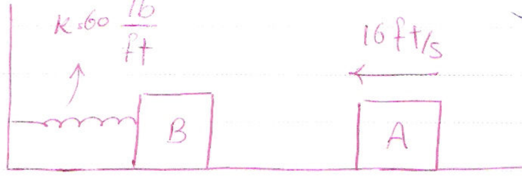
$$\Rightarrow (V'_B)_n - (V'_A)_n = 41.4 \quad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow (V'_A)_n = -17.7 \quad , \quad (V'_B)_n = 23.7$$

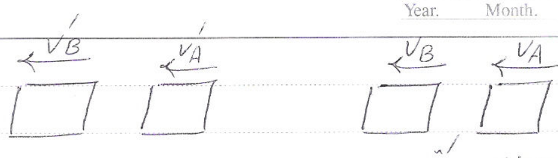




مثال: قطعه B به وزن 3 lb به فنری با ثابت $K = 60 \frac{lb}{ft}$ متصل است، و روی سطح افقی بدون اصطکاک ساکن است. قطعه A با همان مشخصات قطعه B با سرعت $16 \frac{ft}{sec}$ به قطعه B برخورد می کند. با فرض اینکه: الف) $e=1$ ب) $e=0$ ، مطلوبست ماکزیمم انحراف فنر.



Subject :
Year. Month. Date.



برای حل مسئله

استفاده از پایستاری اندازه حرکت

$$m_A v_A + m_B v_B = m_A v_A' + m_B v_B' \xrightarrow{m_A = m_B} v_A + v_B = v_A' + v_B'$$

$$\longrightarrow 16 + 0 = v_A' + v_B' \quad ①$$

الف) $e = 1$: $\quad e = \dfrac{v_B' - v_A'}{v_A - v_B} = 1 \longrightarrow v_B' - v_A' = v_A - v_B$

$$1 \text{ و } 2 \Rightarrow v_B' = 16 \frac{ft}{sec} \quad , \; v_A' = 0$$

$$\underbrace{\cancel{U_g}_{1-2}}_{\text{صفر}} + U_{e_{1-2}} + \underbrace{\cancel{U_f}_{1-2}}_{0} = \Delta T$$

$$\frac{1}{2} k x_1^2 - \frac{1}{2} k x_2^2 = \underbrace{T_2}_{\frac{1}{2} m v_2^2} - \underbrace{T_1}_{\frac{1}{2} m v_1^2} \longrightarrow \begin{cases} v_B = 0 \\ v_A = 16 \frac{ft}{sec} = v_B' \end{cases}$$

$x_1 = L_1 - L_0 = 0$

طول آزاد

$$-\frac{1}{2} \times 60 \times x_{max}^2 = -\frac{1}{2} \times \left(\frac{3\,lb}{32.2 \frac{ft}{s}} \right) \times 16^2$$

$$\Rightarrow x_{max} = 0.6305 \; ft$$

ب) $e=0 \longrightarrow V'_B - V'_A = 0 \longrightarrow V'_A = V'_B$

$V'_A + V'_B = 16 \Rightarrow V'_A = V'_B = 8 \ ft/s$

$U_{g_{1-2}} + U_{e_{1-2}} + U_{1-2} = \Delta T_{1-2} = \cancel{T_2} - T_1$

$0 - \frac{1}{2} k x_{max}^2 = -\frac{1}{2} \underbrace{(m_A + m_B)}_{\frac{3+2}{32}} V_B'^2 \longrightarrow x_{max} = 0.4458 \ ft$

چون سرعت‌ها با هم برابرند، جرم‌ها با هم جمع می‌شوند

ضریب تبدیل به پوند ببریم

* در برخورد پلاستیک دو ذره با هم یک سرعت دارند یعنی ذره‌ای با جرم (m_A+m_B) و سرعت $V_A = V_B$.

والسلام

V_0